

ДАНИЛО РАШКОВИЋ

ТЕОРИЈА ЕЛАСТИЧНОСТИ

ДАНИЛО РАШКОВИЋ

ТЕОРИЈА ЕЛАСТИЧНОСТИ

Научна Књига

БЕОГРАД, 1985

Рецензенти:

Др *Ташомир Анђелић*, академик
Др *Влајко Брчић*, редовни професор

За издавача

Драјослав Јоковић

Уредник

Никола Дончев

Технички уредник

Гордана Крсјић

Коректор

Др Катица Стевановић-Хедрих

Решење корица

Бранко Вељовић

Тораж 2 000 примерака

Штампа: Београдски издавачко-графички завод, Београд, Бул. вој. Мишића 17

СА Д Р Ж А Ј

У В О Д

0.1.	Крута и чврста тела. Непрекидна средина	3
0.2.	Спољашња и унутрашње силе	3
0.3.	Особине чврстих тела	4
0.4.	Теорија еластичности, теорија пластичности, реологија	5
0.5.	Кратак преглед историјског развоја теорије еластичности	6

1. ТЕОРИЈА НАПОНА

1.1.	Тотални и компонентни напони	13
1.2.	Cauchy-јеве једначине за напоне	15
1.3.	Гранични (контурни) услови	17
1.4.	Коњуговани тангенцијални напони	17
1.5.	Тензор напона	18
1.6.	Основно правило анализе напона	20
1.7.	Промена напона при трансформацији координатног система	21
1.8.	Вега између напона и запреминских сила. Navier-ове једначине равнотеже ..	22
1.9.	Главни напони	25
1.10.	Напонске површи	30
1.11.	Екстремне вредности тангенцијалних напона	33
1.12.	Mohr-ови кругови напона	35
1.13.	Октоедарски напони	37
1.14.	Сферни тензор и девијатор напона	38
1.15.	Једначине равнотеже у ортогоналном криволинијском систему	40
	1.15.1. Поларно-цилиндрички координатни систем	41
	1.15.2. Сферни координатни систем	42
1.16.	Тензор напона у генералисаним координатама	44
	1.16.1. Декартов правоугли триједар	44
	1.16.2. Генералисани координатни систем	45
	1.16.3. Ортогонални генералисани систем	47
1.17.	Напонске функције	49
	1.17.1. Maxwell-ове функције	49
	1.17.2. Функције напона Mogerга	50
	1.17.3. Тензор функције напона	50
	Примери	51

2. ТЕОРИЈА ДЕФОРМАЦИЈА

2.1.	Вектор померања	54
2.2.	Дилатације и клизања	58
2.3.	Cauchy-јев тензор деформација	61
2.4.	Запреминска дилатација	61
2.5.	Хомогена деформација	62
	1. Компоненте деформације су једнаке нули	62
	2. Компонентне ротације су једнаке нули	63
2.6.	Промена компонентних деформација при трансформацији координатног система	63

2.7.	Главне дилатације	64
2.8.	Деформацијске површи	64
2.9.	Moir-ови кругови за деформације	65
2.10.	Вектор деформација за октоедарску раван	65
2.11.	Сферни тензор и девијатор деформација	66
2.12.	Одређивање компонентних померања	66
2.13.	Saint-Venant-ови услови компатибилности деформација	71
2.14.	Компонентне деформације у ортогоналном криволинијском систему	75
2.14.1.	Поларно-цилиндрички координатни систем	77
2.14.2.	Сферни координатни систем	78
2.15.	Тензор деформација у генералисаним координатама	78
2.15.1.	Декартов правоугли триједар	78
2.15.2.	Генералисани координатни систем	81
2.15.3.	Ортогонални криволинијски систем	81
2.15.3.1.	Поларно-цилиндрички координатни систем	82
2.15.3.2.	Сферни координатни систем	83
2.16.	Коначне деформације	85
2.17.	Тензор брзина деформација	87
	Примери	88

3. ОДНОСИ ИЗМЕЂУ НАПОНА И ДЕФОРМАЦИЈА

3.1.	Lamé-ове константе	91
3.2.	Уопштени Hooke-ов закон	95
3.3.	Техничке константе. Други облик уопштеног Hooke-овог закона	96
3.4.	Модул компресије	98
3.5.	Lamé-ове једначине	98
3.6.	Други облик Cauchy-jevih граничних услова	100
3.7.	Beltrami-Michell-ове једначине	100
3.8.	Деформациони рад	102
3.9.	Генералисани координатни систем	107
3.9.1.	Поларно-цилиндрички координатни систем	109
3.9.2.	Сферни координатни систем	110
	Примери	111

4. МЕТОДЕ ЗА РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА ТЕОРИЈЕ ЕЛАСТИЧНОСТИ

4.1.	Класификација изведених једначина еластичности	113
4.2.	Методе за решавање проблема теорије еластичности	114
4.3.	Торзија вратила кружног попречног пресека	115
4.4.	Сферни суд изложен дејству нормалног притиска	117
4.5.	Saint-Venant-ов проблем	119
4.5.1.	Аксијално напрезање штапа	120
4.5.2.	Затезање штапа сопственом тежином	121
4.5.3.	Чисто савијање греде	122
4.6.	Принцип виртуалних померања	125
4.7.	Принцип минимума потенцијалне енергије при варијацији напона. Castiglione-ова теорема	127
4.8.	Принцип узајамности деформационих радова (Betti-Maxwell-ова теорема)	128
4.8.	Једнозначност решења проблема теорије еластичности	130
4.10.	Saint-Venant-ов принцип	132

5. ТОРЗИЈА ШТАПОВА

5.1.	Торзија призматичних штапова. Основне претпоставке. Функција увијања	135
5.2.	Торзија штапа елиптичног попречног пресека	145
5.3.	Примена функције комплексне променљиве	147
5.3.1.	Неки Saint-Venant-ови резултати	149
5.3.2.	Weber-ов проблем	152
5.3.3.	Кардиоидни пресек	153
5.4.	Торзија вратила правоугаоног попречног пресека	154
5.5.	Торзија профилисаних носача	158
5.6.	Торзија вратила променљивог кружног пресека	158
5.7.	Примена приближних метода	160
5.7.1.	Ritz-ова метода	161
5.7.2.	Метода коначних разлика	164

5.8.	Експериментална решења. Аналогije	166
5.8.1.	Аналогија са мембраном	166
5.8.2.	Хидромеханичке аналогije	169
5.9.	Торзија штапа са пресеком који је вишеструко повезана област	170
5.10.	Breudt-ова формула	171
5.11.	Торзија танке цеви	171
	Примери	174

6. САВИЈАЊЕ ШТАПОВА

6.1.	Савијање према хипотези Журавског	175
6.2.	Општији случај савијања конзоле	178
6.3.	Савијање конзоле кружно попречног пресека	181
6.4.	Савијање конзоле кружно-прстенастог попречног пресека	183
6.5.	Савијање конзоле елиптичног попречног пресека	185
6.6.	Савијање конзоле правоугаоног попречног пресека	186
6.7.	Косо савијање и увијање	189
6.8.	Центар савијања	190

7. РАВНИ ПРОБЛЕМИ ТЕОРИЈЕ ЕЛАСТИЧНОСТИ

7.1.	Равна деформација	192
7.2.	Равно напрезање	195
7.3.	Уопштене једначине равне теорије еластичности	197
7.4.	Примена поларних координата	199
7.*.	Решење равнoг проблема помоћу полинома	200
7.5.1.	Напрезање танких плоча	201
7.5.2.	Напрезање танких греда	204
7.6.	Примена тригонометријских редова	212
7.7.	Напрезање цеви нормалним притиском	217
7.8.	Чисто савијање кривог штапа	219
7.9.	Утицај центрифугалне силе на диск који се обрће	221
7.10.	Чисто савијање трапезне плочице правоугаоног пресека	224
7.11.	Напрезање клина	226
7.12.	Савијање кружне конзоле силом	228
7.13.	Утицај кружног отвора на аксијално напрезање танке правоугаоне плочице (Kirsch-ов проблем)	231
7.14.	Опште решење равнoг проблема у поларним координатама	233
7.15.	Примена функције комплексне променљиве	237
7.16.	Напонске трајекторије	240

8. КОНТАКТНА НАПРЕЗАЊА

8.1.	Еластична полураван (Flamant-ов проблем)	242
8.2.	Диск оптерећен аксијалним силама	248
8.3.	Еластична бескрајна раван	249
8.4.	Локално напрезање. Потврда Saint-Venant-овог принципа	251
8.5.	Осно симетрични проблеми обртног тела	251
8.6.	Еластично бескрајно тело. Kelvin-ов проблем	253
8.7.	Boussinesq-ов проблем	255
8.8.	Специјална оптерећења по контури полубескрајног тела	257
8.8.1.	Равномерно оптерећење по површи круга	257
8.8.2.	Оптерећење круга по полулопти	259
8.8.3.	Оптерећење правоугаоника по полуцилиндру	260
8.8.4.	Цилиндрични пробојац	262
8.9.	Притисак круте кугле на еластични полупростор	263
8.10.	Узајамни притисак двају еластичних тела (Hertz-ов проблем)	263
8.10.1.	Узајамни притисак двеју еластичних кугли	264
8.10.2.	Узајамни притисак двају еластичних ваљака	266
8.10.3.	Општи случај	267
8.11.	Опште решење осно симетричног проблема обртног тела	269

9. САВИЈАЊЕ И ИСПУПЧЕЊЕ ПЛОЧА

9.1.	Основни елементи и хипотезе	274
9.2.	Диференцијална једначина елиптичне површи плоче	277
9.3.	Гранични (контурни) услови код правоугаоне плоче	280
9.4.	Отпори (реакције) ослонаца	282
9.5.	Чисто савијање и чисто увијање плоче	283
9.6.	Деформациони рад (потенцијална енергија) савијање плоче	284
9.7.	Савијање уклештене елиптичне плоче	285
9.8.	Савијање ослоњене правоугаоне плоче (Navier-ово решење)	287
9.9.	Савијање правоугаоне плоче са две ослоњене стране (M. Levy-јево решење)	291
9.10.	Савијање потпуно уклештене правоугаоне плоче	294
9.11.	Савијање правоугаоне плоче попречним оптерећењем и силама у њеној средњој равни	297
9.12.	Испупчење слободно ослоњене правоугаоне плоче	301
9.13.	Примена метода деформационог рада	302
9.13.1.	Испупчење слободно ослоњене правоугаоне плоче притиснуте у средњој равни у два управна правца	303
9.13.2.	Испупчење слободно ослоњене правоугаоне плоче услед смицајних сила у средњој равни	304
9.14.	Испупчење правоугаоне плоче слободно ослоњене на два стране и уклештене на друге две стране	306
9.15.	Испупчење слободно ослоњене правоугаоне плоче услед концентрисаних сила	307
9.16.	Савијање кружне плоче	308
9.16.1.	Савијање кружне плоче једноликим оптерећењем	310
9.16.2.	Савијање кружне плоче концентрисаном силом у њеном средишту	311
9.16.3.	Савијање кружне плоче делимичним контуалним оптерећењем	312
9.17.	Савијање кружно-прстенасте плоче	314
9.18.	Савијање кружне плоче променљиве дебљине	315
9.19.	Испупчење кружне плоче	317
9.20.	Magcs-ова мембранска аналогија	319

10. ОСНОВИ ТЕОРИЈЕ ЉУСКИ

10.1.	Основне геометријске релације	321
10.2.	Једначине равнотеже	328
10.3.	Компонентне деформација	331
10.4.	Савијање осносиметрично оптерећене цилиндричне љуске	333

11. ТЕРМИЧКА НАПРЕЗАЊА

11.1.	Основне једначине термоеластичности	336
11.2.	Кружни диск са радијалним распоредом температуре	337
11.3.	Кружни цилиндар са осно-симетричним распоредом температуре	338
11.4.	Сфера са радијалним распоредом температуре	341
11.5.	Кружна плоча са радијалним распоредом	342
11.6.	Уклештена кружна плоча са линеарним распоредом температуре по њеној дебљини	342
11.7.	Кружна плоча са осно-симетричним распоредом температуре	343
11.7.1.	Пуна кружна уклештена плоча	344
11.7.2.	Кружно-прстенаста плоча слободно ослоњена по спољашњој контури	345
11.8.	Термички напони код слободно ослоњене правоугаоне плоче	345
10.9.	Стационаран распоред температуре код правоугаоне плоче	346

Д О Д А Т А К

1. ОСНОВИ ТЕНЗОРСКОГ РАЧУНА

D. 1.1.	Систем величина	348
D. 1.2.	Einstein-ова конвенција о сабирању	349
D. 1.3.	Алгебарске операције са системима	349
D. 1.4.	Kronecker-ови делта симбол и Levi-civita симболи	350
D. 1.5.	Афини простор	351
D. 1.6.	Трансформације	353

D. 1.6.1. Ортогонална трансформација	353
D. 1.6.2. Афина трансформација	354
D. 1.6.3. Општа функција (генерализана) трансформација	355
D. 1.7. Инваријанте	355
D. 1.8. Контраваријантни и коваријантни вектори	356
D. 1.9. Тензори	357
D. 1.10. Критеријум за одређивање тензорске природе система	359
D. 1.11. Релативни тензори	359
D. 1.12. Основни метрички тензор	360
D. 1.13. Здружавање тензора	361
D. 1.14. Алтернатори	361
D. 1.15. Физичке координате тензора	362
D. 1.16. Christoffel-ови симболи	362
D. 1.17. Коваријантно диференцирање тензора	363
D. 1.18. Биачи-јев апсолутни извод	364
D. 1.19. Диференцијални оператори	364
1.19.1. Градијент	364
1.19.2. Дивергенција	365
1.19.3. Ротор	365
1.19.4. Лапласијан	365
D. 1.20. Интегрални обрасци	366
D. 1.21. Ортогонални криволинијски систем	366
Таблица за поларно-цилиндричке и сферне координате	
 D. 2. ОСНОВИ ТЕОРИЈЕ ФУНКЦИЈЕ КОМПЛЕКСНЕ ПРОМЕНЉИВЕ	
D. 2.1. Основни појмови о комплексним бројевима	368
D. 2.2. Скуп тачака комплексне равни	370
D. 2.3. Функција комплексне променљиве	372
D. 2.4. Извод функције комплексне променљиве	374
D. 2.5. Елементарне комплексне функције	376
D. 2.6. Хармонијске функције	377
D. 2.7. Сингуларитети	380
D. 2.8. Конформно пресликавање	380
2.8.1. Примери конформног пресликавања	383
D. 2.9. Интеграл функције комплексне променљиве	389
D. 2.10. Разни облици Гурен-ове формуле. Гурен-ове идентичности	392
D. 2.11. Редови	394
D. 2.12. Остатак функције (ресициум)	396
D. 2.13. Schwarz-Christoffel-ова трансформација	398
D. 2.14. Проблеми са контурним условима	399
Литература	340
Регистар имена	341
Регистар школа и универзитета	343
Регистар појмова	344

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade

elibrary.matf.bg.ac.rs

ПРЕДГОВОР

Motto: ... l'analyse n'est qu'un instrument logique tirant des conséquences rigoureuses des prémices posées, mais souvent contestables.

Barré de Saint-Venant
(„Memoires des Savants étrangers“,
Comptes Rendus, Paris, 1847).

Овај уџбеник садржи шири курс мојих предавања из предмета *Еластико-динамика* (први део Теорија еластичности) која држим студентима редовних и постдипломских студија на машинским факултетима у Нишу и Мостару.

Градиво је подељено у једанаест глава у које је обухваћена и теоријска и практична област ове дисциплине. Прве четири главе су детаљније разрађене, ради поступног улажења у ову тешку математичко-техничку дисциплину, али у складу са наставним плановима за поменуте студије. Торзија, савијање и Равни проблеми такође су шире разматрани као основни теоријско-практични примери примене чисте теорије еластичности. Остали технички проблеми потребни машинском инжењеру изложени су у следећим главама у оном обиму да би се могла наставити даљња изградња према потреби у разним областима машинства. У Уводу је дат шири историјски развој Теорије еластичности и Отпорности материјала.

Израгања су основана на мојим курсевима Механике, Отпорности материјала и Теорије осцилација, тако да овај уџбеник са осталим ранијим чини заокружен курс Техничке механике на машинским факултетима.

Градиво је изложено векторски, матричним и тензорским рачуном уз примену функције комплексне променљиве. С обзиром на основне, курс Више математике за студенте машинских факултета, а и у духу ранијих мојих уџбеника дао сам два додатка: Основи тензорског рачуна и Основи теорије функције комплексне променљиве у сажетом облику довољном за рад са овим математичким апаратом и научном проблематиком из теорије еластичности и Механике непрекидних средина, што ће бити корисно машинским инжењерима.

Уџбеник је писан за студенте машинских факултета и машинске инжењере, али ће корисно послужити и студентима и инжењерима и других техничких струка који се служе теоријом еластичности.

Проф. др Т. Анђелић, академик, и проф. др В. Брчић, прочитали су књигу у рукопису и учинили ми врло корисне примедбе на чему сам им особито захвалан.

Д. Р.

ИРО „НАУЧНА КЊИГА“ — Београд већ 38 година сарађује са професором др инж. ДАНИЛОМ РАШКОВИЋЕМ, dipl. math. и редовним професором Машинског факултета у Београду на издањима књига — универзитетских уџбеника, збирки задатака и приручника чији је аутор. Поред рада на Машинском факултету у Београду, проф. др Данило Рашковић више година је држао предавања из групе предмета Механика на Машинским факултетима у Нишу, Крагујевцу и Мостару, као и на Природно-математичким факултетима у Београду и Новом Саду и за потребе студената на редовним и постдипломским студијама написао је следеће универзитетске уџбенике и пратеће приручнике: МЕХАНИКА I — СТАТИКА (прво издање 1947 године); МЕХАНИКА II — КИНЕМАТИКА (1947); МЕХАНИКА III — ДИНАМИКА (1947); ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ ОТПОРНОСТИ МАТЕРИЈАЛА (1947); ОТПОРНОСТ МАТЕРИЈАЛА (1955); ТЕОРИЈА ОСЦИЛАЦИЈА (1957); ТАБЛИЦЕ — ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ ОТПОРНОСТИ МАТЕРИЈАЛА (1932); ТАБЛИЦЕ ИЗ ОТПОРНОСТИ МАТЕРИЈАЛА (1959); ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ МЕХАНИКЕ I, II, III (1965); ОСНОВНИ ТЕОРИЈЕ МЕХАНИЗАМА (1962), ОСНОВИ МАТРИЧНОГ РАЧУНАЊА (1971); ТЕОРИЈА ЕЛАСТИЧНОСТИ (1974); АНАЛИТИЧКА МЕХАНИКА (1974); ОСНОВИ ТЕНЗОРСКОГ РАЧУНА (1974). Проф. др Д. Рашковић је аутор и више уџбеника за више техничке машинске школе и средње техничке школе из области механике.

Поменута сарадња са професором Рашковићем датира из 1947. године када су у издању ИРО „Научна књига“ изишла из штампе прва издања његових универзитетских уџбеника: Механика II — Кинематика; Механика III — Динамика и Збирка задатака из отпорности материјала у појединачним тиражима од по 3.000 или 4.000 примерака. Универзитетски уџбеник Механика I — Статика, чије је друго издање штампано у ИРО „Научна књига“ 1949. године доживео је једанаесто издање 1978. године у истој издавачкој кући.

У прилогу текста је дат прегледни списак издања универзитетских уџбеника и књига проф. др Данила Рашковића у издању ИРО „Научна књига“.

Издавачка делатност ИРО „Научна књига“ и проф. др Данила РАШКОВИЋА, одиграла је значајну улогу у ширењу знања техничке механике међу студентима и инжењерима машинства и уопште технике како у Србији, тако и шире у југословенским размерама, а у периоду послератне обнове и изградње југословенске привреде. Посебно је значајно истаћи тираж који прелази 120.000 примерака само у издању ИРО „Научна књига“, као податак који говори о коришћењу тих универзитетских уџбеника не само од стране студената којима је проф. Рашковић држао наставу, већ и од других стручњака у области техничких наука.

Последњи универзитетски уџбеник ТЕОРИЈА ЕЛАСТИЧНОСТИ, после изненадне смрти проф. др Данила РАШКОВИЋА остао је у слогу недовршен. На позив „Научне књиге“ и сагласност породице аутора, као ученик драгог професора, прихватила сам се коректуре слога и израде регистра имена и појмова без којих овако добар универзитетски уџбеник не би био комплетно завршен, према замисли аутора. Приликом састављања регистра појмова пратила сам у рукопису појмове, по жељи аутора, посебно назначене у тексту.

И поред пажљивог читања текста више пута, могуће су штампарске грешке. Осећам велику одговорност за могуће пропусте, те се унапред захваљујем свакоме ко укаже на евентуалне пропусте у слогу, који би послужили за исправке у наредном издању.

Катица Хегрић

**ИЗДАЊА УНИВЕРЗИТЕТСКИХ КЊИГА ПРОФ. ДР. ДАНИЛА РАШКОБИЋА
КОД ИРО „НАУЧНА КЊИГА“, БЕОГРАД:**

1. МЕХАНИКА I — Статика

II издање, 1949. год.
III „ 1950. год.
IV „ 1960. год., тираж 3.000
V „ 1962. год., тираж 3.000
VI „ 1964. год., тираж 2.000
VII „ 1965. год., тираж 3.000
VIII „ 1968. год., тираж 4.000
IX „ 1971. год., тираж 3.000
X „ 1973. год., тираж 3.000
XI „ 1978. год., тираж 3.000

2. МЕХАНИКА II — Кинематика

I издање, 1947. год., тираж 4.000
II издање, 1950. год., тираж 4.000
III „ 1966. год., тираж 3.000

3. МЕХАНИКА III — Динамика

I издање, 1947. год.
II „ 1956. год.
III „ 1962. год.
IV „ 1973. год., тираж 2.000

4. ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ ОТПОРНОСТИ МАТЕРИЈАЛА

I издање, 1947. год., тираж 0.000
II „ 1955. год.
III „ 1965. год., тираж 2.000
IV „ 1947. год., тираж 2.000
V „ 1971. год., тираж 2.000
VI „ 1975. год., тираж 3.000
VII „ 1981. год., тираж 2.000
VIII „ 1985. год., тираж 1.500

5. ОТПОРНОСТ МАТЕРИЈАЛА

I издање, 1955. год.
II „ 1961. год., тираж 1.000
III „ 1962. год., тираж 3.000
IV „ 1965. год., тираж 3.000
V „ 1967. год., тираж 3.000
VI „ 1971. год., тираж 3.000
VII „ 1973. год., тираж 3.000
VIII „ 1977. год., тираж 2.000
IX „ 1980. год., тираж 2.000
X „ 1984. год., тираж 2.000

6. ТЕОРИЈА ОСЦИЛАЦИЈА

I издање, 1957. год.
II „ 1965. год., тираж 3.000

7. ТАБЛИЦЕ — Збирка задатака из отпорности материјала

I издање, 1952. год.

8. ТАБЛИЦЕ ИЗ ОТПОРНОСТИ МАТЕРИЈАЛА (издато XIII издања)

III издање, 1959. год.
IV „ 1962. год., тираж 3.000

9. ОСНОВИ МАТРИЧНОГ РАЧУНАЊА

I издање, 1971. год., тираж 1.500

10. ТЕОРИЈА ЕЛАСТИЧНОСТИ

I издање, 1985. год., тираж 2.000

УВОД

0.1. Крута и чврста тела. Непрекидна средина. — У механици се проучава *крећање* и *мировање крутих тела*. Ова тела имају особину да растојање двеју произвољних честица (тачака) тела остаје под утицајем дејства сила *непромењено*. Све тачке оваквог тела, дакле, задржавају за време кретања своја узајамна растојања, па тело *не мења ни облик нићи зајремину*. Апсолутно узев оваква тела у природи стварно не постоје, али их механика уведи да би се лакше схватили основни закони кретања и равнотеже. Увођење појма *материјалне тачке* олакшава решавање проблема кретања тела, пошто се може сматрати да је та тачка заступник кретања крутог тела.

Реална тела су чврста, течна и гасовита. Она се под дејством сила могу *деформисати*, те *променили* и *облик и зајремину*, па се тада и растојања појединих честица мењају. Стога је потребно посматрати кретање појединих делова тела, једних у односу на друге (*релативна крећања*). Иако је тело састављено из молекула и атома, ипак његова запремина није у потпуности испуњена материјом. Проучавање кретања атома па и молекула је много сложено, стога се тела посматрају *макроскопски*, да су састављена из врло малих делова — *честица*, чије су димензије у односу на међумолекуларне просторе довољно велике. Сматра се да се ове честице крећу као целине (тела) без обзира што су састављене од одвојених молекула и атома, па је њихов састав *непрекидан*. Због тога се говори о *непрекидној средини* — *континууму*. Дакле, под честицом тела подразумева се *врло мали гео тела*, али не нека „бескрајно мала величина“ у математичком смислу тог израза (променљивост, опадање и тежење ка нули).

Део теоријске физике који се бави проучавањем кретања ових средина назива се *механика непрекидних (деформабилних) средина*. Она се дели на *теорију еластичности* и *механику флуида*. Прва проучава чврсте непрекидне средине, а друга течна и гасовита тела. Пошто течна и гасовита тела имају доста заједничких особина она се називају *флуиди*. Између њих постоје и разлике: *реална течност* је готово *несипиљива (инкомпресибилна)*, а гас је *увек сипиљив (компресибилан)*.

0.2. Спољашње и унутрашње силе. — Чврсто тело изложено дејству сила налази се у *најреинијом стању*, па се *деформише*, те *мења облик и зајремину*. Силе које дејствују на тело су двојаке: *спољашне* и *унутрашње*. Спољашње силе могу бити *зајреминске* и *површинске*. Зајреминске силе дејствују на све честице тела и сразмерне су маси елемента (dm), па је сила $dF_m = F'_m dm$; $F'_m = dF_m/dm$, или запремини, те је $dF_v = F'_v dV$. Овде су F'_m и F'_v *јединична масена*, односно *јединична зајреминска сила*, то јест силе које деј-

ствују на јединицу масе, односно запремине. Овакве су силе: тежа, силе гравитације, итд. Нека је ΔV запремина елемента око неке тачке O . Када се запреминске силе тога елемента редукују на тачку O добиће се *торзер*: главни вектор $\Delta \mathbf{F}$ и главни момент $\Delta \mathcal{M}$ тих сила. Замислимо да се ΔV смањује али тако да увек обухвата тачку O , онда се могу посматрати две граничне вредности:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta V} = \frac{d\mathbf{F}}{dV} = \mathbf{F}'_V; \quad \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathcal{M}}{\Delta V} = 0.$$

Први количник је *специфична запреминска сила* (узета по јединици запремине), димензије $[\text{F}/\text{L}^3]$, јединице $[\text{N}/\text{cm}^3]$; $[\text{kN}/\text{m}^3]$; $[\text{MN}/\text{m}^3]$. Она је вектор у редуccionој тачки. Када би било $\Delta V = 0$ тада би било $\mathbf{F}'_V = \infty$, а то не може да буде, па се види да не постоји концентрисана запреминска сила, већ увек мора дејствовати у некој, макар малој запремини. Пошто је момент производ силе $\Delta \mathbf{F}$ и растојања $\Delta \mathbf{r}$, то се узима да је друга гранична вредност једнака нули.

Површинске силе дејствују на честице на површи (смотачу) тела или бар на неким његовом делу. Такве су силе: узајамни — додирни — притисак тела, хидростатички притисак на тело потопљено у течности, аеродинамички притисак гаса, капиларне силе између молекула зидова тела и молекула граничног слоја флуида, итд. Ове силе не зависе од масе тела. Нека је ΔS елементарна површина смотача тела око тачке O и нека је \mathbf{n} орт нормале постављене на ту површину. Када се силе које дејствују на елемент ΔS редукују на тачку O добиће се торзер, па се као и у претходном случају може говорити о граничним вредностима:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} = \mathbf{F}'_K = q_n \mathbf{n}, \quad \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathcal{M}}{\Delta S} = 0.$$

Први количник се назива *специфично површинско дејствовање по јединици површи омошача тела* или *јединична површинска сила*. Њена је димензија $[\text{F}/\text{L}^2]$, а јединица $[\text{kN}/\text{cm}^2]$; $[\text{kp}/\text{m}^2]$ или $[\text{MN}/\text{m}^2]$. Ова се сила, уопште узев, не поклапа са нормалом \mathbf{n} омотача у тој тачки (O). Узима се да је орт нормале \mathbf{n} позитиван када је усмерен уопље, па је и површинска сила позитивна када је усмерена уопље од површи омотача. Када би било $\Delta S = 0$ тада би било $q_n = \infty$, а то не може бити, те ова сила не може бити концентрисана, већ мора увек дејствовати на некој макар малој површи омотача (dS). Друга гранична вредност тежи нули, пошто је то производ лимеса, а крак $\Delta \mathbf{r}$ тежи нули.

Унутрашње силе су друкчије природе. Оне су међумолекуларне силе и резултат су узајамног привлачења честица и напрегнутог стања у коме се тело налази. С обзиром на трећи Newton-ов закон (дејства и противдејства) оне не дејствују динамички. При деформацији мењају се међумолекуларна растојања, па се мењају нападне тачке унутрашњих сила, те оне врше рад који се претвара у *површинску енергију деформације (деформациони рад)*. Овај рад рачунат по јединици запремине тела зове се *специфични деформациони рад*, димензије $[\text{FL}/\text{L}^3]$, јединице $[\text{kNcm}/\text{cm}^3]$.

0.3. Особине чврстих тела. — Напрегнуто тело се деформише, па се мењају растојања честица, а тиме и унутрашње силе. Ако промене растојања честица и прираштаји унутрашњих сила не пређу извесну границу, онда ће се по престанку утицаја спољашњих сила честице вратити у свој првобитни положај. Ова особина тела се назива *еластичношћу*. Сва су чврста тела мање

или више еластична и имају своје *границе еластичности*, које зависе од хемијског састава и структуре тела. Ако, пак, спољашње силе пређу границу еластичности, чврсто се тело не враћа сасвим у првобитно стање: промене остају трајне, па су то *иластичне деформације*. Када се деформације повећавају још више може се прећи и *граница кривања* (или гњечења); тада нагло попуштају унутрашње силе и долази до раскидања тела.

Границе еластичности и кривања одређују се за разне материјале *експериментално*. С обзиром на те границе, тела могу бити: а) *еластична* са широком границом еластичности (челик, многи метали и њихове легуре), б) *крива* и в) *иластична* скоро без еластичних особина (иловача, тер, олово, асфалт, везивни материјали, итд.). Крва тела могу при малим оптерећењима да буду и еластична, али се при великим оптерећењима јављају и пластичне деформације (на пример, мермер и стакло).

Спољашње силе које напрежу тело познате су или су задате, а треба одредити унутрашње силе и деформације које се јављају код тела. Веза између унутрашњих сила и деформација је *врло сложена*, па се не може ни одредити на основу самог познавања дејства спољашњих сила. Стога је потребно увести још неке претпоставке које ће сједне стране омогућити да се проблеми одређивања веза између сила и деформација упросте, а са друге стране да експерименти са довољном тачношћу потврде изведене резултате (*механичко испитивање материјала*). Такве се претпоставке уводе о особинама чврстих тела. Према томе се тела деле на *хомогена* и *нехомогена*. Код хомогеног тела свака честица (елемент тела када се оно посматра мекрскопски) има исте особине као и цело тело. Код њега су *специфичне масе* (*густине*) једнаке у свима тачкама, па густина не зависи од координата честице $\rho \neq f(x, y, z)$ већ је константна $\rho = dM/dV = \text{const}$. Према томе је и *специфична тежина* константна, $\gamma_m = G/V$, где је G тежина тела. У противном тело је *нехомогено*. Тело које има исте физичке особине у свим правцима зове се *изотропно*; у противном је *анизотропно*. Прва су гасови, течности и аморфна тела; друга су кристали и дрво. Неке течности се показују анизотропним (такозвани *течни кристали*). Поред кристалних тела — кристала (монокристала) — постоје и *поликристална шела* (челик, мермер) која су — посматрано микроскопски — састављена од великог броја ситних кристала (има их више милиона у кубном центиметру тела). И ова се тела могу сматрати хомогеним и изотропним ако се посматрања ограниче на делиће веће од самих кристала. Хомогено тело чије су физичко-механичке особине једнаке само у одређеним правцима паралелним осама неког правоуглог координатног система је *орјентропно* (челик за котлове, ваљани челик, челична жица, итд.).

0.4. Теорија еластичности, теорија пластичности, реологија. — Теорија еластичности проучава зависности између спољашњих сила (оптерећења) унутрашњих сила, и деформација чврстих еластичних тела. Општи проблеми одређивања веза између унутрашњих сила и деформација за *произвољни, облик шела* нису ни до данас строго решени због врло компликованог математичког апарата који се мора употребити. Али су ипак добијена извесна решења за прстије облике тела. Таква су тела *шпай*, *шлоча*, *љуска* и *шело*. Код штапа су попречне димензије мале у односу на његову дужину. С обзиром на његову геометријску осу штап је *прав* или *крив*. Кривина штапа може бити *мала* или *велика*. Плоча је призматично тело мале дебљине у односу на друге две димензије. Танка плоча извијена у једном или два правца зове се *љуска* (цев, парни котао, балон за гасове, итд.). Танке љуске се зову *љуске мале кривине*, а дебеле су *љуске велике кривине*. Тело има коначне све три димензије.

Чврсто тело се под утицајем спољашњих сила деформише. Тада настаје борба између спољашњих и унутрашњих сила које се одупиру првима, све док се не успостави равнотежа. Отада се чврсто тело понаша као и круто, па се могу применити закони статике крутог тела. Општа метода рада је *метода замишљених (фиктивних) пресека*: замишља се да је чврсто тело пресечено равни (или кривом површи) на два дела, па се утицај једног дела тела на други замењује унутрашњим силама које се сада на пресеку јављају као спољашње силе, те се примењују закони статике крутог тела. Сем тога се примењује *принцип солидификације*: када је континуум у равнотежи тада је и сваки његов део у равнотежи.

Према начину дејства оптерећења су *статичка* или *динамичка*. У *теорији еластичности* проучавају се само *статичка оптерећења*. Међутим, у *еластодинамици* проучавају се и динамичка дејства (*теорија осцилација*). Ова оптерећења изазивају *промене облика и запремине*, те су у вези са померањима тачака, линија односно пресека тела. Та су померања *линијска* (праволинијска) и *обртна* (угаона). Прва се односе на тачке, а друга на линије и пресеке. Сматра се да су ове *деформације мале* и да је *веза између унутрашњих сила и деформација линеарна*, те је оваква теорија само *линеарна теорија еластичности*.

Задатак теорије пластичности је да математичким путем проучи везе између унутрашњих сила и деформација деформабилног тела у нееластичној области, то јест пластичних деформација, и да их упореди са експерименталним проверавањима. Код пластичних тела оптерећених преко границе еластичности престаје линеарна зависност између сила и деформација, што усложњава математичку страну проблема.

У теорији еластичности посматра се *идеално еластично тело* чије деформације зависе само од унутрашњих сила (и обрнуто), тако да се по престанку дејства сила првобитно стање деформисаног тела успоставља тренутно. Шира научна дисциплина која успоставља законе постанка и развоја деформација неке непрекидне средине у току времена у зависности од различитих термодинамичких и физичко-хемијских услова зове се *реологија*. При томе она не испитује промену положаја тела, тојест кретање без деформација. Непрекидне средине су произвољне (чврсте, флуидне, еластичне, пластичне), деформације су статичке или динамичке, а води се рачуна о времену као и о историји напрезања које је тело претрпело.

Теорија еластичности је математичка дисциплина; њен практични део је *оппортност материјала* која обрађује специјалне проблеме теорије еластичности који су од практичног значаја. Обрасци отпорности материјала изводе се елементарно уз извесне претпоставке о деформацијама тела које се доста добро слажу са експериментима и проверени су на изведеним конструкцијама.

0.5. Кратак преглед историјског развоја теорије еластичности. — Колевка науке је стара, Вавилонија. Развој науке утицао је и на грађење чувених „*вавилонских кула*“, па су свакако постојали и извесни критеријуми за одређивање димензија појединих конструктивних елемената. Ова знања су пренета у Египат о чему нам сведоче велики храмови, споменици, пирамиде и обелиски. И Грци су развили вештину грађења и науку. Поред *Еуклидове* (3000 г. пре н. ере) *геометрије* („*Елементи*“ имају 13 књига — планиметрија, стереометрија и нешто из теорије бројева; дело *Data-подаци*, и *Оптика*) створена је и механика. Њен оснивач *Archimed* (Архимед, 287—212. год. пре н. ере) дао је доказ закона равнотеже полуге, методе за одређивање положаја тежишта тела, конструисао је многе алатке-ручне алате — које су и данас у употреби, а које су Грци много користили при градњи храмова (Дијанин храм у Ефесу), преношењу стубова, итд. Грађевинарство је било развијено и код Римљана. И до данас су се одржали многи споменици, грађевине, путеви, мостови (чувени мост *Pont du Gard* у Француској). О многим градњама могло се сазнати из књига *Vitruviusa*, најчувенијег архитекте и инжењера ере императора *Augusta*.

Знања Вавилонца, Египћана, Грка и Римљана о вештини зидања изгубљена су у Средњем веку, али су оживљена почетком Ренесансе. Подухват чувеног италијанског орхитекте Fontane (1543—1607) подизањем обелиска пред Ватиканом изазивао је дивљење. *Leonardo da Vinci* (Leonardo da Vinci, 1452—1519) италијански сликар, вајар, архитект, проналазач, научник и мислилац, један од највећих умова Ренесансе, интересовао се природним наукама, физиком, астрономијом, биологијом, механиком. Пронашао је пумпу, струг, хидрауличну пресу, гасну бомбу. У његовим „*Beleškama*“ налазе се скице опита кидања жиче затезањем. Иако је Винчи учинио крупан корак на проучавању издржљивости материјала ипак су инжењери и градитељи XV и XVI века димензионисали грађевинске делове као и у римско доба: *према искуству и осећању*. Стога се правим оснивачем отпорности материјала може сматрати *Галилеј* (Galileo Galilei, 1564—1642), италијански физичар, астроном и математичар из Пизе. Још као студент (у 19. год.) открио је изохрост малих осцилација математичког клатна (кандила у станој цркви у Пизи). Године 1585. конструисао је хидростатичку вагу, а 1589. год. поставио је законе слободног пада, законе кретања по косој равни, закон косог жича. Године 1610. увео је појам убрзања, а докле је био познат појам пређеног пута и појам брзине. Конструисао је астрономски дурбин, па открива четири Јупитерова најсјанија сателита, Месечева брда, Сунчеве пеге. Својим делом „*Dialogo sopra i due massimi sistemi del Mondo*“, објављеним 1632. године стао је на страну Коперниковог *хелиоцентризма*. Због гоњења Инквизиције био је принуђен да се одрекне овог учења. Године 1638. појавило се његово славно дело „*Discorsi e dimonstrazioni mathematiche intorno à due nuove scienze*“ штампано у Лајдену, у коме су изложени сви његови резултати у разним областима физике и механике. У прва два дијалога садржан је Галилејев рад на проучавању особина грађевинских материјала и на отпорност греда (конзоле), па се сматра да од тада *почиње историја проучавања еластичних деформабилних тела* (отпорност материјала и теорија осцилација). Његова хипотеза „*највећеј нормалној напона*“ при коме долази до лома материјала одржала се и до данас. *Роберт Хук* (Robert Hooke, 1635—1703), енглески физичар, секретар Краљевског друштва (Royal Society-академија наука) дао је читав низ практичних и теоријских изума, усавршио је барометар, телескоп и микроскоп, бавио се биологијом и геологијом. На седници Royal Society 3. маја 1666. године изнео је своје три поставке о гравитацији. Године 1678. је у раду „*De Potentia Restitutiva*“ приказао резултате експеримената са еластичним телима, нарочито са опругама. Тада је поставио и закон линеарности између напона и деформација познат као *Хуков закон* („*Ut tensio sic vis*“) и који је послужио као основни закон механике еластичних тела. Он је стварно и данас основни закон у отпорности материјала. Чувени француски физичар *Мариотт* (Edme Mariotte, 1620—1684) поставио је законе судара и допринео је увођењу експерименталне методе у науци. Открио је *Бојл-Мариоттов закон* код гасова, дао доста доприноса у хидромеханици, па је чак открио и слепу мрљу у човечјем оку. Он је вршио опите са штаповима изложеним истежању, проучавао савијање коззоле и резултате упоређивао са Галилејевим, а затим проучавао утицај уклетштења крајева греде. Године 1680. експерименталним путем дошао је до Хуковог закона.

Пред крај XVII и почетком XVIII века нагло се у Европи развио *Лајбницев* (Gottfried Wilhelm Leibnitz, 1646—1716) инфинитезимални (диференцијални и интегрални) рачун, што се одразило и на проблеме еластичности. *Бернули* (Jacob Bernoulli 1645—1705) поставио је познату хипотезу у отпорности материјала да попречни пресек савијене греде остаје раван (то јест да нема дешланације пресека). Он је први поставио проблем одређивања еластичне линије савијене греде, а његово дело „*Veitšina закључивања*“ допринело је развоју теорије вероватноће. Његов брат *Johan* (Johann Bernoulli, 1667—1748) сматран је највећим математичарем свога доба и творац је варијационог рачуна а интересовао се такође и за еластична тела. Његов син *Данијел* (Daniel Bernoulli, 1700—1782.) дао је теоријске основе хидродинамике (у делу „*Hydrodinamica*“) а допринео је и развоју теорије еластичних линија деформисаних греда. Он је први успео да изведе диференцијалну једначину трансверзалних осцилација призматичне греде, а Ојлерова решења је проверавао експериментално. *Ојлер* (Leonhard Euler, 1707—1783) чувен је са својим открићима у математичкој анализи, механици и небеској механици (нова теорија о Месecu). Радио је и у другим областима науке. Године 1727. преселио се заједно са браћом *Николом* и *Данијелом Бернули* у Русију (Петроград), где је 1730. год. постао редовни члан академије, а 1733. и секретар одељења за математику. Тада је обављено његово дело „*Mechanica sive motus scientia analytice exposita*“, 1736. год. у коме је уместо Њутнових геометријских метода применио аналитичке методе. Године 1744. *Ојлер* је прешао у Берлин и постао члан Берлинске академије наука. 1744. године изашло је његово дело „*Methodus inveniendi lineas curvas*“ као прво дело о варијационом рачуну. Додатак уз ту књигу је расправа „*De Curvis Elasticis*“ у којој је проучавао еластичне линије савијених греда, затим је одредио критичну силу аксијално оптерећеног штапа (у делу „*Sur la force des colonnes*“, Mem. Acad. Berlin, N.13, 1759). По доласку царине Катарине II на руски престо *Ојлер* је прешао у Петроград и наставио свој научни рад иако је 1735. год. изгубио једно око и претило му је потпуно ослепљење. Од 1768. год. до своје смрти написао је преко 400 научних радова које је 40 година после његове смрти

још објављивала Руска академија наука. *Ојлер* се бавио и осцилацијама; 1767. извео је парцијалну једначину осциловања мембране (Novi Comm. Acad. Petrop., t.10), а 1799. поставио је теорију попречних осцилација хомогених греда. *Лагранж* (Joseph Louis Lagrange, 1736—1813.) француски математичар и астроном сматра се највећим аналитичарем у периоду пре *Гауса*. Био је награђен за своја три чувена решења проблема која је поставила Француска академија наука: Месечеве либерације, теорије кретања прва четири Јупитерова сателита и кретања трију тела. Године 1743. изашло је његово чувено дело „Mécanique Analytique“ у коме је примењујући d'Alembert-ов принцип и принцип виртуалних померања увео уопштене координате и уопштене силе што ће доцније бити од великог значаја у развоју теорије еластичности. У раду „Sur la figure des colonnes“ приказао је облике еластичних ливнија аксијално притиснутих греда. Године 1812. поставио је парцијалну диференцијалну једначину савијања и осциловања плоча. *Кулонова* (Charles Augustin Coulomb, 1736—1806) открића представљају основу електромагнетског и електростатичког система јединица, његов закон привлачења и одбијања количина електрицитета (наелектрисања) и магнетских маса аналоган је *Њутоновом* закону о гравитацији. Он је много допринео и у механици еластичних тела. У своме раду „Sur une Application des Régles de maximis et minimis à quelques problemes de Statique relatifs à l'Architecture“ поднетом Академији 1733. и објављеном 1776. год. у Mém. acad. sci. savants étrangers, t. VII, Paris, изнео је комплетну анализу напона. Он је први поставио хипотезу кидања при највећем смицајном напону и увео је појам клизања код смицања. У раду награђеном од Академије наука „Théorie des machines simples“ (1781) поставља законе о трењу. Године 1784. објавио је свој мемоар о торзији „Recherches théoriques et experimentales sur la force de torsion et sur l'élasticité des fils de métal“ (Mém. acad. sci.). У свом раду из 1773. год. *Кулон* је изнео и теорију потпорних зидова коју је *Прони* (R. Prony, 1755—1739) упростио ради лакше практичне примене. Године 1816. *Софија Жермен* (Sophie Germain, 1776—1831) добила је награду Академије за изведену парцијалну диференцијалну једначину савијене плоче. Она је увела појам еластичне површине („Recherches sur la théorie des surfaces élastiques“, 1821).

Период од 1820. до 1830. године представља период стварања *тродимензионе теорије еластичности*. Ово су махом извршили научници који су завршили чувену École Polytechnique, основану 1794. год. под руководством математичара *Монжа* (Gaspard Monge), 1746—1818) творца напртне геометрије. У овој школи су предавали Lagrange, Monge, Prony, Fourier, Poisson, а чувени ђаци су били Poisson, Biot, Malis, Poisson, Gay-Lussac, Arago, Cauchy, Navier. Најзаслужнији је научник *Навије* (Louis Marie Navier, 1785—1836) који је написао прву књигу из области механике еластичности тела („Résumé des leçons donnés à l'École des Ponts et Chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines“. Он је обновио *Бернулијеву* хипотезу и радио је у области статички неодређених система. Године 1807. енглески физичар *Јани* (Thomas Young, 1773—1829) увео је у делу „A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts“, (2nd t. London), модул еластичности материјала. И *Навије* је дефинисао модул еластичности материјала као однос јединичног оптерећења по површини пресека (напона) и јединичног издужења (дилатације). Ова дефиниција се одржала и до данас. *Навије* је 1820. год. поднео Академији наука свој мемоар о савијању плоча, а 1821. појавио се његов чувени рад „Mémoire sur les de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques“ (објављен у Mém. Inst. Natlj., 1824) у коме је изнео помоћу једначина равнотеже напрегнутог тетраедра везу између напона и запреминске силе (*Навијеове једначине*). После завршетка Политехничке школе најбриљантнији француски математичар *Коши* (Augustin Cauchy Louis, 1789—1857) завршио је и École des Points et Chaussées (1810). год.) али се посветио више математици неголи инжењерском раду. После значајних радова које је поднео Академији наука он је 1816. год. постао члан Академије (у 27. години). Као наставник математике на Политехници и на Сорбони написао је књигу „Cours d'Analyse de l'École Polytechnique“ (1821. год.) која је имала огроман утицај на доцнији развој математике, а 1822. год. поднео је Академији наука рад о напонима и деформацијама. Посматрајући елементарни тетраедар успоставио је везу између напона за косу раван и компонентних напона за три координатне равни (*Cauchy-јеве једначине*), а и везу између компонентних релативних деформација (дилатација и клизања) и компонентних померања. Сем тога је дао геометријску представку промене тих величина (*елипсоид напона и елипсоид деформација*), увео појам главних оса и главних напона. Он се интересовао за проблеме торзије правоугаоних штапова, а уопштио је *Навијеове* једначине за анизотропна тела. Још у доба *Њутона* била је тежња да се еластични проблеми објасне дејством гравитационих сила између честица еластичног тела. Ове идеје је проширио *Рубер Бошковић* (R. Boscovich, „Philosophiae Naturalis“, Venezia, 1763. год.), а његове теорије је први применио *Поасон* (Simeon Denis Poisson, 1781—1840). Главни његови резултати изнети су у радовима „Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques“ (Mem. acad. t.8, 1829) и „Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques et des fluides“ (Journ. Éc. Poly., t. 20, 1831), и удбенику „Traité Mécanique“, 1833. Он је увео коефицијент попречне дилатације (*Poisson-ов коефицијент* μ) и посматрао је савијање кружне плоче и решио је многе практичне проблеме чија се решења и данас користе.

Он је поставио парцијалне једначине уздужних, торзијских и попречних осцилација штапова, а проучавао је и попречне осцилације плоче. Његови гранични услови, модифицирани од *Кирхова*, (Gustav Rober Kirchoff, 1824—1887/1850. године у *Crelle J. Math.*, t. 40) користе се и данас. Енглески математичар *Грин* (George Green, 1793—1841) радио је на одређивању константи у општем *Хуковом закону* (36 константи при линеарном односу напона и деформација). Он је први увео специфични деформациони рад и изразио га као хомогену квадратну форму само од деформација.

Период од 1830. до 1900. године је *период класичара теорије еластичности*. *Ламе* (Gabriel Lamé, 1795—1870) и *Клајејрон* (V.P.E. Clapeyron, 1799—1864) завршили су Политехнику, а затим *École des Mines* (1820), па су били додељени као наставници Институту за саобраћајне инжењере у Петрограду, који је био основан 1809. године уз помоћ француских инжењера (Betancourt, Bazain, Potier). Они су учествовали у пројектовању висећег моста на Неви и на реконструкцији isaкијевског сабора (цркве св. Исакија). Заједно су објавили рад „Sur l'équilibre interieur des corps solides homogènes“ 1833. год. (Mém. présentés par divers savants). Ламе је 1852. године објавио своју чувену књигу „Leçons sur la Théorie Mathématique de l'Élasticité des Corps Solides“. У чланку „Mémoire sur l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques“ дао је решење проблема сферне љуске (1854. год.), а 1895. год. изашла је његова књига „Leçons sur les coordonnées courvilignes et leurs diverses applications“ у којој износи основне принципе на којима је основана теорија еластичности. Супротно теоријском раду *Ламеа*, *Клајејрон* је наставио практичан рад на грађењу железница. Године 1848. при пројектовању једног моста са више отвора поставио је „*теорему трију момената*“. Сем тога, он је поставио теорему о деформационом раду (*Клапејрснова теорема*: „рад сила на померању једнак је двострукој енергији деформације“ или „рад силе на померању има половину вредности од оне када би сила еластичности дејствовала од почетка у пуној величини“). (Од свих класичара најеминентнији је *Сен-Венан* /Barré de Saint-Venant, 1797—1886/ који се сматра творцем модерне теорије еластичности. Рођен је у Fortoiseau (Seine et-Marne), а учио је у *École Polytechnique* али ју је због свог политичког става морао напустити тако да је тек 1823. год. ступио у *École des Points et Chaussées*“ коју је завршио у рангу. Од 1825-30. S. Venant је радио као инжењер на изградњи канала *Nivernne* у *Аргенима*, а затим је заменио професора *Соггиолиса* и држао у поменутој школи предавања из отпорности материјала. Његове белешке са тих предавања су од великог историјског значаја. Године 1843. подноси Академији наука свој мемоар о савијању кривих штапова, а 1847. и 1853. чувени мемоар о торзији („Mémoire sur la torsion des prismes“) узимајући супротно од *Навијеа* у обзир и депланацију попречног пресека (штампано у *Mém. acad. sci. savants étrangers*, t. XIV, 1855). Тада је предложио своју методу за решавање проблема теорије еластичности („*méthode semi-inverse*“) према којој се претпостављају само нека померања и силе (напони), а све се остало одређује из једначина еластичности. Ову методу је применио на случај савијања конзоле оптерећена силом на слободном крају (*J. math. de Liouville*, 2. s., t. 1.). Он је поставио и свој чувени постулат о *локалном најрезању*, што је од велике важности за примену закључака теорије еластичности у техничким проблемима. Године 1864. увео је *улове комијабилности деформација*, а у делу „Mémoire sur la flexion“ (1866) обрадио је проблем смицајних напона код савијене греде. Он се бавио и проблемом удара тела у греде затим проблемом савијања греде услед покретног оптерећења, па и принудним осцилацијама. Године 1868. изабран је за члана Академије наука. Као референт радова *Треске* (Tresca) из области тењења метала под великим притиском, *Сен-Венан* се заинтересовао за проблеме еластичности, поставио је три хипотезе помоћу којих је дошао до решења неких простих проблема (*Comptes rendus*, t.74, 1872. год.). Тако је дошло до новог подручја математичке теорије еластичности коју је назвао „*еластичодинамиком*“. *Сен-Венан* није написао једну потпуну књигу о теорији еластичности, али су његове идеје изложене у *V* додатку превода *Навијеове књиге* „Résumé des leçons“ (1864) и у преводу *Клебшове* (Alfred Clebsch, 1833—1872) књиге „*Theorie der Elasticität fester Körper*“. Са допунама *Сен-Венана* ова је књига постала најпотпуније дело о теорији еластичности и њеној примени у инжењерству („*Théorie de l'élasticité des corps solides*“, 1883). Приказ историје теорије еластичности *Сен-Венан* је дао у два поглавља књига *Moigno-а* „*Leçons de mécanique analytique — Statique*“ (1868). Утицај *Сен-Венанових* мемоара и радова (објављених у *Comptes Rendus* француске Академије наука) имали су огроман утицај на развој теорије еластичности и њеног практичног дела отпорности материјала. Његова хипотеза „*највеће деформације*“ користила се до скоро у машинству при димензионисању тешких трансмисионих вратила.

Сен-Венан је први учио да чисто смицање наступа затезањем танке плоче у једном правцу и истим толиким притиском у другом правцу и дао је ригорозно решење проблема смицајних (тангенцијалних) напона код савијене греде (1856. год.) истина за само неке простје облике попречних пресека. Руски научник *Журавски* (Д. И. Журавский, 1821—1891) разрадио је своју теорију о смицајним напонима код сложених греда при пројектовању дрвених мостова на железничкој прузи Петроград—Москва (1844—1850). Његова приближна решења су и данас у употреби, а његову приближну методу користио је и *Сен-Венан* (на-

помене уз превод *Навијеове књије*). И Винклер (E. Winkler, 1835—1888) је следио *Сен-Венанове* идеје при проучавању савијања кривих штапова. Он је објавио књигу „Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit“, Prag, 1867. године. Разради *Сен-Венанових* идеја највише су допринели његови ученици *Бусинеск*, *Леви* и *Фламан*. *Бусинеск* (Joseph Valentin Boussinesq, 1842—1929) био је члан Академије и професор теоријске механике на Сорбони. Својом књигом „Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques (Paris, 1885) допринео је хидродинамици. Он је радио у области удара, осцилација, савијања витких штапова и плоча. Пронашао је интеграл у решењу проблема са локалним напрезањима („*Ирви тииј простијих решења*“). Од интереса је и његов рад о равнотежи растресите масе („*Essai théorique sur l'équilibre d'élasticité des massifs pulvérulents*“, Mem. acad. de Belgique, 1890). *Леви* (Maurice Lévy, 1838—1910) радио је много у теорији плоча и у димензионалним проблемима а дао је „*теорему двају момената*“ познату у отпорности материјала. *Фламан* (Alfred-Aime Flamant), био је професор механике на École Central у Паризу. Бавио се зрнстим материјалима и проблемом лонгитудиналних удара штапова и полубесконачне плоче (Comptes Rendus, t. 114, 1892). Заједно са *Сен-Венаном* превео је познату *Clebsch*-ову књигу и написао убеник „*Stabilité des constructions, résistance des matériaux*“, (Paris, 1886).

У Немачкој је развоју теорије еластичности највише допринео *Нојман* (Franz Neumann, 1798—1895) и његова „*кенигсбершка школа*“ (из које су изашли научници: Borchardt, Clebsch, Kirchhoff, Saalschütz, Voigt). Нојман се бавио теоријом двоструког прелома и еластичним особинама кристала. Многи су му радови објављени у његовом убенику „*Vorlesungen über die Theorie der Elasticität der festen Körper und des Lichtäthers*“ (Leipzig, 1885). *Кирхоф* (Gustav Robert Kirchhoff, 1824—1887) професор математичке физике на универзитетима у *Хајделбергу* и *Берлину* написао је чувени убеник „*Vorlesungen über mathematische Physik*“, I. Teil, Mechanik“ (Leipzig, 1876), а радио је у теорији плоча (J. Math. Crelle, 1850). Његове хипотезе одржале су се и данас, а такође и само два гранична услова на ивицама плоче. Он је испитивао осцилације кружне плоче и деформације танких штапова (*Кирхофљева динамичка аналоија*). Поред горе изнете књије *Клеби* је познат и својом методом интегралења еластичне линије савијене греде (*Клебишова метода*). Он има такође радова и из оптике (осцилаторна кретања еластичне лопте при којима померања на површи нестају).

У периоду од 1800. до 1833. године у Енглеској није било школа таквог ранга као што је било у Француској, па и инжењери нису добијали широко математичко образовање као што су га добијали француски инжењери. Године 1817. појавила се прва књига од Peter Barlow-a (1776—1862) „*An Essay on the Strength of Timber*“. Књигу Thomas-a Tredgold-a (1788—1829) „*A Practical Essay on the Strength of Cast Iron*“ (1820) користи ли су многи инжењери с обзиром на све већу примену ливеног гвожђа за конструкције. William Fairbairn (1789—1874) бавио се проблемима напрезања цеви и котлова, а Eaton Hodgkinson (1879—1861) је радио у области напона, деформација и извијања. Он је правно врло оригиналне експерименте (Phil. Trans., 1840). Године 1843. *Ранкин* (William John Macquorn Rankine, 1820—1870) објавио је свој рад о замору материјала (Proc. Inst. Civ. Eng., London, t. 2., 1843). Године 1858. објављена је његова чувена књига „*Manuel of Applied Mechanics*“, а 1861. и књига „*Manuel of Civil Engineering*“ у којима су му изложени оригинални радови. Он је први узео у обзир утицај трансверзалних (смицајних) сила на угибе савијених греда. Теоријска физика нарочито је напредовала у Кембриџу сјајним радовима Stokes-a (George Gabriel Stokes, 1819—1903) о унутрашњем трењу код течности и о равнотежи и кретању чврстих еластичних тела („*Mathematical and Physical Papers*“). Он је радио у области теорије осцилација и перемећања, као и на проблемима дифракције. *Томсон* — *лорд Келвин* (William Thomson, lord Kelvin, 1824—1907) уписао се у својој 10. години на Универзитет у Гласгову а дипломирао је 1845. године у Кембриџу. Под утицајем чувене *Фуријеове књије* (Jean Baptiste-Joseph, baron Fourier, 1768—1830) „*Théorie analytique de la Chaleur*“, (Paris, 1822) посветио се проблемима теорије топлоте. Затим је математичке студије наставио у Паризу (професори Liouville, Sturm, Cauchy) и експерименталне физике у лабораторији на Collège de France (код Regnault-a). Математику је предавао на Collège St. Peter, а затим је у 22. години изабран за професора природне филозофије на Универзитету у *Глазгову* на коме је предавао 53 године. Он се много бавио експериментима у области температурних напрезања еластичних тела „*A Mathematical Theory of Elasticity*“, Trans. Roy. Soc., London, 1856, „*On the Elasticity and Viscosity of Metals*“, Proc. Roy. Soc., London, 1865, књига „*Elasticity and Heat*“, 1882). Заједно са P.G. Tait-ом написао је чувену књигу „*Treatise on Natural Philosophy*“ која представља први систематски приказ проблема теорије еластичности на енглеском језику (1867). Његова предавања (1844) умножена су као скрипта, а 1904. су штампана као књига „*Baltimore Lectures*“. Ове две књиге су крајем XIX и почетком XX века одиграле огромну улогу у развоју теорије еластичности. У првој књизи дао је математички доказ *Сен-Венановиј принцип*а о локалним напрезањима (замене једног система сила другим статичким еквивалентним системом сила), а поставио је и функцију енергије деформације која зависи само од деформација а не и од начина на који су оне произведене. *Маквел* (James Clerk Maxwell,

1831—1879) је чувен по својим мемоарима о кинетичкој теорији гасова и о електрицитету. Његови експерименти са поларизованом светлости одвели су га у домен еластичности, тако да је потпуно разрадио поступак фотоеластичне напонске анализе (*основ фотоеластичности*). Он је дао свестрану анализу статички неодређених носача и поставио принцип „о *узајамности еластичних померања*“ (утицајни коефицијенти). *Џорџ Рели* (John William Strutt, lord Rayleigh, 1842—1919) својим чувеним делом „The Theory of Sound“ (1878) допринео је много развоју теорије осцилација. Његова метода енергије (Rayleigh-Ritz-ова *метода*) омогућила је широко третирање практичних проблема из отпорности материјала и теорије конструкција. *Лем* (Sir Horace Lamb, 1849—1934) радио је на проблемима хидромеханике и механике („Higher Mechanics“, 1920), а такође и у области теорије плоча и љуски. Он се бавио и осцилацијама кривих штапова и обртних дискова (заједно са R.V. Southwell-ом). *Лав* (A.E.H. Love, 1863—1940) припада такође „*кембричкој школи*“ и почео је рад у области танких љуски (1888). Главни рад је чувена књига „Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity (1892—93) у две свеске. Прво издање је било у чисто математичком и апстрактном духу, а друго издање, које је прерађено и преведено на немачки језик, било је прихваћено од многих инжењера у Европи. Он се бавио и геофизиком и сеизмичким таласима („Love waves“). *Пирсон* (Karl Pearson, 1857—1936) је испитивао савијање греда на еластичним ослонцима и распоред напона код брана (1904). Заједно са Isak-ом Todhunter-ом написао је врло познато дело „History of the Theory of Elasticity (1866, 1893) посвећено *Сен-Венану*“.

У Италији је *Менабреа* (L.F. Menabrea), војни инжењер, проучавајући статички неодређене решетке предложио методу која се оснива на принципу најмањег рада (Le principe de la moindre action) која је позната као метода *Менабреа*: „једначинама равнотеже треба додати онолико услова колико је решетка пута статички неодређена, таквих да је извод деформационог рада (енергије деформације) по статичкој непознатој једнак нули“. Своју методу он није потпуно математички образложио, па је доказ извео *Касџиљано* (Alberto Castigliano, 1847—1844) па се теорема често зове *Касџиљанова теорема*. Он ју је поставио у дипломском раду (1873 на *Торинском* политехничком институту, а објављена је 1875. год. (Atti reale acad. sci. Torino, 1875); и 1879 („Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques, Turin, 1879). *Мексвелову* теорему реципрочности еластичних померања уопштио је *Бети* (Enrico Betti) у „Nuovo cimento“, („On Reciprocal Figures, Frames and Diagrams of Forces“), (2), с. 7, 8, 1872.

Примену теорије еластичности у практичној техници су много разрадили: С. Culmann (1821—1881) и W. Ritter (Eig. THsch. Zürich), A. Wöhler (испитивања о замору материјала), J. Bauschinger (1833—1893 лабораторија за испитивање материјала Политехничког института у *Минхену*), С. Vach (чувена књига „Elastizität und Festigkeit“ и закон експоненцијалне зависности између напона и деформација), Otto Mohr (1835—1918, графоаналитичка метода, круг напона), H. Müller Breslau) 1851—1925, статика грађевинских конструкција, утицајне линије); F. S. Jasiniski (1856—1899, проблеми еластичне стабилности), Ludwig von Tetmajer (1850—1905, лабораторија при Политехничком институту у *Дириху* 1879, која прераста у у чувени завод „ЕМРА“, извијање штапова); Friedrich Engesser (1848—1931, теорија конструкција на Политехничком институту у Карлсрухеу и извијање штапова); G. H. Bryan (општа теорија еластичне стабилности); August Föppl (1854—1924, конструктор многих мостова, „Das Fachwerk im Raume“, Leipzig, 1892, „Festigkeitslehre“, Leipzig, 1927); M. Williot (план померања, 1877), *В. Л. Кирјичев* (1844—1913, позната књига „*Прекобројне величине у теорији конструкција*“, *Кијев*, 1903); Woldemar Voigt (1850—1919, еластичне особине кристала). *Херц* (Heinrich Rudolf Hertz, 1857—1894, чувени радови из електродинамике, теорија притиска еластичних тела, проблем удара, методе мерења тврдоће материјала).

У XX веку је нарочито порастао интерес за проучавање проблема теорије еластичности. Поред математичке обраде проблема врше се многа лабораторијска испитивања. Примењују се нове математичке методе: векторски и тензорски рачун и матрично представљање проблема, што омогућава у најновијем добу примену *машина за рачунање*. Тежња повезивања математичке теорије са праксом потиче од „*тејнџиненске школе*“ коју воде Gauss-ови ученици и следбеници (Dirichlet, Riemann, Clebsch, Klein). Felix Klein (1849—1925) докторирао је у 19. години, па брзо постаје наставник у *Гејтингену* и *Ерлангену* („das Erlangen Programm“), а 1886. постаје професор у Гејтингену и ствара чувену школу примењене механике. Његови чувени ученици су Carl Runge и Ludwig Prandtl (1875—). *Клајнова* је замисао издавања „Encyclopadie der mathematischen Wissenschaften“ од 1901—1914. год. на којој су сарађивали математичари из целог света. *Прандтл* је био асистент проф. Föpl-а. Докторска дисертација му је била из проблема бочног савијања („Kippscheinung“, 1899). Године 1900. постаје професор механике на Политехничком институту у *Хановеру*, где објављује свој учвени рад о „*мембранској анализи*“ проблема торзије. Помоћу методе „soap film method“ могао се добити распоред напона. Ову методу су Griffith и Таулор користили за одређивање торзијске крутости штапова сложенијег пресека. Године 1904. *Прандтл* је дошао у *Гејтинген* и тамо створио чувени Институт примењене математике и механике, који је постао један велики светски научни центар. Даљи његови радови ишли

су све више у домен аеромеханике, а 1908. изграђен је први мали аеродинамички тунел („Tragflügeltheorie“). Његов ученик Theodore von Karman (1894—1964) радио је на проблемима извијања стубова и цеви у пластичној области (увео је *смицајни* — *Кармани* — *коэффициент*, Forschungsarb. Н. 81, 1910, Berlin; VDI, Н. 55, 1911). Он је значајан такође по својим доприносима развоју аеродинамике у USA. *Пранцлови* су ученици такође били: А. Nadai, (теорија плоча); W. Prager (теорија пластичности), Flügge, J. Den Hartog, С. П. Тимошенко. Године 1900. аустријски научник *Мичел* (John Henry Michell, 1863—1940) уопштио је систем диференцијалних једначина за одређивање компонентних напона а дао је и велики допринос у развоју димензионе теорије еластичности. Ове једначине су општије од *Белтрамијевих једначина* (Beltrami, Rendiconti, 1885). Исте проблеме Mesnager је решавао применом полинома, а М.С. Ribier и L.N.G. Filon су применили *Фуријеове редове*. Њих је користио и С. П. Тимошенко. Функцију комплексне променљиве први је применио Г.В. Колосов (1867—1936). Његову методу је развио и уопштио Н. И. Мухелишвили*: Х. С. Головин (1844—1904) радио је у области савијања кривих штапова. А.Н. Крылов (1863—1945) својим радовима о напонској анализи имао је великог утицаја на развој бродоградјевне механике („A new theory of the pitching motion of ships on waves“, TINA, London, 1896). Он је написао већи број уџбеника од којих су најважнији: „Примена партиципалних диф. једначина у инжењерској“ (1913) и „Нумеричко илустравање обичних диф. једначина“ (Paris, 1927, српски превод 1952). Његов ученик и сарадник И. Г. Бубнов (1872—1919) много је допринео развоју бродоградјевне механике (примена теорије плоча и роштиљних конструкција). Ове методе напонске анализе бродских конструкција развио је П. Ф. Пајкович (1887—1946, *Теорија ујругости, Москва*, 1939; *механика карабља, ГИСП*, т. I, II, 1941, 1947). Love-ову идеју о функцији деформације проширио је у Русији *Галоркин* (Б. Г. Галёркин, 1871—1945, *Упругие тонкие плиты*, 1933), а варијационе методе је применио Л. С. Лејбензон (Вариационне методы решения задач теории упругости, 1943. год.). М. М. Филоменко-Бородич (1885—1962) примењивао је специјалне функције (*Теорија ујругости*, 1959). Развоју теорији луски највише је допринео В. З. Власов (1906—1958, *Строительная механика танкостенных пространственных систем*, 1949).

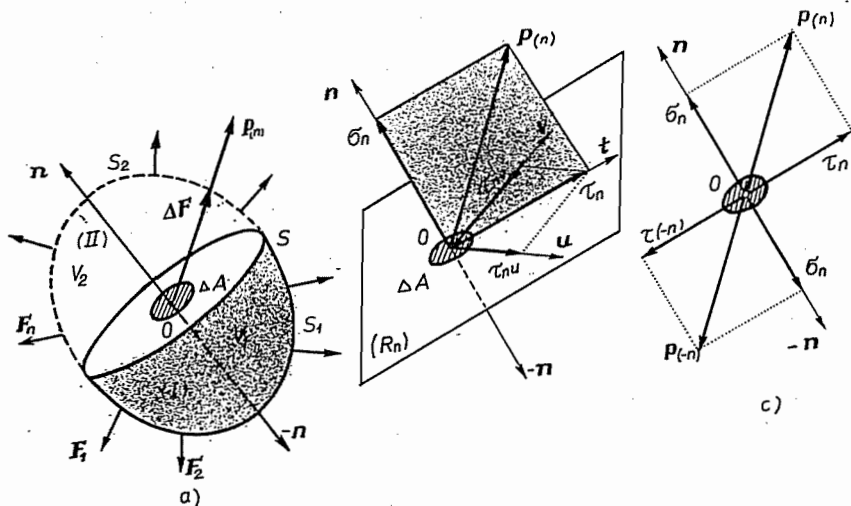
Свему овоме треба додати и огроман број научних радова научника целог света од којих ћемо поменути само најзначајније: А. Förppl-L.Förppl (књига „Drang und Zwang“, 3 тома, 1920—1947); С. В. Biezeno-Richard Grammel (књига: „Technische Dynamik“, Berlin, 1939), L. S. Jacobsen, A. Thum, K. Wieghardt, Walter Ritz, E. Trefftz, Eric Reissner (цевне и сандучасте конструкције), R. Maillart (центар смицања, Sch. Bauztg. Н. 77, 1921), М.А. Biot (теорија великих деформација), J. H. Michell (торзија вратила променљивог пресека, Pr. Lon. Math. So., 1900); Н. Neuber (концентрација напона ZAMM, Н. 14, 1934, „Kerbspannungs-lehrer“, Berlin 1937); R. D. Mindlin (JAM, v. 4, 1937— кружни диск); Н. Reissner кружни прстенови, Luftfahrt, 1928); С. W. Nelson (куглична лежишта, JAM, 1950); С. Kirsch (концентрација напрезања, VDI, Н. 42. 1898); С. E. Inglis (плоча са елиптичном рупом, TINA, London, 1913); Б. М. Ковалович (потпуно уклештена правоугаона плоча, 1902); S. Voinovsky-Krieger (плоча на стубовима, ZAMM, Н. 14. 1934); D. Yongu (плоча оптерећена концентрисаном силом, JAM, v. 6; 1939); М. Т. Huber („Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten“, Warszawa, 1929, *Теорија еластичности, Краков*, 1948—1950, 2 тома); E. Meissner (сферне луске, PhZ, Н. 14, 1913), К. Federhofer (лук променљивог пресека, Bauing, 1941); R. von Mises (еластична стабилност, VDI, Н. 58, 1914); D. M. Legget (Prsoc, London, v. 162, 1937); К. Marguerre (слон притиснуте плоче, ZAMM, Н. 16, 1936, Н. 17, 1937); R. S. Ayre (функција савијања); А. L. Kimball (појава хистерезиса, Ph. Rev. 1923); Witold Nowacki (Dynamics of Elastic Systems“, 1963).

Под утицајем руске школе еластичности у предратном периоду развила се и у Ју-славији теорија еластичности (П. С. Тимошенко, К. А. Чалишев, Ј. М. Хлещијев). У послератном периоду долази до њеног наглог успона нарочито на Грађевинском и Машинском факултету Универзитета у Београду.

*) „Некоторые основные задачи математической теории упругости“, 3 изд. АН СССР, 1940.

1. ТЕОРИЈА НАПОНА

1.1. Тотални и компонентни напони, — Чврсто тело (K) деформише се под утицајем спољашњи сила ($\vec{F}_i = F_i$) услед чега се јављају унутрашње силе. Да бисмо одредили унутрашње силе, замислимо да смо тело (K), запремине V , поделили површи (S) на два дела (I) и (II), запремина V_1 и V_2 (слика 1.1. а) и одстранили други део (II), онда се утицај тог дела на први део (I) мора заменити унутрашњим силама (реакцијама) на површи (S) које



Слика 1.1. Тотални и компонентни напони

се сада јављају као спољашње силе па уравнотежавају спољашње силе на том делу тела запремине V_1 . Пошто се после завршене деформације успоставила равнотежа свих сила на делу (I) тела, то се даље може сматрати крутим телом, па се на њега могу применити статички услови равнотеже система сила. Због тога узмимо неку произвољну тачку O на разделној површи (S) и око ње елементарну површ ΔA са спољашњом нормалом ($\vec{n} = \mathbf{n}$). Силе које дејствују на тој површи ΔA редукују се у тачки O на торзер, тј. на главни вектор $\Delta \mathbf{F}$ и главни момент $\Delta \mathcal{M}_O$. Количник $\Delta \mathbf{F} / \Delta A = \mathbf{p}_s$ представља *средњи (просечни) напон* у тачки O на површи ΔA , односно *интензитет унутрашњих сила*. Он је величина силе редукована на јединицу површи, јединице $[\text{kN}/\text{cm}^2]$. При смањивању површи ΔA до врло малих

димензија под условом да је њоме увек обухваћена тачака O , вектор \mathbf{p} , тежи коначној граничној вредности

$$\mathbf{p}_{(a)} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \mathbf{p}_{\Delta A} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} (\Delta \mathbf{F} / \Delta A) = \frac{d\mathbf{F}}{dA} \quad (1.1)$$

који се назива *нормални (укућни) напон у тачки O* за раван R_n кроз ту тачку (O) која је оријентисана јединичним вектором нормале \mathbf{n} . Као количник силе и површине напон је димензије $[F/L^2]$, јединице N/m^2 ; N/cm^2 ; kN/cm^2 ; kN/mm^2 ; kN/m^2 ; MN/m^2 . Главни момент $\Delta \mathcal{M}_0 = \Sigma [\Delta \mathbf{r}_i, \Delta \mathbf{F}_i]$ може се занемарити, пошто су величине $\Delta \mathbf{r}_i$ и $\Delta \mathbf{F}_i$ мале, па је $\lim (\Delta \mathcal{M}_0 / \Delta A) = 0$ када $\Delta A \rightarrow 0$.

Браћа Cosserat су 1909. године узели у обзир и утицај главног момента сматрајући да му се може приписати таква мала величина реда dA као и главном вектору ($\Delta \sigma$) због условности појма „мало“ у механици континуума. Тако се бескрајно мала запремина (dV) сматра сложеним објектом који садржи велики број честица, а дејство површинских сила схвата се као интегрални ефект узајамних дејства самих честица. У последње време идеја браће Cosserat разрађена је као „Моментна“ односно „Несиметрична теорија еластичности“.

Тотални напон $\mathbf{p}_{(n)}$ у тачки O за раван R_n оријентисану нормалом \mathbf{n} није колинеаран са нормалом, па је $[\mathbf{p}_{(n)}, \mathbf{n}] \neq 0$, те се може једнозначно разложити у две управне компоненте: једну у правцу нормале величине σ_n тзв. *нормални напон* и другу у самој равни R_n величине $\tau_{(n)}$ тзв. *тангенцијални* или *смицајни напон*. Ако се са \mathbf{t} означи јединични вектор у равни R_n управан \mathbf{n} , онда се може написати

$$\mathbf{p}_{(n)} = \sigma_n \mathbf{n} + \tau_{(n)} \mathbf{t}; \quad \sigma_n = (\mathbf{p}_{(n)}, \mathbf{n}); \quad \tau_{(n)} = (\mathbf{p}_{(n)}, \mathbf{t}); \quad (\mathbf{t}, \mathbf{n}) = 0. \quad (1.2)$$

Могу се у равни R_n изабрати два међусобно управна правца оријентисана јединичним векторима \mathbf{u} и \mathbf{v} , па се напон $\tau_{(n)}$ може разложити у две управне компоненте, а тотални напон у три, те ће бити (слика 1.1. б):

$$\mathbf{p}_{(n)} = \sigma_n \mathbf{n} + \tau_{nu} \mathbf{u} + \tau_{nv} \mathbf{v}; \quad p_{(n)}^2 = \sigma_n^2 + \tau_{nu}^2 + \tau_{nv}^2. \quad (1.3)$$

Нормални напон σ_n је колинеаран са нормалом, па када је истосмеран са њом назива се *напон зајезања*, у противном је *напон притиска*.

Сада замислимо обратно, да смо одстранили први део (I) тела (K), запремине V_1 , онда се његов утицај на други део (II), запремине V_2 , на истој површи ΔA , замењује главним вектором — $\Delta \mathbf{F}$. Тада је јединични вектор нормале — \mathbf{n} , па је

$$\mathbf{p}_{(n)} + \mathbf{p}_{(-n)} = 0 \quad \text{тј.} \quad \mathbf{p}_{(-n)} = -\mathbf{p}_{(n)}, \quad (1.4)$$

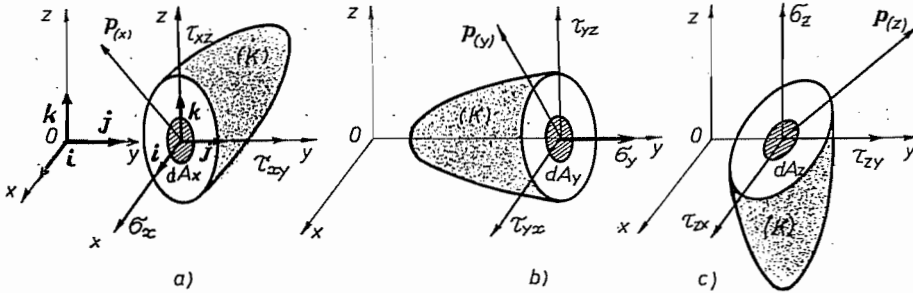
те ће бити

$$\sigma_{-n} = (\mathbf{p}_{(-n)}, -\mathbf{n}) = (\mathbf{p}_{(n)}, \mathbf{n}) = \sigma_n; \quad \tau_{(-n)} = (\mathbf{p}_{(-n)}, \mathbf{t}) = -(\mathbf{p}_{(n)}, \mathbf{t}) = -\tau_{(n)} \quad (1.5)$$

како је показамо на слици 1.1. с.

Оса Ox је нормала попречног пресека тела (K) управног на ту осу, па је тотални напон за тај пресек $\mathbf{p}_{(x)}$ (слика 1.2. а). Он се може разложити у три ортогоналне компоненте у правцима оса правоуглог триједра $Oxyz$ у тачки O тела, па је $\mathbf{p}_{(x)} = \sigma_x \mathbf{i} + \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k}$, где су $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ јединични вектори координатних оса триједра $Oxyz$. Напон σ_x је нормални напон у смеру $+Ox$ -осе; друга два напона су тангенцијални у равни чија је нормала $+Ox$ -оса, а у смеровима других двеју оса. Стога се обележавају са два индекса, од којих први показује нормалу равни за коју се одређује напон,

а други смер те компоненте. Тако, τ_{xy} значи тангенцијални напон у равни управној на $+Ox$ -осу, а у смеру $+Oy$ -осе. Осе Oy и Oz су нормале на пресеке управне на тим осама, па су тотални напони за те пресеке $P_{(y)}$ и $P_{(z)}$. Они се могу такође разложити у по три управна правца (слика 1.2. б, с),



Слика 1.2. — Декартове координате вектора тоталног напона

па су компоненти напони дати у следећој шеми (1.6). Компонентни напони $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ су нормални напони; остали су тангенцијални (смицајни) $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$. Дакле, напонско стање у некој тачки (O) напрегнутог тела одређено је са *девети* компонентних напона за три узајамно управне координатне равни у тој тачки. *Три* напона су нормална, а *шест* су тангенцијални.

	i	j	k
$P_{(x)}$	σ_x	τ_{xy}	τ_{xz}
$P_{(y)}$	τ_{yx}	σ_y	τ_{yz}
$P_{(z)}$	τ_{zx}	τ_{zy}	σ_z

(1.6)

Ознаке за компонентне напоне изнете у шеми (1.6) уобичајене су у техничкој пракси, али се употребљавају и друге*, као:

$$\begin{aligned}
 & X_x, Y_x, Z_x, \quad X_y, Y_y, Z_y, \quad X_z, Y_z, Z_z; \\
 & \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}, \tau_{zz}; \quad t_{11}, t_{12}, t_{13}, \dots; \\
 & \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{21}, \tau_{22}, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{32}, \tau_{33}; \quad t^{11}, t^{12}, t^{13}, \dots;
 \end{aligned}$$

1.2. Cauchy-јеве једначине за напоне. — У тачки O напрегнутог тела (K) у којој желимо да одредимо напонско стање усвојимо триједар $Oxuz$. *Напонско се стање познаје када се познају шортални напони за све равни R_{ni} кроз ишу тачку (O). Ако уместо равни $R_{n0}=R_0$ кроз тачку O узмемо њој блиску и паралелну раван R_n са истом нормалом $n_0=n$, онда је тотални напон $P_{(n)}=P_{(n0)}+dP_{(n)}=P_{(n0)}$, јер се прираштај напона $dP_{(n)}$ може занемарити пошто су равни врло блиске а са истом су нормалом (n). Ова раван R_n издваја у околини тачке O напрегнутог тела малу пирамиду $OABCO$ ивица dx, dy, dz , (слика 1.3. а), запремине $dV=dx dy dz/6$. Површина dA странице ABC пирамиде може се одредити векторски*

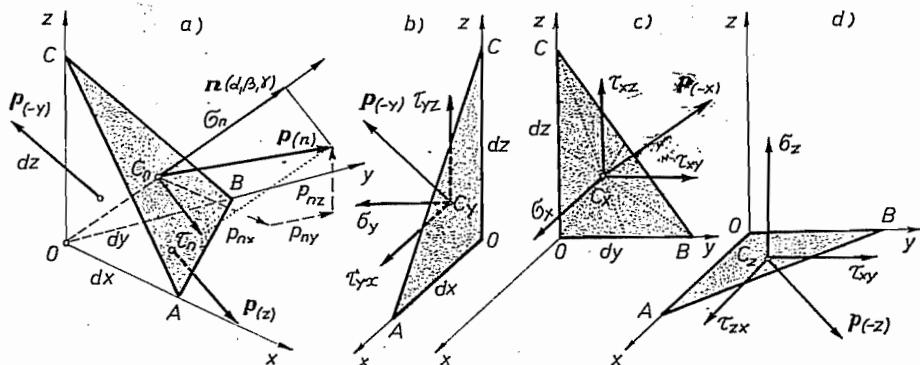
$$\begin{aligned}
 d\mathbf{A} &= d\vec{A} = d\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}]/2 = [-i dx + j dy, -i dx + k dz]/2 = \\
 &= i dx + j dy + k dz,
 \end{aligned}$$

* Видети: I. Todhander, K. Pearson, *History of the Theory of Elasticity*.

па су пројекције

$$\begin{aligned} dA_x &= \Delta_{OBC} = dA \cdot \alpha = dy \, dz / 2; & dA_y &= \Delta_{OCA} = dA \cdot \beta = dx \, dz / 2; \\ dA_z &= \Delta_{OAB} = dA \cdot \gamma = dx \, dy / 2, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где су α , β , γ косинуси смера јединичног вектора нормале \mathbf{n} равни ABC . Ако пирамида $OABCO$ не додирује спољашњу површ (омотач) тела (K) онда није изложена дејству површинских сила. И запреминска сила $\mathbf{F}'_v = \mathbf{F}_v / dV$, може се занемарити као мала величина, те на пирамиду дејствују



Слика 1.3. — Cauchy-jeve једначине за напоне

само унутрашње силе. На страницу ABC дејствује сила $\mathbf{p}_{(n)} dA$, на страницу OAC сила $\mathbf{p}_{(-y)} dA_y$, јер је нормала $-Oy$ -оса, а на остале две странице силе $\mathbf{p}_{(-x)} dA_x$ и $\mathbf{p}_{(-z)} dA_z$. С обзиром на односе (1.4) и (1.7) први равнотежни услов даје

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F}_i &= \mathbf{p}_{(n)} dA + \mathbf{p}_{(-x)} dA_x + \mathbf{p}_{(-y)} dA_y + \mathbf{p}_{(-z)} dA_z = \\ &= \mathbf{p}_{(n)} dA - \mathbf{p}_{(x)} dA \cdot \alpha - \mathbf{p}_{(y)} dA \cdot \beta - \mathbf{p}_{(z)} dA \cdot \gamma, \end{aligned}$$

односно

$$\mathbf{p}_{(n)} = \mathbf{p}_{(x)} \alpha + \mathbf{p}_{(y)} \beta + \mathbf{p}_{(z)} \gamma = p_{nx} \mathbf{i} + p_{ny} \mathbf{j} + p_{nz} \mathbf{k}, \quad (1.8)$$

пошто се вектор $\mathbf{p}_{(n)}$ може разложити у три компоненте у правцима оса триједра $Oxyz$. Ова векторска једначина даје везу између тоталног напона за косу раван R_0 кроз тачку O (односно за раван R_n врло блиску њој) и тоталних напона за три координатне равни триједра $Oxyz$ кроз тачку O . Скаларизовањем предње векторске једначине добијају се три скаларне једначине:

$$\begin{aligned} p_{nx} &= (\mathbf{p}_{(n)}, \mathbf{i}) = \sigma_x \alpha + \tau_{yx} \beta + \tau_{zx} \gamma; & \alpha &= \cos \alpha; \\ p_{ny} &= (\mathbf{p}_{(n)}, \mathbf{j}) = \tau_{xy} \alpha + \sigma_y \beta + \tau_{zy} \gamma; & \beta &= \cos \beta; \\ p_{nz} &= (\mathbf{p}_{(n)}, \mathbf{k}) = \tau_{xz} \alpha + \tau_{yz} \beta + \sigma_z \gamma; & \gamma &= \cos \gamma. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Ово су *Cauchy-jeve једначине за напоне*, пошто их је он извео 1822. године. Оне дају везу између трију компонентних напона у правцима оса триједра $Oxyz$ тоталног напона $\mathbf{p}_{(n)}$ за раван R_n са нормалом $\mathbf{n} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k}$ коју сматрамо да пролази кроз тачку O и девет компонентних напона за три координатне равни Oyz , Ozx и Oxy триједра $Oxyz$ кроз тачку O напрегнутог тела.

Када се, дакле, познају девет компонентних напона (1.9) за три ортогоналне координатне равни триједра $Oxyz$ кроз неку тачку O напрегнутог тела, онда се може одредити тотални напон за сваку раван кроз ту тачку (O), пошто је

$$P_{(n)}^2 = P_{nx}^2 + P_{ny}^2 + P_{nz}^2 = (\sigma_x^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2) \alpha^2 + (\tau_{yx}^2 + \sigma_y^2 + \tau_{yz}^2) \beta^2 + (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 + \sigma_z^2) \gamma^2 + 2 [(\sigma_x \tau_{yx} + \tau_{xy} \sigma_y + \tau_{xz} \tau_{yz}) \alpha \beta + (\sigma_x \tau_{zx} + \tau_{xy} \tau_{zy} + \tau_{xz} \sigma_z) \alpha \gamma + (\tau_{yx} \tau_{zx} + \sigma_y \tau_{zy} + \tau_{yz} \sigma_z) \beta \gamma]. \quad (1.10)$$

Нормални напон је пројекција тоталног напона на правац нормале, па је

$$\sigma_n = (P_{(n)}, \mathbf{n}) = (P_{nx} \alpha + P_{ny} \beta + P_{nz} \gamma) = \sigma_x \alpha^2 + \sigma_y \beta^2 + \sigma_z \gamma^2 + (\tau_{xy} + \tau_{yx}) \alpha \beta + (\tau_{xz} + \tau_{zx}) \alpha \gamma + (\tau_{yz} + \tau_{zy}) \beta \gamma; \quad (1.11)$$

стога је квадрат тангенцијалног напона

$$\tau_{(n)}^2 = P_{(n)}^2 - \sigma_n^2. \quad (1.12)$$

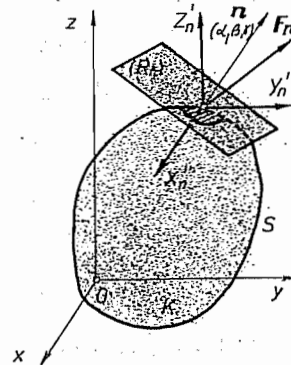
1.3. Гранични (контурни) услови. — Ако се уместо тачке O унутрашњости тела (K) узме тачка P врло блиска спољашњој контури (омотачу), онда је површ dA изложена дејству јединичних спољашњих површинских сила $\mathbf{F}'_n = P_{(n)}$ (слика 1.4). Уместо равнотежног услова (1.8) сада се добија

$$P_{(x)} \alpha + P_{(y)} \beta + P_{(z)} \gamma = \mathbf{F}'_n = X'_n \mathbf{i} + Y'_n \mathbf{j} + Z'_n \mathbf{k},$$

па скаларизовањем следе једначине

$$\begin{aligned} \sigma_x \alpha + \tau_{yx} \beta + \tau_{zx} \gamma &= F'_{nx} = X'_n; \\ \tau_{xy} \alpha + \sigma_y \beta + \tau_{zy} \gamma &= F'_{ny} = Y'_n; \\ \tau_{xz} \alpha + \tau_{yz} \beta + \sigma_z \gamma &= F'_{nz} = Z'_n. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Оне представљају граничне (контурне) услове или услове на контури тела односно статичке граничне услове. Овде су α, β, γ косинуси смера нормале \mathbf{n} на омотачу тела која се смањра позицијивном када је усмерена уиоле од омотача тела.



Слика 1.4. — Гранични (контурни) услови

1.4. Конјуговани тангенцијални напони. — Први равнотежни услов унутрашњих сила које дејствују на малу пирамиду око тачке O напрегнутог тела довео је до Саусху-јевих једначина (1.9). Други равнотежни услов показује да између шест тангенцијалних напона постоје три везе. Да их изведемо претпоставимо са довољном тачношћу да унутрашње силе дејствују у тежиштима C_x, C_y, C_z страница пирамиде $OABCO$ (слика 1.5). Пошто су координате темена пирамиде: $O(0; 0; 0)$; $A(dx; 0; 0)$; $B(0; dy; 0)$; $C(0; 0; dz)$, то су вектори положаја тежишта

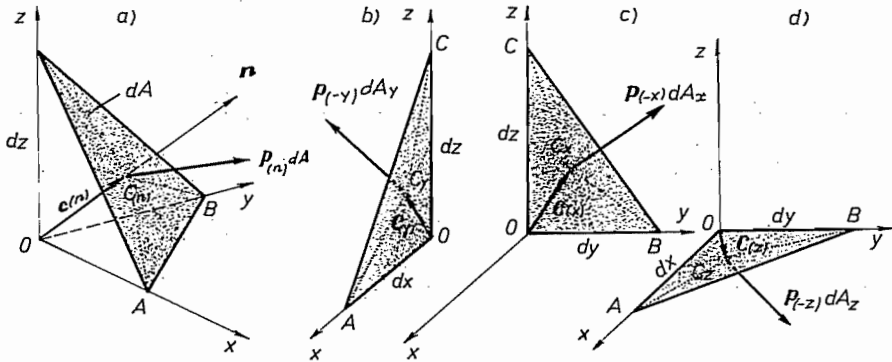
$$\begin{aligned} \mathbf{OC}_n = \mathbf{c}_{(n)} &= (\mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz)/3; & \mathbf{OC}_x = \mathbf{c}_{(x)} &= (\mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz)/3; \\ \mathbf{OC}_y = \mathbf{c}_{(y)} &= (\mathbf{i} dx + \mathbf{k} dz)/3; & \mathbf{OC}_z = \mathbf{c}_{(z)} &= (\mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy)/3. \end{aligned}$$

Моментни равнотежни услов даје

$$\mathfrak{M}_O = \sum \mathbf{M}_O = [\mathbf{c}_{(n)}, \mathbf{P}_{(n)}] dA - [\mathbf{c}_{(x)}, \mathbf{P}_{(x)}] dA_x - [\mathbf{c}_{(y)}, \mathbf{P}_{(y)}] dA_y - [\mathbf{c}_{(z)}, \mathbf{P}_{(z)}] dA_z = 0,$$

па ће, с обзиром на (1.7), бити

$$[\mathbf{c}_{(n)}, \mathbf{P}_{(n)}] - [\mathbf{c}_{(x)}, \mathbf{P}_{(x)}] \alpha - [\mathbf{c}_{(y)}, \mathbf{P}_{(y)}] \beta - [\mathbf{c}_{(z)}, \mathbf{P}_{(z)}] \gamma = 0. \quad (1.14)$$



Слика 1.5. — Коњугованост тангенцијалних напона

Множењем ове релације јединичним вектором \mathbf{i} добија се

$$\frac{1}{3} \begin{vmatrix} dy dz \\ P_x & P_{xz} \end{vmatrix} - \frac{\alpha}{3} \begin{vmatrix} dy dz \\ \tau_{xy} & \tau_{xz} \end{vmatrix} - \frac{\beta}{3} \begin{vmatrix} 0 dz \\ \sigma_y & \tau_{yz} \end{vmatrix} - \frac{\gamma}{3} \begin{vmatrix} dy 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_z \end{vmatrix} = 0,$$

па ће, с обзиром на (1.9) и (1.7), бити

$$\begin{aligned} & (\tau_{xz} \alpha + \tau_{yz} \beta + \sigma_z \gamma) dy - (\tau_{xy} \alpha + \sigma_y \beta + \tau_{zy} \gamma) dz - (\tau_{xz} dy - \tau_{xy} dz) \alpha + \\ & + \sigma_y \beta dz - \sigma_z \gamma dy = \tau_{yz} \beta dy - \tau_{zy} \gamma dz = \tau_{yz} (dx dy dz / 2 dA - \\ & - \tau_{zy} (dx dy dz / 2 dA) = \tau_{yz} - \tau_{zy} = 0. \end{aligned}$$

Множењем једначине (1.14) скаларно јединичним векторима \mathbf{j} и \mathbf{k} добиће се још две релације, те ће бити укупно три услова

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (1.15)$$

који изражавају **правило о коњугованости тангенцијалних (смицајних) напона**. У *двема ујравним равнима* кроз неку тачку најређунијој тела тангенцијални напони су истих величина, а усмерени су *та пресечној правој њих равни* или се *удаљавају од ње*.

Равнотежни услови (1.8) и (1.14) показују да се напонско стање у некој тачки (O) напрегнутог тела карактерише са *шест* *компонентних напона* и то: *шири нормала* ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) и *шири тангенцијална* ($\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}$) који дејствују у трима координатним равнима триједра $Oxyz$ у тој тачки.

1.5. Тензор напона. — Из Cauchy-јевих једначина (1.9) може се уочити да су на левој страни тих једначина правоугле координате вектора $\mathbf{P}_{(a)}$, а на десној су изрази који се добијају производом квадратне симетричне ма-

трице \mathbf{N} и јединичног вектора нормале \mathbf{n} , па се те релације могу написати у матричној форми:

$$\begin{Bmatrix} P_{nx} \\ P_{ny} \\ P_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix}; \quad \begin{matrix} \tau_{xy} = \tau_{yx}; & \tau_{xz} = \tau_{zx}; & \tau_{yz} = \tau_{zy}; \\ \{\mathbf{P}_{(n)}\} = \hat{\mathbf{N}} \{\mathbf{n}\}; & \hat{\mathbf{N}} = \mathbf{N} = (\{\mathbf{P}_{(x)}\} \{\mathbf{P}_{(y)}\} \{\mathbf{P}_{(z)}\}) \end{matrix} \quad (1.16)$$

Ова је матрица трећег реда. Елементи сваке њене колоне јесу координате (1.6) вектора тоталних напона координатних равни триједра $Oxyz$ у датој тачки (O). Пошто је ова матрица симетрична квадратна матрица, то јој је једнака транспонована матрица $\mathbf{N}^T = \mathbf{N}' = \mathbf{N}$, па се стога тотални напони могу написати или као вектори колоне или као врсте, те ће бити:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{P}_{(x)}\} &= \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}; & \{\mathbf{P}_{(y)}\} &= \begin{Bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}; & \{\mathbf{P}_{(z)}\} &= \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix}; \\ (\mathbf{P}_{(x)}) &= (\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}); & \tau_{xy} &= \tau_{yx}; \\ (\mathbf{P}_{(y)}) &= (\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}); & \tau_{xz} &= \tau_{zx}; \\ (\mathbf{P}_{(z)}) &= (\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z); & \tau_{yz} &= \tau_{zy}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Напонско стање у посматраној тачки (O) напрегнутог тела познато је ако су одређени тотални напони за све равни кроз ту тачку. Скуп ових вектора $\mathbf{P}_{(n)}$ одређује напонско стање у тој тачки. Оно је, дакле, како смо видели, одређено са шест компонентних напона. Ови напони образују систем другог реда који се назива *тензор напона*. Он је симетрични тензор другог реда, па му одговара симетрична квадратна матрица \mathbf{N} која се назива *матрица напона* или *напонска матрица*. Свакој тачки напрегнутог тела одговара по један тензор, а сви ови тензори чине *тензорско поље*. Сваки је везан за простор, али се он може различито понашати у односу на различите трансформације координата у том простору. Међутим, ако се само посматрају ортогоналне трансформације онда је такав *тензор ортононални* или *Декартов тензор*. У томе случају математичке операције могу се изводити са матрицом аташираном тензору иако она нема своје физичко значење.

С обзиром на изнето, обрасци (1.10), (1.11) и (1.12) могу се сада написати у матричном облику:

$$P_{(n)}^2 = (\mathbf{P}_{(n)}) \{\mathbf{P}_{(n)}\} = (\mathbf{n}) \mathbf{N}' \mathbf{N} \{\mathbf{n}\} = (\mathbf{n}) \mathbf{N}^2 \{\mathbf{n}\} = (\alpha \beta \gamma) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \sigma_x^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 & (\sigma_x + \sigma_y) \tau_{xy} + \tau_{xz} \tau_{yz} & (\sigma_x + \sigma_z) \tau_{xz} + \tau_{xy} \tau_{yz} \\ (\sigma_x + \sigma_y) \tau_{xy} + \tau_{xz} \tau_{yz} & \sigma_y^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 & (\sigma_y + \sigma_z) \tau_{yz} + \tau_{xy} \tau_{xz} \\ (\sigma_x + \sigma_z) \tau_{xz} + \tau_{xy} \tau_{yz} & (\sigma_y + \sigma_z) \tau_{yz} + \tau_{xy} \tau_{xz} & \sigma_z^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix}; \quad (1.18)$$

$$\sigma_{(n)} = (\mathbf{n}) \{\mathbf{P}_{(n)}\} = (\mathbf{n}) \mathbf{N} \{\mathbf{n}\} = (\alpha \beta \gamma) \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \sigma_x \alpha^2 + \sigma_y \beta^2 + \sigma_z \gamma^2 +$$

$$+ 2 (\tau_{xy} \alpha \beta + \tau_{xz} \alpha \gamma + \tau_{yz} \beta \gamma);$$

$$\tau_n^2 = P_{(n)}^2 - \sigma_n^2; \quad \tau_n = (\mathbf{t}) \{\mathbf{P}_{(n)}\}; \quad (\mathbf{t}) \{\mathbf{n}\} = 0.$$

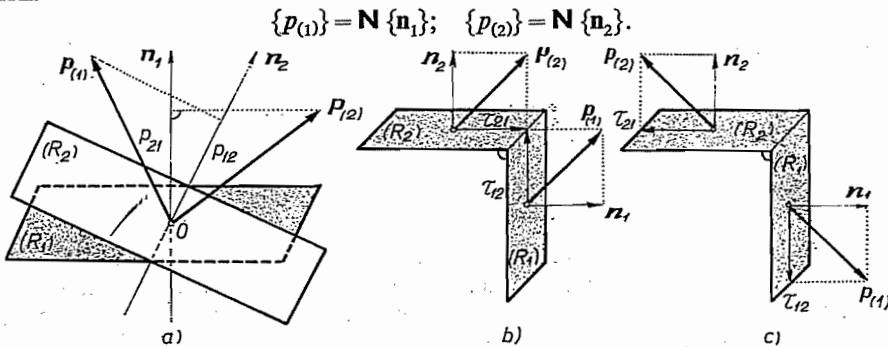
Например, за равно напонско стање са напонима $\sigma_x = 11$; $\sigma_y = 14$; $\tau_{xy} = 2$ [N/mm²] биће напони у косом пресеку чија нормала n гради са $+Ox$ -осом угао φ такав да је $\operatorname{tg} \varphi = 3/4$:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}; \quad (n) = (4/5; 3/5); \quad (t) = (-3/5; 4/5);$$

$$\begin{pmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}; \quad p_n^2 = (10 \ 10) \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = 200; \quad p_n = 10\sqrt{2} \text{ [N/mm}^2\text{]};$$

$$\sigma_n = \frac{1}{5} (4 \ 3) \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = (4 \ 3) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 14; \quad \tau_n^2 = 200 - 196 = 4; \quad \tau_n = \frac{1}{3} (-3 \ 4) \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = (-3 \ 4) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \text{ [N/mm}^2\text{]}.$$

1.6. Основно правило анализе напона. — Уочимо у тачки O напрегнутог тела две равни R_1 и R_2 са нормалама n_1 и n_2 (слика 1.6 а). Тотални напони $p_{(2)}$ и $p_{(1)}$ тих равни морају да задовољавају релацију (1.16)' те ће бити:



Слика 1.6. — Основно правило анализе напона

Када се прва релација помножи скаларно јединичним вектором n_2 , а друга вектором n_1 , онда се добија

$$(n_2) \{p_{(1)}\} = (n_2) \mathbf{N} \{n_1\}; \quad (n_1) \{p_{(2)}\} = (n_1) \mathbf{N} \{n_2\}; \quad (n_2) \{p_{(1)}\} = (n_1) \{p_{(2)}\}. \quad (1.19)$$

Ово је израз **основног правила анализе напона** који гласи: *Проекција шпалној напона $p_{(1)}$ у некој тачки најрегнутој тела (O) за равни (R_1) са нормалом n_1 на правац нормале n_2 друге равни (R_2) кроз исту тачку, једнака је по величини и предзнаку проекцији шпалној напона $p_{(2)}$ друге равни (R_2) на правац нормале n_1 прве равни (R_1).*

Када су равни ортојоналне, тада је $(n_1) \{n_2\} = 0$, следи:

$$(n_2) \{p_{(1)}\} = (p_2) \{\sigma_1 + \tau_1\} = (n_2) \{\tau_1\} = \tau_{12} = (n_1) \{p_{(2)}\} = (n_1) \{\tau_2\} = \tau_{21}$$

што потврђује правило о коњугованости тангенцијалних напона (1.15): *У два ујавним равнима тангенцијални напони су једнаких величина и усмерени су ка пресеочној правој тих равни (слика 1.6. b) или се удаљавају од ње (слика 1.6. c).*

За координатне равни Oyz и Ozx

$$(i) \{p_{(x)}\} = (0 \ 1 \ 0) \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \tau_{xy} = (i) \{p_{(y)}\} = (1 \ 0 \ 0) \begin{Bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \tau_{yx}$$

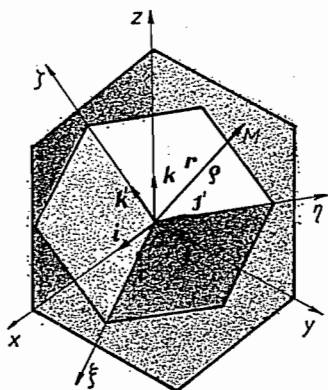
а то је и требало доказати.

1.7. Промена напона при трансформацији координатног система. — Када се триједар $Oxyz$ заокрене око почетка O и пређе у ортогонални триједар $O\xi\eta\zeta$ исте оријентације, онда вектору положаја r тачке M одговара исти тај вектор $\vec{r} = OM = \vec{\rho}$ у другом триједру али са координатама ξ, η и ζ (слика 1.7). Нека осе новог триједра ($O\xi\eta\zeta$) граде са осама старог триједра ($Oxyz$) углове чији су косинуси смера $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, где је $i=1, 2, 3$, онда је трансформација одређена са ових девет косинуса смера тзв. *кофицијената ш трансформације* старих правоуглих координата x, y, z у новим ξ, η, ζ . Стога су косинусна шема и формуле *ш трансформације координата*

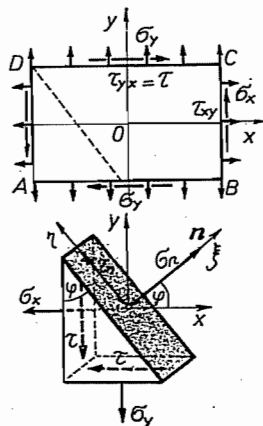
$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & \xi & \eta & \zeta & \\
 \hline
 x & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \mathbf{i} \\
 y & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \mathbf{j} \\
 z & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \mathbf{k} \\
 \hline
 & \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' &
 \end{array} \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned}
 \{\mathbf{r}\} &= \mathfrak{A} \{\vec{r}\}; & \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{cases} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{cases} = \begin{cases} \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta \\ \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta \\ \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta \end{cases} \\
 \{\vec{r}\} &= \vec{\rho}; & & &
 \end{aligned}$$

где је \mathfrak{A} *матрица ш трансформације**. Она је квадратна матрица координата јединичних вектора *новог триједра* $O\xi\eta\zeta$ *мерених у старом триједру* $Oxyz$, $\mathfrak{A} = (\{\mathbf{i}'\} \{\mathbf{j}'\} \{\mathbf{k}'\})$. Пошто је ова матрица ортогонална, то је и *ш трансформација ортонална*. Код ове матрице је инверзна матрица једнака транспонованој $\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}^T = \mathfrak{A}'$. Њена је детерминанта $\det \mathfrak{A} = |\mathfrak{A}| = \pm 1$, где се знак $+$ односи на *директну*, а знак $-$ на *обратну ротацију*. При овој се трансформацији не мења дужина вектора, нити угао између два вектора.



Слика 1.7. — Ротација триједра око почетка O



Слика 1.8. — Равно стање напрезања

За равна R_n у тачки O са нормалом \underline{n} тотални напон је $\underline{p}_{(n)}$ у односу на стари триједар $Oxyz$. Означимо са \underline{n} и $\underline{p}_{(n)}$ нормалу и тотални напон за

* Основи матричног рачунања, чл. 5,3,

исту ту раван (R_n) али у односу на нови триједар $O\xi\eta\zeta$, онда ће, према (1.16) и (1.20), бити:

$$\{p_{(n)}\} = \mathbf{N} \{n\} = \mathbf{N} \mathfrak{U} \{n\} = \mathfrak{U} \{\bar{p}_{(n)}\}; \quad \mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{U} = \mathfrak{U}' \mathfrak{U} = \mathbf{I},$$

односно

$$\{\bar{p}_{(n)}\} = \mathfrak{U}' \mathbf{N} \mathfrak{U} \{n\} = \bar{\mathbf{N}} \{n\}; \quad \bar{\mathbf{N}} = \mathfrak{U}' \mathbf{N} \mathfrak{U}; \quad \mathbf{N} = \mathfrak{U} \bar{\mathbf{N}} \mathfrak{U}', \quad (1.21)$$

где је $\bar{\mathbf{N}}$ нова напонска матрица за триједар $O\xi\eta\zeta$. Према томе ће бити:

$$\bar{\mathbf{N}} = \mathfrak{U}' \mathbf{N} \mathfrak{U} = \begin{pmatrix} \sigma_\xi & \tau_{\eta\xi} & \tau_{\zeta\xi} \\ \tau_{\xi\eta} & \sigma_\eta & \tau_{\zeta\eta} \\ \tau_{\xi\zeta} & \tau_{\eta\zeta} & \sigma_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

па су нови компонентни напони:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \alpha_r^2 + \sigma_y \beta_r^2 + \sigma_z \gamma_r^2 + 2(\tau_{xy} \alpha_r \beta_r + \tau_{xz} \alpha_r \gamma_r + \tau_{yz} \beta_r \gamma_r); \\ \tau_{rs} &= \sigma_x \alpha_r \alpha_s + \sigma_y \beta_r \beta_s + \sigma_z \gamma_r \gamma_s + \tau_{xy} (\alpha_r \beta_s + \alpha_s \beta_r) + \\ &+ \tau_{xz} (\alpha_r \gamma_s + \alpha_s \gamma_r) + \tau_{yz} (\beta_r \gamma_s + \beta_s \gamma_r), \end{aligned} \quad (1.23)$$

$r, s = \xi, \eta, \zeta$ за напоне; $r \neq s$, $r, s = 1, 2, 3$ за косинусе смера α, β, γ .

Пошто су матрице \mathbf{N} и \mathfrak{U} квадратне симетричне матрице то је и нова матрица $\bar{\mathbf{N}}$ симетрична матрица, па важи закон о коњугованости тангенцијалних напона ($\tau_{\xi\eta} = \tau_{\eta\xi}$; $\tau_{\xi\zeta} = \tau_{\zeta\xi}$; $\tau_{\eta\zeta} = \tau_{\zeta\eta}$).

У случају *равној ситања најрезања* (слика 1.8) компонентни напони за коси пресек чија нормала (n) грди са $+Ox$ -осом угао φ биће:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau \\ \tau & \sigma_y \end{pmatrix}; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau; \\ \mathfrak{U} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} \sigma_\xi &= \sigma_n = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + \tau \sin 2\varphi; \\ \tau_{\xi\zeta} &= \tau_n = 1/2 (\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\varphi + \tau \cos 2\varphi. \end{aligned} \end{aligned} \quad (1.23')$$

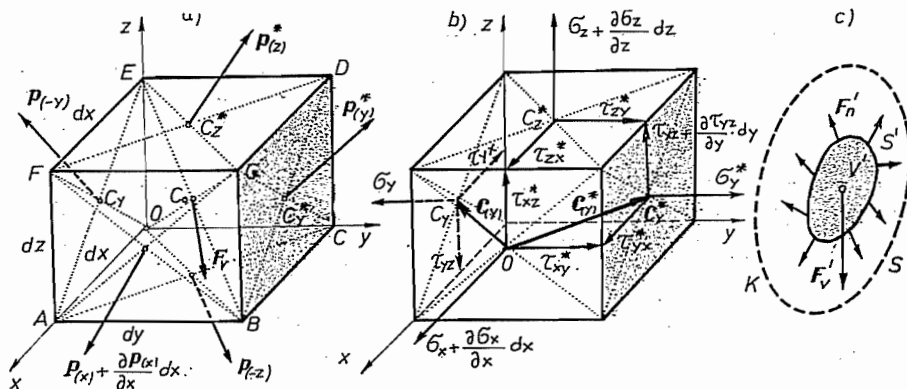
Например, када се при датом напонском стању $\sigma_x = 10$; $\sigma_y = 8$, $\tau_{xy} = 3 \text{ N/mm}^2$ триједар $Oxyz$ заокрене око Oz -осе за угао 45° , тада ће бити:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{U} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{N}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.8. Веза између напона и запреминских сила. Navier-ове једначине равнотеже. — Да бисмо успоставили везу између напона у некој тачки (O) напрегнутог тела и запреминских сила, замислимо да смо у околини те тачке (O) издвојили паралелепипед $OABCDEFG$, ивица dx, dy, dz (слика 1.9. *a*), онда су његове стране изложене унутрашњим силама које сада дејствују као спољашње силе. Тотални напон за страну $OAFE$ чија је нормала $-Oy$ -оса је $p_{(-y)} = -p_{(y)}$, па је површинска сила $-p_{(y)} dx dz$. На страници $BCDG$, паралелној првој, напон је $p_{(y)}^* = p_{(y)} + (\partial p_{(y)} / \partial y) dy$, па је површинска сила $p_{(y)}^* dx dz$. Аналогно томе закључујемо да на осталим страницама паралелепипеда дејствују површинске силе $-p_{(x)} dy dz$; $p_{(x)}^* dy dz$; $-p_{(z)} dx dy$; $p_{(z)}^* dx dy$. Сваки од ових шест тоталних напона одређен је у односу на триједар $Oxyz$ са по три компоненте, те их има укупно 18 од којих су неке приказане на слици 1.9. *b*. Претпоставићемо да је паралело-

пипед изложен и дејству запреминских сила $\mathbf{F}_V = \mathbf{F}_V' \cdot dV$, где је \mathbf{F}_V' јединична запреминска сила, а $dV = dx dy dz$. Први равнотежни услов да је збир свих сила које дејствују на паралелопипед једнак нули доводи до релације:

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F}_i = 0; & \quad [p_{(x)}^* - p_{(x)}] dy dz + [p_{(y)}^* - p_{(y)}] dz dx + [p_{(z)}^* - p_{(z)}] dx dy + \mathbf{F}_V' dV = \\ & = \frac{\partial p_{(x)}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial p_{(y)}}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial p_{(z)}}{\partial z} dz dx dy + \mathbf{F}_V' dx dy dz = 0, \end{aligned}$$



Слика 1.9. — Navier-ове једначине равнотеже.

односно

$$\frac{\partial}{\partial x} p_{(x)} + \frac{\partial}{\partial y} p_{(y)} + \frac{\partial}{\partial z} p_{(z)} + F_V' = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} \{p_{(x)}\} + \frac{\partial}{\partial y} \{p_{(y)}\} + \frac{\partial}{\partial z} \{p_{(z)}\} + \{F_V'\} = 0. \quad (1.24)$$

Скаларизовањем добијају се једначине

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X_V' &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y_V' &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z_V' &= 0; \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \mathbf{p}_{(x)} \\ \text{div } \mathbf{p}_{(y)} \\ \text{div } \mathbf{p}_{(z)} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} X_V' \\ Y_V' \\ Z_V' \end{array} \right\} = 0; \quad \begin{array}{l} \tau_{xy} = \tau_{yx}; \\ \tau_{xz} = \tau_{zx}; \\ \tau_{yz} = \tau_{zy}; \end{array} \quad (1.25)$$

које се називају Navier-ове једначине равнотеже најреинишој шела, јер их је он извео 1821. године.

Помоћу другог, моментног равнотежног услова, потврдиће се правило о конјугованости тангенцијалних напона. Представимо да површинске силе дејствују у тежиштима $C_x, C_y, C_z, C_x^*, C_y^*, C_z^*$ странице паралелопипеда, а запреминска сила у тежишту C_0 паралелопипеда. Означимо са $\mathbf{c}_x, \mathbf{c}_x^*, \dots, \mathbf{c}_0$ векторе положаја тежишта у односу на почетак (O) триједра $Oxyz$, онда ће бити

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_O = \Sigma \mathbf{M}_O = & \{[\mathbf{c}_x^*, \mathbf{p}_{(x)}^*] - [\mathbf{c}_y, \mathbf{p}_{(z)}]\} dy dz + \{[\mathbf{c}_y^*, \mathbf{p}_{(y)}^*] - [\mathbf{c}_z, \mathbf{p}_{(x)}]\} dx dz + \\ & + \{[\mathbf{c}_z^*, \mathbf{p}_{(z)}^*] - [\mathbf{c}_z, \mathbf{p}_{(z)}]\} dx dy + [\mathbf{c}_0, \mathbf{F}_V'] = 0. \end{aligned}$$

Ако се занемаре прираштаји напона, (онда је $p_{(x)}^* = p_{(x)}$), и запреминска сила, а пошто је $c_x^* - c_x = i dx + (j dy + k dz)/2 - (j dy + k dz)/2 = i dx$, па су и $c_y^* - c_y = j dy$; $c_z^* - c_z = k dz$, те се после дељења са $dx dy dz$ горња релација своди на облик

$$[i, p_{(x)}] + [j, p_{(y)}] + [k, p_{(z)}] = 0. \quad (1.26)$$

Множењем ове релације скаларно јединичним вектором i добија се да је

$$(i [j, p_{(y)}]) + (i [k, p_{(z)}]) = (p_{(y)}, k) - (p_{(z)}, j) = 0; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy},$$

а на исти начин и друга два услова коњугованости напона (1.15).

Navier-ове једначине (1.25) јесу парцијалне једначине првог реда са шест непознатих функција напона $\sigma_x = f_1(x, y, z), \dots$. За њихово одређивање постоје само три једначине (1.25), па је проблем *шријуиуи сшаишчки неодређен*, те се стога морају увести неки *накнадни услови* за еластично тело. Међутим, ако су функције $f_i(x, y, z), i = 1, 2, \dots, 6$, такве да су у свима тачкама тела задовољене једначине (1.25), а у тачкама контуре гранични услови (1.13), онда су сви делови на које смо замислили да смо издвојили тело у равнотежи, па је и само тело тада у равнотежи (*принцип солидификације*). Ово показује да је задовољење Navier-ових једначина равнотеже и Cauchy-јевих граничних услова *пошребан и довољан услов равнотеже шела* напрегнутог површинским и запреминским силама.

Ово се може и доказати. Замислимо да смо из тела (K) издвојили део запремине V' објумљен површи S' , (слика 1.9.с), онда је равнотежни услов

$$\iint_{(S')} \mathbf{F}_n' dS + \iiint_{(V')} \mathbf{F}_V' dV = 0.$$

Ради скаларизовања помножимо предњу релацију ортом i , онда се, с обзиром на граничне услове (1.13), добија

$$\iint_{(S')} X_n' dS + \iiint_{(V')} X_V' dV = \iint_{(S')} (\sigma_x \alpha + \tau_{yx} \beta + \tau_{zx} \gamma) dS + \iiint_{(V')} X_V' dV = 0$$

Пошто су компонентни напони непрекидне функције од (x, y, z) по затвореној површи (S'), а њихови парцијални изводи су, према (1.25), непрекидни у запремини (V') објумљеном површи (S'), то се површински интеграл може према формули Грепп-Остроградски* претворити у запремински

$$\iint_{(S')} X_n' dS = \iint_{(S')} (\sigma_x \alpha + \tau_{yx} \beta + \tau_{zx} \gamma) dS - \iiint_{(V')} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dV,$$

па је равнотежни услов

$$\iint_{(S')} X_n' dS + \iiint_{(V')} X_V' dV = \iiint_{(V')} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X_V' \right) dV = 0. \quad (1.27)$$

* Ако је $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, онда је $\iint_{(S)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \mathbf{F} dV$;

$$\iint_{(S)} (P \alpha + Q \beta + R \gamma) dS = \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV.$$

Како овај интеграл мора бити задовољен за произвољну запремину (V') издвојену из тела (K) то мора подинтегрална функција бити једнака нули, а она представља прву Navier-ову једначину (1.25). На исти начин изводе се и друге две равнотежне једначине, па се тиме показује да су сви услови *ишребни и довољни*, а то је и требало доказати.

1.9. Главни напони. — Кроз сваку тачку напрегнутог тела (O) може се поставити бескрајно много равни (R_i) са нормалама \mathbf{n}_i којима одговарају тотални напони $\mathbf{p}_{(i)}$ који се уопште узев не поклапају са нормалама. Али, може се наћи и таква раван (R_s) са нормалом \mathbf{n}_s чији је тотални напон $\mathbf{p}_{(s)}$ колинеаран са нормалом \mathbf{n}_s (слика 1.10). Таква раван назива се *главна раван*, напон $\mathbf{p}_{(s)}$ је *главни напон* а правац нормале \mathbf{n}_s је *главни правац*, са косинусима смера $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$. Пошто је тотални напон колинеаран са нормалом то је он једнак нормалном напону $|\mathbf{p}_{(s)}| = \sigma_s$, па у главној равни (R_s) не дејствује тангенцијални напон ($\tau_{(s)} = 0$). Стога је, према (1.16), за главни напон

$$\{\mathbf{p}_{(s)}\} = \mathbf{N} \{\mathbf{n}_s\} = \sigma_s = \sigma_s \{\mathbf{n}_s\}; \quad (\mathbf{N} - \sigma_s \mathbf{I}) \{\mathbf{n}_s\} = 0, \quad (1.29)$$

где је σ_s интензитет главног напона а \mathbf{I} јединична матрица. Овој матричној једначини одговара систем хомогених линеарних једначина са константним коефицијентима, а непознате су косинуси смера $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_s) \alpha_s + \tau_{xy} \beta_s + \tau_{xz} \gamma_s &= 0; \\ \tau_{xy} \alpha_s + (\sigma_y - \sigma_s) \beta_s + \tau_{yz} \gamma_s &= 0; \\ \tau_{xz} \alpha_s + \tau_{yz} \beta_s + (\sigma_z - \sigma_s) \gamma_s &= 0. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Да би овај систем хомогених једначина са константним коефицијентим: имао решења, пошто непознате не могу бити једновремено једнаке нули, јер задовољавају релацију

$$\alpha_s^2 + \beta_s^2 + \gamma_s^2 = 1, \quad (1.30)$$

мора детерминанта система бити једнака нули, а она представља *секуларну једначину шрећеј реда* (P. S. Laplace, 1772. године):

$$\begin{aligned} f(\sigma_s) &= |\mathbf{N} - \sigma_s \mathbf{I}| = \\ &= \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_s & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_s & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_s \end{vmatrix} = -(\sigma_s^3 - \mathcal{N}_1 \sigma_s^2 + \mathcal{N}_2 \sigma_s - \mathcal{N}_3) = 0; \end{aligned} \quad (1.31) \\ &\quad \sigma_s = \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3; \end{aligned}$$

где су

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; & \mathcal{N}_1 &= \mathcal{N}_1^1; \quad \mathcal{N}_1^2 = \mathcal{N}_1(\mathbf{N}^2); \quad \mathcal{N}_1^3 = \mathcal{N}_1(\mathbf{N}^3); \\ \mathcal{N}_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix}; & \mathcal{N}_2 &= \frac{1}{2} [(\mathcal{N}_1)^2 - \mathcal{N}_1^2]; \\ \mathcal{N}_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \det \mathbf{N} = |\mathbf{N}|; & \mathcal{N}_3 &= \frac{1}{6} [(\mathcal{N}_1)^3 - 3 \mathcal{N}_1 \mathcal{N}_1^2 + 2 \mathcal{N}_1^3]. \end{aligned} \quad (1.32)$$

скалари првог (\mathcal{N}_1); другог (\mathcal{N}_2) и трећег реда (\mathcal{N}_3) тензора напона. Први скалар је збир елемената са главне дијагонале детерминанте напонске матрице; други је збир главних субдетерминанти другог реда, а трећи је једнак детерминанти матрице. Ови се скалари називају и *напонским инваријан-*

шампа, јер остају инваријантни при трансформацији координата. Први скалар је најважнији и он представља *шпрат* (Sprag, trace) од **N**. Ови скалари имају извесне карактеристике, јер се други и трећи могу изразити помоћу трагова матрице **N** и њених степена како је показано предњим обрасцима.

Секуларна једначина (1.31) је *кубна* и има три реална корена* ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$).

Када се прве две једначине (1.29) реше по непознатој α_s , тада је детерминанта система једнака кофактору K_{31} детерминанте (1.31), те се по Статег-овом правилу добијају непознате $\beta_s = \alpha_s K_{32}/K_{31}$; $\gamma_s = \alpha_s K_{33}/K_{31}$, па непознате $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$ стоје у односу као кофактори елемената последње врсте детерминанте (1.31):

$$\frac{\alpha_s}{K_{31}} = \frac{\beta_s}{K_{32}} = \frac{\gamma_s}{K_{33}} = C_s; \quad \begin{vmatrix} \alpha_s & & & \\ \tau_{xy} & \tau_{xz} & & \\ \sigma_y - \sigma_s & \tau_{yz} & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_s & & & \\ \sigma_x - \sigma_s & \tau_{xz} & & \\ \tau_{xy} & \tau_{yz} & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma_s & & & \\ \sigma_x - \sigma_s & \tau_{xy} & & \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_s & & \end{vmatrix} = C_s, \quad (1.33 a)$$

а због услова (1.30) оне су потпуно одређене, јер је

$$\alpha_s = C_s K_{31}; \quad \beta_s = C_s K_{32}; \quad \gamma_s = C_s K_{33};$$

$$\alpha_s^2 + \beta_s^2 + \gamma_s^2 = (C_s)^2 [(K_{31})^2 + (K_{32})^2 + (K_{33})^2] = 1. \quad (1.33 b)$$

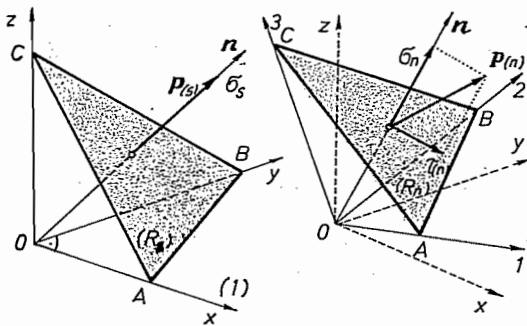
Ове релације треба узети за сваку „*сопствениу вредност*“ σ_s *секуларне једначине* (1.31), тј. за $s=1, 2, 3$, па ће се добити три главна правца \mathbf{n}_s одређене са по три косинуса смера, укупно са девет косинуса.

Релација (1.28) мора бити задовољена за сваки главни напон, па ће за два напона $\sigma_r \neq \sigma_s$ бити:

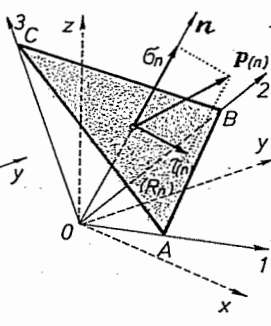
$$\mathbf{N} \{ \mathbf{n}_r \} = \sigma_r \{ \mathbf{n}_r \}; \quad \mathbf{N} \{ \mathbf{n}_s \} = \sigma_s \{ \mathbf{n}_s \}.$$

Када се прва једнакост помножи вектором (\mathbf{n}_s) , а друга вектором (\mathbf{n}_r) и одузму

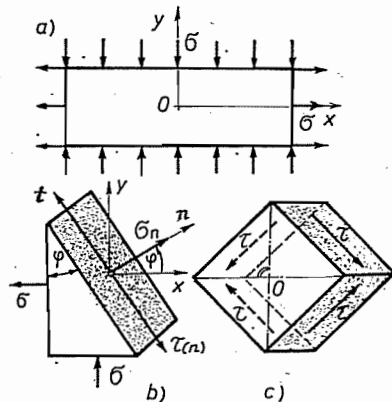
$$(\mathbf{n}_s) \mathbf{N} \{ \mathbf{n}_r \} = \sigma_r (\mathbf{n}_s) \{ \mathbf{n}_r \}; \quad (\mathbf{n}_r) \mathbf{N} \{ \mathbf{n}_s \} = \sigma_s (\mathbf{n}_r) \{ \mathbf{n}_s \} \quad (\sigma_s - \sigma_r) (\mathbf{n}_r) \{ \mathbf{n}_s \} = 0$$



Слика 1.10. — Главни напони



Слика 1.11. — Одређивање напона за раван (R_n) помоћу главних напона



Слика 1.12. — Чисто смицање

* Доказ видети код Р. Кашанин, Виша математика II, књ. 1, чл. 8, Београд, 1949.

тада се због тога што је $\sigma_r \neq \sigma_s$, добија *услов ортогоналности* главних праваца:

$$(\mathbf{n}_r) \{ \mathbf{n}_s \} = \alpha_r \alpha_s + \beta_r \beta_s + \gamma_r \gamma_s = 0, \quad r, s = 1, 2, 3; \quad r \neq s. \quad (1.34)$$

Пошто су вектори \mathbf{n}_s јединични, то је предњи услов — *услов ортонормираниости јединичних вектора главних праваца*.

Ако се у тачки O узме уместо триједра $Oxuz$ триједар главних праваца $O \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_3$, онда је тензор напона дијагоналан, то је

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ \mathcal{G}_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3; \\ \mathcal{G}_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{aligned} \quad (1.35)$$

С обзиром на Viète-ове (F. Viète, 1540—1603) релације између корена и коефицијената полинома следи да су:

$$\mathcal{G}_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \mathcal{N}_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \quad \mathcal{G}_2 = \mathcal{N}_2; \quad \mathcal{G}_3 = \mathcal{N}_3; \quad |\mathbf{N}| = |\mathbf{G}|, \quad (1.36)$$

на скалари \mathcal{N}_i заиста напонске инваријанте.

Када се познају главни напони и главни правци, тада се могу одредити и компонентни напони за неку раван (R_n) кроз тачку (O) са нормалом $\mathbf{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ према следећим обрасцима:

$$\{ p_{(n)} \} = \mathbf{G} \{ \mathbf{n} \}; \quad \begin{pmatrix} p_{n1} \\ p_{n2} \\ p_{n3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \alpha \\ \sigma_2 \beta \\ \sigma_3 \gamma \end{pmatrix}; \quad (1.37)$$

$$(p_{(n)})^2 = (p_{(n)}) \{ p_{(n)} \} = (\mathbf{n}) \mathbf{G}' \mathbf{G} \{ \mathbf{n} \} = (\mathbf{n}) \mathbf{G}^2 \{ \mathbf{n} \} = (\sigma_1 \alpha)^2 + (\sigma_2 \beta)^2 + (\sigma_3 \gamma)^2; \quad (1.38)$$

$$\sigma_n = (\mathbf{n}) \{ p_{(n)} \} = (\mathbf{n}) \mathbf{G} \{ \mathbf{n} \} = \sigma_1 \alpha^2 + \sigma_2 \beta^2 + \sigma_3 \gamma^2; \quad (1.39)$$

$$\begin{aligned} \tau_{(n)}^2 &= (p_{(n)})^2 - \sigma_n^2 = (\sigma_1 \alpha)^2 + (\sigma_2 \beta)^2 + (\sigma_3 \gamma)^2 - (\sigma_1 \alpha^2 + \sigma_2 \beta^2 + \sigma_3 \gamma^2)^2 = \\ &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \alpha^2 \beta^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \alpha^2 \gamma^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \beta^2 \gamma^2 \end{aligned} \quad (1.40)$$

јер су:

$$\sigma_1 \alpha^2 - \sigma_1^2 \alpha^4 = \sigma_1^2 \alpha^2 (1 - \alpha^2) = \sigma_1^2 \alpha^2 (\beta^2 + \gamma^2);$$

$$\sigma_2 \beta^2 - \sigma_2^2 \beta^4 = \sigma_2^2 \beta^2 (\alpha^2 + \gamma^2);$$

$$\sigma_3 \gamma^2 - \sigma_3^2 \gamma^4 = \sigma_3^2 \gamma^2 (\beta^2 + \alpha^2).$$

С обзиром на услов ортогоналности главних праваца могу се извести извесни закључци о коренима секуларне једначине, тј. о главним напонима.

1° Претпоставимо да су два корена кођуговано комплексна $\sigma_1 = \sigma' + i\sigma''$, $\sigma_2 = \sigma' - i\sigma''$, где је $i = \sqrt{-1}$, тада морају и главни правци бити облика $\mathbf{n}_1 = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, $\mathbf{n}_2 = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$, па услов (1.34) даје релацију

$$(\sigma_1 - \sigma_2) (\mathbf{n}_1) \{ \mathbf{n}_2 \} = 2i\sigma'' [(\mathbf{a}) \{ \mathbf{a} \} + (\mathbf{b}) \{ \mathbf{b} \}] = 2i\sigma'' (\alpha^2 + \beta^2) = 0, \quad \text{тј. } \sigma'' = 0,$$

те су корени (глави напони) *реални*.

2° Ако је $\mathcal{N}_3 = |\mathbf{N}| > 0$, онда су корени *позитивни и различити*. Када је $\mathcal{N}_3 = |\mathbf{N}| < 0$ тада постаје и *непозитивни корени*, а када је $\mathcal{N}_3 = |\mathbf{N}| = 0$ тада је један корен једнак нули.

3° Када су два корена једнака ($\sigma_1 = \sigma_2$) тада је он корен изводне једначине $f'(\sigma_s) = 3\sigma_s^2 - 2\mathcal{N}_1\sigma_s + \mathcal{N}_2 = 0$, па се може одредити само *трећи главни правац*, а друга су два произвољна али међусобно управна и управна на трећем правцу.

4° Када су сва три главна напона једнака ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_s$) тада је, према (1.36), главни напон $\sigma_s = \sigma = \mathcal{N}_1/3$, па су свака три међусобно управна правца у истој тачки (0) главни правци.

За одређивање корена секуларне кубне једначине (1.31), користимо се следећим упутствима.

1° Ако је неки корен цео број онда је он чинилац броја $\mathcal{N}_3 = |\mathbf{N}|$.

2° Сменом $\sigma_s = \lambda + \mathcal{N}_1/3$ секуларна једначина своди се на *редуовану* (коновску) *кубну једначину**

$$\sigma_s = \lambda + \mathcal{N}_1/3; \quad \lambda^3 + p\lambda + q = 0; \quad p = [3\mathcal{N}_2 - (\mathcal{N}_1)^2]/3;$$

$$q = -[27\mathcal{N}_3 + 2(\mathcal{N}_1)^3 - 9\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2]/27$$

са решењем

$$\lambda = u + v; \quad u^3 = -q/2 + \sqrt{\Delta}; \quad v^3 = -q/2 - \sqrt{\Delta}; \quad \Delta = (q/2)^2 + (p/3)^3.$$

Пошто је дискриминанта $D = -(27q^2 + 4p^3) = -27 \cdot 4\Delta > 0$, то је $\Delta < 0$, па је и $p < 0$, те су корени реални и различити („casus irreducibilis“). Тада се примењује тригонометријска метода, па су корени

$$r^2 = -p^3/27; \quad \cos \lambda = -q/2r;$$

$$\lambda_s = 2\sqrt{-1/3} \cos \{[\varphi + 2(s-1)\pi]/3\}; \quad \sigma_s = \lambda_s + \mathcal{N}_1/3.$$

3° Ако је $f(\sigma_s') > 0$, а $f(\sigma_s'') < 0$, онда се корен налази између тих вредности σ_s' и σ_s'' . Приближна вредност корена може се побољшати разним нумеричким методама, од којих је најпростија Нотпер-ова шема*.

4° Вредности корена се проверавају према Viète-овим условима (1.36).

Примери. 1. — Корени цели, позитивни и различити:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad [\text{N/mm}^2]; \quad \mathcal{N}_1 = 10 + 9 + 8 = 27; \quad \mathcal{N}_2 = 68 + 80 + 86 = 234; \quad \mathcal{N}_3 = |\mathbf{N}| = 648;$$

$$f(\sigma_s) = \begin{vmatrix} 10 - \sigma_s & 2 & 0 \\ 2 & 9 - \sigma_s & 2 \\ 0 & 2 & 8 - \sigma_s \end{vmatrix} = \sigma_s^3 - 27\sigma_s^2 + 234\sigma_s - 648 = 0; \quad \sigma_s = 12; 9; 6 \quad [\text{N/mm}^2];$$

$$\frac{\alpha_s}{4} = \frac{\beta}{-2(10 - \sigma_s)} = \frac{\gamma}{(10 - \sigma_s)(9 - \sigma_s) - 4} = C_s;$$

$$\alpha_s^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1;$$

$$\alpha_1 = 4 C_1; \quad \beta_1 = 4 C_1; \quad \gamma_1 = 2 C_1; \quad C_1^2 (16 + 16 + 4) = 36 C_1^2 = 1;$$

$$\alpha_2 = 4 C_2; \quad \beta_2 = -2 C_2; \quad \gamma_2 = -4 C_2; \quad 36 C_2^2 = 1;$$

$$\alpha_3 = 4 C_3; \quad \beta_3 = -8 C_3; \quad \gamma_3 = \gamma C_3; \quad 144 C_3^3 = 1;$$

s	1	2	3
α_s	2/3	1/3	2/3
β_s	2/3	-1/3	-2/3
γ_s	1/3	-1/3	2/3
	\mathbf{n}_1	\mathbf{n}_2	\mathbf{n}_3

$$(\mathbf{n}_1) \{ \mathbf{n}_2 \} = (\mathbf{n}_1) \{ \mathbf{n}_3 \} = (\mathbf{n}_2) \{ \mathbf{n}_3 \} = 0;$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 12 & & \\ & 9 & \\ & & 6 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{G}_1 = 27;$$

$$\mathcal{G}_2 = 108 + 72 + 54 = 234;$$

$$\mathcal{G}_3 = 12 \cdot 9 \cdot 6 = 648.$$

* Таблица из Отрорности материјала, Таблица RI-C.

2. Корени цели али је један негативан:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{matrix} \mathcal{N}_1 = 5; \\ \mathcal{N}_2 = 2; \\ \mathcal{N}_3 = -8; \end{matrix}$$

$$f(\sigma_s) = \begin{vmatrix} 3-\sigma_s & -1 & 0 \\ -1 & 3-\sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & -1-\sigma_s \end{vmatrix} = \sigma_s^3 - 5\sigma_s^2 + 2\sigma_s + 8 = 0; \sigma_s = \begin{cases} 4 \\ 2 \text{ [N/mm}^2\text{]} \\ -1 \end{cases}$$

3. Корени су позитивни али нису цели бројеви.

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & -2 \\ 6 & 10 & 3 \\ -2 & 3 & 8 \end{pmatrix}; \begin{matrix} \mathcal{N}_1 = 30; \\ \mathcal{N}_2 = 247; \\ \mathcal{N}_3 = 452; \end{matrix} \quad \begin{matrix} f = \sigma_s^3 - 30\sigma_s^2 + 247\sigma_s - 452 = 0; \sigma_s = \lambda + 10; \\ \lambda^3 - 53\lambda + 18 = 0; p = -53; q = 18; \Delta = -5433; \end{matrix}$$

$$r^2 = \frac{1}{27} \cdot 53^3; \quad r = 53 \sqrt{\frac{53}{27}} = \frac{53}{9} \sqrt{159}; \quad \cos \varphi = -\frac{81}{53 \sqrt{159}} = -0,121; \quad \varphi = 97^\circ; \quad \frac{\Phi}{3} = 32^\circ 20';$$

$$\lambda_1 = 2 \sqrt{\frac{53}{3}} \cdot 0,845 = 7,103; \quad \sigma_1 = 7,103 + 10 = 17,103 \text{ [N/mm}^2\text{]},$$

$$\lambda_2 = 2 \sqrt{\frac{53}{3}} \cdot \cos(152^\circ 20') = 8,406 \cdot (-0,886) = -7,448; \quad \sigma_3 = 2,552 \text{ [N/mm}^2\text{]};$$

$$\lambda_3 = 2 \sqrt{\frac{53}{3}} \cdot \cos(272^\circ 20') = 8,406 \cdot 0,041 = 0,345; \quad \sigma_2 = 10,345 \text{ [N/mm}^2\text{]}.$$

Проба према Viète-овим условима (1.36).

$$\mathcal{G}_1 = 17,103 \cdot 10,345 + 2,552 = 30,000;$$

$$\mathcal{G}_2 = 17,103 \cdot 10,345 + 17,103 \cdot 2,552 + 10,345 \cdot 2,552 = 246,978 \approx 247;$$

$$\mathcal{G}_3 = 17,103 \cdot 10,345 \cdot 2,552 = 451,527 \approx 452$$

па су резултати задовољавајући.

Вредност корена може се побољшати помоћу Норген-ове шеме:

σ_s	1	\mathcal{N}_1	\mathcal{N}_2	\mathcal{N}_3	s	1	2	3
17,103	1	-30,000 17,103	247,000 -220,577	-452,000 451,913	α_s	0,754	0,395	0,526
	1	-12,897 17,103	26,423 71,935	-0,087	β_s	0,656	-0,387	-0,646
	1	4,206	98,358	$\Delta = \frac{0,087}{98,358} = 0,0001$	γ_s	0,042	-0,833	0,551
						Пробе (1.36): $\mathcal{G}_1 = 30,000$ $\mathcal{G}_2 = 247,002$ $\mathcal{G}_3 = 452,042.$		
17,104	1	-30,000 17,104	247,000 -220,537	-452,000 452,007				
	1	-12,896 17,104	26,427 71,974	-0,007				
	1	4,208	98,401	$\Delta \approx 0$				
$f: (\sigma_s - 17,104) = \sigma_s^2 - 12,896 \sigma_s + 26,427 = 0; \quad \sigma_s = 17,104; \quad 10,340; \quad 2,556 \text{ [N/mm}^2\text{]}$								

Код равнот стања напрезања (слика 1.8) је $\mathcal{N}_3 = 0$, па је секуларна једначина квадрантна, са два реална корена:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau \\ \tau & \sigma_y \end{pmatrix}; \quad \tau = \tau_{xy}; \quad f(\sigma_s) = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_s & \tau \\ \tau & \sigma_y - \sigma_s \end{vmatrix} = \sigma_s^2 - \mathcal{N}_1 \sigma_s + \mathcal{N}_2 = 0;$$

$$\mathcal{N}_1 = \sigma_x + \sigma_y; \quad \mathcal{N}_2 = \sigma_x \sigma_y - \tau^2.$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} [\mathcal{N}_1 \pm \sqrt{\mathcal{N}_1^2 - 4 \mathcal{N}_2}] = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau^2};$$

$$\sigma_1 > \sigma_2; \quad \Delta = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau^2; \quad \frac{\alpha_s}{-\tau} = \frac{\beta_s}{\sigma_x - \sigma_s} = C_s; \quad \text{tg } \alpha_s = \frac{\beta_s}{\alpha_s} = \frac{\sigma_s - \sigma_x}{\tau} =$$

$$= \frac{-(\sigma_x - \sigma_y) \pm \sqrt{\Delta}}{2\tau}; \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}; \quad \text{tg } \alpha_1 \cdot \text{tg } \alpha_2 = -1; \quad (1.41)$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y; \quad \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_x \sigma_y - \tau^2.$$

Например, за једно равно напонско стање биће:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 13 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} [\text{N/mm}^2]; \quad f(\sigma_s) = \sigma_s^2 - 23 \sigma_s + 126 = 0;$$

$$\sigma_s = 14; \quad 9 [\text{kp/mm}^2]; \quad \text{tg } \alpha_1 = 1/2; \quad \alpha_1 = 26^\circ 35'.$$

Када је танка плоча затегнута у Ox -правцу, а притиснута у Oy -правцу напонима једнаких величина $\sigma_x = |-\sigma_y| = \sigma$ (слика 1.12 c) онда ће бити компонентни напони за неку раван са нормалом \mathbf{n} :

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \\ & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & \\ & -\sigma \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \\ & \sigma_2 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_n = (\mathbf{n}) \mathbf{N} \{\mathbf{n}\} = (\cos \varphi \sin \varphi) \begin{pmatrix} \sigma & \\ & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \sigma (\cos \varphi \sin \varphi) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} = \sigma \cos 2 \varphi; \quad (1.42)$$

$$\tau_{(n)} = (\mathbf{t}) \mathbf{N} \{\mathbf{n}\} = (-\sin \varphi \cos \varphi) \begin{pmatrix} \sigma \cos \varphi \\ -\sigma \sin \varphi \end{pmatrix} = -\sin 2 \varphi;$$

Ако је $\varphi = 45^\circ$, онда је $\sigma_n = 0$; $\tau_{(n)} = -\sigma = \tau$, па у тим равнима дејствују само тангенцијални напони, а то је случај *чистиој смицања* (слика 1.12 c).

1.10. Напонске површи. — Равни R_n у тачки O напрегнутог тела (K), са нормалом \mathbf{n} одговара тотални напон $\mathbf{p}_{(n)}$. Ако се та равна мења онда ће се мењати и нормала \mathbf{n} па и напон $\mathbf{p}_{(n)}$. Ова се промена може предочити и *графички*. У правцу нормале \mathbf{n} пренесимо вектор $\mathbf{r} = \overline{OM}$, онда су његове координате у односу на триједар $Oxyz$ одређене $\mathbf{r}(r\alpha; r\beta; r\gamma)$ где су α, β, γ косинуси смера нормале (слика 1.13 a), јер је $\{\mathbf{r}\} = r\{\mathbf{u}\}$. Нормални напон, према (1.18), биће:

$$\sigma_n = (\mathbf{n}) \{\mathbf{p}_{(n)}\} = (\mathbf{n}) \mathbf{N} \{\mathbf{n}\} = r^{-2} (r) \mathbf{N} \{\mathbf{r}\}, \quad (1.43)$$

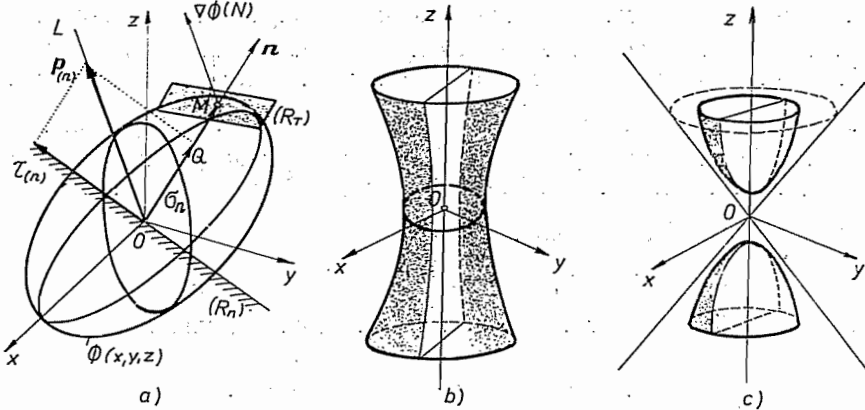
па следи да је

$$\Phi(x, y, z) = (r) \mathbf{N} \{\mathbf{r}\} = \sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2[\tau_{xy} xy + \tau_{xz} xz + \tau_{yz} yz] =$$

$$= \sigma_n r^2 = \pm C^2, \quad (1.44)$$

где је дужина вектора изабрана тако да је производ $\sigma_n r^2 = \pm C^2 = \text{const}$. Када је нормални напон σ_n *напон зајезања* ($\sigma_n > 0$) тада је константа $+C^2$, обратно, када је *напон притиска* ($\sigma_n < 0$) тада је константа $-C^2$. Израз

$\Phi(x, y, z)$ је хомогена квадратна тернерна форма променљивих x, y, z и представља површ другог реда са средиштем (O) која се назива *Саучу-јева напонска површ* („Саучу-јев квадрик“). Ова површ може бити: *елипсоид* (слика 1.13.a), *једнограни хиперболоид* (слика 1.13.b), и *двограни хиперболоид* (слика 1.13.c). Завршне тачке M вектора $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ леже на овим површима, које су *ходографи* векторских функција \mathbf{r} . Узме ли се да је $|\mathbf{r}| = r = 1/\sqrt{\sigma_n}$ биће константа $C^2 = 1$.



Слика 1.13. — Напонске површи

Квадратна форма (1.44) може се свести на *канонски облик* када се уместо триједра $Oxyz$ узме триједар $O\xi\eta\zeta$ са главним осама. Сменом $\{\mathbf{r}\} = \mathbf{E}\{\rho\}$, где је $\mathbf{E} = (\{\mathbf{n}_1\} \{\mathbf{n}_2\} \{\mathbf{n}_3\})$ матрица јединичних вектора главних праваца који су ортонормирани, добија се да је

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= (r) \mathbf{N} \{r\} = (\bar{\rho}) \mathbf{E}' \mathbf{N} \mathbf{E} \{\rho\} = (\bar{\rho}) \mathbf{G} \{\rho\} = \\ &= \Phi = \sigma_1 \xi^2 + \sigma_2 \eta^2 + \sigma_3 \zeta^2 = 1, \end{aligned} \quad (1.45)$$

где је \mathbf{G} тензор главних напона, $\mathbf{G} = \mathbf{E}' \mathbf{N} \mathbf{E}$. Облици напонских површи зависе од главних напона (тензора \mathbf{G}) и константе C^2 и приказане су у табелици.

Напонске површи

Предзнак главних напона σ_s	Константа C^2	Површ	Једначина површи
$\sigma_1 > 0; \sigma_1 < 0$ $\sigma_2 > 0; \sigma_2 < 0$ $\sigma_3 > 0; \sigma_3 < 0$	> 0 < 0	елипсоид	$\sigma_1 \xi^2 + \sigma_2 \eta^2 + \sigma_3 \zeta^2 = 1$ $a^2 = \frac{C^2}{\sigma_1}; \quad b^2 = \frac{C^2}{\sigma_2}; \quad c^2 = \frac{C^2}{\sigma_3}$
$\sigma_1 > 0$ $\sigma_2 > 0$ $\sigma_3 < 0$	> 0	једнограни хиперболоид	$\sigma_1 \xi^2 + \sigma_2 \eta^2 - \sigma_3 \zeta^2 = 1$ $a^2 = C^2/\sigma_1; \quad b^2 = C^2/\sigma_2; \quad c^2 = C^2/\sigma_3$
	< 0	двограни хиперболоид	$\sigma_1 \xi^2 + \sigma_2 \eta^2 - \sigma_3 \zeta^2 = -1$ $\sigma_3 = -\sigma_3 $
	0	асимптотски конус	$\sigma_1 \xi^2 + \sigma_2 \eta^2 - \sigma_3 \zeta^2 = 0$ $\sigma_3 = -\sigma_3 $

Када је напргана напонска површ, тада се тотални напон $\mathbf{p}_{(n)}$ за равн (R_n) може одредити на овај начин. Градијент функције $\Phi(x, y, z)$ пада у правац нормале $\{\vec{N}\}$ те површи, па следи да је

$$\{p_{(n)}\} = \mathbf{N} \{n\}; \quad \Phi = (r) \mathbf{N} \{r\}; \quad \text{grad } \Phi = 2 \mathbf{N} \{r\} = 2r \mathbf{N} \{n\} = 2r \{p_{(n)}\} = \lambda \{\vec{N}\}. \quad (1.46)$$

Ако се у тачки M у којој вектор \mathbf{r} продире напонску површ повуче нормала површи $\{\vec{N}\}$, онда је тотални напон $\mathbf{p}_{(n)}$ паралелан тој нормали али пролази кроз тачку O . Када се познаје нормални напон $\sigma_n = |\vec{OQ}|$, тада треба из завршне тачке Q повући нормалу на $\{n\}$, она ће сећи праву L паралелну нормали површи $\{\vec{N}\}$ у тачки P , па је $|\mathbf{p}_{(n)}| = |\vec{OP}|$ (слика 1.13a).

Lamé је дао друкчију геометријску интерпретацију напонске површи. За триједар главних оса $O\xi\eta\zeta$ напон је $\{p_{(n)}\} = \mathbf{G} \{n\}$. Представили се овај напон вектором $\vec{\rho}(\xi, \eta, \zeta)$ онда ће бити:

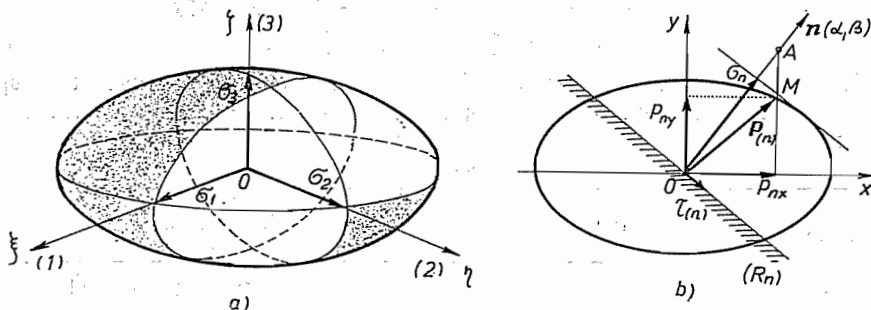
$$\{p_{(n)}\} = \mathbf{G} \{n\}; \quad p_{n1} = \xi = \sigma_1 \alpha; \quad p_{n2} = \eta = \sigma_2 \beta; \quad p_{n3} = \zeta = \sigma_3 \gamma, \quad (1.47)$$

па пошто је збир квадрата косинуса смера једнак јединици, то следи

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1; \quad \frac{\xi^2}{\sigma_1^2} + \frac{\eta^2}{\sigma_2^2} + \frac{\zeta^2}{\sigma_3^2} = 1. \quad (1.48)$$

Ова једначина представља *тироосни елипсоид* са средиштем у O , полуоса једнаких главним напонима (слика 1.14.a), $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$. Ако су два напона једнака ($\sigma_1 = \sigma_2$) елипсоид је *обртни (рошациони)*; а када су сва три главна напона једнака ($\sigma_s = \sigma$) онда је *сфера („напонска сфера“)*, полупречника σ .

Код *равној стања напрезања* Lamé-ов елипсоид напона се претвара у *елипсу напона* односно *круи напона* (слика 1.14.b).



Слика 1.14. — Lamé-ов елипсоид напона и елипса напона

Пример — 1. За једно просторно напонско стање биће:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ [N/mm}^2\text{]}; \quad \sigma_s^3 - 8\sigma_s^2 + 17\sigma_s - 10 = 0;$$

$$\sigma_s = 5; 2; 1 \text{ [N/mm}^2\text{]}; \quad \frac{\alpha_s}{\sigma_s - 1} = \frac{\beta_s}{\sigma_s - 3} = \frac{\gamma_s}{\sigma_s^2 - 6\sigma_s + 7} = C_s;$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{E}' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{E}|=1;$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}' \mathbf{N} \mathbf{E};$$

$$\Phi = 4x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2(xy + xz + yz) = 5\xi^2 + 2\eta^2 + \zeta^2 = 1; \quad (\xi/5)^2 + (\eta/2)^2 + (\zeta/1)^2 = 1.$$

2. За равно стање напрезања је:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} [\text{N/mm}^2]; \quad \sigma_s^2 - 9\sigma_s + 14 = 0; \quad \sigma_s = 7; \quad 2 [\text{N/mm}^2];$$

$$\frac{\alpha_s}{-2} = \frac{\beta_s}{6 - \sigma_s} = C_s; \quad \mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{E}' = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{G} = \mathbf{E}' \mathbf{N} \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 7 & \\ & 2 \end{pmatrix};$$

$$\Phi(x, y) = 6x^2 + 3y^2 + 4xy = 7\xi^2 + 2\eta^2 = 1; \quad \text{grad } \Phi = (12x + 4y)\mathbf{i} + (4x + 6y)\mathbf{j} = 2\mathbf{N}\{\mathbf{r}\}; \\ (\xi/7)^2 + (\eta/2)^2 = 1; \quad 4\xi^2 + 49\eta^2 - 196 = 0.$$

1.11. Екстремне вредности тангенцијалних напона. — Када се у посматрајој тачки (O) узме триједар оса $O\xi\eta\zeta$, тада се, према (1.40), добија

$$\tau_{(n)}^2 = (\sigma_1 \alpha)^2 + (\sigma_2 \beta)^2 + (\sigma_3 \gamma)^2 - (\sigma_1 \alpha^2 + \sigma_2 \beta^2 + \sigma_3 \gamma^2)^2 \quad (1.49)$$

односно, после замене $\gamma^2 = 1 - \alpha^2 - \beta^2$, биће

$$\tau_{(n)}^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_3^2)\alpha + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2)\beta + \sigma_3^3 - \\ - [(\sigma_1 - \sigma_3)\alpha^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)\beta^2 + \sigma_3]^2 = f(\alpha, \beta). \quad (1.50)$$

па је напон $\tau_{(n)}$ функција промењивих α и β , те су услови екстремума $2\tau_{(n)}[\partial \tau_{(n)}/\partial \alpha] = 0$ и $2\tau_{(n)}[\partial \tau_{(n)}/\partial \beta] = 0$. Пошто раван R_n са нормалом η није по предпоставци главна раван, то је $\tau_{(n)} \neq 0$, па морају бити задовољена друга два услова за одређивање екстремних вредности тангенцијалних напона:

$$\partial \tau_{(n)}/\partial \alpha = 0; \quad (\sigma_1 - \sigma_3) \{(\sigma_1 - \sigma_3) - 2[(\sigma_1 - \sigma_3)\alpha^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)\beta^2]\} \alpha = 0; \quad (1.51)$$

$$\partial \tau_{(n)}/\partial \beta = 0; \quad (\sigma_2 - \sigma_3) \{(\sigma_2 - \sigma_3) - 2[(\sigma_1 - \sigma_3)\alpha^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)\beta^2]\} \beta = 0. \quad (1.52)$$

Разликоваћемо више случајева.

1. *Случај различитих главних напона* ($\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$). — Претходне једначине (1.51) и (1.52) су кубне по α и β , па за свако α и β имају по три решења. Стога, с обзиром на везу између косинуса смера (1.30), могу бити следеће комбинације косинуса смера.

2° $\alpha \neq 0; \beta \neq 0; \gamma \neq 0$. — У овом случају предње једначине могу бити задовољене само ако су главни напони једнаки, а то је супротно горњој предпоставци, па се ова комбинација косинуса смера мора *одбацити*.

2° $\alpha = \beta = 0; \gamma = 1$. — Ова је комбинација *немогућа*, јер би тада, према (1.49), било $\tau_{(n)}^2 = 0$, па би раван R_n била главна, што је супротно предпоставци.

3° $\alpha=0$; $\beta \neq 0$. — Дељењем једначине (1.52) са β , пошто је $\beta \neq 0$, добија се релација

$$(\sigma_2 - \sigma_3) - 2[(\sigma_1 - \sigma_3)\alpha^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)\beta^2] = (\sigma_2 - \sigma_3)(1 - 2\beta^2) = 0.$$

А како је по претпоставци $\sigma_2 \neq \sigma_3$, то мора бити задовољен услов

$$1 - 2\beta^2 = 0; \beta = \pm \sqrt{2}/2; \alpha = 0; \gamma = \pm \sqrt{2}/2, \quad (a)$$

па се из (1.49) добија екстремна вредност тангенцијалног напона

$$\tau_{(I)}^2 = (\sigma_2 - \sigma_3)^2/4; \tau_{(I)} = \pm (\sigma_2 - \sigma_3)/2. \quad (b)$$

4° $\alpha \neq \beta = 0$. — Аналогно претходном случају, пошто је $\alpha \neq 0$, дељењем (1.51) са α , а како је по претпоставци $\sigma_1 \neq \sigma_3$, следи из (1.49):

$$(\sigma_1 - \sigma_3)(1 - 2\alpha^2) = 0; \alpha = \pm \sqrt{2}/2; \beta = 0 \quad \gamma = \pm \sqrt{2}/2; \\ \tau_{(II)} = \pm (\sigma_1 - \sigma_3)/2. \quad (c)$$

5° $\alpha \neq 0$; $\gamma = 0$. — Сменом $\beta^2 = 1 - \alpha^2 - \gamma^2$ у (1.49) следи да је $\tau_n = f(\alpha, \gamma)$

па је услов екстремума

$$\partial \tau_{(n)} / \partial \alpha = 0; (\sigma_1 - \sigma_2) \{ (\sigma_1 - \sigma_2) - 2[(\sigma_1 - \sigma_2)\alpha^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)\gamma^2] \} \alpha = 0 \quad (1.53)$$

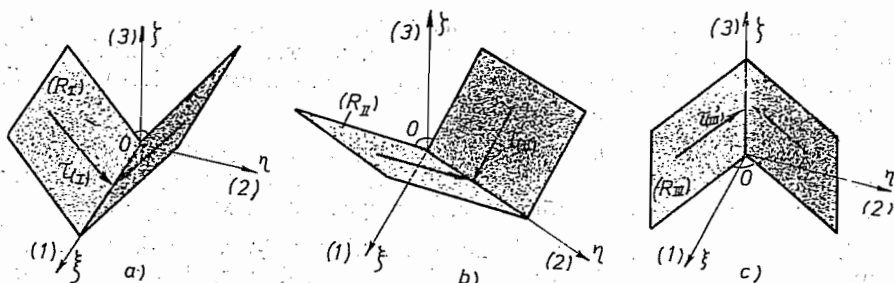
који за $\gamma = 0$, а пошто је по претпоставци $\sigma_1 \neq \sigma_2$, постоје

$$(\sigma_1 - \sigma_2)(1 - 2\alpha^2) = 0; \alpha = \pm \sqrt{2}/2; \beta = \pm 1/\sqrt{2}; \\ \gamma = 0; \tau_{(III)} = \pm (\sigma_1 - \sigma_2)/2. \quad (d)$$

Дакле, при услови $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ добијају се три равни у којима су екстремни тангенцијални напони како је показано у доњој табlici:

n	α	β	γ	τ
R_I	0	$\pm \sqrt{2}/2$	$\pm \sqrt{2}/2$	$\tau_{(I)} = \pm (\sigma_2 - \sigma_3)/2$
R_{II}	$\pm \sqrt{2}/2$	0	$\pm \sqrt{2}/2$	$\tau_{(II)} = \pm (\sigma_3 - \sigma_1)/2$
R_{III}	$\pm \sqrt{2}/2$	$\pm \sqrt{2}/2$	0	$\tau_{(III)} = \pm (\sigma_1 - \sigma_2)/2$

Главни напони (σ_s) дејствују дуж главних оса које су координатне осе триједара $O\xi\eta\zeta$ (слика 1.15). Раван највећег тангенцијалног напона $\tau_{(I)}$ про-



Слика 1.15. — Равни екстремних тангенцијалних напона

лази кроз $O\xi(1)$ главну осу Њена нормала гради са другим двама осама углове $\pm 45^\circ$.

Према закону о коњугованости тангенцијалних напона исти толики напон биће и у управној равни како је показано на слици.

У главним равнима ($O\xi\eta$; $O\eta\xi$; $O\xi\xi$) не дејствују тангенцијални напони, али, обратно, у равнима екстремних тангенцијалних напона дејствују нормални напони, и, према (1.39), износе:

$$R_I) \sigma_I = (\sigma_2 + \sigma_3)/2; \quad R_{II}) \sigma_{II} = (\sigma_1 + \sigma_3)/2; \quad R_{III}) \sigma_{III} = (\sigma_1 + \sigma_2)/2. \quad (1.55)$$

Код равнoй сйања найрезања је $\sigma_3 = 0$, па из (1.41) и (1.54) следи:

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \pm (b_1 - b_2)/2 = \pm 1/2 [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2]^{1/2}; \quad \alpha = \beta = \pm \sqrt{2}/2; \\ \sigma &= (\sigma_1 + \sigma_2)/2 = (\sigma_x + \sigma_y)/2, \end{aligned} \quad (1.56)$$

како је показано на слици 1.8.

II. Случај када су два напона једнака ($\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$). — Пошто је $\sigma_2 = \sigma_3$, а како је $\alpha \neq 0$, то из (1.53) следи:

$$\begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma_2)(1 - 2\alpha^2) &= 0; \quad \alpha = \pm \sqrt{2}/2; \quad \beta^2 + \gamma^2 = 1/2; \\ \tau_{\max}^2 &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2/4; \quad \tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2. \end{aligned}$$

Раван овог највећег тангенцијалног напона је тангенцијална раван *кружнoй конуса* (угла отвора од 90° са осом саметрије $O\xi(1)$ — осом) чија нормала гради са том осом угао од $\pm 45^\circ$. На исти начин добили бисмо и највеће напоне за друге две комбинације једнакости главних напона како је показано у доњој табlici.

Услов σ_s	Нормала равни n (α ; β ; γ)		τ_{\max}
$\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$	$\alpha = \pm \sqrt{2}/2$	$\beta^2 + \gamma^2 = 1/2$	$\pm (\sigma_1 - \sigma_2)/2$
$\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$	$\beta = \pm \sqrt{2}/2$	$\alpha^2 + \gamma^2 = 1/2$	$\pm (\sigma_1 - \sigma_3)/2$
$\sigma_1 = \sigma_3 \neq \sigma_2$	$\gamma = \pm \sqrt{2}/2$	$\alpha^2 + \beta^2 = 1/2$	$\pm (\sigma_1 - \sigma_2)/2$

(1.57)

III. Случај једнаких главних напона ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$). — У овом случају из (1.49) следи да је

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma; \quad \tau_{(n)}^2 = 0; \quad \tau_{(n)} = 0, \quad (1.58)$$

па је тада свака раван главна раван.

1.12. **Мохр-ови кругови напона.** — Узмимо у посматраној тачки O триједар главних оса $O\xi\eta\zeta$ (слика 1-16. а), онда ће према (1.38), (1.39) и (1.30), бити:

$$P_{(n)}^2 = \sigma_n^2 + \tau_{(n)}^2 = \sigma_1^2 \alpha^2 + \sigma_2^2 \beta^2 + \sigma_3^2 \gamma^2; \quad (b)$$

$$\sigma_n = \sigma_1 \alpha^2 + \sigma_2 \beta^2 + \sigma_3 \gamma^2; \quad (b)$$

$$1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2. \quad (c)$$

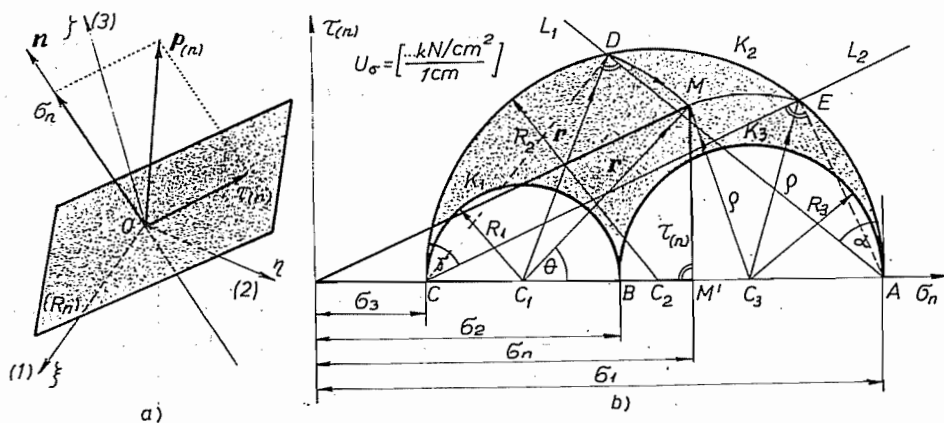
Када се друга једначина (*b*) помножи са $-(\sigma_1 + \sigma_3)$, трећа (*c*) са $\sigma_2 \sigma_3$ и све три једначине (*a*, *b*, *c*) саберу, добиће се непозната α^2 . Аналогно томе, множењем друге (*b*) са $-(\sigma_3 + \sigma_1)$ а треће (*c*) са $\sigma_3 \sigma_1$ и сабирањем добиће се непозната β^2 , и најзад множењем друге једначине са $-(\sigma_1 - \sigma_2)$, а треће са $\sigma_1 \sigma_2$ и сабирањем са првом добиће се непозната γ^2 . Ти се резултати могу написати у облику:

$$\alpha^2 = [\sigma_n^2 - (\sigma_2 + \sigma_3) \sigma_n + \sigma_2 \sigma_3 + \tau_{(n)}^2] / [\sigma_1^2 - (\sigma_2 + \sigma_3) \sigma_1 + \sigma_2 \sigma_3] = A/D \quad (d)$$

$$\beta^2 = [\sigma_n^2 - (\sigma_3 + \sigma_1) \sigma_n + \sigma_3 \sigma_1 + \tau_{(n)}^2] / [\sigma_2^2 - (\sigma_3 + \sigma_1) \sigma_2 + \sigma_3 \sigma_1] = B/E; \quad (e)$$

$$\gamma^2 = [\sigma_n^2 - (\sigma_1 + \sigma_2) \sigma_n + \sigma_1 \sigma_2 + \tau_{(n)}^2] / [\sigma_3^2 - (\sigma_1 + \sigma_2) \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_2] = C/F \quad (f)$$

Како је $-1 \leq \alpha \leq 1$ то је $0 \leq \alpha^2 \leq 1$, па је $\alpha^2 > 0$ позитивна величина. Ако се претпостави да су напони $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, онда се може ставити да су $\sigma_1 = \sigma_2 + \lambda$; $\sigma_1 = \sigma_3 + \mu$, где су $\lambda > 0$; $\mu > 0$, па је именилац *D* у једнакости (*d*) позитиван $D = \sigma_1^2 - (2\sigma_1 - \lambda - \mu)\sigma_1 + (\sigma_1 - \lambda)(\sigma_1 - \mu) = \lambda\mu > 0$, те мора и бројилац бити позитиван, $A > 0$ јер је $\lambda^2 > 0$. Пошто је $\sigma_2 = \sigma_3 + \nu$, где је $\nu > 0$, те се добија да је $E = \lambda\nu > 0$, па из (*e*) следи да је и $B > 0$. Аналогне томе, биће $F = \mu\nu > 0$, па је и бројилац *C* у (*f*) позитиван, $C > 0$. У координатном систему $O \sigma_n \tau_{(n)}$ услов $A=0$ представља круг (K_1), полупречника $R_1 = (\sigma_2 - \sigma_3)/2$ са средиштем у $C_1(p_1; 0)$ на $O \sigma_n$ -оси. Друга два услова



Слика 1.16. — Мехг-ови кругови напона

$B=0$ и $C=0$ претстављају такође кругове (K_2 и K_3) са средиштима у C_2 и C_3 на $O \sigma_n$ -оси (слика 1.16. *b*). Ти су резултати приказани у следећој табlici:

Услов	Тежиште C_i	Координате p_i	C_i ; q_i	Полупречник круга R_i
$A=0$	C_1	$(\sigma_2 + \sigma_3)/2$	0	$R_1 = (\sigma_2 - \sigma_3)/2$
$B=0$	C_2	$(\sigma_1 + \sigma_3)/2$	0	$R_2 = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$
$C=0$	C_3	$(\sigma_1 + \sigma_2)/2$	0	$R_3 = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$

(1.59)

Ови се кругови називају *Моир-ови кругови напона за просторно напонско стање*. Полукругови (K_1) одређују у равни $O \sigma_n \tau_{(n)}$ област која има особину да координате сваке њене тачке (M) поедстављају компонентне напоне (σ_n и $\tau_{(n)}$) за раван R_n орјентисану нормалом \mathbf{n} у посматраној тачки O напрегнутог тела, а за случај да су главни напони за ту тачку $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Ови кругови су уствари Моир-ови кругови напона за *шири равна напонска стања* за пресеке управне на главне осе (K_1 за пресек управан на $O\xi$ -осу, K_2 на $O\eta$ -осу и K_3 на $O\zeta$ -осу).

Доказ се може извести на овај начин. Пртеж је пртан у размери $u_\sigma = [\dots (\text{kN/cm}^2) / 1 \text{ cm}]$. Ако се из тачака A и C осе $O \sigma_n$ повуку праве L_1 и L_2 под угловима α и γ према $O \tau_{(n)}$ -оси, оне ће сећи круг K_2 у тачкама D и E . Када се из средишта C_1 и C_3 , полукругова K_1 и K_3 , полупречницима $r = \overline{C_1 D}$ и $\rho = \overline{C_3 E}$ опишу луци, они ће се сећи у тачки M чије координате одређују компонентне напоне $\sigma_n = u_\sigma \cdot \overline{OM}'$; $\tau_{(n)} = u_\sigma \cdot \overline{MM}'$, па је $p_{(n)} = u_\sigma \cdot \overline{OM}$.

Из троуглова $\Delta C_1 DA$; ΔCEC_3 и $\Delta C_1 MC_3$ по косинусној теореми следи:

$$r^2 = \overline{C_1 A}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \cdot \overline{C_1 A} \cdot \overline{AD} \sin \alpha; \quad \rho^2 = \overline{CE}^2 + \overline{CC_3}^2 - 2 \overline{CE} \cdot \overline{CC_3} \sin \gamma;$$

$$\rho^2 = r^2 + \overline{C_1 C_3}^2 - 2 r \cdot \overline{C_1 C_3} \cos \theta.$$

Са слике се види да су: $\overline{CC_3} = 2 R_1 + R_3$; $\overline{C_1 C_3} = R_1 + R_3$; $\overline{C_1 A} = R_1 + 2 R_3$, а пошто су троуглови ΔCDA , ΔCEA правоугли (јер су уписани у полукруг K_2), то ће бити $\overline{AD} = \overline{CA} \sin \alpha = 2 (R_1 + R_3) \sin \alpha$; $\overline{CE} = \overline{CA} \sin \gamma = 2 (R_1 + R_3) \sin \gamma$. Стога предње релације постају

$$a) \quad r^2 = R_1^2 + 4 (R_1 + R_3) R_3 \cos^2 \alpha; \quad b) \quad \rho^2 = R_3^2 + 4 (R_1 + R_3) R_1 \cos^2 \gamma;$$

$$c) \quad \rho^2 = r^2 + (R_1 + R_3)^2 - 2 r (R_1 + R_3) \cos \theta.$$

Из треће релације (c) с обзиром на прве две добија се да је

$$r \cos \theta = \frac{1}{2} \left[\frac{r^2 - \rho^2}{R_1 + R_3} + (R_1 + R_3) \right] = R_1 + 2 R_3 \cos^2 \alpha - 2 R_1 \cos^2 \gamma,$$

па је апсциса тачке M :

$$\overline{OM}' = \overline{OC} + R_1 + r \cos \theta = \overline{OC} + 2 (R_1 + R_3 \cos^2 \alpha - R_1 \cos^2 \gamma).$$

Множењем коефицијентом за размере u_σ и с обзиром на (1.59) добија се

$$u_\sigma \cdot \overline{OM}' = \sigma_3 + (\sigma_2 - \sigma_3) + (\sigma_1 - \sigma_2) \cos^2 \alpha - (\sigma_2 - \sigma_3) \cos^2 \gamma = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma = \sigma_n$$

а то је и требало доказати.

Из троугла ΔOMC_1 по косинусној теореми следи:

$$\overline{OM}^2 = \overline{OC_1}^2 + r^2 + 2 r \overline{OC_1} \cos \theta = \overline{OC}^2 + \overline{OC} (4 R_1 + 4 R_3 \cos^2 \alpha - 4 R_1 \cos^2 \gamma) + 4 R^2 + 8 R_1 R_3 \cos^2 \alpha + 4 R_3^2 \cos^2 \alpha - 4 R_1^2 \cos^2 \gamma,$$

Множењем овог израза са $(u_\sigma)^2$, с обзиром на (1.59) и (1.38), добија се

$$(u_\sigma \overline{OM})^2 = \sigma_3^2 + 2 (\sigma_2 - \sigma_3) \sigma_3 + [2 (\sigma_1 - \sigma_2) \sigma_3 + 2 (\sigma_2 - \sigma_3) (\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_1 - \sigma_2)^2] \cos^2 \alpha + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - [2 (\sigma_2 - \sigma_3) \sigma_3 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] \cos^2 \gamma + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 = \sigma_1^2 \cos^2 \alpha - \sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma = (p_{(n)})^2.$$

Пошто је троугао $\Delta OMM'$ правоугли, те, према (1.40), следи

$$\overline{MM}'^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OM}'^2; \quad (u_\sigma \overline{MM}')^2 = p_{(n)}^2 - \sigma_n^2 = \tau_{(n)}^2,$$

а то је и требало доказати.

1.13. Октаедарски напони. — Раван R_n која одсеца једнаке одсечке ($a = b = c$) на главним осама триједра $O \xi \eta \zeta$, односно чија нормала \mathbf{n} гради са тим осама једнаке углове чији су косинуси $\alpha = \beta = \gamma = \sqrt{3}/3$ назива се

октаедарска раван (слика 1.17), па су напони за такву раван *октаедарски напони*, те према чл. 1.9, износе:

$$\mathbf{P}_{(\text{okt})}^2 = (\mathbf{n}) \mathbf{G}^2 \{\mathbf{n}\} = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)/3 = \mathcal{G}_1^{(2)}/3 \parallel [(\mathcal{G}_1)^2 - 2 \mathcal{G}_2]/3; \quad (1.60)$$

$$\sigma_{(\text{okt})} = (\mathbf{n}) \mathbf{G} \{\mathbf{n}\} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = \mathcal{G}_1/3; \quad (1.61)$$

$$\tau_{(\text{okt})}^2 = [3(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2]/9 = [\mathcal{G}_1^{(2)} - (\mathcal{G}_1)^2]/3 \quad (1.62)$$

Види се да је нормални октаедарски напон једнак аритметичкој средини главних напона, односно $1/3$ првог скалара \mathcal{G}_1 матрице \mathbf{G} .

С обзиром на екстремне вредности тангенцијалних напона (1.54) могу се написати и следећи обрасци за тангенцијални напон:

$$\tau_{(\text{okt})}^2 = 4 [\tau_{(\text{I})}^2 + \tau_{(\text{II})}^2 + \tau_{(\text{III})}^2]/9; \quad \tau_{(\text{okt})} = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]^{1/2}/3, \quad (1.63)$$

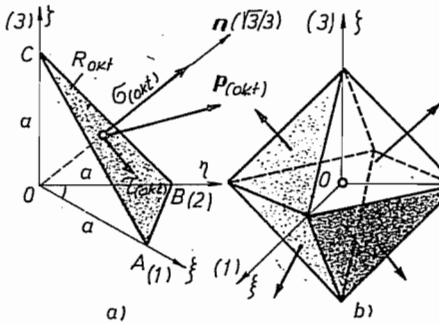
а с обзиром на напонске инваријанте биће

$$\tau_{(\text{okt})}^2 = 2 [(C_{\mathcal{I}}')^2 - 3 C_{\mathcal{I}}']/9; \quad 9 \tau_{(\text{okt})}^2 = 2 (C_{\mathcal{I}}')^2 - 6 C_{\mathcal{I}}' = 2 (\mathcal{G}_1)^2 - 6 \mathcal{G}_2; \quad (1.64)$$

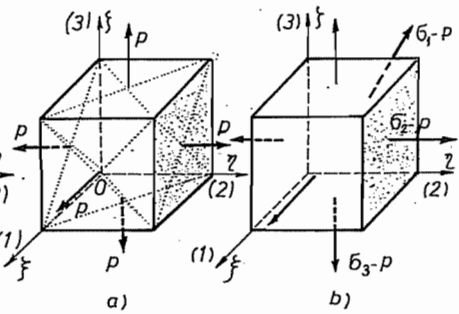
односно

$$\tau_{(\text{okt})} = [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)]^{1/2}/3. \quad (1.65)$$

Тотални и компонентни октаедарски напони једнакн су у свих осам равни правилног октаедра који се може саставити од октаедарских равни у триједру главних оса $O \xi \eta \zeta$ (слика 1.17 b).



Слика 1.17. — Октаедарски напони



Слика 1.18. — Сферни тензор напона и девијатор напона

1.14. Сферни тензор и девијатор напона. — Из Отпорности материјала* познато је да се према Непску-јевеј „*хийлошези највећеи деформационои рада уишошенои на иромену облики (форме)*“ један део потенцијалне енергије деформације троши на *иромену заиремине*, а други на *иромену облика (форме)*. Нека је средњи напон $\sigma_{sr} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = p = \sigma_{(\text{okt})}$, онда се тензор напона може разложити на два дела (слика 1.18); *сферни тензор напона и девијатор напона*

$$\hat{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{S}}_p + \hat{\mathbf{D}},$$

* Отпорност материјала, (чл. 13.1).

са матрицама

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S}_p = \begin{pmatrix} p & & \\ & p & \\ & & p \end{pmatrix} = p \mathbf{I}; \quad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \sigma_1 - p & & \\ & \sigma_2 - p & \\ & & \sigma_3 - p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix}. \quad (1.66)$$

Скалари сферног тензора су;

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= 3p = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \mathcal{G}_1; \\ \mathcal{S}_2 &= 3p^2 = (\mathcal{G}_1)^2/3; \\ \mathcal{S}_3 &= p^3 = (\mathcal{G}_1)^3/27; \quad p = \sigma_{sr}; \end{aligned} \quad (1.67)$$

а девијатора су;

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \Sigma(\sigma_i - p) = \mathcal{G}_1 - 3p = 0; \\ \mathcal{D}_2 &= \delta_1 \delta_2 + \delta_1 \delta_3 + \delta_2 \delta_3 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3 - 3p^2 = \\ &= -[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]/6 = -2[\tau_{(i)^2} + \tau_{(ii)^2} + \tau_{(iii)^2}]/3 = \\ &= -3\tau_{(okt)^2}/2 = -[(\mathcal{G}_1)^2 - 3\mathcal{G}_2]/3 = -[\mathcal{C}'_1]^2 - 3\mathcal{C}'_2/3; \\ \mathcal{D}_3 &= \delta_1 \delta_2 \delta_3 = (\sigma_1 - p)(\sigma_2 - p)(\sigma_3 - p) = [(\sigma_1 - p)^3 + \\ &+ (\sigma_3 - p)^3 + (\sigma_3 - p)^3]/3 = \mathcal{G}_3 - \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2/3 + 2(\mathcal{G}_1)^3/27. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Битна карактеристика девијатора је да је његов први скалар једнак нули. Други скалар сразмеран је збиру квадрата екстремних вредности тангенцијалних напона, па је 1913, год. R. von Mises увео хипотезу да се лом материјала дешава при $\mathcal{D}_2 = \text{const}$. Nadai је уочио да је овај скалар сразмеран квадрату октоедарског тангенцијалног напона, па су величине \mathcal{D}_2 и $\tau_{(okt)}$ основне карактеристике теорије иластичности.

Девијаторови скалари (1.68) могу се довести у везу са одговарајућим линеарним, квадратним и кубним одступањем овог стања напрезања од октоедарског стања напрезања, према следећем:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= [(\sigma_1 - p) + (\sigma_2 - p) + (\sigma_3 - p)]/3 = \mathcal{D}_1/3 = 0 \quad \mathcal{D}_1 = \mathcal{L} = 0; \\ \mathcal{Q} &= \{[(\sigma_1 - p)^2 + (\sigma_2 - p)^2 + (\sigma_3 - p)^2]\} = \tau_{(okt)} \quad \mathcal{D}_2 = -3\mathcal{Q}/2 = -3\tau_{(okt)}/2; \\ \mathcal{K} &= \{[(\sigma_1 - p)^3 + (\sigma_2 - p)^3 + (\sigma_3 - p)^3]\}/3; \quad \mathcal{D}_3 = \mathcal{K}^3. \end{aligned}$$

Cauchy-јева напонска површ за девијатор је хиперболид, јер је

$$\delta_1 \xi^2 + \delta_3 \eta^2 + \delta_3 \zeta^2 = (\sigma_1 - p)^2 \xi^2 + (\sigma_2 - p)^2 \eta^2 + (\sigma_3 - p)^2 \zeta^2 = C^2. \quad (1.70)$$

Екстремне вредности тангенцијалних напона код девијаторског напонског стања су:

$$\tau_{(i)} = (\delta_2 - \delta_3)/2; \quad \tau_{(ii)} = (\delta_1 - \delta_3)/2; \quad \tau_{(iii)} = (\delta_1 - \delta_2)/2. \quad (1.71)$$

Ако су напони $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, онда је $\sigma_1 = \sigma_2 + \lambda$; $\sigma_1 = \sigma_3 + \mu$ и $\sigma_2 = \sigma_3 + \nu$, па су елементи девијатора

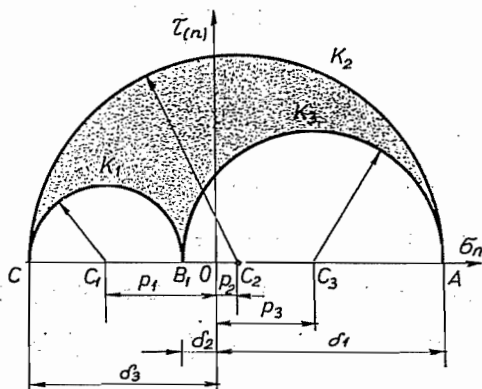
$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_1 - p = [(\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_1 - \sigma_3)]/3 = (\lambda + \mu)/3; \\ \delta_2 &= (\lambda - \nu)/3; \quad \delta_3 = -(\mu + \nu)/3. \end{aligned}$$

Моهر-ови кругови имају средишта C_i на $O \delta_n$ -оси (слика 1.19), па су

$$p_1 = (\delta_2 + \delta_3)/2; \quad p_2 = (\delta_3 + \delta_1)/2; \quad p_3 = (\delta_1 + \delta_2)/2; \quad q_i = 0,$$

полупречника

$$R_1 = (\delta_2 - \delta_3)/2; \quad R_2 = (\delta_1 - \delta_3)/2; \quad R_3 = (\delta_1 - \delta_2)/2.$$



Слика 1.19. — Моهر-ови кругови за девијаторско напонско стање

Например, за главне напоне $\sigma_i = 15; 8$ и 4 [N/mm²] биће: $p=9$; $\delta_i=6; -1$ и -5 [N/mm²]; $\lambda=7$; $\mu=11$; и $\nu=4$ [N/mm²]; $\mathcal{D}_i=0; -31; 30$;

$$L=0; \quad Q^2=62/3; \quad \mathcal{K}^3=30; \quad \tau_{(okt)}^2=Q^2=62/3=(3 \cdot 305 - 27^2)/9=62/3.$$

За Моهر-ове кругове (слика 1.19) су:

$$p_i = -3; 1/2; 5/2; \quad q_i = 0; \quad R_i = 2; 11/2; 7/2.$$

1.15. Једначине равнотеже у ортогоналном криволинијском систему. — Navier-ове једначине равнотеже (1.25) могу се извести непосредно *геометријско-статичком методом* или помоћу *формула трансформација координата*. Уочимо правоугли криволинијски паралелепипед $ABCDPQRS$, лукава $d s_i = -A_i d q_i$ (слика 1.20). Површина криволинијског правоугаоника $APSD$ износи $A_{23} = d s_2 d s_3 = A_2 A_3 d q_2 d q_3$. Тотални напон за ту површину је $-P_{(1)}$, пошто је нормала $-n_1$ усмерена у негативном смеру координатне осе Aq_1 , односно јединичног вектора t_1 . Површина паралелног правоугаоника $BQRC$ је $A_{23}^* = A_{23} + d A_{23} = A_{23} + (\partial A_{23} / \partial q_1) \cdot d q_1$, јер се мењају Lamé-ови коефицијенти A_i пошто су функције координата q_i . Напон за ову површину је $P_{(1)}^* = P_{(1)} + d P_{(1)} = P_{(1)} + (\partial P_{(1)} / \partial q_1) d q_1$, па је резултујућа сила у правцу прве координатне осе:

$$P_{(1)}^* A_{23}^* - P_{(1)} A_{23} = \left[P_{(1)} + \frac{\partial P_{(1)}}{\partial q_1} d q_1 \right] \left[A_{23} + \frac{\partial A_{23}}{\partial q_1} d q_1 \right] - P_{(1)} A_{23} =$$

$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} [P_{(1)} A_{23}] \right\} d q_1 = \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} [P_{(1)} A_2 A_3] \right\} d q_1 \cdot d q_2 d q_3,$$

када се занемаре мале величине вишег реда $(\partial P_{(1)} / \partial q_1) \cdot (\partial A_{23} / \partial q_1) = 0$. Аналогно овоме добијају се још две релације за друга два управна правца.

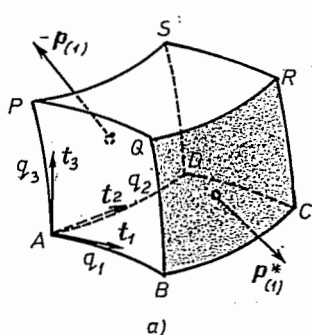
Запреминска сила износи $\mathbf{F}_V = \mathbf{F}'_V dV$, где је елемент запремине $dV = (ds_1, [ds_2, ds_3]) = A_1 A_2 A_3 dq_1 dq_2 dq_3$, па је равнотежна једначина у векторском облику:

$$\frac{1}{A_1 A_2 A_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} [P_{(1)} A_2 A_3] + \frac{\partial}{\partial q_2} [P_{(2)} A_3 A_1] + \frac{\partial}{\partial q_3} [P_{(3)} A_1 A_2] \right\} + \mathbf{F}'_V = 0 \quad (1.72)$$

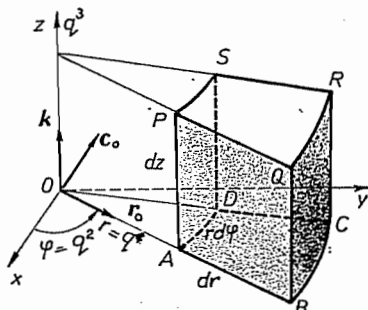
где су тотални напони и запреминска сила

$$P_{(i)} = \tau_{i1} \mathbf{t}_1 + \tau_{i2} \mathbf{t}_2 + \tau_{i3} \mathbf{t}_3; \quad \mathbf{F}'_V = F'_1 \mathbf{t}_1 + F'_2 \mathbf{t}_2 + F'_3 \mathbf{t}_3. \quad (1.73)$$

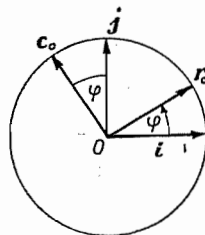
Треба водити рачуна да су и јединични вектори \mathbf{t}_i променљиви



a)



a)



b)

Слика 1.20. — Правоугли кри- волнијски паралелепипед

Слика 1.21. — Поларно-цилиндрички координатни систем

1.15.1. Поларно цилиндрички координатни систем. — Код овог система (слика 1.21) су:

$$q_i = r; \varphi, z; \quad A_i = 1; r; 1;$$

$$\tau_{11} = \sigma_r; \tau_{22} = \sigma_\varphi; \tau_{33} = \sigma_z; \tau_{12} = \tau_{rc}; \tau_{13} = \tau_{rz}; \tau_{23} = \tau_{cz}. \quad (1.74)$$

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi; \quad \mathbf{c}_0 = -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi; \quad \partial \mathbf{r}_0 / \partial \varphi = \mathbf{c}_0; \quad \partial \mathbf{c}_0 / \partial \varphi = -\mathbf{r}_0.$$

Уношењем ових вредности у (1.72) та једначина постаје

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} [r(\sigma_r \mathbf{r}_0 + \tau_{rc} \mathbf{c}_0 + \tau_{rz} \mathbf{k})] + \frac{\partial}{\partial \varphi} [\tau_{cr} \mathbf{r}_0 + \sigma_\varphi \mathbf{c}_0 + \tau_{cz} \mathbf{k}] + r \frac{\partial}{\partial z} [\tau_{zr} \mathbf{r}_0 + \tau_{zc} \mathbf{c}_0 + \sigma_z \mathbf{k}] \right\} + \mathbf{F}'_V = 0, \quad (1.72. a)$$

па се скаларизовањем водећи рачуна о изводима јединичних вектора добијају Navier-ове једначине равнотеже за овај координатни систем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{cr}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + F'_r &= 0; \quad F'_r = F'_{Vr}; \quad \tau_{rc} = \tau_{cr}; \\ \frac{\partial \tau_{rc}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{zc}}{\partial z} + 2 \frac{\tau_{cr}}{r} + F'_\varphi &= 0; \quad F'_\varphi = F'_{V\varphi}; \quad \tau_{rz} = \tau_{rz}; \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{cz}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{r} + Z' &= 0; \quad Z' = F'_{Vz}; \quad \tau_{cz} = \tau_{zc}. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Наравно, ово се једначине могу извести и из једначина (1.25) користећи се формулама трансформација координата (1.20) и напона (1.22):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \{\mathbf{F}_V'\} = \mathbf{A} \{\bar{\mathbf{F}}_V'\}; \quad \begin{Bmatrix} X_V' \\ Y_V' \\ Z_V' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_r' \cos \varphi - F_c' \sin \varphi \\ F_r' \sin \varphi - F_c' \cos \varphi \\ Z_V' \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{N} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{N}} \mathbf{A}';$$

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \varphi + \sigma_c \sin^2 \varphi - \tau_{rc} \sin 2\varphi; \quad \tau_{xy} = (\sigma_r - \sigma_c) \sin 2\varphi / 2 + \tau_{rc} \cos 2\varphi; \quad x = r \cos \varphi; \quad r^2 = x^2 + y^2;$$

$$\sigma_y = \sigma_r \sin^2 \varphi + \sigma_c \cos^2 \varphi + \tau_{rc} \sin 2\varphi; \quad \tau_{xz} = \tau_{rz} \cos \varphi - \tau_{cz} \sin \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad \operatorname{tg} \varphi = y/x;$$

$$\sigma_z = \sigma_z; \quad \tau_{yz} = \tau_{rz} \sin \varphi + \tau_{cz} \cos \varphi; \quad z = z; \quad z = z;$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \varphi; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \varphi; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{y}{x^2} \cos^2 \varphi = \frac{-\sin \varphi}{r}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r}; \quad (1.76)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Уношењем ових релација у прву једначину (1.25) добија се

$$\left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (\sigma_r \cos^2 \varphi + \sigma_c \sin^2 \varphi - \tau_{rc} \sin 2\varphi) + \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{\sigma_r - \sigma_c}{2} \sin 2\varphi + \tau_{rc} \cos 2\varphi \right) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{rz} \cos \varphi - \tau_{cz} \sin \varphi) + (F_r' \cos \varphi - F_c' \sin \varphi) = 0,$$

односно

$$\cos \varphi \left[\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{rc}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_c}{r} + F_r' \right] - \sin \varphi \left[\frac{\partial \tau_{rc}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{cz}}{\partial z} + 2 \frac{\tau_{rc}}{r} + F_c' \right] = 0.$$

Ова једнакост треба да буде задовољена за произвољну вредност угла φ , па морају изрази у заградама бити једнаки нули, а они представљају прве две једначине равнотеже (1.75). Сличним поступком добила би се и трећа једначина равнотеже (1.75).

1.15.2. Сферни координатни систем. — Код овог система (слика 1.22.)

су:*

$$q_i = \rho; \quad \varphi; \quad \psi; \quad A_i = 1; \quad \rho \cos \psi, \quad \rho; \quad \tau_{11} = \sigma_\rho; \quad \tau_{22} = \sigma_\varphi; \quad \tau_{33} = \sigma_\psi;$$

$$\tau_{12} = \tau_{\rho\varphi}; \quad \tau_{13} = \tau_{\rho\psi}; \quad \tau_{23} = \tau_{\varphi\psi};$$

$$\begin{aligned} \vec{\rho}_0 &= \mathbf{i} \cos \psi \cos \varphi + \mathbf{j} \cos \psi \sin \varphi + \mathbf{k} \sin \psi; & \vec{\partial} \rho_0 / \partial \varphi &= \vec{\mathbf{c}}_0 \cos \psi; & \vec{\partial} \rho_0 / \partial \psi &= \vec{\mathbf{v}}_0; \\ \vec{\mathbf{c}}_0 &= -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi & \vec{\partial} \mathbf{c}_0 / \partial \varphi &= -\vec{\rho}_0 \cos \psi + \vec{\mathbf{v}}_0 \sin \psi; & \vec{\partial} \mathbf{c}_0 / \partial \psi &= \mathbf{0}; \\ \vec{\mathbf{v}}_0 &= -\mathbf{i} \sin \psi \cos \varphi - \mathbf{j} \sin \psi \sin \varphi + \mathbf{k} \cos \psi; & \vec{\partial} \mathbf{v}_0 / \partial \varphi &= -\vec{\mathbf{c}}_0 \sin \psi; & \vec{\partial} \mathbf{v}_0 / \partial \psi &= -\vec{\rho}_0. \end{aligned} \quad (1.77)$$

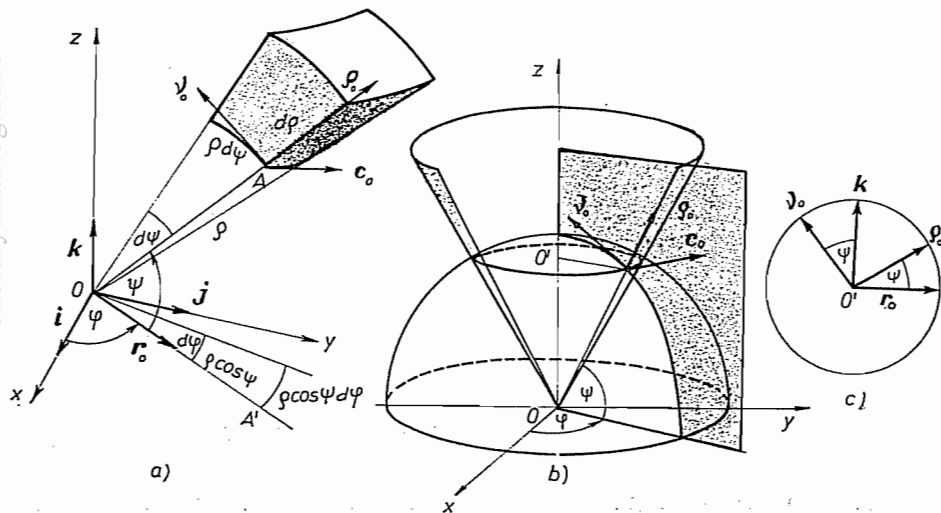
па једначина (1.72) постаје

$$\frac{1}{\rho^2 \cos \psi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho^2 \cos \psi (\sigma_\rho \vec{\rho}_0 + \tau_{\rho\varphi} \vec{\mathbf{c}}_0 + \tau_{\rho\psi} \vec{\mathbf{v}}_0)] + \rho \frac{\partial}{\partial \varphi} [\tau_{\varphi\rho} \vec{\rho}_0 + \sigma_\varphi \vec{\mathbf{c}}_0 + \tau_{\varphi\psi} \vec{\mathbf{v}}_0] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \psi} [\rho \cos \psi (\tau_{\psi\rho} \vec{\rho}_0 + \tau_{\psi\varphi} \vec{\mathbf{c}}_0 + \sigma_\psi \vec{\mathbf{v}}_0)] \right\} + \mathbf{F}_V' = 0. \quad (1.72.b)$$

* Кинематика чл, 3.3, обр. (58).

Скаларизовањем, водећи рачуна о изводима јединичних вектора добијају се Navier-ове једначине равнотеже за овај координатни систем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \cos \psi} \frac{\partial \tau_{c\rho}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\nu\rho}}{\partial \psi} + \frac{2\sigma_\rho - \sigma_c - \sigma_\nu}{\rho} - \frac{\operatorname{tg} \psi}{\rho} \tau_{\nu\rho} + F'_\rho &= 0, \quad \tau_{\rho c} = \tau_{c\rho}; \\ \frac{\partial \tau_{\rho c}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \cos \psi} \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\nu c}}{\partial \psi} + \frac{3\tau_{\rho c}}{\rho} - \frac{2}{\rho} \frac{\operatorname{tg} \psi}{\rho} \tau_{\nu c} + F'_c &= 0; \quad \tau_{\rho\nu} = \tau_{\nu\rho}; \\ \frac{\partial \tau_{\rho\nu}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \cos \psi} \frac{\partial \tau_{c\nu}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\nu}{\partial \psi} + \frac{3\tau_{\rho\nu}}{\rho} + \frac{\operatorname{tg} \psi}{\rho} (\sigma_c - \sigma_\nu) + F'_\nu &= 0; \quad \tau_{c\nu} = \tau_{\nu c}. \end{aligned} \quad (1.78)$$



Слика 1.22. — Сферни координатни систем

И ове се једначине могу добити из једначина (1.25), или још лакше из једначина (1.75) користећи се формулама трансформација координата и напона:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} F'_r \\ F'_c \\ Z'_\nu \end{cases} = \begin{cases} F'_\rho \cos \psi - F'_\nu \sin \psi \\ F'_c \\ F'_\rho \sin \psi + F'_\nu \cos \psi \end{cases}; \quad \mathbf{N} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{N}} \mathbf{A}'; \quad \begin{aligned} r &= \rho \cos \psi; \\ \varphi &= \varphi; \\ z &= \rho \sin \psi; \end{aligned}$$

$$\sigma_r = \sigma_\rho \cos^2 \psi + \sigma_\nu \sin^2 \psi - \tau_{\rho\nu} \sin 2\psi; \quad \tau_{rc} = \tau_{\rho c} \cos \psi - \tau_{c\nu} \sin \psi; \quad \rho^2 = r^2 + z^2; \quad (1.79)$$

$$\sigma_c = \sigma_c; \quad \tau_{rz} = (\sigma_\rho - \sigma_\nu) \sin 2\psi / 2 + \tau_{\rho\nu} \cos 2\psi; \quad \varphi = \varphi;$$

$$\sigma_z = \sigma_\rho \sin^2 \psi + \sigma_\nu \cos^2 \psi + \tau_{\rho\nu} \sin 2\psi; \quad \tau_{cz} = \tau_{\rho c} \sin \psi + \tau_{c\nu} \cos \psi; \quad \operatorname{tg} \psi = z/r;$$

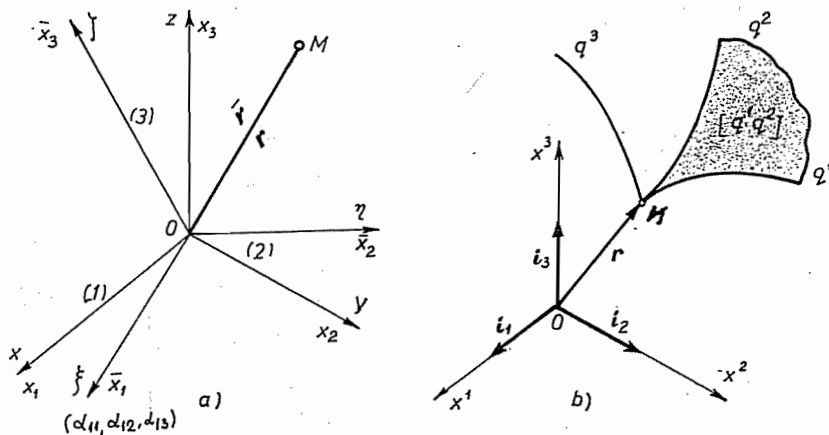
$$\partial \rho / \partial r = r / \rho = \cos \psi; \quad \partial \rho / \partial z = z / \rho = \sin \psi; \quad \partial \psi / \partial r = -(\sin \psi) / \rho; \quad \partial \psi / \partial z = (\cos \psi) / \rho; \quad \partial \rho / \partial \varphi = 0; \quad \partial \rho / \partial \psi = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos \psi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \psi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \psi}; \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \sin \psi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \psi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \psi}.$$

Уношењем ових релација у прву једначину (1.75) добија се израз $A \cos \psi - C \sin \psi = 0$, пошто је стављено да су $\sigma_c / \rho \cos \psi = \sigma_c (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) / \rho \cos \psi$; $-\tau_{\rho\nu} (\sin \psi + 3 \sin \psi) = -\tau_{\rho\nu} (3 \sin \psi + \operatorname{tg} \psi \cos \psi) / \rho$. Пошто $\cos \psi \neq 0$ и $\sin \psi \neq 0$ морају бити $A = 0$ и $C = 0$, а ти изрази представљају прву и трећу једначину равнотеже (1.78). Из друге једначине (1.75) добија се друга једначина (1.78).

1.16. Тензор напона у генералисаним координатама. — С обзиром на једноставнији начин извођења разних једначина теорије еластичности у случају примене генералисаних криволинијских координата примењује се *тензорски рачун*.* Како тензорске једначине изведене у једном триједру важе и у новом триједру који је постао из првог трансформацијама извешћемо прво тензорске релације у Декартовом правоуглом систему (чл. 1.5).

1.16.1. Декартов правоугли триједар. — Пошто у овом триједру нема разлике између контраваријантних, коваријантних и физичких координата неког вектора или тензора, то се могу користити само доњи индекси. Три-



Слика 1.23. — Тензорске нотације триједра $Oxyz$

једар $Oxyz$ означимо сада са $Ox_1x_2x_3$ (слика 1.23), а ротирани триједар $O\xi\eta\zeta$ са $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ па ће косинусна шема и формуле трансформација бити:

		x_1	x_2	x_3
ξ	\bar{x}_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}
η	\bar{x}_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}
ζ	\bar{x}_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}

$$\bar{x}_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} x_k = \alpha_{ik} x_k; \quad \alpha_{ik} = \partial \bar{x}_i / \partial x_k;$$

$$x_k = \sum_i \alpha_{ik} \bar{x}_i = \alpha_{ik} \bar{x}_i; \quad \alpha_{ik} = \partial x_k / \partial \bar{x}_i = \alpha_{ki}; \quad (1.80)$$

$$\{\bar{x}\} = \mathfrak{A}\{x\}; \quad (\bar{x}) = (x)\mathfrak{A}'; \quad (x) = (\bar{x})\mathfrak{A}; \quad \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}^{-1},$$

где су $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ косинуси смера нових координатних оса мерних у односу на стари триједар. Уједно је искоришћена Einstein-ова конвенција о сабирању.

Из (1.16) следи да се тотални напон $p_{(n)}$ може написати у виду матрица врсте, те је

$$(p_{(1)}) = (\sigma_x \tau_{xy} \tau_{xz}) = (t_{11} t_{12} t_{13}); \quad p_{n1} = \alpha_1 t_{11} + \alpha_2 t_{21} + \alpha_3 t_{31}; \quad p_{ni} = \sum_{k=1}^3 \alpha_k t_{ki} = \alpha_k t_{ki};$$

$$(p_{(2)}) = (\tau_{yx} \sigma_y \tau_{y2}) = (t_{21} t_{22} t_{23}); \quad p_{n2} = \alpha_1 t_{12} + \alpha_2 t_{22} + \alpha_3 t_{32}; \quad (1.81)$$

$$(p_{(3)}) = (\tau_{zx} \tau_{zy} \sigma_z) = (t_{31} t_{32} t_{33}); \quad p_{n3} = \alpha_1 t_{13} + \alpha_2 t_{23} + \alpha_3 t_{33}; \quad (p_{(n)}) = (\mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{T}} = \mathbf{n} \hat{\mathbf{T}}.$$

* Додатак I.

Cauchy-јеве једначине (1.9) могу се тензорски написати као леви скаларни производ јединичног вектора нормале и тензора напона $\hat{\mathbf{T}}$ које је транспоновани тензор од тензора $\hat{\mathbf{N}}$. Пошто је овај тензор ортогонални то се може оперисати и само са његовом матрицом ($\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{T}$). Овај начин обележавања је „директна тензорска ношација“, али се чешће примењује збирни образац, $p_{ni} = \alpha_k t_{ki} = t_{ki} \alpha_k$, где се види да се сабирање врши по индексу k .

При трансформацији тотални напон $\bar{\mathbf{p}}_{(n)}$ за раван са нормалом $\bar{\mathbf{n}}$ промениће се и биће

$$(\bar{\mathbf{p}}_{(n)}) = (\bar{\mathbf{n}}) \bar{\mathbf{T}}; (\mathbf{p}_{(n)}) = (\mathbf{n}) \cdot \mathbf{T} = (\bar{\mathbf{n}}) \mathfrak{A} \mathbf{T} = (\bar{\mathbf{p}}_{(n)}) \mathfrak{A}; (\bar{\mathbf{p}}_{(n)}) = (\bar{\mathbf{n}}) \mathfrak{A} \mathbf{T} \mathfrak{A}'; \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}^{-1},$$

односно

$$(\bar{\mathbf{p}}_{(n)}) = (\bar{\mathbf{n}}) \bar{\mathbf{T}}; \bar{\mathbf{T}} = \mathfrak{A} \mathbf{T} \mathfrak{A}'; \bar{t}_{ik} = \tau_{ik} = t_{mn} \alpha_{im} \alpha_{kn} = t_{mn} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_m} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_n}; \mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}. \quad (1.82)$$

Пошто се елементи t_{mn} тензора $\hat{\mathbf{T}}$ трансформишу при овој ортогоналној трансформацији тензорски, то је $\bar{\mathbf{T}}$ тензор, па су и елементи $\bar{t}_{ik} = \tau_{ik}$ његове компоненте. Тензор \mathbf{T} је симетрични тензор па ће такав остати и при овој трансформацији, $\tau_{ik} = \tau_{ki}$.

Пошто су оператор набла, дивергенција вектора и тензора*

$$\begin{aligned} \nabla &= \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{i}_k); \operatorname{div} \mathbf{p} = (\nabla \cdot \mathbf{p}) = \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{i}_k) \cdot \mathbf{p}_i \{i_j\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} (\delta_{ki} \mathbf{p}_i) = \frac{\partial \mathbf{p}_k}{\partial x_k} = \mathbf{p}_{k,k}; \operatorname{div} \hat{\mathbf{T}} = \frac{\partial t_{ki}}{\partial x_k} (\mathbf{i}_i), \end{aligned} \quad (1.83)$$

то се Navier-ове једначине равнотеже (1.25) могу написати у облику

$$\frac{\partial t_{ki}}{\partial x_k} + X'_i = t_{ki,k} + X'_i; \operatorname{div} \hat{\mathbf{T}} + (X') = 0; (X') = \mathbf{F}'_i; \quad (1.84)$$

односно

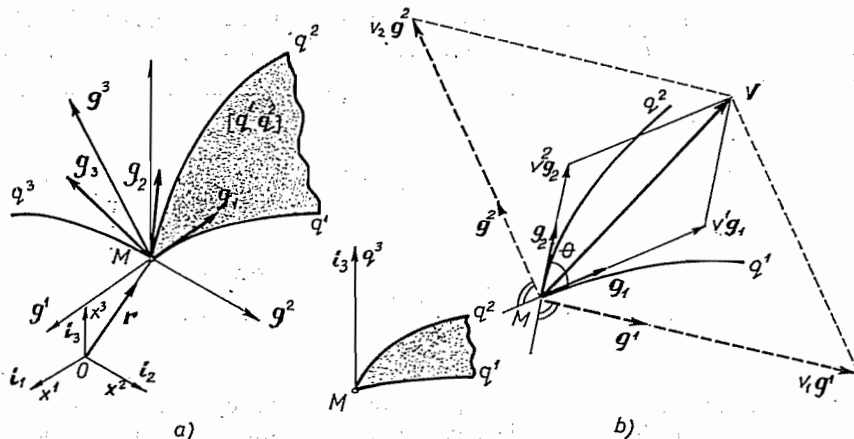
$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{31}}{\partial x_3} + X'_1 &= 0; \frac{\partial t_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{32}}{\partial x_3} + X'_2 &= 0; \\ \frac{\partial t_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{33}}{\partial x_3} + X'_3 &= 0, \end{aligned} \quad (1.85)$$

јер је дивергенција тензора вектор.

1.16.2. Генерализани координатни систем. — Када се уведу произвољне криволинијске (генерализане) координате $q^i = q^i(x^k)$, $i, k = 1, 2, 3$, у конваријантном облику (слика 1.24.) које су једнозначне и континуалне функције

* $\operatorname{div} \hat{\mathbf{T}} = \nabla \cdot \hat{\mathbf{T}} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{i}_k) \cdot t_{ji} \{j_j\} (\mathbf{i}_i) = \frac{\partial}{\partial x_k} (\delta_{kj} t_{ji}) (\mathbf{i}_i) = \frac{\partial t_{ki}}{\partial x_k} (\mathbf{i}_i).$

са непрекидним парцијалним изводима до потребног реда и да су јакобијани различити од нуле, $J^* = |\partial q^i / \partial x^k| \neq 0$, $J = 1/J^* = |\partial x^k / \partial q^i| \neq 0$, тада компоненте тензора напона $\hat{\mathbf{T}} (t_{ik} = \tau_{ik})$, који остаје и даље симетричан, добијају по обрасцима;



Слика 1.24. — Криволинијски координатни систем

$$J^* = \left| \frac{\partial q^i}{\partial x^k} \right| = \frac{\partial (q^1 q^2 q^3)}{\partial (x^1 x^2 x^3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q^1}{\partial x^1} & \frac{\partial q^1}{\partial x^2} & \frac{\partial q^1}{\partial x^3} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial q^3}{\partial x^1} & \frac{\partial q^3}{\partial x^2} & \frac{\partial q^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\overline{t}^{ik} = \tau^{ik} = t^{mn} \frac{\partial q^i}{\partial x^m} \frac{\partial q^k}{\partial x^n};$$

$$\overline{t}_{ik} = \tau_{ik} = t_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial q^i} \frac{\partial x^n}{\partial q^k}. \quad (1.86)$$

где су $\overline{t}^{ik} = \tau^{ik}$ контраваријантне компоненте тензора (које се у пракси махом користе), а $\overline{t}_{ik} = \tau_{ik}$ коваријантне. При овоме се индекси m, n (односно i, k) испод црте у парцијалном изводу сматрају, по договору, доњим.

Увођењем метричког тензора

$$\mathbf{g}_{ik} = (\mathbf{g}_i) \{ \mathbf{g}_k \} = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_k) = g_{ki}; \quad g^{ik} = (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^k) = g^{ki}; \quad g^i_k = (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_k) = \delta^i_k, \quad (1.87)$$

где су \mathbf{g}_i основни (базисни) вектори криволинијског триједра, а \mathbf{g}^i реципрочног триједра, може се тензор напона написати у овом облику

$$\hat{\mathbf{T}} = t^{ik} \{ \mathbf{i}_i \} (\mathbf{i}_k); \quad \hat{\mathbf{T}} = \tau^{ik} \{ \mathbf{g}_i \} (\mathbf{g}_k) = \tau_{ik} \{ \mathbf{g}^i \} (\mathbf{g}^k) = \tau_k^i \{ \mathbf{g}^i \} (\mathbf{g}_k), \quad (1.88)$$

где је $\{ \mathbf{g}_i \} (\mathbf{g}_k)$ дијајтски (тензорски) производ базисних вектора. За ове векторе важе следеће релације:

$$\mathbf{g}^i = \frac{\partial q^i}{\partial x^m} \mathbf{i}^m; \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial x^m}{\partial q^i} \mathbf{i}_m; \quad |\mathbf{g}_M| = \sqrt{g_{MM}}; \quad |\mathbf{g}^N| = \sqrt{g^{NN}}. \quad (1.89)$$

Navier-ова равнотежна једначина у тензорском облику задржава свој облик и у овом систему, те је

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{T}} + \mathbf{F}_V' = 0; \quad \tau^{ki}|_k + Q^i = \frac{\partial \tau^{ki}}{\partial q^k} + \tau^{ri} \Gamma_{rk}{}^k + \tau^{kr} \Gamma_{kr}{}^i + Q^i = 0, \quad (1.90)$$

где је $\tau^{ki}|_k$ коваријантни извод контраваријантног тензора другог реда; $\Gamma_{rk}{}^i$ Cristoffel-ов симбол групе врсте, а Q^i јединична генералисана запреминска сила за координату q^i .

Чланови тензорске једначине (1.89) различитих су димензија, па да би се користиле у техничкој пракси морају се увести физичке координатне вектора који представљају пројекције тог вектора (на пример \mathbf{u}) на дотичну координатну осу ($M=1, 2, 3$) орјентисану јединичним вектором \mathbf{t}_M , па су:

$$u_{(M)} = (\mathbf{u}, \mathbf{t}_M) = \frac{1}{\sqrt{g_{MM}}} (\mathbf{u}, \mathbf{g}_M) = \frac{u_M}{\sqrt{g_{MM}}}; \quad u_M = u_{(M)} \sqrt{g_{MM}};$$

$$u^M = \frac{u_{(M)}}{\sqrt{g_{MM}}}; \quad M=1, 2, 3. \quad (1.91, a)$$

Аналогно предњем физичке компоненте тензора другог реда биће

$$\tau_{(MN)} = \tau^{MN} \sqrt{g_{MM}} \sqrt{g_{NN}}; \quad \tau^{MN} = \frac{\tau_{(MN)}}{\sqrt{g_{MM}} \sqrt{g_{NN}}};$$

$$\tau_{MN} = \tau_{(MN)} \sqrt{g_{MN}} \sqrt{g_{NN}}; \quad M, N=1, 2, 3, \quad (1.81, b)$$

где су уведени индекси M и N по којима се врши сабирање.

1.16.3. Ортогонални генералисани систем. — Овакви се системи највише користе у техничкој пракси (џл. 1,15). Овде су $g_{MN} = A_M^2$, $g_{ik} = 0$ за $i \neq k$, па су: физичке координате и компоненте

$$u_M = A_M u_{(M)}; \quad u^M = \frac{u_{(M)}}{A_M}; \quad \tau_{MN} = A_M A_N \cdot \tau_{(MN)};$$

$$\tau^{MN} = \frac{\tau_{(MN)}}{A_M A_N}; \quad M, N=1, 2, 3, \quad (1.91, c)$$

Christoffel-ови симболи друге врсте

$$\Gamma_{jk}{}^i = 0; \quad i \neq j \neq k; \quad \Gamma_{ii}{}^i = \frac{1}{2(A_i)^2} \frac{\partial (A_i)^2}{\partial q^i}; \quad \Gamma_{jj}{}^i = -\frac{1}{2(A_i)^2} \frac{\partial (A_j)^2}{\partial q^i};$$

$$\Gamma_{ij}{}^j = \Gamma_{ji}{}^i = \frac{1}{2(A_i)^2} \frac{\partial (A_i)^2}{\partial q^i}, \quad (1.92)$$

и равнотежна једначина

$$\frac{\partial}{\partial q^k} \left[\frac{\tau_{(kM)}}{A_k A_M} \right] + \frac{\tau_{(rM)}}{A_r A_M} \Gamma_{rk}{}^k + \frac{\tau_{kr}}{A_k A_r} \Gamma_{kr}{}^M + \frac{Q^i{}_{(M)}}{A_M} = 0; \quad M=1, 2, 3. \quad (1.93)$$

У првом члану ове једначине сабирање треба вршити оп индексу k , у другом по r , а у трећем и по k и по r . Сабирање се не врши по индексу $M=1, 2, 3$.

а) *Поларно-цилиндрички систем.* — Овде су (слика 1.21):

$$q^i = r; \varphi; z; A_i = 1; r; 1; \Gamma_{22}^1 = -r; \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 1/r; \quad (1.94)$$

$$\tau_{(11)} = \sigma_r; \tau_{(22)} = \sigma_\varphi; \tau_{(33)} = \sigma_z; \tau_{(12)} = \tau_{rc}; \tau_{(13)} = \tau_{rz}; \tau_{(23)} = \tau_{cz}.$$

Уношењем ових релација у (1.93) за $M=1$ следи релација

$$M=1; \frac{\partial}{\partial q^1} \left[\frac{\tau_{(11)}}{(A_1)^2} \right] + \frac{\partial}{\partial q^2} \left[\frac{\tau_{(21)}}{A_2 A_1} \right] + \frac{\partial}{\partial q^3} \left[\frac{\tau_{(31)}}{A_3 A_1} \right] + \\ + \frac{\tau_{(11)}}{(A_1)^2} \Gamma_{12}^2 + \frac{\tau_{(22)}}{(A_2)^2} \Gamma_{22}^1 + \frac{1}{A_1} Q_1' = 0$$

односно

$$M=1; \frac{\partial}{\partial r} [\sigma_r] + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\tau_{c\varphi}}{r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} [\tau_{zr}] + \frac{\sigma_c}{r} - \frac{\sigma_c}{r^2} r + F_r^1 = 0,$$

па се добија прва једначина равнотеже (1.75). За $M=2$ и $M=3$ добијају се друге две једначине

$$M=2; \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\tau_{rc}}{r} \right] + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\tau_c}{r^2} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\tau_{zc}}{r} \right] + \frac{\tau_{zc}}{r} \Gamma_{12}^2 + 2 \frac{\tau_{zc}}{r} \Gamma_{12}^2 + \frac{1}{r} F_c' = 0;$$

$$M=3; \frac{\partial}{\partial r} [\tau_{rz}] + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\tau_{c\varphi}}{r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} [\sigma_z] + \tau_{rz} \Gamma_{12}^2 + F_z' = 0$$

која се због вредности Cristoffel-ових симбола (1.94) свODE на друге две једначине равнотеже (1.75).

б) *Сферни систем.* — Овде су (слика 1.22):

$$q^i = \rho; \varphi; \psi; A_i = 1; \rho \cos \psi; \rho;$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\rho \cos^2 \psi; \Gamma_{33}^1 = -\rho; \Gamma_{12}^2 = 1/\rho; \Gamma_{13}^3 = 1/\rho;$$

$$\Gamma_{23}^2 = \Gamma_{23}^2 = -\operatorname{tg} \psi; \Gamma_{22}^3 = \sin \psi \cos \psi; \quad (1.95)$$

$$\tau_{(11)} = \sigma_\rho; \tau_{(22)} = \sigma_\varphi; \tau_{(33)} = \sigma_\psi; \tau_{(12)} = \tau_{\rho\varphi}; \tau_{(13)} = \tau_{\rho\psi}; \tau_{(23)} = \tau_{\varphi\psi},$$

па се за $M=1$ из једначине (1.93) добија релација

$$M=1; \frac{\partial}{\partial q^1} \left[\frac{\tau_{(11)}}{(A_1)^2} \right] + \frac{\partial}{\partial q^2} \left[\frac{\tau_{(21)}}{A_2 A_1} \right] + \frac{\partial}{\partial q^3} \left[\frac{\tau_{(31)}}{A_3 A_1} \right] + \\ + \frac{\tau_{(r1)}}{A_r A_1} \Gamma_{rk}^k + \frac{\tau_{(kr)}}{A_k A_r} \Gamma_{kr}^1 + \frac{1}{A} Q_1' = 0$$

односно

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} [\sigma_\rho] + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\tau_{\rho\varphi}}{\rho \cos \psi} \right] + \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{\tau_{\rho\psi}}{\rho} \right] + \sigma_\rho [\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3] + \\ + \frac{\tau_{\rho\psi}}{\rho} \Gamma_{32}^2 + \frac{\sigma_c}{\rho^2 \cos^2 \psi} \Gamma_{22}^1 + \frac{\sigma_y}{\rho^2} \Gamma_{33}^1 + F'_\rho = 0 \end{aligned}$$

те следи прва равнотежна једначина (1.78). За $M=2$ и $M=3$ добија се:

$$\begin{aligned} M=2; \quad \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\tau_{\rho c}}{\rho \cos \psi} \right] + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\sigma_c}{\rho^2 \cos^2 \psi} \right] + \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{\tau_{\rho c}}{\rho^2 \cos \psi} \right] + \frac{\tau_{\rho c}}{\rho \cos \psi} [\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3] + \\ + \frac{\tau_{\rho c}}{\rho^2 \cos \psi} \Gamma_{32}^2 + 2 \frac{\tau_{\rho c}}{\rho \cos \psi} \Gamma_{12}^2 + 2 \frac{\tau_{\rho c}}{\rho^2 \cos \psi} \Gamma_{32}^2 + \frac{F'_c}{\rho \cos \psi} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M=3; \quad \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\tau_{\rho\psi}}{\rho} \right] + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\tau_{\rho\psi}}{\rho^2 \cos \psi} \right] + \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{\sigma_y}{\rho^2} \right] + \frac{\tau_{\rho\psi}}{\rho} [\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3] + \\ + \frac{\sigma_y}{\rho^2} \Gamma_{32}^2 + \frac{\tau_{\rho\psi}}{\rho} \Gamma_{13}^3 + \frac{\sigma_c}{\rho^2 \cos^2 \psi} \Gamma_{22}^3 + \frac{F'_y}{\rho} = 0 \end{aligned}$$

Када уношењем вредности симбола из (1.95) следе друге две једначине равнотеже (1.78).

Из изложеној се види да је у овом случају ортононалној триједра најједноставнија метода теоријско-стапичка (гл. 1.15)

1.17. Напонске функције. — У техничкој пракси често се занемарује утицај задреминских сила ($F'_V = 0$), па се тада Navier-ове једначине (1.25) упрошћавају, те се могу решити у општем облику увођењем извесних функција положаја (координата x, y, z). Ове се функције називају *напонске функције*.

1.17.1. Maxwell-ове функције. — Maxwell је 1868. год. увео три напонске функције $\Phi_i(x, y, z)$ такве да су тангенцијални напони

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{12} = -\partial^2 \Phi_3 / \partial x \partial y; \quad \tau_{xz} = \tau_{13} = -\partial^2 \Phi_2 / \partial x \partial z; \\ \tau_{yz} = \tau_{23} = -\partial^2 \Phi_1 / \partial y \partial z. \end{aligned} \quad (1.96)$$

Када се ове релације унесу у прву Navier-ову једначину (1.25) добиће се

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} \right]; \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2},$$

када се узме да је интеграциона функција $\varphi(x, y) = 0$. Аналогно се добијају и остали напони, па је Maxwell-ово решење Navier-ових једначина:

$$\begin{aligned} \sigma_x = (\partial^2 \Phi_3 / \partial y^2) + (\partial^2 \Phi_2 / \partial z^2); \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{12} = -(\partial^2 \Phi_3 / \partial x \partial y); \\ \sigma_y = (\partial^2 \Phi_1 / \partial z^2) + (\partial^2 \Phi_3 / \partial x^2); \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{13} = -(\partial^2 \Phi_2 / \partial x \partial z); \\ \sigma_z = (\partial^2 \Phi_2 / \partial x^2) + (\partial^2 \Phi_1 / \partial y^2); \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_{23} = -(\partial^2 \Phi_1 / \partial y \partial z). \end{aligned} \quad (1.97)$$

Ако тензор $\hat{\mathbf{N}}$ задовољава једначине равнотеже (1.25), онда се могу одредити Maxwell-ове функције $\Phi_i(x, y, z)$. Интегралем 4. и 5. једначине (1.97), затим њиховим двоструким диференцирањем по y и z , и уношењем у прву горњу релацију, добија се да је нормални напон

$$\sigma_x = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\int \tau_{xy} dx dz \right] - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\int \tau_{xz} dx dy \right] = -\int \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dx.$$

Диференцирањем ове релације по x следи да је

$$(\partial \sigma_x / \partial x) + (\partial \tau_{xy} / \partial y) + (\partial \tau_{xz} / \partial z) = 0,$$

па је задовољена права Navier-ова једначина (1.25). *А што је и требало доказати.*

1.17.2. Функције напона Моргера. — Године 1899. Н. Моргера уводи три функције $\psi_i(x, y, z)$ повезане са нормалним напонима:

$$\sigma_x = \partial^2 \psi_1 / \partial y \partial z; \quad \sigma_y = \partial^2 \psi_2 / \partial x \partial z; \quad \sigma_z = \partial^2 \psi_3 / \partial x \partial y. \quad (1.98)$$

Под предпоставком да је $F_V' = 0$ Navier-ове једначине (1.26) сада постају

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x \partial y \partial z}; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -\frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x \partial y \partial z};$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{\partial^3 \psi_3}{\partial x \partial y \partial z}.$$

Када се прва једначина диференцира по x , друга по y и саберу, а трећа диференцира по z , и одузме од првог збира, добија се да је

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \right];$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \right]$$

уз занемаривање интеграционе функције. Аналогно се добијају још две релације, па је Моргера-ино решење:

$$\sigma_x = \partial^2 \psi_1 / \partial y \partial z; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\partial \left[(\partial \psi_1 / \partial x) + (\partial \psi_2 / \partial y) - (\partial \psi_3 / \partial z) \right] / \partial z / 2;$$

$$\sigma_y = \partial^2 \psi_2 / \partial x \partial z; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = -\partial \left[(\partial \psi_1 / \partial x) + (\partial \psi_3 / \partial z) - (\partial \psi_2 / \partial y) \right] / \partial y / 2;$$

$$\sigma_z = \partial^2 \psi_3 / \partial x \partial y; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = -\partial \left[(\partial \psi_2 / \partial y) + (\partial \psi_3 / \partial z) - (\partial \psi_1 / \partial x) \right] / \partial x / 2.$$

1.17.3. Тензор функција напона. — Тензорска метода обједињава обе претходне методе: треба одредити тензор напона $\hat{\mathbf{T}}(t_{ik})$ да буде симетричан и да при $F_V' = 0$ задовољава једначину равнотеже (1.80), тј. да је $\text{div} \hat{\mathbf{T}} = 0$. односно*

$$\text{div} \hat{\mathbf{T}} = 0; \quad \hat{\mathbf{T}} = \text{rot} \hat{\mathbf{P}} = \text{rot} (\text{rot} \hat{\Phi})' = \text{Ink } \Phi: \quad t_{ik} = t_{ki} = e_{irm} e_{ksn} \Phi_{mn,rs} \quad (1.100)$$

Пошто је $\text{rot} \hat{\Phi} = \Delta \times \hat{\Phi} = \frac{\partial}{\partial x^r} \{i_j \times \Phi_{mi} \{i_m\} (i_j) = e_{nrm} \Phi_{mi,r} \{i_n\} (i_j)$, биће $R_{ni} = e_{nrm} \Phi_{mi,r}$, па је $R_{ni}' = e_{irm} \Phi_{mn,r}$, тј. $(\text{rot} \hat{\Phi})_i = e_{irm} \Phi_{mn,r} \{i_n\} (i_j)$, те је $\text{Ink } \hat{\Phi} = e_{irm} \partial_{,s} \{i_s\} \times \Phi_{mn,r} \{i_n\} (i_j)$, те се добија образац (1.100).

где је $\hat{\Phi}$ симетрични тензор, тзв. *тензор функција напона*. Тензор другог реда који је једнак ротору транспонованог ротора тензора $\hat{\Phi}$ назива се „*некомпатибилни тензор*“ и обележава са $\text{Ink } \Phi$ (од речи “Inkompatibilität”).

Компоненте тензора $\hat{T} = \text{Ink } \Phi$ јесу:

$$\begin{aligned} t_{11} &= \Phi_{33,22} + \Phi_{22,33} - 2 \Phi_{23,23}; & t_{12} &= (\Phi_{31,2} + \Phi_{23,1} - \Phi_{12,3})_3 - \Phi_{33,12} \\ t_2^z &= \Phi_{11,33} + \Phi_{33,11} - 2 \Phi_{31,31}; & t_{23} &= (\Phi_{12,3} + \Phi_{31,2} - \Phi_{23,1})_{,1} - \Phi_{11,23}; \\ t_{33} &= \Phi_{22,11} + \Phi_{11,22} - 2 \Phi_{12,12}; & t_{31} &= (\Phi_{23,1} + \Phi_{12,3} - \Phi_{31,2})_{,2} - \Phi_{22,31}. \end{aligned} \quad (1.101)$$

Maxwell-ов тензор напонских функција је дијагонални са елементима $\Phi_{ii} = \Phi_i$ и $\Phi_{ik} = 0$ за $i \neq k$. Напротив Морген-ов тензор нема дијагоналне елементе, па је $\Phi_{ii} = 0$, али је $\Phi_{ik} = \Phi_{ki}$. Стога се лако добијају изрази (1.97) и (1.99).

Изнете релације (1.100) и (1.101) важе и за криволинијске системе, само тада треба извод $\Phi_{mn,rs}$ заменити коваријантним изводом $\Phi_{m|n|r|s}$.

Представљање стања напрегнутог тела помоћу тензора напонских функција *није инваријантно*, јер, на пример Maxwell-ов тензор при трансформацији координата не остаје више дијагоналан. Међутим, постоје и такви тензори напонских функција који су инваријантни (В. Finzi Ю. А. Крумков; В. И. Блох).

На пример, Airy-јева напонска функција $\Phi(x, y)$ где су $\sigma_x = \partial^2 \Phi / \partial y^2$; $\sigma_y = \partial^2 \Phi / \partial x^2$; $\tau_{xy} = -\partial^2 \Phi / \partial x \partial y$, задовољава равнотежне услове (1.25) при $F_V' = 0$.

Такође и напонска функција $\Phi(r, z)$, где су $\tau_{rc} = -(\partial \Phi / \partial z) / r^2$, а $\tau_{cz} = (\partial \Phi / \partial r) / r^2$, задовољава равнотежне једначине (1.90) при услову да је $F_V' = 0$.

ПРИМЕРИ

1. За напонска стања одређена доле наведеним напонским матрицама \mathbf{N} одредити тоталне и компонентне напоне за равни R_i чије су нормале \mathbf{n}_i ако су мерне јединице за напоне $[\text{N/mm}^2]$:

$$a) \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & \sqrt{2} \\ 4 & 6 & -2\sqrt{2} \\ 2 & -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}; \quad \{\mathbf{n}\} = \left\{ \begin{matrix} 1/2 \\ 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{matrix} \right\}; \quad b) \quad \begin{pmatrix} 14 & 4 & -2 \\ 4 & 10 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad \left\{ \begin{matrix} 2/7 \\ 3/7 \\ 6/7 \end{matrix} \right\};$$

$$c) \quad \begin{pmatrix} 12 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 8 \end{pmatrix}; \quad \left\{ \begin{matrix} 60^\circ \\ 30^\circ \end{matrix} \right\}$$

$$[a) p_{(n)}(7; 3; 2); \sigma_n = 6; \tau_{(n)}^2 = 24; \quad b) p_{(n)}(4; 8; 5); 62/7; \sqrt{301}/7;$$

$$c) p_{(n)}^2 = 27; \sigma_n = 9/2; \tau_{(n)} = 3\sqrt{3}/2].$$

2. Одредити напонске инваријанте за напонска стања из предњег задатка.

$$[a) 17; 64; -12; \quad b) 29; 231; 406; \quad c) 20; 93].$$

3. У некој тачки контурне површи тела са спољашњом нормалом $\mathbf{n}(3/5; 12/25; 16/25)$ специфично површинско оптерећење је $F_n' = F_n'' = q = 300 [\text{N/cm}^2]$. Колики су компонентни напони ако су у унутрашњости тела напони $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$?

$$\{\sigma_x = q/\alpha = 500 [\text{N/cm}^2]; \sigma_y = 0; \tau_{yz} = 0\}.$$

4. Напонско стање у тачки O напрегнутог тела одређено је напонима

$$\sigma_x = 2 \sigma_y = 4 \sigma_z / 3 = 12 [\text{N/cm}^2]; \quad \tau_{xy} = \sigma_x / 3 = -2 \tau_{xz}; \quad \tau_{yz} = \sigma_z / 2.$$

Кроз ту тачку пролазе две равни (R_i) са нормалама \mathbf{n}_1 (1/3; 2/3; 2/3) и \mathbf{n}_2 (2/7; 3/7; -6/7). Показати да важи основно правило анализе напона (1.19).

5. Кроз тачку O и тотални напон $\mathbf{p}_{(n)}$ у тој тачки за раван R_n са нормалом \mathbf{n} поставити другу раван R_m са нормалом \mathbf{m} и показати да напон $\mathbf{p}_{(m)}$ лежи у првој равни R_n .

$$[(\mathbf{n}, \mathbf{p}_{(m)}) = (\mathbf{m}, \mathbf{p}_{(n)}) = 0; \quad (\mathbf{n}) \mathbf{N} \{ \mathbf{m} \} = (\mathbf{m}) \mathbf{N} \{ \mathbf{n} \} = 0].$$

6. а) При чистом савијању греде постоји напон $\sigma_z = cy$ док су остали једнаки нули;

б) при савијању конзоле, распона l , постоје само напони $\sigma_z = a(l-z)y$; $\tau_{zy} = -b + ay^2/2$.

Да ли су у овим случајевима задовољене једначине равнотеже ако нема запреминских сила?

7. Код савијене греде постоје само напони $\sigma_z = Ay - Byz^2$; $\tau_{zy} = -Cz + Bzy^2$. Да ли су задовољене једначине равнотеже (1.25) при $\mathbf{F}_y' = 0$?

8. При торзији кружног вратила постоје само два напона $\tau_{zx} = -cy$ и $\tau_{zy} = cx$. Показати да су задовољене једначине равнотеже при $\mathbf{F}_y' = 0$.

9. Одредити главне напоне и главне правце у датој тачки напрегнутог тела за следећа напонска стања:

$$a) \begin{pmatrix} 14 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & -4 & 8 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} \sigma & \sigma & \sigma \\ \sigma & \sigma & \sigma \\ \sigma & \sigma & \sigma \end{pmatrix}; \quad c) \begin{pmatrix} \sigma & \tau & \tau \\ \tau & \sigma & \tau \\ \tau & \tau & \sigma \end{pmatrix}; \quad d) \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix};$$

$$e) \begin{pmatrix} 0 & \tau & \tau \\ \tau & 0 & \tau \\ \tau & \tau & 0 \end{pmatrix}; \quad f) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & \sigma \\ \sigma & \sigma & \sigma \end{pmatrix}.$$

$$[a) 16; 12; 90; 3,10; \quad b) 3\sigma; 0; 0; \quad c) \sigma+2\tau; \sigma-\tau; \sigma-\tau; \quad d) \tau\sqrt{2}; 0; -\tau\sqrt{2};$$

$$e) -2\tau; \tau; \tau; \quad f) 6; 0; -3].$$

10. За податке из зад. 9. а и за $r=1/\sqrt{\sigma_n}$ написати једначину Cauchy-јеве напонске површи и испитати њен облик.

$$\{14x^2 + 10y^2 + 8z^2 + 4xy - 8xz + 8yz - 1 = 0; \quad \sigma_s = 16; 8 \pm 2\sqrt{6} \text{ [N/mm}^2\text{]}; \text{ елипсоид}\}$$

11. Одредити средиште (C) и канонски облик напонске површи: $\Phi = 10x^2 + 9y^2 + 8z^2 + 4xy + 4yz - 24x - 26y - 20z + 34 = 0$.

$$\{\partial\Phi/\partial x = 5x + y - 6 = 0; \quad \partial\Phi/\partial y = 2x + 9y + 2z - 13 = 0; \quad \partial\Phi/\partial z = y + 4z - 5 = 0; \quad C(1; 1; 1);$$

$$\Phi(r_c) = 10 + 9 + 8 + 4 + 4 - 24 - 26 - 20 + 34 = -1; \quad 10X^2 + 9Y^2 + 8Z^2 + 4XY + 4YZ - 1 = 0;$$

$$\sigma_s = 12; 9; 6 \text{ [N/mm}^2\text{]}; \quad 12\xi^2 + 9\eta^2 + 6\zeta^2 - 1 = 0; \text{ елипсид}\}.$$

12. Да ли следеће површи

$$a) 4x^2 + 6xy + 5y^2 - 2z = 0; \quad b) x^2 + 4xy + 2y^2 - z = 0; \quad c) 9x^2 + 6xy + y^2 - 2z = 0$$

могу да представљају напонске површи?

[Не могу; а) елиптички параболоид; б) хиперболички параболоид, с) параболнички цилиндар].

13. Одредити октаедарске напоне за следећа напонска стања:

$$a) \begin{pmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} 11 & -4 & -7 \\ -4 & 6 & -2 \\ -7 & -2 & 9 \end{pmatrix}; \quad c) \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad d) \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\{c) p_{okt} = 413/3; \quad \sigma_{okt} = 35/3; \quad \tau_{okt} = 14/3 \text{ [kN/cm}^2\text{]}; \quad b) 0; \quad c) 0; \quad d) 261/3; 9; \sqrt{78}\}.$$

14. Одредити девијаторе напона за следећа напонска стања:

$$a) \begin{pmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} 15 & 0 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}; \quad c) \begin{pmatrix} 18 & & \\ & 12 & \\ & & 9 \end{pmatrix}; \quad d) \begin{pmatrix} 10 & & \\ & 9 & \\ & & 8 \end{pmatrix}.$$

15. Одредити инваријанте девијатора из претходног задатка.

$$[a) 0; -9; 0; \quad b) 0; -75; -250; \quad c) 0; -21; 20; \quad d) 0; -1; 0],$$

16. На подацима из задатка 14. проверити следеће релације између скалара девијатора и тензора напона:

$$\mathcal{D}_1=0; \quad \mathcal{D}_2=\mathcal{N}_2-\frac{1}{3}(\mathcal{N}_1)^2; \quad \mathcal{D}_3=\mathcal{N}_3-\frac{1}{3}\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2+\frac{2}{27}(\mathcal{N}_1)^3.$$

$$[a) \mathcal{D}_1=0; \quad \mathcal{D}_2=-9=234-(27^2/3); \quad \mathcal{D}_3=0=648-(27 \cdot 234/3)+(2 \cdot 27^3/27)=0;$$

$$b) 0; -75; -75; \quad c) 0; -21; 20; \quad d) 0; -1; 0; 27; 242; 720.$$

17. На примерима из зад. 14. одредити напонске површи девијатора.

$$[a) x^2-z^2+4xy+4yz-1=0; \quad b) 5x^2-5z^2+5xz-5yz=0; \quad c) 5x^2-y^2-4z^2-1=0;$$

$$d) x^2-z^2-1=0; \text{ једнојрани хиперболоиди].}$$

18. Главни напони једног напонског стања су $\sigma_s=15; 10$ и 5 [N/mm²]. Показати да су задовољене релације (1.69).

$$[p=\sigma_{sr}=30/3=10; \quad \delta_{ii}=5; 0; -5; \quad \mathcal{D}_i=0; -25; 0; \quad p_{okt}^2=350/3; \quad \sigma_{okt}^2=10;$$

$$\tau_{okt}^2=50/3=Q^2; \quad K^3=0],$$

19. За напонско стање из претходног задатка одредити Mohr-ове кругове.

20. Када су главни напони $\sigma_s=12, 8$ и 4 [kN/cm²] колике су екстремне вредности тангенцијалних напона? Проверити обрасце (1.63) и (1.69).

$$\{\tau_I=2; \quad \tau_{II}=4; \quad \tau_{III}=2 \text{ [kN/cm}^2\text{]}; \quad \tau_{okt}=4\sqrt{6}/3; \quad p_{(okt)}^2=224/3; \quad \sigma_{okt}=8;$$

$$\delta_s=4; 0; -4; \quad \mathcal{D}_i=0; \quad -3.32/2.3=-16; 0\}.$$

21. Показати да је октаедарски тангенцијални и псн увек мањи од највећег тангенцијалног напона због односа $0,941 \geq 2\sqrt{2}/3 \geq (\tau_{okt}/\tau_{max}) \geq \sqrt{2}/3 = 0,816$.

{Ако су $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ онда је према (1.54) напон $\tau_{II} = \tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 > 0$, док је $\tau_{III} < 0$, па је $\Delta\tau = \tau_{max} - \tau_{okt} = \tau_{max} - 2[\tau_I^2 + \tau_{II}^2 + \tau_{III}^2]^{1/2}/3 = \tau_{max} - 2\sqrt{2}[\tau_{max}^2 + \tau_{max}^2 \tau_{III}^2 + \tau_{III}^2]^{1/2}/3 = f(\tau_{III})$. Услов $\partial\Delta\tau/\partial\tau_{III} = 0$ даје $\tau_{max} + 2\tau_{III} = 0$ или $\tau_{III} = -1/2\tau_{max}$, те је $\Delta\tau_{max} = [1 - \sqrt{2}/3]\tau_{max}$. Због $\tau_{III} < 0$ биће $\tau_{min} = [1 - 2\sqrt{2}/3]\tau_{max}$ за $\tau_{III} = \tau_{max}$, па је заиста испуњена горња релација}.

22. Одредити однос τ_{okt}/τ_{max} за податке из задатка 20. [$\tau_{max}=4$ N/mm²; $\tau_{okt} = 4/3\sqrt{6} = 3,2660$, па је однос $3,2660/4 = 0,8165$].

23. Помоћу девијатора одредити τ_{okt} и однос τ_{okt}/τ_{max} ако су познати главни напони $\sigma_s=14; 9$ и 7 [N/mm²].

$$[\mathcal{D}_2 = -13; \quad \tau_{okt}^2 = -(2/3). \quad (-13) = 26/3 = 8,666; \quad \tau_{okt} = 2,944; \quad \tau_{max} = 3,5;$$

одонос 0,841].

24. Напонско стање је одређено овим елементима $\mathcal{N}_1=24; \quad \sigma_x=3\sigma_y/4=6$ [N/mm²]; $\tau_{xy} = |-\tau_{yz}| = \tau_{xz}/2 = \sigma_x/5$. Одредити τ_{okt} .

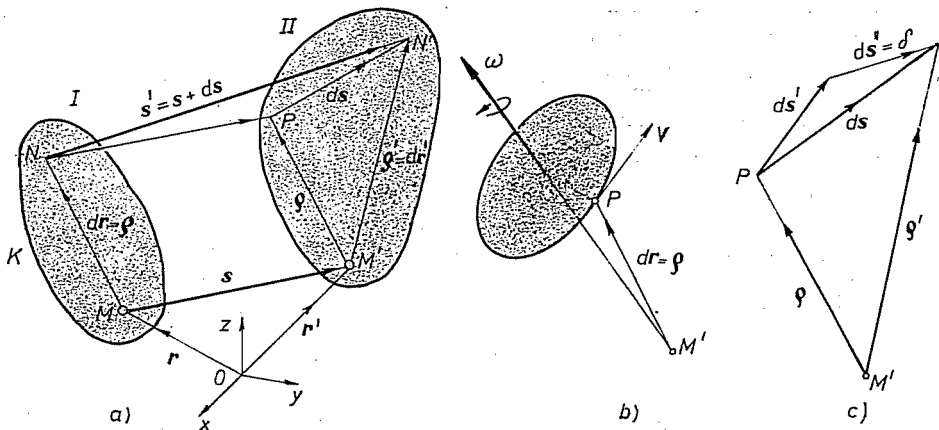
$$\{\sigma_x=10; \quad \sigma_s=8; \quad \sigma_z=6 \text{ [N/mm}^2\text{]}; \quad \tau_{xy} = -\tau_{yz}=2; \quad \tau_{xz}=4; \quad \mathcal{N}_2=164; \quad \tau_{okt}=\sqrt{56/3}\}.$$

25. Напонско стање је одређено инваријантима: $\mathcal{N}_1=30$ [kN/cm²]; $\mathcal{D}_i=0; -25$ и 0 . Одредити главне напоне.

$$[p=\sigma_{sr}=30/3=10; \quad \mathcal{N}_2=-25+300=275; \quad \mathcal{N}_3=750; \quad \sigma_s=15; 10; 5 \text{ [kN/cm}^2\text{]}].$$

2. ТЕОРИЈА ДЕФОРМАЦИЈА

2.1. Вектор померања. — Под утицајем сила еластично тело (K) се *креће* и *деформише*, па мења свој *положај*, *облик* и *заиремину*. Деформација у некој тачки (M) тела одређена је *променом растојања* између посматране тачке и оближњих тачака (N) и непосредној околини тачке M . Уочимо елемент тела (K) у околини тачке M која је одређена вектором положаја $\mathbf{r} = \mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ у односу на Декартов правоугли триједар $Oxuz$ (слика 2.1. *a*). Њој оближња тачка N одређена је у односу на M релативним вектором положаја $\vec{\rho} = \mathbf{MN} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ и вектором $\mathbf{ON} = \mathbf{r} + d\mathbf{r}$ у односу на почетак O триједра $Oxuz$. При преласку тела из положаја I — *почетној* (*иницијалној*) *положаја*, који се обично узима да је



Слика 2.1. — Вектор померања

положај тела у недеформисаном стању, у положај II, тачка M прећи ће у положај M' , одређен апсолутним вектором положаја \mathbf{r}' у односу на почетак O и релативним вектором \mathbf{s} у односу на тачку M која се назива *вектор померања* $\mathbf{MN}' = \mathbf{s} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$. Тачка N прећи ће у положај N' , одређену релативним вектором $\mathbf{s}' = \mathbf{s} + d\mathbf{s}$ у односу на тачку N . Према томе су тачке M, N, M' и N' одређене векторима положаја у односу на координатни почетак O триједра $Oxuz$:

$$M) \mathbf{r}; N) \mathbf{r} + d\mathbf{r}; M') \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{s}; N') \mathbf{r}' + d\mathbf{r}' = \mathbf{r} + d\mathbf{r} + \mathbf{s} + d\mathbf{s}. \quad (2.1)$$

Сматра се да је деформација *инфинитезимална* и *континуална*, што значи да се околина тачке (M) пресликава у околину око тачке M , па стога морају Декартове координате вектора померања u, v, w , бити *непрекидне, једнозначне* и *диференцијабилне функције* координата x, y, z :

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{r}) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}; \quad u = u(x, y, z); \quad v = v(x, y, z); \quad w = w(x, y, z). \quad (2.2)$$

Због тога су парцијални изводи вектора померања по Декартовим координатама:

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{j} + \frac{\partial w}{\partial x} \mathbf{k}; \quad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial w}{\partial y} \mathbf{k}; \quad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial z} \mathbf{j} + \frac{\partial w}{\partial z} \mathbf{k};$$

па је тотални диференцијал

$$\begin{aligned} d\mathbf{s} &= \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} dz = \left[\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right] \mathbf{i} + \\ &+ \left[\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right] \mathbf{k} = \\ &= (\nabla u, d\mathbf{r}) \mathbf{i} + (\nabla v, d\mathbf{r}) \mathbf{j} + (\nabla w, d\mathbf{r}) \mathbf{k} = d\mathbf{r}' - d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

па се може написати у матричном облику

$$\begin{aligned} \{d\mathbf{s}\} &= \begin{Bmatrix} ds_x \\ ds_y \\ ds_z \end{Bmatrix} = \mathbf{S} \{d\mathbf{r}\} = \begin{pmatrix} (\text{grad } u) \\ (\text{grad } v) \\ (\text{grad } w) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y & \partial u/\partial z \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y & \partial v/\partial z \\ \partial w/\partial x & \partial w/\partial y & \partial w/\partial z \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \{d\mathbf{r}' - d\mathbf{r}\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

где је $\mathbf{S}(s_{ik})$ *функционална матрица* парцијалних извода координата вектор померања, (u, v, w) , по координатама x, y, z . Она је квадратна, несиметрична матрица ($s_{ik} \neq s_{ki}$), облика

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} (\text{grad } u) \\ (\text{grad } v) \\ (\text{grad } w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\nabla u) \\ (\nabla v) \\ (\nabla w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y & \partial u/\partial z \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y & \partial v/\partial z \\ \partial w/\partial x & \partial w/\partial y & \partial w/\partial z \end{pmatrix} = (s_{ik}) \quad (2.5)$$

Ако је тело (K) прешло прво *транслацијом* у положај (I), онда вектору померања треба додати и вектор *транслаторног* померања \mathbf{s}_0 , па је релативни положаја тачке M' у односу на M_0 , а почетни положај $\mathbf{s}_0 + \mathbf{s}$, то је

$$\mathbf{s}' = \mathbf{s}_0 + \mathbf{s} + d\mathbf{s}; \quad \mathbf{s}' - \mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + d\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{S} d\mathbf{r}; \quad d\mathbf{s} = d\mathbf{r}' - d\mathbf{r} = \vec{\rho}' - \vec{\rho} \quad (2.6)$$

При прелазу деформабилног тела из једног положаја у други, оближњи, елементарна померања су резултат *транслације*, *обртања* (*ротације*) и *деформације* како је формулисао Helmholtz својим „*основним ставом кинематике деформабилног тела*“. Пошто \mathbf{s}_0 претставља *транслацију*, значи да су у $d\mathbf{s}$ сажети и ротација и деформација, па треба ова два дела раздвојити.

Због тога разложимо матрицу \mathbf{S} на збир симетричне матрице, $\mathbf{S}_s (s_{ik} = s_{ki})$, и кососиметричне, $\mathbf{S}_k (s_{ii} = 0; s_{ik} = -s_{ki}$ за $i \neq k$) па је

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_s + \mathbf{S}_k; \quad \mathbf{S}_s = (\mathbf{S} + \mathbf{S}')/2; \quad \mathbf{S}_k = (\mathbf{S} - \mathbf{S}')/2, \quad (2.7)$$

где је $\mathbf{S}' = \mathbf{S}^T$ транспонована матрица матрице \mathbf{S} . С обзиром на (2.5) биће

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}; \quad (2.8)$$

$$\mathbf{S}_k = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix}$$

и због (2.4) и (2.7) може се написати да је прираштај вектора померања

$$\begin{aligned} d\mathbf{s} &= d\mathbf{r}' - d\mathbf{r} = \vec{\rho}' - \vec{\rho} = d\mathbf{s}' + d\mathbf{s}''; \quad \{d\mathbf{s}\} = \{d\mathbf{s}'\} + \{d\mathbf{s}''\} = \\ &= \mathbf{S}_k \{d\mathbf{r}\} + \mathbf{S}_s \{d\mathbf{r}\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Први се члан, $d\mathbf{s}'$, може, према (2.7), написати у облику:

$$\{d\mathbf{s}'\} = \mathbf{S}_k \{d\mathbf{r}\} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) & 0 & -\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ -\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \quad (2.10)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) dz - \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx - \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) dz \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) dy - \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \end{pmatrix}$$

Пошто је

$$\text{rot } \mathbf{s} = [\nabla, \mathbf{s}] = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

следи да је

$$\{d\mathbf{s}'\} = \mathbf{S}_k \{d\mathbf{r}\} = [\text{rot } \mathbf{s}, d\mathbf{r}]/2. \quad (2.12)$$

Из кинематике крутог тела* познато је да при обраћању тела око непомицне тачке важи релација $\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot} [\vec{\omega}, \vec{\rho}] = 2\vec{\omega}$, где је $\vec{\omega}$ тренутна угаона брзина, а $\vec{\rho}$ вектор положаја тачке тела (слика 2.1. b), па због тога што је $\mathbf{s} = \dot{\mathbf{v}} t$ и $\text{rot } \mathbf{s} = 2\vec{\omega} t = 2\vec{\varphi}$, где је $\vec{\varphi} = \vec{\omega} t = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$ угао шренућнои обрћанња биће

$$\{d\mathbf{s}'\} = \mathbf{S}_k \{d\mathbf{r}\} = [\text{rot } \mathbf{s}, d\mathbf{r}]/2 = [\vec{\varphi}, d\mathbf{r}] = [\vec{\varphi}, \vec{\rho}]; \quad \vec{\varphi} = \{\varphi\}, \quad (2.13)$$

односно

$$\{d\mathbf{s}'\} = \mathbf{S}_k \{d\mathbf{r}\} = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q dz - r dy \\ r dx - p dz \\ p dy - q dx \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

па су, према (2.11), правоугле координате вектора тренутног обраћања:

$$\{\varphi\} = \{\Omega\} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{s}; \quad \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\partial w / \partial y) - (\partial v / \partial z) \\ (\partial u / \partial z) - (\partial w / \partial x) \\ (\partial v / \partial x) - (\partial u / \partial y) \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

С обзиром на изнето вектор елементарног померања састоји се из два дела

$$\begin{aligned} \{d\mathbf{s}\} &= \{d\mathbf{s}'\} + \{d\mathbf{s}''\} = \{d\mathbf{r}'\} - \{d\mathbf{r}\} = \{\vec{\rho}'\} - \{\vec{\rho}\} = \\ &= \mathbf{S}_k \{\vec{\rho}\} + \mathbf{S}_s \{\vec{\rho}\} = [\vec{\varphi}, \vec{\rho}] + \{\delta\}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

од којих први $\{d\mathbf{s}'\}$ представља *число обрћанње (ротацију)* око тачке M' , а други $\{d\mathbf{s}''\}$ *числу инфинитезималну деформацију*. Ако би било $\{\vec{\rho}\} = 0$ онда би се добило да је

$$\begin{aligned} \{d\mathbf{r}'\} = \{\vec{\rho}'\} &= \{\vec{\rho}\} + [\vec{\varphi}, \vec{\rho}]; \quad (\vec{\rho}') \{\rho'\} = (\vec{\rho}) \{\rho\} + \\ &+ 2(\vec{\rho}) \{\vec{\varphi}, \vec{\rho}\} + [\vec{\varphi}, \vec{\rho}]^2 = (\vec{\rho}) \{\rho\}; \quad |\rho'| = |\rho|, \end{aligned}$$

па се *дужине и улови не мењају*, што показује да та компонента долази од *числои обрћанња* деформабилног тела као крутог тела. Друга компонента

* Кинематика, чл. 10.4 страна 209,

$\{ds''\} = \{\vec{\delta}\}$ представља *чисту деформацију* (слика 2.1. c), која је, с обзиром на (2.10) и (2.8) одређена тензором чија је матрица симетрична:

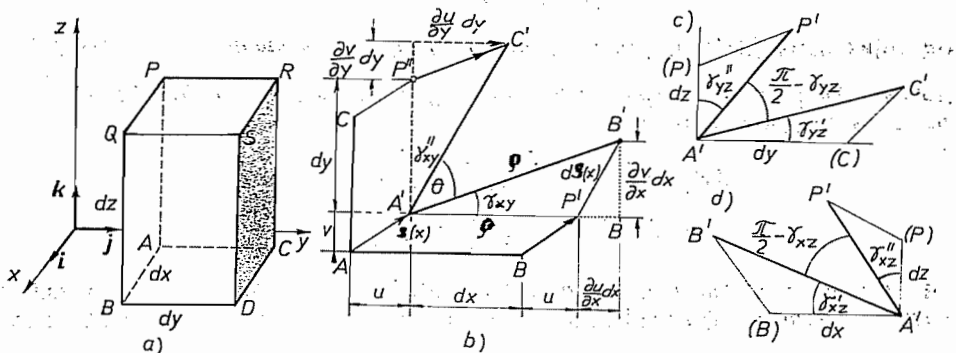
$$\mathbb{S} = \mathbf{S}_s = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{yx} & \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & \epsilon_{zy} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_z \end{pmatrix} = \text{def} \{s\} \quad (2.17)$$

који се назива *тензор деформација* или *деформатор вектора померања*. Из предњих релација следи да је вектор малих деформација

$$\{\vec{\delta}\} = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} = \mathbb{S} \{d\mathbf{r}\} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) dz \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

2.2. Дилатације и клизања. — Елементи матрице \mathbf{S}_s , односно компоненте тензора деформације \mathbb{S} , имају своја геометријска и физичка значења. Предпоставимо *чисту инфинитезималну деформацију* и посматрајмо правоугли паралелепипед $ABCDPQRS$ (слика 2.2 a), ивица dx , dy и dz . Он се при де-



Слика 2.2. — Дилатације и клизања

формацији променити и облик и запремину. Основа $ABCD$ у равни Oxy деформише се па ће тачке A и B ивице AB дужине dx прећи у положаје A' и B' (слика 2.2. b). Овде је сада $AB = d\mathbf{r} = \vec{\rho} = \mathbf{i} dx$, док је $\mathbf{A}'\mathbf{A}' = d\mathbf{s}_{(x)} = d(\mathbf{i}u + \mathbf{j}v) = \mathbf{i}(\partial u/\partial x) dx + \mathbf{j}(\partial v/\partial x) dy$, па је

$$d\mathbf{r}' = \vec{\rho}' = \vec{\rho} + d\mathbf{s}_{(x)} = \mathbf{i} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx + \mathbf{j} \frac{\partial v}{\partial x} dx. \quad (2.19)$$

Пошто се посматрају *инфинитезималне деформације* може се узети да се дужина вектора $|d\mathbf{r}'| = |\vec{\rho}'|$ мало разликује од његове пројекције на Ox -осу па је

$$|d\mathbf{r}'| = |\vec{\rho}'| = |\mathbf{A}'\mathbf{B}''| = (\mathbf{i}, \vec{\rho}') = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx; \quad |\vec{\rho}| = |d\mathbf{r}| = dx, \quad (2.20)$$

па је *релативно издужење — дилатација* — у правцу Ox -осе:

$$\varepsilon_x = \frac{\overline{A'B''} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{|\vec{\rho}'| - |\vec{\rho}|}{|\vec{\rho}|} = \frac{[1 + (\partial u/\partial x)] dx - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.21. a)$$

Тачке A и C ивице AC , дужине dy , прећи ће у положаје A' и C' . Како је овде

$$d\mathbf{r} = \vec{\rho} = \mathbf{j} dy, \quad \mathbf{s} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}; \quad \vec{\rho}' = \mathbf{A}'\mathbf{C}',$$

то је

$$|\vec{\rho}'| = dy; \quad \vec{\rho}' = \vec{\rho} + d\mathbf{s}_{(y)} = \mathbf{j} dy + \mathbf{i}(\partial u/\partial y) dy + \mathbf{j}(\partial v/\partial y) dy,$$

па је дилатација у правцу Oy -осе

$$\varepsilon_y = \frac{\overline{A'C''} - \overline{AC}}{\overline{AC}} = \frac{[1 + (\partial v/\partial y)] dy - dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.21. b)$$

Аналогно томе, добија се да је дилатација у Oz -правцу $\varepsilon_z = \partial w/\partial z$. Дакле, дилатације у правцима оса координатног система $Oxyz$ представљене су парцијалним изводима координата вектора померања (u, v, w) по координатама x, y, z

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (2.22)$$

Оне су једнаке дијагоналним елементима тензора деформација (2.17).

Прав угао између ивица AB и AC промениће се и постаће *оштар*, који је одређен својим косинусом

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(\mathbf{A}'\mathbf{B}', \mathbf{A}'\mathbf{C}')}{|\mathbf{A}'\mathbf{B}'| \cdot |\mathbf{A}'\mathbf{C}'|} = \\ &= \frac{[1 + (\partial u/\partial x)] dx \cdot (\partial u/\partial y) dy + (\partial v/\partial x) dx \cdot [1 + (\partial v/\partial y)] dy}{[1 + (\partial u/\partial x)] dx \cdot [1 + (\partial v/\partial y)] dy} = \\ &= \frac{(\partial u/\partial y)}{1 + (\partial v/\partial y)} + \frac{(\partial v/\partial x)}{1 + (\partial u/\partial x)} = \frac{(\partial u/\partial y)}{1 + \varepsilon_y} + \frac{(\partial v/\partial x)}{1 + \varepsilon_x}. \end{aligned}$$

Пошто су дилатације врло мале, $\varepsilon_x \ll 1$ и $\varepsilon_y \ll 1$, то се могу у предњем изразу занемарити у односу на јединице, те ће бити

$$\cos \theta = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy} \right) = \sin \gamma_{xy} \approx \gamma_{xy} = 2 \varepsilon_{xy}. \quad (2.23)$$

Дакле, смањење правог угла између ивица AB и AC основе $ABCD$ паралелепипеда једнако је двострукој компоненти тензора деформације \mathcal{E} . Ово се смањење правог угла назива *клизање* или *смицање* (shearing strain или detorsion), пошто се мења облик правоугаоника ($ABCD$) и он постаје паралелограм ($A'B'C'D'$). Клизање се састоји из два дела услед скретања ивица AB и ивица AC . Са слике се види (слика 2.2. b) да је

$$\operatorname{tg} \gamma'_{xy} = \frac{A'B''}{A'B'''} = \frac{(\partial v / \partial x) dx}{[1 + (\partial u / \partial x)] dx} = \frac{(\partial v / \partial x)}{1 + \varepsilon_x} = \frac{\partial v}{\partial x} \approx \gamma'_{xy}; \quad \varepsilon_x \ll 1.$$

Аналогно томе биће

$$\operatorname{tg} \gamma_{xy}'' = \frac{C'C''}{A'C'''} = \frac{(\partial u / \partial y) dy}{[1 + (\partial v / \partial y)] dy} = \frac{(\partial u / \partial y)}{1 + \varepsilon_y} = \frac{\partial u}{\partial y} \approx \gamma_{xy}''; \quad \varepsilon_y \ll 1.$$

На исти начин добијају се и клизања у равнинама Ouz и Ozx (слика 2.2. c, d), па су *компонентне деформације*, односно компоненте тензора деформација:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2 \varepsilon_{xy}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 2 \varepsilon_{xz}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 2 \varepsilon_{yz}; \end{aligned} \quad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Две једначине су *Cauchy-јеве једначине деформација*, јер их је он извео 1922. године. Због тога се тензор \mathcal{E} назива *Cauchy-јев тензор инфинитезималних деформација*.

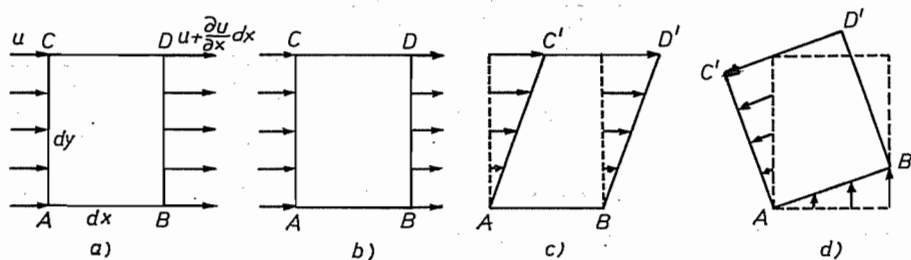
Деформације у околини тачке (M) еластичног тела одређене су са *шест* *компонентних деформација*: *три дилатације* (ε_x ; ε_y ; ε_z) и *три клизања* (γ_{xy} ; γ_{xz} ; γ_{yz}). Ако функција $u = u(x, y, z)$ *расте* када x *расте*, онда је извод $\varepsilon_x = \partial u / \partial x > 0$, па се дужина dx *повећава*, те је *дилатација* ε_x *позитивна*; обратно, када се дужина dx *смањује* тада је \mathcal{E}_x *дилатација негативна* ($\varepsilon_x < 0$). Ако функција $v = v(x, y, z)$ *расте* када x *расте*, онда $\partial v / \partial x > 0$, па је $\gamma'_{xy} > 0$, те се ивица AB *обрће* око A у *позитивном смеру* и тежи ка иници AC . Ако пак и функција $u = u(x, y, z)$ *расте* када y *расте*, онда је и $\gamma_{xy}'' > 0$, па се ивица AC *обрће* око A и тежи ка иници AB . Због тога је угао $\gamma_{xy} = \gamma_{xy}' + \gamma_{xy}'' > 0$, па се *прав угао ВАС смањује* и узима се да је *клизање позитивно*. Из предњег се може закључити:

1° *да позитивној дилатацији одговара издужење, а негативној скрћење, и*

2° *да позитивном клизању (смицању) одговара смањење правој ула између двеју позитивно оријентисаних ортоналних дужи, и обратно, да негативном клизању одговара повећање тој правој ула.*

На слици 2.3. приказани су неки карактеристични случајеви код *равне деформације*:

- a) $\epsilon_x = \partial u / \partial x > 0; \quad v = 0;$
 b) $\epsilon_x = \partial u / \partial x < 0; \quad v = 0;$
 c) $\partial u / \partial y > 0; \quad \partial u / \partial x = 0; \quad \partial v / \partial x = 0;$
 d) $\partial u / \partial y < 0; \quad \partial v / \partial x > 0.$



Слика 2.3. Карактеристични случајеви код равне деформације

2.3. Cauchy-јев тензор деформација. — Компоненте ϵ_{ii} Cauchy-јевог тензора инфинитезималнич деформација ($\mathbb{E} = \mathbb{E}$) представљају дилатације, а компоненте $\epsilon_{jk} = \epsilon_{ki}$, за $i \neq k$, *половине* вредности клизања (смицања)*.

Овим се успоставља аналогија између тензора напона ($\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{N}$) и овог тензора ($\mathbb{E} = \mathbb{E}$), па су његови скалари или инваријанте:

$$\mathbb{E}_1 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div } \mathbf{s} = (\nabla \cdot \mathbf{s});$$

$$\mathbb{E}_2 = \epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_x \epsilon_z + \epsilon_y \epsilon_z - (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)/4; \quad (2-25)$$

$$\mathbb{E}_3 = \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z + \gamma_{xy} \gamma_{xz} \gamma_{yz}/4 - (\epsilon_x \gamma_{yz}^2 + \epsilon_y \gamma_{xz}^2 + \epsilon_z \gamma_{xy}^2)/4.$$

2.4. Запреминска дилатација. — Запремина елементарног паралелепипеда ивица dx, dy, dz (слика 2.2. b) износи $dV = dx dy dz$. После деформације паралелепипед постаје коси, али су му странице остале паралелне, па му је запремина

$$dV' = (d\mathbf{r}_1' [d\mathbf{r}_2', d\mathbf{r}_3']) = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon_x & \partial v / \partial x & \partial w / \partial x \\ \partial u / \partial y & 1 + \epsilon_y & \partial w / \partial y \\ \partial u / \partial z & \partial v / \partial z & 1 + \epsilon_z \end{pmatrix} dx dy dz.$$

Пошто се посматрају инфинитезималне деформације може се утицај смицања занемарити, па ће приближно бити

$$dV' = (1 + \epsilon_x) dx \cdot (1 + \epsilon_y) dy \cdot (1 + \epsilon_z) dz = (1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) dV,$$

јер су дилатације врло мале, $\epsilon_x \ll 1; \epsilon_y \ll 1; \epsilon_z \ll 1$, те се њихови производи могу занемарити као мале величине вишег реда.

* Неки писци (на пример Love) узимају за компоненте цела клизања, $\epsilon_{ik} = \gamma_{ik}$.

Под *зајреминском (кубном) дилатацијом* подразумева се однос

$$\varepsilon_V = \frac{dV' - dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{s} = \mathbb{S}_1 \quad (2.26)$$

те се уочава геометријски смисао прве инваријанте тензора деформација.

Ова је дилатација као однос истоименованих величина неименовани број. [$\text{cm}^3/\text{cm}^3 = 1$].

2.5. Хомогена деформација. — Тачка $M(x, y, z)$ области ΔV у положају I прећи се положај $M'(x' y' z')$, а област ΔV у област $\Delta V'$ у околини тачке M' . Пошто је тачка M потпуно одређена у области ΔV координатама x, y, z то су нове координате тачке M' функција старих, $x' = f_1(x, y, z)$, $y' = f_2(x, y, z)$, $z' = f_3(x, y, z)$. Ове су функције непрекидне у области ΔV , па је и деформација *непрекидна*, па стога те функције представљају *трансформацију* области ΔV у област $\Delta V'$. Како је вектор $\mathbf{MN} = d\mathbf{r} = \vec{\rho}$ прешао у вектор $\mathbf{M}'\mathbf{N}' = d\mathbf{r}' = \vec{\rho}'$, то је трансформација *афина*, али је састављена из ротације и деформације.

Важан случај у техничкој пракси је када су компонентна померања *линеарне функције координата*

$$\{\mathbf{s}\} = \{\mathbf{s}_0\} + \mathbf{A}\{\mathbf{r}\}, \quad \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{Bmatrix}. \quad (2.27)$$

С обзиром на (2.24) и (2.15) види се да су у овоме случају *компонентне деформације и компонентне ротације константне*, па се овакве деформације називају *хомогеним деформацијама*.

Разликоваћемо два важна случаја оваквих деформација.

1° Компонентне деформације су једнаке нули. — С обзиром на (2.24) и (2.15) у овом случају биће:

$$\varepsilon_x = \partial u / \partial x = a_{11} = 0; \quad \gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x = a_{12} + a_{21} = 0; \quad a_{21} = -a_{12}; \quad p = a_{32};$$

$$\varepsilon_y = \partial v / \partial y = a_{22} = 0; \quad \gamma_{xz} = \partial u / \partial z + \partial w / \partial y = a_{13} + a_{31} = 0; \quad a_{31} = -a_{13}; \quad q = a_{13};$$

$$\varepsilon_z = \partial w / \partial z = a_{33} = 0; \quad \gamma_{yz} = \partial v / \partial z + \partial w / \partial y = a_{23} + a_{32} = 0; \quad a_{32} = -a_{23}; \quad r = a_{21};$$

па су компонентна померања

$$\begin{aligned} u &= u_0 + qz - ry; \\ v &= v_0 + rx - pz; \\ w &= w_0 + py - qx; \end{aligned} \quad \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix};$$

$$\{\mathbf{s}\} = \{\mathbf{s}_0\} + \Omega\{\mathbf{r}\} \quad (2.28)$$

где је Ω кососиметрична матрица компонентних ротација, те ове једначине заиста представљају кинематичке једначине сложеног кретања (транслације \mathbf{s}_0 и обртања $\{\varphi\}$) крутог тела.

2° Компонентне ротације су једнаке нули. — Овде су

$$p = q = r = 0; \{\vec{\varphi}\} = 0; \text{rot } \mathbf{s} = 0; \partial u / \partial y = \partial v / \partial x; \partial u / \partial z = \partial w / \partial x; \partial v / \partial z = \partial w / \partial y,$$

па пошто су задовољни Cauchy-Riemann-ови услови, то се векторска функција \mathbf{s} може изразити као градијент скаларне функције $U = U(x, y, z)$, те је $\text{rot } \mathbf{s} = \text{rot grad } U = 0$; $\mathbf{s} = \text{grad } u(x, y, z) = \partial U / \partial x$; $v = \partial U / \partial y$; $w = \partial U / \partial z$. (2.29)

Функција $\Pi(x, y, z) = -U(x, y, z)$ назива се *поиненцијалном функцијом* или *поиненцијалом*, па су и деформације *поиненцијалне*. Дакле, у случају чисте хомогене деформације (без ротације) вектору померања \mathbf{s} одговара поиненцијал $\Pi(x, y, z)$, па су

$$\mathbf{s} = \text{grad } (-\Pi); u = -(\partial \Pi / \partial x); v = -(\partial \Pi / \partial y); w = -(\partial \Pi / \partial z). \quad (2.30)$$

2.6. Промена компонентних деформација при трансформацији координатног система. — Ако се триједар $Oxyz$ (слика 1.7) заокрене око почетка O и пређе у ортогонални триједар $O\xi\eta\zeta$ онда је, аналогно (1.22), матрица тензора деформација \mathfrak{G} у односу на осе новог триједра:

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{G}} &= \mathbf{A}' \mathfrak{G} \mathbf{A}; \begin{pmatrix} \varepsilon_{\xi} & \frac{1}{2} \gamma_{\xi\eta} & \frac{1}{2} \gamma_{\xi\zeta} \\ \frac{1}{2} \gamma_{\xi\eta} & \varepsilon_{\eta} & \frac{1}{2} \gamma_{\eta\zeta} \\ \frac{1}{2} \gamma_{\xi\zeta} & \frac{1}{2} \gamma_{\eta\zeta} & \varepsilon_{\zeta} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad (2.31) \end{aligned}$$

где је \mathbf{A} матрица трансформације, па су:

$$\varepsilon_{\xi} = \varepsilon_x \alpha_1^2 + \varepsilon_y \beta_1^2 + \varepsilon_z \gamma_1^2 + \gamma_{xz} \alpha_1 \beta_1 + \gamma_{xy} \alpha_1 \gamma_1 + \gamma_{yz} \beta_1 \gamma_1; \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \gamma_{\xi\eta} &= \varepsilon_x \alpha_1 \alpha_2 + \varepsilon_y \beta_1 \beta_2 + \varepsilon_z \gamma_1 \gamma_2 + [\gamma_{xy} (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) + \\ &+ \gamma_{xz} (\alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_1) + \gamma_{yz} (\beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1)] / 2. \end{aligned}$$

Пошто је тензор \mathfrak{G} симетричан, биће такав и тензор $\bar{\mathfrak{G}}$, па је матрица \mathfrak{G} симетрична. Вектор померања \mathbf{s} је остао исти, али му се координате трансформишу и биће:

$$\{\bar{\mathbf{s}}\} = \mathbf{A}' \{\mathbf{s}\}; \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \alpha_1 + v \beta_1 + w \gamma_1 \\ u \alpha_2 + v \beta_2 + w \gamma_2 \\ u \alpha_3 + v \beta_3 + w \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

па Cauchy-јеве једначине (2.24) важе и у овом случају:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\xi} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}; \quad \varepsilon_{\eta} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}; \quad \varepsilon_{\zeta} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta}; \quad \gamma_{\xi\eta} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}; \\ \gamma_{\xi\zeta} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi}; \quad \gamma_{\eta\zeta} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta}.\end{aligned}\quad (2.34)$$

2.7. Главне дилатације. — Аналогно главним напонима (чл.1.9) постоје и главне дилатације. Правац $d\mathbf{r}_s$ који је колинеаран са дилатацијом ε_s је правац главне дилатације, па из (2.18) зледи

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}\{d\mathbf{r}_s\} &= \varepsilon_s \{d\mathbf{r}_s\}; \quad (\mathfrak{S} - \varepsilon_s \mathbf{I})\{d\mathbf{r}_s\} = 0; \\ f(\varepsilon_s) &= |\mathfrak{S} - \varepsilon_s \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_s & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_s & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_s \end{vmatrix} = \varepsilon_s^3 - \mathfrak{S}_1 \varepsilon_s^2 + \mathfrak{S}_2 \varepsilon_s - \mathfrak{S}_3 = 0; \\ \varepsilon_s &= \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3.\end{aligned}\quad (2.35)$$

Овде су: ε_s својствена вредност, \mathbf{I} јединична матрица, \mathfrak{S}_i инваријанте тензора деформација (2.25). Секуларна једначина је аналогна једначини (1.31) и има три реална и различита корена, па постоје три главне дилатације које падају у три међусобно управна правца, за које клизања не постоје.

Када се главни правци узму за осе новог триједара, тада су:

$$\mathfrak{S}_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_V; \quad \mathfrak{S}_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3; \quad \mathfrak{S}_3 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3. \quad (2.35)$$

2.8. Деформацијске површи. — Дилатација за неки правац одређен јединичним вектором \mathbf{n} , чији су косинуси смера α, β, γ у односу на триједар $Oxuz$, према (2.32), износи:

$$\varepsilon_n = (\mathbf{n}) \mathfrak{S} \{\mathbf{n}\} = \varepsilon_x \alpha^2 + \varepsilon_y \beta^2 + \varepsilon_z \gamma^2 + \gamma_{xy} \alpha\beta + \gamma_{xz} \alpha\gamma + \gamma_{yz} \beta\gamma. \quad (2.37)$$

Ако се од координатног почетка (O) у правцу \mathbf{n} пренесе вектор $\mathbf{r} = r\mathbf{n}$, онда су му правоугле координате $x = r\alpha; y = r\beta; z = r\gamma$. Уношењем ових релација у предњи израз добија се функционална зависност

$$\begin{aligned}F(x, y, z) &= (\mathbf{r}) \mathfrak{S} \{\mathbf{r}\} = \varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2 + \\ &+ \gamma_{xy} xy + \gamma_{xz} xz + \gamma_{yz} yz = \varepsilon_n r^2 = \pm b^2.\end{aligned}\quad (2.38)$$

Аналогно напонској површи (1.44) она представља деформацијску површи („Cauchy-јев деформацијски квадрик“). Она је, дакле, геометријско место завршних тачака вектора \mathbf{r} , модула $r = b/\sqrt{\varepsilon_n}$. Површ је централна са средиштем у почетку O триједра $Oxuz$ и може бити: елипсоид, једнојрани и двојрани хиперолоид.

Када се у тачки O узме триједар правца главних дилатација $O\xi\eta\zeta$, онда је једначина деформацијске површи

$$F(\xi, \eta, \zeta) = \varepsilon_1 \xi^2 + \varepsilon_2 \eta^2 + \varepsilon_3 \zeta^2 = \pm b^2; \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi, \eta, \zeta). \quad (2.39)$$

Као и код напонске површи и облик деформацијске површи зависи од *предзнака* сваке дилатације. Када су све истог предзнака (издужења односно скраћења) површ је облика *елипсоида*. Када су две дилатације различитог предзнака, површ је једнограни или двограни хиперboloид раздељени асимптотским конусом. Ако вектор повучен из почетка (O) *сече* једнограни хиперboloид, онда је у томе правцу истезање, а ако сече двограни онда је у том правцу скраћење. Међутим, ако сече асимптотски конус, онда у том правцу нема дилатације.

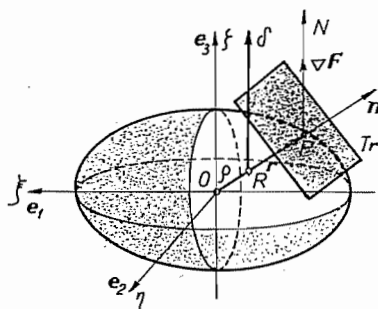
Вектор $\mathbf{r} = r\mathbf{n}$ продира површ у тачки P , па је градијент функције

$$\text{grad } F(\xi, \eta, \zeta) = 2r(\varepsilon_1 \alpha \mathbf{e}_1 + \varepsilon_2 \beta \mathbf{e}_2 + \varepsilon_3 \gamma \mathbf{e}_3) = |\nabla F| \cdot \{\vec{N}\} = 2r \mathfrak{G}\{\mathbf{n}\} \quad (2.40)$$

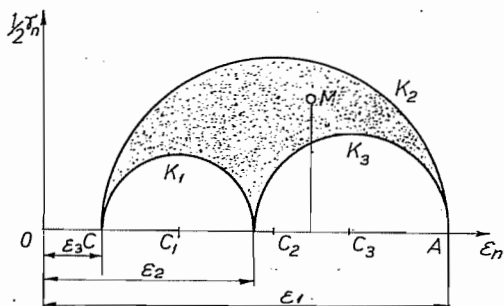
где је $\{\vec{N}\}$ јединични вектор нормале површи. Када се у правцу \mathbf{r} пренесе вектор $\mathbf{OR} = d\mathbf{r} = \rho \vec{\rho} \mathbf{n}$, онда су пројекције вектора деформације на правце главних дилатација $\delta_1 = \varepsilon_1 \rho \alpha$; $\delta_2 = \varepsilon_2 \rho \beta$; $\delta_3 = \varepsilon_3 \rho \gamma$, па је, према (2.18),

$$\{\vec{\delta}\} = \mathfrak{G}\{\vec{\rho}\} = \rho \mathfrak{G}\{\mathbf{n}\} = \frac{\rho}{2r} \text{grad } F = \frac{\rho}{2r} |\nabla F| \cdot \{\vec{N}\}. \quad (2.41)$$

Вектор деформације је, дакле, паралелан нормали $\{\mathbf{N}\}$ површи у тачки P у којој јединични вектор \mathbf{n} продира ту површ, али дејствује у тачки R , па се може лако конструисати (слика 2.4).



Слика 2.4 — Одређивање вектора деформације



Слика 2.5 — Mohr-ови кругови за деформације

2.9. Mohr-ови кругови за деформације. — Према (1.54) екстремне вредности клизања су

$$\gamma_{I} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3; \quad \gamma_{II} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3; \quad \gamma_{III} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2. \quad (2.42)$$

Mohr-ови кругови конструису се на исти начин као и код напона (члан 1.12). На апсцисну осу преноси се дилатација (слика 2.5) а ординатну клизање. Координате тачке M у подручју између полукругова одређују дилатацију и клизање.

2.10. Вектор деформација за октаедарску раван. — Правац нормале октаедарске равни (слика 1.17) гради са правцима главних дилатација једнаке услове ($\alpha = \beta = \gamma = \sqrt{3}/3$), па је вектор деформација:

$$\{\vec{\delta}\} = \rho \mathfrak{G}\{\mathbf{n}\}; \quad \delta_1 = \sqrt{3} \rho \varepsilon_1 / 3; \quad \delta_2 = \sqrt{3} \rho \varepsilon_2 / 3; \quad \delta_3 = \sqrt{3} \rho \varepsilon_3 / 3$$

Проекције овог вектора на правац нормале и на октаедарску раван износе

$$\delta_{mkt} = \rho (\mathbf{n}) \mathcal{G} \{\mathbf{n}\} = \rho (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/3 = \rho \varepsilon_V/3; \quad \varepsilon_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \quad \vec{\rho} = d\mathbf{r}; \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \delta_{iokt} &= [\delta^2 - \delta_{nokt}^2]^{1/2} = \rho [3(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2]^{1/2}/3 = \\ &= \rho [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2]^{1/2}/3. \end{aligned}$$

2.11. Сферни тензор и девијатор деформација. — Аналогно тензору напона (члан 1.14) може се и тензор деформација (\mathcal{G}), узимајући *средњу дилатацију* $\varepsilon_{sr} = \varepsilon = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/3 = \mathcal{G}_1/3 = \varepsilon_V/3$, разложити на *сферни тензор* и *девијатор деформације*, и биће:

$$\mathcal{G} = \mathbf{S}^{(e)} + \mathcal{D}^{(e)}; \quad \mathbf{S}^{(e)} = \varepsilon \mathbf{I}; \quad \mathcal{D}^{(e)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon & & \\ & \varepsilon_2 - \varepsilon & \\ & & \varepsilon_3 - \varepsilon \end{pmatrix}; \quad (2.45)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{sr} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/3.$$

Деформацијска површ сферног тензора је *сфера*, па су дилатације једнаке у свим правцима, те запремински елемент у околини посматране тачке мења само своју величину. Међутим, девијатор карактерише само *промену облика* тог елемента без промене запремине.

Скалари девијатора су:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1^{(e)} &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 3\varepsilon = 0; \quad \varepsilon = \varepsilon_{sr} = 1/3 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3); \\ \mathcal{D}_2^{(e)} &= -1/6 [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2] = -3/2 \delta_{iokt}^2; \quad (2.46) \\ \mathcal{D}_2^{(e)} &= |\mathcal{D}^{(e)}| = \prod_{i=1}^3 (\varepsilon_i - \varepsilon) = 1/3 [(\varepsilon_1 - \varepsilon)^3 + (\varepsilon_2 - \varepsilon)^3 + (\varepsilon_3 - \varepsilon)^3]. \end{aligned}$$

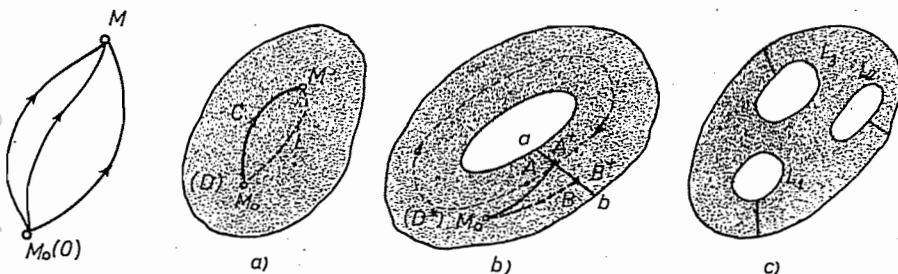
2.12. Одређивање компонентних померања. — Када су позната компонентна померања као функције координата $u = u(x, y, z)$; $v = v(x, y, z)$; $w = w(x, y, z)$ тада се компонентне деформације одређују лако *диференцирањем* према Саушу-јевим једначинама (2.24). Међутим, у техничкој пракси је чест *обратни задатак*: *познате су компонентне деформације, а треба одредити компонентна померања*. У овом случају, дакле, треба из *шести парцијалних диференцијалних једначина* (2.24) са датим компонентним деформацијама које су *једнозначне функције* од (x, y, z) са одређеним непрекидним парцијалним изводима до другог реда, одредити *три функције* u, v, w од истих координата (x, y, z) које такође треба да буду *једнозначне* и да имају *одређене изводе* до трећег реда. Због тога је проблем интегралеза једначина (2.24) *немогућ*, па морају компонентне деформације да задовољавају још неке *накнадне услове* који се јављају као *услови интегритетности*.

Нека је V *подручје (домен)* променљивих x, y, z у коме су дефинисане компоненте деформације (дилатације и клизања) као функције тих променљивих (x, y, z) и нека је подручје *једносигурно повезано подручје*, (које има особину да се свака затворена крива у том подручју може непрекидно променом њеног облика *сиписнути* у једну тачку не излазећи из тог подручја⁴). Нека је $U = U(x, y, z)$ нека функција координата одређена у томе подручју

(V) и нека су њени изводи $P = \partial U / \partial x$; $Q = \partial U / \partial y$ и $R = \partial U / \partial z$ непрекидне функције тих координата, онда криволинијски интеграл

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \int_{\widehat{M_0 M}} P dx + Q dy + R dz = \\ &= \int_{M_0}^M P dx + Q dy + R dz = \int_{M_0}^M dU = U - U_0, \end{aligned} \quad (2.47)$$

не зависи од облика путање $\widehat{M_0 M}$ којом тачка пређе из M_0 у M (слика 2.6), већ само од вредности те функције у оба положаја. Пошто тада фун-



Олика 2.6. — Интеграционе путање

кције P , Q и R задовољавају Cauchy-Riemann-ове услове за егзистенцију тоталног диференцијала dU те функције, то је $\text{rot grad } U = 0$, односио $\partial P / \partial y = \partial Q / \partial x$; $\partial P / \partial z = \partial R / \partial x$; $\partial Q / \partial z = \partial R / \partial y$, па ће бити*:

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z) dy + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z) dz + C, \quad (2.48)$$

$$* \quad P = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad U = \int_{x_0}^x P(x, y, z) dx + \varphi(y, z);$$

$$Q = \frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q - \bar{Q}(x_0, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial y};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \bar{Q}(x_0, y, z); \quad \varphi = \int_{y_0}^y \bar{Q}(x_0, y, z) dy + \theta(z); \quad \bar{Q} = Q(x_0, y, z)$$

$$R = \frac{\partial U}{\partial z} = \int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial z} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \int_{x_0}^x \frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = R - \bar{R} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \bar{R} = \int_{y_0}^y \frac{\partial \bar{Q}}{\partial z} dy + \theta' = \int_{y_0}^y \frac{\partial \bar{R}}{\partial y} dy + \theta' = \bar{R} - \bar{\bar{R}} + \theta'; \quad \theta' = \bar{\bar{R}}(x_0, y_0, z);$$

$$\theta(z) = \int_{z_0}^z \bar{\bar{R}}(x_0, y_0, z) dz + C.$$

где је C интеграциона константа која се одређује из услова да је вредност функције U позната у положају M_0 , тј. $U_0 = U(x_0, y_0, z_0)$. Обично се узима да је почетна тачка у координатном почетку (O), па су тада $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

1° **Одређивање компонентног померања $u = u(x, y, z)$.** — Нека су позната у почетном положају $M(x_0, y_0, z_0)$ компонентна померања u_0, v_0, w_0 и компонентна обртања p_0, q_0, r_0 а треба да одредимо вектор померања s у тачки M' . Компонентна померања u, v, w морају бити таква да не зависе од облика иушање којом тачка иређе из почетној у наредни положај (слика 2.6), што значи да се може применити образац (2.48) на сваку од функција u, v, w .

Посматрајмо прво функцију $u = u(x, y, z)$ и означимо изводе $P = \partial u / \partial x$, $Q = \partial u / \partial y$; $R = \partial u / \partial z$ које треба предходно одредити и унети у израз (2.48), па извршити интеграцију.

а) Из Cauchy-јевих једначина (2.24) непосредно следи да је

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x. \quad (2.49 \text{ a})$$

б) Извод $Q = \partial u / \partial y$ не може се непосредно одредити из једначина (2.24), а пошто је и он непрекидна функција координата (x, y, z) у подручју (ΔV) може се и на њега применити образац (2.48). С обзиром на (2.24) изводи су;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y}; \quad (a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma_{xy} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x}; \quad (b)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma_{xy} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right], \quad (c)$$

јер су

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma_{yz} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma_{xz} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right); \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

па је

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + \int_{y_0}^y \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]_{x=x_0} dy + \int_{z_0}^z \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]_{x=x_0, y=y_0} dz + C_1 = \\ &= \int_{x_0}^x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} dx + \int_{y_0}^y \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} \right]_{x_0} dy + \frac{1}{2} \int_{z_0}^z \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right]_{x_0, y_0} dz + C_1. \quad (2.49 \text{ b}) \end{aligned}$$

с) Слично претходном добија се извод $R = \partial u / \partial z$ и парцијални изводи:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z}; \quad (a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right]; \quad (c)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma_{xz} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x}, \quad (e)$$

па је, према (2.48)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} = \int_{x_0}^x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} dx + \frac{1}{2} \int_{y_0}^y \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right]_{x_0} dy + \\ + \int_{z_0}^z \left[\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} \right]_{x_0, y_0} dz + C_2. \end{aligned} \quad (2.49 c)$$

Пошто су на овај начин одређена сва три извода $\partial u / \partial x$; $\partial u / \partial y$ и $\partial u / \partial z$ функције $u = u(x, y, z)$ то је само функција:

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_{y_0}^y \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{x_0} dy + \int_{z_0}^z \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_{x_0, y_0} dz + C_3, \quad (2.50)$$

где је C_3 нова интеграциона константа.

2° **Одређивање компонентног померања $v = v(x, y, z)$.** — Пошто су већ одређени изводи $\partial u / \partial y$ (2.49 b) и $\partial u / \partial z$ (2.49 c), то се слично претходном поступку али нешто лакше може одредити ово компонентно померање.

d) Из (2.24) због познатог извода (2.49. b) добија се

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.51 a)$$

e) Из (2.24) непосредно следи да је

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y. \quad (2.51. b)$$

f) Да би се одредио извод $\partial v / \partial z$ треба претходно одредити његове парцијалне изводе:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma_{xy} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]; \quad (f)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z}; \quad (g)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma_{yz} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y}, \quad (h)$$

па се, према (2.48), добија,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} = & \int_{x_0}^x \left\{ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right] \right\} dx + \int_{y_0}^y \left[\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} \right]_{x_0} dy + \\ & + \int_{z_0}^z \left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} \right]_{x_0, y_0} dz + C_4 \end{aligned} \quad (2.51. c)$$

пошто је познат израз $[\partial u / \partial y]$; C_4 је интеграциона константа.

Пошто су овим одређена сва три парцијална извода $\partial v / \partial x$; $\partial v / \partial y$ и $\partial v / \partial z$ то се, према (2.48), добија функција $v = v(x, y, z)$, тј. померање:

$$v(x, y, z) = \int_{x_0}^x \frac{\partial v}{\partial x} dx + \int_{y_0}^y \left[\frac{\partial v}{\partial y} \right]_{x_0} dy + \int_{z_0}^z \left[\frac{\partial v}{\partial z} \right]_{x_0, y_0} dz + C_5,$$

где је C_5 интеграциона константа.

3^e Одређивање компонентног померања $w = w(x, y, z)$. — Пошто су одређена компонентна померања u и v , треће компонентно померање w може се још лакше одредити неголи предходна.

g) Из (2.24), због (2.49. c), следи да је извод

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{xz} - \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]. \quad (2.53. b)$$

h) Из (2.24), с обзиром на (2.51. c), следи да је извод

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{yz} - \left[\frac{\partial v}{\partial z} \right]. \quad (2.53. b)$$

i) Из (2.24) непосредно следи да је трећи извод

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z. \quad (2.53. c)$$

Пошто су одређена сва три извода $\partial w / \partial x$; $\partial w / \partial y$ и $\partial w / \partial z$ то је, према (2.48), сама функција $w = w(x, y, z)$ тј. треће компонентно померање:

$$w(x, y, z) = \int_{x_0}^x \frac{\partial w}{\partial x} dx + \int_{y_0}^y \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_{x_0} dy + \int_{z_0}^z \left[\frac{\partial w}{\partial z} \right]_{x_0, y_0} dz + C_6. \quad (2.54)$$

где је C_6 интеграциона константа.

Компонентним померањима u, v, w , одређеним обрасцима (2.50), (2.52) и (2.54) треба додати изразе (2.28), где су u_0, v_0, w_0 мала трансляторна померања, а p, q, r мала тренутна обртања. Стога су интеграционе константе $C_i (i = 1, \dots, 6)$:

$$C_1 = -r; C_2 = q; C_4 = -p; C_3 = u_0; C_5 = v_0; C_6 = w_0. \quad (2.55)$$

Део померања који не припада деформацијама већ кретању еластичног тела као крутог тела изражен константама C_i (2.55) може се елиминисати тако да остану само померања од деформација. Смештањем почетне тачке у координатни почетак (O) биће $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ па су константе $C_3 = C_5 = C_6 = 0$. Учвршћен потег dz на Oz -оси поништава обртања око Ox и Oy -осе па је $q = 0$. Учвршћен потег dx на Ox -оси поништава обртање око Oz -осе, па је $r = 0$.

Изведени обрасци за компонентна померања важе и за случај равне деформације, само је тада померање $w = 0$.

Например, ако су код равне деформације $\epsilon_x = a$; $\epsilon_y = b$; $\gamma_{xy} = 2c$ где су a, b, c мале константе, онда су компонента померања која се односе на деформације: $u = ax + cy$; $v = cx + by$.

2.13. Saint-Venant-ови услови компатибилности деформација. — Означимо први извод du/dy који је непрекидна функција од (x, y, z) у области (ΔV) као функцију $\Phi = du/dy$. Да би се одредила ова функција, према (2.49.b), морају њени изводи $P = \partial\Phi/\partial x$; $Q = \partial\Phi/\partial y$; $R = \partial\Phi/\partial z$ задовољавати Cauchy-Riemann-ове услове интеграбилности:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} \right); \quad (a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right]; \quad (b)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right]; \quad (c)$$

када се примене резултати (a, b, c) из претходног члана.

Услови интеграбилности функције du/dz , (2.49.c), дају релације:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right]; \quad (a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} \right]; \quad (d)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right]; \quad (e)$$

када се примене резултати (d, e, e) из претходног члана.

Услови интеграбилности функције $\partial v/\partial z$ (2.51. c) дају релације:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \right]; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{\partial y} \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right]; \quad (c)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \right]; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right]; \quad (e)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \right]; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} \right]. \quad (f)$$

када се примене резултати (f, g, h) из предходног члана.

Остали услови довели би то истих релација, па према томе постоји само *шест различитих услова* које морају да задовоље компонентне деформације да би могли одредити компонентна померања, односно да би деформације биле *геометријски могуће*. Ти услови називају се Saint-Venant-ови *услови компатибилности (сагласности) деформација* које је он извео 1864. године. Они су, дакле:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right]; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}; & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right]; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Прва три услова показују везе између компонентних деформација у једној координатној равни (Oxy , Oxz и Oyz). Остала три услова показују диференцијалне везе између клизања у координатним равнинама триједра $Oxyz$ и дилатације за једну координатну осу. Две везе су диференцијалне и то између других извода компонентних деформација, па због тога морају функције u , v , w бити одређене до *трећих извода*.

За равну деформацију потребан је само први услов (2.56)

Услови компатибилности су *геометријски оправдани*, јер се без њих не могу *једнозначно* одредити компонентна померања u , v , w . Замислимо ли да је тело састављено из бескрајно много малих паралелепипеда, онда се после деформисања, ако нису испуњени услови компатибилности (2.56), *не би могли саставити у једну целину*, што је у *суштини* са основном предпоставком да еластично тело и после деформисања остаје *компактно* као непрекидна средина али са промењеним обликом и запремином.

Услови компатибилности деформација (2.56) могу се добити непосредно из Cauchy-јевих једначина (2.24). Када се прва једначина двапут диференцира по y , друга по x , па обе саберу онда следи први услов компатибилности

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y},$$

пошто резултат диференцирања по двама независним променљивим не зависи од реда диференцирања. Аналогно се добијају и други и трећи услов (2.56). Када се клизање γ_{xy} диференцира по x и z , клизање γ_{xz} по x и y а γ_{yz} двапут по x , па се прва два извода саберу и од збира одузме трећи извод, добија се четврти услов компатибилности

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}. \end{aligned}$$

Аналогно се добијају и остали услови (цикличном пермутацијом).

Када се при *задатом* напонском стању, *прво одреде* компонентна померања (u, v, w) , онда се компонентне деформације одређују према Саучи-јевим једначинама (2.25). При овоме су услови компатибилности (2.56) задовољени, јер су, произведени из предњих релација. Међутим, ако се, обратно, према задатом напонском стању (односно оптерећењу) *прво одреде* компонентне деформације, онда је *неоходно* *пошребно* да буду задовољени услови компатибилности (2.56), јер би се, у противном, при одређивању компонентних померања (u, v, w) могло доћи до *противречних* резултата.

Аналогно предњем поступку могу се извести диференцијалне релације између компонентних ротација (2.15) и компонентних деформација (2.24), јер су:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} - r; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \gamma_{xz} + q; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} + r; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y; \\ \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2} \gamma_{yz} - p; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2} \gamma_{xz} - q; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2} \gamma_{yz} + p; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Да би се одредила функција $u = u(x, y, z)$ према обрасцу (2.50), морају њени парцијални изводи да задовољавају услове интеграбилности ($\text{rot grad } u = 0$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \gamma_{xy} - r \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right); \quad \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \gamma_{xz} + q \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x}; \quad (a) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right); \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \gamma_{xy} - r \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} \gamma_{xz} + q \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial y}. \end{aligned}$$

Из услова интеграбилности функција u, v, w

$$\text{rot grad } u = 0; \quad \text{rot grad } v = 0; \quad \text{rot grad } w = 0 \quad (b)$$

добило би се *укупно девет* услова. Међутим, постоји још једна релација

$$\text{rot } \{s\} = 2 \{ \vec{\varphi} \}; \quad \text{div rot } \{s\} = \text{div } \{ 2 \vec{\varphi} \} = 2 \text{div } \{ \vec{\varphi} \} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0, \quad (c)$$

па се услови компатибилности могу написати у облику

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right); \quad \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z}; \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y}; \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right); \quad \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x}; \quad (2.58) \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y}; \quad \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Ови су услови аналогни Saint-Venant-овим условима компатибилности (2.56) јер се они могу добити из (2.58) комбиновањем релација: (3—6); (2—8); (4—7); (2—5); (1—4); и (1—7). На пример, биће први услов:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right); \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} = - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

У случају вишеструко повезаној подручја „подручја које има особину да се произвољна затворена крива у њему не може непрекидном променом њеног облика ситиснути у једну тачку а да не изађе из подручја“ Saint-Venant-ови услови (2.56) допуштају одређивање компонентних померања, под условом да буду испуњени напредни услови, пошто јункције u, v, w могу бити многозначне функције координата x, y, z . На ове услове први је указао Michell,* а разрадио их је Volterra.**

Нека је подручје (D) једноструко повезано у равни (слика 2.7 а) онда је функција $u = U(x, y)$ једнозначно одређена у том подручју и њена вредност у некој тачки M подручја, не зависи од облика путање (C) или (L) којом тачка пређе из M_0 у M , па је

$$U(x, y) = U(M) = \int_{(M_0 M)} P dx + Q dy = \int_{(M_0 CM)} dU = \int_{(M_0 LM)} dU; \quad (2.59 a)$$

$$\int_{(M_0 CM)} dU - \int_{(M_0 LM)} dU = \int_{(M_0 CM)} dU + \int_{(MLM_0)} dU = 0. \quad (2.59. b)$$

Међутим, када је раванско подручје двоструко повезано*** (слика 2.7, б) тада се зарезом $a-b$ може претворити у једноструко подручје D^* . Означимо са A^+ и B^+ тачке ма са једне стране зарезом $a-b$, а са A^- и B^- са друге стране, онда ће бити

$$U(A^-) = \int_{(M_3 A^-)} P dx + Q dy; \quad U(A^+) = \int_{(M_0 A^+)} P dx + Q dy = U(A^-) + \int_{(L)} P dx + Q dy; \quad U(A^+) - U(A^-) = J_L. \quad (a)$$

На исти се начин добија да је

$$U(B^+) = U(B^-) + J_{(L)} = U(B^-) + J_{(B-A^-)} + J_{(L)} + J_{(A^+ B^+)} = U(B^-) + J_{(L)}; \quad U(B^+) = U(B^-) + J_{(L)}, \quad (b)$$

пошто се интеграл $J_{(A^+ B^+)}$ и $J_{(A^- B^-)}$ поништавају ако су изводи P и Q једнозначне функције координата (x, y) . Из овога следи да би функција $U = U(x, y) = U(M)$ дефинисана горњим криволинијским интегралом, била

* Michell J. H., On the direct determination of stress in an elastic solid with application to the theory of plate. Proc. London Math. Soc. v. 31 1900.

** Volterra V., Sur l'équilibre des corps élastiques multiplément connexes. Ann. Sci. École Norm. Sup. 3.—me sér. t. 24. (2907).

*** Мухелишвили И. Н., Некоторые основные задачи математической теории упругости. „Наука“, Москва, 1966.

једнозначна у двоструко повезаном раванском подручју, мора бити испуњен допунски услов

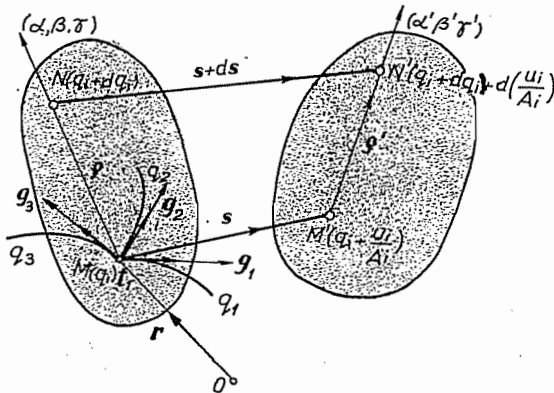
$$J_{(L)} = \int_{(L)} P dx + Q dy = 0. \quad (2.60)$$

Ова се разматрања проширују и на $(n+1)$ — *уић* вишеструко повезано раванско подручје, па и на случај просторног подручја, јер се може са n зареза претворити у једноструко, те морају бити испуњени следећи услови:

$$J_1 = \int_{(L_1)} P dx + Q dy + R dz = 0; J_2 = 0; \dots; J_n = 0. \quad (2.61)$$

да би функција $U = U(x, y, z) = U(M)$ била једнозначна у тачки M (слика 2.7. с). Ови допунски услови морају бити испуњени за свако *компонентно* *померање*, па их треба додати условима компатибилности (2.56).

2.14. Компонентне деформације у ортогоналном криволинијском систему. — Саучу-јеве једначине за деформације (2.24) могу се извести непосредно *геометријски* или помоћу *формула трансформација координата*. Усвојимо



Слика 2.8. — Геометријски начин одређивања компонентних деформација у ортогоналном криволинијском систему

у тачки M генерализовани ортогонални координатни систем са координатама q_i и основним векторима $\mathbf{g}_i = A_i \mathbf{t}_i$, где су A_i Лапé-ови коефицијенти, а \mathbf{t}_i јединични вектори оца триједра (слика 2.8), онда су координате тачака:

$M(q_i)$ и $N(q_i + dq_i)$, па је квадрат дужине потега $\overrightarrow{MN} = d\mathbf{p} = d\mathbf{r}$:

$$(d\mathbf{r})^2 = \overrightarrow{p}^2 = (A_1 dq_1)^2 + (A_2 dq_2)^2 + (A_3 dq_3)^2 = (\alpha p)^2 + (\beta p)^2 + (\gamma p)^2, \quad (a)$$

где су α, β, γ косинуси смера потега \overrightarrow{p} . При деформацији тачке M и N прећи ће у M' и N' , са координатама

$$\begin{aligned} M' [q_1' = q_1 + (u/A_1); q_2' = q_2 + (v/A_2); q_3' = q_3 + (w/A_3)]; \\ N' [q_1' + dq_1' = q_1' + dq_1 + d(u/A_1); q_2' + dq_2 + d(v/A_2); \\ q_3' + dq_3 + d(w/A_3)], \end{aligned} \quad (b)$$

пошто је вектор померања s релативни вектор тачке M' у односу на M , па је његова пројекција на i -ту осу $(s, t_i) = s_{(i)} = A_i (q_i' - q_i)$, те је на пример $s_{(1)} = (q_1' - q_1) = u/A_1$. И Lamé-ови се коефицијенти у тачки M' мењају, па се применом Тајлор-ове формуле добија да је

$$\begin{aligned} A_1' &= A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial q_1} (q_1' - q_1) + \frac{\partial A_1}{\partial q_2} (q_2' - q_2) + \frac{\partial A_1}{\partial q_3} (q_3' - q_3) = \\ &= A_1 + \frac{u}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial q_1} + \frac{v}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial q_2} + \frac{w}{A_3} \frac{\partial A_1}{\partial q_3}. \end{aligned} \quad (c)$$

Потег $\mathbf{M}' \mathbf{N}' = \vec{\rho}'$ има косинусе смера α' , β' , γ' различите од косинуса α , β , γ , па ће пројекција на прву осу бити:

$$\begin{aligned} \alpha' \rho' &= A_1' (\bar{q}_1' - q_1') = A_1' \left[dq_1 + d \left(\frac{u}{A_1} \right) \right] = \left[A_1 + \frac{u}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial q_1} + \frac{v}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial q_2} + \frac{w}{A_3} \frac{\partial A_1}{\partial q_3} \right] \cdot \\ &\cdot \left[dq_1 + \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{u}{A_1} \right) dq_1 + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{u}{A_1} \right) dq_2 + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{u}{A_1} \right) dq_3 \right]. \end{aligned} \quad (d)$$

Овај се израз може упростити, јер су

$$\begin{aligned} A_1 dq_1 &= \alpha \rho; \quad A_2 dq_2 = \beta \rho; \quad A_3 dq_3 = \gamma \rho; \quad \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{u}{A_1} \right) = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} - \frac{u}{A_1^2} \frac{\partial A_1}{\partial q_1}; \\ \frac{u}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial q_1} &= \frac{\partial u}{\partial q_1} - A_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{u}{A_1} \right); \quad A_1 + \frac{u}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial q_1} = A_1 \left[1 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} - \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{u}{A_1} \right) \right], \end{aligned}$$

и постаће

$$\begin{aligned} \alpha' \rho' &= A_1 \left[1 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} - \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{u}{A_1} \right) + \frac{v}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial q_2} + \frac{w}{A_1 A_3} \frac{\partial A_1}{\partial q_3} \right] \left\{ \frac{\alpha \rho}{A_1} \left[1 + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{u}{A_1} \right) \right] + \frac{\beta \rho}{A_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{u}{A_1} \right) + \frac{\gamma \rho}{A_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{u}{A_1} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (e)$$

Када се занемаре мале величине вишег реда, он ће бити

$$\alpha' \rho' \approx \rho [(1 + e_{11}) \alpha + e_{12} \beta + e_{13} \gamma] \quad (f)$$

где су

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} + \frac{v}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial q_2} + \frac{w}{A_1 A_3} \frac{\partial A_1}{\partial q_3}; \quad e_{12} = \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{u}{A_1} \right); \\ e_{13} &= \frac{A_1}{A_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{u}{A_1} \right). \end{aligned} \quad (g)$$

Цикличком пермутацијом индекса добијају се још две релације

$$\beta' \rho' = \rho [e_{21} \alpha + (1 + e_{22}) \beta + e_{23} \gamma]; \quad \gamma' \rho' = \rho [e_{31} \alpha + e_{32} \beta + (1 + e_{33}) \gamma], \quad (h)$$

те је

$$\rho' \begin{Bmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{Bmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 1 + e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & 1 + e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & 1 + e_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \rho \begin{Bmatrix} (1 + e_{11}) \alpha + e_{12} \beta + e_{13} \gamma \\ e_{21} \alpha + (1 + e_{22}) \beta + e_{23} \gamma \\ e_{31} \alpha + e_{32} \beta + (1 + e_{33}) \gamma \end{Bmatrix}. \quad (2.62)$$

Дилатација потега износи

$$\varepsilon_p = \frac{\rho' - \rho}{\rho} = \frac{\rho'}{\rho} - 1, \quad \frac{\rho'}{\rho} = 1 + \varepsilon_p; \quad \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 = (1 + \varepsilon_p)^2 \approx 1 + 2\varepsilon_p; \quad \varepsilon_p \ll 1. \quad (i)$$

Како су $\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1$ и $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, то се, из (2.62), добија

$$\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 = 1 + 2\varepsilon_p = [(1 + e_{11})\alpha + e_{12}\beta + e_{13}\gamma]^2 + [e_{21}\alpha + (1 + e_{22})\beta + e_{23}\gamma]^2 + [e_{31}\alpha + e_{32}\beta + (1 + e_{33})\gamma]^2. \quad (j)$$

Пошто се посматрају инфинитезималне деформације то се може ставити да је

$$\begin{aligned} [(1 + e_{11})\alpha + e_{12}\beta + e_{13}\gamma]^2 &\approx (1 + e_{11})^2 \alpha^2 + 2(1 + e_{11})\alpha(e_{12}\beta + e_{13}\gamma) \approx \\ &\approx (1 + 2e_{11})\alpha^2 + 2(1 + e_{11})(e_{12}\alpha\beta + e_{13}\alpha\gamma) \approx \alpha^2 + 2(e_{11}\alpha^2 + e_{12}\alpha\beta + e_{13}\alpha\gamma), \end{aligned} \quad (k)$$

па је

$$1 + 2\varepsilon_p = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(e_{11}\alpha^2 + e_{12}\beta^2 + e_{33}\gamma^2) + 2[(e_{12} + e_{21})\alpha\beta + (e_{13} + e_{31})\alpha\gamma + (e_{23} + e_{32})\beta\gamma],$$

одакле се добија дилатација

$$\varepsilon_p = e_{11}\alpha^2 + e_{22}\beta^2 + e_{33}\gamma^2 + (e_{12} + e_{21})\alpha\beta + (e_{13} + e_{31})\alpha\gamma + (e_{23} + e_{32})\beta\gamma. \quad (2.63)$$

Овај је израз аналогон изразу (2.31) за дилатацију у правцу вектора ρ , када су познате компонентне деформације за ортогонални триједар $Oq_1 q_2 q_3$

у тачки M и косинуси смера правца $\vec{\rho} = \vec{MN}$. Према томе су e_{ii} дилатације, док су $\gamma_{ik} = e_{ik} + e_{ki}$ клизања.

Ради лакшег израчунавања означимо компонентна померања u, v, w са $u_i, i = 1, 2, 3$ онда из релација (g) следи да су компонентне деформације:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii} = \varepsilon_i = e_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial q_i} + \frac{u_j}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial q_j} + \frac{u_k}{A_i A_k} \frac{\partial A_i}{\partial q_k}; \\ i = j = k &= 1; 2; 3; \quad i \neq j \neq k; \end{aligned} \quad (2.64. a)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{ik} = e_{ik} + e_{ki} &= \frac{A_i}{A_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{u_i}{A_i} \right) + \frac{A_k}{A_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{u_k}{A_k} \right) = \frac{1}{A_k} \frac{\partial u_i}{\partial q_k} + \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_k}{\partial q_i} - \\ &- \frac{1}{A_i A_k} \left[u_i \frac{\partial A_i}{\partial q_k} + u_k \frac{\partial A_k}{\partial q_i} \right]; \quad i, k = 1; 2; 3 \\ & \quad i \neq k \end{aligned} \quad (2.64. b)$$

2.14.1. Поларно-цилиндрички координатни систем. — Овде су:

$$q_i = r; \varphi; z; \quad A_i = 1; r; 1; \quad u_i = u, v, w; \quad i, j, k = r, c, k. \quad (2.65)$$

па су компонентне деформације:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_c = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{rc} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \gamma_{cz} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Наравно, ове се једначине могу добити и из једначина (2.24) користећи се формулама трансформација координата (1.76) и деформација (2.31). Означимо су U, V, W компонентна померања за правоугли триједар, а са u, v, w за поларно цилиндрички, онда је:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_r \cos^2 \varphi + \varepsilon_c \sin^2 \varphi - \gamma_{rc} \sin \varphi \cos \varphi = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (u \cos \varphi - v \sin \varphi) = \\ &= \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (u \cos \varphi - v \sin \varphi) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial r} \cos^2 \varphi + \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \sin^2 \varphi - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \sin \varphi \cos \varphi.\end{aligned}$$

Даље су

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{rz} \cos \varphi - \gamma_{cz} \sin \varphi = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} (u \cos \varphi - v \sin \varphi) + \frac{\partial w}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial z} \cos \varphi - \frac{\partial v}{\partial z} \sin \varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \cos \varphi - \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \sin \varphi.\end{aligned}$$

Упоредивањем вредности уз исте тригонометријске функције добијају се компонентне деформације (2.66),

До истих резултата долазимо ако искористимо и остале једначине (2.24).

2.14.2. Сферни координатни систем. — У овом случају су:

$$q_i = \rho; \quad \varphi; \quad \psi; \quad A_i = 1; \quad \rho \cos \psi; \quad \rho; \quad u_i = u, v, w; \quad i, j, k = \rho, c, v, \quad (2.67)$$

па су компонентне деформације:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\rho &= \frac{\partial u}{\partial \rho}; \quad \varepsilon_c = \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho \cos \psi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w}{\rho} \operatorname{tg} \psi; \quad \varepsilon_v = \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \psi}; \\ \gamma_{\rho c} &= \frac{1}{\rho \cos \psi} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho}; \quad \gamma_{\rho v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{\partial w}{\partial \rho} - \frac{w}{\rho}; \\ \gamma_{cv} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \psi} + \frac{1}{\rho \cos \psi} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{v}{\rho} \operatorname{tg} \psi.\end{aligned} \quad (2.68)$$

Ове једначине се могу добити помоћу формула трансформација (1.79) из једначина за поларно-цилиндрички систем (2.66). Због тога означимо са U, V, W померања у поларно-цилиндричком систему, а са u, v, w у сферном, онда из прве релације (2.66) следи:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \varepsilon_\rho \cos^2 \psi + \varepsilon_v \sin^2 \psi - \gamma_{\rho v} \sin \psi \cos \psi = \frac{\partial U}{\partial r} = \left(\cos \psi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \psi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \psi} \right) (u \cos \psi - w \sin \psi) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos^2 \psi - \sin \psi \cos \psi \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \psi} - \frac{w}{\rho} \right) + \sin^2 \psi \left(\frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \psi} \right).\end{aligned}$$

Упоредивајући са обе стране једнакости вредности уз исте тригонометријске релације добијају се компонентне деформације $\varepsilon_\rho, \varepsilon_v$ и $\gamma_{\rho v}$. На исти би се начин из осталих релација (2.66) добиле све компонентне деформације (2.68).

2.15. Тензор деформација у генерализаним координатама. — Аналогно тензору напона (члан. 1.16) може се извести и тензор деформација, па и услови компатибилности деформација у генерализаном триједру.

2.15.1. Декартов правоугли триједар. — Пошто у овоме триједру нема разлике између контраваријантних и коваријантних координата, означимо

са $\mathbf{u} = \mathbf{s}$ вектор померања са координатама u_i , $i = 1, 2, 3$, онда, према (2.5), следи да је градијент вектора померања тензора другог реда*

$$\text{grad } \mathbf{u} = \{\nabla\}(\mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \{i_k\} u_i(i_i) = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \{i_k\}(i_i) = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \mathcal{D}_{ki} = \mathbf{S}' = \mathbf{U}' \quad (2.69. a)$$

па је такође и његов транспоновани тензор

$$(\text{grad } \mathbf{u})' = \{\mathbf{u}\}(\nabla) = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \mathcal{D}_{ik} = \mathbf{S} = \mathbf{U} = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}}; \quad u_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = u_{i,k}, \quad (2.69. b)$$

те се према (2.7) добијају: *деформациони*

$$\begin{aligned} \text{def } \mathbf{u} = \mathcal{E} &= \frac{1}{2} ((\text{grad } \mathbf{u})' + \text{grda } \mathbf{u}); \quad \varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (u_{i,k} + u_{k,i}) = \frac{1}{2} \gamma_{ik} \end{aligned} \quad (2.70)$$

и *тензор шренућне ротације* са вектором обртања

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} = \mathbf{U}_k &= \frac{1}{2} ((\text{grad } \mathbf{u})' - \text{grad } \mathbf{u}); \quad \Omega_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (u_{i,k} - u_{k,i}); \quad \Omega_{ik} = e_{\eta ki} \varphi_{\eta}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

где знак запете показује диференцирање по координати наредног индекса. Стога се диференцијал вектора померања може изразити на овај начин:

$$\{d\mathbf{u}\} = \mathbf{U} \{d\mathbf{r}\} = \mathcal{E} \{d\mathbf{r}\} + \vec{\Omega} \{d\mathbf{r}\} = \mathcal{E} \{d\mathbf{r}\} + [\vec{\omega}, d\mathbf{r}]; \quad \vec{\omega} = \vec{\varphi}. \quad (2.72)$$

Ако су функције u_i у (2.70) непрекидне и једнозначне функције од x, y, z , онда се може вршити комутација индекса и парцијалном изводу функције, па је $u_{i,rs} = u_{i,sr}$. Услови компатибилности деформација добијају се када се из шест Cauchy-јевих једначина (2.70) елиминишу померања (u_i). Стога се диференцирањем компоненти деформатора ε_{ik} по променљивим x_r и x_s добијају четири релације:

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{ik,rs} &= u_{i,krs} + u_{k,irs}; & 2\varepsilon_{ir,ks} &= u_{i,rks} + u_{r,iks}; \\ 2\varepsilon_{rs,ik} &= u_{r,sik} + u_{s,rik}; & 2\varepsilon_{ks,ir} &= u_{k,sir} + u_{s,kir}; \end{aligned}$$

које се даље свODE само на једну

$$\varepsilon_{ik,rs} + \varepsilon_{rs,ik} - \varepsilon_{ir,ks} - \varepsilon_{ks,ir} = e_{irm} e_{ksn} \varepsilon_{ik,rs} = 0 \quad (2.73)$$

која представља Saint-Venant-ове *услове компатибилности деформација*.

* Додатак I.

На пример, биће:

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = \varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} - \gamma_{xy,xy} = 0; \text{ (први услов 2.56),}$$

$$\varepsilon_{11,23} + \varepsilon_{23,11} - \varepsilon_{12,13} - \varepsilon_{13,12} = 0; \quad 2\varepsilon_{x,yz} = [\gamma_{xy,z} + \gamma_{xz,y} - \gamma_{yz,x}].$$

(четврти S. V. услов 2.56).

Остале се релације добијају комбинацијом индекса $i, k, r, s = 1, 2, 3$.

Услови компатибилности могу се извести и из услова интеграбилности вектор-функције $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$. Као што код конзервативне силе постоји услов,

$\mathbf{F} = \text{grad } U(x, y, z)$ и $\text{rot } \mathbf{F} = \text{rot grad } U = 0$, овде ће бити услов $\text{rot grad } \mathbf{u} = 0$, па је

$$\int_{M_0}^M \mathbf{d}\mathbf{u} = \int_{M_0}^M \mathbf{U} \{d\mathbf{r}\} = \int_{M_0}^M (\mathfrak{S} + \mathfrak{Q}) \{d\mathbf{r}\}; \quad \text{rot } \mathbf{U}' = \text{rot } (\mathfrak{S} + \mathfrak{Q})' = \\ = \text{rot } (\mathfrak{S} - \mathfrak{Q}) = 0; \quad \mathfrak{S}' = \mathfrak{S}; \quad \mathfrak{Q}' = -\mathfrak{Q}.$$

односно

$$\text{rot grad } \mathbf{u} = 0; \quad \text{rot } (\mathfrak{S} - \mathfrak{Q}) = 0; \quad \text{rot } \mathfrak{S} = \text{rot } \mathfrak{Q}. \quad (2.74)$$

Из релације (2.72) треба елиминисати кососиметрични тензор \mathfrak{Q} , те следи:

$$\text{rot } \vec{\mathfrak{Q}} = \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \{i_j\}, \Omega_{jk} \{i_\delta\} (i_k) \right] = e_{mij} \{i_m\} (i_k) \frac{\partial \Omega_{jk}}{\partial x_i} = e_{mij} e_{nkj} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \{i_m\} (i_k) = \\ = (\delta_{mn} \delta_{ik} - \delta_{mk} \delta_{in}) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \{i_m\} (i_k) = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_k} \{i_m\} (i_k) - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \{i_k\} (i_k) = \\ = (\text{grad } \varphi)' - \mathbf{I} \text{div } \vec{\varphi} = (\text{grad } \varphi)' = \text{rot } \mathfrak{S} = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \mathbf{r}}; \quad 2\vec{\varphi} = \text{rot } \mathbf{u};$$

$$\text{div rot } \mathbf{u} = 0 = 2 \text{div } \vec{\varphi}; \quad \text{div } \vec{\varphi} = 0.$$

Из предњег следи да је услов интеграбилности:

$$\{d\vec{\varphi}\} = \text{rot } \mathfrak{S} \{d\mathbf{r}\}; \quad \text{rot grad } \{\varphi\} = \text{rot } (\text{rot } \mathfrak{S})' = \text{Ink } \mathfrak{S} = \mathbf{P} = 0, \quad (2.75)$$

где је тензор $\mathbf{P} = \text{Ink } \mathfrak{S}$ „некомитативни тензор“ (чл. 1.17.3). Његове се компоненте добијају на овај начин:

$$\text{rot } \mathfrak{S} = \left[\{i_r\} \frac{\partial}{\partial x_r}, \varepsilon_{ik} \{i_j\} (i_k) \right] = e_{mri} \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_r} \{i_m\} (i_k); \quad (\text{rot } \mathfrak{S})' = e_{mri} \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_r} \{i_k\} (i_m);$$

$$\mathbf{P} = \text{Ink } \mathfrak{S} = \left[\{i_s\} \frac{\partial}{\partial x_s}, e_{mri} \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_r} \{i_k\} (i_m) \right] = e_{mri} e_{nsk} \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_r \partial x_s} \{i_n\} (i_m) = p_{nm} \mathcal{D}_{nm},$$

па су

$$p_{nm} = p_{mn} = e_{mri} e_{nsk} \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_r \partial x_s} = e_{irm} e_{ksn} \varepsilon_{ik,rs}. \quad (2.76)$$

што се поклапа са условима компатибилности (2.73).

2.15.2. Генерализовани координатни систем. — Тензорске релације изведене у Декартовом правоуглом систему важе и у овом систему, пошто је овај постао трансформацијом из првог (чл. 1.16.2) само уместо обичних извода треба узети коваријантне изводе* и водити рачуна о томе да овде нису једнаке контраваријантне и коваријантне координате. Дакле, овде ће бити координате тензора деформација

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2} (u_{i|k} + u_{k|i}) = \frac{1}{2} (u_{i,k} + u_{k,i} - 2\Gamma_{ik}^m u_m) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial q^k} + \frac{\partial u_k}{\partial q^i} - 2\Gamma_{ik}^m u_m \right). \quad (2.77)$$

Услови компатибилности деформација (2.73) сада постају:

$$\epsilon_{ik|rs} + \epsilon_{rs|ik} - \epsilon_{ir|ks} - \epsilon_{ks|ir} = \text{Ink } \mathfrak{G} = \text{rot } (\text{rot } \mathfrak{G})' = 0. \quad (2.78)$$

Дупле коваријантне изводе** тензора ϵ_{ik} треба узети по координатама q^r и q^s .

Да би једначине (2.77) и (2.78) биле *димензионо сагласне* морају се увести физичке координате вектора и тензора, према (1.91), те су:

$$u_M = u_{(M)} \sqrt{g_{MM}}; \quad u^M = u_{(M)} / \sqrt{g_{MM}}; \quad \epsilon_{MN} = \epsilon_{(MN)} \sqrt{g_{MM}} \sqrt{g_{NN}}; \quad M, N = 1, 2, 3. \quad (2.79)$$

2.15.3. Ортогонални криволинијски систем. — Код овог система су:

$$g_{MM} = A_M^2; \quad g_{MN} = 0, \quad M \neq N; \quad u_M = A_M u_{(M)}; \quad \epsilon_{MN} = A_M A_N \epsilon_{(MN)}; \quad M, N = 1, 2, 3$$

$$\Gamma_{jk}^i = 0; \quad i \neq j \neq k; \quad \Gamma_{ii}^i = \frac{1}{2(A_i)^2} \frac{\partial (A_i)^2}{\partial q_i}; \quad \Gamma_{jj}^i = -\frac{1}{2(A_i)^2} \frac{\partial (A_i)^2}{\partial q^j}; \quad (2.80)$$

$$\Gamma_{ij}^i = \Gamma_{ji}^i = \frac{1}{2(A_i)^2} \frac{\partial (A_i)^2}{\partial q^j},$$

на компоненте деформације (2.77) постају:

$$\epsilon_{(MM)} = \epsilon_M = \frac{1}{(A_M)^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_M} [A_M u_{(M)}] - \Gamma_{MM}^m A_m u_{(m)} \right\};$$

$$m = 1, 2, 3; \quad M; \quad N = 1, 2, 3; \quad (2.81)$$

$$2\epsilon_{(MN)} = \gamma_{MN} = \frac{1}{A_M A_N} \left\{ \frac{\partial}{\partial q^M} [A_N u_{(N)}] + \frac{\partial}{\partial q^N} [A_M u_{(M)}] - 2\Gamma_{MN}^m A_m u_{(m)} \right\}; \quad M \neq N,$$

где се сабирање врши по индексу m , а не и по индексима M и N .

Шест услова компатибилности деформација према (2.78) биће:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11|22} + \epsilon_{22|11} &= 2\epsilon_{12|12}; & \epsilon_{11|23} + \epsilon_{23|11} &= \epsilon_{12|13} + \epsilon_{13|12}; \\ \epsilon_{11|33} + \epsilon_{33|11} &= 2\epsilon_{13|13}; & \epsilon_{22|13} + \epsilon_{13|22} &= \epsilon_{12|23} + \epsilon_{23|12}; \\ \epsilon_{22|33} + \epsilon_{33|22} &= 2\epsilon_{23|23}; & \epsilon_{33|12} + \epsilon_{12|33} &= \epsilon_{13|23} + \epsilon_{23|13}; \end{aligned} \quad (2.82)$$

* $u_{i|k} = u_{i,k} - u_m \Gamma_{ik}^m$; $u_{k|i} = u_{k,i} - u_m \Gamma_{ki}^m$; $\Gamma_{ik}^m = \Gamma_{ki}^m$.

** $\epsilon_{ik|r} = \epsilon_{ik,r} - \epsilon_{mk} \Gamma_{ir}^m - \epsilon_{im} \Gamma_{kr}^m$; $\epsilon_{ik|rs} = (\epsilon_{ik|r})/s = \epsilon_{ik,rs} - \epsilon_{pk} \Gamma_{irs}^p - \epsilon_{ip} \Gamma_{krs}^p - \epsilon_{pk,s} \Gamma_{ir}^p - \epsilon_{ip,s} \Gamma_{kr}^p - \epsilon_{pk,r} \Gamma_{is}^p - \epsilon_{ip,r} \Gamma_{ks}^p - \epsilon_{ik,p} \Gamma_{rs}^p + \epsilon_{pm} [\Gamma_{ir}^p \Gamma_{ks}^m + \Gamma_{kr}^p \Gamma_{is}^m]$;
 $\Gamma_{irs}^p = \frac{\partial}{\partial q^s} (\Gamma_{ir}^p) - \Gamma_{mr}^p \Gamma_{is}^m - \Gamma_{im}^p \Gamma_{rs}^m$.

2.15.3.1. Поларно-цилиндрички координатни систем. — Према (2.65) и (2.80) у овом су случају:

$$q^i = r; \varphi; z; A_i = 1; r; 1; u_{(i)} = u, v, w; \Gamma_{22}^1 = -r; \Gamma_{12}^2 = 1/r; \quad (2.83)$$

$$(11) = r; (22) = c; (33) = z; (12) = rc; (13) = rz; (23) = cz$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{(11)} = \varepsilon_r; \varepsilon_{22} = r^2 \varepsilon_{(22)} = r^2 \varepsilon_c; \varepsilon_{33} = \varepsilon_z; \varepsilon_{12} = r \gamma_{rc}/2;$$

$$\varepsilon_{13} = \gamma_{rz}/2; \varepsilon_{23} = r \gamma_{cz}/2,$$

па су на на пример, према (2.81), компонентне деформације:

$$\varepsilon_{(11)} = \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_{(22)} = \varepsilon_c = \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} (r v) - \Gamma_{22}^1 A_1 u \right\} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};$$

$$\gamma_{(12)} = \gamma_{rc} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} [r v] + \frac{\partial}{\partial \varphi} [u] - 2 \Gamma_{12}^2 A_2 v \right\} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \quad \dots;$$

Ови се резултати слажу са обрасцима (2.66).

Из прве релације (2.82) добија се

$$\varepsilon_{11/2} = \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial q^2} - \varepsilon_{m1} \Gamma_{13}^m + \varepsilon_{1m} \Gamma_m^{12} = \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial q} - 2 \frac{\varepsilon_{12}}{r};$$

$$\varepsilon_{11/22} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial \varphi^2} - \frac{4}{r} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \varphi} + r \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial r} - 2 \varepsilon_{11} + \frac{2}{r^2} \varepsilon_{22};$$

$$\varepsilon_{22/1} = \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial r} - 2 \frac{\varepsilon_{32}}{r}; \quad \varepsilon_{22/11} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial r^2} - \frac{4}{r} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial r} + \frac{6}{r^2} \varepsilon_{22};$$

$$\varepsilon_{12/1} = \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial r} - \frac{\varepsilon_{12}}{r}; \quad \varepsilon_{12/12} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial r \partial \varphi} + r \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial r} - \varepsilon_{11} + \frac{3}{r^2} \varepsilon_{22};$$

односно после сређивања

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial r^2} - r \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \varepsilon_{22} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial r \partial \varphi}.$$

Када се према (2.83) уведу физичке координате тензора онда следи први услов компатибилности деформација

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 \varepsilon_c) - r \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial (r^2 \varepsilon_c)}{\partial r} + \frac{2}{r^2} (r^2 \varepsilon_c) = 2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2} r \gamma_{rc} \right),$$

односно

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \varphi^2} + r^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_c}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} (2 \varepsilon_c - \varepsilon_r) = r \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\gamma_{rc} + r \frac{\partial \gamma_{rc}}{\partial r} \right).$$

Аналогно томе из образаца (2.82) добило би се још пет услова, тако да су услови компатибилности деформација у поларно-цилиндричком систему:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (2 \varepsilon_c - \varepsilon_r) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \gamma_{rc}}{\partial r} + \frac{1}{r} \gamma_{rc} \right); \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{rz}}{\partial r \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_c}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{cz}}{\partial \varphi} + \gamma_{rz} \right); \\ \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \varphi \partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \gamma_{rc}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \gamma_{cz}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left(2 \frac{\partial \gamma_{rc}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{cz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \gamma_{cz} \right); & \quad (2.84) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_c}{\partial r \partial z} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_c - \varepsilon_r) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \gamma_{rc}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{cz}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \gamma_{cz}}{\partial \varphi}; \\ \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial r \partial \varphi} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \gamma_{cz}}{\partial r} - \frac{\partial \gamma_{rc}}{\partial z} - \frac{1}{r} \gamma_{cz} \right). \end{aligned}$$

Ови се услови могу извести из услова (2.56) користећи формуле трансформације координата (1.76) и деформација (2.31).

За случај равне деформације користи се само први услов (2.84).

2.15.3.2. Сферни координатни систем. — Према (2.67) и (2.80) у овом случају су:

$$\begin{aligned} q^i = \rho; \varphi; \psi; A_i = 1; \rho \cos \psi; \rho; u_{(i)} = u; v; w; (11) = \rho; (22) = c; \\ (33) = v; (12) = \rho c; (13) = \rho v; (23) = c v; \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\rho \cos^2 \psi; \Gamma_{33}^1 = -\rho; \Gamma_{12}^2 = 1/\rho; \Gamma_{23}^2 = -\operatorname{tg} \psi; \Gamma_{13}^3 = 1/\rho; \Gamma_{22}^3 = \sin \psi \cos \psi;$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_\rho; \varepsilon_{22} = \rho^2 \cos^2 \psi \varepsilon_c; \varepsilon_{33} = \rho^2 \varepsilon_v; \varepsilon_{12} = \rho \cos \psi \cdot \gamma_{\rho c}/2;$$

$$\varepsilon_{13} = \rho \gamma_{\rho v}/2; \varepsilon_{23} = \rho^2 \cos \psi \cdot \gamma_{c v}/2,$$

па се, као и у предходном случају, добијају компонентне деформације (2.68).

Из (2.82) добијају се услови компатибилности деформација. Тако ће бити за први услов

$$\varepsilon_{11/2} = \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial q^2} - \varepsilon_{m1} \Gamma_{12}^m - \varepsilon_{1m} \Gamma_{12}^m = \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial q^2} - 2 \varepsilon_{12} \Gamma_{12}^2 = \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \varphi} - \frac{2 \varepsilon_{12}}{\rho};$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11/22} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial \varphi^2} + \rho \cos^2 \psi \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \rho} - \sin \psi \cos \psi \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \psi} - \frac{4}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \varphi} - 2 \cos^2 \psi \cdot \varepsilon_{11} + \\ + 2 \frac{\varepsilon_{22}}{\rho^2} + 4 \frac{\varepsilon_{13}}{\rho} \sin \psi \cos \psi; \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{22/1} = \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \rho} - \frac{2 \varepsilon_{22}}{\rho}; \quad \varepsilon_{22/11} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial \rho^2} - \frac{4}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \rho} + 6 \frac{\varepsilon_{22}}{\rho^2};$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12/1} &= \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \rho} - \frac{\varepsilon_{12}}{\rho}; \quad \varepsilon_{12/12} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial \rho \partial \varphi} + \rho \cos^2 \psi \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \psi} - \sin \psi \cos \psi \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial \rho} - \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \rho} - \cos^2 \psi \varepsilon_{11} + \frac{2}{\rho} \sin \psi \cos \psi \varepsilon_{13} + \frac{3}{\rho^2} \varepsilon_{22}, \end{aligned}$$

односно после сређивања

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial \rho^2} - \rho \cos^2 \psi \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \rho} - \sin \psi \cos \psi \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \psi} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \rho} + 2 \frac{\varepsilon_{22}}{\rho^2} = \\ = 2 \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \rho} \right) - 2 \sin \psi \cos \psi \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial \rho}. \end{aligned}$$

Када се, према (2.85), уведу физичке координате, онда ће бити

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (\varepsilon_\rho) + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (\rho^2 \cos^2 \psi \cdot \varepsilon_c) - \rho \cos^2 \psi \frac{\partial}{\partial \rho} (\varepsilon_\rho) - \sin \psi \cos \psi \frac{\partial}{\partial \psi} (\varepsilon_\rho) - \\ - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \cos^2 \psi \cdot \varepsilon_c) + 2 \cos^2 \psi \varepsilon_c = \\ = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \cos \psi \cdot \gamma_{\rho c}) \right] - \sin \psi \cos \psi \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \gamma_{\rho v}), \end{aligned}$$

Аналогно се изводе и остали услови, те су услови комбайнбилности деформација у сферном координатном систему:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\rho \cos \psi)^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_\rho}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_c}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} (2 \varepsilon_c - \varepsilon_\rho) - \frac{\operatorname{tg} \psi}{\rho^2} \frac{\partial \varepsilon_\rho}{\partial \psi} = \\ = \frac{1}{\rho \cos \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial \gamma_{\rho c}}{\partial \rho} + \frac{\gamma_{\rho c}}{\rho} \right] - \frac{\operatorname{tg} \psi}{\rho} \left[\frac{\partial \gamma_{\rho v}}{\partial \rho} + \frac{\gamma_{\rho v}}{\rho} \right]; \\ \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_\rho}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (2 \varepsilon_v - \varepsilon_\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{\partial \gamma_{\rho v}}{\partial \psi} + \frac{\gamma_{\rho v}}{\rho} \right]; \\ \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_c}{\partial \psi^2} + \frac{1}{(\rho \cos \psi)^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\varepsilon_c + \varepsilon_v) - \frac{\operatorname{tg} \psi}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \psi} (2 \varepsilon_c - \varepsilon_v) + \frac{2}{\rho^2} (\varepsilon_v - \varepsilon_\rho) = \\ = \frac{1}{\rho^2 \cos \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial \gamma_{c v}}{\partial \psi} - \operatorname{tg} \psi \gamma_{c v} + \gamma_{\rho c} \right] + \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{\partial \gamma_{\rho v}}{\partial \psi} - \operatorname{tg} \psi \gamma_{\rho v} \right]; \quad (2.86) \\ \frac{2}{\rho \cos \psi} \left[\frac{\partial^2 \varepsilon_\rho}{\partial \varphi \partial \psi} + \operatorname{tg} \psi \frac{\partial \varepsilon_\rho}{\partial \varphi} \right] = \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\partial \gamma_{\rho c}}{\partial \psi} + \operatorname{tg} \psi \gamma_{\rho c} - 2 \gamma_{c v} - \rho \frac{\partial \gamma_{c v}}{\partial \rho} + \frac{1}{\cos \psi} \frac{\partial \gamma_{\rho v}}{\partial \varphi} \right] + \\ + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \gamma_{\rho c}}{\partial \psi} + \gamma_{\rho c} \operatorname{tg} \psi + \rho \frac{\partial \gamma_{c v}}{\partial \rho} + \frac{1}{\cos \psi} \frac{\partial \gamma_{\rho v}}{\partial \varphi} \right]; \\ 2 \left[\frac{\partial^2 \varepsilon_c}{\partial \rho \partial \psi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_\rho}{\partial \psi} - \operatorname{tg} \psi \frac{\partial}{\partial \rho} (\varepsilon_c - \varepsilon_v) \right] = \frac{1}{\rho \cos \psi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\rho \frac{\partial \gamma_{c v}}{\partial \rho} + \frac{\partial \gamma_{\rho c}}{\partial \psi} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\cos \psi} \frac{\partial \gamma_{\rho v}}{\partial \varphi} - \operatorname{tg} \psi \gamma_{\rho c} - 2 \gamma_{c v} \right] + 2 \left[\frac{\partial \gamma_{c v}}{\partial \rho} - \cos \psi \gamma_{\rho v} + \frac{2}{\rho} \gamma_{c v} \right] \right\}; \end{aligned}$$

$$2 \left[\frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial \rho \partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_\rho}{\partial \varphi} \right] = \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\cos \psi \frac{\partial \gamma_{cv}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \gamma_{\rho v}}{\partial \varphi} - \frac{\cos \psi}{\rho} \frac{\partial \gamma_{\rho c}}{\partial \psi} \right] + \\ + \left[\frac{\operatorname{tg} \psi}{\rho} \frac{\partial \gamma_{\rho v}}{\partial \varphi} - \cos \psi \frac{\partial \gamma_{cv}}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho} (\sin \varphi \gamma_{cv} - \cos \psi \gamma_{\rho c}) \right].$$

Ови се услови могу извести из услова (2.56), односно (2.84), помоћу формула трансформација координата и деформација.

2.16. Коначне деформације. — Компоненте деформације (2.24) и тензор деформација \mathfrak{G} изведени су под претпоставком да су деформације *инфинитезималне*, тј. да се могу занемарити квадрати и међусобни производи деформација. Тачније вредности се добијају када се ове величине не занемарују, те се тако добијају *коначне деформације*.

Пошто је $d\vec{r} = \vec{\rho}$ (слика 2.1), то из (2.4), следи да је

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + \mathbf{S} d\vec{r}; \quad \{\vec{\rho}'\} = (\mathbf{I} + \mathbf{S}) \{\vec{\rho}\}; \quad \{d\vec{r}'\} = \{\vec{\rho}'\} = \rho \{n\}, \quad (2.86)$$

па се степеновањем овог вектора добија

$$\rho'^2 = (\vec{\rho}') \{\vec{\rho}'\} = (\vec{\rho}) (\mathbf{I} + \mathbf{S})' (\mathbf{I} + \mathbf{S}) \{\vec{\rho}\} = (\vec{\rho}) \{\vec{\rho}\} + (\vec{\rho}) (\mathbf{S} + \mathbf{S}' + \mathbf{S}' \mathbf{S}) \{\vec{\rho}\} = \\ = \rho^2 + \rho^2 (n) 2 \mathfrak{G} \{n\}; \quad 2 \mathfrak{G} = \mathbf{S} + \mathbf{S}' + \mathbf{S}' \mathbf{S},$$

те је

$$\frac{\rho'^2 - \rho^2}{\rho^2} = \frac{(\rho' - \rho)(\rho' + \rho)}{\rho^2} = \left[\frac{\rho' - \rho}{\rho} + 1 \right]^2 - 1 = \\ = (e_n + 1)^2 - 1 = e_n^2 + 2 e_n = (n) 2 \mathfrak{G} \{n\} = f(\alpha, \beta, \gamma) \quad (2.87)$$

Овде су: $|d\vec{r}| = \rho = |\mathbf{MN}|$ дужина влакна \mathbf{MN} , \mathbf{n} јединични вектор правца \mathbf{MN} , α, β, γ косинуси смера јединичног вектора \mathbf{n} ; $e_n = (\rho' - \rho) / \rho$ дилатација потега (влакна) MN , \mathfrak{G} *матрица тензора* $\hat{\mathfrak{G}}$ *коначних деформација*. Она је нова симетрична функционална матрица облика

$$\hat{\mathfrak{G}} = \frac{1}{2} (\mathbf{S} + \mathbf{S}' + \mathbf{S}' \mathbf{S}) = \mathfrak{G} + \frac{1}{2} \mathbf{S}' \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.88. a)$$

са коефицијентима

$$E_{xx} = (\partial u / \partial x) + [(\partial u / \partial x)^2 + (\partial v / \partial x)^2 + (\partial w / \partial x)^2] / 2; \\ E_{yy} = (\partial v / \partial y) + [(\partial u / \partial y)^2 + (\partial v / \partial y)^2 + (\partial w / \partial y)^2] / 2; \\ E_{zz} = (\partial w / \partial z) + [(\partial u / \partial z)^2 + (\partial v / \partial z)^2 + (\partial w / \partial z)^2] / 2; \quad (2.88. b)$$

$$E_{xy} = E_{yx} = [\partial v / \partial x + (\partial u / \partial y)] / 2 + [(\partial u / \partial x) (\partial u / \partial y) + (\partial v / \partial x) (\partial v / \partial y) + (\partial w / \partial x) (\partial w / \partial y)] / 2;$$

$$E_{xz} = E_{zx} = [(\partial w / \partial x) + (\partial u / \partial z)] / 2 + [(\partial u / \partial x) (\partial u / \partial z) + (\partial v / \partial x) (\partial v / \partial z) + (\partial w / \partial x) (\partial w / \partial z)] / 2;$$

$$E_{yz} = E_{zy} = [(\partial w / \partial y) + (\partial v / \partial z)] / 2 + [(\partial u / \partial y) (\partial u / \partial z) + (\partial v / \partial y) (\partial v / \partial z) + (\partial w / \partial y) (\partial w / \partial z)] / 2.$$

Када се занемаре квадрати и међусобни производи парцијалних извода координата вектора померања, тада тензор $\hat{\mathcal{G}}$ прелази у Cauchy-јев тензор $\hat{\mathcal{E}}$. Тензор $\hat{\mathcal{E}}$ назива се Green-ов или Venant-ов *тензор коначних деформација**.

Из (2.87) добијају се квадратна једначина и дилатација

$$e_n^2 + 2e_n - f = 0; e_n = -1 + \sqrt{1+f} = -1 + \sqrt{1 + (n) 2 \mathcal{E}\{n\}}, \quad (2.89. a)$$

па је дужина деформисаног потега MN (влакна)

$$e_n = (\rho' - \rho) / \rho = (\rho' / \rho) - 1; \rho' = |d\mathbf{r}'| = \rho(1 + e_n) = \rho \sqrt{1+f}; \rho = |d\mathbf{r}|. \quad (2.89. b)$$

Ако је влакно MN на Ox -оси, онда су $|\overline{MN}| = dx = |d\mathbf{r}| = \rho$, $n = (1; 0; 0)$, па су

$$f = (n) 2 \mathcal{E}\{n\} = 2E_{xx}; e_x = -1 + \sqrt{1+2E_{xx}} \approx E_{xx} = E_x; E_{xx} \ll 1, \quad (2.90)$$

јер је $E_{xx} \ll 1$. Дакле, под претпоставком да је $E_{xx} \ll 1$, елемент E_{xx} матрице \mathcal{E} тензора $\hat{\mathcal{E}}$ представља коначну дилатацију у Ox -правцу. Аналогно бисмо добили да су елементи $E_{yy} = e_y$ и $E_{zz} = e_z$ коначне дилатације у друга два правца.

Узмимо два елемента $MN = dx = \rho$ и $\overline{MN} = dy = \rho'$ на осам Ox и Oy , онда су дужине деформисаних елемената

$$\rho' = dx \sqrt{1+2E_{xx}} = dx \sqrt{1+2e_x}; \rho = dy \sqrt{1+2e_y}; (\vec{\rho}') \cdot \vec{\rho} = (dx) \{dy\} = 0,$$

па је према (2.89. b), скаларни производ

$$\begin{aligned} (\vec{\rho}') \cdot \vec{\rho} &= (\rho) (\mathbf{I} + \mathbf{S})' (\mathbf{I} + \mathbf{S}) \{\rho\} = (\rho) \{\rho\} + (\rho) 2 \mathcal{E}\{\rho\} = \\ &= 2 dx dy (\mathbf{i}) \mathcal{E}\{\mathbf{j}\} = 2E_{xy} dx dy, \end{aligned}$$

и угао између тих потега

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(\vec{\rho}') \cdot \vec{\rho}}{(\rho') (\rho)} = \frac{2E_{xy} dx dy}{\sqrt{1+2E_{xx}} \sqrt{1+2E_{yy}}} dx dy = 2 \frac{E_{xy}}{\sqrt{1+2e_x} \sqrt{1+2e_y}} = \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \Gamma_{xy} \right) = \sin \Gamma_{xy}, \end{aligned} \quad (2.91)$$

где је Γ_{xy} смањење *правог* угла, тј. коначно клизање.

* Први тензор коначних деформација.

Грен-ов тензор коначних деформација омогућава да се у области (II) одреде дужине одсечака и углови између њих када су ти односи познати у првобитној (почетној) конфигурацији. Међутим, може се проблем посматрати и обратно**: треба у почетној конфигурацији (I) одредити дужине потега и углове између њих када су те релације познате у конфигурацији (II). Уочимо у обе конфигурације Декартове правоугле триједре са координатама $\xi^i = x_0^i$ и

$$x^i; \xi^i = x^i - u^i; \xi^m = x^m - u^m; d\xi^m = (\partial \xi^m / \partial x^i) dx^i; \partial \xi^m / \partial x^i = \delta_i^m - (\partial u^m / \partial x^i),$$

па су квадрати дужина потега у обе конфигурације:

$$\begin{aligned} \overline{M'N'^2} &= (\rho')^2 = (d\mathbf{r}')^2 = g_{ik} dx^i dx^k = \delta_{ik} dx^i dx^k; \\ \overline{MN} &= (\rho)^2 = (d\mathbf{r})^2 = a_{mn} d\xi^m d\xi^n = \delta_{mn} (\partial \xi^m / \partial x^i) (\partial \xi^n / \partial x^k) dx^i dx^k = \\ &= \delta_{mn} \{[\delta_i^m - (\partial u^m / \partial x^i)] [\delta_k^n - (\partial u^n / \partial x^k)]\} \cdot dx^i dx^k = \\ &= \left(\delta_{in} - \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right) \left(\delta_{kn} - \delta_r^n \frac{\partial u_r}{\partial x^k} \right) dx^i dx^k = \left(\delta_{ik} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_r}{\partial x^i} \frac{\partial u_r}{\partial x^k} \right) dx^i dx^k, \end{aligned}$$

ер је $u_i = \delta_{ir} u^r$; $u^r = \delta^{ri} u_i$, па је

$$\rho'^2 - \rho^2 = 2 \bar{E}_{ik} dx^i dx^k, \quad \bar{E}_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \frac{\partial u_k}{\partial x^i} - \frac{\partial u_r}{\partial x^i} \frac{\partial u_r}{\partial x^k} \right) \quad (2.92. a)$$

где су \bar{E}_{ik} компонентне Almansi-Hamel-овог *тензора коначних деформација* Према (2.88. a) он се може написати у облику

$$\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E} - 1/2 \mathbf{S}' \mathbf{S} \quad (2.92. b)$$

па се за мале деформације своди на Cauchy-јев тензор \mathcal{E} .

2.17. Тензор брзина деформација. — Ако се води рачуна о времену, онда се за време dt елемент непрекидне средине премести из почетног положаја (I) у крајњи (II), па тачке M и N имају и своје брзине. Померање је $u^i = v^i dt$, стога се, према (1.70), добија да је тензор деформације

$$\{\mathbf{v}\} = \bar{\mathcal{E}} \{d\mathbf{r}\} = \mathcal{U} \{d\mathbf{r}\}; \quad (2.93)$$

где је \mathcal{U} тензор брзине деформисања непрекидне средине. — Његове компоненте су парцијални изводи по времену компонентних деформација ($v_{xx} = \partial \varepsilon_x / \partial t = \varepsilon_x$; $v_{xy} = \partial \gamma_{xy} / \partial t = \gamma_{xy}$; ...). Компонентне деформације (дилатације и клизања) су наименовани бројеви, али су компонентне брзине деформација именоване величине, димензије $[T^{-1}]$, јединице $[1/s]$. Код инфинитезималних деформација су деформације бескрајно мале величине, међутим брзине деформисања су *кончне величине*.

Треба уочити да се правци главних дилатација *не поклањају* са правцима главних праваца брзина деформисања, па стога главне брзине деформисања нису једнаке изводима главних дилатација, $v_1 \neq \partial \varepsilon_1 / \partial t$, пошто се, *уошшије узев вектор померања и вектор брзине деформисања не поклањају*.

Девијатор брзине деформисања дефинише се на исти начин као и у предходним случајевима, уводећи средњу брзину $v_{sr} = v = (v_x + v_y + v_z)/3$. Његов први скалар је и овде једнак нули.

** Други тензор коначних деформација,

ПРИМЕРИ

2.1. Правоугаона танка плоча, страница a и b , подложна је померању $u=cu$; $v=w=0$. Издвојити делове који се односе на обртање и деформацију $[s=cu \mathbf{i}; \text{rot } s=-c \mathbf{k}=2r \mathbf{k}$; хомогена деформација $\vec{\delta}=c(\nu \mathbf{i}+x \mathbf{j})/2$].

2.2. Дата је хомогена деформација $u=ay+bz$ $v=cz$; $w=0$. Издвојити делове који се односе на ротацију и на деформацију.

$$\{\text{rot } s=(-c \mathbf{i}+b \mathbf{j}-a \mathbf{k}); s_{\text{rot}}=[\text{rot } s, r]/2=[(bz+ay) \mathbf{i}+(cz-ax) \mathbf{j}-(bx+cy) \mathbf{k}]/2;$$

$$\epsilon_i=0; \gamma_{xy}=a; \gamma_{xz}=b; \gamma_{yz}=b; \vec{\delta}=[(ay+bz) \mathbf{i}-(ax-cz) \mathbf{j}+(bx+cy) \mathbf{k}]/2.$$

2.3. Да ли компонентне деформације $\epsilon_x=0$; $\epsilon_y=c(y^2+z^2)$; $\epsilon_z=cz^2$; $\gamma_{xy}=0$; $\gamma_{xz}=0$; $\gamma_{yz}=2cuz$ задовољавају S. Venant-ове услове компатибилности?

[Задовољавају]

2.4. Да ли компонентне деформације $\epsilon_x=cu(x^2+z^2)$; $\epsilon_y=0$; $\epsilon_z=cuz^2$; $\gamma_{xy}=0$; $\gamma_{yz}=0$; $\gamma_{xz}=2cxyz$ задовољавају услове компатибилности?

[Не задовољавају].

2.5. Да ли су могуће следеће равне деформације

$$a) \epsilon_x=v(x^2+y^2); \epsilon_y=vy^2; \gamma_{xy}=2vxy;$$

$$b) \epsilon_x=vz(x^2+y^2); \epsilon_y=vy^2z; \gamma_{xy}=2vxyz,$$

где је v мала позитивна величина?

[a] Јесте; [b] није].

2.6. Одредити константе a, b, c, d, e, f, g тако да би компонентне деформације

$$\epsilon_x=a+b(x^2+y^2)+(x^4+y^4); \epsilon_y=c-d(x^2+y^2)+(x^4+y^4); \gamma_{xy}=e+fxu(x^2+y^2+g)$$

биле могуће.

$$[b+d-2g=0; f=4].$$

2.7. Одредити услов за функцију $f(x, y)$ да би равна деформација

$$\epsilon_x=\partial^2 f/\partial x^2; \epsilon_y=\partial^2 f/\partial y^2; \gamma_{xy}=-\partial^2 f/\partial x \partial y$$

била могућа.

[Из првог услова (2.56) следи: $(\partial^4 f/\partial x^4)+(\partial^4 f/\partial x^2 \partial y^2)+(\partial^4 f/\partial y^4)=0$].

2.8. Ако су компонентне деформације

$$\epsilon_x=a(\partial^2 f/\partial y^2)-b(\partial^2 f/\partial x^2); \epsilon_y=a(\partial^2 f/\partial x^2)-b(\partial^2 f/\partial y^2); \gamma_{xy}=-c(\partial^2 f/\partial x \partial y); c=z(a+b).$$

који услов мора задовољити функција $f(x, y)$ да би деформација била могућа?

{Мора бити равна бихармонијска функција: $\Delta \Delta f=[(\partial^2/\partial x^2)+(\partial^2/\partial y^2)]^2 f=0$ }.

2.9. Компонентне деформације су $\epsilon_x=\epsilon_y=-az$; $\epsilon_z=by$; $\gamma_{xy}=\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$. Одредити компонентна померања ако је тачка $A(0; 0; h)$ укљештеног пресека непокретна.

[Услови компатибилности су испуњени. Из обрасца чл. 2.12. следи: $u=-axz+C_1y+C_2z+C_3$; $v=-ayz-C_1x+C_4z+C_5$; $w=a(x^2+y^2)/2+bz^2/2-C_2x-C_4y+C_6$; константе $C_1=C_2=C_3=C_4=C_5=0$; $C_6=-bl^2/2$].

2.10. Деформације савијене греде су: $\epsilon_x=\epsilon_y=-ay$; $\epsilon_z=by$; $\gamma_{xy}=\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$.

a) Испитати да ли су задовољени услови компатибилности.

b) Одредити компонентна померања ако је лево лежиште непокретно а десно покретно.

c) Написати једначину еластичне линије савијене греде.

d) Показати да попречни пресек греде остаје раван.

[a] Задовољени су.]

b) $u = -axy + C_1 y + C_2 z + C_3$; $v = a(x^2 - y^2)/2 - bz^2/2 - C_1 x + C_4 z + C_5$; $w = byz - C_2 x - C_4 y + C_6$; $u_0 = v_0 = w_0 = 0$; $C_3 = C_5 = C_6 = 0$; $B(0; 0; l)$; $u = v = 0$, тј. $C_2 l = 0$; $C_2 = 0$; $C_4 = bl/2$. Пошто греда не сме да се обрће око Oz -осе, то је $r = 0$ па је $C_1 = 0$. Стога су: $u = -axy$; $v = a(x^2 - y^2)/2 + b(lz - z^2)/2$; $w = byz - 1/2 bly$.

c) Еластична линија $x = y = 0$; $u = w = 0$; $v = b(lz - z^2)/2$. d) $w \neq 0$.

2.11. Код торзије конзолног кружног вратила клизања су $\gamma_{xz} = -ky$; $\gamma_{yz} = kx$ док су остале компонентне деформације једнаке нули.

a) Показати да су задовољени услови компатибилности деформације.

b) Одредити компонентна померања када је леви крај уклештен.

c) Показати да се попречни пресек не витопери.

[a] Задовољени.

b) $u = -kyz + C_1 y + C_2 z + C_3$; $v = kxz - C_1 x + C_4 z + C_5$; $w = -C_2 x - C_4 y + C_6$;

$u = -kyz$; $v = kxz$; $w = 0$. c) $w = 0$, нема дешланаације].

2.12. Одредити главне дилатације ако су:

$$\epsilon_x = 10/10^3; \epsilon_y = 8/10^4; \epsilon_z = 6/10^4; \gamma_{xy} = 2\gamma_{xz} = -2\gamma_{yz} = 4/10^4.$$

[Сменом $\lambda_s = \epsilon_s \cdot 10^4$ следи секуларна једначина $\lambda_s^3 - 24\lambda_s^2 + 182\lambda_s - 434 = 0$, па су $\epsilon_s = 11,26/10^3$; $8,30/10^4$; $4,44/10^4$].

2.13. Одредити главне дилатације и главне правце дилатација за равно стање деформација ако су $\lambda_s^2 = 11/10^4$; $\epsilon_y = 8/10^4$; $\gamma_{xy} = 4/10^4$.

[Секуларна једначина је $\lambda_s^2 - 19\lambda_s + 84 = 0$; $\lambda_s = 12$; 7 ; $\epsilon_s = \lambda_s/10^4$; главни правци $C_s = [4 + (\lambda_s - 11)^2]^{-1/2}$; $C_1 = 1/\sqrt{5}$; $C_2 = \sqrt{5}/2$; $\alpha_1 = 2/\sqrt{5}$; $\beta_1 = 1/\sqrt{5}$; $\alpha_2 = 1/\sqrt{5}$; $\beta_2 = -2/\sqrt{5}$].

2.14. За дате главне дилатације $\epsilon_i = 14/10^4$; $10/10^4$; $6/10^4$; $i = 1, 2, 3$; нацртати Mohr-овс кругове за деформације.

2.15. Главне дилатације су ϵ_i (редом) $= 12/10^4$; $9/10^4$ и $6/10^4$. Одредити инваријанте девијатора дилатација.

$$[9/10^4; \mathcal{D}_i \epsilon = 0; -9/10^8; 0].$$

2.16. Колика је запреминска дилатација у предњем задатку?

$$[\epsilon_V = \sum \epsilon_i = (12 + 9 + 6)/10^4 = 27/10^4].$$

2.17. Колика је запреминска дилатација у задатку 2.11?

$$[\epsilon_V = \text{div } s = (\partial u/\partial x) + (\partial v/\partial y) + (\partial w/\partial z) = 0].$$

2.18. Одредити дилатацију за правац \mathbf{n} $(2/3; 2/3; -1/3)$ за стање из задатка 2.12.

$$[\text{Према (2.32) биће: } \epsilon_n = (40 + 32 + 6 + 16 - 4 + 4)/9 \cdot 10^4 = 94/9 \cdot 10^4].$$

2.19. Одредити дилатацију за правац \mathbf{n} $(2/\sqrt{5}; -2/\sqrt{5}; 1/\sqrt{5})$ а за главне правце из задатка 2.15.

$$[\text{Према (2.32) биће: } \epsilon_n = (48 + 36 + 6)/5 \cdot 10^4 = 16/10^4].$$

2.20. Код равне деформације су $\epsilon_x = 10/10^4$; $\epsilon_y = 8/10^4$; $\gamma_{xy} = 2/10^4$. Одредити дилатацију у $O\xi$ -правцу и клизање у $O\xi\eta$ -равни ако је триједар $O\xi\eta$ постао обртањем триједра Oxy у директном смеру за $\varphi = 45^\circ$.

$$[\text{Овде ће бити: } \epsilon_\xi = (20 + 16 + 4)/4 \cdot 10^4 = 10/10^4; \gamma_{\xi\eta} = 2(-20 + 16)/4 \cdot 10^4 = -2/10^4].$$

2.21. Одредити вектор деформације за октаедарску раван за случај главних дилатација из задатка 2.15. а за влакно дужине 100 mm.

$$[\text{Из (2.44) следи } \epsilon_V = 27/10^4; \delta_n \text{ okt} = 900/10^4 = 0,09 \text{ mm}; \delta_t \text{ okt} = \sqrt{6}/10^2 \text{ mm}].$$

2.22. Код равне деформације у поларном систему је $u = u(r)$, $v = 0$. Одредити компонентне деформације и испитати услов компатибилности.

[Према (2.66) су $\epsilon_r = du/dr = u'$; $\epsilon_\theta = u/r$, па је, према (2.84), услов компатибилности деформација $r^{-1} [d(2\epsilon_\theta - \epsilon_r)/dr] = 0$, тј. $2\epsilon_\theta - \epsilon_r = c = \text{const}$. Стога је услов $u' - (2u/r) = -c$. Ова је једначина линеарна, па је $u = Cr^2 + cr$].

2.23. Компонентне деформације равне деформације су: $\epsilon_r = ar^{-2} \sin 2\varphi$; $\epsilon_c = -br^{-2} \sin 2\varphi$; $\gamma_{rc} = cr^{-2} (1 - \cos 2\varphi)$. Одредити мале позитивне коефицијенте a , b и c тако да деформације буду могуће.

[Из првог обрасца (2.84) следи да мора бити $a+b=c$].

2.24. Компонентна померања равне деформације у поларним координатама су $u = ar - br^{-1}$; $v = cr$. Одредити компонентне деформације и испитати услове компатибилности.

$[\epsilon_r = u' = a + br^{-2}$; $\epsilon_c = ur^{-1} = a - br^{-2}$; $\gamma_{rc} = v' - vr^{-1} = 0$; испуњени су].

2.25. Компонентна померања су: $u = -axz$; $v = byz$; $w = [ax^2 + b(z^2 - y^2)]/2$. Одредити компонентне тензора коначних деформација.

{Према обрасцима (2.88.b) биће:

$$E_{xx} = -az + a^2(x^2 + z^2)/2; \quad E_{yy} = bz + b^2(y^2 + z^2)/2; \quad E_{zz} = bz + [a^2x^2 + b^2(y^2 + z^2)]/2;$$

$$E_{xy} = -abxy/2; \quad E_{xz} = a(a+b)xz/2; \quad E_{yz} = 0\}.$$

3. ОДНОСИ ИЗМЕЂУ НАПОНА И ДЕФОРМАЦИЈА

3.1. Lame-ове константе. — Први је Hooke 1660. године поставио закон „*Ut tensio cis vis*“ којим се успоставља веза између напона и деформација. Сматрајући га универзалним законом природе објавио га је 1678. године у делу „*De potentia restitutiva*“. Према томе закону постоји *линеарни однос* (закон пропорционалности) *између напона и дилатације код аксијалног најрезања*, $\sigma = E\varepsilon$, где је E коефицијент пропорционалности који је 1807. године увео Thomas Young у делу „*A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*“ (као „*the weight of the modulus*“ or „*the height of the modulus*“). Пошто је дилатација неименовани број, модул E има исту јединицу као и напон, али представља *материјалну константу* пошто не зависи нити од напона нити од деформација, већ само од материјалних карактеристика деформабилног тела. Експерименти су *повердили* да овај закон важи за многе материјале, али за случај *малих деформација*, на чему је основана отпорност материјала.

Напонско и деформабилно стање у некој тачки напрегнутог тела одређена су тензором напона и тензором деформација, па између њих мора да постоји нека веза, $\mathbf{N} = f(\mathbb{S})$, и обратно. Оваквих релација би било 9, али се због тога што су тензори *симетрични*, горња се тензорска зависност своди на *шест* функционалних релација:

$$\sigma_x = f_1(\varepsilon_x; \varepsilon_y; \varepsilon_z; \gamma_{xy}; \gamma_{xz}; \gamma_{yz}); \quad \sigma_y = f_2; \dots; \quad \tau_{yz} = f_6. \quad (3.1)$$

Видели смо да су деформације зависне од померања (u, v, w) , а она су функције координата (x, y, z) посматране тачке M до почетка деформација. Исто се односи и на напоне. Напон σ у блиској тачки (x, y, z) мало се разликује од напона σ у тачки (x, y, z) , па се те две вредности због малих деформација могу изједначити, $\bar{\sigma} = \sigma$. Ако је тело *идеално еластично* онда се користи *хипотеза о природном стању деформабилног тела*: „*када нема деформација тада не постоје ни напони*“. Ово значи да је у недеформисаном стању $\mathbb{S} = 0$, па је и $\mathbf{N} = 0$, те су и функције $f_i(0; 0; 0; 0; 0; 0) = 0$. Ова нам претпоставка омогућава да не водимо рачуна о *претходним најрезањима* којима је тело било изложено (механичким и термичким), већ да посматрамо стање напрезања од тренутка почетка деформисања.

Природно је, слично *основном Hooke-овом закону*, претпоставити да је за идеално еластично тело зависност између напона и деформација *линеарна*. Разлози за ову претпоставку су следећи:

1° Линеарна зависност је у сагласности са експериментима истезања и притиска вршеним са многим материјалима који су одговарали *основном Hooke-овом закону*.

2° Задатим деформацијама (\mathcal{E}) у датој тачки мора да одговара један јединствени систем напона (\mathbf{N}), и обратно. Ту релацију задовољава линеарна форма (3.1), јер се решењем ових једначина по деформацијама опет добијају линеарне зависности.

3° С обзиром на хипотезу о природном стању деформабилног тела, кади се за идеално еластично тело, функције f_i развију у Мас-Лауги-ов ред, добија се, например:

$$\sigma_x = [f_1]_0 + [\partial f_1 / \partial \varepsilon_x]_0 \varepsilon_x + [\partial f_1 / \partial \varepsilon_y]_0 \varepsilon_y + \dots + [\partial f_1 / \partial \gamma_{yz}]_0 \gamma_{yz},$$

са тачношћу до малих величина другог реда, где знак [], показује да је то вредност функције f_1 и њених извода, за нулту вредност деформација ($\mathcal{E} = 0$). Коefицијенти $[f_1]_0$ и $[\partial f_1 / \partial \varepsilon_x]_0, \dots$, су константе, па је напон заиста линеарна функција компонентних деформација, те се може написати у овом облику:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_{11} \varepsilon_x + C_{12} \varepsilon_y + C_{13} \varepsilon_z + C_{14} \gamma_{xy} + C_{15} \gamma_{xz} + C_{16} \gamma_{yz}; \\ \sigma_y &= C_{21} \varepsilon_x + C_{22} \varepsilon_y + C_{23} \varepsilon_z + C_{24} \gamma_{xy} + C_{25} \gamma_{xz} + C_{26} \gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= C_{31} \varepsilon_x + C_{32} \varepsilon_y + C_{33} \varepsilon_z + C_{34} \gamma_{xy} + C_{35} \gamma_{xz} + C_{36} \gamma_{yz}; \\ \tau_{xy} &= C_{41} \varepsilon_x + C_{42} \varepsilon_y + C_{43} \varepsilon_z + C_{44} \gamma_{xy} + C_{45} \gamma_{xz} + C_{46} \gamma_{yz}; \\ \tau_{xz} &= C_{51} \varepsilon_x + C_{52} \varepsilon_y + C_{53} \varepsilon_z + C_{54} \gamma_{xy} + C_{55} \gamma_{xz} + C_{56} \gamma_{yz}; \\ \tau_{yz} &= C_{61} \varepsilon_x + C_{62} \varepsilon_y + C_{63} \varepsilon_z + C_{64} \gamma_{xy} + C_{65} \gamma_{xz} + C_{66} \gamma_{yz}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Коefицијенти C_{ik} зову се *коefицијенти еластичности*. Њих би било 81, али их, због симетричности тензора, има 36. Уопште узев могу бити функције координата, али не зависе од напона нити од деформација. Они су *материјалне карактеристике* и зависе једино од материјалне природе деформабилног тела, а исте су димензије као и напони, и у општем су случају *коначних величина*.

Линеарна теорија еластичности основана је на *закону линеарног односа између напона и деформација* (3.2). Овај закон садржи у себи *закон о независности дејства*, јер је укупни напон (на пример σ_x) збир напона услед свих компонентних деформација ($\varepsilon_x; \varepsilon_y; \varepsilon_z; \gamma_{xy}; \gamma_{xz}; \gamma_{yz}$). Ова теорија предпоставља да је *тело хомогено*, тј. да му је састав исти у свакој тачки. Због тога су коefицијенти C_{ik} *константе*, па пошто су тензори \mathcal{E} и \mathbf{N} симетрични биће и тензор \mathbf{C} са компонентама C_{ik} *симетричан*, те је

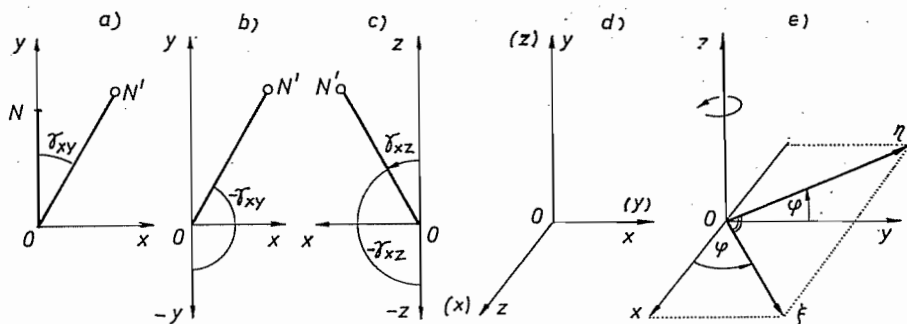
$$C_{ik} = C_{ki} = \text{const.} \quad (3.3. a)$$

Због овога се број константи смањује и има их $6 + [(36 - 6)/2] = 6 + 25 = 21$. Шест је елемената на главној дијагонали (C_{ii}), а остали су симетрични у односу на њу. Овај највећи могући број константи може да буде само ако је тело *пошћуно анизотропно*.

Изотропно тело има физичке особине исте у свима правцима, што значи да се везе (3.2) *не мењају при трансформацији координата*. Према раније утврђеном знаку клизања (смицања) биће клизање влакна ON у Ox -равни при преласку у положај ON' позитивно (слика 3.1.а). Када се $+Oy$ -оса заокрене за 180° и пређе у положај $-Oy$ (слика 3.1.б) клизање не мења величину већ само предзнак, и постаје негативно. Због тога из прве једначине (3.2) следи

$$\sigma_x = C_{11} \varepsilon_x + C_{12} \varepsilon_y + C_{13} \varepsilon_z - C_{14} \gamma_{xy} + C_{15} \gamma_{xz} - C_{16} \gamma_{yz}.$$

Напон σ_x , дилатације ϵ_x и клизање γ_{xz} не мењају се, па се не мења ни једнакост леве и десне стране, а то је могуће само тдг. када су константе $C_{14} = C_{16} = 0$. Ротацијом $+Oz$ -осе за 180° у директном смеру добија се



Слика 3.1. — Смањење броја константи еластичности

$-Oz$ -оса (слика 3.1. c), па клизање γ_{xz} мења предзнак, те из прве једначине следи да морају бити константе $C_{15} = C_{16} = 0$. Ротацијом $+Ox$ -осе у $-Ox$ -осу добија се да су константе $C_{24} = C_{25} = 0$. Дакле, обртањем оса триједра $Oxyz$ за 180° у директном смеру добија се шест релација

$$C_{14} = C_{15} = C_{16} = 0; \quad C_{24} = C_{25} = C_{26} = 0; \quad C_{34} = C_{35} = C_{36} = 0, \quad (3.3. b)$$

па се број константи од 21 свео на 12.

Предње релације у вези (3.2) показују да *нормални напони не зависе од клизања, ниши тангенцијални напони од дилатација*, па се систем једначина (3.2) *раздваја на два система*, један за нормалне, а други за тангенцијалне напоне:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_{11} \epsilon_x + C_{12} \epsilon_y + C_{13} \epsilon_z; & \tau_{xy} &= C_{44} \gamma_{xy} + C_{45} \gamma_{xz} + C_{46} \gamma_{yz}; \\ \sigma_y &= C_{21} \epsilon_x + C_{22} \epsilon_y + C_{23} \epsilon_z; & \tau_{xz} &= C_{54} \gamma_{xy} + C_{55} \gamma_{xz} + C_{56} \gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= C_{31} \epsilon_x + C_{32} \epsilon_y + C_{33} \epsilon_z; & \tau_{yz} &= C_{64} \gamma_{xy} + C_{65} \gamma_{xz} + C_{66} \gamma_{yz}; \end{aligned} \quad (3.3. c)$$

Међутим, ротација оса триједра $Oxyz$ за 180° у директном смеру утиче и на други систем предњих једначина. Када $+Ox$ оса пређе у $-Ox$ -осу онда τ_{yz} не мења предзнак, те из последње једначине следи $\tau_{yz} = -C_{46} \gamma_{xy} - C_{56} \gamma_{xz} + C_{66} \gamma_{yz}$, а пошто се једнакост леве и десне стране не мења, мора бити $C_{46} = C_{56} = 0$. Друге две ротације оса $+Oy$ и $+Oz$ у осе $-Oy$ и $-Oz$, довеле би до нових релација, па су три константе једнаке нули

$$C_{45} = C_{46} = C_{56} = 0, \quad (3.3. d)$$

те се број константи свео на $12 - 3 = 9$. Стога су предње једначине:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_{11} \epsilon_x + C_{12} \epsilon_y + C_{13} \epsilon_z; & \tau_{xy} &= C_{44} \gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= C_{21} \epsilon_x + C_{22} \epsilon_y + C_{23} \epsilon_z; & \tau_{xz} &= C_{55} \gamma_{xz}; \\ \sigma_z &= C_{31} \epsilon_x + C_{32} \epsilon_y + C_{33} \epsilon_z; & \tau_z &= C_{66} \gamma_{yz}. \end{aligned} \quad (3.3. e)$$

Из њих закључујемо да сваки нормални напон зависи од свих дилатација, али *тангенцијални напон зависи само од одговарајуће клизања*.

Због тога што је тело изотропно можемо ротацију вршити и за 90° . Када $+Oy$ -оса пређе обртањем у $+Oz$ -осу (слика 3.1. *d*), а $+Oz$ -оса у $+Ox$ -осу, (и $+Ox$ -оса у $+Oy$ -осу), тада дилатације мењају своје улоге, па се, на пример, из прве једначине добија $\sigma_x = C_{11} \epsilon_x + C_{12} \epsilon_z + C_{13} \epsilon_y$, те пошто се не мења лева страна мора бити $C_{12} = C_{13}$. Аналогно томе добијају се још две релације, па су константе једнаке

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = B. \quad (3.3. f)$$

Овим се број константи свео на $9 - 2 = 7$.

Пошто је тело изотропно, то се заменом углова оса Ox и Oy , а затим оса Ox и Oz , због релација (3.3. *f*) и услова коњугованости тангенцијалних напона, добијају релације

$$\sigma_y = C_{11} \epsilon_y + B(\epsilon_x + \epsilon_z); \quad \sigma_x = C_{22} \epsilon_x + B(\epsilon_y + \epsilon_z); \quad \sigma_z = C_{33} \epsilon_z + B(\epsilon_x + \epsilon_y);$$

$$\tau_{yx} = C_{44} \gamma_{yx} = \tau_{xy}; \quad \tau_{zx} = C_{55} \gamma_{zx} = \tau_{xz};$$

из којих следи да морају бити константе:

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = A; \quad C_{44} = C_{55} = C_{66} = C. \quad (3.3. g)$$

Овим се број константи свео на *три* A , B , и C , па се једначине (3.3. *e*) могу написати у облику

$$\begin{aligned} \sigma_x &= A \epsilon_x + B(\epsilon_y + \epsilon_z); & \tau_{xy} &= C \gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= A \epsilon_y + B(\epsilon_x + \epsilon_z); & \tau_{xz} &= C \gamma_{xz}; \\ \sigma_z &= A \epsilon_z + B(\epsilon_x + \epsilon_y); & \tau_{yz} &= C \gamma_{yz}. \end{aligned} \quad (3.3. h)$$

Из њих можемо закључити да је утицај напона σ_x на дилатацију ϵ_x исти толики колики је утицај напона σ_y на ϵ_y , односно σ_z на ϵ_z . С обзиром на (3.3. *f*) види се да је утицај напона σ_y и σ_z на ϵ_x исти толики као утицај напона σ_x и σ_z на ϵ_y , односно напона σ_x и σ_y на ϵ_z . Утицај сваког тангенцијалног напона на своје клизање је потпуно исти (константа C).

Обртање оса триједна $Oxyz$ за 180° и 90° и измена улога оса само су специјални случајеви обртања. Пошто је тело потпуно изотропно извршимо ротацију триједра $Oxyz$ око $+Oz$ -осе за произвољни угао φ , он постаје $O\xi\eta z$ (слика 3.1. *e*), па су компонентни напони и дилатације:

$$\sigma_\xi = (\cos \varphi \sin \varphi) \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix}; \quad \begin{aligned} \sigma_\xi &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi; \\ \epsilon_\xi &= \epsilon_x \cos^2 \varphi + \epsilon_y \sin^2 \varphi + \gamma_{xy} \sin 2\varphi/2; \\ \epsilon_\eta &= \epsilon_x \sin^2 \varphi + \epsilon_y \cos^2 \varphi - \gamma_{xy} \sin 2\varphi/2. \end{aligned}$$

Уношењем ових вредности у прву једначину (3.3. *h*) добија се због (3.3. *i*)

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= A \epsilon_\xi + B(\epsilon_\eta + \epsilon_z) = A(\epsilon_x \cos^2 \varphi + \epsilon_y \sin^2 \varphi + \gamma_{xy} \sin^2 \varphi/2) + \\ &+ B(\epsilon_x \sin^2 \varphi + \epsilon_y \cos^2 \varphi - \gamma_{xy} \sin^2 \varphi/2) + B \epsilon_z = [A \epsilon_x + B(\epsilon_y + \epsilon_z)] \cos^2 \varphi + \\ &+ [A \epsilon_y + B(\epsilon_x + \epsilon_z)] \sin^2 \varphi + C \gamma_{xy} \sin 2\varphi = A(\epsilon_x \cos^2 \varphi + \epsilon_y \sin^2 \varphi) + \\ &+ B(\epsilon_x \sin^2 \varphi + \epsilon_y \cos^2 \varphi) + B \epsilon_z + C \gamma_{xy} \sin 2\varphi \end{aligned}$$

односно

$$\gamma_{xy} (A - B) \sin 2\varphi/2 = C \gamma_{xy} \sin 2\varphi$$

те између константи A , B и C постоји релација облика

$$2C = A - B. \quad (3.3. j)$$

На овај се начин број константи свео на свега *две константе*, пошто су константе A , B и C везане релацијом (3.3. j). Уместо ових константи *Lamé* је увео нове константе

$$\lambda = B; \nu = C = (A - B)/2; A = \lambda + 2\nu \quad (3.4)$$

које се називају *Lamé*-овим *константама*. Оне карактеришу материјалне особине еластичног изотропног тела, па се резе између напона и деформација (2.2) могу изразити само помоћу ових константи. При томе се нормални напони (3.3. h) изражавају помоћу обе *Lamé*-ове константе, а тангенцијални само помоћу друге константе (ν).

3.2. Уопштени Хooke-ов закон. — Када се у изразу (3.3. h) A , B и C замене *Lamé*-овим константама (3.4) добиће се једначине:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2\nu) \varepsilon_x + \lambda (\varepsilon_y + \varepsilon_z) + \lambda \varepsilon_y + 2\nu \varepsilon_x; & \tau_{xy} &= \nu \gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= (\lambda + 2\nu) \varepsilon_y + \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_z) = \lambda \varepsilon_y + 2\nu \varepsilon_y; & \tau_{xy} &= \nu \gamma_{xz}; \quad \varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \\ \sigma_z &= (\lambda + 2\nu) \varepsilon_z + \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \lambda \varepsilon_z + 2\nu \varepsilon_z; & \tau_{yz} &= \nu \gamma_{yz}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

које представљају *уопштени Хooke-ов закон за просторно сивање најрезања*. С обзиром на тензоре напона и деформације Хooke-ов закон се може написати и у матричном (тензорском) облику

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \lambda \varepsilon_v \mathbf{I} + 2\nu \mathfrak{S}; \quad \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} = \lambda \varepsilon_v \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \\ &+ 2\nu \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

где је \mathbf{I} једначина матрица, а $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \text{div } s$ кубна дилатација.

Сабирањем првих трију једначина (3.5) добија се веза између првих скалара (инваријанти) тензора напона и деформација

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = (3\lambda + 2\nu) (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z); \quad \mathcal{N}_1 = (3\lambda + 2\nu) \mathfrak{S}_1; \quad \mathfrak{S}_1 = \varepsilon_v. \quad (3.7)$$

Ове инваријанте, као што је познато, представљају трагове матрица тих тензора.

Да би се из првих трију једначина (3.5) изразиле дилатације помоћу напона, мора детерминанта система бити различита од нуле

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \lambda + 2\nu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\nu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\nu \end{vmatrix} = (3\lambda + 2\nu) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\nu & 0 \\ \lambda & 0 & 2\nu \end{vmatrix} = \\ &= 4\nu^2 (3\lambda + 2\nu) \neq 0; \quad \nu \neq 0; \quad 3\lambda + 2\nu \neq 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

што нам показује да је друга *Lamé*-ова константа позитивна.

Решавањем система једначина (3.5) по компонентним деформацијама уопштени Нооке-ов закон може се изразити помоћу једначина:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= (2\nu/\Delta) [2(\lambda + \nu)\sigma_x - \lambda(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/\nu; \\ \varepsilon_y &= (2\nu/\Delta) [2(\lambda + \nu)\sigma_y - \lambda(\sigma_x + \sigma_z)]; & \gamma_{xz} &= \tau_{xz}/\nu; & \Delta &= 4\nu^2(3\lambda + 2\nu); & (3.9) \\ \varepsilon_z &= (2\nu/\Delta) [2(\lambda + \nu)\sigma_z - \lambda(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{yz} &= \tau_{yz}/\nu.\end{aligned}$$

С обзиром на (3.6) и однос (3.7) предње се једначине могу написати у матричном облику

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\nu} \mathbf{N} - \frac{2\lambda\nu}{\Delta} \mathcal{A}_1 \mathbf{I};$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2\nu} \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} - \frac{2\lambda\nu}{\Delta} \mathcal{A}_1 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

3.3. Техничке константе. Други облик уопштеног Нооке-овог закона. — Нооке-ов закон је првобитно изведен за аксијално напрезање, а материјална константа је модул еластичности материјала (D). Због тога се у техничкој пракси уместо Lamé-ових константи λ и ν уводе две материјалне техничке константе. *Young-ов модул еластичности материјала (E) и Poisson-ов коефицијент (μ)*. Нека је цилиндрични штап VA затегнут у аксијална Az -правцу силама, онда према Cauchy-јевим једначинама (1.9) аксијална површинска сила на десној основи $p_{nz} = \sigma_z = Z'_n$, а на левој $p_{n(-z)} = -p_{nz} = -\sigma_z = -Z'_n$, док на бочном омотачу штапа силе не дејствују. Према томе од шест компонентних напона постоји само један, $\sigma_z = Z'_n$ једнак површинској сили. Према томе из једначина (3.9) следи да су одговарајуће дилатације

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -2\lambda\nu\sigma_z/\Delta; \quad \varepsilon_z = 4\nu(\lambda + \nu)\sigma_z/\Delta; \quad \Delta = 4\nu^2(3\lambda + 2\nu).$$

При зајезању је $\sigma_z > 0$, па су $\varepsilon_x < 0$, $\varepsilon_y < 0$ и $\varepsilon_z > 0$. Обратно, при *иријиску* $\sigma_z < 0$, па су $\varepsilon_x > 0$, $\varepsilon_y > 0$, а $\varepsilon_z < 0$. Пошто је константа ν позитивна то из тога следи да и прва Lamé-ова константа мора бити позитивна. А пошто је тада и $\Delta > 0$ то мора бити $(\lambda + \nu) \neq 0$. Стога су техничке константе одређене релацијама

$$E = \sigma_z/\varepsilon_z = \Delta/4\nu(\lambda + \nu) = (3\lambda + 2\nu)\nu/(\lambda + \nu);$$

$$\mu = |\varepsilon_x|/|\varepsilon_z| = |\varepsilon_y|/|\varepsilon_z| = \lambda/2(\lambda + \nu) \quad (3.11)$$

Из тога закључујемо да су Lamé-ове и техничке константе *увек позитивне величине* за све материјале. Модул еластичности материјала (E) има исту јединицу као и напон [kN/cm^2 ; N/m^2] и представља онај напон σ_z потребан да буде $\varepsilon_z = 1$, тојест да се штап издужи за првобитну дужину, $l = l_0(1 + \varepsilon_z) = 2l_0$. Другу константу (μ) као однос апсолутних величина попречне и уздужне дилатације увео је Poisson (S. D. Poisson, 1781—1840) 1829. године („Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques“, Mém. acad., t. 8) и назива се *Poisson-ов однос* или *коефицијент*. Он му је дао вредност $1/4$. Код чистог смицања у равни Oxy из (3.5) следи да је $\tau_{xy} = \nu\gamma_{xy}$, па се по аналогiji са аксијалним напрезањем константа ν назива *модул сми-*

цања или модула клизања и обележава са \mathbf{G} . Он има исту димензију и јединицу као и модула еластичности материјала, $[\text{kN}/\text{cm}^2; \text{N}/\text{m}^2]$.

С обзиром на изнето, из (3.11) следи да се Lamé-ове константе могу изразити помоћу техничких константи на овај начин:

$$\begin{aligned}\lambda &= \mu E / (1 + \mu) (1 - 2\mu) = \mu k E / (1 + \mu) = 2\mu k \mathbf{G}; \\ \nu &= \mathbf{G} = E / 2(1 + \mu); \quad k = 1 / (1 - 2\mu),\end{aligned}\quad (3.12)$$

па стога однос (3.7) постаје

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = kE (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z); \quad \mathcal{N}_1 = kE \mathcal{E}_1 = E \mathcal{E} / (1 - 2\mu). \quad (3.13)$$

Из ове се релације може закључити да када су сва три напона позитивна, тј. $\mathcal{N}_1 > 0$, да је тада и $\mathcal{E}_1 = \varepsilon_V > 0$, па је $k = 1 / (1 - 2\mu) > 0$, те мора бити Poisson-ов коефицијент $\mu < 1/2$. Ова се вредност разликује од $1/4$ коју је вредност предложио Poisson на основу „молекуларне хипотезе“ према којој постоји само једна константа еластичности ($\lambda = \nu$). Опити су показали да је $1/4 < \mu < 1/2$, па се узима да је приближна вредност* $\mu = 1/3 = 0,33$.

Када се релације (3.12) унесу у једначине (3.5), тада се уопштени *Нooke-ов закон*, с обзиром на Cauchy-јеве једначине (2.24), може написати у облику:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= Ek(1 + \mu)^{-1} [(1 - \mu)\varepsilon_x + \mu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)] = \\ &= 2\mathbf{G}(\varepsilon_x + \mu k \varepsilon_V) = 2\mathbf{G}[(\partial u | \partial x) + \mu k \operatorname{div} \mathbf{s}] \\ \sigma_y &= Ek(1 + \mu)^{-1} [(1 - \mu)\varepsilon_y + \mu(\varepsilon_z + \varepsilon_x)] = \\ &= 2\mathbf{G}(\varepsilon_y + \mu k \varepsilon_V) = 2\mathbf{G}[(\partial v | \partial y) + \mu k \operatorname{div} \mathbf{s}]; \\ \sigma_z &= Ek(1 + \mu)^{-1} [(1 - \mu)\varepsilon_z + \mu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)] = \\ &= 2\mathbf{G}(\varepsilon_z + \mu k \varepsilon_V) = 2\mathbf{G}[(\partial w | \partial z) + \mu k \operatorname{div} \mathbf{s}], \\ \tau_{xy} &= \mathbf{G} \gamma_{xy} = \mathbf{G}[(\partial u | \partial y) + (\partial v | \partial x)];\end{aligned}\quad (3.14)$$

$$\tau_{xz} = \mathbf{G} \gamma_{xz} = \mathbf{G}[(\partial u | \partial z) + (\partial w | \partial x)]; \quad \tau_{yz} = \mathbf{G} \gamma_{yz} = \mathbf{G}[(\partial v | \partial z) + (\partial w | \partial y)]$$

јер је

$$\lambda + 2\nu = 2(1 + \mu k) \mathbf{G} = (1 + \mu k) E / (1 + \mu).$$

С обзиром на (3.12) и (3.8) биће $1 + 2\mu k = k$; $2(\lambda + \nu) = 2\mathbf{G}k$, $3\mu k + 1 = (1 + \mu)k$; $2\nu/\Delta = 1/4 \mathbf{G}^2(1 + \mu)k$, па се уопштени *Нooke-ов закон* (3.9) може написати у облику

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [(1 + \mu)\sigma_x - \mu \mathcal{N}_1]; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\mathbf{G}} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] = \frac{1}{E} [(1 + \mu)\sigma_y - \mu \mathcal{N}_1]; \\ \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{\mathbf{K}}; \quad \mathbf{G} = \frac{E}{2(1 + \mu)}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{E} [(1 + \mu)\sigma_z - \mu \mathcal{N}_1]; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{\mathbf{G}}\end{aligned}\quad (3.15)$$

* У немачкој литератури уместо коефицијента μ узима се његова реципрочна вредност $m = 1/\mu = 10/3$, а уместо модула еластичности E коефицијент еластичности или коефицијент издужења („Dehnungszahl“) $\alpha = 1/E$.

који се највише употребљава у техничкој пракси и који се може непосредно извести из посматрања затезања правоуглог паралелепипеда у три управна правца*.

Једначине уопштеог Хooke-овог закона (3.14) и (3.15) могу се прегледније написати у матричном облику овако:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{pmatrix} 1-\mu & \mu & \mu \\ \mu & 1-\mu & \mu \\ \mu & \mu & 1-\mu \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \mathbf{G} \begin{Bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\mu & -\mu \\ -\mu & 1 & -\mu \\ -\mu & -\mu & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\mathbf{G}} \begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (3.16)$$

3.4. Модул компресије. — Када се уведе *средњи напон* $\sigma_{sr} = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$, онда је према (1.66) прва компонента девијатора напона $\delta_{xx} = \sigma_x - \sigma_{sr}$, односно, с обзиром на (3.5) и (3.12), биће

$$\delta_{xx} = \sigma_x - \sigma_{sr} = \lambda \varepsilon_V + 2 \mathbf{G} \varepsilon_x - \mathcal{N}_1/3 = 2 \mathbf{G} (\varepsilon_x - \varepsilon_V)/3.$$

те између девијатора напона и девијатора деформација постоји однос

$$\mathfrak{D}^{(\sigma)} = 2 \mathbf{G} \mathfrak{D}^{(\varepsilon)}; \quad \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_{sr} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_{sr} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_{sr} \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \mathbf{G} \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_V/3 & \gamma_{yx}/2 & \gamma_{zx}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y - \varepsilon_V/3 & \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z - \varepsilon_V/3 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Ако је тело изложено *хидростатичком притиску*, онда је $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p = \text{const}$, па је $\sigma_{sr} = -3p/3 = -p = -\mathcal{N}_1/3$, те ће с обзиром на (3.7) и (3.13), бити

$$-p = \mathcal{N}_1/3 = (3\lambda + 2\nu) \varepsilon_V/3 = E \varepsilon_V/3 (1 - 2\mu) = \mathbf{K} \varepsilon_V; \quad \mathbf{K} = E/3 (1 - 2\mu). \quad (3.18)$$

где је \mathbf{K} *модул компресије* („bulk modulus“). Он има димензију и јединицу напона, $[\text{kN/cm}^2; \text{N/m}^2]$. Пошто је $\mu < 1/2$ то је и овај модул *позитивна константа*. При притиску се запремина смањује, па је $\varepsilon_V < 0$, те мора бити $\mathbf{K} > 0$.

3.5. Lamé-ове једначине. — Када се Navier-ове једначине (1.25) унесу за напоне релације из уопштеог Хooke-овог закона (3.14), добијају се *основне диференцијалне једначине равнотеже еластичног тела* које се називају Lamé-ове једначине или Navier-ове једначине *групе врсте*. Тако би за прву једначину (1.25) добили

$$\begin{aligned} & (\partial \sigma / \partial x) + (\partial \tau_{xy} / \partial y) + (\partial \tau_{xz} / \partial z) + X_V' = 2 \mathbf{G} [(\partial^2 u / \partial x^2) + \mu k (\partial \varepsilon_V / \partial x)] + \\ & + \mathbf{G} [(\partial^2 u / \partial y^2) + (\partial^2 v / \partial y \partial x)] + \mathbf{G} [(\partial^2 u / \partial z^2) + (\partial^2 w / \partial z \partial x)] + X_V' = \\ & = \mathbf{G} \{ 2 \mu k (\partial \varepsilon_V / \partial x) + (\partial^2 u / \partial x^2) + (\partial^2 u / \partial y^2) + (\partial^2 u / \partial z^2) + \\ & + \partial [(\partial u / \partial x) + (\partial v / \partial y) + (\partial w / \partial z)] / \partial x \} + X_V' = 0. \end{aligned}$$

* Отпорност материјала, чл. 4.

Пошто су $k = 1/(1 - 2\mu)$; $1 + 2\mu k = 1 + k$ и $\varepsilon_V = \text{div } \mathbf{s}$, то се увођењем Laplace-овог оператора $\Delta = \nabla^2 = (\partial^2/\partial x^2) + (\partial^2/\partial y^2) + (\partial^2/\partial z^2)$, предња једначина може написати у облику

$$\mathbf{G} [\Delta u + (2\mu k + 1) (\partial \varepsilon_V / \partial x)] + X_V' = \mathbf{G} [\Delta z + k (\partial \varepsilon_V / \partial x)] + X_V' = 0.$$

Цикличком пермутацијом индекса добијају се још две једначине, те су:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} [\Delta u + k (\partial \varepsilon_V / \partial x)] + X_V' &= \nu \Delta u + (\lambda + \nu) (\partial \varepsilon_V / \partial x) + X_V' = 0; \\ \mathbf{G} [\Delta v + k (\partial \varepsilon_V / \partial y)] + Y_V' &= \nu \Delta v + (\lambda + \nu) (\partial \varepsilon_V / \partial y) + Y_V' = 0; \\ \mathbf{G} [\Delta w + k (\partial \varepsilon_V / \partial z)] + Z_V' &= \nu \Delta w + (\lambda + \nu) (\partial \varepsilon_V / \partial z) + Z_V' = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Оне се могу краће написати у матричном облику

$$\mathbf{G} \{[\Delta \mathbf{s}] + k \{\text{grad } \varepsilon_V\}\} + \{F_V'\} = \nu \{\Delta \mathbf{s}\} + (\lambda + \nu) \{\text{grad } \varepsilon_V\} + \{F_V'\} = 0. \quad (3.20)$$

Када су Lamé-ове константе једнаке ($\lambda = \nu$), оне своде на Nevier-ове једначине (1.25).

Lamé-ове диференцијалне једначине су опште, јер:

1° изражавају равнотежне услове сваког елемента деформабилног тела (континуума) ако су им десне стране једнаке нули, или, пак, једначине кретања ако се на десној страни ставе компонентне силе инерције:

2° оне садрже геометријске карактеристике — компонентна померања и запреминску дилатацију, и

3° оне садрже и физичке карактеристике, Lamé-ове константе (λ, ν) или техничке константе (E или \mathbf{G} , и μ), које карактеришу еластичне, или још и густину (специфичну масу) ако представљају једначине кретања.

Када су познате физичке карактеристике, тада се помоћу ових једначина могу одредити компонентна померања (u, v, w), а помоћу њих компонентне деформације (2.24), односно компонентни напони (3.14), па оне стварно представљају основ линеарне теорије еластичности.

Када се занемарују запреминске силе ($F_V' = 0$) Lamé-ове једначине (3.19) се упрошћавају. С обзиром на кумутативност $\partial (\Delta u) / \partial x = \Delta (\partial u / \partial x)$, диференцирањем и сабирањем једначина (3.19), с обзиром на (3.13), добија се

$$\{\Delta \mathbf{s}\} + k \nabla \varepsilon_V = 0; \quad (1 + k) \Delta \varepsilon_V = 0; \quad \Delta \varepsilon_V = \Delta \mathcal{E}_1 = 0; \quad \Delta \mathcal{A}'_1 = 0; \quad (3.21)$$

те видимо да први скалари оба тензора задовољавају Laplace-ову диференцијалну парцијалну, па су хармонијске функције.

С обзиром на предњи резултат применом Laplace-овог оператора на прву једначину (3.19), односно (3.21), биће $\Delta \Delta u + k \Delta (\partial \varepsilon_V / \partial x) = \Delta \Delta u + k \Delta (\Delta \varepsilon_V) / \partial x = \Delta \Delta u = 0$. На исти начин добијају се још две релације, па су компонентна померања бихармонијске функције.

$$\begin{aligned} \Delta \Delta u = 0; \quad \Delta \Delta v = 0; \quad \Delta \Delta w = 0; \quad \Delta \Delta = \nabla^4 &= \frac{\partial^5}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + \\ &+ 2 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

С обзиром на предњи резултат применом двоструког Laplace-овог оператора на прву једначину (3.14) следи $\Delta \Delta \sigma_x = 2 \mathbf{G} \{[\partial (\Delta \Delta u) / \partial x] + \mu k \Delta \Delta \varepsilon_V\} = 0$,

па се аналогио добијају и друге релације. Стога из (3.15) следи да је $\Delta\Delta \varepsilon_x = [\Delta\Delta \sigma_x - \mu(\Delta\Delta \sigma_y + \Delta\Delta \sigma_z)]/E = 0$, а аналогно се добијају и остале релације. Дакле, може се закључити да су компоненте тензора напона и компоненте тензора деформација бихармонијске функције

$$\Delta\Delta t_{ik} = \Delta\Delta t^{ik} = 0; \quad \Delta\Delta \varepsilon_{ik} = 0. \quad (3.23)$$

Из напред наведеног може се закључити да су у одсуству запреминских сила први скалари (инваријанте) тензора напона и деформација хармонијске функције, а компоненте ових тензора и компонентна померања су бихармонијске функције координата (x, y, z) .

3.6. Други облик Cauchy-јевих граничних услова. — Када се у први Cauchy-јев гранични услов (1.13. b) унесу за напоне изрази из Hooke-овог уопштеног закона (3.14), добиће се

$$\sigma_x \alpha + \tau_{xy} \beta + \tau_{xz} \gamma = \mathbf{G} \{ 2 [(\partial u / \partial x) + \mu k \varepsilon_V] \alpha + [(\partial u / \partial y) + (\partial v / \partial x)] \beta + [(\partial u / \partial z) + (\partial w / \partial x)] \gamma \} = X'_n.$$

Аналогно томе добиле би се још две релације за друга два услова, па се Cauchy-јеви гранични (конјурни) услови могу изразити и на други начин;

$$\begin{pmatrix} 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu k \varepsilon_V \right) & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu k \varepsilon_V \right) & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \mu k \varepsilon_V \right) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X'_n \\ Y'_n \\ Z'_n \end{Bmatrix}. \quad (3.24)$$

3.7. Beltrami-Michell-ове једначине. — Компонентни напони који задовољавају Navier-ове једначине равнотеже (1.25) не морају, уопште узев, да одређују неко напонско стање, јер су они, Hooke-овим уопштеним законом (3.5), везани са компонентним померањима (u, v, w) и компонентним деформацијама које нису произвољне, јер морају да задовоље услове компатибилности деформација (2.42). Стога морају и компонентни напони да буду подвргнути *гојунским условима*, да би напонско стање које одређују било могуће и реално. Ти услови су Beltrami-Michell-ове једначине или *услови компатибилности напона* који је први извео Beltrami (1892. год) у случају занемаривања запреминских сила, а Michell* (1900, год.) их уопштио и за случај дејства запреминских сила.

Ове се једначине изводе на тај начин што се у услове компатибилности (2.42) за дилатације унесу вредности из општег Hooke-овог закона (3.15) и искористе се Navier-ове једначине равнотеже (1.25) и Lamé-ове (3.19). На пример, када се у трећу једначину компатибилности унесу релације из (3.15) после скраћења са $(1 + \mu)/E$ биће:

$$(\partial^2 \varepsilon_y / \partial z^2) + (\partial^2 \varepsilon_z / \partial y^2) = \partial^2 \gamma_{yz} / \partial y \partial z; \quad (\partial^2 \sigma_y / \partial z^2) + (\partial^2 \sigma_z / \partial y^2) - \mu [(\partial^2 \mathcal{A}_1 / \partial y^2) + (\partial^2 \mathcal{A}_1 / \partial z^2)] / (1 + \mu) = 2 \partial^2 \tau_{yz} / \partial y \partial z.$$

* J. H. Michell

Када се овој једначини дода израз $(\partial^2 \mathcal{N}'_1 / \partial x^2) - (\partial^2 \mathcal{N}'_1 / \partial x^2)$, она се неће променити, али ће се упростити и бити

$$\{(\partial^2 \sigma_y / \partial z^2) + (\partial^2 \sigma_z / \partial y^2)\} + \mu [(\partial^2 \mathcal{N}'_1 / \partial x^2) - \Delta \mathcal{N}'_1 / (1 + \mu)], \\ - 2(\partial^2 \tau_{yz} / \partial y \partial z) = 0. \quad (a)$$

Када се друга Navier-ова једначина диференцира по y , а трећа по z и саберу, а затим прва по x и одузме од предњег збира добиће се релација

$$(\partial^2 \sigma_y / \partial y^2) + (\partial^2 \sigma_z / \partial z^2) - (\partial^2 \sigma_x / \partial x^2) + 2(\partial^2 \tau_{yz} / \partial y \partial z) + \\ + \operatorname{div} \mathbf{F}'_V - 2(\partial X'_V / \partial x) = 0. \quad (b)$$

Збир предњих једначина (a) и (b) даје нову релацију

$$[\partial^2 (\sigma_y + \sigma_z) / \partial y^2] + [\partial^2 (\sigma_y + \sigma_z) / \partial z^2] - (\partial^2 \sigma_x / \partial x^2) + \mu [(\partial^2 \mathcal{N}'_1 / \partial x^2) - \\ - \Delta \mathcal{N}'_1 / (1 + \mu)] + \operatorname{div} \mathbf{F}'_V - 2(\partial X'_V / \partial x) = 0, \quad (c)$$

која се, због тога што је $\sigma_y + \sigma_z = \mathcal{N}'_1 - \sigma_x$ може написати у облику

$$[\Delta \mathcal{N}'_1 - (\partial^2 \mathcal{N}'_1 / \partial x^2)] / (1 + \mu) - \Delta \sigma_x + \operatorname{div} \mathbf{F}'_V - 2(\partial X'_V / \partial x) = 0. \quad (d)$$

Када се Lamé-ове једначине (3.19) диференцирају редом по x , y , z и саберу, онда се, због односа $\partial (\Delta u) / \partial x = \Delta (\partial u / \partial x)$ и с обзиром на (3.13), добија однос

$$\mathbf{G}(1 + k) \Delta \varepsilon_V + \operatorname{div} \mathbf{F}'_V = 0; \quad \Delta \varepsilon_1 = \Delta \mathcal{E}_1 = -(\operatorname{div} \mathbf{F}'_V) / \mathbf{G}(1 + k); \\ \Delta \mathcal{N}'_1 = k E \Delta \mathcal{E}_1 = -\frac{1 + \mu}{1 - \mu} \operatorname{div} \mathbf{F}'_V, \quad (3.25)$$

па се уношењем и предњу једначину (d) добија једначина

$$\Delta \sigma_x + [(\partial^2 \mathcal{N}'_1 / \partial x^2) / (1 + \mu)] + [\mu (\operatorname{div} \mathbf{F}'_V) / (1 - \mu)] + 2(\partial X'_V / \partial x) = 0. \quad (e)$$

Аналогно предњем извођењу, из првих двају услова компатибилности добијају се још две овакве релације, односно непосредно из (e) цикличном пермутацијом индекса x у y и z .

Уносећи Нооке-ове једначине (3.15) у последњу једначину компатабилности (2.42), после скраћења са $2(1 + \mu)/E$, добиће се релација

$$2(\partial^2 \varepsilon_z / \partial x \partial y) = \partial [-(\partial \gamma_{xy} / \partial z) + (\partial \gamma_{xz} / \partial y) + (\partial \gamma_{yz} / \partial x)] / \partial z; \\ (\partial^2 \sigma_z / \partial x \partial y) - \{\mu [\partial^2 \mathcal{N}'_1 / \partial x \partial y] / (1 + \mu)\} + \partial [-(\partial \tau_{xy} / \partial z) - \\ - (\partial \tau_{xz} / \partial y) - (\partial \tau_{yz} / \partial x)] / \partial z = 0. \quad (f)$$

Када се прва Navier-ова једначина (1.25) диференцира по y , а друга по x , и саберу добија се

$$[\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y) / \partial x \partial y] + \partial [\partial \tau_{xz} / \partial y + (\partial \tau_{yz} / \partial x)] / \partial z + \\ + (\partial^2 \tau_{xy} / \partial x^2) + (\partial^2 \tau_{xy} / \partial y^2) + [(\partial X'_V / \partial y) + (\partial Y'_V / \partial x)] = 0. \quad (g)$$

Пошто је $\sigma_x + \sigma_y = \mathcal{N}'_1 - \sigma_z$ и $1 - [\mu / (1 + \mu)] = 1 / (1 + \mu)$, то се сабирањем једначина (f) и (g) добија једначина

$$\Delta \tau_{xy} + [(\partial^2 \mathcal{N}'_1 / \partial x \partial y) / (1 + \mu)] + [(\partial X'_V / \partial y) + (\partial Y'_V / \partial x)] = 0. \quad (h)$$

а аналогно овом извођењу или цикличком пермутацијом индекса још две релације. На тај начин могу се написати Beltrami — Michell-ове парцијалне једначине

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_x + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial x^2} + \frac{\mu}{1-\mu} \left(\frac{\partial X_V'}{\partial x} + \frac{\partial Y_V'}{\partial y} + \frac{\partial Z_V'}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial X_V'}{\partial x} &= 0; \\ \Delta \sigma_y + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial y^2} + \frac{\mu}{1-\mu} \left(\frac{\partial X_V'}{\partial x} + \frac{\partial Y_V'}{\partial y} + \frac{\partial Z_V'}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial Y_V'}{\partial y} &= 0; \\ \Delta \sigma_z + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial z^2} + \frac{\mu}{1-\mu} \left(\frac{\partial X_V'}{\partial x} + \frac{\partial Y_V'}{\partial y} + \frac{\partial Z_V'}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial Z_V'}{\partial z} &= 0; \\ \Delta \tau_{xy} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial X_V'}{\partial y} + \frac{\partial Y_V'}{\partial x} &= 0; \\ \Delta \tau_{xz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial X_V'}{\partial z} + \frac{\partial Z_V'}{\partial x} &= 0; \\ \Delta \tau_{yz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial Y_V'}{\partial z} + \frac{\partial Z_V'}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Beltrami-јеве једначине се добијају из предњих једначина (326) када се стави да је запреминска сила једнака нули, $X_V' = 0$; $Y_V' = 0$ и $Z_V' = 0$.

Шест парцијалних симултаних диференцијалних једначина са Navier-овим једначинама равнотеже (1.25) и са Cauchy-јевим контурним условима (1.13) чине потпун систем једначина потребних за одређивање компоненти напона у једноструко повезаном подручју, а у вишеструком треба да буду задовољени и накнадни услови (2.44).

С обзиром на *чл. 1.16* Beltrami — Michell-ове једначине могу се написати скупно у тензорском облику на овај начин

$$\Delta t_{ik} + \frac{1}{1+\mu} \mathcal{N}_{1,ik} + \frac{\mu}{1-\mu} \delta_{ik} X_{j,j} + (X_{i,k} + X_{k,i}) = 0.$$

где знак запете показује диференцирање.

3.8. Деформациони рад. — Тело се под утицајем спољашњих сила деформише, па те силе врше изванредан рад који се претвара у *појенцијалну енергију деформације*, па ће се при уклањању спољашњих сила утрошити на успостављање првобитног облика тела какав је имао пре деформисања. Нека је елементарни паралелепипед (слика 1.9. *b*) затегнут аксијалним силама само у Ox правцу. Тада је нормални напон на страници $dydz$ величине σ_x , док је на паралелној страници $\sigma_x^* = \sigma_x + (\partial \sigma_x / \partial x) dx \approx \sigma_x$ када се занемари величина $(\partial \sigma_x / \partial x) dx$ као бескрајно мала величина у односу на коначну величину σ_x . Услед овог напона издужење ивице дужине dx биће $\Delta dx = (1 + \varepsilon_x) dx - dx = \varepsilon_x dx$. Пошто између напона и деформација постоји линеарна зависност (3.3), то ће дијаграм силе и издужења у граници пропорционалности бити *права линија*. На $O\xi$ —осу преноси се издужење ds у размери цртања u_L , па је $ds = u_L d\xi$, а на ординатну осу сила издужења

F_e , у размери цртања u_F , па је $F_e = u_F \eta$. Деформациони рад (потенцијална енергија деформације) овог елементарног паралелепипеда за овај случај оптерећења биће

$$\begin{aligned} d\mathbf{A}_{de} &= \int \int \int_{(V)} F_e \, ds = u_F u_L \int \int \int_{(V)} \eta \, d\xi = u_F u_L c \int_0^{\Delta dx/u_L} \xi \, d\xi = \\ &= \frac{1}{2} c u_F u_L \frac{(\Delta dx)^2}{u_L^2} = \frac{1}{2} c \frac{u_F}{u_L} (\Delta dx)^2 = \frac{1}{2} F_e \Delta dx = \\ &= \frac{1}{2} \sigma_x \, dy \, dz \cdot \epsilon_x \, dx = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x \, dx \, dy \, dz, \end{aligned}$$

јер је

$$c = \frac{\eta}{\xi} = \frac{F_e}{u_F} \frac{u_L}{\Delta dx} = \frac{u_L}{u_F} \frac{F_e}{\Delta dx} = \frac{u_L}{u_F} \frac{\sigma_x \, dy \, dz}{\epsilon_x \, dx}$$

Израз

$$\mathbf{W}_e = \mathbf{A}_{de}' = \frac{d\mathbf{A}_{de}}{dV} = \frac{1}{2} \frac{F_e \Delta dx}{dV} = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x \quad (3.28)$$

специфични деформациони рад односно потенцијална енергија деформације по јединици запремине, тзв. *истинита потенцијална енергија или еластични потенцијал*. Његова је димензија $[FL/L^3]$, а јединица $[Nm/m^3]$ или $[kNcm/cm^3]$, тј. има исту јединицу као и напон.

У основи површине $dy \, dz$ дејствује тангенцијални напон $-\tau_{xy}$, а на страници паралелно њој напон $\tau_{xy}^* = \tau_{xy} + (\partial \tau_{xy} / \partial x) \, dx \approx \tau_{xy}$. Силе $-\tau_{xy} \, dy \, dz$ и $\tau_{xy} \, dy \, dz$ образују спрег момента $\tau_{xy} \, dy \, dz \cdot dx$ који полако расте од нуле до коначне вредности, па се слично предњем добија деформациони рад за смицање и еластични потенцијал

$$d\mathbf{A}_{ds} = \int_{(V)} \mathfrak{M} \, d\varphi = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} \, dx \, dy \, dz; \quad \mathbf{W}_s = \mathbf{A}_{ds}' = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy}. \quad (3.29)$$

Ови изрази потврђују Клареугон-ову теорему: „Деформациони рад изотропне еластичне тела износи половину оне вредности када би сила (спрег) дејствовао (дејствовао) од почетка у њеном износу“. То показује да је дијаграм рада *троугао*, тојест да постоји пропорционалност између силе и деформације.

Код *тродимензионе стиња напрезања* површинске силе дејствују на спољашњој површи (омотачу) тела па врше рад, док је рад тих сила на површима унутрашњих елемената једнак нули, пошто се силе попарно поништавају. Овом раду треба додати и рад запремиских сила, те према Клареугон-овој теорему следи:

$$\begin{aligned} 2\mathbf{A}_d = \int \int_{(S)} (\mathbf{F}_n', \mathbf{s}) \, dS + \int \int \int_{(V)} (\mathbf{F}_V', \mathbf{s}) \, dV = \int \int_{(S)} (X_n' u + Y_n' v + Z_n' w) \, dS + \\ + \int \int \int_{(V)} (X_V' u + Y_V' v + Z_V' w) \, dV, \end{aligned} \quad (3.30)$$

Када се уместо површинских сила ставе Cauchy-јеви гранични услови (1.13) онда први интеграл постаје

$$\iint_{(S)} (X'_n u + Y'_n v + Z'_n w) dS = \iint_{(S)} (P \alpha + Q \beta + R \gamma) dS,$$

где су

$$P = \sigma_x u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w; \quad Q = \tau_{xy} u + \sigma_y v + \tau_{yz} w; \quad R = \tau_{xz} u + \tau_{yz} v + \sigma_z w.$$

Горњи површински интеграл се може према теорему Green-Осироирагској претворити у запремински (1.27)

$$\iint_{(S)} (\mathbf{F}'_n, \mathbf{s}) dS = \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Како су изводи

$$\partial P / \partial x = (\partial \sigma_x / \partial x) u + (\partial \tau_{xy} / \partial x) v + (\partial \tau_{xz} / \partial x) w +$$

$$+ \sigma_x (\partial u / \partial x) + \tau_{xy} (\partial v / \partial x) + \tau_{xz} (\partial w / \partial x);$$

$$\partial Q / \partial y = (\partial \tau_{xy} / \partial y) u + (\partial \sigma_y / \partial y) v + (\partial \tau_{yz} / \partial y) w +$$

$$+ \tau_{xy} (\partial u / \partial y) + \sigma_y (\partial v / \partial y) + \tau_{yz} (\partial w / \partial y);$$

$$\partial R / \partial z = (\partial \tau_{xz} / \partial z) u + (\partial \tau_{yz} / \partial z) v + (\partial \sigma_z / \partial z) w +$$

$$+ \tau_{xz} (\partial u / \partial z) + \tau_{yz} (\partial v / \partial z) + \sigma_z (\partial w / \partial z),$$

то је

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} &= \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) u + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) v + \\ &+ \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) w + \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ &+ \tau_{xz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

С обзиром на Navier-ове једначине (1.25) и Cauchy-јеве једначине (2.24) добија се:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = -(X'_V u + Y'_V v + Z'_V w) + \sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z +$$

$$+ \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz} = -(\vec{F}'_V, \vec{s}) + 2 \mathbf{W}.$$

Када се ова релација унесе у једначину (3.30) онда је деформациони рад

$$\mathbf{A}_d = \frac{1}{2} \iint_{(S)} (\mathbf{F}'_n, \mathbf{s}) dS + \frac{1}{2} \iiint_{(V)} (\mathbf{F}'_V, \mathbf{s}) dV = \iiint_{(V)} \mathbf{W} dx dy dz, \quad (3.31)$$

где је

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}'_d = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}). \quad (3.32)$$

еластични потенцијал или специфични деформациони рад изотропно-еластичног тела. Он је, дакле, једнак збиру еластичних потенцијала сваког напона понаособ.

С обзиром на Нооке-ов закон (3.15) може се еластични потенцијал изразити само у функцији од напона

$$\begin{aligned} \mathbf{W} = & \frac{1}{2E} [(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - 2\mu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)] + \\ & + \frac{1}{2G} [\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2], \end{aligned} \quad (3.33)$$

или, с обзиром на (3.14), само у функцији од деформација

$$\begin{aligned} \mathbf{W} = \mathbf{G} [(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \mu k \varepsilon_V^2 + \frac{1}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)]; \\ k = \frac{1}{1 - 2\mu}; \quad \mathbb{G}_1 = \varepsilon_V. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Када се уведу Lamé-ове константе, онда, с обзиром на (3.5), биће

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} [\lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + 2\nu(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \nu(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)]. \quad (3.35)$$

Из овога се види да је еластични потенцијал хомогена позитивна квадратна регуларна форма компонентних деформација и може бити једнака нули само онда када су компонентне деформације једнаке нули. Из тога следи да су Lamé-ове константе позитивне величине.

Када се потенцијал \mathbf{W} из (3.33) диференцира по σ_x и τ_{xy} , а израз (3.34) по ε_x и γ_{xy} добијају се релације

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = \varepsilon_x; \quad \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \varepsilon_x} = 2\mathbf{G} [\varepsilon_x + 2\mu k \varepsilon] = \sigma_x; \\ \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \tau_{xy}} = \gamma_{xy}; \quad \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \gamma_{xy}} = \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Аналогно се добијају изводи потенцијала по осталим* напонима и деформацијама. Ове релације представљају Castigliano-ве теореме: *Када се еластични потенцијал изрази као квадратна форма само од напона или само од деформација, тада је парцијални извод потенцијала по напону (по деформацији) једнак одговарајућој компонентној деформацији (напону).*

Потенцијална енергија деформације (деформациони рад) троши се једним делом на промену запремине у другим на промену облика (форме), па ће се и еластични потенцијал делити на два дела. Нека је $p = \sigma_{sr} = (\sigma_1 +$

* Ову теорему је први извео италијански војни инжењер L. F. Menabrea помоћу принципа најмањег рада (Comptes rendus, t. 46, 1858) али је доказ дао Castigliano (1747—1884) у свом дипломском раду 1873 (Att reale accad. sci. Torino, 1875-).

$+\sigma_2+\sigma_3)/3 = \mathcal{N}_1/3$ средњи напон, онда је, с обзиром на (3.17) *еластични поштенцијал који се ушроши на промену зајремине*:

$$\mathbf{W}^{(v)} = \frac{1}{2} p \varepsilon = \frac{1-2\mu}{6E} \mathcal{N}_1^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{K} = \frac{3(1-2\mu)}{2E} p^2 = \frac{3(1-2\mu)}{2E} \sigma_{okt}^2, \quad (3.37)$$

где је σ_{okt} октаедарски нормални напон (1.76).

Остатак напона σ_1-p , σ_2-p , σ_3-p утиче на промену облика. Када се у (3.33) уместо главних напона ставе те вредности добија се

$$\mathbf{W}^{(ob)} = \frac{1}{2E} \{(\sigma_1-p)^2 + (\sigma_2-p)^2 + (\sigma_3-p)^2 - 2\mu [(\sigma_1-p)(\sigma_2-p) + (\sigma_1-p)(\sigma_3-p) + (\sigma_2-p)(\sigma_3-p)]\}$$

односно после сређивања и с обзиром на (1.54) и (1.63):

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{(ob)} &= \frac{1+\mu}{3E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] = \\ &= \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2] = \frac{2(1+\mu)}{3E} (\tau_I^2 + \tau_{II}^2 + \tau_{III}^2) = \\ &= \frac{3(1+\mu)}{2E} \tau_{okt}^2 = \frac{3}{4} \frac{\tau_{okt}^2}{\mathbf{G}} = \left| -\frac{1}{2\mathbf{G}} \mathcal{D}_2 \right|, \end{aligned} \quad (3.38)$$

где је τ_{okt} октаедарски тангенцијални напон, а \mathcal{D}_2 други скалар девијатора напона (1.68). Ово је израз *Ненску-јеве теореме*: *Еластични поштенцијал ушрошен на промену облика деформабилног тела сразмерна је квадрату октаедарског тангенцијалног напона, односно другој инваријанци девијатора напона**.

Из Отпорности материјала** познато је да се помоћу разних хипотеза о слому материјала тежи пространо стање напона да замени неким *идеалним (фиктивним) аксијалним најрезањем*. Због тога се уведе појмови: *инштензивношћ тангенцијалног напона (генералисани тангенцијални напон)* и *инштензивношћ клизања (генералисано клизање)* који су једнаки октаедарском тангенцијалном напону односно октаедарском клизању:

$$\begin{aligned} \tau_i &= \tau_{okt} = \frac{1}{3} [(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2]^{1/2}; \\ \gamma_i &= \frac{\tau_i}{\mathbf{G}} = \frac{2}{3} [(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_1-\varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Како се проблем своди на *фиктивно (идеално) аксијално најрезање*, то поштенцијал утрошен на промену облика мора бити једнак

$$\mathbf{W}^{(ob)} = \frac{3}{4} \frac{\tau_i^2}{\mathbf{G}} = \frac{3}{4} \tau_i \gamma_i = \frac{1}{2} \sigma_i \varepsilon_i, \quad (3.40)$$

* Н. Hencky, Zs. für angew. Mathematik und Mechanik (ZAMM), Н. 4, (1924).

** Čl. 13.1.

па су интнзивности нормалног напона (генералисани, идеални, фиктивни напон) и интнзивности дилајације (генералисане, идеалне, фиктивне дилајације) дати следећим релацијама:

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_i = \frac{\sqrt{2}}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]^{1/2}; \\ \varepsilon_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_i = \frac{\sqrt{2}}{3} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2]^{1/2}.\end{aligned}\quad (3.41)$$

Ове релације показују да је еластични потенцијал идеалног (фиктивног, генералисаног) аксијалног напрезања једнак еластичном потенцијалу одговарајућег простаног стања напрезања.

С обзиром на Castigaliano-ве обрасце (3.36) могу се Navier-ове једначице равнотеже (1.25) изразити помоћу еластичног потенцијалног на овај начин

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \varepsilon_x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \gamma_{xy}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \gamma_{xz}} + X_V' &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \gamma_{xy}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \varepsilon_y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \gamma_{yz}} + Y_V' &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \gamma_{xz}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \gamma_{yz}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \varepsilon_z} + Z_V' &= 0.\end{aligned}\quad (3.42)$$

3.9. Генералисани координатни систем. — Уопштени Нооке-ов закон (3.14) и (3.15), Lamé-ове једначине (3.19), Beltrami—Michell-ове једначине (3.26) и деформациони рад (3.33) и (3.34) могу се извести у генералисаном координатном систему. Ово се може постићи на два начина. Први је начин користити те једначине за Декартов правоугли систем и извршити смену компонентних напона односно деформација, као по обрасцу (1.83), а други је помоћу тензорског рачуна. У овом другом случају тензорске једначине остају исте само се мора увести у обзир и метрички тензор (g_{ik} односно g^{ik}). При томе је уобичајено комјонентне тензора напона узимати у контраријантном облику, а тензора деформација у кваријантном облику. За техничку праксу у добијене обрасце морају се увести физичке комјонентне тензора, односно вектора. У пракси се као и у чл. 1. и 2. обично користи правоугли генералисани триједар па ћемо физичке координате (1.79) допунити и биће:

$$\begin{aligned}g_{MM} &= A_M^2; g_{MN} = 0; u_{(M)} = u_M / A_M = A_M u^M; \\ u_{(MN)} A_M A_N u^{MN} &= u_{MN} / A_M A_N.\end{aligned}\quad (3.43)$$

а) Уопштен Нооке-ов закон. — Тензорске једначине (3.6) и (3.10) остају исте само умето јединичне матрице треба узети метричку матрицу. Због тога ће бити

$$\tau^{ik} = 2 \mathbf{G} [\mu_k g^{ik} \varepsilon_V + g^{im} g^{kn} \varepsilon_{mn}]; \quad \varepsilon_{ik} = \frac{1}{2 \mathbf{G}} \left[g_{im} g_{kn} \tau^{mn} - \frac{\mu}{1 + \mu} g_{ik} \mathcal{V}_1 \right], \quad (3.44)$$

где су први скалари тензора

$$\varepsilon_V = \mathfrak{E}_1 = g^{mn} \varepsilon_{mn} = \varepsilon_i^i; \quad \mathcal{N}_1 = g_{mn} \tau_m^n, \quad (3.45)$$

С обзиром на (3.43) Нооке-ове једначине у физичким координатама су

$$\tau_{(MM)} = \frac{E}{1+\mu} [\mu k \varepsilon_V + \varepsilon_{(MM)}]; \quad \tau_{(MN)} = \mathbf{G} \varepsilon_{(MN)} = \mathbf{G} \gamma_{MN}; \quad (3.46)$$

$$\varepsilon_{(MM)} = \frac{1+\mu}{E} \left[\tau_{(MM)} - \frac{\mu}{1+\mu} \mathcal{N}_1 \right]; \quad \gamma_{MN} = \frac{1}{\mathbf{G}} \tau_{(MN)}; \quad (3.47)$$

b) Lamé-ове једначине. — Једначине (3.19) сада постају

$$\mathbf{G} \left[g^{rr} u_{i|rr} + k \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial q^i} \right] + F_i' = 0; \quad \varepsilon_V = \text{div } \mathbf{s}; \quad F' = F_V', \quad (3.48)$$

где је

$$u_{i|rr} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial q^r \partial q^r} - 2 \frac{\partial u_m}{\partial q^r} \Gamma_{ri}^m - \frac{\partial u_i}{\partial q^m} \Gamma_{rr}^m - u_m \left[\frac{\partial}{\partial q^r} (\Gamma_{ir}^m) - \Gamma_{pi}^m \Gamma_{rr}^m - \Gamma_{pr}^m \Gamma_{ri}^p \right]. \quad (3.49)$$

c) Beltrami-јеве једначине. — Једначине (3.27) и одсуству запреминских сила постају

$$g^{rr} \tau_{ik|rr} + \frac{g^{in} g^{km}}{1+\mu} \mathcal{N}_1|_{mn} = 0, \quad (3.50)$$

где су

$$\mathcal{N}_1|_{mn} = \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial q^m \partial q^n} - \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial q^m} \Gamma_{ik}^m; \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \tau_{ik|rr} = & \frac{\partial^2 u_i}{\partial q^r \partial q^r} - u_{pk} \left[\frac{\partial}{\partial q^r} (\Gamma_{ir}^p) - \Gamma_{mr}^p \Gamma_{ir}^m - \Gamma_{im}^p \Gamma_{rr}^m \right] - \\ & - u_{ip} \left[\frac{\partial}{\partial q^r} (\Gamma_{kr}^p) - \Gamma_{mr}^p \Gamma_{ir}^m - \Gamma_{km}^p \Gamma_{rr}^m \right] - 2 \frac{\partial u_{mk}}{\partial q^r} \Gamma_{ir}^m - \\ & - 2 \frac{\partial u_{im}}{\partial q^r} \Gamma_{kr}^m - \frac{\partial u_{ik}}{\partial q^m} \Gamma_{rr}^m + 2 u_{nm} \Gamma_{ir}^m \Gamma_{kr}^m. \end{aligned} \quad (3.52)$$

d) Деформациони рад. — Обрасци (3.28), (3.33) и (3.34) сада постају:

$$\mathbf{W}(\tau, \varepsilon) = \tau^{ik} \varepsilon_{ik}/2; \quad \mathbf{W}(\tau) = \frac{1}{4 \mathbf{G}} \left[g_{im} g_{kn} - \frac{\mu}{1+\mu} g_{ik} g_{mn} \right] \tau^{ik} \tau^{mn}; \quad (3.53)$$

$$\mathbf{W}(\varepsilon) = \mathbf{G} [\mu k g^{ik} g^{mn} + g^{im} g^{kn}] \varepsilon_{ik} \varepsilon_{nm}; \quad k = 1/(1-2\mu). \quad (3.54)$$

3.9.1. Поларно-цилиндрички координатни систем. — С обзиром на (1.81) овде ће бити:

a) *Нооке-ов уопшћени закон.*:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1+\mu} [\mu k \varepsilon_V + \varepsilon_r]; & \tau_{rc} &= \mathbf{G} \gamma_{rc}; & \varepsilon_r &= \frac{1}{E} [(1+\mu) \sigma_r - \mu \mathcal{N}_1]; \\ \sigma_c &= \frac{E}{1+\mu} [\mu k \varepsilon_V + \varepsilon_c]; & \tau_{rz} &= \mathbf{G} \gamma_{rz}; & \varepsilon_c &= \frac{1}{E} [(1+\mu) \sigma_c - \mu \mathcal{N}_1]; \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\mu} [\mu k \varepsilon_V + \varepsilon_z]; & \tau_{cz} &= \mathbf{G} \gamma_{cz}; & \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [(1+\mu) \sigma_z - \mu \mathcal{N}_1]; \\ \mathcal{N}_1 &= \sigma_r + \sigma_c + \sigma_z\end{aligned}\quad (3.55)$$

$$\varepsilon_V = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Ламе-ове једначине:

$$\begin{aligned}\mathbf{G} \left[\Delta u + k \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial r} - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] + F_r' &= 0; \\ \mathbf{G} \left[\Delta r + \frac{k}{r} \frac{\partial \varepsilon_V'}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r^2} \right] + F_c' &= 0; \\ \mathbf{G} \left[\Delta w + k \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial z} \right] + Z_V' &= 0; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.\end{aligned}\quad (3.56)$$

c) *Валтрами-јеве једначине:*

$$\begin{aligned}\Delta \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_c) - \frac{4}{r^2} \frac{\partial \tau_{rc}}{\partial \varphi} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial r^2} &= 0; \quad \Delta \sigma_z + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial z^2} = 0; \\ \Delta \sigma_c + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_c) + \frac{4}{r^2} \frac{\partial \tau_{rc}}{\partial \varphi} + \frac{1}{1+\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial \varphi^2} \right) &= 0; \\ \Delta \tau_{rc} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sigma_r - \sigma_c) - \frac{4}{r^2} \tau_{rc} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial \varphi} \right) &= 0; \\ \Delta \tau_{rz} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \varphi} - \frac{\tau_{rz}}{r^2} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial r \partial z} &= 0; \\ \Delta \tau_{cz} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tau_{cz}}{\partial \varphi} - \frac{\tau_{cz}}{r^2} + \frac{1}{1+\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial \varphi \partial z} \right) &= 0; \quad \mathcal{N}_1 = \sigma_r + \sigma_c + \sigma_z.\end{aligned}\quad (3.57)$$

d) Специфични деформациони рад (еластични поштенцијал):

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2E} [(\sigma_r^2 + \sigma_c^2 + \sigma_z^2) - 2\mu(\sigma_r \sigma_c + \sigma_r \sigma_z + \sigma_c \sigma_z)] + \frac{1}{2\mathbf{G}} [\tau_{rc}^2 + \tau_{rz}^2 + \tau_{cz}^2]; \quad (3.58)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{G} \left[(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_c^2 + \varepsilon_z^2) + \mu k \varepsilon_V^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{rc}^2 + \gamma_{rz}^2 + \gamma_{cz}^2) \right]; \quad k = 1/(1 - 2\mu). \quad (3.59)$$

3.9.2. Сферни координатни систем. — С обзиром на (1.85) овде ће бити:

a) *Нооке-ов уојшшени закон:*

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_p \\ \sigma_c \\ \sigma_v \end{Bmatrix} &= \frac{E}{1+\mu} \left[\mu k \varepsilon_V \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_p \\ \varepsilon_c \\ \varepsilon_v \end{Bmatrix} \right]; \quad \begin{Bmatrix} \tau_{pc} \\ \tau_{pv} \\ \tau_{cv} \end{Bmatrix} = \mathbf{G} \begin{Bmatrix} \gamma_{pc} \\ \gamma_{pv} \\ \gamma_{cv} \end{Bmatrix}; \\ \begin{Bmatrix} \varepsilon_p \\ \varepsilon_c \\ \varepsilon_v \end{Bmatrix} &= \frac{1+\mu}{E} \begin{Bmatrix} \sigma_p \\ \sigma_c \\ \sigma_v \end{Bmatrix} - \frac{\mu \mathcal{N}_1}{E} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}; \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\mathcal{N}_1 = \sigma_p + \sigma_c + \sigma_v; \quad \varepsilon_V = \text{dis } \mathbf{s} = 2 \frac{u}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \cos \psi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \psi} - \frac{\text{tg } \psi}{\rho} w.$$

b) *Латé-ове једначине:*

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \left[\Delta u + k \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho^2} \left(u + \frac{1}{\cos \psi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - w \text{tg } \psi + \frac{\partial w}{\partial \psi} \right) \right] + F'_\rho &= 0; \\ \mathbf{G} \left[\Delta v + \frac{k}{\rho \cos \psi} \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial \varphi} + \frac{2}{\rho^2 \cos \psi} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \text{tg } \psi \right) - \frac{v}{(\rho \cos \psi)^2} \right] + F'_c &= 0; \\ \mathbf{G} \left[\Delta w + \frac{k}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial \psi} + \frac{2}{\rho^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{\text{tg } \psi}{\cos \psi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) - \frac{w}{(\rho \cos \psi)^2} \right] + F'_v &= 0; \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{(\rho \cos \psi)^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} - \frac{\text{tg } \psi}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \psi}.$$

c) *Beltrami-јеве једначине:*

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_p - \frac{2}{\rho^2} (\sigma_p - \sigma_v) - \frac{2}{(\rho \cos \psi)^2} (\sigma_p - \sigma_c) + \frac{2 \text{tg } \psi}{\rho^2} \tau_{pv} - \frac{4}{\rho^2} \frac{\partial \tau_{pv}}{\partial \psi} - \\ - \frac{4}{\rho^2 \cos^3 \psi} \frac{\partial \tau_{pc}}{\partial \varphi} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial \rho^2} &= 0; \\ \Delta \sigma_c - \frac{2}{(\rho \cos \psi)^2} \sigma_c + \frac{1}{1+\mu} \frac{1}{(\rho \cos \psi)^2} \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial \varphi^2} &= 0; \\ \Delta \sigma_v + \frac{2}{\rho^2} (\sigma_p - \sigma_v) + \frac{2}{(\rho \cos \psi)^2} (\sigma_c - \sigma_v) - \frac{2 \text{tg } \psi}{\rho^2} \tau_{pv} + \frac{4}{\rho^2} \frac{\partial \tau_{pv}}{\partial \psi} + \\ + \frac{4}{\rho^2 \cos^3 \psi} \frac{\partial \tau_{pc}}{\partial \varphi} + \frac{1}{1+\mu} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial \psi^2} \right) &= 0; \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \Delta \tau_{\rho c} - \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{4}{\cos^2 \psi} \right) \tau_{\rho c} - \frac{\operatorname{tg} \psi}{\rho^2} \tau_{c\nu} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial \tau_{c\nu}}{\partial \psi} + \frac{2}{\rho^2 \cos \psi} \frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \varphi} + \\ + \frac{1}{1+\mu} \frac{1}{\rho \cos \psi} \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial \rho \partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial \varphi} \Big) = 0; \\ \Delta \tau_{\rho\nu} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \psi} (\sigma_{\rho} - \sigma_{\nu}) - \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_{\nu}}{\rho^2} \operatorname{tg} \psi - \frac{4}{\rho^2} \tau_{\rho\nu} - \frac{2 \tau_{\rho\nu}}{(\rho \cos \psi)^2} + \\ + \frac{1}{1+\mu} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial \rho \partial \psi} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial \psi} \right) = 0; \\ \Delta \tau_{c\nu} + \frac{2 \operatorname{tg} \psi}{\rho^2 \cos \psi} \frac{\partial \sigma_{\nu}}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho^2} (\tau_{c\nu} - \tau_{\rho c} \operatorname{tg} \psi) + \frac{4}{(\rho \cos \psi)^2} \tau_{c\nu} - \\ - \frac{2}{\rho^2} \left(\frac{\partial \tau_{\rho c}}{\partial \psi} + \frac{2}{\cos \psi} \frac{\partial \tau_{\rho\nu}}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{1+\mu} \frac{1}{\rho^2 \cos \psi} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial \varphi \partial \psi} - \operatorname{tg} \psi \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

d) Специфични деформациони рад (еластични пошеницијал):

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2E} [(\sigma_{\rho}^2 + \sigma_c^2 + \sigma_{\nu}^2) - 2\mu(\sigma_{\rho}\sigma_c + \sigma_{\rho}\sigma_{\nu} + \sigma_c\sigma_{\nu})] + \frac{1}{2G} [\tau_{\rho c}^2 + \tau_{\rho\nu}^2 + \tau_{c\nu}^2]; \quad (3.63)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{G} \left[(\varepsilon_{\rho}^2 + \varepsilon_c^2 + \varepsilon_{\nu}^2) + \mu k \varepsilon_{\nu}^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{\rho c}^2 + \gamma_{\rho\nu}^2 + \gamma_{c\nu}^2) \right]. \quad (3.64)$$

ПРИМЕРИ

3.1. Танка челична плоча је затегнута у два управна правца тако да су те дилатације $\varepsilon_x = 1,5/10^4$ и $\varepsilon_y = 0,9/10^4$. Колики су напони затезања ако је $\mu = 1/3$?

[Из (3.15) следи $\sigma_x = E(\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y)/(1 - \mu^2) = 405 \text{ N/cm}^2$; $\sigma_y = 315 \text{ [N/cm}^2\text{]}$].

2. Коликом је хидростатичком притиску изложена челична кугла ако јој је запреминска дилатација 10^{-5} при $\mu = 1/3$?

$$\{p = K \varepsilon_V; K = E\rho = 2.10^6/10^5 = 20 \text{ [kN/cm}^2\text{]}\}.$$

3. Главни напони напрегнутог тела су $\sigma_1 = -2$ $\sigma_2 = 12 \text{ [kN/mm}^2\text{]}$. Колики је трећи главни напон ако се запремина тела не мења?

{Пошто је $\varepsilon_V = 0$, тј. из (3.13) следи да је $\mathcal{N}_1 = 0$, те је $12 - 6 + \sigma_3 = 0$, тј. $\sigma_3 = -6 \text{ [kN/mm}^2\text{]} = -600 \text{ [kN/cm}^2\text{]}$ }.}

4. За колико се умањи запремина челичне кугле пречника 20 см ако је изложена хидростатичком притиску јачине 10 $\text{[kN/cm}^2\text{]}$?

$$[\varepsilon_V = -p/K = -p/E = -10/2.10^5; \Delta V = \varepsilon_V \cdot V = \varepsilon_V \cdot d^3 \pi/6 = -0,021 \text{ cm}^3 = -21 \text{ mm}^3]$$

5. Нормални напони стоје у односу $\sigma_x : \sigma_y : \sigma_z = 3 : 2 : 1$. У коме односу стоје дилатације ако је $\mu = 1/3$?

[Из (3.15) следи $\varepsilon_x : \varepsilon_y : \varepsilon_z = 3 : 1 : -1$].

6. Нормални напони износе $\sigma_x = 10$; $\sigma_y = 8$; $\sigma_z = 6 \text{ [kN/mm}^2\text{]}$. Колика је кубна дилатација челичног тела ако је $\mu = 1/3$?

[Из (3.13) следи $\varepsilon_V = 24 \cdot 10^2/3 \cdot 2 \cdot 10^6 = 4/10^4$; $k = 3$].

7. Код равнoг стања напрезања у Оху-равни запреминска сила је тежина ($Y_V' = -\gamma_m$), а напони су $\sigma_x = \partial^2 \Phi / \partial y^2$; $\sigma_y = (\partial^2 \Phi / \partial x^2)$; $\tau_{xy} = \gamma_m x - (\partial^2 \Phi / \partial x \partial y)$. Показати да је функција $\Phi(x, y)$ бихармонијска.

Пошто је $\mathcal{N}_i = \sigma_x + \sigma_y = \Delta \Phi$ то сабирањем првих двеју једначина (3.26) следи $\Delta(\sigma_x + \sigma_y) + m \Delta \mathcal{N}_i = 0$, тј. $\Delta \Delta \Phi = 0$. Четврта једначина $\Delta \tau_{xy} + m \cdot (\partial^2 \mathcal{N}_i / \partial x \partial y) = 0$; $m = 1/(1 + \mu)$ је задовољена].

8. Компонента померања равне деформације су $u = c(\partial \Phi / \partial x)$, $v = c(\partial \Phi / \partial y)$, где је $\Phi = \Phi(x, y)$. Одредити еластични потенцијал.

Пошто су $\epsilon_x = c(\partial^2 \Phi / \partial x^2)$; $\epsilon_y = c(\partial^2 \Phi / \partial y^2)$; $\gamma_{xy} = 2c(\partial^2 \Phi / \partial x \partial y)$ то из (3.34) следи

$$\mathbf{W} = \frac{E}{2(1-\mu)^2} (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\mu \epsilon_x \epsilon_y) + \frac{1}{2} \mathbf{G} \gamma_{xy}^2 = \frac{E c^2}{2(1-\mu)^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] + 2\mathbf{G} c^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

9. Главни напони износе 25; 15; 5 [N/mm²]. Колики су идеални нормални и тангенцијални напон?

{Из (3.39) следи $\sigma_i = 10 \sqrt{3}$ N/mm²; $\tau_i = 10 \sqrt{6}/3$ [N/mm²]}.

10. Ако су у предњем задатку $E = 2.10^7$ [kN/cm²] и $\mu = 1/3$ одредити идеалну дилатацију и идеално клизање.

Из (3.39) и (3.41) следи $\gamma_i = 10 \sqrt{6}/3 \mathbf{G}$; $\epsilon_i = 10 \sqrt{3} / \mathbf{G}$; $\mathbf{G} = 3 E/8$].

4. МЕТОДЕ ЗА РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА ТЕОРИЈЕ ЕЛАСТИЧНОСТИ

4.1. Класификација изведених једначина еластичности. — Претходне изведене једначине теорије еластичности односе се само на *мале деформације*. С обзиром на њихову улогу оне се могу *пруисаити*, према томе које особине изражавају. Приказаћемо их у Декартовом правоуглом систему, а сходно томе могу се приказати и у правоуглом генерализованом систему.

A) Статичке једначине. — У ову групу спадају:

- a) Navier-ове једначине равнотеже* (1.25),
- b) Cauchy-јеви гранични (контурни) услови* (1.9).

Navier-ове једначине морају бити задовољене у свакој тачки у унутрашњости напругнутог тела и показују повезаност промена компонентних напона и компоненти запреминских сила. Компонентни напони морају представљати непрекидне функције координата (x, y, z) које су у међусобној зависности. Решење проблема мора задовољити специјалне статичке услове на контури тела.

B) Геометријско-кинематичке једначине — У ову групу спадају:

- c) Cauchy-јеве једначине комбионентних деформација* (2.24),
- d) Saint-Venant-ови услови комбибилности деформација* (2.42),
- e) Кинематичке једначине — вектор обртања* (2.15),
- f) Једначине за одређивање комбионентних померања* (2.35), (2.37) и (2.39).

Шест Cauchy-јевих једначина морају бити задовољене у свакој тачки у унутрашњости тела и оне показују да су компонентне деформације повезане са функцијама компонентних померања. Као последица тога оне морају задовољити услове компатибилности деформација, да би физички биле могуће. Због очувања непрекидности тела у процесу деформисања морају деформације и померања бити непрекидне функције координата (x, y, z) које су у међусобним зависностима једне од других.

C) Физичке једначине. — У ову групу спадају:

- g) Уопштени Hooke-ов закон* (3.14), (3.15),
- h) Веза између првих скалара тензора напона и тензора деформације* (3.13).

Шест једначина (3.14), односно (3.15), важе за сваку тачку у унуташњости тела и одређују зависности између компонената ова два тензора.

D) *Генералисане једначине.* — У ову групу спадају:

i) *Lamé-ове једначине* (3.19)

j) *Други облик Cauchy-јевих граничних услова* (3.24), и

k) *Beltrami-Michell-ове једначине* (3.26).

Lamé-ове једначине представљају синтезу статичких, геометријских и физичких једначина изражених помоћу компонентних померања (u, v, w). Cauchy-јеви услови (1.9) изражени су такође помоћу компонентних деформација односно компонентних померања. Beltrami-Michell-ове једначине представљају услове компатибилности за компонентне напоне, и добијају се када се у услове компатибилности деформација (2.42) ставе Нооке-ове једначине (3.15).

4.2. Методе за решавање проблема теорије еластичности. — Групе наведених једначина (чл. 4.1) омогућавају да се приступи решавању проблема теорије еластичности, тј. одређивању напона и малих деформација изотропног еластичног тела под дејством спољашњих сила.

У 15 једначина (1.25), (2.24) и (3.14) јавља се 15 непознатих: 6 компонентних напона ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$), 6 компонентних деформација ($\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$) и 3 компонентна померања (u, v, w), па је у принципу *могуће решити проблеме* теорије еластичности. Свакако треба *изабрати* оне величине које се узимају за *основне неизнате* и које треба *прво одредити*, а затим помоћу њих и остале непознате које карактеришу напонско стање и стање деформација. Историјски развој теорије еластичности показује да се може поступити на три начина.

1° За основне непознате узимају се *померања* и добијају се три непознате функције $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ и $w = w(x, y, z)$. Због тога треба у физичке једначине (3.14) унети геометријске једначине (2.24), тј. треба напоне изразити помоћу компонентних померања, па те релације унети у једначине равнотеже (1.25) и добиће се три једначине

$$\Phi_1(u, v, w) = 0; \quad \Phi_2(u, v, w) = 0; \quad \Phi_3(u, v, w) = 0. \quad (4.1)$$

Ова се метода назива „*решење проблема по померањима*“.

2° За основне непознате узимају се *компонентни напони*, па се добија шест непознатих функција $\sigma_x = \sigma_x(x, y, z)$; $\sigma_y = \sigma_y(x, y, z)$; $\sigma_z = \sigma_z(x, y, z)$; $\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y, z)$; $\tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y, z)$ и $\tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y, z)$. Пошто се компонентни напони не могу одредити из једначина равнотеже (1.25), треба применити једначине деформација, тј. треба из услова компатибилности деформација помоћу једначина равнотеже (1.25) и Нооке-овог закона (1.15) елиминисати померања, па ће се добити једначине у облику:

$$\psi_1(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) = 0; \dots; \psi_6(\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{yz}) = 0 \quad (4.2)$$

Ова се метода назива „*решење проблема по напонима*“.

3° За основне непознате узимају се *делимично померања*, а делимично напони, па се та метода назива „*комбиновано решење*“.

С обзиром на избор основних непознатих постоје три математичке методе за решавање проблема.

а) *Директна метода*. — По овој методи треба непосредно интегралити једначине (4.1) или (4.2). Међутим, с обзиром на велике математичке тешкоће, овако директно постављени проблем теорије еластичности *тешко* је решити у *коначном облику*, сем извесних једноставнијих решења.

б) *Обратна метода*. — Овај је проблем обратан првом. Наиме, претпоставља се да су компонентна померања u, v, w дате функције координата x, y, z , па се помоћу Cauchy-јевих једначина (2.24) и Hooke-овог закона (3.14), одреде напони, односно помоћу једначина (3.26) силе, које морају задовољити граничне услове (1.9) односно (3.24). Ова метода је једноставнија, јер се уместо интегралења симултаних диференцијалних једначина поступак своди на *диференцирање* функција u, v, w и на проверивање оправданости учињених претпоставки о тим функцијама. Међутим, тешкоћа је у томе што треба „*погодити облике функција померања*“, те се стога ни овом методом није могло доћи до решења важнијих за техничку праксу.

в) *Полуобратна метода*. — Обе прве методе су јасно постављене и одговарају изабраном систему основних непознатих — померања или напона. Међутим, помоћу њих се није могло, због великих математичких тешкоћа, доћи до резултата значајнијих за техничку праксу. Због тога је 1855. године француски инжењер Bagné de Saint-Venant предложио „*полуобратну методу*“ („la méthode semi-inverse“). Метода се састоји у овоме: с обзиром на постављене услове проблема, а на основу ранијих сличних решења, експерименталних података или приближних решења, *појоде се* извесни компонентни напони (обично они који су једнаки нули), компонентне деформације или компонентна померања, па се моћу Beltrami-Michell-ових једначина (3.26) и граничних услова (1.9) проверава да ли су оне задовољене учињеним претпоставкама, те се даље одређују силе, напони, деформације и померања. Ако, на пример, силе задовољавају граничне услове *проблем је решен*; у противном може се закључити да учињене претпоставке *одговарају неком другом проблему*, па треба учинити нове претпоставке и поступак понављати док се не дође до решења.

Иако је полуобратна метода примитивна и са *математичкој гледишта неоправдана*, она је оригинална и са *техничкој гледишта врло корисна*, јер се помоћу ње дошло са једне стране до важнијих техничких решења, а са друге она је омогућавала квалитетније сагледање услова постављеног проблема.

4.3. Торзија вратила кружног попречног пресека. — У отпорности материјала* третира се проблем увијања вратила кружног пресека на основу хипотезе С. А. Coulomb-а** да попречни пресеци остају при деформацији равни, тј. *да нема њихове дејланације*, и да је линеаран распоред тангенцијалних напона по попречном пресеку. Испитајмо сада оправданост те хипотезе и решења са гледишта теорије еластичности.

Конзолно кружно вратило AB , распона $\overline{AB}=l$, кружног попречног пресека, полупречника R , уклештено је левом основом (A), а на слободном крају B (десној основи) изложено је моменту увијања M . Усвојимо у тежишту леве основе (A) триједар Ox, Oy, Oz такав да се Oz — оса поклапа са геометријском осом вратила (слика 4.1. а). Запреминске силе не дејствују,

* Отпорност материјала, чл. 5.

** Мém. d' acad. sci., Paris (1784).

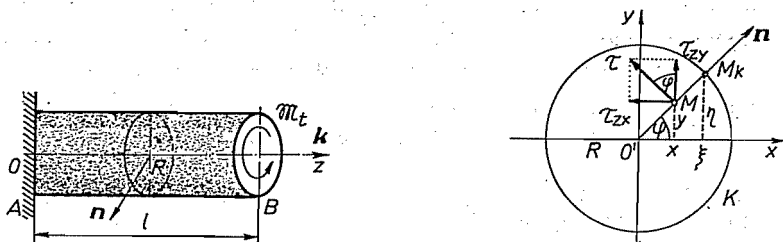
па је $\mathbf{F}'_n = 0$. На омотачу вратила чија је нормала $\mathbf{n} (\cos \varphi; \sin \varphi; 0)$ не дејствују спољашње силе ($\mathbf{F}'_n = 0$), па из граничних услова (1.9) следи:

$$\sigma_x \cos \varphi + \tau_{xy} \sin \varphi = 0; \quad \tau_{xy} \cos \varphi + \sigma_y \sin \varphi = 0; \quad \tau_{xz} \cos \varphi + \tau_{yz} \sin \varphi = 0.$$

Множењем прве једначине са $\cos \varphi$, а друге са $\sin \varphi$ и одузимањем следи да је $\sigma_x = \sigma_y = 0; \tau_{xy} = 0$. Из треће је $\operatorname{tg} \varphi = -\tau_{zx} / \tau_{zy}$. Ако су тачке M и M_k на истом полупречнику OMM_k онда је $\operatorname{tg} \varphi = y/x = \eta/\xi$, где су ξ, η координате тачке M_k на контури, па мора бити

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -cy; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = cx,$$

где је c коефицијент пропорционалности (слика 4.1. b).



Слика 4.1. — Торзија кружног вратила

Пошто је $\mathcal{A}'_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_z$, а из треће једначине (1.25) је $\partial \sigma_z / \partial z = 0$ то је $\mathcal{A}'_1 = \sigma_z = 0$, па је и $\varepsilon_y = 0$. Стога из Нооке-овог закона следи да су компонентни напони и компонентне деформације

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0; \quad \tau_{xy} = 0; \quad \tau_{zx} = -cy; \quad \tau_{zy} = cx; \quad (4.3)$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0; \quad \gamma_{xy} = 0; \quad \gamma_{zx} = \tau_{zx} / \mathbf{G} = -cy / \mathbf{G}; \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz} / \mathbf{G} = cx / \mathbf{G}. \quad (4.4)$$

Нормала слободне основе је Oz -оса, те је $\mathbf{n}_B = \mathbf{k} (0; 0; 1)$, па из Сау-чу-јевих граничних услова следи да су

$$B) \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = X'_n; \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} = Y'_n; \quad \sigma_z = Z'_n = 0.$$

Редукцијом свих сила на тежиште O' основе (B) слободног краја, добија се да је главни вектор

$$\begin{aligned} \sum X_i &= \iint_{(A)} X'_n dA = -c \iint_{(A)} y dA = 0; \quad \sum Y_i = \iint_{(A)} Y'_n dA = c \iint_{(A)} x dA = 0; \\ \sum Z_i &= \iint_{(A)} Z'_n dA = 0, \end{aligned}$$

пошто су осе $O'x$ и $O'y$ тежишне осе попречног пресека, а главни момент је

$$\vec{\mathcal{M}}_{O'} = \vec{\mathcal{M}}_t = \mathcal{M}_t \vec{k}; \quad \mathcal{M}_t = \mathcal{M}_z = \iint_{(A)} (xY'_n - yX'_n) dA = c \iint_{(A)} (x^2 + y^2) dA = cI_O, \quad (4.5)$$

где је I_O поларни момент инерције кружног пресека. Овим је одређен и коефицијент $c = \mathcal{M}_t / I_O$, па су компонентни и тотални напон:

$$\tau_{xy} = 0; \quad \tau_{zx} = -\mathcal{M}_t y / I_O; \quad \tau_{zy} = \mathcal{M}_t x / I_O; \quad \tau_t = [(\tau_{zx})^2 + (\tau_{zy})^2]^{1/2} = cr = \mathcal{M}_t r / I_O, \quad (4.6)$$

и управан је на потегу $\overline{OM} = r$.

С обзиром на (4.4) из (2.35), (2.37) и (2.39) добијају се компонентна померања

$$\begin{aligned} u &= -m y z + C_1 y + C_2 z + C_3; \quad v = m x z - C_1 x + C_4 z + C_5; \\ w &= -C_2 x - C_4 y + C_6; \quad m = c/\mathbf{G}. \end{aligned}$$

Пошто је леви крај (А) укљешћен (слика 4.1. с) то су гранични услови

А) за $x=y=z=0$ су $u=v=w=0$; $p=q=0$; $\partial u/\partial z=0$ и $\partial y/\partial z=0$,

те су све константе C_i у предњој једначини једнаке нули, $C_i=0$, $i=1, \dots, 6$, па су компонентна померања

$$u = -c y z / \mathbf{G}; \quad v = c x z / \mathbf{G}; \quad w = 0; \quad c = \mathfrak{M}_t / I_0; \quad \mathfrak{I} = \mathbf{G} / I_0 \quad (4.7)$$

где је $\mathfrak{I} = \mathbf{G} I_0$ *торзијска крутост вратила* ("torsional rigidity"). Услов $w=0$ показује да нема *дејланације* попречног пресека вратила, што се поклапа са Coulomb-овом хипотезом.

Из једначина (2.15) следи да је угао обртања

$$\varphi_z = [(\partial v / \partial x) - (\partial u / \partial y)] / 2; \quad \theta' = \varphi / z = c / \mathbf{G} = \mathfrak{M}_t / \mathfrak{I}; \quad \mathfrak{I} = \mathbf{G} I_0, \quad (4.8)$$

где је θ' угао увијања по јединици дужине вратила.

Из изложеног се види да се резултати који се износе у отпорности материјала подударају са резултатима теорије еластичности.

4.4. Сферни суд изложен дејству нормалног притиска. — Шупљи сферни суд, полупречника R_s и R_u (слика 4.2. а, б) изложен је дејству равномерног *сиољашњеј* (p_s) и *унутришњеј* *притиска* (p_u). С обзиром на симетрију суда и симетрију оптерећења у односу на средиште (О) следи да су померања радијалну (u) и да зависе од растојања од средишта (О), па се овде може применити обратна метода. Пошто је $u=u(\rho)$ то је $\partial u / \partial \rho = u'$, па из (3.60) и (3.61), следи

$$\Delta u + k (\partial \varepsilon_v / \partial \rho) - (2u/\rho^2) = u'' + (2u'/\rho) + k \{d [(2u/\rho) + u'] / d \rho\} - 2u/\rho^2 = 0,$$

па се добија диференцијална једначина другог реда са решењем

$$u'' + (2u'/\rho) - (2u^2/\rho^2) = 0; \quad u = A \rho + B \rho^{-2}; \quad u' = A - 2B \rho^{-3}. \quad (4.9)$$

Пошто су дилатације $\varepsilon_\rho = u'$; $\varepsilon_z = \varepsilon_v = u/\rho$, то из Нооке-овог закона (3.60), следи да су нормални напони:

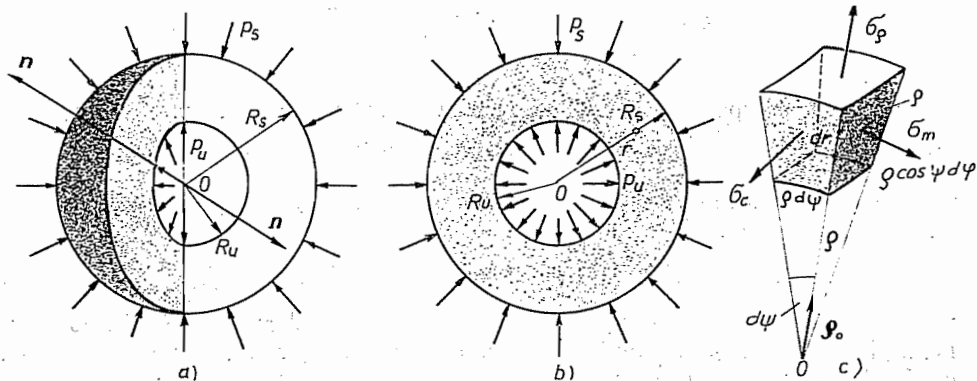
$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{E}{1+\mu} [\mu k \varepsilon_v + \varepsilon_\rho] = \frac{E}{1+\mu} \left[2\mu k \frac{u}{\rho} + (1+\mu k) u' \right]; \\ \sigma_c = \sigma_v &= \frac{E}{1+\mu} \left[\mu k u' + \frac{k}{\rho} u \right], \end{aligned} \quad (4.10)$$

јер је $1+2\mu k = 1+2\mu/(1-2\mu) = 1/(1-2\mu) = k$. Када се у ове изразе унесу релације (4.9) онда ће бити напони:

$$\sigma_\rho = \frac{E}{1+\mu} \left[(1+\mu) k A - \frac{2}{\rho^3} B \right]; \quad \sigma_c = \sigma_v = \frac{E}{1+\mu} \left[(1+\mu) k A + \frac{1}{\rho} B \right], \quad (4.11)$$

јер је $1+3\mu k = 1+3\mu/(1-2\mu) = (1+\mu)k$. Меридионални и циркуларни напон су једнаки и они су у равни управној на потегу (слика 4.2. с).

Константе A и B одређују се из граничних услова на сферним површинама. Пошто се нормале \mathbf{n} усмеравају уиоље, то је за $\rho = R_s$ напон



Слика 4.2. — Saint-Venant-ов први проблем решен полуобратном методом

$\sigma_\rho = -p_s$, а за $\rho = R_u$ је нормала \mathbf{n} супротна напону, па је $\sigma_\rho = -p_u$. Уносећи ове вредности у (3.11) добијају се константе

$$\begin{aligned} A &= (\psi^3 p_u - p_s) / (1 - \psi^3) kE; \quad \psi = R_u / R_s, \\ B &= (1 + \mu) \psi^3 (p_u - p_s) R_s^3 / 2E(1 - \psi^3); \end{aligned} \quad (4.12)$$

па су компонентни напони који су једновремено главни напони:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{1}{1 - \psi^3} \left\{ \psi^3 \left[1 - \left(\frac{R_s}{\rho} \right)^3 \right] p_u - \left[1 - \left(\frac{\psi R_s}{\rho} \right)^3 \right] p_s \right\}; \\ \sigma_c = \sigma_v &= \frac{1}{1 - \psi^3} \left\{ \psi^3 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R_s}{\rho} \right)^3 \right] p_u - \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\psi R_s}{\rho} \right)^3 \right] p_s \right\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Највећи напони добијају се за вредности $\rho = R_u$, односно R_s .

У пракси је чест случај да се *сиолашињи притисак занемарује* ($p_s = 0$). У томе случају из (4.13) добијају се напони:

$$\sigma_\rho = \frac{\psi^3}{1 - \psi^3} \left[1 - \left(\frac{R_s}{\rho} \right)^3 \right] p_u; \quad \sigma_c = \sigma_v = \frac{\psi^3}{1 - \psi^3} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R_s}{\rho} \right)^3 \right] p_u, \quad (4.14)$$

па су екстремне вредности компонентних напона

$$\text{за } \rho = R_s \text{ су: } \sigma_{\rho s} = 0; \quad \sigma_{v s} = 3 \psi^3 p_u / 2 (1 - \psi^3) = (\sigma_v)_{\min}; \quad (4.15. a)$$

$$\text{за } \rho = R_u \text{ су: } \sigma_{\rho u} = -p_u; \quad \sigma_{v u} = (1 + 2 \psi^3) p_u / 2 (1 - \psi^3) = (\sigma_v)_{\max}. \quad (4.15. b)$$

Екстремне вредности меридионалних напона стоје у односу

$$(\sigma_v)_{\max} / (\sigma_v)_{\min} = (1 + 2 \psi^3) / 3 \psi^3. \quad (4.15. c)$$

На пример, ако су $R_u = 100 \text{ mm}$, $R_s = 200 \text{ mm}$, $p_u = 2800 \text{ kN/cm}^2$; $p_s = 0$, онда су, према (4.15. b, c): $\sigma_{\rho s} = 0$; $\sigma_{\rho u} = -2800 \text{ kN/cm}^2$; $\sigma_{v s} = 600 \text{ kN/cm}^2$; $\sigma_{v u} = 2000 \text{ kN/cm}^2$.

Међутим, напони на половини дебљине сфере ($\rho = 15 \text{ cm}$) износили би према (4.14): $\sigma_\rho = 548 \text{ kN/cm}^2$; $\sigma_v = \sigma_c = 874 \text{ kN/cm}^2$.

4.5. Saint-Venant-ов проблем. — Први проблем који је Saint-Venant решио полуобратном методом је следећи: хомогени призматични штап, дужине l , специфичне тежине материјала γ_m , обешен је горњом основом за тачку O (слика 4.3) која је тежиште те основе, па су све Ox и Oy главне централне осе инерције те основе, а Oz оса поклапа се са геометријском осом штапа. Да би се применила полуобратна метода учиниће се исте претпоставке као и у отпорности материјала аксијално затегнутог штапа силама $\pm F$, тј. да су напони

$$\sigma_x = 0; \sigma_y = 0; \sigma_z \neq 0; \tau_{xy} = 0; \tau_{xz} = 0; \tau_{yz} = 0. \quad (4.16)$$

Када се ове релације унесу у Navier-ове једначине равнотеже (1.25), онда следи да су компонентне запреминске силе

$$X_{V'} = 0; Y_{V'} = 0; \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z_{V'} = 0; \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = Z_{V'} = \gamma_m. \quad (4.17)$$

Пошто је $\mathcal{N}_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_z$, то из Beltrami-Michell-ових једначина (3.26) следи

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 = \sigma_z; \quad \partial \mathcal{N}_1 / \partial z = -\gamma_m; \quad \partial^2 \mathcal{N}_1 / \partial z^2 = 0; \quad \Delta \sigma_z = 0; \quad \partial^2 \mathcal{N}_1 / \partial x \partial y = 0; \\ \partial^2 \mathcal{N}_1 / \partial x \partial z = 0; \quad \partial^2 \mathcal{N}_1 / \partial y \partial z = 0, \end{aligned}$$

па се из тога закључује да напон σ_z мора бити линеарна функција координата x, y, z , тојест облика

$$\sigma_z = Ax + By + Cz + D, \quad (4.18)$$

где су A, B, C и D константе. C обзиром на (4.17) може се одредити константа C

$$\partial \sigma_z / \partial z = C = -\gamma_m, \quad (4.19)$$

а остале три се одређују из граничних услова за основе и омотач штапа.

Јединични вектор нормале горње основе је $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{k}$, па из једначина (1.9) следи

$$\text{а) } \mathbf{n}_1(0; 0; -1); \quad X_n' = Y_n' = 0; \quad [-\sigma_z]_{z=0} = Z_n' = -(Ax + By + D). \quad (\text{а})$$

Редукциом свих сила које дејствују на горњу основу (Oxy) на њено тежиште (O) добијају се:

1° главни вектор:

$$\sum X_i = 0; \quad \sum Y_i = 0; \quad \sum Z_i = \iint_{(A)} -(Ax + By + D) dA = -DA_p = -Z_r = -F, \quad (\text{б})$$

јер су $\iint_{(A)} x dA = 0$ и $\iint_{(A)} y dA = 0$, пошто су осе Ox и Oy тежишне осе;

2° главни моменти:

$$\mathfrak{M}_x = \iint_{(A)} y Z_n' dA = \iint_{(A)} -y(Ax + By + D) dA = -BI_x; \quad \mathfrak{M}_y = AI_y; \quad \mathfrak{M}_z = 0, \quad (\text{с})$$

пошто су

$$\iint_{(A)} xy dA = 0; \quad \iint_{(A)} y^2 dA = I_x; \quad \iint_{(A)} x^2 dA = I_y, \quad (\text{д})$$

јер су осе Ox и Oy главне централне осе инерције основе.

б) За доњу основу биће:

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{k}(0; 0; 1); X'_n = 0; Y'_n = 0; [\sigma_z]_{z=l} = Z'_n = Ax + By + D - l\gamma_m. \quad (e)$$

Редукцијом сила које дејствују на доњу основу на њено тежиште (0') добијају се:

1° Главни вектор:

$$\sum X_i = 0; \sum Y_i = 0; \sum Z_i = \iint_{(A)} (Ax + By + D - l\gamma_m) dA = DA_p - G = Z_r = F, \quad (f)$$

где је A_p површина пресека штапа, а $G = \gamma_m l A_p$ тежина штапа;

2° Главни моменти:

$$\mathfrak{M}_x = \iint_{(A)} y Z_n dA = B I_x; \mathfrak{M}_y = \iint_{(A)} -x Z_n dA = -A I_y; \mathfrak{M}_z = 0, \quad (g)$$

пошто су осе Ox и Oy главне централне осе инерције, а F је затезна сила.

с) На бочној површини (омотачу) штапа биће

$$\mathbf{n}_3 (\cos \varphi; \sin \varphi; 0); X'_n = Y'_n = Z'_n = 0, \text{ па је } F'_n = 0, \quad (h)$$

те не дејствују спољашње силе.

Из предњих једначина види се да су константе:

$$A = \pm \mathfrak{M}_y / I_y; B = \pm \mathfrak{M}_x / I_x; D = -\gamma_m; D = (F + G) / A_p = (F / A_p) + \gamma_m l, \quad (4.20)$$

па се уношењем ових константи у (4.18) добија да је нормални напон у Oz - правцу:

$$\sigma_z = \frac{F}{A_p} + \gamma_m (l - z) \pm \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} y \pm \frac{\mathfrak{M}_y}{I_y} x.$$

Дакле, учињена претпоставка да је напонско стање одређено само аксијалним напонам σ_z одговора следећим врстама напрезања призматичног штапа:

1° аксијалном напрезању силама F које дејствују на основама,

2° затезању штапа сопственом тежином (γ_m),

3° чистом савијању спреговима $\pm \mathfrak{M}_x$ уравни Oyz штапа, и

4° чистом савијању спреговима $\pm \mathfrak{M}_y$ у равни Oxz штапа.

Пошто нема тангенцијалних напона, то су главни напони у свакој тачки паралелни координатним осама триједра $Oxyz$.

Ради одређивања компонентних померања најбоље свако од горњих напрезања посматрати засебно.

4.5.1. Аксијално напрезање штапа. — Пошто је штап затегнут силама $\pm F$, то су компонентне деформације:

$$\epsilon_z = \sigma_z / E = F / \mathfrak{A}; \quad \epsilon_x = \epsilon_y = -\mu \sigma_z = -\mu F / \mathfrak{A}; \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0; \quad (4.22)$$

где је $\mathfrak{A} = EA_p$ аксијална крутосћ ("axial rigidity") штапа. С обзиром на ове деформације из једначина (2.35), (2.37) и (2.39) добијају се померања

$$u = -\mu c x + C_1 y + C_2 z + C_3; \quad v = -\mu c y - C_1 x + C_4 z + C_5; \\ w = cz - C_2 x - C_4 y + C_6; \quad c = F / \mathfrak{A} = F / EA_p.$$

односно

$$u = -\mu c x; v = -\mu c y; w = cz; c = F/\mathfrak{A} = F/EA_p, \quad (4.23)$$

пошто су све константе $C_i = 0$, јер су на горњој основи за $x = y = z = 0$ померања $u = v = w = 0$ и обраћања $\partial u/\partial y = \partial u/\partial z = \partial v/\partial z = 0$.

Тачке на Oz -оси (одсечак dz) могу да се померају у Oz -правцу, а тачке праве L паралелне Oz -оси, на растојању r од ње, померају се хоризонтално (слика 4.4) јер је

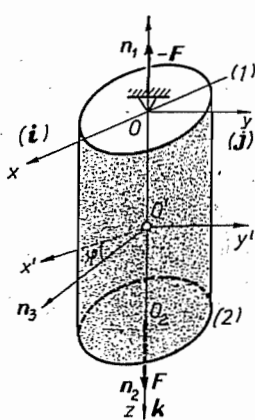
$$s_h = (u^2 + v^2)^{1/2} = -\mu c (x^2 + y^2)^{1/2} = -\mu cr; r^2 = x^2 + y^2. \quad (4.24)$$

Пошто s_h не зависи од z , то права L и после деформације остаје паралелна Oz -оси, само јој се приближава за $|-s_h|$ ако је $c > 0$ (случај зашезања) или удаљава за $|s_h|$ ако је $c < 0$ (случај иришиска).

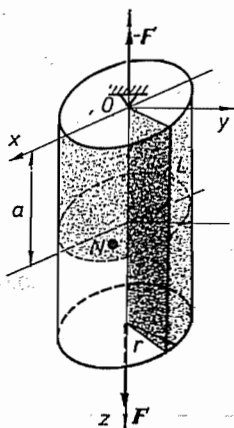
Све тачке $N(x; y; z = a)$ неког пресека на удаљењу $z = a$ од горње основе имају једнака аксијална померања, па се попречни пресеци померају *транслајарно* у правцу Oz -осе, те, дакле, нема *дејланације* *пресека*.

4.5.2. Затезање штапа сопственом тежином. — Због напона $\sigma_z = \gamma_m(l - z)$ компонентне деформације су

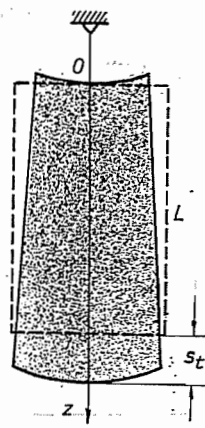
$$\varepsilon_z = c(l - z); \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\mu c(l - z); \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0; c = \gamma_m/E, \quad (4.25)$$



Слика 4.3. — Saint-Venant-ов први проблем решен полуобратном методом



Слика 4.4. — Аксијално напрезање



Слика 4.5. — Попречни пресек прелази у обртни параболоид

па су компонентна померања

$$u = -\mu c(l - z)x + C_1 y + C_2 z + C_3; v = -\mu c(l - z)y - C_1 x + C_4 z + C_5; w = c(lz - z^2/2) - \mu c(x^2 + y^2)/2 - C_2 x - C_4 y + C_6; c = \gamma_m/E,$$

односно

$$u = -\mu c(l - z)x; v = -\mu c(l - z)y; w = c(lz - z^2/2) - \mu c(x^2 + y^2)/2, \quad (4.26)$$

јер су, као и у претходном случају, све константе $C_i = 0$.

Тачке на Oz -оси, $N(0; 0; z)$ померају се у смеру те осе. Тачке N на правој L паралелној Oz -оси на растојању r од ње, где је $r^2 = (x^2 + y^2)$, имају и хоризонтално померање

$$s_n = (u^2 + v^2)^{1/2} = -\mu c(l-z)r; \quad r^2 = x^2 + y^2. \quad (4.27)$$

Пошто је затезање, то је $c > 0$, па се права L помера ка Oz -оси а уједно се и обрће. Према (2.15), углови обртања су

$$\varphi_x = [(\partial w / \partial y) - (\partial v / \partial z)] / 2 = -\mu c y; \quad \varphi_y = \mu c x; \quad \varphi_z = 0; \quad \varphi = \mu c r. \quad (4.28)$$

Нека тачка N_p са координатама $x_0, y_0, z_0 = a$ пре деформације, прећи ће у положај N са координатама $x = x_0 + u_a; y = y_0 + v_a; z = z_0 + w_a = a + w_a$, где су u_a, v_a и w_a вредности померања (4.26) у тачки $N_0(x_0; y_0; z_0 = a)$. Степеновањем и сабирањем првих двеју предњих једначина добија се

$$x^2 + y^2 = r^2 = [1 - \mu c(l-a)]^2 (x_0^2 + y_0^2); \quad r_0^2 = x_0^2 + y_0^2, \quad (4.29)$$

па круг, полупречника r_0 са средиштем на Oz -оси, прелази у круг полупречника r . Међутим, сам попречни пресек ($z = z_0 = a$) прелази у криву површ. Када се у једначини $z = a + w_a$ елиминише r_0 према претходној једначини, биће

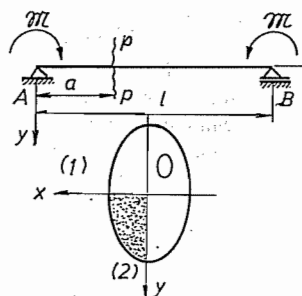
$$\begin{aligned} z &= a + w_a = a + c(2la - a^2)/2 - \mu cr_0^2/2 = \\ &= a + c(2la - a^2)/2 - \{\mu c/2 [1 - \mu c(l-a)]^2\} (x^2 + y^2). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Ово је једначина обртног параболоида са осом симетрије Oz -осом (слика 4.5). Тежиште O' слободног краја штапа помера се за

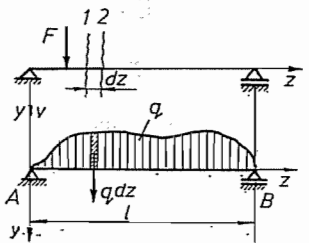
$$s_{i(z=l)} = cl^2/2 = Gl/2 \mathfrak{U} = \Delta l \quad (4.31)$$

једнаком издужењу штапа под утицајем сопствене тежине*.

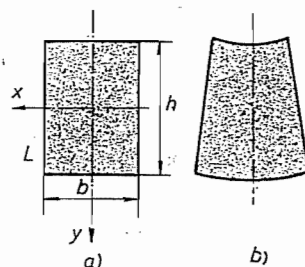
4.5.3. Чисто савијање греде. — Нека је проста греда AB , распона l , оптерећена над ослоњцима спреговима $\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_y$ који дејствују у вертикалној равни савијања Ouz (слика 4.6), онда је овакво напрезање *чисто савијање*. Према (4.21) нормални напон је $\sigma_z = \mathfrak{M}_x y / I_x = \mathfrak{M}_y x / I_x$, па су деформације:



Слика 4.6. — Чисто савијање просте греде (спреговима)



Слика 4.7. — Потврда Bernoulli-јеве хипотезе



Слика 4.8. — Чисто савијање греде правоугаоног пресека

$$\varepsilon_z = c y; \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\mu c y; \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0; \quad c = \mathfrak{M}_x / \mathfrak{B}, \quad (4.32)$$

* Отпорност материјала, чл. 1.3., обр. 22.

где је $\mathfrak{B} = EI_x$ *савојна крућост* ("flexural rigidity") греде. Стога су компонентна померања

$$u = -\mu cxy + C_1 y + C_2 z + C_3; \quad v = \mu c(x^2 - y^2)/2 - cz^2/2 - C_1 x + C_4 z + C_5; \\ w = cyz - C_2 x - C_4 y + C_6; \quad c = \mathfrak{M}_x/\mathfrak{B}; \quad \mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_y; \quad \mathfrak{B} = EI_x.$$

Лево лежиште (A) је непомично, па су за $x = y = z = 0$ и померања $u = v = w = 0$, то су константе $C_3 = C_5 = C_6 = 0$. Услов да нема обртања тог пресека око Oz -осе ($r = 0$) је $\partial v/\partial x = \partial u/\partial y = 0$, па је $C_1 = 0$, те је и $\partial u/\partial z = 0$, то јест $C_2 = 0$. Пошто десни ослонац (B) нема померања у Oy -правцу то је за $x = y = 0$ и $z = l$ померање $v = 0$, па је $C_4 = cl/2$. Стога су померања:

$$u = -\mu cxy; \quad v = c(lz - z^2)/2 + \mu c(x^2 - y^2)/2; \quad w = cy(2z - l)/2. \quad (4.33)$$

Тачке неутралног слоја пресека ($y = 0$) померају се у Oy -правцу за

$$v = c(lz - z^2 + \mu x^2)/2; \quad c = \mathfrak{M}_f/\mathfrak{B}, \quad (4.34)$$

па се пресек претвара у површ другог реда.

Геометријска оса штапа ($x = 0; y = 0; z$) претвара се у *еластичну линију* једначине

$$u = w = 0; \quad v = c(lz - z^2)/2 = \mathfrak{M}(lz - z^2)/2\mathfrak{B} \quad (4.35)$$

као што се добија и у отпорности материјала*.

За неки попречни пресек $p-p$ удаљен за $z = a$ од левог ослонца A , биће

$$z = a + w_a = a + c(2a - l)y/2, \quad (4.36)$$

а ово је једначина равни паралелиа Ox -оси. Ово показује да попречни пресек *остаје раван* и после деформације (Bernoulli-јева *хипотеза*). Пошто су за $z = a$ изводи

$$d y/d z = 2/[c(2a - l)] = \operatorname{tg} \psi; \quad d v/d z = -[c(2a - l)]/2 = \operatorname{tg} \varphi; \\ \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \varphi = -1, \quad (4.37)$$

то је попречни пресек ($z = a$) *ураван на еластичну линију* (слика 4.7).

Нагиб тангенте еластичне линије је

$$\varphi = -\varphi_x = -[(\partial w/\partial y) - (\partial v/\partial z)]/2 = -c(2z - l)/2 = \mathfrak{M}(l - 2z)/2\mathfrak{B}, \quad (4.38)$$

како се изводи и у отпорности материјала*.

Због обртања око Oz -осе

$$\varphi_z = [(\partial v/\partial x) - (\partial u/\partial y)]/2 = \mu c \quad (4.39)$$

померају се тачке попречног пресека услед чега он мења облик. На пример, за *правонаоми пресек* (слика 4.8.а) бочна страница $L(x = b/2; y; z = a)$ има после деформације једначине $z = a + w; x = u + (b/2) = b(1 - \mu cy)/2$, па је

$$x = b(1 - \mu cy)/2; \quad \varphi_z = -\mu bc/2, \quad (4.40)$$

те права L остаје и даље *права*, само се заокреће за угао φ_z .

* Таблице из отпорности материјала VI-4 а, стр. 48.

Доња и горња основица правоугаоника једначина пре деформације $z=a$; $y = \pm h/2$, прелазе после деформације у криве, једначина

$$z = a + w_a = a + [c(2a-l)y/2] = A + By; \quad (4.41)$$

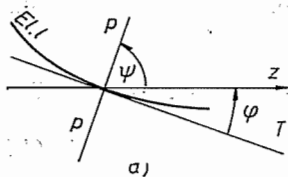
$$y = \pm h/2 + v_a = \pm h/2 + ca(1-a)/2 - \mu ch^2/8 + \mu cx^2/2 = \quad (4.42)$$

$$= \pm h/2 + C + Dx^2.$$

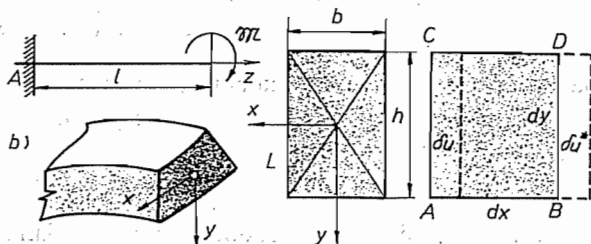
Прва једначина, (4.41), показује да основице остају равне криве, а друга, (4.42), да постају *параболе*. Стога је облик пресека као на слици 4.8. б.

Код конзоле напрегиуте на *чисто савијање* (слика 4.9. а) напон у првом квадранту је $\sigma_z = -\mathfrak{M}_x y/I_x$, па су деформације

$$\varepsilon_z = -cy; \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = \mu cy; \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0; \quad c = \mathfrak{M}_x/\mathfrak{B}. \quad (4.43)$$



Слика 4.9. — Чисто савијање правоугаоне конзоле



Слика 4.10. — Виртуална померања

Слично претходном случају, пошто је леви крај (A) уклештен биће $C_i = 0$, па су компонентна померања:

$$u = \mu cxy; \quad v = c[z^2 + \mu(y^2 - x^2)]/2; \quad w = -cyz. \quad (4.44)$$

Једначина еластичне линије је

$$u = w = 0; \quad v = cz^2/2 = \mathfrak{M}_f z^2/2 \mathfrak{B}; \quad \mathfrak{M}_f = \mathfrak{M}_x; \quad \mathfrak{B} = EI_x, \quad (4.45)$$

и слаже са овом изведеном у Отпорности материјала.

У пресеку на удаљењу $z=a$ од уклештења, бочна ивица има једначину пре деформације $x=b/2$; y ; $z=a$, а после деформације њена ће једначина бити

$$x = b(1 + \mu cy)/2; \quad y = (2x - b)/\mu cb; \quad z = a + w_a, \quad (4.46)$$

па се може уочити да права *L осцаје* и даље *права*, само се заокреће око *Oz*-осе за угао $-\mu cb/2$.

Основице пресека на удаљењу $z=a$ од уклештања ($x=0$; $y = \pm 1/2 h$; $z=a$) постају криве, једначина

$$y = \pm h/2 + v_a = [\pm h + ca^2 + 1/4 \mu ch^2 - \mu cx^2]/2 = \pm h/2 + C - Dx^2;$$

$$z = a + w_a = A - By. \quad (4.47)$$

Пошто се z мења линеарно, криве су *равне*, и *параболе* су. Попречни пресек после деформације приказан је на слици (4.9. б). Види се да се пресек у *области иритиска шири* ($y > 0$), а да се у *области затезања сужава* ($y < 0$).

4.6. Принцип виртуалних померања. — Овај принцип познат из механике примењује се и у теорији еластичности, јер се у тренутку завршетка деформација изједначају унутрашње и спољашње силе, па се даље тело понаша као „круто“. Ако сада тело добије мала виртуална померања δu , δv , δw које *везе доушљају*, мора збир радова свих сила, и спољашњих и унутрашњих, на овим померањима бити једнак нули, што значи *да виртуални рад спољашњих сила мора бити једнак прирашћају потенцијалне енергије*. Везе које омогућавају ова виртуална померања морају задовољавати *услов непрекидности деформација и граничне услове за померања* тачака спољашњег омотача тела. Нека је запреминска сила дата у свима тачкама тела (F_V'), а спољашње површинске силе (F_n) само у оним тачкама површине чија померања нису дата, јер не могу једновремено бити дате и силе и померања тачака у којима оне дејствују. Виртуална компонентна померања су произвољно мале величине (δu , δv , δw) које задовољавају услов непрекидности деформација, па морају бити непрекидне функције координата (x , y , z), а сем тога морају бити једнаке нули у оним тачкама тела чија су компонентна померања позната.

Ако је δu виртуално померање ивице AC основе $ACBD$ паралелепипеда (слика 2.2. а), онда померање ивице BD износи $\delta u^* = \delta u + [d(\delta u)/dx] dx$ (слика 4.10.), па је виртуални рад сила биће

$$\delta A = \sigma_x [\delta u + (d\delta u/dx) dx - \delta u] dy dz = \sigma_x (d\delta u/dx) dx dy dz$$

Како је $\epsilon_x = du/dx$ биће за прву варијацију $\delta \epsilon_x = d(\delta u/dx) = d(\delta u)/dx$, пошто тада важи закон комутације варирања и диференцирања. Специфични виртуални рад износи $\delta A_{de}' = \delta d A_{de}/dV = \sigma_x \delta \epsilon_x$. Аналогно томе за смицање биће $\delta A_{ds}' = \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}$, где је $\delta \gamma_{xy}$ *виртуално клизање*. Стога је укупни *специфични виртуални деформациони рад* или *виртуални еластични потенцијал*

$$\delta A_d = \delta W = \sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} \quad (4.48)$$

Пошто је еластични потенцијал функција деформација то се његов прираштај са течношћу до малих другог реда може написати у облику

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_x} \delta \epsilon_x + \frac{\partial W}{\partial \epsilon_y} \delta \epsilon_y + \frac{\partial W}{\partial \epsilon_z} \delta \epsilon_z + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} \delta \gamma_{xy} + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xz}} \delta \gamma_{xz} + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}} \delta \gamma_{yz}$$

Пошто израз (4.48) мора бити задовољен за произвољне варијације, то упоређењем коефицијената следе релације

$$\sigma_x = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_x}; \quad \sigma_y = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_y}; \quad \sigma_z = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_z}; \quad \tau_{xy} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}}; \quad \tau_{xz} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xz}}; \quad \tau_{yz} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}} \quad (4.49)$$

које представљају Castigliano-ове *обрасце* (3.36). Ови обрасци представљају аналитичке изразе хипотезе о постојању еластичног потенцијала деформбилног тела.

Диференцирањем (4.49), с обзиром на (3.2), добијају се релације

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial \epsilon_y} = \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_y} = C_{12}; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial \epsilon_x} = \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_y} = C_{21}; \quad C_{12} = C_{21}; \quad \dots; \quad C_{ik} = C_{ki}$$

како је показано у (3.3. а). Дакле, симетричност матрице коефицијената C_{ik} у (3.2) повезана је са постојањем еластичног потенцијала деформбилног тела.

Спољашње — површинске и запреминске — силе, према Слареугон-овој теорему (пошто *полако расту од нуле до коначне вредности*) врше виртуалне радове

$$\frac{1}{2} \iint_{(S')} (\mathbf{F}_n', \delta \mathbf{s}) dS + \frac{1}{2} \iiint_{(V)} (\mathbf{F}_V', \delta \mathbf{s}) dV = J_1 + J_2; \quad \delta \mathbf{s} = \mathbf{i} \delta u + \mathbf{j} \delta v + \mathbf{k} \delta w,$$

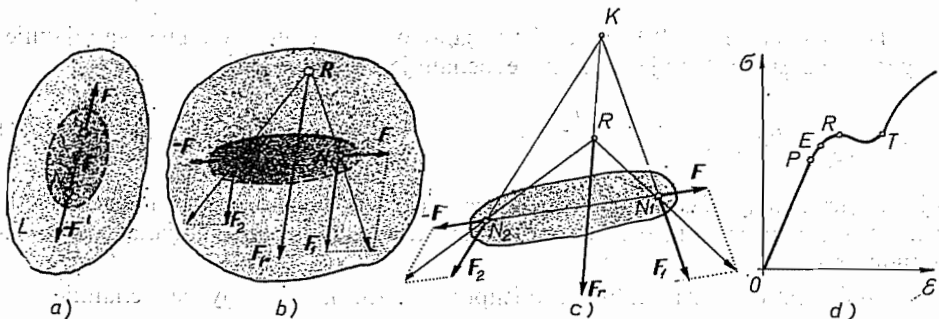
где је dS површински елемент контурне површи, а интеграл се узима само по оном делу (S') на коме дејствују дате површинске силе (а нису дата компонентна померања тих тачака). Други интеграл се узима по целој запремини тела. Пошто спољашње силе не подлежу варијацији то се принцип виртуалних померања може изразити овако:

$$\delta \left[\iint_{(S')} (\mathbf{F}_n', \mathbf{s}) dS + \iiint_{(V)} (\mathbf{F}_V', \mathbf{s}) dV - 2 \iiint_{(V)} \mathbf{W} dV \right] = \delta \Pi = 0. \quad (4.50)$$

Ово је услов екстремума потенцијалне енергије деформабилног тела. Према критеријуму Лејеуне-Dirichlet-а* у конфигурацији стабилне равнотеже потенцијална енергија има екстремну вредност и то минимум, па је ово *принцип минимума потенцијалне енергије* при варијацији компонентних померања или *принцип виртуалног рада*. Он се може изразити овако: „*Од свих могућих померања које везе доушљају, стварна померања се одликују тиме што за њих потенцијална енергија деформабилног тела има екстремну вредност и то минимум*“.

Код савијања просте греде (слика 4.11. а), према Bernoulli-јевој хипотези (да попречни пресек остаје раван) следи линеарни распоред напона $\sigma_z = \epsilon y = E y / R_f$, где је R_f полупречник флексије еластичне линије, па је еластични потенцијал $\mathbf{W} = M_f d\varphi / 2 dz = \mathfrak{B} / 2 R_f^2 = \mathfrak{B} (d^2 v / dz^2)^2 / 2$, јер је кривина $K_f = 1/R_f = d^2 v / dz^2$, где је v угиб греде. Ако је греда оптерећена континуалним оптерећењем $q = q(z)$ по целој дужини распона (слика 4.11. б), онда услов (4.50) постаје

$$\delta \left\{ \int_0^l \left[q(z) v(z) - \frac{\mathfrak{B}}{2} (d^2 v / dz^2)^2 \right] dz \right\} = 0.$$



Слика 4.11. — Савијање греде

па се проблем своди на одређивање функције $v = v(z)$ која даје минимум предњем интегралу.

* Динамика, чл. 14.4

4.7. Принцип минимума потенцијалне енергије при варијацији напона. Castigliano-ова теорема. — Нека је еластични потенцијал изражен као квадратна форма само од компонентних напона (3.33). Компонентни напони задовољавају Navier-ове једначине (1.25) и Cauchy-јеве граничне услове (1.9). Сем ових напона узимамо други систем напона који се мало разликује од првог тако да су тотални напони $\mathbf{p}_{(x)} + \delta \mathbf{p}_{(x)}$; $\mathbf{p}_{(y)} + \delta \mathbf{p}_{(y)}$; $\mathbf{p}_{(z)} + \delta \mathbf{p}_{(z)}$, где су $\delta \mathbf{p}_{(x)}$; $\delta \mathbf{p}_{(y)}$; $\delta \mathbf{p}_{(z)}$ варијације напона. Ова повећања напона долазе од виртуалних промена површинских сила $\mathbf{F}'_n + \delta \mathbf{F}'_n$. Када се у једначине (1.25) и (1.9) ставе нови напони и нове површинске силе, с обзиром на услов да претходни напони ($\mathbf{p}_{(x)}$; $\mathbf{p}_{(y)}$; $\mathbf{p}_{(z)}$) задовољавају једначине (1.25), а силе \mathbf{F}'_n површинске услове (1.9), следе нови услови

$$(\partial \delta \mathbf{p}_{(x)} / \partial x) + (\partial \delta \mathbf{p}_{(y)} / \partial y) + (\partial \delta \mathbf{p}_{(z)} / \partial z) = 0; \quad (4.51. a)$$

$$\delta \mathbf{p}_{(x)} \cdot \alpha + \delta \mathbf{p}_{(y)} \cdot \beta + \delta \mathbf{p}_{(z)} \cdot \gamma = \delta \mathbf{F}'_n. \quad (4.51. b)$$

Дакле, виртуални компонентни напони задовољавају Navier-ове једначине без запреминских сила и граничне услове. Прве релације су задовољене у свима тачкама тела, а друге у оним тачкама спољашње површи у којима су дате површинске силе (S'), док се у другим тачкама те површи у којима су дата компонентна померања могу напони мењати на исти начин као и у осталим тачкама деформабилног тела.

Прва варијација еластичног потенцијала, с обзиром на Castigliano-ве обрасце (4.49), биће:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{W} &= \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \sigma_x} \delta \sigma_x + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \sigma_y} \delta \sigma_y + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \sigma_z} \delta \sigma_z + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \tau_{xy}} \delta \tau_{xy} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \tau_{xz}} \delta \tau_{xz} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \tau_{yz}} \delta \tau_{yz} = \\ &= \varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \varepsilon_z \delta \sigma_z + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} + \gamma_{xz} \delta \tau_{xz} + \gamma_{yz} \delta \tau_{yz}. \end{aligned}$$

Како је $\varepsilon_x = \partial u / \partial x$ то је

$$\partial (u \delta \sigma_x) / \partial x = (\partial u / \partial x) \cdot \delta \sigma_x + u \partial (\delta \sigma_x) / \partial x;$$

$$(\partial u / \partial x) \cdot \delta \sigma_x = [\partial (u \delta \sigma_x) / \partial x] - u \partial (\delta \sigma_x / \partial x),$$

па предњи израз постаје

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{W} &= \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} (u \delta \sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (u \delta \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (u \delta \tau_{xz}) \right] + \left[\frac{\partial}{\partial x} (v \delta \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (v \delta \sigma_y) + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial z} (v \delta \tau_{yz}) \right] + \left[\frac{\partial}{\partial x} (w \delta \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (w \delta \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (w \delta \sigma_z) \right] \Big\} - \\ &- \left\{ u \left[\frac{\partial}{\partial x} (\delta \sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta \tau_{xz}) \right] + v \left[\frac{\partial}{\partial x} (\delta \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta \sigma_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta \tau_{yz}) \right] + \right. \\ &+ \left. w \left[\frac{\partial}{\partial x} (\delta \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta \sigma_z) \right] \right\} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \end{aligned}$$

пошто је, према (4.51. a) други израз у великој загради једнак нули, а функције P , Q и R су сређени изрази првог израза у великој загради:

$$P = u \delta \sigma_x + v \delta \tau_{xy} + w \delta \tau_{xz} = (\delta \mathbf{p}_{(x)}, \mathbf{s}); \quad Q = (\delta \mathbf{p}_{(y)}, \mathbf{s}); \quad R = (\delta \mathbf{p}_{(z)}, \mathbf{s}).$$

Помоћу Green-Ostrogradskog обрасца може се запремински интеграл претворити у површински, па, с обзиром на услов (4.51. b) следи:

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} \delta \mathbf{W} dV &= \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iint_{(S')} (P\alpha + Q\beta + R\gamma) dS = \\ &= \iint_{(S'')} (\delta \mathbf{p}_{(x)} \cdot \alpha + \delta \mathbf{p}_{(y)} \cdot \beta + \delta \mathbf{p}_{(z)} \cdot \gamma, \mathbf{s}) dS = \iint_{(S'')} (\delta \mathbf{F}_n', \mathbf{s}) dS = \\ &= \iint_{(S'')} (\delta X_n' u + \delta Y_n' v + \delta Z_n' w) dS, \end{aligned}$$

где је површински интеграл узет по оном делу спољашње површи на коме су позната компонентна померања.

Пошто у овом случају компонентна померања не варирају може се предњи резултат написати и у овом облику

$$\begin{aligned} J &= \delta \left[\iint_{(S'')} (\mathbf{F}_n', \mathbf{s}) dS - \iiint_{(V)} \mathbf{W} dV \right] = \delta \left[\iint_{(S'')} (X_n' u + Y_n' v + Z_n' w) dS - \right. \\ &\quad \left. - \iiint_{(V)} \mathbf{W} dV \right] = \delta \Pi^* = 0 \end{aligned} \quad (4.52)$$

који представља Castigliano-ву варијациону једначину односно изражава принцип минимума потенцијалне енергије при варијацији напона или Castigliano-по-ву теорему: „Од свих система компоненти напона који задовољавају Navier-ове једначине равнотеже и Cauchy-јеве граничне услове задатим спољашњем силама и задатим компоненти померањима тачака контурне површи савршено одговара онај за који предњи интеграл има екстремну вредност и то минимум“.

Овај се принцип примењује у отпорности материјала као теорема Menabrea или Castigliano-ва теорема код статички неодређених континуалних носача. У већини техничких проблема компонентни напони су линеарне функције спољашњих сила и спрегова, па када се деформациони рад (потенцијална енергија деформације) изрази као хомогена квадратна форма сувишних статичких непознатих (реакција ослонаца и реактивних момената) онда једначинама за равнотежу треба додати и систем линеарних једначина

$$\frac{\partial \mathbf{A} d}{\partial S_i} = 0, \quad (4.53)$$

где је S_i степенска неизнатица. Овај систем има онолико једначина колико је пута носач статички неодређен. Он показује да је у конфигурацији стабилне равнотеже носача парцијални извод деформационог рада по статичкој непознатој једнак нули.

4.8. Принцип узајамности деформационих радова. — (Betti-Maxwell-ова теорема). — Нека је једно деформабилно тело напрегнуто са два различита система спољашњих сила: површинских $\mathbf{F}_n^{(1)}$ и $\mathbf{F}_n^{(2)}$ и запреминских $\mathbf{F}_v^{(1)}$ и $\mathbf{F}_v^{(2)}$, и нека су померања $s^{(1)}$ и $s^{(2)}$ која одговарају тим стањима, где је $s^{(1)} = u^{(1)} \mathbf{i} + v^{(1)} \mathbf{j} + w^{(1)} \mathbf{k}$. 1872. год. је Enrico Betti (Nuovo cimento, vol.

7, 8) уопштио теорему о узајамности деформационих радова коју је први за две силе поставио Maxwell. Она гласи: „Раг првој сисџему сила (1) на померањима која би одговарала другом сисџему сила (s⁽²⁾) једнак је раду другој сисџему сила (1) на померањима која би одговарала првом сисџему сила (s⁽¹⁾)“. Дакле, важи ова релација

$$\iint_{(S)} (\mathbf{F}_n^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}) dS + \iiint_{(V)} (\mathbf{F}_v^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}) dV = \iint_{(S)} (\mathbf{F}_n^{(2)}, \mathbf{s}^{(1)}) dS + \iiint_{(V)} (\mathbf{F}_v^{(2)}, \mathbf{s}^{(1)}) dV. \quad (4.54)$$

Користећи једначине (4.25) и услове (4.9) први интеграл на левој страни предње једначине, с обзиром на Грен-ов образац, може се овако трансформисати

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} (\mathbf{F}_n^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}) dS &= \iint_{(S)} (\mathbf{p}_{(x)}^{(1)} \alpha + \mathbf{p}_{(y)}^{(1)} \beta + \mathbf{p}_{(z)}^{(1)} \gamma, \mathbf{s}^{(2)}) dS = \\ &= \iiint_{(V)} (P_{12} \alpha + Q_{12} \beta + R_{12} \gamma) dV = \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P_{12}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{12}}{\partial y} + \frac{\partial R_{12}}{\partial z} \right) dV = \\ &= \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_{(x)}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_{(y)}^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_{(z)}^{(1)}}{\partial z}, \mathbf{s}^{(2)} \right) dV + \iiint_{(V)} \left[\left(\mathbf{p}_{(x)}^{(1)}, \frac{\partial \mathbf{s}^{(2)}}{\partial x} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\mathbf{p}_{(y)}^{(1)}, \frac{\partial \mathbf{s}^{(2)}}{\partial y} \right) + \left(\mathbf{p}_{(z)}^{(1)}, \frac{\partial \mathbf{s}^{(2)}}{\partial z} \right) \right] dV; \end{aligned}$$

$$P_{12} = (\mathbf{p}_{(x)}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}); \quad Q_{12} = (\mathbf{p}_{(y)}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}); \quad R_{12} = (\mathbf{p}_{(z)}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}).$$

Први интеграл, с обзиром на (1.25 а), износи $-\iiint_{(V)} (\mathbf{F}_v^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}) dV$, па се поништава са другим интегралом леве стране једначине (4.54). На исти се начин може трансформисати и десна страна једначине, па ће бити услов узајамности радова:

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} \left[\left(\mathbf{p}_{(x)}^{(1)}, \frac{\partial \mathbf{s}^{(2)}}{\partial x} \right) + \left(\mathbf{p}_{(y)}^{(1)}, \frac{\partial \mathbf{s}^{(2)}}{\partial y} \right) + \left(\mathbf{p}_{(z)}^{(1)}, \frac{\partial \mathbf{s}^{(2)}}{\partial z} \right) \right] dV = \\ = \iiint_{(V)} \left[\left(\mathbf{p}_{(x)}^{(2)}, \frac{\partial \mathbf{s}^{(1)}}{\partial x} \right) + \left(\mathbf{p}_{(y)}^{(2)}, \frac{\partial \mathbf{s}^{(1)}}{\partial y} \right) + \left(\mathbf{p}_{(z)}^{(2)}, \frac{\partial \mathbf{s}^{(1)}}{\partial z} \right) \right] dV \quad (4.55) \end{aligned}$$

који се може изразити и помоћу Castigliano-вих образаца (4.63). Тако је

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)} \varepsilon_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \varepsilon_y^{(2)} + \sigma_z^{(1)} \varepsilon_z^{(2)} + \tau_{xy}^{(1)} \gamma_{xy}^{(2)} + \tau_{xz}^{(1)} \gamma_{xz}^{(2)} + \tau_{yz}^{(1)} \gamma_{yz}^{(2)} = \sigma_x^{(2)} \varepsilon_x^{(1)} + \sigma_y^{(2)} \varepsilon_y^{(1)} + \\ + \sigma_z^{(2)} \varepsilon_z^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)} \gamma_{xy}^{(1)} + \tau_{xz}^{(2)} \gamma_{xz}^{(1)} + \tau_{yz}^{(2)} \gamma_{yz}^{(1)}; \quad \mathbf{W}_{12} = \mathbf{W}_{21}. \quad (4.56) \end{aligned}$$

А ово је и требало доказати.

Као што је познато из отпорности материјала* за две силе биће

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{s}_2) = (\mathbf{F}_2, \mathbf{s}_1); F_1(e_1, \mathbf{s}_2) = F_2(e_2, \mathbf{s}_1); F_1 f_{12} = F_2 f_{21}; \mathbf{F}_i = F_i \mathbf{e}_i; |\mathbf{e}_i| = 1;$$

па је

$$F_1 \cdot f_{12} = F_1 \cdot \alpha_{12} F_2 = F_2 \cdot \alpha_{21} F_1; \alpha_{12} = \alpha_{21}; \alpha_{ik} = \alpha_{ki} \quad (4.57)$$

где су α_{ik} *Maxwell-ови уилицјни коефицијенти за померања* (утиби услед јединичних сила). Због овога је принцип узајамности радова, односно, узајамности еластичних померања, основни у статисти конструкција и примењује се као *Maxwell-Mohr-ова метода*.

4.9. Једнозначност решења проблема теорије еластичности. — Варијациони принципи теорије еластичности — принцип виртуалних померања и Castigliano-ова теорема — омогућавају да се дође до стварних решења проблема теорије еластичности у оним случајевима када је примена наведених метода (члан 4.2) доста гломазна. Принцип виртуалних померања формулише карактеристичне особине напрегнутог тела, и изражава се тиме да се стварна померања обликују тако што потенцијална енергија има екстремну вредност (минимум). Други принцип формулише особине напонског стања и изражава се тиме да од свих система напона који задовољавају једначине равнотеже и граничне услове одговара онај систем напона за који је потенцијална енергија у минимуму. Решење проблема овим методама уједно показије и јединственост решења.

Међутим, јединственост решења може се доказати и на други начин користећи *хипотезу о природном стању деформабилног тела* „када нема напона, тада нема ни деформација“ и *принцип независности дејства сила* („крајњи учин сила не зависи од редоследа њиховог дејства већ само од њихове резултанте“).

У случају примене *директне* методе познате су површинске F_n' и запреминске спољашње силе F_V' . Нека тим силама одговарају ова напонска стања истог тела представљена тензорима напона чије су матрице $\mathbf{N}^{(1)}$ и $\mathbf{N}^{(2)}$, онда морају бити задовољене Navier-ове једначине (4.1) и Cauchy-јеви гранични услови (4.2):

$$(\partial p_{(x)}^{(1)}/\partial x) + (\partial p_{(y)}^{(1)}/\partial y) + (\partial p_{(z)}^{(1)}/\partial z) + F_V' = 0; \mathbf{N}^{(1)}\{n\} = \{F_n'\}; \quad (4.58: a)$$

$$(\partial p_{(x)}^{(2)}/\partial x) + (\partial p_{(y)}^{(2)}/\partial y) + (\partial p_{(z)}^{(2)}/\partial z) + F_V' = 0; \mathbf{N}^{(2)}\{n\} = \{F_n'\}; \quad (4.58: b)$$

па се одузимањем добија релација

$$[\partial(p_{(x)}^{(1)} - p_{(x)}^{(2)})/\partial x] + [\partial(p_{(y)}^{(1)} - p_{(y)}^{(2)})/\partial y] + [\partial(p_{(z)}^{(1)} - p_{(z)}^{(2)})/\partial z] = 0; \\ (\mathbf{N}^{(1)} - \mathbf{N}^{(2)})\{n\} = 0. \quad (4.59)$$

Према принципу о независности дејства сила може се разлика напона схватити као резултантни напон $(p_{(x)} = p_{(x)}^{(1)} - p_{(x)}^{(2)})$, односно као ново напонско стање али при одсуству сила. Стога, према хипотези о природном стању деформабилног тела, не могу постојати ни напони, па мора бити:

$$p_{(x)} = p_{(y)} = p_{(z)} = 0; \sigma_x^{(1)} = \sigma_x^{(2)}; \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}; \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}; \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)}; \tau_{xz}^{(1)} = \tau_{xz}^{(2)}; \\ \tau_{yz}^{(1)} = \tau_{yz}^{(2)}; \mathbf{N}^{(1)} = \mathbf{N}^{(2)}, \quad (4.60)$$

* Отпорност материјала, члан 9.6.

што значи да су оба напонска стања *испђа*, односно да је решење *једнозначно*.

Када се не би узео у обзир принцип о независности дејства сила, решење би могло бити и *мнојозначно*. На пример, ако је аксијална притисна сила F_1 мања од Euler-ове критичне силе ($F_1 < F_k$), штап би био изложен само притиску. Ако је друга сила $F_2 < F_k$ опет би штап био изложен само притиску. Када би силе заједно дејствовале онда би при услову $F_1 + F_2 < F_k$ био притисак, а при услову $F_1 + F_2 > F_k$ би наступило извијање, па је решење *мнојозначно*.

Помоћу деформационог рада, како је показао Kirhoff, може се доказати јединственост решења за све три методе које се примењују при решавању проблема теорије еластичности. Када дејствују површинске (F_n') и запреминске силе (F_V') онда је према (3.27) рад

$$\iint_{(S)} (\mathbf{F}_n', \mathbf{s}) dS + \iiint_{(V)} (\mathbf{F}_V', \mathbf{s}) dV = 2 \iiint_{(V)} \mathbf{W} dV. \quad (4.61)$$

Ова једначина показује да се рад површинских сила и рад запреминских сила у потпуности претвара у потенцијалну енергију деформације, те се тако потврђује хипотеза о постојању еластичног потенцијала деформабилног тела.

Нека се при истим запреминским силама и при истим граничним условима добију два различита система напона, померања и деформација, онда се, према принципу независности дејства сила, и њихове разлике

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_n' &= \mathbf{F}_n^{(1)} - \mathbf{F}_n^{(2)}; \quad \mathbf{s} = \mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}^{(2)}; \quad u = u^{(1)} - u^{(2)}; \quad v = v^{(1)} - v^{(2)}; \quad w = w^{(1)} - w^{(2)}; \\ \mathbf{N} &= \mathbf{N}^{(1)} - \mathbf{N}^{(2)}; \quad \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x^{(1)} & \tau_{yx}^{(1)} & \tau_{zx}^{(1)} \\ \tau_{xy}^{(1)} & \sigma_y^{(1)} & \tau_{zy}^{(1)} \\ \tau_{xz}^{(1)} & \tau_{yz}^{(1)} & \sigma_z^{(1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_x^{(2)} & \tau_{yx}^{(2)} & \tau_{zx}^{(2)} \\ \tau_{xy}^{(2)} & \sigma_y^{(2)} & \tau_{zy}^{(2)} \\ \tau_{xz}^{(2)} & \tau_{yz}^{(2)} & \sigma_z^{(2)} \end{pmatrix}; \quad (4.62) \\ \varepsilon_x &= \varepsilon_x^{(1)} - \varepsilon_x^{(2)}; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^{(1)} - \varepsilon_y^{(2)}; \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z^{(1)} - \varepsilon_z^{(2)}; \\ \mathcal{C} &= \mathcal{C}^{(1)} - \mathcal{C}^{(2)}; \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^{(1)} - \gamma_{xy}^{(2)}; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{xz}^{(1)} - \gamma_{xz}^{(2)}; \quad \gamma_{yz} = \gamma_{yz}^{(1)} - \gamma_{yz}^{(2)}; \end{aligned}$$

решења неког проблема теорије еластичности па мора бити задовољена релација (4.75). Међутим, пошто су запреминске силе исте $F_V^{(1)} = F_V^{(2)}$ то је други интеграл на левој страни једначине (4.75) једнак нули, па следи

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} (\mathbf{F}_n', \mathbf{s}) dS &= \iint_{(S)} [(X_n^{(1)} - X_n^{(2)})(u^{(1)} - u^{(2)}) + (Y_n^{(1)} - Y_n^{(2)})(v^{(1)} - v^{(2)}) + \\ &+ (Z_n^{(1)} - Z_n^{(2)})(w^{(1)} - w^{(2)})] dS = 2 \iiint_{(V)} \mathbf{W} dV, \quad (4.63) \end{aligned}$$

где не десној страни треба кинетички потенцијал изразити као квадратну форму само од напона (3.33) или само од деформација (3.34).

С обзиром на основне проблеме теорије еластичности, односно на основне методе за решавање проблема (члан 4.2), разликоваћемо три случаја:

1° у случају примене директне методе задате су спољашње површинске силе $F_n^{(1)} = F_n^{(2)}$, па, према (4.62) мора бити њихова разлика једнака нули, $F_n' = 0$, а то значи да је интеграл на левој страни једначине (4.63) једнак нули,

2° у случају примене обратне методе позната су компонентна померања, па мора бити $s^{(1)}=s^{(2)}$ односно $s=0$, те је опет интеграл на левој страни (4.77) једнак нули, и

3° код полуобратне методе на једном делу граничне површи испуњени услови (1°) а на другом услови (2°), па опет интеграл на левој страни од (4.77) мора бити једнак нули.

Дакле, у сва три случаја једначина (4.77) своди се на услов

$$\iiint_{(V)} \mathbf{W} \, dV = \iiint_{(V)} \mathbf{A}_d' \, dV = 0. \quad (4.64)$$

Пошто је потенцијал \mathbf{W} хомогена квадратна форма од напона или од деформација то је $\mathbf{W} > 0$, па да би била задовољена предња релација морају сви коефицијенти квадратних форми бити једнаки нули, односно

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_x^{(1)} - \sigma_x^{(2)} = 0; \dots; \tau_{xy}^{(1)} - \tau_{xy}^{(2)} = 0; \dots; \varepsilon_x = \varepsilon_x^{(1)} - \varepsilon_x^{(2)} = 0; \dots; \\ \gamma_{xy}^{(1)} - \gamma_{xy}^{(2)} = 0; \dots; \end{aligned} \quad (4.65)$$

што значи да су оба напонска стања, односно стања деформација, *исти*, па је решење *једнозначно*.

Из овог доказа не може се одмах закључити да су и компонентна померања за та два решења иста. У случају примене обратне и полуобратне методе она су заиста *исти*, али у случају примена директне методе, пошто су дате силе, односно напони, одређене су деформације, па деформабилно тело може да добије мала допунска кретања као круто тело (члан 2.1.).

4.10. Saint-Venant-ов принцип. — При примени полуобратне методе код Saint-Venant-овог *проблема* (члан 4.5.1) учињена је претпоставка (4.16) да постоји само аксијални напон σ_z (док су остали нуле), која је довела до четири различите врсте напрезања штапа: а) аксијалном напрезању силама $\pm F$; б) затезању штапа сопственом тежином ($G = \gamma_m A l$), с) чистом савијању спрegovима M_x у равни Oyz штапа и д) чистом савијању спрegovима M_y у равни Oxz штапа. У сваком од ових случајева површинске силе на основама штапа редуковале су се на главни вектор и главни момент који су одговарали постављеном проблему, али је распоред површинских сила по основама био потпуно *одређен* за сваку врсту напрезању понаособ. Код аксијалног напрезања силе су управне на раван основе и једнолико подељене по њој; код чистог савијања оне су управне на основу, али се линеарно мењају по пресеку, те су сразмерне растојању тачке пресека од неутралне осе пресека (S_x -односно S_y -осе). Међутим, код многих стварних конструкција тешко је *унапред* остварити неки жељени распоред површинских сила, што доводи у сумњу добијена решења. Због тога је Saint-Venant 1855. године формулисао принцип који се односи на локална напрезања, а који је назван *принципом Saint-Venant-а*.

У статистици се сила представља као клизећи вектор који може да се помера по носачу — нападној линији (L), а да му се дејство на тело не промени. То се доказује овако: у тачки N' на нападној линији силе \mathbf{F} која дејствује у тачки N (слика 4.11.а) додају се две супротне силе \mathbf{F}' и $-\mathbf{F}'$ једнаке датој сили \mathbf{F} . Пошто су супротне силе у равнотежи, то се дејство силе \mathbf{F} на тело није променило. Међутим, сила \mathbf{F} у тачки N и сила $-\mathbf{F}'$ у нападној тачки N' такође су супротне силе, па им се дејства

поништавају, те остаје само сила \mathbf{F}' у помереној тачки N' . Поништавање силе \mathbf{F} у тачки N и силе $-\mathbf{F}'$ у тачки N' у ствари значи *додавање* у тачки N силе \mathbf{F} систему супротних сила \mathbf{F}' и $-\mathbf{F}'$ које дејствују у тачки N' . Ако је растојање тачка N и N' мало у односу на димензије тела, онда систем супротних сила изазива *локално најпрезање* у непосредној близини тих тачака (N и N').

Две паралелне силе истог смера \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 у нападним тачкама N_1 и N_2 (слика 4.11. b) слажу се, додавањем у тим тачкама супротних сила \mathbf{F} и $-\mathbf{F}$ дуж спојне праве N_1N_2 , у резултанту $\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$. Систем супротних сила $\pm \mathbf{F}$ изазива ако је растојање нападних тачака N_1 и N_2 *врло мало* само *локално најпрезање* блиске околине око тих нападних тачака. Напони овог локалног напрезања брзо опадају удаљавањем од области у којој дејствује систем супротних сила.

На исти се начин слажу у резултанту и две косе силе, $\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, када се у нападним тачкама N_1 и N_2 додају супротне силе \mathbf{F} и $-\mathbf{F}$ које изазивају о околини нападних тачака N_1 и N_2 *локално најпрезање* (слике 4.11. c).

Нека је *шпата*, чије су *појечне димензије мале у односу на дужину шпата*, оптерећен силама по основи. Када се свака сила разложи на две компоненте, једну аксијалну и другу трансферзалну, онда се добијају два система сила: један систем је систем паралелних сила које дејствују паралелно осни шпата, други систем сила је раван и дејствује у равни основе. Сваки се овај систем да даље редуковати на главни вектор (резултанту) и главни момент (спрег) ако се занемари локално напрезање у непосредној близини саме основе шпата.

Нека је основа шпата изложена дејству система сила (\mathbf{F}_i) које су произвољно распоређене по самој основи. Нека је други систем сила (\mathbf{F}_k) еквивалентан првом систему сила (\mathbf{F}_i) али су му силе тако распоређене по основи шпата да тај распоред одговара решењу постављеног проблема напрезања тог шпата. Ако се сада датом систему сила (\mathbf{F}_i) додају два система супротних сила \mathbf{F}_k и $-\mathbf{F}_k$ онда је дати систем сила \mathbf{F}_i у равнотежи са системом сила $-\mathbf{F}_k$, па према горњем принципу изазива само локално напрезање у непосредној близини основе шпата, док систем сила \mathbf{F}_k задовољава распоред сила који одговара постављеном проблему.

Ово показује да се по цени локалног напрезања непосредне околине оптерећеног места (пресека) може систем датих сила (\mathbf{F}_i) заменити другим системом сила (\mathbf{F}_k) који је еквивалентан првом систему, али са таквим распоредом сила како то захтева решење постављеног проблема. То је суштина овог принципа који се назива и *принцип еластичне еквиваленције ситнички еквивалентних система*, па се може овако формулисати: „Када се у ма коме делу најреинушој шела *год* систем суйројних уравнотежених сила еквивалентан датом систему сила, онда он у непосредној околини шота мести изазивала локално најпрезање чији напони најло опадају удаљавањем од мести додавања система суйројних сила“.

Треба уочити да се решења Saint-Venant-овог *проблема* могу примењивати на све штапове (греде) чији су *појечни пресеци малих димензија у односу на дужину шпата*, јер ће се само тада локална напрезања појавити на малом делу дужине шпата и у непосредној околини оптерећеног места. Ово значи да код *крајних*, а *дебелих шпата* треба бити обазрив при примени тих решења, јер локални напони могу бити распоређени и

дуж целе дужине штапа. Овако се радило и у отпорности материјала, чији се закључци односе на танке, а дугачке штапове.

Локално напрезање се може занемарити онда када напони тога напрезања по целом распону штапа не пређу критичну границу великих издужења када настаје *течење материјала*. Дијаграм (σ, ϵ) за меки челик приказан је на слици 4.11.d. После тачке E (границе еластичности) налази се на дијаграму тачка R (почетак развлачења), а затим T (завршетак развлачења) када дилатације расту брже уз константни напон или чак и смањење напона. Напон на граници T (*граница течења*, предел течучести, *Fliessgrenze*, *limit of yield*, *limite d'écoulement*) је критични напон течења (развлачења). Ако напони у неким влакнима при постепеном повећању оптерећења (терета) пређу критичну границу, наступиће на томе месту *течење материјала*, па се деформације нагло повећавају. Овоме се супротстављају оближња влакна која су мање напрегнута, јер примају на себе вишак напона до критичне вредности, па се и она растерећују. Суседна влакна примају на себе вишак напона, и тако редом, што значи да се напони у најјаче оптерећеном делу штапа спонтано изједначају, па не могу да пређу критичну вредност у појединим влакнима, а да то не буде уједно и критични напон целог пресека. Међутим, ако критичну границу развлачења материјала пређе само највећи напон од локалног напрезања, онда ће се повећати број влакана напрегнутих до критичне границе, али ће њихове дилатације, ограничене постојањем суседних влакана која су мање напрегнута, остати мале у односу на дилатације које одговарају течењу материјала. Из овога се може закључити да опасност занемаривања локалних напона постоји само тада када се напони влакана целог попречног пресека повећају изнад критичног напона на граници течења (границе великих издужења), јер тада настаје течење материјала па може доћи до кидања штапа по томе пресеку.

5. ТОРЗИЈА ШТАПОВА

5.1. Теорија призматичних штапова. Основне претпоставке. Функција увијања.— Цилиндрични штап (вратило), произвољног попречног пресека уклештен је на левом (A), а на десном, слободном (B), изложен је у равни попречног пресека дејству спрега \mathfrak{M}_t (слика 5.1.). Овај спрег, тзв. *момент увијања* или *торзије*, увија штап око његове геометријске Oz -осе триједра $Oxyz$ узетог у тежишту (O) леве основе. У овој основи дејствује исти толики спрег само супротног смера ($-\mathfrak{M}_t$) који уравнотежава први.

Применићемо Saint-Venant-ову полуобратну методу и као и у отпорности материјала, и претпоставити да у попречним пресецима штапа постоје само тангенцијални напони, тј. да су:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0; \quad \tau_{xy} = 0; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \neq 0; \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} \neq 0. \quad (5.1)$$

Утицај сопствене тежине се занемарује, па је $\mathbf{F}_V' = 0$. Када се учињене претпоставке (5.1) унесу у Navier-ове једначине равнотеже (1.25), онда из њих следе релације

$$\partial \tau_{zx} / \partial z = 0; \quad \partial \tau_{zy} / \partial z = 0; \quad (\partial \tau_{zy} / \partial x) + (\partial \tau_{zy} / \partial y) = 0 \quad (5.2)$$

Из (5.1) види се да је $\sigma' = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0$, а пошто је и $\mathbf{F}_V' = 0$, то су прве четири Beltrami-јеве једначине (3.26) задовољене, а остале две дају релације

$$\Delta \tau_{zx} = \Delta \tau_{xz} = 0; \quad \Delta \tau_{zy} = \Delta \tau_{yz} = 0. \quad (5.3)$$

Оне, са првим двома једначинама (5.2), показују да компонентни напони τ_{zx} и τ_{zy} не зависе од координате z . Да би се задовољила трећа једначина (5.2) мора постојати таква функција Φ од координата x и y , да су компонентни напони

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad (5.4)$$

јер је

$$\begin{aligned} (\partial \tau_{zx} / \partial x) + (\partial \tau_{zy} / \partial y) &= [\partial (\partial \Phi / \partial y) / \partial x] - [\partial (\partial \Phi / \partial x) / \partial y] = \\ &= (\partial^2 \Phi / \partial x \partial y) - (\partial^2 \Phi / \partial x \partial y) = 0. \end{aligned}$$

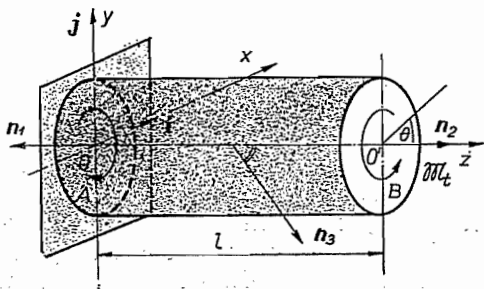
С обзиром на (5.3) и (5.4) биће

$$\Delta \tau_{zx} = \Delta (\partial \Phi / \partial y) = \partial (\Delta \Phi) / \partial y = 0; \quad \Delta \tau_{zy} = -\partial (\Delta \Phi) / \partial x = 0,$$

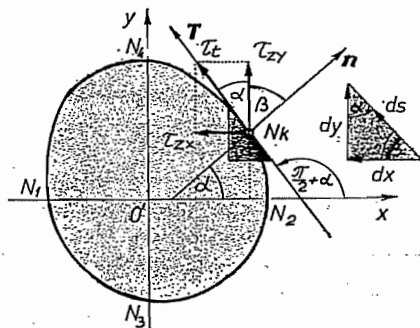
те функција $\Phi(x, y)$ мора задовољавати релацију

$$\Delta \Phi(x, y) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = C, \quad (5.5)$$

где је Δ Лапласијан за раван (Oxy) , а C произвољна константа. Функција $\Phi(x, y)$ зове се *функција торзије*, *торзијска функција* или *функција напона* или *торзији* односно *Prandtl-ова функција*.*



Слика 5.1. — Торзија призматичног штапа



Слика 5.2. — Контурни услови на бочној површи — омотачу

Јединични вектор нормале \mathbf{n} у некој тачки N_k на омотачу штапа гради са координатним осама Ox и Oy углове чији су косинуси смера α и β , а управан је на Oz -осу (слика 5.2), па је

$$\mathbf{n} = \alpha \mathbf{j} + \beta \mathbf{j}.$$

Пошто на омотачу штапа не дејствују спољашње силе, то су, због (5.1), прве две Саучу-јеве једначине (1.9) задовољене, а из треће се добија да мора бити

$$\tau_{zx} \alpha + \tau_{zy} \beta = (\partial \Phi / \partial y) \alpha - (\partial \Phi / \partial x) \beta = 0. \quad (5.7)$$

Ако су $x = \xi$ и $y = \eta$ координате тачке N_k на контури (K) попречног пресека штапа, а ds је елемент лука дуж контуре (K) , онда су јединични вектори тангенте и нормале

$$\mathbf{T} = -\beta \mathbf{i} + \alpha \mathbf{j} = (dx/ds) \mathbf{i} + (dy/ds) \mathbf{j}; \quad \mathbf{n} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j},$$

па су косинуси смера спољашње нормале (\mathbf{n}) :

$$\alpha = \cos \alpha = dy/ds = d\eta/ds; \quad \beta = \cos \beta = -(dx/ds) = -(d\xi/ds). \quad (5.8)$$

Уношењем ових вредности у једначину (5.7) добија се услов

$$\begin{aligned} \alpha (\partial \Phi / \partial y) - \beta (\partial \Phi / \partial x) &= (\partial \Phi / \partial y) (dy/ds) + (\partial \Phi / \partial x) (dx/ds) = \\ &= (\text{grad } \Phi, ds)/ds = d\Phi/ds = 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

* Prandtl L., Zur Torsion von prismatischen Stäben; Phys. Ztsch. (1903).

који показује да напонска функција има на контури пресека (K) константну вредност $\Phi_{(K)} = D_K = \text{const}$. У случају *једносироко повезаној подручја може се узети да је вредности ове константе једнака нули*, па је

$$\Delta\Phi_{(K)} = [\partial^2\Phi/\partial x^2 + (\partial^2\Phi/\partial y^2)] = C_K; \quad \Phi_{(K)} = 0; \quad [d\Phi/ds]_{(K)} = 0, \quad (5.10)$$

јер се додавањем функцији напона неке константе не мењају њени изводи, а тиме ни компонентни тангенцијални напони (5.4).

Нормала леве основе (A) је — Oz-оса, тојест $\mathbf{n}_1 = -k(0; 0; -1)$ па из (1.9) следи да су површинске силе $X_n' = -\tau_{zx}$; $Y_n' = -\tau_{zy}$; $Z_n' = 0$. Редукцијом свих сила које дејствују на овој основи на тежиште (O) основе, и коришћењем Green-Gauss-овог обрасца*, добија се главни вектор

$$X_r = \iint_{(A)} X_n' dA = - \iint_{(A)} \tau_{zx} dx dy = - \iint_{(A)} (\partial\Phi/\partial y) dx dy = - \oint_{(K)} \Phi dx = 0; \quad (5.11)$$

$$Y_r = \iint_{(A)} Y_n' dA = \iint_{(A)} \tau_{zy} dx dy = \iint_{(A)} (\partial\Phi/\partial x) dx dy = \oint_{(K)} \Phi dy = 0; \quad Z_r = 0, \quad (5.12)$$

што је $\Phi_{(K)} = 0$.

Главни момент површинских сила за пол (O) једнак је негативном торзијском моменту, то ће бити:

$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_t \mathbf{k}; \quad -\mathfrak{M}_t = \iint_{(A)} (xY_n' - yX_n') dx dy = \iint_{(A)} (-x\tau_{zy} + y\tau_{zx}) dx dy,$$

односно

$$-\mathfrak{M}_t = \iint_{(A)} [(\partial\Phi/\partial x)x + (\partial\Phi/\partial y)y] dx dy = \iint_{(A)} x(\partial\Phi/\partial x) dx dy + \iint_{(A)} y(\partial\Phi/\partial y) dx dy.$$

Први интеграл на десној страни предње једначине парцијалном интеграцијом** постаје:

$$\begin{aligned} \iint_{(A)} x(\partial\Phi/\partial x) dx dy &= \int_{y_0}^{y_1} dy \left[\int_{x_0}^{x_1} x(\partial\Phi/\partial x) dx \right] = \int_{y_0}^{y_1} dy \left\{ [x\Phi]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \Phi dx \right\} = \\ &= \int_{(y_0)}^{y_1} dy [x_1\Phi(x_1, y) - x_0\Phi(x_0, y) - \int_{(x_0)}^{x_1} \Phi dx] = - \iint_{(A_0)} \Phi dx dy. \end{aligned}$$

Истим поступком добија се да је други интеграл на десној страни предње релације:

$$\iint_{(A)} y(\partial\Phi/\partial y) dx dy = \int_{x_1}^{x_1} dx \left[\int_{y_1}^{y_1} y(\partial\Phi/\partial y) dy \right] = \int_{x_0}^{x_0} dx \left[\int_{y_0}^{y_1} -\Phi dy \right] = - \iint_{(A)} \Phi dx dy,$$

пошто је на контури $\Phi(x_1, y) = \Phi(x_0, y) = 0$; $\Phi(x, y_1) = \Phi(x, y_0) = 0$.

* $\iint_{(A)} [(\partial Q/\partial x) - (\partial P/\partial y)] dx dy = \oint_{(K)} [Pdx + Qdy]$; $P = P(x, y)$; $Q = Q(x, y)$;

** $\int u dv = uv - \int v du$; $x = u$; $\Phi = v$.

С обзиром на ове релације добија се да је торзијски момент

$$\mathfrak{M}_t = \mathfrak{M}_z = 2 \int \int_{(A)} \Phi(x, y) dx dy.$$

Нормала десне основе (B) је Az -оса, то јест $\mathbf{n}_2 = \mathbf{k} (0; 0; 1)$ те су компонентне површинске силе $X'_n = \tau_{zx}$; $Y'_n = \tau_{zy}$; $Z'_n = 0$. Редукцијом свих сила на тежиште основе добили би се исти услов (5.11) и (5.12), међутим, главни момент је

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_t = \mathfrak{M}_z = \int \int_{(A)} (xY'_n - yX'_n) dx dy &= \int \int_{(A)} (x\tau_{zy} - y\tau_{zx}) dx dy = - \int \int_{(A)} [x(\partial\Phi/\partial x) + \\ &+ y(\partial\Phi/\partial y)] dx dy = - \left[\int \int_{(A)} \Phi dx dy - \int \int_{(A)} \Phi dx dy \right]. \end{aligned}$$

Дакле, торзијски момент износи у оба случаја

$$\mathfrak{M}_t = 2 \int \int_{(A)} \Phi(x, y) dx dy, \quad (5.13)$$

где је интеграл узет по површини попречног пресека штапа.

Из изложеног може се уочити да учињене претпоставке о напонима (5.1) задовољавају Navier-ове једначине (1.25) и Beltrami-јеве једначине (3.26) и одговарају торзији штапа услед момента увијања \mathfrak{M}_t . Компонентни тангенцијални напони τ_{zx} и τ_{zy} одређују се помоћу функције напона $\Phi(x, y)$ која у тачкама попречног пресека мора да задовољи парцијалну диференцијалну једначину (5,5), стим да јој је вредност на контури једнака нули. Овакав се проблем назива **контурни проблем** (boundary problem, краевая задача, Randwertaufgabe).

Тотални тангенцијални напон уједно је и тотални напон у попречном пресеку управном на Oz -осу, те је

$$\mathbf{p}_{(z)} = \vec{\tau}_{(z)} = \tau_{zx} \mathbf{i} + \tau_{zy} \mathbf{j} = (\partial\Phi/\partial y) \mathbf{i} - (\partial\Phi/\partial x) \mathbf{j}. \quad (5.14)$$

Његова пројекција на правац нормале је

$$\begin{aligned} p_{zn} = \sigma_n = (\mathbf{n}) \{ \mathbf{p}_{(z)} \} &= (\alpha \beta) \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} = \alpha \tau_{zx} + \beta \tau_{zy} = \\ &= (\partial\Phi/\partial y) (dy/ds) + (\partial\Phi/\partial x) (dx/ds) = d\Phi/ds = 0, \end{aligned} \quad (5.15)$$

док је пројекција на правац тангенте

$$\begin{aligned} p_{zT} = (\mathbf{T}) \{ \mathbf{p}_{(z)} \} &= (-\beta \alpha) \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} = -\beta \tau_{zx} + \alpha \tau_{zy} = \\ &= -[(\partial\Phi/\partial x) \alpha + (\partial\Phi/\partial y) \beta] = -(\text{grad } \Phi, \mathbf{n}) = \tau_t. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Из (5.15) закључује се да је функција $\Phi(x, y)$ константна у тачкама попречног пресека, а да је на контури једнака нули

$$\Phi(x, y) = D = \text{const}; \quad \Phi_{(K)} = 0, \quad (5.17)$$

па је стога, и с обзиром на (5.14) тотални напон

$$\tau_t = [\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2]^{1/2} = [(\partial\Phi/\partial x)^2 + (\partial\Phi/\partial y)^2]^{1/2} = -(\text{grad } \Phi, \mathbf{n}) = -d\Phi/dn, \quad (5.18)$$

једнак негативном изводу торзијске функције $\Phi(x, y)$ по нормали (\mathbf{n}) која се усмерава улође од контуре пресека (K). Овај је напон, дакле, на контури (K) колинеаран са њеном тангентом у тачки чија је нормала контуре (\mathbf{n}). Стога се могу конструисати линије тангенцијалног напона које имају особину да тотални торзијски напон τ , пада у правац тангенције на ту линију, па је диференцијална једначина ових линија

$$[\mathbf{p}_{(z)}, \mathbf{T}] = [\tau_t, ds] = 0; \quad \tau_{zx}/dx = \tau_{zy}/dy; \quad \tau_{zx} dy - \tau_{zy} dx = 0,$$

односно, према (5.4)

$$\tau_{zx} dy - \tau_{zy} dx = (\partial \Phi / \partial x) dx + (\partial \Phi / \partial y) dy = (\text{grad } \Phi, ds) = d\Phi / ds = 0. \quad (5.19)$$

Линије једначине $\Phi(x, y) = \text{const}$ јесу *напонске линије*, а тангенцијални напон пада у правац тангенте на ту линију, док му је величина једнака негативном изводу те функције $\Phi(x, y)$ по нормали (\mathbf{n}) у дотичној тачки (слика 5.3).

Према (1.31) секуларна једначина и главни напони су:

$$f(\sigma_s) = \begin{vmatrix} -\sigma_s & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & -\sigma_s & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & -\sigma_s \end{vmatrix} = \sigma_s [\sigma_s^2 - (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2)] = 0;$$

$$\sigma_1 = [\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2]^{1/2} = [(\partial \Phi / \partial x)^2 + (\partial \Phi / \partial y)^2]^{1/2} = -\sigma_3; \quad \sigma_2 = 0, \quad (5.20)$$

а највећи тангенцијални напон је

$$\tau_{t \max} = \tau_t = (\sigma_1 - \sigma_3) = \sigma_1 / 2 = [(\partial \Phi / \partial x)^2 + (\partial \Phi / \partial y)^2]^{1/2} \quad (5.21)$$

С обзиром на (5.1) и (5.4) компонентне деформације су:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = 0; \quad \gamma_{xy} = 0; \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \gamma_{zx} / \mathbf{G} = (\partial \Phi / \partial y) / \mathbf{G}; \quad \tau_{zy} = \tau_{zy} / \mathbf{G} = -(\partial \Phi / \partial x) / \mathbf{G}$$

па су, према обрасцима (2.35), (2.37) и (2.39) изводи компонентних померања;

$$\partial u / \partial x = 0; \quad \partial v / \partial y = 0; \quad \partial w / \partial z = 0;$$

$$\partial u / \partial y = (1/2 \mathbf{G}) \int_0^z [(\partial^2 \Phi / \partial y^2) + (\partial^2 \Phi / \partial x^2)]_{x=0; y=0} dz + C_1 = (Cz/2 \mathbf{G}) + C_1; \quad \Delta \Phi = C;$$

$$\partial u / \partial z = (1/2 \mathbf{G}) \int_0^y [\Delta \Phi]_{x=0} dy + C_2 = (Cy/2 \mathbf{G}) + C_2; \quad \partial \tau_{zx} / \partial z = 0; \quad \partial \tau_{zy} / \partial z = 0;$$

$$\begin{aligned} \partial v / \partial x &= -\partial u / \partial y = -(Cz/2 \mathbf{G}) - C_1; \quad \partial v / \partial z = -\int_0^x [\partial (\partial u / \partial y) / \partial z] dx + C_4 = \\ &= -(Cx/2 \mathbf{G}) + C_4; \end{aligned}$$

$$\partial w / \partial x = (\tau_{zx} / \mathbf{G}) - (\partial u / \partial z) = [(\partial \Phi / \partial y) / \mathbf{G}] - (Cy/2 \mathbf{G}) - C_2;$$

$$\partial w / \partial y = (\tau_{zy} / \mathbf{G}) - (\partial v / \partial z) = -[(\partial \Phi / \partial x) / \mathbf{G}] + (Cx/2 \mathbf{G}) - C_4,$$

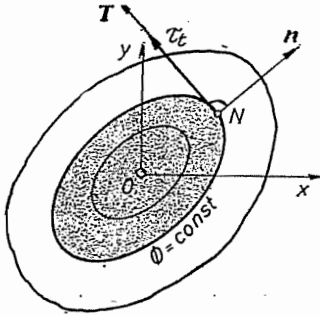
те су компонентна померања

$$u = (C/2 \mathbf{G}) zy + C_1 y + C_2 z + C_3; \quad v = -(C/2 \mathbf{G}) zx - C_1 x + C_4 z + C_5;$$

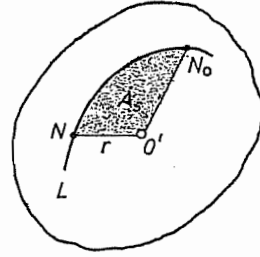
$$w = (1/\mathbf{G}) \left\{ \int_0^x (\partial \Phi / \partial y) dx - \int_0^y [\partial \Phi / \partial x]_{x=0} dy \right\} - (C/2 \mathbf{G}) xy - C_2 x - C_4 y + C_6.$$

Интеграционе константе C_i одредићемо из услова ослањања вратила. Пошто је леви крај (A) вратила *укљешћен*, то је координатни почетак (тежиште) O *непомичан*, па је за $x=y=z=0$ и $u=v=w=0$, те су $C_3=C_5=C_6=0$. Ове константе одговарају транслаторном кретању кругог тела. Овај услов је потребан, али није довољан, јер се штап *може обрћати*. Да би се поништила обрћања око попречних оса (Ox и Oy) мора елемент штапа $dz(0, 0; dz)$ на Oz -оси бити *непомичан*, па могују бити $\partial v/\partial z=0$ и $\partial u/\partial z=0$, то јест $C_2=C_4=0$. Да би одсечак $dx(dx; 0; 0)$ на Ox -оси био *непомичан*, тј. да се не би обрћао око оса Oy и Oz , мора бити $\partial u/\partial y=0$ и $\partial v/\partial x=0$, то јест мора бити $C_1=0$. Пошто су овим одређене све константе $C_i=0$, то су компонентна померања:

$$u = \frac{C}{2G} yz; \quad v = -\frac{C}{2G} xz; \quad w = -\frac{C}{2G} xy + \frac{1}{G} \left\{ \int_0^x \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx - \int_0^y \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{x=0} dy \right\} \quad (5.23)$$



Слика 5.3. — Линије торзијског тангенцијалног напона



Слика 5.4. — Секторска координата

Нека тачка $N(x, y; a)$ попречног пресека удаљеног за $z=a$ од укљештења A добија хоризонтално померање:

$$s_n = [u^2 + v^2]^{1/2} = (C/2G) z [x^2 + y^2]^{1/2} = Czr/2G; \quad r = \overline{ON} = [x^2 + y^2]^{1/2}, \quad (2.54)$$

а попречни пресек се заокреће око Oz -осе за угао торзије

$$\varphi_z = [(\partial v/\partial x) - (\partial u/\partial y)]/2 = -(Cz/2G) = \theta; \quad \theta' = \varphi_z/z = -C/2G = \theta/z, \quad (5.25)$$

где је θ' величина овог угла по јединици дужине штапа, тзв. *редуковани угао увијања (шорозије) на јединицу дужине вратила или торзијска дилајација*. На овај се начин може одредити константа

$$C = \Delta \Phi = -2G\theta' = -2G\theta/z, \quad (5.26)$$

па се компонентна померања могу изразити и на овај начин

$$u = \theta' yz; \quad v = \theta' xz; \quad w = \theta' xy + \frac{1}{G} \left\{ \int_0^x \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx - \int_0^y \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{x=0} dy \right\}. \quad (5.27)$$

С обзиром на предњу релацију и Cauchy-јеве једначине (2.24) биће изводи

$$\begin{aligned}\partial w / \partial x &= (\tau_{zx} / \mathbf{G}) - (\partial u / \partial z) = \theta' y + \mathbf{G}^{-1} (\partial \Phi / \partial y); \\ \partial w / \partial y &= -[\theta' x + \mathbf{G}^{-1} (\partial \Phi / \partial x)],\end{aligned}\quad (5.28)$$

па се множењем прве са dx , а друге са dy и сабирањем, добија

$$\begin{aligned}dw &= (\partial w / \partial x) dx + (\partial w / \partial y) dy = \theta' (y dx - x dy) - \mathbf{G}^{-1} [(\partial \Phi / \partial x) dy - \\ &- (\partial \Phi / \partial y) dx] = \theta' (y dx - x dy) - \mathbf{G}^{-1} (\text{grad } \Phi, \mathbf{n}) ds.\end{aligned}$$

Интегралењем дуж неке линије L од тачке $N_0(x_0, y_0)$ до тачке $N(x, y)$ која не излази из домена тог произвољног попречног пресека (слика 5.4) биће

$$w(x, y) = -\theta' \int_L (x dy - y dx) - \mathbf{G}^{-1} \int_L (\partial \Phi / \partial n) ds + w_0, \quad (5.29)$$

где је $w_0 = \text{const}$ померање w у тачки N_0 . Када је N_0 у тачки O' на Oz -оси тада је $w_0 = 0$. Први интеграл представља *двосируку секторску површину** сектора $O' N_0 NO'$ односно *секторску координату*** $S = 2A$, тачке N , па је компонентно померање у Oz -правцу:

$$w(x, y) = -\theta' S - \mathbf{G}^{-1} \int_L (\partial \Phi / \partial n) ds + w_0. \quad (5.30)$$

Проблем торзије призматичног штапа може се третирати и на други начин како је урадио S. Venant*** (1847. године) уводећи *функцију дејланације* или *функцију померања* $\varphi(x, y)$. При заокретању кружног пресека око Oz -осе услед момента увијања заокренуће се потег $r = ON$ за угао θ , па је померање у равни пресека $s_n = s = r\theta \mathbf{T} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$, те су $u = -r\theta \sin \theta = -\theta y = -\theta' zy$; $v = r\theta \cos \theta = \theta x = \theta' xy$ као и у (5.27). S. Venant претпоставља да се компонентна померања u и v произвољног пресека вратила могу изразити истим зависностима као и код кружног пресека, па се помоћу Lamé-ових једначина (3.19) и контурних услова може закључити и о трећој компоненти те су

$$u = -\theta' yz; \quad v = \theta' xz; \quad w = \theta' \varphi(x, y) \quad (5.31)$$

где је $\varphi(x, y)$ S. Venant-ова *функција* или *функција дејланације*. Дакле, код ових вратила постоји депланација попречних пресека али се она врши на исти начин. Ово показује да је померање w исто за све попречне пресеке, па и пресек на месту уклештења, што физички није оправдано, те се предња релација може сматрати приближном, а тачније решење се може добити при бољој апроксимацији (квадратној) основних једначина еластичности.

Пошто из (5.31) следи да су $\partial u / \partial x = 0$; $\partial v / \partial y = 0$ и $\partial w / \partial z = 0$ то је $\epsilon_V = 0$, па је према (3.13) и $\mathcal{N}_1 = 0$. Како је $\mathbf{F}_V' = 0$ то из Lamé-ових једначина (3.19) следи да су

$$\Delta u = 0; \quad \Delta v = 0; \quad \Delta w = 0; \quad \Delta \varphi = (\partial^2 \varphi / \partial x^2) + (\partial^2 \varphi / \partial y^2) = 0, \quad (5.32)$$

* Власов В. С., Тонкостенные упругие стержни, физматгиз, Москва, (1959):

** Орторност материјала, чл. 15.2.

*** S. Venant, Sur la torsion des prismes, Comp. Rendus, 24, (1847).

па функција деформације мора бити у домену попречног пресека *хармонијска функција*, пошто задовољава Лапласе-ову парцијалну диф. једначину. Из Нооке-овог закона (3.14), с обзиром на (2.24), добијају се компонентни напони који одговарају овим померањима:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0; \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy} = 0; \quad (5.33)$$

$$\tau_{zx} = \partial \Phi / \partial y = G \theta' [(\partial \varphi / \partial x) - y] = G \theta' [(\partial \psi / \partial y) - y];$$

$$\tau_{zy} = -\partial \Phi / \partial x = G \theta' [(\partial \varphi / \partial y) + x] = -G \theta' [(\partial \psi / \partial x) - x],$$

где је $\psi(x, y)$ функција која је коњугована* хармонијској функцији $\varphi(x, y)$, па је са њом везана Cauchy-Riemann-овим условима**

$$\partial \varphi / \partial x = \partial \psi / \partial y; \quad \partial \varphi / \partial y = -(\partial \psi / \partial x), \quad (5.34)$$

Гранични услов на бочној површини (5.7) сада постаје

$$\tau_{zx} \alpha + \tau_{zy} \beta = (G \theta' / ds) \{[(\partial \varphi / \partial x) - y] dy - [(\partial \varphi / \partial y) + x] dx\} = 0,$$

односно

$$(\partial \varphi / \partial x) dy - (\partial \varphi / \partial y) dx = x dx + y dy;$$

$$\partial \psi / \partial x dx + (\partial \psi / \partial y) dy = d[(x^2 + y^2)/2] \quad (5.35)$$

Овај се услов може и геометријски протумачити. Пошто су $dy = \alpha ds$; $dx = -\beta ds$, то уношењем у предњу релацију следи

$$(\partial \varphi / \partial x) dy - (\partial \varphi / \partial y) dx = [(\partial \varphi / \partial x) \alpha + (\partial \varphi / \partial y) \beta] ds = (\text{grad } \varphi, \mathbf{n}) ds = (d\varphi / dn) ds,$$

односно

$$d\varphi / dn = (\text{grad } \varphi, \mathbf{n}) = (x dx + y dy) / ds = (\mathbf{r}, \mathbf{T}) = \overline{NN'} = d\psi / ds, \quad (5.36)$$

где је $r = r_K$ вектор положаја тачке N_K на контури пресека (K), а дуж $\overline{NN'}$ његова пројекција на тангенту контуре. Овим се проблем одређивања функције деформације $\varphi(x, y)$ свео на класични Neumann-ов проблем одређивања хармонијске функције са задатим њеним изводом по нормали у тачки контуре.

Из граничног услова (5.35) следи да коњугована функција $\psi(x, y)$ мора на контури (K) да задовољава следећи услов

$$\psi_{(K)} = (x^2 + y^2)/2 + C' = R^2/2; \quad R = r_K; \quad C' = 0, \quad (5.37)$$

где је $R = r_K$ вектор положаја тачке N_K на контури, а C' константа која се може узети да је једнака нули, пошто, према (5.33), не утиче на напоне. Овим се проблем одређивања коњуговане функције $\psi(x, y)$ свео на Dirichlet-ов проблем одређивања хармонијске равне функције са задатом вредношћу на контури.

Из (5.36) следи да је коњугована функција деформације:

$$\psi(x, y) = \int_{(L)} (\partial \varphi / \partial n) ds + \psi_0 \quad (5.37)$$

* Clebsch A., Theorie der Elastizität der festen Körper, Leipzig, (1862).

** Додатак II.

где је интеграл узет дуж произвољне криве (L) у пресеку, а која не сече контуру (K), а спаја тачке $N_0(x_0, y_0)$ и $N(x, y)$. Константа ψ_0 представља вредност функције $\psi(x, y)$ у тачки $N_0(x_0, y_0)$. Даље се из (5.33) добија да је

$$d\Phi = (\partial\Phi/\partial x) dx + (\partial\Phi/\partial y) dy = \mathbf{G}\theta' [(\partial\psi/\partial x) dx + (\partial\psi/\partial y) dy - (x dx + y dy)] = \mathbf{G}\theta' \{d\psi - [d(x^2 + y^2)/2]\},$$

па између торзијске функције и функције коњуговане функцији депланације постоји однос

$$\Phi(x, y) = \mathbf{G}\theta' [\psi - (x^2 + y^2)/2] = C[(x^2 + y^2)/4 - 2\psi(x, y)]. \quad (5.39)$$

Када се у ову једначину унесе релација (5.38) добиће се формула

$$\Phi(x, y) = \mathbf{G}\theta' [(r_0^2 - r^2)/2 + \int_{(A)}^{(4)} (\partial\varphi/\partial n) ds + \Phi_0; \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad (5.40)$$

која показује промену функције напона $\Phi(x, y)$ дуж произвољне криве (L) у равни попречног пресека вратила. Константа Φ_0 представља вредност функције у тачки $N_0(x_0, y_0)$. Када је N_0 на контури, тада је $\Phi_0 = \Phi_{(K)} = 0$. Предња једначина показује да је функција $\Phi(x, y)$ једнозначна у целој области омеђеној контуром (K), што се лако може доказати ако се узме затворена крива L (пут $N_0 NN_0$).

Торзијски момент (5.13) може се изразити и помоћу функције депланације

$$\mathfrak{M}_t = \iint_{(A)} (x\tau_{zy} - y\tau_{zx}) dx dy = \mathbf{G}\theta' \iint_{(A)} [(x^2 + y^2) + (\partial\varphi/\partial y)x - (\partial\varphi/\partial x)y] dx dy,$$

те је

$$\mathfrak{M}_t = 2 \iint_{(A)} \Phi(x, y) dx dy = \mathbf{G}I_t\theta' \mathfrak{T}^*;$$

$$I_t = \iint_{(A)} [(x^2 + y^2) + (\partial\varphi/\partial y)x - (\partial\varphi/\partial x)y] dx dy, \quad (5.41)$$

где је I_t тзв. *торзијски моменти инерције*, а \mathfrak{T}^* *модифицирана торзијска крутост*:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}^* &= \mathbf{G}I_t = \mathbf{G}I_0 - \mathbf{G} \iint_{(A)} [(\partial\varphi/\partial x)y - (\partial\varphi/\partial y)x] dx dy = \\ &= \mathbf{G}I_0 - \mathbf{G} \iint_{(A)} [(\partial\theta/\partial x)^2 + (\partial\varphi/\partial y)^2] dx dy, \end{aligned} \quad (5.42)$$

када се искористи прва Грен-ова идентичност**. Овде је I_0 поларни момент инерције попречног пресека штапа за пол (O) у тежишту. Дакле, из (5.40) видимо да је торзијски момент сразмеран торзијској дилатацији (θ') пошто је крутост \mathfrak{T}^* карактеристика штапа изложеног увијању. Ова крутост је увек позитивна величина, па је $\mathfrak{T}^* = \mathbf{G}I_0$.

* Отпорност материјала, чл. 5.6 и 5.7.

** Када се функције $P = R(\partial S/\partial y)$ и $Q = -R(\partial S/\partial x)$ унесу у Green-Gauss-ov образац биће
$$\oint_{(K)} R[(\partial S/\partial y) dx - (\partial S/\partial x) dy] = - \oint_{(A)} R(\partial S/\partial n) ds = \iint_{(A)} \{\partial[-R(\partial S/\partial x)]/\partial x - \partial[R(\partial S/\partial y)]/\partial y\} dx dy = - \iint_{(A)} [R\Delta S + (\partial R/\partial x)(\partial S/\partial x) + (\partial R/\partial y)(\partial S/\partial y)] dx dy$$
 што представља прву Green-ову идентичност.

Запремина омеђена искривљеним (депланираним) попречним пресеком и првобитним равним пресеком назива се *запремина дејланације* и износи:

$$V_d = \iint_{(A)} w \, dA = \theta' \iint_{(A)} \varphi(x, y) \, dx \, dy. \quad (5.43)$$

Функција депланиције $\varphi(x, y) = \text{const} = c$ задовољава Laplace-ову једначину $\Delta\varphi = 0$, па контурни услов (5.35) постоје $x \, dx + y \, dy = d[(x^2 + y^2)]/2 = 0$, те је једначина контурне линије $x^2 + y^2 = C^2 = R^2$, *круи*. У овоме се случају за *кружин пресек* добијају релације:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^* &= \mathfrak{X} = \mathbf{G} I_0; & \mathfrak{M}_t &= \mathbf{G} I_0 \theta'; & \Phi &= -\mathbf{G} \theta' (x^2 + y^2)/2; & \tau_{zx} &= -\mathbf{G} \theta' y = -\mathfrak{M}_t y/I_0; \\ \tau_{zy} &= \mathfrak{M}_t x/I_0; & \tau_t &= \mathbf{G} \theta' r = \mathfrak{M}_t r/I_0; & \tau_{t \max} &= \mathfrak{M}_t R/I_0 = \mathfrak{M}_t/W_0; \\ u &= -\theta' yz; & v &= \theta' xz; & w &= c \theta'; & s_h &= \theta' zr = \theta r; & V_d &= c \theta' A = \text{const}, \end{aligned} \quad (5.44)$$

које се добијају и на други начин (члан 4.3).

Из изложеног се уочава да само *код кружног пресека појпречни пресек остаје раван и после деформације (Coulomb-ова хипотеза)*, док се други пресеци тордираних штапова *криве*, тј. *дејланирају се*. Може се уочити да од свих пуних штапова истих поларних момената инерције за полове на оси штапа, штап кружног пресека има највећу торзијску крутост, $\mathfrak{X} = \mathbf{G} I_0$, а од шупљих штапова највећу крутост има штап кружно-прстенастог попречног пресека. S. Venant* је показао да повећање поларног момента инерције пресека при истој површини попречног пресека доводи до *умањења* торзијске крутоти. Ово значи да од свих штапова различитих попречних пресека али истих површина (A), начињених од истог изотропног материјала, штап кружног попречног пресека има највећу торзијску крутост, а тиме *најмању вредност* $\tau_{t \max}$ при истим условима оптерећења. Доказ је извео 1948. год. G. Pólya**.

5.2. Торзија штапа елиптичног попречног пресека. — Једначина контурне линије елиптичног попречног пресека, полуоса *a* и *b*, облика је

$$f(x, y) = (x/a)^2 + (y/b)^2 - 1 = 0; \quad x = \xi; \quad y = \eta, \quad (5.45)$$

где су $x = \xi$ и $y = \eta$ координате тачке $N_{(K)}$ на контури (K). Како је вредност функције $\Phi(x = \xi, y = \eta) = \Phi_K = 0$ на контури као што је и $f(x, y) = f_{(K)} = 0$, то се напонска функција може узети у облику

$$\Phi(x, y) = H[f(x, y)] = H[(x/a)^2 + (y/b)^2 - 1], \quad (5.46)$$

Пошто је, због (5.36), $\iint_{(A)} [(\partial\varphi/\partial x)y - (\partial\varphi/\partial y)x] \, dx \, dy = \iint_{(A)} \{[(\partial\varphi/\partial x)y - (\partial\varphi/\partial y)x] - [(\partial\varphi/\partial x)y - (\partial\varphi/\partial y)x]\} \, dx \, dy = \oint_{(K)} \varphi(x \, dx + y \, dy) = \oint_{(K)} \varphi(\partial\varphi/\partial n) \, ds$, то стављајући у предњу идеалност $R = S = \varphi$, а пошто је $\Delta\varphi = 0$, биће

$$\oint_{(K)} \varphi(\partial\varphi/\partial n) \, ds = \iint_{(A)} [(\partial y/\partial x)^2 + (\partial\varphi/\partial y)^2] \, dx \, dy.$$

* S. Venant, Sur une formule donnant approximativement le moment de torsion, Compt. Rendus, 88, (1979)

** Pólya G, Torsional Rigidity, Quart of Appl. Math. VI (1948).

где је H коефицијент сразмере, који се одређује из (5.5), те износи:

$$\Delta\Phi = 2H[(1/a)^2 + (1/b)^2] = C; \quad H = C = a^2 b^2 / 2(a^2 + b^2), \quad (5.47)$$

па је функција напона

$$\Phi(x, y) = C[(bx)^2 + (ay)^2 - (ab)^2] / 2(a^2 + b^2). \quad (5.48)$$

Уношењем ове вредности у (5.13) добија се торзијски момент

$$\mathfrak{M}_t = 2 \int \int_{(A)} \Phi \, dx \, dy = C[b^2 I_y + a^2 I_x - a^2 b^2 A] / (a^2 + b^2) = -C\pi a^3 b^3 / 2(a^2 + b^2), \quad (5.49)$$

где су $A = ab\pi$ површина пресека, а $I_x = a^3 b \pi / 4$ и $I_y = ab^3 \pi / 4$ главни централни моменти инерције елиптичног пресека. Сада се може одредити константа C , а тиме и функција $\Phi(x, y)$, те су:

$$C = -[2(a^2 + b^2) / a^3 b^3 \pi] \mathfrak{M}_t; \quad \Phi = -\mathfrak{M}_t [(bx)^2 + (ay)^2 - (ab)^2] / (ab)^3 \pi, \quad (5.50)$$

па су тангенцијални напони:

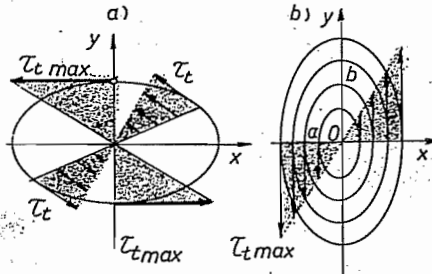
$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= -2 \mathfrak{M}_t y / ab^3 \pi; & \tau_{zy} &= 2 \mathfrak{M}_t x / a^3 b \pi; \\ \tau_t &= 2 \mathfrak{M}_t [(bx/a)^2 + (ay/b)^2]^{1/2} (ab)^2 \pi. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Највећи тангенцијални напони су у *шпеменима мање полуосе* елиптичког пресека ако је $a > b$ онда је

$$\tau_{t \max} = 2 \mathfrak{M}_t / ab^2 \pi = 2 \mathfrak{M}_t / Ab; \quad (5.52. a)$$

ако је $a < b$ онда је

$$\tau_{t \max} = 2 \mathfrak{M}_t / a^2 b \pi = 2 \mathfrak{M}_t / Aa, \quad (5.52. b)$$



Слика 5.5. — Торзија штапа елиптичног попречног пресека

како је показано на слици 5.5 а, б. Ове се вредности слажу са онима добијеним елементарно по Фөррл-овој теорији*.

Напонске линије $\Phi(x, y) = \text{const}$ јесу *елипсе*, сличне контури (K). Ако се координате тачке N_K на контури умање x пута, ($x < 1$), биће $x = \lambda \xi$; $y = \lambda \eta$, па је због контуре $(b \xi)^2 + (a \eta)^2 - (ab)^2 = 0$, вредност функције је

$$\Phi(x, y) = \mathfrak{M}_t (1 - \lambda^2) ab \pi; \quad \lambda < 1. \quad (5.52 c)$$

* Отпорност материјала. чл. 5.5.

Јединични угао увијања (торзијска дилатација) износи

$$\theta' = -(C/2 \mathbf{G}) = \mathfrak{M}_t (a^2 + b^2) / \mathbf{G} (ab)^3 \pi = \mathfrak{M}_t / \mathfrak{I}_0^*; \quad \mathfrak{I}_0^* = \mathbf{G} A^4 / 4 I_0 \pi^2, \quad A = ab \pi, \quad (5.53)$$

где је I_0 централни поларни момент инерције елиптичког пресека за пол O (у тежишту),

$$I_0 = I_x + I_y = ab \pi (a^2 + b^2) / 4 = A (a^2 + b^2) / 4.$$

Из (5.23) следи да је померање у правцу осе штапа:

$$w = -(Cxy/2 \mathbf{G}) + [Ca^2 xy / \mathbf{G} (a^2 + b^2)] = (b^2 - a^2) \mathfrak{M}_t xy / \mathbf{G} (ab)^3 \pi = cxy, \quad (5.54)$$

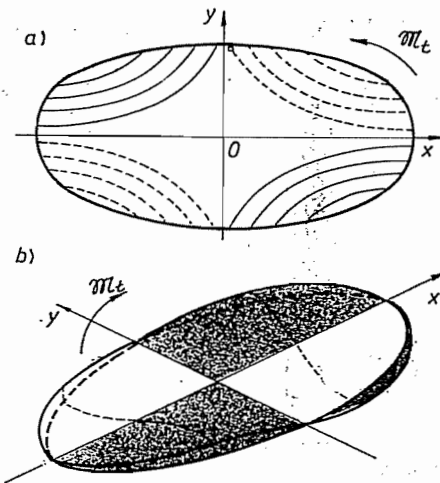
па се попречни пресек деформише у криву површ једначине

$$w = z; \quad z = cxy; \quad c = (a^2 - b^2) \mathfrak{M}_t / \mathbf{G} (ab)^3 \pi; \quad \varphi(x, y) = kxy. \quad (5.55)$$

Она је *елиптички парабола*. Пресеци те површи равнина $z = z_n$, $n = 1; 2; 3; \dots$; јесу *хиперболе*, чије су асимптоте главне централне осе инерције (слика 5.6. а). Изглед депланираног пресека приказан је на слици 5.6. б.

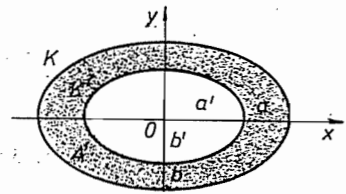
Због $w = cxy$ запремина депланације је $V_d = c \iint xy \, dx \, dy = c I_{xy} = 0$.

Из (5.54) следи да је $a = b$ померање $w = 0$. те нема депланације кружног пресека (Columb-ова хипотеза).



Слика 5.6. — Депланација елиптичног пресека

Код шупље елиптичкој штапа (*вратила*) односа полуоса $\psi = a'/a = b'/b$ (слика 5.7) на спољашњој контури (K) је $\Phi_{(K)} = 0$, али на унутрашњој контури је $\Phi_{(k)} = 0$ те се не може применити образац (5.13), па се торзијски момент мора непосредно срачунавати:



Слика 5.7. — Шупље елиптично вратило

$$\mathfrak{M}_t = \iint_{(A)} (xY_n' - yX_n') \, dx \, dy = \iint_{(A)} (x\tau_{zy} - y\tau_{zx}) \, dx \, dy = -$$

$$- \iint_{(A)} [(\partial \Phi / \partial x) x + (\partial \Phi / \partial y) y] \, dx \, dy =$$

$$= -C \iint_{(A)} [x^2 \, dx \, dy + (y^2 \, dx \, dy)] / (a^2 + b^2) = -C [I_x + I_y] / (a^2 + b^2),$$

па је

$$C = -2(a^2 + b^2) \mathfrak{M}_1 / (ab)^3 \pi (1 - \psi^2), \quad (5.56)$$

пошто су главни централни моменти инерције $I_x = a^3 b \pi (1 - \psi)^4 / 4$; $I_y = ab^3 \pi \cdot (1 - \psi^4) / 4$. Овај се образац разликује од обрасца (5.50) само коефицијентом $1/(1 - \psi^4)$, па се стога сви обрасци изведени за пуно елиптично вратило могу користити и за шуљве елиптично вратило (слика 5.7) множењем коефицијентом $1/(1 - \psi^4)$.

5.3. Примена функције комплексне променљиве. — Поред функције напона $\Phi(x, y)$ у проблему торзије, као што смо видели користе се и функција депланације $\varphi(x, y)$ и њој коњугована функција $\psi(x, y)$ које задовољавају услове (5.34) а у вези су са напонском функцијом преко (5.39). Пошто су функције φ и ψ хармонијске, то се може применити функција комплексне променљиве и увести *комплексна функција торзије*:

$$F(z) = F(x + iy) = U(x, y) + iV(x, y) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (5.57)$$

где су $\varphi = \operatorname{Re} F$ и $\psi = \operatorname{Im} F$, реални и имагинарни део функције F . Ова функција $F(z)$ је холоморфна у области попречног пресека (A) штапа.

Пошто су према (5.33) компонентни напони

$$\tau_{zx} = \mathbf{G} \theta' [(\partial \varphi / \partial x) - y]; \quad \tau_{zy} = -\mathbf{G} \theta' [(\partial \psi / \partial x) - x]$$

то, с обзиром на (5.57), следи релација

$$\tau_{zy} - i\tau_{zx} = \mathbf{G} \theta' \{[(\partial \varphi / \partial x) + i(\partial \psi / \partial x)] - [i(x - iy)]\} = \mathbf{G} \theta' [F' - i\bar{z}], \quad (5.58)$$

где је $F' = dF/dz$ а $\bar{z} = x - iy$ је коњугован броју $z = x + iy$.

Овим се проблем торзије свео на одређивање аналитичке функције $F(z)$ чији су реални и имагинарни део функције $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ које задовољавају контурне услове (5.36), односо (5.37), па се проблем свео на Neumann-ов проблем у погледу функције $\varphi(x, y)$, односно на Dirichlet-ов проблем у односу на функцију $\psi(x, y)$.

Функција $\psi_{(K)} = (x^2 + y^2)/2 + C'$ представља *ираничну криву (K)*, а функција $\varphi(x, y)$ је функција депланације, па је $w = \theta' \varphi(x, y)$. Пошто је функција $F(z) = \varphi + i\psi$, аналитичка то је и функција $F/i = -iF = \psi - i\varphi$ такође аналитичка те задовољава услове (5.34), па су једначина контуре и померање:

$$\psi_{(K)} = -U(x, y) = (x^2 + y^2)/2 + C'; \quad w = \theta' V(x, y); \quad \varphi = V. \quad (5.59)$$

S. Venant је у својој познатом мемоару о торзији узимао функцију $F(z)$ у облику

$$F(z) = F(x + iy) = H(x + iy)^n, \quad (5.60)$$

где је H константа, а n цео број и дошао до великог броја решења важних за техничку праксу.

За $\varphi(x, y) = \operatorname{const} = c$ биће и $\partial \psi / \partial x = 0$ и $\partial \psi / \partial y = 0$, па је $\psi(x, y) = \operatorname{const}$. те је према (5.37), $x^2 + y^2 = \operatorname{const} = R^2$. Крива је *круа*.

Например, када се узме комплексна функција торзије у облику

$$F(z) = H(x + iy)^2 = H[(x^2 - y^2) + 2ixy] = U + iV; \quad \varphi = V = 2Hxy; \quad \psi = -U;$$

онда је, према (5.59) једначина контуре

$$\psi = -U = -H(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)/2 + C''; \quad (x^2/a^2) + (y^2/b^2) - 1 = 0 \text{ (елипса)}$$

где су a и b полуосе елипсе, $a^2 = D/(H+1/2)$; $b^2 = D/(1/2-H)$; па су константе

$$H = (b^2 - a^2)/2(a^2 + b^2); \quad D = -C'' = a^2 b^2 / (a^2 + b^2) \quad \text{и} \quad w = \theta' \cdot 2H \cdot xy.$$

С обзиром на (5.39), може се одмах одредити Prandtl-ова напонска функција $\Phi(x, y)$.

Методу конформног пресликавања много су примењивали Колосов* и Мусхелишвили**. Сматра се да је проблем торзије штапа решен, када се произвољна област попречног пресека (A), омеђена контуром (K), *конформно преслика* на јединични круг (K') у $[w]$ -равни (слика 5.8), под условом да је област (A) просто повезана област. Нека је функција пресликавања

$$z = x + iy = f(w); \quad |w| \leq 1 \quad (5.61)$$

онда *комплексна функција торзије* (5.57) постаје

$$F(z) = F(x + iy) = \varphi + i\psi = F[f(w)] = \mathfrak{F}(w), \quad (5.62)$$

па је $\mathfrak{F}(w)$ холоморфна функција унутар јединичног круга (K'). Из ове релације следи да је

$$i^{-1}\mathfrak{F}(w) = -i\mathfrak{F}(w) = \psi - i\varphi \quad (5.63)$$

такође аналитичка функција, па њен реални део ψ , мора на кругу (K) задовољити гранични услов

$$\psi = (x^2 + y^2)/2 + C' = \bar{z}z/2 + C' = f(w) \cdot \overline{f(w)}/2, \quad (5.64)$$

узимајући да је на контури K' константа $C' = 0$.

Холоморфна функција \mathfrak{F}/i може се одредити унутар круга (K') када је позната вредност њеног реалног дела на граници помоћу Cauchy-јевог интеграла***.

$$\mathfrak{F}(w) = \frac{1}{2\pi} \oint_{(K')} \frac{f(t) \cdot \overline{f(t)}}{(t-w)} dt + D; \quad D = \text{const}; \quad t = e^{i\theta}; \quad (5.65)$$

па је тиме проблем *решен*.

Торзијски момент инерције (5.41) биће:

$$\begin{aligned} I_t &= \iint_{(A)} [(x^2 + y^2) + (\partial \varphi / \partial y) x - (\partial \varphi / \partial x) y] dx dy = \\ &= \iint_{(A)} \{[\partial (x^2 y) / \partial y + \partial (y^2 x) / \partial x]\} dx dy, \\ &+ \iint_{(A)} [\partial (x \varphi) / \partial y] - [\partial (y \varphi) / \partial x] dx dy = \\ &= \oint_{(K)} \{ -[xy(xdx - ydy)] - \varphi [(xdx + ydy)] \}. \end{aligned}$$

* Колосов Г. В., Применение комплексной переменной к теории упругости, ГТТИ, Москва, (1935).

** Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд. АНССР, Москва, (1954),

*** Додатак II.

Пошто су

$$2x = z + \bar{z}; \quad 2iy = z - \bar{z}; \quad x dx + y dy = (\bar{z} dz + z d\bar{z})/2 = d[(z\bar{z})/2],$$

биће

$$I_r = \frac{1}{4i} \oint_{(K)} [\bar{z}^2 z dz - \varphi d(z\bar{z}/2)].$$

јер су према теорему Cauchy-Goursat

$$\oint_{(K)} z^3 dz = \oint_{(K)} \bar{z}^3 d\bar{z} = 0; \quad \oint_{(K)} \bar{z}^2 z d\bar{z} = \oint_{(K)} z^2 d(\bar{z}^2/2) = - \oint_{(K)} \bar{z}^2 z dz.$$

Из (5.62) добијају се релације

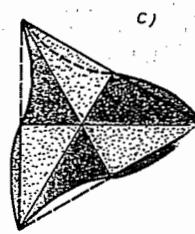
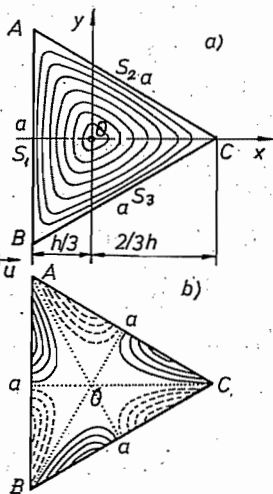
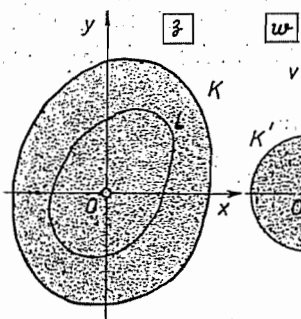
$$\varphi = [\tilde{\mathfrak{F}}(w) + \overline{\tilde{\mathfrak{F}}(w)}]/2; \quad \psi = [\tilde{\mathfrak{F}}(w) - \overline{\tilde{\mathfrak{F}}(w)}]/2i.$$

то се добија

$$\begin{aligned} \tau_{zx} - i\tau_{zy} &= \mathbf{G} \theta' [(\partial y/\partial x) + i(\partial \psi/\partial x) - i(x - iy)] = \\ &= \mathbf{G} \theta' \{[\tilde{\mathfrak{F}}'(w)]/[f'(w)] - [if'(w)]\}, \end{aligned} \tag{5.67}$$

где су

$$\tilde{\mathfrak{F}} = d\mathfrak{F}/dw \quad \text{и} \quad f' = df/dw = dz/dw.$$



Слика 5.8. — Метода конформног пресликавања

Слика 5.9. — Торзија штапа троугластог пресека

5.3.1. Неки S. Venant-ови резултати. — *a) Пресек облика једнакостраничне троугла.* — Када се комплексна функција торзије узме у облику

$$\begin{aligned} F(z) &= H(x + iy)^3 = H[(x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)] = \\ &= U + iV; \quad \varphi = V; \quad \psi = -U; \end{aligned} \tag{5.68}$$

онда је, према (5.59), гранични услов,

$$\psi = -U = -H(x^3 - 3xy^2) = (x^2 + y^2)/2 + C'; \quad D(x^3 - 3xy^2) + x^2 + y^2 + E = 0, \tag{a}$$

где су $D = 2H$ и $E = 2C'$. Пиво је хипербола трећег реда. Изједначујући са нулом бином највишег реда добијају се асимптоте

$$(x^3 - 3xy^2) = x(x^2 - 3y^2) = x(x + y\sqrt{3})(x - y\sqrt{3}) = 0.$$

Ако се узму три праве паралелне асимптотама

$$x = b; \quad x + y\sqrt{3} = c; \quad x - y\sqrt{3} = c, \quad (b)$$

онда се погодним избором константи D и E може крива (а) може разложити на те три праве. Када се унесу у (а) релације (б) добија се систем једначина

$$Dx^3 - 3Dxy^2 + x^2 + y^2 + E = 0; \quad D(x - b)(x - c + y\sqrt{3}) = Dx^3 - 3Dxy^2 - \\ - D(b + 2c)x^2 + 3Dby^2 + Dc(2b + c)x - Dbc^2 = 0,$$

па се изједначењем коефицијената уз исте мономе добијају релације

$$-D(b + 2c) = 1; \quad 3Db = 1; \quad Dc(2b + c) = 0; \quad -Dbc^2 = E,$$

то су константе

$$c = -2b; \quad D = b/3 = 2H; \quad H = b/6;$$

$$E = -Dbc^2 = -c^2/3 = -4b^2/3 = 2C'; \quad C' = -2b^2/3.$$

Ако се узме да је $b = -h/3$, онда се добија једнакостранични троугао (слика 5.9. а) са теменима $A(-h/3; a/2)$; $B(-h/3; -a/2)$; $C(2h/3; 0)$, $a = -2h\sqrt{3}/3$. Једначине правих су: $AB(x = -h/3)$; $AC(x/(2h/3) + y/(a/3) = 1$ или $x + y\sqrt{3} - (2h/3) = 0$; $BC(x - y\sqrt{3} - (2h/3) = 0$.

Тангенцијални компонентни и тотални напони су:

$$\tau_{xz} = \mathbf{G}\theta'[(\partial\psi/\partial y) - y] = -\mathbf{G}\theta'(6xy + 2hy)/2h; \quad (5.69) \\ H = -1/2h; \quad \psi = (x^3 - 3xy^2)/2h;$$

$$\tau_{zy} = \mathbf{G}\theta'[2hx - 3(x^2 - y^2)]/2h;$$

$$\tau_t = (\mathbf{G}\theta'/2h)(6xy + 2hy)^2 + \{[2hx - 3(x^2 - y^2)]^2\}^{1/2},$$

па су у теменима (A , B и C) и тежишту (O) једнаки нули. Највећи напон у срединама $S_1(-h/3; 0)$, $S_2(h/6; a/4)$ и $S_3(h/6; -a/4)$ страница троугла ABC и износи:

$$\tau_{t\max} = \mathbf{G}\theta' h/2.$$

У тачкама Ox -осе напон износи $\tau_t = \mathbf{G}\theta'(2hx - 3x^2)/2h$ и мења се, дакле, по закону параболе, како је показано на слици 5.9. б.

Према (5.39) Prandtl-ова функција напона је

$$\Phi = \mathbf{G}\theta'[-(x^2 + y^2)/2 + \psi] = \mathbf{G}\theta'[(x^3 - 3xy^2) - h(x^2 + y^2)]/2h \quad (d)$$

па је, према (5.41), момент торзије:

$$\mathfrak{M}_t = 2 \iint_{(A)} \Phi dx dy = \mathbf{G}\theta' \left[-I_0/2 + \iint_{(A)} dx dy \right] = \frac{\mathbf{G}\theta' h^4 \sqrt{3}}{45}, \quad (5.71)$$

док је угао торзије (торзијска депланација)

$$\theta' = 5 \mathfrak{M}_t / 3 \mathbf{G} I_0 = \mathfrak{M}_t / \mathfrak{F}^*; \quad \mathfrak{F}^* = 3 \mathbf{G} I_0 / 5, \quad (5.72)$$

где је I_0 поларни момент инерције попречног пресека

$$I_0 = I_x + I_y = 2 I_x = 2 \cdot ah^3/36 = ah^3/18 = a^4\sqrt{3}/48 = h^4\sqrt{3}/27 = Ah^2/9; \quad A = ah/2.$$

Напонске линије приказане су на слици 5.9. а.

Према (5.31) депланација је

$$w = z = \theta V = H \theta' (3 x^2 y - y^3) = \theta' (y^3 - 3 x^2 y) / 2 h. \quad (5.73)$$

За $z = 0$ су $y = 0$ и $x = 0$ и $y = \pm x\sqrt{3}$, па тежиште осе остају недепланиране. Изохипсе су приказане на слици 5.9. b, а изглед депланираног пресека на слици 5.9. c.

b) *Хипоциклоидни пресеци.* — Када се комплексна функција торзије узме у облику

$$F(\zeta) = H(x + iy)^4 = H[(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + i(4x^3 - 4xy)]; \quad \psi = -U; \quad \varphi = V; \quad (5.74)$$

онда је, према (5.59) гранични услов

$$\begin{aligned} \psi_{(K)} &= -U = -H(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) = (x^2 + y^2)/2 + C'; \\ &- (x^2 + y^2) + a(x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - 1) + 1 = 0 \end{aligned} \quad (a)$$

где су $2H = -a$ и $C' = (a - 1)$. Види се да све криве пролазе кроз тачке $A(\pm 1; 0)$ и $B(0; \pm 1)$, а за $a = 0$ добија се јединични круг (слика 5.10). Према (5.39) и (5.36) биће Prandtl-ова торзијска функција

$$\Phi = \mathbf{G} \theta' [a(x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - 1) - (x^2 + y^2) + 1]/2, \quad (5.75)$$

па су компонентни тангенцијални напони

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= (\partial \Phi / \partial y) = \mathbf{G} \theta' [2a(y^3 - 3x^2y) - y]; \\ \tau_{zy} &= -(\partial \Phi / \partial x) = \mathbf{G} \theta' [2a(3xy^2 - x^3) + x]. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Напони у теменима износе:

$$\begin{aligned} A(\pm 1; 0); \quad \tau_{zx} &= 0; \quad \tau_{zy} = \mathbf{G} \theta' (1 - 2a); \\ B(0; \pm 1); \quad \tau_{zx} &= \mathbf{G} \theta' (2a - 1); \quad \tau_{zy} = 0. \end{aligned} \quad (5.77)$$

На основу ових резултата S. Venant је дошао до закључка „*ga je najveći тангенцијални напон увијеној шпалау у оној тачки контурне линије која је најближа тежишту пресека шпалау (O)*“. Међутим, 1900. године Филон (Tr. Roy. Soc., London) је показао да има и изузетака.

Упоредијући различите једноструко повезане пресеке S. Venant је оучио да се модифицирана торзијска крутост (\mathfrak{F}^*) може приближно израчунати по обрасцу за елипсу (5.53)

$$\mathfrak{F}^* = \mathbf{G} A^4 / 4 I_0 \pi^2 \quad (5.78)$$

заменејући стварно вратило „*еквивалентним елиптичким вратилом*“ исте површине (A) и поларног момента инерције (I_0) као и код стварног вратила.

5.3.2. Вебер-ов проблем. — Из кружног вратила исечен је уздужни полукружни жлеб, полупречника a , са средиштем O на ободу попречног пресека* (слика 5.11). Торзијска функција у поларним координатама r и φ са полом у O претпоставићемо у облику**

$$\Phi(r, \varphi) = H(r - 2R \cos \varphi) \cdot f(r), \quad (5.79)$$

где је H произвољна константа, а $f(r)$ произвољна функција од r . Пошто функција $\Phi(r, \varphi)$ мора да задовољи услов (5.5), то ће с обзиром на (3.56), бити:

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = H \left[r f'' + 3 f' + \frac{f}{r} \right] - 2 R \cos \varphi \left(f'' + \frac{f'}{r^2} - \frac{f}{r^2} \right) = C,$$

где је $f' = df/dr$, а C константа. Стога морају једновремено да буду задовољене две обичне диференцијалне једначине

$$f'' + [f'/r] - (f/r^2) = 0; \quad r f'' + 3 f' + (f/r) = C/H = c = \text{const.}$$

Решење ових једначина је $f = (cr/4) + (D/r)$. Пошто на контури мора бити $\Phi(r; \varphi) = \Phi(a; \varphi) = \Phi(2R \cos \varphi; \varphi) = 0$, то мора бити $f(a) = 0$, па је константа $D = -ca^2/4 = -Ca^2/4H$, те је торзијска функција

$$\Phi(r, \varphi) = C(r^2 - a^2)(r - 2R \cos \varphi)/4r. \quad (5.80)$$

Према (5.4), с обзиром на (1.23) и (1.84), биће компонентни напони:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \tau_{xr} \\ \tau_{zc} \end{Bmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \varphi \\ -\sin \varphi \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(\partial \Phi / \partial x) \sin \varphi + (\partial \Phi / \partial y) \cos \varphi \\ -(\partial \Phi / \partial x) \cos \varphi - (\partial \Phi / \partial y) \sin \varphi \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} r^{-1} (\partial \Phi / \partial \varphi) \\ -(\partial \Phi / \partial r) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.81)$$

$$\tau_{xr} = r^{-1} (\partial \Phi / \partial \varphi) = CR[(r^2 - a^2) \sin \varphi] / 2r^2;$$

односно

$$\tau_{zc} = -(\partial \Phi / \partial r) = C[(r^2 + a^2) R \cos \varphi - r^3] / 2r^2. \quad (5.82)$$

У тачкама $A(a; 0)$ и $B(2R; 0)$ напони су:

$$A) \tau_{xr} = 0; \quad \tau_{zc} = C(2R - a)/2 = CR[2 - (a/R)]/2;$$

$$B) \tau_{xr} = 0; \quad \tau_{zc} = -CR[4 - (a/R)^2]/8. \quad (5.83)$$

Када $a/h \rightarrow 0$ тада $\tau_{r \max} \rightarrow CR$; тј. скоро је два пута већи од највећег напона за кружни пресек (концентрација напона).

Торзијски момент, константа C и модифицирана торзијска крутост \mathfrak{G}^* биће:

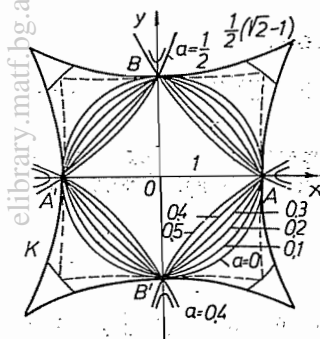
$$\begin{aligned} M_t &= 2 \int \int_{(A)} \Phi r dr d\varphi = -\frac{C}{2} \left[\frac{R^4 \pi}{2} - a^2 \pi \left[R^2 - \frac{8Ra}{3\pi} + \frac{a^2}{4} \right] \right] = \theta' \mathfrak{G}^*; \\ C &= -2 \mathbf{G} \theta'. \end{aligned} \quad (5.84)$$

* Weber C., Forschungs arbeiten, № 249, (1921).

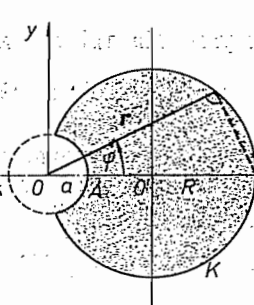
** Biezeno K. Grammel R., Technische Dynamik, Band 1, (1949).

5.3.3. Кардиондни пресек. — У овом случају (слика 5.12. а) применићемо методу конформног пресликавања и кардиоиду пресликати на јединични круг (слика 5.12. б). Када се круг полупречника R , котрља споља без клизања по непокретном кругу истог полупречника тада тачка N на ободу покретног круга описује кардиоду. При заокретању покретног круга за угао ψ тренутни ће пол прећи из P_0 у P , а средиште O_2 у O_2' , док ће се потег $O_2'N_0$ заокренути у односу на првобитни положај за угао 2ψ у положај $O_2'N$. Пошто су троуглови OO_1P ; PO_2N и OPN равнокраки, то је четвороугао OO_1O_2NO једнокраки трапез, па је $\overline{O_1O_2} \parallel \overline{ON}$ и $\varphi = \psi$. Поларна и параметарске једначине кароиде су:

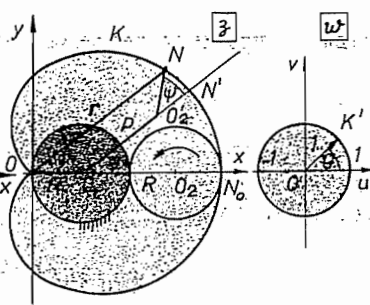
$$\begin{aligned} r &= 2R(1 + \cos \varphi); & x &= r \cos \varphi = R(1 + 2 \cos \varphi + \cos 2\varphi); \\ y &= r \sin \varphi = R(2 \sin \varphi + \sin 2\varphi). \end{aligned} \quad (5.85)$$



Слика 5.10. — Хипоциклоидни пресеци.



Слика 5.11. — Кружни пресек ослобођен полукружним зарезом



Слика 5.12. — Кардиондни пресек

Према (5.61) функција пресликавања области A омеђене кардиоидом у $[z]$ -равни у област омеђену јединичним кругом K' у $[w]$ -равни, је:

$$z = x + iy = R(1 + w)^2 = f(w); \quad w = e^{i\theta};$$

$$R(1 + 2e^{2i\varphi} + e^{2i\varphi}) = R(1 + 2w + w^2); \quad \varphi = \theta. \quad (5.86)$$

Према (5.65) користећи методу резидијума* добија се функција $\mathfrak{F}(w)$:

$$\mathfrak{F}(w) = iR^2(w^2 + 4w) = R^2[-[\sin 2\varphi + 4 \sin \varphi] + i(\cos 2\varphi + 4 \cos \varphi)], \quad (5.87)$$

па уношењем те релације у (5.67) следи:

$$\tau_{zx} - i\tau_{zy} = \mathbf{G} R \theta' \quad \text{и} \quad \{[(w+2)/(w+1)] - (1+\bar{w})^2\}. \quad (5.88)$$

За дату вредност $w = u + iv$ могу се одредити компонентни напони у w -равни, а помоћу функције пресликавања може се одредити кореспондентна тачка у $[z]$ -равни. Тако би за $w = 1$, тојест у тачки N_0 , били напони $\tau_{zx} = 0$, $\tau_{zy} = \mathbf{G} R \theta'/2$.

* Додатак, II, 11.

Пошто су јединичном кругу (K') у $[w]$ -равни

$$w = e^{i\varphi} = t; \quad \bar{w} = \bar{t} = 1/t; \quad \mathfrak{F}(t) = iR^2(t^2 + 4t);$$

$$\overline{\mathfrak{F}(t)} = -iR^2\left(\frac{1}{t^2} + \frac{4}{t}\right); \quad \mathfrak{z} = f(t) = R(1+t)^2; \quad \overline{\mathfrak{z}} = \overline{f(t)} = R\left(1 + \frac{1}{t}\right)^2,$$

то је, према (5.66), торзијски момент инерције:

$$\begin{aligned} I_t &= \frac{R^4}{2i} \left\{ \oint \frac{(1+t)^2}{t^4} dt + \oint \left[\left(t^2 + 4t - \frac{1}{t^2} - \frac{4}{t} \right) \frac{(1+t)^3}{t^3} (t-1) \right] dt \right\} = \\ &= 2\pi i \frac{R^4}{2i} (35 - 18) = 17 R^4 \pi, \end{aligned}$$

када се примени теорема резидуума. На тај су начин:

$$I_t = 17 R^4 \pi; \quad \mathfrak{F}^* = \mathbf{G} I_t; \quad \mathfrak{M}_t = \mathbf{G} \theta' I_t; \quad \mathbf{G} \theta' = \mathfrak{M}_t / I_t. \quad (5.89)$$

5.4. Торзија вратила правоугаоног попречног пресека. — Код правоугаоног попречног пресека, страница b и h , (слика 5.13. а), Prandtl-ова торзијска функција може се узети у облику

$$\Phi = C[x^2 - b^2/4 + \psi(x, y)]/2 \quad (5.90)$$

где је C константа, а $\psi(x, y)$ хармонијска функција од x и y , јер због тога што је $\Delta \Phi = C$ мора бити $\Delta \psi = 0$.

Једначина контурне линије је

$$\Phi_{(k)} = 0; \quad \psi(x, y) = b^2/4 - x^2; \quad x = \xi; \quad y = \eta. \quad (5.91)$$

Према Saint Venant-у функцију $\psi(x, y)$ претавићемо у облику производа двеју функција X и Y од којих једна зависи само од y , па се тиме парцијална једначина $\Delta \psi = 0$ своди на две обичне диференцијалне једначине другог реда

$$\Delta \psi = 0; \quad \psi = X(x) \cdot Y(y); \quad X'' Y + X Y'' = 0; \quad X'' + k^2 X = 0; \quad Y'' - k^2 Y = 0, \quad (5.92)$$

у шта се лако уверавамо ако се прва једначина помножи са Y , а друга са X и обе саберу. Овде је k^2 позитивна константа. Пошто су предње обичне диференцијалне једначине хомогене са константним коефицијентима то су њихова решења:

$$X = A \cos kx + B \sin kx; \quad Y = A' Ch ky + B' Sh ky. \quad (5.93)$$

Функција $\psi(x, y)$ мора да задовољи граничне услове (5.91), па пошто је *парна функција* морају бити константе $B = B' = 0$. За $x = \xi = \pm b/2$ мора бити $\psi(\pm b/2, \eta) = X(\pm b/2) \cdot Y(\eta) = 0$ односно

$$X(\pm b/2) = A \cos(\pm kb/2) = 0; \quad \cos(\pm kb/2) = 0:$$

$$k_n = (2n + 1)\pi/b; \quad n = 0; 1; 2; \dots; \quad (5.94)$$

Пошто је једначина $\Delta\psi=0$ *линеарна*, те је и збир решења такође решење једначине, па ће бити

$$\psi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{(2n+1)\pi}{b} x \operatorname{Ch} \frac{(2n+1)\pi}{b} y, \quad (5.95)$$

где су A_n константни коефицијенти које треба одредити из услова да су задовољени гранични услови и на горњој и доњој основици правоугаоника

$$\psi(x=\xi; \pm h/2) = \frac{b^2}{4} - \xi^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(k_n \xi) \operatorname{Ch}(k_n h/2); \quad k_n = (2n+1)\pi/b. \quad (a)$$

Лева страна ове једначине није периодичка функција али се може периодички продужити и у размаку $-b/2 < x = \xi < b/2$ развити у Фурје-оред. Пошто ова функција има симетрију косинусне линије* то су коефицијенти реда

$$a_0 = 0; \quad b_n = 0; \quad a_{2n+1} = (4/b) \int_0^{b/2} \psi \cos k_n \xi d\xi = (-1)^n [8b^2/(2n+1)^3 \pi^3], \quad (b)$$

јер је $\sin(mx) = (-1)^n$ у размаку $[0; b/2]$, те је

$$\psi(\xi, \pm h/2) = b^2/4 - \xi^2 = \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cos k_n \xi. \quad (c)$$

Упоредивањем коефицијента уз изразе $\cos k_n \xi$ једначина (a) и (b) добијају се коефицијенти

$$A_n = (8b^2/\pi^3) \cdot (-1)^n / [(2n+1)^3 \operatorname{Ch}(k_n h/2)], \quad (d)$$

па је према (5.95) одређена функција напона (5.90)

$$\Phi = \frac{C}{2} \left(x^2 - \frac{b^2}{H} \right) + \frac{4Cb^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3 \operatorname{Ch} \frac{(2n+1)\pi}{b} \frac{h}{2}} \cos \frac{(2n+1)\pi}{b} x \operatorname{Ch} \frac{(2n+1)\pi}{b} y. \quad (5.96)$$

Компонентни тангенцијални напони су

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{4Cb}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 \operatorname{Ch} \frac{(2n+1)\pi}{b} \frac{h}{2}} \cos \frac{(2n+1)\pi}{b} x \operatorname{Sh} \frac{(2n+1)\pi}{b} y; \quad (5.97.a)$$

$$\tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -Cx +$$

$$+ \frac{4Cb}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 \operatorname{Ch} \frac{(2n+1)\pi}{b} \frac{h}{2}} \sin \frac{(2n+1)\pi}{b} x \operatorname{Ch} \frac{(2n+1)\pi}{b} y. \quad (5.97.b)$$

* Теорија осцилација, чл. 4.3.1.; таблице 4.1; 4.2; 4.3.

Највећи је напон на срединама дуже стране правоугаоника (тј. у тачкама A и A') и износи

$$\tau_{t \max} = [\tau_{zy}]_{x=\pm b/2, y=0} = \pm \frac{Cb}{2} \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \operatorname{Ch} \frac{(2n+1)\pi}{b} \cdot \frac{h}{2}} \right]. \quad (5.98. b)$$

Како је у пракси обично $h > b$, то тада предњи ред *брзо конвергише*, то је доброљно узети само први члан реда. Тада се добија да је

$$\tau_{t \max} = \pm Cb \{1 - 8/[\pi^2 \operatorname{Ch}(\pi h/2b)]\}/2. \quad (5.98. b)$$

са грешком до 0,5%.

Тангенцијални напон у срединама основица (тј. у тачкама B и B') износи

$$\begin{aligned} \tau_t(B) = [\tau_{zx}]_{x=0, y=\pm h/2} &= \pm \frac{4Cb}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{Th} \frac{(2n+1)\pi}{b} \cdot \frac{h}{2} = \pm \\ &\pm \frac{4Cb}{\pi^2} \operatorname{Th} \frac{\pi h}{2b}. \end{aligned} \quad (5.99)$$

Торзијски је момент

$$\mathfrak{M}_t = 2 \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} \Phi \, dx \, dy = -\frac{1}{6} Cb^3 h + \frac{32}{\pi^5} Cb^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{Th} \frac{(2n+1)\pi}{b} \cdot \frac{h}{2}, \quad (5.100)$$

где је аксијални момент инерције $I_y = b^3 h/12$. Када се и овде узме само први члан реда, тада се добија да је приближно

$$\mathfrak{M}_t = -2C \left[\frac{b^3 h}{12} - \frac{16}{\pi^5} b^4 \operatorname{Th} \frac{\pi h}{2b} \right], \quad (5.100. b)$$

са грешком до 0,5%.

Помоћу овог обрасца може се одредити константа C , а тиме и редуковани угао увијања (торзијска дилатација)

$$\theta' = -\frac{C}{2G} = \frac{\mathfrak{M}_t}{4G} \cdot \frac{1}{\left(\frac{b^3 h}{12} - 16 \frac{b^4}{\pi^4} \operatorname{Th} \frac{\pi h}{2b} \right)} = \frac{\mathfrak{M}_t}{G b^3 h \left(\frac{1}{3} - 64 \frac{b^4}{\pi^5} \operatorname{Th} \frac{\pi h}{2b} \right)}. \quad (5.101)$$

Из (5.23) следи да је депланација попречног пресека

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{C}{2G} \left[xy - \frac{8}{\pi^3} b^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3 \operatorname{Ch}(k_n h/2)} \cdot \sin k_n x \operatorname{Sh} k_n y \right]; \\ k_n &= \frac{(2n+1)\pi}{b}. \end{aligned} \quad (5.102)$$

Код *квадратној попречној пресека** је $b = h = a$ (слика 5.14) па ће бити:

$$a) \mathfrak{M}_t = Ca^4 \{1/3 - [64 \operatorname{Th}(\pi/2)/\pi^5]\}/2; \quad (5.103)$$

$$b) C = -2 \mathfrak{M}_t / a^4 \{1/3 - [64 \operatorname{Th}(\pi/2)/\pi^5]\};$$

* $\operatorname{Sh}(\pi/2) = 2,3013$; $\operatorname{Ch}(\pi/2) = 2,5092$; $\operatorname{Th}(\pi/2) = 0,9197$.

$$c) \tau_{t \max} = \mathfrak{M}_t \{1 - [8/\pi^2 \operatorname{Ch}(\pi/2)]\} / a^3 \{1/3 - 64 \operatorname{Th}(\pi/2)/\pi^5\} = \mathfrak{M}_t / 0,208 a^3;$$

$$d) \theta' = \mathfrak{M}_t / G a^4 \{1/3 - [64 \operatorname{Th} \pi/2]/\pi^5\} = \mathfrak{M}_t / 0,141 G a^4.$$

Напонске линије су показане на слици.

Увођењем Saint-Venant-ових коефицијената**

$$\eta_3 = \frac{1}{3} - \frac{64 b}{\pi^5 h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{Th} k_n \frac{h}{2}; \quad k_n = \frac{(2n+1)\pi}{b};$$

$$\eta_2 = \eta_3 / \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \operatorname{Ch}(k_n h/2)} \right]; \quad (5.104)$$

$$\eta_1 = \frac{\eta_2}{\eta_3} \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{Th}(k_n h/2),$$

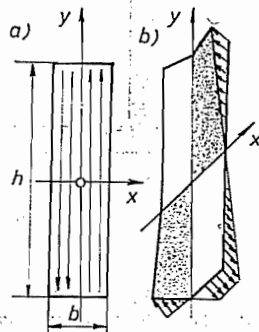
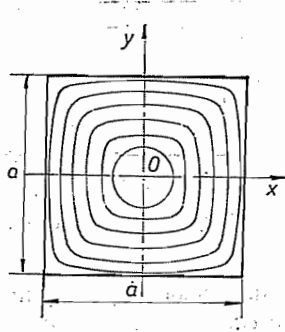
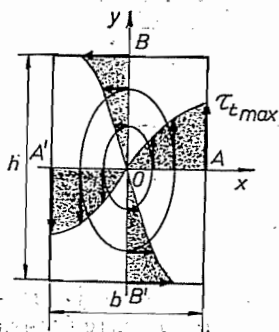
$$a/\tau_{t \max} = \mathfrak{M}_t / \eta_2 A b; \quad A = b h; \quad \tau_t(B) = \tau_1 = \eta_1 \tau_{t \max}; \quad (5.105)$$

$$c/\theta' = -C/2 G = \mathfrak{M}_t / \eta_3 G A b^2. \quad (5.105)$$

Вредности ових коефицијената дате су у доњој табlici.

Таблица 5.1.

h/b	1,00	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00	4,00	6,00	8,00	10,00	∞
η_3	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
η_2	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
η_1	1,000	0,858	0,827	0,796	0,775	0,753	0,745	0,743	0,743	0,743	0,743



Слика 5.13. — Торзија вратила правоугаоног пресека

Слика 5.14. — Торзија вратила квадратног пресека

Слика 5.15. — Торзија вратила уског правоугаоног пресека

Када је $h \gg b$ (слика 5.15. а) тада се може претпоставити да су напонске линије *праве*, паралелне дужим странама правоугаоника, па се тада напонска функција може узети у облику

$$\Phi = C(x^2 - 1/4 b^2)/2, \quad (5.106)$$

** Отпорност материјала, чл. 5.6.

$$a) \mathfrak{M}_t = 2(C/2) \int \int_{(A)} (x^2 - b^2/4) dx dy = -Cb^3 h/6; \quad C = -6\mathfrak{M}_t/b^3 h; \quad (5.107)$$

$$b) \tau_{zx} = 0, \quad \tau_{zy} = \tau_t = -Cx = 6\mathfrak{M}_t x/b^3 h; \quad \tau_{t \max} = 3\mathfrak{M}_t/b^2 h \quad \text{за } x = \pm b/2;$$

$$c) \theta' = -C/2 \mathbf{G} = 3\mathfrak{M}_t/\mathbf{G} b^3 h; \quad \tau_{t \max} = \mathbf{G} b \theta';$$

$$d) w = -Cxy/2 \mathbf{G} = 3\mathfrak{M}_t xy/\mathbf{G} b^3 h.$$

Извитоперени (депланирани) уски правоугаони пресек приказан је на слици (5.15. b).

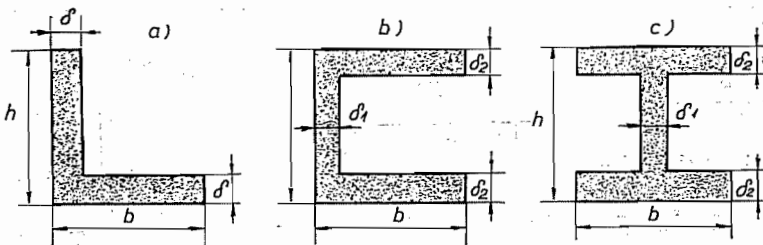
5.5. Торзија профилисаних носача. — Предњи обрасци за уски правоугаоник (5.107) могу се применити и у случају када је штап профилисани носач (пресека: L профила, □ профила, I профила). У случају угаоног профила L, дебљине δ , (слика 5.16. a), треба у обрасце (5.107. b, c) уместо висине h ставити развијену дужину шежишне линије, $h = 2b - \delta$, па ће бити:

$$\tau_{t \max} = 3\mathfrak{M}_t/\delta^2 (2b - \delta); \quad \theta' = 3\mathfrak{M}_t/\mathbf{G} \delta^3 (2b - \delta). \quad (5.108. a)$$

Код □ и I профила (слика 5.17. b, c) треба у обрасцима (5.89) уместо израза $b^3 h$ узети збирове тих израза за три правоугаоника (подвезице и ребро), па ће бити:

$$\tau_{t \max} = 3\mathfrak{M}_t \delta_2 / (h \delta_1^3 + 2b \delta_2^3) = \mathbf{G} \delta_2 \theta'; \quad \theta' = 3\mathfrak{M}_t/\mathbf{G} (h \delta_1^3 + 2b \delta_2^3). \quad (5.108. b)$$

На месту заобљења угаоника јавља се *концентрација напона* која се одређује експериментално.



Слика 5.16. — Торзија профилисаног носача

5.6. Торзија вратила променљивог кружног пресека. — У случају вратила *променљивој кружној пресека* применићемо поларне координате (слика 5.17. a). Под претпоставком да *нема дејланације појичној пресека* биће $w = 0$. Пошто је вратило изложено дејству момената увијања на основама то ће померања тачака произвољног пресека бити само у циркуларном правцу, па је $u = 0$. Због осне симетрије циркуларно померање v не зависи од поларног угла φ (слика 5.17. b), па ће, с обзиром на (2.70) бити компонентне деформације:

$$\varepsilon_r = (\partial u/\partial r) = 0; \quad \varepsilon_c = (u/r) + (\partial v/\partial \varphi)/r = 0; \quad \varepsilon_z = \partial w/\partial z = 0; \quad (a)$$

$$\gamma_{rc} = [(\partial u/\partial \varphi)/r] + (\partial v/\partial r) - (v/r) = (\partial v/\partial r) - (v/r);$$

$$\gamma_{rz} = (\partial u/\partial z) + (\partial w/\partial r) = 0; \quad \gamma_{cz} = \partial v/\partial z;$$

те су стога компонентни напони и њихови изводи

$$\sigma_r = \sigma_c = \sigma_z = 0;$$

$$\tau_{rc} = \mathbf{G} \gamma_{rc} = \mathbf{G} [(\partial v / \partial r) - (v/r)]; \quad \tau_{rz} = 0; \quad \tau_{cz} = \mathbf{G} \gamma_{cz} = \mathbf{G} (\partial v / \partial z);$$

$$\partial \tau_{rc} / \partial \varphi = 0 \quad \partial \tau_{cz} / \partial \varphi = 0 \tag{b}$$

па су прва и трећа једначина равнотеже (1.82) задовољене пошто се занемарују запреминске силе. Друга једначина равнотеже постаје

$$(\partial \tau_{rc} / \partial r) + 2 (\tau_{rc} / r) + (\partial \tau_{cz} / \partial z) = [\partial (r^2 \tau_{rc}) / \partial r] + [\partial (r^2 \tau_{cz}) / \partial z] = 0. \tag{c}$$

Предња једначина је задовољена када се функција напона $\Phi(r, z)$ узме таква да задовољава ту релацију, а то ће бити када су напони

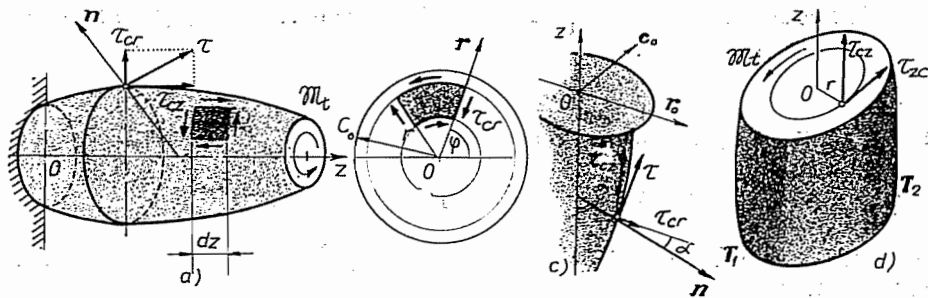
$$\begin{aligned} \tau_{rc} &= \mathbf{G} [\partial v / \partial r] - (v/r) = \mathbf{G} r [\partial (v/r) / \partial r] = -(\partial \Phi / \partial z) / r^2; \\ \tau_{zc} &= \mathbf{G} (\partial v / \partial z) = \mathbf{G} r [\partial (v/r) / \partial z] = [(\partial \Phi / \partial r) / r^2] / 5. \end{aligned} \tag{5.109}$$

Из тих једначина следи релација за одређивање функције напона

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) = -\frac{1}{\mathbf{G} r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \right) = \frac{1}{\mathbf{G} r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r}; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right]$$

тј.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \tag{5.110}$$



Слика 5.27. — Торзија вратила променљивог кружног пресека

Контурна површина (омотач) није изложена дејству површинских сила, па је према (5.9) *контурни услов* (слика 5.17. b):

$$\mathbf{n} = r_0 \alpha + \mathbf{k} \beta; \quad \tau_{rc} \alpha + \tau_{zc} \beta = 0;$$

$$(\partial \Phi / \partial r) (d r / d s) + (\partial \Phi / \partial z) (d z / d s) = d \Phi / d s = 0, \tag{5.111}$$

* Michell J. H., Proc. London Math Soc., v. 31, p. 141, (1900).

те је напонска функција дуж контуре константна. На овај се начин једначинама (5.110) и (5.111) потпуно одређује напонска функција* $\Phi(r, z)$, а помоћу ње и тангенцијални напони (5.109).

У неком попречном пресеку на удаљењу z од левог краја, полупречника R , биће торзијски момент

$$\mathfrak{M}_t = \iint_{(A)} \tau_{zc} r^2 dr d\varphi = 2\pi \int_0^R \frac{\partial \Phi}{\partial r} dr = 2\pi [\Phi(R) - \Phi(0)], \quad (5.112)$$

и он зависи од разлике вредности функције напона на контури (K) и на Oz -оси.

Пошто је циркуларно померање $v = r\theta'$, то је $\theta = v/R$, па из (5.109) следе релације

$$\partial \Phi / \partial r = \mathbf{G} r^3 (\partial \theta / \partial z); \quad -(\partial \Phi / \partial z) = \mathbf{G} R^3 (\partial \theta / \partial z); \quad (\partial^2 \Phi / \partial r \partial z) - (\partial^2 \Phi / \partial z \partial r) = 0$$

односно

$$(\partial^2 \theta / \partial r^2) + 3 [(\partial \theta / \partial r) / r] + (\partial^2 \theta / \partial z^2) = 0, \quad (5.113)$$

па се види да угао торзије зависи и од r и од z . За $\theta = \text{const}$ добија се површ чије тачке имају једнаке торзијске углове. Ове су површи обртне (слика 5.117 d) и при увијању вратила обрћу се око Oz -осе без деформације као кружни пресеци код кружног вратила. Како је код круга напон $\tau = \mathbf{G} (\partial v / \partial z) = \mathbf{G} R (\partial \theta / \partial z)$, то се аналогно добија тангенцијални напон на контури (K)

$$\tau_t = \tau_{rc} (dr/ds) + \tau_{zc} (dz/ds) = \mathbf{G} R (\partial \theta / ds). \quad (5.114)$$

Код вратила *коничног облика* (слика 5.18.) једначина контурне линије је

$$\text{tg } \alpha = z / \sqrt{r^2 + z^2} = R_1 / R_2, \quad (5.115)$$

па се напонска функција да написати у облику

$$\Phi(r, z) = C \{ [z / \sqrt{r^2 + z^2}] - [z / \sqrt{r^2 + z^2}]^3 / 3 \}, \quad (5.116)$$

Константа C може се одредити помоћу $\Phi(x, y)$, а помоћу ње и компонентни напони, па су:

$$C - 3 \mathfrak{M}_t / 2\pi (2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha); \quad \tau_{rc} = -Cr^2 / (r^2 + z^2)^{5/2};$$

$$\tau_{zc} = -Crz / (r^2 + z^2)^{5/2} \quad (5.117)$$

При сложенијим облицима користе се приближне методе.

5.7. Примена приближних метода. — Тачно решење проблема торзије своди се на одређивање напонске функције Φ која задовољава једначину (5.5) и контурни услов (5.10). Међутим с обзиром на разне попречне пресеке, најлази се на велике математичке тешкоће при директном решењу проблема па се користе *приближне методе*. Изложимо оне које се највише користе у општој техничкој пракси.

5.7.1. Ritz-ова метода. — Према принципу минимума потенцијалне енергије при варијацији напона (Castigliano-ова теорема) треба интеграл (4.52)

$$\delta J = \delta \left\{ \iint_{(S'')} (X_n' u + Y_n' v + Z_n' w) dS \right\} - \frac{1}{2 \mathbf{G}} \iiint_{(V)} \left[(\partial \Phi / \partial x)^2 + (\partial \Phi / \partial y)^2 \right] dV \Bigg| = \delta J_1 + \delta J_2 = 0, \quad (5.118)$$

да има екстремну вредност и то минимум, где је S'' онај део спољашње површине на коме су позната компонентна померања ($u = -\theta' yz$; $v = \theta' xz$; w). Ова се површ састоји из две основе и омотача. На омотачу ($\mathbf{n} = \mathbf{n}_3$) не дејствују површинске силе па је $J_{13} = 0$. На левој основи ($\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 = -\mathbf{k}$) силе су $X_n' = -\tau_{zx}$; $Y_n' = -\tau_{zy}$; $Z_n' = 0$, па пошто је због укљештења $z = 0$ то су $u = v = 0$, па је $J_{11} = 0$. На десној основи ($\mathbf{n} = \mathbf{n}_2 = \mathbf{k}$) силе су $X_n' = \tau_{zx}$; $Y_n' = \tau_{zy}$; $Z_n' = 0$, а како је $z = l$, то су $u = -\theta' ly$; $v = \theta' lx$, па ће бити:

$$\begin{aligned} \delta J_{12} &= \delta \left[\iint_{(A)} (X_n' u + Y_n' v) dx dy \right] = -\theta l \iint_{(A)} [y \delta(\tau_{zx}) - x \delta(\tau_{zy})] dx dy = \\ &= -\theta l \iint_{(A)} \{y [\delta(\partial F / \partial \tau_y)] + x [\delta(\partial F / \partial \tau_x)]\} dx dy = \\ &= -l\theta' \iint_{(A)} \{y [\partial \Phi / \partial y] + x [\partial \Phi / \partial x]\} dx dy. \end{aligned}$$

када се примени закон комутације варирања и диференцирања. Интеграл на десној страни предње једначине истог су облика као и код одређивања торзијског момента (5.13) само уместо функције Φ долази њена варијација $\delta \Phi$, а пошто је она на контури једнака нули, то је

$$\delta J_{12} = -\theta' l \left[-\iint_{(A)} \delta \Phi dx dy - \iint_{(A)} \delta \Phi dx dy \right] = 2\theta' l \iint_{(A)} \delta \Phi dx dy.$$

Према томе, услов екстремума интеграла (5.118) може се сада написати овако

$$\delta J = \delta \left\{ \frac{1}{2} \iint_{(A)} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 - 4 \mathbf{G} \theta' \right] dy dx \right\} = 0. \quad (5.119)$$

Да би функција $\Phi(x, y)$ представљала торзијску функцију (5.4) мора дакле одговарати минимуму горњег интеграла.

Да би овај услов еквивалентан услову (5.5), где је $C = -2 \mathbf{G} \theta'$, доказаћемо на овај начин. Варирањем израза (5.5) добија се

$$\iint_{(A)} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - 2 \mathbf{G} \theta' \delta \Phi \right] dx dy = - \iint_{(A)} [\Delta \Phi + 2 \mathbf{G} \theta'] \delta \Phi dx dy,$$

пошто је на контури $\delta\Phi=0$, па су интегрални**

$$\iint_{(A)} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \delta\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) dx dy = \int dy \int \frac{\delta\Phi}{\partial x} \frac{\delta}{\partial x} (\delta\Phi) dx = - \iint_{(A)} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \delta\Phi dx dy;$$

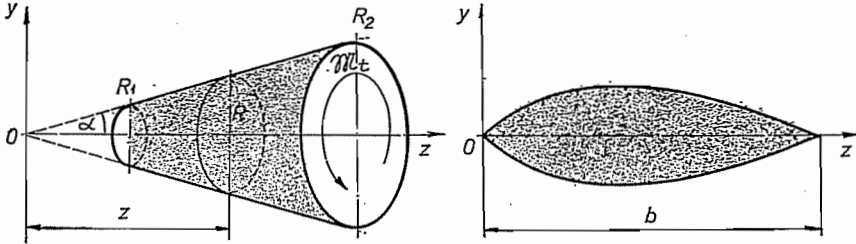
$$\iint_{(A)} \frac{\partial\Phi}{\partial y} \left[\delta\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) \right] dx dy = - \iint_{(A)} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \delta\Phi dx dy$$

Уместо функције $\Phi(x, y)$ W. Ritz* узима функцију

$$\Phi = C_1 \Phi_1 + C_2 \Phi_2 + \dots + C_k \Phi_k + \dots + C_n \Phi_n = \sum_1^n C_k \Phi_k(x, y), \quad (5.120)$$

где су $\Phi_k(x, y)$ функције које задовољавају гранични услов $\Phi_k(x, y)$ функције које задовољавају гранични услов $\Phi_{k(x)}=0$, а C_k бројни коефицијенти које треба одредити из услова екстремума интеграла (5.119), тј. из система једначина

$$\partial J / \partial C_1 = 0; \dots; \partial J / \partial C_i = 0; \dots; \partial J / \partial C_n = 0. \quad (5.121)$$



Слика 5.19. — Овални пресек

Пошто су изводи

$$\partial\Phi/\partial x = \sum_k C_k (\partial\Phi_k/\partial x); \quad \partial\Phi/\partial y = \sum_k C_k (\partial\Phi_k/\partial y); \quad \partial\Phi/\partial C_i = \Phi_i;$$

$$\partial(\partial\Phi/\partial x)/\partial C_i = \partial(\partial\Phi/\partial C_i)/\partial x = \partial\Phi_i/\partial x; \quad \partial J/\partial C_i = \iint_{(A)} \{ (\partial\Phi/\partial x) [\partial(\partial\Phi/\partial x)/\partial C_i] +$$

$$+ (\partial\Phi/\partial y) [\partial(\partial\Phi/\partial y)/\partial C_i] - 2\mathbf{G}\theta'(\partial\Phi/\partial C_i) \} dx dy = 0; \quad C = 2\mathbf{G}\theta'.$$

то се систем једначина (5.121) своди на систем линеарних једначина са коефицијентима a_{ik} и b_{ii} и облику интеграла

$$i \downarrow \overset{k}{\rightarrow} \left[\sum_{k=1}^n C_k a_{ik} \right] - 2\mathbf{G}\theta' b_{ii} = 0; \quad a_{ik} = \iint_{(A)} \left\{ \frac{\partial\Phi_i}{\partial x} \frac{\partial\Phi_k}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_i}{\partial y} \frac{\partial\Phi_k}{\partial x} \right\} dx dy;$$

$$b_{ii} = \iint_{(A)} \Phi_i dx dy. \quad (5.122)$$

* $u = \partial\Phi/\partial x; v = \delta\Phi; \int u dv = uv - \int v du.$

** Ritz W., Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathem. Phys., J. für reine und angew. Mathematik, Bnd CXXXV, (1910).

За квадратни појречни пресек (слика 5.14) биће:

$$\Phi(x, y) = (x^2 - p^2)(y^2 - p^2)[C_1 + C_2(x^2 + y^2) + \dots]; \quad p = a/2. \quad (5.123)$$

Када се узме само први члан реда добиће се:

$$\begin{aligned} C_1 a_{11} - 2G\theta' b_{11} &= 0; \quad C_1 = 2G\theta' b_{11}/a_{11}; \quad b_{11} = 4 \iint (x^2 - p^2)(y^2 - p^2) dx dy = 16p^6/9 = \\ &= a^6/36; \quad a_{11} = 4 \iint [4x^2(y^2 - p^2)^2 + 4y^2(x^2 - p^2)^2] dx dy = 256p^8/45 = a^8/45; \\ C_1 &= 5G\theta'/2a^2; \quad \mathfrak{M}_t = 2C_1 \iint \Phi_1 dx dy = 5G\theta' a^4/36; \quad J_t = 5a^4/36. \end{aligned}$$

према (5.105. c) грешка је $\epsilon = (0,141 - 0,139 \cdot 100)/0,141\% = 1,5\%$.

Када се у (5.123) узму два члана реда добиће се:

$$\begin{aligned} C_1 a_{11} + C_2 a_{12} &= -Cb_{11}; \quad a_{11} = a^8/45; \quad a_{12} = a^{10}/15.35; \quad a_{22} = 11a^{12}/15.35.36; \\ C_1 a_{21} + C_2 a_{22} &= -Cb_{22}; \quad \Delta = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 277a^{20}/15 \cdot 35^2 \cdot 3 \cdot 36; \\ C_1 &= -35 \cdot 37C/4.277a^2; \quad C_2 = -35 \cdot 15C/2.77a^4; \quad C = -2G\theta'; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_t &= 2 \iint (C_1 \Phi_1 + C_2 \Phi_2) dx dy = 2(C_1 b_{11} + C_2 b_{22}) = \\ &= -5.35Ca^4/9.277 = -0,0702Ca^4 = 0,1404G\theta'a^4, \end{aligned}$$

грешка према (5.105 c) је: $[1 - (0,1404/0,141)] \cdot 100\% = 0,5\%$.

У случају *уравлаонои пресека* (слика 5.15) може се функција $\Phi(x, y)$ узети у облику бескрајног реда

$$\Phi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \cos \alpha x \cos \beta y; \quad \alpha = \frac{2m-1}{b} \pi; \quad \beta = \frac{2n-1}{h} \pi; \quad \psi = \frac{b}{h}, \quad (5.124)$$

Уношењем у (5.119) и интегралнењем добија се

$$J = \frac{bh}{8} \sum_m \sum_n C_{mn}^2 (\alpha^2 + \beta^2) + C \sum_m \sum_n (-1)^{m+n-2} \cdot \frac{C_{mn}}{\alpha\beta},$$

па су константе

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dC_{mn}} &= 0; \quad C_{mn} = -\frac{16C}{bh} \cdot \frac{(-1)^{m+n-2}}{\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)} = -\frac{16C\psi^2 h^2}{\pi^4} \cdot \\ &\cdot \frac{-1}{(2m-1)(2n-1)[(2m-1)^2 + (2n-1)^2 - \psi^2]}, \end{aligned}$$

то је момент торзије

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_t &= 2 \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} \Phi dx dy = \\ &= -\frac{128C\psi^3 h^4}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2(2n-1)^2[(2m-1)^2 + (2n-1)^2 - \psi^2]}; \\ C &= -2G\theta'. \end{aligned}$$

Ова се метода може применити и у *другим случајевима*. На пример, за пресек показан на слици 5.19 биће*:

$$\Phi = C_1 (y - h \varphi) (y + h \varphi); \quad \varphi = \sqrt{\frac{x}{b}} \left(1 - \frac{x}{b}\right); \quad \Phi = C_1 (y^2 - h^2 \varphi^2);$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -2 C_1 h^2 \varphi \varphi'; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2 C_1 y;$$

$$J = \frac{1}{2} \iint [4 C_1^2 h^4 (\varphi \varphi')^2 + 4 C_1^2 y^2] dx dy + C_1 C \iint (y^2 - h^2 \varphi^2) dx dy;$$

$$\frac{dJ}{dC_1} = 0; \quad C_1 = \frac{C}{2} \frac{\int \varphi^3 dx}{\int (\varphi^3 + 3 h^2 \varphi^3 \varphi'^2) dx} = \frac{C}{2} \frac{1}{(1 + 0,846 \psi^2)}; \quad \psi = \frac{h}{b};$$

па је момент увијезња

$$M_t = 2 \iint \Phi dx dy = 2 C_1 \iint (y^2 - h^2 \varphi^2) dx dy = -0,0368 \frac{C \psi b^4}{(1 + 0,846 \psi^2)};$$

$$C = -2 G \theta'.$$

5.7.2. Метода коначних разлика. — Ова се метода састоји у томе да се основне парцијалне једначине и контурни услови изразе одговарајућим *једначинама коначних разлика*. Овим се проблем своди на решење система спрегнутих алгебарских једначина, што проблем много упрошћава.

Нека је функција $f(x)$ непрекидна у размаку AB и нека су такође непрекидни њени изводи $f^{(i)}(x)$ до оног реда, $i = 1, 2, 3, \dots$, који нам је потребан. Дати интервал AB , где су $A(a, 0)$ и $B(b, 0)$, поделимо на једнаке подеке $\Delta x = h$ и апроксимирајмо криву $f(x)$ *интерполационом параболом другог реда* (слика 5.20. а), онда су прва разлика и први извод у некој тачки

$$\Delta f = [f(x+h) - f(x-h)]/2; \quad f' = \Delta f/2h, \quad (a)$$

јер је код квадратне параболе тангенс правца сечице једнак тангенсу криве у тачки $S(x)$. Други извод је промена првог извода по јединици дужине. Вредност извода на делу од x до $x+h$ је $f_2' = [f(x+h) - f(x)]/h$, а на делу од $x-h$ до x је $f_1' = [f(x) - f(x-h)]/h$, па је други извод

$$f'' = d^2 f/dx^2 = [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)]/h^2 = \Delta^2 f/h^2. \quad (b)$$

Аналогно томе добили би се изводи:

$$f''' = [f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)]/2h^3; \quad (c)$$

$$f^{(iv)} [f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) - f(x-2h)]/h^4, \quad (d)$$

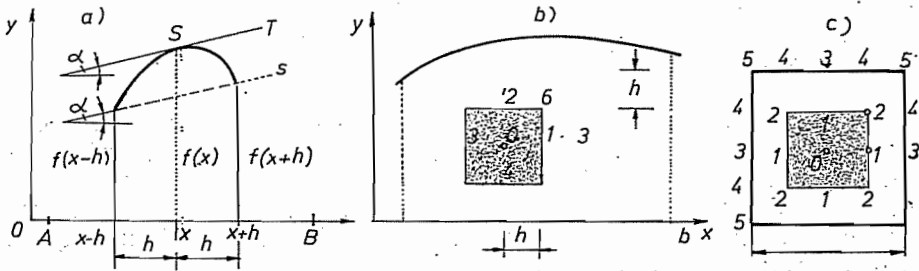
Ако изразимо одговарајуће изводе у диференцијалној једначини добиће се у одређеној тачки (x) размака $[a, b]$ једна линеарна једначина. Уку-

* Л. С. Лейбензон, Вариационные методы решения задач теории упругости, Москва, Гостехиздат, (1943).

пан број ових једначина једнак је броју унапред изабраних тачака „чворова“ датог размака. Овим једначинама треба додати и контурне услове.

У случају парцијалне једначине треба наћи паралелне услове. Обично се узима да је $\Delta x = \Delta y = h$, па ће у тачки (0) бити квадратне мреже; (слика 5.20. b):

$$\begin{aligned}
 (\partial f / \partial x)_0 &= (f_1 - f_3) / 2h; & (\partial f / \partial y)_0 &= (f_2 - f_4) / 2h; & (\partial^2 f / \partial x^2)_0 &= (f_1 - 2f_0 + f_3) / h^2, & (e) \\
 (\partial^2 f / \partial y^2)_0 &= (f_2 - 2f_0 + f_4) / h^2; & (\Delta f)_0 &= (\partial^2 f / \partial x^2) + (\partial^2 f / \partial y^2) = \\
 &= (f_1 + f_2 + f_3 + f_4 - 4f_0) / h^2.
 \end{aligned}$$



Слика 5.20. — Примена методе коначних разлика

Ову методу применићемо на проблем торзије вратила *квадратног пресека*, странице *a*. Поделитемо тај квадрат на 16 квадрата, страница $h = a/4$, (слика 5.20. c). Функцију f заменимо функцијом напона Φ за коју је $\Delta_1 \Phi = -C = -2 \mathbf{G} \theta'$; $\Phi_{(x)} = 0$ и означимо чворне тачке као на слици, онда ће за чворне тачке 0, 1 и 2 бити:

$$\text{чвор 0): } 4\Phi - 4\Phi_0 = Ch^2; \quad \text{чвор 1): } \Phi_3 + 2\Phi_2 + \Phi_0 - 4\Phi_1 = Ch^2; \quad \Phi_3 = \Phi_4 = \Phi_5 = 0;$$

$$\text{чвор 2): } 2\Phi_1 + 2\Phi_1 - 4\Phi_2 = Ch^2; \quad C = -2 \mathbf{G} \theta'; \quad h^2 = (a/4)^2 = a^2/16;$$

па су

$$\Phi_0 = -9Ca^2/128 = 9 \mathbf{G} \theta' a^2/64; \quad \Phi_1 = -7Ca^2/128 = 7 \mathbf{G} \theta' a^2/64;$$

$$\Phi_2 = -11Ca^2/256 = 11 \mathbf{G} \theta' a^2/128. \quad (5.124)$$

Користећи Simpson-ово правило за две променљиве* (за врсте и колоне) добија се торзијски момент

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_t &= 2 \int_{(A)} \Phi(x, y) dx dy = 2.4 \cdot (h/3) \cdot (h/3) [(\Phi_0 + 4\Phi_1 + \Phi_3) + 4(\Phi_1 + 4\Phi_2 + \Phi_4) + \\
 &+ (\Phi_3 + 4\Phi_4 + \Phi_5)] = (a^2/18)(\Phi_0 + 8\Phi_1 + 16\Phi_2),
 \end{aligned}$$

* По Simpson-овом правилу треба домен $[a, b] = [x_0, x_n = nh]$ поделити на паран број подеока (n), па је

$$J = \int_a^b f(x) dx = h [4(f_1 + f_3 + \dots + f_{n-1})/2 + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{n-2}) + (f_0 + f_n)].$$

јер је на контури $\Phi_3 = \Phi_4 = \Phi_5 = 0$. С обзиром на (5.124) биће:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_t &= -17 Ch^4 = -17 Ca^4/256 = 17 G \theta' a^4/128 = G \theta' I_t; \\ I_t &= 17 a^4/128 = 0,133 a^4. \end{aligned} \quad (5.125)$$

Највећи тангенцијални напон је у тачки (3) и износи

$$\begin{aligned} (\tau_{xy})_3 = \tau_{t \max} &= -(\partial \Phi / \partial x)_3 = -(-\Phi_1/2h) = 7 G \theta' a/32 = \\ &= 28 \mathfrak{M}_t/17 a^3 = 1,467 \mathfrak{M}_t/a^3. \end{aligned} \quad (5.126)$$

Према (5.105. с) грешке су: за момент 5,7% и напон 60%.

Ако би се квадрат поделио на 64 квадрата, странице $h=a/8$, онда би били: $I=0,1386 a^4$; $\tau_{t \max}=3,9846 \mathfrak{M}_t/a^3$, и грешка 1,4%, односно 18%.

5.8. Експериментална решења. Аналогје. — Код сложенијих попречних пресека вратила која су такође једноструко повезана подручја тешко је математичким путем добити решење у затвореном облику, па се често користе приближне и експерименталне методе. Код ових других много се користе аналогије између математичких релација код торзије и напрезања мембране или струјања флуида (течности).

5.8.1. Аналогја са мембраном. — Ову аналогију је открио 1503. године L. Prandtl*. Хомогена танка мембрана разапета је по крутој контури (K) отвора направљеног у облику попречног пресека вратила. Она је изложена дејству равномерног притиска p , [кп/см²], усмереног *навише*, (слика 5.21), услед чега тачке мембране добијају *мале уибе* навише (w), и затезним силама по контури (K), величине $F_s' = \text{const}$, [кН/см] по јединици лука контуре (K).

У недеформисаном стању мембрана се налази у равни Oxy , али ће се услед притиска и затезања елемент $abcd$ величине $dx dy$, извитоперити, па ће затезне силе мењати само свој правац али не и величину, јер се мења само нагиб. Како су нагиби мали, може се тангенс угла заменити углом, па сила $F_s' dy$ на страници ad елемента $abcd$ гради са Ox -осом нагиб $\alpha = \partial w / \partial x$, а сила $F_s' dx$ на страници bc нагиб $\alpha^* = -[(\partial w / \partial x) + (\partial^2 w / \partial x^2) dx]$. Аналогно томе градиће силе $F_s' dx$ које дејствују на страницама ab и cd са Oy -осом нагибе $\beta = \partial w / \partial y$ и $-\{(\partial w / \partial y)^2 + (\partial^2 w / \partial y^2) dy\}$. Из услова равнотеже сила у Oz -правцу које дејствују на елемент $abcd$ мембране добија се

$$\begin{aligned} \sum Z_i &= p dx dy + F_s' dy [(\partial w / \partial x) - (\partial w / \partial x) - (\partial^2 w / \partial x^2) dx] + F_s' dx [(\partial w / \partial y) - \\ &- (\partial w / \partial y) - (\partial^2 w / \partial y^2) dy] = 0, \end{aligned}$$

па је диференцијална једначина равнотеже мембране**

$$\Delta w = (\partial^2 w / \partial x^2) + (\partial^2 w / \partial y^2) = p / F_s' = c = \text{const}. \quad (5.127)$$

* Prandtl L., Phy.ik. Z., T. 4.

Griffith A. A. Taylor G. I., Tech. Rept. Adv. Comm. Aeron., t. 3, (1917—1918).

** Laplace P., (1749.—1827).

Ова је једначина $\Delta w = c$ аналогна диференцијалној једначини $\Delta \Phi = C$, па ће бити:

$$\begin{aligned}\Delta \Phi / \Delta w &= C/c; \quad \Phi = Cw/c; \quad \tau_{xx} = \partial \Phi / \partial y = (C/c) (\partial w / \partial y); \\ \tau_{zy} &= -(\partial \Phi / \partial x) = -(C/c) (\partial w / \partial x).\end{aligned}\quad (5.127)$$

На контури мембране је угиб $w = 0$, па је на контури пресека $\Phi = 0$, како смо већ узели ову вредност.

С обзиром на предње и (5.13) момент торзије је

$$\mathfrak{M}_t = 2 \iint_{(A)} \Phi \, dx \, dy = 2 \frac{C}{c} \iint_{(A)} w \, dx \, dy = 2 \frac{C}{c} V_m, \quad (5.129)$$

па је сразмеран запремини коју гради депланирана мембрана са Oxy -равни. Даље ће бити редуковани торзијски угао и торзијски момент инерције:

$$\theta' = -C/2 \mathbf{G} = \mathfrak{M}_t / c/4 \mathbf{G} V_m = \mathfrak{M}_t / \mathfrak{J}^*; \quad \mathfrak{J}^* = \mathbf{G} I_t; \quad I_t = 4 p V_m / F_s' = I_0^*. \quad (5.130)$$

Када се еластична површ мембране пресече равни $w_c = z = \text{const}$, онда је пресечна крива изохипса (слика 5.22). Пошто је дуж изохипсе угиб константан то је извод

$$\begin{aligned}dw/ds &= cC^{-1} (d\Phi/ds) = cC^{-1} [(\partial \Phi / \partial x) (dx/ds) + (\partial \Phi / \partial y) (dy/ds)] = \\ &= cC^{-1} [\tau_{xx} \cos \alpha + \tau_{zy} \sin \alpha] = (\tau_{xx} \mathbf{i} + \tau_{zy} \mathbf{j}; \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha) = (\tau_t, \mathbf{n}) = 0.\end{aligned}$$

Из овога закључујемо следеће: *пројекција шопалној напона од увијања на правац нормале (\mathbf{n}) је једнак нули, па је тај напон колинеаран са тангентом на изохипсу.* Ово значи да су изохипсе дејланиране мембранске површи напонске линије *појречној пресека враћила.* Стога ће тангенцијални напон у некој тачки изохипсе бити:

$$\begin{aligned}\tau_t &= (\mathbf{c}_t, \mathbf{T}) = (\tau_{xx} \mathbf{i} + \tau_{zy} \mathbf{j}, -\mathbf{i} \sin \alpha + \mathbf{j} \cos \alpha) = \\ &= -\tau_{xx} \sin \alpha + \tau_{zy} \cos \alpha = -d\Phi/dn.\end{aligned}\quad (5.131)$$

Напон је, дакле, колинеаран са тангентом на изохипсу напонске линије, па је сразмерна максималном напону мембране у тој тачки (напон је највећи тамо где су изохипсе најгушће).

Изохипса на удаљењу w_c од Oxy -равни, дужине L_c , обухвата површину A_c . Како је нагиб $\partial w / \partial n = cC^{-1} (\partial \Phi / \partial n) = -cC^{-1} \tau_t$, то равнотежни услов дела запремине омеђен мембраном и равни $z = w_c$ даје

$$\oint_{(L_c)} F_s \, ds (\partial w / \partial n) = \oint_{(L_c)} -cC^{-1} \tau_t F_s' \, ds = p A_c; \quad \oint_{(L_c)} \tau_t \, ds = -C A_c = 2 \mathbf{G} \theta' A_c. \quad (5.132)$$

па се може одредити средња вредност тангенцијалног напона дуж напонске линије (тј. изохипсе).

Аналогија са мембраном омогућава очигледно представљање напонских линија (изохипса) а тиме и распоред тангенцијалних напона. Да би се одредиле нумеричке вредности потребно је мерити угибе и нагибе мембране, па се за ово користи метода „филма од сапунице“ („soap film method“). Филм односно „ојна од сапунице“ образује се над отвором који одговара контури мембране, односно контури пресека вратила. Ради упоређивања резултата једновремено се прави и филм за кружни пресек, па се оба излажу истом притиску (p) и резултати упоређују.

За добијање изохипса употребљава се специјални апарат*.

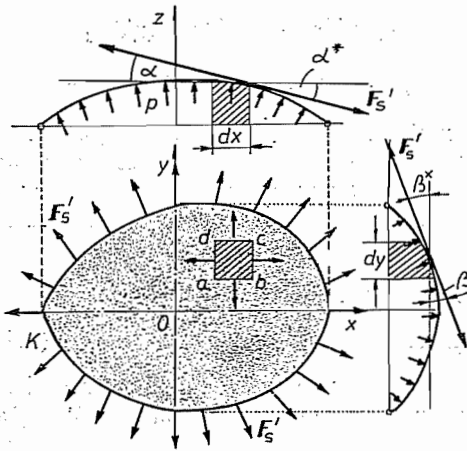
На слици 5.23. приказане су изохипсе добијене овом методом за вратило **IPN**-профила и дрвеног авионског крила. Види се да су изохипсе *иушће* у близини горње ивице подвезе (фланше) и близу заобљења, па су тамо и напони највећи („концентрација напона“). Напони ребра овог профила одговарају напонима уског правоугаоника (слика 5.15) исте торзијске дилатације θ .

Концентрација напона јавља се и на месту заобљења *уаоника* (слика 5.24). Пошто је овде, према (5.131), напон $\tau_t = -\partial\Phi/\partial n = d\Phi/dr$, јер је нормала усмерена унутра, то је $\partial w/\partial r = dw/dr = c\tau_t/C$, па се уношењем у једначину (5.127), користећи поларну координату r , добија обична диференцијална једначина

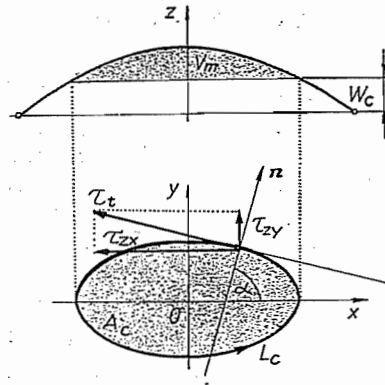
$$\Delta w = (\partial^2 w/\partial r^2) + r^{-1}(\partial w/\partial r) = c; \quad (d\tau_t/dr) + (\tau_t/r) = -2G\theta' = -2\tau/\delta, \quad (5.133)$$

где је δ дебелина угаоника, а $\tau = \tau_{t\max}$ танког правоугаоног пресека дебелине $b=h$. Једначина је линеарна по променљивој r , па је њено решење:

$$\tau_t' + P\tau_t = Q; \quad \tau_t = -(\tau/\delta)r + (C_1/r). \quad (5.134)$$



Слика 5.21. — Мембранска антологија



Слика 5.22. — Изохипсе мемbrane су напонске линије

Интеграциона константа C_1 одређује се из услова да је напон у тачки S , где је $OS = \rho + \delta/2$, а ρ је полупречник заобљења. Стога ће бити:

$$C_1 = \tau(2\rho + \delta)^2/4\delta; \quad \tau_t = \tau[(\rho + \delta/2)^2 - r^2]/\delta r; \quad \tau_{t\max}(r = \rho) = \tau[1 + (\delta/4\rho)]. \quad (5.135)$$

За $\rho/\delta = 0,5$ је $\tau_{t\max} = 1,5\tau$; за $\rho/\delta = 0,1$ биће $3,5\tau$, па се види да се при смањењу полупречника заобљења у односу на дебелину угаоника напон нагло *повећава* (концентрација напона).

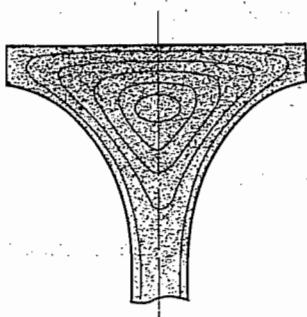
* Обрадовић Н, Основи механике флуида, Београд (1952).

5.8.2. Хидромеханичке аналогије. — Брзина *стирујања* флуида* је $\mathbf{c} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$. Закон распореда брзина струјања зове се *функцијом стирујног поља*. Струјање код кога брзина не зависи експлицитно од времена назива се *устаљено*; у противном је *неустаљено*. *Стирујна линија* (*стирујница*) има особину да вектор брзине (\mathbf{c}) пада у правац њене тангенте, па је векторска једначина струјнице $[\mathbf{c}, d\mathbf{r}] = 0$, односно три скаларне једначине. Вишак истеклог флуида из јединице запремине у јединици времена зове се *дивергенција стирујне масе*, $\text{div } \rho \mathbf{c}$, где је ρ *специфична маса*. Код *стириљивој флуида* је $\rho = \text{const}$, па је $\text{div } \rho \mathbf{c} = 0$, односно услов за устаљено струјање.

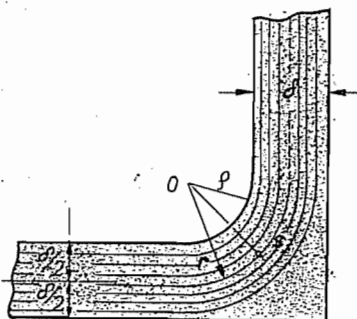
Врџљожни вектор је $\text{rot } \mathbf{c} = 2\vec{\omega} = 2(\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k})$, где је $\vec{\omega}$ вектор угаоне брзине, а услов $\text{rot } \mathbf{c} = 0$ представља савршени флуид чији се делићи не обрћу. Тада постоји нека функција положаја $\varphi(x, y, z)$ таква да је $\mathbf{c} = \text{град } \varphi$, јер је $\text{rot grad } \varphi = 0$. Ова се функција назива *функција брзине* или *брзински појенцијал*. Проток флуида $\Phi(x, y)$ дуж струјнице је константан, израз $\Phi(x, y) = \text{const}$ представља *једначину стирујнице*, те се стога функција $\Phi(x, y)$ назива *функција стирујница*. Помоћу ње могу се одредити брзине струјања у свакој тачки струјног поља, јер проток

$$\delta \Phi = (\partial \Phi / \partial x) dx + (\partial \Phi / \partial y) dy = u dy - v dx; \quad u = \partial \Phi / \partial y; \quad v = -\partial \Phi / \partial x, \quad (5.136)$$

на су компоненте брзине аналогне компонентним напонима (5.4).



Слика 5.23. — Напонске линије T-профила



Слика 5.24. — Концентрација напона код угаоника

На овим теоријским основама створено је више хидромеханичких аналогја струјања флуида са увијањем вратила J. Boussinesq* је показао да је торзијска функција $\Phi(x, y)$ аналогна функција струјница, јер су једначина (5.5) и услов (5.10) исти са једначинама и условима за одређивање брзине вискозног флуида при ламинарном кретању дуж цеви истог попречног пресека као и вратило изложено напрезању на увијање.

Greenhill** је показао да се при кретању нестишљиве течности, $\text{div } \mathbf{c} = 0$, равномерним вртложењем $|\text{rot } \mathbf{c}| = \text{const}$, функција струјница је аналогна торзијској функцији, јер је задовољена релација $\Delta \Phi = C$. На контури цеви брзина пада у правац тангенте на контуру, па је контурни

* Обрадовић Н., Основи механике флуида, Београд (1952).

** Boussinesq J., J. math. pure et appl., s. 2, t. 16, (1971).

*** Greenhill A. G., Hydromechanics, Encycl. Britannica, (1910).

услов задовољен. Дакле, распоред брзина при хидродинамичком проблему математички се поклапа са распоредом тангенцијалних напона при увијању вратила истог попречног пресека као што је и цев кроз коју струји флуид.

Lord Kelvin*** је показао да функција $\phi(x, y)$ која задовољава Laplace-ову једначину (5.32) одговара функцији струјница струјања савреног флуида у цеви истог попречног пресека као што је пресек вратила.

5.9. Торзија штапа са пресеком који је вишеструко повезана област. — У досадашњим излагањима посматрали смо вратила са попречним пресецима облика просто повезане области (подручја). Међутим, када је пресек облика вишеструко порезане области (подручја) ствар је компликованија. Нека је спољашња контура овог пресека (K) и нека је n унутрашњих контура (K_i) где је $i = 1, 2, \dots$, (слика 5.25). Гранични су услови сложености, јер свака контура $(K$ и $K_i)$ мора бити *неоштерена*, те морају бити задовољени услови (5.7). Нормала на спољашњу контуру (i) је усмерена упоље док нормале (n_i) на унутрашње контуре (K_i) усмерене су унутра. Према (5.13) је торзијски момент

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_t &= \iint_{(A)} (x \tau_{xy} - y \tau_{xx}) dx dy = - \iint_{(A)} [x (\partial \Phi / \partial x) + y (\partial \Phi / \partial y)] dx dy = \\ &= -1 \iint_{(A)} \{ [\partial (\Phi x) / \partial x] + [\partial (\Phi y) / \partial y] \} dx dy + 2 \iint_{(A)} \Phi dx dy. \end{aligned}$$

Сменом $Q = \Phi x$ и $P = -\Phi y$ први се интеграл на десној страни према Гресп-Gauss-овом обрасцу претвара у криволинијски, те

$$\mathfrak{M}_t = 2 \iint_{(A)} \Phi dx dy - \oint_{(K)} \Phi (x dy - y dx).$$

Како је Φ на контури константно, $\Phi_{(K_i)} = D_i = \text{const}$, то се криволинијски интеграл може написати и у овом облику

$$\oint_{(K)} \Phi (x dy - y dx) = D \oint_{(K)} (x dy - y dx) - \sum_{i=1}^n D_i \oint_{(K_i)} (x dy - y dx),$$

због тога што су нормале на криве (K_i) усмерене унутра. Израз $x dy - y dx$ представља двоструки елемент површине, односно тај интеграл је двоструки елемент површине, односно тај интеграл је двострука површина омеђена контуром K_i . Пошто у изразе за напоне и померања долазе у обзир парцијални изводи напонске функције може се једна константа од D и D_i изабрати произвољно, те се обично узима да на контури $D = 0$. Тада предња релација постаје:

$$\mathfrak{M}_t = 2 \left[\iint_{(A)} \Phi dx dy - \sum_{i=1}^n D_i A_i \right] = \mathfrak{I}^* \theta' = \mathbf{G} \theta' I_t. \quad (5.137)$$

Када се познаје оптерећење (\mathfrak{M}_t) може се, онда, одредити торзијска крутост (\mathfrak{I}) .

* Kelvin, Tait, Natural Philosophy, t. 2., p. 24.

5.10. Bredt-ова формула. — Скаларни производ вектора напона $\mathbf{p}_{(z)}$ и управљеног елемента ds узет дуж затворене криве (L) унутар попречног пресека вратила изложеног увијању [које може бити облика једноструког или вишеструко повезаног подручја, а да крива (L) обухвата једну или више унутрашњих контура (K_i) или ниједну контуру J , с обзиром на (5.33) и (5.31)

$$\tau_{zx} = \partial \Phi / \partial y = \mathbf{G} \theta' [(\partial \varphi / \partial x) - y]; \quad \tau_{zy} = -(\partial \Phi / \partial x) = \mathbf{G} \theta' [(\partial \varphi / \partial y) + x];$$

$$w = \theta' \varphi(x, y)$$

је циркулација

$$\Gamma = \oint_{(L)} (\mathbf{p}_{(z)}, ds) = \oint_{(L)} (\tau_{zx} dx + \tau_{zy} dy) = \mathbf{G} \theta' \oint_{(L)} [(x dy - y dx) + (\partial \varphi / \partial x) dx + (\partial \varphi / \partial y) dy] = \mathbf{G} \theta' \oint_{(L)} (x dy - y dx) + \mathbf{G} \oint_{(L)} dw.$$

Пошто померање $w = \theta' \varphi(x, y)$ мора бити једнозначна функција координата x, y унутар попречног пресека то је други интеграл у предњој једначини еднак нули, то ће бити циркулација вектора тангенцијалног напона

$$\Gamma = \mathbf{G} \theta' \oint_{(L)} (x dy - y dx) = 2 \mathbf{G} \theta' A, \tag{5.138}$$

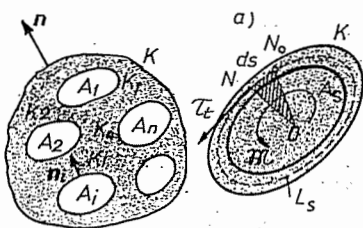
где је A површина омеђена кривом L унутар пресека вратила.

С обзиром на (5.30) може се циркулација изразити помоћу функције у облику

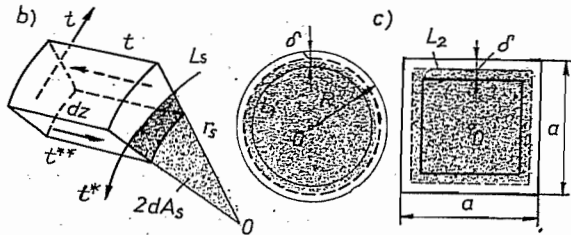
$$\Gamma = 2 \mathbf{G} \theta' A = - \oint_{(L)} (d \Phi / dn) ds. \tag{5.139}$$

Ово је израз Bredt-ове формуле* коју је он извео 1896. године.

Када се код вишеструког подручја у наредном обрасцу свака унутрашња контурна крива (K_i) добија се систем једначина за одређивање константи D_i -вредности функције $\Phi(x, y)$ на тим контурама.



Слика 1.25. — Вишеструко повезана област



Слика 5.26. — Торзија танке цеви

5.11. Торзија танке цеви. — Претпоставља се да је дебелина цеви (δ) доста мала у односу на њене попречне и уздужне димензије (слика 5.26.а), и да зависи само од лука, $\delta = \delta(s)$. Сем тога сматра се да су тангенци-

* Bredt R., Kritische Memerkungen zur Drehung.ela tizität. VDI, 40 (1896).

јални напони једнолико распоређени по дебљини зида цеви, тј. да тотални напон пада у правац тангенте на средњу линију дебљине цеви (L_s) која је на растојању r_s од средишта (тежишта) O , те је $\tau_t = \tau_{zs}$. Како је према (5.18) напон $\tau_t = -(d\Phi/dn) = \text{const}$, то се напонска функција Φ линеарно мења по дебљини цеви. Вредност те функције на спољашњој контури (K) износи $D_s = 0$, а унутрашњој је $-D_u$, па је $\tau_t = -(d\Phi/dn) = -(D_s - D_u)/\delta = D_u/\delta$. Стога се из Bredt-ове формуле (5.139) добија релација

$$2 \mathbf{G} \theta' A_s = \oint_{(L_s)} \tau_t ds = \tau_t L_s; \quad \theta' = \tau_t L_s / 2 \mathbf{G} A_s, \quad (5.140)$$

где је L_s дужина средње линије цеви, а A_s површина омеђена том линијом.

На елемент површине цеви дејствује тангенцијална сила $dF_t = \tau_t dA_c = \tau_t (\delta ds)$. Величина ове силе по јединици дужине одређене линије назива се *сџецифична тангенцијална сила, смицајна сила по јединици дужине средње линије цеви* или *шок**, $F'_t = dF_t/ds = \tau_t (\delta ds)/ds = \tau_t \delta = t$. Ток је димензије $[F/L]$, јединице $[\text{kN/cm}]$ или $[\text{kN/mm}]$. Издвојимо из напрегнуте цеви елемент дужине dz , запремине $dV = (\delta ds) dz$ (слика 5.26. б), онда ако је на елементу површине цеви dA_c једног попречног пресека ток t на другом пресеку биће $t^* = t + (\partial t/\partial z) dz$. Због прираштаја лука средње линије цеви биће и прираштаја тока од t на $t^{**} = t + (\partial t/\partial s) ds$. Како овај елемент мора бити у равнотежи то следи да су $\partial t/\partial z = 0$ и $\partial t/\partial s = 0$ што значи *га је шок константан јер не зависи нићи од s нићи од z* .

Елемент површине цеви $dA_c = \delta ds$ изложен је дејству напона τ_t , па је равнотажни услов

$$\mathfrak{M}_t = \oint \tau_t \cdot (\delta ds) \cdot r_s = t \oint r_s ds = 2t \iint dA_s = 2t A_s,$$

то су

$$\tau_{zs} = \tau_t = \mathfrak{M}_t / 2 A_s \delta; \quad t = \mathfrak{M}_t / 2 A_s; \quad \mathfrak{M}_t = 2 A_s \tau_t \delta = 2 A_s t. \quad (5.141)$$

Често се и ова формула назива Bredt-овом формулом, тако да их има две.

На пример, ако су кружна и квадратна цев истих константних дебљина, једнаких дужина средњих линија $L_s = L = 2 R_s \pi = 4 a_s$, (слика 5.26 с), до истог су материјала и подвргнуте дејству момената увијања, онда ће бити:

$$\tau_1/\tau_2 = A_2/A_1 = (L/4)^2/(L^2/4\pi) = \pi/4 = 0,785;$$

$$\theta_1'/\theta_2' = (A_2/A_1)^2 = (\pi/4)^2 = 0,616.$$

Пресек цеви се не витопери (нема децланације), јер су:

$$\begin{aligned} \sigma_z = 0; \quad \varepsilon_z = \partial w/\partial z = 0; \quad \tau_{zc} = \tau_t = \mathbf{G} \gamma_{zc} = \mathbf{G} [(\partial v/\partial z) + r^{-1}(\partial w/\partial \varphi)] = \\ = \mathbf{G} [\partial(r\theta')/\partial z + (\partial w/\partial s)] = t/\delta; \quad t = \mathbf{G} \delta [r\theta' + (\partial w/\partial s)]; \end{aligned}$$

$\partial t/\partial z = 0 = \mathbf{G} \delta [(\partial^2 v/\partial z^2) + \partial^2 w/\partial z \partial s]; \quad \partial^2 v/\partial z^2 = 0$, па је заиста

$$\partial w/\partial s = (t/\mathbf{G} \delta) - (r\theta') = \mathfrak{M}_t/2 \mathbf{G} A_s \delta - (r\theta'); \quad w = 0. \quad (5.142)$$

Код цеви са *две* или *више унутрашњих контура* (отвора) токови се *сабирају*, (слика 5.27. а). Ток се сматра позитивним ако „*шече*“ у пози-

* Станков Д., Предавања из Статике авиона, II део, Београд, (1949).

тивном смеру обилажења (супротном од смера кретања сатне казаљке), у противном је негативан. Тако је у „зигу“ (прегради 3) ток $t_3 = t_1 - t_2$. Нека су и константне дебљине, онда из Вредт-ових формула следе релације:

$$\text{a) } t_3 = t_1 - t_2; \quad \text{b) } 2 A_1 t_1 + 2 A_2 t_2 = \mathfrak{M}_t; \quad \text{c) } \tau_1 L_1 + \tau_3 L_3 = \lambda A_1; \\ \tau_2 L_2 - \tau_3 L_3 = \lambda A_2; \quad \lambda = 2 \mathbf{G} \theta'.$$

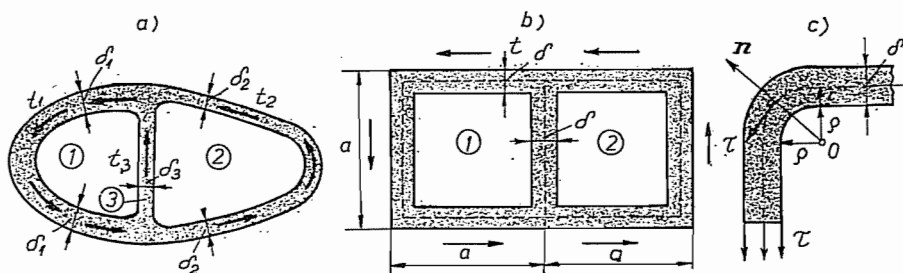
Пошто је ток $t_i = \tau_i \delta_i$, то се добија систем једначина

$$t_1 (\delta_3 L_1 + \delta_1 L_3) - \delta_1 L_3 t_2 = \lambda A_1 \delta_1 \delta_3; \quad -\delta_2 L_3 t_1 + t_2 (\delta_3 L_2 + \delta_2 L_3) = \lambda_2 \delta_2 \delta_3, \\ A_1 t_1 + A_2 t_2 = \mathfrak{M}_t / 2; \quad \lambda = 2 \mathbf{G} \theta' = -C;$$

из кога се одређују токови, а затим напони

$$\tau_1 = t_1 / \delta_1 = \mathfrak{M}_t [A_1 \delta_3 L_2 + (A_1 + A_2) \delta_2 L_3] / 2 \Delta; \\ \tau_2 = t_2 / \delta_2 = \mathfrak{M}_t [A_2 \delta_3 L_1 + (A_1 + A_2) \delta_1 L_3] / 2 \Delta; \quad \tau_3 = \mathfrak{M}_t [A_1 \delta_1 L_2 - A_2 \delta_2 L_1] / 2 \Delta \\ \Delta = [A_1^2 \delta_1 \delta_3 L_2 + A_2^2 \delta_2 \delta_3 L_1 + (A_1 + A_2)^2 \delta_1 \delta_2 L_3]. \quad (5.143)$$

Код цеву са два симетрична отвора, исте дебљине $\delta_i = \delta$ (слика 5.27. b) биће $A_1 = A_2 = A$ и $L_1 = L_2$, па је $\tau_3 = 0$. Тада су $\tau_1 = \tau_2 = \mathfrak{M}_t / 4 A \delta$; $A = a^2$.



Слика 5.27. — Танка цев са два отвора

Код цеву са заобљењем (слика 5.27. c) применом Вредт-ове формуле на образац (5.133) добиће се

$$(d \tau_i / dr) + r^{-1} \tau_i = -C = 2 \mathbf{G} \theta' = \tau L_s / A_s; \quad \tau = 2 \mathbf{G} \theta' A_s / L_s;$$

$$\tau_i = (C_1 / r) + \tau L_s r / 2 A_s; \quad \int_{\rho}^{\rho+\delta} \tau_i dr = \tau \delta = t = \text{const};$$

$$[C_1 \ln r + (\tau L_s r^2 / 4 A_s)]_{\rho}^{\rho+\delta} = \tau \delta; \quad C_1 = t [1 - (L_s / 4 A_s) \rho (2 + \psi)] / [\ln(1 + \psi)]; \quad \psi = \delta / \rho,$$

јер је према хидромеханичкој аналогiji ток константан. Према томе је тангенцијални напон

$$\tau_i = \{(\tau \delta / r) [1 - (\rho L_s / 4 A_s) (2 + \psi)] / [\ln(1 + \psi)]\} + \tau L_s r / 2 A_s; \quad (5.144)$$

односно*

$$\tau_i = \tau \delta / [r \ln(1 + \psi)]; \quad \tau_{i, \max} = \tau \delta / [\rho \ln(1 + \psi)]; \quad L_s r / A_s = 0; \quad L_s \rho / A_s = 0$$

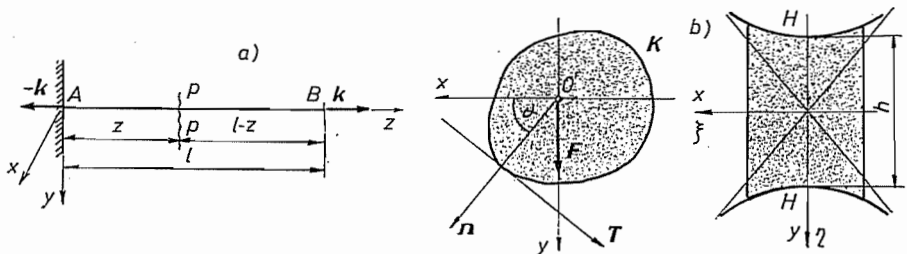
* Huth J. H., Jour. Appl. Mech. (JAM), v. 17, p. 388, (1950).

ПРИМЕРИ

1. У коме односу стоје торзијске крутости правоугаоника и елипсе чије су полусе једнаке дужинама страница правоугаоника?
2. Колика је торзијска крутост кружног прстена полупречника r и R , ако су тежишта кругова на Ox -оси на растојању $e = C_1 C_2$?
3. Колико се смањи торзијска крутост танког прстена ако се штап расече уздужном равни кроз осу штапа?
4. Цев се састоји из два полукруга и квадрата, странице $a = 2R = 20$ cm. Дебљина цеви и двеју вертикалних пречага је 2 mm. Цев је изложена дејству момента увијања јачине 600 000 N cm. Одредити тангенцијалне напоне.
5. Цев се састоји из полукруга и два једнака квадрата, странице $a = 2R$, где је R полупречник полукруга $R = 125$ mm. Три пречага су дебљине 2 mm, а остали део цеви 1,5 mm. Цев је изложена дејству момента јачине 750 000 N cm. Одредити тангенцијалне напоне од увијања.

6. САВИЈАЊЕ ШТАПОВА

6.1. Савијање према хипотези Журавског. — Призматична конзола AB симетричног пресека према Oy -оси, уклештена је на левом крају (A) а на десном (B) је оптерећена концентрисаном силом F усмереном у смеру $+Oy$ -осе (слика 6.1. *a*). Координатни систем $Oxyz$ узима се на месту уклештења (A); осе Ox и Oy јесу главне централне осе инерције попречног пресека, а Oz -оса је геометријска оса. Оса $+Oy$ усмерена *ниже*.



Слика 6.1. — Савијање конзоле

Према *хипотези Журавској* која се чини и у отпорности материјала постоји само нормални напон у аксијалном правцу и тангенцијални напон у равни попречног пресека, а у смеру дејства силе F . Запреминска сила се *занемарује*, па су напони дати матрицом тензора напона

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}; \quad \mathcal{N}_I = \sigma_z; \quad \mathbf{F}_V' = 0. \quad (6.1)$$

Из Navier-ових једначина (1.25) следе ове релације:

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}; \quad \frac{\partial^2 \tau_{zy}}{\partial z^2} = 0,$$

а из Beltrami-јевих једначина (3.26) биће:

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z} = 0; \quad \Delta \tau_{zy} = -p \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z}; \quad p = \frac{1}{1 + \mu}.$$

Стога мора аксијални напон σ_z бити

$$\sigma_z = C_1 x + C_2 y + C_3 z + C_4 yz + C_5, \quad (6.2)$$

где су C_i произвољне константе. С обзиром на горње једначине изводи су:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = C_3 + C_4 y; \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z} = C_4; \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = -(C_3 + C_4 y); \quad \frac{\partial^2 \tau_{zy}}{\partial y^2} = -C_4,$$

$$\Delta \tau_{zy} = \frac{\partial^4 \tau_{zy}}{\partial x^2} - C_4 = -p C_4; \quad \frac{\partial^2 \tau_{zy}}{\partial x^2} = (1-p) C_4; \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} = C_4 (1-p) x + C_6,$$

па су

$$\tau_{zy} = \frac{1-p}{2} C_4 x^2 + C_6 x + \psi(y); \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} = -(C_3 + C_4 y) = \psi'(y),$$

те је тангенцијални напон

$$\tau_{zy} = C_7 \left(\frac{1-p}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 \right) - C_3 y + C_6 x + C_7, \quad (6.3)$$

где су C_6 и C_7 интеграционе константе.

Јединични вектор нормале леве основе је $-\mathbf{k}$, а десне \mathbf{k} , па су Cauchy-јеви површински услови на основама конзоле:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'_n \\ Y'_n \\ Z'_n \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ [-\tau_{zy}]_0 \\ [-\sigma_z]_0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} X'_n \\ Y'_n \\ Z'_n \end{pmatrix}_l = \begin{pmatrix} 0 \\ [\tau_{zy}]_l \\ [\sigma_z]_l \end{pmatrix}.$$

Нормални напони биће:

за $z=0$ је $\sigma_z = C_1 x + C_2 y + C_5$; за $z=l$ је $\sigma_z = C_1 x + C_2 y + C_3 l + C_4 l y + C_5$. Према постављеном проблему силе на левој основи редукују се на силу $-F_i$ и спрег $M_2 = Fl$, а на десној основи само на силу F_i , па мора бити:

$$a) \quad F = - \int \int_{(A)} \tau_{zy} dA; \quad F = C_4 \left(\frac{1-p}{2} I_y - \frac{1}{2} I_x + C_7 A \right); \quad 0 = - \int \int_{(A)} \sigma_z dA; \quad C_5 = 0;$$

$$M_0 = \int \int_{(A)} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ 0 & -\tau_{zy} & -\sigma_z \end{vmatrix} dA;$$

$$Fl = - \int \int_{(A)} y \sigma_z dA = -C_2 I_x; \quad 0 = \int \int_{(A)} x \sigma_z dA = C_1 I_y; \quad C_1 = 0;$$

$$0 = \int \int_{(A)} x \tau_{zy} dA = - \int \int_{(A)} C_4 \left(\frac{1-p}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 \right) x dA - C_6 I_y = 0; \quad C_6 = 0;$$

$$b) \quad F = \int \int_{(A)} \tau_{zy} dA; \quad F = C_4 \left(\frac{1-p}{2} I_y - \frac{1}{2} I_x \right) + C_7 A;$$

$$0 = \int \int_{(A)} \sigma_z dA = C_3 l A + C_5 A = 0; \quad C_5 = -C_3 l;$$

$$M_0 = \int \int \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & l \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} dA;$$

$$0 = \int \int_{(A)} (\sigma_z y - l \tau_{zy}) dA = C_2 I_x + C_4 I_x - C_4 l \left(\frac{1-p}{2} I_y - \frac{1}{2} I_x \right) - C_7 l A;$$

$$0 = - \int \int_{(A)} x \sigma_z dA = -C_1 I_y = 0; \quad 0 = \int \int_{(A)} x \tau_{zy} dA = C_6 I_y; \quad C_6 = 0.$$

Дакле, константе су:

$$C_1 = 0; \quad C_2 = -\frac{Fl}{I_x}; \quad C_3 = 0; \quad C_4 = -\frac{C_2}{l} = \frac{F}{I_x}; \quad C_5 = 0; \quad C_6 = 0;$$

$$C_7 = \frac{F}{2A} \left(3 - \frac{\mu}{1+\mu} \frac{I_y}{I_x} \right); \quad 1-p = \frac{\mu}{1+\mu};$$

па су нормални и тангенцијални напон

$$\sigma_z = -\frac{F}{I_x} (l-z) y; \quad \tau_{zy} = \frac{F}{2I_x} \left(\frac{\mu}{1+\mu} x^2 - y^2 \right) + \frac{F}{2A} \left(3 - \frac{\mu}{1+\mu} \frac{I_y}{I_x} \right);$$

$$M_f^d = -F(l-z). \quad (6.4)$$

Нормални напон слаже се са вредношћу која се добија у отпорности материјала, међутим, тангенцијални не, ($\tau_{zy} = \tau_{yz} = F_T S_X' / I_X \xi$).

На бочној површи (омотачу) греде не дејствују силе, па су површински услови

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{zy} \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_n' \\ Y_n' \\ Z_n' \end{Bmatrix}; \quad 0 = \int \int_{(A)} \tau_{zy} \beta dA; \quad \tau_{zy} \beta = 0. \quad (6.5)$$

Из ове релације следи да мора на контури бити или $\beta = 0$ или $\tau_{zy} = 0$. Пошто је нормала управна на Oz -оси, то је $\gamma = 0$, па ће бити $\beta = 0$; $\alpha^2 = 0$; тј. $\alpha = 0$, што представља две праве паралелне Oy -оси. Други услов за тачку на контури ($x = \xi$; $y = \eta$):

$$\tau_{zy} = 0; \quad \left(y^2 - \frac{\mu}{1+\mu} x^2 \right) = \frac{I_x}{A} \left(3 - \frac{\mu}{1+\mu} \frac{I_y}{I_x} \right) = \left(\frac{l}{2} \right)^2, \quad \text{на контури } (K) \quad (6.6)$$

показује да се контура састоји из двеју грана хиперболе чије полуосе стоје у односу $[1 + (1/\mu)]^{1/2}$.

Из изложеног се види да претпоставке учињене према хипотези Журавског важе само за пресек чија се контура састоји из две праве паралелне Oy -оси и две гране хиперболе са теменима на Oy -оси (слика 6.1.b).

6.2. Општији случај савијања конзоле. — Хипотезу Журавског проширићемо тиме да у равни попречног пресека постоји и друга компонента тангенцијалног напона* па ће бити:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}; \quad \sigma_z; \quad \mathcal{N}_1 = \sigma_z; \quad F_V' = 0. \quad (6.7)$$

Тада из Navier-орих једначина (1.25) следи:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}; \quad \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \tau_{zy}}{\partial z^2} = 0; \quad (6.8)$$

а из Balméri-јевих једначина (3.26) биће:

$$\partial^2 \sigma_z / \partial x^2 = \partial^2 \sigma_z / \partial y^2 = \partial^2 \sigma_z / \partial z^2 = 0; \quad \partial^2 \sigma_z / \partial x \partial y = 0; \quad p = 1/(1 + \mu); \quad (6.9)$$

$$\Delta \tau_{zx} = (\partial^2 \tau_{zx} / \partial x^2) + (\partial^2 \tau_{zx} / \partial y^2) = -p (\partial^2 \sigma_z / \partial x \partial z); \quad \Delta \tau_{zy} = -p (\partial^2 \sigma_z / \partial y \partial z),$$

па је нормални напон

$$\sigma_z = C_1 x + C_2 y + C_3 z + C_4 xz + C_5 yz + C_6, \quad C_i = \text{const} \quad (6.10)$$

Cauchy-јеви гранични услови на основама и нормални напони су;

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau_{zx} \\ -\tau_{zy} \\ -\sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_n' \\ Y_n' \\ Z_n' \end{pmatrix}_0; \quad \mathbf{N} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{pmatrix}_l = \begin{pmatrix} X_n' \\ Y_n' \\ Z_n' \end{pmatrix}_l;$$

$$(\sigma_z)_0 = C_1 x + C_2 y + C_6; \quad (\sigma_z)_l = (C_1 + C_4 l) x + (C_2 + C_5 l) y + (C_3 l + C_6).$$

Као и у претходном случају редуција сила на тежишта основа конзоле доводи до релација:

$$1^\circ \quad 0 = -\int\int_{(A)} \tau_{zx} dA; \quad -F = -\int\int_{(A)} \tau_{zy} dA; \quad 0 = -\int\int_{(A)} \sigma_z dA; \quad C_6 = 0;$$

$$\mathfrak{M}_x = Fl = -\int\int_{(A)} \sigma_z y dA = -C_2 I_x; \quad \mathfrak{M}_y = 0 = \int\int_{(A)} \sigma_z x dA = C_1 I_y; \quad C_2 = -Fl/I_x;$$

$$\mathfrak{M}_z = 0 = \int\int_{(A)} (\tau_{zx} y - \tau_{zy} x) dA; \quad C_1 = 0;$$

$$2^\circ \quad 0 = \int\int_{(A)} \tau_{zx} dA; \quad F = \int\int_{(A)} \tau_{zy} dA; \quad 0 = \int\int_{(A)} \sigma_z dA = C_3 l A; \quad C_3 = 0;$$

$$\mathfrak{M}_x = 0 = \int\int_{(A)} \sigma_z y dA = (C_2 + C_5 l) I_x; \quad \mathfrak{M}_y = 0 = -\int\int_{(A)} \sigma_z x dA = 0; \quad C_5 = -C_2/l;$$

$$\mathfrak{M}_z = 0 = \int\int_{(A)} (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA = 0. \quad C_4 = 0.$$

С обзиром на константе C_i нормални напон је

$$\sigma_z = -F(l - z) y / I_x, \quad (6.11)$$

тј. исти као и у претходном случају. Уз то морају бити задовољни и ови услови:

$$\int_{(A)} \tau_{zx} dA = 0; \quad F = \int_{(A)} \tau_{zy} dA; \quad \int_{(A)} (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA = 0. \quad (6.12)$$

На *омошачу* (бочној површи) конзоле не дејствују спољашње силе, па је контурни услов

$$\tau_{zx} \alpha + \tau_{zy} \beta = 0; \quad \gamma = 0, \quad \text{на контури } (K). \quad (6.13)$$

Из изложеног види се да је напон σ_z независан од контуре попречног пресека и да одговара хипотези која се чини и у отпорности материјала (6.11). Међутим, компонентни тангенцијални напони τ_{zx} и τ_{zy} везани су релацијама (6.9), условима (6.12) и контурним условом (6.13). Из једначине (5.8) види се да ови напони не зависе од координате z , па су функције само од x и y . Пошто се трећа Navier-ова једначина (1.25) може написати у облику

$$(\partial \tau_{zy} / \partial x) + (\partial \tau_{zy} / \partial y) + (Fy / I_x) = 0; \quad (\partial \tau_{zx} / \partial x) + \partial [\tau_{zy} + (Fy^2 / 2 I_x)] / \partial y = 0,$$

то су компонентни напони

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad \tau_{zy} + \frac{F}{2 I_x} y^2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + f(x), \quad (6.14)$$

где је $\Phi(x, y)$ функција напона, а $f(x)$ произвољна функција* од x . С обзиром на (6.11) из једначина (6.9) следи да су

$$\Delta \tau_{zx} = 0; \quad \Delta \tau_{zy} = -pF / I_x; \quad p = 1 / (1 + \mu); \quad \Delta (\partial^2 / \partial x^2) + (\partial^2 / \partial y^2).$$

Када се у ову једначину унесу релације (6.14) добиће се

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} (\Delta \Phi) = 0; \quad \Delta \left[-\frac{\partial \Phi}{\partial x} + f(x) - \frac{F}{2 I_x} y^2 \right] = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} (\Delta \Phi) + f''(x) - \frac{F}{I_x} = -p \frac{F}{I_x}; \\ \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \Phi) &= -(1-p) \frac{F}{I_x} + f''(x); \quad p = 1 / (1 + \mu) \end{aligned}$$

па функција напона мора да задовољава следећу парцијалну једначину

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -(1-p) \frac{F}{I_x} x + f''(x) + C'; \quad 1-p = \frac{\mu}{1+\mu} = \mu p; \quad C' = 0. \quad (6.15)$$

Јединични вектори нормале и тангенте у некој тачки *контуре* су $\mathbf{n} = \mathbf{i} \alpha + \mathbf{j} \beta$; $\mathbf{T} = -\mathbf{i} \beta + \mathbf{j} \alpha = (i d \xi + j d \eta) / ds$, па су $\alpha = d \eta / ds$; $\beta = -d \xi / ds$ то је контурни услов (6.13):

$$\tau_{zx} \alpha + \tau_{zy} \beta = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} - \left[-\frac{\partial \Phi}{\partial x} + f(x) - \frac{F}{2 I_x} y^2 \right] \frac{dx}{ds} = 0; \quad x = \xi; \quad y = \eta.$$

* Ову је функцију увео S. P. Timoshenko, Bull. Inst. Eng. of Ways of Communications, St. Petersburg, (1913).

односно

$$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \left[-\frac{F}{2I_x} y^2 + f(x) \right] \frac{dx}{ds}, \text{ на контури (K)}. \quad (6.16)$$

Проблем се, дакле, свео на одређивање функције напона $\Phi(x, y)$ која мора да задовољава парцијалну једначину (6.15) и контурни услов (6.16).

С обзиром на Нооке-ов закон (3.15) и (6.11) компонентне деформације су:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\mu}{E} \sigma_z = \frac{F\mu}{\mathfrak{B}} (l-z)y; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau_{xy}}{\mathbf{G}} = 0; & \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y}; \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\mu}{E} \sigma_z = \frac{F\mu}{\mathfrak{B}} (l-z)y; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau_{zx}}{\mathbf{G}} = \frac{1}{\mathbf{G}} \frac{\partial\Phi}{\partial y}; & \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1}{\mathbf{G}} \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z}; \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma_y}{E} = -\frac{F}{\mathfrak{B}} (l-z)y; & \gamma_{zy} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau_{zy}}{\mathbf{G}} = -\frac{1}{\mathbf{G}} \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x} - f(x) + \frac{F}{2I_x} y^2 \right], \end{aligned}$$

па су компонентна померања

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{F}{\mathfrak{B}} (l-z)x + C_1; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{Fl}{\mathfrak{B}} xy + C_2;$$

$$u = \frac{F\mu}{\mathfrak{B}} (l-z)xy + C_1 y + C_2 z + C_3,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{F\mu}{\mathfrak{B}} (l-z)x - C_1; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{F}{2\mathfrak{B}} [x^2 - y^2 + (2lz - z^2)] + C_4;$$

$$v = -\frac{F\mu}{2\mathfrak{B}} (l-z) [x^2 - y^2] + \frac{F}{6\mathfrak{B}} (3lz^2 - z^3) - C_1 x + C_4;$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{\mathbf{G}} \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{F\mu}{\mathfrak{B}} xy - C_2; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{\mathbf{G}} \left[\frac{\partial\Phi}{\partial y} - f(x) + \frac{F}{2I_x} y^2 \right] - \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{F}{\mathfrak{B}} (l-z)y; \quad w = \int_0^x \frac{\partial w}{\partial x} dx + \int_0^y \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_{x=0} dy + \int_0^z \left[\frac{\partial w}{\partial z} \right]_{x=0, y=0} dz + C_6,$$

односно

$$u = \frac{F\mu}{\mathfrak{B}} (l-z)xy;$$

$$u = \frac{F\mu}{\mathfrak{B}} (l-z)xy;$$

$$v = -\frac{F\mu}{2\mathfrak{B}} (l-z) [x^2 - y^2] + \frac{F}{6\mathfrak{B}} (3lz^2 - z^3); \quad (6.17)$$

$$w = \frac{Fy}{2\mathfrak{B}} \left[-(2lz - z^2) + \mu x^2 - \frac{(2+\mu)}{3} y^2 \right] + \frac{1}{\mathbf{G}} \left\{ \int_0^x \frac{\partial\Phi}{\partial y} dx - \int \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x} - f(x) \right]_{x=0} dy \right\};$$

пошто су константне $C_i = 0$, јер је леви крај уклештен.

Једначина еластичне линије савијене конзоле је

$$v(x=0, y=0) = \frac{F}{6B} (3l-z) z^2 = \frac{Fl^3}{6B} \left(\frac{z}{l}\right)^2 \left[3 - \left(\frac{z}{l}\right)\right] \quad (6.18)$$

која се слаже та оном из отпорности материјала*.

Пошто је клизање γ_{zy} за све тачке $x=y=0$ различито од нуле, то еластична линија није ујавна на појречној пресеку, како се претпоставља у отпорности материјала.

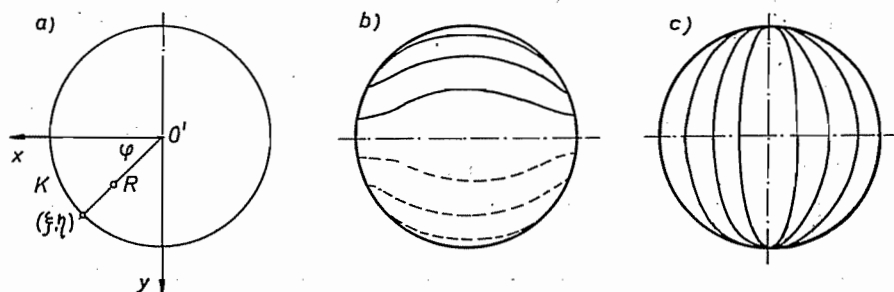
Из (6.17) следи да постоји гејланација појречној пресека. Једначина депланираног попречног пресека је

$$\zeta = w - \gamma_{zy} y. \quad (6.19)$$

За $\zeta = C = \text{const}$ добија се једначина изохије гејланације појречној пресека.

6.3. Савијање конзоле кружног попречног пресека. — Контурна линија је круг (слика 6.2.а), једначине $\xi^2 + \eta^2 = R^2$. функцију $f(x)$ изабраћемо тако да је извод функције савијања $d\Phi/ds =$ и да јој је вредност на контури једнака нули $\Phi(\xi, \eta) = 0$. У томе случају мора бити

$$f(x) = \frac{F}{2I_x} (R^2 - x^2); \quad f'(x) = -\frac{F}{I_x} x, \quad (6.20)$$



Слика 6.2. — Савијање конзоле кружног попречног пресека

па диференцијална једначина (6.15) постаје

$$\Delta \Phi = -(1-p) \frac{F}{I_x} x - \frac{F}{I} x = -\frac{1+2\mu}{1+\mu} \frac{F}{I_x} x. \quad (6.21)$$

С обзиром на овај услов и релације (6.14) функција напона може се претпоставити у облику

$$\Phi(x, y) = C_1 x + C_2 xy^2 + C_3 x^3, \quad (6.22)$$

где ту C_i константе које се одређују из контурног услова

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \eta) &= C_1 \xi + C_2 \xi (R^2 - \xi^2) + C_3 \xi^2 = \\ &= [C_1 + C_2 R^2 + (C_3 - C_2) \xi^2] \xi^2 = 0; \quad C_1 = -C_2 R^2; \quad C_3 = C_2, \end{aligned}$$

* Отпорност материјала, чл. 9.2.2, обр. 193.

неће бити

$$\Phi = C_2 (x^2 + y^2 - R^2) x; \quad \Delta \Phi = 8 C_2 x;$$

$$C = \frac{-(1+2\mu)}{8(1+\mu)} \frac{F}{I_x}; \quad \Phi = \frac{1+2\mu}{8(1+\mu)} \frac{F}{I_x} (R^2 x - xy^2 - x^3). \quad (6.23)$$

Тангенцијални напони су

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{1+2\mu}{4(1+\mu)} \frac{F}{I_x} xy; \quad (6.24.a)$$

$$\tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + f(x) - \frac{F}{2I_x} y^2 = \frac{1}{8(1+\mu)} \frac{F}{I_x} [(3+2\mu)(R^2 - y^2) - (1-2\mu)x^2] \quad (6.24.b)$$

Како је квадрат тоталног напона

$$\tau^2 = \tau_f^2 = \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 = P^2 \{4(1+2\mu)^2 x^2 y^2 + [(3+2\mu)(R^2 - y^2) - (1-2\mu)x^2]^2\} = P^2 \theta(x, y); \quad R = F/8(1+\mu)I_x,$$

то парцијални изводи функције $\theta(x, y)$ дају релације

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 2(1+\mu)^2 xy^2 - [(3+2\mu)(R^2 - y^2) - (1-2\mu)x^2](1-2\mu)x = 0;$$

$$\int \frac{\partial \theta}{\partial y} = 2(1+2\mu)^2 x^2 y - (3+2\mu)[(3+2\mu)(R^2 - y^2) - (1-2\mu)x^2]y = 0,$$

односно

$$[(3+2\mu)(R^2 - y^2) - (1-2\mu)x^2][(1-2\mu)x^2 - (3+2\mu)y^2] = 0.$$

Прво се решење $x=0$, $y=R$ мора одбацити јер би тангенцијални напони (6.24) били једнаки нули, па се за друго решење $x=y=0$ добија највећи тангенцијални напон у тежишту попречног пресека:

$$\tau_{zx} = 0; \quad \tau_{zy} = \tau_{\max} = (3+2\mu)FR^2/8(1+\mu)I_x = (3+2\mu)F/2(1+\mu)A; \quad (6.25)$$

$$I_x = R^4 \pi/4; \quad A = R^2 \pi.$$

За неку тачку на контури пресека су $y = R \cos \varphi = \xi$; $y = R \sin \varphi = \eta$, па је

$$\tau_f^2 = \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 = B^2 [\sin^2 2\varphi + (1 + \cos 2\varphi)^2] = B^2 \Psi(\varphi); \quad B = PR^2(1+2\mu),$$

те је услов екстремума тангенцијалног напона

$$\partial \Psi / \partial \varphi = \sin 2\varphi = 0; \quad \varphi = 0; \quad \varphi = \pi/2,$$

па је највећи тангенцијални напон

$$\tau_{zx} = 0; \quad \tau_{zy} = \tau_{\max}(x=R; y=0) = (1+2\mu)/(1+\mu)A < \tau_{\max}(x=y=0).$$

Дакле, највећи тангенцијални напон је у тежишту попречног пресека савијене греде. У отпорности материјала добија се да је тај напон $\tau_{\max} = F/A_{red}$, $A_{red} = 3A/4$, па за $\mu = 1/3$ грешка износи 3,03%.

Еластична линија гради са нормалом попречног пресека угао

$$\gamma_{xy}(x=y=0) = \tau_{zy}(x=y=0)/G = (3+2\mu)F/AE; \quad A = R^2 \pi. \quad (6.26)$$

С обзиром на (6.17), (6.19) и (6.26) једначина деформационог попречног пресека је

$$\zeta = w - [\gamma_{xy}]_{x=y=0} y = -\frac{4F}{\mathfrak{B}} (x^2 + y^2) y, \quad (6.27)$$

а изохипсе су приказане на слици 6.2.b.

Из услова $[\vec{\tau}, \mathbf{T}] = 0$ следи да је диференцијална једначина линија тангенцијалних напона $-\tau_{xy} dx + \tau_{zx} dy = 0$, односно

$$[(1 + 2\mu)x]^{-1} [(3 + 2\mu)(R^2 - y^2) - (1 - 2\mu)x^2] dx + 2y dy = P dx + Q dy = 0.$$

Пошто није испуњен услов $\partial P / \partial y \neq \partial Q / \partial x$, то множењем функцијом $\theta(x)$ добија се услов $M dx + N dy = 0$, где су $M = P\theta$; $N = Q\theta$. Непозната функција $\theta(x)$ одређује се из услова за тотални диференцијал

$$\begin{aligned} (\partial M / \partial y) &= (\partial N / \partial x); \{[(\partial P / \partial y) - (\partial Q / \partial x)] / Q\} dx = (1/\theta) d\theta; \\ -(cdx)/x &= (d\theta)/\theta; -c \ln x = \ln x^{-c} = \ln \theta; \theta = x^{-c}; c = (3 + 2\mu)/(1 + 2\mu). \end{aligned}$$

Множењем горње једначине функцијом $\theta(x)$ добија се једначина

$$\left[c \frac{R^2 - y^2}{x^{c+1}} - \frac{1 - 2\mu}{1 + 2\mu} \cdot \frac{1}{x^{c-1}} \right] dx + \frac{2y}{x^c} dy = 0.$$

Пошто је ово тотални дијеренцијал биће

$$U = -(R^2 - y^2)x^{-c} + x^{2-c} + \varphi(y) = 0; \varphi(y) = C; 2 - c = -(1 - 2\mu)/(1 + 2\mu),$$

па је једначина линија тангенцијалних напона (слика 6.2.c)

$$R^2 - x^2 - y^2 = Cx^c = Cx^{[(3+2\mu)/(1+2\mu)]}, \quad (6.28)$$

где је C константа.

6.4. Савијање конзоле кружно-прстенастог попречног пресека. — Функцију $f(x)$ за овај пресек (слика 6.3.a) изаберимо у облику $f(x) = (1-p)Fx^2/2I_x$, тако да функција савијања $\Phi(x, y)$, према (6.21), буде хармонијска, $\Delta \Phi(x, y) = 0$. Тада су контурни услови за оба круга:

$$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{F}{2I_x} \left[\rho^2 - c \xi^2 \right] \frac{d\xi}{ds}; \rho^2 = \xi^2 + \eta^2; \rho = r; \rho = R; c = \frac{1 + 2\mu}{1 + \mu} = (1 + 2\mu)p,$$

па су функције напона

$$\Phi_u = \frac{F}{2I_x} \left[r^2 - \frac{1}{3} c \xi^2 \right] \xi; \Phi_s = \frac{F}{2I_x} \left[R^2 - \frac{1}{3} c \xi^2 \right] \xi. \quad (6.29)$$

Из ових услова види се да је хармонијска функција $\Phi(x, y)$ непарна у односу на x и парна на односу на y , па ћемо је представити у облику

$$\Phi(x, y) = C_1 x + C_2 \frac{x}{x^2 + y^2} + C_3 (3xy^2 - x^2), \quad (6.30)$$

где су C_i константе које се одређују из контурних услова (6.29). Дакле, биће:

$$C_1 \xi + C_2 \xi/r^2 + C_3 (3r^2 - 4\xi^2) \xi = (F/2 I_x) \left(r^2 - \frac{1}{3} c \xi^2 \right) \xi;$$

$$C_1 \xi + C_2 \xi/R^2 + C_3 (3R^2 - 4\xi^2) \xi = (F/2 I_x) \left(R^2 - \frac{1}{3} c \xi^2 \right) \xi,$$

односно:

$$C_1 r^2 + C_2 + 3 C_3 r^4 = F r^4 / 2 I_x; \quad C_1 R^2 + C_2 + 3 C_3 R^4 = F R^4 / 2 I_x; \quad 4 C_3 = F c / 6 I_x,$$

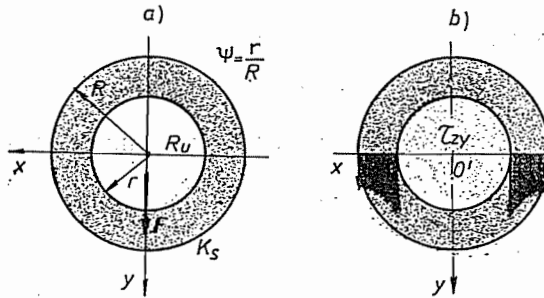
па су константе

$$C_1 = k(R^2 + r^2); \quad C_2 = -kR^2 r^2; \quad C_3 = Fc/24I_x; \quad h = \frac{(3+2\mu)}{8(1+\mu)} F/I_x,$$

и функција напона

$$\Phi = \frac{1}{8(1+\mu)} \frac{F}{I_x} \left\{ (3+2\mu) \left[(R^2+r^2)x - \frac{R^2 r^2 x}{x^2+y^2} \right] + \frac{1+2\mu}{3} (3xy^2 - x^3) \right\}. \quad (6.31)$$

Према (6.14) компонентни тангенцијални напони су:



Слика 6.3. — Савијање конзоле кружно прстенастог пресека

$$\tau_{zx} = -\frac{1}{4(1+\mu)} \frac{F}{I_x} \left[(3+2\mu) \frac{R^2 r^2}{(x^2+y^2)^2} + (1+2\mu) \right] xy; \quad (6.32.a)$$

$$\tau_{zy} = \frac{1}{8(1+\mu)} \frac{F}{I_x} \left\{ (3+2\mu) \left[(R^2+r^2) + (x^2-y^2) \left(1 + \frac{R^2 r^2}{(x^2+y^2)^2} \right) \right] - 4x^2 \right\}. \quad (6.32.b)$$

Највећи тангенцијални напон је као и код кружног пресека и износи:

$$a) \quad \tau_{zx} = 0; \quad \tau_{zy} = \tau_{\max} = \frac{1+2\mu(1+\psi^2) + 3\psi^2}{(1+\mu)(1+\psi^2)} \frac{F}{A};$$

$$\psi = \frac{r}{R}; \quad A = (1-\psi^2) R^2 \pi; \quad (6.33.a)$$

Например, за $\psi=r/R=1/2$ и $\mu=1/3$ напоне износе: $\tau_{zy}(x=R, y=0)=31 F/20 A$; $\tau_{zy}(x=r, y=0)=49 F/20 A$. Други је 1,58 пута већи од првог.

У случају врло танке цеви је $\psi=r/R \approx 1$, па се израз $(R-r)/r \approx 0$ те су напони:

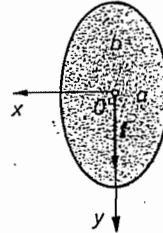
$$\begin{aligned}\tau_{zx} &= -\frac{FR^2}{2I_x} \sin 2\varphi; \quad \tau_{zy} = \frac{FR^2}{I_x} \cos^2 \varphi; \\ \tau_{zy\max} &= \frac{FR^2}{I_x} = \frac{2F}{A}; \quad A = 2R\pi\delta.\end{aligned}\quad (6.34)$$

$$b) \quad \tau_{zx} = 0; \quad \tau_{zy} = \tau_{\max}(x=r; y=0) = \frac{3 + 2\mu(1 + \psi^2) + \psi^2}{(1 + \mu)(1 + \psi^2)} \frac{F}{A}.$$

Дијаграм промене напона τ_{zy} приказан је на слици 6.3.б.

6.5. Савијање конзоле елиптичног попречног пресека. — У случају елиптичног попречног пресека, полуоса a и b , (слика 6.4), Једначина контурне линије је $b^2 \xi^2 + a^2 \eta^2 = a^2 b^2$. Да би било $d\Phi/ds = 0$ мора бити функција $f(x) = -Fy^2/2I_x = F[b^2 - (bx/a)^2]/2I_x$, па је $f'(x) = -Fb^2 x/I_x a^2$, те је према (6.15)

$$\begin{aligned}\Delta \Phi(x, y) &= -(1-p) \frac{Fx}{I_y} + f(x) \\ &= -\frac{Fx}{I_y} \left[\frac{b^2}{a^2} + \frac{\mu}{1 + \beta} \right].\end{aligned}\quad (6.35)$$



Слика 6.4. — Конзола елиптичног попречног пресека

Да би било на контури $\Phi(\xi, \eta) = 0$ узећемо функцију $\Phi(x, y)$ као и код кружног пресека $\Phi = C_2(b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2)x$. Константа C_2 одређује се из (6.35), па је $C_2 = -F[\mu a^2 + (1 + \mu)b^2]/2(a^2 + 3b^2)a^2(1 + \mu)I_x$, те је функција напона

$$\Phi = -\frac{\mu a^2 + (1 + \mu)b^2}{2(1 + \mu)(a^2 + 3b^2)} \frac{Fx}{I_x a^2} (b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2).\quad (6.36)$$

За $a = b = R$ она се поклапа са релацијом (6.23).

Компонентни тангенцијални напони су:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\mu a^2 + (1 + \mu)b^2}{(1 + \mu)(a^2 + 3b^2)} \frac{F}{I_x} xy;\quad (6.37.a)$$

$$\begin{aligned}\tau_{zy} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + f(x) - \frac{F}{2I_x} y^2 = \\ &= \frac{1}{2(1 + \mu)(a^2 + 3b^2)} \cdot \frac{F}{I_x} \{ [a^2 + 2(1 + \mu)b^2/(b^2 - y^2) - (1 - 2\mu)b^2 x^2] \}.\end{aligned}\quad (6.37.b)$$

Максимални тангенцијални напон је у средишту и износи

$$x = y = 0; \quad \tau_{zx} = 0; \quad \tau_{zy\max} = \frac{a^2 + 2(1 + \mu)b^2}{2(1 + \mu)(a^2 + 3b^2)} \frac{Fb^2}{I_x}.\quad (6.38)$$

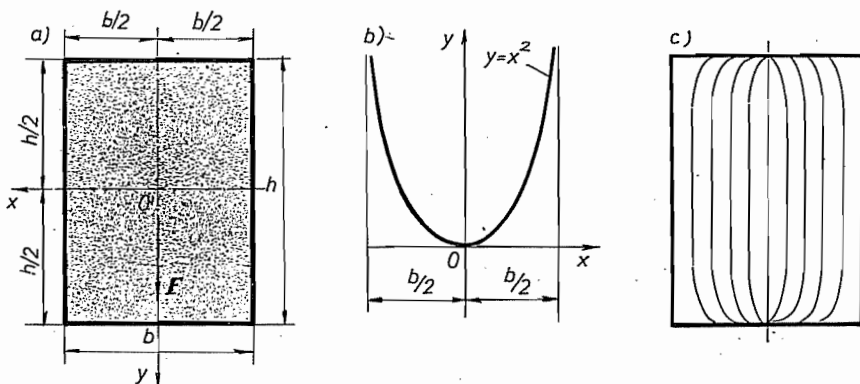
За два карактеристична случаја овај напон износи:

$$\begin{aligned} a \ll b; \tau_{zy \max} &= Fb^2/3 I_x = 4F/3 A; \\ a \gg b; \tau_{zy \max} &= 2F/(1 + \mu) A; A = ab \pi. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Прва се вредност слаже са оном из отпорности материјала. У другом случају за $\mu = 1/3$ биће $\tau_{zy \max} = 3F/2 A$, па је грешка 12,25%.

6.6. Савијање конзоле правоугаоног попречног пресека. — Код правоугаоног попречног пресека, страница b и h , (слика 6.5.а), функцију $f(x)$ изабраћемо тако да функција напона Φ буде хармонијска функција. С обзиром на (6.15) мора бити

$$f(x) = \frac{\mu}{2(1 + \mu)} \frac{F}{I_x} (x^2 - H); \Delta \Phi(x, y) = 0, \quad (6.40)$$



Слика 6.5. — Савијање конзоле правоугаоног попречног пресека

где је $H = \text{const}$, па су гранични услови:

$$\xi = \pm b/2; \eta; \frac{d\Phi}{ds} = \frac{d\Phi}{d\eta} = 0; \xi; \eta = \pm \frac{h}{2}; ds = d\xi;$$

$$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{d\Phi}{d\xi} = \frac{F}{8I_x} \left[-h^2 + \frac{4\mu}{1 + \mu} (\xi^2 - H) \right]. \quad (6.41)$$

Хармонијску функцију представимо у облику производа функција $X(x)$ и $Y(y)$, па ће бити

$$\begin{aligned} \Phi &= X(x) \cdot Y(y); \Delta \Phi = X'' Y + X Y'' = 0; \\ X'' + k^2 X &= 0; Y'' - k^2 Y = 0. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Пошто је функција $\Phi(x, y)$ непарна у погледу x и парна у погледу y , уземемо је, због граничних услова, у облику реда:

$$\Phi = -\frac{Fh^2}{8I_x} x + \frac{F}{2I_x} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\alpha x \operatorname{Ch} n\alpha y. \quad (6.43)$$

Из граничних услова (6.41) следи:

$$\frac{d\Phi}{d\eta} = \frac{F\alpha}{2I_x} \sum_1^{\infty} n A_n \sin n\alpha \frac{b}{2} \text{Sh } n\alpha\eta = 0;$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{b}; \quad \beta = \alpha \frac{h}{2} = \frac{h}{b} \pi; \quad (6.44.a)$$

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = -\frac{Fh^2}{8I_x} + \frac{F\alpha}{2I_x} \sum_1^{\infty} n A_n \cos n\alpha\xi \text{Ch } n\beta = -\frac{Fh^2}{8I_x} +$$

$$+ \frac{\mu}{2(1+\mu)} \frac{F}{I_x} (\xi^2 - H), \quad (6.44.b)$$

$$\alpha \sum_1^{\infty} n A_n \cos n\alpha\xi \text{Ch } n\beta = \frac{\mu}{1+\mu} (\xi^2 - H). \quad (6.44.c)$$

Функција $y = x^2$, $-b/2 \leq x \leq b/2$, (слика 6.5.b), је парна функција. Она је непериодичка али се може периодички продужити и развити у Fourier-ов *рег* *. Сменом $t/x = 2\pi/b$, период 2π пресликава се у период b , па су коефицијенти реда:

$$A_0' = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{2}{b} \int_0^b x^2 dx = \frac{4}{b} \int_0^{b/2} x^2 dx = \frac{b^2}{6}; \quad B_n' = 0;$$

$$A_n' = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{4}{b} \int_0^{b/2} x^2 \cos n\alpha x dx = \frac{b^2}{\pi^2} \frac{\cos n\pi}{n^2},$$

те је**

$$y = x^2 = \frac{b^2}{12} + \frac{b^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\alpha x; \quad \alpha = \frac{2\pi}{b}. \quad (6.45)$$

Уношењем ове релације у услов (6.44.c) и узимањем да је константа $H = b^2/12$, добија се да је коефицијент реда

$$A_n = \frac{\mu}{2(1+\mu)} \frac{b^2}{\pi^3} \cdot \frac{(-1)^n}{\pi^3} \cdot \frac{1}{\text{Ch } n\beta}; \quad \beta = \frac{\pi h}{b} = \frac{\alpha h}{2}, \quad (6.46)$$

па је функција напона

$$\Phi = \frac{F}{8I_x} \left[-h^2 x + \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{b^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \cdot \frac{1}{\text{Ch } n\beta} \cdot \sin n\alpha x \text{Ch } n\alpha y \right] \quad (6.47)$$

* Теорија осцилација, таблица 4.3.(9), страна 102.

** $\int x^m \sin x dx = -x^m \cos x + m \int x^{m-1} \cos x dx;$

$\int x^m \cos x dx = x^m \sin x - m \int x^{m-1} \sin x dx.$

Компонентни тангенцијални напони су:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\mu}{2(1+\mu)} \frac{F b^2}{I_x \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{1}{\text{Ch } n \beta} \sin n \alpha x \text{ Sh } n \alpha y; \quad (6.42.a)$$

$$\tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + f(x) - \frac{F}{2I_x} y^2 = -\frac{F}{8I_x} \left\{ (h^2 - 4y^2) - 4 \frac{\mu}{1+\mu} \left[\left(\frac{b^2}{12} - x^2 \right) - \frac{b^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{1}{\text{Ch } n \beta} \cos n \alpha x \text{ Ch } n \alpha y \right] \right\}. \quad (5.48.b)$$

Компонентни напон τ_{zy} је највећи у теменима неутралне осе и износи

$$x = \pm b/2; y = 0; \tau_{zx} = 0;$$

$$\tau_{zy \max} = \frac{F}{8I_x} \left[h^2 + \frac{2\mu}{3(1+\mu)} b^2 - \frac{4\mu}{1+\mu} \frac{b^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n \pi}{n^2 \text{Ch } n \beta} \right]. \quad (6.49)$$

У отпорности материјала тангенцијални напон савијене правоугаоне греде је

$$\tau_f^* = FS_x' / I_x \xi = F(h^2 - 4y^2) / I_x; \quad \tau_{f \max}^* = Fh^2 / 8I_x = 3F/2A. \quad (6.49)$$

За $\mu = 1/3$ и $\psi = b/h$ однос максималних напона је

$$\tau_{zy \max} / \tau_{f \max}^* = 1 + (\psi^2/6) - (\psi/\pi) \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n \cos n \pi] / [n^2 \text{Ch } n \pi / \psi]. \quad (6.50)$$

Пошто је $\text{Ch } 2\pi = 267,7468$; $\text{Ch } \pi = 11,59195$, то је за $\psi = 1/2$ однос 1,0417, а за $\psi = 1$ биће 1,083, па је у првом случају $\tau_{zy \max}$ већи за 4,17% а у другом за 8,30%. За $\psi > 1$ грешка је знатна, али је тангенцијални напон мала величина која се може занемарити.

Напон τ_{zx} је највећи када је $y = h/2$ и тада износи

$$x; y = \frac{h}{2}; \tau_{zx} = \frac{\mu}{2(1+\mu)} \frac{F b^2}{I_x \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{Th } n \beta \sin n \alpha x. \quad (6.51)$$

Из услова $\partial \tau_{zx} / \partial x = 0$ следи да је $\sum (-1)^n (\cos n \alpha x) / n = 0$, па се добија да је $x \approx \pm 1/3 b$. Тада је

$$\tau_{zx \max} = \frac{\mu}{2(1+\mu)} \frac{F b^2}{I_x \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{Th } n \beta \sin \frac{2n\pi}{3}. \quad (6.52)$$

Пошто је $\text{Th } n \beta = 1$ и $\sum (-1)^n n^{-2} [\sin (2n\pi/3)] < -1,0187$, то се за $\mu = 1/3$ добија се однос највећих компонентних напона

$$\tau_{zx \max} / \tau_{zy \max} \approx 1,0187 \psi^2 (1 - \psi^2/2) \pi^2 \approx 0,1029 \psi^2. \quad (6.63)$$

За $\psi = b/h = 1/2$ тај однос износи 0,0247, односно 2,47%; док је за $\psi = 1$ је 0,0855. Стога се обично у техничкој пракси компонента $\tau_{zx \max}$ занемарује.

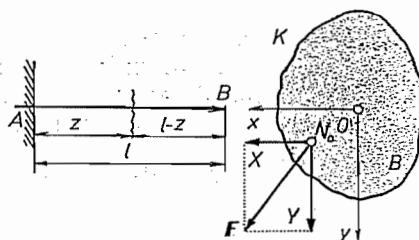
Диференцијална једначина линије тангенцијалних напона је $\tau_{zx}/dx = \tau_{zy}/dy$. Облик линија * за однос $\psi = b/h = 2/3$ приказан је сликом 6.5.с.

* Рашковић Д., Тангенцијални напони савијене греде нормалног профила, Београд, (1946).

6.7. Косо савијање и увијање. — Још је општији случај када сила F дејствује у тачки $N_0(x_0; y_0; l)$ слободног краја B конзоле AB , а њена нападна линија не пролази кроз тежиште пресека (B), већ је ексцентрична у односу на Oz -осу греде (слика 6.6). И овде усвајамо хипотезу (6.7), па важе релације (6.9) и (6.10). Помоћу Cauchy-јевих граничних услова за основе конзоле, редукцијом сила на тежишта основа добијају се константе

$$C_1 = -Xl/I_y; \quad C_2 = -Yl/I_x; \quad C_3 = 0;$$

$$C_4 = -C_1/l; \quad C_5 = -C_2/l; \quad C_6 = 0,$$



па су нормални напон и његов извод по z променљивој z :

$$\sigma_y = -(1-z)[(Xx/I_y) + (Yy/I_x)]; \quad \partial \sigma_z / \partial z = (Xx/I_y) + (Yy/I_x), \quad (6.54)$$

где су I_x и I_y централни моменти инерције пресека, а X, Y пројекције силе F . Уз ово морају бити задовољени и услови:

$$\begin{aligned} \iint_{(A)} \tau_{zx} dA &= X; \quad \iint_{(A)} \tau_{zy} dA = Y; \quad \mathfrak{M}_z = \mathfrak{M}_t = \\ &= \iint_{(A)} (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA = x_0 Y - y_0 X. \end{aligned} \quad (6.55)$$

С обзиром на (6.54) трећа Navier-ова једначина (1.25) може се написати у облику

$$\begin{aligned} (\partial \tau_{zx} / \partial x) + \partial \tau_{zy} / \partial y + (\partial \sigma_z / \partial z) = \\ = \partial [\tau_{zx} + (Xx^2/2I_y)] / \partial x + \partial [\tau_{zy} + (Yy^2/2I_x)] / \partial y = 0 \end{aligned}$$

која је задовољена ако су

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{X}{2I_y} x^2; \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{Y}{2I_x} y^2. \quad (6.56)$$

Из Beltrami-јевих једначина (3.16), због (6.54), пошто је $\mathcal{N}_1 = \sigma_z$, следи

$$\begin{aligned} \Delta \tau_{zx} &= -p(\partial^2 \sigma_z / \partial x \partial z) = -pX/I_y; \\ \Delta \tau_{zy} &= -p(\partial^2 \sigma_z / \partial y \partial z) = -pY/I_x; \quad p = 1/(1 + \mu), \end{aligned}$$

те су

$$\partial(\Delta \Phi) / \partial x = -\mu p Y / I_x; \quad \partial(\Delta \Phi) / \partial y = \mu p X / I_y; \quad p = 1/(1 + \mu).$$

па се интеграцијом добија да је

$$\Delta \Phi = \mu p [(Xy/I_y) - (Yx/I_x)] + D; \quad D = \text{const}. \quad (6.57)$$

Општи интеграл ове једначине једнак је збиру хармонијске функције $f(x, y)$ која представља општи интеграл хомогене једначине и партикуларног интеграла облика полинома, те је

$$\Phi(x, y) = f(x, y) + \frac{\mu p}{2} \left(\frac{X}{I_y} y^3 - \frac{Y}{I_x} x^3 \right) + \frac{D}{2} (x^2 + y^2), \quad (6.58)$$

уз услов $\Delta f = 0$. Компонентни напони (6.56) сада постају

$$\tau_{zx} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{X}{2I_y} (\mu p y^2 - x^2) + D y; \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{Y}{2I_x} (\mu p x^2 - y^2) - D x. \quad (6.59)$$

Константа D има и своје физичко значење. Из (2.15) и (2.25) следи да угао елементарне ротације око Oz -осе с обзиром на Cauchy-јеве једначине (2.24) и на (6.59) може написати у облику $\varphi_z = \theta = [(\partial v / \partial x) - (\partial u / \partial y)] / 2$ па је његов извод по координати z (тј. његова промена по јединици дужине):

$$\begin{aligned} \theta^* &= \partial \varphi_z / \partial z = [(\partial^2 v / \partial x \partial z) - (\partial^2 u / \partial y \partial z)] / 2 = \\ &= \{[(\partial^2 v / \partial z \partial x) + (\partial^2 w / \partial x \partial y)] - [(\partial^2 u / \partial y \partial z) + (\partial^2 w / \partial x \partial y)]\} / 2 = \\ &= \{\partial [(\partial v / \partial z) + (\partial w / \partial y)] / \partial x - \partial [(\partial w / \partial x) + (\partial u / \partial z)] / \partial y\} / 2 = \\ &= [(\partial \gamma_{zy} / \partial x) - (\partial \gamma_{zx} / \partial y)] / 2 = [(\partial \tau_{zy} / \partial x) - (\partial \tau_{zx} / \partial y)] / 2 \mathbf{G} = \\ &= (2 \mathbf{G}) - 1 \{-2 D - \Delta f + \mu p [(Yx / I_x) - (Xy / I_y)]\} = \\ &= \{-2 D + [\mu p (Yx / I_x) - (Xy / I_y)]\} / 2 \mathbf{G}, \end{aligned}$$

па је локални јединични угао торзије (локална торзијска дилатација)

$$\theta^* = \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} = -\frac{2 D}{2 \mathbf{G}} + \frac{\mu p}{2 \mathbf{G}} \left(\frac{Yx}{I_x} - \frac{Xy}{I_y} \right) = \theta' + \frac{\mu}{E} \left(\frac{Yx}{I_y} - \frac{Xy}{I_y} \right). \quad (6.60)$$

где је θ' торзијска дилатација за тачке на Oz -оси штапа. Константа D износи $C/2$, где је према (5.26) константа $C = -2 \mathbf{G} \theta'$.

На омотачу штапа морају бити задовољени услови (6.13).

6.8 Центар савијања. — Из шестог равнотежног услова (6.55), с обзиром на (6.59) и (6.60), види се да се јавља и торзијска дилатација θ' . Свакако да постоји таква нападна тачка N_0 косе силе \mathbf{F} за коју је $\theta' = 0$, што значи да тада не наступа обртање тежишних елемената попречног пресека греде. Ова се тачка назива *центар савијања* $C_f(x_f, y_f)$. Тада изрази за тангенцијалне напоне (6.59) постају једноставнији, па је услов равнотеже

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_z &= \iint_{(A)} (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA = \iint_{(A)} \left\{ \left[-\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{Y}{2I_x} (\mu p x^2 - y^2) \right] x - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{X}{2I_y} (\mu p y^2 - x^2) \right] y \right\} dA = x_f Y - y_f X. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Другу једначину добићемо из граничног услова (6.13)

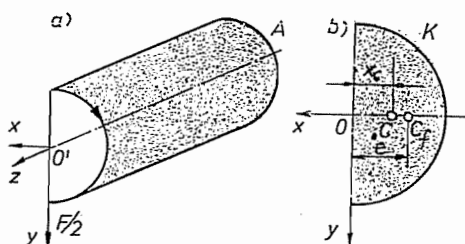
$$\begin{aligned} \tau_{zx} \alpha + \tau_{zy} \beta &= \{(\partial f / \partial y) + [X(\mu p y^2 - x^2) / 2 I_y]\} \alpha + \{(-\partial f / \partial x) + \\ &\quad + [Y(\mu p x^2 - y^2) / 2 I_x]\} \beta = 0. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Када је нападна линија силе паралелна Oy -оси, онда ће, према (6.14), бити:

$$x_f = \frac{\mathfrak{M}_z}{F} = \frac{1}{F} \iint_{(A)} \left\{ \left[-\frac{\partial \Phi}{\partial x} + f(x) - \frac{F}{2 I_x} y^2 \right] x - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) y \right\} dA, \quad (6.63)$$

те је центар на x -оси. Аналогно томе, ако је сила паралелна Ox -оси, $F=X$, онда је центар савијања на y -оси. Дакле, када пресек има једну осу симетрије центар савијања се налази на тој оси; ако постоје обе осе симетрије онда се центар поклапа са средиштем симетрије, тј. тежиштем.

Код конзоле полукружног пресека (слика 6.7.а) тангенцијалне напоне одредићемо као и код кружног пресека (6.24), па нема напона у вертикалној равни Oyz . Може се схватити да је том равни кружна конзола подељена на два дела*, па ће вертикална сила бити $F/2=Y$. Када се у изразу (6.61) стави $Y=F/2$, $X=0$ и за напоне вредности из (6.24), онда се добија растојање e силе савијања од координатног почетка O' -средишта полукружног пресека — слободне основе конзоле,



Слика 6.7. Центар савијања

$$e = Y^{-1} \iint_{(A)} (\tau_{xy} x - \tau_{zx} y) dA = [8 [1 + \mu] I_x]^{-1} \iint_{(A)} [(3 + 2\mu) R^2 x - (1 - 2\mu) xy^2 - (1 - 2\mu) x^3] dA = 8 (3 + 4\mu) R / 15 \pi (1 + \mu).$$

Овај израз одређује положај силе Y за који се елемент попречног пресека у тачки O' не обрће. Али ће се елемент у тежишту (C) полукруга, према (6.60), заокренути за локалну деформацију $\theta^* = \mu Y x_C / EI_x$, где је $x_C = 4 R / 3 \pi$ координата тежишта C полукруга у односу на O' . Да би се ово обртање поништило мора се дејствовати моментом торзије \mathfrak{M}_t , услед чега је деформација тежишног елемента $\theta' = \mathfrak{M}_t / 0,296 G R^4$, када се за полукруг искористи редукована торзијска крутост према Saint-Venant-у. Овај момент настаје када се сила Y помери за износ $f = \mathfrak{M}_t / Y$. Услов да се тежишни елементи попречних пресека не обрћу је $\theta^* = \theta'$, па се добија \mathfrak{M}_t , а тиме и f . Растојање центра савијања од средишта полукруга O' , износи:

$$x_f = e - f = \frac{8 (3 + 4\mu) R}{15 \pi} - \frac{8 \cdot 0,206 \mu}{2 (1 + \mu) \pi} \cdot \frac{4 R}{3 \pi} = \frac{8 R}{3 \pi} \left[\frac{3 + 4\mu}{5 \pi} - \frac{0,592 \mu}{(1 + \mu) \pi} \right] = 0,5512 R - 0,0401 R = 0,51 R;$$

$$\mu = 1/3; I_x = R^3 \pi / 8.$$

Теорија савијања може се проширити и на пресеке без оса симетрије**.

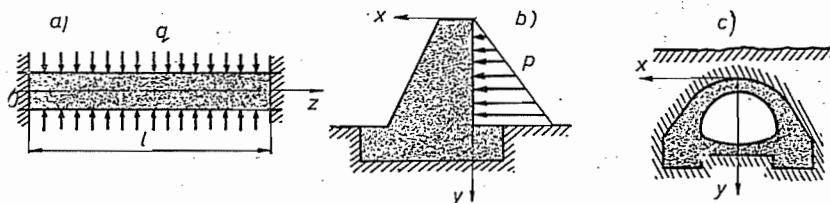
* Timoshenko P. S., Bull. Inst. Engineers of Ways of Communications, St. Petersburg, (1913)

** Лажбензон Л. С., Москва, 1933).

7. РАВНИ ПРОБЛЕМИ ТЕОРИЈЕ ЕЛАСТИЧНОСТИ

Због обимног математичког апарата и тешкоћа на које се наилази многи проблеми тродимензионог простора свде се на дводимензионе. У практичним техничким проблемима чест је случај да је неки конструктивни део тако оптерећен спољашњим силама да се јављају само напони или само деформације у два управна правца. Због тога се у теорији еластичности појављају и две врсте ових проблема: *проблеми о равној (раванској) деформацији* и *проблеми о равном (раванском) најрезању*. Овај део теорије еластичности који се бави се бави таквим проблемима назива се *равна (раванска) теорија еластичности*.

7.1. Равна деформација. — Цилиндрични штап, код кога су димензије попречног пресека *мале* у поређењу са његовом дужином l , уклештен на крајевима и оптерећен спољашњим силама једнолико распоређеним дуж геометријске Oz -осе штапа а управним на осу, представља случај *равне деформације*



Слика 7.1. — Равна деформација

ције (слика 7.1. *a*). Због уклештења попречни пресеци на тим местима се не померају па се може сматрати да и сви попречни пресеци управни на Oz -осу остају *равни* и не померају се у правцу Oz -осе. Овакав случај деформација јавља се и код *бране* притиснуте у попречном правцу (слика 7.1. *b*), или код *канала*, односно *шунела* (слика 7.1. *c*).

Пошто је аксијално померање $w=0$ то ће бити $\partial u/\partial z = \partial v/\partial z = 0$, па померања тачака попречног пресека управног на Oz -осу не зависе од z , те су функције само координата x и y :

$$u = u(x, y); \quad v = v(x, y); \quad w = 0. \quad (7.1)$$

Из Саучу-јевих једначинаа (2.24) следе компонентне деформације:

$$\epsilon_x = \partial u/\partial x; \quad \epsilon_y = \partial v/\partial y; \quad \gamma_{xy} = (\partial u/\partial y) + (\partial v/\partial x); \quad \epsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0, \quad (7.2)$$

па су прве три такође функције само координата x и y .

Из Хooke-овог закона (3.15) добија се

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [(1 - \mu^2) \sigma_x - \mu (1 + \mu) \sigma_y] = \frac{1}{E^*} (\sigma_x - \mu^* \sigma_y); \quad (7.3)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu (\sigma_z + \sigma_x)] = \frac{1}{E} [(1 - \mu^2) \sigma_y - \mu (1 + \mu) \sigma_x] = \frac{1}{E^*} (\sigma_y - \mu^* \sigma_x);$$

$$\sigma_z = \mu (\sigma_x + \sigma_y); \quad \gamma_{xy} = \tau_{xy}/G; \quad G = E/2(1 + \mu),$$

где су μ^* и E^* модифицирани Poisson-ов коефицијент и Jung-ов модул еластичности

$$\mu^* = \frac{\mu}{1 - \mu}; \quad \mu = \frac{\mu^*}{1 + \mu^*}; \quad E^* = \frac{E}{1 - \mu^2}; \quad G = \frac{E}{2(1 + \mu)} = \frac{E^*}{2(1 + \mu^*)}. \quad (7.4)$$

Saint-Venant-ови услови компатибилности (2.42) свODE се само на један услов

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (7.5.a)$$

или, када се унесу релације (7.3),

$$\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} \right) - \mu^* \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) = 2(1 + \mu^*) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (7.5.b)$$

Пошто су компонентни напони

$$\sigma_x = \frac{E^*}{\Delta} (\varepsilon_x + \mu^* \varepsilon_y); \quad \sigma_y = \frac{E^*}{\Delta} (\varepsilon_y + \mu^* \varepsilon_x); \quad (7.6)$$

$$\sigma_z = \frac{\mu^*}{1 - \mu^*} E^* (\varepsilon_x + \varepsilon_y); \quad \Delta = 1 - \mu^*{}^2 = \frac{1 - 2\mu}{(1 - \mu)^2}$$

такође функције само од x и y , то се Navier-ове једначине (1.25.b) свODE само на две једначине

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X_V' = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y_V' = 0. \quad (7.7)$$

Диференцирањем прве једначине по x , а друге по y , и сабирањем, добија се

$$\frac{2 \partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial X_V'}{\partial x} + \frac{\partial Y_V'}{\partial y} \right), \quad (7.7)$$

па се услов компатибилности (7.5.b) може написати у новом облику

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = \Delta (\sigma_x + \sigma_y) = - (1 + \mu^*) \left(\frac{\partial X_V'}{\partial x} + \frac{\partial Y_V'}{\partial y} \right), \quad (7.9)$$

где је уведен Laplace-ов оператор за раван.

Када су запреминске силе константне ($X'_V = \text{const}$, $Y'_V = \text{const}$) или једнаке нули ($X'_V = Y'_V = 0$) или су конзервативне и имају функцију силе $U'(x, y)$ тако да су $X'_V = \partial U' / \partial x$, $Y'_V = \partial U' / \partial y$, једначине (7.7) могу се задовољити помоћу функције напона $\Phi(x, y)$ облика

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - U'; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - U'; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (7.10)$$

коју је 1862. год. увео енглески астроном Airy (G. B. Airy, Brit. Assoc. Adv. Sci. Rept. 1862) и која се често назива Airy-јевом функцијом напона. Када се релације (7.10) унесу у услов (7.5.b), с обзиром на (7.8), добија се

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - U' \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - U' \right) + \mu^* \left[2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \Delta U' \right] - 2(1 + \mu^*) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0,$$

па функција напона мора да задовољи следећу диференцијалну једначину

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} - (1 - \mu^*) \left(\frac{\partial^2 U'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U'}{\partial y^2} \right) = \\ = \Delta \Delta \Phi - (1 - \mu^*) \Delta U^* = 0, \end{aligned} \quad (7.11)$$

где је уведен дупли Лаплас-ојерајтор. Ова функција мора да задовољи и контурне услове, они су, према (1.9):

а) на бочној површини (омошачу):

$$\begin{aligned} \sigma_x \alpha + \tau_{xy} \beta &= \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - U' \right) \alpha - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \beta = X'_n; \\ \tau_{xy} \alpha + \sigma_y \beta &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \alpha + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - U' \right) \beta = Y'_n; \end{aligned} \quad (7.12.a)$$

б) на основама

$$\pm \sigma_z = \pm \frac{\mu^*}{1 + \mu^*} (\Delta \Phi - 2 U') = \pm Z'_n \quad (z=0; z=l). \quad (7.13.b)$$

Често су у техничкој пракси запреминске силе константне или једнаке нули па тада функција напона мора да задовољи диференцијалну једначину

$$\Delta \Delta \Phi = 0 \quad (7.13)$$

и контурне услове (7.12). Она је, дакле, равна бихармонијска функција.

Када је запреминска сила тежа усмерена у смеру + Оу-осе онда је $U' = \gamma_m y$, где је γ_m специфична тежина материјала, тада из једначина (7.7), (7.8) (7.9) и (7.10) биће:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \gamma_m = 0; \quad \Delta (\sigma_x + \sigma_y) = 0; \quad (7.14)$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \gamma_m y; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y},$$

како је показао Maurice Lévy (Compt. rend. t, 126, p. 1235, 1899. год).

Проблем равне деформације може се уопштити (*генерализована равна деформација*) за случај када постоји константна дилатација ϵ_{z0} у Oz -правцу (случај дугачке цеви изложене константном унутрашњем и спољашњем притиску). Једначине (7.10) и (7.11) остају исте, само су сада нормални напон и услови на основама:

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) + E\epsilon_{z0}; \quad \pm[\mu(\Delta\Phi - 2U) + E\epsilon_{z0}] = \pm Z_{n'}(z=0; z=l), \quad (7.15)$$

где је μ Poisson-ов коефицијент.

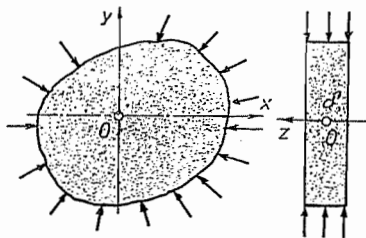
На пример, компонентне деформације $\epsilon_x = c(x^2 + y^2)$; $\epsilon_y = cy^2$; $\gamma_{xy} = 2cxy$ могу да одговарају равnoj деформацији. Из (7.6) следи да су компонентни напони $\sigma_x = C[x^2 + (1 + \mu^*)y^2]$; $\sigma_y = C[\mu^*x^2 + (1 + \mu^*)y^2]$; $C = E^*c/\Delta$, па из (7.7), с обзиром на (7.4), морају бити запреминске силе $X_{y'} = -2cGx(3 - 4\mu)/(1 - 2\mu)$; $Y_{y'} = -2cGy(3 - 2\mu)/(1 - 2\mu)$. Функција силе је $U = -cG[(3 - 4\mu)x^2 + (3 - 2\mu)y^2]/(1 - 2\mu)$.

Функције Cxy^2 и Cxy^3 су равне бихармонијске функције, али функција Cx^2y^2 није.

7.2. Равно напрезање. — Танка плоча, дебљине δ , оптерећена је силама које су паралелне њеним основама и једнолико (или симетрично) су распоређене дуж дебљине плоче (слика 7.2.). Средња раван плоче узима се за координатну раван Oxy . На основама плоче су косинуси смера нормале $(0; 0; \pm 1)$, па пошто не дејствују површинске силе то из Cauchy-јевих једначина (1.9) следи да су напони:

$$z = \pm \delta/2; \quad \{n\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{Bmatrix}; \quad (7.16.a)$$

$$\sigma_z = 0; \quad \tau_{zx} = 0; \quad \tau_{zy} = 0.$$



Слика 7.2. — Равно напрезање

Како ове једначине морају бити задовољене при $z = \pm \delta/2$ за свако x и y , то морају изводити тангенцијалних напона бити једнаки нули. Када се претпостави да су и запреминске силе једнолико распоређене дуж дебљине плоче, то из треће Navier-ове једначине следи да је извод $\partial \sigma_z / \partial z = 0$, па ће бити:

$$z = \pm \delta/2; \quad \partial \tau_{zx} / \partial x = 0; \quad \partial \tau_{zy} / \partial y = 0; \quad \partial \sigma_z / \partial z = 0. \quad (7.16.b)$$

Може се нормални напон σ_z у унутрашњости плоче изразити помоћу вредности напона и његових извода на основама, па ће бити

$$\sigma_z = \bar{\sigma}_z + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} \left(z \pm \frac{\delta}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{\sigma}_z}{\partial z^2} \left(z \pm \frac{\delta}{2} \right)^2 + \dots = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{\sigma}_z}{\partial z^2} \left(z \pm \frac{\delta}{2} \right) + \dots,$$

где је $\bar{\sigma}_z = \sigma_z$ за $z = \delta/2$, Стога се, због мале дебљине плоче у односу на друге две димензије, може претпоставити да је свуда, тј. у свима тачкама плоче, нормални напон једнак нули

$$\sigma_z = 0. \quad (7.17.c)$$

Ова претпоставка чини основ теорије равне најпрезања.

Када се прве две Navier-ове једначине (1.25) помноже са dz/δ и интеграле у размаку од $-\delta/2$ до $\delta/2$ добиће се:

$$\frac{1}{\delta} \left[\int \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dz + \int \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dz + \int \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz + \int X'_V dz \right]_{-\delta/2}^{\delta/2} = 0;$$

$$\frac{1}{\delta} \left[\int \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dz + \int \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dz + \int \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz + \int Y'_V dz \right]_{-\delta/2}^{\delta/2} = 0.$$

Како су према (7.16.a)

$$\int_{-\delta/2}^{\delta/2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz = [\tau_{xz}]_{-\delta/2}^{\delta/2} = 0; \quad \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz = [\tau_{yz}]_{-\delta/2}^{\delta/2} = 0,$$

и средње вредности компоненти напона и запреминских сила по дебљини плоче

$$\frac{1}{\delta} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\delta} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_x dz \right] = \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x}; \quad \frac{1}{\delta} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dz = \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y};$$

(7.16.d)

$$\frac{1}{\delta} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{xy} dz = \tau_{xy}^*; \quad \frac{1}{\delta} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} X'_V dz = X_V^*; \quad \frac{1}{\delta} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} Y'_V dz = Y_V^*;$$

то су једначине равнотеже

$$\frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} + X_V^* = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y} + Y_V^* = 0 \quad (7.17)$$

аналогне једначинама (7.7) равне деформације. Због тога, слично ранијем извођењу код равне деформације, функција напона је

$$\sigma_x^* = \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial y^2} - U'^*; \quad \sigma_y^* = \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x^2} - U'^*; \quad \tau_{xy}^* = - \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x \partial y} \quad (7.18)$$

Због тога што је $\sigma_z = 0$, из Нооке-овог закона (3.15), следи

$$\epsilon_x^* = \frac{\partial u^*}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_x^* - \mu \sigma_y^*); \quad \epsilon_y^* = \frac{\partial v^*}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma_y^* - \mu \sigma_x^*);$$

(7.19)

$$\gamma_{xy}^* = \frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}^*}{G},$$

где су звездом означене *средње вредности* компонентних деформација, односно компонентних напона и померања.

Када су средње запреминске силе константне или су једнаке нули, тада је функција напона равна бихармонијска функција

$$\Delta \Delta \Phi^* = 0, \quad (7.20)$$

која мора да задовољи и контурне услове

$$\alpha \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial y^2} - \beta \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x \partial y} = X_n^*; \quad -\alpha \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x \partial y} + \beta \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x^2} = Y_n^*. \quad (7.21)$$

7.3. Уопштене једначине равне теорије еластичности. — Из излагања у два претходна члана види се да су једначине равне теорије еластичности *аналојне*, имају исти математички облик, само се разликују у следећем:

1° у једначинама равне деформације јављају се обични компонентни напони, деформације, померања и површинске силе, док се у једначинама равнoг стања напрезања те величине јављају као средње вредности дуж дебљине плоче,

2° у једначинама равне деформације јављају се модифицирани Poisson-ов коефицијент и модифицирани модул еластичности (7.4), док се у једначинама равнoг напрезања јављају обични Poisson-ов коефицијент μ и модул еластичности материјала E ,

3° решење проблема равне деформације је *тачно*, јер су све једначине теорије еластичности задовољене; међутим, основна претпоставка код проблема равнoг напрезања је да је нормални напон σ_z у свима тачкама плоче једнак нули, $\sigma_z = 0$, те се због тога може десити да свих шест услова компатибилности деформација нису задовољени. *Али овији су показали да се иракијично могу узети да су и ова решења тачна.*

Из једначине (7.11), односно (7.18), и (7.12), односно (7.21), види се да оне не зависе од еластичних особина деформабилног тела, јер у њих не улазе величине μ^* , μ , E^* , E и \mathbf{G} које карактеришу еластичне особине тела. Из тога следи Levy-Mitchell-ова *теорема*: *Код равнoј проблеми простио повезаној шела на чијој површини дејствују зајаме површинске силе, компонентни напони (σ_x , σ_y , τ_{xy}) не зависе од материјала шела и једнаки су и при равнoј деформацији и при равнoм напрезању.*

Код сложенoј повезаној шела (са отворима) морају бити испуњени напредни услови о једнозначности компонентних померања. Доказано је да компонентни напони не зависе од μ^* или μ само у оним случајевима када је главни вектор сила оптерећења једнак нули на свакој затвореној контури понаособ. Константе еластичности материјала јављају се у решењима када су на целој површини (или делимично) задата компонентна померања.

С обзиром на изнето једначине равне теорије еластичности могу се уопштити и биће:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y); \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x); \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{\mathbf{G}} \quad (7.22)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \quad (7.23)$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - U'; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - U'; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}; \quad (7.24)$$

$$\Delta \Delta \Phi - (1 - \mu) \Delta U' = 0; \quad \Delta \Delta \Phi = 0; \quad (7.25)$$

$$\alpha \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - U' \right) - \beta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = X_n'; \quad -\alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \beta \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - U' \right) = Y_n'; \quad (7.26)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_n' \\ Y_n' \end{Bmatrix}.$$

Као и код проблема торзије (члан 5.1) може се функција напона довести у везу са моментом савијања. Ако је ψ бихармонијска функција неког проблема онда је и функција $\varphi(x, y) = \psi + Ax + By + C$ такође бихармонијска функција. Константе A, B, C могу се изабрати, да су вредности те функције и њених првих извода у некој тачки $N(x_0, y_0)$ једнаке нули. Нека је тачка $N_0(\xi_0, \eta_0)$ на контури K тела, онда је, према (5.6), орт нормале $\mathbf{n} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j}$, па су $\alpha = d\eta/ds$, $\beta = -d\xi/ds$, те се из граничних услова за случај да је *запреминска сила једнака нули*, добија:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \cdot \frac{d\eta}{ds} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \cdot \frac{d\xi}{ds} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) = X_n'; \\ -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) &= Y_n'; \quad x = \xi; \quad y = \eta \text{ на контури } (K). \end{aligned}$$

Интегралењем од $s=0$ до $s=s_1$, где је $s_1 = \widehat{N_0 N_1}$ лук контуре од N_0 до N_1 добија се s_1

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)_1 = \int_0^{s_1} X_n' ds = (\bar{X}_r')_{s_1}; \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_1 = -\int_0^{s_1} Y_n' ds = -(\bar{Y}_r')_{s_1}, \quad (7.27)$$

где су $(\bar{X}_r')_s$ и $(\bar{Y}_r')_s$ пројекције главног вектора спољашњих сила које дејствују на делу $\widehat{N_0 N_1}$ контуре (слика 7.3).

Извод функције напона по луку контуре је

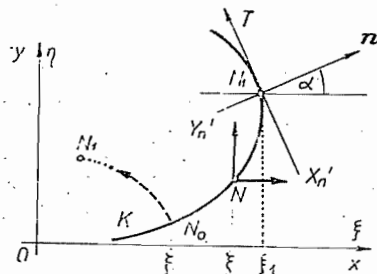
$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{ds} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{d\xi}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{d\eta}{ds} \\ &= -\frac{d\xi}{ds} \int_0^s Y_n' ds + \int_0^s X_n' ds, \end{aligned}$$

па се парцијалном интеграцијом добија

$$\begin{aligned} (\Phi)_1 &= \int_0^{s_1} \left[-d\xi \int_0^s Y_n' ds + d\eta \int_0^s X_n' ds \right] = \\ &= \left[-\xi \int_0^s Y_n' ds + \eta \int_0^s X_n' ds \right]_0^{s_1} + \int_0^{s_1} (\xi Y_n' - \eta X_n') ds, \end{aligned}$$

односно

$$(\Phi)_1 = \int_0^{s_1} [(\eta_1 - \eta) X_n' - (\xi_1 - \xi) Y_n'] ds = \mathfrak{M}_1. \quad (7.28)$$



Слика 7.3. — Вредност функције напона на контури

Из тога следи да вредност напона у некој тачки контуре једнака моменту сила које дејствују на делу контуре $\widehat{N_0 N_1}$ за моментну тачку N_1 . Једначине (7.27) и (7.28) изведене су под претпоставком да је момент позитиван када дејствује у директном математичком смеру и да је *обилажење по контури у директном смеру* (површ пресека остаје лево од контуре). При обилажењу у смеру кретања сатне казаљке (када површ пресека остаје десно од контуре) треба тим релацијама променити предзнак.

Ако је тачка N_1 у унутрашњости плоче омеђене контуром онда важе исти закључци само уместо спољашњих сила треба узети *унутрашње* силе.

Када се осе Ox и Oy замене природним координатама n и T у посматраној тачки тада из (7.27) следи да су вредности парцијалних извода функције напона

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)_1 = (\bar{F}'_{nr})_s; \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right) = -(\bar{F}'_{sr})_s, \quad (7.29)$$

једнаке пројекцијама главног вектора спољашњих сила на правац нормале (која се узима да је *усмерена улоље*) и правац тангенте (у смеру обилажења по контури). При обиласку целе затворене контуре биће $(\bar{F}'_{nr})_s = 0$, се добија само главни вектор $(\bar{F}'_{sr})_s$ и главни момент. Ако је подручје *једносструко повезано* биће главни вектор и главни момент једнаки нули, па функција напона Φ и њен извод $\partial \Phi / \partial n$ имају вредности те почетне (и завршне) тачке, то јест *функција напона је једнозначна*. Напротив, код *вишеструко повезано* подручја функција напона биће једнозначна ако су главни вектор и главни момент оптерећења који дејствују дуж сваке контуре једнаки нули, у противном случају функција је *многозначна*, јер добија одговарајући прираштај, али њени други изводи остају једнозначни, а они одређују компонентне напоне.

7.4. Примена поларних координата. — Многи технички проблеми се лакше решавају када се уместо Декартових координата (x, y) узму поларне координате (r, φ) . Тада из (1.83) следи:

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \varphi + \tau_{rc} \sin^2 \varphi - \tau_{rc} \sin 2\varphi; \quad \sigma_y = \sigma_r \sin^2 \varphi + \sigma_c \cos^2 \varphi + \tau_{rc} \sin 2\varphi; \quad (7.30)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_r - \sigma_c}{2} \sin 2\varphi + \tau_{rc} \cos 2\varphi,$$

па како је према (7.10), с обзиром на парцијалне изводе (1.84), биће:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right] &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \sin^2 \varphi + \\ &+ \frac{\cos^2 \varphi}{r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{\sin 2\varphi}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

Изједначењем вредности уз исте тригонометријске релације добијају се компонентни напони:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}; \quad \sigma_c = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}; \\ \tau_{rc} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right]. \end{aligned} \quad (7.31)$$

С обзиром на напонску инваријанту из ових релација следи

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_r + \sigma_c = \Delta \Phi(x, y) = \Delta \Phi(r, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2},$$

где је Δ Laplace-ов оператор

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (7.32)$$

па је бихармонијска једначина (7.14) у поларним координатама

$$\Delta \Delta \Phi = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) = \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} - \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \left(\frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^2 \partial \varphi^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r \partial \varphi^2} \right) + \frac{1}{r^4} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varphi^4} + 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) = 0. \quad (7.33)$$

У случају симетричног напрезања у односу на пол (0) напони не зависе од поларног угла (φ), па су:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} = \frac{1}{r} \Phi'; \quad \sigma_c = \frac{d^2 \Phi}{dr^2} = \Phi''; \quad \tau_{rc} = 0; \quad \Phi = \Phi(r), \quad (7.34)$$

те је бихармонијска функција

$$\Delta \Delta \Phi(r) = \frac{d^4 \Phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \Phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\Phi}{dr} = 0. \quad (7.35)$$

Обратно, када функција напона зависи само од угла φ , тада су бихармонијска функција и напони:

$$\Delta \Delta \Phi(\varphi) = \frac{d^4 \Phi}{d\varphi^4} + 4 \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0; \quad \sigma_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}; \quad \sigma_c = 0; \quad \tau_{rc} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}. \quad (7.36)$$

На пример, функција $\Phi(r, \varphi) = Ar^2 \cos 2\varphi$ је бихармонијска, а компонентни напони су:

$$\sigma_r = -\sigma_c = -2A \cos 2\varphi; \quad \tau_{rc} = 2A \sin 2\varphi.$$

Функција $\Phi(r) = A \ln r + Br^2 + Cr^2 \ln r + D$ је бихармонијска, компонентни напони су

$$\sigma_r = Ar^{-2} + C(1 + 2 \ln r) + 2B; \quad \sigma_c = -Ar^{-2} + C(3 + 3 \ln r) + 2B; \quad \tau_{rc} = 0.$$

Функција $\Phi(\varphi) = A \cos 2\varphi + B \sin 2\varphi$ је бихармонијска, а компонентни напони су:

$$\sigma_r = -\frac{4}{r^2} (A \cos 2\varphi + B \sin 2\varphi); \quad \sigma_c = 0; \quad \tau_{rc} = -\frac{2}{r^2} (A \sin 2\varphi - B \cos 2\varphi).$$

7.5. Решење равнoг проблема помоћу полинома. — Код многих техничких проблема запреминаске силе су константне или се, пак, занемарују, па је $\Delta U = 0$, те је функција напона бихармонијска функција (7.25) која мора да задовољи и контурне услове (7.26). А. Меспажер* је показано да се многи технички проблеми могу решити помоћу полинома са константним коефицијентима. Код полинома другог и трећег степена ови су коефицијенти међусобно независни, али су код полинома четвртог и вишег

* Compt. rend. t. 132, p. 1475, Paris, 1901.

степенa, због услова да је функција бихармонијска, међусобно зависни — спрегнути. На проблемима напрезања танких плоча и танких греда прика- заћемо примену ове методе.

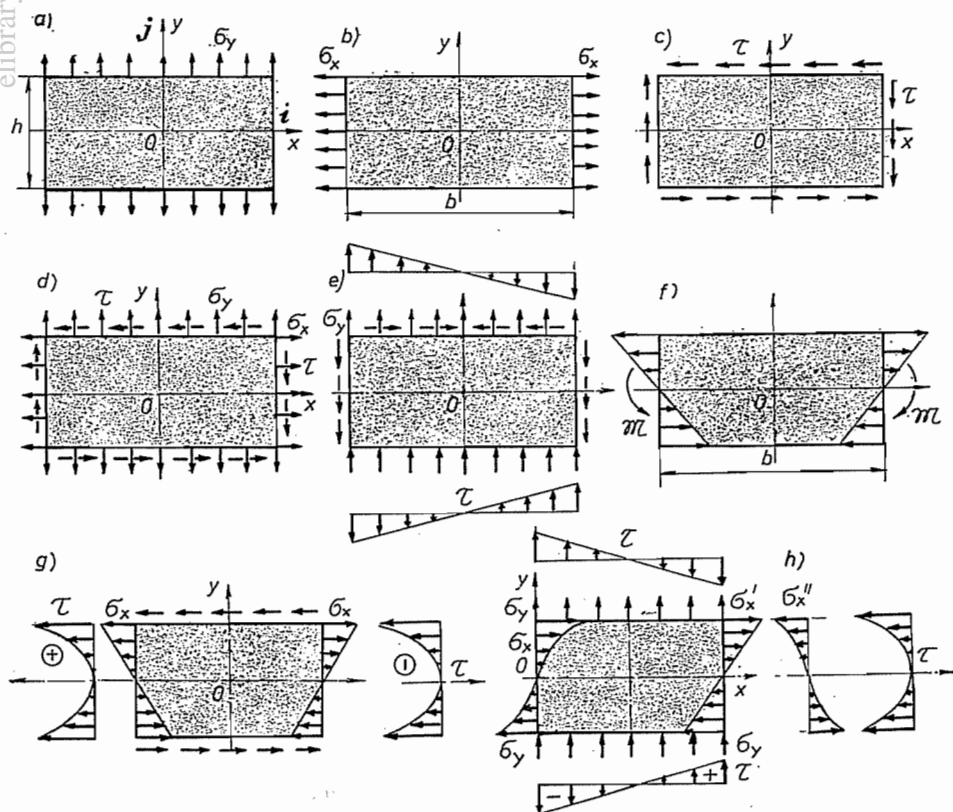
7.5.1. Напрезање танких плоча. — Претпоставља се да је правоугаона плоча димензија b и h , мале дебљине ($\delta \ll b$; $\delta \ll h$), у равни Oxy (слика 7.4.). При томе се користи полуобратна метода тако што се функција напона претпостави у облику полинома, па су тиме, према (7.24), одређени ком- понентни напони, а из граничних услова се одређују површинске силе. Ортови нормала основа управних на Ox -осу и на Oy -осу јесу $\pm i(\pm 1; 0) i j(0; \pm 1)$.

Најпростији је *полином дуге гредe*, па је та функција бихармонијска са напонима

$$\Phi = Ax^2/2; \quad \sigma_x = 0; \quad \sigma_y = A; \quad \tau_{xy} = 0. \quad (7.37.a)$$

Из контурних услова следи

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'_n \\ Y'_n \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'_n \\ Y'_n \end{pmatrix}. \quad (7.37.b)$$



Слика 7.4. — Напрезање танке плоче

Овај случај функције напона одговара плочи затегнутој у Oy -правцу си- лама константног интензитета $Y'_n = \pm A$ (слика 7.4.a).

Аналогно овоме функција

$$\Phi = Cy^2/2; \quad \sigma_x = C; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = 0, \quad (7.38.a)$$

са контурним условима

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \pm C \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X'_n \\ Y'_n \end{Bmatrix}; \quad \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (7.38.b)$$

одговара затезању у Ox -правцу (слика 7.4.b), а функција

$$\Phi = Bxy; \quad \sigma_x = \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = -B, \quad (7.39.a)$$

са контурним условима

$$\begin{pmatrix} 0 & -B \\ -B & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mp B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X'_n \\ Y'_n \end{Bmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & -B \\ -B & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mp B \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (7.29.b)$$

одговара чистом смицању (слика 7.4.c).

Функција са напонима

$$\Phi = Ax^2/2 + Bxy + Cy^2/2; \quad \sigma_x = C; \quad \sigma_y = A; \quad \tau_{xy} = -B \quad (7.40.a)$$

и контурним условима

$$\begin{pmatrix} C & -B \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \pm C \\ \mp B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X'_n \\ Y'_n \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \mp B \\ \pm A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X'_n \\ Y'_n \end{Bmatrix} \quad (7.40.b)$$

одговара *ошћим случају равнот сјања најрезања*** (слика 7.4.d).

Функција *трећег степена* са напонима

$$\Phi = Ax^2y/2; \quad \sigma_x = 0; \quad \sigma_y = Ay; \quad \tau_{xy} = -Ax \quad (7.41.a)$$

и контурним условима

$$\begin{pmatrix} 0 & \mp Ab/2 \\ \pm Ab/2 & Ay \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -Ab/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X'_n \\ Y'_n \end{Bmatrix}; \quad (7.41.b)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -Ax \\ -Ax & \pm Ah/2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mp Ax \\ Ah/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X'_n \\ Y'_n \end{Bmatrix},$$

одговара затезању, притиску и смицању (слика 7.4.e).

Међутим, функција *трећег степена* са напонима

$$\Phi = Ay^3/6; \quad \sigma_x = Ay; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = 0 \quad (7.42.a)$$

и контурним условима

$$\begin{pmatrix} Ay & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \pm Ay \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X'_n \\ Y'_n \end{Bmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \pm Ah/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X'_n \\ Y'_n \end{Bmatrix} \quad (7.42.b)$$

одговара *чистом савијању* плоче око Oz -осе спрегивима (слика 7.4.f). Како је $\sigma_x = My/I_z = Ay$, то је интензитет спрегова $M = AI_z$, где је $I_z = h^3 \delta / 12$ момент инерције попречног пресека за Oz -осу.

** Отпорност материјала, чл. 2.4.

Из услова да је функција четвртог степена бихармонијска

$$\Phi = (Ax^4 + 2Bx^3y + 6Cx^2y^2 + 2Dxy^3 + Ey^4)/12 \quad (7.33.a)$$

следи спрега коефицијената

$$\Delta \Delta \Phi = 2A + 4C + 2E = 0; \quad E = -(A + 2C), \quad (7.43.b)$$

Па су компонентни напони

$$\begin{aligned} \sigma_x &= Cx^2 + Dxy - (A + 2C)y^2 & \sigma_y &= Ax^2 + Bxy + Cy^2; \\ \tau_{xy} &= -(Bx^2 + 4Cxy + Dy^2)/2. \end{aligned} \quad (7.43.c)$$

У специјалном случају ове функције

$$\Phi = Dxy^3/6; \quad \sigma_x = Dxy; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = -Dy^2/2 \quad (7.44.a)$$

контурни услови дају оптерећења

$$\begin{pmatrix} \pm Dby/2 & -Dy^2/2 \\ -Dy^2/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Dby/2 \\ \mp Dy^2/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'_n \\ Y'_n \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \mp Dh^2/8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'_n \\ Y'_n \end{pmatrix} \quad (7.44.a)$$

а дијаграми су приказани на слици 7.4.g.

Функција петог степена

$$\Phi = (3Ax^5 + 5Bx^4y + 10Cx^3y^2 + 10Dx^2y^3 + 5Exy^4 + 3Fy^5)/60 \quad (7.45.a)$$

биће бихармонијска ако су коефицијенти спрегнути

$$E = -(3A + 2C); \quad F = -(B + 2D)/3, \quad (7.45.b)$$

док су остали произвољни. У специјалном случају ове функције

$$\begin{aligned} \Phi &= D(5x^2y^3 - y^5)/30; & \sigma_x &= D(3x^2y - 2y^3)/3; \\ \sigma_y &= Dy^3/3; & \tau_{xy} &= -Dxy^2, \end{aligned} \quad (7.46.a)$$

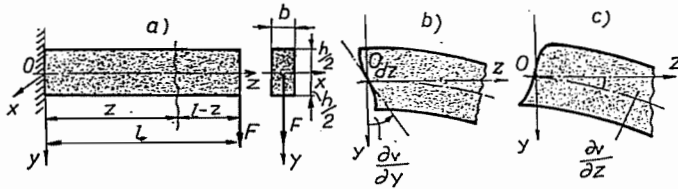
контурни услови за изабрани координатни систем Oxy су:

$$\begin{pmatrix} -2Dy^3/3 & 0 \\ 0 & D/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2Dy^3/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'_n \\ Y'_n \end{pmatrix}; \quad (7.46.b)$$

$$\begin{pmatrix} D(b^2y - 2y^3/3) \\ -Dby^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'_n \\ Y'_n \end{pmatrix}_{x=b}; \quad \begin{pmatrix} \mp Dh^2x/4 \\ Dh^3/24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'_n \\ Y'_n \end{pmatrix}_{y=\pm h/2}$$

Дијаграми су приказани на слици 7.4.h. На левој основи ($x=0$) нормалне силе мењају се по закону кубне параболе, а тангенцијалних сила нема. На десној основи ($x=b$) нормалне силе састоје се из два дела: један се мења по линеарном закону (σ_x') а други по закону кубне параболе (σ_x''); тангенцијалне силе се мењају по закону квадратне параболе. На горњој и доњој основи ($y = \pm h/2$) нормалне силе су једнолике и позитивне (σ_y), а тангенцијалне силе се линеарно мењају са x .

7.5.2. Напрезање танких греда. — Конзола, распона l , танког правоугаоног пресека, уклештена је на левом крају (o), а на десном је оптерећена концентрисаном силом F (слика 7.5.a). Пошто су димензије попречног пресека мале у односу на дужину l може се ово оптерећење сматрати равним, у равни Oyz . Из отпорности материјала* је познато да су компонентни напони



Слика 7.5. — Савијање танке правоугаоне конзоле

$$\sigma_y = 0; \quad \sigma_z = -\frac{F}{I_x}(l-z)y; \quad (7.47.a)$$

$$\tau_{xy} = \frac{FS'_x}{I_x \xi} = \frac{F}{8I_x}(h^2 - 4y^2).$$

Да бисмо одредили функцију напона напишимо предње релације у облику

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad \sigma_z = Ay + Byz = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \tau_{xy} = C + Dy^2 = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z}, \quad (7.47.b)$$

онда се интегралењем другог израза добија функција напона

$$\Phi(y, z) = Ay^3/6 + Byz^3/6 + y\theta + \psi; \quad \theta = \theta(z); \quad \psi = \psi(z). \quad (7.48.a)$$

Диференцирањем предњег израза, да би се одредиле функције $\theta = \theta(z)$ и $\psi = \psi(z)$, с обзиром на остала два напона, добијају се релације,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = y\theta'' + \psi'' = 0; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} = By^2/2 + \theta' = -C - Dy^2; \quad \theta' = d\theta/dz,$$

па морају бити задовољени услови

$$\theta'' = 0; \quad \psi'' = 0; \quad \theta = Ez; \quad \psi = K; \quad E = -C; \quad D = -B/2; \quad K = 0,$$

те су функција напона

$$\Phi = \frac{1}{6}Ay^3 + \frac{1}{6}By^3z - Czy. \quad (7.48.b)$$

и компонентни напони

$$\sigma_z = Ay + Byz = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0; \quad \tau_{xy} = C - By^2/2 = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z}. \quad (7.48.c)$$

* Отпорност материјала, чл. 7.1.

Гранични услови на бочним и уздужним основама су

$$\begin{pmatrix} 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\tau_{zy} \\ -\sigma_z \end{Bmatrix}_0 = \begin{Bmatrix} Y_n' \\ Z_n' \end{Bmatrix}_0; \quad \begin{Bmatrix} \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix}_l = \begin{Bmatrix} Y_n' \\ Z_n' \end{Bmatrix}_l;$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \pm \tau_{zy} \end{Bmatrix}_{\pm h/2} = \begin{Bmatrix} Y_n' \\ Z_n' \end{Bmatrix}_{\pm h/2}.$$

На левој основи силе се редукују на силу $-Fj$ и спрег $Mi = Fli$, а на десној само на силу Fj ; на горњој и доњој основи нема сила, те ће бити:

$$(\sigma_z)_l = By + Byl = 0; \quad (\tau_{zy})_{\pm h/2} = C - Bh^2/8 = 0; \quad \iint_{(A)} \tau_{zy} dA_p = F; \quad dA_p = dy dz;$$

$$Fl = \iint_{(A)} (yZ_n' - zY_n') dA_p = - \iint_{(A)} y(\sigma_z)_0 dA_p = -A \iint_{(A)} y^2 dA_p = -AI_x,$$

па су константе

$$A = -\frac{Fl}{I_x}; \quad B = -\frac{A}{l} = \frac{F}{I_x}; \quad C = \frac{Bh^2}{8} = \frac{Fh^2}{8I_x}; \quad \iint_{(A)} \tau_{zy} dA_p = F, \quad (7,48.d)$$

што се слаже са вредностима из (7.47.a).

Из изложеног види се да су добијени исти резултати као и у елементарној теорији из отпорности материјала. Међутим, ова су решења тачна ако су напони на крајевима конзоле распоређени по предњим законима. Уколико су силе друкчије распоређене, резултати нису тачни на крајевима конзоле, али су, према Saint-Venant-овом принципу (члан 4.10), задовољавајући за пресеке довољно удаљене од крајева конзоле.

Према Нооке-овом закону компонентне деформације су

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\mu}{E} \sigma_z = \frac{\mu F}{\mathfrak{B}} (l-z)y; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{F}{\mathfrak{B}} (l-z)y;$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{zy}}{G} = \frac{1+\mu}{4} \frac{F}{\mathfrak{B}} (h^2 - 4y^2); \quad \mathfrak{B} = EI_x;$$

(7.49)

Интеграљењем првих двеју релација се

$$v = \frac{F}{\mathfrak{B}} \left[\frac{\mu}{2} (l-z)y^2 + f(z) \right]; \quad w = \frac{F}{\mathfrak{B}} \left[\frac{1}{2} (z^2 - 2lz)y + \varphi(y) \right]$$

па уношењем у трећу релацију, после скраћења са F/\mathfrak{B} , биће

$$\left[f' - \frac{1}{2} (2lz - z^2) \right] + \left[\varphi' + \frac{2+\mu}{2} y^2 \right] = \frac{1+\mu}{4} h^2 = K.$$

Изрази у средњим заградама зависе само од z , односно од y , па како је на десној страни константна вредност, морају и они бити једнаки константама C_1 и C_2 , те интеграљењем добијају функције

$$f(z) = (3lz^2 - z^3)/6 + C_1 z + C_3; \quad \varphi(y) = -(2+\mu)y^3/6 + C_2 y + C_4.$$

Леви крај је *уклешћен*, па ако се претпостави да елемент dz остаје хоризонталан, услови и константе су:

$$y = z = 0; \quad v = w = 0; \quad \partial v / \partial z = 0; \quad C_3 = C_4 = 0; \quad C_1 = 0; \quad C_2 = (1 + \mu) h^2 / 4,$$

те су компонентна померања:

$$v = F[(3 lz^2 - z^3) + 3 \mu (l - z) y^2] / 6 \mathfrak{B} \quad (7.50.a)$$

$$w = F[(6 z^2 - 12 lz) y - 2(2 + \mu) y^3 + 3(1 + \mu) h^2 y] / 12 \mathfrak{B}. \quad (7.50.b)$$

Једначина еластичне линије, њена кривина, и угиб слободног краја конзоле су:

$$v_{(y=0)} = \frac{F}{6 \mathfrak{B}} (3 lz^2 - z^3) = \frac{Fl^3}{6 \mathfrak{B}} \left[3 \left(\frac{z}{l} \right)^2 - \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right]; \quad (7.51)$$

$$\frac{1}{R_f} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)_{y=0} = \frac{F}{\mathfrak{B}} (l - z) = -M_f; \quad v_{(z=l)} = \frac{Fl^3}{3 \mathfrak{B}}.$$

Ово се релације слажу са оним из отпорности материјала*.

Пресек на удаљењу $z = a$ од уклештења после деформације има депланацију

$$z = a + w(a) = a + F[(6 a^2 - 12 la) y - 2(2 + \mu) y^3 + 3(1 + \mu) h^2 y] / 12 \mathfrak{B}. \quad (7.53)$$

За $a = 0$ добија се депланација пресека на месту уклештења (слика 7.5.b). Депланација је по закону кубне параболе. Елемент dy на Oy -оси заокрене се за угао

$$(\partial w / \partial y)_{(y=0; z=0)} = (1 + \mu) F h^2 / 4 \mathfrak{B} = 3 F / 2 \mathbf{G} b h > 0; \quad I_x = b h^3 / 12 \quad (7.53)$$

од $+Oy$ -осе ка $+Oz$ -оси.

У предњем случају уклештење левог краја изведено је на начин да тачка $O (y = 0; z = 0)$ остане *непокретна* и тангента еластичне линије хоризонтална ($\partial v / \partial z = 0$). Међутим, уклештења се могу извести на *различитим начине* што ће утицати на распоред напона у близини уклештења. Ако се узме уклештење тако да је тачка O непокретна и да елемент dy осе $+Oy$ остане вертикалан, добијају се константе:

$$y = z = 0; \quad v = w = 0; \quad \partial w / \partial y = 0; \quad C_3 = C_4 = C_2 = 0; \quad C_1 = (1 + \mu) h^2 / 4,$$

па су компонентна померања;

$$w = F[(6 lz^2 - 2 z^3) + 3(1 + \mu) h^2 z + 6 \mu (l - z) y^2] / 12 \mathfrak{B}; \quad (7.54.a)$$

$$v = F[(3 z^2 - 6 lz) y - (2 + \mu) y^3] / 6 \mathfrak{B}. \quad (7.54.b)$$

Једначина еластичне линије и угиб слободног краја конзоле су

$$v_{(y=0)} = F[2(3 lz^2 - z^3) + 3(1 + \mu) h^2 z] / 12 \mathfrak{B}; \quad (7.55)$$

$$v_{(z=l)} = (Fl^3 / 3 \mathfrak{B}) + (3 Fl / 2 \mathbf{G} b h).$$

* Отпорност материјала, чл. 9.2.2.

Из овога се види да се угиб састоји из два дела: угиба услед савијања и угиба услед смицања са коефицијентом смицања $\kappa=3/2$ (у отпорности материјала узима се да је овај коефицијент за правоугаони пресек $\kappa=6/5=1,2$). Угиб слободної краја, дакле, зависи од начина уклепштења левої краја конзоле. Тангента еластичне линије на месту уклепштења није хоризонтална и нагиње се ка $+Oy$ -оси (слика 7.5.b.c) за угао

$$(\partial v / \partial z)_0 = 3 F / 2 G b h. \quad (7.56)$$

Конзола као у претходном проблему оптерећена је једноликим оптерећењем q [kN/cm] по целом распону и спрегом M на слободном крају (слика 7.6). Према (7.28), пошто нема запреминских сила, вредност функције савијања на горњој контури је једнака нападном моменту, па ће рачунато за јединицу ширине пресека бити:

$$\Phi = -[M + q(l-z)^2/2]/b, \quad (7.57.a)$$

односно

$$\Phi = f(y) + z \varphi(y) + 1/2 z^2 \psi(y). \quad (7.57.b)$$

Услов да је функција напона бихармонијска доводи од релације

$$\Delta \Delta \Phi = 0; \quad f^{IV} + 2 \psi'' + z \varphi^{IV} + z^2 \psi^{IV}/2 = 0, \quad (7.58.a)$$

па како овај услов мора бити задовољен са свако z то се добијају услови

$$\varphi^{IV} = 0; \quad \psi^{IV} = 0; \quad f^{IV} + 2 \psi'' = 0. \quad (7.58.b)$$

Интеграљењем првих двеју једначина добија се

$$\varphi = B_1 y^3/6 + B_2 y^2/2 + B_3 y + B_4; \quad \psi = C_1 y^3/6 + C_2 y^2/2 + C_3 y + C_4, \quad (7.59)$$

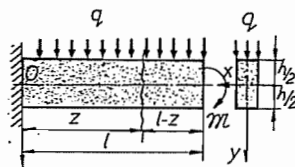
где су B_i и C_i константе које ћемо одредити из граничних услова. С обзиром на (7.28) и (7.27), пошто нема сила у аксијалном правцу, гранични услви, на горњој и доњој контури конзоле, биће:

$$\text{за } y = -h/2; \quad f = -\frac{M}{b} - \frac{ql^2}{2b}; \quad \varphi = \frac{ql}{b}; \quad \psi = -\frac{q}{b}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0; \quad (7.60.a)$$

$$\text{за } y = h/2; \quad f = 0; \quad \varphi = 0; \quad \psi = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \quad (7.60.b)$$

Ови услови доводе до система једначина

$$\begin{aligned} ql/b &= -B_1 h^3/48 + B_2 h^2/8 - B_3 h/2 + B_4; & 0 &= B_1 h^2 - 4 B_2 h + 8 B_3; \\ 0 &= B_1 h^3/48 + B_2 h^2/8 + B_3 h/2 + B_4; & 0 &= B_1 h^2 + 4 B_2 h + 8 B_3; \\ -q/b &= -C_1 h^3/48 + C_2 h^2/8 - C_3 h/2 + C_4; & 0 &= C_1 h^2 - 4 C_2 h + 8 C_3; \\ 0 &= C_1 h^3/48 + C_2 h^2/8 + C_3 h/2 + C_4; & 0 &= C_1 h^2 + 4 C_2 h + 8 C_3; \end{aligned}$$



Слика 7.6. — Савијање танке конзоле континуалним оптерећењем и спрегом

из којих одређујемо константе:

$$B_1 = ql/I_x; \quad B_2 = 0; \quad B_3 = -3ql/2A; \quad B_4 = ql/3b; \quad A = bh; \quad I_x = bh^3/12;$$

$$C_1 = 1 - q/I_x; \quad C_2 = 0; \quad C_3 = 3q/2A; \quad C_4 = -q/2b.$$

Интеграљењем треће једначине (7.58.b)

$$f^{IV} + 2\psi'' = 0; \quad f^{IV} = -2C_1 y; \quad C_1 = -q/I_x,$$

добија се

$$f = -C_1 y^5/60 + A_1 y^3/6 + A_2 y^2/2 + A_3 y + A_4. \quad (7.61)$$

Гранични услови (7.60) за ову функцију дају систем једначина:

$$\frac{\mathfrak{M}}{b} - \frac{ql^2}{2b} = \frac{1}{60 \cdot 32} C_1 h^5 - \frac{1}{48} A_1 h^3 + \frac{1}{8} A_2 h^2 - \frac{1}{2} A_3 h + A_4;$$

$$0 = -\frac{1}{60 \cdot 32} C_1 h^5 + \frac{1}{48} A_1 h^3 + \frac{1}{8} A_2 h^2 + \frac{1}{2} A_3 h + A_4;$$

$$-\frac{1}{12 \cdot 16} C_1 h^4 + \frac{1}{8} A_1 h^2 - \frac{1}{2} A_2 h + A_3 = 0;$$

$$-\frac{1}{12 \cdot 16} C_1 h^4 + \frac{1}{8} A_1 h^2 + \frac{1}{2} A_2 h + A_3 = 0.$$

из којих се одређују константе:

$$A_1 = (-3q/5A) + (24A_4/h^3); \quad A_2 = 0;$$

$$A_3 = (qh^2/80A) - (3A_4/h); \quad A_4 = -(2\mathfrak{M} + ql^2)/4b.$$

Компонентни напони су:

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = f'' + z\varphi'' + \frac{1}{2}\psi'' z^2 =$$

$$= -\frac{\mathfrak{M}}{I_x} y - \frac{q(l-z)^2}{2I_x} y + \frac{q}{A} \left[4\left(\frac{y}{h}\right)^2 - \frac{3}{5} \right] y = \sigma_z' + \sigma_z'';$$

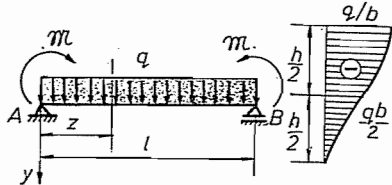
$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \psi = \frac{q}{2q} \left[-4\left(\frac{y}{h}\right)^3 + 3\left(\frac{y}{h}\right) - 1 \right]; \quad (7.62)$$

$$\tau_{zy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} = -(\varphi' + z\psi') = \frac{q(l-z)}{8I_x} (h^2 - 4y^2).$$

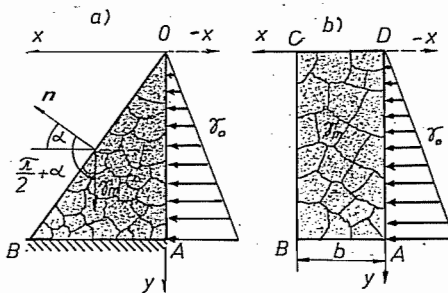
Компонентни напон σ_z има два дела. Први део σ_z' је исти као што се добија у елементарној теорији-отпорности материјала, други део σ_z'' је допунски. Његова највећа вредност је за $y = \pm h/2$ и износи $\sigma_z'' = q/5b = = qh^3/60I_x$, па се за мале висине h конзоле може занемарити. Нормални напон σ_y узима се у отпорности материјала да је једнак нули; међутим, његова највећа вредност је при $y = -h/2$ и износи $\sigma_y = -q/b$. Вредност тангенцијалног напона τ_{zy} слаже се са формулом Журавског из отпорности материјала.

Када се стави да је $M=0$ добијају се релације за конзолу оптерећену континуалним оптерећењем по целом распону.

У отпорности материјала при савијању *просће греде* правоугаоног пресека (слика 7.7.a) занемарује се напон σ_y , док су друга два напона



Слика 7.7. — Савијање просце греде



Слика 7.8. — Напрезање бране

$$\sigma_z = Ay + Byz + Cuz^2 = \partial^2 \Phi / \partial y^2; \tag{7.63}$$

$$\tau_{zy} = D + Ey^2 + Fu + Kuz^2 = -\partial^2 \Phi / \partial y \partial z.$$

Интегралењем прве једначине добија се

$$\Phi = (Ay^3 + Byz^3 + Cuz^3 z^2) / 6 + yf(z) + \varphi(z),$$

па је

$$\partial^2 \Phi / \partial y \partial z = By^2 / 2 + Cz^2 z + f' = -\tau_{yz} = -(D + Ey^2 + Fu + Kuz^2),$$

те ће бити

$$E = -B/2; \quad K = -C; \quad f' = -D - Fz; \quad f = -Dz - Fz^2 / 2 + S.$$

Стога је функција напона

$$\Phi = (A + Bz + Cz^2) y^3 / 6 - Dyz - Fz^2 y / 2 + Sy + \varphi(z). \tag{7.64.a}$$

Услов да је функција напона бихармонијска функција своди се на

$$\Delta \Delta \Phi = 4Cy + \varphi^{IV}(z) = 0,$$

па се функција напона мора узети у облику

$$\Phi = (A + Bz + Cz^2) y^3 / 6 - Dyz - Fz^2 y / 2 + Sy + \varphi(z) + \psi(y, z), \tag{7.64.b}$$

те је бихармонијски услов

$$\Delta \Delta \Phi = 0; \quad \Delta \Delta \psi = -4Cy - \varphi^{IV}(z) = -4Cy; \quad \varphi^{IV}(z) = 0.$$

Када функцију $\psi(y, z)$ узмемо у облику полинома петог степена, онда је

$$\psi = (Py^4 z / 24) + (Qy^5 / 120); \quad \Delta \Delta \psi = Qy + Py = -4Cy; \quad Q = -(4C + P), \tag{7.65.a}$$

односно

$$\psi(y, z) = Puz^4 / 24 - (4C + P) y^5 / 120. \tag{7.65.b}$$

С обзиром на (7.64.b) и (7.65.b) компонентни напони су:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \partial^2 \Phi / \partial y^2 = Ay + Byz + Cyz^2 - (4C + P)y^3/6; \\ \sigma_y &= \partial^2 \Phi / \partial z^2 = Cy^3/3 - Fy + \varphi''(z) + 1/2 P y z^2; \\ \tau_{zy} &= -\partial^2 \Phi / \partial y \partial z = -(By^2/2 + Cy^2 z - D - Fz + Pz^3/6).\end{aligned}\quad (7.66)$$

Контурни услови на доњој и горњој основи

$$y = \frac{h}{2}; \quad \begin{pmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_n' \\ Z_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad y = -\frac{h}{2}; \quad \begin{pmatrix} -\sigma_y \\ -\tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q/b \\ 0 \end{pmatrix},$$

доводе до једначина

$$\begin{aligned}Ch^3/24 - Fh/2 + \varphi'' + Pz^2 h/4 &= 0; & Bh^2/8 - D + (Ch^2/4 - F)z &= 0; \\ -Ch^3/24 + Fh/2 + \varphi'' - Pz^2 h/4 &= -q/b; & Bh^2/8 - D + (Ch^2/4 - F)z &= 0,\end{aligned}$$

па су

$$\begin{aligned}P &= 0; \quad \varphi'' = -q/2b; \quad D = Bh^2/8; \quad C = -q/2I_x; \\ F &= Ch^2/4 = -qh^2/8I_x; \quad I_x = bh^3/12.\end{aligned}$$

Константе A , B и D одредићемо из услова да се на левој основи силе редукују на силу $-(ql/2)\mathbf{j}$ и спрег $-\mathfrak{M}\mathbf{i}$, а на десној на силу $-(ql/2)\mathbf{j}$ и спрег $\mathfrak{M}\mathbf{i}$, па ће бити:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mp 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mp \tau_{zy} \\ \mp \sigma_z \end{pmatrix}_{z=0; l} = \begin{pmatrix} Y_n' \\ X_n' \end{pmatrix}; \\ -\frac{ql}{2} &= -\int \int_{(A)} [\tau_{zy}]_0 dA_p; \quad -\mathfrak{M} = -\int \int_{(A)} y [\sigma_z]_0 dA_p,\end{aligned}$$

те су константе

$$B = ql/2I_x; \quad D = qlh^2/16I_x; \quad A = [\mathfrak{M} - (qh^2/20)]/I_x.$$

Када се вредности константи унесу у (7.66) добијају се изрази за компонентне напоне:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \{[\mathfrak{M} + qlz/2 - qz^2/2]y - [q(h^2 y/20 + y^3/3)]\}/I_x = \sigma_z' + \sigma_z''; \\ \sigma_y &= q(-4y^3 + 3h^2 y - h^3)/24I_x; \\ \tau_{zy} &= q(l - 2z)(h^2 - 4y^2)/16I_x.\end{aligned}\quad (7.67)$$

Из овога се види да нормални напон σ_z има два дела: први део σ_z' се слаже са вредношћу из отпорности материјала, а други део σ_z'' је допунски; тангенцијални напон слаже се са хипотезом Журавског, а напон σ_y се мења по закону *кубне параболе* (слика 7.7.b).

За $\mathfrak{M} = 0$ добијају се вредности за просту греду оптерећену континуалним оптерећењем q .

Изрази (7.66) могу се искористити за решење проблема савијања просте греде *сойсйвеном тјежином*. Функција силе је $U' = Gy/\bar{V} = \gamma_m y$, где

је γ_m специфична тежина материјала, па ће, с обзиром на (7.14), бити напони:

$$\sigma_z = \partial^2 \Phi / \partial y^2 = Ay + Byz + Cyz^2 - Cy^3/3; \quad \sigma_y = -\gamma_m y + Cy^3/3 - Fy + K; \quad (7.68)$$

$$\tau_{zy} = D + Fz - By^2/2 - Cy^2 z.$$

Из граничних услова на уздужним основама и услова да се силе на бочним основама редукују на отпоре ослонаца:

$$\begin{pmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{Bmatrix}_{y=\pm h/2} = \begin{Bmatrix} Y_n' \\ Z_n' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \mp \tau_{yz} \\ \mp \sigma_z \end{Bmatrix}_{z=0; l} = \begin{Bmatrix} Y_n' \\ Z_n' \end{Bmatrix}_{z=0; l};$$

$$-\frac{\gamma_m bhl}{2} = - \int_{(A)} [\tau_{yz}]_0 dA_p; \quad - \int_{(A)} y [\sigma_z]_0 dA_p = 0,$$

добивају се константе:

$$A = -3\gamma_m/5; \quad B = 6\gamma_m l/h^2; \quad C = -6\gamma_m/h^2; \quad D = 3\gamma_m l/4; \quad F = -3\gamma_m/2; \quad K = 0,$$

па су компонентни напони:

$$\sigma_z = \gamma_m y \left[-\frac{3}{5} + \frac{6l}{h^2} z - \frac{6}{h^2} z^2 + 4 \frac{y^2}{h^2} \right];$$

$$\sigma_y = \frac{1}{2} \gamma_m y \left[-1 + 4 \frac{y^2}{h^2} \right]; \quad (7.69)$$

$$\tau_{zy} = \frac{3}{4} \gamma_m (l - 2z) \left[1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right].$$

Троугаона брана (слика 7.8.а) изложена је дејству хидростатичкој притиска који расте са дубином ($\gamma_0 y$) и сојствене тежине, специфичне тежине материјала γ_m . Пошто на странама OA и OB постоје по два гранична услова, функција напона може се узети у облику полинома трећег реда са четири константе

$$\Phi = Ax^3/6 + Bx^2 y/2 + Cx y^2/2 + D y^3/6; \quad U = \gamma_m y, \quad (7.70)$$

па су, према (7.14), компонентни напони:

$$\sigma_x = \partial^2 \Phi / \partial y^2 = Cx + Dy; \quad \tau_{xy} = -\partial^2 \Phi / \partial x \partial y = -Bx - Cy;$$

$$\sigma_y = (\partial^2 \Phi / \partial x^2) - U' = Ax + By - \gamma_m y; \quad (7.71.a)$$

Гранични су услови:

$$\text{за раван } OA, (x=0); \quad \begin{Bmatrix} -\sigma_x \\ -\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_0 y \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\text{за раван } OB, (x=y \operatorname{tg} \alpha); \quad \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

па су константе

$$A = -(2\gamma_0/\operatorname{tg}^3 \alpha) + (\gamma_m/\operatorname{tg} \alpha); \quad B = \gamma_0/\operatorname{tg}^2 \alpha; \quad C = 0; \quad D = -\gamma_0,$$

и компонентни напони:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\gamma_0 y; & \sigma_y &= \left(\frac{\gamma_m}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{2\gamma_0}{\operatorname{tg}^3 \alpha} \right) x + \left(\frac{\gamma_0}{\operatorname{tg}^2 \alpha} - \gamma_m \right) y; \\ \tau_{xy} &= (-\gamma_0 / \operatorname{tg}^2 \alpha) x.\end{aligned}\quad (7.71.b)$$

Код *правоугаоне бране* (слика 7.8.b) постоји шест граничних услова за равни OA ($x=0$), CB ($x=b$) и OC ($y=0$):

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sigma_x \\ -\tau_{xy} \end{Bmatrix}_{x=0} = \begin{Bmatrix} \gamma_0 y \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{x=b} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} -\tau_{xy} \\ -\sigma_y \end{Bmatrix}_{y=0} = \begin{Bmatrix} Y_n' \\ 0 \end{Bmatrix},$$

па је М. Lèvy узео полином шестог степена и добио за напоне вредности:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\gamma_0 y \left(1 - \frac{x}{b} \right)^2 \left(1 + 2 \frac{x}{b} \right); \\ \sigma_y &= -y \left\{ \gamma_m - \frac{\gamma_0}{b^2} \left(1 - 2 \frac{x}{b} \right) y^2 - \gamma_0 \left[4 \left(\frac{x}{b} \right)^3 - 6 \left(\frac{x}{b} \right)^2 + \frac{12}{5} \left(\frac{x}{b} \right) - \frac{1}{5} \right] \right\}; \\ \tau_{xy} &= \frac{\gamma_0 x}{b} \left(1 - \frac{x}{b} \right) \left[\frac{b}{5} - 3 \frac{y^2}{b} - x \left(1 - \frac{x}{b} \right) \right].\end{aligned}\quad (7.72)$$

Сви су гранични услови задовољени изузев што је $-\tau_{xy}$ за $y=0$ једнак нули, тај напон износи

$$\tau_{xy}(y=0) = \frac{\gamma_0 x}{b} \left(1 - \frac{x}{b} \right) \left[-\frac{b}{5} + x \left(1 - \frac{x}{b} \right) \right] \quad (7.73.a)$$

али је задовољен услов

$$-\iint_{(A)} \tau_{xy} dA = -l \int_0^b \tau_{xy} dx = 0, \quad (7.73.b)$$

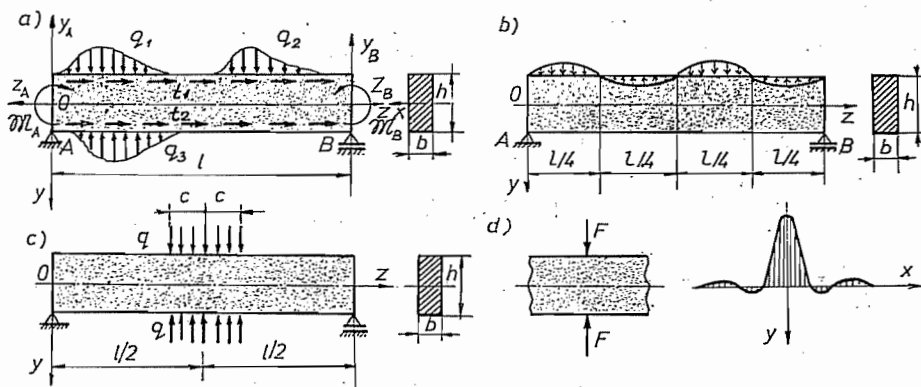
па је то напрезање према S. Venant-овом принципу само *локално*.

7.6. Примена тригонометријских редова. — Мали је број практичних проблема који се могу решити помоћу полинома, па се користи метода тригонометријских редова коју су први применили М. С. Ribière ("Sur divers cas de la flexion des prismes rectangles", 1889. год.) и L. N. G. Filon (Phil. Trans., s. A., t. 201, 1903. год.) на случај греда код којих је дужина знатно већа од висине ($l \gg h$). У таквим случајевима важно је задовољити граничне услове на уздужним основама греде на којима дејствују оптерећења; услови на бочним основама (крајевима) могу се испунити помоћу реакција ослонаца (слика 7.9.a) што је дозвољено према принципу S. Venant-a.

Партикуларно решење бихармонијске једначине (7.13) може се тражити у облику производа двеју функција које зависе само од z и до y , па се тада добија:

$$\Phi(y, z) = f(y) \cdot \varphi(z); \quad (7.74.z)$$

$$\Delta \Delta \Phi = f^{IV} \varphi + 2f'' \varphi'' + f \varphi^{IV} = 0.$$



Слика 7.9. — Општи случај савијања танке греде

Ова је једначина задовољена када су једновремено задовољене три једначине:

$$\varphi'' + k^2 \varphi = 0; \quad \varphi^{IV} - k^4 \varphi = 0; \quad f^{IV} - 2k^2 f'' + k^4 f = 0,$$

у шта се лако уверавамо када прву помножимо са $2f''$, другу са f и трећу са φ и саберемо. Прва једначина одговара хармонијском осциловању, па је њено решење

$$\varphi(z) = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz, \quad (7.75)$$

које задовољава и другу једначину. Решење треће претпоставимо у облику $f = e^{\lambda y}$, онда је карактеристична $(\lambda^2 - k^2)^2 = 0$, па је решење:

$$f(y) = (A + By) \operatorname{Ch} ky + (C + Dy) \operatorname{Sh} ky. \quad (7.76)$$

Стога је функција напона

$$\Phi(y, z) = [(A + By) \operatorname{Ch} ky + (C + Dy) \operatorname{Sh} ky] (C_1 \cos kz + C_2 \sin kz). \quad (7.74.b)$$

На крајевима просте греде мора напон σ_z бити једнак нули, па је

$$\text{за } z=0, z=l; \quad \sigma_z = \partial^2 \Phi / \partial y^2 = [f'' \varphi] = 0;$$

$$C_1 = 0; \quad C_2 = 1; \quad kl = n\pi; \quad k = n\alpha; \quad \alpha = \pi/l.$$

Пошто је једначина хомогена, мора и збир решења бити решење једначине, па се за функцију напона добија израз:

$$\Phi(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n y) \operatorname{Ch} n\alpha y + (C_n + D_n y) \operatorname{Sh} n\alpha y \sin n\alpha z; \quad (7.77)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{l}; \quad n = 1, 2, \dots;$$

Ову је једначину извео Filon, а исту такву једначину са функцијом $\varphi = \cos n\alpha z$ извео је Ribière. У горњој једначини се појављују $4n$ константи које за довољно велики број n омогућавају да се одреде гранични услови на уздужним основама на којима дејствује оптерећење.

Нека је проста греда AB оптерећена на уздужним основама нормалним и тангенцијалним оптерећењима $q_1(z)$, $q_2(z)$, $t_1(z)$, $t_2(z)$. Пошто су напони

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \sum_n f'' \varphi = \sum_n k \{ [2 D_n + k (A_n + B_n y)] \operatorname{Ch} ky + \\ &\quad + [2 B_n + k (C_n + D_n y)] \operatorname{Sh} ky \} \sin kz; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \sum_n f \varphi'' = - \sum_n k^2 [(A_n + B_n y) \operatorname{Ch} ky + (C_n + D_n y) \operatorname{Sh} ky] \sin kz; \quad (7.78)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{zy} &= - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} = - \sum_n f' \varphi' = - \sum_n k \{ [B_n + k (C_n + D_n y)] \operatorname{Ch} ky + \\ &\quad + [D_n + k (A_n + B_n y)] \operatorname{Sh} ky \} \cos kz,\end{aligned}$$

то се због граничних услова на уздужним основама

$$\begin{pmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sigma_y \\ -\tau_{zy} \end{Bmatrix}_{(y=-h/2)} = \begin{Bmatrix} q_1(z)/b \\ t_2(z)/b \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \sigma_y \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix}_{(y=h/2)} = \begin{Bmatrix} q_2(z)/b \\ t_2(z)/b \end{Bmatrix},$$

добија

$$\begin{aligned}\alpha^2 \sum_n n^2 [f]_{(y=-h/2)} \sin kz &= \frac{q_1(z)}{b}; & \alpha \sum_n n [f']_{(y=-h/2)} \cos kz &= \frac{t_1(z)}{b}; \\ -\alpha^2 \sum_n n^2 [f]_{(y=h/2)} \sin kz &= \frac{q_2(z)}{b}; & -\alpha \sum_n n [f']_{(y=h/2)} \cos kz &= \frac{t_2(z)}{b}.\end{aligned} \quad (7.79)$$

Из друге и четврте једначине следе допунски услови

$$\alpha \sum_n n [f'] \int_0^l \cos kz \cdot dz = \frac{1}{b} \int_0^l t_i(z) dz = 0,$$

односно

$$\int_0^l t_1(z) dz = 0; \quad \int_0^l t_2(z) dz = 0. \quad (7.80)$$

што показује да тангенцијалне силе морају бити у равнотежи дуж сваке уздужне основе.

Множењем израза (7.79) са $\sin kz$ односно $\cos kz$, пошто су*

$$\int_0^l \sin^2 kz dz = \int_0^l \cos^2 kz dz = \frac{l}{2},$$

* Теорија осцилација, чл. 4.3.1.

добиајау се релације за одређивање константи A_n, B_n, C_n, D_n :

$$\begin{aligned} \sum [(A_n - B_n h/2) \text{Ch } \beta - (C_n - D_n h/2) \text{Sh } \beta] &= \\ &= \frac{2l}{n^2 \pi^2 b} \int_0^l q_1(z) \sin n \alpha z \, dz; \quad \alpha = \pi/l; \\ \sum [(A_n + B_n h/2) \text{Ch } \beta + (C_n + 1/2 D_n h) \text{Sh } \beta] &= \\ &= \frac{-2l}{n^2 \pi^2 b} \int_0^l q_2(z) \sin n \alpha z \, dz; \quad \beta = n \pi h/2l; \\ \sum \{ [B_n + k(C_n - D_n h/2)] \text{Ch } \beta - [D_n + k(A_n - B_n h/2)] \text{Sh } \beta \} &= \\ &= \frac{2}{n \pi b} \int_0^l t_1(z) \cos n \alpha z \, dz; \\ \sum \{ [B_n + k(C_n + D_n h/2)] \text{Ch } \beta + [D_n + k(A_n + B_n h/2)] \text{Sh } \beta \} &= \\ &= \frac{-2}{n \pi b} \int_0^l t_2(z) \cos n \alpha z \, dz. \end{aligned} \tag{7.81.a}$$

За случај оптерећења представљеног на слици 7.9.b је $q_1(z) = q \sin kz$; $k = 4 \pi/l$, па је $\beta = kh/2$, то јест $kh = 2\beta$; $\beta = 2 \pi h/l$. Тада се горње једначине своде (за $n=4$) на једначине:

$$\begin{aligned} (A - Bh/2) \text{Ch } \beta - (C - Dh/2) \text{Sh } \beta &= ql^2/16 \pi^2 b = q/k^2 b; \\ (A + Bh/2) \text{Ch } \beta + (C + Dh/2) \text{Sh } \beta &= 0; \\ [B + k(C - Dh/2)] \text{Ch } \beta - [D + k(A - Bh/2)] \text{Sh } \beta &= 0; \\ [B + k(C + Dh/2)] \text{Ch } \beta + [D + k(A + Bh/2)] \text{Sh } \beta &= 0, \end{aligned}$$

па су константе

$$A = \frac{q}{k^2 b} \cdot \frac{\text{Sh } \beta + \beta \text{Ch } \beta}{\text{Sh } 2\beta + 2\beta}; \quad B = \frac{q}{kb} \cdot \frac{\text{Ch } \beta}{\text{Sh } 2\beta - 2\beta}; \quad 2D + kA = \frac{q}{kb} \cdot \frac{\beta \text{Ch } \beta - \text{Sh } \beta}{\text{Sh } 2\beta + 2\beta}; \tag{7.81.b}$$

$$C = -\frac{q}{k^2 b} \cdot \frac{\text{Ch } \beta + \beta \text{Sh } \beta}{\text{Sh } 2\beta - 2\beta}; \quad D = -\frac{q}{kb} \cdot \frac{\text{Sh } \beta}{\text{Sh } 2\beta + 2\beta}; \quad 2B + kA = \frac{q}{kb} \cdot \frac{\text{Ch } \beta - \beta \text{Sh } \beta}{\text{Sh } 2\beta - 2\beta};$$

а тиме су, према (7.78), одређени и компонентни напони.

За дугачке греде ($l \gg h$), ако број таласа n није велики, β је мали број, па се за напон σ_y у средњој равни греде ($y=0$), добија вредност

$$[\sigma_y]_{y=0} = -k^2 A \sin kz = -q [1 - \beta^4/24] \sin(4 \pi z/l) / 2b,$$

јер су:

$$\text{Sh } \beta = \beta + \beta^3/6 + \beta^5/120; \quad \text{Ch } \beta = 1 + \beta^2/2 + \beta^4/24; \quad \beta^2 \ll 1; \quad \beta^5 \approx 0.$$

Ово показује да је за мало β , што је *чест случај у пракси*, распоред нормалног напона по средњој равни скоро исти као и на уздужним основама греде, па се притисци кроз греду преносе готово једнако, ако промена притисака дуж уздужних основа није исувише брза (већи број полуталаса).

У општијем случају може се оптерећење $q(z)$ или $t(z)$, развити у Fourier-ов ред

$$q(z) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi}{l} z + b_n \sin \frac{2n\pi}{l} z, \quad (7.82.a.)$$

чији се коефицијенти одређују познатом метом

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l q(z) dz; \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l q(z) \cos \frac{2n\pi}{l} z dz; \quad (7.82.b)$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l q(z) \sin \frac{2n\pi}{l} z dz$$

и које треба изједначити са коефицијентима редова (7.81).

За случај оптерећења као на слици 7.9.c, пошто је оно симетрично, то је функција $q(z)$ *парна*, па је

$$q(z) = \begin{cases} 0 & \left\{ \begin{array}{l} 0 < z < l/2 - c; \\ l/2 - c < z < l/2 + c; \\ l/2 + c < z < l \end{array} \right. & \begin{cases} q = a_0/2 + a_n \cos(2n\pi z/l); \\ a_0 = 4qc/l; \\ a_n = [2q \sin(2n\pi c/l)]/\pi. \end{cases} \end{cases}$$

Због тога се функција напона мора претпоставити у облику

$$\Phi = \sum f \cos kz = \sum [(A_n + B_n y) \text{Ch } ky + (C_n + D_n y) \text{Sh } ky] \cos kz; \quad k = 2n\pi/l.$$

Гранични услови су:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sigma_y \\ -\tau_{zy} \end{array} \right\}_{(y=-h/2)} = \left\{ \begin{array}{l} q(z)/b \\ 0 \end{array} \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_y \\ \tau_{zy} \end{array} \right\}_{(y=h/2)} = \left\{ \begin{array}{l} -q(z)/b \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -p \\ 0 \end{array} \right\}; \quad p = \frac{q(z)}{b},$$

$$\sum k^2 [f]_{(y=-h/2)} \cos kz = p; \quad \sum k^2 [f]_{(y=h/2)} \cos kz = p; \quad \sum [f']_{(y=\mp h/2)} = 0,$$

па су константе

$$A_n = \frac{2p}{k^2} \frac{\text{Sh } \beta + \beta \text{Ch } \beta}{\text{Sh } 2\beta + 2\beta}; \quad B = C = 0; \quad D = -\frac{2p}{k} \frac{\text{Sh } \beta}{\text{Sh } 2\beta + 2\beta}; \quad \beta = \frac{kh}{2} = \frac{n\pi h}{l},$$

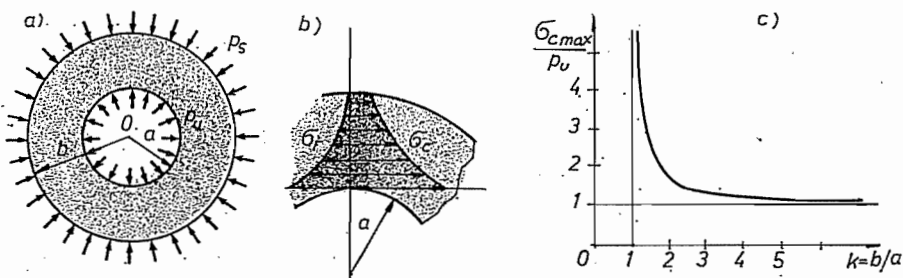
а тиме су одређени компонентни напони.

Нормални напон у средњој равни износи

$$[\sigma_y]_{y=0} = -\sum k^2 A_n \cos kz = -\frac{2qc}{lb} - \frac{4q}{\pi b} \sum_1^{\infty} \frac{\sin(n\pi c/l)}{n} \frac{\text{Sh } \beta + \beta \text{Ch } \beta}{\text{Sh } 2\beta + 2\beta} \cos \frac{2n\pi}{l} z.$$

Filon је извео овај израз за случај да је c врло мало, то јест да дејствује концентрисана сила $F = 2qc$. Дијаграм промене напона у средњој равни је приказан на слици 7.9.d.

7.7. Напрезање цеви нормалним притиском. — Цев полупречника $R_u = a$, $R_s = b$, односа $k = b/a$, напрегнута је унутрашњим p_u и спољашњим притиском p_s (слика 7.10.a). Пошто је напрезање симетрично у односу на



Слика 7.10. — Напрезање цеви нормалним притиском

координатни почетак O , то функција напона зависи само од координате r , па се решење једначине (7.35) која је Euler-ова једначина*, може тражити у облику $\Phi = r^\lambda$. Тада се она своди на карактеристичну са коренима

$$\lambda(\lambda - 2)[(\lambda - 1)^2 - 1] = \lambda^2(\lambda - 2)^2 = 0; \quad \lambda_s = 0; \quad 0; \quad 2; \quad 2.$$

Како је $\Phi' = \lambda r^{\lambda-1}$, то је $\Phi = \ln r$, па је решење-функција напона

$$\Phi(r) = A \ln r + B r^2 + C r^2 \ln r + D. \tag{7.83}$$

те су, према (7.34), компонентни напони:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \Phi' = \frac{A}{r^2} + 2B + C(1 + 2 \ln r); \quad \tau_{rc} = 0; \tag{7.84}$$

$$\sigma_c = \Phi'' = -\frac{A}{r^2} + 2B + C(3 + 2 \ln r).$$

Овај је проблем решио Lamé 1852. год. узимајући константну $C = 0$.

Гранични услови

$$\begin{pmatrix} \sigma_r & \tau_{rc} \\ \tau_{rc} & \sigma_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_r \\ -\tau_{rc} \end{pmatrix}_{r=a} = \begin{pmatrix} p_u \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \sigma_r \\ \tau_{rc} \end{pmatrix}_{r=b} = \begin{pmatrix} -p_s \\ 0 \end{pmatrix}$$

* Т. Пејовић, Диференцијалне једначине, II, Београд, (1948).

доводе до једначина

$$(A/a^2) + 2B = -p_u; \quad (A/b^2) + 2B = -p_s,$$

па су константе

$$A = -\frac{p_u - p_s}{k^2 - 1} b^2; \quad 2B = \frac{p_u - k^2 p_s}{k^2 - 1},$$

и компонентни напони

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{1}{k^2 - 1} \left[(p_u - p_s) \frac{b^2}{r^2} + (k^2 p_s - p_u) \right]; \\ \sigma_c &= \frac{1}{k^2 - 1} \left[(p_u - p_s) \frac{b^2}{r^2} - (k^2 p_s - p_u) \right]. \end{aligned} \quad (7.85)$$

У *пракси* је чест случај да је спољашњи притисак (на пример, ваздушни притисак) доста мањи од унутрашњег ($p_s \ll p_u$), па се може занемарити. Тада су компонентни напони:

$$\sigma_r = -\frac{p_u}{k^2 - 1} \left[\left(\frac{b}{r} \right)^2 - 1 \right]; \quad \sigma_c = \frac{p_u}{k^2 - 1} \left[\left(\frac{b}{r} \right)^2 + 1 \right]; \quad p_s = 0, \quad (7.86.a)$$

а њихове екстремне вредности су по унутрашњем ободу цеви и износе

$$r = a; \quad \sigma_{r \min} = -p_u; \quad \sigma_{c \max} = [(k^2 + 1)/(k^2 - 1)] p_u. \quad (7.86.b)$$

Дијаграм напона приказан је на слици 7.10.b, а зависност $\sigma_{c \max}/p_u$ од $k = b/a$ на слици 7.10.c. Из овога се види да појачање цеви преко извесне границе не утиче много на напон $\sigma_{c \max}$ који асимптотски тежи напону p_u . Због овога се код артиљеријских оруђа врши „*ауифретижа цеви*“.

Да је Lamé с правом узео вредност константе $C=0$ може се показати посматрањем. Овде се могу разликовати два случаја.

У првом случају, према *члану 4.11*, једначина равнотеже и компонентне деформације су:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_c}{r} = 0; \quad \epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{du}{dr} = u' = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_c);$$

$$\epsilon_c = \frac{u}{r} = \frac{1}{E} (\sigma_c - \mu \sigma_r); \quad E = E^*; \quad (\mu = \mu^*),$$

па су напони

$$\sigma_r = \frac{E}{\Delta} \left(u' + \mu \frac{u}{r} \right); \quad \sigma_c = \frac{E}{\Delta} \left(\frac{u}{r} + \mu u' \right); \quad \Delta = 1 - \mu^2.$$

Уношењем у једначину равнотеже добија се диференцијална једначина другог реда по померању

$$u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} = 0; \quad u = r^\lambda; \quad (\lambda^2 - 1) = 0; \quad u = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}; \quad A = -\frac{E^*}{1 + \mu^*} C_2; \quad 2B = \frac{E^*}{1 - \mu^*},$$

која уводи две константе које се одређују из граничних услова. На тај начин ће се за компонентне напоне добити исте вредности као (7.84) са $C=0$.

У другом случају, када се у услов за компатибилност деформација (4.87), унесу напони, онда, с обзиром на једначину равнотеже, следи једначина

$$\frac{\partial^2 \epsilon_c}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \left(\frac{d \epsilon_r}{dr} - 2 \frac{d \epsilon_c}{dr} \right) = 0; \quad \sigma_c'' - \mu \sigma_r'' - \frac{1}{r} [(1 + 2\mu) \sigma_r' - (2 + \mu) \sigma_c'] = 0; \quad \sigma_r' = \frac{\sigma_c - \sigma_r}{r},$$

односно једначина која се раздваја на две једначине

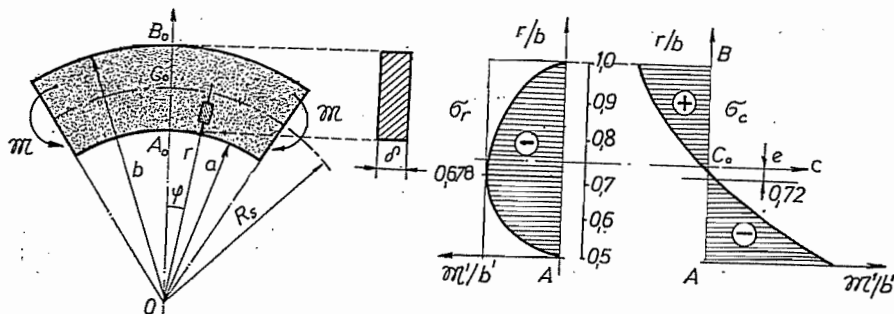
$$\sigma_c'' + \frac{2}{r} \sigma_r' - \frac{1}{r} \sigma_r = 0; \quad \sigma_r' + \sigma_c' = 0; \quad \sigma_c'' + \frac{3}{r} \sigma_c' = 0.$$

Из прве следи да је $\sigma_r + \sigma_c = \text{const} = K$. Стављајући $\sigma_c = r^\lambda$ следи за другу једначину карактеристична једначина $\lambda(\lambda+2) = 0$, па су $\lambda_1 = 0$; -2 , те су напони

$$\sigma_c = 2B + (A/r^2); \quad \sigma_r = K - 2B - (A/r^2) = 2B - (A/r^2); \quad K = 4B,$$

што се слаже са једначинама (7.84).

7.8. Чисто савијање кривог штапа. — *Кружни (лучни) штапи*, танког правоугаоног попречног пресека, дебљине δ , спољашњег и унутрашњег полупречника b и a , средњег полупречника $R_s = (a+b)/2$, исложен је на крајњим основама спреговима \mathfrak{M} (слика 7.П. а). Момент савијања је константан по дужини штапа, па је напрезање симетрично у односу на координатни почетак O , те се за напоне могу користити изрази (7.84). Пошто на ободима штапа не дејствују силе, а на основама се редукују на спреготе то су гранични услови:



Слика 7.11. — Чисто савијање кружног штапа

$$\begin{pmatrix} \sigma_r & \tau_{rc} \\ \tau_{rc} & \sigma_c \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mp 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mp \sigma_r \\ \mp \tau_{rc} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{r=a; b}; \quad \delta \int \int_{(A)} \sigma_c dr = \int_a^\delta \sigma_c dr = 0;$$

$$\int_a^\delta \sigma_c r dr = \frac{\mathfrak{M}}{\delta} = \mathfrak{M}', \tag{7.87. a}$$

који доводе до једначина*

$$\begin{aligned} 1) \frac{A}{a^2} + 2B + C(1 + 2 \ln a) &= 0; & 2) \frac{A}{b^2} + 2B + C(1 + 2 \ln b) &= 0; \\ 3) \left[\frac{A}{r} + 2Br + Cr(1 + 2 \ln r) \right]_a^b &= 0; & 4) -A \ln \frac{b}{a} + (B + C)(b^2 - a^2) + & \\ & & + C(b^2 \ln b - a^2 \ln a) &= \mathfrak{M}'. \end{aligned} \tag{7.87. b}$$

* $\int \ln r dr = r(\ln r - 1)$; ** *X. Ф. Головин (1881); Ribière (1889).*

Трећа једначина је последица прве две, па се може изоставити, те се може изоставити, те су константе:

$$\begin{aligned} A &= 4 k^2 \ln k \mathfrak{M}'/N; & B &= k^2 \{ (k^2 - 1) + 2 [k^2 \ln b - \ln (b/k)] \} \mathfrak{M}'/Nb^2; \\ C &= 2 k^2 (k^2 - 1) \mathfrak{M}'/Nb^2; & N &= (k^2 - 1)^2 - 4 k^2 (\ln k)^2, \end{aligned} \quad (7.88)$$

и компонентни напони**:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{4 \mathfrak{M}' k^2}{b^2 N} \left[\frac{b^2}{r^2} \ln k + k^2 \ln \frac{r}{b} + \ln \frac{b}{kr} \right]; & \tau_{rc} &= 0; \\ \sigma_c &= \frac{4 \mathfrak{M}' k^2}{b^2 N} \left[(k^2 - 1) - \frac{b^2}{r^2} \ln k + k^2 \ln \frac{r}{b} + \ln \frac{b}{kr} \right]; \end{aligned} \quad (7.89)$$

Из ових израза се закључује да је напон σ_r у свим тачкама пресека истог знака и једнак је нули на крајевима. Екстремне вредности напона σ_c су у крајњим тачкама, за $r=a$, односно $r=b$. Екстремне вредности су:

$$\begin{aligned} \sigma_{r \max} \text{ је за } \left(\frac{r}{b} \right)_m &= \sqrt{\frac{2 \ln k}{k^2 - 1}}; & \sigma_{c \max} &= \frac{4 \mathfrak{M}' k^2}{b^2 N} [(k^2 - 1) - 2 k^2 \ln k]; \\ \sigma_{c \min} &= \frac{4 \mathfrak{M}' k^2}{b^2 N} [(k^2 - 1) - 2 \ln k]. \end{aligned} \quad (7.90)$$

За однос $k=b/a=2$, те вредности износе:

$$\begin{aligned} \ln 2 &= 0,6932; & N &= 1,6136; & \left(\frac{r}{b} \right)_m &= 0,678; & \sigma_{r \max} &= -4,28 \left(\frac{\mathfrak{M}'}{b^2} \right); & \sigma_{c \max} &= -30,88 \left(\frac{\mathfrak{M}'}{b^2} \right); \\ \sigma_{c \min} &= 19,23 \left(\frac{\mathfrak{M}'}{b^2} \right), \end{aligned}$$

а дијаграми су приказани на слици 7.П. в. с. Неутрална оса, $[\sigma_c=0 \text{ за } (r/b)_0=0,721]$, је померена ка доњем ободу штапа за растојање $e=0,029 b=0,058 a$.

Из (7.84) компонентне деформације су

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_c) = \frac{1}{E} \left[(1 + \mu) \frac{A}{r^2} + 2(1 - \mu)(B + C \ln r) + (1 - 3\mu)C \right]; \\ \varepsilon_c &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{1}{E} (\sigma_c - \mu \sigma_r) = \frac{1}{E} \left[-(1 + \mu) \frac{A}{r^2} + 2(1 - \mu)(B + C \ln r) + (3 - \mu)C \right]; \\ \gamma_{rc} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0, \end{aligned} \quad (7.91. a)$$

па су компонентна померања:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{E} \left\{ -(1 + \mu) \frac{A}{r} + [2(1 - \mu)(B + C \ln r) - (1 + \mu)C]r \right\} + \psi(\varphi); & (7.91. b) \\ v &= \int (r \varepsilon_c - \mu) d\varphi = \int \left[\frac{4Cr}{E} - \psi(\varphi) \right] d\varphi + \theta(r) = \frac{4Cr}{E} \varphi - \int \psi d\varphi + \theta(r), \end{aligned}$$

где су $\theta(r)$ и $\psi(\varphi)$ произвољне функције од r и φ . Када се ове две релације унесу у трећу једначину (7.91. а) добија се

$$r^{-1} \left[\psi' + \int \psi d\varphi \right] + (\theta' - \theta r^{-1}) = 0; \quad \psi' + \int \psi d\varphi = \theta - r\theta' = \text{const} = K,$$

јер су једначине раздвојиле променљиве. Када се ове једначине диференцирају по својим променљивим и интеграле добиће се

$$\psi'' + \psi = 0; \quad \theta'' = 0; \quad \psi = P \cos \varphi + Q \sin \varphi; \quad \theta = Sr,$$

па су компонентна померања

$$u = \{ -(1 + \mu) Ar^{-1} + [2(1 - \mu)(B + C \ln r) - (1 + \mu)C] r \} / E + (P \cos \varphi + Q \sin \varphi);$$

$$v = (4Cr\varphi/E) - P \sin \varphi + Q \cos \varphi + Sr. \tag{7.92}$$

Константе P , Q и S одредићемо из услова да нема померања крутог тела: да нема померања крутог тела: да је тежиште C_0 средњег пресека $A_0 B_0$ (слика 7.11. а) непокретно и да пресек остаје раван, то јест из услова за

$$r = R_s = (a + b)/2; \quad \varphi = 0 \text{ су: } u = v = 0; \quad \partial v / \partial r = 0,$$

па ће, према (7.92), бити:

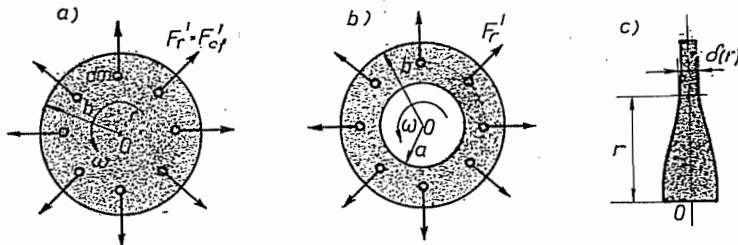
$$P = -[u]_{(r=R_s)}; \quad Q = S = 0. \tag{7.93}$$

Циркуларно померање v састоји се из два дела

$$v = -P \sin \varphi + (4C\varphi/E)r = v_{tr} + v_{rot}; \quad \theta = 4C\varphi/E = 8k^2(k^2 - 1) \mathfrak{M}' \varphi / NEb^2, \tag{7.94}$$

транслаторног, једнаког за све тачке попречног пресека, и обртног за угао θ око средишта кривине (O) лучног штапа. Попречни пресек, остаје раван, то јест нема дејланације, како се обично и претпоставља у отпорности материјала.

7.9. Утицај центрифугалне силе на диск који се обрће. — У техничкој пракси важан је случај напрезања кружног диска који се обрће константним бројем обртаја n , то јест угаоном брзином $\omega = \pi n/30$, услед центрифугалне силе која за јединицу запремине износи $F_{cf}' = F_r' = \rho V r \omega^2 / V = \rho \omega^2 r$, где је $\rho = \gamma_m/g$ специфична маса. Ова сила дејствује у радијалном правцу и усмерена је упоље, па је једначина равнотеже



Слика 7.12. — Напрезање диска центрифугалном силом

$$\sigma_r' + [(\sigma_r - \sigma_\varphi)/r] + \rho \omega^2 r = 0 \tag{7.94}$$

задовољена релацијама

$$\sigma_r = \Phi'/r; \quad \sigma_\varphi = \Phi'' + \rho \omega^2 r^2, \tag{7.95}$$

где је Φ функција напона. Када се ове релације унесу у услов компатибилности, с обзиром на Нооке-ов закон, следи

$$\varepsilon_c'' - (\varepsilon_r' - 2\varepsilon_c')/r = 0; \quad \sigma_c'' - \mu\sigma_r'' - \{[2 + \mu]\sigma_c' + (1 + 2\mu)\sigma_r'\}/r = 0$$

односно

$$\Phi'''' + 2(\Phi'''/r) - (\Phi''/r^2) + (\Phi'/r) = -(6 + 2\mu)\rho\omega^2. \quad (7.96)$$

Општи интеграл ове једначине је исти као и једначине (7.83). Партикуларни ћемо претпоставити у облику $\Phi_p = cr^4$, па је $c = -(3 + \mu)\rho\omega^2/32$, те је функција напона

$$\Phi = \Phi_h + \Phi_p = A \ln r + Br^2 + Cr^2 \ln r + D - (3 + \mu)\rho\omega^2 r^4/8 \quad (7.97)$$

па су, према (7.95), компонентни напони:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= Ar^{-2} + 2B + C(1 + 2 \ln r) - (3 + \mu)\rho\omega^2 r^2/8; \quad \tau_{rc} = 0; \\ \sigma_c &= -Ar^{-2} + 2B + C(3 + 2 \ln r) - (1 + 3\mu)\rho\omega^2 r^2/8. \end{aligned} \quad (7.98)$$

У случају *уној диска* (слика 7.12. а) је $a=0$, па пошто би за $r=0$ напони били бескрајни, морају константе A и C бити једнаке нули. Како је за $r=b$ напон $\sigma_r=0$, то је константа $2B = (3 + \mu)\rho\omega^2 b^2/8$, па су напони:

$$\sigma_r = \frac{3 + \mu}{8} \rho\omega^2 b^2 \left[1 - \left(\frac{r}{b}\right)^2 \right]; \quad \sigma_c = \frac{3 + \mu}{8} \rho\omega^2 b^2 \left[1 - \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu} \left(\frac{r}{b}\right)^2 \right]. \quad (7.99)$$

Највећи су компонентни напони за $r=0$ и износе:

$$\sigma_{r\max} = \sigma_{c\max} = (3 + \mu)\rho\omega^2 b^2/8. \quad (7.100)$$

У случају *шуйљеї диска* (слика 7.12. б) из граничник услова следи да је напон $\sigma_r=0$ за $r=a$ и $r=b$, па се из (7.98), када се, као и код Lamé-овог проблема (члан 7.7), узме да је константа $C=0$, добијају константе

$$A = -(3 + \mu)\rho\omega^2 b^4/8 k^2; \quad 2B = (3 + \mu)(k^2 + 1)\rho\omega^2 b^2/8 k^2,$$

па су компонентни напони

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{3 + \mu}{8} \frac{\rho\omega^2}{k^2} b^2 \left[(k^2 + 1) - \left(\frac{b}{r}\right)^2 - k^2 \left(\frac{r}{b}\right)^2 \right]; \\ \sigma_c &= \frac{3 + \mu}{8} \frac{\rho\omega^2}{k^2} b^2 \left[(k^2 + 1) + \left(\frac{b}{r}\right)^2 - \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu} k^2 \left(\frac{r}{b}\right)^2 \right], \end{aligned} \quad (7.101)$$

и њихове екстремне вредности

$$\sigma_{r\max} \left(\frac{r}{b} = 1/\sqrt{k} \right) = \frac{3 + \mu}{8} \frac{(k-1)^2}{k^2} \rho\omega^2 b^2; \quad \sigma_{c\max} \left(r=a \right) = \frac{3 + \mu}{4k^2} \left[k^2 + \frac{1-\mu}{3+\mu} \right] \rho\omega^2 b^2. \quad (7.102)$$

На пример, за $k=b/a=2$ и $\mu=1/3$ биће:

$$\sigma_{r\max} = 5 \rho\omega^2 b^2/48; \quad \sigma_{c\max} = 7 \rho\omega^2 b^2/8; \quad \sigma_{c\max}/\sigma_{r\max} = 8,4.$$

Код *диска променљиве дебљине* (слика 7.12. с) која се мења са r , $\delta = \delta(r) = f(r)$ мора се прва једначина за равнотежу (4.80) написати у облику

$$\left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) \left(\delta + \frac{\partial \delta}{\partial r} dr \right) d\varphi - \sigma_r r \delta d\varphi - \sigma_c \delta dr d\varphi + F_r' dV = 0,$$

па се добија

$$\frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r f) + \frac{(\sigma_r - \sigma_c) f}{r} + F_r' f = 0; \quad (7.103 \text{ a})$$

односно

$$\frac{d}{dr} (rf \sigma_r) - f \sigma_c + \rho \omega^2 fr^2 = 0. \quad (7.103 \text{ b})$$

Она је задовољена када су

$$rf \sigma_r = \Phi; \quad f \sigma_c = \Phi' + \rho \omega^2 fr^2. \quad (7.104)$$

Када се у услов компатибилности деформација (3.73) унесу релације из Нооке-овог закона (3.55) добија се једначина

$$\partial^2 \varepsilon_c / \partial r^2 = [(\partial \varepsilon_r / \partial r) - 2(\partial \varepsilon_c / \partial r)] / r; \quad \varepsilon_c' = (\varepsilon_r - \varepsilon_c) / r; \quad \sigma_c' - \mu \sigma_r' = (1 + \mu)(\sigma_r - \sigma_c),$$

када се у њу унесу релације (7.104) добија се диференцијална једначина другог реда за одређивање функције напона

$$\Phi'' + \frac{1}{r} \left[1 - \frac{f'}{f} r \right] \Phi' - \frac{1}{r^2} \left[1 - \mu \frac{f'}{f} r \right] \Phi = -(3 + \mu) \rho \omega^2 fr^2 \quad (7.105)$$

када је позната зависност $f(r)$.

Код *хиперболичкој диска**, једначине $f = c/r^n$, биће:

$$f = c/r^n; \quad \Phi'' + (1 + n) \Phi' r^{-1} - (1 + \mu) n \Phi r^{-2} = -(3 + \mu) \rho \omega^2 cr^{1-n}. \quad (7.106)$$

Сменом $\Phi = r^\lambda$ добија се карактеристична једначина и њени корени:

$$\lambda^2 + n\lambda - (1 + \mu n) = 0; \quad \lambda_1 = -n/2 + p; \quad \lambda_2 = -n/2 - p; \\ p = [(n/2)^2 + (1 + \mu n)]^{1/2} > n/2,$$

Партикуларни интеграл узећемо у облику $\Phi_p = Pr^{3-n}$, па је општи интеграл — функција напона:

$$\Phi = Ar^{\lambda_1} + Br^{\lambda_2} + Pr^{3-n}, \quad P = -(3 + n) c \rho \omega^2 / [8 - (3 + \mu) n], \quad (7.107)$$

и према (7.104) компонентни напони

$$\sigma_r = \Phi / fr = [Ar^{\lambda_1 + n - 1} + Br^{\lambda_2 + n - 1} + Pr^2] / c; \quad \tau_{rc} = 0; \quad (7.108. \text{ a})$$

$$\sigma_c = \Phi' / f + \rho \omega^2 r^2 = c^{-1} [\lambda_1 Ar^{\lambda_1 + n - 1} + \lambda_2 Br^{\lambda_2 + n - 1} + (3 - n) Pr^2] + \rho \omega^2 r^2.$$

Пошто је $\lambda_2 + n < 0$; то за $r = 0$ напон постаје бескрајно велики, па мора бити константа $B = 0$. Из граничног услова да је за $r = b$ напон $\sigma_r = 0$, одређује се константа $A = -Pb^{3-\lambda_1-n}$, па су компонентни напони

$$\sigma_r = -(Pb^2/c) [(r/b)^{\lambda_1 + n - 1} - (r/b)^2]; \quad P = -(3 + n) c \rho \omega^2 / [8 - (3 + \mu) n]; \quad (7.108. \text{ b})$$

$$\sigma_c = -(Pb^2/c) \{ \lambda_1 (r/b)^{\lambda_1 + n - 1} - [(1 + 3\mu)(r/b)^2 / (3 + \mu)] \}.$$

Диск је *идеалној облика* када су му *напони једнаки* у сваком пресеку $\sigma_r = \sigma_c = \sigma$. Тада једначина (7.103. b) постаје

$$[d(rf)/dr] - f = -\rho \omega^2 fr^2 / \sigma; \quad f' / f = -\rho \omega^2 r / \sigma, \quad (7.109. \text{ a})$$

* A. Stodola, „Dampf-und Gas-Turbinen“, 6. Aufl., 1924.

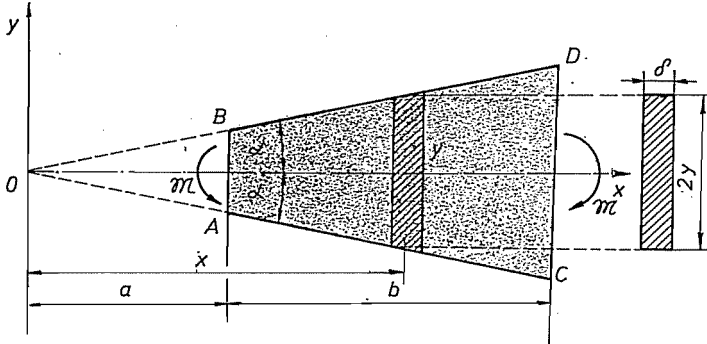
па је њен интеграл

$$f = Ce^{-kr^2}; \quad k = \rho\omega^2/2\sigma, \quad (7.109. \text{b})$$

где је C константа.

Пошто је $\sigma_r = \sigma_c = \sigma$ то из услова компатибилности следи да је $\sigma_c' - \mu\sigma_r' = 0$, па су напони у сваком пресеку диска и *једнаки и константни*.

7.10. Чисто савијање трапезне плочице правоугаоног пресека. — Трапезна танка плочица $ABCD$, нагибног угла α , оптерећена је на крајњим основама спреговима \mathfrak{M} (слика 7.13.). Стога на уздужним основама трапеза, за $\varphi = \pm\alpha$, нема напона σ_c и τ_{rc} , па су, према (7.31), компонентни напони:



Слика 7.13. — Чисто савијање трапезне плочице

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}; \quad \sigma_c = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = 0;$$

$$\tau_{rc} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}; \quad (7.110)$$

те функција напона зависи само од угла φ . Према (7.36) бихармонијска функција је

$$\Delta \Delta \Phi(\varphi) = \Phi^{IV} + 4 \Phi'' = 0, \quad (7.111)$$

па како је карактеристична једначина $\lambda^2(\lambda^2 + 4) = 0$, то је решење

$$\Phi(\varphi) = A \cos 2\varphi + B \sin 2\varphi + C\varphi + D. \quad (7.112)$$

С обзиром на гранични услов за тангенцијални напон на основама AC и BD биће

$$\tau_{rc} = r^{-2} (\partial \Phi / \partial \varphi) = r^{-2} [-2A \sin 2\varphi + 2B \cos 2\varphi + C]_{(\varphi = \pm\alpha)} = 0,$$

па су константе

$$A = 0; \quad C = -2B \cos 2\alpha,$$

те је функција напона

$$\Phi = B(\sin 2\varphi - 2\varphi \cos 2\alpha). \quad (7.113)$$

Компонентни напони су:

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2} \Phi' = -\frac{4B}{r^2} \sin 2\varphi; \quad \sigma_c = 0; \quad \tau_{rc} = \frac{1}{r^2} \Phi' = \frac{2B}{r^2} (\cos 2\varphi - \cos 2\alpha). \quad (7.114)$$

На основама AB и CD силе се редукују само на спрег \mathfrak{M} , па како су, према (7.114), напони

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \varphi - \tau_{rc} \sin 2\varphi = 2B \sin 2\varphi (1 + \cos 2\alpha - 4 \cos^2 \varphi) / r^2,$$

$$\tau_{xy} = \sigma_r \sin 2\varphi / 2 + \tau_{rc} \cos 2\varphi = 2B (\cos 4\varphi - \cos 2\alpha \cos 2\varphi) / r^2$$

то су задовољени услови

$$\iint_{(A)} \sigma_x dA = 0 = \frac{4B\delta}{a} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin \varphi \cos \varphi (1 + \cos 2\alpha - 4 \cos^2 \varphi) d\varphi = 0;$$

$$\iint_{(A)} \tau_{xy} dA = \frac{2B\delta}{a} \int_{-\alpha}^{\alpha} (\cos 4\varphi - \cos 2\alpha \cos 2\varphi) d\varphi = 0,$$

јер су

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad x = a; \quad r = a / \cos \varphi; \quad y = a \operatorname{tg} \varphi; \quad dy / r^2 = (d\varphi) / a.$$

Из трећег услова одредићемо константу B :

$$\mathfrak{M} = \iint_{(A)} [a \tau_{xy} - (-\sigma_x y)] dA = \delta \int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma_x y dy = 4B\delta \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \varphi (1 + \cos 2\alpha - 4 \cos^2 \varphi) d\varphi;$$

па су компонентни напони*:

$$B = \frac{\mathfrak{M}'}{2(2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha)}; \quad \mathfrak{M}' = \frac{\mathfrak{M}}{\delta}; \quad (7.115)$$

$$\sigma_r = \frac{-2 \sin 2\varphi}{N} \frac{\mathfrak{M}'}{r^2}; \quad \sigma_c = 0; \quad \tau_{rc} = \frac{\cos \varphi - \cos 2\alpha}{N} \frac{\mathfrak{M}'}{r^2};$$

$$N = 2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha. \quad (7.116)$$

Пошто су компонентне деформације

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\sigma_r}{E} = -2 \sin 2\varphi \frac{P}{r^2}; \quad P = \frac{\mathfrak{M}'}{NE};$$

$$\varepsilon_c = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = -\mu \frac{\sigma_r}{E} = 2\mu \sin 2\varphi \frac{P}{r^2};$$

$$\gamma_{rc} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \frac{\tau_{rc}}{G} = 2(1 + \mu) (\cos 2\varphi - \cos 2\alpha) \frac{P}{r^2},$$

то се интегралом првих двеју једначина добија

$$u = 2 \sin 2\varphi \frac{P}{r} + \psi(\varphi); \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = -2(1 - \mu) \sin^2 \varphi \frac{P}{r} - \psi;$$

$$v = (1 - \mu) \cos 2\varphi \frac{P}{r} - \int \psi d\varphi + \theta(r), \quad (7.117 a)$$

* C. E. Inglis, Trans. Inst. Nav. Arch., London, 1922.

где су $\psi(\varphi)$ и $\theta(r)$ произвољне функције. Уношењем ових релација у трећу горњу једначину добија се

$$c \frac{p}{r} - r\theta' + \theta = \psi' + \int \psi d\varphi = K; \quad c = 2(1 + \mu) \cos 2\alpha,$$

па једначине раздвајају променљиве, те је $K = \text{const}$. Интеграли су:

$$\begin{aligned} \psi'' + \psi &= 0; \quad \psi = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi; \\ \theta' - (\theta/r) + (k/r) - (pc/r^2) &= 0; \quad \theta = r^\lambda; \quad \lambda - 1 = 0; \quad \theta = C_3 r + (cP/r^2) + K, \end{aligned} \quad (7.117. b)$$

где су C_i константе. Тиме су одређена компонентна померања (7.117. a).

Кривина еластичне линије ($\varphi = 0$) је

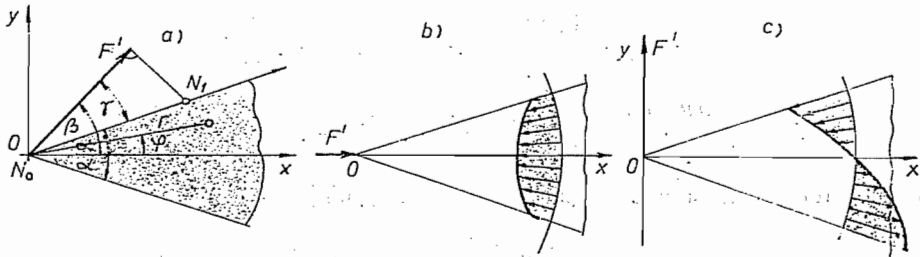
$$\begin{aligned} K_f = \frac{1}{R_f} &= \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right]_{(\varphi=0)} = \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \cos^2 \varphi - \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} \frac{\sin 2\varphi}{r} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\sin^2 \varphi}{r} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\sin 2\varphi}{r^2} \right]_{(\varphi=0)} = \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right]_{(\varphi=0)} \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_f} &= \left[2(1 - \mu) \cos 2\varphi \frac{p}{r^3} + \theta'' \right]_{\varphi=0} = \frac{\mathfrak{M}f(\alpha)}{EI_z}; \\ f(\alpha) &= \frac{4 \operatorname{tg}^3 \alpha [(1 - \mu) + (1 + \mu) \cos 2\alpha]}{3 [2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha]}, \end{aligned} \quad (7.118)$$

где је $I_z = \delta h^3/12 = \delta (2x \operatorname{tg} \alpha)^3/12 = 2\delta (r \operatorname{tg} \alpha)^3/3$ момент инерције пресека (за $\varphi = 0, x = r$), а $f(\alpha)$ коефицијент *поправке* у односу на познати образац за кривину еластичне линије $1/R_f = \mathfrak{M}/\mathfrak{B}(x)$ изведен на основу Вернולי-јеве *хийошезе*. Коефицијент $f(\alpha)$ се мало разликује од јединице, па се у отпорности материјала* узима да је $f(\alpha) = 1$.

7.11. Напрезање клина. — На неограничени клин, правоугаоног пресека мале дебљине, угла отвора 2α , дејствује на врху O сила $F = F' \delta$ која



Слика 7.14. — Напрезање клина

са осом симетрије гради угао β (слика 7.14. a). Према слици 7.3. узмимо тачку $N_0(O)$ на доњој ивици OA , а N_1 на горњој OB , онда су, с обзиром

* Отпорност материјала, чл. 9.12.

на (7.28) и (7.29), пошто је обилажење у негативном смеру, а тангента пада у радијални правац, гранични услови:

$$\varphi = \alpha; \Phi = -\mathfrak{M}_{(N_1)} = F' r \sin \gamma; \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -(\overline{F_{sr}})_s = -F' \cos \gamma;$$

$$\varphi = -\alpha; \Phi = 0; \frac{\partial p}{\partial n} = 0; \gamma = \beta - \alpha. \quad (7.119)$$

Пошто нормала пада у циркуларни правац, а тангента у радијални, то је извод функције напона у правцу нормале

$$\mathbf{n} = -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi; \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = (\text{grad } \Phi, \mathbf{n}) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi'}$$

када се примене обрасци (7.85.с). Према томе су гранични услови:

$$\varphi = \alpha; \Phi = F_r' \sin \gamma; \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -F' \cos \gamma; \varphi = -\alpha; \Phi = 0; \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\gamma = \beta - \alpha, \quad (7.120)$$

па се функција напона може претпоставити у облику

$$\Phi = r f(\varphi). \quad (7.121 \text{ a})$$

Пошто је

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r} (f + f''); \quad f' = \frac{df}{d\varphi},$$

то је бихармонијска функција

$$\Delta \Delta \Phi = \frac{1}{r^3} [f^{IV} + 2f^{II} + f] = 0; \quad f^{IV} + 2f^{II} + f = 0. \quad (7.122)$$

Када се стави $f = e^2 \varphi$, онда су карактеристична једначина и корени

$$[\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0; \quad \lambda_s = i; i; -i, -i,$$

па је функција напона

$$\Phi = r [(A + B \varphi) \cos \varphi + (C + D \varphi) \sin \varphi], \quad (7.121. \text{ b})$$

и компонентни напони*

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r} (f + f'') = \frac{2}{r} (-B \sin \varphi + D \cos \varphi);$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0; \quad \tau_{rc} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} = 0. \quad (7.123 \text{ a})$$

* Ово решење припада J. H. Michell-у, (1902).

Из граничних услова (7.20), с обзиром на (7.125), добијају се једначине:

$$\begin{aligned}(A + B \alpha) \cos \alpha + (C + D \alpha) \sin \alpha &= F' \sin \gamma; \\ (B + C + D \alpha) \cos \alpha - (A - D + B \alpha) \sin \alpha &= -F' \cos \gamma; \\ (A - B \alpha) \cos \alpha - (C - D \alpha) \sin \alpha &= 0; \\ (B + C - D \alpha) \cos \alpha + (A - D - B \alpha) \sin \alpha &= 0\end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned}2 A \cos \alpha + 2 D \alpha \sin \alpha &= F' \sin \gamma; \quad 2 B \alpha \cos \alpha + 2 C \sin \alpha \geq F' \sin \gamma; \\ -2 A \sin \alpha + 2 D (\alpha \cos \alpha + \sin \alpha) &= -F' \cos \gamma; \\ 2 B (\cos \alpha - \alpha \sin \alpha) + 2 C \cos \alpha &= -F' \cos \gamma;\end{aligned}$$

па су константе B и D које улазе у једначину (7.123 а),

$$B = F' \sin \beta / (2 \alpha - \sin 2 \alpha); \quad D = -F \cos \beta / (2 \alpha + \sin 2 \alpha).$$

Компонентни напони су:

$$\sigma_r = -\frac{2 F'}{r} \left[\frac{\sin \beta \sin \varphi}{2 \alpha - \sin 2 \alpha} + \frac{\cos \beta \cos \varphi}{2 \alpha + \sin 2 \alpha} \right]; \quad \sigma_c = 0; \quad \tau_{rc} = 0. \quad (7.124)$$

За два карактеристична случаја (слика 7.14. б, с) биће:

$$\text{за } \beta = 0; \quad \sigma_r = -\frac{2 F'}{r} \frac{\cos \varphi}{2 \alpha + \sin 2 \alpha}; \quad (7.125)$$

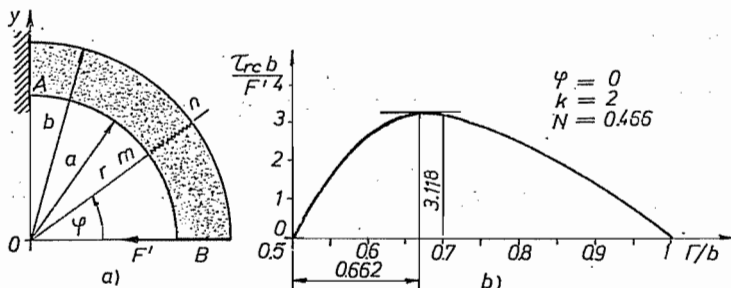
$$\text{за } \beta = \frac{\pi}{2}; \quad \sigma_r = -\frac{2 F'}{r} \frac{\sin \varphi}{2 \alpha - \sin 2 \alpha}; \quad (7.126)$$

За $r=0$ напони постају бескрајни, што је последица да сила дејствује у тачки (концентрисана сила). У стварности та је сила увек распоређена на малој површини око врха клина, па се обрасци могу применити за такво r које је доста веће од димензија те мале површине на којој дејствује сила F .

Ако је угао 2α мали, добијене релације се мало разликују од оних које се добијају по елементарној теорији притиска и савијања.

7.12. Савијање кружне конзоле силом. — Конзола AB , танког правоугаоног попречног пресека (дебљине δ) савијена у кружни лук оптерећена је на слободном крају B силом $F = F' \delta$ (слика 7.15. а). У неком пресеку $m-n$ нападани момент је $M_f = -F r \sin \varphi$, напон σ_c је сразмеран моменту, па се функција напона може узети у облику

$$\Phi = f(r) \cdot \sin \varphi. \quad (7.127. а)$$



Слика 7.15. — Савијање кружне конзоле силом

Пошто су

$$\Delta\Phi = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} \right) = \left(f'' + \frac{1}{r} f' - \frac{1}{r^2} f \right) \sin\varphi = \mathfrak{F} \sin\varphi;$$

$$\Delta\Delta\Phi = \left(\mathfrak{F}'' + \frac{1}{r} \mathfrak{F}' - \frac{1}{r^2} \mathfrak{F} \right) \sin\varphi,$$

то се добија диференцијална једначина

$$f^{IV} + \frac{2}{r} f^{III} - \frac{3}{r^2} f^{II} + \frac{3}{r^3} f^I - \frac{3}{r^4} f = 0; \quad f^I = \frac{df}{dr}.$$

Решење ћемо тражити у облику r^λ па су карактеристична једначина и њени корени

$$(\lambda - 1)^2 (\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0; \quad \lambda_3 = 1; 1; 3; -1$$

то је функција напона

$$\Phi = \left(Ar^3 + \frac{1}{r} B + Cr + Dr \ln r \right) \sin\varphi. \quad (7.127. b)$$

Компонентни напони су*

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = \left(\frac{f'}{r} - \frac{f}{r^2} \right) \sin\varphi = \left(2Ar - \frac{2}{r^3} B + \frac{D}{r} \right) \sin\varphi;$$

$$\sigma_c = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} = f'' \sin\varphi = \left(6Ar + \frac{2}{r^3} B + \frac{D}{r} \right) \sin\varphi; \quad (7.128)$$

$$\tau_{rc} = \frac{1}{r^3} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = - \left(\frac{f'}{r} - \frac{f}{r^2} \right) \cos\varphi =$$

$$= - \left(2Ar - \frac{2}{r^3} B + \frac{D}{r} \right) \cos\varphi = -\sigma_r \operatorname{ctg}\varphi.$$

Гранични услови су

$$r = a; \quad \sigma_r = 0; \quad \tau_{rc} = 0; \quad r = b; \quad \sigma_r = 0; \quad \tau_{rc} = 0; \quad \varphi = 0; \quad \sigma_c = 0; \quad \int_a^b [\tau_{rc}]_{\varphi=0} dr - F' = 0;$$

Трећи услов је задовољен, а остали дају систем једначина:

$$2Aa^4 - 2B + Da^2 = 0; \quad 2Ab^4 - 2B + Db^2 = 0$$

$$A(b^2 - a^2) - B \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} + D \ln \frac{b}{a} = -F',$$

из којих одређујемо константе

$$A = \frac{k^2 F'}{2N b^2}; \quad B = -\frac{Ab^4}{k^2} = -\frac{F' b^2}{2N}; \quad D = -2 \frac{k^2 + 1}{k^2} Ab^2 = -\frac{k^2 + 1}{N} F';$$

$$N = (k^2 + 1) \ln k - (k^2 - 1),$$

* Ово решење припада X, Φ , Головин-у,

а тиме су одређени и компонентни напони

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{F'}{Nb} \left[k^2 \left(\frac{r}{b} \right) + \left(\frac{b}{r} \right)^3 - (k^2 + 1) \left(\frac{b}{r} \right) \right] \sin \varphi; \\ \sigma_c &= \frac{F'}{Nb} \left[3k^2 \left(\frac{r}{b} \right) - \left(\frac{b}{r} \right)^3 - (k^2 + 1) \left(\frac{b}{r} \right) \right] \sin \varphi; \\ \tau_{rc} &= -\frac{F'}{Nb} \left[k^2 \left(\frac{r}{b} \right) + \left(\frac{b}{r} \right)^3 - (k^2 + 1) \left(\frac{b}{r} \right) \right] \cos \varphi.\end{aligned}\quad (7.129)$$

На слободном и уклештеном крају напони су

$$\varphi = 0; \quad \sigma_r = 0; \quad \sigma_c = 0; \quad \tau_{rc} = -\frac{F'}{Nb} \left[k^2 \left(\frac{r}{b} \right) + \left(\frac{b}{r} \right)^3 - (k^2 + 1) \left(\frac{b}{r} \right) \right]; \quad (7.130)$$

$$\begin{aligned}\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad \sigma_r &= \frac{F'}{Nb} \left[k^2 \left(\frac{r}{b} \right) + \left(\frac{b}{r} \right)^3 - (k^2 + 1) \left(\frac{b}{r} \right) \right]; \\ \sigma_c &= \frac{F'}{Nb} \left[3k^2 \left(\frac{r}{b} \right) - \left(\frac{b}{r} \right)^3 - (k^2 + 1) \left(\frac{b}{r} \right) \right]; \quad \tau_{rc} = 0.\end{aligned}$$

За $k=2$ дијаграм промене $\tau_{rc} b/F'$ на слободном крају конзоле (за $\varphi=0$) приказан је на слици 7.15.б. Екстремум је за $r/b=0,663$ и износи 3,118.

Изрази (7.129) дају тачно решење проблема само тада када су силе на крајевима конзоле распоређене према једначинама (7.130). За сваки другачији распоред сила, расподела напона у близини крајева је другачија од оне коју дају решења (7.129), па то решење важи према Saint-Venant-овом принципу за пресеке удаљене од крајева конзоле.

Као и у чл. 7.10 компонентне деформације су

$$\begin{aligned}\epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_c) = \frac{1}{E} \left[\frac{f^c}{r} - \frac{f}{r^2} - \mu f^{cc} \right] \sin \varphi = \\ &= \frac{\sin \varphi}{E} \left[2A(1-3\mu)r - \frac{2(1+\mu)B}{r^3} + \frac{1-\mu}{r} D \right]; \\ \epsilon_c &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \psi} = \frac{1}{E} (\sigma_c - \mu \sigma_r) = \frac{1}{E} \left[f^{cc} - \mu \left(\frac{f^c}{r} - \frac{f}{r^2} \right) \right] \sin \varphi; \quad \frac{\partial v}{\partial \psi} = \epsilon_c r - u; \\ \gamma_{rc} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \frac{2(1+\mu)\tau_{rc}}{E} = -\frac{2(1+\mu)}{E} \left(\frac{f^c}{r} - \frac{f}{r^2} \right),\end{aligned}$$

па су прва два компонентна померања

$$\begin{aligned}u &= \frac{\sin \varphi}{E} \left[A(1-3\mu)r^2 + \frac{1+\mu}{r^2} B + (1-\mu) D \ln r \right] + \psi(\varphi); \\ v &= -\frac{\cos \varphi}{E} \left[A(5+\mu)r^2 + \frac{1+\mu}{r^2} B + (1-\mu) D(1-\ln r) \right] - \int \psi d\varphi + \theta(r).\end{aligned}\quad (7.131.a)$$

Када се унесу у трећи израз за клизање γ_{rc} добија се једначина која раздваја променљиве

$$\theta(r) = -r\theta'(r) = \int \psi \, d\varphi + \psi' + (4D \cos \varphi)/E = K = \text{const}$$

а решења су

$$\theta(r) = Kr; \quad \psi(\varphi) = -(2D/E)\varphi \cos \varphi + P \cos \varphi + Q \sin \varphi, \quad (7.131.b)$$

па су тиме одређена компонентна померања (7.131.a). Константе K, P, Q , одредићемо из услова уклештења

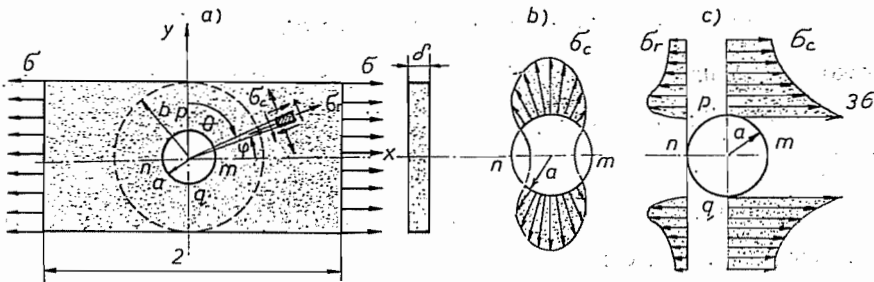
$$\varphi = \pi/2; \quad v = 0; \quad \partial v / \partial r = 0; \quad K = 0; \quad P = D\pi/E,$$

па је померање слободног краја конзоле

$$u_{(\varphi=0)} = P = D\pi/E = -\pi(k^2 + 1)F^c/EN. \quad (7.131.c)$$

Функција напона $\Phi = f(r) \cos \varphi$ одговара оптерећењу конзоле на слободном крају *вертикалном силом и сирејом*. Када се од напона за овај случај одузму напони услед дејства спрега (7.89) добијају се напони само услед дејства вертикалне силе. Овим је решен и проблем за случај дејства *косе силе* на слободном крају лучне конзоле.

7.13. Утицај кружног отвора на аксијално напрезање танке правоугаоне плочице (Kirsch-ов problem*). — Танка правоугаона плочица затегнута је у Ox -правцу једнолико подељеним силама $F/b \delta = \sigma$, а ослабљена је централном кружном рупом, полупречника $r = a$ (слика 6.16.a). Напони изазвани кружним отвором имају *локални значај*, а на довољно удаљеном растојању од отвора напони су као и у затегнутој плочици чија је, према (7.38.a), функција напона



Слика 7.16. — Затезање танке плочице ослабљене кружном рупом

$$\Phi_0 = \sigma y^2/2 = \sigma r^2 \sin^2 \varphi/2 = \sigma r^2/4 - \sigma r^2 \cos 2\varphi/4. \quad (7.132a)$$

Стога се функција напона може узети у облику

$$\Phi(r, \varphi) = f_1(r) + f_2(r) \cdot \cos 2\varphi. \quad (7.132b)$$

Прва функција је хармонијска и њено је решење (7.83)

$$f_1(r) = A \ln r + Br^2 + Cr^2 \ln r + D. \quad (7(132.c)$$

* G. Kirsh, VDI, H. 42. (1898).

Како је

$$\Delta \Phi_2 = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi^2} \right) (f_2 \cos 2\varphi) = \left(\frac{1}{r} f_2' + f_2'' - \frac{4}{r^2} f_2 \right) \cos 2\varphi,$$

то је

$$\Delta \Delta \Phi_2 = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left[\left(\frac{1}{r} f_2' + f_2'' - \frac{4}{r^2} f_2 \right) \cos 2\varphi \right] = 0,$$

па се добија диференцијална једначина

$$f_2^{IV} + 2r^{-1} f_2^{III} - 9r^{-2} f_2'' + 9r^{-3} f_2' = 0. \quad (7.133.a)$$

Решење ћемо претпоставити у облику $f_2 = r^\lambda$, па су карактеристична једначина и њени корени

$$\lambda(\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda - 8) = 0; \quad \lambda_1 = 0; \quad 2; \quad -2; \quad 4,$$

те је

$$f_2(r) = Pr^2 + Qr^4 + Rr^{-2} + S \quad (7.133.b)$$

и функција напона

$$\Phi = (A \ln r + Br^2 + Cr^2 \ln r + D) + (Pr^2 + Qr^4 + Rr^{-2} + S) \cos 2\varphi \quad (7.134)$$

Чланови $Cr^2 \ln r$ и Qr^4 , према (7.31), дају напоне који неогранично расту са порастом r , па мора бити $C = Q = 0$. Пошто за r доста велико морају напони који одговарају функцији Φ_0 бити исти као напони који одговарају функцији Φ , то из (7.132.a) следи да је $B = -P = \sigma/4$. Стога се једначина (7.134), када се узме $D = 0$, јер не утиче на напоне, своди на облик:

$$\Phi = A \ln r + Br^2 + (-Br^2 + Rr^{-2} S) \cos 2\varphi. \quad (7.135)$$

Гранични услов да је за $r = a$, $\sigma_r = 0$, $\tau_{rc} = 0$, доводи до услова

$$\Phi = 0; \quad A \ln a + Ba^2 + [-Ba^2 + (R/a^2) + S] \cos 2\varphi = 0;$$

$$\partial \Phi / \partial r = 0; \quad (A/a) + 2Ba + [-2Ba - (2R/a^3)] \cos 2\varphi = 0,$$

па како ове једначине морају бити задовољне за свако φ , то су константе

$$A = -\sigma a^2/2; \quad B = -P = \sigma/4; \quad R = -\sigma a^4/4; \quad S = \sigma a^2/2; \quad C = D = Q = 0,$$

те је функција напона

$$\Phi = \sigma [r^2 - 2a^2 \ln r - (r^2 + a^4 r^{-2} - 2a^2) \cos 2\varphi/4]. \quad (7.136)$$

Компонентни напони су:

$$\sigma_r = \sigma \{ 1 - (a/r)^2 + [1 - 4(a/r)^2 + 3(a/r)^4] \cos 2\varphi/2 \};$$

$$\sigma_\varphi = \sigma \{ 1 + (a/r)^2 - [1 + 3(a/r)^4] \cos 2\varphi/2 \}; \quad (7.137)$$

$$\tau_{rc} = -\sigma [1 + 2(a/r)^2 - 3(a/r)^4] \sin 2\varphi/2.$$

Карактеристичне вредности су:

а) на рубу кружне руже:

$$r = a; \quad \sigma_r = 0; \quad \sigma_\varphi = \sigma(1 - 2 \cos 2\varphi); \quad \tau_{rc} = 0;$$

$$\text{пресек } m-n (\varphi = 0 \text{ или } \pi): \quad \sigma_{c \min} = -\sigma; \quad (7.138)$$

$$\text{пресек } p-p (\varphi = \pi/2 \text{ или } 3\pi/2): \quad \sigma_{c \max} = 3\sigma;$$

дијаграм је показан на слици 7.16.b;

б) на пресеку AB ($\varphi = \pi/2$ или $3\pi/2$; $r \neq a$):

$$\sigma_r = 3\sigma (a/r)^2 [1 - (a/r)^2]/2; \quad \sigma_c = \sigma [2 + (a/r)^2 + 3(a/r)^4]/2; \quad \tau_{rc} = 0; \quad (7.139)$$

a/r	1	1/2	1/3	1/4	1/10	$1/\infty \approx 0$
σ_c	3σ	$1,219\sigma$	$1,074\sigma$	$1,033\sigma$	$1,005\sigma$	σ

Дијаграм је показан на слици 7.16.c.

Пошто је плочица *вишеструко повезано подручје* мора се испитати да ли напони (7.137) једнозначно одређују и компонентна померања. Ово се може доказати поступајући као у претходном члану.

Када је плоча затегнута у Oy -правцу онда је, према (7.37.a), функција

$$\Phi_0 = \sigma x^2/2 = (\sigma r^2 \cos^2 \varphi)/2 = \sigma r^2 (1 + 2 \cos 2\varphi/4). \quad (7.140a)$$

У случају *затезања у оба правца*, биће, према (3.138), напон

$$\sigma_c = \sigma (1 - 2 \cos 2\varphi) + \sigma (1 - 2 \cos 2\theta); \quad \theta = \varphi - \pi/2; \quad \sigma_c = 2\sigma \text{ за } r = a. \quad (7.140.b)$$

У случају *чистої смицања* (када је плоча затегнута у Ox -правцу и притиснута у Oy -правцу једнаким силама σ) добија се за напон:

$$\sigma_c = \sigma (1 - 2 \cos 2\varphi) - \sigma (1 - 2 \cos 2\theta) = -4\sigma \cos 2\varphi, \quad (7.140.c)$$

па је

$$\text{за } \varphi = 0; \pi; \quad \sigma_c = -4\sigma; \quad \text{за } \varphi = \pi/2; 3\pi/2; \quad \sigma_c = 4\sigma. \quad (7.140.d)$$

7.14. Опште решење равнoг проблема у поларним координатама. — Као и у случају (7.6), партикуларно решење бихармонијске функције тражиће-мо у облику производа двеју функција

$$\Phi = r \cdot f(r) \cdot \theta(\varphi), \quad (7.141)$$

које зависе свака од своје променљиве, r односно φ . Овај производ је помножен са r ради лакшег извођења.

Како је

$$\Delta \Phi = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) (rf\theta) = \frac{1}{r} f\theta'' + \left(rf'' + 3f' + \frac{f}{r} \right) \theta = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2,$$

то ће бити

$$\Delta \Delta \Phi = \Delta \mathfrak{F}_1 + \Delta \mathfrak{F}_2 = r^{-3} (\theta^{IV} + 2f_1 f^{-1} \theta'' + f_2 f^{-1} \theta) = 0,$$

односно

$$\theta^{IV} + 2f_1 f^{-1} \theta'' + f_2 f^{-1} \theta = \theta^{IV} + 2P\theta'' + Q\theta = 0, \quad (7.142)$$

где су

$$\begin{aligned} f_1 &= f'' r^2 + f' r + f; \\ f_2 &= f^{IV} r^4 + 6f''' r^3 + 5f'' r^2 - f' r + f; \quad P = f_1/f; \quad Q = f_2/f. \end{aligned} \quad (7.143)$$

Диференцирањем једначине (7.142) по r следи допунски услов

$$2P'\theta'' + Q'\theta = 0, \quad (7.144.a)$$

па постоје два карактеристична случаја.

Први случај $P' \neq 0$. — У овоме случају из (7.144.a) следи:

$$\begin{aligned} \theta''/\theta &= -Q'/2P' = -k^2; & \theta'' + k^2\theta &= 0; \\ \theta^{IV} - k^4\theta &= 0; & \theta &= K_{1k} \cos k\varphi + K_{2k} \sin k\varphi. \end{aligned}$$

Услов (7.144.a) биће

$$k^4 - 2Pk^2 + Q = 0,$$

па када се унесу релације (7.143) он постаје

$$f^{IV} + 6f'''r^{-1} + (5 - 2k^2)f''r^{-2} - (1 + 2k^2)f'r^{-3} + (k^2 - 1)^2fr^{-4} = 0. \quad (7.144.b)$$

Ова је једначина Еулер-овог типа, па се решење претпоставља у облику $f = r^\lambda$, те су карактеристична једначина и њени корени

$$\lambda^4 - 2(k^2 + 1)\lambda^2 + (k^2 - 1)^2 = 0; \quad \lambda_s = k + 1; \quad k - 1; \quad -k + 1; \quad -k - 1,$$

па је решење

$$f = C_{1k}r^{k+1} + C_{2k}r^{k-1} + C_{3k}r^{-(k-1)} + C_{4k}r^{-(k+1)}, \quad (7.144.c)$$

где су C_{ik} произвољне константе.

С обзиром на вредности броја k разликоваћемо три случаја.

a) $k=0$. — У овоме су случају сопствене вредности λ_s и решење

$$\begin{aligned} \lambda_s = 1; \quad 1; \quad -1; \quad -1; & f = C_{01}r + C_{02}r \ln r + C_{03}(1/r) + C_{04}(1/r) \ln r; \\ & \theta = K_{01}\varphi + K_{02}. \end{aligned}$$

Ако се уведу нове константе добијају се функције напона:

$$\Phi_{01} = A_{01}r^2 + A_{02}r^2 \ln r + A_{03} + A_{04} \ln r; \quad (7.145.a)$$

$$\bar{\Phi}_{01} = (\bar{A}_{01}r^2 + \bar{A}_{02}r^2 \ln r + \bar{A}_{03} + \bar{A}_{04} \ln r) \varphi. \quad (7.145.b)$$

b) $k=1$. — Сада су својствене вредности и решење

$$\lambda_s = 2; \quad -2; \quad 0; \quad 0; \quad f = C_{11}r^2 + C_{12}\frac{1}{r^2} + C_{13} + C_{14} \ln r; \quad \theta = K_{11} \cos \varphi + K_{12} \sin \varphi,$$

па се добијају две функције напона

$$\Phi_{11} = \left(B_{11}r^3 + B_{12}\frac{1}{r} + B_{13}r + B_{14}r \ln r \right) \cos \varphi, \quad (7.145.c)$$

$$\bar{\Phi}_{11} = \left(\bar{B}_{11}r^3 + \bar{B}_{12}\frac{1}{r} + \bar{B}_{13}r + \bar{B}_{14}r \ln r \right) \sin \varphi. \quad (7.145.d)$$

c) $k \neq 0; k \neq 1; k = 2; 3; 4; \dots$. — Пошто је једначина (7.144.b) линеарна, то је и збир решења такође решење једначине, па су функције напона:

$$\Phi_{k1} = \sum_{k=2} (C_{k1}r^{k+2} + C_{k2}r^k + C_{k3}r^{-k+2} + C_{k4}r^{-k}) \cos k\varphi; \quad (7.145.e)$$

$$\bar{\Phi}_{k1} = \sum_{k=2} (\bar{C}_{k1}r^{k+2} + \bar{C}_{k2}r^k + \bar{C}_{k3}r^{-k+2} + \bar{C}_{k4}r^{-k}) \sin k\varphi. \quad (7.45.f)$$

Други случај $P' = 0$. — У овоме случају из (7.144.а) следи:

$$P' = 0; \quad P = p = \text{const}; \quad Q' = 0 \text{ или } Q = q = \text{const}, \quad \theta = 0.$$

Трећи услов $\theta = 0$ отпада, јер је тада $\Phi \equiv 0$. Прва два услова дају једначине

$$f_1 - pf = 0; \quad f_2 - qf = 0 \quad (7.146.a)$$

које, после уношења релације (7.143), постају:

$$\begin{aligned} f^{\text{II}} + r^{-1}f' + (1-p)fr^{-2} &= 0; \\ f^{\text{IV}} + 6r^{-1}f^{\text{III}} + 5r^{-2}f^{\text{II}} + r^{-3}f^{\text{I}} + \\ &+ (1-q)r^{-4}f = 0. \end{aligned} \quad (7.146.b)$$

Ове једначине су Euler-овог типа, па се сменом $f = r^k$ добијају карактеристичне једначине

$$k^2 + 1 = p; \quad (k^2 - 1)^2 = q,$$

па једначине (7.146.b) постају

$$f^{\text{II}} + \frac{1}{r}f' - \frac{k^2}{r^2}f = 0; \quad f^{\text{IV}} + \frac{6}{r}f^{\text{III}} + \frac{5}{r^2}f^{\text{II}} - \frac{1}{r^3}f' + \frac{[1 - (k^2 - 1)^2]}{r^4}f = 0, \quad (7.147)$$

а њихова су решења $f = r^k$ и $f = r^{-k}$. Међутим, једначина (7.142) постаје

$$\theta^{\text{IV}} + 2(k^2 + 1)\theta^{\text{II}} + (k^2 - 1)^2\theta = 0. \quad (7.148)$$

Њено решење претпоставићемо у облику $\theta = e^{\lambda\varphi}$, па су карактеристична једначина и њени корени

$$\lambda^4 + 2(k^2 + 1)\lambda^2 + (k^2 - 1)^2 = 0; \quad \lambda_s = \pm(k + 1)i; \quad \pm(k - 1)i; \quad i = \sqrt{-1};$$

те је решење

$$\theta = K'_{k_1} \cos(k + 1)\varphi + K'_{k_2} \cos(k - 1)\varphi + K'_{k_3} \sin(k + 1)\varphi + K'_{k_4} \sin(k - 1)\varphi. \quad (7.149)$$

Разликоваћемо три случаја.

а) $k \neq 0; k \neq 1$. — Када се решење (7.149) комбинује са решењима $f = r^k$ и $f = r^{-k}$ за функцију напона добијају се релације (7.145.e) и (7.145.f), па нема неких нових решења.

б) $k = 0$. — Овде ће бити

$$\begin{aligned} f &= C'_{01} + C'_{02} \ln r; \quad \theta^{\text{IV}} + 2\theta^{\text{II}} + \theta = 0; \quad \theta = e^{\lambda\varphi}; \quad \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0; \quad \lambda_s = i; \quad i, \quad -i, \quad -i, \\ \theta &= K'_{01} \cos \varphi + K'_{02} \varphi \cos \varphi + K'_{03} \sin \varphi + K'_{04} \varphi \sin \varphi, \end{aligned}$$

па се, с обзиром на раније функције напона, добијају нове функције

$$\Phi_{01}^{(1)} = (D_{01} r + D_{02} r \ln r) \varphi \cos \varphi; \quad (7.150.a)$$

$$\bar{\Phi}_{01}^{(1)} = (\bar{D}_{01} r + \bar{D}_{02} r \ln r) \varphi \sin \varphi. \quad (7.150.b)$$

в) $k = 1$. — Сада ће бити:

$$\begin{aligned} f &= C'_{11} r^2 + C'_{12}; \quad \theta^{\text{IV}} + 4\theta^{\text{II}} = 0; \quad \lambda^2(\lambda^2 + 4) = 0; \quad \lambda_s = 0; \quad 0; \quad \pm 2i; \\ \theta &= K'_{11} \cos 2\varphi + K'_{12} \sin 2\varphi + K'_{13} \varphi + K'_{14}. \end{aligned}$$

па се, с обзиром на (7.145.e) и (7.145.f) не добија нова функција напона.

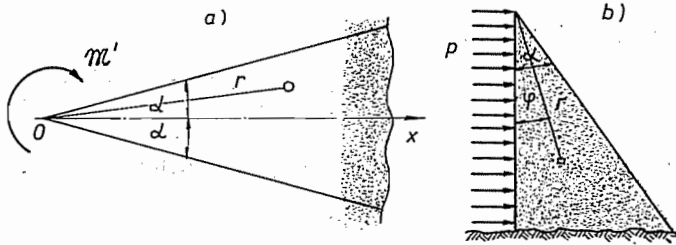
Овим се функција напона (7.141) може написати у општем облику

$$\Phi = rf(r)\theta(\varphi) = \Phi_{01} + \bar{\Phi}_{01} + \Phi_{01}^{(1)} + \bar{\Phi}_{01}^{(1)} + \Phi_{11} + \bar{\Phi}_{11} + \Phi_{k1} + \bar{\Phi}_{k1}, \quad (7.151)$$

где су Φ_{rs} осам функција познате као Michell-ове функције*.

Пошто не утичу на напоне могу се узети да су константе $A_{03} = B_{13} = \bar{B}_{13} = 0$, Функције $r^2 \varphi \ln r$; $\varphi \ln r$; $r \varphi \ln r \cos \varphi$; $r \varphi \ln r \ln \varphi$ су *многозначне* када је пол-координатни почетак (O) — у унутрашњости контуре тела. Међутим, код једноструко повезаног подручја када је пол (O) изван контуре или на контури оне су једнозначне.

Као елементаран пример посматрајмо *клин* оптерећен спрегом на крају O (слика 7.17.a). Пошто оптерећење није симетрично у односу на почетак (O) то је $\Phi_{01} = 0$, а како је $\sigma_c = 0$, може се функција напона узети у једноставном облику $\Phi = \bar{A}_{03} \varphi + \bar{C}_{k3} \sin 2\varphi$, па се добија:



Слика 7.17. — Специјални случајеви оптерећења клина

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -\frac{2M' \sin 2\varphi}{Nr^2}; \quad N = \sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha; \\ \sigma_c &= 0; \quad \tau_{rc} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \frac{M' (\cos 2\varphi - \cos 2\alpha)}{Nr^2}; \end{aligned} \quad (7.152.a)$$

јер су

$$\Phi_{(\varphi=\pm\alpha)} = M'/2; \quad (\partial \Phi / \partial \varphi) = 0.$$

Троугаони клин (слика 7.17.b) оптерећен је по једној ивици константним притиском (p), па су за $\varphi=0$ напони $\sigma_c = -p$; $\tau_{rc} = 0$, а за $\varphi=\alpha$ су $\sigma_c = 0$; $\tau_{rc} = 0$. Због тога се функција напона може узети у облику

$$\begin{aligned} \Phi &= A_{01} r^2 + \bar{A}_{01} r^2 \varphi + C_{22} r^2 \cos 2\varphi + \bar{C}_{22} r^2 \sin 2\varphi = \\ &= Ar^2 + Br^2 \varphi + Cr^2 \cos 2\varphi + Dr^2 \sin 2\varphi, \end{aligned}$$

па су напони

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}; \quad \sigma_c = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}; \quad \tau_{rc} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi}.$$

Из граничних услова добија се систем једначина

$$\begin{aligned} 2A + 2C &= -p; \quad 2A + 2B\alpha + 2C \cos 2\alpha + 2D \sin 2\alpha = 0; \\ B + 2D &= 0; \quad -B + 2C \sin 2\alpha - 2D \cos \alpha = 0, \end{aligned}$$

* J. H. Michell, Proc. London Math. Soc., t. 31., (1889).

па су константе

$$2A = -p + (p \operatorname{tg} \alpha)/2N; \quad B = -p/2N; \quad C = -(p \operatorname{tg} \alpha)/4N; \quad D = p/4N;$$

$$N = \operatorname{tg} \alpha - \alpha.$$

Компонентни напони су:

$$\sigma_r = p \left[\left(-N + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \right) - \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \cos 2\varphi \right) \right] / N;$$

$$\sigma_c = c \left[\left(-N + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \right) - \left(\varphi + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \cos 2\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \right] / N \quad (7.152.b)$$

$$\tau_{rc} = p \cdot [1 - (\operatorname{tg} \alpha \sin 2\varphi + \cos 2\varphi)/2N].$$

7.15. Примена функције комплексне променљиве. — Када нема запреминских сила, или када су константне, тада је функција напона, према (7.13), равна бихармонијска, $\Delta \Delta \Phi = \Delta (\Delta \Phi) = 0$, те је $\Delta \Phi = p$, па је $\Delta p = 0$ и задовољава Лапласе-ову једначину. Она је хармонијска функција, те је $f(z) = p + iq$ аналитичка функција, а њен интеграл биће такође аналитичка функција. Ради лакшег рада узећемо да је интегрална функција

$$F(z) = P + iQ = \frac{1}{2} \int f(z) dz, \quad (7.153.a)$$

па се диференцирањем, према (5.68), добија

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{4} f(z) = \frac{1}{4} (p + iq)$$

те је

$$\partial P / \partial x = \partial Q / \partial y = p/4; \quad \Delta \Phi = (\partial^2 \Phi / \partial x^2) + (\partial^2 \Phi / \partial y^2) = p. \quad (7.135.b)$$

С обзиром на

$$\begin{aligned} \Delta (Px + Qy) &= 2 \frac{\partial P}{\partial x} + x \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial Q}{\partial y} + y \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \\ &= 2 \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) = p = \Delta \Phi, \end{aligned}$$

је

$$\Delta (\Phi - Px - Qy) = \Delta R = 0; \quad \chi(z) = R + iS,$$

где је $R(x, y)$ реални део неке аналитичке функције $\chi(z)$. Стога је

$$\Phi = Px + Qy + R. \quad (7.154.a)$$

Множењем једначине (7.153.a) комплексним бројем \bar{z} и сабирањем са $\chi(z)$ добиће се

$$\bar{z} F(z) + \chi(z) = (x - iy)(P + iQ) + (R + iS) = (Px + Qy + R) + i(Qx - Py + S),$$

те је функција напона

$$\Phi = \operatorname{Re} \bar{z} F(z) + \chi(z) \quad (7.154.b)$$

једнака реалном делу наведеног збира функција.

Уводећи коњуговане функције

$$F(\zeta) = P + iQ; \quad \overline{F(\zeta)} = P - iQ; \quad \chi(\zeta) = R + iS; \quad \overline{\chi(\zeta)} = R - iS.$$

Goursat* је показао да се функција напона може написати у овом облику

$$\Phi = [\zeta \overline{F(\zeta)} + \zeta F(\zeta) + \chi(\zeta) + \overline{\chi(\zeta)}] / 2 \quad (7.155)$$

помоћу изабраних комплексних функција $F(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$.

С обзиром на (7.153.b) компонентне деформације су:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y) = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{E} \left[p - (1 + \mu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right]; \quad p = 4 \frac{\partial P}{\partial x};$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x) = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{E} \left[p - (1 + \mu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right]; \quad p = 4 \frac{\partial Q}{\partial y};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau_{xy} = -\frac{2(1 + \mu)}{E} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

па се интегралом добија

$$u = \frac{1}{E} \left[4P - (1 + \mu) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + f_2(y) \right]; \quad v = \frac{1}{E} \left[4Q - (1 + \mu) \frac{\partial \Phi}{\partial y} + f_1(x) \right];$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{E} \left[4 \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) - 2(1 + \mu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + f_1'(x) + f_2'(y) \right] = -\frac{2(1 + \mu)}{E} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y},$$

где су $f_1(x)$ и $f_2(y)$ произвољне функције. Како је $\partial Q / \partial x = -\partial P / \partial y$ биће

$$f_1'(x) + f_2'(y) = 0; \quad f_1'(x) = -f_2'(y) = C; \quad f_1(x) = Cx + C_1; \quad f_2(y) = -Cy + C_2$$

где је C константа. Ове компоненте представљају померање крутог тела, па се могу изоставити, те су компонентна померања деформација

$$u = \frac{1}{E} \left[4P - (1 + \mu) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]; \quad v = \frac{1}{E} \left[4Q - (1 + \mu) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right], \quad (7.156. a)$$

односно

$$u + iv = \frac{1}{E} \left[4(P + iQ) - (1 + \mu) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right]. \quad (7.156. b)$$

Због тога што су $\zeta = x + iy$; $\bar{\zeta} = x - iy$ биће $\partial \zeta / \partial x = \partial \bar{\zeta} / \partial x = 1$; $\partial \zeta / \partial y = i$; $\partial \bar{\zeta} / \partial y = -i$, па се из (7.155) добијају изводи функције напона

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{2} [\zeta F' + F + \bar{\zeta} \overline{F'} + \overline{F} + \chi' + \overline{\chi'}]; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{1}{2} [\zeta F' - F - \bar{\zeta} \overline{F'} + \overline{F} + \chi' - \overline{\chi'}];$$

јер су

$$F'(\zeta) = dF(\zeta)/d\zeta; \quad \overline{F'(\zeta)} = d\overline{F(\zeta)}/d\bar{\zeta},$$

* E. Goursat, Bull. Soc. math. de France, t. 26, (1898).

те једначина (7.156. b) постаје

$$u + iv = \frac{3 - \mu}{E} F(\zeta) - \frac{1 + \mu}{E} [\zeta \overline{F(\zeta)'} + \overline{\chi(\zeta)'}]. \quad (7.157)$$

Пошто је

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi}{\partial y} = F(\zeta) + \zeta \overline{F(\zeta)'} + \overline{\chi(\zeta)'},$$

то се диференцирањем по x , односно по y , добијају релације

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = F' + \overline{F'} + \zeta \overline{F''} + \overline{\chi''}; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = i(F' + \overline{F'} - \zeta \overline{F''} - \overline{\chi''}),$$

па су компонентни напони:

$$\sigma_x + \sigma_y = \Delta \Phi = 2 F'(\zeta) + 2 \overline{F(\zeta)'} = 4 \operatorname{Re} [F'(\zeta)];$$

$$\sigma_x - \sigma_y - 2i \tau_{xy} = 2 [\zeta \overline{F(\zeta)''} + \overline{\chi(\zeta)''}]; \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i \tau_{xy} = 2 [\zeta \overline{F''(\zeta)} + \overline{\chi''(\zeta)}].$$

Када се изаберу функције $F(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$ тада се напонско стање одређује по једначинама (7.158), па се из (7.157) одређују компонентна померања која одговарају овом напонском стању.

Аналогне формуле се добијају и за случај равне деформације.

На пример, да би према (7.43. а) функција напона била четвртог степена, треба, с обзиром на (7.155), функцију $F(\zeta)$, узети трећег степена, а функцију $\chi(\zeta)$ четвртог степена, то јест у облицима

$$F(\zeta) = (A + iB) \zeta^3, \quad \chi(\zeta) = (C + iD) \zeta^4$$

па су изводи

$$F' = 3(A + iB) \zeta^2; \quad F'' = 6(A + iB) \zeta; \quad \chi' = 4(C + iD) \zeta^3; \quad \chi'' = 12(C + iD) \zeta^2.$$

Како је

$$F'(\zeta) = 3(A + iB)(x^2 - y^2 + 2ixy) = [3A(x^2 - y^2) - 6Bxy] + i[6Axy + 3B(x^2 - y^2)],$$

то је, према (7.158)

$$\sigma_x + \sigma_y = 12A(x^2 - y^2) - 24Bxy.$$

Како је

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i \tau_{xy} = 2 [6(A + iB) \zeta \overline{\zeta} + 12(C + iD) \zeta^2] =$$

$$= [12A(x^2 + y^2) + 11C(x^2 - y^2) - 24Dxy] + i[12B(x^2 + y^2) + 24Cxy + 24D(x^2 - y^2)],$$

то је

$$\sigma_y - \sigma_x = 12A(x^2 + y^2) + 12C(x^2 - y^2) - 24Dxy,$$

па су компонентни напони

$$\sigma_x = -6Cx^2 - 6(2A - C)y^2 + 12(D - B)xy;$$

$$\sigma_y = 6(2A + C)x^2 - 6Cy^2 - 12(B + D)xy;$$

$$\tau_{xy} = 6(B + 2D)x^2 + 6(B - 2D)y^2 + 12Cxy.$$

Према (7.157) биће

$$u + iv = \{(3 - \mu)(A + iB) \zeta^3 - (1 + \mu) [3(A - iB) \zeta \overline{\zeta}^2 + 4(C - iD) \overline{\zeta}^3]\} / E,$$

па су компонентна померања:

$$u = \{(3 - \mu) [Ax^3 - 3Bx^2y - 3Axy^2 + By^3] - (1 + \mu) [(3A + 4C)x^3 - (3B + 12D)x^2y + (3A - 12C)xy^2 - (3B - 4D)y^3]\} / E;$$

$$v = \{(3 - \mu) [Bx^3 + 3Ax^2y - 3Bxy^2 - Ay^3] + (1 + \mu) [(3B + 4D)x^3 + (3A + 12C)x^2y + (3B - 12D)xy^2 + (3A - 4C)y^3]\} / E.$$

7.16. Напонске трајекторије. — Према чл. 1.9., обр. (1.31), секуларна једначина код равног напрезања је

$$\begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_y & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_x \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha_s \\ \sin \alpha_s \end{Bmatrix} = 0; f(\sigma_s) = \sigma_s^2 - \mathcal{N}_1 \sigma_s + \mathcal{N}_2 = 0;$$

$$\mathcal{N}_1 = \sigma_x + \sigma_y; \mathcal{N}_2 = \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2. \quad (7.159)$$

па су главни напони

$$\sigma_{1,2} = (\sigma_x + \sigma_y) / 2 \pm \sqrt{\Delta / 2}; \Delta = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2. \quad (7.160)$$

Главни правци одређени су релацијом

$$(\sigma_x - \sigma_y) \cos \alpha_s + \tau_{xy} \sin \alpha_s = 0; \operatorname{tg} \alpha_s = -(\sigma_x - \sigma_y) / \tau_{xy}; \operatorname{tg} 2\alpha = 2\tau_{xy} / (\sigma_x - \sigma_y) \quad (7.161)$$

где је $\alpha_1 = \alpha$ и $\alpha_2 = \alpha + \pi/2$.

*Трајекторија главног напона** σ_1 или σ_2 је крива $y = y(x)$ која има особину да у свакој тачки N области A попречног пресека тангента повучена на њу поклапа се са једним главним правцем. Према томе се добијају *две фамилије ортогоналних кривих*, пошто су и главни правци међусобно управни. Пошто је коефицијент правца тангенте $y' = \operatorname{tg} \alpha$, то је диференцијална једначина фамилије трајекторија:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 2y' / [1 - (y')^2]; (y')^2 + [(\sigma_x - \sigma_y)y' / \tau_{xy}] - 1 = 0. \quad (7.162)$$

Ово је једначина квадратна по y' , па јој одговарају две фамилије кривих — напонских трајекторија. Интегралење предње једначине је врло тешко извести у затвореног облику, те се обично примењује *нумеричка квадравира*.

Према чл. 1.11, обр. (1.54), екстремне вредности тангенцијалних напона су

$$\tau_{\max} = \pm (\sigma_1 - \sigma_2) / 2 = \pm \sqrt{\Delta / 2}; \Delta = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2. \quad (7.163)$$

Главни правци ових екстремних напона су одређени релацијама

$$\operatorname{tg} 2\beta = 2(\alpha + \pi/4) = -\operatorname{ctg} 2\alpha - (\sigma_x - \sigma_y) / 2\tau_{xy}. \quad (7.164)$$

Трајекторија екстремног тангенцијалног напона је крива $y = y(x)$ која има особину да у свакој тачки N области A попречног пресека тангента повучена на њу пада у правац екстремног тангенцијалног напона. Пошто је $y' = \operatorname{tg} \beta$ биће диференцијална једначина ових трајекторија

$$\operatorname{tg} 2\beta = 2y' / [1 - (y')^2] = -(\sigma_x - \sigma_y) / 2\tau_{xy}; (y')^2 - [4\tau_{xy}y' / (\sigma_x - \sigma_y)] - 1 = 0. \quad (7.165)$$

* Отпорност материјала, чл. 7.5.

И ова је једначина квадратна по y' па јој одговарају две фамилије ортогоналних трајекторија екстремних напона. Оне се секу са трајекторијама главних напона под углом 45° и 135° . Често се ове трајекторије називају и *линијама клизања*.

Геометријска места тачка подручја A у којима су једнаки главни напони називају се *линије једнаких главних напона*. Оне су једначина

$$(\sigma_x + \sigma_y) + [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{1/2} = 2\sigma_1 = a = \text{const}, \quad (7.166. a)$$

$$(\sigma_x + \sigma_y) - [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{1/2} = 2\sigma_2 = b = \text{const}. \quad (7.166. b)$$

Аналогно предњем, добијају се и *линије екстремних тангенцијалних напона*, једначина

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4\tau_{\max}^2 = c = \text{const}. \quad (7.166. c)$$

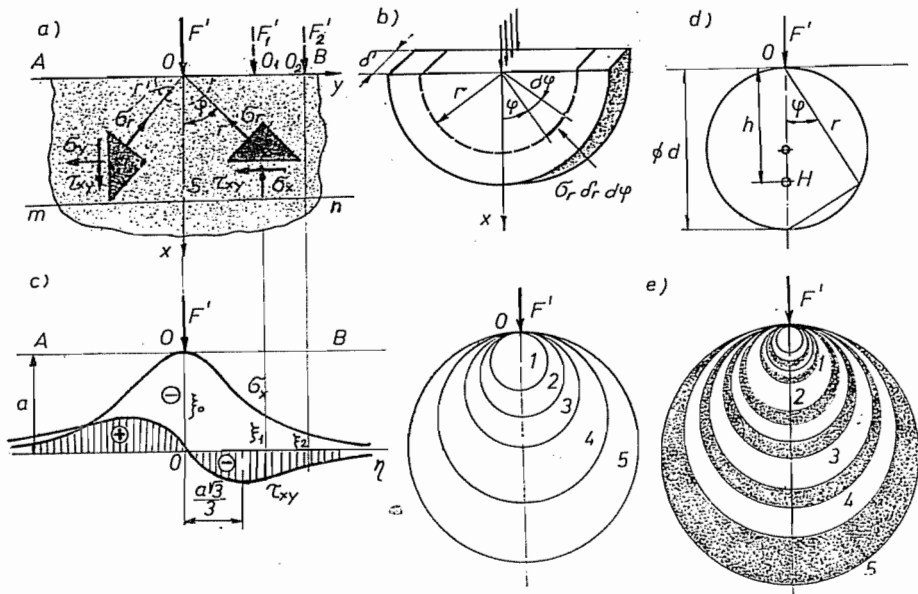
Једначине ових линија (7.166) могу се тек у потпуности написати када се познају нормални напони и тангенцијални напон у подручју A . Ове се линије најлакше добијају фотоеластичним методама („изохроме“).

8. КОНТАКТНА НАПРЕЗАЊА

Када се два еластична тела при одсуству узајамног притиска додирују у тачки или по линији, а затим се под дејством сила приближују једно другом, тада се услед еластичних деформација појављују *додирне* (контактне) површи на којима дејствују напони који се називају *контактни напони*. Ово напрезање је *локалног карактера*, и напони брзо опадају удаљавањем од контактне површи. Како су ови проблеми важни у техничкој пракси, проучићемо претходно неке специјалне случајеве оптерећења полуравни и еластичног полупростора.

8.1. Еластична полураван (Flamant-ов проблем). — На праволинијски хоризонтални крај AB бескрајне танке плоче дебљине δ , која се, простире бескрајно надолу, налево и надесно, дејствује у тачки O концентрисана сила F која је равномерно распоређена по дебљини танке плоче, па је $F' = F/\delta$ оптерећење по јединици дебљине (слика 8.1. а). Проблем Flamant-а је специјални случај оптерећења клина аксијалном силом (чл. 7.11), па се за $\beta=0$; $\alpha=\pi/2$, из (7.125), добија израз за компонентне напоне:

$$\sigma_r = -(2F' \cos \varphi) / \pi r; \quad \sigma_c = 0; \quad \tau_{rc} = 0. \quad (8.1. a)$$



Слика 8.1. — Flamant-ов проблем

Овај распоред напона је врло једноставан и назива се *прости распоред радијалних напона*. Ови напони задовољавају једначину равнотеже $(\partial\sigma_r/\partial r) + (\sigma_r/r) = 0$. За $r=0$, то јест у нападној тачки силе F , напон је бескрајно велики, па је напрезање *локално*, те се ова тачка *мора искључити из расмајрања*, али према Saint-Venant-овом *принципу* ови напони брзо опадају са удаљавањем од тачке O , па су решења тачна.

Функција напона задовољава услов бихармоничности, јер је

$$\Phi = -\frac{F'}{\pi} r \varphi \sin \varphi; \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) = 0 \quad (8.1. b)$$

Контурни услови су задовољени јер су дуж праве AB која је неоптерећена напони $\sigma_c = 0$; $\tau_{rc} = 0$. На цилиндричној површи, полупречника r дејствују унутрашње силе које се уравнотежавају са силом F , па је равнотежни услов (слика 8.1. b):

$$\delta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_r \cos \varphi (r d\varphi) = -\frac{4F'\delta}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = -F'\delta = -F.$$

У некој хоризонталној равни $m-n$ на удаљњу $x=a$ од тачке O компонентни напони за Декартове осе износе:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \varphi = -\frac{2F'}{\pi a} \cos \varphi; & \sigma_{x \max} (\varphi = 0) &= -\frac{2F'}{\pi a}; \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \varphi = -\frac{F'}{2\pi a} \sin^2 2\varphi; & a = r \cos \varphi; & \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2} \sigma_r \sin 2\varphi = -\frac{F'}{\pi a} \sin 2\varphi \cos^2 \varphi; & \tau_{xy \max} (y=a/\sqrt{3}) &= -\frac{3\sqrt{3}}{8} \frac{F'}{\pi a}, \end{aligned} \quad (8.2.)$$

а дијаграми су приказани на слици 8.1. с.

Када се нацрта круг пречника d са средиштем на Ox -оси који додирује праву AB (Oy -осу), онда је $r=d \cos \varphi$, па су напони

$$\sigma_r = -2F'/\pi d; \quad \tau_{\max} = (\sigma_r - \sigma_c)/2 = \sigma_r/2 = -F'/\pi d \quad (8.3.)$$

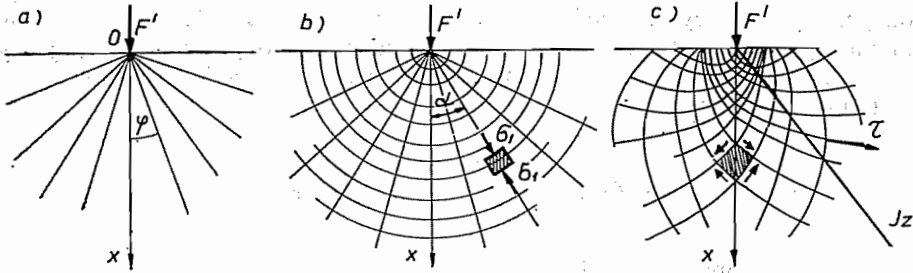
једнаки у свим тачкама (слика 8.1.d). Ово се потврђује и помоћу фотоеластичности када се одреде *изохроме* (линије једнаког највећег тангенцијалног напона (како је показано на слици 8.1. е), пошто напони стоје у односу $\tau_{\max (1)}/\tau_{\max (2)} = d_2/d_1$.

Изоклине су геометријско место тачака у којима су главни напони паралелни (слика 8.2.a). *Изоспајне* су трајекторије главних напона слика (8.2.b). На слици 8.2.c приказане су *трајекторије највећих тангенцијалних напона* јер су

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{1}{2} [(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}] = \sigma_r; \quad 0; \\ \tau_{\max} &= \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{2} \sigma_r; \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \operatorname{tg} 2\varphi; \quad \alpha = \varphi. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Компонентне деформације су

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\sigma_r}{E} = -\frac{2F' \cos \varphi}{\pi E r}; \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = -\mu \frac{\sigma_r}{E} = \frac{2\mu F' \cos \varphi}{\pi E r}; \\ \gamma_{rc} &= r \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \frac{\tau_{rc}}{G} = 0.\end{aligned}\quad (8.5.a)$$



Слика 8.2. — Изоклине, изостате и трајекторије σ_{\max}

Интеграљењем прве једначине добија се

$$u = -\frac{2F'}{\pi E} \ln r \cos \varphi + f_1(\varphi),$$

где је $f_1(\varphi)$ функција само од φ . Уношењем у другу једначину (8.5.a) и интеграљењем следи

$$v = \frac{2\mu F'}{\pi E} \sin \varphi + \frac{2F'}{\pi E} \ln r \sin \varphi - \int f_1(\varphi) d\varphi + f_2(r),$$

где је $f_2(r)$ функција само од r . Да бисмо одредили ове функције унесимо ове релације у израз за клизање (8.5.a), онда се добија диференцијална једначина која раздваја променљиве

$$f_1' + \int f_1 d\varphi + \frac{2F'(1-\mu)}{\pi E} \sin \varphi = -rf_2' + f_2 = K = \text{const},$$

па су обе стране једнаке истој константи K . Интеграљењем се добијају решења ових једначина

$$f_1(\varphi) = -\frac{(1-\mu)F'}{\pi E} \varphi \sin \varphi + A \cos \varphi + B \sin \varphi; \quad f_2(r) = Cr, \quad (8.5.b)$$

па су компонентна померања:

$$\begin{aligned}u &= -\frac{F'}{\pi E} [2 \ln r \cos \varphi + (1-\mu) \varphi \sin \varphi] + A \cos \varphi + B \sin \varphi; \\ v &= \frac{2F'}{\pi E} \left[\ln r \sin \varphi + \mu \sin \varphi - \frac{1}{2} (1-\mu) (\varphi \cos \varphi - \sin \varphi) \right] + \\ &\quad + B \cos \varphi - A \sin \varphi + Cr.\end{aligned}\quad (8.6.a)$$

Да бисмо одредили константе претпоставићемо да тачке на Ox -оси немају циркуларна померања, то јест да је за $\varphi=0$ и $v=0$, и да нека тачка H , на тој оси, на растојању $x=h$ од тачке O (слика 8.1.d), нема радијално (вертикално) померање, то јест да је за $r=x=h$, $\varphi=0$, $u=0$, биће константе:

$$B + Cx = 0; \quad B = C = 0; \quad A = (2F' \ln h) / \pi E$$

па су компонента померања:

$$u = -\frac{F'}{\pi E} \left[2 \ln \frac{r}{h} \cos \varphi + (1 - \mu) \varphi \sin \varphi \right]; \quad (8.6.b)$$

$$v = \frac{2F'}{\pi E} \left[\ln \frac{r}{h} \sin \varphi + \mu \sin \varphi - \frac{1}{2} (1 - \mu) (\varphi \cos \varphi - \sin \varphi) \right]$$

вертикална померања тачака на Ox -оси су

$$u_{(\varphi=0)} = \frac{2F'}{\pi E} \ln \frac{h}{r}, \quad (8.6.c)$$

док су померања тачака на правој контури AB плоче:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad u = -\frac{(1 - \mu)F'}{2E}; \quad v = \frac{2F'}{\pi E} \left[\ln \frac{y}{h} + \frac{1 + \mu}{2} \right]; \quad (8.6.d)$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}; \quad u = -\frac{(1 - \mu)F'}{2E}; \quad v = -\frac{2F'}{\pi E} \left[\ln \frac{y}{h} + \frac{1 + \mu}{2} \right].$$

Прве једначине показују да тачке на контури симетрично распоређене у односу на O имају иста радијална померања усмерена ка тачки O у којој дејствује F' . Вертикална померања тачака на растојању $r=y$ од тачке O су једнака, док су у тачки O бескрајно велика. Како смо околину око те тачке одстранили, изрезавањем цилиндричне површи малог полупречника (r') то предњи обрасци важе за друге тачке контуре AB .

Ако на хоризонталној правој AB еластичне полуравни дејствује више концентрисаних сила F'_i у тачкама O_i онда се, у средњој тачки S равни $m-n$, напон σ_x може одредити суперпозицијом. За $F'=1$ дијаграм напона σ_x (слик 8.1.c) има особину да ординате ξ_i представљају напоне у тачки S услед сила F'_i које дејствују у тачкама O_i , па је

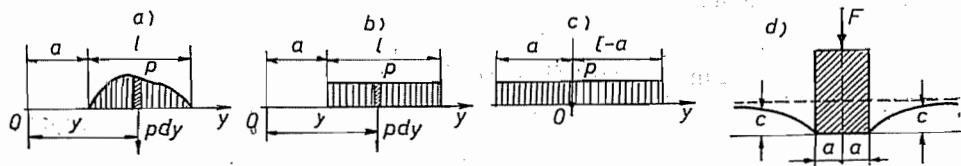
$$\sigma_{x(S)} = \xi_0 F' + \xi_1 F'_1 + \xi_2 F'_2 + \dots = \sum_0^{n-1} F'_i \xi_i. \quad (8.7.a)$$

На исти начин може се одредити и тангенцијални напон помоћу ордината дијаграма τ_{xy} за вредност силе $F'=1$, па је

$$\tau_{xy(S)} = -F_1 \eta_1 - F_2 \eta_2 - \dots = -\sum_{i=1}^n F_i \eta_i. \quad (8.7.b)$$

Применом обрасца (8.6.d) може се одредити угиб тачке O контуре AB услед произвољног континуалног оптерећења $p(y)$ [kW/cm^2]. Како је сада $dF' = p dy$ (слика 8.3.a) то се добија тотални угиб у тачки O :

$$v_{\left(\varphi=\frac{\pi}{2}\right)} = v_0 = \frac{2}{\pi E} \int_a^{a+l} \left[\ln \frac{y}{h} + \frac{1+\mu}{2} \right] p(y) dy. \quad (8.8.a)$$



Слика 8.3. — Континуално оптерећење на контури AB

Ако је оптерећење константно, $p = \text{const.}$ (слика 8.3.b), биће угиб тачке O :

$$v_0 = \frac{2p}{\pi E} \left[(a+l) \ln \frac{a+l}{h} - a \ln \frac{a}{h} + \frac{1+\mu}{2} l \right], \quad (8.8.b)$$

односно за тачку O у пољу оптерећења (слика 8.3.c)

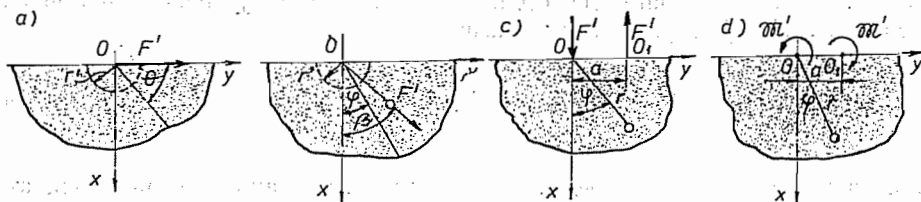
$$v_0 = \frac{2p}{\pi E} \left[(l-a) \ln \frac{l-a}{h} + a \ln \frac{h}{a} + \frac{1+\mu}{2} l \right]. \quad (8.8.c)$$

Обратно, ако је позната једначина промене угиба $v_0 = f(y)$ може се из (8.8.a) одредити оптерећење p . Проблем се своди на интегралну једначину јер се непозната функција $p(y)$ јавља под знаком интеграла. За случај константног угиба $v_0 = c = \text{const}$ (случај пробојца, слика 8.3.d) *М. А. Садовский* је одредио оптерећење по обрасцу

$$p = F'/\pi \sqrt{a^2 - y^2}; \quad p_{\min} = F'/\pi a. \quad (8.8.d)$$

Израз (8.1.a) може се користити и за случај *хоризонталне силе* F' само уместо угла φ угиба узети θ (слика 8.4.a), па је

$$\sigma_r = (-2F'/\pi r) \cos \theta = (-2F'/\pi r) \sin \varphi, \quad (8.9.a)$$



Слика 8.4. — Специјални случајеви концентрисаних сила

* *M. Zadowsky*, ТАММ, Н. 8, (1928).

те се онда лако одређује и напон за случај да је сила F' коса (слика 8.4.b)

$$\sigma_r = (-2F'/\pi r) (\cos \beta \cos \varphi + \sin \beta \sin \varphi) = (-2F'/\pi r) \cos(\beta - \varphi). \quad (8.9.b)$$

Функција напона (8.1.b) може се користити и за случај да дејствују две једнаке паралелне силе F' супротног смера на малом распојању a па образују спрег момента $\mathcal{M}' = F' a$ (слика 8.4.c). Ако се узму координате x и y онда је

$$\Phi_s = \Phi(x; y+a) - \Phi(x, y) = -a \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -a \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right),$$

па је:

$$\Phi_s = -a \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r} \right) = \frac{\mathcal{M}'}{2\pi} (2\varphi + \sin 2\varphi), \quad (8.9.c)$$

те су компонентни напони

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -\frac{2\mathcal{M}'}{\pi r^2} \cos 2\varphi; & \sigma_c &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = 0; \\ \tau_{rc} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) = \frac{2\mathcal{M}'}{\pi r^2} \cos^2 \varphi. \end{aligned} \quad (8.9.d)$$

За случај да у тачкама O и O_1 дејствују два једнака спрега супротног смера (слика 8.4.d) на малом распојању a , било би:

$$\Phi_{2s} = \Phi_s - \left(\Phi_s + a \frac{\partial \Phi_s}{\partial y} \right) \approx -a \frac{\partial \Phi_s}{\partial y},$$

па је

$$\Phi_{2s} = -a \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r} \right) = -\frac{2\mathcal{M}' a}{\pi r} \cos^3 \varphi, \quad (8.9.e)$$

те су компонентни напони:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{4\mathcal{M}' a}{\pi r^3} (S \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi); & \sigma_c &= -\frac{4\mathcal{M}' a}{\pi r^3} \cos^3 \varphi; \\ \tau_{rc} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} = \frac{6\mathcal{M}' a}{\pi r^3} \sin 2\varphi \cos \varphi. \end{aligned} \quad (8.9.f)$$

Према (4.85.b) напони за правоугле координате одређују се по следећим формулама трансформација:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \varphi + \sigma_c \sin^2 \varphi - \tau_{rc} \sin 2\varphi; & \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \varphi + \sigma_c \cos^2 \varphi + \tau_{rc} \sin 2\varphi; \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_c) \sin 2\varphi + \tau_{rc} \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (8.9.g)$$

Аналогно функцији напона $\Phi = Ax^2 y/2$, која одговара затезању, притиску и смицању (7.41.a), може се узети функција напона за поларне координате

$$\Phi = -Ar^2 \varphi/2; \quad A = p/\pi, \quad (8.10.a)$$

па су напони

$$\sigma_r = -A \varphi = -p \varphi/\pi = \sigma_c; \quad \tau_{rc} = A/2 = p/2\pi \quad (8.10.b)$$

те је оптерећење приказано на слици 8.5.a. Када се тачка O помери у тачки O_1 и узме иста функција са промењеним предзнаком биће

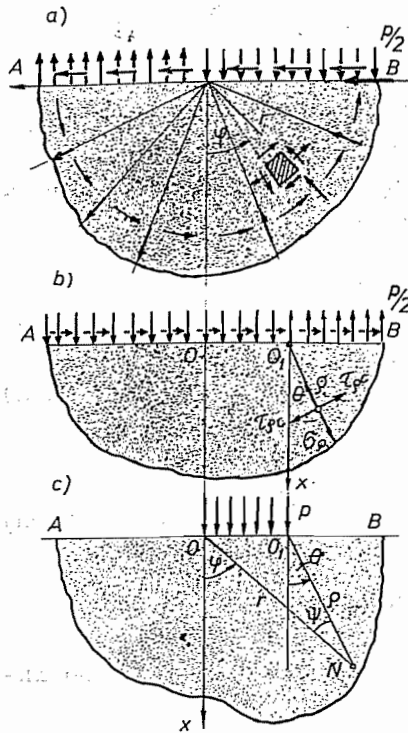
$$\Phi_1 = Ar^2 \varphi/2; \quad \sigma_r = \sigma_c = A \varphi = p \varphi/\pi; \quad \tau_{rc} = -A/2 = -p/2\pi, \quad (8.10.c)$$

па је оптерећење приказано на слици 8.5.b. Суперпонирањем добија се континуално оптерећење на делу OO_1 праве контуре (слика 8.5.c). Због тога је *J. H. Michell* (1902) узео за тај случај функцију напона у облику

$$\Phi = -\frac{1}{2} A (r^2 \varphi - \rho^2 \theta) = -p (r^2 \varphi - \rho^2 \theta)/2\pi, \quad (8.10.d)$$

па су компонентни напони у некој тачки N плоче

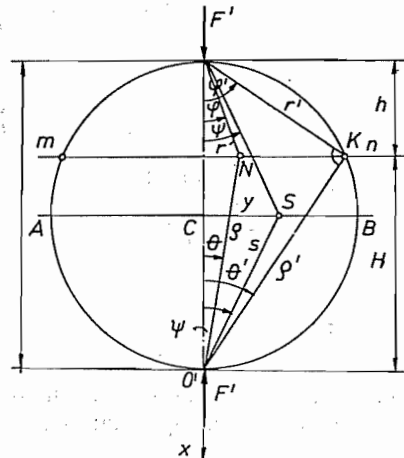
$$\sigma_r = -\frac{p}{\pi} (\varphi - \theta) = -\frac{p}{\pi} \psi; \quad \tau_{rc} = \frac{p}{2\pi}; \quad \tau_{cs} = -\frac{p}{2\pi}; \quad \psi = \varphi - \theta, \quad (8.10.e)$$



Слика 8.5. — Специјални случајеви континуалног оптерећења

пошто се напони затезања и притиска могу сабрати. Суперпонирање напона смицања може се извршити преко Mohr-овог круга напона: Главни напони су:

$$\sigma_{1,1} = -p(\psi \pm \sin \psi)/\pi. \quad (8.10.f)$$



Слика 8.6. — Диск оптерећен силама F'

8.2. Диск оптерећен аксијалним силама. — У проблеме са простом расподелом радијалних напона спада и проблем оптерећења кружног диска мале дебљине δ вертикалиим силама F' рачунатим по јединици дебљине диска (слика 8.6.a). У некој тачки K на ободу диска јављају се, (8.1.a), притисци

$$\sigma_r = -\frac{2F' \cos \varphi'}{\pi r'} = -\frac{2F'}{\pi d}; \quad \sigma_p = -\frac{2F' \cos \theta'}{\pi r'} = -\frac{2F'}{\pi d}. \quad (8.11.a)$$

јер је троугао OKO_1 правоугли, те је $d = r'/\cos \varphi' = \rho'/\cos \theta'$. Из тога следи да у тачки обода диска дејствују по два једнака притиска. Овакви напони притиска дејствују у свим тачкама обода диска, јер је $\psi' + \theta' = \pi/2$. На ободу диска морају да дејствују исто толико нормалне силе затезања које ће одговарати овим радијалним напонима притиска. У некој тачки S хоризонталног пречника, укупан напон у Ox -правцу биће:

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \psi + \frac{2F'}{\pi d} = -\frac{4F'}{\pi s} \cos^3 \psi + \frac{2F'}{\pi d} = \frac{2F'}{\pi d} \left[1 - \frac{4d^4}{(d^2 + 4y^2)^2} \right];$$

$$s = \frac{d}{2 \cos \psi} = \frac{1}{2} \sqrt{d^2 + 4y^2}, \quad (8.11.b)$$

па се види да је највећи напон у средишту диска $\sigma_{x \max} = -6F'/\pi d$, а једнак нули у крајњим тачкама пречника AB .

У некој произвољној тачки N плоче у произвољној равни $m-n$ пошто је $h = r \cos \varphi$; $H = d - h = \rho \cos \theta$, биће напони у радијалним правцима

$$\sigma_r = -(2F'/\pi h) \cos^2 \varphi, \quad \sigma_\rho = -(2F'/\pi H) \cos^2 \theta,$$

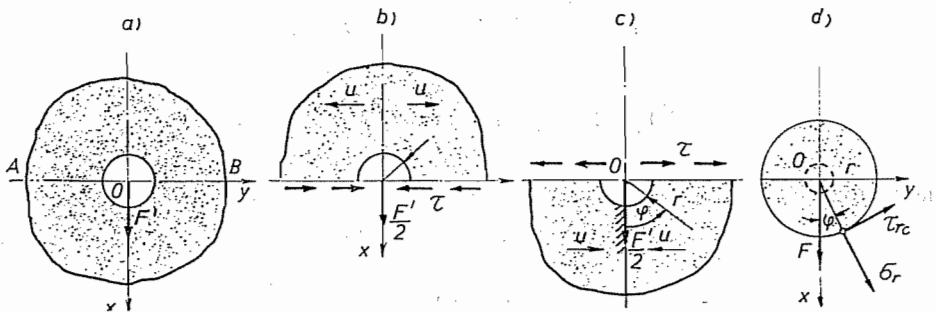
па координатни напони за правоугли координатни систем, према (8.2), имају вредности:

$$\sigma_x = -\frac{2F'}{\pi h} [\cos^4 \varphi + k \cos^4 \theta] + \frac{2F'}{\pi d}; \quad \sigma_y = -\frac{F'}{2\pi h} [\sin^2 2\varphi + k \sin^2 2\theta] + \frac{2F'}{\pi d}$$

$$(8.11.c)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{F'}{\pi h} [\sin 2\varphi \cos^2 \varphi + k \sin 2\theta \cos^2 \theta]; \quad k = \frac{h}{H} = \frac{h}{d-h}.$$

8.3. Еластична бескрајна равна. — У тачки O бескрајне равни — средњој равни бескрајне плоче мале дебљине — дејствује концентрисана сила F' рачуната по јединици дебљине плоче (слика 8.7.а). Када се плоча разреже



Слика 8.7. — Еластична бескрајна равна

по правој AB може се сматрати да се састоји из две еластичне полуравни, оптерећених у тачки O силом $F'/2$. Из (8.6.d) следи да су вертикална померања крајева AB обе равни иста, док су хоризонтална померања једнаких величина али су код прве полуравни (слика 8.7.b) усмерена од тачке O а код друге (слика 8.7.c) су усмерена ка тачки O . Да би се елиминисале

разлике у овим хоризонталним померањима додаће се тангенцијалне силе. Проблем се може свести на савијање кружне конзоле силом (члан 7.12) ако се претпостави да унутрашњи полупречник $a \rightarrow 0$, а спољашњи b бескрајно расте, и узме угао $(\pi/2) - \varphi$. Функција напона (7.137.b) добија облик

$$\Phi = Dr \ln r \cos \varphi, \quad (8.12.a)$$

па су компонентни напони

$$\sigma_r^{(1)} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \frac{D}{r} \cos \varphi; \quad \sigma_c^{(1)} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \frac{D}{r} \cos \varphi = \sigma_r^{(1)}; \quad (8.12.b)$$

$$\tau_{rc}^{(1)} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} = \frac{D}{r} \sin \varphi.$$

Константу D треба одредити из услова поништења разлике хоризонталних померања, па је

$$D \frac{\pi}{E} = u_{(\varphi=\pi/2)} = \frac{1-\mu}{4} \frac{F'}{E}; \quad D = \frac{1-\mu}{4\pi} F'. \quad (8.12.c)$$

Компонентним напонима (8.12.b) треба додати и радијални напон бескрајне полуравни оптерећене силом $F'/2$, па се, с обзиром на (8.1.a), добијају компонентни напони

$$\sigma_r = \sigma_r^{(1)} + \sigma_r^{(2)} = \frac{D}{r} \cos \varphi - \frac{F'}{\pi r} \cos \varphi = -\frac{(3+\mu)}{4\pi} \frac{F'}{r} \cos \varphi;$$

$$\sigma_c = \frac{1-\mu}{4\pi} \frac{F'}{r} \cos \varphi; \quad \tau_{rc} = \frac{1-\mu}{4\pi} \frac{F'}{r} \sin \varphi. \quad (8.12.d)$$

Ако се из плоче издвоји цилиндрични елемент, полупречника r , (слика 8.7.d), онда су равнотежни услови испуњени

$$\sum X_i = 2 \int_0^\pi (\sigma_r \cos \varphi - \tau_{rc} \sin \varphi) r d\varphi = F';$$

$$\sum Y_i = 2 \int_0^\pi (\sigma_r \sin \varphi + \tau_{rc} \cos \varphi) r d\varphi = 0, \quad (8.12.e)$$

па напони одговарају оптерећењу плоче силом F' у тачки O .

С обзиром на (8.9.g) компонентни напони за правоугле координате су:

$$\sigma_x = -\frac{F'}{4\pi} \frac{\cos \varphi}{r} [(1-\mu) + 2(1+\mu) \cos^2 \varphi];$$

$$\sigma_y = \frac{F'}{4\pi} \frac{\cos \varphi}{r} [(1-\mu) - 2(1+\mu) \sin^2 \varphi]; \quad (8.12.f)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{F'}{4\pi} \frac{\sin \varphi}{r} [(1-\mu) + 2(1+\mu) \cos^2 \varphi].$$

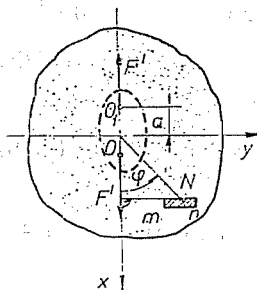
8.4. Локално напрезање. Потврда Saint-Venant-овог принципа. — Нека у тачки O бескрајне плоче дејствује сила F' а у врло блиској тачки O_1 на врло малом растојању h , сила $-F'$ (слика 8.8), онда се могу користити обрасци (8.12.f). У тачки N плоче напони се добијају суперпозицијом, па ће за елемент $m-n$ управан и Ox -осу бити напон у Ox правцу:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x^{(1)} - \sigma_x^{(2)} = \sigma_x^{(1)} - \left(\sigma_x^{(1)} + a \frac{d\sigma_x^{(1)}}{dx} \right) = -a \frac{d\sigma_x^{(1)}}{dx} = \\ &= -a \left(\frac{\partial}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} \right) \sigma_x^{(1)}.\end{aligned}\quad (8.12.a)$$

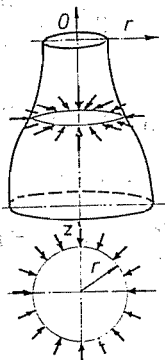
па се, с обзиром на (8.12.f), добијају компонентни напони

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{F' a}{4 \pi r^2} [(1 - \mu) - 4 \cos^2 \varphi + 2(1 + \mu) \sin^2 2 \varphi]; \\ \sigma_y &= \frac{F' a}{4 \pi r^2} [(1 - \mu) + 4 \mu \sin^2 \varphi - 2(1 + \mu) \sin^2 2 \varphi]; \\ \tau_{xy} &= \frac{F' a}{4 \pi r^2} [(1 + 3 \mu) - 4(1 + \mu) \cos^2 \varphi] \sin 2 \varphi.\end{aligned}\quad (8.13.b)$$

Ови напони врло брзо опадају уколико r расте, па се могу занемарити када је $r \gg a$. Овим се потврђује Saint-Venant-ов принцип (члан 4.7), јер су силе F' и $-F'$ супротне силе које су уравнотежене са одговарајућим унутрашњим силама (8.12.e), „па су најрезања у околини најблжих тачака (O и O_1) локална и најло опадају удаљавањем од места додавања супротивних сила“.



Слика 8.8. — Локално напрезање



Слика 8.9. — Обртно тело изложено оптерећењу симетричним у односу на обртну осу

8.5. Осносиметрични проблем обртног тела. — Чест је случај у пракси да је обртно тело изложено дејству симетричног оптерећења у односу на његову осу обртања (на пример, кружни шупљи ваљак изложен дејству притиска у равни управној на осу, оптерећење кружног диска који се обрће константном угаоном брзином, итд.). Нека је (ротационо) тело постало обртањем око Oz -осе (слика 8.9.a). Као координатни систем узмеће се по-

ларно-цилиндрички систем. Како оптерећење дејствује у равни управној на Oz -осу, симетрично у односу на осу, то су и деформације симетричне у односу на исту осу, па не зависе од поларног угла (φ). Из симетрије оптерећења следи да су компоненте тангенцијалног напона у смеру циркуларном једнаке нули, $\tau_{rc} = \tau_{zc} = 0$. Тада из Beltrami-јевих једначина, пошто не дејствују запреминске силе, или су константне, (4.86) следе релације:

$$\Delta(\sigma_r + \sigma_c + \sigma_z) + \frac{1}{1+\mu} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial z^2} \right) = \frac{2+\mu}{1+\mu} \Delta \mathcal{N}_1 = 0;$$

$$\Delta \tau_{rz} - \frac{\tau_{rz}}{r^2} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial r \partial z} = 0, \quad (8.14.a)$$

па је први скалар тензора напона хармонијска функција. Према (3.13), с обзиром на (4.81), биће

$$\varepsilon_v = \varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_c + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1-2\mu}{E} \mathcal{N}_1; \quad \Delta \varepsilon = 0. \quad (8.14.b)$$

па је запреминска дилатација такође хармонијска функција. Услови компатбилности деформација (4.87) сада биће

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_c}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\varepsilon_r - 2\varepsilon_c) = 0; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{rz}}{\partial r \partial z};$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_c}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial z}; \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_c}{\partial r \partial z} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_r - \varepsilon_c) = 0. \quad (8.15.b)$$

Стога се може увести функција $\Phi(r, z)$ таква да су напони

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right); \quad \sigma_c = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right);$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2-\mu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]; \quad \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-\mu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]. \quad (8.16)$$

Ове релације идентички задовољавају Navier-ову једначину (4.80)

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{z} (\sigma_r - \sigma_c) + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} [\Delta \Phi] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r \partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] \equiv 0,$$

а из треће следи да функција напона мора бити бихармонијска функција

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = (1-\mu) \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Delta \Phi = 0$$

те се, с обзиром на (4.83), бити

$$\Delta \Delta \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (8.17.a)$$

Релације (8.16) морају задовољити и услове компатбилности.

На пример, за први услов биће:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial r^2} [\sigma_c - \mu (\sigma_r + \sigma_z)] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\sigma_r - \mu (\sigma_c + \sigma_z)] + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\sigma_c - \mu (\sigma_r + \sigma_z)] = \\ & = \frac{\partial^3}{\partial r^2 \partial z} \left[-\frac{(1+\mu)}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] + \frac{1+\mu}{r} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^3 \partial z} - 2 \frac{(1+\mu)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] = \\ & = \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{2}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} \right] - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right] = 0. \end{aligned}$$

Развијени облик једначине (8.17.a) је

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r \partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0, \quad (8.17.b)$$

и има много решења од којих су нека:

$$\Phi = (A + Bz + Cz^2 + Dz^3) \ln r; \quad \Phi = Az + Br^2 + Cz^2 + Dr^2z + Kz^3; \quad (8.17.c)$$

$$\Phi = C(r^2 + z^2)^n; \quad n = -\frac{1}{2}; \quad 1; \quad \frac{1}{2}; \quad \Phi = C(r^2 + z^2)^m z; \quad m = -\frac{3}{2}; \quad -\frac{1}{2}; \quad 1;$$

$$\Phi = C[z^2(r^2 + z^2)^{-5/2} - (r^2 + z^2)^{-3/2} / 3]; \quad \Phi = C[3r^4 - 8z^4];$$

$$\Phi = C[3r^2 - 2z^2]z^2; \quad \Phi = C(r^2 - 4z^2)r^2; \quad \Phi = Cz \ln \left[\frac{(\sqrt{r^2 - z^2} - z)}{(\sqrt{r^2 + z^2} + z)} \right].$$

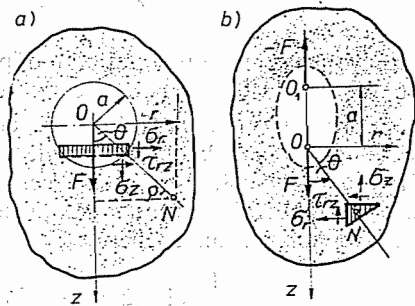
Пошто је, према (8.14.b), $\Delta \varepsilon = 0$ то из Ламе-ових једначина (8.19) следе ове релације за компонентна померања:

$$\Delta \Delta u - \Delta (ur^2) = 0; \quad \Delta \Delta w = 0. \quad (8.18.d)$$

8.6. Еластично бескрајно тело. Kelvin-ов проблем.* — Аналогно еластичној бескрајној равни (члан 8.3) може се посматрати и бескрајно еластично тело оптерећено у тачки O (координатном почетку триедра $Orcz$) концентрисаном силом F (слика 8.10.a). Функцију напона претпоставимо, према (8.17.c), у најпростијем облику

$$\Phi = C(r^2 + z^2)^{1/2} = C\rho; \quad \rho^2 = r^2 + z^2, \quad (8.18.a)$$

где је C константа. Напоне у некој тачки N тела одредићемо по обрасцима (8.16), па су



Слика 8.10. — Kelvin-ов проблем

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{Cz}{\rho^3} \left[(1 - 2\mu) - 3 \left(\frac{r}{\rho} \right)^2 \right]; & \sigma_c &= C(1 - 2\mu) \frac{z}{\rho^3}; & \rho^2 &= r^2 + z^2; \\ \sigma_z &= -\frac{Cz}{\rho^3} \left[(1 - 2\mu) + 3 \left(\frac{z}{\rho} \right)^2 \right]; & \tau_{rz} &= -\frac{Cr}{\rho^3} \left[(1 - 2\mu) + 3 \left(\frac{z}{\rho} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (8.18.b)$$

* Lord Kelvin, Cambridge and Dublin Math. J., (1848).

Из ових образаца се види да се приближавањем нападној тачки силе, то јест координатном почетку O , напони много повећавају и у самој тачки (O) имају бескрајне вредности. Због тога посматрајмо једну малу сферу (лошту) око почетка O , полупречника a , онда се силе које дејствују на њу морају редуковати на силу F . На сферном појасу површине $dS = 2\pi ra d\theta$ дејствују површинске силе. Због симетрије оптерећења радијалне силе се поништавају па дејствују само површинске аксијалне силе

$$(\tau_{rz} \ 0 \ \sigma_z) \begin{Bmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{Bmatrix} = \tau_{rz} \sin \theta + \sigma_z \cos \theta = \frac{1}{a} (\tau_{rz} r + \sigma_z z) = Z_n' = \frac{C}{az} \left[(1-2\mu) + 3 \frac{z^2}{a^2} \right];$$

па је равнотежни услов

$$2 \int_0^{\pi/2} Z_n' 2\pi ra d\theta = 4\pi C \int_0^{\pi/2} [(1-2\mu) + 3 \cos^2 \theta] \sin \theta d\theta = 8\pi C(1-\mu) = F, \quad (8.18.c)$$

то је константа

$$C = F/8\pi(1-\mu), \quad (8.18.d)$$

па компонентни напони имају вредност:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{F}{8\pi(1-\mu)} \frac{z}{\rho^3} \left[(1-2\mu) - 3 \left(\frac{r}{\rho} \right)^2 \right]; & \sigma_c &= \frac{1-2\mu}{1-\mu} \frac{F}{8\pi} \frac{z}{\rho^3}; & \rho^2 &= r^2 + z^2; \\ \sigma_z &= \frac{F}{8\pi(1-\mu)} \frac{z}{\rho^3} \left[(1-2\mu) + 3 \left(\frac{z}{\rho} \right)^2 \right]; \\ \tau_{rz} &= - \frac{F}{8\pi(1-\mu)} \frac{r}{\rho^3} \left[(1-2\mu) + 3 \left(\frac{z}{\rho} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (8.18.e)$$

У координатној хоризонталној равни ($z=0$) напони имају вредности:

$$z=0; \quad \sigma_r = \sigma_c = \sigma_z = 0; \quad \tau_{rz} = - \frac{(1-2\mu)}{(1-\mu)} \cdot \frac{F}{8\pi r^2}, \quad (8.18.f)$$

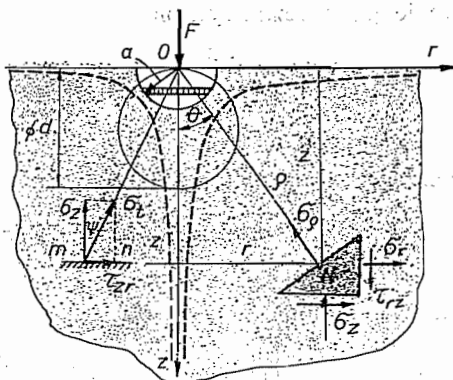
те су тангенцијални напони обрнуто сразмерни квадрату растојања тачке те равни ($z=0$) од нападне тачке силе (O).

Као и у *члану 8.4.* може се потврдити Saint-Venant-ов *принцип*. Нека у тачки O_1 на Oz -оси дејствује и супротна сила $-F$ на врло малом растојању a (слика 8.10.b), може се, као и у (8.13.a), ставити да је напон једнак прираштају напона, на пример, $-a d\sigma_r/dz$, те су компонентни напони за овај случај оптерећења:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= - \frac{A}{\rho^3} \left\{ (1-2\mu) \left[1 - 3 \left(\frac{z}{\rho} \right)^2 \right] - 3 \left(\frac{r}{\rho} \right)^2 + 15 \left(\frac{r}{\rho} \right)^2 \left(\frac{z}{\rho} \right)^2 \right\}; \\ \sigma_c &= - \frac{A(1-2\mu)}{\rho^3} \left[1 - 3 \left(\frac{z}{\rho} \right)^2 \right]; & A &= \frac{Fa}{8\pi(1-\mu)}; \\ \sigma_z &= \frac{A}{\rho^3} \left\{ (1-2\mu) \left[1 - 3 \left(\frac{z}{\rho} \right)^2 \right] + 9 \left(\frac{z}{\rho} \right)^2 - 15 \left(\frac{z}{\rho} \right)^3 \right\}; \\ \tau_{rz} &= \frac{3Ar}{\rho^4} \left[(1+2\mu) \left(\frac{z}{\rho} \right) - 5 \left(\frac{z}{\rho} \right)^3 \right]. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Ови напони брзо опадају уколико се посматрана тачка N удаљава од нападне тачке силе F , па је то напрезање локално, те се тиме потврђује Saint-Venant-ов принцип (члан 4.7).

8.7. Boussinesq-ов проблем. — Аналогно Flamant-овом проблему (члан 8.1) J. Boussinesq*, Saint-Venant-ов ученик и сарадник, решио је проблем расподеле напона услед концентрисане силе која дејствује у тачки равни која ограничава полубескрајно еластично тело (полубескрајни еластични просипор). Нека је раван $z=0$ та гранична раван (слика 8.11) и нека сила F дејствује у тачки O коју узимамо за координатни почетак поларно-цилиндричног система. На овој равни ($z=0$) нема ни аксијалних ни тангенцијалних напона, (дакле за $z=0$ су, $\sigma_z=0$ и $\tau_{rz}=0$), а за $z=\infty$ је радијални напон једнак нули, (за $z=\infty$ је $\sigma_r=0$). С обзиром на те граничне услове функција напона (8.17) узеће се као комбинација функција (8-17.с) у облику



Слика 8.11. Boussinesq-ов проблем

$$\Phi = Az \ln r + B(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + Cz \ln \frac{\sqrt{r^2 + z^2} - z}{\sqrt{r^2 + z^2} + z}; \quad \rho^2 = r^2 + z^2. \quad (8.20.a)$$

Унесећи функцију напона у једначине (8.16) добијају се компонентни напони:

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + \frac{Bz}{\rho^3} \left[(1-2\mu) - 3\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 \right] + \frac{2Cz}{\rho r^2} \left[2 + 2(1+\mu)\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 - \left(\frac{z}{\rho}\right)^2 - 3\left(\frac{z}{\rho}\right)^2 \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 \right];$$

$$\sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + B(1-2\mu) \frac{z}{\rho^3} - \frac{2C}{r^2 \rho^2} [(1-2\mu)r^2 + \rho^2];$$

$$\sigma_z = -\frac{Bz}{\rho^3} \left[(1-2\mu) + 3\left(\frac{z}{\rho}\right)^2 \right] - \frac{2Cz}{\rho^3} \left[-2\mu + 3\left(\frac{z}{\rho}\right)^2 \right]; \quad (8.20.b)$$

$$\tau_{rz} = -\frac{Br}{\rho^3} \left[(1-2\mu) + 3\left(\frac{z}{\rho}\right)^2 \right] + \frac{2Cr}{\rho^3} \left[-2\mu + 3\left(\frac{z}{\rho}\right)^2 \right].$$

С обзиром на граничне услове константе су спрегнуте

$$z=0; \quad \sigma_r = \tau_{rz} = 0; \quad z=\infty; \quad \sigma_r = 0; \quad A = -2C = \frac{1-2\mu}{2\mu} B;$$

$$C = -\frac{1-2\mu}{4\mu} B. \quad (8.20.c)$$

* J. Boussinesq, "Application des potentiels, à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques", (књига), Paris, (1885).

За одређивање резултанте узима се да су силе које дејствују по површи полулопте, полупречника a , описане око тачке O , статички еквивалентне нападној сили F , па је аксијална површинска сила

$$Z_n' = \tau_{rz} \sin \theta + \sigma_z \cos \theta = \frac{1}{a} (\tau_{rz} r + \sigma_z z) = \frac{3}{2\mu} B \frac{z^2}{a^4},$$

те је равнотежни услов

$$2\pi \int_0^{\pi/2} Z_n' r a d\theta = \frac{3\pi}{\mu} B \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{\pi}{\mu} B = F.$$

Одатле, с обзиром на (8.20.c), константе су

$$B = \mu F / \pi; \quad A = (1 - 2\mu) F / 2\pi; \quad C = -(1 - 2\mu) F / 4\pi. \quad (8.20.d)$$

Када се ове вредности константи унесу у (8.20.b) добијају се компонентни напони

$$\sigma_r = -\frac{F}{2\pi\rho^2} \left[(1 - 2\mu) \frac{\rho}{\rho + z} - 3 \frac{z}{\rho} \left(\frac{r}{\rho} \right)^2 \right]; \quad \sigma_c = \frac{1 - 2\mu}{2\pi} \frac{F}{\rho^2} \left[\frac{z}{\rho} - \frac{\rho}{\rho + z} \right]; \quad (8.21)$$

$$\sigma_z = -\frac{3F}{2\pi\rho^2} \left(\frac{z}{\rho} \right)^3; \quad \sigma_{rz} = -\frac{3F}{2\pi\rho^2} \frac{r}{\rho} \left(\frac{z}{\rho} \right)^2; \quad \rho^2 = r^2 + z^2.$$

На неком хоризонталном елементу $m-n$ резултујућу напон и његов смер су

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma_z^2 + \tau_{rz}^2} = -\frac{3F}{2\pi\rho^2} \cos^2 \theta; \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{\tau_{rz}}{\sigma_z} = \frac{r}{z} = \operatorname{tg} \theta; \quad \psi = \theta. \quad (8.23.a)$$

па је напон обрнуто сразмеран квадрату растојања од пола O и усмерен је ка полу. Тотални напон за све тачке које леже на сфери, пречнка $d = \rho / \cos \theta$, чија је тангенција на раван $z=0$, раван биће исти:

$$\sigma_t = -3F/2d^2\pi. \quad (8.22.6)$$

С обзиром на компонентне деформације, биће померање

$$u = \varepsilon_c r = r [\sigma_c - \mu (\sigma_r + \sigma_z)] / E,$$

па када се унесу релације (8.20.b) добија се радијално померање

$$u = \frac{F}{4\pi \mathbf{G} \rho} \left[\frac{r}{\rho} \frac{z}{\rho} - (1 - 2\mu) \frac{r}{r+z} \right]; \quad \mathbf{G} = \frac{E}{2(\mu\mu)}; \quad \rho^2 = r^2 + z^2. \quad (8.23.a)$$

Како су

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z = \frac{1}{\varepsilon} [\sigma_z - \mu (\sigma_r + \sigma_c)] = \frac{F}{4\pi \mathbf{G}} \frac{z}{\rho^3} \left[3 \left(\frac{r}{\rho} \right)^2 - (3 - 2\mu) \right];$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau_{rz}}{\mathbf{G}} = \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{F}{4\pi \mathbf{G}} \frac{r}{\rho^3} \left[2(1 - \mu) + 3 \left(\frac{z}{\rho} \right)^2 \right]$$

то се интегралњем добија аксијално померање

$$w = F[2(1 - \mu) + (z/\rho)]^2 / 4\pi G \rho. \quad (8.23.b)$$

Из (8.23.a) следе релације

$$\rho = \infty; \quad u = 0; \quad (1 + \cos \theta) \cos \theta \geq (1 - 2\mu) = \frac{1}{3}; \quad \theta \leq 74^\circ 30'; \quad u \geq 0,$$

па је померање у бесконачној тачки једнако нули. За тачке са углом $\theta < 74^\circ 30'$ померање је позитивно, а за тачке са углом $\theta > 74^\circ 30'$ оно је усмерено ка Oz -оси.

За координатну раван су:

$$z = 0; \quad u = -\frac{1 - 2\mu}{4\pi} \frac{F}{G r}; \quad w = \frac{1 - \mu}{2\pi} \frac{F}{G r} = \frac{(1 - \mu^2)F}{\pi E r}; \quad wr = \frac{(1 - \mu^2)F}{\pi E} = C. \quad (8.24)$$

На контури ($z = 0$) производ wr је константан, па се полупречници повучени из пола O деформишу у хиперболе чије су асимптоте Or и Oz -оса.

У координатном почетку (нападној тачки силе) и померања су као и напони бескрајни, па треба око тачке O описати полусферу врло малог полупречника.

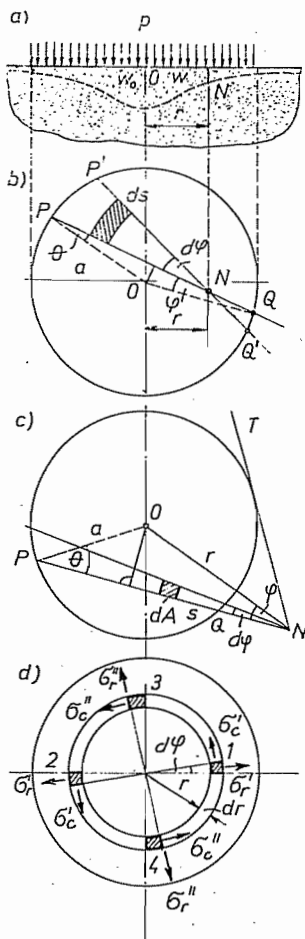
8.8. Специјална оптерећења по контури полубескрајног тела. — Решење Boussinesq-овог проблема може користити и у случајевима контурног оптерећења по једном делу контуре бескрајног тела. Проучићемо неколико специјалних случајева.

8.8.1. Равномерно оптерећење по површини круга — Тотално оптерећење F равномерно је распоређено по површини круга, полупречника a (слика 8.12.a), па је специфично оптерећење по јединици површине круга

$$p = F/a^2 \pi. \quad (8.25.a)$$

Да бисмо одредили угиб неке тачке N контурне равни која се налази у кругу оптерећења, повучимо кроз њу две врло блиске сечице PN и $P'N$ (слике 8.12.b) и елементарну површину $dA = s ds d\varphi$, онда на њу дејствује сила $dF = p dA = ps ds d\varphi$. Према (8.4) угиб тачке N на контурној равни услед елементарне силе dF износи

$$w = \int dw = \frac{1 - \mu^2}{\pi E} \int \int \int \frac{dF}{s} = \frac{1 - \mu^2}{\pi} \frac{p}{E} \int \int \int ds d\varphi. \quad (8.25.b)$$



Слика 8.12. — Специјално оптерећење по контури бескрајног тела — равномерно оптерећење по кругу

Из слике следи однос $a \sin \theta = r \sin \varphi$, па је дужина тетиве

$$\overline{PQ} = 2a \cos \theta = 2a \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = 2\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi} = \int ds,$$

а угао φ варира од 2π , па је угиб

$$w = \frac{4(1-\mu^2)}{\pi E} pr \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{4(1-\mu^2)}{\pi E} pr E \left(\frac{1}{2} \pi, k \right); \quad k = \frac{r}{a} \quad (8.25.c)$$

где је $E(\pi/2, k)$ *попуни елиптички интеграл групе врсте**, модула $k = r/a$.

Максимални угиб је у средишту круга ($r=0$), а за $r=a$, то јест $k=1$, добија се угиб тачке T на контури круга, па су

$$w_{\max} = w_0 = \frac{2(1-\mu^2)}{E} pr = \frac{2(1-\mu^2) F}{\pi E a}; \quad w_k = \frac{4(1-\mu^2)}{\pi E} pr = \frac{4(1-\mu^2) F}{\pi^2 E a}, \quad (8.25.d)$$

Из предњег се види да угиб средишта (тачке O) зависи од полупречника круга, а оба угиба стоје у сталном односу $w_{\max}/w_k = \pi/2 \approx 1,57$.

Ако је тачка N изван контуре круга, (слика 8.12.c) угао варира од O до највеће вредности φ_{\max} која означава угао између тетиве и тангенте (T), а угао θ варира од O до 2π , па је боље узети за променљиву угао θ . Како је $a \sin \theta = r \sin \varphi$, то јд $d\varphi = a \cos \theta d\theta / r \cos \varphi$, па је угиб

$$w = \frac{4(1-\mu^2)}{\pi E} p \int_0^{\pi/2} \frac{a^2 \cos^2 \theta d\theta}{r \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}; \quad k = \frac{a}{r},$$

односно

$$\begin{aligned} w &= \frac{4(1-\mu^2)pr}{\pi E} \left[\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta - (1-k^2) \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \right] = \\ &= \frac{4(1-\mu)pr}{\pi E} [E(k) - (1-k^2)F(k)]. \end{aligned} \quad (8.25.e)$$

Први интеграл је потпуни елиптички интеграл *групе врсте*, а други потпуни елиптички интеграл *прве врсте*; оба су истог модула $k = a/r$.

Да бисмо одредили напоне у некој тачки N на Oz оси посматрајмо прстенасту површину $dA = 2\pi r dr$, (слика 8.12.d), па је сила $dF = p(2\pi r dr)$ а укупни напон износи

$$\sigma_z = \int d\sigma_z = -3pz^3 \int_0^a \frac{r}{\rho^5} dr = -p \left[1 - \left(\frac{z}{R} \right)^3 \right]; \quad R^2 = a^2 + z^2. \quad (8.26.a)$$

За радијални и циркуларни напон посматрајмо елементарне површине $dA = r dr d\varphi$, са оптерећењима $dF = pr dr d\varphi$, и узмимо такве четири површине онда су

$$d\sigma_r = 2d\sigma'_r + 2d\sigma''_r; \quad d\sigma_c + 2d\sigma'_c + 2d\sigma''_c; \quad d\sigma_r = d\sigma_c,$$

* Таблице из отпорности материјала, страна 123.

па се интегралњем, када се унесу изрази (8.21), добија

$$\begin{aligned}\sigma_r = \sigma_c &= \frac{p}{\pi} \int_0^a \int_0^{\pi/2} \left[(1-2\mu) \frac{z}{\rho^3} - \frac{3r^2 z}{\rho^5} \right] r \, dr \, d\varphi = \\ &= -\frac{p}{2} \left[(1+2\mu) - 2(1+\mu) \frac{z}{R} + \left(\frac{z}{R} \right)^3 \right].\end{aligned}\quad (8.26.b)$$

Напони у средишту круга (O) износе:

$$z=0; \sigma_z = -p; \sigma_r = \sigma_c = -(1+2\mu)p/2 = -0,8p; \mu=0,3. \quad (8.26.c)$$

Екстремна вредност полуразлике напона σ_c и σ_z добија се из услова

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} \frac{\sigma_c - \sigma_z}{4} &= \frac{d}{dz} \left\{ \frac{p}{4} \left[(1-2\mu) + 2(1+\mu) \frac{z}{R} - 3 \left(\frac{z}{R} \right)^3 \right] \right\}; \\ \frac{z}{R} &= \frac{1}{3} \sqrt{2(1+\mu)}; \quad \frac{z}{a} = \sqrt{\frac{2(1+\mu)}{7-2\mu}},\end{aligned}$$

па је највићи тангенцијални напон за тачку N на Oz -оси

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= p \left[(1-2\mu) + 4/9(1+\mu) \sqrt{(1+\mu)} \right] / 4 = p/2; \\ z/a &= 0,637; \mu=0,3.\end{aligned}\quad (8.26.d)$$

8.8.2. *Оптерећење круга по полулојши.* — Оптерећена површ је кружна, полупречника a , а притисак на јединицу површине круга је у свакој његовој тачки сразмеран ординати полулоште којој је основа круг, $p=c\eta$, где је c коефицијент пропорционалности, јединице $[\text{kN}/\text{cm}^3]$, (слика 8.13.a). С обзиром на (8.25.b) угиб у тачки N контурне равни у унутрашњости круга, биће

$$w = \frac{1-\mu}{\pi E} \iint p \, ds \, d\varphi. \quad (8.27.a)$$

Када се кроз тачку N повуче произволна тетива PNQ (слика 8.13.b), њена је дужина $\overline{PQ} = 2a \cos \theta = 2a[1 - k^2 \sin^2 \varphi]^{1/2}$, где је $k=r/a$. Израз $\int p \, dr$ представља површину оптерећења изнад сечице PQ . Та површина је полуелипса, полуоса $\overline{PQ}/2$ и $c\overline{PQ}/2$, па се добија

$$A_e = \int p \, ds = \pi [c\overline{PQ}/2] \cdot (\overline{PQ}/2) / 2 = c\pi \overline{PQ}^2 / 8 = c\pi a^2 (1 - k^2 \sin^2 \varphi) / 2.$$

Коефицијент пропорционалности је $c=p/\eta = p_{\max}/a$, па је,

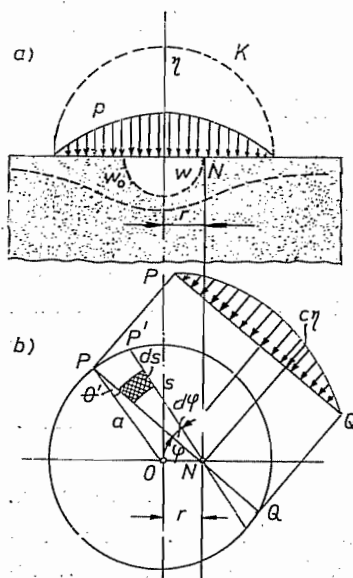
$$\begin{aligned}c = p_{\max}/a; \quad F &= \int_{(A)} \int p \, dA = 4c \int_0^{\pi/2} \int_0^a r \sqrt{a^2 - r^2} \, dr \, d\varphi = \frac{2}{3} \pi ca^3; \\ p_{\max} &= \frac{3F}{2a^2 \pi}.\end{aligned}\quad (8.27.b)$$

Стога је угиб

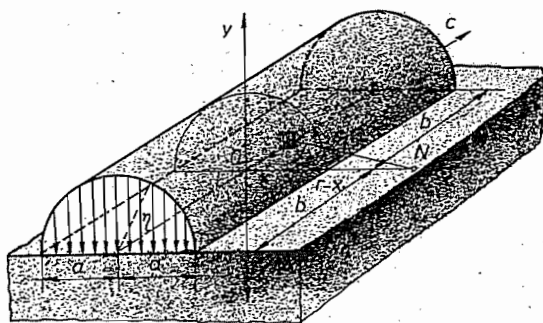
$$w = \frac{1-\mu^2}{E} p_{\max} a \int_0^{\pi/2} (1-k^2 \sin^2 \varphi) d\varphi = \frac{(1-\mu^2)\pi}{4} p_{\max} a (2-k^2) = \frac{3(1-\mu^2)}{8} \frac{F}{Ea} (2-k^2). \quad (8.27.c)$$

Максимални угиб је у средишту круга (O), па је

$$w_{\max} = w_0 = \frac{3(1-\mu^2)}{4} \frac{F}{Ea}; \quad w = w_0 - \frac{3(1-\mu^2)}{8E} \frac{Fr^2}{a^3} = w_0 - \left(\frac{1-\mu^2}{4E} \cdot \frac{\pi p_{\max}}{a} \right) r^2 = w_0 - \lambda r^2; \quad \lambda = 3(1-\mu^2)F/8Ea^3; \quad \lambda/w_0 = 1/2 a^2. \quad (8.27.d)$$



Слика 8.13. — Оптерећење круга по полулопти



Слика 8.14. — Оптерећење правоугаоника по полуцилиндру

Када је $r \gg a$, што је скоро редован случај у пракси, може се сматрати да се контурна равна ($z=0$) деформише у сферну покривину.

8.8.3. Оптерећење правоугаоника по полуцилиндру. — Оптерећена површ је правоугаоник, страница $2a$ и $2b$, а притисак на јединицу површине правоугаоника у свакој његовој тачки сразмеран је ординати полуцилиндра ($p = c\eta$) коме је основа правоугаоник. Угиб тачке N на Ox -оси услед оптерећења $dx dy$ (слика 8.14) износи:

$$w = \frac{1-\mu^2}{\pi E} c \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{(r-x)^2+y^2}} dx dy. \quad (8.28.a)$$

Интеграљењем по y добија се

$$w = 2 \frac{1 - \mu^2}{\pi} \frac{c}{E} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \{ \ln [b + \sqrt{b^2 + (r-x)^2}] - \ln(r-x) \} dx. \quad (8.28.b)$$

Када се претпостави да је $b \gg a$, тада је и $b \gg (r-x)$, па се члан $(r-x)^2$ може занемарити у односу на b^2 . Тако се добија

$$\begin{aligned} w &= 2 \frac{1 - \mu^2}{\pi} \frac{c}{E} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} [|\ln 2b| - \ln(r-x)] dx = \\ &= w_{r'} - \frac{2(1 - \mu^2)}{\pi} \frac{c}{E} \int_{-a}^a \ln(r-x) \sqrt{a^2 - x^2} dx, \end{aligned}$$

где први члан представља translацију крутог тела па не утиче на деформације, те се може занемарити. Пошто се за $x=r$ добија $\ln 0$, стога се узима извод

$$\frac{dw}{dr} = -2 \frac{(1 - \mu^2)}{\pi} \frac{c}{E} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{r-x} dx = -4 \frac{(1 - \mu^2) cr}{\pi E} \int_0^a \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{r^2 - x^2} dx. \quad (8.28.c)$$

Сменама $x = a \sin \varphi$; $r = a \sin \alpha$, добија се

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{r^2 - x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi}{\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Пошто је $x=r$ сингуларна тачка, то је: $\varphi = \alpha$, па се други интеграл мора поделити на два дела са границама од 0 до $\alpha - \varepsilon$ и од $\alpha + \varepsilon$ до $\pi/2$, где је ε мали број, те се добија да други интеграл тежи нули када $\varepsilon \rightarrow 0$. Заиста биће

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi} d\varphi &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi (tg^2 \alpha - tg^2 \varphi)} = \int_0^{\alpha - \varepsilon} \frac{d(tg \varphi)}{tg^2 \alpha - tg^2 \varphi} + \int_{\alpha + \varepsilon}^{\pi/2} \frac{d(tg \varphi)}{tg^2 \alpha - tg^2 \varphi} \\ &= \frac{1}{2 tg \alpha} \left(\left| \ln \frac{tg \alpha + tg \varphi}{tg \alpha - tg \varphi} \right|_0^{\alpha - \varepsilon} - \left| \ln \frac{tg \varphi - tg \alpha}{tg \varphi + tg \alpha} \right|_{\alpha + \varepsilon}^{\pi/2} \right) = \frac{1}{2 tg \alpha} \left[\ln \frac{\sin(2\alpha - \varepsilon)}{\sin \varepsilon} - \ln \frac{\sin(2\alpha + \varepsilon)}{\sin \varepsilon} \right] = \\ &= \frac{1}{2 tg \alpha} \left[\ln \frac{\sin(2\alpha - \varepsilon)}{\sin(2\alpha + \varepsilon)} \right]_{\varepsilon \rightarrow 0} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

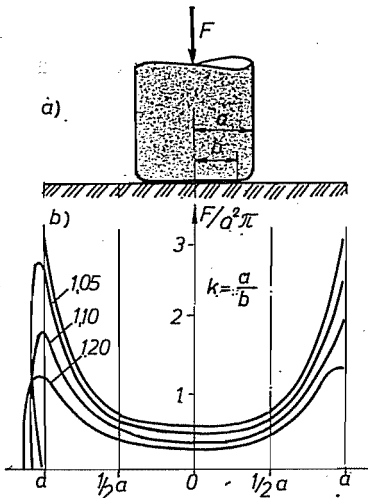
Према томе биће угиб

$$\frac{dw}{dr} = -2(1-\mu^2)\frac{cr}{E}; \quad w = -\frac{1-\mu^2}{E}cr^2 + C + w_{tr}; \quad C = w_0. \quad (8.28.d)$$

Пошто се $c = p/\eta = p_{\max}/a$, то је

$$q = \frac{F}{2b} = \int_{-a}^a p \, dx = 2 \frac{p_{\max}}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = 2 \frac{p_{\max}}{a} \left[\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right] = \frac{p_{\max} a \pi}{2}; \quad p_{\max} = \frac{2q}{a\pi}. \quad (8.28.e)$$

8.8.4. Цилиндрични пробојац. — Као и код бескрајне полуравни (слика 8.3.d) може се и код бескрајног полупростора када је позната једначина промене угиба $w = w(r)$ одредити оптерећење p . Када крути цилиндрични пробојац дејствује на граничну равну ($z = 0$) бескрајног тела (слика 8.15.a) померања свих његових тачака су константна, али је распоред напона променљив и може се одредити из једначине (8.25.b)



Слика 8.15. — Цилиндрични пробојац

$$w = \frac{1-\mu^2}{\pi E} \iint p \, ds \, d\varphi = \text{const}. \quad (8.29.a)$$

Једначина је интегрална, а њено решење је дао Boussinesq у облику

$$p = F/2\pi a \sqrt{a^2 - r^2} \quad (8.29.b)$$

где је a полупречник пробојца, F укупно оптерећење пробојца а r је растојање од средишта круга на који дејствује пробојац. Оптерећење је, дакле, променљиво, најмање је за $r = 0$, то јест у центру круга, и износи

$$p_{\min} = F/2 a^2 \pi = (F/2)/a^2 \pi, \quad (8.29.c)$$

па је половина вредности за оптерећење по кругу (8.25.a). Стога је према (8.25.d) померање (угиб)

$$w = (1-\mu^2)F/2 Ea.$$

Овај угиб се мало разликује од средњег угиба за случај равномерног оптерећења по кругу, јер је

$$\begin{aligned} w_{sr} &= \frac{2}{a^2 \pi} \int_0^a w \cdot 2r \pi \, dr = \frac{16\pi(1-\mu^2)}{a^2 \pi} \frac{q}{\pi E} \int_0^a r^2 \, dr = \\ &= \frac{16}{3\pi^2} \frac{(1-\mu^2)F}{aE} = 1,08 \frac{(1-\mu^2)F}{2Ea}. \end{aligned} \quad (8.29.d)$$

З1 $r=a$, то јест на ободу пробојца, напон је бескрајно велики. Да би се ово избегло, врши се *заобљавање* крајњих изводница пробојца. Резултати И. Я. Шгаерман-а показани су на слици 8.15.b у зависности од односа полупречника a и b пробојца.

8.9. Притисак круге на еластични полупростор. — Кугла, полупречника R , додирује контурну раван ($z=0$) у тачки O . Нека блиска тачка P на кугли има вертикално растојање (слика 8.16.a)

$$z = R(1 - \cos \varphi) = 2R \sin^2 \varphi/2 = 2R \sin^2 \theta.$$

Када се стави $\sin \theta = \operatorname{tg} \theta = z/r$ онда се добија приближна вредност

$$z = r^2/2R, \tag{8.30.a}$$

пошто је $r \ll R$.

Када на куглу дејствује аксијални сила F , настаће деформације равни ($z=0$); Које су *симетричне* у односу на Oz -осу, па је пројекција *гогурне* (контактне) површи у правцу Oz -осе *круи*, полупречника a (слика 8.16.b). Да би се одредио угиб неке тачке N у области контактне површине примениће се исти поступак као и у *чл. 8.8.1*, па се, према (8.25.b), добија

$$dF = p dA = p s ds d\varphi; w = \frac{1-\mu^2}{\pi E} \iint p ds d\varphi.$$

У овом су изразу непознате величине p и w , али се може узети

$$w = w_0 - z = w_0 - (r^2/2R) = w_0 - \lambda_1 r^2. \tag{8.30.c}$$

где је w_0 угиб средишта круга у тачки додира (O), а z првобитно вертикално растојање тачке P од контурне равни („зазор“). Овим се проблем свео на оптерећење круга *иришиском* по *полулоуиши* (члан 8.8.2.) само је овде коефицијент $\lambda = 1/2R$. Стога се добија:

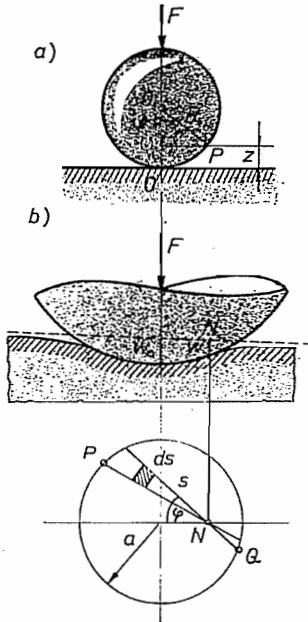
$$F = \frac{2}{3} a^2 \pi p_{\max}; p_{\max} = p_0; w_0 = \frac{(1-\mu^2)\pi}{2E} p_0 a;$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2R} = \frac{(1-\mu^2)\pi}{4E} \frac{p_0}{a}; \tag{8.31.a}$$

односно

$$p_0 = \frac{3F}{2a^2\pi}; w_0 = \frac{3}{4} \frac{(1-\mu^2)}{E} \frac{F}{a}; \lambda_1 = \frac{3}{8} \frac{1-\mu^2}{Ea^3} F. \tag{3.31.b}$$

8.10. Узајамни притисак двају еластичних тела (Hertz-ов проблем). — Претходна излагања искористио је немачки физичар *Hertz* па је 1881. године решио проблем узајамног притиска двају еластичних тела* (сферног, цилиндричног облика односно да су им површине другог реда). С обзи-

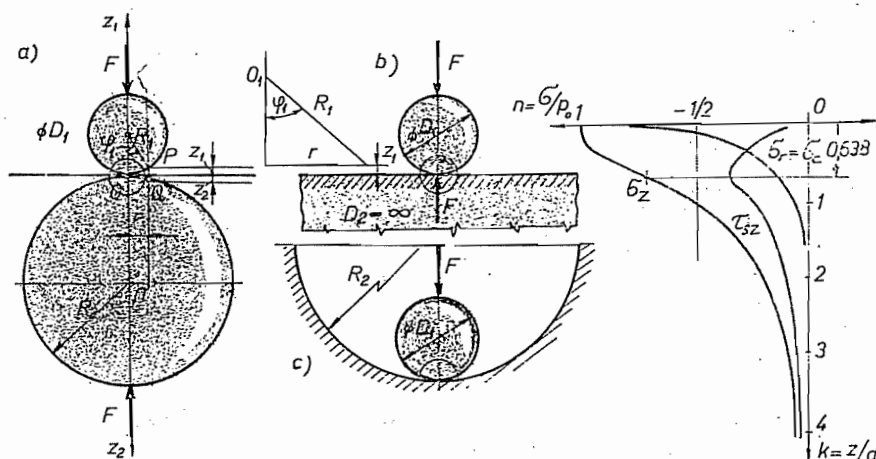


Слика 8.16. — Притисак круге на еластични полупростор

* H. Hertz, J. Math. (Crelle. J., t. 92. (1881) Cessammelte Werke. B. I. (1895)

ром на важност ових резултата у пракси**, детаљније ћемо проучити сва три случаја.

8.10.1. *Узајамни притисак двеју еластичних кугли.* — Две еластичне кугле полупречника R_1 и R_2 , од различитог материјала, модула еластичности E_1 и E_2 , Poisson-ових коефицијената μ_1 и μ_2 , додирују се у тачки O и имају заједничку тангенцијалну раван ($z=0$) која је контурна раван. (слика 8.17.a). Обе кугле имају заједничку осу Oz -осу. Нека права пара-



Слика 8.17. — Узајамни притисак двеју еластичних кугли

лелна Oz -оси на малом одстојању r од ње продире кугле у тачкама P и O . Растојање тачке P од тангенцијалне равни ($z=0$) је

$$\begin{aligned} z_1 &= R_1 (1 - \cos \varphi_1) = R_1 [1 - \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_1}] = R_1 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{R_1^2}} \right] = \\ &= R_1 \left[1 - \left(1 - \frac{r^2}{2 R_1^2} \right) \right] = \frac{r^2}{2 R_1}, \end{aligned}$$

јер је $r \gg R_1$. Аналогно томе добија се и растојање z_2 тачке Q од равни, па су

$$z_1 = r^2 / 2 R_1; \quad z_2 = r^2 / 2 R_2; \quad z_1 + z_2 = r^2 [(R_1 + R_2) / 2 R_1 R_2]. \quad (8.32.a)$$

Када се обе кугле притисну дуж Oz -осе силама F , околина додирне тачке O се деформише, па се међусобни додир проширује на малу површ — *додирну (контактну) површ*. Пошто су деформације симетричне у односу на Oz -осу, то је пројекција додирне површине на ту осу круг, малог полупречника a . Две тачке на Oz -оси обе кугле (на пример, средишта O_1 и O_2) које су изван домаћаја локалних деформација услед узајамног притиска зближиће се за малу дужину $\delta_0 = \Delta w_0$. Тачке P и Q кугли које су у околини зоне локалних деформација зближиће се за мању дужину, јер имају и померања (угибе) који су супротног знака, па је $\delta_1 = \delta - (w_1 + w_2)$.

** Отпорност материјала, члан 13.9.

Када се притисак F повећа толико да тачке P и Q буду у додирној површи, њихово растојање смањи се до нуле, па је

$$(z_1 + z_2) - [\delta_0 - (w_1 + w_2)] = 0; \quad w_1 + w_2 = \delta_0 - \lambda r^2; \quad (8.32.b)$$

$$\lambda = (R_1 + R_2) (2 R_1 R_2). \quad (8.32.6)$$

Из овога следи да је оптерећење додирне површи — круга полупречника a , по *полулојсти* (члан 8.8.2), па је, према (8.27.c):

$$\delta_0 = \frac{3F}{4a} (k_1 + k_2); \quad w_1 + w_2 = \frac{3F}{8a} (k_1 + k_2) \left[2 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right];$$

$$\frac{\lambda}{\delta_0} = \frac{1}{2a^2}; \quad ki = \frac{1 - \mu_i^2}{E_i}; \quad i = 1; 2. \quad (8.32.c)$$

Уносећи релацију $\lambda/\delta_0 = 1/2a^2$ у први израз и вредност за $\lambda = (R_1 + R_2)/2 R_1 R_2 = (D_1 + D_2)/D_1 D_2$ добијају се следеће релације

$$a = \sqrt[3]{\frac{3F}{8\lambda} (k_1 + k_2)} = 0,721 \sqrt[3]{\frac{F(k_1 + k_2) D_1 D_2}{D_1 + D_2}};$$

$$\delta_0 = 1,040 \sqrt[3]{F^2 (k_1 + k_2)^2 \lambda}; \quad (8.33)$$

$$p_0 = 0,918 \sqrt[3]{\frac{F\lambda^2}{(k_1 + k_2)^2}}.$$

За *челичне* кугле добија се:

$$E_1 = E_2 = E; \quad \mu = 0,3; \quad k_1 + k_2 = 1,4 E; \quad (8.34)$$

$$a = 0,881 \sqrt[3]{F/E\lambda}; \quad w_0 = 1,550 \sqrt[3]{F^2 \lambda/E^2}; \quad p_0 = 0,616 \sqrt[3]{FE^2 \lambda}$$

За случај притиска *еластичне* куле на *еластичну* бескрајну *полураван* (слика 8.17.b) добијају се резултати

$$D_2 = \infty; \quad D_1 = D; \quad \lambda = 1/2 R_1 = 1/D; \quad a = 0,721 \sqrt[3]{FD (k_1 + k_2)};$$

$$w_0 = 1,040 \sqrt[3]{F^2 (k_1 + k_2)^2 / D}; \quad p_0 = 0,918 \sqrt[3]{\frac{F}{D^2 (k_1 + k_2)^2}}, \quad (8.35.a)$$

па је

$$E_1 = E_2 = E; \quad \mu = 0,3; \quad a = 0,881 \sqrt[3]{FD/E}; \quad w_0 = 1,550 \sqrt[3]{F^2/E^2 D};$$

$$p_0 = 0,616 \sqrt[3]{FE^2/D^2}. \quad (8.35.b)$$

Када се узме R_2 са негативним предзнаком добијају се резултати за *притисак* куле у *сферном лежишту* (слика 8.17.c):

$$a = 0,721 \sqrt[3]{\frac{F(k_1 + k_2)}{\nu}}; \quad w_0 = 1,040 \sqrt[3]{F^2 (k_1 + k_2)^2 \nu};$$

$$p_0 = 0,918 \sqrt[3]{\frac{F\nu^2}{(k_1 + k_2)^2}}; \quad \nu = \frac{D_2 - D_1}{D_1 D_2} = \frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2}; \quad (8.36.a)$$

односно

$$E_1 = E_2 = E; \quad \mu = 0,3; \quad a = 0,881 \sqrt[3]{F/E\nu};$$

$$w_0 = 1,550 \sqrt[3]{F^2 \nu/E^2}; \quad p_0 = 0,616 \sqrt[3]{FE^2 \nu^2} \quad (8.36.b)$$

За $\mu=0,3$; $E_i=E$; према чл. 8.8., напони за *шачке* на Oz -оси, пошто је $r=0$ па је $p=p_{\max}=p_0$, биће:

$$\sigma_z = -p \left[1 - \left(\frac{z}{R} \right)^3 \right] = -p_0 \left[1 - \frac{k^3}{(1+k^2)^{3/2}} \right];$$

$$R^2 = a^2 + z^2 = a^2 (1+k^2); \quad k = \frac{z}{a}; \quad (8.37)$$

$$\sigma_r = \sigma_c = -\frac{p_0}{2} \left[1,6 + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \left(-2,6 + \frac{k^2}{1+k^2} \right) \right];$$

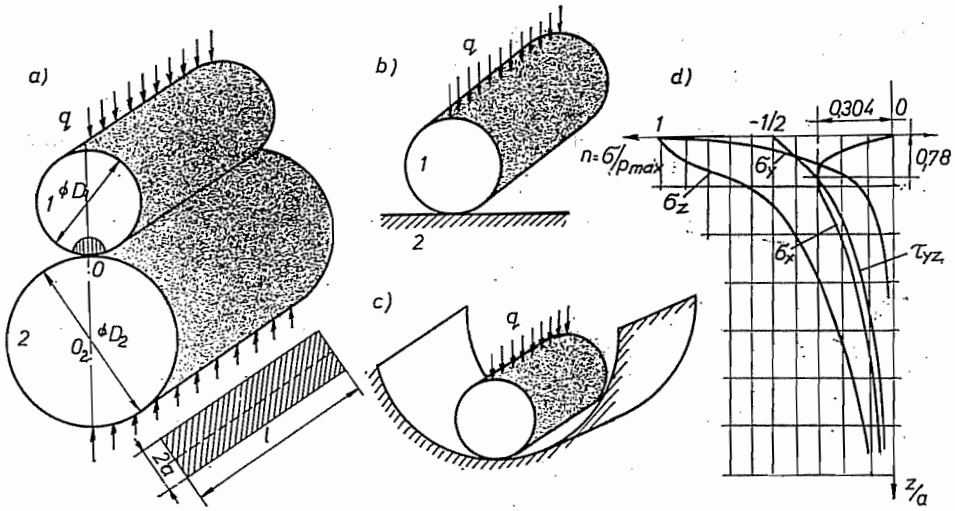
$$\tau_{rz} = \frac{1}{2} (\sigma_c - \sigma_z); \quad \tau_{\max} = p_0/3. \quad \text{За } k=0,638,$$

па су приказани на дијаграму* (слика 8.17.d) за односе $n = \sigma/p_0$; $k = z/a$.

8.10.2. Узајамни притисак двају еластичних ваљака. — Додирна површина двају еластичних ваљака паралелних оса јесте узани *правоугаоник*, страница $2a$ и l (слика 8.18.a) па се могу применити резултати из чл. 8.8.3. Према (8.32.b), (8.28.d) и (8.28.e) добија се

$$\frac{dw}{dr} = \frac{d}{dr} (w_1 + w_2) = -2(k_1 + k_2)cr = -2\lambda r;$$

$$p_{\max} = 2q/\pi a; \quad \lambda = (D_1 + D_2)/D_1 D_2.$$



Слика 8.18. — Узајамни притисак двају еластичних ваљака

* А. Н. Динник, Бил. Полит. Киев, (1909).

где је q специфично оптерећење по јединици дужине цилиндра, $q = F/l$. Из ових релација добија се половина основице правоугаоника и највећи притисак*

$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi} q \frac{(k_1 + k_2)}{\lambda}}; \lambda = \frac{D_1 + D_2}{D_1 D_2};$$

$$p_{\max} = p_0 = \frac{a \lambda}{k_1 + k_2} = \sqrt{\frac{2}{\pi} q \frac{\lambda}{k_1 + k_2}}. \quad (8.38.a)$$

За челичне ваљке биће;

$$E_1 = E_2 = E; \quad a = 1,075 \sqrt{q/E\lambda}; \quad p_{\max} = 0,591 \sqrt{q\lambda E}; \quad (8.38.b)$$

$$\mu = 0,3; \quad \tau_{\max} = 0,304 p_{\max} \quad \text{за } z/a = 0,78.$$

За случај притиска ваљка на раван (слика 8.18.b), биће:

$$D_2 = \infty; \quad D_1 = D; \quad a = 0,8 \sqrt{qD(k_1 + k_2)}. \quad (8.38.c)$$

За ваљак у цилиндричном лежишту слика (слика 8.18.c) биће:

$$-D_2; \quad v = (D_2 - D_1)/D_1 D_2; \quad a = 0,80 \sqrt{q(k_1 + k_2)/v};$$

$$p_{\max} = 0,798 \sqrt{qv/(k_1 + k_2)}. \quad (8.38.d)$$

За случај једнаких челичних ваљака ($\mu = 0,3$) дијаграми напона приказани су на слици 8.18.d; $\tau_{\max} = 0,304 p_0$ за $z/a = 0,78$.

8.10.3 Општи случај. — Ако су додирна тела површи *груої рога* са заједничком тангенцијалном равни Oxy , онда су за случај да су осе Ox и Oy главне осе површи, (слика 8.19), његове једначине

$$z_1 = A_1 x^2 + B_1 y^2; \quad z_2 = A_2 x^2 + B_2 y^2, \quad (8.39.a)$$

па је

$$z_1 + z_2 = Ax^2 + By^2 \quad (8.39.b)$$

Константе A и B зависе од главних кривина површи, $K_i = 1/R_i$, $K_i' = 1/R_i'$, $i = 1, 2$, где су R_i и R_i' главни полупречници кривина. Оне су *средње кривине*, па се могу, према Еулер-овој теореме, овако одредити:

$$A = (K_1 + K_1')/2; \quad B = (K_2 + K_2')/2;$$

$$2(A + B) = [(K_1 + K_1') + (K_2 + K_2')]; \quad (8.39.c)$$

$$4(B - A)^2 = (K_1 - K_1')^2 + (K_2 - K_2')^2 + 2(K_1 - K_1')(K_2 - K_2') \cos 2\varphi.$$

Пошто су средње кривине истог знака то све тачке са једнаким растојањем $z_1 + z_2$ леже на елипси. Ово значи да када се тела притисну силама у правцу нормале на заједничку тангенцијалну раван у тачки O додирна површ је елипса.

* Таблице из Отпорности материјала, гл. X, стр. 102.

** Н. М. Беляев, Петроград, (1917).

па се функција напона може узети у облику

$$\Phi(r, z) = f(r) [\cos kz + \sin kz], \quad (8.44)$$

те ће бити

$$\Delta\Phi = (f'' + r^{-1}f' - k^2f)\theta = 0; \quad f'' + r^{-1}f' - k^2f = 0; \quad (8.45.a)$$

$$\Delta\Delta\Phi = 0; \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - k^2\right)(f'' + \frac{1}{r}f' - k^2f) = 0. \quad (8.45.b)$$

Прва једначина сменом $x = ikr$, пошто је $dx/dr = ik$, своди се на једначину

$$f'' + r^{-1}f' - k^2f = 0; \quad f = f(r); \quad F'' + x^{-1}F' + F = 0 \quad (8.46.a)$$

а друга на једначину

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + 1\right)(F'' + \frac{1}{x}F' + F) = 0. \quad (8.46.b)$$

Прва једначина је Bessel-ова *диференцијална једначина нултог реда**. Њено опште је решење облика

$$F(x) = C_1 F_1 + C_2 F_2, \quad (8.47.a)$$

где су F_1 и F_2 партикуларна решења а C_i произвољне константе. Решење ћемо претпоставити у облику реда

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \dots + A_n x^n + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} A_n x^n.$$

Диференцирањем се добија

$$F'(x) = A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + 4 A_4 x^3 + 5 A_5 x^4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n x^{n-1};$$

$$F''(x) = 2 A_2 + 6 A_3 x + 12 A_4 x^2 + 20 A_5 x^3 + 30 A_6 x^4 + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) A_n x^{n-2}$$

Константе A_i морају се тако одредити да задовољавају диференцијалну једначину (8.46.a). Када се предњи изводи ставе у ту једначину, а затим после свођења сличних чланова, изједначе са нулом коефицијенти уз исте експоненте од x , добиће се сви коефицијенти изражени помоћу A_0 , па су

$$A_{2n-1} = 0; \quad A_2 = -\frac{1}{4} A_0 = -\frac{1}{2^2} A_0; \quad A_4 = -\frac{1}{4^2} A_2 = \frac{1}{2^2 4^2} A_0; \quad A_6 = \frac{-1}{2^2 4^2 6^2} A_0; \dots$$

па је решење

$$F = A_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = A_0 J_0(x). \quad (8.47.b)$$

где је

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{6^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \quad (8.47.c)$$

Bessel-ова (или цилиндричка) функција прве врсте, нултог реда (индекса).

* Теорија осцилација, члан 19.4.

Да би се нашло и друго решење које је независно од $J_0(x)$, а како је једначина линеарна, познато је једно партикуларно решење, то јој се ред може снизити сменом

$$F(x) = u(x) \cdot J_0(x), \quad (8.48.a)$$

где је $u(x)$ неодређена функција од x , диференцијална једначина (8.46.a) постаје

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left(2 \frac{J_0'}{J_0} + \frac{1}{x}\right) \frac{du}{dx} = p' + \left(2 \frac{J_0'}{J_0} + \frac{1}{x}\right) p = 0; \\ J_0'(x) = \frac{dJ_0(x)}{dx}; \quad p = u', \quad (8.48.b)$$

те раздваја променљиве, па се добија опште решење

$$\frac{p'}{p} = \left(\frac{1}{x} + 2 \frac{J_0'}{J_0}\right); \quad p = \frac{B}{x [J_0(x)]^2}; \quad u = A + B \int \frac{dx}{x [J_0(x)]^2}. \quad (8.48.c)$$

Други члан представља практикуларно решење које се не може добити развијањем у Маслаугин-ов ред. Како је $x=0$ сингуларитет, то када $x \rightarrow 0$, $J_0(x) \rightarrow 1$, па горњи интеграл тежи вредности

$$x \rightarrow 0; \quad \int \frac{dx}{x [J_0(x)]^2} \rightarrow \int \frac{dx}{x} = \ln x - \ln a, \quad (8.48.d)$$

те се решење може представити у овом облику

$$F = J_0(x) \ln x + (B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \dots + \dots). \quad (8.48.e)$$

Коефицијенти B_n могу се одредити на исти начин као и коефицијенти A_n , али се уводи Bessel-ова функција групе *врше нултої реда*

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ J_0(x) \left[\ln \frac{x}{2} + C \right] + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 - \dots \right\}, \quad (8.48.f)$$

где је C Euler-констанца* $C = 0,577216\dots$, па је опште решење диференцијалне једначине (8.46.a)

$$F(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x). \quad (8.49)$$

Једначина (8.46.b) је бихармонијска, па је партикуларно решење

$$F = x J_1(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} - \dots = -x J_0'(x),$$

* $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[\sum_{v=1}^n \frac{1}{v} \right] - (\ln n) \right\} = 0,577215665 \dots$

где је $J_1(x)$ Bessel-ова функција прве врсте првог реда (индекса). За ове функције важе ови рекурзивни обрасци:

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x);$$

$$2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x); \quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \quad (8.50)$$

Стога су изводи партикуларног интеграла

$$F = xJ_1(x) = xJ_0'(x); \quad F'(x) = J_1(x) + xJ_1'(x) = xJ_0(x);$$

$$F''(x) = J_0(x) + xJ_0'(x),$$

па се једначина (8.46,a) своди на једначину

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + 1 \right] [xJ_1(x)] = [J_0(x) + xJ_0'(x) + J_0(x) - xJ_0'(x)] = 2J_0(x),$$

те је једначина (8.46.b) задовољена.

Аналогно ће се узети и партикулани интеграл у облику

$$F = xY_1(x) = -xY_0'(x),$$

где је $Y_1(x)$ Bessel-ова (Weber-ова) функција групе врсте првог реда, јер за њу важе исти рекурзивни обрасци (8.50). Сем тога између ових функција постоји и веза

$$W = \begin{vmatrix} J_n(x) & Y_n(x) \\ J_n'(x) & Y_n'(x) \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi x}. \quad (8.51)$$

где је лева страна вронскијан ових функција.

Општи интеграл једначине (8.46.b) биће:

$$F(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x) + C_3 x J_1(x) + C_4 x Y_1(x). \quad (8.52)$$

Враћањем на првобитну функцију добија се решење

$$f(r) = C_1 J_0(ikr) + C_2 Y_0(ikr) + C_3 \cdot (kr) \cdot J_1(ikr) + C_4 \cdot (kr) \cdot Y_1(ikr), \quad (8.53)$$

где су уведене Bessel-ове (Weber-ове) функције прве и групе врсте, нултог и првог реда (индекса) од имагинарног аргумента. Оне су облика*

$$J_0(ikr) = 1 + \left(\frac{kr}{2}\right)^2 + \frac{1}{2^2} \left(\frac{kr}{2}\right)^4 + \frac{1}{6^2} \left(\frac{kr}{2}\right)^6 + \frac{1}{(4!)^2} \left(\frac{kr}{2}\right)^8 + \dots;$$

$$J_1(ikr) = \left(\frac{kr}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{kr}{2}\right)^3 + \frac{1}{12} \left(\frac{kr}{2}\right)^5 + \frac{1}{144} \left(\frac{kr}{2}\right)^7 + \dots;$$

$$Y_0(ikr) = \frac{2}{\pi} \left\{ - \left[\ln \left(\frac{kr}{2}\right) + C \right] J_0(ikr) + \left[\left(\frac{kr}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{kr}{2}\right)^2 + \dots \right] \right\}; \quad (8.54)$$

* Bessel-ове функције су табулисане. Видети, на пример, Watson, G. N., Theory of Bessel Functions, Cambridge Univ. Press, London, (1922).

$$Y_1(ikr) = \frac{2}{\pi} \left\{ \left[\ln \left(\frac{kr}{2} \right) + C \right] J_1(ikr) + \frac{1}{(kr)} J_0(ikr) - \left[\frac{kr}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{kr}{2} \right)^3 + \dots \right] \right\}. \quad (8.45)$$

Функција напона је

$$\Phi(r, z) = [C_1 J_0(ikr) + C_2 Y_0(ikr) + C_3 \cdot (kr) \cdot J_1(ikr) + C_4 \cdot (kr) \cdot Y_1(ikr)] (\cos kz + \sin kz) \quad (8.55)$$

када је параметар k сталан. У случају променљивог параметра α она ће бити

$$\Phi(r, z) = \int_0^{\infty} [C_1 J_0(i\alpha r) + C_2 Y_0(i\alpha r) + C_3 \cdot (\alpha r) \cdot J_1(i\alpha r) + C_4 \cdot (\alpha r) \cdot Y_1(i\alpha r)] (\cos \alpha z + \sin \alpha z) d\alpha. \quad (8.56)$$

где су сада коефицијенти C_i одређене функције променљивог параметра α , $C_i = C_i(\alpha)$, које треба одредити из граничних услова.

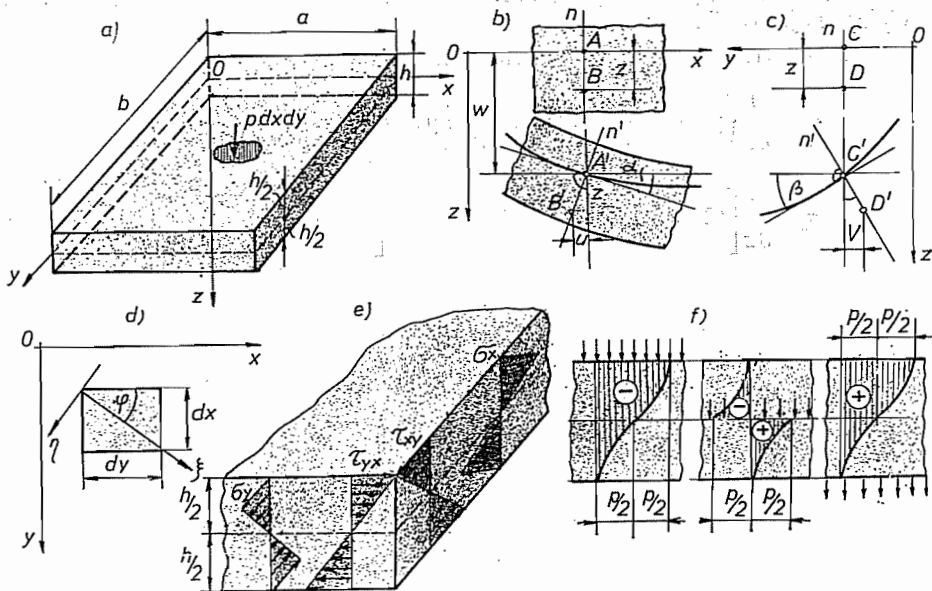
Компонентни напони се одређују по обрасцима:

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right); \quad \sigma_c = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right); \quad (8.54)$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \mu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]; \quad \tau_{zr} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \mu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right].$$

9. САВИЈАЊЕ И ИСПУПЧЕЊЕ ПЛОЧА

9.1. Основни елементи и хипотезе. — *Танком плочом* назива се еластично тело призматичног или цилиндричног облика мале дебљине h у односу на друге две димензије (слика 9.1.а). Ова дебљина треба да буде мања од $1/10$ величине других димензија. Њена *средња раван* узима се за



Слика. 9.1. — Савијање танке плоче

Ox -раван, aOz -оса се усмерава *ниже* у смеру дејства оптерећења које по јединици плоче износи p [kN/cm^2]. Због малих димензија плоче може се сматрати да су нападне тачке сила оптерећења у самој средњој равни. Усред овог оптерећења наступиће деформација плоче, па се претпоставља да су угиби *врло мали*, тако да горња граница величине угиба не треба да пређе величину $h/5$. Угибе тачака средње равни обележаваћемо са $w = w_0 = w(x, y)$; они зависе само од координата x и y . Средња раван при деформацији прелази у *еластичну ливри*. Као што се код савијања греда користи Вегноулли-јева *хипотеза* да попречни пресеци при деформацији остају равни, у теорији плоча уводи се *хипотеза праволинијског елемента*:

нормала на средњу равна остаје ујавна и на еластичној површи, што значи да праволинијски елементи при деформацији задржавају непромењене дужине. Као што се код греда занемарују нормални напони у равнима паралелним средњој равни греде, тако се и у теорији плоча претпоставља да је нормални напон, као и код равнот стања напрезања, (члан 7.2), једнак нули, $\sigma_z = 0$, па је средња равна неутрална површи. Даље се претпоставља зајремине силе не дејствују.

Нека тачка A средње равни елемента пресека плоче паралелног Oxz -равни (слика 9.1. b), добиће при деформацији померање $w = w(x, y)$ и прећи ће у положај A' . Друга тачка B на истој нормали (n) на растојаљу z од A прећи ће у положај B' , и остаће на нормали (n') управној на еластичној-неутралној-површи, али ће добити мало померање у Ox -правцу

$$u = -z \operatorname{tg} \alpha \approx -z \alpha = -z (\partial w / \partial x). \quad (9.1.a)$$

Аналогно томе тачка C средње равни елемента пресека плоче паралелног Oyz -равни (слика 9.1. c), прећи ће у положај C' , а тачка D на истој нормали у положај D' , па ће добити мало померање у Oy -правцу

$$v = -z \operatorname{tg} \beta = -z \beta = -z (\partial w / \partial y). \quad (9.1.b)$$

Због малих угиба може се, као и код греда, ставити да је прва кривина једнака другом изводу од померања, па ће бити за оба правца

$$K_x = 1/R_x = -\partial [\partial w / \partial x] / \partial x = -(\partial^2 w / \partial x^2); \quad K_y = 1/R_y = -(\partial^2 w / \partial y^2), \quad (9.2. a)$$

где су R_x и R_y главни полупречници кривина. Узима се да је кривина позитивна ако је неутрална површ конвексна према $+Oz$ -оси. Прва кривина (флексија) средње равни за правце $O'\xi$ и $O'\eta$ (слика 9.1. d) биће

$$K_\xi = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{d\xi} \right) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \varphi \right) = K_x \cos^2 \varphi +$$

$$+ K_y \sin^2 \varphi - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin 2\varphi,$$

$$K_\eta = -\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right) = -\frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \varphi \right) =$$

$$= K_x \sin^2 \varphi + K_y \cos^2 \varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin 2\varphi.$$

па се сабирањем добија

$$K_\xi + K_\eta = K_x + K_y; \quad 2K_{\xi\eta} = 2K_{xy}. \quad (9.2.b)$$

Полузбир кривина је средња кривина, па значи да је средња кривина независна од правца (угла φ).

Израз $(\partial^2 w / \partial x \partial y)$ је група кривина или торзија површи, па ће бити торзија у тачки O' за правце $O'\xi$ и $O'\eta$:

$$\mathcal{T}_{\xi\eta} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \varphi \right) =$$

$$= \frac{1}{2} (K_x - K_y) \sin 2\varphi + \mathcal{T}_{xy} \cos 2\varphi. \quad (9.2.c)$$

С обзиром на (9.1) и Нооке-ов закон, компоненте деформације су:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{z}{R_x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y); \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{z}{R_y} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x); \end{aligned} \quad (9.3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{2z}{R_t} = -2z \mathcal{J} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy},$$

па су компонентни напони:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{1}{R_x} + \frac{\mu}{R_y} \right); \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{R_y}{R_x} + \frac{\mu}{R_y} \right); \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{1}{R_t}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Ове релације показују да се компонентни напони σ_x , σ_y и $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ *линеарно* мењају по пресеку као и код греде (слика (9.1. е)).

Иако су због претпоставке да нормала средње равни остаје нормална на неутралну површ занемарена клизања γ_{xz} и γ_{yz} , ипак се води рачуна о тангенцијалним напонима τ_{xz} и τ_{yz} . Из првих двеју једначина равнотеже (Navier-ових једначина)

$$(\partial \sigma_x / \partial x) + (\partial \tau_{xy} / \partial y) + \partial \tau_{xz} / \partial z = 0; \quad (\partial \tau_{yx} / \partial x) + (\partial \sigma_y / \partial y) + (\partial \tau_{yz} / \partial z) = 0,$$

следи

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = cz \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w); \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = cz \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w); \quad c = \frac{E}{1-\mu^2}; \quad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

па се интегралњем добијају тангенцијални напони

$$\tau_{xz} = \frac{1}{2} cz^2 \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) + f_1(x, y); \quad \tau_{yz} = \frac{1}{2} cz^2 \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w) + f_2(x, y),$$

где су $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ функције које треба одредити из граничних услова. Пошто на основама плоче нема тангенцијалних сила биће за

$$z = \pm \frac{h}{2}; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \quad f_1(x, y) = -\frac{ch^2}{8} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w); \quad f_2(x, y) = -\frac{ch^2}{8} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w),$$

$$\begin{aligned}\tau_{xz} = \tau_{zx} &= -\frac{E}{8(1-\mu^2)}(h^2 - 4z^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \\ &= -\frac{Eh^2}{8(1-\mu^2)} \left[1 - 4 \left(\frac{z}{R} \right)^2 \right] \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w); \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= -\frac{E}{8(1-\mu^2)}(h^2 - 4z^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \\ &= -\frac{Eh^2}{8(1-\mu^2)} \left[1 - 4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w).\end{aligned}\tag{9.5}$$

Они се мењају по дебљини плоче по закону параболе као и код греде.

Када је горња основа оптерећена оптерећењем p , тада из треће Navier-ове једначине следи

$$(\partial \tau_{xz} / \partial x) + (\partial \tau_{zy} / \partial y) + (\partial \sigma_z / \partial z) = 0, \quad \partial \sigma_z / \partial z = -(\partial \tau_{xz} / \partial x) - (\partial \tau_{zy} / \partial y).$$

Уношењем израза (9.5) и интегралењем добија се нормални напон σ_z :

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{E}{8(1-\mu^2)}(h^2 - 4z^2) \Delta \Delta w; \quad \sigma_z = \frac{E}{24(1-\mu^2)}(4h^2 z - 4z^3) \Delta \Delta w + \varphi(x, y),$$

где је $\varphi(x, y)$ функција коју треба одредити из граничних услова. Дакле, биће:

$$\begin{aligned}\text{за } z = \frac{h}{2}; \quad \sigma_z &= \frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} \Delta \Delta w + \varphi(x, y) = 0; \quad \varphi(x, y) = -\frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} \Delta \Delta w = \\ &= -\frac{1}{2} p(x, y);\end{aligned}$$

$$\text{за } z = -\frac{h}{2}; \quad \sigma_{(-z)} = -\sigma_z = \frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} \Delta \Delta w - \varphi(x, y) = p;$$

па је нормални напон

$$\begin{aligned}\sigma_z &= -\frac{E}{24(1-\mu^2)}(h^3 - 3h^2 z + 4z^3) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \\ &= -\frac{p}{2} \left[1 - 3 \frac{z}{h} + 4 \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right].\end{aligned}\tag{9.6}$$

Овај се напон мења по закону кубне параболе. Његова расподела по дебљини плоче у зависности где дејствује оптерећење p приказана је на слици 9.1.f.

9.2. Диференцијална једначина еластичне површи плоче. — Када се у (9.6) стави $z=0$, онда се добија диференцијална једначина еластичне површи плоче*

* Ову једначину је извела 1815. године Sophie Germain полазећи од погрешних хипотеза. Разматрајући њен мемоар упућен француској Академији наука Lagrange је поново извео ову једначину.

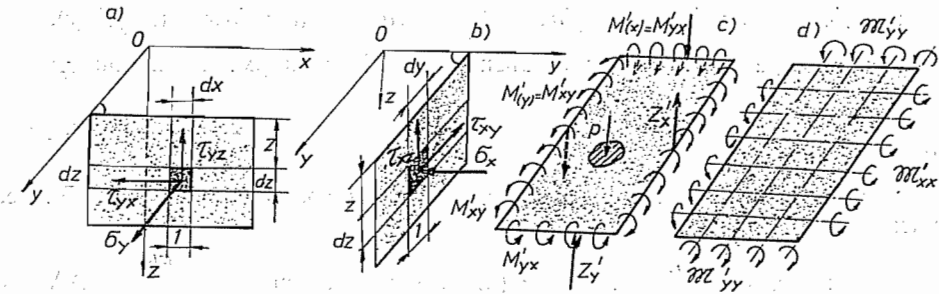
$$\Delta \Delta w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{\mathfrak{D}} \quad (9.7)$$

где је

$$\mathfrak{D} = \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{E^* h^3}{12} \quad (9.8)$$

крућошћ илоче при савијању или цилиндрична крућошћ илоче при савијању (flexural rigidity of the plate), јединице [kN/cm]. Она је аналогна савојној крућости греде $\mathfrak{B} = EI_x = Ebh^3/12$ за $b=1$, где је, према (7.4), модул еластичности $E^* = E/(1-\mu^2)$.

Као и код греда, напони (9.4) линеарно се мењају са z , па стварају моменте савијања (најважније моменте), али код плоча у свакој тачки постоје два момента савијања у пресецима нормалним на Ox и Oy -осе. Због тога посматрајмо пресек дужине dx паралелан Oxz равни (слика 9.2.a) са нор-



Слика 9.2. — Редуција сила

малом $+Oy$ -осом, онда на елементу $dA=1 \cdot dz=dz$ дејствују напони σ_y , τ_{yx} , τ_{yz} , односно силе $\sigma_y dA$; $\tau_{yx} dA$; $\tau_{yz} dA$, које се редукују на спрегове, односно трансверзалне силе, чији су momenti, односно величине, рачунати по јединици дужине dx појединог пресека: момент савијања M_{yx}' ; момент увијања M'_{yy} и трансверзална сила Z'_y . Први индекс (y) указује нормалу, а други индекс осу око које дејствује сила. Трансверзална сила је вертикална. На исти начин у пресеку дужине dy паралелном Oyz -равни (слика 9.2.b), са нормалом $+Ox$ -сом на елементу $dA=1 \cdot dz=dz$ дејствују напони σ_x , τ_{xy} и τ_{xz} , односно силе $\sigma_x dA$; $\tau_{xy} dA$; $\tau_{xz} dA$, које се редукују на момент савијања M'_{xy} , момент увијања M'_{xx} и трансверзалну силу Z'_x . Страна дужине dx је, дакле изложена моменту савијања $M'_{yx} = M'_{(x)}$ моменту торзије $M'_{yy} = M'_{(x)}$ и трансверзалној сили $Z'_y = Z'_{(x)}$ (слика 9.2.c, d), а страна дужине dy моменту савијања $M'_{xy} = M'_{(y)}$, моменту увијања $M'_{xx} = M'_{(y)}$ и трансверзалној сили $Z'_x = Z'_{(y)}$. Пошто су на цртежу назначени смерови напона, то их треба узети по апсолутној вредности, па су:

a) моменте савијања

$$M_{(x)}' = M_{yx}' = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = -\mathfrak{D} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right);$$

$$M_{(y)}' = M_{xy}' = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -\mathfrak{D} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad (9.9)$$

b) *моментни увијња*

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{(x)}' &= \mathfrak{M}_{yy}' = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z \, dz = -(1-\mu) \mathfrak{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \\ \mathfrak{M}_{(y)}' &= \mathfrak{M}_{xx}' = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \, dz = (1-\mu) \mathfrak{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\mathfrak{M}'_{yy}; \end{aligned} \quad (9.10)$$

c) *трансверзалне силе*

$$\begin{aligned} Z'_{(x)} &= Z'_y = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \, dz = -\mathfrak{D} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w); \\ Z'_{(y)} &= Z'_x = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \, dz = -\mathfrak{D} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w). \end{aligned} \quad (9.11)$$

Када се од пресека y пређе на пресек $y+dy$ промениће се трансверзална сила, а такође и када се пређе од пресека x на пресек $x+dx$, па услов равнотеже у Oz правцу даје релацију

$$\begin{aligned} \left[- \left(Z'_{(x)} + \frac{\partial Z'_{(x)}}{\partial y} dy \right) + Z'_{(x)} \right] dx + \left[- \left(Z'_{(y)} + \frac{\partial Z'_{(y)}}{\partial x} dx \right) + Z'_{(y)} \right] dy + \\ + p \, dx \, dy = 0; \quad \frac{\partial Z'_{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial Z'_{(x)}}{\partial x} = p, \end{aligned}$$

те се, с обзиром на (9.11), добија једначина еластичне површине плоче (9.7)

Сада се напони могу изразити помоћу момента и трансверзалних сила односно оптерећења $p(x, y)$, па су:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -12 \left| M_{(y)}' \right| \frac{z}{h^3}; & \tau_{xy} = \tau_{yx} &= -12 \left| \mathfrak{M}'_t \right| \frac{z}{h^3}; & \left| \mathfrak{M}'_t \right| &= \left| \mathfrak{M}'_{(x)} \right| = \left| -\mathfrak{M}'_{(y)} \right|; \\ \sigma_y &= -12 \left| M_{(x)}' \right| \frac{z}{h^3}; & \tau_{xz} = \tau_{zx} &= -\frac{3}{2h} \left| Z'_{(y)} \right| \left[1 - 4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right]; \\ \sigma_z &= -\frac{p}{2} \left[1 - 3 \left(\frac{z}{h} \right) + 4 \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right]; & \tau_{yz} = \tau_{zy} &= -\frac{3}{2h} \left| Z'_{(x)} \right| \left[1 - 4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Екстремне вредности напона су:

$$\begin{aligned} \text{за } z = \pm \frac{h}{2}; \quad \sigma_{x \max} &= \mp \frac{6 \left| M_{(y)}' \right|}{h^2}; & \sigma_{y \max} &= \mp \frac{6 \left| M'_{(x)} \right|}{h^2}; \\ \sigma_{z \max} &= \begin{cases} 0 \\ -p \end{cases}; & \tau_{xy \max} &= \pm \frac{6 \left| \mathfrak{M}'_t \right|}{h^2}; \\ \text{за } z = 0; \quad \tau_{xz \max} &= -\frac{3 \left| Z'_{(y)} \right|}{2h}; & \tau_{yz \max} &= -\frac{3 \left| Z'_{(x)} \right|}{2h}. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Када је плоча променљиве висине h која се равномерно мења са z , формуле основних компонентних напона σ_x , σ_y , τ_{xy} остају непромењене, а такође и моменти савијања и увијања (са нешто мањом тачношћу неголи код плоче константне дебљине), али се мења диферицијална једначина еластичне површине, па је

$$\Delta (\mathfrak{D} \Delta w) - (1 - \mu) \left[\frac{\partial^2 \mathfrak{D} \partial^2 w}{\partial y^2 \partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \mathfrak{D} \partial^2 w}{\partial x \partial y \partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mathfrak{D} \partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = p, \quad (9.14)$$

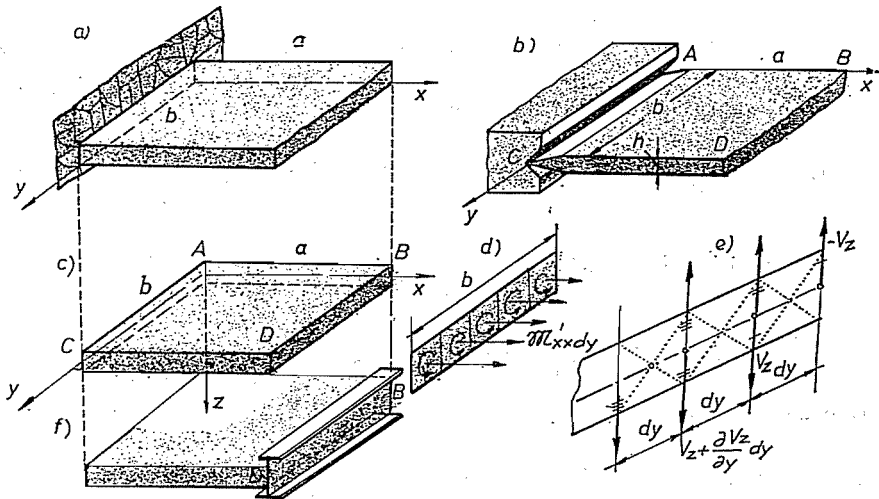
и трансверзалне силе, те су,

$$Z_{(x)'} = Z_{y'} = -\frac{\partial}{\partial y} (\mathfrak{D} \Delta w) + (1 - \mu) \left[\frac{\partial \mathfrak{D} \partial^2 w}{\partial y \partial x^2} - \frac{\partial \mathfrak{D} \partial^2 w}{\partial x \partial x \partial y} \right]; \quad (9.15)$$

$$Z_{(y)'} = Z_{(x)'} = -\frac{\partial}{\partial x} (\mathfrak{D} \Delta w) + (1 - \mu) \left[\frac{\partial \mathfrak{D} \partial^2 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial \mathfrak{D} \partial^2 w}{\partial y \partial x \partial y} \right].$$

9.3. Гранични (контурни) услови код правоугаоне плоче. — Када је познато оптерећење $p(x, y)$ правоугаоне плоче, ивица a и b , мале дебљине h , онда треба интегралити парцијалну једначину (9.7) еластичне површи уз задовољење граничних (контурних) услова на бочним основама паралелним осама Ox и Oy . Разликује се три врсте ослањања бочних основа (страна) плоче.

а) *Укљешћена страна (основа).* — Када је код правоугаоне плоче основа (страна) $x=0$ укљешћена (слика 9.3.2) тада је угиб једнак нули, а сем



Слика. 9.3. Гранични услови код правоугаоне плоче

тога се тангенцијална раван еластичне површи поклапа са Ox -равни. Ивица која се поклапа са Oy осом је укљешћена, па су гранични услови

$$\text{за} \quad x=0, \quad w=0; \quad \partial w / \partial x = 0. \quad (9.16)$$

б) *Слободно ослоњена (погудујћа) сйрана (основа)*. — Када је страна (основа) плоче $x=0$ слободно ослоњена (подупрта), тада су угиби једнаки нули (слика 9.3. б). Пошто се плоча може слободно обртати око Oy -осе, то мора бити момент савијања дуж те ивице једнак нули. Према томе су гранични услови за ту страну

$$\text{за } x=0, w=0; M_{xy}' = M_{(y)'} = 0; (\partial^2 w / \partial x^2) + \mu (\partial^2 w / \partial y^2) = \partial^2 w / \partial x^2 = 0, \quad (9.17)$$

јер је $w=0$, па је и $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$ за произвољно y .

в) *Слободна сйрана (основа)*. — Када је страна $x=a$ слободна, онда према Poisson-у постоје три гранична услова: да око ивице $x=a$ нема ни савијања нити увијања и да не дејствују трансверзалне силе (слика 9.3. в). Према томе су гранични услови:

$$\text{за } x=a; M_{xy}' = M_{(y)'} = 0; M_{xx}' = M_{(y)'} = 0; Z_x' = Z_{(y)'} = 0. \quad (9.18.а)$$

За разлику од прва два случаја ослањања овде уместо два гранична услова постоје *три услова*. Међутим, немачки научник Kirchoff* је показао да се и у овом случају два последња услова (9.18. а) свODE на један услов, те и у овом случају слободно ослоњене стране постоје свега два гранична услова. На страни $x=a$ напони τ_{xy} , односно хоризонталне силе $\tau_{xy} dz$, изазивају увијање (слика 9.3. д) чији спрег на дужини елемента dy те стране износи $M_{xx}' dy$. Ако ове хоризонталне силе заменимо еквивалентним силама $-V_z = M_{xx}'$ и $+V_z$ оне ће изазвати само локално напрезање тога краја плоче не мењајући притом величине момената увијања (слика 9.3. е). Спрег $[M_{xx}' + (\partial M_{xx}' / \partial y) dy] dy$ који дејствује на суседном елементу dy можемо заменити спрегом вертикалних сила $\mp [V_z + (\partial V_z / \partial y) dy]$ са краком dy , и тако редом дуж целе ивице $x=a$. Како се силе $-V_z$ и $+V_z$ поништавају, то ће дуж целе ивице $x=a$ остати само трансверзалне силе које по јединици дужине ивице износе $-\partial V_z / \partial y = -\partial M_{xx}' / \partial y$. Пошто укупна трансверзална сила на тој страни мора бити једнака нули то друга два услова из (9.18. а) дају услов,

$$\begin{aligned} \left[Z_x' - \frac{\partial M_{xx}'}{\partial y} \right]_{x=a} &= \left[Z_{(y)'} - \frac{\partial M_{(y)'}}{\partial y} \right]_{x=a} = \\ &= \left[-\mathfrak{D} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) - (1-\mu) \mathfrak{D} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = 0. \end{aligned} \quad (9.18.б)$$

Према томе су поребни и довољни услови за слободну страну плоче:

$$\text{за } x=a; \frac{\partial w^2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0. \quad (9.19)$$

д) *Еластично ослоњена или еластично уклешћена сйрана*. — Чест је случај у техничкој пракси да се нека страна плоче ослања на неки носач или је за њега круто везана. Нека је страна $x=a$ круто везана са подвлаком -носачем BD (слика (9.3. ф) онда нису ни угиб ни торзијски момент једнаки нули, већ је угиб једнак угибу носача, а увијање је једнако увијању носача. Нека су \mathfrak{B} и \mathfrak{X} савојна и торзијска крутост носача (подвлаке), онда плоча притиска носач трансверзалном силом (9.18. б) па је диференцијална једначина еластичне линије носача

* G. Kirchoff, „Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe“, JRAM, H.40, (1850).

$$\text{за } x=a; \quad \mathfrak{B} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \left[Z_{(y)'} - \frac{\partial \mathfrak{M}_{(y)'}}{\partial y} \right]_{x=a} = \mathfrak{D} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=a} \quad (9.20. a)$$

уједно и један гранични услов за ову основу.

Угао торзије носача носача је $\theta = -\partial w / \partial x$, а његова промена дуж те ивице $\partial \theta / \partial y = -\partial^2 w / \partial x \partial y$, па је момент торзије $-\mathfrak{I} \partial^2 w / \partial x \partial y$. Он мора бити супротан моменту савијања дуж те ивице, па је други гранични услов за ову страну

$$\text{за } x=a; \quad -\mathfrak{I} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]_{x=a} = -[M_{(y)'}]_{x=a} = \mathfrak{D} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=a} \quad (9.20 b)$$

9.4. Отпорни (реакције) ослонаца. Код ослоњене плоче (слика 9.3. b) момент увијања дуж те стране није једнак нули, па ослонац мора поред трансверзалних сила да прими и те моменте. Међутим, ослонац као тело може да оствари само отпоре у виду сила које су управне на средњу равну плоче. Ова се противречност може одстранити ако се претпостави у уској зони око ослонаца да плоча предаје тој зони трансверзалне силе и моменте увијања распоређене дуж те стране, а обратно ослонац дејствује на плочу у тој зони континуално распоређеним отпорима R' дуж стране и концентрисаним отпорима F'_A, F'_B, F'_C и F'_D у угловима плоче, што се потврђује опитом а следи и из разматрања у *члану* 9.3. (c), јер се трансформацијом момената увијања (слика 9.3. f) поред распоређених сила V_z добијају на крајевима и две концентрисане силе.

Дајмо тачкама те основе виртуално померање δw онда је виртуални рад реакција

$$\delta \mathbf{A}' = - \left[\int_{AC} R' \, d y \, \delta w + F'_A \delta w_A + F'_C \delta w_C \right],$$

док је виртуални рад трансверзалне силе и момента увијања

$$\delta \mathbf{A}'' = - \int_{AC} \left[Z_{(y)'} \, d y \, \delta w - \mathfrak{M}_{(y)'} \, d y \, \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) \right],$$

где $\partial (\delta w) / \partial y$ угао торзије елемента на коме спрег $\mathfrak{M}'_{(y)}$ врши рад. Парцијалном интеграцијом добија се,

$$\delta \mathbf{A}'' = - \int_{AC} \left[Z_{(y)'} - \frac{\partial \mathfrak{M}_{(y)'}}{\partial y} \right] d y \, \delta w + \mathfrak{M}'_C \delta w_C - \mathfrak{M}'_A \delta w_A.$$

Промена потенцијалне енергије (деформационог рада) у уској зони око ослонаца мора бити једнака нули

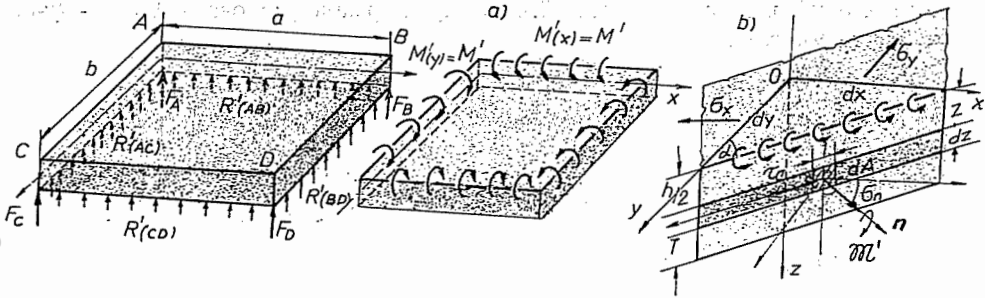
$$\delta \mathbf{A} = \delta \mathbf{A}' + \delta \mathbf{A}'' =$$

$$= \int_{AC} \left[-R' - \left(Z_{(y)'} - \frac{\partial \mathfrak{M}_{(y)'}}{\partial y} \right) \right] d y \, \delta w - (F'_A + \mathfrak{M}'_A) \delta w_A = (F'_C - \mathfrak{M}'_C) \delta w_C = 0.$$

па пошто је варијација $\delta w \neq 0$, то следи да су отпори

$$R'_{AC} = - \left[Z'_{(y)} - \frac{\partial \mathfrak{M}'_{(y)}}{\partial y} \right]_{x=0}; \quad F'_A(AC) = - \mathfrak{M}'_A; \quad F'_C(AC) = \mathfrak{M}'_C.$$

Аналогно би се добили отпори и за остале ослоњене стране плоче, па су (слика 9.4.):



Слика 9.4. — Отпори ослонаца

Слика 9.5. — Чисто савијање и чисто увијање плоче

$$\begin{aligned} R'_{AC} &= - \left(Z'_{(y)} - \frac{\partial \mathfrak{M}'_{(y)}}{\partial y} \right); & R'_{BD} &= Z'_{(y)} - \frac{\partial \mathfrak{M}'_{(y)}}{\partial y}; \\ R'_{AB} &= - \left(Z'_{(x)} - \frac{\partial \mathfrak{M}'_{(x)}}{\partial x} \right); & R'_{CD} &= Z'_{(x)} - \frac{\partial \mathfrak{M}'_{(x)}}{\partial x}; \end{aligned} \quad (9.21)$$

$$F'_A = -2 \mathfrak{M}'_A; \quad F'_B = 2 \mathfrak{M}'_B; \quad F'_C = 2 \mathfrak{M}'_C; \quad F'_D = -2 \mathfrak{M}'_D.$$

Из овога следи да је потребан услов (9.18. b) за слободну страну да је континуално распоређени отпор једнак нули, како је и Kirchoff извео.

9.5. Чисто савијање и чисто увијање плоче. — Нека је правоугаона плоча оптерећена само спреговима интензитета M' дуж ивица (слика 9.5. a) онда се каже да је плоча напрегнута на *чисто савијање* овим моментима савијања. Да бисмо дошли до савијања плоче произвољне контуре посматрајмо цео пресек паралелан Oz оси (слика 9.5. b) онда се на њему појављују нормални и тангентијални напон, па из равнотеже елемента следи

$$\sigma_n dA - \sigma_x dA \cos^2 \alpha - \sigma_y dA \sin^2 \alpha = 0;$$

$$\tau_n dA + \sigma_x dA \cos \alpha \sin \alpha - \sigma_y dA \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

односно

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha; \quad \tau_n = \frac{1}{2} (\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\alpha,$$

где је α угао који спољашња нормала гради са $+Ox$ -осом. Момент савијања и момент увијања за коси пресек паралелан Oz -оси биће

$$M'_{(n)} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_n z dz; \quad \mathfrak{M}'_{(n)} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_n z dz,$$

односно

$$M_{(n)'} = M_{(x)'} \sin^2 \alpha - M_{(y)'} \cos^2 \alpha; \quad \mathfrak{M}_{(n)'} = \frac{1}{2} [M_{(y)'} - M_{(x)'}] \sin 2\alpha. \quad (9.22. b)$$

За $\alpha = 0$ је $M_{(n)'} = -M_{(y)'}$ а за $\alpha = \pi/2$ је $M_{(n)'} = M_{(x)'}$.

Када је $M_{(x)'} = -M_{(y)'} = M'$ тада је момент торзије једнак нули, па је то случај чистог савијања. Пошто су нормале основа $-Ox$ и $-Oy$ -оса, то из, (9.9), следи

$$M_{(-y)x'} = -M_{(yx)'} = -\mathfrak{D} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = M_{(x)'} = M';$$

$$M_{(-x)y'} = -M_{(xy)'} = -M_{(y)'} = \mathfrak{D} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -M',$$

па се добијају релације

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{M'}{\mathfrak{D}}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M'}{\mathfrak{D}(1+\mu)}; \quad \mathfrak{M}_{(n)'} = 0. \quad (9.23)$$

које показују да су кривине константне, те средња раван прелази у *сферну* *иповрш* полупречника

$$R = R_x = R_y = \frac{1}{K} = \frac{\mathfrak{D}(1+\mu)}{M'}. \quad (9.24)$$

Чисто савијање плоче произвољне контуре наступа увек када су по контури momenti савијања и momenti увијања распоређени према једначинама (9.22. b).

У случају *чистой увијања* спреговима $\mathfrak{M}_{(x)'} = \mathfrak{M}_{(y)'} = -\mathfrak{M}'$ дуж основа, momenti савијања и трансверзалне силе су једнаке нули, па се из (9.10) добија

$$\partial^2 w / \partial x \partial y = \mathfrak{M}' / (1 - \mu) \mathfrak{D},$$

односно

$$w = \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{D}(1-\mu)} xy, \quad (9.25)$$

што значи да средња раван плоче постаје *хиперболички* *ипараболоид*.

9.6. Деформациони рад (потенцијална енергија) савијене плоче. Пошто су напони σ_z , τ_{xz} , τ_{yz} врло мали, па се могу занемарити, то је, према (3.27), деформациони рад савијене плоче

$$A_d = \frac{1}{2} \left[\iiint_{(V)} \frac{1}{E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\mu\sigma_x\sigma_y) + \frac{1}{G} \tau_{xy}^2 \right] dx dy dz;$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}; \quad (9.26)$$

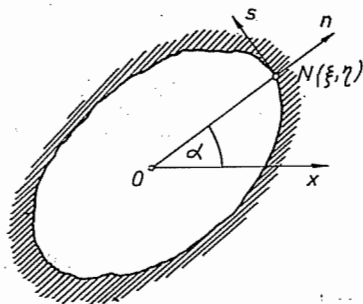
Односно после уношења релација (9.4) и крутости (9.8):

$$\mathbf{A}_d = \frac{\mathfrak{D}}{2} \int \int_{(A)} \left\{ \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy, \quad (9.27)$$

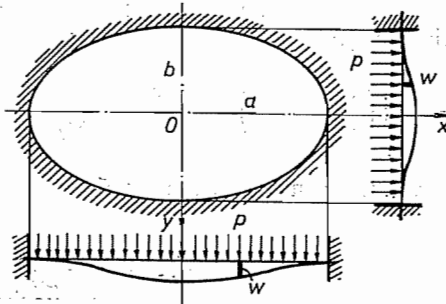
где интегрисање треба извршити по целој површини плоче.

У случају када је контура плоче *уклештена* онда је дуж контуре $w=0$ (слика 9.6), а сем тога је

$$\begin{aligned} \partial w / \partial n &= (\partial w / \partial \xi) \cos \alpha + (\partial w / \partial \eta) \sin \alpha = 0; \\ \partial w / \partial s &= -(\partial w / \partial \xi) \sin \alpha + (\partial w / \partial \eta) \cos \alpha = 0, \end{aligned} \quad (9.28)$$



Слика 9.6. — Плоча уклештене контуре



Слика 9.7. Уклештена елиптична плоча

па морају на контури $N(x=\xi; y=\eta)$ бити $\partial w / \partial \xi = \partial w / \partial \eta = 0$. Стога се израз (9.27) може упростити. Парцијалном интеграцијом интеграла добија се

$$\begin{aligned} \int \int_{(A)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy &= \int dx \int \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] dy = \\ &= \int dx \left\{ \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{y_1}^{y_2} - \int \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} dy \right\} = \\ &= \oint \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx - \int dy \left\{ \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x_1}^{x_2} - \int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx \right\} \end{aligned} \quad (K)$$

па је интеграл

$$\int \int_{(A)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy = \oint_{(K)} \frac{\partial w}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx \right] = 0$$

те је деформациони рад уклештене плоче произвољне контуре

$$\mathbf{A}_d = \frac{\mathfrak{D}}{2} \int \int_{(A)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy = \frac{\mathfrak{D}}{2} \int \int_{(A)} (\Delta w)^2 dx dy. \quad (9.29)$$

9.7. Савијање уклештене елиптичне плоче. — Плоча елиптичног облика, полуоса a и b , уклештена је по целој контури а оптерећена је константним оптерећењем $p(x, y) = p = \text{const}$ по целој горњој основи. Како је контурна криве елипса, једначине

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0; \quad (\xi/a)^2 + (\eta/b)^2 - 1 = 0, \quad (9.30.a)$$

то ћемо обратном методом претпоставити да је једначина еластичне површи

$$w(x, y) = c \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1 \right)^2 = c [f(x, y)]^2 = cf^2, \quad (9.30.b)$$

где је c константа. Ова једначина задовољава граничне услове (9.28) јер су

$$\text{за } x = \xi; \quad y = \eta; \quad w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 2cf \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4c}{a^2} fx = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 4 \frac{c}{b^2} fy = 0; \quad f(\xi, \eta) = 0.$$

Пошто $w(x, y)$ мора да задовољи и диференцијалну једначину (9.7) то се добија да је

$$\Delta w = 4c \left[\left(\frac{3}{a^2} + \frac{1}{a^2 b^2} \right) x^2 + \left(\frac{3}{b^4} + \frac{1}{a^2 b^2} \right) y^2 - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right]; \quad \Delta \Delta w = 8c \left(\frac{3}{a^4} + \frac{2}{a^2 b^2} + \frac{3}{b^4} \right)$$

те константа c представља угиб средишта плоче ($x=y=0$)

$$c = w_0 = \frac{P}{\mathfrak{D} \left[\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right]}. \quad (9.30c)$$

Према (9.4) компонентни напони су:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{48 \mathfrak{D} cz}{h^3} \left[2 \frac{x^2}{a^4} + 2\mu \frac{y^2}{b^4} + f \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\mu}{b^2} \right) \right]; \\ \sigma_y &= -\frac{48 \mathfrak{D} cz}{h^3} \left[2 \frac{y^2}{b^4} + 2\mu \frac{x^2}{a^4} + f \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\mu}{a^2} \right) \right]; \end{aligned} \quad (9.31.a)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{8 Ecz}{1 + \mu} \frac{xy}{a^2 b^2}.$$

У средишту плоче (O) напони су

$$x=y=0 \quad \sigma_x = -\frac{48 \mathfrak{D} cz}{h^3} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\mu}{b^2} \right); \quad \sigma_y = -\frac{48 \mathfrak{D} cz}{h^3} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\mu}{a^2} \right); \quad \tau_{xy} = 0; \quad (9.31.b)$$

док су у теменима контурне елипсе

$$x=a; \quad y=0; \quad \sigma_x = -\frac{96 \mathfrak{D} cz}{a^2 h^3}; \quad \sigma_{x \max} = \mp \frac{4 E ch}{(1 - \mu^2) a^2}; \quad (9.31.c)$$

$$x=0; \quad y=b; \quad \sigma_y = -\frac{96 \mathfrak{D} cz}{b^2 h^3}; \quad \sigma_{y \max} = \mp \frac{4 E ch}{1 - \mu^2} \frac{1}{b^2}. \quad (9.31.d)$$

Аналогно се могу, према (9.9), (9.10) и (9.11) одредити momenti савијања, momenti увијања и трансверзалне силе.

9.8. Савијање ослоњене правоугаоне плоче. Navier-ово решење. — Правоугаона танка плоча, висине h , страница a и b слободно је ослоњена дуж страна, а оптерећена је оптерећењем $p(x, y)$ које је, уопште узев, променљиво (слика 9.8. а). Као и у случају торзије (члан 5.4) угиб ћемо тражити у облику производа двеју функција $X(x)$ и $Y(y)$, односно у облику збира производа таквих функција $X_m(x) \cdot Y_n(y)$ помножених константним коефицијентима A_{mn} . Функције треба тако изабрати да задовољавају контурне услове плоче, а коефицијенте A_{mn} тако да се задовољи једначина (9.7). Како су гранични услови (9.17):

$$\text{за } x=0 \text{ и } x=a; w=0; \partial^2 w / \partial x^2 = 0 \text{ за } y=0 \text{ и } y=b; w=0; \partial^2 w / \partial y^2 = 0. \quad (9.32)$$

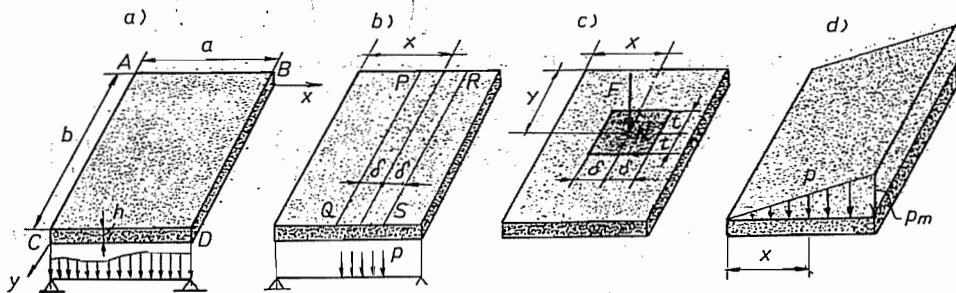
то се еластична површ савијене плоче може претставити двоструким редом

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}. \quad (9.33)$$

где су m и n цели бројеви. Диференцирањем ове функције може се показати да су предњи гранични услови задовољени, па су и моменти савијања дуж контуре једнаки нули, што мора да буде у случају слободно ослоњених страна плоче. Диференцирањем функције $w(x, y)$ и уношењем у једначину (9.7) добија се диференцијална једначина еластичне површине савијене плоче

$$\pi^4 \sum_m \sum_n A_{mn} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = \frac{p}{D}. \quad (9.34)$$

Овим се проблем свео на то да се функција $p(x, y)$ развије у Fourier-ов ред по променљивим x и y . Када се обе стране једначине помноже ово са $\sin(r\pi x/a)$, а затим са $\sin(s\pi y/b)$, где су r и s цели бројеви, и интег-



Слика 9.8. — Савијање слободно ослоњене правоугаоне плоче

рале обе стране једначине по x од 0 до a , и по y од 0 до b , с обзиром да су интегрални

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{r\pi}{a} x dx = 0 \text{ за } r \neq m; \int_0^a \sin^2 \frac{m\pi}{a} x dx = \frac{a}{2}, \text{ за } r = m;$$

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{s\pi}{b} y dy = 0 \text{ за } s \neq n; \int_0^b \sin^2 \frac{n\pi}{b} y dy = \frac{b}{2}, \text{ за } s = n,$$

добиће се коефицијенти

$$A_{nm} = \frac{4}{\mathfrak{D} \pi^4 ab \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \left[\sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \right] dx dy. \quad (9.35)$$

Израчунавање ових коефицијената, дакле, свело се на израчунавање интеграла на десној страни једначине за сваку зависност оптерећења $p = p(x, y)$.

а) *Једнолико подељено оптерећење.* — Како је оптерећење $p(x, y) = -p = p_0 = \text{const}$, тада се, обзиром да су интегрални

$$\int_0^a \sin \frac{(2m-1)\pi}{a} x dx = \frac{2a}{(2m-1)\pi}; \quad \int_0^a \sin \frac{2m\pi}{a} x dx = 0;$$

$$\int_0^b \sin \frac{(2n-1)\pi}{b} y dy = \frac{2b}{(2n-1)\pi}; \quad \int_0^b \sin \frac{2n\pi}{b} y dy = 0,$$

добијају се коефицијенти

$$A_{(2m-1)(2n-1)} = \frac{16p}{\mathfrak{D} \pi^6 (2m-1)(2n-1) \left[\left(\frac{2m-1}{a} \right)^2 + \left(\frac{2n-1}{b} \right)^2 \right]^2}; \quad \begin{matrix} m=1, 2, 3, \dots \\ n=1, 2, 3, \dots \end{matrix} \quad (9.36)$$

па је једначина еластичне површи*:

$$w(x, y) = \frac{16\pi}{\mathfrak{D} \pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)(2n-1)} \cdot \frac{\sin \frac{(2m-1)\pi}{a} x \sin \frac{(2n-1)\pi}{b} y}{\left[\left(\frac{2m-1}{a} \right)^2 + \left(\frac{2n-1}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (9.37)$$

Максимални угиб је у средишту плоче и износи

$$w_{\max} \left(x = \frac{a}{2}; y = \frac{b}{2} \right) = \frac{16p}{\mathfrak{D} \pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n-2}}{(2m-1)(2n-1) \left[\left(\frac{2m-1}{a} \right)^2 + \left(\frac{2n-1}{b} \right)^2 \right]^2} =$$

$$= \alpha \frac{pa^4}{Eh^3}. \quad (9.38)$$

Овај ред конвергира врло брзо.

Пошто су изводи

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{16pa^2}{\mathfrak{D} \pi^4} \sum_m \sum_n \frac{2m-1}{2n-1} \frac{\sin \alpha x \sin \beta y}{c^2}; \quad \alpha = \frac{(2m-1)\pi}{a}; \quad \beta = \frac{(2n-1)\pi}{b};$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{16pa^2 k^{-2}}{\mathfrak{D} \pi^4} \sum_m \sum_n \frac{2n-1}{2m+1} \frac{\sin \alpha x \sin \beta y}{c^2};$$

$$c^2 = [(2m-1)^2 + k^{-2}(2n-1)^2]; \quad k = \frac{b}{a},$$

то су, према (9.9) моменти савијања

$$M_{(x)}' = -\frac{16pa^2}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{(2n-1)^2 k^{-2} + \mu(2m-1)^2}{(2m-1)(2n-1)} \cdot \frac{\sin \alpha x \sin \beta y}{c^2};$$

$$M_{(y)}' = \frac{16pa^2}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{(2m-1)^2 + \mu(2n-1)^2 k^{-2}}{(2m-1)(2n-1)} \cdot \frac{\sin \alpha x \sin \beta y}{c^2}. \quad (9.39)$$

Ови редови конвергирају спорије од реда (9.38).

Због тога што је плоча слободно ослоњена по целој контури, највећи моменти савијања су у средишту плоче и износе

$$\left. \begin{aligned} x &= a/2; \\ y &= b/2; \end{aligned} \right\}$$

$$M_{(x)}'_{\max} = -\frac{16pa^4 k^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{(2m-1)(2n-1)} \frac{\mu k^2 (2m-1)^2 + (2n-1)^2}{[(2m-1)^2 k^2 + (2n-1)^2]^2} = \frac{\beta_1}{10^4} pa^2;$$

$$M_{(y)}'_{\max} = \frac{16pa^4 k^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{(2m-1)(2n-1)} \frac{(2m-1)^2 k^2 + \mu(2n-1)^2}{[(2m-1)^2 k^2 + (2n-1)^2]^2} = \frac{\beta_2}{10^4} pa^2.$$

На исти начин могу се одредити и трансверзалне силе (9.10) и отпори ослонаца — континуални и концентрисани (9.21). Највеће вредности се добијају на срединама страна. За вредност Poisson-овог коефицијента $\mu=0,3$ резултати су дати у табlici 9.1 коју је саставио Галеркин. Силе $F'_{(A, B, C, D)}$ јесу концентрисани отпори у угловима плоче.

Таблица 9.1

Poisson-ов коефицијент $\mu=0,3$

$\frac{b}{a}$	$w_{\max} = \frac{\alpha pa^4}{10^4 Eh^3}$	$M'_{(x)\max} = \frac{\beta_1}{10^4} pa^2$	$M'_{(y)\max} = \frac{\beta_2}{10^4} pa^2$	$Z'_{(x)\max} = \frac{\gamma_1}{10^3} pb$	$Z'_{(y)\max} = \frac{\gamma_2}{10^3} pa$	$R'_{(x)\max} = \frac{\delta_1}{10^3} pa$	$R'_{(y)\max} = \frac{\delta_2}{10^3} pa$	$F'_{A, B, C, D} = \frac{\nu}{10^3} pab$
k	α	β_1	β_2	γ_1	γ_2	δ_1	δ_2	ν
1,0	443	479	479	338	338	420	420	65
1,2	616	501	626	294	380	377	455	62
1,4	770	506	753	258	411	337	478	59
1,5	843	499	812	242	424	323	486	57
1,6	906	493	862	229	435	303	491	54
1,8	1017	479	948	205	452	273	499	50
2,0	1106	464	1017	185	465	248	503	46
3,0	1336	404	1189	124	493	166	505	31
4,0	1400	384	1235	93	498	125	502	24
5,0	1416	375	1246	74	500	100	500	19
	1422	375	1250	—	500	—	500	—

* Галеркин Б. Г., Упругие тонкие плиты, ГТТИ, Москва, (1933).

b) Делимично једнолико подељено оптерећење. — Континуално оптерећење $p = p_0 = \text{const}$ дејствује дуж правоугаоне траке $PQRS$, ширине 2δ , паралелне $+Oy$ -оси (слика 9.8.b) па зависи само од координате x . Стога је

$$\int_0^a p \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \frac{p}{\alpha} [-\cos \alpha x]_{x-\delta}^{x+\delta} = 2 \frac{p}{\alpha} \sin \alpha x \sin \alpha \delta; \quad \alpha = \frac{m\pi}{a},$$

па су коефицијенти (9.35) двоструког бескрајног реда:

$$A_{m; 2n-1} = \frac{8pk^4 a^5 \sin \alpha x \sin \alpha \delta}{\mathfrak{D} \pi^6 \delta m (2n-1) [m^2 k^2 + (2n-1)^2]^2}; \quad \alpha = \frac{m\pi}{a}; \quad (9.41)$$

Када $\delta \rightarrow 0$ тежи нули, тада $\sin [(m\pi\delta)/a]/\delta$ тежи ка $(m\pi)/a$, па се добија случај плоче оптерећене дуж праве PQ паралелне $\rightarrow Oy$ -оси. Тада су коефицијенти:

$$A_{m; 2n-1} = \frac{8pk^4 a^4 \sin \alpha x}{\mathfrak{D} \pi^5 (2n-1) [m^2 k^2 + (2n-1)^2]^2}; \quad \alpha = \frac{m\pi}{a}; \quad k = \frac{b}{a}; \quad (9.42)$$

У случају да оптерећење дејствује у правоугаонику $PQRS$, страница 2δ и $2t$, (слика 9.8.с) онда ће коефицијенти бити

$$A_{m, n} = \frac{4pk^5 a^6 \sin \alpha x \sin \alpha \delta \sin \beta y \sin \beta t}{\mathfrak{D} \pi^6 \delta t mn [m^2 k^2 + n^2]^2}; \quad \alpha = \frac{m\pi}{a}; \quad \beta = \frac{n\pi}{b}. \quad (9.43)$$

с) Савијање плоче концентрисаном силом. — Када се странице правоугаоника $PQRS$ смањују и једновремено $\delta \rightarrow 0$ и $t \rightarrow 0$ добија се случај оптерећења плоче концентрисаном силом F која дејствује у једној тачки N ($k=c$, $y=d$) плоче (слика 9.8.с). Тада из (9.43) добијамо коефицијенте реда

$$A_{mn} = \frac{4Fk^3 a^2 \sin \alpha c \sin \beta d}{\mathfrak{D} \pi^4 [m^2 k^2 + n^2]^2}; \quad \alpha = \frac{m\pi}{a}; \quad \beta = \frac{n\pi}{b}; \quad x=c; \quad y=d; \quad (9.44)$$

па је угиб

$$w = \frac{4Fk^3 a^2}{\mathfrak{D} \pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha c \sin \beta d}{[m^2 k^2 + n^2]^2} \sin \alpha x \sin \beta y; \quad \alpha = \frac{m\pi}{a}; \quad \beta = \frac{n\pi}{b}; \quad k = \frac{b}{a}. \quad (9.45)$$

d) Оптерећење плоче хидростатичким притиском. — Решење (9.45) може се сматрати општим решењем за ма које оптерећење $p(x, y)$ само треба у изразу F заменити са $p dx dy$ и интегралити по оптерећеном делу површине. У случају хидростатичког притиска он се мења линеарно, $p = \gamma_0 x = p_m x/a$, где је γ_0 специфична тежина (слика 9.8.d), па су коефицијенти:

$$A_{n; 2n-1} = \frac{(-1)^{m+1} 8 \gamma_0 k^4 a^5}{\mathfrak{D} \pi^6 m (2n-1) [m^2 k^2 + (2n-1)^2]^2}; \quad p_m = \gamma_0 a; \quad (9.46)$$

и угиб

$$w = \frac{8 p_m}{\mathfrak{D} \pi^6} k^4 a^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{[m^2 k^2 + (2n-1)^2]^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{(2n-1)\pi y}{b}. \quad (9.47)$$

Резултати су дати у табlici 9.2.

Таблица 9.2.

Poisson-ов коефицијент $\mu=0,3$

$\frac{b}{a}$	$w = \frac{\alpha}{10^4} \cdot \frac{\gamma_0 a^5}{Eh^3}$				$M'_{(x)} = \frac{\beta_1}{10^4} \cdot \gamma_0 a^3; \quad y = \frac{b}{2}$				$M'_{(y)} = \frac{\beta_2}{10^4} \cdot \gamma_0 a^3; \quad y = \frac{b}{2}$			
	0,25	0,50	0,60	0,75	0,25	0,50	0,60	0,75	0,25	0,50	0,60	0,75
k	α				β_1				β_2			
1,0	143	221	220	177	149	239	245	207	132	239	264	259
1,2	203	308	305	241	158	250	254	213	179	313	338	318
1,4	257	385	380	298	160	253	254	212	221	376	402	367
1,5	281	421	414	323	159	249	252	210	239	406	429	388
1,6	303	453	444	346	158	246	249	207	256	431	454	407
1,8	342	508	497	385	153	239	242	202	286	474	496	439
2,0	373	553	539	417	148	232	234	197	309	508	529	463
3,0	454	668	647	498	128	202	207	176	369	594	611	525
4,0	477	700	679	521	120	192	196	168	385	617	632	541
5,0	482	708	687	527	118	187	193	166	389	623	638	546
	484	711	690	529	117	187	192	165	391	625	640	547

9.9. Савијање правоугаоне плоче са две ослоњене стране. — (М. Levý-јево решење). — Уочавајући аналогију између функције напона код равнoг $\Delta\Delta\Phi=0$ и једначине угиба плоче $\Delta\Delta w = p/\mathfrak{D}$, М. Levý* је применио методу Ribière-а и Filon-а (члан 7.6) и у случају када су две стране правоугаоне плоче слободно ослоњене, а друге две произвољно ослоњене (слободне, слободно ослоњене или уклештене). Нека су стране $x=0$ и $x=a$ слободно ослоњене (погудурише), онда су гранични услови

$$\text{за } x=0 \text{ и } x=a; \quad w=0; \quad \partial^2 w / \partial x^2 = 0 \quad (9.48.a)$$

задовољени релацијом

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot f_m(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \alpha x \cdot f_m(y); \quad \alpha = \frac{m\pi}{a} \quad (9.48.b)$$

Када се овај израз стави у једначину (9.7) она постаје

$$\sum_{m=1}^{\infty} [f_m^{IV} - 2\alpha^2 f_m^{II} + \alpha^4 f_m] \sin \alpha x = \sum_{m=1}^{\infty} F_m \sin \alpha x = \frac{p(x, y)}{\mathfrak{D}} \quad (9.49.a)$$

где је краткости ради уведена ознака

$$F_m(y) = f_m^{IV}(y) - 2\alpha^2 f_m^{II}(y) + \alpha^4 f_m(y); \quad \alpha = \frac{m\pi}{a} \quad (9.49.b)$$

Како лева страна једначине (9.49) представља синусни Fourier-ов ред то и њену десну страну треба развити у такав ред

$$\sum_{m=1}^{\infty} P_m \sin \alpha x = \frac{p(x, y)}{\mathfrak{D}},$$

Maurice Levý, (1899).

где су $P_m(y)$ коефицијенти реда који зависе од y . Уносећи ову релацију у (9.49) онда следи да је

$$F_m(y) = f_m^{IV} - 2\alpha^2 f_m^{II} + \alpha^4 f_m = P_m(y); \quad \alpha = \frac{m\pi}{a}, \quad (9.49.c)$$

па се проблем свео на обичну диференцијалну једначину четвртог реда. Када се обе стране једначине (9.49. а) помноже са $\sin(n\alpha x/a)$, онда се, с обзиром да је

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} x dx = \begin{cases} 0 & \text{за } m \neq n; \\ a/2 & \text{за } m = n, \end{cases}$$

добива диференцијална једначина

$$f_n^{IV}(y) - 2\alpha^2 f_n^{II}(y) + \alpha^4 f_n(y) = \frac{2}{\mathfrak{D}a} \int_0^a p(x, y) \sin \alpha x dx; \quad \alpha = \frac{n\pi}{a}. \quad (9.50)$$

Када се она интегралом, онда је десна страна функција само од y .

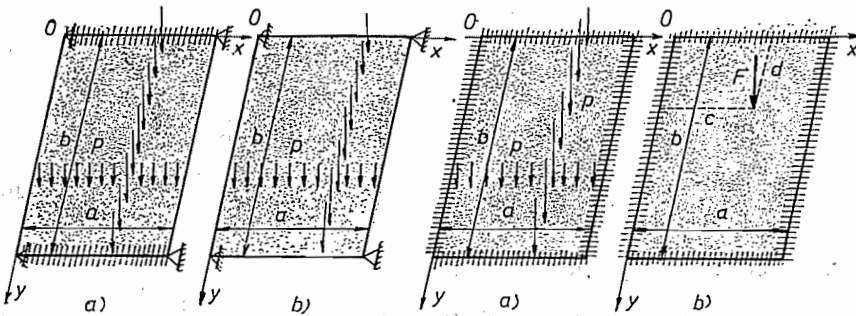
Према (7.67) опште решење ове једначине је

$$f_n(y) = (A_n + B_n y) \text{Ch } \alpha y + (C_n + D_n y) \text{Sh } \alpha y + \varphi_n(y); \quad \alpha = n/\pi a, \quad (9.51)$$

где је $\varphi_n(y)$ *партикуларни интеграл* једначине (9.50). Када је одређена функција $f_n(y)$ онда је познато и $w(x, y)$. Константе A_n, B_n, C_n и D_n одредиће се из услова ослањања оних других двеју страна плоче. А како има четири гранична услова (члан 9.3), то се могу одедити све четири константе.

На пример, код плоче оптерећене *једноликим континуалним оптерећењем*, $p = p_0 = \text{const}$, са две стране $x=0$ и $x=a$ *слободно ослоњене* (подупрте) а друге две ($y=0$ и $y=b$) *уклештене* (слика 9.9.а) гранични услови (9.16) су за

$$y=0 \text{ и } y=b, w=0; \quad \partial w/\partial y=0. \quad (9.51a)$$



Слика 9.9. — Правоугаона плоча са две стране ослоњене и две стране уклештене, односно слободне

Слика 9.10. — Савијање потпуно уклештене правоугаоне плоче

Из (9.50) следи

$$(2p/\mathfrak{D}a) \int_0^a \sin \alpha x dx = (4p/\mathfrak{D}a)\alpha; \quad \alpha = (2n-1)\pi/a,$$

па је партикуларни интеграл једначине (9.50)

$$\varphi(y) = 4p/\mathfrak{D} a \alpha^5 = K_{2n-1}; \quad \alpha = (2n-1)\pi/a. \quad (9.51.b)$$

Пошто су

$$w = \sum_r [(A_r + B_r y) \operatorname{Ch} \alpha y + (C_r + D_r y) \operatorname{Sh} \alpha y + K_r] \sin \alpha x; \quad \alpha = \frac{r\pi}{a}; \quad r = 2n-1;$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sum_r \{ [B_r + \alpha(C_r + D_r y)] \operatorname{Ch} \alpha y + [D_r + \alpha(A_r + B_r y) \operatorname{Sh} \alpha y] \sin \alpha x,$$

то се добија систем једначина

$$A_r = -K_r; \quad C_r = -\frac{1}{\alpha} B_r;$$

$$B_r (u \operatorname{Ch} u - \operatorname{Sh} u) + D_r u \operatorname{Sh} u = \alpha K_r (\operatorname{Ch} u - 1); \quad u = \alpha b;$$

$$B_r u \operatorname{Sh} u + D_r (u \operatorname{Ch} u + \operatorname{Sh} u) = \alpha K_r \operatorname{Sh} u,$$

из којих одређујемо константе

$$A = -K_r; \quad B_r = -\frac{\alpha(\operatorname{Ch} - 1)}{u + \operatorname{Sh} u} K_r; \quad C_r = \frac{\operatorname{Ch} u - 1}{u + \operatorname{Sh} u} K_r; \quad D_r = \frac{\alpha \operatorname{Sh} u}{u + \operatorname{Sh} u}, \quad (9.51.c)$$

па је угиб

$$w = \frac{4p a^4}{\mathfrak{D} \pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^5} \left\{ 1 - \left[1 + \frac{\alpha(\operatorname{Ch} u - 1)}{u + \operatorname{Sh} u} y \right] \operatorname{Ch} \alpha y + \left[\frac{\operatorname{Ch} u - 1}{u + \operatorname{Sh} u} + \frac{\alpha \operatorname{Sh} u}{u + \operatorname{Sh} u} y \right] \operatorname{Sh} \alpha y \right\} \sin \alpha x; \quad \alpha = \frac{(2n-1)\pi}{a}; \quad u = (2n-1)\pi k; \quad k = \frac{b}{a}. \quad (9.52)$$

Резултати су дати у табlici 9.3.

Таблица 9.3.

Poisson-ов коефицијент $\mu = 0,3$

$k = \frac{b}{a}$	k	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	3,0	∞
$w_{\max} = \frac{\alpha p a^4}{10^4 E h^3}$	α	209	340	502	658	799	987	1276	1422
$M'_{\max} = \frac{\beta}{10^3} p a^2$	β	70	87	100	109	115	119	125	125

Ако су друге две стране слободне (слика 9.9. b) партикуларни интеграл (9.51. b) остаје исти, али су гранични услови

$$\left. \begin{aligned} \text{за } y=a; \\ y=b; \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (\partial^2 w / \partial y^2) + \mu (\partial^2 w / \partial x^2) &=; (\partial^3 w / \partial y^3) + (2 - \mu) (\partial^3 w / \partial x^2 \partial y) = 0; \\ f^{\text{II}} - \mu \alpha^2 f &= \mu \alpha^2 K; \quad f^{\text{III}} - \alpha^2 (2 - \mu) f^{\text{I}} = 0 \end{aligned} \quad (9.53. a)$$

па се за $\mu=0,3$ константе одређују из система једначина:

$$7 A_r \alpha + 20 D = 3 \alpha K_r; \quad \alpha = \frac{r \pi}{a}; \quad r = (2n - 1); \quad u = (2n - 1) \pi k; \quad k = \frac{b}{a};$$

$$C_r = \frac{13}{7 \alpha} B_r;$$

$$\begin{aligned} 7 A_r \alpha \text{Ch } u + B_r (33 \text{Sh } u + 7 u \text{Ch } u) + D_r (20 \text{Ch } u + 7 u \text{Sh } u) &= 3 \alpha K_r; \\ -7 A_r \alpha \text{Sh } u - 7 B_r u \text{Sh } u + D_r (13 \text{Sh } u - 7 u \text{Ch } u) &= 0. \end{aligned} \quad (9.53. b)$$

За квадратну плочу ($k=1$) и за $n=1$ ($u=\pi$; $\text{Ch } \pi=11,5920$; $\text{Sh } \pi=11,5487$) константе су

$$A = 0,395 K; \quad B = -0,412 K/a; \quad C = -0,242 K; \quad D = 0,037 K/a, \quad (9.53. c)$$

па је угиб у средини плоче

$$w(x=a/2; y=a/2) = 0,152 \rho a^4 / E h^3. \quad (9.53. d)$$

9.10. Савијање потпуно уклештене правоугаоне плоче. — За разлику од тачне Evans-ове методе* која је много компликована, у случају потпуно уклештене правоугаоне плоче (слика 9.10. a) применићемо као и код торзије (члан 5.8) Ritz-ову методу**. Функција

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} (1 - \cos 2 \alpha x) (1 - \cos 2 \beta y), \quad (9.54. a)$$

где су $\alpha = m \pi / a$; $\beta = n \pi / b$, задовољава граничне услове

$$\text{за } x=0 \text{ и } x=a; w=0; \partial w / \partial x=0; \text{ за } y=0 \text{ и } y=b; w=0; \partial w / \partial y=0 \quad (9.54. b)$$

Када се израз (9.54. a) унесе у израз за деформациони рад уклештене плоче (9.29) добија се

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_d = 2 \mathfrak{D} \int_0^a \int_0^b \left\{ \sum_m \sum_n A_{mn} [\alpha^2 \cos 2 \alpha x (1 - \cos 2 \beta y) + \right. \\ \left. + \beta^2 \cos 2 \beta y (1 - \cos 2 \alpha x)] \right\}^2 dx dy; \quad k = \frac{b}{a}, \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_d = \frac{2 \mathfrak{D} \pi^4}{a^2 k^3} \left\{ \sum_m \sum_n [3 m^4 k^4 + 3 n^4 + 2 m^2 n^2 k^2] A_{mn}^2 + \right. \\ \left. + \sum_m \sum_r \sum_s \sum_n 2 m^4 k^4 A_{mr} A_{ms} + \sum_r \sum_s \sum_n 2 n^4 A_{rn} A_{sn} \right\}; \quad \begin{matrix} m, n, \\ r, s \end{matrix} = 1, 2, 3, \dots \quad (9.55) \end{aligned}$$

Рад оптерећења зависи од његове врсте, па ћемо разликовати два случаја.

а) *Једнолико подељено оптерећење.* — Када је континуално оптерећење једнолико, $p = p_0 = \text{const}$, (слика 9.10. а), тада је рад ових сила

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = -E_p &= p \int_0^a \int_0^b w \, dx \, dy = p \int_0^a \int_0^b \sum_m \sum_n A_{mn} (1 - \cos 2\alpha x) (1 - \cos 2\beta y) \, dx \, dy = \\ &= p a^2 k \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}. \end{aligned} \quad (9.56)$$

Коефицијенте A_{mn} треба изабрати да укупна потенцијална енергија има екстремну вредност и то минимум, па ће бити

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A_{mn}} (\mathbf{A}_d + E_p) &= 0; [3m^4 k^4 + 3n^4 + 2m^2 n^2 k^2] A_{mn} + \\ &+ \sum_{\substack{r=1 \\ (r \neq n)}}^{\infty} 2m^4 k^4 A_{mr} + \sum_{\substack{r=1 \\ (r \neq m)}}^{\infty} 2n^4 A_{rn} = \frac{p a^4 k^4}{4 \mathfrak{D} \pi^4} = K. \end{aligned} \quad (9.57)$$

те се проблем своди на систем алгебарских једначина из којих треба одредити коефицијенте A_{mn} , онда, према (9.54. а), угиб и даље моменте савијања, увијања и трансверзалне силе.

Тачност зависи од броја коефицијента A_{mn} .

На пример, биће:

A_{11}	A_{12}	A_{21}	A_{22}	A_{13}	A_{31}	A_{33}	
$3k^4 + 2k^2 + 3$	$2k^4$	2	0	$2k^4$	2	0	K
$2k^4$	$3k^4 + 8k^2 + 48$	0	32	$2k^4$	0	0	K
2	0	$48k^4 + 8k^2 + 3$	$32k^4$	0	2	0	K
0	32	$32k^4$	$16(3k^4 + 2k^2 + 3)$	0	0	0	K
$2k^4$	$2k^4$	0	0	$3k^4 + 18k^2 + 243$	0	162	K
2	0	2	0	0	$243k^4 + 18k^2 + 3$	$162k^4$	K
0	0	0	0	162	$162k^4$	$81(3k^4 + 2k^2 + 3)$	K

За квадрантну плочу ($a=b$; $k=1$) добија се:

A_{11}	A_{12}	A_{21}	A_{22}	A_{13}	A_{31}	A_{33}		$K' = pa^4/4 \cdot \pi^4 \cdot 10^5$	
8	2	2	0	2	2	0	K	A_{11}	11744 K'
2	59	0	32	2	0	0	K	A_{12}	1184 K'
2	0	59	32	0	2	0	K	A_{21}	1184 K'
0	32	32	128	0	0	0	K	A_{22}	189 K'
2	2	0	0	264	0	162	K	A_{13}	268 K'
2	0	2	0	0	264	162	K	A_{31}	268 K'
0	0	0	0	162	162	648	K	A_{33}	20 K

$w_{\max}(x=y=a/2) = 4(A_{11} + A_{13} + A_{31} + A_{33}) = 0,0138 pa^4/Eh^3; \mu = 0,3.$

Резултати се слажу са вредношћу Еванс-а.

Прва решења за потпуно уклештену правоугаону плочу дали су И. Г. Бубнов* (Ст. Петербург, 1964) и Н. Ненску (München, 1913). Резултати Бубнова и његових сарадника дати су у таблица 9.4.

Таблица 9.4.

$\mu = 0,3$

$\frac{b}{a}$	$w_{(\max)} = \frac{\alpha \cdot pa^4}{10^4 \cdot Eh^3}$	$M_{(x)}' = \frac{\beta_1}{10^4} \cdot pa^2$		$M_{(y)}' = \frac{\beta_2}{10^4} \cdot pa^2$	
		$x=a/2; y=0$	$x=a/2; y=b/2$	$x=0; y=b/2$	$x=a/2; y=b/2$
k	α	β_1		β_2	
1,0	138	513		— 513	
1,1	164	538	231	— 581	264
1,2	188	554	228	— 639	299
1,3	209	563	222	— 687	327
1,4	226	568	212	— 726	349
1,5	240			— 757	
1,6	251	571	193	— 780	381
1,7	260	571	182	— 799	392
1,8	267	571	174	— 812	401
1,9	272	571	165	— 822	407
2,0	277	571		— 829	
∞	284			— 830	

* И. Г. Бубнов, Строительная механика корабля (1914).

б) *Концентрисана сила*. Када у тачки $N(x=c; y=d)$ дејствује концентрисана сила F (слика 9.10.б), онда се мења само рад ове силе, па је

$$\mathbf{A} = -E_p = Fw(x=c; y=d) = F \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(1 - \cos \frac{2m\pi c}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2n\pi d}{b}\right), \quad (9.58)$$

те се коефицијенти A_{mn} могу одредити из израза

$$\begin{aligned} [3m^4k^4 + 3n^4 + 2m^2n^2k^2] A_{mn} + \sum_{(r \neq n)} 2m^4k^4 A_{mr} + \sum_{(r \neq m)} 2n^4 A_{rn} = \\ = \frac{Fa^2k^3}{4\mathfrak{D}\pi^4} \left(1 - \cos \frac{2m\pi c}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2n\pi d}{b}\right). \end{aligned} \quad (9.59)$$

У случају *квадратне плоче* ($a=b; k=1$) када сила дејствује у средини горње основе $c=d=a/2$, слично прегходном поступку, добијају се коефицијенти:

$$A_{11}=12662 K; A_{12}=A_{21}=-601 K; A_{22}=301 K; A_{13}=A_{31}=278 K; A_{33}=15 K$$

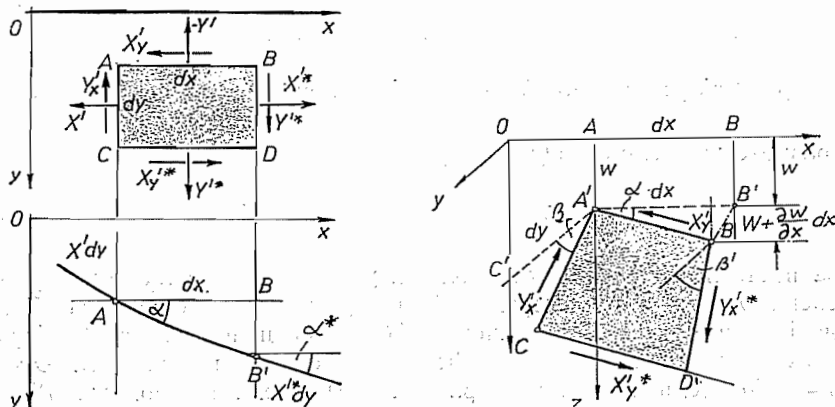
где је $K=Fa^2/10^5 \mathfrak{D} \pi^4$.

Највећи угиб је у средишту и износи

$$w_{\max}(x=y=a/2)=0,0593 Fa^2/Eh^3,$$

и мањи је за 3% од вредности коју је добио С. П. Тимошенко*.

9.11. Савијање правоугаоне плоче попречним оптерећењем и силама у њеној средњој равни. — Ако је плоча оптерећена у средњој равни и силама, онда се мора утјцај ових сила показати и у једначини (9.7). На елементу $ABCD$, ивица dx и dy (слика 9.11.а) дејствују силе:



Слика 9.11. — Правоугаона плоча изложена дејству оптерећења $p(x, y)$ и силама у средњој равни

* S. P. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, Mc Graw-Hill Book Co., New York, (1959).

$$X' dy; \quad X'^* dy = \left(X' + \frac{\partial X'}{\partial x} dx \right) dy;$$

$$Y' dx; \quad Y'^* dx = \left(Y' + \frac{\partial Y'}{\partial y} dy \right) dx;$$

$$X'_y dx; \quad X'_y{}^* dx = \left(X'_y + \frac{\partial X'_y}{\partial y} dy \right) dx; \quad (9.60.a)$$

$$Y'_x dy; \quad Y'_x{}^* dy = \left(Y'_x + \frac{\partial Y'_x}{\partial x} dx \right) dy; \quad X'_y = Y'_x.$$

Због деформације странице странице AB (слика 9.11.b) силе $X' dy$ и $X'^* dy$ граде са Ox осом углове α и $\alpha^* = \alpha + (\partial \alpha / \partial x) dx$. Како су ови нагиби мали може се ставити

$$\sin \alpha \approx \alpha = \partial w / \partial x; \quad \sin \alpha^* \approx \alpha^* = (\partial w / \partial x) + (\partial^2 w / \partial x^2) dx;$$

$$\cos \alpha \approx [1 - \sin^2 \alpha]^{1/2} \approx 1 - (\alpha^2 / 2) \approx 1; \quad \cos \alpha^* \approx 1. \quad (9.60.b)$$

Пошто су силе $Z_{(x)'}'$ и $Z_{(y)'}'$ вертикалне, то је равнотежни услов у Ox -правцу

$$\sum X_i = (X'^* \cos \alpha^* - X' \cos \alpha) dy + (X'_y{}^* \cos \alpha^* - X'_y \cos \alpha) dx =$$

$$= \left(\frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial X'_y}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

односно

$$(\partial X / \partial x') + (\partial X'_y / \partial y) = 0. \quad (9.60.c)$$

Аналогно при деформацији странице AC следи

$$\beta = \partial w / \partial y; \quad \beta^* = (\partial w / \partial y) + (\partial^2 w / \partial y^2) dy; \quad \cos \beta^* \approx \cos \beta \approx 1, \quad (9.60.d)$$

па је равнотежни услов у Oy правцу

$$(\partial Y' / \partial y) + (\partial Y'_x / \partial x) = 0; \quad X'_y = Y'_x. \quad (9.60.e)$$

За постављање равнотежног услова у Oz -правцу мора се узети у обзир оптерећење $p(x, y)$ и трансверзалне силе $Z_{(x)'}'$ и $Z_{(y)'}'$. Ако је w угиб тачке A' онда је угиб тачке C' странице $A'C'$ већи и износи $w + (\partial w / \partial y) dy$. Због тога се страница $A'C'$ заокреће према Oz -оси и гради са Oy -осом угао $\beta = \partial w / \partial y$ (слика 9.11.c). Страница $B'D'$ прелази у положај $B''D''$ и заокреће се према Oz -оси, па гради са Oy -осом угао $\beta' = \beta + (\partial \beta / \partial x) dx$. Аналогно томе странице AB и CD прећи ће у положаје $A'B'$ и $C'D'$ и градиће са Ox -осом углове α и α' . Према томе су:

$$\alpha' = \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy; \quad \beta' = \beta + \frac{\partial \beta}{\partial x} dx = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx. \quad (9.60.f)$$

Равнотежни услов је:

$$\sum Z_i = [p + (\partial Z_{(x)'} / \partial y) + (\partial Z_{(y)'} / \partial x)] dx dy + (X'^* \alpha^* - X' \alpha) dy + \\ + (Y'^* \beta^* - Y' \beta) dx + (X_y'^* \alpha' - X_y' \alpha) dx + (Y_x'^* \beta' - Y_x' \beta) dy = 0.$$

Пошто су изрази

$$(X'^* \alpha^* - X' \alpha) dy = \left[\left(X' + \frac{\partial X'}{\partial x} dx \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) - X' \frac{\partial w}{\partial x} \right] dy \approx \\ \approx \left[X' \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial X'}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right] dx dy;$$

$$(X_y'^* \alpha' - X_y' \alpha) dx = \left[\left(X_y' + \frac{\partial X_y'}{\partial y} dy \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy \right) - X_y' \frac{\partial w}{\partial x} \right] dx \approx \\ \approx \left[X_y' \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial X_y'}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right] dx dy,$$

када се занемаре мале величине вишег реда, то се после скраћења са $dx dy$ добија релација

$$p + \frac{\partial Z_{(x)'}}{\partial y} + \frac{\partial Z_{(y)'}}{\partial x} + X' \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Y' \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial X_y'}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \\ + \left(\frac{\partial Y'}{\partial y} + \frac{\partial Y_x'}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial y} + 2 X_y' \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0.$$

Изрази у заградама су, према (9.60.с) и (9.60.е), једнаки нули. Уношењем релација (9.11), пошто силе у средњој равни не утичу на моменте савијања и увијања, добија се диференцијална једначина еластичне површине овако напрегнуте плоче*

$$\Delta \Delta w = \frac{1}{\mathfrak{D}} \left[p + X' \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Y' \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 X_y' \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]. \quad (9.61)$$

Ако у средњој равни дејствују и запреминске силе $X'' = X_y' h$, $Y'' = Y_x' h$ рачунате по јединици површине средње равни, јединице $[\text{kN/cm}^2]$ онда се равнотежни услови у Ox - и Oy -правцу морају допунити овим силама, па је диференцијална једначина еластичне површи плоче

$$\Delta \Delta w = \frac{1}{\mathfrak{D}} \left[p + X' \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Y' \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 X_y' \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - X'' \frac{\partial w}{\partial x} - Y'' \frac{\partial w}{\partial y} \right]. \quad (9.62)$$

Ове једначине су изведене под претпоставком да су јединичне силе (специфична оптерећења) *заштедна*, што значи да их треба узети са својим предзнаком (— у случају *притисних сила*).

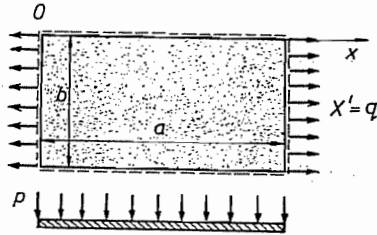
* Ову једначину је извео S. Venant (1883).

Ако је слободно ослоњена правоугаона плоча оптерећена попречним једноликим оптерећењем $p = p_0 = \text{const}$ и затезним силама $X' = q$ [kN/cm] у Ox -правцу (слика 9.12.), онда су гранични услови (9.32) задовољени са (9.33)

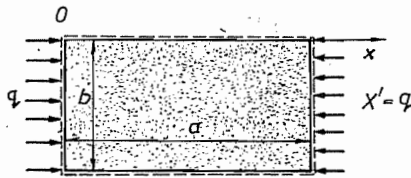
$$\left. \begin{matrix} x=0 \\ x=a \end{matrix} \right\} \left. \begin{matrix} w=0; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \end{matrix} \right\} \left. \begin{matrix} y=0 \\ y=b \end{matrix} \right\} \left. \begin{matrix} w=0; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \end{matrix} \right\} w = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y; \quad (9.63.a)$$

где су $\alpha = m\pi/a$; $\beta = n\pi/b$. Диференцијална једначина (9.61) је облика

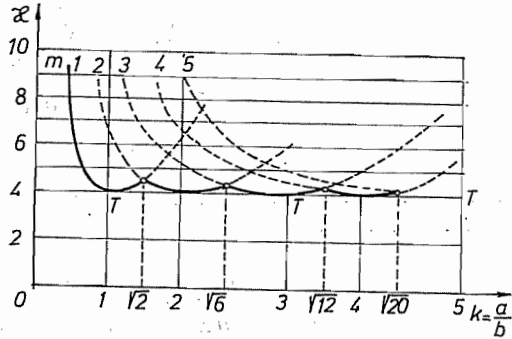
$$\Delta \Delta w - \frac{q}{\mathfrak{D}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{p}{\mathfrak{D}}, \quad (9.63.b)$$



Слика 9.12. — Савијање и затезање правоугаоне ослоњене плоче



Слика 9.13. Испупчење слободно ослоњене правоугаоне плоче



Слика 9.14. — Дијаграм промене коефицијента извијања у зависности од односа $k = a/b$

па када се и оптерећење $p(x, y)$ развије у Fourier-ов ред (као у чл. 9.8) добијају се коефицијенти

$$A_{(2m-1)(2n-1)} = \frac{16p}{\mathfrak{D}\pi^6} \cdot \frac{1}{(2m-1)(2n-1)} \cdot \frac{1}{\left[\left(\frac{2m-1}{a} \right)^2 + \left(\frac{2n-1}{b} \right)^2 \right]^2 + \frac{q}{\mathfrak{D}\pi^2} \left(\frac{2m-1}{a} \right)^2}, \quad (9.64)$$

па је угиб

$$w = \frac{16p}{\mathfrak{D}\pi^6} \cdot \sum_m \sum_n \frac{1}{(2m-1)(2n-1)} \cdot \frac{\sin \frac{(2m-1)\pi}{a} x \sin \frac{(2n-1)\pi}{b} y}{\left[\left(\frac{2m-1}{a} \right)^2 + \left(\frac{2n-1}{b} \right)^2 \right]^2 + \frac{q}{\mathfrak{D}\pi^2} \left(\frac{2m-1}{a} \right)^2}. \quad (9.65)$$

Упоређењем са изразом (9.38) види се да се због члана $q(2m-1)/\mathfrak{D}\pi^2 a^2$ угиб *смањује*, односно у случају притисних сила ($-X' = -q$) *повећава*.

9.12. Испупчење слободно ослоњене правоугаоне плоче. Слободно ослоњена правоугаона плоча оптерећена је *само притисним силама* у средњој равни које дејствују у смеру Ox осе, интензитета q (слика 9.13). Пошто су овде

$$p=0; \quad Y'=0; \quad Y'_y=Y'_x=0, \quad (9.66.a)$$

то је диференцијална једначина (9.61) облика

$$\mathfrak{D} \Delta \Delta w + q(\partial^2 w / \partial x^2) = 0. \quad (9.66.b)$$

Гранични услови (9.63.a) су задовољени релацијом

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y; \quad \alpha = m\pi/a; \quad \beta = n\pi/b. \quad (9.66.c)$$

Уношењем ове релације у предњу једначину она постаје

$$\sum \sum [\mathfrak{D}(\alpha^2 + \beta^2)^2 - q\alpha^2] A_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y = 0. \quad (9.66.d)$$

Тривијално решење $A_{mn}=0$ мора се одбацити, јер је тада $w=0$, па мора бити израз у загради једнак нули, одакле се добија специфично оптерећење*

$$q = \frac{\mathfrak{D}\pi^2}{a^2} \left[m + \frac{n^2}{m} \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]^2 = \chi \frac{\mathfrak{D}\pi^2}{b^2}; \quad \chi = \left(\frac{mb}{a} + n^2 \frac{a}{mb} \right)^2 = \left(\frac{m}{k} + \frac{n^2 k}{m} \right)^2; \quad k = \frac{a}{b}. \quad (9.67)$$

Дакле, ако је притисак q једнак некој вредности из предње једначине онда су $A_{mn} \neq 0$ и $w \neq 0$, па паступа *испупчење плоче* које је аналогно појави *извијања трега*. Најмањи притисак при којем настаје испупчење плоче назива се *критични*. Дакле треба одредити целе бројеве m и n при којој ће вредност коефицијента испупчења χ бити најмања, што значи треба одредити бројеве полуталаса испучене површи у правцима оса Ox и Oy . Из (9.67) се види да је најмања вредност тог коефицијента када је $n=1$, јер је n у бројоцу. Коефицијент χ зависи од броја полуталаса m и односа страница $k=a/b$. Диференцирањем се добија

$$\chi = \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 = \left(\frac{m}{k} + \frac{k}{m} \right)^2 = \left(\nu + \frac{1}{\nu} \right)^2; \quad \frac{d\chi}{d\nu} = 2 \left(\nu + \frac{1}{\nu} \right) \left(1 - \frac{1}{\nu^2} \right) = 0; \quad \nu = 1;$$

па су најмањи коефицијент и критично оптерећење

$$\chi_{cr \min} = 4; \quad q_{cr} = \frac{4\pi^2 \mathfrak{D}}{b^2} = \frac{\pi^2 E h^3}{3(1-\mu^2)b^2} = 3,6152 \frac{E h^3}{b^2}; \quad \mu = 0,3; \quad (9.68.a)$$

односно критични напон

$$\sigma_{cr \min} = \frac{q_{cr}}{h} = 3,6152 E \left(\frac{h}{b} \right)^2. \quad (9.68.b)$$

* Овај резултат је добио G. H. Bryan, Proc. London Math. Soc, t. 22, (1891).

Плоча се испупчује тако да постоји само један полуталас у Oy -правцу ($n=1$) и више полуталаса у правцу притиска (Ox -правцу).

Коефицијент κ зависи од односа $k=a/b$. Из услова $dx/dk = 2[(m/k) - (k/m^2)][(-m/k^2) + (1/m)] = 0$ следи да су темена кривих у тачкама $T(m=k; 4)$. Две криве које се разликују за 1, секу се у тачки у којој је

$$\kappa_{(m)} = \kappa_{(m+1)}; \quad [(m/k) + (k/m)] = [(m+1)/k + (k/(m+1))]; \quad k = \sqrt{m(m+1)}. \quad (9.68.c)$$

За $m=1$ добија се само један полуталас у Ox правцу. Како је тада према предњем $k=\sqrt{2}$, то је ту прелаз на два полуталаса. За $m=2$ биће два полуталаса, па је у тачки $k=\sqrt{6}$ прелаз са два на три полуталаса. Дијаграм промене κ од k за различито m приказан је на слици (9.14). Види се да број полуталаса расте са односом $k=a/b$. За врло дугачке плоче је m велики број, па се може у предњем изразу ставити $k=a/b \approx m$. Таква плоча се извија у полуталасе чија је дужина $\lambda = a/m = b$, па се плоча дели приближно у квадрате.

Када се према дијаграму одреди број полуталаса онда се може израчунати

$$\kappa = \left(\frac{m}{k} + \frac{k}{m}\right)^2; \quad \sigma_{cr} = 0,9038 \kappa E \left(\frac{h}{b}\right)^2 = \alpha E \left(\frac{h}{b}\right)^2. \quad (9.68.d)$$

За $k=1$, $\mu=0,3$ вредности су дате у табlici 9.5.

Таблица 9.5.

 $m=1; \mu=0,3$

$k=a/b$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$\kappa = \left(\frac{1}{k} + k\right)^2$	27,04	13,20	8,41	6,25	5,14	4,53	4,20
$\alpha = 0,9038 \kappa$	24,4387	11,9302	7,6030	5,6488	4,6455	4,0942	3,7960
$k=a/b$	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	21,41
$\kappa = \left(\frac{1}{k} + k\right)^2$	4,04	4,00	4,04	4,13	4,28	4,47	4,49
$\alpha = 0,9038 \kappa$	3,6514	3,6152	3,6514	3,7327	3,8683	4,0400	4,0581

9.13. Примена методе деформационог рада: — Деформациони рад (потенцијална енергија деформације) изражена је обрасцем (9.27). При деформацији и силе које дејствују у средњој равни врше радове. Услед деформације елемент AB (слика 9.11. c) прећи ће у положај $A'B''$, али како се напони и деформације у средњој равни не мењају то је $A'B''$ остало дужине dx али му се пројекција на Ox -осу променила. Са слике се види да је као и код извијања греде

$$\overline{AB}'' = \left[dx^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx\right)^2 \right]^{1/2} \approx \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right].$$

па сила $X'dy$ на томе померању врши рад. Аналогно ће бити и рад силе $Y'dx$, па је

$$\mathbf{A}^{(1)} = \frac{1}{2} \int \int_{(A)} \left[X' \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + Y' \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy, \quad (9.69.a)$$

када се занемаре мале величине вишег реда.

Да би се одредио рад сила смицања $X'_y dx$ и $X'_x dy$ мора се претходно одредити клизање услед савијања плоче. Елемент $A'B''$ гради са координатним осама углове $\varphi_1, \psi_1, \theta_1$ чији су косинуси

$$\cos \varphi_1 \approx \frac{1}{dx} \cdot dx \left[1 - \frac{\partial w}{\partial x} \right]^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \cos \psi_1 = 0; \quad \cos \theta_1 = \sin \alpha \approx \alpha = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Аналогно томе елемент $A'C''$ гради са осама углове $\varphi_2, \psi_2, \theta_2$ чији су косинуси

$$\cos \varphi_2 = 0; \quad \cos \psi_2 \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \quad \cos \theta_2 = \sin \beta \approx \beta = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Клизање је промена првог угла код $B''A'C''$, па је

$$\begin{aligned} \sin \left[\frac{\pi}{2} - \sphericalangle B''A'C'' \right] &\approx \gamma_{xy} = \cos (\sphericalangle B''A'C'') = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \psi_1 \cos \psi_2 + \\ &+ \cos \theta_1 \cos \theta_2 = \cos \theta_1 \cos \theta_2 = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned}$$

па је рад услед сила смицања

$$\mathbf{A}_s^{(2)} = \frac{2}{2} \int \int_{(A)} X'_y \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy; \quad X'_y = Y'_x. \quad (9.69.b)$$

Према томе је укупан рад сила које дејствују у средњој равни плоче

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \int \int_{(A)} \left[X' \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + Y' \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 X'_y \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy. \quad (9.70)$$

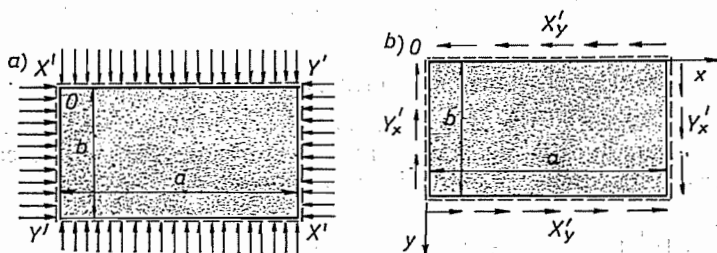
Услов је да укупна потенцијална енергија при испупчењу има стационарну вредност, па ће се одатле одредити критична вредност сила:

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{A}. \quad (9.71)$$

9.13.1. Испупчење слободно ослоњене правоугаоне плоче притиснуте у средњој равни у два управна правца. — Нека је слободно ослоњена правоугаона плоча (слика 9.15.a) притиснута у средњој равни силама $-X'$ и $-Y'$ у правцима оса Ox и Oy , онда је $X'_y = Y'_x = 0$. За угиб ће се узети, као и раније, израз:

$$w = \sum \sum A_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y; \quad k = \frac{a}{b}, \quad (9.72.a)$$

који задовољава граничне услове (9.33), где m одређује број полуталаса у Ox , а n у Oy -правцу. Уносећи овај израз у (9.71), с обзиром на (9.27) и (9.70), биће



Слика 9.15— Испупчење слободно ослоњене плоче: а) услед притиска у два правца, б) услед смицања

$$m^2 X' + n^2 k^2 Y' = -\frac{\mathfrak{D} \pi^2}{a^2} (m^2 + n^2 k^2); \quad m^2 \sigma_x + n^2 \sigma_y = -\sigma_e (m^2 + n^2 k^2)^2;$$

$$\sigma_e = \frac{\mathfrak{D} \pi^2}{a^2 h}; \quad \sigma_x = X' h; \quad \sigma_y = Y' h, \quad (19.72.b)$$

јер су интегрални

$$\int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{m\pi}{a} x \sin^2 \frac{n\pi}{b} y \, dx \, dy = \int_0^a \int_0^b \cos^2 \frac{m\pi}{a} x \cos^2 \frac{n\pi}{b} y \, dx \, dy = \frac{a}{2} \frac{b}{2} = \frac{ab}{4}. \quad (9.72.c)$$

Дакле, узимајући да су m и n цели бројеви, из (9.72.a) добија се једначина угиба испупчене плоче, а напони морају да задовоље једначину (9.72.b). Ако између сила X' и Y' постоји неки однос, $X' = c Y'$, онда се може одредити тај коефицијент, или се може зависност (9.72.b) претставити у систему координата $O \sigma_x \sigma_y$ као права линија за сваки пар вредности m, n .

У специјалном случају када је $-\sigma_x = -\sigma_y = -\sigma$ једначина (9.72.b) је облика

$$\sigma = -\sigma_e (m^2 + n^2 k^2); \quad \sigma_{cr} = \sigma_{min} = -\sigma_e (1 + k^2); \quad \sigma_e = \frac{\mathfrak{D} \pi^2}{a^2 h}, \quad (9.73.a)$$

а најмања вредност се добија за $m=n=1$. За квадратну плочу ($k=1$) биће:

$$\sigma_{cr} = -2 \sigma_e = -2 \mathfrak{D} \pi^2 / a^2 h = 1,8076 E (h/a)^2; \quad k = a/b = 1 \quad (9.73.b)$$

па износи половину вредности од оне за случај притиска у једном правцу (таблица 9.5).

9.13.2 Испупчење слободно ослоњене правоугаоне плоче услед смицајних сила у средњој равни. — Када је слободно ослоњена правоугаона плоча изложена дејству само смицајних сила у средњој равни (слика 9.15.b), онда су $X' = Y' = 0$. Како су $X_y' = Y_x'$ то је, према (9.70), рад сила једнак само

раду смицајних сила. Када се за угиб узме израз (9.72.а) и унесе у (9.27), с обзиром на (9.72.с), биће деформациони рад

$$A_d = \frac{\mathfrak{D}}{8} \frac{\pi^4}{ka^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 (m^2 + n^2 k^2)^2; \quad k = \frac{a}{b}, \quad (9.74.a)$$

док је рад смицајних сила (9.69.б):

$$A = -X_y' \int_0^a \int_0^b \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy = 8 X_y' \sum_m \sum_n \sum_r \sum_s A_{mn} A_{rs} \frac{m n r s}{(m^2 - r^2)(n^2 - s^2)};$$

$$m \pm p = 2\nu - 1;$$

$$n \pm s = 2\eta - 1; \quad (9.74.b)$$

јер су интегрални

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{r\pi}{a} x dx = \begin{cases} 0 & m \pm p = 2\nu; \\ \frac{2a}{\pi} \frac{m}{m^2 - r^2} & \text{за} \\ & m \pm p = 2\nu - 1. \end{cases} \quad (9.74.c)$$

Критична вредност смицајне силе, а тиме и критична вредност тангенцијалног напона $\tau_{cr} = X_y'_{cr}/h$ одређује се из услова (9.71), па је

$$X_y' = \tau_{xy} h = \frac{\mathfrak{D} \pi^4}{64 ka^4} \frac{\sum_m \sum_n A_{mn}^2 (m^2 + n^2 k^2)^2}{\sum_m \sum_n \sum_r \sum_s A_{mn} A_{rs} \frac{m n r s}{(m^2 - r^2)(n^2 - s^2)}} = \frac{B}{J'}; \quad \begin{matrix} m+r=2\nu-1; \\ n+s=2\eta-1; \end{matrix} \quad (9.75)$$

где су m, n, r, s такви цели бројеви да су $m+r$ и $n+s$ непарни бројеви. Ако су бројеви m и n *парни* морају бити бројеви r и s *непарни*, и обратно ако су m и n *непарни* морају бити r и s *парни* бројеви, што значи да ако је $m+n$ *паран* број онда је и $r+s$ *паран* број, и обратно ако је $m+n$ *непаран* број онда је $r+s$ *непаран* број.

Коефицијенте A_{mn} из (9.75) треба тако изабрати да сила X_y' буде најмања, то јест из услова

$$(\partial B / \partial A_{mn}) - X_y' (\partial J / \partial A_{mn}) = 0 \quad (9.76.a)$$

где су B и J бројилац и именилац израза (9.75). Овим се проблем своди на бескрајан систем хомогених алгебарских једначина са константним коефицијентима облика

$$A_{mn} \left(\frac{m^2}{k} + n^2 k \right) K + mn \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} A_{rs} \frac{rs}{(m^2 - r^2)(n^2 - s^2)}; \quad m+n=2\nu;$$

$$\lambda = -\frac{\pi^4}{32k X_y' b^2} \mathfrak{D} = -0,278 \frac{E}{k \tau_{cr}} \left(\frac{h}{b} \right)^2. \quad (9.76.b)$$

С обзиром на горе наведене односе између коефицијената овај систем се може *поделити* на два система једначина, један код кога је број $m+n$ *паран* и други чији је број $m+n$ *непаран*. Прорачуни показују да први систем даје за критичну силу $X_y'_{cr}$ *најмању вредност*.

За пет коефицијената систем хомогених једначина је

A_{11}	A_{22}	A_{13}	A_{31}	A_{33}	
$\lambda \left(k + \frac{1}{k}\right)^2$	$\frac{4}{9}$	0	0	0	0
$\frac{4}{9}$	$16\lambda \left(k + \frac{1}{k}\right)^2$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{36}{25}$	0
0	$-\frac{4}{5}$	$\lambda \left(9k + \frac{1}{k}\right)^2$	0	0	0
0	$-\frac{4}{5}$	0	$\lambda \left(k + \frac{9}{k}\right)^2$	0	0
0	$\frac{36}{25}$	0	0	$81\lambda \left(k + \frac{1}{k}\right)^2$	0

Из услова да је детерминанта система једнака нули добија се

$$\Delta = 0; \quad \lambda^2 = \frac{k^4}{81(1+k^2)^4} \left[1 + \left(\frac{9}{25}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2 \left(\frac{1+k^2}{1+9k^2}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2 \left(\frac{1+k^2}{9+k^2}\right)^2 \right];$$

па је критични тангенцијални напон:

$$\tau_{cr} = -0,278 (E/k\lambda) (k/b)^2 = -\kappa E(h/b)^2; \quad \kappa = 0,278 1/k\mu; \quad \mu = 0,3. \quad (9.76.c)$$

Коефицијент κ зависи од λ и k . За различите вредности k , а за израчунате вредности λ из претходне једначине, резултати су дати у таблици 9.6

Таблица 9.6.

$\mu = 0,3$

$k=a/b$	1,0	1,2	1,4	1,5	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0
λ	8,4957	7,2304	6,5977	6,4170	6,3266	6,1458	5,9651	5,6939	5,5132

9.14. Испуцхење правоугаоне плоче слободно ослоњене на две стране и укљештене на друге две стране. — Стране $x=0$ и $x=a$ правоугаоне плоче су слободно ослоњене, а друге две стране $y=0$ и $y=b$ су укљештене а притисак дејствује у Ox -правцу $-X' = -q = \text{const}$ (слика 9.16). У овом случају применићемо методу М. Levý-а (члан 9.9). Пошто је за испуцхење довољно само један члан реда, за функцију угиба (9.48.b) узећемо

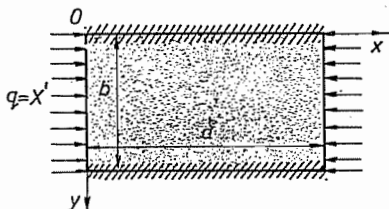
$$w = f \sin \alpha x; \quad f = f(y); \quad \alpha = m\pi/a. \quad (9.77.a)$$

Када се овај израз унесе у (9.61) пошто су $p = Y' = X_y' = 0$ и $-X' = -q$, добија се диференцијална једначина

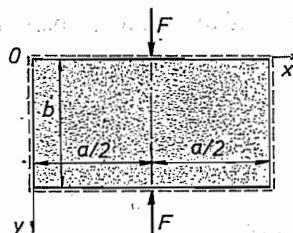
$$f^{IV} - 2\alpha^2 f'' - [(q/\mathfrak{D}) - \alpha^2 - \alpha^4] f = f^{IV} - 2\alpha^2 f'' - \beta^2 \gamma^2 f = 0, \quad (9.77.b)$$

а њено је решење

$$f(y) = A \operatorname{Ch} \beta y + B \operatorname{Sh} \beta y + C \cos \gamma y + D \sin \gamma y; \quad \beta^2 = \alpha \sqrt{q/D} + \alpha^2; \quad \gamma^2 = \alpha \sqrt{q/D} - \alpha^2 \quad (9.77.c)$$



Слика 9.16. — Испупчење правоугаоне плоче са две слободно ослоњене стране и две уклештене стране



Слика 9.17. — Испупчење плоче услед концентрисаних сила

Пошто су гранични услови на другим двама странама плоче

$$\text{за } y=0 \text{ и } y=b; \quad w=0; \quad \partial w / \partial y = 0 \quad (9.77.d)$$

то се добијају једначине:

$$\begin{aligned} C &= -A; & A \gamma / (\operatorname{Ch} \beta b - \cos \gamma b) + B (\gamma \operatorname{Sh} \beta b - \beta \sin \gamma b) &= 0; \\ D &= -\beta B / \gamma; & A (\beta \operatorname{Ch} \beta b + \gamma \sin \gamma b) + B \beta (\operatorname{Ch} \beta b - \cos \gamma b) &= 0, \end{aligned}$$

па се изједначењем са нулом десерминанте система једначина добија трансцендентна једначина за одређивање коефицијента β и γ :

$$2 \beta \gamma [1 - \operatorname{Ch} \beta b \cos \gamma b] + (\beta^2 - \gamma^2) \operatorname{Sh} \beta b \sin \gamma b = 0. \quad (9.78)$$

За дато $k = a/b$ могу се одредити коефицијенти β и γ а тиме и критична вредност напона. Она је најмања за $m=1$ и биће

$$\sigma_{kr} = -q/h = -\kappa E (h/b)^2. \quad (9.79)$$

где је κ коефицијент који зависи од односа $k = a/b$. Вредности су дате у таблици 9.7.

Таблица 9.7

$\mu=0,3$

$\frac{a}{b} =$ $=k$	$m=1$							$m=2$				$m=3$
	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,5	$\sqrt{3}$	1,8	2,0	2,5	2,83	3,0
κ	12,0928	7,8902	6,0916	5,2782	4,9257	4,8263	4,8173	4,6817	4,3824	4,0852	4,0671	3,9858

9.15. Испупчење слободно ослоњене правоугаоне плоче услед концентрисаних сила. — Слободно ослоњена правоугаона плоча оптерећена је са две

једнаке притисне силе F које дејствују у правцу Oy -осе (слика 9.17). Еластичну површ плоче изразићемо у облику реда

$$w = \sin \frac{\pi}{b} y \sum_m^{\infty} A_{2m-1} \sin \alpha x; \quad \alpha = (2m-1)\pi/a. \quad (9.80.a)$$

Тада су деформациони рад и рад сила

$$\mathbf{A}_d = \frac{\mathcal{D} \pi^4}{8 k a^2} \sum_m A_{2m-1}^2 [k^2 + (2m-1)^2]^2;$$

$$\mathbf{A} = \frac{F}{2} \int_0^b \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_{x=\frac{a}{2}} dy = \frac{F \pi^2 k}{4 a} [A_1 - A_3 + A_5 - \dots]^2, \quad (9.80.b)$$

па је критична сила

$$F_{cr} = \frac{\mathcal{D} \pi^2 \sum_m A_{2m-1}^2 [k^2 + (2m-1)^2]^2}{2 k^2 a (A_1 - A_3 + A_5 - \dots)^2}; \quad k = \frac{a}{b}. \quad (9.81.a)$$

Изједначајући са нулом изводе по сваком коефицијенту A_{2n-1} добија се систем алгебарских једначина

$$A_{2n-1} = \frac{2 k^2}{\mathcal{D} \pi^2} F_{cr} a \frac{(-1)^{n-1}}{[k^2 + (2n-1)^2]} \sum_m (-1)^{m-1} A_{2m-1}, \quad (9.81.b)$$

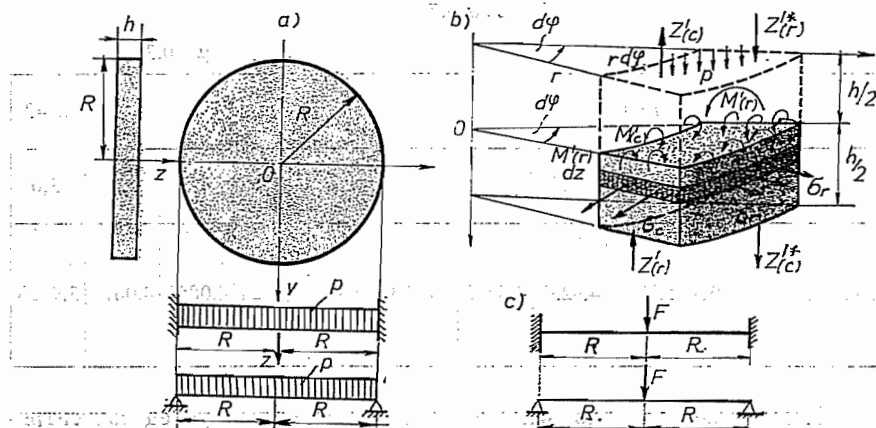
па је критична сила испупчења

$$F_{cr} = \frac{\mathcal{D} \pi^2}{2 b} \sum_m \frac{1}{k^3 \sum_n \frac{1}{[k^2 + (2n-1)^2]^2}} = \frac{4 \mathcal{D} \pi}{b} \frac{1}{\left[\text{Th} \frac{\pi k}{2} \frac{(\pi k/2)}{\text{ch}^2(\pi k/2)} \right]}. \quad (9.81.ж)$$

Како је за $k=4$, $\text{Th} 2\pi = 0,99999$ и $\text{Ch} 2\pi = 267,7468$ то је именилац другог члана врло близак јединици, па се за *гуиачке плоче* може узети да је критична сила:

$$k \gg 1; \quad F_{cr} = 4 \mathcal{D} \pi / b = 1,1508 \cdot E h^3 / b; \quad \mu = 0,3 \quad (9.81.d)$$

9.16. Савијање кружне плоче. — У случају савијања кружне плоче, мале дебљине h , користићемо поларно-цилиндричке координате r, φ, z , (слика 9.18.a). С обзиром на формуле трансформација координата и изводе (4.85.c),



Слика 9.18. — Савијање кружне плоче.

пошто угиб не зависи од z , а такође ни оптерећење, $p = p(r, \varphi)$, према (7.33) и (9.7) угиб је одређен релацијом

$$\Delta w(r, \varphi) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{p(r, \varphi)}{\mathfrak{D}} \quad (9.82)$$

Када се узме елемент плоче запремине $(r dr d\varphi)h$ (слика 9.18.b), онда су због извода

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \sin \varphi \right);$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial r} \sin \varphi + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right);$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right),$$

а према (9.9, 9.10 и 9.11), момент савијања, момент увијања и трансфер-залне силе:

$$\begin{aligned} \varphi = 0; \quad M'_{(r)} = M'_r = -\mathfrak{D} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]; \\ M'_{(c)} = M'_c = -\mathfrak{D} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right]; \end{aligned} \quad (9.81)$$

$$\varphi = 0; \quad \mathfrak{M}'_{(r)} = -\mathfrak{M}'_{(c)} = (1 - \mu) \mathfrak{D} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right); \quad (9.84)$$

$$\varphi = 0; \quad Z'_{(r)} = -\mathfrak{D} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Delta w); \quad Z'_{(c)} = -\mathfrak{D} \frac{\partial}{\partial r} (\Delta w);$$

$$\Delta w = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) w. \quad (9.85)$$

Сада су гранични (контурни) услови (члан 9.3):

a) уклешиена плоча

$$\text{за } r = R; \quad w = 0; \quad \partial w / \partial r = 0; \quad (9.86.a)$$

b) слободно-ослоњена плоча

$$\text{за } r = R; \quad w = 0; \quad M'_{(c)} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = 0; \quad (9.86.b)$$

c) слободна плоча

$$\text{за } r = R; \quad M'_{(c)} = 0; \quad \left[Z'_{(c)} - \frac{\partial \mathfrak{M}'_{(c)}}{r \partial \varphi} \right] = 0. \quad (9.86.c)$$

Када је оптерећење p симетрично распоређено у односу на вертикалну осу плоче која пролази кроз њено средиште, тада оно зависи само од r , па је $p = p(r)$, те једначина (9.82) тада има облик

$$\Delta \Delta w = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = w^{IV} + \frac{2}{r} w^{III} - \frac{1}{r^2} w^{II} + \frac{1}{r^3} w^I = \frac{p(r)}{\mathfrak{D}}. \quad (9.87)$$

9.16.1 Савијање кружне плоче једноликим оптерећењем. — У случају када је кружна плоча, полупречника R , оптерећена вертикалним једноликим континуалним оптерећењем $p = p_0 = \text{const}$ (слика 9.18.a), онда је слично једначини (7.83), решење једначине (9.87)

$$w = A \ln r + Br^2 + Cr^2 \ln r + D + p r^4 / 64 \mathfrak{D}, \quad (9.88.a)$$

где су A , B , C и D константе, а партикуларни интеграл је $w_p = p r^4 / 64 \mathfrak{D}$.

Пошто је $r=0$ угиб постаје бескрајан, то мора бити константа $A=0$. Према (9.85) за $r=0$ и трансверзална сила постаје бескрајна, па мора бити константа $C=0$. Стога једначина (9.88.a) у случају једноликог оптерећења ($p = \text{const}$) постаје

$$w = Br^2 + D + p r^4 / 64 \mathfrak{D} \quad (9.88.b)$$

а две константе се могу одредити из граничних услова (9.86).

За *вођуно уклешћену плочу* и *плочу слободно ослоњену* по целом спољашњем обиму резултати су дати у доњој табlici 9.8.

Таблица 9.8

$$\sigma_r = -6 \mathfrak{D} [(w'' + (uw'/r)]/h^2; \quad \sigma_c = -6 \mathfrak{D} [(w'/r) + \mu w'']/h^2; \quad Z = h/2; \quad w' = R^{-1} dw/dk; \quad k = r/R$$

	Плоча уклешћена	Плоча слободно ослоњена
B	$-p R^2/32 \mathfrak{D}$	$(3 + \mu) p R^2/32 (1 + \mu) \mathfrak{D}$
D	$p R^4/64 \mathfrak{D}$	$(5 + \mu) p R^4/64 (1 + \mu) \mathfrak{D}$
w	$\frac{p R^4}{64 \mathfrak{D}} (1 - k^2)^2$	$\frac{p R^4}{64 \mathfrak{D}} (1 - k^2) \left[\frac{5 + \mu}{1 + \mu} - k^2 \right]$
w_{\max} ($r=0$)	$\frac{p R^4}{64 \mathfrak{D}}$	$\frac{5 + \mu}{1 + \mu} \frac{p R^4}{64 \mathfrak{D}}$
σ_r $\left(z = \frac{h}{2} \right)$	$\frac{3 p R^2}{8 h^2} [(1 + \mu) - (3 + \mu) k^2]$	$\frac{p R^2}{8 h^2} \left[\frac{3(3 + \mu)}{8} (1 - k^2) \right]$
σ_c $\left(z = \frac{h}{2} \right)$	$\frac{3 p R^2}{8 h^2} [(1 + \mu) - (1 + 3 \mu) k^2]$	$\frac{3 p R^2}{8 h^2} [(3 + \mu) - (1 + 3 \mu) k^2]$
$\sigma_{r \max} =$ $= \sigma_{c \max}$ ($r=0$)	$\frac{3(1 + \mu) p R^2}{8 h^2} = \frac{6 M_{(r)'}}{h^2}$	$\frac{3(3 + \mu) p R^2}{8 h^2} = \frac{6 M_{(r)'}}{h^2}$

Из таблице се види да највећи угиби и највећи напони за уклештену и слободно ослоњену исту плочу, и са истим оптерећењем, стоје у односу

$$w_{\max}^{(s)} / w_{\max}^{(u)} = (3 + \mu) / (1 + \mu); \quad \sigma_{\max}^{(s)} / \sigma_{\max}^{(u)} = (3 + \mu) / (1 + \mu),$$

па је за $\mu = 0,3$ највећи угиб слободно ослоњене плоче 4,08 пута већи од највећег угиба уклештене плоче, док је највећи напон 2,5 пута већи.

9.16.2 Савијање кружне плоче концентрисаном силом у њеном средишту. —

Када је плоча оптерећена концентрисаном силом F [kN] у средишту плоче (слика 9.18.с) тада је $p = 0$. Пошто је за $r = 0$ угиб w коначан мора бити (слика 9.88.а) и константа $A = 0$. Када би сила F дејствовала континуално по ободу полупречника r , тада би трансверзална сила (из 9.85) била:

$$\begin{aligned} Z_{(c)}' &= -\frac{F}{2r\pi} = -\mathfrak{D} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w'}{r} + w'' \right) = -\mathfrak{D} \left(w''' + \frac{w''}{r} - \frac{w'}{r^2} \right) \\ &= -\mathfrak{D} C \left[\frac{2}{r} + \frac{2}{r} \ln r + \frac{3}{r} - \frac{2}{r} \ln r - \frac{1}{r} \right] = -\frac{4C\mathfrak{D}}{r}, \end{aligned}$$

па мора бити константа

$$C = F/8\pi\mathfrak{D}. \quad (9.89)$$

За потпуно уклештену плочу и слободно ослоњену плочу резултати су дати у табlici 9.9.

Таблица 9.9

$$A=0; p=0$$

$$k=r/R$$

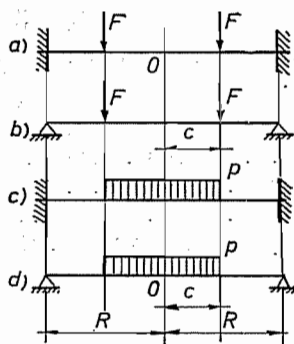
$C = F/8\pi\mathfrak{D}$	Плоча уклештена	Плоча слободно ослоњена
B	$-C(2\ln R + 1)/2 = -F(2\ln + 1)/16\pi\mathfrak{D}$	$-F[2\ln R + (3 + \mu)(1 + \mu)^{-1}]/16\pi\mathfrak{D}$
D	$CR^2/2 = FR^2/16\pi\mathfrak{D}$	$FR^2[(3 + \mu)(1 + \mu)^{-1}]/16\pi\mathfrak{D}$
w	$\frac{FR^2}{16\pi\mathfrak{D}} [1 - k^2 + 2k^2 \ln k]$	$\frac{FR^2}{16\pi\mathfrak{D}} \left[\frac{3 + \mu}{1 + \mu} (1 - k^2) + 2k^2 \ln k \right]$
w_{\max} ($r=0$)	$\frac{FR^2}{16\pi\mathfrak{D}}$	$\frac{FR^2}{16\pi\mathfrak{D}} \frac{3 + \mu}{1 + \mu}$
σ_r $\left(z = \frac{h}{2} \right)$	$-\frac{3F}{2\pi h^2} [1 + (1 + \mu) \ln k]$	$-\frac{3F}{2\pi h^2} (1 + \mu) \ln k$
σ_c $\left(z = \frac{h}{2} \right)$	$-\frac{3F}{2\pi h^2} [1 + (1 + \mu) \ln k]$	$-\frac{3F}{2\pi h^2} [(1 + \mu) \ln k - (1 - \mu)]$
$\sigma_r \max =$ $= \sigma_c \max$ ($r=R$)	$-\frac{3F}{2\pi h^2}$	$-\frac{3F}{2\pi h^2} (1 + \mu)$

Упоредићемо највећих угиба и напона за оба случаја ослањања исте плоче оптерећене истом силом (F), а за $\mu = 0,3$ добија се

$$w_{\max}^{(s)} / w_{\max}^{(u)} = (3 + \mu) / (1 + \mu) = 2,54; \quad \sigma_{\max}^{(s)} / \sigma_{\max}^{(u)} = 1 - \mu = 0,7.$$

9.16.3. Савијање кружне плоче делимичним континуалним оптерећењем — Када је кружна плоча оптерећена континуалним оптерећењем F по кругу, полупречника c , (слика 9.19.a,b), онда је сила $Z' = F/2 \pi c$. Овим је оптерећењем плоча подељена у две области: унутрашњу ($r < c$) и спољашњу ($r > c$). Опет ћемо користити једначину (9.88.a) стављајући да је $p=0$ у обе области, а да је у унутрашњој области и $F=0$. Интеграционе константе ћемо одредити из услова *непрекидности еластичне површи* на међи између обе области [угиб w , нагиб dw/dr , момент савијања $M_{(c)}$ и трансферзална сила $Z'_{(c)}$ на граници унутрашње области једнаки су тим елементима на почетку спољашње области] и граничног услова ослабања спољашње контуре плоче.

Резултати су дати у табlici 9.10.



Слика 9.19. — Кружна плоча оптерећена делимичним оптерећењем

Таблица 9.10

$$k=r/R; \lambda=c/R$$

		Плоча уклештена	Плоча слободно ослобена
w	$r < c$	$\frac{FR^2}{16 \pi \mathfrak{D}} [2 (k^2 + \lambda^2) \ln \lambda + 2 (k^2 - \lambda^2) + (1 + \lambda^2) (1 - k^2)]$	$\frac{FR^2}{16 \pi \mathfrak{D}} \left[2 (k^2 + \lambda^2) \ln \lambda + 2 (k^2 - \lambda^2) + \frac{(3 + \mu) - (1 - \mu)\lambda^2}{1 + \mu} (1 - k^2) \right]$
$w_{\max} (r=0)$		$\frac{FR^2}{16 \pi \mathfrak{D}} [2 \lambda^2 \ln \lambda + (1 - \lambda^2)]$	$\frac{FR^2}{16 \pi \mathfrak{D}} \left[2 \lambda^2 \ln \lambda + \frac{3 + \mu}{1 + \mu} (1 - \lambda^2) \right]$
$\sigma_r \left(z = \frac{h}{2} \right)$		$\frac{3 F}{4 \pi h^2} (1 + \mu) [(1 - \lambda^2) + \ln \lambda]$	$\frac{-3 F}{4 \pi h^2} [(1 - \mu) (1 - \lambda^2) - 2 (1 - \mu) \ln \lambda]$
$\sigma_c \left(z = \frac{h}{2} \right)$		$\frac{3 F}{4 \pi h^2} (1 + \mu) [1 - \lambda^2 + 2 \ln \lambda]$	$\frac{-3 F}{4 \pi h^2} [(1 - \mu) (1 - \lambda^2) - 2 (1 + \mu) \ln \lambda]$
w	$r > c$	$\frac{FR^2}{16 \pi \mathfrak{D}} [2 (k^2 + \lambda^2) \ln k + (1 + \lambda^2) (1 - k^2)]$	$\frac{FR^2}{16 \pi \mathfrak{D}} \left[2 (k^2 + \lambda^2) \ln k + \frac{(3 + \mu) - (1 - \mu)\lambda^2}{1 + \mu} (1 - k) \right]$
$\sigma_r \left(z = \frac{h}{2} \right)$		$\frac{3 F}{4 \pi h^2} [(1 + \mu) (-\lambda^2 + 2 \ln k) + (1 - \mu) \lambda^2 + 2]$	$\frac{-3 F}{4 \pi h^2} \left[(1 - \mu) \frac{\lambda^2}{k^2} - (1 - \mu) \lambda^2 - 2 (1 + \mu) \ln k \right]$
$\sigma_c \left(z = \frac{h}{2} \right)$		$\frac{3 F}{4 \pi h^2} [(1 + \mu) (-\lambda^2 + 2 \ln k) + (1 - \mu) \lambda^2 + 2]$	$\frac{-3 F}{4 \pi h^2} \left[(1 - \mu) (2 - \lambda^2) - (1 - \mu) \frac{\lambda^2}{k^2} - 2 (1 + \mu) \ln k \right]$

Помоћу образаца из предње таблице могу се одредити вредности за случај да је плоча оптерећена једиоликим оптерећењем p по кругу полу-пречника c (слика 9.19.с, d). Тада треба ставити да је сила $F=p \cdot 2 \pi r dr$ и интегралити у границама од $r=0$ до $r=c$. На пример, угиб у средишту уклештене плоче био би

$$w_{max} = w_0 = \frac{p}{4 \mathfrak{D}} \int_0^c \left[r^3 \ln \frac{r}{R} - \frac{r^3}{2} + \frac{R^2 r}{2} \right] dr = \frac{p R^4}{64 \mathfrak{D}} \lambda^2 [4 \lambda^2 \ln \lambda + (4 - 3 \lambda^2)]; \quad \lambda = \frac{c}{R}$$

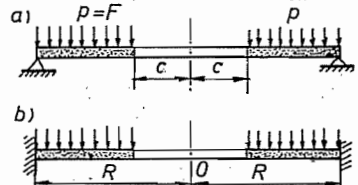
Резултати су дати у табlici 9.11.

Таблица 9.11

$$k = r/R; \quad \lambda = c/R$$

		Плоча уклештена	Плоча слободно ослоњена
w	$r < c$	$\frac{p R^4}{64 \mathfrak{D}} \lambda^2 \left[(4 - 3 \lambda^2) + 4 (2 k^2 + \lambda^2) \ln \lambda - 2 k^2 \left(\lambda^2 + \frac{h^2}{\lambda^2} \right) \right]$	$\frac{p R^4}{64 \mathfrak{D}} \lambda^2 \left\{ (4 - 5 \lambda^2) + 4 (2 k^2 + \lambda^2) \ln \lambda + \frac{k^4}{\lambda^2} + 2 \frac{1 - k^2}{1 + \mu} [4 - (1 - \mu) \lambda^2] \right\}$
w_{max} ($r=0$)		$\frac{p R^4}{64 \mathfrak{D}} \lambda^2 [4 \lambda^2 \ln \lambda + (4 - 3 \lambda^2)]$	$\frac{p R^4}{64 \mathfrak{D}} \lambda^2 \left[(4 - 5 \lambda^2) + 4 \lambda^2 \ln \lambda + \frac{8}{1 + \mu} - 2 \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \lambda^2 \right]$
σ_r ($z = \frac{h}{2}$)		$\frac{3 p R^2 \lambda^2}{8 h^2} \left[4 (1 + \mu) \ln \lambda - (1 + \mu) \lambda^2 + (3 + \mu) \frac{k^2}{\lambda^2} \right]$	$-\frac{3 p R^2 \lambda^2}{8 h^2} \left[4 - 4 (1 + \mu) \ln \lambda - (1 - \mu) \lambda^2 - (3 + \mu) \frac{k^2}{\lambda^2} \right]$
σ_c ($z = \frac{h}{2}$)		$\frac{3 p R^2 \lambda^2}{8 h^2} \left[4 (1 + \mu) \ln \lambda - (1 + \mu) \lambda^2 + (3 + \mu) \frac{k^2}{\lambda^2} \right]$	$-\frac{3 p R^2 \lambda^2}{8 h^2} \left[4 - 4 (1 + \mu) \ln \lambda - (1 - \mu) \lambda^2 - (1 + 3 \mu) \frac{h^2}{\lambda^2} \right]$
w		$\frac{p R^4}{64 \mathfrak{D}} \lambda^2 [2 (1 - k^2) (2 + \lambda^2) + 4 (\lambda^2 + 2 k^2) \ln \lambda]$	$\frac{p R^4}{64 \mathfrak{D}} \lambda^2 \left[\frac{4 (3 + \mu)}{1 + \mu} (1 - k^2) - \frac{2 (1 - \mu) \lambda^2}{1 + \mu} (1 - k^2) + 4 (2 k^2 + \lambda^2) \ln k \right]$
σ_r ($z = \frac{h}{2}$)		$\frac{3 p R^2 \lambda^2}{8 h^2} \left[4 + 4 (1 + \mu) \ln k - (1 + \mu) \lambda^2 - (1 - \mu) \frac{\lambda^2}{k^2} \right]$	$\frac{3 p R^2 \lambda^2}{8 h^2} \left[4 (1 + \mu) \ln k + (1 - \mu) \lambda^2 - (1 - \mu) \frac{\lambda^2}{k^2} \right]$
σ_c ($z = \frac{h}{2}$)	$\frac{3 p R^2 \lambda^2}{8 h^2} [4 (1 + \mu) \ln k - (1 + \mu) \lambda^2 + (1 - \mu) + 4 \mu]$	$-\frac{3 p R^2 \lambda^2}{8 h^2} \left[4 (1 - \mu) - 4 (1 + \mu) \ln k - (1 - \mu) \lambda^2 - (1 - \mu) \frac{\lambda^2}{k^2} \right]$	
		$r > c$	

9.17. Савијање кружно-прстенасте плоче. — Када је кружно прстенаста плоча, полупречника a и R , односа $\psi = a/R$, оптерећена континуалним једноликим оптерећењем по прстену, ширине $R - a = R(1 - \psi)$, које је симетрично у односу на Oz -осу, (слика 9.20.а) опет се може применити једначина (9.88.а). За одређивање константи A, B, C и D треба задовољити услове на рубу $r = a$ и услове на контури. Онда је за $r = a$, радијални напон $\sigma_r = 0$, односно $M'_{(c)} = 0$, и тангенцијални напон $\tau_{rz} = 0$, односно трансверзална сила $Z'_{(c)} = 0$, док је на спољашњој контури у случају слободно ослоњене плоче $w = 0$ и $M'_{(c)} = 0$, а величина $R'_{(c)} = p \pi (R^2 - a^2) / 2 R \pi$ је јединични отпор ослоња.



Слика 9.20. — Савијање кружно-прстенасте плоче

За слободно ослоњену плочу (слика 9.20.а) биће:

$$w = A \ln r + Br^2 + Cr^2 \ln r + D + (pr^4/64 \mathfrak{D}); \quad w' = Ar^{-1} + 2Br + 2Cr \ln r + Cr + 4cr^3;$$

$$M'_{(c)} = -\mathfrak{D} [w'' + (\mu w'/r)]; \quad w'' = -Ar^{-2} + 2B + 2C \ln r + 3C + 12cr^2;$$

$$w''' = 2Ar^{-3} + 2Cr^{-1} + 24Cr; \quad c = p/64 \mathfrak{D};$$

$$Z'_{(c)} = -\mathfrak{D} \frac{\partial}{\partial r} (w'' + r^{-1} w') = -(w''' + w'' r^{-1} - w' r^{-2}),$$

односно

$$z = a; \quad w''' + \frac{w''}{a} - \frac{w'}{a^2} = 0; \quad C = -8ca^2 = -8cR^2\psi = -\frac{8p}{64\mathfrak{D}}a^2 = -\frac{8p}{64\mathfrak{D}}R^2\psi^2;$$

$$z = a; \quad w'' + \mu \frac{w'}{a} = 0; \quad \psi = \frac{a}{R};$$

$$-Aa^{-2}(1 - \mu) + 2B(1 + \mu) + C(3 + \mu) + 2(1 + \mu)C \ln a + 4(3 + \mu)ca^2 = 0;$$

$$z = R; \quad w = 0; \quad A \ln R + BR^2 + D = -CR^2 \ln R - cR^4 = 0;$$

$$z = R; \quad w'' + \mu \frac{w'}{R} = 0;$$

$$-AR^{-2}(1 - \mu) + 2B(1 + \mu)R^2 + C(3 + \mu) + 2(1 + \mu)C \ln R + 4(3 + \mu)cR^2 = 0.$$

Из овог следи систем једначина

$$-A(\lambda - \mu) + 2(1 + \mu)\psi^2 BR^2 = 5cR^4 [4(1 + \mu)\psi^4 \ln(\psi R) + (3 + \mu)\psi^4] = P;$$

$$-A(1 - \mu) + 2(1 + \mu)BR^2 = 4cR^4 [4(1 + \mu)\psi^2 \ln R + (3 + \mu)(2\psi^2 -)] = Q;$$

$$A \ln R + BR^2 + D = cR^4 [8\psi^2 \ln R - 1] = S;$$

Из којих одређујемо константе

$$A = \frac{Q\psi^2 - P}{(1 - \mu)(1 - \psi^2)} = \frac{4cR^4}{(1 - \mu)(1 - \psi^2)} [-4(1 + \mu)\psi^4 \ln \psi + (3 + \mu)(\psi^4 - \psi^2)];$$

$$BR^2 = \frac{Q - P}{2(1 + \mu)(1 - \psi^2)} = \frac{4cR^4}{2(1 + \mu)(1 - \psi^2)} \{4(1 + \mu)\psi^2 [(1 - \psi^2) \ln R - \psi^2 \ln \psi] +$$

$$+ (3 + \mu)(1 - \psi^2)^2\} \quad D = S - A \ln R - BR^2; \quad C = -8cR^2\psi^2; \quad c = p/64 \mathfrak{D}.$$

Угиб је

$$w = A \ln r + Br^2 + Cr^2 \ln r + D + cr^4 = A \ln k - B(1 - k^2) R^2 - 8cR^4 \psi^2 k^2 \ln k R + S + ck^4 R^4,$$

односно

$$w = \frac{pR^4}{64 \mathfrak{D}} \left\{ (1 - k^2) \left[8 \frac{\psi^4}{1 - \psi^2} \ln \psi + 2 \frac{3 + \mu}{1 + \mu} (1 - \psi^2) - (1 + k^2) \right] - \frac{4 \psi^2}{1 - \mu} \left[4(1 + \mu) \frac{\psi^2}{1 - \psi^2} \ln \psi + (3 + \mu) + 2(1 - \mu) k^2 \right] \ln k \right\};$$

$$k = \frac{r}{R}; \quad \psi = \frac{a}{R}; \quad (9.90.a)$$

Нападни момент дуж странице (с) износи:

$$M'_{(c)} = -\frac{\mathfrak{D}}{k^2 R^2} \left\{ -(1 - \mu) A + 2B(1 + \mu) k^2 R^2 - 8cR^4 \psi^2 k^2 [(3 + \mu) + 2(1 + \mu)(\ln k + \ln R)] + 4(3 + \mu) ck^4 R^4 \right\}, \quad (9.90.b)$$

а трансверзална сила је:

$$Z'_{(c)} = -\mathfrak{D} [4Cr^{-1} + 32cr] = pR(\psi^2 - k^2)/2k = pR^2(\psi^2 - k^2)/2r \quad (9.90.c)$$

За пошћуно уклешћену плочу (слика 9.20.b) биће

$$C = -8cR^2 \psi^2; \quad -A(1 - \mu) + 2B(1 + \mu) R^2 \psi^2 = P;$$

$$A \ln R + BR^2 + D = S = cR^4 (8 \psi^2 \ln R - 1);$$

$$w' = 0; \quad A + 2BR^2 = -2CR^2 \ln R - CR^2 - 4cR^4 = 4cR^4 [2 \psi^2 (1 + 2 \ln R) - 1] = T;$$

$$A = \frac{(1 + \mu) \psi^2 - P}{(1 - \mu) + (1 + \mu) \psi^2}; \quad BR^2 = \frac{(1 - \mu) T - P}{2[(1 - \mu) + (1 + \mu) \psi^2]}; \quad D = S - A \ln R - BR^2,$$

па су

$$w = A \ln k - BR^2 (1 - k^2) + cR^4 [8 \psi^2 (1 - k^2) \ln R - 8 \psi^2 k^2 \ln k - (1 - k^4)]; \quad (9.90.d)$$

$$M'_{(c)} = -\mathfrak{D} \left\{ -(1 - \mu) A + 2B(1 + \mu) k^2 R^2 - 8cR^4 \psi^2 k^2 [(3 + \mu) + 2(1 + \mu)(\ln k + \ln R)] + 4ck^4 R^4 (3 + \mu) \right\} / k^2 R^2; \quad (9.90.e)$$

$$Z'_{(c)} = -\mathfrak{D} [4Cr^{-1} + 32cr] = pR^2 (\psi^2 - k^2) / 2p. \quad (9.90.f)$$

9.18. Савијање кружне плоче променљиве дебљине. — Када је плоча променљиве дебљине која се мења са координатом r , тада је $h = h(r)$, па је и крутост плоче променљива и зависи од r , те је $\mathfrak{D} = f(r)$. Стога се једначина (9.87) мора допунити. Посматрајмо запремински елемент плоче $dV = (r dr d\varphi) h$, (слика 9.20.a), па пошто је неутрална површ обртна то угиб w не зависи од поларног угла φ , то се јављају само прираштаји

трансверзалне силе само дуж циркуларне ивице, $Z'_{(c)}$, и прираштаји моме-
ната. Из равнотежног услова тих сила и услова да нема обртања око
циркуларне О $_c$ -осе добијају се једначине

$$\sum Z_i = 0; Z'^*(r+dr) d\varphi - Z' r d\varphi + pr dr d\varphi = 0; Z' = Z'_{(c)}; Z'^* = Z' + \frac{\partial Z'}{\partial r} dr;$$

$$\sum M_c = 0; M'_{(c)}(r+dr) d\varphi - M'_{(c)} r d\varphi - 2 M'_{(r)} dr \frac{1}{2} d\varphi - \\ - [Z'^*(r+dr) d\varphi + Z' r d\varphi] \frac{1}{2} d\varphi = 0,$$

пошто момент $M'_{(r)}$ векторски представљен пада у радијални правац, па
се може ставити да је $\sin[(d\varphi)/2] \approx (d\varphi)/2$. После занемаривања малих
величина другог реда и сређивања, добијају се равнотежни услови:

$$= \left(Z' + \frac{\partial Z'}{\partial r} r \right) + pr = \frac{d}{dr} (Z' r) + pr = 0; \quad (9.91.a)$$

$$M'_{(c)} + \frac{\partial M'_{(c)}}{\partial r} r - M'_{(r)} - Z' r = \frac{d}{dr} [M'_{(c)} r] - M'_{(r)} - Z' r = 0. \quad (9.91.b)$$

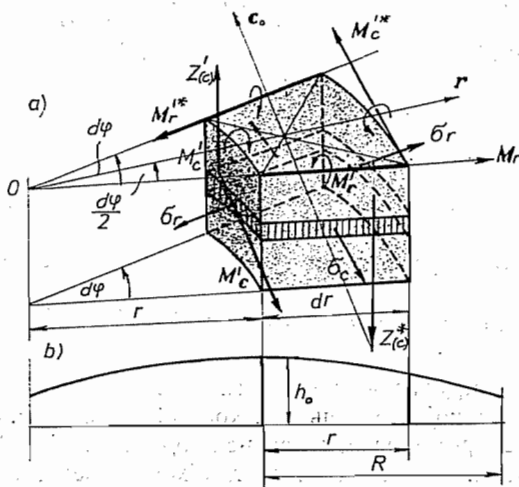
Уносећи у други услов (9.91.b) изразе за моменте (9.83), добија се излаз
за трансверзалну силу за циркуларну страну

$$Z' = Z'_c = - \mathfrak{D} [w'''' + w'' r^{-1} - w^1 r^{-2}] - \mathfrak{D}^1 [w'' + \mu w r^{-1}]. \quad (9.91.c)$$

Стављајући ову релацију у први равнотежни услов (9.91.a) добија се ди-
ферецијална једначина еластичне површи савијене плоче

$$\Delta \Delta w + \frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{D}} \left(2w'''' + \frac{2+\mu}{r} w'' - \frac{w'}{r^2} \right) + \frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{D}} \left(w'' + \mu \frac{w'}{r} \right) = \frac{p}{\mathfrak{D}}; \quad (9.92)$$

$$\Delta \Delta w = \Delta \left(w^{\text{II}} + \frac{w^{\text{I}}}{r} \right) = w^{\text{IV}} + 2w^{\text{III}} r^{-1} - w^{\text{II}} r^{-2} + w' r^{-3}.$$



Слика 9.21. — Савијање кружне плоче променљиве
дебљине

Чест је случај у пракси да се дебљина кружне плоче мења по закону

$$h = \frac{k}{rn} = kr^{-n}, \quad (9.93.a)$$

где је k константа, а n позитиван или негативни број. Тада су

$$\mathfrak{D} = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{c}{r^{3n}}; \quad c = \frac{Ek^3}{12(1-\mu^2)}; \quad \frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{D}} = -\frac{3n}{r}; \quad \frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{D}} = \frac{3n(3n+1)}{r^2}, \quad (9.93.b)$$

па једначина (9.92) постаје

$$w^{IV} + 2(1+3n)w^{III}r^{-1} - [1+3(1-\mu)n-9n^2]w^{II}r^{-2} + [1+3(1+\mu)n+9\mu n^2]w^I r^{-3} = pr^{3n}/c \quad (9.93.c)$$

Ова диференцијална једначина је Euler-овог типа и решава се на исти начин као и у случају плоче константне дебљине ($h = \text{const}$).

На слици 9.21.b приказан је случај плоче која се мења по експоненцијалном закону природног броја e , па је, на пример,

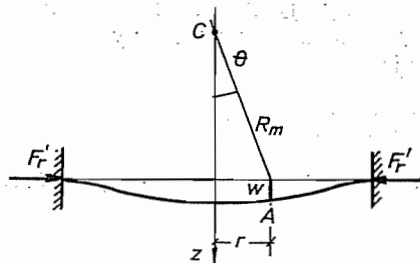
$$h = h_0 e^{-nr^2/6R^2} = h_0 e^{-r^2/3R^2}; \quad \mathfrak{D} = c e^{-r^2/R^2}; \quad c = Eh_0^3/12(1-\mu^2); \quad \mathfrak{D}'/\mathfrak{D} = -2r/R^2; \quad \mathfrak{D}''/\mathfrak{D} = (-2R^2 + 4r^2)/R^4 \quad (9.94.a)$$

те диференцијална једначина (9.92) постаје

$$w^{IV} + 2(1-2x^2)w^{III}x^{-1} - [1+(6+2\mu-4x^2)x^2]w^{II}x^{-2} + [1+2(1-\mu)x^2 + 4\mu x^4]w^I x^{-3} = pR^4 c^{-1} e^{x^2}; \quad x = r/R. \quad (9.94.b)$$

Она се може интегралити помоћу редова.

9.19. Испупчење кржне плоче. Кружна плоча константне дебљине оптерећена је у средњој равни радијалним притисним силама рачунатим по



Слика. — 9.22. Испупчење кружне плоче

јединици дужине обима. $F'_{(c)} = F'_r = F'$ (слика 9.22). Оптерећење је симетрично у односу на Oz -осу, па је еластична површ плоче обртна са осом. Пошто је еластична површ испупчена у смеру Oz -осе то је линија која се добија меридионалним пресеком конвексна у смеру Oz -осе, па је кривина негативна, те је $1/R_m = -d^2w/dr^2$. Код савијене греде је дилатација $\epsilon_z = \Delta dz/dz = y/R_k$, па је аналогно томе и дилатација $\epsilon_r = z/R_m = z d\theta/dr$, јер је $dr = R_m d\theta$. Како је према (9.3) дилатација $\epsilon_r = -\partial u/\partial r = -z(\partial^2 w/\partial r^2)$, то следи да је, $\partial^2 w/\partial r^2 = -\partial\theta/\partial r$, те се за овај случај симетричног оптерећења, пошто w не зависи од поларног угла θ , добија да је нагиб $\text{tg } \theta \approx \theta = -dw/dr = -w'$. Када се ова релација унесе у једначину (9.91.c) добија се равнотежни услов

$$\theta'' + \frac{\theta'}{r} - \frac{\theta}{r^2} = \frac{Z'}{\mathfrak{D}}.$$

Због радијалног притиска трансверзална сила је $Z' = -F\theta$, па се добија диференцијална једначина еластичне површи испупчене плоче

$$\theta'' + \theta' r^{-1} + (k^2 - r^{-2})\theta = 0; \quad k^2 = F'/\mathfrak{D}. \quad (9.95.a)$$

Сменом $u = kr$, предња се једначина своди на Bessel-ову диференцијалну једначину

$$\frac{d^2 \theta}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{d\theta}{du} + \left(1 - \frac{1}{u^2}\right)\theta = 0. \quad (9.95.b)$$

Њено је решење

$$\theta = AJ_1(u) + BY_1(u)$$

где су $J_1(u)$ и $Y_1(u)$ Bessel-ове функције прве и друге врсте, а првог реда. Када плоча нема концентрични отвор, то јест није прстенастог облика већ је пуна, тада је довољно решење узети само са Bessel-овом функцијом прве врсте првог реда, па је

$$\theta = A \frac{u}{2} \left[\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(1+m)!} \left(\frac{u}{2}\right)^{2m} = A \frac{u}{2} \left[1 - \frac{1}{1!2!} \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2!3!} \left(\frac{u}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!4!} \left(\frac{u}{2}\right)^6 + \dots \right], \quad (9.95.c)$$

где је A константа.

У средишту плоче је $r=0$, па је и $u=0$ те је $\theta=0$, што следи и из симетрије. Како је гранични услов за *уклешијену илочу*: за $r=R$ мора бити $w=0$ и $\partial w/\partial r=0$, односно $\theta=0$, то мора бити $J_1(kR)=0$. Најнижи корен* ове функције је $\alpha = kR = 3,832$, па се добија критична вредност ради јалног притиска

$$(F_r')_{cr} = (3,832)^2 \mathfrak{D}/R^2 = 14,684 \mathfrak{D}/R^2. \quad (9.95.d)$$

Решење 9.95.c може се користити и у случају испупчења *слободно ослоњене кружне илоче*. Контурни је услов да момент дуж контуре мора бити једнак нули, па се према (9.83), добија

$$M_c' = -\mathfrak{D}[w'' + (\mu w'/r)] = \mathfrak{D}[\theta' + (\mu \theta/r)] = 0 \quad \text{или}$$

$$[(d\theta/du) + (\mu \theta/u)] = 0; \quad u = kR. \quad (9.96.a)$$

Како је извод

$$\theta = AJ_1(u); \quad d\theta/du = A(dJ_1/dn) = A[J_0 - (J_1/u)],$$

где је J_0 Bessel-ова функција прве врсте нултог реда

$$J_0 = 1 - \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{u}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{u}{2}\right)^6 + \dots, \quad (9.96.b)$$

* E. Jahnke, F. Emde, Funktionentafeln, Springer, (1933).

то уношењем у гранични услов (9.96.a) он постаје

$$kR = \alpha; \quad \alpha J_0(\alpha) - (1 - \mu) J_1(\alpha) = 0. \quad (9.96.c)$$

За $\mu = 0,3$ помоћу таблица Bessel-ових функција добија се да је најнижи корен предње трансцендентне једначине $\alpha = kR = 2,05$, па је критична вредност радијалног притиска

$$(F_r')_{cr} = (2,05)^2 \mathfrak{D}/R^2 = 4,203 \mathfrak{D}/R^2, \quad (9.96.d)$$

што значи да је у овом случају критична јединична сила *ири иуша мања* него ли у случају уклештене плоче.

9.20. Marcus-ова мембранска аналогија. — Када се уместо Oy -осе савијене призматичне греде узме Oz -оса усмерена наниже, онда постоје ове релације између угиба, нагиба, нападног момента, трансверзалне силе и специфичног оптерећења

$$\mathfrak{B} z'' = -M; \quad \mathfrak{B} z''' = -F_T; \quad \mathfrak{B} z^{IV} = q; \quad M' = F_T' = -q. \quad (9.97.a)$$

Као што се према Prandtl-овој аналогiji проблем торзије може довести у везу са напрезањем мембране, тако се исто може Marcus-овом *аналожијом** проблем савијања плоче довести у везу са проблемом мембране. Када је мембрана, истог облика као и оптерећена плоча, изложена дејству хидростатичког притиска у Oz -правцу и једнолико затегнута јединичним силама по контури, тада је, према (5.90), Laplace-ова једначина мембране

$$\Delta w = (\partial^2 w / \partial x^2) + (\partial^2 w / \partial y^2) = -p / F_s'. \quad (9.97.b)$$

Према обрасцима (9.9) добија се да је просечни момент

$$M' = (M_x' + M_y') / (1 + \mu) = -\mathfrak{D} \Delta w, \quad (9.97.c)$$

па је

$$\Delta w = -M' / \mathfrak{D}, \quad (9.98)$$

а из (9.7) следи и релација

$$\Delta \Delta w = -\frac{1}{\mathfrak{D}} (\Delta M') = \frac{p}{\mathfrak{D}}; \quad \Delta M' = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) M' = -p. \quad (9.99)$$

С обзиром на (9.11) јединичне трансверзалне силе су

$$Z'_{(x)} = -\mathfrak{D} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w) = \frac{\partial M'}{\partial y}; \quad Z'_{(y)} = -\mathfrak{D} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) = \frac{\partial M'}{\partial x}, \quad (9.100)$$

Ови обрасци одговарају познатим релацијама из графостатике (9.97.a).

* Н. Marcus, „Die Theorie elastischer Gewebe“ Berlin, (1932).

Marcus-ова *метода* нарочито се користи у случају слободно подупрте плоче *полигоналне контуре*. Тада је

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = -\frac{M'}{\mathfrak{D}}, \quad (9.101)$$

па се проблем своди да интеграљење једначина (9.98) и (9.99).

На пример, у случају *једнакосиричних троугаоне плоче* савијене моментима M_n дуж контуре (слика 9.22.) њена савијена еластична површ је иста као и површ једнолико затегнуте и притиснуте мембране. Површина мембране се може одредити експериментално помоћу „филма од сапунице“ („soap film method“). С обзиром на једноставне једначине страница *AB*, *BC* и *CA* троугла једначина контуре је

$$\begin{aligned} & \left(x + \frac{h}{3}\right) \left(\frac{x\sqrt{3}}{3} + y - \frac{2\sqrt{3}}{a} h\right) \left(\frac{x\sqrt{3}}{3} - y - \frac{2\sqrt{3}h}{9}\right) = \\ & = \frac{1}{3} \left[x^3 - 3y^2x - h(x^2 + y^2) + \frac{4}{27} h^3 \right] \end{aligned} \quad (9.102.a)$$

Услов $w=0$ на контури мембране је задовољен када се узме за угиб функција

$$w = C \left[x^3 - 3y^2x - (x^2 + y^2) + \frac{4}{27} h^3 \right] / 3,$$

где је C коефицијент који треба тако одредити да је задовољена релација (9.101), која због тога што је дуж праве стране $\partial^2 w / \partial s^2 = 0$, постаје

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = -\frac{M'_n}{\mathfrak{D}} = -\frac{M'}{\mathfrak{D}}$$

па је угиб

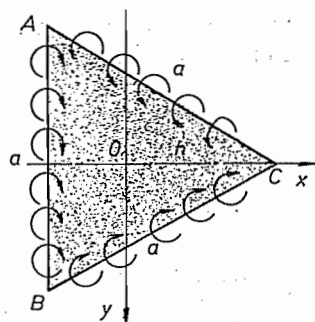
$$C = 3 M' / 4 \mathfrak{D} h; \quad w = M' [x^3 - 3xy^2 - h(x^2 + y^2) + 4h^3/27] / 4 \mathfrak{D} h. \quad (9.102.b)$$

Угиб тежишта троугаоне плоче износи

$$w_0 = M' h^2 / 27 \mathfrak{D} = 4(1 - \mu)^2 M' / 9 Eh. \quad (9.102.c)$$

а моменти и трансверзалне силе су

$$\begin{aligned} M'_{(x)} = M'_x &= -\mathfrak{D} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{M'}{2} \left[(1 + \mu) + 3(1 - \mu) \frac{x}{h} \right]; \\ M'_{(y)} = M'_y &= -\mathfrak{D} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{M'}{2} \left[(1 + \mu) - 3(1 - \mu) \frac{x}{h} \right]; \\ M_{xy} &= \mp (1 - \mu) \mathfrak{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \mp \frac{3}{2} (1 - \mu) M' \frac{y}{h}; \\ \Delta w &= -4 Ch / 3; \quad Z'_{(x)} = Z'_{(y)} = 0. \end{aligned} \quad (9.102.d)$$

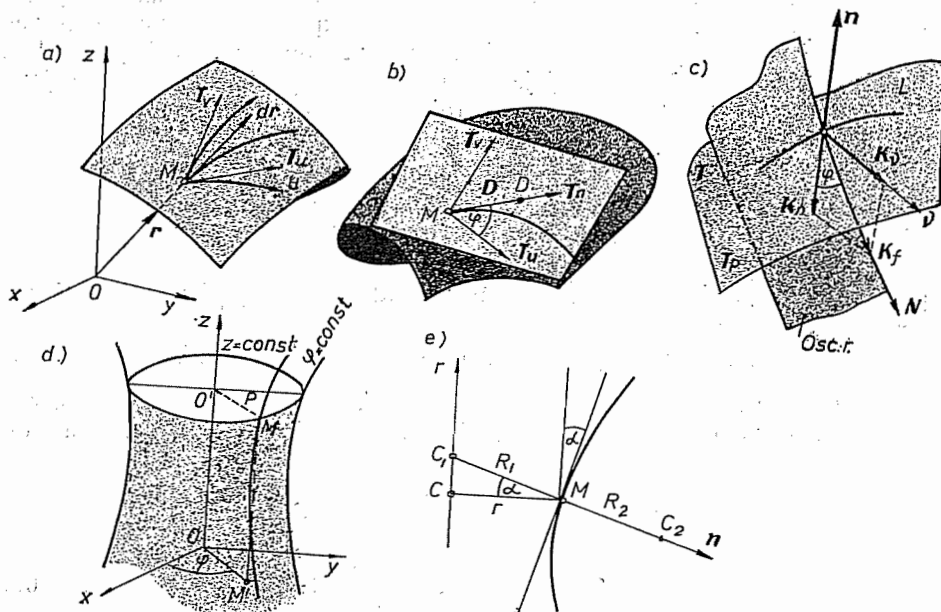


Слика 9.23. — Савијање троугаоне плоче

10. ОСНОВИ ТЕОРИЈЕ ЉУСКИ

10.1. Основне геометријске релације. — Као и код плоча посматрају се љуске мале дебљине (h) у односу на полупречник кривине (R_f) и остале димензије љуске. Површ која дели дебљину љуске напола зове се, као и код плоче, *средња површ љуске*; њу сматрамо да је ненапрегнута. Ако су познати једначина средње површи љуске и њена дебљина $h = ch(z)$ у свакој тачки, онда се сматра да је љуска геометријски потпуно одређена.

Ходограф векторске функције $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}\} = \{\mathbf{r}(t)\}$ које зависи од скалара t јесте *линија*. Када је скаларна променљива t време, ходограф је *пуштања* (*трајекторија*) покретне тачке. Када векторска функција зависи од две скаларне променљиве, (u, v), тада је ходограф те функције $\{\mathbf{r}\} = \{\mathbf{r}(u, v)\}$ *површ*. Параметри u и v јесу Gauss-ови *параметри*. Када се један параметар мења, $u = u(t)$, а други је константан, $v = \text{const}$, тада се добија крива на површи дуж које се мења само тај параметар (*u-крива*), и обратно при $u = \text{const}$, $v = v(t)$ добија се крива дуж које се мења само параметар v (*v-крива*). Ове су криве Gauss-ове *параметарске криве* на површи и чине *мрежу* на тој површи.



Слика 10.1. — Геометријска релација за криве на површи

Положај тачке M на тој површи одређен је пресеком параметарских кривих (слика 10.1.a), а вектором $\{\mathbf{r}\} = \mathbf{ON}$ у односу на апсолутни триједер $Oxyz$. Како је

$$\{\mathbf{r}\} = x\{\mathbf{i}\} + y\{\mathbf{j}\} + z\{\mathbf{k}\} = \{\mathbf{r}(u, v)\}, \quad (10.1)$$

то су Декартове координате тога вектора скаларне функције параметра, $x = x(u, v)$; $y = y(u, v)$; $z = z(u, v)$. Парцијални извод вектора положаја $\{\mathbf{r}\}$ по параметру u пада у правац тангенте на параметарску криву, а његов интензитет представља лук криве при промени само једног параметра, па ће бити

$$\left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right\} = \left| \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right\} \right| \{\mathbf{T}_u\} = ds_u \{\mathbf{T}_u\}; \quad \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\} = ds_v \{\mathbf{T}_v\},$$

те је диференцијал вектора положаја тачке M :

$$\{d\mathbf{r}\} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right\} du + \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\} dv = \begin{pmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} \quad (10.2)$$

Његов квадрат представља *квадрант елементија лука криве или метричку форму* ња је

$$ds^2 = (d\mathbf{r})\{d\mathbf{r}\} = (du \ dv) \mathbf{A} \begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} = E du^2 + 2F du \ dv + G dv^2 = \Phi_1; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad (10.3)$$

где је Φ_1 *прва основна форма површи*, а E , F и G су Gauss-ове ознаке*

$$E = \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right\} \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right\}; \quad F = \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right\} \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\}; \quad G = \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\} \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\}; \quad (10.4)$$

а називају се и *основне величине првој реда*.

У тачки M површи могу се поставити тангенцијална раван и нормала површине. Када се кроз тачку M повуку разне криве онда јединични вектори тангенти леже у тој равни, а јединични вектор нормале је управан на тој равни, па је $(\mathbf{T})\{\mathbf{n}\} = 0$. Овај јединични вектор $\{\mathbf{n}\}$ је управан и на јединичним векторима $\{\mathbf{T}_u\}$ и $\{\mathbf{T}_v\}$, па постоје услови ортогоналности

$$(\mathbf{T})\{\mathbf{n}\} = 0; \quad \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right\} \{\mathbf{n}\} = 0; \quad \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\} \{\mathbf{n}\} = 0.$$

Диференцирањем првог услова по луку ds добија се

$$\left(\frac{d\mathbf{T}}{ds} \right) \{\mathbf{n}\} + (\mathbf{T}) \left\{ \frac{d\mathbf{n}}{ds} \right\} = 0; \quad \left(\frac{d\mathbf{T}}{ds} \right) \{\mathbf{n}\} = (\mathbf{K})\{\mathbf{n}\} = - \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) \left\{ \frac{d\mathbf{n}}{ds} \right\}; \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_f;$$

по како је јединични вектор тангенте криве $\{\mathbf{T}\} = \{d\mathbf{r}/ds\}$, и кривина — *прва кривина (флексија)* — криве, $\{\mathbf{K}\} = K\{\vec{\mathbf{N}}\} = \{d\mathbf{T}/ds\}$ то је скаларни производ диференцијала вектора положаја и диференцијала јединичног вектора нормале површине

$$\begin{aligned} - (d\mathbf{r})\{d\mathbf{n}\} &= K ds^2 (\vec{\mathbf{N}})\{\mathbf{n}\} = (du \ dv) \mathbf{C} \begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} = \\ &= L du^2 + 2M du \ dv + N dv^2 = \Phi_2; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10.5)$$

* K. F. Gauss, „Disquisitiones generales circa superficies curvas”, Berlin, 1827.

он представља *групу основну квадрану форму површи*. Диференциранем другог и трећег услова ортогоналности по параметру u , односно v , следе релације

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2}\right)\{\mathbf{n}\} + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)\left\{\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u}\right\} = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}\right)\{\mathbf{n}\} + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)\left\{\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v}\right\} = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v \partial u}\right)\{\mathbf{n}\} + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\left\{\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u}\right\} = 0;$$

па су величине

$$L = -\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)\left\{\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u}\right\} = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2}\right)\{\mathbf{n}\}; \quad 2M = -\left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)\left\{\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v}\right\} + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\left\{\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u}\right\}\right] = \\ = 2\left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}\right)\{\mathbf{n}\}; \quad N = -\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\left\{\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v}\right\} = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2}\right)\{\mathbf{n}\}; \quad (10.6)$$

оне се зову *основне величине групе реда*.

У тачки M криве L на површи може се поставити основни триједар јединичних вектора \vec{T} , \vec{N} и \vec{B} , па је раван коју чине тангента и главна нормала криве (\vec{N}) *оскулајторна раван*. Уопште узев јединични вектори главне нормале криве $\{\vec{N}\}$ нормале површи $\{\mathbf{n}\}$ нису колинеарни. Међутим, када се узме пресек површи са равни која пролази кроз нормалу површи — такозвани *нормални пресек* — тада су ортови $\{\vec{N}\}$ и $\{\mathbf{n}\}$ колинеарни, па је кривина те криве *нормална кривина*, $K_n = (K)\{\mathbf{n}\}$. Она се може изразити помоћу основних форми површи у облику

$$(K)\{\mathbf{n}\} = K_n = \frac{(d\rho)\mathbf{C}\{d\rho\}}{(d\rho)\mathbf{A}\{d\rho\}} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} = \\ = \frac{rdx^2 + 2s dx dy + tdy^2}{(1 + p^2 + q^2)ds^2} \quad (10.7)$$

јер су за случај да је једначина површи изражена у експлицитном облику $z = z(x, y)$, Gauss-ови параметри $u = x$, $v = y$, па су основне величине првог и другог реда;

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + p^2 & pq \\ pq & 1 + q^2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} p & s \\ s & t \end{pmatrix}; \\ \mathbf{A} = EG - F^2 = 1 + p^2 + q^2; \quad (10.8)$$

где су уведене познате Монге-ове ознаке

$$p = \partial z / \partial x; \quad q = \partial z / \partial y; \quad r = \partial p / \partial x = \partial^2 z / \partial x^2; \\ s = \partial p / \partial y = \partial q / \partial x = \partial^2 z / \partial x \partial y; \quad t = \partial q / \partial y = \partial^2 z / \partial y^2.$$

Кроз нормалу $\{\mathbf{n}\}$ у тачки M на површи може се поставити бескрајно много нормалних пресека, са одговарајућим нормалним кривинама. Стога ће постојати карактеристични нормални пресеци за које кривине имају екстремне вредности. Такве кривине зову се *главне кривине*, а правци одређени оним релацијама dv/du за које кривина има екстремну вредност зову се *главни правци*. Да бисмо одредили главне кривине и главне правце морамо

тражити екстремум функције $\Phi_2/\Phi_1 = K_n$, па се користећи Lagrange-ову методу мултипликатора посматра функција $\Phi = \Phi_2 - \lambda \Phi_1$ и њени изводи по du и dv те се добија систем једначина

$$(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{A}) \begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} = 0. \quad (10.9)$$

Да би сем идентичких (тривијалних) решења било и других, мора детерминанта система бити једнака нули

$$\Delta(\lambda) = |\mathbf{C} - \lambda \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{vmatrix} = (EG - E^2)\lambda^2 - (EN - 2FM + GL)\lambda + (LN - M^2) = 0. \quad (10.10)$$

где је λ својствена вредност која представља главни кривину, $\lambda_1 = K_1$ и $\lambda_2 = K_2$. Средњом кривином назива се полузбир главних кривина; производ главних кривина је Gauss-ова кривина. Према Viète-овим обрасцима ове кривине су

$$K_S = \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = (EN - 2FM + GL)/2(EG - F^2) = \\ = [(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]/2(1 + p^2 + q^2)^{3/2}; \quad 10.11.a$$

$$K_G = K_1 K_2 = \frac{|\mathbf{C}|}{|\mathbf{A}|} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}. \quad (10.11.b)$$

Главни правци се одређују из релација

$$(L - \lambda E) + (M - \lambda F)m = 0; \quad (M - \lambda F) + (N - \lambda G)m = 0; \quad m = dv/du,$$

односно из квадратне једначине (када се из предњих једначина елиминише својствена вредност λ),

$$(FN - GM)m^2 - (GL - EN)m + (EM - FL) = 0; \quad m = d\eta/d\xi \quad (10.12)$$

па постоје два различита корена за које према Viète-овим обрасцима важе релације

$$m_1 + m_2 = (GL - EN)/(FN - GM); \quad m_1 m_2 = (EM - FL)/(FN - GM). \quad (10.13)$$

Узмимо кроз тачку M на површи $f(x, y, z) = 0$ две криве са елементима лукова ds и $d\sigma$. Јединични вектори тангенти на ове криве јесу

$$\{\mathbf{r}_1\} = \{dr/ds\} \text{ и } \{\mathbf{r}_2\} = \{dr/d\sigma\},$$

а услов ортогоналности кривих је

$$(\mathbf{T}_1)\{\mathbf{T}_2\} = 0; \quad \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)\left(\frac{d\mathbf{r}}{d\sigma}\right) = 0; \quad \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)\frac{du}{ds} + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\frac{dv}{ds}; \\ \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\sigma}\right) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)\frac{du}{d\sigma} + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\frac{dv}{d\sigma}.$$

Како је

$$dv/ds = (dv/du)_1(du/ds) = m_1(du/ds); \quad dv/d\sigma = (dv/du)_2(du/d\sigma) = m_2(du/d\sigma).$$

то се услов ортогоналности кривних може написати и у овом облику

$$m_1 m_2 G + (m_1 + m_2) F + E = 0, \quad m_i = (dv/du)_i; \quad i=1, 2. \quad (10,14)$$

Када се у овај израз унесу релације (10.13) добија се да је идентички задовољен, па су главни правци међусобно ортоионални.

Квадратна форма $\Phi_1 = ds^2$ је по својој природи позитивна дефинитна форма, јер је њена дискриминанта $A = |\mathbf{A}| = EG - F^2 > 0$, пошто је $(\partial \mathbf{r}/\partial u)\{\partial \mathbf{r}/\partial v\} = \sqrt{EG} \cos \theta$, где је θ угао између параметарских кривих. Када параметарске криве граде ортогоналну мрежу, тада је $\cos \theta = 0$, па је $F = 0$. Када је $E = G$ мрежа је ромбна, а буде ли тада и $F = 0$ онда је она квадратица или изотермичка. Када је $\det |\mathbf{C}| = |\mathbf{C}| = NL - M^2 > 0$ форма Φ_2 је позитивно дефинитивна, па је тачка M елиптичка тачка; када је $|\mathbf{C}| = NL - M^2 < 0$ форма је индефинитна па су тачке хиперболичке, и за $|\mathbf{C}| = NL - M^2 = 0$ форма је симидефинитна па су тачке параболичке. При $L = M = N = 0$ је $|\mathbf{C}| = 0$ па се каже да је тангенцијална раван у тој тачки стационарна. Када је $L/E = M/F = N/G$ тада је тачка кружна тачка (омбилик). Она спада у елиптичне тачке, јер је $|\mathbf{C}| > 0$.

Јединични вектор нормале је константног интензитета, али је променљив па како је $(\mathbf{n})\{\mathbf{n}\} = 1$; то је $(\mathbf{n})\{d\mathbf{n}\} = 0$, то је вектор $\{d\mathbf{n}\}$ управан на вектору $\{\mathbf{n}\}$, а како је и вектор $\{d\mathbf{r}\}$ управан на вектору $\{\mathbf{n}\}$, то лежи у тангенцијалној равни криве, ако она није у тој тачки (M) стационарна ($L \neq M \neq N \neq 0$). Код специјалих кривих на површи може се десети да је вектор $\{d\mathbf{n}\}$ колинеаран са вектором $\{d\mathbf{r}\}$, односно са тангентом. Овакве криве се зову линије кривине. Оне су, дакле, окарактерисане условом колинеарности тих вектора па је услов

$$\begin{aligned} [d\mathbf{n}, d\mathbf{r}] &= \left[\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} du + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v} dv, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv \right] = \left[\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right] du^2 + \left[\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right] du dv + \\ &+ \left[\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right] du dv + \left[\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right] dv^2. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Јединични вектор нормале $\{\mathbf{n}\}$ управан је на векторима $\{\partial \mathbf{r}/\partial u\}$ и $\{\partial \mathbf{r}/\partial v\}$ па је

$$\mathbf{n} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \end{bmatrix}}{\sqrt{EG} \sin \theta} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \end{bmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}; \quad |\mathbf{A}| = EG - F^2. \quad (10.15)$$

Из услова управности вектора $\{\mathbf{n}\}$ и $\{d\mathbf{n}\}$ следе и услови

$$(\mathbf{n}, d\mathbf{n}) = \left(\mathbf{n}, \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v} dv \right) = 0; \quad (\mathbf{n}) \left\{ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u} \right\} = 0; \quad (\mathbf{n}) \left\{ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v} \right\} = 0,$$

па вектори $\{\partial \mathbf{n}/\partial u\}$ и $\{\partial \mathbf{n}/\partial v\}$ леже у тангенцијалној равни, те су линеарно зависни са векторима $\{\partial \mathbf{r}/\partial u\}$, $\{\partial \mathbf{r}/\partial v\}$. Због тога се могу написати ове релације

$$\left\{ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u} \right\} = a \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right\} + b \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\}; \quad \left\{ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v} \right\} = c \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right\} + d \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\}.$$

Скаларним множењем векторима $\{\partial r/\partial u\}$ и $\{\partial r/\partial v\}$, с обзиром на (10.4) и (10.6), добијају се релације

$$Ea + Fb = -L; \quad Fa + Gb = -M; \quad Ec + Fd = -M; \quad Fc + Gd = -N,$$

из којих се одрђују коефициенти a, b, c, d , па су вектори

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u} \right\} &= \frac{FM - GL}{A} \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right\} + \frac{FL - EM}{A} \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\}; \\ \left\{ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v} \right\} &= \frac{FN - GM}{A} \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right\} + \frac{FM - EN}{A} \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\}; \quad A = |\mathbf{A}|. \end{aligned}$$

Због овог услов (10.14) постаје

$$(FN - GM) dv^2 - (GL - EN) du dv + (EM - FL) du^2 = 0 \quad (10.16)$$

а он је истоветан са условом (10.12) који служи за одређивање главних праваца у датој тачки на површи. Једначина (10.16) је квадратна по односу $dv/du = d\eta/d\xi = m$, па има два реална корена $m_1 = f_1(u, v)$ и $m_2 = f_2(u, v)$, те се добијају две криве једначина $F_1(u, v, C_1) = 0$ и $F_2(u, v, C_2) = 0$. Кроз сваку тачку површи, која није кружна тачка пролазе по две линије кривине које су међусобно управне. Тангенте ових кривих падају у главне правце. Код кружне тачке ($E/E = M/F = N/G$) главне кривине су једнаке, па је сваки правац главни правац.

Да би параметарске криве (u и v -криве) биле линије кривине морају бити ортогоналне, то јест мора бити $F = 0$. Сем тога су тада $dv = du = 0$, па из (10.16) следи да мора бити и $M = 0$. Ови су услови и потребни и довољни. Тада се из (10.10) добијају главне кривине

$$|\mathbf{C} - \lambda \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} L - \lambda E & 0 \\ 0 & N - \lambda G \end{vmatrix} = EG\lambda^2 - (EN + GL)\lambda + LN = 0; \quad K_1 = \frac{L}{E}; \quad K_2 = \frac{N}{G} \quad (10.17)$$

Кроз сваку тачку M површи може се поставити бескрајно много нормалних пресека, али се промена нормалне кривине може приказати и графички помоћу Dupin-ове *индикатрисе*. Када се на правац тангенте равног пресека L_n (слика 10.1.b) пренесе вектор $\mathbf{D} = \sqrt{R_n} \mathbf{T}_n$ онда геометриско место ових тачака D је *равна крива* другог реда са средштем у тачки M . Означимо са ξ и η координате тачке D у односу на ортогонални триједар $duMdv$, онда ће бити

$$D = \sqrt{R_n} \mathbf{T}_n = \sqrt{R_n} (\mathbf{T}_n \cos \varphi + \mathbf{T}_v \sin \varphi) = \sqrt{R_n} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \sqrt{R_n} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \frac{dv}{ds} \right) = \xi \mathbf{T}_u + \eta \mathbf{T}_v,$$

па су

$$\xi = \sqrt{R_n} \cos \varphi; \quad \eta = \sqrt{R_n} \sin \varphi; \quad \cos \varphi = \sqrt{E} \frac{du}{ds};$$

$$\sin \varphi = \sqrt{G} \frac{dv}{ds}; \quad \frac{du}{ds} = \frac{\xi}{\sqrt{E R_n}}; \quad \frac{dv}{ds} = \frac{\eta}{\sqrt{E R_n}}$$

Када се ове релације унесу у (10.7) тада се, због (10.17), добија једначина

$$K_n = \frac{1}{R_n} = \frac{1}{R_n} \left[\frac{L}{E} \xi^2 + \frac{N}{G} \eta^2 \right]; \quad K_1 \xi^2 + K_2 \eta^2 = 1; \quad K_1 \cos^2 \varphi + K_2 \sin^2 \varphi = K_n \quad (10.18)$$

која представља Еулер-ову формулу, помоћу које се може израчунати кривина нормалног пресека када се знају главне кривине у истој тачки M на површини.

У тачки M криве L на површи $f(x, y, z) = 0$, може се поставити основни триједар за линију (\vec{T} , \vec{N} , \vec{B}) и триједар за површ (\vec{T} , \vec{v} , \vec{n}), где је \vec{v} геодезијски правац који је у тангенцијалној равни (слика 10.1.c). Вектор кривине K_f криве L лежи у оскулаторној равни, $K_f = K_f \vec{N}$, па се може разложити у две компоненте у правцима \vec{n} и \vec{v} . Те компонентне кривине јесу нормална и геодезијска кривина, а између њих постоје везе

$$K_f = K_v + K_n; \quad K_n = K_f (\vec{N}, \vec{n}); \quad K_v = K_f (\vec{N}, \vec{v}); \quad R_f = R_n \cos \varphi \quad (10.19)$$

које представљају Меусниег-ову теорему: *полупречник кривине криве (L) на површи једнак је пројекцији полупречника кривине нормалног пресека (L_n) на оскулаторну раван криве (L).*

У техничкој пракси се често јављају љуске које су обрћене површи. Нека је оса симетрије обртног тела Oz -оса, онда је једначина меридијана $r = f(z)$, где је φ поларни угао (слика 10.1.d). За Гаусс-ове параметре узетимо поларно цилиндричне координате $u = \varphi$ и $v = z$. Како су формуле трансформација координата $x = r \cos \varphi$; $y = r \sin \varphi$; $z = z$, то су изводи:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{\rho} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} = \mathbf{i}(r \cos \varphi) + \mathbf{j}(r \sin \varphi) + z \mathbf{k}; \\ \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial \varphi} &= -\mathbf{i}(r \sin \varphi) + \mathbf{j}(r \cos \varphi); \quad \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial z} = \mathbf{i}(f' \cos \varphi) + \mathbf{j}(f' \sin \varphi) + \mathbf{k}; \\ \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial \varphi^2} &= -\mathbf{i}(r \cos \varphi) - \mathbf{j}(r \sin \varphi); \quad \frac{\partial^2 \vec{\rho}}{\partial \varphi \partial z} = -\mathbf{i}(f' \sin \varphi) + \mathbf{j}(f' \cos \varphi); \\ \frac{\partial^2 \vec{\rho}}{\partial z^2} &= \mathbf{i}(f'' \cos \varphi) + \mathbf{j}(f'' \sin \varphi). \end{aligned}$$

и основне величине првог и другог реда

$$E = r^2; \quad F = 0; \quad G = 1 + f'^2; \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{\sqrt{EG}} \{ \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi - f' \mathbf{k} \}; \quad (10.20)$$

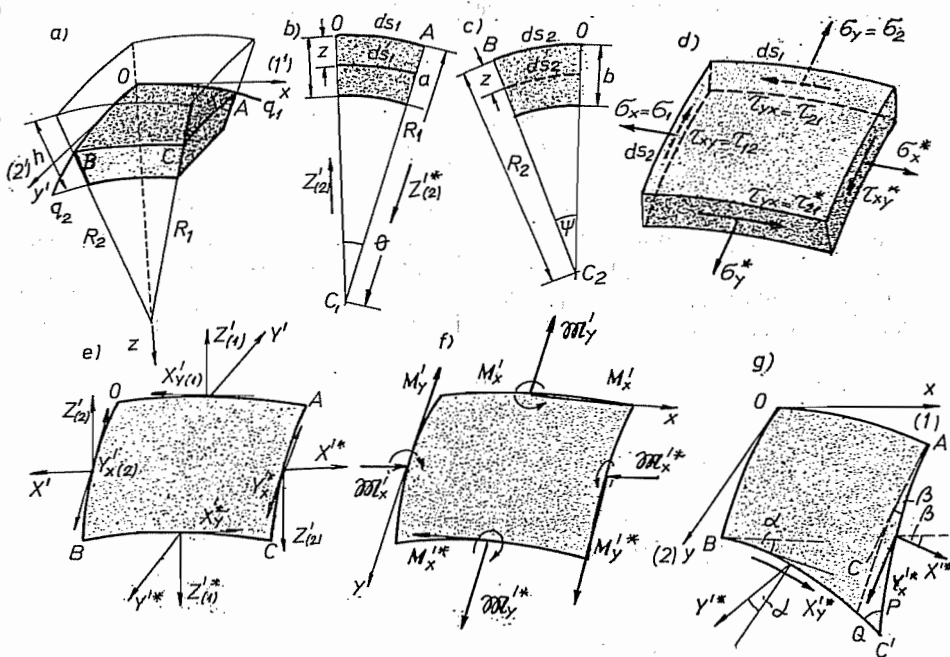
$$L = \left(\mathbf{n}; \frac{\partial^2 \vec{\rho}}{\partial \varphi^2} \right) = -\frac{r^2}{\sqrt{EG}}; \quad M = 0; \quad N = \left(\mathbf{n}; \frac{\partial^2 \vec{\rho}}{\partial z^2} \right) = \frac{r f''}{\sqrt{EG}},$$

па су главне кривине

$$K_1 = \frac{L}{E} = \frac{-1}{r\sqrt{1+f'^2}}; \quad K_2 = \frac{N}{G} = \frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}}; \quad \sqrt{EG} = \sqrt{|\mathbf{A}|} = r\sqrt{1+f'^2} \quad (10.21)$$

Због тога што су $F=M=0$ параметарске криве су-меридијани ($\varphi = \text{const}$) и ујоредници-паралеле ($z = \text{const}$) линије кривине. Кривина K_2 представља кривину меридијана у Ox - z -равни. Како је $dr/dz = f' = \text{tg } \alpha = C C_1/r$, (слика 10.1.e), то је дуж $M C_1 = r\sqrt{1+f'^2} = -1/K_1 = -R_1$, па представља полупречник прве главне кривине. Знак минус долази од тога што је нормала $\{n\}$ површи усмерена уопље.

10.2 Једначине равнотеже. — У тачки O средње површи усвојимо линије кривине за параметарске криве (q_i), чије тангенте узимамо за правце оса Ox и Oy . Оса Oz је усмерена наниже, а управна је на средњу површ те су криволинијске координате q_1, q_2 и z ортогоналне. Исецимо из љуске елемент ограничен површима $q_1 = \text{const}, q_1 + dq_1 = \text{const}, q_2 = \text{const}, q_2 + dq_2 = \text{const}$ (слика 10.2.a). Из (10.3) следи да је метричка форма $ds^2 = Edq_1^2 + Gdq_2^2$, па су лукови $ds_1 = A_1 dq_1; ds_2 = A_2 dq_2$ где су A_i Lamé-ови коефици-



Слика 10.2. — Равнотежни услови љуске

јенти, $A_1 = \sqrt{E}$, $A_2 = \sqrt{G}$. Дужина лука у равни Oxz , а у тачки на растојању z од средње површи може се одредити из сличности троуглова $\widehat{OA} : \widehat{oa} = R_1 : (R_1 - z)$ (слика 10.2.b), те следи $ds_1 : ds'_1 = R_1 : (R_1 - z)$, односно $ds'_1 = [1 - (z/R_1)] ds_1$. Аналогно ће бити и у равни Oyz (слика 10.2.c), па су лукови паралелни координатним линијама на растојањима z од њих

$$ds'_1 = \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) A_1 dq_1; \quad ds'_2 = \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) A_2 dq_2, \quad (10.22)$$

где су R_1 и R_2 главни полупречници кривине у тачки O површи.

Елементарне површине $ds'_i dz$ изложене су дејству напона (слика 10.2.d):

$$\sigma_x = \sigma_1; \quad \sigma_y = \sigma_2; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{12} = \tau_{21}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{1z} = \tau_{z1},$$

па су силе и моменти савијања и увијања који дејствују по јединици дужине страница како је назначено на слици (10.2.e,f):

$$\begin{aligned} X' &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz; & Y' &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz; & k &= h/2 \\ X'_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{21} \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz; & Y'_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz; \\ Z'_{(1)} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{2z} \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz; & Z'_{(2)} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{1z} \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz; & & (10.23) \\ M'_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) z dz; & M'_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) z dz; \\ M'_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) z dz; & M'_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{21} \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) z dz. \end{aligned}$$

Код *шанких љуски*, дебљина h је врло мала у односу на главне полу-пречнике кривина, $h \ll R_i$, па се величина z/R_i као мала може занемарити, те се, с обзиром на закон о коњугованости тангенцијалних напона, добија да су смицајне силе једнаке $X'_y = Y'_x$, а такође су једнаки и моменти увијања $M'_x = M'_y$.

Лук $\widehat{BC} = ds_1 = A_1 dq_1 = \widehat{OA}$, деформише се (слика 10.2.g), а такође и лук \widehat{AC} , па ће у деформисаном стању бити:

$$\widehat{BC}' = \left[A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial q_2} dq_2 \right] dq_1; \quad \widehat{AC}' = \left[A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial q_1} dq_1 \right] dq_2.$$

Нека је љуска оптерећена притиском p по јединици површи чије су пројекције на координатне осе $p_x = p_1$; $p_y = p_2$ и p_z , онда је равнотежни услов свих сила које дејствују у Ox - правцу:

$$\begin{aligned} \Sigma X_i &= X'^* \left(A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial q_1} dq_1 \right) dq_2 - X' A_2 dq_2 + X'_y^* \left(A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial q_2} dq_2 \right) dq_1 - X'_y A_1 dq_1 - \\ &- Y'^* \left(A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial q_2} dq_2 \right) dq_1 \cdot \sin \alpha + Y'_x^* \left(A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial q_1} dq_1 \right) dq_2 \cdot \sin \beta - Z'_{(2)}^* \left(A_2 + \right. \\ &\left. + \frac{\partial A_2}{\partial q_1} dq_1 \right) dq_2 \cdot \sin \theta + p_1 A_1 dq_1 A_2 dq_2 = 0 \end{aligned}$$

јер је сила Y'^* управо на \widehat{BC} , па гради са Oy -осом угао α , те има пројекцију и на Ox -осу, па и силе Y_x'' и $Z_{(2)}''$ имају такође пројекције на Ox -осу. Прираштаји свих сила на странама елемента паралелним координатним странама биће

$$X'^* = X' + \frac{\partial X'}{\partial q_1} dq_1, \quad Y'^* = Y' + \frac{\partial Y'}{\partial q_2} dq_2; \quad Z_{(2)}'' = Z_{(2)}' + \frac{\partial Z_{(2)}'}{\partial q_1} dq_1;$$

$$X_y'' = X_y' + \frac{\partial X_y'}{\partial q_2} dq_2; \quad Y_x'' = Y_x' + \frac{\partial Y_x'}{\partial q_1} dq_1;$$

а углови су

$$\sin \alpha = \frac{\widehat{PC}'}{\widehat{BC}'} = \frac{[(\partial A_2 / \partial q_1) dq_1] dq_2}{[A_1 + (\partial A_1 / \partial q_2) dq_2] dq_1} \approx \alpha; \quad \beta \approx \frac{\widehat{QC}'}{\widehat{AC}'} = \frac{[(\partial A_1 / \partial q_2) dq_2] dq_1}{[A_2 + (\partial A_2 / \partial q_1) dq_1] dq_2};$$

$$\theta = A_1 dq_1 / R_1; \quad \psi = A_2 dq_2 / R_2,$$

па се, после занемаривања малих величина вишег реда, предњи израз упрошћава. На пример, за прва два члана биће

$$\left\{ \left[X' + \frac{\partial X'}{\partial q_1} dq_1 \right] \left[A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial q_1} dq_1 \right] - X' A_2 \right\} dq_2 \simeq \left(X' \frac{\partial A_2}{\partial q_1} + A_2 \frac{\partial X'}{\partial q_1} \right) dq_1 dq_2 \simeq \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (A_2 X') \right] dq_1 dq_2.$$

а слично се добија и за остале чланове, па се први равнотежни услов може овако изразити

$$\sum X_i = 0; \quad \frac{\partial}{\partial q_1} (A_2 X') + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_1 X_y') + Y_x' \frac{\partial A_2}{\partial q_2} - Y' \frac{\partial A_2}{\partial q_1} - Z_{(2)}' \frac{A_1 A_2}{R_1} + A_1 A_2 p_1 = 0 \quad (10.24.a)$$

Аналогно се добија и други услов за равнотежу силе у Oy -правцу:

$$\sum Y_i = 0; \quad \frac{\partial}{\partial q_2} (A_1 Y') + \frac{\partial}{\partial q_1} (A_2 Y_x') - X_y' \frac{\partial A_1}{\partial q_2} + X_y' \frac{\partial A_2}{\partial q_1} - Z_{(1)}' \frac{A_1 A_2}{R_1} + A_1 A_2 p_2 = 0. \quad (10.24.b)$$

Равнотежни услов да је збир сила у Oz -правцу једнак нули биће

$$\sum Z_i = 0; \quad Z_{(1)}'' \left[A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial q_2} dq_2 \right] dq_1 - Z_1' A_1 dq_1 + Z_2'' \left[A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial q_1} dq_1 \right] dq_2 - Z_{(2)}' A_2 dq_2 + X_y'' \left[A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial q_1} dq_1 \right] dq_2 \cdot \sin \theta + Y_x'' \left[A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial q_2} dq_2 \right] dq_1 \cdot \sin \psi + p_z A_1 A_2 dq_1 dq_2 = 0,$$

односно после занемаривања малих величина вишег реда

$$\sum Z_i = 0; \quad \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 Z_{(2)}') + \frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 Z_{(1)}') + \left(\frac{X_y'}{R_1} + \frac{Y_x'}{R_2} + p_z \right) A_1 A_2 = 0. \quad (10.24.c)$$

Пошто су моменти савијања и увијања приказани на слици векторски то се пројектирањем тих вектора на Ox -осу добија моментни равнотежни услов $\Sigma M_x = 0$. Од сила треба уочити да само силе Z' изазивају моменте, па ће бити

$$\begin{aligned} \Sigma M_x = 0; \quad & M_x' A_1 dq_1 - M_x'' \left(A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial q_2} dq_2 \right) dq_1 + \mathfrak{M}_x' A_2 dq_2 - \\ & - \mathfrak{M}_x'' \left[A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial q_1} dq_1 \right] dq_2 - \mathfrak{M}_y'' \left(A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial q_2} dq_2 \right) dq_1 \cdot \sin \alpha + \\ & + M_y' \left(A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial q_1} dq_1 \right) dq_2 \cdot \sin \beta + Z'_{(1)} A_1 dq_1 \cdot A_2 dq_2 = 0. \end{aligned}$$

Пошто су прираштаји момената савијања и увијања

$$\begin{aligned} M_x'' &= M_x' + \frac{\partial M_x'}{\partial q_2} dq_2; \quad M_y'' = M_y' + \frac{\partial M_y'}{\partial q_1} dq_1; \quad \mathfrak{M}_x'' = \mathfrak{M}_x' + \frac{\partial \mathfrak{M}_x'}{\partial q_1} dq_1; \\ \mathfrak{M}_y'' &= \mathfrak{M}_y' + \frac{\partial \mathfrak{M}_y'}{\partial q_2} dq_2; \quad \sin \alpha \approx \alpha; \quad \sin \beta \approx \beta, \end{aligned}$$

то се после занемаривања малих величина вишег реда добија услов

$$\Sigma M_x = 0; \quad -\frac{\partial}{\partial q_1} (A_2 \mathfrak{M}_x') - \frac{\partial}{\partial q_2} (A_1 M_x') - \mathfrak{M}_y' \frac{\partial A_2}{\partial q_1} + M_y' \frac{\partial A_1}{\partial q_2} + Z'_{(1)} A_1 A_2 = 0 \quad (10.24.d)$$

Аналогно томе добија се и други моментни равнотежни услов

$$\Sigma M_y = 0; \quad \frac{\partial}{\partial q_2} (A_1 \mathfrak{M}_y') + \frac{\partial}{\partial q_1} (A_2 M_y') + \mathfrak{M}_x' \frac{\partial A_1}{\partial q_2} - M_x' \frac{\partial A_2}{\partial q_1} - Z'_{(2)} A_1 A_2 = 0. \quad (10.24.e)$$

Треба уочити да ови обрасци одговарају смеровима сила и спрегова назначеним на слици 10.2, с обзиром на претпостављене смерове напона. Силе су позитивне када дејствују у смеру оса, а моменти ако обрћу у позитивном смеру обртања, то јест у смеру супротном од смера кретања сатне казаљке.

10.3 Компонентне деформације. — Претпоставићемо да линија која је управна на средњу површ пре деформације остаје на њу управна и после деформације, и да су компонентни напони у правцу нормале средње површи мали у односу на друге компоненте напоне, тако да се могу занемарити.

Као и у **§ 4. 13.** усвојићемо генералисане ортогоналне координате q_i , узимајући да је $q_3 = z$. Супротно претпоставци код танких плоча, овде се-код танких љуски-не претпоставља да је средња површ ненапрегнута. Компонентна померања неке тачке M у правцима оса 1 и 2 криволинијског триједра биће

$$u = u_0 + z \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_{z=0}; \quad v = v_0 + z \left[\frac{\partial v}{\partial z} \right]_{z=0}. \quad (10.25.a)$$

где су u_0 и v_0 компонентна померања тачке средње површи. Прва претпоставка да нормала остаје и после деформације управна на средњу површ условљава да су клизања $\gamma_{1z} = \gamma_{2z} = 0$, па су према (4.99),

$$\gamma_{1z} = \frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{\mathcal{A}_1} \right) + \left(\frac{\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} \right) \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{w}{\mathcal{A}_3} \right) = 0; \quad \gamma_{2z} = \frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{\mathcal{A}_2} \right) + \frac{\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{w}{\mathcal{A}_3} \right) = 0$$

где су \mathcal{A}_i Lamé-ови коефицијенти. Ако означимо са \mathcal{A}_i Lamé-ове коефицијенте за тачке средње површи, онда из (10.22) следе односи

$$\mathcal{A}_1 = A_1 [1 - (z/R_1)]; \quad \mathcal{A}_2 = A_2 [1 - (z/R_2)]; \quad \mathcal{A}_3 = 1, \quad (10.25.a)$$

па се из претходних релација изводи

$$\left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_0 = -\frac{u_0}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial q_1}; \quad \left[\frac{\partial v}{\partial z} \right]_0 = -\frac{v_0}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial q_2}$$

где је w компонентно померање тачке средње површи, $w = w_0$. Када се ове релације унесу у (10.25.a) добијају се компонентна померања

$$u = u_0 - z \left[\frac{u_0}{R_1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial q_1} \right]; \quad v = v_0 - z \left[\frac{v_0}{R_2} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial q_2} \right]. \quad (10.25.c)$$

С обзиром на изводе $\partial \mathcal{A}_i / \partial z = -\mathcal{A}_i / R_i$; $i = 1, 2$, компонентне деформације (4.99) могу се написати у облику*

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{10} - k_1 z; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{20} - k_2 z; \quad \gamma_{12} = \gamma_0 - 2k_{12} z, \quad (10.26.a)$$

где су

$$\varepsilon_{10} = \frac{1}{A_1} \left[\frac{\partial u_0}{\partial q_1} + \frac{v_0}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial q_2} \right] - \frac{w}{R_1}; \quad \varepsilon_{20} = \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial v_0}{\partial q_2} + \frac{u_0}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial q_1} \right] - \frac{w}{R_2};$$

$$\gamma_0 = \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{u_0}{A_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{v_0}{A_2} \right);$$

$$k_1 = \frac{1}{A_1} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{u_0}{R_1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial q_1} \right) + \frac{1}{A_2} \left(\frac{v_0}{R_2} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial q_2} \right) \frac{\partial A_1}{\partial q_2} \right]; \quad (10.26.b)$$

$$k_2 = \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{v_0}{R_2} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial q_2} \right) + \frac{1}{A_1} \left(\frac{u_0}{R_1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial q_1} \right) \frac{\partial A_2}{\partial q_1} \right];$$

$$k_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{u_0}{A_1 R_1} + \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial w}{\partial q_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{v_0}{A_2 R_2} + \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial w}{\partial q_2} \right) \right].$$

Величине ε_{10} , ε_{20} и γ_0 јесу компонентне деформације тачке средње површи, а коефицијенти k_i представљају промене кривина у средњој површи.

* Reissner E., A new derivation of the equations for the deformation of elastic shells, *AJM*, t. 63, No. 1, (1941).

Због друге претпоставке да је σ_z мала величина и може се занемарити, Нооке-ов закон има облик

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2} [\varepsilon_{10} + \mu \varepsilon_{20} - (k_1 + \mu k_2) z]; \quad \sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2} [\varepsilon_{20} + \mu \varepsilon_{10} - (k_2 + \mu k_1) z]$$

$$\tau_{12} = \mathbf{G} (\gamma_0 - 2 k_{12} z). \quad (10.27)$$

Када се ове релације унесу у изразе (10.23) добијају се, после занемаривања величина $z/R_i \ll 1$, основне једначине теорије љуски

$$X' = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{10} + \mu \varepsilon_{20}); \quad Y' = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_{20} + \mu \varepsilon_{10}); \quad X_y' = Y_x' = \mathbf{G} h \gamma_0;$$

$$M_x' = -\mathcal{D} (k_2 + \mu k_1); \quad M_y' = -\mathcal{D} (k_1 + \mu k_2); \quad M_x' = M_y' = \mathcal{D} (1-\mu) k_{12} \quad (10.28)$$

10.4. Савијање осносиметрично оптерећене цилиндричне љуске. — Приликом испитивања отпорности танке љуске у зависности од средње површи, распореда оптерећења по површи љуске и ослањања, примењују се две теорије: упрошћена тзв. *безмоментна теорија*, и строжа-моментна теорија. По првој се теорији претпоставља да се љуска не супротставља савијању, постоје само напони паралелни тангенцијалним равнима, а константни по дебљини љуске. Овим је проблем постао статички решив, па се напони називају мембранским. У сложенијим случајевима када средња површ није глатка или на местима појављујућа различитих кривина, ово је метода неефикасна, па се примењује строжа.

Нека је z -оса симетрије љуске која је оптерећена *радијалним оптерећењем* p (спољашњи или унутрашњи притисак), тада сва померања и напони не зависе од координате φ , па су $\nu = 0$, $\tau_{rc} = 0$, $\tau_{cz} = 0$, $\sigma_r \approx 0$, $\tau_{rz} \approx 0$. Претпоставка $\tau_{rz} \approx 0$, па и $\gamma_{rz} \approx 0$, заснива се на *хијотези ситалних нормала*, „правoliniјска дуж управна на средњој површи до деформације, остаје таквом и после деформације”.

Нека је $N(r, z)$ нека тачка љуске која је до деформације била на растојању $\xi = r - R$ од средње површи, где је R полупречник средње површи. Нормала повучена из N на z -осу сече је у N_0 , па су пројекције померања тачке N на r -осу и z -осу u_0, w_0 , те су $u \approx u_0$, $w = w_0 - \xi (dw_0/dz)$. Дилатације су $\varepsilon_c = u/r \approx u/R$, $\varepsilon_z = dw_0/dz - \xi (d^2 u/dz^2)$, те су, према Нооке-овом закону, напони:

$$\sigma_c = E [(u/R) + \mu (dw_0/dz) - \mu \xi (d^2 u/dz^2)] / (1 - \mu^2);$$

$$\sigma_z = E [(dw_0/dz) - \xi (d^2 u/dz^2) + \mu (u/R)] / (1 - \mu^2). \quad (10.29)$$

Елемент површине управног пресека на z -осу је $2\pi r dr \approx 2\pi R d\xi$, па је равнотежни услов у том правцу $\int \sigma_z \cdot 2\pi R d\xi = F_z' \cdot 2R\pi$, где F_z' аксијална јединична сила јединице дужине круга средње равни. Уносећи вредност за σ_z добија се

$$(dw_0/dz) + \mu (u/R) - F_z' (1 - \mu^2) / Eh = 0 \quad (10.30)$$

Елиминишући из једначина (10.29) извод dw_0/dz , напони постају

$$\begin{aligned}\sigma_c &= \mu (F_z'/h) + E(u/R) - [E\mu/(1-\mu^2)] (\xi d^2 u/dz^2); \\ \sigma_z &= (F_z'/h) - E\xi (d^2 u/dz^2)/(1-\mu^2).\end{aligned}\quad (10.31)$$

Када је $F_z' = 0$ ови се изрази упрошћавају.

Запремински елемент између двеју радијалних равни кроз осу симетрије ($d\varphi$) и две управне равни на растојању dz изложени су моментима савијања M_c' и M_z' и силама F_r' и F_c' рачунатим по јединици дужине контуре средње површи, и оптерећењу p рачунатом по јединици површине средње површи. Радијална је r оса проведена кроз средиште елемента управног на z -осу. Равнотежне једначине су:

$$\Sigma F_r = 0; \quad \left(F_r' + \frac{dF_r'}{dz} dz \right) R d\varphi - F_r' R d\varphi - F_c' dz d\varphi + p R d\varphi dz = 0,$$

$$M_c' = \int_{-\delta}^{\delta} \sigma_z \xi d\xi = -\mathfrak{D} \frac{d^2 u}{dz^2},$$

$$\Sigma F_c = 0; \quad F_c' = \int_{-\delta}^{\delta} \sigma_c d\xi = \mu F_z' + E h u_1 R; \quad \delta = h/2:$$

$$M_z' = \int_{-\delta}^{\delta} \sigma_c \xi d\xi = -\mathfrak{D} u \frac{d^2 u}{dz^2}$$

$$\Sigma M_c = 0; \quad \left(M_c' + \frac{dM_c'}{dz} dz \right) R d\varphi - M_c' R d\varphi - F_r' d\varphi dz = 0;$$

где је \mathfrak{D} цилиндричка крутиост љуске. Сређивањем се добијају релације

$$F_r' = -\mathfrak{D} (d^2 u/dz^2)/dz; \quad (dF_c'/dz) - (F_c'/R) + p = 0; \quad dM_c'/dz - F_r' = 0, \quad (10.32)$$

па је диференцијална једначина угиба

$$(d^4 u/dz^4) + 4\beta^2 u = p^*/\mathfrak{D}; \quad \beta = \sqrt[4]{Eh/4\mathfrak{D}R^2} = \sqrt[4]{8(1-\mu^2)/R^2 h^2}; \quad p^* = q - \mu F_z'/h. \quad (10.33)$$

Ова је једначина линеарна, четвртог реда, са константним коефицијентима, па јој је решење

$$u = e^{\beta z} (C_1 \cos \beta z + C_2 \sin \beta z) + e^{-\beta z} (C_3 \cos \beta z + C_4 \sin \beta z) + u_1, \quad (10.34)$$

где је u_1 партикуларни интеграл (на пример, када је $p = \text{const}$, тада је $u_1 = pR^2/Eh$). Константе C_i ($i=1, 2, 3, 4$) одређују се из контурних услова (на сваком крају цилиндричке љуске по два услова).

Када је дужина љуске $L > 2\pi/\beta \approx 5\sqrt{Rh}$, тада се може сматрати да је она *пољубесконачна*, да је на почетку $z=0$ оптерећена спрегивима $M_c' = M_0'$

и силама F'_{ro} . Тада је $u_1 = 0$. Како и при $z \rightarrow \infty$, угиб остаје коначан, мора први члан у (10.34) отпасти, па је решење једначине угиба

$$u = e^{-\beta z} (C_3 \cos \beta z + C_4 \sin \beta z). \quad (10.35)$$

С обзиром на релације добијене из равнотежних услова и на граничне услове, могу се одредити интеграционе константе у облику

$$C_3 = -(\beta M'_{co} + F'_{co})/2\beta^3 \mathfrak{D}; \quad C_4 = M'_{co}/2\beta^2 \mathfrak{D}. \quad (10.36)$$

На овај случај своди се и *бескрајно цилиндрична љуска са кружним бандажом* оптерећеним радијалним оптерећењем p . Тада се може сматрати да је љуска овим подељена у две укљештене полубесконачне љуске оптерећене на почетку $z=0$ оптерећењем $p/2$. Сада је момент M'_{co} непознат али су промењени гранични услови, јер се на месту укрштења средња површ не криви, па су $du/dz=0$ и $d^3u/dz^3 = -p/2 \mathfrak{D}$. Стога су $M'_c = p/4 \beta$ и $u = p/2 \beta^3 \mathfrak{D}$ за $z=0$.

11. ТЕРМИЧКА НАПРЕЗАЊА

11.1. Основне једначине термоеластичности. — Сва се тела у природи при промени температуре мењају, шире или скупљају, па се деформишу. Из отпорности материјала* познато је да је дилатација штапа услед температурске промене дата изразом

$$\varepsilon_t = \alpha \cdot (t_2 - t_1) = \alpha \Delta t = \alpha T^\circ, \quad (11.1)$$

где је α *коэффициент линейной ширења материјала* (на пример за челик је $\alpha = 12,5 \cdot 10^{-6}$ [1/1°C] по једном степену Celsius-a), а T° је температурска разлика (°C). Ако се запремински елемент изотропног еластичног тела загреје до температурске разлике $\Delta t = T^\circ$ и ако је загревање равномерно онда ће се тело *шири* подједнако у свим правцима, па ће имати исте температурске дилатације $\varepsilon_t = \alpha T^\circ$, али се клизања не јављају, па су $\gamma_t = 0$. Међутим, ако се уочени запремински елемент тела не може слободно да шири, онда ће се јавити нормални напони, док ће тангенцијални напони остати непромењени. Оваква врста напрезања је *термичко напрезање*, па су напони *термички напони*. С обзиром на речено, Нооке-ов закон оваквог стања напрезања може се написати у облику

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{Bmatrix} \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z) \\ \sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x) \\ \sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y) \end{Bmatrix} + \alpha T^\circ \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{G} \begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}, \quad (11.2)$$

односно, према (4.9), у облику:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = 2G \begin{Bmatrix} \varepsilon_x + \mu k \varepsilon \\ \varepsilon_y + \mu k \varepsilon \\ \varepsilon_z + \mu k \varepsilon \end{Bmatrix} - Ek \alpha T^\circ \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}; \quad \begin{matrix} k = 1/(1 - 2\mu); \\ G = E/2(1 + \mu); \\ \varepsilon = \varepsilon_v. \end{matrix} \quad (11.3)$$

Из ових једначина следи да су кубна дилатација и први скалар тензора напона

$$\mathcal{E}_1 = \varepsilon_v = \varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = [(1 - 2\mu) \mathcal{A}'_1/E] + 3\alpha T^\circ; \quad (11.4 \text{ a})$$

$$\mathcal{A}'_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 2G(1 + 3\mu k)\sigma - 3E\alpha T^\circ. \quad (11.4 \text{ b})$$

Везе између компонентних померања и компонентних деформација остају непромењене, па се не мењају ни Гаусу-јеве једначине (2.24) нити

* Отпорност материјала, чл. I, б, обр. (34.а).

Saint-Venant-ови услови компатибилности деформација (2.42). Топлотни напони морају да задовоље једначине равнотеже (1.25) и Cauchy-јеве граничне услове (1.9).

Пошто се мењају изрази за Нооке-ов закон, то стављајући изразе (11.3) у једначине равнотеже (1.25), и занемарујући запреминске силе ($F'_v=0$), добијају се Lamé-ове једначине (3.10), у облику:

$$G \begin{Bmatrix} \Delta u + k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \\ \Delta v + k \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \\ \Delta w + k \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \end{Bmatrix} - \alpha k E \begin{Bmatrix} \frac{\partial T^o}{\partial x} \\ \frac{\partial T^o}{\partial y} \\ \frac{\partial T^o}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (11.5)$$

Уношењем изрази (11.3) у граничне услове (1.9), занемарујући површинске силе добијају се Cauchy-јеве једначине групе врсте (3.24) у облику

$$G \begin{pmatrix} 2\varepsilon_x + 2\mu k\varepsilon & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & 2\varepsilon_y + 2\mu k\varepsilon & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & 2\varepsilon_z + 2\mu k\varepsilon \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \alpha k E T^o \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix}, \quad (11.6)$$

а помоћу услова компатибилности добијају се Beltrami-Michell-ове једначине (3.26) у новом облику:

$$\Delta \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} + \frac{1}{1+\mu} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial z^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \Delta \begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} + \frac{1}{1+\mu} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial y \partial z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (11.7)$$

11.2. Кружни диск са радијалним распоредом температуре. — Када је $T^o = T^o(r)$, тада се температура не мења по дебелини диска, па се не мањају ни напони, нити померања по дебелини диска. Из симетрије следи да је тангенцијални напон $\tau_{rc} = 0$, а увођењем функције напона $\Phi = \Phi(r)$ прва једначина равнотеже за поларне координате, (4.80), је задовољена

$$(d\sigma_r/dr) + [(\sigma_r - \sigma_c)/r] = 0; \quad \sigma_r = \Phi/r; \quad \sigma_c = d\Phi/dr = \Phi'. \quad (11.8.a)$$

Први услов компатибилности деформација (4.87) постаје

$$(\partial^2 \varepsilon_c / \partial r^2) - [(\partial \varepsilon_r / \partial r) - 2(\partial \varepsilon_c / \partial r)]/r = r(\partial \varepsilon_c / \partial r) - (\varepsilon_r - \varepsilon_c) = 0, \quad (11.8.b)$$

односно уношењем изрази (11.2) за ове координате

$$r \left[\frac{\partial}{\partial r} (\sigma_c - \mu \sigma_r + \alpha E T^o) \right] - (1 + \mu) (\sigma_r - \sigma_c) = 0,$$

па се, с обзиром на функцију напона (11.8.a), добија диференцијална једначина другог реда

$$\Phi'' + \frac{1}{r} \Phi' - \frac{\Phi}{r^2} = -\alpha E T^{\circ}. \quad (11.8.c)$$

Сменом $\Phi = C r^\lambda$ добија се карактеристична једначина $\lambda^2 - 1 = 0$, па је решење горње једначине

$$\Phi = C_1 r + \frac{1}{r} C_2 - \frac{\alpha E}{r} \int_c^r T^{\circ} r \, dz. \quad (11.8.d)$$

Према (11.8.a) компонентни напони су

$$\sigma_r = \frac{\Phi}{r} = C_1 + \frac{1}{r^2} C_2 - \frac{\alpha E}{r^2} \int_c^r T^{\circ} r \, dr; \quad (11.8.e)$$

$$\sigma_c = \Phi' = C_1 - \frac{1}{r^2} C_2 + \alpha E \left(-T^{\circ} + \frac{1}{r^2} \int_c^r T^{\circ} r \, dr \right).$$

Код *ћуној диска* напони су у средишту (O) коначни, па мора бити константа $C_2 = 0$. Ако на контури диска ($r = R$) не дејствују спољашње силе, тада је $\sigma_r = 0$, па се из прве претходне једначине одређује интеграциона константа C_1 , и компонентни напони су:

$$\sigma_r = \alpha E \left[\frac{1}{R^2} \int_0^R T^{\circ} r \, dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r T^{\circ} r \, dr \right];$$

$$\sigma_c = \alpha E \left[-T^{\circ} + \frac{1}{R^2} \int_0^R T^{\circ} r \, dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r T^{\circ} r \, dr \right]. \quad (11.8.f)$$

11.3. Кружни цилиндар са осно-симетричним распоредом температуре. — Под претпоставком да је на крајевима цилиндра аксијална дилатација $\epsilon_z = 0$ проблем се своди на равно стање напрезања, па из треће једначине (11.2) следи релација $\sigma_z = \mu (\sigma_r + \sigma_c) - \alpha E T^{\circ}$, те су прве две дилатације:

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu (\sigma_c + \sigma_z)] + \alpha T^{\circ} = \frac{1 + \mu}{E} [(1 - \mu) \sigma_r - \mu \sigma_c + \alpha E T^{\circ}];$$

$$\epsilon_c = \frac{1}{E} [\sigma_c - \mu (\sigma_r + \sigma_z)] + \alpha T^{\circ} = \frac{1 + \mu}{E} [(1 - \mu) \sigma_c - \mu \sigma_r + \alpha E T^{\circ}]. \quad (11.9.a)$$

Услов компатибилности (11.8.b) је исти, па се добија диференцијална једначина:

$$r(d\epsilon_c/dr) - (\epsilon_r - \epsilon_c) = 0; \quad \Phi'' + \frac{1}{r} \Phi' - \frac{1}{r^2} \Phi = -\frac{\alpha E}{1 - \mu} T^{\circ}. \quad (11.9.b)$$

Њено је решење

$$\Phi = C_1 r + \frac{1}{r} C_2 - \frac{\alpha E}{1-\mu} \frac{1}{r} \int_0^r T^o r dr, \quad (11.9.c)$$

па су компонентни напони

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\Phi}{r} = C_1 + \frac{1}{r^2} C_2 - \frac{\alpha E}{(1-\mu)r^2} \int_0^r T^o r dr; \\ \sigma_c &= \Phi' = C_1 - \frac{1}{r^2} C_2 + \frac{\alpha E}{1-\mu} \left[-T^o + \frac{1}{r^2} \int_0^r T^o r dr \right]. \end{aligned} \quad (11.9.d)$$

Код *уној цилиндра* константа C_2 је једнака нули, пошто су напони у средишту коначни. Када нема спољашних сила тада је на контури (за $r=R$) радијални напон $\sigma_r=0$, па се може одредити константа C_1 . Стога су константни напони:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\alpha E}{1-\mu} \left[\frac{1}{R^2} \int_0^R T^o r dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r T^o r dr \right]; \\ \sigma_c &= \frac{\alpha E}{1-\mu} \left[-T^o + \frac{1}{R^2} \int_0^R T^o r dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r T^o r dr \right]; \end{aligned} \quad (11.10)$$

$$\sigma_z = \mu(\sigma_r + \sigma_c) - \alpha E T^o = \frac{\alpha E}{1-\mu} \left[-T^o + \frac{2\mu}{R^2} \int_0^R T^o r dr \right].$$

Код *шуйљеј цилиндра*, полупречника $R=R_s$ и $\rho=R_u$, из услова да је $\sigma_r=0$ за $r=\rho$ и за $r=R$, одређујемо константе

$$C_1 = \frac{\alpha E}{1-\mu} \cdot \frac{1}{(R^2-\rho^2)} \int_\rho^R T^o r dr; \quad C_2 = -\frac{\alpha E \rho^2}{1-\mu} \cdot \frac{1}{(R^2-\rho^2)} \int_\rho^R T^o r dr,$$

па су компонентни напони

$$\sigma_r = \frac{\alpha E}{1-\mu} \frac{1}{k^2 R^2} \left[\frac{k^2 - \psi^2}{1 - \psi^2} \int_\rho^R T^o r dr - r \int_\rho^r T^o r dr \right]; \quad k = \frac{r}{R}; \quad \psi = \frac{\rho}{R}; \quad (11.11)$$

$$\sigma_c = \frac{\alpha E}{1-\mu} \frac{1}{k^2 R^2} \left[\frac{k^2 + \psi^2}{1 - \psi^2} \int_\rho^R T^o r dr + r \int_\rho^r T^o r dr - T^o r^2 \right];$$

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1-\mu} \left[\frac{2}{R^2 (1 - \psi^2)} \int_\rho^R T^o r dr - T^o \right].$$

У *ћракси* је важан случај када су спољашња T_s° и унутрашња температура T_u° на спољашњем и унутрашњем цилиндру константне, а топлотни ток је стационаран. Распоред температуре може се претставити изразом

$$T^{\circ} = [(T_u^{\circ} - T_s^{\circ}) \ln(R/r)] / [\ln(R/\rho)] = (T_u^{\circ} - T_s^{\circ}) (\ln k) / (\ln \psi), \quad (11.12)$$

где су $k = r/R$ и $\psi = \rho/R$.

Када се ове вредности унесу у изразе (11.11) добиће се компонентни напони:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{\alpha E}{2(1-\mu)} \frac{T_u^{\circ} - T_s^{\circ}}{\ln \psi} \left[\ln k - \frac{(1-k^2)}{(1-\psi)k^2} \ln \psi \right]; \quad \psi = \frac{\rho}{R}; \quad k = \frac{r}{R}; \\ \sigma_c &= -\frac{\alpha E}{2(1-\mu)} \frac{T_u^{\circ} - T_s^{\circ}}{\ln \psi} \left[1 + \ln k + \frac{(1+k^2)\psi^2}{(1-\psi^2)k^2} \ln \psi \right]; \\ \sigma_z &= -\frac{\alpha E}{2(1-\mu)} \frac{T_u^{\circ} - T_s^{\circ}}{\ln \psi} \left[1 + \ln k + 2 \frac{\psi^2}{1-\psi^2} \ln \psi \right]. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Како су $\psi = \rho/R < 1$ и $k = r/R < 1$, то су $\ln \psi < 0$ и $\ln k < 0$, те знак напона σ_r зависи од разлике температура T_u° и T_s° тада је радијални напон *притисни* и једнак је нули на унутрашњем омотачу цилиндра ($r = \rho$ и $r = R$, је $k = \psi$). Највећи циркуларни и аксијални напон је на спољашњем и унутрашњем омотачу цилиндра (то јест за $k = 1$ и $k = \psi$):

$$\begin{aligned} r = \rho; \quad \sigma_c &= -\frac{\alpha E}{2(1-\mu)} (T_u^{\circ} - T_s^{\circ}) \left[\frac{2}{1-\psi^2} + \frac{1}{\ln \psi} \right]; \\ \sigma_z &= -\frac{\alpha E}{2(1-\mu)} \left[\frac{1+\psi^2}{1-\psi^2} + \frac{1}{\ln \psi} \right]; \\ r = R; \quad \sigma_c &= -\frac{\alpha E}{2(1-\mu)} (T_u^{\circ} - T_s^{\circ}) \left[\frac{2\psi^2}{1-\psi^2} + \frac{1}{\ln \psi} \right]; \\ \sigma_z &= -\frac{\alpha E \Delta T^{\circ}}{2(1-\mu)} \left[\frac{2\psi^2}{1-\psi^2} + \frac{1}{\ln \psi} \right]. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Ако је цилиндар *мале дебљине* ($\delta = R - \rho$) онда је $\psi \approx 1$, па су горњи обрасци *нећракци*, јер се добијају велики бројеви. Због тога треба те функционалне зависности развити у Тајлог-ов ред и задржати само прве чланове реда, те ће бити:

$$\begin{aligned} r = \rho; \quad \sigma_c = \sigma_z &= \frac{E\alpha}{2} \frac{(T_u^{\circ} - T_s^{\circ})}{(1-\mu)} \left[1 + \frac{\delta}{3R_s} \right] \approx \frac{E\alpha(T_u^{\circ} - T_s^{\circ})}{2(1-\mu)}; \quad \delta = R - \rho; \\ r = R; \quad \sigma_c = \sigma_z &= -\frac{E\alpha}{2} \left[\frac{(T_u^{\circ} - T_s^{\circ})}{(1-\mu)} \left[1 - \frac{\delta}{3R_s} \right] \right] \approx -\frac{E\alpha(T_u^{\circ} - T_s^{\circ})}{2(1-\mu)}; \quad R_s = \frac{\rho + R}{2}. \end{aligned} \quad (11.15)$$

На пример, за $R = 150$ mm, $\rho = 130$ mm, $E = 2 \cdot 10^4$ kN/cm², $\alpha = 12,5 \cdot 10^{-6}$, $\Delta T^{\circ} = 140^{\circ}$ биће $\delta = 20$; $R_s = 140$ mm, $\delta/3R_s = 1/21 \approx 0,05$, па су напони на омотачима цилиндра 26,250 kN/cm² и $-23,750$ kN/cm².

11.4. Сфера са радијалним распоредом температуре. — У овом случају је $T^{\circ} = T^{\circ}(r)$, а због симетрије су циркуларни и меридионални напони једнаки (слика 4.2), па први равнотежни услов (4.90), постаје:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_v) = 0. \quad (11.16.a)$$

Компонентне деформације (4.91) су

$$\varepsilon_r = du/dr = [(\sigma_r - 2\mu\sigma_v)/E] + \alpha T^{\circ}; \quad \varepsilon_v = u/r = \{[\sigma_v - \mu(\sigma_r + \sigma_v)]/E\} + \alpha T^{\circ}, \quad (11.16.b)$$

па се из њих добијају компонентни напони

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2kG[(1-\mu)\varepsilon_r + 2\mu\varepsilon_v - (1+\mu)\alpha T^{\circ}]; \\ \sigma_v &= 2kG[\varepsilon_v + \mu\varepsilon_r - (1+\mu)\alpha T^{\circ}]. \end{aligned} \quad (11.13.c)$$

Када се ове релације унесу у равнотежни услов (11.12.a) добија се диференцијална једначина за радијално померање

$$u'' + \frac{2}{r}u' - \frac{2u}{r^2} = \frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha T^{\circ}. \quad (11.17)$$

Њено решење је аналогно решењу (11.8.d)

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0; \quad u = Ar + \frac{B}{r^2} + \frac{\alpha(1+\mu)}{r^2(1-\mu)} \int_c^r T^{\circ} r^2 dr.$$

С обзиром на везе између дилатација и компонентних померања (11.16.b) компонентни напони биће

$$\begin{aligned} \gamma_r &= E \left[Ak - \frac{2}{1+\mu} \frac{B}{r^3} - \frac{2\alpha}{1-\mu} \frac{1}{r^3} \int_c^r T^{\circ} r^2 dr \right]; \\ \sigma_z &= E \left[Ak + \frac{1}{1+\mu} \frac{B}{r^3} - \frac{\alpha T^{\circ}}{1-\mu} + \frac{\alpha}{1-\mu} \cdot \frac{1}{r^3} \int_c^r T^{\circ} r^2 dr \right]. \end{aligned} \quad (11.18)$$

Код *уне куле* је за $r=0$ померања $u=0$, а напон је коначан, па мора бити константа $C_2=0$. Пошто на површини кугле нема површинских сила то је за $r=R$ напон $\sigma_r=0$, па се из тога услова одређује константа C_1 и компонентни напони су

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2\alpha E}{1-\mu} \left[\frac{1}{R^3} \int_0^R T^{\circ} r^2 dr - \frac{1}{r^3} \int_0^r T^{\circ} r^2 dr \right]; \\ \sigma_z &= \frac{\alpha E}{1-\mu} \left[\frac{2}{R^3} \int_0^R T^{\circ} r^2 dr + \frac{1}{r^3} \int_0^r T^{\circ} r^2 dr - T^{\circ} \right]. \end{aligned} \quad (11.19)$$

11.5. Кружна плоча са радијалним распоредом температуре. — Овде је као и у случају кружног диска $T^{\circ} = T^{\circ}(r)$. Ако је плоча *мале дебљине* може се ставити да је напон $\sigma_z = 0$, па се проблем своди на случај равнотелног напрезања. Компонентне дилатације су

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_c + \alpha E T^{\circ}); \quad \varepsilon_c = \frac{u}{r} = \frac{1}{E} (\sigma_c - \mu \sigma_r + \alpha E T^{\circ}), \quad (11.20.a)$$

па су компонентни напони

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left[u' + \mu \frac{u}{r} - (1+\mu) \alpha T^{\circ} \right]; \quad \sigma_c = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{u}{r} + \mu u' - (1+\mu) \alpha T^{\circ} \right] \quad (11.20.b)$$

Када се ове релације унесу у једначину равнотеже (11.8.a.) добија се диференцијална једначина

$$\sigma_r' + \frac{\sigma_r - \sigma_c}{r} = 0; \quad u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} = (1+\mu) \alpha T^{\circ} \quad (11.20.c)$$

а њено је решење

$$u = Ar + \frac{B}{r} + \frac{(1+\mu)\alpha}{r} \int_c^r T^{\circ} r \, dr. \quad (11.20.d.)$$

Према (11.20.b.) добијају се компонентни напони

$$\sigma_r = E \left[\frac{A}{1-\mu} - \frac{B}{(1+\mu)r^2} \right] - \frac{E\alpha}{r^2} \int_c^r T^{\circ} r \, dr; \quad (11.21)$$

$$\sigma_c = E \left[\frac{A}{1-\mu} + \frac{B}{(1+\mu)r^2} \right] - E\alpha T^{\circ} + \frac{E\alpha}{r^2} \int_c^r T^{\circ} r \, dr$$

а константе се одређују из граничних услова плоче.

У случају пуне плоче слободне на спољашњем крају, код које се температура мења по квадратном закону

$$T^{\circ} = T_o^{\circ} - (T_o^{\circ} - T_s^{\circ}) (r^2/R^2); \quad T^{\circ} = T_o^{\circ} \text{ за } r=0; \quad T^{\circ} = T_s^{\circ} \text{ за } r=R, \quad (11.22.a)$$

овда је у средишту плоче $u=0$, а пошто је напон коначане вредности мора бити константа $B=0$. Како је слободни крај плоче неоптерећен то је за $r=R$ радијални напон $\sigma_r=0$, одакле се одређује константа A ; па су компонентни напони

$$\sigma_r = -\frac{E\alpha}{4} \Delta T^{\circ} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]; \quad \sigma_c = -\frac{E\alpha}{4} \Delta T^{\circ} \left[1 - 3 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right];$$

$$\Delta T = T_o^{\circ} - T_s^{\circ}; \quad \sigma_{\max} = \frac{1}{2} E\alpha \Delta T^{\circ}. \quad (11.22.b)$$

11.6. Уклетена кружна плоча са линеарним распоредом температуре по њеној дебљини. — Кружна плоча константне дебљине изложена је топлотном напрезању услед температурске промене која се мења линеарно по

дебљини плоче. Предпоставља се да је у свакој тачки пресека управног на Oz -осу температура сразмерна растојању посматране тачке од еластичне површи. Овај услов је исти као и услови при чистом савијању кружне плоче јединичним спреговима по контури, када се еластична површ деформише у сферну површ. Када је контура овако загреване плоче слободна еластична површ биће сферна. Означимо са T разлику температура основа плоче, онда је највећа дилатација $\epsilon_{T\max} = \alpha T^\circ/2 = z_{\max}/R_x = (h/2)/R_x$, па се добија релација

$$1/R_x = \alpha T^\circ/h \quad (11.23.a)$$

за одређивање кривине средње површи услед температурске промене.

Ако би плоча била слободна на контури, онда се не би јављали напони. Међутим, када је контура уклештена али се средња раван плоче може слободно ширити, јављају се напони који стварају спрегове једнолико распоређене по конути, M' . Величина ових спрегова мора бити толика да би се поништило кривљење услед топлотног стања. Такви моментни одговарају случају чистог савијања уклештене кружне плоче. Тада су $M'_x = M'_y = M'_T$, па из (9.9) пошто је $R_x = R_y$, следи да је момент савијања

$$M'_T = \mathfrak{D}(1 + \mu)/R_x; \quad M'_T = \alpha T^\circ \mathfrak{D}(1 + \mu)/h = \alpha T^\circ E h^2/12(1 - \mu). \quad (11.23.b)$$

Из (9.12) собзиром на предњу релацију добија се највећи напон

$$\sigma_{\max} = 6 M'_T/h^2 = 6 \alpha T^\circ \mathfrak{D}(1 + \mu)/h^3 = \alpha T^\circ E/2(1 - \mu). \quad (11.23.c)$$

Из овога се види да дебљина плоче не утиче на највећи напон. Међутим, у пракси обично температурска разлика расте сразмерно дебљини плоче, па су термички напони већи код дебелих неголи код танких плоча.

11.7 Кружна плоча са осно-симетричним распоредом температуре. —

У овоме случају температурска промена зависна од поларних координата r и z те је $T^\circ = T^\circ(r, z)$. Због линеарности закона термоеластичности могу се посматрати засебно топлотна напрезања услед радијалне промене температуре (члан 11.5) а засебно услед аксијалне промене, претпостављајући да је средња температура по дебљини плоче једнака нули, те је испуњен услов

$$\int_{-h/2}^{h/2} T^\circ dz = 0; \quad T^\circ = T^\circ(r, z). \quad (11.23.a)$$

С обзиром на релације изнете у чл. 9.16 биће дилатације

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{z}{R_r} = -z w'' = \frac{1}{E} \left[\sigma_r - \mu \sigma_c + \alpha E T^\circ \right]; \\ \epsilon_c &= \frac{z}{R_c} = -\frac{z}{r} w' = \frac{1}{E} \left[\sigma_c - \mu \sigma_r + \alpha E T^\circ \right] \end{aligned} \quad (11.24.b)$$

па су компонентни напони

$$\sigma_r = -\frac{E z}{1 - \mu^2} \left[w'' + \frac{\alpha w'}{r} \right] - \frac{E \alpha T^\circ}{1 - \mu}, \quad \sigma_c = -\frac{E z}{1 - \mu^2} \left[\frac{w'}{r} + \mu w'' \right] - \frac{E \alpha T^\circ}{1 - \mu} \quad (11.24.c)$$

Као према (11.24.a) морају бити испуњени услови

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r dz = 0; \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_c dz = 0 \quad (11.24.d)$$

па ови напони морају бити статички еквивалентни моментима савијања. Стога су, а према (9.83), моменти савијања у радијалном и циркуларном правцу

$$M'_r = -\mathfrak{D}[(w'/r) + \mu w''] + M'_{T^0}; \quad M'_c = -\mathfrak{D}[(w'' + \mu w'/r)] + M'_{T^0}, \quad (11.25)$$

где је M'_{T^0} момент услед температурске промене.

Једначина равнотеже (9.91), уз услов да је $p=0$, постају

$$\frac{d}{dr}(Z'r) = 0; \quad \frac{d}{dr}(M'_c r) - M'_r - Z'r = 0 \quad (11.26.a)$$

па када се у њих ставе релације (11.25) добијају се диференцијалне једначине

$$-\mathfrak{D}\left(w'''' + \frac{w'''}{r} - \frac{w''}{r^2}\right) + \frac{d}{dr}(M'_{T^0}) = Z'; \quad (11.26.b)$$

$$w'''' + \frac{2}{r} w'''' - \frac{w'''}{r^2} + \frac{w''}{r^3} = \frac{1}{\mathfrak{D}} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dM'_{T^0}}{dr} \right). \quad (11.26.c)$$

Опште решење друге једначине, која је облика (7.35), је

$$w = A \ln r + Br^2 + Cr^2 \ln r + D + w_{pT^0}, \quad (11.27)$$

пошто је због решења r^λ карактеристична једначина $[\lambda(\lambda-2)]^2$ са коренима 0; 0; 2 и 2, а w_{pT^0} је партикуларни интеграл.

Када је закон расподеле температуре $T^0 = T^0(z)$ са условом да је $M'_{T^0} = 0$, тада је партикуларни интеграл $w_{pT^0} = 0$. Размотрићемо два случаја ослоњања плоче.

11.7.1. Пуна кружна уклештена плоча. — Из услова непрекидности плоче и пошто нема концентрисаних сила које дејствују у њеном тежишту, то за $r=0$ је угиб $w \neq 0$, па морају бити константе $A=C=0$. Пошто су за $r=R$ гранични услови $w=0$ и $dw/dr=0$ то су константе $A=D=0$. Пошто је и $w_{pT^0} < 0$ то је и $w=0$, па плоча остаје равна (хоризонтална), те су, према (11.24.c) компонентни напони

$$\sigma_r = \sigma_c = -E\alpha T^0 / (1-\mu). \quad (11.28)$$

Ако се температура мења линеарно по дебљини плоче онда су компонентни напони на основама:

$$\text{за } z = -h/2; \quad T^0 = T_g^0; \quad \sigma_r = \sigma_c = E\alpha \Delta T^0 / 2 (1-\mu); \quad \Delta T^0 = T_d^0 - T_g^0; \quad (11.29.a)$$

$$\text{за } z = h/2; \quad T^0 = T_d^0; \quad \sigma_r = \sigma_c = -E\alpha \Delta T^0 / 2 (1-\mu). \quad (11.29.b)$$

На пример, за челичну плочу $E=2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$, $\alpha=12$, $6 \cdot 10^{-6}$, $\mu=0,3$ и при $\Delta T^0=100^\circ\text{C}$ били би напони $\sigma_r = \sigma_c = 1800 \text{ N/cm}^2$.

11.7.2. Кружно-прстенаста плоча слободно ослоњена по спољашњој контури. — У овом случају гранични услови (9.86) на унутрашњем и спољашњем обиму плоче

$$\text{за } r = \rho, M_c' = 0; Z_c' = 0; \text{ за } r = R, M_c' = 0, w = 0 \quad (11.30.a)$$

дају систем једначина

$$\begin{aligned} -\mathfrak{D}[2(1+\mu)B + (3+\mu)C + 2(1+\mu)C \ln \rho - A(1-\mu)\rho^{-2}] + M_{T^{\circ}}' &= 0; \\ -\mathfrak{D}[2(1+\mu)B + (3+\mu)C + 2(1+\mu)C \ln R - A(1-\mu)R^{-2}] + M_{T^{\circ}}' &= 0; \\ -4\mathfrak{D}C/\rho &= 0; \\ BR^2 + CR^2 \ln R + A \ln R + D &= 0 \end{aligned} \quad (11.30.b)$$

из којих се одређују константе

$$A = C = 0; B = M_{T^{\circ}}'/2(1+\mu)\mathfrak{D}; D = -Bb^2. \quad (11.30.c)$$

Сада се може одредити угиб

$$w = \frac{6R^2(1-k^2)\alpha}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} T^{\circ} z \, dz; \quad k = \frac{r}{R}, \quad (11.31)$$

па су компонентни напони

$$\sigma_r = \sigma_c = -\frac{E\alpha}{1-\mu} \left[T^{\circ} - \frac{12z}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} T^{\circ} z \, dz \right]. \quad (11.32)$$

Када је распоред температуре линеаран, $T^{\circ} = kz$, тада су напони једнаки нули те нема топлотног напрезања:

$$T = kz; \quad \sigma_r = \sigma_c = 0 \quad (11.33)$$

Ако је $M_{T^{\circ}}' = 0$, онда је и $w = 0$, па су напони

$$\int_{-h/2}^{h/2} T^{\circ} z \, dz = 0; \quad w = 0; \quad M_{T^{\circ}}' = 0; \quad \sigma_r = \sigma_c = -E\alpha T^{\circ}/(1-\mu). \quad (11.34)$$

11.8 Термички напони код слободно ослоњене правоугаоне плоче. — Нека је разлика температура на основама плоче T° онда ће се плоча савијати. Ако бисмо претпоставили да је плоча уклештена по контури, онда би при линеарном распореду температуре, дејствовали дуж контуре једнолико распоређени momenti савијања (11.23.b). Да би смо одредили momente савијања слободно ослоњене плоче M_x' и M_y' треба моментима додати момент $-M_{T^{\circ}}$ равномерно распоређен дуж контуре. Ако се искористи *Marcus*-ова аналогија (чл. 9.20), онда је пошто је, $p = 0$ једначина (9.99) задовољена када је $M' = \text{const}$, па је $\Delta M' = 0$, а једначина (9.101) постаје

$$\Delta w = -M'/\mathfrak{D} = -(-M_{T^{\circ}}) = T^{\circ} \alpha(1+\mu)/h. \quad (11.35.a)$$

Њено решење је једнако збиру општег решења хомогене једначине (w_h) и партикуларног решења нехомогене једначине ($w_{pT^{\circ}}$). Када се решење хомогене једначине престаји у облику производа двеју функција $X(x)$ и $Y(y)$, онда се добија

$$\Delta w = 0; X''Y + XY'' = 0; X'' + k^2X = 0; Y'' - k^2Y = 0.$$

Пошто су за $x=0$ и $x=a$ гранични услови $w=0$ и $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$, то је решење прве једначине $X = B \sin kx$, где је $k = (2n-1)\pi/a$. Решење друге једначине је $Y = C \operatorname{Ch} ky$, ако је почетак O узет на средини ивице Oy (b), па су угиби симетрични у односу на Ox -осу. Према томе је опште решење хомогене једначине

$$w_h = \sum_{n=1}^{\infty} C_{(2n-1)} \sin \frac{(2n-1)\pi}{a} x \operatorname{Ch} \frac{(2n-1)\pi}{a} y. \quad (11.35.b)$$

Партикуларно решење се може такође узети у облику бескрајног реда

$$w_{pT^0} = - \frac{4\alpha(1+\mu)T^0}{\pi^3} \frac{a^2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin \frac{(2n-1)\pi}{a} x. \quad (11.35.c)$$

Контурни услов да је $w=0$ за $x=0$ и $x=a$ је задовољен, али да би био $w=0$ и за $y=b/2$, мора бити константа

$$C_{2n-1} \operatorname{Ch} \frac{(2n-1)\pi b}{2a} = \frac{4\alpha(1+\mu)T^0 a^2}{\pi^3 (2n-1)^3 h}$$

па се добија решење

$$w = - \frac{4\alpha(1+\mu)T^0}{\pi^3} \frac{a^2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin \frac{(2n-1)\pi}{a} x \left[1 - \frac{1}{\operatorname{Ch} \frac{(2n-1)\pi b}{2a}} \operatorname{Ch} \frac{(2n-1)\pi}{a} y \right] \quad (22.36)$$

Моменти савијања су

$$M'_x = \frac{\alpha(1+\mu)T^0 \mathfrak{D}}{h} - \mathfrak{D} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right);$$

$$M'_y = \frac{\alpha(1+\mu)T^0 \mathfrak{D}}{h} - \mathfrak{D} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (11.37)$$

где за w треба ставити вредности добијене из једначине (11.36).

11.9. Стационаран распоред температуре код правоугаоне плоче. — Када је распоред температуре стационаран, тада је $\Delta T^0 = 0$. Претпоставимо да је температура дуж ивица правоугаоне плоче

$$T^0(0; y) = 0; T^0(a; y) = 0; T^0(x; 0) = 0; T^0(x, b) = f(x). \quad (22.37.a)$$

Решење парцијалне једначине $\Delta T^0 = 0$ претпоставићемо у облику производа двеју функција $X(x)$ и $Y(y)$, па се као у предходном случају, добија

$$\Delta T^0 = 0; T^0 = XY; X''Y + XY'' = 0; X'' + k^2X = 0; Y - k^2Y = 0,$$

са решењима

$$X = A \cos kx + B \sin kx; Y = C \operatorname{Ch} ky + D \operatorname{Sh} ky.$$

С обзиром на услове (11.38.6) биће $A=0$, $k=k_n=n\pi/a$; $n=1, 2, 3, \dots$;

$C=0$, па је

$$T^o = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{a} x \operatorname{Sh} \frac{n\pi}{a} y \quad (11.38.a)$$

решење које задовољава једначину $\Delta T^o = 0$ Из последњег услова (11.38.a) следи да је

$$f(x) = \sum_n [a_n \operatorname{Sh}(n\pi b/a)] \sin(n\pi x/a), \quad 0 < x < a,$$

па се коефицијент a_n одређују помоћу *Fourier*-овог реда, те су

$$a_n \operatorname{Sh} \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx.$$

Дакле, тражено решење биће

$$T^o(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{a} x \cdot \frac{1}{\operatorname{Sh}(n\pi b/a)} \operatorname{Sh} \frac{n\pi}{a} y, \quad (11.38.c)$$

где су коефицијенти

$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi}{a} x dx. \quad (11.38.d)$$

Д О Д А Т А К

D.1. ОСНОВИ ТЕНЗОРСКОГ РАЧУНА*

D.1.1. Системи величина. — Тачки у тродимензионом еуклидском простору (E_3) у коме се раздаљина између двеју тачака одређује према Еуклидовом ставу, одговарају три броја (x, y, z) који су њене *координате* у односу на триједар референције *Охуз*. Ове се координате могу обележити и само *једним словом* са индексом, $x_i, i=1, 2, 3$. Да би се јасније истакла различита природа координата за два система могу се индекси „i“ писати и горе (x^i) и доле (x_i). Као што је познато из векторског рачуна може се један вектор ($\vec{r} = \mathbf{r}$) *једнозначно разложити* у три компоненте у правцима оса косоуглог триједра са *основним векторима* \mathbf{e}_i у облику**:

$$\mathbf{r} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x^i \mathbf{e}_i = x_i \mathbf{e}^i; \quad \mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}^1 + x_2 \mathbf{e}^2 + x_3 \mathbf{e}^3 = x_i \mathbf{e}^i, \quad (1.1)$$

где су \mathbf{e}^i *основни (базни) вектори реципрочної триједра*, везани са првим релацијама

$$\mathbf{e}^i = [\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k] / \Delta; \quad \mathbf{e}_i = [\mathbf{e}^j \mathbf{e}^k] / \Delta^*; \quad \Delta = (\mathbf{e}_1 [\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3]); \quad \Delta^* = (\mathbf{e}^1 [\mathbf{e}^2 \mathbf{e}^3]) = \Delta^{-1}; \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (1.2)$$

Ове две врсте координата се називају *контраваријантне* (x^i) и *коваријантне* (x_i). Оне се одређују као скаларни производи $x^i = (\mathbf{r} \mathbf{e}^i)$ односно $x_i = (\mathbf{r} \mathbf{e}_i)$, па следи да су основни вектори $\mathbf{e}_i = \partial \mathbf{r} / \partial x^i$ и $\mathbf{e}^i = \partial \mathbf{r} / \partial x_i$. С обзиром на ово, горњи индекси се називају *контраваријантни*, а доњи *коваријантни* без обзира на геометријску интрепретацију. Код ортогоналног триједра су основни вектори ортови (јединични вектори) \hat{i}_i , *па нема разлике између ових двеју врста координата*, што значи да је триједар сам себи реципрочан.

Множина неких величина (на пример x^i) чини њихов *скуп* $S\{x^i\}$, а величине (x^i) су елементи скупа и припадају му, $x^i \in S$. Аналогно скупу координата x^i може се скуп материјалних тачака, скуп коефицијената линеарне форме $\mathcal{L} = \sum a_i x_i = a_i x^i = a^i x_i$ обележити само саједним индексом. Овакав се скуп назива *систем првој реда, вектор или тензор првој реда*. Поједини чланови су *елементи* или *координате система*. Овакав се систем

* Детаљније видети Д. Рашковић, Основи тензорског рачуна, (скрипта), Крагујевац, 1974.

** Статика, X. издање, Додатак.

може увек претпоставити *матрицом врста* (x_i) односно матрицом колоном $\{x_i\}$ елемента уређених по редном броју индекса, $i = 1, 2, \dots, N$.

Билинеарна и квадратна форма могу се написати у облицима

$$\mathfrak{B} = (x) \mathbf{A} \{y\} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i y_k = a_{ik} x^i y^k; \quad \mathfrak{Q} = (x) \mathbf{A} (x) = a_{ik} x^i x^k. \quad (1.3)$$

Елементи ових система су са два индекса (a_{ik}), па је *систем групог реда*. Њему одговара *квадратна матрица*. Када је $a_{ik} = a_{ki}$ тада је систем *симетричан*, $a_{(ik)}$, и одговара му *симетрична квадратна матрица*; ако је, пак, $a_{ki} = -a_{ik}$ за $i \neq k$ систем је *кососиметричан (антисиметричан)*, $a_{[ik]}$. Њему одговара *кососиметрична матрица* код које су елементи $a_{ii} = 0$. Елементи система другог реда могу се обележити на три начина a^{ik} , a_{ik} и a^i_k . Овакав систем другог реда назива се *тензор групог реда*.

Скаларна величина (скалар) је одређена само једним податком, без индекса (a), па је *систем нултог реда*. Ова величина не зависи од система референције, па је *скаларна инваријантна* или кратко речено *скалар*. Аналогно системима нултог (скалар), првог (вектор) и другог реда (тензор другог реда) дефинишу се и системи вишег реда односно *тензори вишег реда*. Тако су елементи система трећег реда: a_{ijk} , a^{ijk} , a^i_{jk} , a_k^{ij} . Овом систему одговара *проспирна матрица* која има *врсте, колоне и слојеве*. Систем p -ог реда је $a_{i_1 i_2 \dots i_p}$ или $a^{i_1 i_2 \dots i_p}$, док је $p+q$ -ог реда $a_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}$.

D.1.2. Einstein-ова конвенција о сабирању. — Из изложеног се уочава предност увођења различитих индекса, па је симболика овог рачуна тако постављена да би оператика била што рационалнија. Због тога се користи Einstein-ова конвенција о сабирању: „У сваком изразу *иде се исити индекс* њојављује два *иуша* (једном као *горњи а* једном као *доњи*) *подрозумева се сабирање по њоше индекс*.“ Ови се индекси зову *неми (привидни, анонимни, дитту)*; они други су *слободни*. Пошто неми индекси не мењају смисао обрасца, могу се *произвольно мењати*. Тако су $\sum a_i x_i = a_i x^i = a^i x_i = a_j x^j = \dots = a_r x^r$; $\sum \sum a_{ik} x^i x^k = a_{ik} x^i x^k = a_{rs} x^r x^s$; $\sum a_{ij} b^j = a_{ij} b^j = a_{ir} b^r = a_{is} b^s$. Симбол $\sum_s a_s$ значи „не сабира се по s “, док је симбол a_{MM} , a^{MM} , a_M^M одређени члан тог израза, те не *преиспавља сабирање*. У сложнијим изразима треба неми индекс употребити само једанпут, на пример $a^i_{jk} a_i^p a_r^{nk} b_{np} = c_r$.

1.3. Алгебарске операције са системима. — Елементи a_{ik} и a^{ik} јесу елементи система другог реда, али су различитог типа, са доњим и горњим индексима. Тип, дакле, зависи од броја, распореда и положаја индекса. При извођењу алгебарских операција тип игра важну улогу. Ови су системи *једнаки*. $a^i = b^i$; $a^{ik} = b^{ik}$; $a_{ik}^j = b_{ik}^j$; $a_3^{12} = b_3^{12}$; а ови нису $a_k^i \neq b_{ij}^k$.

Сабрајши (огузеиш) могу се само системи истог реда и типа и са истим размаком вредности целих бројева које узимају индекси; $c^i = a^i + b^i$, $i = 1, 2, 3$; $c^i = a^i - b^i$; $a^i_{jk} + b^i_{jk} = c^i_{jk}$; $a^i_k + b_{ih} \neq$. Два се система произвољног реда и типа *множе* тако што се сваки елемент првог система множи по одређеном правилу (поретку) са сваким елементом другог система, па се од тих производа образује нови систем, на пример, $a^i b^k = c^{ik}$, $a_i b_k = c_{ik}$; $a^i b_k = c^i_k$.

а) *Контракција* (*Verjüngung, Faltung, contraction*) примењује се на системе који имају бар један пар индекса супротне варијантности, тј. на тензоре мешовитог типа. Она представља операцију *сажимања индекса*. Изабере се један горњи и један доњи индекс и означе се истим словом, те постају неми индеси, па се даље изврши сабирање по том индексу, и добије се систем за 2 степена *нижег реда* од полазног система. На пример, када у систему a_k^{ij} трећег реда изједначимо индексе $j=k$ добићемо систем $a_j^{ij} = \alpha^i$ првог реда, јер за $i, j=1, 2, 3$ биће $a_1^i + a_2^i + a_3^i = \alpha^i$. Међутим, контракцијом индекса. $i=k$ добија се такође систем првог реда али различит од првог, $a_k^{ij} = a_i^{ij} = \beta_j^i \alpha^i \pm \alpha^i$. Од система шестог реда a_{rst}^{ijk} контракцијом индекса $j=r$ добија се систем четвртог реда $a_{jst}^{ijk} = a_{st}^{jk}$. Даље ће бити $a_{st}^{ik} = a_{kt}^{ik} = a_i^t = a_i^i = \alpha = S$.

б) *Композиција или унушрашње множење система* (*Überschiebung*) се састоји у томе да се изврши множење система, а затим се изврши контракција по једном индексу једног система и једном индексу супротне варијантности другог система. На пример, $a^i b_j = c_j^i = c_i^i = c = a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3$. Или,

$$a_j^i b^k = c_j^{ik} = a_j^i b^j = p^i; a_j^i b_r^k = c_{jr}^{ik} = a_j^i b_r^j = a^i b_r = c^i, a_j^i b_i^k = a_j b^k = e_j^k.$$

1.4. Кронекер-ов делта симбол и Levi-Civita симболи. — Скаларни производи јединичних вектора ортогоналног триједра $Ox^1x^2x^3$ односно базних вектора (1.2) износе

$$(\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1) = \delta_{11} = 1; (\mathbf{i}^1 \mathbf{i}^1) = \delta^{11} = 1; (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2) = \delta_{12} = 0; (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}^1) = \delta_1^1 = 1, (\mathbf{e}_j \mathbf{e}^2) = \delta_1^2 = 0;$$

$$(\mathbf{e}_j \mathbf{e}^k) = \delta_j^k \quad (1.4)$$

те се даду означити једним симболом δ_{ik} ; δ^{ik} ; δ_i^k који се зове Кронекер-ов *делта симбол* и који има вредност 1 када је $i=k$ и вредност 0 када је $i \neq k$. Када су $i, k=1, 2, 3$ онда симболу δ_i^k одговара јединична матрица трећег реда, I_3 . Док се симбол $\delta_M^M = 1$, то је $\delta_i^i = 3$ или N , за $i=1, 2, 3$, односно $1=1, 2, \dots, N$. Услов $\delta_{ik} = (\mathbf{i}_i \mathbf{i}_k) = 0$ или 1, јесте *услов оријонормираниости јединичних вектора* Декартовог правоуглог триједра.

Овај се симбол назива и *суперпозициони оператор*, јер се композицијом система са овим симболом добија исти систем али са контрахованим индексом замењеним слободним индексом делта симбола. На пример,

$$\delta_i^i a_i = a_k; \delta_i^j u_s^j = u_s^i; \delta_j^r V_r^{mn} = V_j^{mn}. \quad (1.5)$$

Јединични вектори \mathbf{i}_i образују правоугли паралелепипед запремине $V = (\mathbf{i}_1 [\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3]) = 1$. Стога је Levi Civita увео тзв. *e-симболе шрећег реда* који се дефинишу на овај начин:

$$e_{ijk} = (\mathbf{i}_i [\mathbf{i}_j \mathbf{i}_k]) = \begin{cases} 1 & \text{ако је } ijk \text{ парна пермутација индекса } 1, 2, 3; \\ -1 & \text{ако је } ijk \text{ непарна пермутација од } 1, 2, 3; \\ 0 & \text{ако су два индекса једнака (} i=j; i=k; j=k \text{)}. \end{cases} \quad (1.6.5)$$

Они су дефинисани само за индексе $i, j, k=1, 2, 3$, па има их *шест* различитих од нуле, $e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1$; $e_{213} = e_{321} = e_{132} = -1$. Због тога се овај симбол назива и *пермутациони симбол*.

Пошто је векторски производ ортова $[\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3] = \mathbf{i}_1$; $[\mathbf{i}_3, \mathbf{i}_1] = \mathbf{i}_2$; $[\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2] = \mathbf{i}_3$, то је $[\mathbf{i}_j, \mathbf{i}_k] = e_{ijk} \mathbf{i}^i$, па је векторски производ два вектора у V_3 :

$$\mathbf{V} = [\mathbf{ab}] = a^j b^k [\mathbf{i}_j, \mathbf{i}_k] = e_{ijk} a^j b^k \mathbf{i}^i = V_i \mathbf{i}^i; \quad V_i = e_{ijk} a^j b^k; \quad V_1 = a^2 b^3 - a^3 b^2, \dots \quad (1.7.a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= a_j b_k [\mathbf{i}^j, \mathbf{i}^k] = e^{ijk} a_j b_k \mathbf{i}_i = V^i \mathbf{i}_i; \quad V^i = e^{ijk} a_j b_k; \\ V^1 &= a_2 b_3 - a_3 b_2; \quad V^2 = a_3 b_1 - a_1 b_3; \quad V^3 = a_1 b_2 - a_2 b_1. \end{aligned} \quad (1.7.b)$$

Пошто је e^{ijk} косиметрични систем, а $a_j b_k = V_{jk}$ је тензор, то следе

$$\begin{aligned} V^i &= e^{ijk} a_j b_k = \frac{1}{2} e^{ijk} (a_j b_k - a_k b_j) = \frac{1}{2} e^{ijk} \begin{vmatrix} a_j & a_k \\ b_j & b_k \end{vmatrix} = \frac{1}{2} e^{ijk} [a_j b_k]; \\ V^i &= e^{ijk} a_j b_k = e^{ijk} V_{jk}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где је $a_j b_k$ сиволашњи (алтернирајући) производ два вектора исте коваријантности који се назива бивектор. Други образац показује да се тензору може придружити (асоцирани) одговарајући вектор. Да би се боље истакла ова повезаност обе су величине обележене истим словом (тензор v_{jk} и вектор v^i).

Три сучелна вектора образују косоугли паралепипед запремине

$$V = (\mathbf{a} [\mathbf{bc}]) = a_i b_j c_k (\mathbf{i}^i [\mathbf{j}^j, \mathbf{k}^k]) = e^{ijk} a_i b_j c_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3!} e^{ijk} [a_i b_j c_k], \quad (1.9)$$

где је производ $[a_i b_j c_k]$ тзв. тривектор.

Када су вектори \mathbf{a} и \mathbf{c} укрштене силе \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 , а $\mathbf{b} = \mathbf{r}$ вектор положаја нападне тачке друге силе у односу на прву, онда је тривектор $(\mathbf{F}_1 [\mathbf{r} \mathbf{F}_2]) = 6 V$ комомент укрштених сила и једнак је шестострукој запремини тетраедра конструисаног над укрштеним силама.

D.1.5. Афини простор. — Систем вредности a^i , $i = 1, 2, \dots, N$ неких N променљих x^i назива се „тачка“ по аналогији са тачком у простору (E_3) . Скуп свих тачака за све могуће реалне вредности x^i чини реални *инкшиални простор или простор од N димензија* (хиперпростор, многострукост). Вредности a^i су координате у том простору (V_N) . Под вектором у V_N подразумевају се две уређене тачке: почетак $A(a^i)$ и крај $B(b^i)$ вектора померања $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, са координатама $u^i = b^i - a^i$. Вектор \mathbf{u} је одређен када му се знају координате u^i и почетак $A(a^i)$. Вектор \mathbf{u} одређен само са u^i је слободан вектор, јер се може паралелно померити у сваку тачку простора V_N . Положај сваке тачке P и V_N може се одредити вектором $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$, тзв. вектором положаја; пол $O(x^i = 0)$ зове се координатни почетак.

Координатни системи су такви геометријски објекти према којима се одређује положај тачке у простору, па се називају *системи референције*. Положај тачке у простору одређује се *картезијанским координатама* (правовуглим $y^i = x^i$ и косоуглим x^i) односно параметрима q^i који се зову *опиште* — *генерализације* — *координате*. Код картезијанских система координатне линије су *праве*, а координатне површи су *равни*; код криволинијских система су *криве линије*, односно површи. Тангентни вектори \mathbf{e}_i , односно \mathbf{g}_i , дуж тангената на координатне линије, јесу *основни (базни) координатни вектори* простора V_N . Уопште узев они нису јединични вектори, а могу се мерити и различитим јединицама и различитих су дужина.

Рачунске операције са векторима у хиперпростору V_N дефинишу се као и у тродимензионом простору (V_3) те важе операције: $1^\circ \mathbf{u} = \mathbf{v}$; $2^\circ \mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, $3^\circ \mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ и $4^\circ \mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}$, где је $\lambda \neq 0$. Ако је дат скуп вектора \mathbf{v}_k , где је $k < 1, 2, \dots, M < N$, а постоји λ_k таквих бројева, онда могу бити два случаја: 1° да је $\sum \lambda_k \mathbf{v}_k = \lambda^k \mathbf{v}_k = 0$ иако сви $\lambda_k \neq 0$, и 2° да је $\lambda^k \mathbf{v}_k = 0$ само када су сви $\lambda_k \equiv 0$. У првом случају су вектори *линеарно зависни*, у другом су *линеарно независни*. У простору V_N може бити највише N линеарно независних вектора, а сви се остали могу изразити њиховим линеарним комбинацијама.

Резултанта F_r сила F_1 и F_2 је у њиховој равни (V_2) па је линеарно зависна са компонентама, јер је $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_r F_r = 0$.

Скуп свих вектора одређеног реда (N) са којима се могу вршити пређе четири операције образује *линеарни систем вектора* или *линеарни простор* или *векторски простор* односно *афини простор*. Независни основни вектори \mathbf{e}_i доведени на заједнички почетак (O) образују основни N -тоедар или *векторску базу (основу)* простора V_N . Стога се вектор положаја тачке ($\mathbf{OP} = \mathbf{r}$) може једнозначно разложити у компоненте у правцима тих вектора, те ће бити:

$$\mathbf{r} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + \dots + x^N \mathbf{e}_N = x^i \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.10)$$

Координате x^i зову се афине координате;

У афиним простору могу се дефинисати $s_i = x^i$ 1° *паралелни (или колинеарни) вектори* $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}$; 2° *права линија* $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$, 3° *раван* $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c}$ и 4° *хиперраван* $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda^s \mathbf{b}_s$. Ако се мења само једна координата (x^M) а све остале ($N-1$) су константе, онда је $x^M = \lambda^M$, па из 2° следи да је $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} = \mathbf{a} + x^M \mathbf{e}_M$ те све тачке леже на правој паралелној основном вектору \mathbf{e}_M , а ово показује да је афини координатни систем праволинијски, $[\mathbf{r} - \mathbf{a}, \mathbf{e}_M] = 0$. Обратно, ако је $x^M = \text{const}$, а остале ($N-1$) променљиве тачке леже у хиперравни.

У афиним простору се могу упоређивати само дужине паралелних вектора, $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}$, јер је $v^i = \lambda u^i$, па је $\lambda = v^i / u^i$ однос њихових дужина. Ово показује да се непаралелни вектори не могу упоређивати, нити мерити, а ништа се не зна ни о углу између таква два вектора, јер су основни вектори \mathbf{e}_i непаралелни.

Опћајни простор од три димензије (E_3) је еуклидски матрички простор, јер је растојање двеју тачака $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ одређује Питагориним и косинусном теоремом по обрасцу $d = \overline{AB} = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}$, где се испред квадратног корена подразумева позитивни предзнак. Да би се у афиним простору могло из сваке тачке и свим правцима мерити *истом јединицом*, аналогно са простором E_3 уводи се *афини метрички простор* E_N ако се дефинише *скаларни производ два вектора*. Ако су то вектори померања двеју тачака, онда је $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = |\mathbf{r}_1| \cdot |\mathbf{r}_2| \cos \varphi$, где су $|\mathbf{r}_i|$ дужине вектора, а φ угао између њих када су пренети у исту тачку (O). За $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ добја се $(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = (\mathbf{r})^2$, тј. квадрат растојања између двеју тачака (P и O). С обзиром на (1.2) биће:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \varphi = a^i b^j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{ij} a^i b^j; \quad r^2 = g_{ij} x^i x^j, \quad (1.11)$$

где је $g_{ij} = g_{ji} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)$ *основни метрички тензор*, пошто он одређује *метрику простора*.

Када су базни вектори e_i јединични ортогонални вектори i_i онда је систем *Декартов правоугли систем*. Ако су a и b вектори положаја тачака $A(a^i)$ и $B(b^i)$, $i=1, 2, \dots, N$, тада су растојање и скаларни производ:

$$d = \overline{AB} = [(b^1 - a^1)^2 + (b^2 - a^2)^2 + \dots + (b^N - a^N)^2]^{1/2};$$

$$(ab) = a^i b^j (i_i j_j) = \delta_{ij} a^i b^j = a^i b^i; \quad r^2 = (x^i)^2 = (y^i)^2. \quad (1.12)$$

Вектори $ds_i = dr$ одређен двома блиским тачкама $A(x^i)$ и $B(x^i + dx^i)$, тј. координатама dx^i , назива се *инфинитезимални вектор померања*. Квадрат његове дужине је *метричка форма*, па ће бити:

$$ds^2 = (dr dr) = (dr)^2 = g_{ij} dx^i dx^j; \quad ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j = dx^i dx^i; \quad x^i = y^i \quad (1.13)$$

где се други израз односи на Декартов правоугли систем.

D. 1.6. Трансформације. — Физичке величине представљају се на разне начине: *скаларом* (маса, густина, рад, енергија, температура), *вектором* (брзина, убрзање, сила, момент силе, спрег сила, количина кретања, замах, електрично поље) и *тензором* (напон, деформација, квадратна форма). Скалар је независан од избора координатног система. У опажајном простору (E_3) могли смо са векторима вршити разне операције, па их и *геометријски представљају*. Међутим, уопштавањем појма простора (хиперпростор) геометријска интерпретација је даље немогућа, али се у замену за то прелази на аналитичко представљање координате вектора (v^i) у простору V_N , и на аналитичке операције са њима. Дакле, геометријске интерпретације се замењују *методама алгебре* аналитичка (геометрија) и *методом анализе* (диференцијална геометрија). Да би при овим трансформацијама вектор задржао своје физичко значење морају трансформације његових координата бити *независне од избора координатног система*.

Сложеније физичке величине представљају се тензором, кога дефинишимо на основу *ионашања његових компоненти при трансформацији координатних система*. Да би тензор задржао и даље своје физичко значење морају му компоненте бити *независне* у односу на те трансформације. Стога, *тензорски рачун представља апарат аналитичке и диференцијалне геометрије при проучавању разних објеката које се класифицирају према ионашању у односу на трансформације координата*.

D. 1.6.1. Ортогонална трансформација. — Када се Декартов правоугли триједар $Ox^1 x^2 x^3$, са основним векторима i_i , заокрене око почетка O и пређе у положај $O \xi^1 \xi^2 \xi^3 = O \bar{x}^1 \bar{x}^2 \bar{x}^3$, са основним векторима $i'_i = \bar{i}_i$, онда између једних и других координата постоје односи:

	i_1	i_2	i_3		
	x^1	x^2	x^3		
$\xi^1 = \bar{x}^1$	α_1^1	α_1^2	α_1^3	\bar{i}_1	$\bar{x}^1 = \alpha_1^1 x^1 + \alpha_1^2 x^2 + \alpha_1^3 x^3 = \alpha_k^1 x^k; \quad \bar{x}^i = \sum \alpha_k^i x^k = \alpha_k^i x^k;$
$\xi^2 = \bar{x}^2$	α_2^1	α_2^2	α_2^3	\bar{i}_2	$\bar{x}^2 = \alpha_2^1 x^1 + \alpha_2^2 x^2 + \alpha_2^3 x^3 = \alpha_k^2 x^k; \quad \{\bar{x}\} = \mathfrak{A}\{x\}; \quad (1.14)$
$\xi^3 = \bar{x}^3$	α_3^1	α_3^2	α_3^3	\bar{i}_3	$\bar{x}^3 = \alpha_3^1 x^1 + \alpha_3^2 x^2 + \alpha_3^3 x^3 = \alpha_k^3 x^k; \quad \{x\} = \mathfrak{A}^{-1}\{\bar{x}\},$

где је \mathfrak{A} *матрица трансформације*. Она је ортогонална матрица, јер је

$$|\mathfrak{A}| = \pm 1; \quad |\mathfrak{A}|^2 = 1; \quad \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}^T = \mathfrak{A}'; \quad \mathfrak{A} \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A} \mathfrak{A}' = \mathbf{I} \quad (1.15)$$

а њени елементи представљају косинусе смера јединичних вектора $\bar{\mathbf{i}}_i$ нових оса мерених у старом систему (α_k^i). Када је $\det \mathfrak{A} = |\mathfrak{A}| = 1$ трансформација је директна и представља ротацију; у противном, при $|\mathfrak{A}| = -1$ трансформација је супротна и представља ротацију са одлегањем. Пошто је триједар остао и даље ортогонални то се ова трансформација и назива ортоионалном. Код ње се не мења дужина вектора нити угао између два вектора, јер је:

$$\{\bar{\mathbf{u}}\} = \mathfrak{A} \{\mathbf{u}\}; (\bar{\mathbf{u}}) \{\bar{\mathbf{u}}\} = |\bar{\mathbf{u}}|^2 = (\mathbf{u}) \mathfrak{A}' \mathfrak{A} \{\mathbf{u}\} = (\mathbf{u}) \mathbf{I} \{\mathbf{u}\} = |\mathbf{u}|^2; |\bar{\mathbf{u}}| = |\mathbf{u}|; \quad (1.16)$$

$$\cos \theta = (\bar{\mathbf{u}}) \{\bar{\mathbf{v}}\} / |\bar{\mathbf{u}}| |\bar{\mathbf{v}}| = (\mathbf{u}) \mathfrak{A}' \mathfrak{A} \{\mathbf{v}\} / |\mathfrak{A}| |\mathbf{u}| |\mathfrak{A}| |\mathbf{v}| = (\mathbf{u}) \mathbf{I} \{\mathbf{v}\} / |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| = \cos \varphi; \theta = \varphi.$$

D. 1.6.2. Афина трансформација. — Линеарна трансформација старих променљивих x^i у нове \bar{x}^i , тј. ($\bar{x}^i \leftarrow x^i$), облика

$$\bar{x}^i = a_k^i x^k; \{\bar{x}\} = \mathbf{A} \{x\}; \mathbf{A} = (a_k^i); a_k^i = \text{const.} \quad (1.17)$$

назива се хомогена линеарна трансформација. Матрица \mathbf{A} (a_k^i) је матрица трансформације. Када је $\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = |a_k^i| \neq 0$ трансформација је регуларна (несингуларна); при $|\mathbf{A}| = 0$ она је сингуларна. Код прве је ранг матрице $r = N$, а код друге је $r < N$. Прва се трансформација може окренути (инверзна трансформација) и биће:

$$\{\bar{x}\} = \mathbf{A} \{x\}; \{x\} = \mathbf{A}^{-1} \{\bar{x}\} = \mathbf{R} \{\bar{x}\}; \bar{x}^i = a_k^i x^k = r_k^i \bar{x}^k, \quad (1.18)$$

где је $\mathbf{R} = \mathbf{A}^{-1}$ инверзна матрица коефицијента $r_k^i = K_i^k / |\mathbf{A}|$ једнаким коефицијентима елемента a_k^i од \mathbf{A} подељеним детерминантом матрице \mathbf{A} , јер се, по Сатерге-овом правилу, за $N=3$, из (1.14) када се коефицијенти a_k^i замене са a_k^i добија:

$$\bar{x}^1 = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{vmatrix} \bar{x}^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ \bar{x}^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ \bar{x}^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} (K_1^1 \bar{x}^1 + K_2^1 \bar{x}^2 + K_3^1 \bar{x}^3) = r_1^1 \bar{x}^1 + r_2^1 \bar{x}^2 + r_3^1 \bar{x}^3 = r_i^1 \bar{x}^i; \quad (1.19)$$

$$x^2 = r_i^2 \bar{x}^i; x^3 = r_i^3 \bar{x}^i; r_i^1 = K_i^1 / |\mathbf{A}|; r_i^2 = K_i^2 / |\mathbf{A}|; r_i^3 = K_i^3 / |\mathbf{A}|$$

Из (1.18) заменом немних индекса i са k добијају се релације:

$$\bar{x}^i = a_k^i x^k; x^i = r_k^i \bar{x}^k; r_k^i = \frac{K_i^k}{|\mathbf{A}|}; a_k^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}; r_k^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}; \bar{x}^k \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}; x^i = \bar{x}^k \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}, \quad (1.20)$$

па се види како се „*премешта црта изнад координата*“ при трансформацији, и да се индекс k испод разломачке црте, при парцијалином диференцирању — сматра, због конвенције о сабирању, доњим (коваријантним) индексом.

Афина трансформација се може схватити на два начина: 1° као несингуларно афино пресликавање (афинитет) простора одређеног тачкама x^i у простор одређен тачкама \bar{x}^i у односу на исти координатни систем, и 2° као трансформација координата x^i једног N -тоедра у координате \bar{x}^i другог N -тоедра са заједничким почетком (O).

Линеарна хомогена трансформација је специјалан случај опште линеарне трансформације

$$\bar{x}^i = a_k^i x^k + b^i; \{\bar{x}\} = \mathbf{A} \{x\} + \{b\}; \bar{x}^i = x^i + b^i; \{\bar{x}\} = \{x\} + \{b\}; \mathbf{A} = \mathbf{I}, \quad (1.21)$$

где је у другом случају матрица \mathbf{A} јединична матрица \mathbf{I} . Вектор $\{b\}$ је константа.

Поред трансформације променљивих (x^k) могу се трансформисати и 0^n основни (базни) вектори. Вектор \mathbf{r} се може изразити у оба система као

$$\mathbf{r} = \bar{x}^i \bar{\mathbf{e}}_i = x^k \mathbf{e}_k = \mathbf{r}_i^k \bar{x}^i \mathbf{e}_k = \bar{x}^i (r_i^k \mathbf{e}_k); \quad \bar{\mathbf{e}}_i = r_i^k \mathbf{e}_k; \quad \bar{x}^i = a_i^k x^k, \quad (1.22)$$

па се види да се координате x^i трансформишу *суйројино* („contra“) од начина трансформисања базних вектора \mathbf{e}_i , те се стога и називају *контраваријантним* (обичним) координатама.

Ова трансформација има особине: 1° да се права пресликава у праву, $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$; $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}) = \bar{\mathbf{a}} + \lambda \bar{\mathbf{b}}$; 2° да се раван пресликава у раван, $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c}) = \bar{\mathbf{a}} + \lambda \bar{\mathbf{b}} + \mu \bar{\mathbf{c}}$; 3° да се паралелни вектори пресликавају у паралелне векторе, $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{A}(\lambda \mathbf{u}) = \lambda \bar{\mathbf{u}}$, очуваних односа дужина, $\lambda = \bar{v}/\bar{u} = v/u$; 4° дужине и углови између вектора се мењају, па се геометријски облици *деформишу* у истом односу, једнаком $f = |\mathbf{A}|$. Када је $f = |\mathbf{A}| > 0$ деформација је *позитивна* (*издужење — екстензија*); при $f = |\mathbf{A}| < 0$ она је *негативна* (*скраћење — компресија*).

Д. 1.6.3. Општа функциона (генералисана) трансформација. — Трансформација променљивих q^i у променљиве $\bar{q}^i(q^k)$, $i = 1, 2, \dots, N$, није уопште узев линеарна. Функције $q^i = q^i(q^{-k})$ представљају инверзну трансформацију. Да би она постојала, тј. да би скупу q^i одговарао скуп величина q^{-i} , потребно је и довољно: 1° да су функције $\bar{q}^i(q^k)$ једнозначне, континуалне и да имају непрекидне изводе до потребног реда, и 2° да је функционална детерминанта (јакобијан) $J = |\partial \bar{q}^i / \partial q^k| = |\partial (\bar{q}^1, \dots, \bar{q}^N) / \partial (q^1, \dots, q^N)| \neq 0$. Код афине трансформације, према (1.20), јакобијан је $J = |\partial \bar{x}^i / \partial x^k| = |a_k^i| = |\mathbf{A}| \neq 0$, па је генералисана трансформација општија од афине.

Из (1.20), а аналогно и на горње зависности $\bar{q}^i(q^k)$ и $q^i(q^{-k})$, следи да су тотални диференцијали

$$\begin{aligned} d\bar{x}^i &= (\partial \bar{x}^i / \partial x^k) dx^k; \quad dx^i = (\partial x^i / \partial \bar{x}^k) d\bar{x}^k; \quad d\bar{q}^i = (\partial \bar{q}^i / \partial q^k) dq^k; \\ d\bar{q}^i &= (\partial \bar{q}^i / \partial q^k) dq^k, \end{aligned} \quad (1.23)$$

па се види да се у оба случаја *тотални диференцијали* трансформишу линеарно и хомогено, само се у првом случају коефицијенти трансформације константе, а у другом су функције криволинијских координата.

Д. 1.7. Инваријанте — Величина која је дата само једним бројем или функцијом (q^i) чија се вредност при трансформацији $q^i \rightarrow \bar{q}^i$ не мења, $\varphi(q^i) = \bar{\varphi}(\bar{q}^i) = S$ назива се *скаларна инваријантa*, или краће *инваријантa* односно *скалар*. Функције φ и $\bar{\varphi}$ су различитог облика, али та промена не утиче на вредност функције која је инваријантна у односу на координатне трансформације (на пример, елемент лука, кинетичка енергија, итд). Постоје инваријанта код које се при трансформацији не мења ни аналитичка форма, па се таква инваријанта назива *аисолућном*.

Ако свакој тачки неког простора одговара одређен скалар онда се каже да скалари образују *скаларно поље*. Скалар, дакле, зависи од *положаја* (места) одговарајуће тачке простора. Међутим, он може да зависи и од *групних физичких параметра* (на пример, времена) који одређују његова *локална својства*. Стога скалари као инваријанте играју важну улогу, јер претстављају унутрашње (природне) особине те величине (на пример, инваријанте момента инерције, напонска инваријанта).

D.1.8. Контраваријантни и коваријантни вектори. — Контраваријантне и коваријантне координате (компоненте) вектора увели смо из геометријског разматрања у простору E_3 . Међутим, та се квалификација може извршити и према понашању координата тих вектора при трансформацији, тј. аналитичком методом. Нека тачке $A(x_a^i)$ и $B(x_b^i)$ одређују у афину простору (E_N) вектор коначног померања $\mathbf{u} = \mathbf{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ са координатама $u^i = x_b^i - x_a^i$. Афином трансформацијом координата ($\bar{x}^i \leftarrow x^i$) добија се

$$\bar{u}^i = a_k^i u^k = a_k^i (x_b^k - x_a^k); \quad \bar{u}^i = a_k^i u^k = u^k \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}; \quad u^i = \bar{u}^k \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}.$$

Међутим- из (1.23) види се да се диференцијал dq^i трансформише у односу на генералисану трансформацију на исти начин као и вектор коначног померања у односу на афину. Овакви системи првог реда $|u^i|$ који се, дакле, трансформишу у односу на афину трансформацију као координате вектора коначног померања односно као тотални диференцијали у односу на генералисану трансформацију, то јест- по обрасцима

$$\bar{x}^i = a_k^i x^k = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} x^k; \quad \bar{u}^i = u^k \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}; \quad u^i = \bar{u}^k \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}; \quad \bar{u}^i = u^k \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^k}; \quad u^i = \bar{u}^k \frac{\partial q^i}{\partial \bar{q}^k}, \quad (1.24)$$

одређују *контраваријантни вектор* или *контраваријантни тензор првог реда*. Видимо, дакле, да је *противоположна оваквих величина вектор коначног померања односно тотални диференцијал*

Из (1.22) скаларним множењем вектором \mathbf{v} добија се $(\mathbf{v} \bar{\mathbf{e}}_i) = r_i^k (\mathbf{v} \mathbf{e}_k)$ или $\bar{v}_i = r_i^k v_k = v_k (\partial x^k / \partial \bar{x}^i)$, па се коваријантне координате вектора \mathbf{v} трансформишу на исти начин као и базни вектори. Извод скаларне функције $\varphi(q^i)$ која је инваријантна, по координати q^i , представља систем првог реда $v_i = \partial \varphi / \partial q^i$. При генералисаној трансформацији добија се $\bar{v}_i = \partial \bar{\varphi} / \partial \bar{q}^i = (\partial \varphi / \partial q^k) (\partial q^k / \partial \bar{q}^i) = v_k (\partial q^k / \partial \bar{q}^i)$, јер је због инваријантности $\bar{\varphi}(\bar{q}^i) = \varphi(q^i)$. Види се да је ова трансформација друкчија од (1.24). Величине v_i које се трансформишу у односу на афину трансформацију као базни вектори, а у односу на генералисану као парцијални изводи скаларне инваријанте, тј. по обрасцима:

$$\bar{v}_i = r_i^k v_k \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}; \quad v_i = \bar{v}_k \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}; \quad \bar{v}_i = v_k \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i}; \quad v_i = \bar{v}_k \frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^i} \quad (1.25)$$

одређују *коваријантни вектор* или *коваријантни тензор првог реда*. Пошто се трансформише *сајасно основним векторима* то се назива коваријантни (код латинске речи „со“); међутим контраваријантни се трансформише *супротно*, па се назива контраваријантним (по речи „contra“).

Линеарна хомогена форма одређује коваријантни вектор, јер је према (1.18),

$$\mathfrak{L} = a_k x^k = S; \quad \mathfrak{L} = a_k x^k = a_k r_i^k \bar{x}^i = \bar{\mathfrak{L}} = \bar{a}_i \bar{x}^i = \bar{S}; \quad \bar{a}_i = r_i^k a_k.$$

Вектор \mathbf{v} чије су координате парцијални изводи скаларне функције $\partial \varphi / \partial q^i$ градијент је те скаларне функције, $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$, па се *коваријантни вектор* (v_i) *трансформише као градијент скаларне функције*.

D.1.9. Тензори. — С обзиром на број и варијантност индекса системи са два или више индекса иазивају се тензори. Под тај појам подвукли смо и скаларе и векторе: први су тензори нултог реда, а други првог реда. У техничкој пракси највише се употребљавају тензори другог реда.

а) *Тензори групог реда.* — Систем другог реда од N^2 компонената образован помоћу *тензорског (дијагског) производа вектора* назива се тензор *групог реда*, облика

$$\{\mathbf{u}\}(\mathbf{v}) = \{\mathbf{uv}\} = \mathbf{uv}; \quad w^{ik} = \{u^i\}(v^k) = u^i v^k; \quad w_{ik} = u_i v_k; \quad w_k^i = u^i v_k \quad (1.26)$$

ако се при трансформацији координата x^i (или q^i) трансформишу аналогно трансформацијама вектора \mathbf{u} и \mathbf{v} (обр. 1.24 и 1.25) по следећим обрасцима:

$$a) \quad \bar{w}^{ik} = a_m^i a_n^k w^{mn}; \quad \bar{w}^{ik} = w^{mn} \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^m} \frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^n}; \quad w^{mn} = u^m v^n; \quad (1.27.a)$$

$$b) \quad \bar{w}_{ik} = r_i^m r_k^n w_{mn}; \quad \bar{w}_{ik} = w_{mn} \frac{\partial q^m}{\partial \bar{q}^i} \frac{\partial q^n}{\partial \bar{q}^k}; \quad w_{mn} = u_m v_n; \quad (1.27.b)$$

$$c) \quad \bar{w}_k^i = a_m^i r_k^n w_n^m; \quad \bar{w}_k^i = w_n^m \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^m} \frac{\partial q^n}{\partial \bar{q}^k}; \quad w_n^m = u^m v_n. \quad (1.27.c)$$

Први тензор (w^{ik}) је *двайуи конјраваријантан*; други (w_{ik}) *двайуи коваријантан*, а трећи (w_k^i) је *мешовити*, једанпут контра- и једанпут ко-варијантан. Тензор другог реда може се добити и помоћу билинеарне форме $\mathfrak{B} = a_{ik} u^i v^k = S$, јер се коефицијенти a_{ik} трансформишу као коваријантни тензори другог реда, $\bar{S} = \bar{a}_{ik} \bar{u}^i \bar{v}^k = S$; $\bar{a}_{ik} = a_{mn} (\partial q^m / \partial \bar{q}^i) (\partial q^n / \partial \bar{q}^k)$.

Симетрични тензор $w^{(ik)} = w^{ik} = w^{ki}$ и кососиметрични тензор другог реда $w^{(ik)} = w^{ik} = -w^{ki}$ задржавају особину симетрије и при трансформацији. Мешовити тензор w_k^i задржава симетрију при афиној трансформацији али не и при генералисаној. Тензори који се не мењају при пермутацији индекса називају се *изомери* $w^{ik} = w^{ki}$; $w_{ik} = w_{ki}$.

Тензор другог реда може се разложити на два сабирка: симетрични и кососиметрични део, те је $u^{ik} = u^{(ik)} + u^{[ik]}$, $v_{ik} = v_{(ik)} + v_{[ik]}$, па су

$$\begin{aligned} u^{(ik)} &= \frac{1}{2} (u^{ik} + u^{ki}); & v_{(ik)} &= \frac{1}{2} (v_{ik} + v_{ki}); \\ u^{[ik]} &= \frac{1}{2} (u^{ik} - u^{ki}); & v_{[ik]} &= \frac{1}{2} (v_{ik} - v_{ki}). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Изводи вектора u^i по координатама чине мешовити систем другог реда па је

$$\bar{t}_i^k = \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial}{\partial x^p} (a_j^i x^j) \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^k} = a_j^i r_k^p \frac{\partial u^j}{\partial x^p} = a_j^i r_k^p t_p^j; \quad (1.29.a)$$

$$\bar{t}_k^i = \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial \bar{q}^k} = \frac{\partial}{\partial \bar{q}^k} \left(u^j \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^j} \right) = \frac{\partial u^j}{\partial q^p} \frac{\partial q^p}{\partial \bar{q}^k} \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^j} + u^j \frac{\partial^2 \bar{q}^i}{\partial q^j \partial q^p} \frac{\partial q^p}{\partial \bar{q}^k} = (\bar{t}_k^j)' + (\bar{t}_k^i)'', \quad (1.29.b)$$

па у првом случају представља тензор, а у другом не, јер постоји допунски члан $(\bar{t}_k^i)''$.

Кроонескер-ов *гелџа* симбол δ_k^i је мешовити тензор другог реда, јер се при трансформацији понаша као тензор

$$\bar{\delta}_k^i = a_m^i r_k^m \delta_n^m = a_n^i r_k^n = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^k} = \delta_k^i; \delta_k^i = \bar{\delta}_n^m \cdot \frac{\delta \bar{q}^i}{\partial q^m} \frac{\partial q^n}{\partial \bar{q}^k} = \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^n} \frac{\partial q^n}{\partial \bar{q}^k} = \delta^{ki}. \quad (1.30)$$

Он је *јединични шензор*, јер се при композицији понаша као јединица при множењу, па је заиста супституциони оператор. Он је метрички тензор за правоугле координате (1.13).

Тензор $p_k^i = \lambda \delta_k^i$ зове се *сферни* или *изошорни шензор*, јер му компоненте задржавају вредности у свим координатним системима, пошто је $\bar{p}_k^i = \lambda \bar{\delta}_k^i = p_k^i$.

б) *Тензори вишег реда*. — Свака величина одређена у V_N простору са N^{m+n} компонената атрансформише се по обрасцу

$$\bar{u}_{k_1 \dots k_n}^{i_1 \dots i_m} = u_{s_1 \dots s_n}^{r_1 \dots r_m} \left(\frac{\partial \bar{q}^{i_1}}{\partial q^{r_1}} \dots \frac{\partial \bar{q}^{i_m}}{\partial q^{r_m}} \right) \left(\frac{\partial q^{s_1}}{\partial \bar{q}^{k_1}} \dots \frac{\partial q^{s_n}}{\partial \bar{q}^{k_n}} \right) \quad (1.31)$$

тензор је $m+n$ -ов реда, m -пута контраваријантан и n -пута коваријантан.

Например, тензори трећег и четвртог реда су:

$$\bar{u}^{ijk} = u^{rst} a_r^i a_s^j a_t^k; \bar{u}^{ijk} = u^{rst} \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^s} \frac{\partial \bar{q}^j}{\partial q^s} \frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^t}; \bar{u}_{ij} = u_p^{mn} a_m^i a_n^j r_k^p; \\ \bar{u}_{ijkl} = u_{mnpq} r_i^m r_j^n r_k^p r_l^q; \bar{u}_{ijkl} = u^{mnpq} \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^m} \frac{\partial \bar{q}^j}{\partial q^n} \frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^p} \frac{\partial \bar{q}^l}{\partial q^q}$$

с) *Афинори и ортононални шензори*. — Систем који се јавља као тензор у односу на генерализовану трансформацију биће такав и у односу на афину и ортогоналну трансформацију, пошто су ове специјални случајеви прве трансформације. Међутим, обратно не стоји као што је показано за извод вектора (1.29). Системе који се тензорски понашају само у односу на афине трансформације зову се *афини шензори* или *афинори*, а они који се тензорски понашају само у односу на ортогоналне трансформације јесу *картезијански* или *ортононални шензори*.

Са афинорима и ортогоналним тензорима оперише се као са матрицама. Тако су:

$$\{\bar{x}\} = \mathbf{A} \{x\}; \bar{x}^i = a_k^i x^k; \{\bar{u}\} = \mathbf{A} \{u\}; \{u\} = \mathbf{A}^{-1} \{\bar{u}\} = \mathbf{R} \{\bar{u}\}; u^i = r_k^i \bar{u}^i; \quad (1.32)$$

$$\{\bar{x}\} = \mathfrak{A} \{x\}; \bar{x}^i = \alpha_k^i x^k; \mathfrak{A} = (\alpha_k^i); \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}' (\alpha_i^k); \{\bar{u}\} = \mathfrak{A} \{u\}; \{u\} = \mathfrak{A}' \{\bar{u}\}.$$

Када се ради са афинорима другог реда могу се користити *гџаге*. Координатна дијада је $\mathfrak{D}_{ik} = \{i\} (i_k) = \mathbf{i}_i \mathbf{i}_k$, па је јединични афинор $\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{I} = \mathfrak{D}_{ii}$ једнак збиру трију координатних дијада. Стога се афинор може претставити као збир *гевџи* дијада, $\hat{\mathbf{T}} = \{u\} (v) = u_i v_k \{i\} (i_k) = u_i v_k \mathfrak{D}_{ik} = i_{ik} \mathfrak{D}_{ik}$.

Скаларни производ афинора са вектором је вектор; производ „згесна“ је вектор колона, а „слева“ вектор врста. Производ дијаде векторски је опет дијада, а производ тензора векторски вектором је тензор. Композиција (скаларни производ) два афинора није комутативна. Наведене релације изгледају овако:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\{w\} &= \{u\} \{v\} \{w\} = t_{jk} w^k \mathbf{i}_i = a^i \mathbf{i}_i = \{a\}; \quad (w) \mathbf{T} = (b); \\ \{\mathfrak{D}_{ab} \times c\} &= \{a\} (b) \times (c) = \{a\} \{bc\}; \quad \{c\} \times \{a\} (b) = \{[ca]\} (b); \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{T} \times \mathbf{w} = \{u\} \{v\} \times \{w\} = \{u\} \{[v w]\} = e^{rjk} t_{ij} w_k \mathfrak{D}_{ir}; \quad p_{ir} = e^{rjk} t_{ij} w_k;$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{w} \times \mathbf{T} = \{w\} \times \{u\} \{v\} = \{[w u]\} \{v\} = e^{rki} t_{ij} w_k \mathfrak{D}_{rj}; \quad g_{rj} = e^{rki} t_{ij} w_k;$$

$$\mathbf{A} (a_k^i); \quad \mathbf{B} (b_k^i); \quad \mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{B} = (a^i b_k^j) \neq \mathbf{Q} = \mathbf{B}\mathbf{A} = (b_j^i a_k^j).$$

D.1.10. Критеријум за одређивање тензорске природе система. — Утврђивање тензорске природе најбоље се врши *помоћу трансформација*. Нека се композицијом два система првог реда u^i и v_j добије скаларна инваријанта $S = u^i v_i$ и нека се зна да је u_k^i контраваријантни вектор, онда следи $S = u^k v_k = \bar{S} = \bar{u}^i \bar{v}_i = u^k (\partial \bar{q}^i / \partial q^k) \bar{v}_i$, па је $v_k = \bar{v}_i (\partial \bar{q}^i / \partial q^k)$, те се вектор v трансформира као коваријантни вектор. Ако је u^{ij} контраваријантни тензор другог реда, а w_{ijk} систем трећег реда па се композицијом добија коваријантни вектор v , ($w_{ijk} u^{ij} = v_k$), онда систем w_{ijk} мора бити трипут коваријантни тензор, јер се трансформацијом добија:

$$\begin{aligned} \bar{w}_{ijk} \bar{u}^{ij} &= \bar{v}_k; \quad w_{nmr} u^{mn} (\partial q^m / \partial \bar{q}^i) (\partial q^n / \partial \bar{q}^j) (\partial q^r / \partial \bar{q}^k) (\partial \bar{q}^i / \partial q^m) (\partial \bar{q}^j / \partial q^n) = \\ &= v_r (\partial q^r / \partial \bar{q}^k); \quad w_{nmr} u^{mn} = v_r. \end{aligned}$$

Тензорска природа може се оценити и помоћу „*правилу количника*“ („quotient rule“). Ако се композицијом може да оствари скаларна инваријанта (на пример, производ двају вектора супротне варијантности) онда су елементи те композиције тензори, у противном нису. На пример, када се композицијом система трећег реда t_{ijk} са векторима $u^i v_j w^k$ добије скаларна инваријанта $t_{ijk} u^i v_j w^k = \varphi = S$, онда је $t_{ijk} r_j^{ik} = S$, па је систем t_{ik}^j мешовити тензор трећег реда, двапут коваријантан и једанпут контраваријантан.

D.1.11. Релативни тензори. — Општији системи од тензора јесу *релативни тензори* који се трансформирају по закону

$$\bar{t}_{k_1 \dots k_s}^{i_1 \dots i_r} = J^T \left(\frac{\partial \bar{q}^{i_1}}{\partial q^{m_1}} \dots \frac{\partial \bar{q}^{i_r}}{\partial q^{m_r}} \right) \left(\frac{\partial q^{k_1}}{\partial \bar{q}^{n_1}} \dots \frac{\partial q^{k_s}}{\partial \bar{q}^{n_s}} \right) t_{n_1 \dots n_s}^{m_1 \dots m_r}; \quad J = \left| \frac{\partial q^s}{\partial \bar{q}^n} \right|. \quad (1.34)$$

где је J јакобијан трансформације старих координата у нове ($q^s \rightarrow \bar{q}^n$), а његов експонент T је *шежина*. — Овакви се тензори називају и *pseudo-тензори*. Када је $T = 0$, тј. $J^0 = |\partial q^s / \partial \bar{q}^n|^0 = 1$, тензор је *ајсолућни*. Тензори тежине $T = 1$ зову се *тензорске густине*, а када је $T = -1$ онда су *тензорски капацитети*. *Релативни вектор* (*псеудовектор*) је релативни тензор првог реда, а *псеудоскалар* је релативни тензор нултог реда. Символи e^{ijk} и e_{ijk} су релативни тензори, и то први тензорска густина ($T = 1$), а други тензорски капацитет). Помоћу ових тензора може се у V_3 дефинисати *векторски* (*сиоњашњи*) *производ двају вектора* исте варијантности као трећи вектор супротне варијантности, те је

$$\mathbf{w} = w^i \mathbf{i}_i = u_j v_k [i^j i^k] = e^{ijk} u_j v_k \mathbf{i}_i; \quad w^i = e^{ijk} u_j v_k; \quad w_i = e_{ijk} u^j v^k. \quad (1.35)$$

Пошто су e -системи релативни тензори то су ови вектори (w^i и w_i) релативни вектори и зову се *аксијални вектори*. Напротив, вектор померања је *поларни вектор* и он је апсолутни.

Делта-симбол је напротив апсолутни тензор. *Генералисани делта*-симбол се дефинише изразом, $e^{ijk} e_{rst} = \delta^{ijk}$. Пошто су e -симболи тежина 1 и -1 , то је, $J^T J^T = J J^{-1} = J^{(1-1)} = J^0 = 1$, па је δ симбол заиста апсолутни тензор што се може утврдити и трансформацијом. Пошто је $\delta_r^k e^{ijk} \cdot e_{rst} = \delta_r^k \delta_{rst}^{ijk} = \delta_{rs}^{ij}$ који се такође трансформише као тензор. Даљом композицијом индекса j и s добија се обични делта-симбол δ_r^i , па је и он апсолутни тензор.

D. 1.12. Основни метрички тензор. — Обрасцем (1.13) дефинисана је метричка форма као хомогена квадратна форма у односу на Декартове правоугле и афине координате. Овај се појам проширује. Увођењем генералисаних координата (q^i) биће Декартове $x^i = x^i(q^k)$ и обратно $q^i = q^i(x^k)$, па је вектор положаја тачке $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^i) = \mathbf{r}(q^i)$, те је

$$dx^j = (\partial x^j / \partial q^i) dq^i; \quad d\mathbf{r} = (\partial \mathbf{r} / \partial q^i) dq^i; \quad \mathbf{g}_i = \partial \mathbf{r} / \partial q^i; \quad \mathbf{g}_i = (\partial x^j / \partial q^i) \mathbf{t}_j, \quad (1.36)$$

где је \mathbf{g}_i *основни (координатни) вектор* система генералисаних координата који није јединични вектор али пада у правац тангенте на координатну линију генералисаног система у тој тачки, $\mathbf{g}_i = (\partial \mathbf{r} / \partial q^i) \mathbf{t}_i$; вектор \mathbf{t}_i је *јединични вектор тангенте* те координатне линије. Ови вектори, пошто су функције положаја тачке $\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_i(M)$, образују *векторско поље*.

Метричка форма биће

$$ds^2 = \sum_j (\partial x^j / \partial q^i) (\partial x^j / \partial q^k) dq^i dq^k = (d\mathbf{r}, d\mathbf{r}) = (\mathbf{g}_i \mathbf{g}_k) dq^i dq^k = g_{ik} dq^i dq^k, \quad (1.37)$$

где су g_{ik} *кофицијентни метричке форме*

$$g_{ik} = g_{ki} = (\mathbf{g}_i \mathbf{g}_k) = (\mathbf{g}_k \mathbf{g}_i) = \sum_j (\partial x^j / \partial q^i) (\partial x^j / \partial q^k); \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (1.37)$$

Пошто је метричка форма (ds^2) инваријантна у свим координатним системима то су g_{ik} компоненте двоструког симетричног коваријантног тензора другог реда који се назива *основни (фундаментални) метрички тензор* или кратко *метрички тензор*. Овом тензору одговара симетрична квадратна матрица \mathbf{G} и симетрична детерминанта $|\mathbf{G}| = \det \mathbf{G} = |g_{ik}| = g$. У простору V_3 биће

$$\begin{pmatrix} \cdot \\ \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_3 \\ \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_3 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 & \mathbf{g}_3 & \mathbf{g}_3 \end{matrix} \quad |\mathbf{G}| = g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = |g_{ik}| = \left| \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \right|^2 = J^2 = g_{ik} K^{ik} \quad T=2. \quad (1.38)$$

$$J = \sqrt{|g_{ik}|} = \sqrt{g}$$

Пошто су $\mathbf{g}_i(M)$ и $\mathbf{g}_k(M)$ функције положаја то је и $g_{ik} = (\mathbf{g}_i \mathbf{g}_k) = g_{ik}(M)$, па метрички тензор g_{ik} образује *тензорско поље*.

Нови симетрични тензор $g^{ik} = (\mathbf{g}^i \mathbf{g}^k)$ формиран на овај начин

$$g^{ik} = g^{ki} = K^{ik} / |\mathbf{G}|; \quad K^{ik} = g g^{ik}; \quad (g^{ik}) = \mathbf{G}^* = \mathbf{G}^{-1}; \quad |g^{ik}| = 1/|\mathbf{G}| = \\ = |\partial q^i / \partial x^k| = J^{-2} \quad (1.39)$$

назива се *основни контраваријантни тензор*. Он је симетричан тензор другог реда, чија је матрица \mathbf{G}^* реципрочна матрица метричког тензора g_{ik} .

Ови се тензори трансформишу на овај начин:

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ik} &= g_{mn} (\partial q^m / \partial \bar{q}^i) (\partial q^n / \partial \bar{q}^k); \quad \bar{g}^{ik} = g^{mn} (\partial \bar{q}^i / \partial q^m) (\partial \bar{q}^k / \partial q^n); \\ \bar{g}_k^i &= g_n^m (\partial \bar{q}^i / \partial q^m) (\partial q^n / \partial \bar{q}^k) = \delta_k^i, \end{aligned} \quad (1.40)$$

па је мешовити метрички тензор $g_k^i = (g^i g_k)$ генерализација δ -симбола.

D. 1.13. Здруживање тензора. — За разлику од афиног простора у метричком простору могу се тензори различитог типа сводити једини на друге помоћу композиције са основним метричким тензорима g_{ik} и g^{ik} . Овакви се тензори називају *здружени*, јер су један из другог постали композицијом са основним тензорима. Уствари, ово здруживање представља „правило о подизању и спуштању индекса“.

Код вектора ово се врши на овај начин:

$$\begin{aligned} g_{ik} u^k &= u_i; \quad g^{ik} v_k = v^i; \\ \bar{u}_i &= u_m \frac{\partial q^m}{\partial \bar{q}^i} = \bar{g}_{ik} \bar{u}^k = g_{mn} u^j \frac{\partial q^m}{\partial \bar{q}^i} \frac{\partial q^n}{\partial \bar{q}^k} \frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^j} = g_{mn} u^j \frac{\partial q^m}{\partial \bar{q}^i} \delta_j^n = g_{mn} u^n \frac{\partial q^m}{\partial \bar{q}^i}, \end{aligned} \quad (1.41)$$

Па се помоћу коваријантног тензора g_{ik} „индекс спушта“, а помоћу контраваријантног тензора g^{ik} „индекс се подиже“. Вектор u_i здружен је вектору u^k помоћу тензора g_{ik} , и обратно, вектор v^i је здружен вектору v_k помоћу g^{ik} . Здружени вектори су реципрочни, јер се множењем u_i са g^{ji} добија $g^{ji} u_i = g^{ji} g_{ik} u^k = g_k^j u^k = \delta_k^j u^k = u^j$.

Скаларни производ два вектора и квадрат интензитета вектора су

$$(uv) = u \cdot v = |u| |v| \cos \varphi = u^i v^k (g_i g_k) = g_{ik} u^i v^k = u^i v_i; \quad |u|^2 = u^i u_i = g_{ik} u^i u^k. \quad (1.42)$$

Код *тензора* са g_{ik} односно g^{ik} спушта се односно подиже *један* индекс; за подизање два индекса мора се помножити са два основна тензора. Место индекса који се подиже или спушта обележава се *шачком*. Тако ће бити:

$$\begin{aligned} g^{ik} u_{kj} &= u_j^i; \quad g^{ik} u_{jk} = u_j^i; \quad u_j^i \neq u_i^j; \quad g^{ij} g_{jk} = g_k^i = \delta_k^i; \quad g_{ir} t_{jk}^i = t_{rjk}^i; \\ g^{rk} t_{jk}^i &= t_{jk}^{ir}; \quad g^{im} g^{jn} u_{mn} u^{ij}; \quad g_{ik} g_{jn} u^{mn} = u_{ij}^i; \quad g_{ir} g_{js} g_{kt} u^{rst} = u_{ijk}^i. \end{aligned} \quad (1.43)$$

D. 1.14. Алтенатори. — Из (1.38) следи да је Јакобијан $J = |\partial x^i / \partial q^k| = \sqrt{|G|} = \sqrt{|g_{ik}|} = \sqrt{g}$, па се дефинишу Рисси-јеви *тензори* или *алтернативи* као апсолутни тензори облика:

$$\varepsilon_{ijk} = J e_{ijk} = e_{ijk} \sqrt{g}; \quad \varepsilon^{ijk} = J^* e^{ijk} = e^{ijk} / \sqrt{g}; \quad g = |G| = |g_{ik}| = J^2. \quad (1.44)$$

Помоћу алтернатора дефинише се спољашњи (векторски) производ два вектора:

$$c = [a b]; \quad c_i g^i = a^j b^k [g_j g_k] = \varepsilon_{ijk} a^j b^k g^i; \quad c_i = \varepsilon_{ijk} a^j b^k; \quad c^i = \varepsilon^{ijk} a_j b_k, \quad (1.45)$$

па су

$$[g_j g_k] = \varepsilon_{ijk} g^i = e_{ijk} \sqrt{g} e_{ijk} g^i; \quad [g^j g^k] = \varepsilon^{ijk} g_i = e^{ijk} g_i / \sqrt{g}; \quad (1.46)$$

D.1.15. Физичке координате тензора. — Контраваријантне и коваријантне координате неког вектора јесу скаларни производи тог вектора са основним (базним) векторима. Ове координате не морају, уопште узев, имати исту физичку димензију (јединицу) као вектор. А да би се задржала и даље природна величина вектора уводи се и трећа врста координата, тзв. *физичка или природна координата*. Она је уствари ортогонална пројекција тог вектора (\mathbf{v}) на правац основног вектора, тј. *она је скаларни производ вектора и јединичног вектора правца дотичној основној вектора*. Према томе су координате вектора:

$$v^i = (\mathbf{v} \mathbf{g}^i); v_k = (\mathbf{v} \mathbf{g}_k) = g_{ik} v^j; v_{(p)} = (\mathbf{v} \mathbf{t}_{(p)}) = (\mathbf{v} \mathbf{g}_{(p)}) / |\mathbf{g}_{(p)}| = v_p / \sqrt{g_{(pp)}} = g_{ik} v^k t_{(p)}^i \quad (1.47)$$

Овде је $\mathbf{g}_{(p)}$ основни вектор правца (p), а $\sqrt{g_{(pp)}}$ је његов интензитет.

Аналогно предњем, физичка компонента тензора на *два ујавна правца* биће

$$w_{(p)(r)} = g_{im} u^m t_{(r)}^i g_{kn} v^n t_{(s)}^k = u_i v_{(r)}^i t_{(r)}^i t_{(s)}^k = w_{ik} / \sqrt{g_{(rr)}} \sqrt{g_{(ss)}} \quad (1.48)$$

D. 1.16. Christoffel-ови симболи. — Извод основног вектора је $\partial \mathbf{g}_i / \partial q^k = \partial [\partial \mathbf{r} / \partial q^i] / \partial q^k = \partial [\partial \mathbf{r} / \partial q^k] / \partial q^i = \partial \mathbf{g}_k / \partial q^i$, где се индекс испод разломачке прте при диференцирању сматра „*гоњим*“ (коваријантним). С обзиром на предње биће извод $\partial (\mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k) / \partial q^i = \partial \mathbf{g}_j / \partial q^i + (\mathbf{g}_k, \partial \mathbf{g}_j / \partial q^i)$, $\partial (\mathbf{g}_k \mathbf{g}_i) / \partial q^j = \partial g_{ki} / \partial q^j = (\partial \mathbf{g}_k / \partial q^j, \mathbf{g}_i) + (\mathbf{g}_k, \partial \mathbf{g}_i / \partial q^j)$; $\partial (\mathbf{g}_i \mathbf{g}_j) / \partial q^k = (\partial \mathbf{g}_i / \partial q^k, \mathbf{g}_j) + (\mathbf{g}_i, \partial \mathbf{g}_j / \partial q^k) = \partial g_{ij} / \partial q^k$. Релација $(\partial \mathbf{g}_{jk} / \partial q^i) + (\partial \mathbf{g}_{ki} / \partial q^j) - (\partial \mathbf{g}_{ij} / \partial q^k)$ због горе наведене пермутационе особине, може да се напише у облику:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial q^j} \mathbf{g}_k \right) = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^i \partial q^j \partial q^k}, \partial \mathbf{r} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right] = [ij, k] = \Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ji,k} \quad (1.49)$$

који се зове Christoffel-ов симбол *прве врсте* („*средња Christoffel-ова заграда*“). Овај је симбол симетричан у односу на леве индексе.

Christoffel-ов симбол *друге врсте* („*велика Christoffel-ова заграда*“) дефинише се на овај начин

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^i \partial q^j} = \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} \mathbf{g}_k = \Gamma_{ij}^k \mathbf{g}_k;$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial q^j} \mathbf{g}_i \right) = \Gamma_{ij,l} = \Gamma_{ij}^k (\mathbf{g}_k \mathbf{g}_l) = g_{kl} \Gamma_{ij}^k$$

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k = g^{kl} \Gamma_{ij,l}, \quad (1.50)$$

јер је $g^{kl} g_{kl} = 1$.

Нека су $M_0(q^i)$ и $M_1(q^i + dq^i)$ две оближње тачке на кривој $q^i = q^i(t)$, где је $t_0 \leq t \leq t_1$. Нека је вектор \mathbf{u} променљив али да не зависи експлицитно од параметра t , $u^i = u^i[x^i(t)]$, оида је услов његовог *паралелној померања* из тачке M_0 у тачку M_1 те криве.

$$d\mathbf{u} = d(u^i \mathbf{g}_i) = d u^i \mathbf{g}_i + u^i (\partial \mathbf{g}_i / \partial q^j) dq^j = (d u^k + u^i \Gamma_{ij}^k dq^j) \mathbf{g}_k = 0;$$

$$d u^k = -\Gamma_{ij}^k u^i dq^j, \quad (1.51)$$

пошто су основни вектори \mathbf{g}_k независни. Коефицијенти Γ_{ij}^k повезују паралелне векторе у тачкама криве па се називају и *коефицијентни повезаности*. Пошто се у афиним простору вектори могу паралелно преносити из једне тачке у другу то су коефицијенти повезаности једнаки нули.

D. 1.17. Коваријантно диференцирање тензора — Нека је дат контраваријантни вектор $\mathbf{u} = u^i \mathbf{g}_i$ онда је његов извод по координати q^k :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (u^i \mathbf{g}_i)}{\partial q^k} &= \frac{\partial u^i}{\partial q^k} \mathbf{g}_i + u^i \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial q^k} = \left(\frac{\partial u^i}{\partial q^k} + u^j \Gamma_{jk}^i \right) \mathbf{g}_i = u^i |_{,k} \mathbf{g}_i; \\ u^i |_{,k} &= \nabla_k u^i = u^j_{,k} = \frac{\partial u^i}{\partial q^k} + u^j \Gamma_{jk}^i. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Израз $u^i |_{,k}$ назива се *коваријантни извод контраваријантног вектора* u^i по координати q^k у односу на основни тензор \mathbf{g}_{ik} .

За коваријантни вектор $\mathbf{v} = v_i \mathbf{g}^i$ биће:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (v_i \mathbf{g}^i)}{\partial q^k} &= \frac{\partial v_i}{\partial q^k} \mathbf{g}^i + v_i \frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial q^k} = \frac{\partial v_i}{\partial q^k} \mathbf{g}^i - v_i \Gamma_{jk}^i \mathbf{g}^j = \left(\frac{\partial v_i}{\partial q^k} - v_j \Gamma_{jk}^i \right) \mathbf{g}^i = v_{i|k} \mathbf{g}^i; \\ v_{i|k} &= \nabla_k v_i = \frac{\partial v_i}{\partial q^k} - v_j \Gamma_{jk}^i, \end{aligned} \quad (1.53)$$

јер је

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q^k} (\mathbf{g}^j \mathbf{g}_i) &= \frac{\partial}{\partial q^k} \delta^j_i = 0; \quad \left(\frac{\partial \mathbf{g}^j}{\partial q^k} \mathbf{g}_i \right) = - \left(\mathbf{g}^j \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial q^k} \right) = - (\mathbf{g}^j \mathbf{g}_m) \Gamma_{ik}^m = - \delta^j_m \Gamma_{ik}^m; \\ \frac{\partial \mathbf{g}^j}{\partial q^k} &= - \Gamma_{ik}^j \mathbf{g}^i. \end{aligned}$$

где је $v_{i|k}$ коваријантни извод коваријантног вектора v_i по координати q^k .

Оба извода су тензори другог реда, па се коваријантним диференцирањем повишава ред тензора за један. Извод $u^i |_{,k}$ је мешовити тензор другог реда, а док је $v_{i|k}$ коваријантни тензор другог реда. *Коваријантно диференцирање може се изводити само у метричком простору.*

За коваријантно диференцирање важе правила као и за обична диференцирања. Нека је контраваријантни тензор $w^{ij} = u^i v^j$ онда је извод

$$w^{ij} |_{,k} = v^j (u^i |_{,k}) + u^i (v^j |_{,k}) = v^j [(\partial u^i / \partial q^k) + u^m \Gamma_{mk}^i] + u^i [(\partial v^j / \partial q^k) + v^m \Gamma_{mk}^j].$$

Први и трећи члан дају извод $\partial u^i v^j / \partial q^k$. На овај начин добијају следећи изводи:

$$u^{ij} |_{,k} = \nabla_k u^{ij} = (\partial u^{ij} / \partial q^k) + u^{mj} \Gamma_{mk}^i + u^{im} \Gamma_{mk}^j, \quad (1.54.a)$$

$$v_{ij|k} = \nabla_k v_{ij} = (\partial v_{ij} / \partial q^k) - v_{mj} \Gamma_{ik}^m - v_{im} \Gamma_{jk}^m; \quad (1.54.b)$$

$$w_{j|k} = \nabla_k w_j^i = (\partial w_j^i / \partial q^k) + w_{mj} \Gamma_{mk}^i - w_m^i \Gamma_{jk}^m. \quad (1.54.c)$$

Коваријантни извод компоненте метричког тензора једнак је нули (тзв. *Ricci-јева теорема*)

$$g^{ij}|_k = 0; \quad g_{ij}|_k = 0; \quad g^i_j|_k = 0. \quad (1.55)$$

Изводи вишег реда добијају се поновним коваријантним диференцирањем па важе релације:

$$u_{ijk} = \nabla_j \nabla_k u_i = \frac{\partial u_{ij}}{\partial q^k} - u_{mj} \Gamma_{ik}^m - u_{im} \Gamma_{jk}^m = \frac{\partial^2 u_i}{\partial q^j \partial q^k} - \frac{\partial u_m}{\partial q^j} \Gamma_{ik}^m - \frac{\partial u_m}{\partial q^k} \Gamma_{ij}^m - \frac{\partial u_i}{\partial q^m} \Gamma_{jk}^m - u_m \frac{\partial}{\partial q^k} \Gamma_{ij}^m + u_n [\Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^n + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^n]; \quad (1.56.a)$$

$$u_{ij|\Gamma s} = \nabla_s \nabla_{\Gamma} u_{ij} = \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial q^{\Gamma} \partial q^s} - u_{mj} \Gamma_{ir}^m - u_{im} \Gamma_{jr}^m - \frac{\partial u_{mj}}{\partial q^{\Gamma}} \Gamma_{is}^m - \frac{\partial u_{im}}{\partial q^{\Gamma}} \Gamma_{js}^m - \frac{\partial u_{mj}}{\partial q^s} \Gamma_{ir}^m - \frac{\partial u_{im}}{\partial q^s} \Gamma_{jr}^m - \frac{\partial u_{ij}}{\partial q^m} \Gamma_{rs}^m + g_{nm} (\Gamma_{ir}^m \Gamma_{js}^n + \Gamma_{is}^m \Gamma_{jr}^n); \quad (1.56.b)$$

$$\Gamma_{irs}^m = \left[\frac{\partial}{\partial q^s} \Gamma_{ir}^m - \Gamma_{nr}^m \Gamma_{is}^n - \Gamma_{ir}^m \Gamma_{rs}^n \right]. \quad (1.56.c)$$

D. 1.18. Bianchi-јев апсолутни извод. — Нека је $q^i(t)$ крива где је t параметар. Ако је $u = u^i g_i$ контраваријантни вектор онда је његов диференцијал $du = (u^i|_k dq^k) g_i$. Деобом са dt добија се извод вектора по параметру и он се назива Bianchi-јев апсолутни извод вектора u^i по параметру t . Аналогно томе добија се апсолутни извод коваријантног вектора, па су:

$$\frac{D u^i}{D t} = (\nabla_k u^i) \frac{d q^k}{d t} = \left(\frac{\partial u^i}{\partial q^k} + u^j \Gamma_{jk}^i \right) \frac{d q^k}{d t}; \quad \frac{D v_i}{D t} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial q^k} - v_j \Gamma_{ik}^j \right) \frac{d q^k}{d t}. \quad (1.57.a)$$

Из извода непосредно следе апсолутни диференцијали

$$D u^i = (u^i|_k) d q^k; \quad D v_i = (v_i|_k) d q^k; \quad D g_{ij} = (g_{ij}|_k) d q^k = 0; \quad D g^{ij} = 0. \quad (1.57.b)$$

Ако је коваријантни извод вектора $u^i|_k = 0$, онда је његов диференцијал $du = 0$, па је то услов паралелног померања вектора („*шелейпаралелизам*“)

Када је параметар (t) лук криве (s) , тада извод Du^i/Ds представља извод вектора u у правцу криве дуж које се помера.

Појам апсолутног извода проширује се и на тензоре, па је

$$D u^{ij}/D t = (d u^{ij}/d t) + [u^{mj} \Gamma_{mk}^i + u^{im} \Gamma_{mk}^j] (d q^k/d t). \quad (1.57.c)$$

D. 1.19. Диференцијални оператори. — Као и у векторској анализи оператори ∇ (набла) и Δ (лапласијан) разматрају се и у тензорској нотацији.

D. 1.19.1. Градијент. — Нека је $\varphi = \varphi(q^i)$ скаларна функција, онда је $d\varphi = (\partial\varphi/\partial q^i) dq^i$. Пошто је $d\varphi$ скаларна инваријанта, а dq^i контраваријантни вектор морају изводи $\partial\varphi/\partial q^i$ бити компоненте коваријантног вектора. Он се назива *градијентни скаларне функције* $\varphi(q^i)$ у односу на систем координата q^i

$$u = u_i g^i = \text{grad } \varphi = \nabla \varphi; \quad u_i = \partial\varphi/\partial q^i; \quad \nabla = (\partial/\partial q^i) g^i = g^i (\partial/\partial q^i). \quad (1.58.a)$$

Он је коваријантни вектор, али могу му се одредити и друге компоненте, те су:

$$u_i = \partial\phi/\partial q^i = \phi|_i = \partial_i; \quad u^i = g^{ik} (\partial\phi/\partial q^k) = \phi^{ik}; \quad u_{(p)} = (\partial\phi/\partial q^i) t_{(p)}^i. \quad (1.58.b)$$

Аналогно појму градијента скаларне функције примењује се ова операција и на векторе и на тензоре. Компоненте градијента једнаке су коваријантном изводу. Градијент скалара је вектор, па ће градијент вектора бити тензор. При овој се операцији повећава ред тензора за један коваријантни индекс. Тако ће бити:

$$\text{grad } u^i = u^i|_k = \nabla_k u^i = (\partial u^i/\partial q^k) + u^j \Gamma_{jk}^i; \quad \text{grad } u_i = u_{i|k}; \quad \text{grad } u_k^j = u^j|_k = u^j|_{kl}. \quad (1.59)$$

D. 1.19.2. Дивергенција. — Дивергенција се односи на контраваријантни вектор, па је скаларни производ оператора ∇ и тог вектора. Дакле биће: $\text{div } u^i = \text{div} (u^i g_i) = (g^i \nabla_i u^k g_k) = g^i|_k \nabla_i u^k = \nabla_i u^i = u^i|_i = (\partial u^i/\partial q^i) + u^j \Gamma_{ji}^i = S. \quad (1.60.a)$

Она је скаларна инваријанта. Може се применити и на коваријантне векторе ако му се придружи контраваријантни вектор помоћу метричког тензора:

$$\text{div } v_i = \text{div} (g^{ik} v_i) = (g^{ik} v_i)|_k = g^{ik} v_{k|k} = v^k|_k = v^i|_i; \quad g^{ik}|_k = 0. \quad (1.60.b)$$

Ова се операција може применити и на тензоре. Треба прво одредити коваријантни извод, а затим извршити контракцију по индексу диференцирања. Стога може бити више различитих дивергенција, што се назначује Тако су

$$\text{div}_{(i)} u^{ij} = u^{ij}|_i \neq \text{div}_{(j)} u^{ij} = u^{ij}|_j \quad \text{div } u^{(ij)} = u^{(ij)}|_i = u^{(ij)}|_j; \quad \text{div } u_{jk}^i = u_{jk}^i|_r = u_{jk}^r|_r = u_{jk}^i|_i \quad (1.61)$$

Дивергенцијом се смањује ред тензора за један (од вектора постаје скалар, од тензора другог реда вектор, итд).

D. 1.19.3 Ротор. — Под ротором коваријантног вектора подразумева се у V_3 апсолутни контраваријантни вектор

$$\text{rot } v_i = R^i g_i = [g^j \nabla_j, v_k g^k] = \varepsilon^{ijk} \nabla_j v_k g_i; \quad R^i = \varepsilon^{ijk} v_{k|j} = \frac{e^{ijk}}{\sqrt{g}} v_{k|j}; \quad g = |g_{ik}| \quad (1.62.a)$$

односно

$$R^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial v_3}{\partial q^2} - \frac{\partial v_2}{\partial q^3} \right); \quad R^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial v_1}{\partial q^3} - \frac{\partial v_3}{\partial q^1} \right); \quad R^3 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial v_2}{\partial q^1} - \frac{\partial v_1}{\partial q^2} \right). \quad (1.62.b)$$

D. 1.19.4. Лапласијан. — Ако је ϕ скаларна функција онда је $\text{div grad } \phi = \text{div } u$, где су $u_i = \partial\phi/\partial q^i = \phi|_i$ координате градијента. Да би се извела операција дивергенције мора се одредити компонента $u^j = g^{ij} u_i = g^{ij} (\partial\phi/\partial q^i) = g^{ij} \phi_{,i}$ те се добија

$$\Delta \phi = \nabla \nabla \phi = \text{div grad } \phi = u^j|_j = (g^{ij} \phi_{,i})|_j = g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial q^i \partial q^j} - \frac{\partial \phi}{\partial q^m} \Gamma_{ij}^m \right). \quad (1.63.a)$$

Градјент вектора u_i је тензор u_{ij} , па се мора узети коваријантни извод коваријантне координате, те ће бити лапласијан вектора

$$\Delta u_i = \text{div grad } u_i = g^{jk} u_{ij|k}; \quad \Delta u^i = g_{jk} u^{i|jk}, \quad (1.63.b)$$

а аналогно се добија и тензор другог реда

$$\Delta u_{ij} = g^{kl} u_{ij|kl}; \quad \Delta u^{ij} = g_{kl} u^{ij|kl}; \quad \Delta u_j^i = g_k^l u_j^i | l^k. \quad (1.63.c)$$

D. 1.20. Интегрални обрасци. — Нека је L просто затворена крива, а S површ. чија је контура та крива, $d\mathbf{r}$, управљени линијски елемент, а dS и dV површински и запремински елемент, онда Stokes-ов и Gauss-ов образац имају облик:

$$\oint_{(L)} v_i d q^i = \iint_{(S)} \sqrt{g} R^i d S_i; \quad \iiint_{(V)} v^i d S_i = \iiint_{(V)} v^i | i d V. \quad (1.64)$$

D. 1.21. Ортогонални криволинијски систем. — Код овог су система основни вектори ортогонални, па ће бити:

$$\begin{aligned} g_{ii} &= A_i^2; \quad \mathbf{g}_i = A_i \mathbf{t}_i; \quad A_i^2 = (\partial x^1 / \partial q^i)^2 + (\partial x^2 / \partial q^i)^2 + (\partial x^3 / \partial q^i)^2; \quad d s_{(i)} = A_i d q^{(i)}; \\ d \mathbf{r}^2 &= g_{ii} d q^i d q^i = (A_i d q^i)^2; \quad g^{ii} = 1/A_i^2; \quad g = |\mathbf{G}| = (A_1 A_2 A_3)^2 = |g_{ii}|; \quad |g^{ii}| = 1/g; \\ \mathbf{v} &= v^i \mathbf{g}_i = v_i \mathbf{g}^i = v_{(i)} \mathbf{t}_{(i)} = v_{(M)} \mathbf{t}_{(M)}; \quad v^i = (\mathbf{v}\mathbf{g}^i); \quad v_i = g_{ik} v^k = g_{ii} v^i = A_i^2 v^i; \\ v_{(i)} &= (\mathbf{v}\mathbf{t}_{(i)}) = \frac{1}{A_i} (\mathbf{v}\mathbf{g}_i) = \frac{v_i}{A_i} = \frac{g_{ii} v^i}{A_i} = A_i v^i; \quad v_i = A_i v_{(i)}; \quad v^i = v_{(i)} / A_i; \\ \Gamma_{jk}^i &= 0; \quad \Gamma_{jj}^i = -\frac{1}{2} \frac{1}{(A_i)^2} \frac{\partial (A_i)^2}{\partial q^i}; \quad \Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2} \frac{1}{(A_i)^2} \frac{\partial (A_i)^2}{\partial q^k}; \quad \Gamma_{ii}^i = \frac{1}{2} \frac{1}{(A_i)^2} \frac{\partial (A_i)^2}{\partial q^i}; \end{aligned} \quad (1.65)$$

$$\text{grad } \varphi = \mathbf{u} = u_i \mathbf{g}^i; \quad u_i = A_i^{-1} (\partial \varphi / \partial q^i);$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial q^1} [A_2 A_3 v_{(1)}] + \frac{\partial}{\partial q^2} [A_3 A_1 v_{(2)}] + \frac{\partial}{\partial q^3} [A_1 A_2 v_{(3)}] \right\}; \quad \sqrt{g} = A_1 A_2 A_3;$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = R^i \mathbf{g}_i = R_{(i)} \mathbf{t}_{(i)}; \quad R_{(i)} = A_i R^i;$$

$$R_{(1)} = \frac{1}{A_2 A_3} \left\{ \frac{\partial [A_3 v_{(3)}]}{\partial q^2} - \frac{\partial [A_2 v_{(2)}]}{\partial q^3} \right\}; \quad R_{(2)} = \frac{1}{A_3 A_1} \left\{ \frac{\partial [A_1 v_{(1)}]}{\partial q^3} - \frac{\partial [A_3 v_{(3)}]}{\partial q^1} \right\};$$

$$R_{(3)} = \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial [A_2 v_{(2)}]}{\partial q^1} - \frac{\partial [A_1 v_{(1)}]}{\partial q^2} \right\}$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial q^1} \left[\frac{A_2 A_3}{A_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} \right] + \frac{\partial}{\partial q^2} \left[\frac{A_3 A_1}{A_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q^2} \right] + \frac{\partial}{\partial q^3} \left[\frac{A_1 A_2}{A_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q^3} \right] \right\}. \quad \text{Стога су}$$

таблице:

Таблица

а) Поларно-цилиндрички систем

б) Сферни систем

q^i	r	φ	z	ρ	φ	ψ
$ds_{(i)}$	dr	$r d\varphi$	dz	$d\rho$	$(\rho \cos \psi) d\varphi$	$\rho d\psi$
A_i	1	r	1	1	$\rho \cos \psi$	ρ
g_{ii}	1	r^2	1	1	$(\rho \cos \psi)^2$	ρ^2
g_{ii}	1	$1/r^2$	1	1	$(\rho \cos \psi)^{-2}$	ρ^{-2}
g	r^2 ;	$g^{-1} = 1/r^2$		$\rho^4 \cos^2 \psi$;	$g^{-1} = (\rho^4 \cos^2 \psi)^{-1}$	
ds^2	$dr^2 + (r d\varphi)^2 + dz^2$			$d\rho^2 + (\rho \cos \psi d\varphi)^2 + (\rho d\psi)^2$		
t_i	r_0	e_0	k	$\vec{\rho}_0$	\vec{e}_0	\vec{v}_0
g_i	r_0	$r e_0$	k	$\vec{\rho}_0$	$(\rho \cos \psi) \vec{e}_0$	$(\rho \psi) \vec{v}_0$
$\Gamma_{ij,k}$	$\Gamma_{12,2} = \Gamma_{21,2} = -\Gamma_{22,1} = r$			$\Gamma_{12,2} = -\Gamma_{22,1} = \rho \cos^2 \psi$; $\Gamma_{13,3} = -\Gamma_{33,1} = -\rho$;		
Γ_{jk}^i	$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{r}$; $\Gamma_{22}^1 = -r$			$\Gamma_{22,3} = \rho \sin \psi \cos \psi$; $\Gamma_{1,22}^1 = -\rho \cos^2 \psi$; $\Gamma_{33}^1 = -\rho$;		
				$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \rho^{-1}$; $\Gamma_{23}^2 = -\text{tg} \psi$; $\Gamma_{3,22}^3 = \sin \psi \cos \psi$		
$\Delta \Phi$	$\left(\frac{\partial}{\partial r} r_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} e_0 + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \Phi$			$\left(\frac{\partial}{\partial \rho} \vec{\rho}_0 + \frac{1}{\rho \cos \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_0 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \psi} \vec{v}_0 \right) \Phi$		
v	$V_{(r)} r_0 + V_{(\varphi)} e_0 + V_{(z)} k$			$V_{(\rho)} \vec{\rho}_0 + V_{(\varphi)} \vec{e}_0 + V_{(\psi)} \vec{v}_0$		
$\text{div } v$	$\frac{V_{(r)}}{r} + \frac{\partial V_{(r)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{(\varphi)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_{(z)}}{\partial z}$			$2 \frac{V_{(\rho)}}{\rho} + \frac{\partial V_{(\rho)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \cos \psi} \frac{\partial V_{(z)}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_{(\psi)}}{\partial \psi} - \frac{V_{(\psi)}}{\rho} \text{tg} \psi$		
$\text{rot } v$	$\frac{1}{r} \frac{\partial V_{(z)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_{(\varphi)}}{\partial z}$; $\frac{\partial V_{(r)}}{\partial z} - \frac{\partial V_{(z)}}{\partial r}$;			$\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_{(\varphi)}}{\partial \rho} - \frac{V_{(\varphi)}}{\rho} \text{tg} \psi - \frac{1}{\rho \cos \psi} \frac{\partial V_{(\psi)}}{\partial \varphi}$; $\frac{1}{\rho \cos \psi} \frac{\partial V_{(\rho)}}{\partial \varphi}$		
	$\frac{V_{(\varphi)}}{r} + \frac{\partial V_{(\varphi)}}{\partial r(\varphi)}$; $\frac{1}{r} \frac{\partial V_{(r)}}{\partial \varphi}$			$\frac{V_{(\varphi)}}{\rho} - \frac{\partial V_{(\varphi)}}{\partial \rho}$; $\frac{V_{(\psi)}}{\rho} + \frac{\partial V_{(\psi)}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_{(\rho)}}{\partial \psi}$		
$\Delta \Phi$	$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Phi$			$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2 \cos^2 \psi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\text{tg} \psi}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \psi} \right) \Phi$		

ДОДАТАК

D. 2. ОСНОВИ ТЕОРИЈЕ ФУНКЦИЈЕ КОМПЛЕКСНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

D. 2.1. Основни појмови о комплексним бројевима. — Сваком реалном броју a на оси реалних бројева (Ox -оси) одговара једна и само једна тачка N (Cantor-ов аксиом). Тачки $N(x, y)$ у Gauss-овој комплексној равни, са реалном Ox -осом и имагинарном Oy -осом, одговара комплексни број $z(x, y)$. Тачка N је слика комплексног броја (слика 2.1), а тај број $z(x, y)$ афикс тачке $N(x, y)$. У тој равни $\{z\}$ -равни — комплексни се број може приказати у алгебарском облику $z = x + iy$, где је $i = \sqrt{-1}$ имагинарна јединица ($i^2 = -1$). Координата x је реални део $x = \operatorname{Re} z$ а координата y је имагинарни део комплексног броја $y = \operatorname{Im} z$. Тачки N одговара вектор положаја (вектор) $ON = r$, односно поларне координате r и φ . Како су $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, то се комплексни број може приказати у тригонометријском облику

$$z(x, y) = x + iy; \quad (2.1)$$

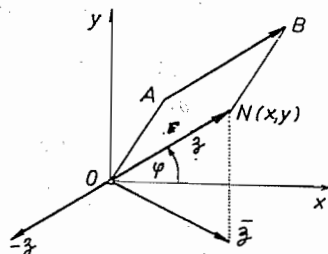
$$z(r, \varphi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r \operatorname{cis} \varphi = r e^{i\varphi};$$

$$\operatorname{cis} \varphi = \cos \varphi + i \sin \varphi = E(\varphi)$$

Потег r представља модул комплексног броја $\operatorname{mod} z = |z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$, док док је угао φ његов аргумент (амплитуда, *argus*), $\varphi = \operatorname{arg} z$; $-\pi < \varphi \leq \pi$ или $0 \leq \varphi < 2\pi$. Ако је φ једна вредност угла која одређује број z онда су због периодичности горњих тригонометријских функција такође и вредности $\varphi + 2k\pi$; ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$), па је $\operatorname{Arg} z = \operatorname{arg} z + 2k\pi$, где је $\operatorname{arg} z$ главни аргумент броја z .

Комплексни број може се довести у везу са специјалним квадратним матрицама другог реда*:

$$z = x + iy \rightarrow \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = x \mathbf{I} + y \mathbf{D}. \quad (2.2)$$



Слика 2.1. — Представљање комплексног броја

* Основи матричног рачунања, чл. 4.1., Београд, 1971.

Аксиоматички, скуп свих комплексних бројева \mathbf{C} је скуп свих уређених парова $z = (a, b)$ реалних бројева (a, b) за које важе ови аксиоми: 1° *једнакост*: $(a, b) = (c, d)$ ако је и само ако је $a = c, b = d$; 2° *сабирања*: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, и 3° *множења*: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$; $m(a, b) = (ma, mb)$. Број $(0, 0)$ је *комплексна нула*, док је број $(0, 1)$ *комплексна јединица* па је $z = a + ib = a(1; 0) + b(0; 1)$.

Број $-z = -x - iy$ *супротан* је броју z ; он је пресликани број z преко координатног почетка O („*одељење*“). Број $\bar{z} = x - iy$ је *коњугован* броју z , он је пресликани број z преко реалне осе. Обратно, број z је коњугван броју \bar{z} , те је $z = \overline{\bar{z}}$.

Основне рачунске операције * су дате следећим обрасцима

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) \pm i(y_1 + y_2); \quad (2.3)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

$$z_1 / z_2 = (x_1 + iy_1) / (x_2 + iy_2) = [(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)] / r_2^2 = (r_1 / r_2) e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)};$$

$$z + \bar{z} = 2x; \quad z - \bar{z} = 2iy; \quad x = (z + \bar{z}) / 2; \quad y = (z - \bar{z}) / 2i = -i(z - \bar{z}) / 2;$$

$$z \bar{z} = x^2 + y^2 = r^2; \quad z / \bar{z} = (x + iy) / (x - iy) = [(x^2 - y^2) + 2ixy] / (x^2 + y^2) = e^{2i\varphi};$$

$$1/z = (x - iy) / r^2 = \bar{z} / r^2; \quad 1/\bar{z} = z / r^2; \quad d = \overline{AB} = |\bar{z}_1 - \bar{z}_2|.$$

$$z^n = (x + iy)^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r^n \operatorname{cis} n\varphi;$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\varphi/n} = \sqrt[n]{r} \left[\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right]; \quad k=0; 1, 2, \dots; n-1;$$

$$z^n - 1 = 0; \quad z = \sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}; \quad k=0; 1, 2, \dots; n-1; \quad z_0 = 1;$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2; \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2; \quad \overline{(z_1 / z_2)} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2; \quad \bar{z}_2 \neq 0;$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|; \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

Пошто су

$$x = (z + \bar{z}) / 2; \quad y = -i(z - \bar{z}) / 2 = i(\bar{z} - z) / 2 \quad (2.4)$$

то се тачка у комплексној равни може представити помоћу *правоуглих координата* (x, y) или помоћу *поларних координата* (r, φ) или помоћу *комплексно коњугованих координата* (z, \bar{z}) које се зову кратко *коњуговане координате*.

На пример, права (L) и круг (K) у $[z]$ -равни могу се представити помоћу ових координата на овај начин;

$$L) Ax + By + C = 0; \quad A(z + \bar{z}) - iB(z - \bar{z}) + 2C = 0;$$

$$K) A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0; \quad A z \bar{z} + \frac{1}{2}(B - iC)z + \frac{1}{2}(B + iC)\bar{z} + D = 0.$$

Комплексном броју z одговара вектор положаја $ON = r$. Њему се може придодати (аташирати) и слободни вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{z}$, истог модула (r) , правца и смера, па је $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{AB} \leftarrow z = x + iy$. Ова кореспонденција између

* Статика, Додатак, чл. 17, 8. изд., Београд, 1968.

комплексних бројева и вектора је, *изоморфна*. Због тога се могу дефинисати скаларни и векторски производ ових бројева који су изоморфни са векторима:

$$(\bar{z}_1) \{z_2\} = r_1 r_2 \cos \theta = x_1 x_2 + y_1 y_2; \operatorname{Re} (\bar{z}_1 z_2) = \frac{1}{2} (\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2); \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} |\vec{z}_1 \vec{z}_2| &= |\vec{z}_1 \times \vec{z}_2| = r_1 r_2 \sin \theta = x_1 y_2 - y_1 x_2 = \\ &= \operatorname{Im} (\bar{z}_1 z_2) = \frac{1}{2} i (\bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2) = (x_1 - y_1) \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix}; \cos \theta = (\bar{z}_1) \{z_2\} / r_1 r_2; \end{aligned}$$

$$\bar{z}_1 z_2 = (\bar{z}_1) \{z_2\} + i |\vec{z}_1 \times \vec{z}_2| = r_1 r_2 e^{i\theta}; \theta = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Примери. — 1. $\bar{z} = 4 + 3i$; $r = 5$; $\operatorname{tg} \varphi = 3/4$; $\bar{z} = 4 - 3i$; $1/\bar{z} = (4 - 3i)/5$;

2. $(5 + 4i) + (3 + 2i) = 8 + 6i$; $(6 + 4i) - (2 + i) = 4 + 3i$;

3. $(4 + 2i) \cdot (2 + i) = 6 + 8i$; $(4 + 2i)/(3 + 4i) = (20 - 10i)/25 = (4 - 2i)/5$;

4. $(4 + 3i)^3 = -64 + 117i = 125 (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) = 125 \operatorname{cis} 3\varphi$;

5. $\sqrt[4]{-81} = 3 \sqrt[4]{-1} = 3 e^{2k\pi i/4} = 3 e^{i\pi/4} \cdot e^{2k\pi i/4} = 3 e^{i(2k+1)\pi/4} = 3 \operatorname{cis} \frac{2k+1}{4}\pi =$

$$= 3 [\operatorname{cis} (\pi/4); \operatorname{cis} (3\pi/4); \operatorname{cis} (5\pi/4); \operatorname{cis} (7\pi/4)]; \sqrt{5-12i} = \pm(3-2i);$$

6. $\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 5 = 0$; $\bar{z}_i = 2 \pm i$; $\bar{z}^2 - (3-2i)\bar{z} + (5-i) = 0$; $\bar{z}_i = 2-3i$; $1+i$;

$$z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0; z_i = 1; 1 \pm i; 6z^4 - 25z^3 + 32z^2 + 3z - 10 = 0; z_i = -1/2; 2/3; 2 \pm i;$$

7. $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^4 = (\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi)$; $\cos 4\varphi = 8 \sin^4 \varphi - 8 \sin^2 \varphi + 1$; $\sin 4\varphi =$
 $= \sin \varphi (8 \cos^3 \varphi - 4 \cos \varphi)$;

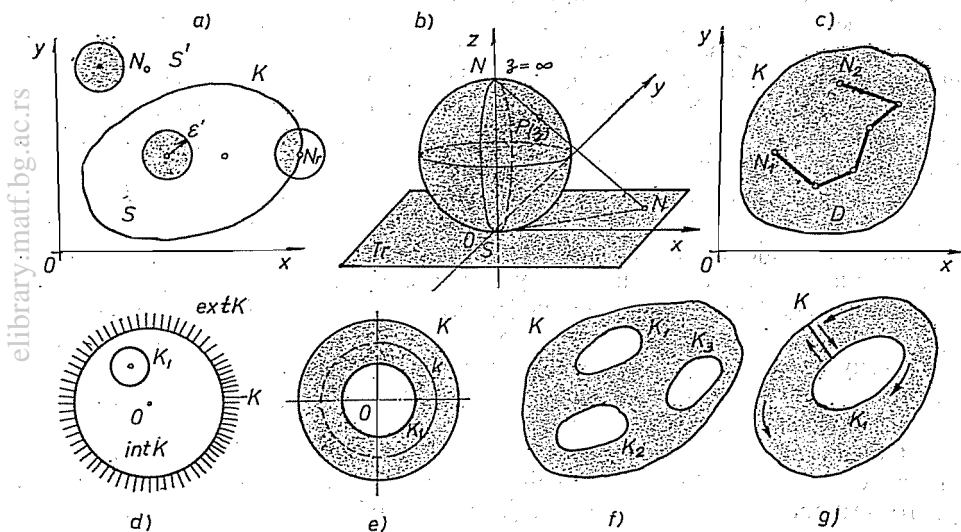
8. $x^2 + y^2 - 4x + 8 \leftrightarrow \bar{z}^2 - 2(\bar{z} + \bar{z}) + 8 = 0$; $x^2 + y^2 - 4 \leftrightarrow \bar{z}^2 - 4 = 0$;

$$3x - 2y - 8 \leftrightarrow (3+2i)\bar{z} + (3-2i)\bar{z} - 8 = 0; 4x^2 + 16y^2 - 25 = 3(\bar{z}^2 + \bar{z}^2) - 10\bar{z}\bar{z} + 25 = 0.$$

D. 2.2. Скуп тачака комплексне равни. — Слично скупу реалних бројева коме одговара скуп тачака на бројној оси који је *линеаран скуп тачака*, скупу комплексних бројева \mathbf{C} одговара у комплексној равни, $[z]$ — *равни дводимензионални скуп тачака*. Сматра се да је скуп *гит* (познат) ако се за сваку тачку скупа може једнозначно да утврди да ли припада ($z \in S$) или не припада ($z \notin S$) том скупу. Тачке $z \in S$ су *елементи* или *чланови* скупа. Тачке z , које не припадају скупу S чине нови скуп $S' \cdot (z' \in S')$ који је *комплементи* првом скупу. Према броју тачака скуп је *коначан* или је *бескрајан*; ако нема тачака он је *празан* (*иусиј*).

Под „ ε -околином“ тачке z_0 у $[z]$ -равни подразумева се скуп свих тачака у унутрашности круга посупречника ε са средиштем у тачки z_0 тако да је $|z - z_0| < \varepsilon$, где је ε дати позитивни број који се назива *полупречник околине* (слика 2.2. а). *Иzolована ε -околина* је околина тачке z_0 али без ње, тј. тада је $0 < |z - z_0| < \varepsilon$. Када се у координатном почетку O комплексне равни постави сфера полупречника $R = 1$ којој је $[z]$ -раван тангенцијална равна, а пречник SN вертикалан, тада се свака тачка N $[z]$ -равни може *стереографски процирајти* на сферу (Riemann-ова *сфера*) тако што се споји са северним

полом \mathcal{N} , па потег $\mathcal{N}N$ продира сферу у тачки P . На тај начин (слика 2.2.б) свакој тачки $N[\mathfrak{z}]$ -равни одговара само једна тачка P на сфери, и обратно. Овим се $[\mathfrak{z}]$ -раван пресликава на сферу (*стереографско пресликавање*). Северном полу \mathcal{N} одговара у $[\mathfrak{z}]$ -равни тачка у бескојности ($\mathfrak{z} = \infty$). Комплексна $[\mathfrak{z}]$ -раван без тачке ∞ назива се *коначна $[\mathfrak{z}]$ -раван*; у противном када се узме и тачка ∞ она је *проширена $[\mathfrak{z}]$ -раван*. Аргументи тачака O и ∞ се не дефинишу. *Бесконачна околина* („*околина*“) тачке $\mathfrak{z} = \infty$ је скуп свих тачака које се налазе изван централног круга описаног око почетка (O) у $[\mathfrak{z}]$ -равни, тј. за које је $|\mathfrak{z}| > 1/\varepsilon$, где је ε дати позитивни број.



Слика 2.2. — Скуп тачака $[\mathfrak{z}]$ -равни

У низу бројева $\{[1 + (-1)^n + (1/n)]\} \in \mathbf{N}$ тачке за n непарно гомилају се око тачке O , тачке за n парно око тачке 2 . Те тачке су *шачке нагомилавања* низа горњих бројева. Тако се и за тачку \mathfrak{z}_0 каже да је *шачка нагомилавања* скупа S тачака у $[\mathfrak{z}]$ -равни ако и само ако у ма којој околини те тачке постоји бар једна тачка скупа $\mathfrak{z}_1 \in S$ таква да је $\mathfrak{z}_1 \neq \mathfrak{z}_0$. Скуп може да има коначно или бескојно много ових тачака. Тачка нагомилавања може да припада скупу али и не мора. Она тачка скупа која није његова тачка нагомилавања је *изолована шачка скупа*. У околини тачке нагомилавања постоји бескојно много тачака тог скупа. Тачка N_u назива се *унутрашња шачка скупа* ако и само ако постоји бар једна њена околина која је део скупа (S). *Спољашња шачка* N_s скупа је она чија се околина састоји из тачака које не припадају том скупу; она је, дакле, унутрашња тачка комплемента S' . *Рубна (гранична) тачка* N_r је она у чијој се свакој околини налазе тачке које припадају и тачке које падају скупу. Ове тачке чине *шачка граници (међу) скупа*, па могу припадати скупу, али и не морају. Рубне тачке које припадају скупу чине његов *руб*, а оне које не припадају скупу јесу *шачке нагомилавања скупа*. Скуп састављен само од унутрашњих тачака је *отворен*, а ако му припадају и рубне тачке (тачке нагомилавања) он је *затворен*. Скуп је *ограничен* ако постоји позитивна константа G таква да је $|\mathfrak{z}| < G$ за свако $\mathfrak{z} \in S$. У противном је *неограничен*. Ограничен и затворен скуп назива се *компактан* скуп.

На пример, тачке у унутрашњости централног јединичног круга су унутрашње тачке N_i и чине отворен скуп, јер је $|\xi| < 1$; међутим скуп свих тачака круга таквих да је $|\xi| \leq 1$ је затворен. Скуп тачака $S = \{i/n\}$, где је $n = 1, 2, \dots$, има тачку нагомиланања $0 \in S$, па није отворени скуп. Он је ограничен, јер је $|\xi| < 2$ за свако $\xi \in S$. Он није ни затворен јер тачка $\xi = 0 \in S$.

Крива одређена параметарским једначинама $x = x(t)$, $y = y(t)$, где су x и y реалне непрекидне функције реалне променљиве (параметра) t датог у затвореном интервалу -сегменту $[a, b]$ -назива се *непрекидна крива* $\bar{z}(t) = x(t) + iy(t)$; $t \in [a, b]$. Ова је крива *просија крива* или *Jordan-ова крива* ако разним вредностима параметра $t_i \in [a, b]$ одговарају разне тачке $\bar{z}(t_i)$. Оваква се крива не може стегнути (*свесити*) на тачку, па нема вишеструких тачака. Ако је $\bar{z}(a) = \bar{z}(b)$ крива је *затворена*. Jordan-ова (проста или затворена) крива назива се *илајком* ако су параметарски изводи $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$ непрекидне функције од $t \in [a, b]$ и ако је на томе сегменту вредност збира квадрата извода $x^2 + y^2 > 0$. Jordan-ова крива може да се састоји од коначног броја глатких кривих па је тада „*део по део илајка крива*“. Глатка крива назива се *контурум* или *иушањом*.

Отворени скуп тачака (S) назива се *област* (*подручје*, *домен* D) ако се било које две његове тачке (N_1 и N_2) могу спојити полигоналном линијом од коначног броја страница које се састоје од тачака тог скупа (слика 2.2.c). Када се овој области придруже и све њене рубне тачке она постаје *затворена област* (затворено подручје, затворени домен D -континуум). Затворена Jordan-ова крива K дели \bar{z} -раван на две отворене области, једну ограничену (*унутрашњу у односу на дајћу криву* $\text{int } K$ и другу неограничену (*спољашњу у односу на дајћу криву*, $\text{ext } K$). Крива K је заједничка *гранична (рубна) крива* оба домена.

Област (D) је *једноструко* или *просио повезана* ако је омеђена једном затвореном кривом (K) без двојних тачака. Она има особину да нека просто затворена крива K_1 омеђује један део области али такву да се може *свеити* *сиснути* у једну тачку у унутрашњости области (слика 2.2.d). Крива K је део области ($K \subset D$) те је и $\text{int } K \subset D$ (*инклузија*). Област је *вишеструко повезана* када је омеђена са више просто затворених кривих K_1, K_2, \dots, K_n од којих свака лежи изван осталих а све леже у унутрашњости прсте затворене криве K . Граница ове области је скуп свих кривих K_1, K_2, \dots, K_n . Ако је број кривих K_n једнак n , онда је област $p = n + 1$ - *струко повезана**. У таквој области и таквих просто затворених кривих које се не могу *сиснути* на једну тачку области не излазећи из ње Унутрашњост круга је једноструко повезана област, али је његова спољашност вишеструко повезана. Област кружног прстена (слика 2.2.e) је двоструко повезана, јер је $n = 1$ па је $p = 2$. Круг (k) описан у прстену не може се стиснути у једну тачку области, а да је не напусти. Област t представљена на сл. 2.2.f је $p = 4$ -струко повезана. Када је област n -то струка повезана онда се може помоћу $n - 1$ *засека (канала)* претворити у једноструко повезану област. *Усвојено је да се позијивни смер обилажења границе сматра онај при коме област осјаје са леве стране*, како је показано на слици 2.2.g.

D. 2.3. Функција комплексне променљиве. — Комплексна променљива $w = u + iv$ је функција независно комплексне променљиве $z = x + iy$ ако свакој вредности z припадају на ма који начин одређене вредности w , те је $w = f(z)$. Вредностима променљиве одговара дати скуп тачака \bar{z} -равни,

* Практично се може рећи да је једноструко повезана област она у чијој унутрашњости нема *отвора (рупа)*; број вишеструке повезаности области одговара броју отвора (рупа) у њеној унутрашњости +1.

$S\{z\}$. Скуп тих вредности је *подручје променљиве* z , па је оно уједно и подручје *дефиниције функције* $w=f(z)$. Ако једној вредности променљиве z одговара само једна вредност од w , онда је функција $w=f(z)$ *једнозначна* (*униформна*). У противном је *вишезначна* (*мултиформна*). Многочначна функција може да се схвати као *скуп* (*колекција*) једнозначних функција чији су елементи *ране функције*. Обично се један елемент бира као *главна рана*. Вредност функције за $z=a$ пише се као $f(a)$. Вредност многочначне функције која одговара главној грани је *њена главна вредност*.

На пример, $w=f(z)=z^2$ је једнозначна функција, па је $f(i)=i^2=-1$. Функција $w=\sqrt{z}$ је двозначна функција. Функција $w=z^2$ је дефинисана у целој $[z]$ -равни, а функција $w=f(z)=1/z=z^{-1}$ је такође дефинисана у целој $[z]$ -равни, изузев тачке $z=0$. Функција $w=\arg z$ је дефинисана у целој $[z]$ -равни изузев тачке $z=0$, али је мултиформна функција.

За функцију $f(z)$ дефинисану и једнозначну у околини (или изолованој околини) тачке z_0 каже се да *тежи граничној вредности* $A=A+iB$ када $z \rightarrow z_0 = x_0 + iy_0$, ако се за сваки позитиван број ϵ може одредити довољно мали број $\delta(\epsilon)$ такав да је $|f(z)-A| < \epsilon$ за све вредности $|z-z_0| < \delta(\epsilon)$ и пише се $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ или $f(z) \rightarrow A$ када $z \rightarrow z_0$. Ово показује да се све вредности функције $w=f(z)$ налазе у кругу полупречника ϵ око тачке A , док се вредности z налазе у кругу полупречника δ [или $\delta(\epsilon)$] око тачке z_0 .

Функција $w=f(z)$ је непрекидна у тачки z_0 ако су испуњени ови услови: 1° ако је $f(z)$ дефинисана за $z=z_0$; 2° ако $f(z)$ има граничну вредност када $z \rightarrow z_0$ и 3° ако је $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ када $z \rightarrow z_0$, што значи да је $|f(z)-f(z_0)| < \epsilon$ када је $|z-z_0| < \delta$. Функција $f(z)$ је *непрекидна* у области D ако је непрекидна у свакој тачки те области. Када је $f(z)$ непрекидна у тачки $z_0 \in D$, тада су и u и v непрекидне функције у тој тачки. Ако је $f(z)$ непрекидна у области D и ако се може наћи такво δ да зависи само од ϵ , а не и од тачке z_0 , онда је она *униформно непрекидна* у тој области. Када је $w=f(z)=1/z$ тада је $w=\infty$; за $z=0$ и обратно, када је $z=\infty$ тада је $w=0$. Да би се посматрала функција $f(z)$ за $z=\infty$ треба испитати функцију $f(1/w)$ у тачки $w=0$. Каже се да $f(z) \rightarrow \infty$ када $z \rightarrow z_0$, ако се за сваки број $N > 0$ може наћи такво $\delta > 0$ да је $|f(z)| > N$ при $0 < |z-z_0| < \delta$.

Функција $w^2=f(z)$ може се схватити као *пресликавање*. Узмимо две равни: $[z]$ -раван и w -раван, онда функција $f(z)$ *пресликава* скуп $S\{z\}$ који припада $[z]$ -равни и скуп $P\{w\}$ у $[w]$ -равни. Тачка $N(z)$ јесте *оринал*, а њој одговарајућа пресликана тачка $N'(w)$ њена *слика*. Уместо да посматрамо функцију $f(z)$, пошто је

$$w=f(z=x+iy)=u(x,y)+iv(x,y); u=\operatorname{Re} w, v=\operatorname{Im} w, \quad (2.6)$$

можемо посматрати две реалне функције $u(x,y)$ и $v(x,y)$ које зависе од реалних променљивих x и y . Када је крива L дата у параметарском облику, $x=\theta(t)$, $y=\psi(t)$, тада су параметарске једначине криве L' у $[w]$ -равни:

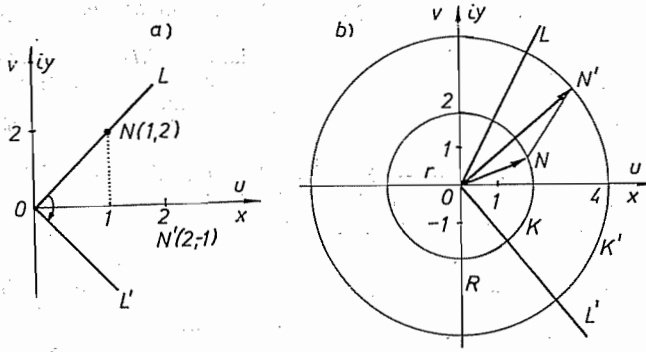
$$u=u[\theta(t), \psi(t)]; v=v[\theta(t), \psi(t)].$$

Примери. — 1. Функција $w=-iz$ пресликава тачку $N(1+2i)$ у тачку $N'=-i(1+2i)=2-i$, а праву $L(ON)$ једначине $y=2x$, односно $y/2=x/1=t$; $x=t$, $y=2t$, због тога што је $w=-i(x+iy)=y-ix=u+iv$, па су $u=y=2t$; $v=-x=-t$, у праву $|L'| v=-u/2$, управну на ON -ротација за угао $-\pi/2$, (слика 2.3.а).

2. Функција $f(z)=w=z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+2ixy=u+iv$; $u=x^2-y^2$; $v=2xy$ пресликава: а) праву $(L) x=t$ $y=2t$ у праву $(L') u=-3t^2$, $v=4t^2$, односно $v=-4u/3$; б) централни круг K полупречника $r=2$ у круг K' , $w=z^2=(re^{i\varphi})^2=r^2 \operatorname{cis} 2\varphi=R \operatorname{cis} 2\varphi$.

полупречника $R=4$ који је такође централни; тачка N' прелази круг K' два пута већом угаonom брзином (слика 2.3. b); c) праву L_1 кроз тачке $N_1(1; 1)$ и $N_2(2; -1)$ у криву чије су параметарске једначине $u=6t-3t^2$; $v=2-2t-4t^2$.

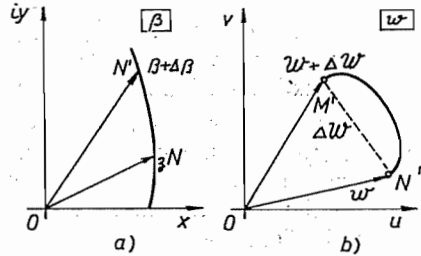
3. Функција $w=1/\bar{z}$ пресликава: а) тачку $2+i$ у тачку $(2-i)/5$; б) централни круг полупречника r у централни круг полупречника $R=1/r$, јер је $w=1/\bar{z}=e^{-i\varphi}/r=(\cos \varphi - i \sin \varphi)/r=[\text{cis}(-\varphi)]/r$, па му је аргумент негативан.



Слика 2.3. Пресликавање

D. 2. 4. Извод функције комплексне променљиве. — Нека је N тачка у $[z]$ -равни, а тачка N' (слика 2.4.) њена слика у $[w]$ -равни добијена трансформацијом помоћу $w=f(z)$. Ако је $f(z)$ једнозначна функција онда се тачка N пресликава само у једну тачку N' , (слика 2.4. b) па када z прирасте за Δz тада N прелази у тачку M , односно тачка N' у M' у $[w]$ -равни, те $N'M'$ представља прираштај $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) = \Delta u + i \Delta v$. Извод од $f(z)$ се формално дефинише као и у реалном подручју, па је

$$w' = f'(z) = \frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{M \rightarrow N} \frac{M'N'}{MN} \quad (2.7)$$



Слика 2.4. Извод функције $f(z)$

и независан је од њуија којим се тачка M приближава тачки N . Како је $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$, то када $\Delta z \rightarrow 0$ тада и $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$, па ћемо разликовати два случаја да $\Delta z \rightarrow 0$ паралелно координатним осама:

1° $\Delta z \rightarrow 0$ паралелно Ox -оси (слика 2.5.a). — Тада је $\Delta y = 0$, па је $\Delta z = \Delta x$, те је

$$f'(z) = \frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right] = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

$2^\circ \Delta z \rightarrow 0$ *паралелно* *Oy*-*оси*. Тада је $\Delta x = 0$, па је $\Delta z = i \Delta y$, те је

$$f'(z) = \frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i \Delta y} + i \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \right] = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Пошто ови изводи у тачки z морају бити *једнаки*, то морају бити задовољени услови:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.8}$$

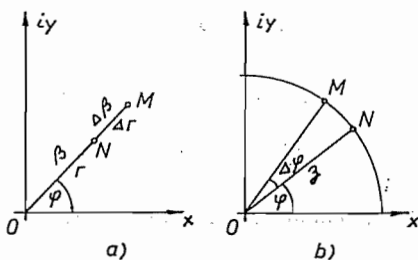
који се зову *Cauchy-Riemann-ови услови* (или *парцијалне једначине*). Да би функција $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ имала извод у тачки $z = x + iy$ потребно је и довољно да су парцијални изводи функција $u(x, y)$ и $v(x, y)$ у тачки (x, y) *непрекидне функције* и да су *испуњени* *Cauchy-Riemann-ови услови* (2.8). С обзиром на услове (2.8) извод $f'(z)$ може се написати у *четири* еквивалентна облика:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.9}$$

Функција $f(z)$ која има извод у свакој тачки области D , осим можда у коначном броју тачака (*сингуларним тачкама*), назива се *аналитичка функција* у области D . Када нема сингуларитета она је тада *регуларна-аналитичка* (*регуларна* или *холоморфна*) у тој области. Функција $f(z)$ је *аналитичка* у некој тачки z_0 ако је *холоморфна* у околини те тачке.

Виши изводи се одређују као и у реалном подручју. Ако је $f(z)$ *аналитичка* функција у области D , онда у тој области постоје и виши изводи.

Код *поларног система* координате су r и φ , па је $z = r \operatorname{cis} \varphi$, те је $f(z) = u(r, \varphi) + i v(r, \varphi)$. Функција $f(z)$ је *диференцијабилна* у тачки N . Ако M тежи ка N дуж потага r (сл. 2.5.а) онда је извод



Слика 2.5. — Извод у поларном систему

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{[u(r + \Delta r, \varphi) - u(r, \varphi)] + i [v(r + \Delta r, \varphi) - v(r, \varphi)]}{\Delta r \operatorname{cis} \varphi} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) (\cos \varphi - i \sin \varphi). \end{aligned}$$

после ослобађања *имагинарног* броја из множиоца.

Ако је прираштај по кругу полупречника r (сл. 2.5.6), онда ће бити:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{[u(r, \varphi + \Delta\varphi) - u(r, \varphi)] + i[v(r, \varphi + \Delta\varphi) - v(r, \varphi)]}{[\cos(\varphi + \Delta\varphi) - \cos\varphi] + i[\sin(\varphi + \Delta\varphi) - \sin\varphi]} = \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} + i \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \frac{1}{-\sin\varphi + i \cos\varphi}. \end{aligned}$$

јер су $\cos(\varphi + \Delta\varphi) \approx -\sin\varphi \cdot \Delta\varphi$, $\sin(\varphi + \Delta\varphi) \approx \sin\varphi + \cos\varphi \Delta\varphi$; $\sin\Delta\varphi \approx \Delta\varphi$; $\cos\Delta\varphi \approx 1$.

Како су изводи у оба правца једнаки, то су Cauchy-Riemann-ови услови у поларном систему

$$r(\partial u/\partial r) = \partial v/\partial \varphi; \quad r(\partial v/\partial r) = -\partial u/\partial \varphi, \quad (2.8')$$

па се извод може написати у облику

$$f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) (\cos\varphi - i \sin\varphi) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) (\cos\varphi - i \sin\varphi). \quad (2.9')$$

D. 2.5. Елементарне комплексне функције. — Као и у реалном подручју тако се и у комплексном подручју дефинишу *елементарне функције*.

а) **Полином** је дефинисан помоћу потенцијалних функција z^r у облику

$$w = P(z) = \sum_{r=0}^n \mathfrak{A}_{n-r} z^{n-r} = \mathfrak{A}_n z^n + \mathfrak{A}_{n-1} z^{n-1} + \dots + \mathfrak{A}_1 z + \mathfrak{A}_0 \quad (2.10.a)$$

где су \mathfrak{A}_{n-r} комплексне константе ($\mathfrak{A}_n \neq 0$), а n је позитивни број који је *степен полинома*. Када је $w = z^n$ тада је $w' = n z^{n-1}$. Ова функција регуларна за свако z , па је и полином $P(z)$ регуларна функција.

б) **Рационална функција** је дефинисана као количник два полинома, те је

$$w = f(z) = P(z)/Q(z). \quad (2.10.б)$$

Она је регуларна за свако z изузев за вредности z за које је $Q = 0$.

Функција $f(z) = z^{-n}$, где је n природни број, регуларна је за свако z осим за $z = 0$. Извод је $f' = -n z^{n-1}$.

в) **Експоненцијална функција** дефинише се помоћу реда

$$w = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = e^{x+iy} = e^x \operatorname{cis} y. \quad (2.10.c)$$

Она је регуларна функција за свако z . Како су $u = e^x \cos y$; $v = e^x \sin y$ то су задовољени услови (2.8), па је w аналитичка за свако z , стога је $f'(z) = e^z$. За њу важи адициона теорема, јер је $w = e^{z_1} e^{z_2} = \sum z_1^n/n! \cdot \sum z_2^n/n! = \sum (z_1 + z_2)^n/n!$ за $n = 0, 1, \dots, \infty$. Пошто су функције $\sin y$ и $\cos y$ периодичке периода 2π , то је e^z *периодичка функција имаинарної периода $2k\pi i$* , па је $e^{z+2k\pi i} = e^x \operatorname{cis}(y + 2k\pi) = e^x \operatorname{cis} y = e^z$. Стога је $e^{2k\pi i} = \operatorname{cis} 2k\pi = 1$.

д) Тригонометријске и хиперболичке функције су дефинисане на овај начин:

$$w = \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1} / (2n+1)!;$$

$$w = \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} / (2n)!; \operatorname{tg} z = \sin z / \cos z;$$

$$w = \operatorname{Ch} z = (e^z + e^{-z})/2; w = \operatorname{Sh} z = (e^z - e^{-z})/2; w = \operatorname{Th} z = \operatorname{Sh} z / \operatorname{Ch} z.$$

Пошто су $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$, то важе и ове релације:

$$\sin iz = i \operatorname{Sh} z; \cos iz = \operatorname{Ch} z; \operatorname{Sh} iz = i \sin z; \operatorname{Ch} iz = \cos z; \quad (2.10.e)$$

$$\operatorname{tg} iz = i \operatorname{Th} z; \operatorname{ctg} iz = -i \operatorname{Cth} z; \operatorname{Th} z = -i \operatorname{tg} iz; \operatorname{Cth} z = i \operatorname{ctg} iz.$$

е) *Логаритамска функција* је дефинисана као инверзна функција експоненцијалне функције, $e^w = z$, па је $w = \operatorname{Ln} z$, стим да је $z \neq 0$. Пошто је $z = r e^{i\varphi}$ то је $\operatorname{Ln} z = \ln r + i\varphi + 2k\pi i$, те се може написати

$$w = \operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{arg} z + 2k\pi i = \ln z + 2k\pi i; \ln z = \ln |z| + i \operatorname{arg} z, \quad (2.10.f)$$

где је $\ln z$ главни гео логаритам, а $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Ова функција је мултиформна. За реалне позитивне бројеве x за које је $\varphi = 0$ логаритам је $\operatorname{Ln} x = \ln x + 2k\pi i$, па је само за $k = 0$ вредност $\operatorname{Ln} x = \ln x$. За негативне бројеве је $\operatorname{Ln}(-x) = \ln x + i(2k+1)\pi$.

На пример, $\operatorname{Ln} 3 = \ln 3 + 2k\pi i$; $\operatorname{Ln}(-3) = \ln 3 + (2k+1)\pi i$; $\operatorname{Ln} 1 = \ln 1 + 2k\pi i = 2k\pi i$; $\operatorname{Ln}(-1) = (2k+1)\pi i$; $\operatorname{Ln} e = 1 + 2k\pi i$.

ф) *Општа експоненцијална функција*

$$w = a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$$

дефинише се за a реално и позитивно

г) *Општа поенцијална функција*

$$w = z^p = e^{p \operatorname{Ln} z},$$

где је $p = \alpha + i\beta$, α и β су реални, мултиформна је функција.

Д. 2. 6. Хармонијске функције. — Функција $U = U(x, y)$ је хармонијска када задовољава Лапласе-ову парцијалну једначину $\Delta U = (\partial^2 U / \partial x^2) + (\partial^2 U / \partial y^2) = 0$, где је Δ Лапласе-ов оператор. Из (2.8) следи $\partial^2 u / \partial x^2 = \partial^2 v / \partial y \partial x$, $\partial^2 u / \partial y^2 = -\partial^2 v / \partial x \partial y$ па се може констатовати да су реални и имагинарни део комплексне функције хармонијске функције

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (2.11)$$

Када су u и v хармонијске функције у истој области D , а у тој је области функција $w = u + iv$ регуларна, тада се каже да је функција v коњугована са функцијом u .

На пример, функција $w = z^2$ је хармонијска функција, јер су $u = x^2 - y^2$; $v = 2xy$, па су $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$. Таква је и функција $w = z^n = (x + iy)^n$ и полином n -ог степена $P(x, y) = A \operatorname{Re}(x + iy)^n + B \operatorname{Im}(x + iy)^n$, као $P_3 = 2(x + iy) + (x + iy)^2$, где су $u = x^2 - y^2 + 2x$; $v = 2xy + 2y$.

Пошто су диференцијали $du = (\partial u/\partial x) dx + (\partial u/\partial y) dy = (\partial v/\partial y) dx - (\partial v/\partial x) dy$ и $dv = (-\partial u/\partial y) dx + (\partial u/\partial x) dy$, то су због тога што су $\Delta u = 0$ и $\Delta v = 0$, *шпошлни диференцијали**, па када је дата једна функција (u или v) може се одредити друга њој коњугована, према обрасцима:

$$u = \int \frac{\partial v}{\partial y} dx - \int \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial v}{\partial y} dx \right] dy + C;$$

$$v = - \int \frac{\partial u}{\partial y} dx + \int \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial u}{\partial y} dx \right] dy + C,$$
(2.12)

где је C произвољна интеграциона константа.

Примери. — 1. Када је $u = x^3 - 3xy^2$ тада су $\partial u/\partial x = 3x^2 - 3y^2$; $\partial u/\partial y = -6xy$, па је $\Delta u = 0$, те је $v = 3x^2y - y^3 + C$, односно $w = z^3$.

2. Ако је $v = 2y + 3x^2y - y^3$, онда су $\partial v/\partial x = 6xy$; $\partial v/\partial y = 2 + 3x^2y - y^3$, па је $\Delta v = 0$, те је $u = 2x - 3xy^2 + x^3$, односно $w = 2\bar{z} + z^3$.

3. Када је $u = e^x \cos y$ тада је $v = e^x \sin y$, па је $w = e^z$.

4. Када је $u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$ добија се да је $v = e^{-x}(x \cos y + y \sin y) + C$, па је $w = e^{-x}[x e^{i(y+\pi/2)} - y e^{-iy}]$.

5. Ако је $U = U(x, y)$ хармонијска функција ($\Delta U = 0$) њено је решење $U = X(x) \cdot Y(y)$, па је $X''Y + XY'' = 0$. Ова се једначина распада на две обичне диф. једначине $X'' + k^2 X = 0$; $Y'' - k^2 Y = 0$, са решењима $X = A \cos kx + B \sin kx$; $Y = C \operatorname{Ch} kx + D \operatorname{Sh} kx$, где су A, B, C и D реалне константе.

Када се у функцији $f(x, y)$ уведу коњуговане координате $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, она постаје $F(z, \bar{z})$. Пошто је $\partial z/\partial x = \partial \bar{z}/\partial x = 1$; $\partial z/\partial y = -(\partial \bar{z}/\partial y) = i$, могу се увести оператори:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial z}; \quad \bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}};$$

$$\Delta = (\nabla, \bar{\nabla}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}.$$
(2.13)

Уведу ли се у функцији $w = u + iv$ коњуговане координате, она постаје $w(z, \bar{z})$, па се могу, као и у реалном подручју, дефинисати следеће операције:

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \frac{\partial F}{\partial z}; \quad \operatorname{grad} w = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial w}{\partial \bar{z}};$$

$$\operatorname{div} w = (\Delta, w) = \operatorname{Re}(\Delta, w) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right);$$
(2.14)

$$\operatorname{rot} w = \operatorname{Im}(\bar{\nabla}, w) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \operatorname{Im} \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right).$$

Када је $w = f(z)$ хармонијска функција, тада је $\operatorname{grad} w = 0$. Дивергенција реалне и комплексне функције је увек реална функција.

* Динамика, члан 4.6.

На пример, ако је $w = [3x^3 + x(3y^2 - 2)] + i[(2 + 3x^2)y + 3y^3]$, онда је $w = 3z^2\bar{z} - 2\bar{z}$, па су:

$$\begin{aligned} \text{grad } w &= (6x^2 - 6y^2 - 4) + 12xyi = 2(\partial w / \partial \bar{z}) = 6z^2 - 4; \text{div } w = 2(x^2 + y^2) = 2 \text{Re}(\partial w / \partial z) = \\ &= 12 \text{Re}(z\bar{z}); \text{rot } w = 0 = 2 \text{Im}(6z\bar{z}) = 0; \Delta w = \Delta u + i \Delta v = 24(x + iy) = 24z. \end{aligned}$$

$$\text{div grad } w = \text{Re}(\bar{\nabla}, \nabla w) = \text{Re}(\Delta w) = u = 24x; \text{rot grad } w = \text{Im}(\bar{\nabla}, \nabla w) = \text{Im}(\Delta w) = \Delta v = 24y.$$

За поларне координате (r, φ) су формуле трансформација:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi; \quad r^2 = x^2 + y^2; \quad \text{tg } \varphi = y/x, \quad (2.15)$$

па су парцијални изводи

$$\begin{aligned} \partial r / \partial x &= x/r = \cos \varphi; \quad \partial r / \partial y = y/r = \sin \varphi; \\ \partial \varphi / \partial x &= -y/r^2 = (-\sin \varphi)/r; \quad \partial \varphi / \partial y = (\cos \varphi)/r. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Како су изводи

$$\begin{aligned} (\partial / \partial x) &= (\partial / \partial r)(\partial r / \partial x) + (\partial / \partial \varphi)(\partial \varphi / \partial x); \\ (\partial / \partial y) &= (\partial / \partial r)(\partial r / \partial y) + (\partial / \partial \varphi)(\partial \varphi / \partial y) \end{aligned} \quad (2.17)$$

о су

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos \varphi; \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \sin \varphi; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Уносећи ове релације у услове (2.8) добијају се Cauchy-Riemann-ови услови за поларне координате:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r \frac{\partial v}{\partial r}. \quad (2.19)$$

Диференцирањем се даље добија

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\sin 2\varphi}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{\sin 2\varphi}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\sin 2\varphi}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin^2 \varphi + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos 2\varphi}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\sin 2\varphi}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\sin 2\varphi}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

па је Laplace-ов оператор

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (2.21)$$

Функције $u = u(x, y)$ и $v(x, y)$ могу се схватити као криволинијске координате тачке N у $\{z\}$ -равни. Криве $u(x, y) = C_1$, $v(x, y) = C_2$, где су C_i константе, јесу координатне криве. Оне се секу у тачки N , па се у $[w]$ -равни

пресликавају у праве паралелне координатним осама триједра $O'uv$ и сваки пар се сече у тачки N' . Пошто се за $f(x, y) = C$ диференцирањем добија $(\partial f/\partial x) + (\partial f/\partial y)y' = 0$, то ће бити:

$$u(x, y) = C_1; v(x, y) = C_2; y'_1 = (-\partial u/\partial x)/(\partial u/\partial y); y'_2 = (-\partial v/\partial x)/(\partial v/\partial y). \quad (2.22)$$

Ако су задовољени услови (2.8) онда су криве ортогоналне, јер је тада $y'_1 \cdot y'_2 = -1$.

Када је $w = z^2$ тада су $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, па представљају у $[z]$ -равни две фамилије хипербола. Криволинијске координате тачке $N(2; 1)$ јесу $u=3$; $v=4$, а пошто су $y'_1 = x/y$; $y'_2 = -y/x$ оне су ортогонале.

D. 2.7. Сингуларитети. — Када је функција $f(z)$ регуларна у области $0 < |z - z_0| < \varepsilon$, а није регуларна у тачки z_0 , онда се ова тачка z_0 назива *изоловани сингуларитет* функције $f(z)$. Врсте ових сингуларитета су:

1° *привидни сингуларитет* је она тачка z_0 ако постоји коначна гранична вредност $\lim f(z)$ када $z \rightarrow z_0$, јер се тада може *уклонити*;

2° *пол* функције $f(z)$ је она тачка z_0 када је $\lim f(z) = \infty$ при $z \rightarrow z_0$;

3° *есенцијални сингуларитет* функције $f(z)$ је она тачка z_0 за коју када $z \rightarrow z_0$ не постоји $\lim f(z)$;

4° *критичка тачка* односи се на многозначну функцију $f(z)$ у околини тачке z_0 . Ако се око ове тачке опише круг $z = z_0 + \varepsilon e^{i\varphi}$ малог полупречника ε , па се при обилажењу z по кругу функција $f(z)$ не враћа на вредност коју је имала у почетној тачки, онда је та тачка z_0 *критичка тачка* те многозначне функције. Ових тачака има две врсте: *алебарска критичка тачка* је реда n ако се функција $f(z)$ после n пуних обилазака тачке z око z_0 *први пут* враћа на своју почетну вредност, и *трансцендантна (логаритамска)* ако се $f(z)$ *никада не враћа* на првобитну вредност.

Функција $f(z)$ које је регуларна у целој коначној $[z]$ -равни зове се *целом функцијом*. Када је тачка z_0 регуларна тачка или пол од $f(z)$, каже се да је функција $f(z)$ *мероморфна у тачки* z_0 . Буде ли $f(z)$ мероморфна функција у свакој тачки области D онда је мероморфна и у тој области.

Примери. — 1. Тачка $z=0$ је привидни сингуларитет функција $f(z) = (\sin z)/z$, јер је $\lim f(z) = 1$, ($z \rightarrow 0$).

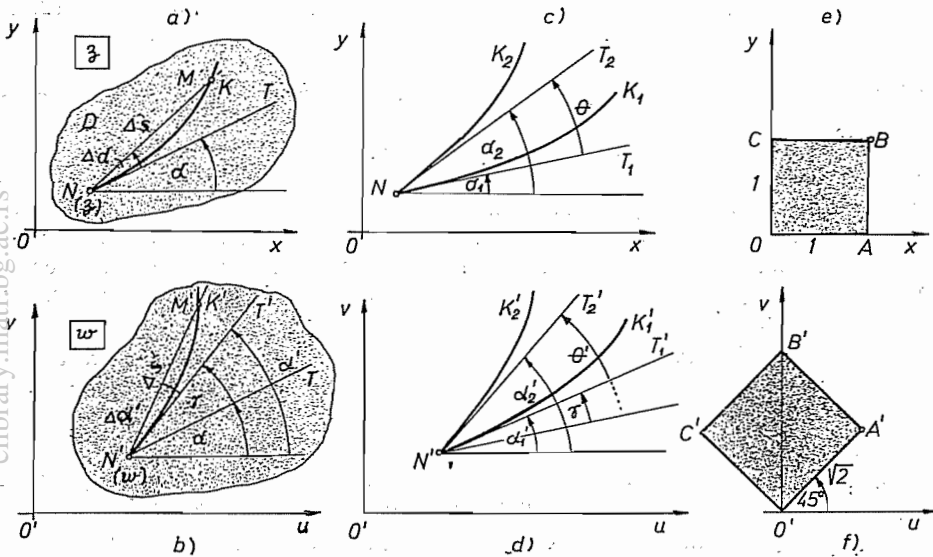
3. Функција $f(z) = (z^6 + z^3 + 1)/(z-1)^3 \cdot (z+2)^2$ има тачку $z=1$ као пол трећег реда и тачку $z=-2$ као пол другог реда.

3. Функција $\arcsin(1/z)$ има есенцијалну тачку $z=0$. Ја $f(z) = 1/e^z - 1$ $z = \infty$. а $z = -2k\pi i$ су полови првог реда ($k=0, 1, 2, \dots$)

4. Функција $f(z) = \sqrt{z-z_0}$ има алгебарску тачку z_0 , а функција $f(z) = \operatorname{arctg} z$ има две логаритамске критичке тачке $z = \pm i$.

D. 2.8 Конформно пресликавање. — Нека кроз тачку $N(z)$ комплексне $[z]$ -равни пролази глатка крива K једначине $z(t) = x(t) + iy(t)$, где је t реални параметар дат у затвореном интервалу (сегменту) у области D , $t \in [t_0, t_1]$, онда је $\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y}$; $|\dot{z}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$; $\arg \dot{z} = \operatorname{arctg}(\dot{y}/\dot{x})$. Комплексни број \dot{z} одређује правцем свог модула тангенту (\vec{T}) на криву $z(t)$ у тој тачки N (слика 2.6.а). Нека је $w = f(z)$ аналитичка функција у тачки N и у области D , онда она пресликава криву K у $[w]$ -равни у криву K' која пролази кроз тачку $N' =$ слику тачке N . Тада је $w = f(z) = f[z(t)] = w(t)$, па је $\dot{w} = f'(z) \cdot \dot{z}$, те је и $\arg \dot{w} = \arg f'(z) + \arg \dot{z} = \gamma + \alpha = \alpha'$, где је $\gamma = \arg f'(z)$.

Ово показује да ће се тангента \vec{T}' на криву K' у тачки N' заокренути у односу на тангенту \vec{T} за угао γ који не зависи од криве K већ само од функције пресликавања $w=f(z)$ и тачке N (слика 2.6. б). Пређе ли тачка $N(z)$ у оближњи положај $M(z+\Delta z)$, онда је померање $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, те



Слика 2.6. — Конформно пресликавање

је $\Delta z = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta s$, па је комплексни број $\Delta z = \Delta s \cdot e^{i(\alpha + \Delta\alpha)}$. Тада ће и тачка $N'(w)$ прећи по кривој K' у оближњу тачку $M'(w + \Delta w)$, па је дужина тетиве $N'M' = \Delta s'$, те је комплексни број $\Delta w = \Delta s' \cdot e^{i(\alpha' + \Delta\alpha')}$. По дефиницији први извод функције $f(z)$ је

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s'}{\Delta s} \cdot e^{i(\alpha' + \Delta\alpha' - (\alpha + \Delta\alpha))} \right] = \frac{ds'}{ds} \cdot e^{i\gamma} = \lambda e^{i\gamma}, \quad (2.23)$$

јер када $\Delta z \rightarrow 0$ тада и $\Delta s \rightarrow 0$ па и $\Delta\alpha \rightarrow 0$ и $\Delta\alpha' \rightarrow 0$. Ово нам показује да се пресликавањем помоћу регуларне аналитичке функције $f(z)$ чији је први извод у тој тачки различит од нуле, $f'(z) \neq 0$, сви лукови ds који излазе из тачке z пресликавају на лукове $ds' = \lambda ds$ који излазе из тачке w , па су увећани или умањени, али у сталном односу

$$\frac{ds'}{ds} = f'(z) = \lambda, \quad (2.23)$$

где је λ *коэффициент деформације*. Ако је $\lambda > 1$ онда је *растегање (екстензија)*, при $\lambda < 1$ биће *стезање (компресија)*.

Две глатке криве K_1 и K_2 у тачки N чине међусобно угао θ (слика 2.6. с, d). Сlike тих кривих K'_1 и K'_2 у тачки N' равни $[w]$ градиће међусобно угао θ' , па је

$$\theta' = \alpha'_2 - \alpha'_1 = \alpha_2 + \gamma - (\alpha_1 + \gamma) = \alpha_2 - \alpha_1 = \theta \quad (2.24)$$

то јест градиће *исти* угао θ . Пошто је функција пресликавања иста $w=f(z)$, то ће, према (2.23), бити:

$$ds_1 = |dz_1|; |ds_2|; ds_1' = |f'(z)| ds_1; ds_2' = |f'(z)| ds_2$$

те следи однос

$$\frac{ds_1'}{ds_1} = \frac{ds_2'}{ds_2} = |f'(z)| = |w'| = \lambda, \quad (2.25)$$

што значи да ће у околини тачке N' наступити иста деформација лукова (растежање или стезање).

Овакво пресликавање регуларном аналитичком функцијом $w=f(z)$ чији је први извод различит од нуле $f'(z) \neq 0$ назива се *конформно пресликавање*, јер услови остају очувани и по величини и по смеру, а лукови су слични, па се стога и назива „*пресликавање по сличности у најмањим деловима*“. Ово значи да слика мале фигуре (K) у околини тачке N пресликавањем помоћу функције $f(z)$ чији је извод $f'(z) \neq 0$ има у $[w]$ -равни *приближно* исти облик као и оригинал (K).

Тачка z која има особину да је $w=f(z)=z$ назива се *фиксна* или *инваријантна тачка трансформације*. Код функције $w=z^2$ те су тачке $z=0$; 1 ; јер је $z^2=z$.

Остане ли при трансформацији коефицијент деформације сталан за фиксну тачку, а такође и величине углова, али им се *промени смер*, каже се да је такво пресликавање *анити конформно*, (на пример $w=\bar{z}$).

Елементу површине $dA = dx dy$ у $[z]$ -равни одговара елемент $dA' = |\partial(x, y)/\partial(u, v)| du dv$ у $[w]$ -равни, па је коефицијент деформације

$$p = \frac{dA'}{dA} = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|; \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} du/dx & du/dy \\ dv/dx & dv/dy \end{vmatrix} = \frac{du}{dx} \frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy} \frac{dv}{dx}, \quad (2.26)$$

где је $\partial(u, v)/\partial(x, y)$ Јакобијан (*функционална детерминанта*) праве трансформације $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$, док се Јакобијан $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ односи на *инверзну трансформацију* $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$. Када је $\partial(u, v)/\partial(x, y) \neq 0$ у области D , тада су $u(x, y)$ и $v(x, y)$ континуално диференцијабилне функције у том домену, па се пресликавање врши „*тачка у тачку*“.

Када је функција $w=f(z)=u+iv$ *аналитичка*, тада су задовољени *C-R-услови* (2.8), па је коефицијент деформације овог конформног пресликавања

$$p = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| = \left| \begin{vmatrix} du/dx & du/dy \\ -du/dy & du/dx \end{vmatrix} \right| = (du/dx)^2 + (du/dy)^2 = \left| \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 = |f'(z)|^2. \quad (2.27)$$

На пример, када су $u=x-y$, $v=x+y$, тада су *C-R-услови* задовољени, па је $|\partial(u, v)/\partial(x, y)|=2$. Према (2.4) биће $w=(1+i)z = \sqrt{2} e^{i\pi/4} z$. Оса $x=0$ пресликава се у праву $v=-u$, а Oy у праву $v=u$; права $x=1$ у праву $u+v=2$, а права $y=1$ у праву $v-u=2$. Квадрат $OA(1; 0)$; $B(1; 1)$; $C(0, 1)$ пресликава се у квадрат 0 ; $A'(1; 1)$; $B'(0; 2)$; $C'(-1; 1)$ заокренут за 45° према $+Ox$ -оси, али двапут веће површине (слика 2.6 e, f).

Д. 2.8.1. Примери конформној пресликавања. — Навешћемо најважније случајеве конформног пресликавања који се јављају у техничкој пракси.

1. **Хомоџеитија** (пресликавање по сличности) се врши функцијом

$$w = cz = c(x + iy) = cx + i cy = u + iv = cr e^{i\varphi}, \quad (2.28)$$

где је c реална константа. Угао φ се не мења, а потези се мењају у истом односу, повећавају (када је $c > 0$) или смањују (када је $c < 0$). У првом случају хомотетија је директна, у другом инверзна. Број c је коефицијент сличности, а тачка O' је центар хомоџеитије (слика 2.7. а).

На пример, $w = 2z = 2x + 2iy = u + iv$; $u = 2x$; $v = 2y$; $u/v = x/y$.

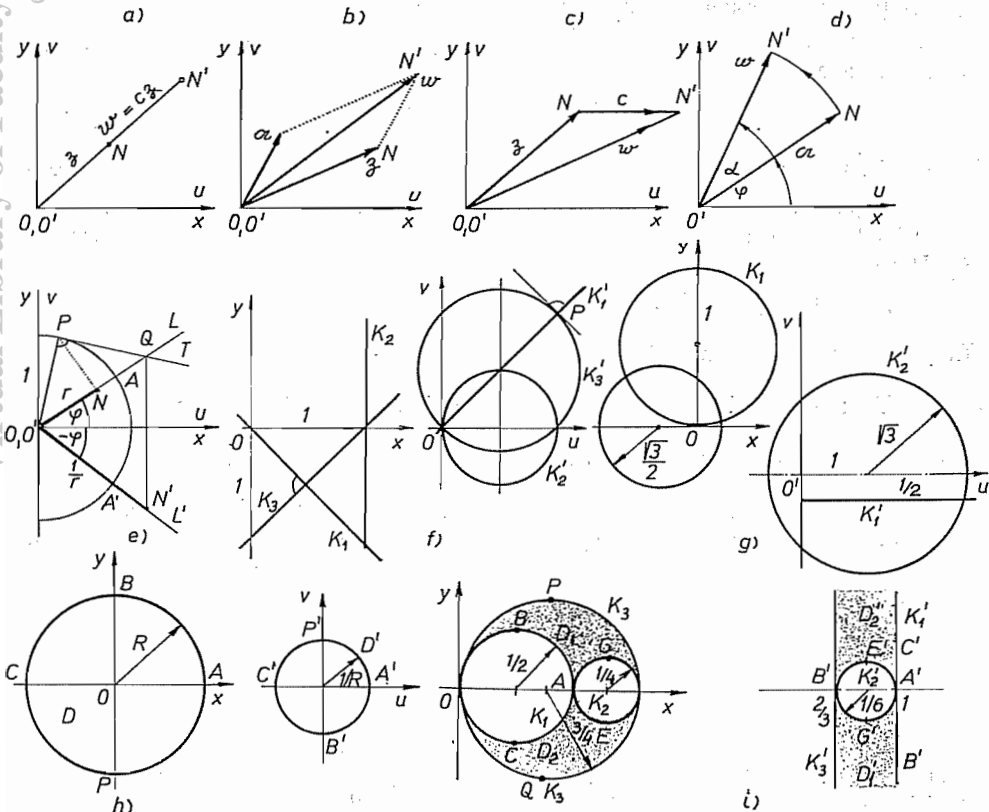
2. **Транслација** се врши функцијом

$$w = z + a = (x + \alpha) + i(y + \beta); \quad w = z + c = (x + c) + iy \quad (2.29)$$

и представља у првом случају померање у правцу вектора $a = \alpha + i\beta$ (слика 2.7. б) односно у правцу $+Ox$ -осе (слика 2.7. с).

На пример, $w = (6+8i) + (2-2i) = 8+6i$; $|z| = 10$; $|w| = 10$;

$$w = (9+12i) + 7 = 16+12i; \quad |z| = 15; \quad |w| = 20.$$



Слика 2.7. — Примери основних конформних пресликавања

3. Чиста ротација се врши функцијом

$$w = e^{i\alpha} z = e^{i\alpha} |z| e^{i\varphi} = r e^{i(\varphi+\alpha)} = r e^{i\theta}; \quad \alpha = |1| = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad (2.30)$$

где је α комплексни број јединичног модула. Потег остаје непромењен (r) али му се угао φ повећава за угао α , те је ротација чиста око центра O' (слика 2.7. д). Ротација је директна (када је $\alpha > 0$) или индиректна ($\alpha < 0$). Када је $\alpha = e^{i\pi/2}$ ротација је у директном смеру за 90° .

На пример, $w = (4+3i) \cdot e^{i\pi/6} = [(4\sqrt{3}-3) + i(3\sqrt{3}+4)]/2$; $|w| = |z| = 5$.

4. Инверзија се врши функцијом

$$w = 1/\bar{z} = e^{-i\varphi}/r = (x-iy)/r^2; \quad r^2 = x^2 + y^2; \quad u = x/r^2; \quad v = -y/r^2, \quad (1.31)$$

па како је $w' = -1/\bar{z}^2$ то је пресликавање конформно изузев у тачки $z=0$. Реципрочна вредност потега r може се одредити на овај начин. Око тачке O опише се јединични круг ($R=1$), па се из тачке $N(\frac{2}{3})$ повуче управна која сече тај у круг у тачки P (слика 2.7. е). Тангента повучена из P на круг сече праву ON у тачки Q , а она пресликана преко реалне осе даје тачку $N'(1/\frac{2}{3})$. Пошто је троугао OPQ правоугли то је катета OP средња геометријска пропорционала хипотенузе OQ и оближњег одсечка $ON=r$, то је $OP^2 = 1 = OQ \cdot ON$, па је $OQ = 1/r$. Јединични круг се пресликао у јединични круг; тачка A у тачку A' , а права L у праву L' .

Пошто су $u = x/r^2$; $v = -y/r^2$; $r^2 = x^2 + y^2$, то је $u^2 + v^2 = 1/r^2$, па је једначина праве

$$f(x, y) = Ax + By + C = B(u^2 + v^2) + Au - Bv = 0. \quad (1.32)$$

Права која не пролази кроз координатни почетак прескакава се у круг.

На пример, $x+y=u-v=0$; $x-1=[u-(1/2)]^2+v^2=(1/2)^2$; $x-y-1=[u-(1/2)]^2+[v-(1/2)]^2=(\sqrt{2}/2)^2$ (слика 1.7. ф). Праве K_1 и K_2 су управне, па се права K'_1 и круг K'_2 секу под правим углом.

Једначина круга биће

$$f(x, y) = A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = D(u^2 + v^2) + Bu - Cv + A = 0, \\ p = -B/2A; \quad q = -C/2A; \quad R^2 = (B^2 + C^2 - 4AD)/4A^2; \quad B^2 + C^2 - 4AD > 0; \quad (2.33)$$

$$p' = -B/2D; \quad q' = C/2D; \quad p' = Ap/D; \quad q' = -Aq/D; \quad R'^2 = (AR/D)^2.$$

Када су $A \neq 0$, $D \neq 0$ круг се пресликава у круг; ако је $A = 0$, а $D \neq 0$ права се пресликава у круг који пролази кроз почетак O' ; буде ли $A \neq 0$, а $D = 0$ онда се круг пресликава у праву.

На пример, $x^2 + y^2 - 2y = 2v + 1 = 0$; $v = -1/2$; $2(x^2 + y^2) + 2x - 1 = u^2 + v^2 - 2u - 2 = 0$, (слика 1.7. г).

Овом се функцијом област D у $[z]$ -равни пресликава у област D' у $[w]$ -равни.

На пример, унутрашњост круга $|z| < R$ пресликава се у област изван круга полупречника $R' = |w| = 1/R$ (слика 2.7. h). Круг K_1 једначине $x^2 + y^2 - x = 0$ пресликава се у праву $u=1$; круг K_2 , $2(x^2 + y^2) - 5x + 3 = 3(u^2 + v^2) - 5u + 2 = 0$, пресликава се у круг K'_2 где су $p' = 5/6$; $q' = 0$; $R' = 1/6$; а круг K_3 , $2(x^2 + y^2) - 3x = 0$ у праву $u=2/3$. Област D_1 пресликава се у област D'_1 , а D_2 у D'_2 (слика 2.7. i).

5. Узастойне *транформације* су сложене трансформације, па се могу разложити на основне трансформације. Ако функција $w_1 = g(z)$ пресликава област D из $[z]$ -равни у област D_1 у $[w_1]$ -равни, а функција $w = h(w_1)$ преслика област D_1 из $[w_1]$ -равни у област D' у $[w]$ -равни, онда је $w = h[g(z)] = f(z)$.

6. *Линеарна трансформација* се врши функцијом

$$w = f(z) = a z + b = w_2 + b; w_1 = a z; w_2 = w_1 e^{i\alpha}; a = |a|, \quad (2.34)$$

па се трансформација састоји из хомотетије, коефицијента a са центром у O' , ротације, око тог центра за угао α , и translације у правцу вектора b .

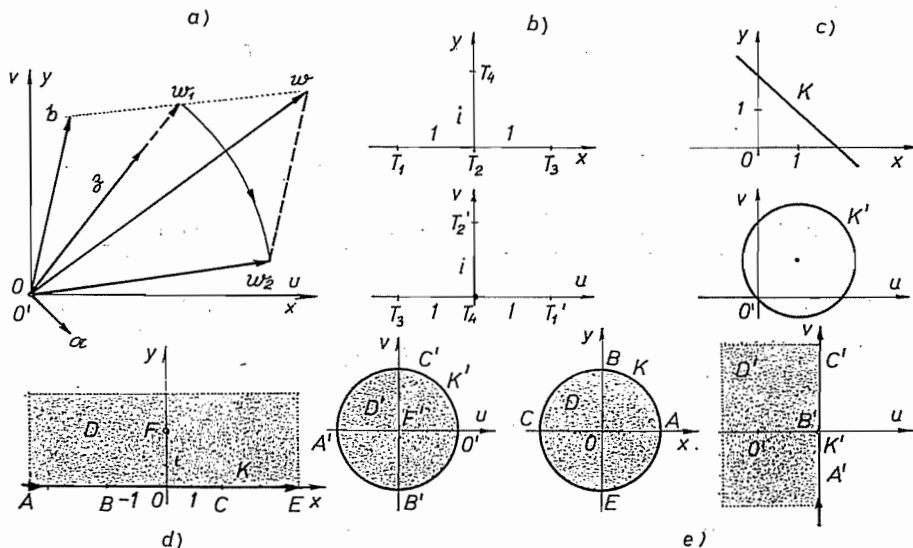
На пример, $w = (1-i)z = (3+4i) + (1+5i) = 8+6i; a = \sqrt{2}; |z| = 5; \alpha = -45^\circ; |w| = 10$, (слика 2.8. а).

7. *Билinearна (разломљена, хомографска или Мобјус-ова) трансформација* се врши функцијом

$$w = f(z) = \frac{a z + b}{c z + d} = w_3 + \mathfrak{A}; w_1 = z + \mathfrak{C}; w_2 = 1/w_1; w_3 = \mathfrak{B} w_2; \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \quad (2.35)$$

где су a, b, c, d комплексне константе, $\Delta \neq 0$ детерминанта трансформације и $\mathfrak{A} = a/c; \mathfrak{B} = -(ad - bc)/c^2; \mathfrak{C} = d/c$ су такође комплексне константе. Када је $\Delta = 0$ тада је $w = a/c = \mathfrak{A} = \text{const}$. Ово се пресликавање састоји из две translације, хомотетије, ротације и инверзије. Пошто је $w' = \Delta / (c z + d)^2$, то је за $\Delta \neq 0$ извод одређен у свима тачкама осим у тачкама $-d/c$ и ∞ . Обично се узима да је $c \neq 0$, јер се за $c = 0$ трансформација своди на линеарну (случај 6).

На пример, $w = (z-i)/(iz-1)$, $\Delta = -2$, пресликава тачке $T_1(-1; 0); T_2(0; 0)$ и $T_3(1; 0)$ у тачке $w_1=1; w_2=i; w_3=-1$, (слика 2.8. б).



Слика 2.8. — Примери сложених конформних пресликавања

Двојни (анхармонијски) однос остаје при овој трансформацији инваријантан, па је

$$(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) = (w_1, w_2, w_3, w_4) = \frac{\zeta_3 - \zeta_1}{\zeta_3 - \zeta_2} \cdot \frac{\zeta_4 - \zeta_1}{\zeta_4 - \zeta_2} = \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} \cdot \frac{w_4 - w_1}{w_4 - w_2}, \quad (2.36)$$

те када се познају три тачке ζ_r и њихове слике w_r ($r=1, 2, 3$) може се за ма коју четврту тачку ζ_4 одредити слика w_4 .

На пример, ако се у предњем примеру узме четврта тачка $T_4(0; 1)$ онда је $w_4=0$, па је двојни однос $1+i$.

Фиксне тачке се одређују из услова да је $w=\zeta$, то јест из квадратне једначине $\zeta = \{(a-b) \pm [(a-b)^2 + 4bc]^{1/2}\} / 2c$. Када је $w=f(\zeta)$ па је $\zeta=f(w)$ тада се каже да је трансформација у инволуцији.

На пример, за $w=(4\zeta+3)/(\zeta+2)$ биће $\zeta^2-2\zeta-3=0$, па су функције тачке $\zeta_i=3; -1$. За $w=(\zeta-2)/(2\zeta-1)$ биће $\zeta=(w-2)/(2w-1)$; (инволуција).

Код ове трансформације, као и код инверзије, праве и кругови се пресликавају у праве (кругове) или у кругове (праве). Једначине праве и круга, с обзиром на (2.4), изражавају се помоћу коњугованих координата овако:

$$Ax + By + C = \bar{A}\bar{\zeta} + A\zeta + C = 0; \quad \bar{A} = (A - Bi)/2; \quad \bar{A} = (A + Bi)/2; \quad (2.37)$$

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = A\zeta\bar{\zeta} + B\zeta + \bar{B}\bar{\zeta} + D = 0; \quad (2.38)$$

$$\bar{B} = (B - Ci)/2; \quad \bar{B} = B + Ci/2$$

На пример, права $x+y-1=0$ помоћу $w=(\zeta-1)/(\zeta+1)$, пошто су $\zeta=(1+w)/(1-w)$; $\bar{A}=(1-i)/2$; $A=(1+i)/2$, пресликава се у круг $u^2+v^2-u-v=0$ који пролази кроз координатни почетак O' , (слика 2.8.с).

Круг $x^2+y^2-2x-3=\zeta\bar{\zeta}-\zeta-\bar{\zeta}-3=0$, при $v=(4\zeta+3)/(\zeta+2)$, пролази кроз фиксне тачке 3 и -1 и пресликава се у исти круг $w\bar{w}-w-\bar{w}-3=0$ који пролази кроз фиксне тачке.

Функција $w=(\zeta-a)/(\bar{a}\zeta-1)$, где је $|a| \neq 1$, $\Delta=(a\bar{a}-1) \neq 0$, је у инволуцији, јер је $\zeta=(w-a)/(\bar{a}w-1)$, пресликава јединични круг у самог себе, $\zeta\bar{\zeta}-1=w\bar{w}-1=0$.

Функција $w=\alpha(\zeta-b)/(\bar{b}\zeta-1)$, $\Delta=\alpha(\bar{b}\bar{b}-1) \neq 0$; $|b| \neq 1$, због тога што су $\zeta=(w-\alpha\bar{b})/(\bar{b}w-\alpha)$; $\bar{\zeta}=(\bar{w}-\alpha\bar{b})/(\bar{b}\bar{w}-\alpha)$, пресликава једначини круг $\zeta\bar{\zeta}-1=0$ у круг $w\bar{w}-\alpha\bar{a}=0$.

Овом се трансформацијом могу пресликавати и области једна на другу.

На пример, функцијом $w=(i-\zeta)/(i+\zeta)$ пресликава горњу полураван $|w| \leq 1$, јер је $\zeta=x+iy=[2v+i(1-u^2-v^2)]/[(1+u)^2+v^2]$, па услов $y \geq 0$ даје $1-u^2-v^2 \geq 0$, те је $u^2+v^2 \leq 1$, (слика 2.8.д).

Функција $w=(\zeta-i)/(\zeta+i)=u+iv=[(x^2+y^2-1)-2ix]/[x^2+(y+1)^2]$ пресликава јединични круг $\zeta\bar{\zeta}-1=0$ у $w+\bar{w}=2u=0$, тј. у имагиналну осу ($u=0$) јер је $\zeta=(1+w)/(1-w)$, а унутрашњост кругу у део $|w|$ -равни лево од имагинарне осе, пошто је $x^2+y^2-1=0$, па је $u=0$ (слика 2.8.е).

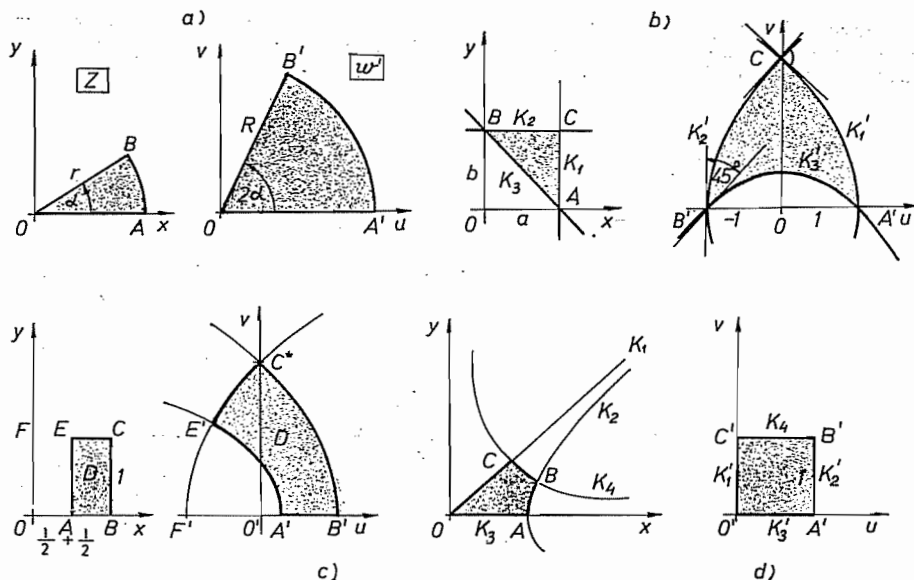
8. Пресликавање појенцијалном функцијом $w=\zeta^n$, $n \in \mathbf{N}$. — За $n=2$ биће:

$$w=\zeta^2=(x+iy)^2=u+iv=r^2 e^{i2\varphi} R e^{i\theta}, \quad u=x^2-y^2; \quad v=2xy; \quad R=r^2; \quad \theta=2\varphi. \quad (1.39)$$

због $w'=2\zeta$ оно је конформно у свима тачкама осим $\zeta=0$. Тачка $[\zeta]$ -равни пресликава се у тачку модула $R=|\zeta|^2=r^2$, аргумента $\theta=2\varphi$. Према томе се кружни исечак полупречника r , средишњег угла α , пресликава у кружни

исечак полупречника $R = r^2$ и средишњег угла 2α , где је $0 \leq \alpha \leq \pi$, (слика 2.9. а). Права $x = a$ прсликава се у параболу $u = a^2 - (v/2a)^2$ са теменом у $T(a^2; 0)$ која је реална за $u \leq a^2$. Права $y = b$ прсликава се у параболу $u = (v/2b)^2 - b^2$ са теменом у $(-b^2; 0)$ управну на праву (слика 2.9. б).

На пример, права $x + y = 1$ прсликава се у параболу $u^2 + 2v - 1 = 0$, (слика 2.9. б).



Слика 2.9. — Прсликавање функцијом $w = z^2$

Права $u = a$ равни $[w]$ прсликава се у равнострану хиперболу $x^2 - y^2 = u = a$ чија се оса симетрије Ox -оса. Права $v = b$ прсликава се такође у равнострану хиперболу $xu = v/2 = b/2$ којој су координатне осе триедра Oxy асимптоте (слика 2.9. с).

Правоугаоник у $[z]$ -равни прсликава се у $[w]$ -равни у криволинијски правоугаоник омеђен параболама (слика 2.9. с), а правоугаоник у $[w]$ -равни у криволинијски правоугаоник омеђен хиперболама (слика 2.9. д).

Функција

$$w = z^n = r^n e^{in\varphi} = R e^{i\theta}; \quad n \in \mathbf{N} \quad (2.40)$$

прсликава лук $0 < \varphi = 2\pi/n$ круга $|z| = r$ на део лука круга $|w| = r^n = R$, а одговарајући исечак на одговарајућу унутрашњу област круга $|w| = R$, а скуп полуправих $\varphi = \alpha$ на скуп полуправих $\theta = n\alpha$.

Функција

$$w = \sqrt[n]{z} = z^{1/n} = r^{1/n} e^{i\varphi/n} = R e^{i\theta}; \quad R = r^{1/n}; \quad \theta = \varphi/n \quad (2.41)$$

прсликава круг $|z| = r$ на лук $0 < (\varphi/n) < 2\pi/n$ круга $|w| = R = \sqrt[n]{r}$.

9. Функцијом

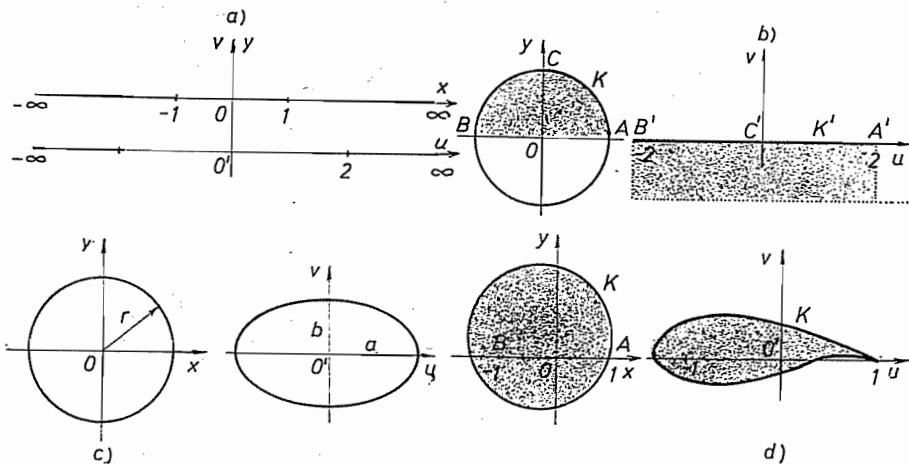
$$w = z + z^{-1} = u + iv; \quad u = x + [x/(x^2 + y^2)]; \quad v = y - [y/(x^2 + y^2)] \quad (2.42)$$

део Ox -осе од $-\infty$ до 0 прсликава се на део $-O'u$ -осе од $-\infty$ до -2 , а део $+Ox$ -осе од 0 до ∞ на део $O'u$ -осе од 2 до ∞ , (слика 2.10. а).

Јединични круг $|\zeta|=1$ пресликува се на сегмент $O'u$ -осе од -2 до 2 . Тачке унутрашњости горње половине круга пресликавају се у тачке доње половине $[w]$ -равни, (слика 2.10. б).

Пошто је $w = r e^{i\varphi} + r^{-1} e^{-i\varphi}$; $u = a \cos \varphi$; $v = b \sin \varphi$, то се централни круг полупречника $r \neq 1$ пресликава у централну елипсу полуоса $a = r + (1/r)$; $b = r - (1/r)$; (слика 2.10. с).

Функција $w = (\zeta + \zeta^{-1})/2$ назива се функцијом Жуковског. Помоћу ње се круг са центром у O који пролази кроз тачку $\zeta=1$, а обухвата тачку $\zeta=-1$ пресликава на аеродинамички профил („airfoil“) Жуковској (слика 2.10. д).

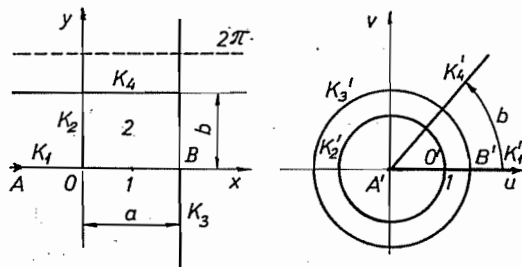


Слика 2.10. — Пресликавање функцијом $w = \zeta + (1/\zeta)$. Трансформација.

10. Пресликавање експоненцијалном функцијом

$$w = e^z = e^{(x+iy)} = e^x e^{iy} = R e^{i\theta}; \quad R = e^x; \quad \theta = y; \quad u = e^x \cos y; \quad v = e^x \sin y \quad (2.43)$$

је конформно пошто је $w' = e^z$. Ox -оса пресликава се на Ou -осу, и то негативни део ($x < 0$) на део $0 < u < 1$ и позитивни део ($x \geq 0$) на део $u \geq 1$ (слика 2.11). Део Oy -осе за који је $0 \leq y < 2\pi$ пресликава се на јединични круг $R = 1$. Права $x = a$ пресликава се на круг полупречника $R = e^a$, а права $y = b$ на полуправу $v = u \operatorname{tg} b$. Када ζ пређе праву $y = 2\pi$ од $-\infty < x < \infty$ полуправа $0 < R < \infty$ обиђе целу $[w]$ -раван, па се пруга ширине 2π паралелна Ox -оси пресликава на целу $[w]$ -раван.



Слика 2.11. — Пресликавање функцијом $w = e^z$

elibrary.matf.bg.ac.rs

11. Пресликавање кардиоде и астероиде на јединични круг. — Оно се врши помоћу функција

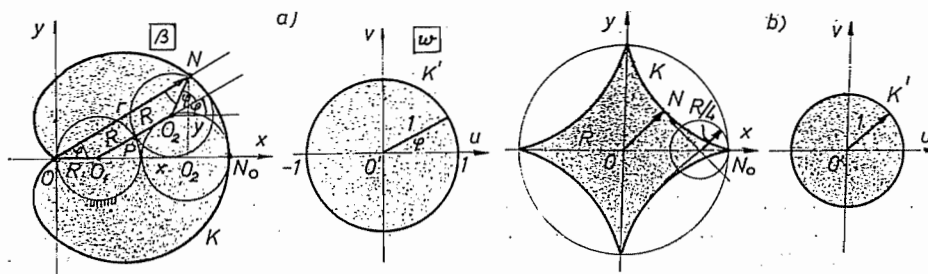
$$z = R(1+w)^2; \quad \bar{z} = \frac{R}{4} \left(3w + \frac{1}{w^3} \right); \quad |w| = 1; \quad \theta = \varphi, \quad (2.44)$$

где је код кардиоде (слика 2.12. а) R полупречник покретног и непокретног круга, а код астероиде је R полупречник непокретног круга, док је покретног $R/4$ (слика 2.12.б).

Параметарске једначине ових кривих су:

а) $x = R(1 + 2 \cos \varphi + \cos 2 \varphi); y = R(2 \sin \varphi + \sin 2 \varphi); \varphi = \theta;$

б) $x = R(3 \cos \varphi + \cos 3 \varphi)/4 = R \cos^3 \varphi; y = R(3 \sin \varphi - \sin 3 \varphi)/4 = R \sin^3 \varphi.$



Слика 2.12. — Пресликавање кардиоиде и астероиде на јединични круг

Д. 2.9. Интеграл функције комплексне променљиве. — Нека је $w = f(z) = u + iv$ функција комплексне променљиве $z = x + iy$ дефинисана у затвореној области D омеђеном простом затвореном кривом K . Када је функција $f(z)$ задата непрекидна функција дуж оријентисаног простог и глатког (или део по цео глатког) лука \widehat{AB} , $z \in [a, b]$, тада су и функције $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ непрекидне функције од x и y дуж тог лука \widehat{AB} . Интеграл функције $f(z)$ дуж лука \widehat{AB} је криволинујски интеграл

$$J = \int_{\widehat{AB}} f(z) dz = \int_{\widehat{AB}} (u + iv)(dx + i dy) = \int_{\widehat{AB}} (u dx - v dy) + i \int_{\widehat{AB}} (v dx + u dy), \quad (2.45)$$

па је комплексна комбинација два реална интеграла дуж истог лука \widehat{AB} .

Ако су $x = x(s)$ и $y = y(s)$ параметарске једначине лука \widehat{AB} , где $s \in [s_0, s_1]$, онда је и $z = x(s) + iy(s) = z(s)$, па је $z'(s) = dz/ds$, те интеграл (2.45) постаје

$$J = \int_{\widehat{AB}} f(z) dz = \int_{s_0}^{s_1} f[z(s)] \cdot z'(s) ds.$$

Он је комплексни интеграл реалне променљиве s .

Пошто је функција $f(z)$ непрекидна на луку AB њен је модул ограничен $|f(z)| \leq M$, па је модул интеграла

$$|J| = \left| \int_{\widehat{AB}} f(z) dz \right| \leq Ml, \quad (2.47)$$

где је l дужина лука \widehat{AB} .

На пример, интеграли узети дуж јединичног централног круга износи

$$J = \int_K z^n dz = i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} d\varphi = \frac{1}{n+1} \cdot e^{i(n+1)\varphi} \Big|_0^{2\pi} = 0; \quad n \in \mathbf{N}; \quad n \neq 1;$$

$$J = \int_K \frac{1}{z} dz = i \int_0^{2\pi} d\varphi = i\varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\pi i.$$

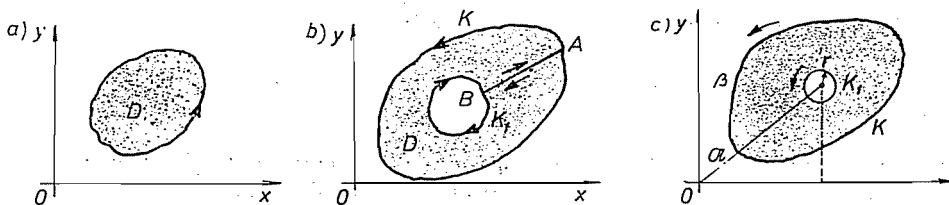
Када је функција $f(z)$ регуларна (холоморфна) функције у једноструко повезаној области (D) омеђеном глатком контуром (K), тада је криволинијски интеграл узет по контури (слика 2.13.а) једнак нули

$$\begin{aligned} \oint_K f(z) dz &= \oint_K [u dx - v dy] + i \oint_K (v dx + u dy) = \\ &= \iint_{(D)} \left[i \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx dy = 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

када се примени Грен-ова формула*, пошто су задовољени CR-услови (2.8). Ова теорема је позната под именом Cauchy-Goursat-ова *интегрална теорема*. Ова се теорема може проширити и на вишеструко повезане области. Зарезом AB двоструко повезана област може се поделити на две једноструко повезане области (слика 2.13. b), па је

$$J = \int_{+K} + \int_{AB} + \int_{-K_1} + \int_{-AB} + \int_{+K} + \int_{-K_1} = 0; \quad \oint_K f(z) dz = \oint_{K_1} f(z) dz.$$

Дакле, ако је функција $f(z)$ дефинисана у области $K \cup \text{int } K$ и регуларна у $n+1$ -струко повезаној области онда је интеграл по спољашњој контури



Слика 2.13. — Cauchy-Goursatова теорема. Cauchy-јев интеграл

(K) једнак збиру интеграла исте функције $f(z)$ дуж свих унутрашњих кривих (K_n) ако се сви интеграли узимају у истом смеру:

$$\oint_K f(z) dz = \sum_{n=1}^n \oint_{K_n} f(z) dz. \quad (2.49)$$

* $\oint_K (P dx + Q dy) = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$; $P = P(x, y)$; $Q = Q(x, y)$

Нека је z_0 нека одређена тачка области D , а z произвољна тачка, онда је функција

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = U + iV; \quad U = \int_{x_0, y_0}^{x, y} u dx - v dy; \quad V = \int_{x_0, y_0}^{x, y} v dx + u dy,$$

зависна само од z , па пошто су U и V тотални диференцијали то следи $(\partial U/\partial x) = u = (\partial V/\partial y)$; $\partial U/\partial y = -v = -(\partial V/\partial x)$, те су испуњени CR-услови (2.8.) Зашто је $F(z)$ регуларна аналитичка функција од z са одређеним изводом $F'(z) = (\partial U/\partial x) + i(\partial V/\partial x) = u + iv = f(z)$, једнаким функцији $f(z)$ под знаком интеграла. Стога се функција $F(z)$, односно $F(z) + C$, где је C константа, назива *неодређени интеграл* или *примитивна функција* функције $f(z)$:

$$F(z) + C = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta. \quad (2.50)$$

Нека је $f(z)$ регуларна аналитичка функција унутар једноструко повезане области D омеђене контуром K и на сакој контури, онда се вредност функције $f(a)$ у некој тачки $z = a$ у унутрашњости области D може одредити помоћу Cauchy-јевог *интеграла*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z-a} dz. \quad (2.51)$$

Доказ се изводи на овај начин. Око тачке $z = a$ опише се круг K_1 малог полупречника $r = |z - a|$, (слика 2.13.с), тада је, према (2.49).

$$\oint_{K_1} \frac{f(z)}{z-a} dz = \oint_{K_1} \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a) \oint_{K_1} \frac{dz}{z-a} + \oint_{K_1} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} dz = J_1 + J_2.$$

На кругу K_1 је $z - a = r e^{i\varphi}$, па је $dz = ir e^{i\varphi} d\varphi$, те је $J_1 = 2\pi i$. Пошто је $f(z)$ непрекидна функција у $z = a$, то за мали позитивни број ε такав да је $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$ постоји и број $\delta = r$ такав да је $|z - a| \leq \delta$, па је

$$|J_2| \leq \oint_{K_1} \frac{|f(z) - f(a)|}{|z - a|} |dz| < \frac{\varepsilon}{\delta} (2\pi\delta); \quad J_2 \rightarrow 0 \text{ када } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Из овог интеграла, интегралењем под знаком интеграла добијају се вредности извода функције $f(z)$ у тачки $z = a = \zeta$:

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz; \dots; \quad f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_K \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz. \quad (2.52)$$

Помоћу Cauchy-јевог интеграла одређује се потпуно регуларна аналитичка функција $f(z)$ у свакој тачки области (D) помоћу вредности те функције на њеној контури (K) , при чему је интегралење извршено у позитивном смислу обилажења по контури. Када је $f(z)$ регуларна функција у области (D) , тада, према (2.52), постоје и њени изводи који су такође регуларне функције у области (D) ; а може се сматрати променљивом; $a = \zeta$.

$$\text{Примери.} \quad - \int e^{2z} dz = \frac{1}{2} e^{2z} + C; \quad \int z^2 e^{-z} dz = -e^{-z} (z^2 + 2z + 2) + C;$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 z dz = \frac{1}{4} \pi; \quad \int_{\pi i}^{2\pi i} e^{3z} dz = \frac{1}{3} [e^{3z}]_{\pi i}^{2\pi i} = \frac{2}{3};$$

$$J = \oint \frac{e^{iz}}{z^3} dz; \quad K = |z| = 2; \quad \alpha = 0; \quad n = 2; \quad f''(0) = -1 = \frac{2!}{2\pi i} J; \quad J = -\pi i;$$

$$J = \oint_K \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz; \quad K = |z| = 3; \quad \alpha = -1; \quad n = 3; \quad f''' = 8e^{2z}; \quad f'''(-1) = 8e^{-2};$$

$$f'''(-1) \cdot 2\pi i / 3! = 8\pi i e^{-2} / 3 = J.$$

D. 2.10. Разни облици Грен-ове формуле. Грен-ове идентичности. — Нека је област D у Ox -равни једноструко повезана и омеђена простом затвореном глатком кривом (K) које праве паралелне Oy - и Ox -оси секу највише у две тачке (слика 2.14. а), па су једначине лукова: \widehat{ACB} , $y = f_1(x)$; \widehat{ADB} , $y = f_2(x)$; \widehat{CAD} , $x = g_1(y)$; \widehat{CBD} , $x = g_2(y)$. Нека су у тој области задате једнозначне непрекидне функције $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са непрекидним изводима $\partial P/\partial y$ и $\partial Q/\partial x$, онда ће бити:

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{f_1}^{f_2} \frac{\partial P}{\partial y} dy = - \left[\int_a^b P(x, f_1) dx + \int_b^a P(x, f_2) dx \right],$$

$$\iint_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_c^d dy \int_{g_1}^{g_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \left[\int_c^d Q(g_2, y) dy + \int_d^c Q(g_1, y) dy \right],$$

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \oint_K P dx; \quad \iint_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_K Q dy. \quad (2.53)$$

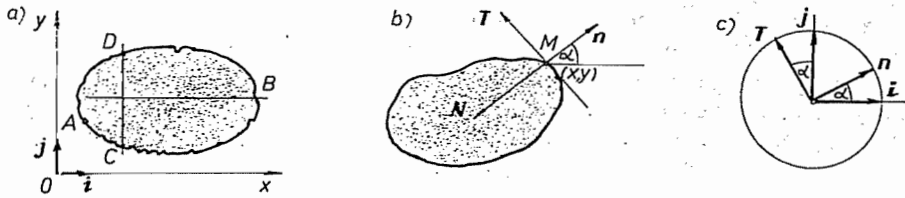
Одавде следи Грен-ова формула

$$\oint_K (P dx + Q dy) = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (2.54)$$

којом се двоструки интеграл у области (D) преводи у криволинијски интеграл линеарне диференцијалне форме $P dx + Q dy$ по контури (K) у позитивном смеру обилажења.

Нека свакој тачки (x, y) области D одговара вектор $V = Qi - Pj = v_x i + v_y j$, онда је дивергенција тог вектора $\operatorname{div} V = (\partial v_x / \partial x) + (\partial v_y / \partial y) = (\partial Q / \partial x) - (\partial P / \partial y)$. У тачки M на контури узмимо тангенту (T) у смеру

пораста лука (ds) и нормалу усмерену уиоље ($n = -\vec{N}$) која гради са $+Ox$ -осом угао α (слика 2.14. b), онда су ортови тангенте и нормале (слика 2.14. c):



Слика 2.14. — Разни облици Грeen-ове формуле

$$\vec{T} = -i \sin \alpha + j \cos \alpha; \quad \vec{n} = i \cos \alpha + j \sin \alpha; \quad dx/ds = -\sin \alpha; \quad dy/ds = \cos \alpha, \quad (2.55)$$

па је пројекција вектора v на правац *сиољашње* нормале

$$v_n = (v, \vec{n}) = v_x \cos \alpha + v_y \sin \alpha = Q \cos \alpha - P \sin \alpha = (Q dy + P dx)/ds.$$

Стога се Грeen-ова формула може написати у облику

$$\iint_{(D)} \operatorname{div} v \, dx \, dy = \oint_K v_n \, ds = \oint_K (v, \vec{n}) \, ds, \quad (2.56)$$

који је познат као *теорема дивергенције у равни*.

Обратно, може се свакој тачки (x, y) у области D придружити вектор $w = P i + Q j = w_x i + w_y j$, па је $|\operatorname{rot} w| = (\partial w_y / \partial x) - (\partial w_x / \partial y) = (\partial Q / \partial x) - (\partial P / \partial y)$.

Пројекција вектора w на правац тангенте је

$$w_T = (w, \vec{T}) = -w_x \sin \alpha + w_y \cos \alpha = (P dx + Q dy)/ds,$$

па се Грeen-ова формула може написати у облику

$$\iint_{(D)} |\operatorname{rot} w| \, dx \, dy = \oint_K w_T \, ds = \oint_K (w, \vec{T}) \, ds \quad (2.57)$$

који је познат као *теорема ројора векторске функције у равни*.

Када се уведу коњуговане координате, онда из (2.48), с обзиром на (2.14), следи

$$\oint_K f(z) \, dz = \oint_K w \, dz = i \iint_{(D)} \operatorname{grad} w \, dA = 2i \iint_{(D)} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \, dA, \quad (2.58)$$

где је dA површински елемент области (D) .

Ако се према (2.4) смене x и y коњугованим координатама, онда Грeen-ова формула (2.54) постаје

$$\oint_K \mathfrak{F}(z, \bar{z}) \, dz + \mathfrak{Q}(z, \bar{z}) \, d\bar{z} = 2i \iint_{(D)} \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial z} \right) \, dA. \quad (2.59)$$

На пример, интеграл $J = \oint_{\mathfrak{z}} \bar{z} dz$ по кругу $|\mathfrak{z}-2|=3$ износи $J = 2i \iint (\partial \mathfrak{z} / \partial \bar{\mathfrak{z}}) dA = 2i \iint dA = 18\pi i$.

Извод функције $U(x, y)$ по спољашњој нормали (n) биће:

$$\frac{dU}{dn} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \sin \alpha = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dx}{ds} \quad (2.60)$$

Нека су $u(x, y)$ и $v(x, y)$ две једнозначне непрекидне функције дефинисане у области (D) и нека имају у њој непрекидне парцијалне изводе првог и другог реда, онда се када се у Грен-овој формули (2.54) стави $P = u(\partial v / \partial y)$, и $Q = -u(\partial v / \partial x)$, добија:

$$\oint_K P dx + Q dy = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{(D)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(-u \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \right.$$

односно, према (2.60), израз:

$$\left. - \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx dy = - \iint_{(D)} \left[u \Delta v + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy,$$

$$\iint_{(D)} \left[u \Delta v + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy = \oint_K u \frac{dv}{dn} ds, \quad (2.61)$$

који представља прву Грен-ову *идентичност**.

Заменом функција $u(x, y)$ и $v(x, y)$ следи

$$\iint_{(D)} \left[v \Delta u + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] dx dy = \oint_K v \frac{du}{dn} ds,$$

па се одузимањем овог израза од (2.61) добија израз

$$\iint_{(D)} (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \oint_K \left[u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} \right] ds \quad (2.62)$$

који представља другу Грен-ову *идентичност*.

D. 2.11. Редови. — *Појенцијални ред* по $(\mathfrak{z}-a)$ облика је

$$c_0 + c_1 (\mathfrak{z}-a) + c_2 (\mathfrak{z}-a)^2 + \dots + c_n (\mathfrak{z}-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\mathfrak{z}-a)^n, \quad (2.63)$$

где су a и коефицијенти c_n комплексне константе, а \mathfrak{z} комплексна променљива. За $a=0$ добија се специјални случај овог реда.

* $\partial v / \partial x = -Q/u$; $\partial v / \partial y = P/u$;

$$\frac{dv}{dn} = \frac{1}{u} (-Q \cos \alpha + P \sin \alpha) = -\frac{1}{u} \left(\frac{P dx}{ds} + Q \frac{dy}{ds} \right);$$

$$P dx + Q dy = -u \frac{dv}{dn} ds.$$

Ако ред (2.63) конвергира за $z = z_0 \neq a$ он апсолутно и униформно конвергира у кругу $|z - a| \leq \lambda |z_0 - a|$, где је $0 < \lambda < 1$. Реалан број $R \in [0, +\infty]$ такав да горњи ред конвергира за свако z за које је $|z - a| < R$, а дивергира за свако z за које је $|z - a| > R$ назива се *полупречник конвергенције* реда (2.63). Круг $|z - a| < R$ је *круг конвергенције* тог реда. Он је отворени круг јер за $|z - a| = R$ ред може да конвергира, али и не мора. Када је $R = 0$ ред конвергира само за $z = a$. Ако је K круг полупречника R са центром у $z = a$ тада ред (2.63) конвергира у свима тачкама унутар круга, а дивергира за све тачке изван круга (K). Међутим, он може али не мора да конвергира на кругу. Када је $R = \infty$ ред конвергира за све коначне вредности од z . Овај ред се може диференцирати и интегралити „*члан по члан*“ коначан број пута у кругу конвергенције, јер се тиме не мења полу-пречник конвергенције (R).

b) *Taylor-ov red*. — Свака функција $f(z)$ регуларна у тачки $z = a$ може се развити у јединствени Taylor-ов ред

$$f(z) = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1(z - a) + \mathfrak{A}_2(z - a)^2 + \dots + \mathfrak{A}_n(z - a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{A}_n(z - a)^n, \quad (2.64)$$

конвергентан у кругу (k) описаном око тачке a полупречником $R < |b - a|$, где је b сингуларитет функције $f(z)$ најближи тачки a . Према (2.52) коефицијенти Taylor-овог реда одређују се обрасцем

$$\mathfrak{A}_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_n \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad (2.65)$$

где је k круг полупречника $|z - a| = R$, а ζ тачка на том кругу (k).

c) *Mac-Laurin-ov red* је Taylor-ов ред за $a = 0$.

d) *Laurent-ov red*. — Нека су K_1 и K_2 концентрични кругови полупречника r_1 и r_2 описани око тачке $z = a$, и нека је функција $f(z)$ једнозначна и аналитичка на тим круговима и у прстену између њих, онда се она може развити у Laurent-ов ред конвергентан у том прстену облика

$$f(z) = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1(z - a) + \mathfrak{A}_2(z - a)^2 + \dots + \mathfrak{A}_n(z - a)^n + \dots + \frac{\mathfrak{B}_{-1}}{z - a} + \frac{\mathfrak{B}_{-2}}{(z - a)^2} + \dots + \frac{\mathfrak{B}_{-n}}{(z - a)^n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{A}_n(z - a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{B}_{-n}}{(z - a)^n}, \quad (2.66)$$

где је k центричан круг са првима у том прстену, $|\zeta - a| = r$, $r_1 < r_1 < r_2$. Део реда са коефицијентима \mathfrak{A}_n зове се *правилни (аналиитички) део реда*, а онај са коефицијентима \mathfrak{B}_{-n} је *главни део* Laurent-овог реда. Када су $\mathfrak{B}_{-n} = 0$ Laurent-ов ред се своди на Taylor-ов ред (2.64).

Када главни део реда има коначан број чланова и када је $\mathfrak{B}_n \neq 0$, то је тачка $z = a$ *поп n -тог реда*. За $n = 1$ поп је *прости* или првог реда. Када је тачка $z = a$ есенцијални сингуларитет функције $f(z)$, тада главни део реда (2.66) има бескрајно много чланова.

Ако је $f(z)$ регуларна функција у околини тачке $z = a$ и ако је $f(a) = 0$ онда је a *нула функције* $f(z)$, па се $f(z)$ може у околини те тачке развити у Taylor-ов ред (2.64). Ако су при том сви изводи $f^{(k)}(a) = 0$, од $k = 0$ до $k = n - 1$, онда се каже да је a нула n -ог реда $f(z)$. Када је $n = 1$ тада је нула *проста*.

Функција регуларна за све тачке коначне комплексне равни $[z]$ назива се *цела функција* ($e^z, \sin z, \cos z, \dots$). Она се може представити Taylor-овим редом са бескрајно великим полупречником конвергенције.

Функција $f(z)$ је мероморфна у тачки $z=a$ ако је ова тачка њена регуларна тачка или њен пол.

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)! z^{2n}}{2^n n!}; \quad \arcsin z = \sum_0^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}; \quad e^{z^2} = \sum_0^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$$

D. 2.12. Остатак функције (residium). — Нека је тачка $z=a$ пол n -ог реда функције $f(z)$, онда се $f(z)$ може у околини тачке $z=a$ представити Лаурент-овим редом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{A}_n (z-a)^n + \sum_{\nu=1}^n \frac{\mathfrak{B}_{-\nu}}{(z-a)^{\nu}} \quad (2.67)$$

Коефицијент \mathfrak{B}_{-1} назива се остатком (residium-ом) функције $f(z)$ за пол $z=a$ и пише се овако $\mathfrak{B}_{-1} = \text{Res } f(z)$ за $z=a$. Када се обе стране (2.67) помноже са $(z-a)^n$, тада се после $n-1$ узастопних диференцирања добија да је остатак одређен следећом граничном вредношћу

$$\mathfrak{B}_{-1} = \text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{n-1}} [(z-a)^n f(z)]. \quad (2.68)$$

Када је $z=a$ прости пол ($n=1$), тада ће остатак функција бити

$$\mathfrak{B}_{-1} = \text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow a} [(z-a) f(z)].$$

Ако је $z=a$ прости пол ($n=1$), а функција је облика $f(z) = P(z)/Q(z)$, стим да је $P(a) \neq 0$, онда је остатак

$$\mathfrak{B}_{-1} = \text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \left[P(z) \frac{z-a}{Q(z)} \right] = \frac{P(a)}{Q'(a)}; \quad P(a) \neq 0. \quad (2.70)$$

На пример, када је $P=4z+1$ и $Q(z)=z^2-z-2$, тада $f(z)$ има два проста пола 2 и -1 . па су, према (2.70), остаци 3 и 1, јер је $Q'=2z-1$.

Ако се око пола $z=a$ опише круг (k) таквог малог полупречника да не обухвата ниједну другу сингуларну тачку осим $z=a$, онда се интегралњем једнакости (2.67) дуж круга (k) у позитивном смеру добија

$$\oint_K f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{A}_n \oint_K (z-a)^n dz + \sum_{\nu=0}^n \oint_K \frac{\mathfrak{B}_{-\nu}}{(z-a)^{\nu}} dz = 2\pi i \text{Res } f(z). \quad (2.71)$$

пошто су, према (2.45), интеграли на десној страни једнакости

$$\oint_K (z-a)^{\nu} dz = 0; \quad (\nu \in \mathbf{Z}) \quad \oint_K \frac{dz}{(z-a)^{\nu}} = 0, \quad (\nu = 2, 3, \dots, n); \quad \oint_K \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

Ако је $f(z)$ регуларна аналитичка функција у једноструко повезаној области D омеђеном контуром (K) и ако има коначан број сингуларних тачака (a_1, a_2, \dots, a_s) па се око сваке сингуларне тачке опише круг (k_u) малог полупречника који обухвата само ту сингуларну тачку a_u , али тако да су сви ти кругови у области (D) и да један другог не додирују нити контуру (K), и када се зарезима оваква област претвори у једноструко повезану, онда се, према (2.49) и (2.71), добија да је

$$\oint_K f(z) dz = \sum_{u=1}^s \oint_{k_u} f(z) dz = 2\pi i \sum_{u=1}^s \text{Res } f(z). \quad (2.72)$$

Ово је израз *Cauchy-јеве теореме са осцицима*, према којој је интеграл функције $f(z)$ регуларне у свакој тачки једноструко повезане области (D) осим у коначном броју сингуларних тачака узет дуж затворене контуре (K) која обухвата све сингуларне тачке једнак збиру остатака функције у тим тачкама помноженом са $2\pi i$. Образац (2.72) омогућава да се израчуна комплексни интеграл по затвореној контури без интеграције, само тиме што се одреде остаци функције у сингуларним тачкама. Он се може применити и на многе *реалне интеграле*.

Примери. —

1.
$$\oint_{|z|=3} \frac{z^2-2z}{z^2+4} dz = 2\pi i [(i-1) - (i+1)] = -4\pi i;$$

$z^2+4=0$; полови $z = \pm 2i$; $Q' = 2z$; $\text{Res}[P(z)/Q'(z)]$; $i-1$; $-(1+i)$;

2.
$$\oint_K \frac{z}{(z^4-1)} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = -\frac{\pi i}{2}; K) (x-1)^2+y^2=3, R=\sqrt{3};$$

$z^4-1=(z^2-1)(z^2+1)=0$; $z_i = \pm 1; \pm i; -1 \notin K$;

$\text{Res} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \frac{z}{z^4-1} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{2z-1}{4z^3} \right] = \frac{1}{4}$; (l'Hospital);

$\text{Res} = \lim_{z \rightarrow i} \left[(z-i) \frac{z}{z^4-1} \right] = -\frac{1}{4}$; $\text{Res} = -\frac{1}{4}$; $\Sigma \text{Res} = -\frac{1}{4}$.

3.
$$J = \oint_K \frac{z}{(z^4-1)(z^2-1)} dz = \oint_K \frac{z}{(z^2-1)^2(z^2+1)} dz; K) (x-1)^2+y^2-3=0; R=\sqrt{3};$$

$z_i = \pm 1$ (другог реда), $\pm i$; $-1 \notin K$;

$\text{Res} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[(z-1)^2 \frac{z}{(z^2-1)^2(z^2+1)} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{(z+1)^2(z^2+1)} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-z(1+z+3z^2)}{(z+1)^3(z^2+1)^2} = \frac{-1}{8}$;

$\text{Res} = \lim_{z \rightarrow i} \left[(z-i) \frac{z}{(z^2-1)^2(z^2+1)} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{z}{(z^2-1)^2(z+i)} \right] = \frac{1}{8}$; $\text{Res} = \frac{1}{8}$; $\Sigma \text{Res} = \frac{1}{8}$;

$J = \frac{\pi i}{4}$.

4.
$$J = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{3-2\cos\varphi+\sin\varphi} = \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{(1-2i)z^2+6iz-(1+2i)}; z=e^{i\varphi}; \cos\varphi=\text{Ch } i\varphi=$$

$= \frac{z^2+1}{2z}$; $\sin\varphi = \frac{1}{i} \text{Sh } i\varphi = \frac{z^2-1}{2iz}$; $d\varphi = \frac{dz}{iz}$; полови $\frac{2-i}{5}$; $2-i \notin K$;

$\text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow \frac{2-i}{5}} \left[z - \frac{2-i}{5} \right] \cdot \frac{2}{(1-2i) \left[z - \frac{2-i}{5} \right] [z - (2-i)]} = \lim_{z \rightarrow \frac{2-i}{5}} \frac{2}{[1-2i][z - (2-i)]} = \frac{1}{2i}$

$J = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi$.

5.
$$D = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos x}{(5-3\sin x)} dx = 2i \oint_{|z|=1} \frac{(z+1)^2}{(3z^2-10iz-3)^2} dz = 2i \oint \frac{(z+1)^2 dz}{[(z-3i)(3z-i)]^2};$$

полови $z_i = i/3$; $3i \notin K$, (другог реда);

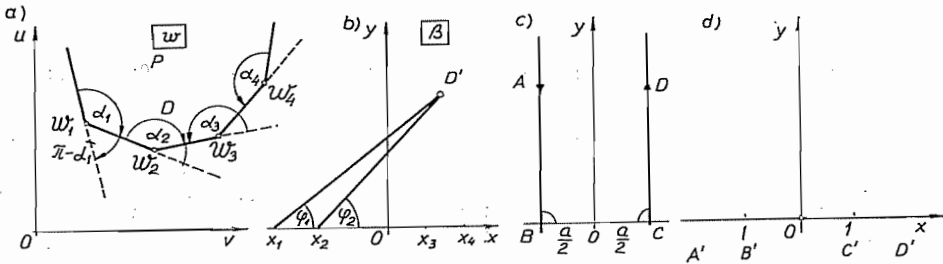
$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(z) &= \lim_{z \rightarrow i/3} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{9} (3z-i)^2 \frac{(z+1)^2}{(z-3i)^2 (3z-i)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow i/3} \left[\frac{-2(1+3i)}{9} \frac{z+1}{(z-3i)^3} \right] = \\ &= -\frac{5}{128}; \quad J = 2\pi i \left[2i \cdot \frac{-5}{128} \right] = \frac{-5}{32} \pi. \end{aligned}$$

D. 2.13. Schwarz-Christoffel-ова трансформација. — Теменима w_i полигона P (слика 2.15. а) равни $[w]$ одговарају унутрашњи углови α_i , односно спољашњи углови $\pi - \alpha_i$. Трансформација којом се унутрашњост (D) полигона (P) пресликава на горњу полураван (D') равни $[z]$, а сам полигон P на реалну осу (Ox), назива се Schwarz-Christoffel-овом *трансформацијом*

$$\frac{dw}{dz} = \mathfrak{U} (z-x_1)^{m_1} (z-x_2)^{m_2} \cdots (z-x_r)^{m_r} \cdots (z-x_n)^{m_n};$$

$$w = \mathfrak{U} \int \left[\prod_{r=1}^n (z-x_r)^{m_r} \right] dz + \mathfrak{B}; \quad m_r = \frac{\alpha_r}{\pi} - 1. \quad (2.73)$$

где су \mathfrak{U} и \mathfrak{B} комплексне константе. При томе може се уочити следеће: 1° ма које три од тачака x_i могу се изабрати произвољно, 2° константе \mathfrak{U} и \mathfrak{B} одређују величину, оријентацију и положај полигона (P). 3° z_e када



Слика 2.15. — Schwarz-Christoffel-ова трансформација

се једна тачка узме у бесконачности ($x_n = \infty$) тада се изрази (1.73) упрошћавају, јер тада нема последњег члана; 4° бескрајни отворени палогон може да се сматра граничним случајем затвореног полигона.

Из прве једначине (2.73) следи да је

$$\arg dw = \arg dz + \arg \mathfrak{U} + \sum_{r=1}^n m_r \arg (z-x_r), \quad m_r = (\alpha_r/\pi) - 1. \quad (2.74)$$

Како се z креће дуж Ox -осе (слика 2.15. б) слева ка тачки x_1 , тада се w' креће по страници полигона (P) ка темењу w_1 . При пролазу кроз x_1 је $\arg (z-x_1) = \varphi_1$ мења од π до 0 , пошто су сви остали чланови у (2.74) стални. Стога $\arg dw$ опада за $m_1 \pi = \alpha_1 - \pi$, односно расте за $\pi - \alpha_1$ у обратном смеру од кретања сатне казаљке, па се правац кроз теме w_1 заокреће за $\pi - \alpha_1$ и тачка w се сада креће дуж странице w_1, w_2 полигона (P). При пролазу z кроз x_2 , мењају се φ_1 и φ_2 од π до 0 , па се врши у $[w]$ -равни ново обртање за угао $\pi - \alpha_2$, и тако редом, што значи да када z' прелази реалну Ox -осу, тада w прелази полигон (P), и обратно.

На пример, тачке $ABCD$ пресликаћемо на реалну осу у тачке $A'B'C'D'$ (слика 2.15.c,d) тако што ћемо сматрати да су B и C темена троугла, а да је треће теме A (или D) у бескрајности, па пошто су $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$ то ће бити

$$\frac{dw}{dz} = \mathfrak{A} (z+1)^{-1/2} (z-1)^{-1/2} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{\mathfrak{A}'}{\sqrt{1-z^2}}; \quad w = \mathfrak{A}' \arcsin z + \mathfrak{B}.$$

Пошто су

$$z=1; \quad w = \frac{\alpha}{2} = \mathfrak{A}' \arcsin 1 + \mathfrak{B}; \quad z=-1; \quad w = -\frac{\alpha}{2} = \mathfrak{A}' \arcsin(-1) + \mathfrak{B};$$

то су константе $\mathfrak{B}=0$; $\mathfrak{A}' = \alpha/\pi$, па је $w = (\alpha/\pi) \arcsin z$, тј. $z = \sin[(\pi/\alpha)w]$.

Д. 2.14. Проблеми са контурним условима.—Многи технички проблеми су у вези са парцијалним једначинама којима су придружени извесни *гранични услови* (тзв. boundary-value problems, Randwertaufgaben, краевач задача). Код ових проблема, врло је важно да се покаже да решење *једино* и да је то *једнозначно решење*. У уехничкој пракси су од велике важности два типа проблема са контурним условима.

a) *Dirichlet-ов проблем* састоји се у одређивању хармонијске функције Φ у једноструко повезаној области (D) омеђеној простом затвореном контуром K (тј. да у тој области задовољава Laplace-ову парцијалну једначину $\Delta \Phi = 0$ и да на самој контури, има одређену вредност $\Phi_K = C$).

b) *Neumann-ов проблем* састоји се у одређивању хармонијске функције Φ у области (D) и чији извод по спољашњој нормали има на контури одређену вредност, $[(d\Phi/dn)_K = C_1]$.

Ови се проблеми могу решавати помоћу конформног пресликавања.

LITERATURA

- Andelić, T., *Osnovi mehanike neprekidnih sredina*, Naučna knjiga, Beograd, 1950.
- Andelić, T., *Tenzorski račun*, Beograd, 1952.
- Арутюнян, Н.Х., Абраман, Б. Л., *Кручение упругих тел*, Физматгиз, Москва, 1963.
- Безухов, Н.И. *Основы теории упругости, пластичности и ползучести*, Высшая школа, Москва, 1968.
- Безухов, Н.И., *Примеры и задачи по теории упругости, пластичности и ползучести*, ibid 1968.
- Betz, A., *Konforme Abbildung*, 2. Auf. Berlin, Göttingen-Heidelberg, 1964.
- Bierberbach, I., *Einführung in die Funktionentheorie*, 2. Auf. Bielefeld, 1952.
- Bit, M. A., *Mechanics of incremental deformations*, New York, J. Willey & Sons, 1965.
- Bowen, R. M., Wang, C. C., *Introduction to Vectors and Tensors*, 1, and 2. Planum Press New York, London, 1976.
- Власов, В. В., *Тангостенное упругие стержни*, Изд. 2, Госфизмат, Москва, 1959.
- Галеркин, Б. Г., *Упругие тонкие плиты*, Гостехиздат, Москва, 1933.
- Green, A. E., Zerna, W., *Theoretical elasticity*, Oxford Univ. Press, 1954.
- Гузь А. Н., Бабич, И. Ю., *Трёхмерная теория устойчивости стержневой пластины и оболочек*, Высшая школа, Киев, 1980.
- De. Boer, R., Prediger H. R. *Tensrechnung in der Mechanik*, Univer. Essen, 1979.
- Kármán, Th. V., *Mathematical Methods in Engineering*, New York 1940.
- Кац, А. М., *Теория упругости*, ГИТТЛ, Москва, 1956.
- Каšанин, Р., *Viša matematika*, I, II, Naučna knjiga, Beograd, 1949, 1950.
- Лейбензон, Л. С., *Курс теорий упругости*, Гостехиздат, Москва, 1947.
- Love, A. E. H., *Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* (1829).
- Лурье, А. И., *Теория упругости*, Наука, Москва, 1970.
- Mitrović D. S. *Kompleksna analiza*, Građevinska knjiga, Beograd, 1971.
- Mitrović D. S., Kečkic D. J., *Jednačine matematičke fizike*, Građevinska knjiga, Beograd, 1972.
- Мухелишвили, Н. И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, 5. изд. Наука, Москва 1966.
- Новожилов, В. В. *Теория упругости*, Судтрамгиз, Ленинград, 1958.
- Oden. J. T., Raddy. J. N., *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin 1976.
- Огибалов П. М., *Изгиб пластинок*, Изд. мгу. Москва, 1958.
- Папкович, П. Ф., *Строительная механика корабля*, Судпромгиз, Ленинград, 1941.
- Власов В. З., *Тонкостенные упругие стержни*, изд. 2; Госизфиз-мат. лит, Москва, 1959.
- Sneddon I. N., *The classical theory of elasticity*, Hand. d. Phys. Springer-Verlag, Berlin, 1958.
- Sokolnikoff I. S., *Mathematical theory of elasticity*, McGraw-Hill Comp., New York, 1956.
- Timošenko S., *Theory of Elastic Stability*, New York, 1936.
- Timošenko S., *Istorija Otpornosti materijala*, Građevinska knjiga, Beograd 1962 (prevod sa engleskog)
- Timošenko S., Goodier J. N., *Teorija elastičnosti ibid*, 1962. prevod)
- Филоненко Бородин М. М., *Теория упругости*, физматгиз Москва, 1959.
- Нитицџев J. M., *Poglavlja iz teorije elastičnosti sa primenama*, Naučna knjiga, Beograd, 1950.

РЕГИСТАР ИМЕНА

(Бројеви означавају стране)

- Алманси (Almansi) 27
Анђелић (Anđelić T.) 400
Араго (Arago) 8
Архимед (Αρχιμήδ) 6
Аугуст (August) 6
Ајнштајн (Einstein) 349
- Базанн (Bazain) 9
Барлоу (Barlow) 10
Баушингер (Bauschinger J.) 11
Бах (Bach C.) 11
Белтрами (Beltrami E.) 12, 107, 108, 109, 110,
Бљајев (Беляев Н. М.) 267
Бесел (Bessel Wilhelm) 270, 271, 272, 318, 319
Бернули (Bernoulli Jacob) 7, 122, 123
Бернули (Bernoulli Johann) 7
Бернули (Bernoulli Daniel) 7, 274, 126, 226
Бернули (Bernoulli Nicol) 7
Бети (Enrico Betti) 11, 128
Бетанкур (Betancourt) 9
Бјанчи (Bianchi) 364
Биензано (Bianzано C. B.) 12, 152
Биот (Biot M. A.) 8, 12
Бредт (Bredt) 171, 172, 173
Бресло (Breslau Müller) 11
Брајан (Bryan G. H.) 11, 301
Бошковић (Ruđer Bošković) 8
Боршар (Borchardt) 10
Бубнов (Бубнов И. Г.) 12, 296
Бусинеск (Boussinesq J.) 10, 169, 255, 257
- Ватсон (Watson) 272
Вебер (Weber) 272, 152
Велер (Wöller A.) 11
Виегард (Wieghardt K.) 12
Витривийус (Vitruvius) 6
Винклер (Wincle E.) 10
Власов (Власов В. З.) 12, 141
Војт (Voigt) 10
Волдемар (Voigh Woldemar) 11
- Галилеј (Galilei, Galileo) 7
Гальоркин (Галёркин Б. Г.) 12, 289
Гаус (Gauss, Carl Friedrich) 8, 11, 321, 322,
324, 327, 368
Гејлисак (Gay Lussac) 8
- Грин (Green, George) 9, 86, 87, 128, 143, 392,
393, 394
Гринхил (Greenhill A. G.) 169
Грифит (Griffith) 11, 166
Головин (Головин Х. С.) 12, 215, 229
Грамел (Grammel Richard) 12, 152
Гурсат (Goursat E.) 238, 390
- Да Винчи (Leonardo da Vinci) 7
Даламбер (D'Alambert, Jean le Rond) 8
Декарт (Descartes R.) 44, 78, 353
Диник (Диник) 266
Диришле (Dirichlet) 11, 126, 399
Дупин (Dupin) 326
- Еванс (Evans) 394
Енгесер (Engesser Friedrich) 11
Ери (Airy G. B.) 194
- Жермен (Germain Sophie) 8, 277
Журавски (Журавский Д. Ц.) 9, 175, 177, 210,
388
- Инглис (Inglis C. E.) 225
- Якобсен (Jacobson L. S.) 12
Якоби (Jacobi Charles G.) 361, 382
Янг (Thomas Young) 8, 193
Янке (Janke E.) 318
- Кантор (Cantor) 368
Кастилијано (Castigliano, Alberto) 11, 105, 107,
125, 127, 128
Карман (Theodore von Kármán) 12
Катарина II (Katarina II) 7
Келвин (William Thompson, Lord Kelvin) 10,
170, 253
Киркоф (Kirchoff, Gustav Robert) 9, 10, 281
Кирпичев (Кирпичев В. Л.) 11
Кирш (Kirsch G.) 231
Клапейрон (Clapeyron B. P.) 9, 126
Клебш (Clebsch Alfred) 9, 10, 142
Клејн (Klein) 11
Колосов (Колосов Г. В.) 12, 148
Коперник (Copernik N.) 7

- Кориолис (Corriolis) 9
 Коши (Cauchy Louis Augustin) 8, 10, 31, 60, 64, 75, 113, 114, 127, 128, 141, 148, 189, 375, 376, 390, 391, 397
 Крамер (Cramer) 354
 Крылов (Крылов А. Н.) 12
 Кристофел (Cristoffel) 47, 362, 398
 Кронекер (Kronecker) 350
 Кулман (Culmann C.) 11
 Кулон (Coulomb, Charles Augustin) 8, 115, 145
- Лав (Love A. E.) 17
 Лагранж (Lagrange, Joseph Louis) 8, 277, 324
 Ламе (Lamé Gabriel) 9, 91, 107, 108, 109, 110, 217, 218, 332, 337
 Лаплас (Laplace, Pierre Simon) 145, 166, 170, 193, 194, 237, 319, 377
 Лайбниц (Leibnitz, Gottfried Wilhelm) 7
 Леви (Lévy Maurice) 10, 194, 291, 306, 350,
 Лем (Sir Horace Lamb) 11
 Лежен (Leienne) 126
 Лејбензон (Lejbenzon L. S.) 12, 164, 191
 Лиувил (Liouville) 10
 Лоран (Mac Laurin) 395, 396
 Лорд Рели (Jlhn William Stutt Lord Rayleigh) 11
- Мариот (Mariotte Edme) 7
 Маклорин (Mac Laurin) 271, 395, 396
 Малис (Malis) 8
 Маркус (Marcus H.) 319, 320
 Мебијус (Möbius) 385
 Мексвел (Maxwell James Clerk) 10, 11, 49, 128, 129, 130
 Мелар (Maillart R.) 12
 Менабреа (Menabrea L. F.) 11, 105
 Меснаџер (Mesnager) 12, 200, 327
 Мионго (Miongo) 9
 Мичел (Michell, John Henry) 12, 107, 114, 115, 159, 197, 227, 236
 Монж (Monge Gaspard) 8, 323
 Мохр (Otto Mohr) 11, 35, 37, 130, 248
 Морера (Morera) 50, 128
 Мусхелишвили (Мусхелишвили Н. И.) 12, 148
- Навије (Navier Louis Marie) 8, 22, 49, 107, 127, 130, 176, 189, 193, 196, 252, 287, 288
 Надај (Nadai A.) 12
 Нојман (Neumann Franz) 10, 142, 399
- Њутн (Newton Issac) 8
- Обрадовић (Обрадовић Н.) 168
 Ојлер (Leonhard Euler) 7, 8, 131, 234, 267, 271, 327
 Остроградски (Остроградский) 128
- Панкович (Панкович П. Ф.) 12
 Пејовић (Пејовић Т.) 217
 Пирсон (Pearson Karl) 11
 Поансо (Poinsot Louis) 8
- Поасон (Simeon Denis Piosson) 8, 193, 195, 197, 293, 264, 289
 Полија (Pölya G.) 145
 Потие (Potier) 9
 Прагер (Prager W.) 12
 Прандтл (Prandtl Ludwig) 11, 136, 148, 150, 154, 166
 Прони (Prony R.) 8
- Рашковић (Рашковић Д.) 188, 348
 Рели (Lord Rayleigh, John William Strutt) 11
 Рејснер (Reissner Eric) 12, 332
 Рендиконти (Rendiconti) 12
 Рибьер (Ribier M. C.) 12, 212, 213, 219, 291
 Ритц (Ritz, Walter) 12, 161, 162
 Риччи (Ricci) 361, 364
 Римаан (Reimann) 11, 370, 375, 376
 Ритер (Ritter W.) 11
 Рунге (Runge Carl) 11
- Садовски (Садовский М. А.) 246
 Салшупц (Saalschütz) 10
 Саутвил (Sauthwell R. V.) 11
 Сен Венан (Barré de Saint Venant) 9, 71, 113, 115, 118, 119, 132, 133, 145, 149, 151, 157, 178, 205, 212, 243, 251, 254, 255, 299
 Симпсон (Simpson) 165
 Станков (Staniov D.) 172
 Стодола (Stodola A.) 223
 Стокс (George Gabriel Stokes) 10
 Стурм (Sturm) 10
- Тејлор (Taylor Brook) 11, 395
 Тет (Tait P. G.) 10
 Тетмајер (Ludvig von Tetmajer) 11
 Тимошенко (Тимошенко С.П.) 12, 179, 191, 297
 Тодхангер (Todhanter Issak) 11
 Томпсон (Vidi Kelvin)
 Трефц (Treffitz E.) 12
 Треска (Treska) 9
 Тум (Thum A.) 12
- Фепл (Förpl L.) 12, 145
 Фепл (Förpl August) 11, 12
 Ферберн (Fairbairn William) 10
 Филоменко — Бородич (Филоменко — Бородич) 12
 Филон (L. N. G. Lilon) 12, 151, 213, 291
 Фламан (Alfred Aidme Flamant) 10, 242
 Флуге (Flüge) 12
 Фонтана (Fontana) 7
 Форшунгсарб (Forschungsarb) 12
 Фурије (Jean Baptiste Joseph, Baron Fourier) 10, 8, 155, 291
- Хартог (J. P. den Hartog) 12
 Хелмхолц (Helmholtz) 55
 Хенки (Hencky H.) 296
 Хутх (Huth J.) 173
- Шварц (Schwartz) 398
- Чивита (Civita) 350

РЕГИСТАР ШКОЛА И УНИВЕРЗИТЕТА

École central Paris 10
École des Mines 9
École des Points et Chaussées 9
École Polytechnique 8
Laboratoire College de France 10
Laboratoire College St. Peter 10
Политехнички институт Цирих 11

Машински факултет-Београд IX
Машински факултет-Ниш VIII, IX
Машински факултет-Крагујевац IX

Политехнички институт ХанOVER 11
Политехнички институт Карлсрухе
Royal Society 7
Торински политехнички институт 11
Универзитет у Глазгову 10
Универзитет у Хајделбергу 10

Природно-математички факултет-Београд IX
Природно-математички факултет-Нови
Сад IX

РЕГИСТАР ПОЈМОВА

(Бројеви означавају стране)

- Airy-јева функција 194
Аксијална крутост 120
Аксијално напрезање 106, 120
Alvansi-Namel-ов тензор коначних деформација 87
Алтернирајући производ 351
Алтернатор 361
Аналитички део реда 395
Аналитичка функција 375, 382
Аналогија
 Magus-ова 319
 мембранска 11
 са мембраном 166, 167
 хидромеханичка 169
Анахармонијски однос 386
Анизотропан 5
Анизотропно тело 5
Амплитуда 368
Аргумент комплексног броја 368
Асимптотски конус 31
Асоцирати 351
Астероида 389
Астрономски дурбин 7
„Аутофрежажа цеви“ 212
Афикс 368
Афини метрички простор 352
Афини простор 351
Афинитет 354
Афинор 358
Базни вектор 348, 360
Безмоментна теорија 333
Beltrami-Michell-ове једначине 100, 114, 115, 337
Bernoulli-јева хипотеза 226, 274
Betti-Maxwell-ова Теорема 128, 129
Бескрајно цилиндрична љуска са кружним бандажом 335
Bessel-ова диференцијална једначина 270, 271
Bianchi-јев апсолутни извод 364
Бивектор 351
Билинеарна трансформација 385
Бихармонијска функција 99, 100, 194
Vojl-Marlot-ов закон 7
Брана 192
Bredt-ова формула 171, 172, 173
Брзина 353
Брзина деформација 87
Брзина струјања 169
Брзински потенцијал 169
Бројеви
 непарни 305
 парни 305
Boussinesq-ов проблем 255, 257
Вектор 348, 353
 аксијални 360
 базински 46
 базни 348, 351
 брзина 353
 деформација 65
 инфинитезимални 353
 коваријантни 356
 контраваријантни 356, 365
 координатни 351, 360
 основни 46
 положаја 351
 померања 54, 353
 релативни 359
 слободан 351
Вектор 353
 брзина 353
 електрично поље 353
 замах 353
 количина кретања 353
 момент силе 353
 сила 353
 спрег сила 353
Векторска база 352
Векторски простор 352
Векторско поље 360
Weber-ова функција 272
Weber-ов проблем 152
Веа 125
Велика зграда 362
Величина
 векторска 353
 скаларна 349
Viéte-ови обрасци 324
Виртуални еластични потенцијал 125
Виртуални рад 125, 126
Вишезначна функција 373
Врста 349
Вртложни вектор 169

- Gauss-ова кривина 324
 -ове ознаке 322
 -ове параметарске криве 321
 -ови параметри 321, 323, 327
 -ова комплексна равна 368
 Генералисана равна деформација 195
 Генералисане координате 351
 Генералисани делта симбол 360
 Генералисани напон 106
 Генералисано клизање 106
 Геодезијска кривина 323
 Геометријско-кинематичке једначине 113
 Глатка крива 372
 Главна дилатација 64
 Главни аргумент 368
 Главни део Laurent-овог реда 395
 Главне кривине 323
 Главни напон 25, 27, 240
 Главни момент 119, 120
 Главни правци 323
 Главни вектор 119, 120
 Градијент скаларне функције 364, 356
 Граница еластичности 5
 Граница скупа 371
 Граница течења 134
 Гране функције 373
 Гранична крива 147, 372
 Гранична вредност 373
 Гранични услов 17, 100, 280, 399
 Green-ова идентичност 143, 392, 394
 Green-ов тензор 86, 87
 Green-ова формула 392, 393
 Густина потенцијалне енергије 103

 Двапут коваријантан 357
 Двапут контраваријантан 357
 Дводимензионални скуп тачака 370
 Двојни однос 386
 Двострука секторска површина 141
 Дебели штап 133
 Деформабилно тело 106
 Деформација
 инфинитезимална 55
 коначна 85
 континуална 55
 компонентна 66, 63
 линеарна 91
 мала 6
 негативна 355
 пластична 5
 позитивна 355
 равна 71
 хомогена 62
 чиста 58
 Деформациони рад 4, 102, 108, 284, 302
 Деформацијски квадрик 64
 Делта симбол 360
 Депланација 115, 117, 121, 221
 Descartes-ов координатни систем 44, 78, 353
 Девијатор
 напона 38
 деформација 66
 Диференцијални оператор 364
 Дијада 358
 Дијадски производ 46
 Дијадски производ вектора 357

 Дилатација 58
 главна 64
 запреминска 61
 торзијска 140
 Директна ротација 21, 115
 Директна трансформација 354
 Директна тензорска нотација 45
 Dirichlet-ов проблем 142, 399
 Диск 248
 променљиве дебљине 222
 пуни 222, 338
 шупљи 222
 Дивергенција 365
 Дивергенција струјне масе 169
 Домен 372
 Додирна површ 242
 Друга кривина 275
 Друга основна квадратна форма површи 323
 Дугачке плоче 308
 Dupin-ова индикатриса 326

 Einstein-ова конвенција 349
 Екстензија 355, 381
 Екстремне вредности тангенцијалних напона 33
 Експериментална решења 166
 Експоненцијална функција 376
 Еквидистантно елиптичко вратило 151
 Еластичност 4
 Еластична бескрајна равна 249
 Еластично бескрајно тело 253
 Еластична линија 181
 Еластична плоча 285
 Еластична површ 274
 Еластична полуравна 242
 Еластични потенцијал 105, 106
 Еластична тела 4, 103
 Еластодинамика 6
 Елипсоид деформација 8
 Елипса напона 32
 Елипса 145
 Елипсоид напона 8
 Елиптички параболоид 146
 Елементи система 348
 Енергија потенцијална 4, 102
 Есенцијални сингуларитет 380
 Euler-ова једначина 234, 317
 Euler-ова константа 271
 Euler-ова теорема 267
 Euler-ова формула 327
 Evans-ова метода 294

 Закон
 Нооке-ов 7, 91, 95, 96, 97, 113, 333, 336, 337
 Boji-Marjot-ов 7
 Запремина депланације 145
 Запреминска дилатација 61
 Запреминска сила 3, 22, 194
 Засек 372
 Затворен скуп тачака 371
 Здружени тензор 361
 [z]-равна
 коначна 371
 проширена 371

- Извод
 Bianchi-јев апсолутни 364
 контраваријантни 363
 коваријантни 47, 363
 Извод функције комплексне променљиве 374
 Извијање греда 301
 Издужење 355
 Изоклине 243, 244
 Изоловани сингуларитет функције 380
 Изомер 357
 Изоморфан 370
 Изостате 243, 244
 Изотропан 5
 Изотропно тело 5, 103
 Изотропни тензор 358
 Изохипса 167
 Изохипсе депланираног пресека 181
 Изохроме 243, 244
 Имагинарна јединица 368
 Инваријанга 25
 апсолутна 355
 јапонска 25, 26
 скаларна 355
 тензора деформације 64
 Инваријантна тачка трансформације 382
 Инверзија 384
 Инверзна трансформација 354, 382
 Инволуција 386
 Индекси
 анонимни 349
 доњи 354
 контраваријантни 348
 коваријантни 348, 365
 привидни 349
 слободни 349
 Инклузија 372
 Инкомпресибилан 3
 Интензивност
 дилатације 107
 клизања 106
 нормалног напона 107
 тангенцијалног напона 106
 Интеграл функције комплексне променљиве 389
 Интегрални обрасци 366
 Интерполациона парабола другог реда 164
 Инфинитезимална деформација 55, 57,
 Испупчење плоче 274, 300, 301, 303, 317
- Јасоби-ан 382, 361
 Јединични круг 388
 Јединични тензор 358
 Једначина(е)
 Bessel-ова диференцијална 270, 271
 Beltrami-Michell-ове 100, 114, 115, 337
 Геометријско-кинематичке 113
 Euler-ова 234, 317
 Cauchy-јеве 15, 16, 113, 114, 115, 130, 337
 кинематичке 113
 коначних разлика 164
 Lamé-ове 98, 113, 114, 337
 Laplace-ова парцијална иференција лна 142,
 145, 237, 319
 Navier-ове 22, 98, 113, 130
 равнотеже напрегнутог тела 23
 секуларна 25
 статичка 113
- струјнице 169
 физичке 113
 Једнограни хиперболоид 31, 64
 Једнозначно 131, 132, 199
 Једнозначно разложити 348
 Једнозначно решење 399
 Једнолико подељено оптерећење 288
 Једноструко повезано подручје 74, 137
- Канал 192, 372
 Саптор-ов аксим 368
 Кардиоида 389
 Кардиоидни пресек 153
 Картезијанске координате 351
 Картезијански тензор 358
 Castigliano-ва теорема 11, 127, 128
 Квадрат елемента лука криве 322
 Квадратна матрица 349
 Квадратна мрежа 325
 Квадратни попречни пресек 163, 165
 Квадратна регуларна форма 105
 Kelvin-ов проблем 253
 Kirisch-ов проблем 231
 Кинематичке једначине 113
 Клизање 58, 60
 Клин 226
 Коваријантно диференцирање 363
 Коваријантни индекс 348, 365
 Коваријантни извод 47
 Коваријантни облик 107
 Коефицијент
 еластичности 92
 извијања 300
 линеарног ширења материјала 336
 модифицирани Poisson-ов 193, 289
 модифицирани Young-ов 193
 Poisson-ов 8, 96
 поправке 226
 повезаности 363
 сличности 383
- Колекција једнозначних функција 373
 Колинеарни вектори 352
 Колона 349
 Soulomb-ова хипотеза 145, 117
 Комбиновано решење 114
 Комомент 351
 Компактан скуп тачака 371
 Компатибилност деформација 71, 79, 84
 Компатибилност напона 100
 Комплексна променљива 368
 Комплексни број 368
 Комплексна нула 369
 Комплексна јединица 369
 Комплексна функција торзије 147
 Комплемент 370
 Композиција 350
 Композиција система 350
 Компонентне деформације 331
 Компонентни напон 114
 Компресибилан 3
 Компресија 355
 Коначан скуп тачака 370
 Конични пресек 160
 Коњугован 369
 Коњугована функција 142
 Коњуговане координате 369

- Коњуговани напони 17
 Константе(a)
 Euler-ова 271
 Lamé-ове 91
 техничке 96
 материјалне 91
 Контактна површ 242, 263, 264
 Контактни напон 114
 Контактно напрезање 242
 Конграваријантни облик 107
 Контура 372
 Контурна површ 128
 Контурни проблем 138
 Контракција 350
 Концентрација напона 152, 158, 168
 Конформно пресликавање 148, 380, 382, 383
 Концентрисана сила 4, 290
 Координате
 генералисане 351
 картезијанске 351
 конграваријантне 348, 355, 356
 коваријантне 348, 356
 коњуговане 369
 обичне 355
 опште 351
 поларне 369
 правоугле 369
 природне 362
 система 348
 физичке 47, 362
 Координатне криве 379
 Координатни вектор 351, 360
 Координатни систем
 генералисани 44, 45, 78, 81, 107
 Descartes-ов 44, 78, 353
 криволинијски 40
 ортогонални криволинијски 75, 81, 366
 ортогонални генералисани 51, 47, 81
 поларно-цилиндрички 41, 48, 77, 82, 109, 233, 367
 сферни 42, 48, 78, 83, 110, 367
 Координатни почетак 351
 Кососиметричан систем 349
 Кососиметрична матрица 349
 Кратки штап 133
 Стамег-ово правило 354
 Крива
 глатка 372
 гранична 372
 затворена 372
 Јордан-ова 372
 непрекидна 372
 проста 372
 рубна 372
 Критична граница великих издужења 134
 Критична тачка 380
 Критични притисак 301
 Кгопескер-ов делта симбол 350
 Кружна конзола 228
 Кружна тачка 325
 Кружна плоча променљиве дебљине 315, 316
 Кружно-прстенаста плоча 314
 Крутост
 аксијална 120
 модифицирана торзијска 143.
 савојна 123
 торзијска 117
 Крутост плоче при савијању 278
 Круто тело 3
 Кружни лучни штап 219
 Круг
 деформације 65
 напона 35
 Кубна парабола 210
 Cauchy-јеве једначине 15, 16 113, 114, 115, 130, 337
 -Goursat-ова интегрална теорема 390
 -јев деформацијски квадрик 64
 -јев интеграл 148, 391
 -јеве једначине деформације 75
 -јеве једначине друге врсте 337
 -јев квадрик 31
 -јева напонска површ 31
 -Reimann-ови услови 375, 376
 -јев тензор 60, 61
 -јева теорема са остацима 397
 -јев тензор инфинитезималних деформација 60
 Christoffel-ови симболи 362
 друге врсте 47, 362
 прве врсте 362
 Christoffel-ове заграде 362
 средња 362
 велика 362
 Lamé-ов елипсоид 31, 32, 64
 -ове једначине 98, 114, 337
 -еви коефицијенти 332
 -ове константе 91
 Laplace-ијан 364, 365
 Laplace-ова диференцијална једначина 142, 145 237, 319, 377
 Laplace-ов оператор 193, 194, 377
 Levy-јево решење 291
 Levy-Mitchell-ова теорема 197
 Levy-Civita симболи 350
 Линеарна трансформација 354, 385
 Линеаран скуп тачака 370
 Линеарни простор 352
 Линеарни распоред температуре 342
 Линеарни систем вектора 352
 Линије главних напона 241
 Линије клизања 241
 Линије кривине 325, 328
 Линије тангенцијалног напона 139
 Логаритамска функција 377
 Локална својства 355
 Локална торзијска дилатација 190
 Локални значај 231
 Локални јединични угао торзије 190
 Локални карактер 242
 Љуска 5, 321
 Љуска мале кривине 5
 Љуска велике кривине 5
 Љуска са кружним бандажом 335

- Мас Лаурин-ов ред 271, 395, 396
 Мале дебљине 340, 342
 Макроскопски 3
 Maxwell-ове функције 49
 Maxwell-ов утицајни коефицијент 130
 Материјалне константе 91
 Материјалне карактеристике 92
 Матрица
 врста 349
 квадратна 349
 коефицијената 354
 напона 19
 просторна 349
 симетрична квадратна 349
 сингуларна 354
 тензора коначних деформација 85
 трансформације 353, 354, 21
 функционална 55
 Меријидијани 328
 Мероморфна функција 380
 Метода
 алгебре 353
 анализе 353
 геометријско-статичка 40, 49
 директна 115
 Euler-ова 294
 замишљених пресека 6
 коначних разлика 161
 конформног пресликавања 149
 Lagrange-ова 324
 Maxwell-Mohr-ова 120
 Marcus-ова 320
 Menabrea 11
 Обратна 115
 полуобратна 115
 приближна 160
 Rayleigh-Ritz-ова 11
 Ritz-ова 161, 294
 фиктивних пресека 6
 Метрика простора 352
 Метричка форма 322, 353
 Метрички простор 363
 Метрички тензор 352, 360
 Механика непрекидних средина 3
 Механика флуида 3
 Meusnier-ова теорема 327
 многозначно 131, 199
 Множина 348
 Минимум потенцијалне енергије 127
 Möbius-ова трансформација 385
 Monge-ове ознаке 323
 Модул комплексног броја 368
 Модул компресије 98
 Молекуларна хипотеза 97
 Момент савијања 278
 Моментна теорија 333
 Момент увијања 135, 279
 Моргеа функције 50
 Mohr-ови кругови деформације 65
 Mohr-ови кругови напона 35, 37, 40
 Мрежа 321
 изотермичка 325
 квадратна 325
 ромбна 325
 Мултиформна функција 373
 Navier-ова једначина 22, 98, 113, 130
 -ово решење 278
 Највећи тангенцијални напон 182
 Најнижи корен 318
 Накнадни услов 24
 Напон
 генералисани 106
 главни 25, 27, 240
 затезања 14, 30
 компонентни 13
 коњуговани 17
 контактни 242
 нормални 14
 октаедарски 37, 106
 притисни 340
 притиска 14, 30
 радијални 243
 смицајни 14
 средњи 13
 тангенцијални 14, 17, 106
 термички 336
 тотални 13, 15
 укупни 14
 Нападни момент 278
 Напонска инваријанта 25
 Напонска површ 30, 31
 Напонска функција 49, 179, 194
 Напонске линије 139
 Напонске трајекторије 240
 Напонско стање 15, 19, 73
 Напрезање
 аксијално 106, 120
 контактно 242
 локално 133, 243, 251, 255
 термичко 336
 фиктивно 106
 Неограничени скуп тачака 371
 Неодређени интеграл 391
 Непрекидна функција 373
 Непрекидна средина 3
 Нестишљив 3
 Neumann-ов проблем 142, 399
 Нехомоген 5
 Нормални пресек 323
 Нормална кривина 323, 327
 Нумеричка квадратура 240
 Обичне координате 355
 Област
 вишеструко повезана 372
 затворена 372
 просто повезана 372
 Област притиска 124
 Област затезања 124
 Обртна метода 115
 Обратна ротација 21
 Обртна површ 327
 Обртна померања 6
 Ограничен скуп тачака 371
 Ојлерова једначина 243, 317
 Октаедарска раван 38, 65
 Октаедарски напон 37, 106
 Омбилик 325
 Ошта потенцијална функција 377, 386
 Ошта трансформација 355
 Оште координате 351

- Оптерећење
 динамичко 6
 статичко 6
 Оригинал 373
 Ортогонална трансформација 21, 353
 Ортогоналне криве 240
 Ортогоналан 325
 Ортогонални генералисани координатни систем 47, 51, 81
 Ортогонални криволинијски координатни систем 75, 81, 366
 Ортогонални тензор 19, 358
 Оскулаторна раван 323, 327
 Основне величине другог реда 323
 Основни контраваријатни тензор 360
 Основне непознате 114
 Основни тензор 360
 Основне величине првог реда 322
 Основни став кинематике деформабилног тела 55
 Основни вектор 46, 348, 360
 Основно правило анализе напона 20
 Осносиметрични проблем 251
 Осносиметрични распоред температуре 338, 343
 Остатак функције 396
- Парабола 124
 Параболичка тачка 325
 Параметарске криве 328
 Партикуларни интеграл 292
 Парцијалне једначине 375
 Периодичка функција 376
 Пермутација
 непарна 350
 парна 350
 Пермутациони симбол 350
 Плоча 5
 Површ
 деформацијска 64
 додирна 242
 еластична 274
 контактна 242, 236, 264
 Cauchy-јева напонска 31
 напонска 30, 31
 неутрална 275
 Површинска сила 3
 Подвезице 168
 Подручје 372
 вишеструко повезано 74
 једноструко повезано 74
 Подручје променљиве 373
 Поларни систем координата 375
 Поларне координате 379
 Поликристална тела 5
 Полупречник околине 370
 Полупречник конвергенције 395
 Пол функције 380
 Померања
 компонента 66, 68, 69, 70
 линијска 6
 обртна 6
 стварна 126
 Потенцијални ред 394
 Потпуни елиптички интеграл 258
 Потпуни елиптички интеграл прве врсте 258
 Потпуни елиптички интеграл друге врсте 258
- Потребни услови 25
 Позитивно дефинитна форма 325
 Правило о конјугованости 22
 Правилни део реда 395
 Правоугаона брана 212
 Prandtl — ова функција 136, 146, 150
 Празан скуп тачака 370
 Прва основна форма површи 322
 Прва кривина 322
 Пресликавање 373
 Пресликавање експоненцијалном функцијом
 Пресликавање по сличности 383
 Придружити 351
 Примитивна функција 391
 Принципи
 виртуалних померања 125
 виртуалног рада 126
 еластичне еквиваленције статички еквивалентних система 133
 минимума потенцијалне енергије 127
 најмањег рада 11
 независности дејства 130
 Saint Venant-ов 122, 212
 солидификације 6
 узајамности деформационих радова 128
- Притисак
 унутрашњи 117
 спољашњи 117, 118
 Проблем
 Boussinesq-ов 255, 257
 Weber-ов 152
 Dirichlet-ов 142
 Kelvin-ов 253
 Kirsch-ов 231
 Neumann-ов 142
 Flamant-ов 242
 Производ
 алтернирајући 351
 дијадски 46
 скаларни 352
 спољашњи 351
 тензорски 46
 Промена
 запремине 6, 105
 облика 6, 105
 Профилисани носач 158
 Простор
 афини 351, 352
 афини метрички 352
 векторски 352
 линеарни 352
 реални пунктуелни 351
 Прости распоред радијалних напона 243
 Прост пол 396
 Псеудовектор 359
 Путања 321, 372
 Пуни цилиндар 339
 Пуна кугла 341
- Раван 38
 Раван октаедарска 65
 Раванско напрезање 192
 Равнотежни услов 24
 Равно стање напрезања 202
 Равна деформација 192

- Рад
 виртуални 125
 деформациони 4, 102, 108, 284
 специфични деформациони 4, 11, 103
 Радијални распоред температуре 341, 342
 Разломљена трансформација 385
 Ранг матрице 354
 Растезање 381
 Рационална функција 376
 Реална тела 3
 Реални интеграл 397
 Реакције ослонаца 282
 Регуларна трансформација 354
 Регуларно-аналитичка функција 375
 Регуларна функција 375
 Редови 394
 Редуковани угао увијања 140
 Rayleigh-Ritz-ова метода 11
 Релативни тензор 359
 Релативно издужење 59
 Реологија 5
 Решење проблема по померањима 114
 Реципрочни триједар 348
 Резидуум 396
 Ritz-ова метода 161, 294
 Riemann-ова сфера 370
 Ricci-јева теорема 364
 Ricci-јеви тензори 361
 Ротација 55, 354
 Ротација са огледањем 354
 Ротација
 директна 21
 обратна 21
 Ротор 365
 Ротор векторске функције у равни 393

 Савијање плоча 274
 Савојна кругост 123
 Сажимање индекса 350
 Saint Venant-ови услови компатибилности деформација 71, 79, 84
 Saint Venant-ови услови 113
 Saint Venant-ови коефицијенти 157
 Saint Venant-ов принцип 122, 212, 243, 251, 254
 Saint Venant-ова функција 141
 Семиделинитна форма 325
 Симетрична квадратна матрица 349
 Сингуларитет 380
 Сингуларитет привидни 380
 Сингуларна трансформација 354
 Сингуларна матрица 354
 Сингуларна тачка 261
 Сила
 запреминска 3, 22, 194
 затезна 299
 јединична запреминска 3
 јединична масена 3
 концентрисана 4
 површинска 3
 притисна 299
 специфична запреминска 4
 спољашња 3, 17
 унутрашња 3
 Систем величина 348

 Систем
 антисиметричан 349
 другог реда 349
 кососиметричан 349
 нултог реда 394
 првог реда 348
 референције 351
 симетричан 349
 Скаларни производ 352
 Скалар 353
 густина
 енергија
 маса
 рад
 температура
 Скаларна инваријанта 355, 349
 Скаларно поље 355
 Скалар 355, 349, 353
 Скаларни производ вектора 362
 Скаларна величина 349
 Скраћење 355
 Скуп тачака
 дводимензионални 370
 затворен 371
 компактан 371
 кончачан 370
 линеаран 370
 неограничен 371
 ограничен 371
 отворен 371
 празан 370
 пуст 370
 Слика комплексног броја 268
 Слободно ослоњена плоча 310, 311, 312, 313, 345
 Слој 349
 Смицање 60
 Специфични деформациони рад 4, 103, 11
 Специфична маса 169
 Специфична тежина 5
 Спољашња тачка 371
 Спољашњи притисак 117, 118
 Средња кривина 275, 324
 Средња површ љуске 321
 Статичка непозната 128
 Стационарна форма 325
 Стационарни распоред температуре 346
 Стање напрезања 97
 Стање напрезања — тродимензионално 103
 Статичка једначина 113
 Статичко оптерећење 6
 Статички неодређен 24
 Статички гранични услови 17
 Стереографски 370
 Стереографско пресликавање 371
 Стезање 381
 Степен полинома 376
 Стишљив 3
 Стишљиви флуид 169
 Струјна линија 169
 Струјница 169
 Струјање
 неустаљено 169
 устаљено 169
 Супституциони оператор 350
 Сферни суд 117

- Сфера 66
 Сферна површина 260
 Сферно лежиште 265
 Schwartz-Christoffel-ова трансформација 398
 Танка љуска 329
 Танка плоча 201
 Тангенцијални напон 106
 Тачка
 елиптичка 325
 изолована 371
 кружна 325
 нагомилавања 371
 параболичка 325
 регуларна 375
 спољашња 371
 сингуларна 375
 унутрашња 371
 хиперболичка 325
 Taylog-ов ред 394
 Телепаралелизам 364
 Тело
 анизотропно 5
 гасовито 3
 деформабилно 106
 еластично 4, 103
 идеално еластично 6
 изотропно 5, 103
 круто 3
 ортотропно 5
 поликристално 5
 реално 3
 течно 3
 чврсто 3, 4
 Тензор 357, 357
 Almansi-Hamel-ов коначних деформација 87
 апсолутни 361, 359
 афини 358
 брзина деформација 87
 вишег реда 349, 358
 Green-ов 86, 87
 деформација 61, 78, 353
 другог реда 349, 357
 здружени 361
 изотропни 358
 јединични 358
 картезијански 358
 коваријантни 356
 Cauchy-јев 60, 61
 коначних деформација 86
 контраваријантни 356
 метрички 360
 напона 18, 19, 44, 107, 353
 „некомпатибилни“ 51, 80
 ортогонални 19, 358
 основни 360
 основни контраваријантни 360
 основни метрички 352
 првог реда 348
 псеудо — 359
 релативни 359
 симетрични 357
 сферни 36, 38, 358
 тренутке ротације 79
 фундаментални 360
 функције напона 50
 Тензорска густина 359
 Тензорски капацитет 359
 Тензорски производ вектора 357
 Тензорско поље 19
 Тензорски рачун 348
 Теорема ротора векторске функције у равни 393
 Теорема
 Betti-Maxwell-ова 128, 129
 двају момената 10
 Euler-ова 267
 Castigliano-ова 11, 127, 128
 Levy-Michell-ова 197
 Ricci-јева 364
 трију момената 9
 Теорија
 безмоментна 333
 еластичности 5, 6
 деформација 54
 момената 333
 напона 13
 пластичности 5
 Течна тела 3
 Течни кристали 5
 Течење материјала 134
 Торзија 135, 145
 вратила кружног попречног пресека 115
 вратила правоугаоног попречног пресека 145
 призматичних штапова 135
 штапа елиптичног попречног пресека 145
 Торзија површи 275
 Торзијска крутост 117
 Торзијски момент инерције 143
 Тотални диференцијал 355, 378
 Траг 26
 Трајекторија 321
 Трајекторија главног напона 240
 Трајекторија тангенцијалног напона 240, 241, 243
 Транслација 55, 383
 Трансверзална сила 278,
 Трансформација 45, 63
 афина 62, 354
 генералисана 355
 директна 354
 инверзна 354, 382
 линеарна 354
 несингуларна 354
 општа 355
 ортогонална 353
 регуларна 354
 сингуларна 354
 супротна 354
 функционална 355
 хомогена линеарна 354
 Трапезна плочица 224
 Тривектор 351
 Тригонометријски ред 212
 Тригонометријска функција 377
 Троугаона брана 211
 Троугаони клин 236
 Увијање 284
 Угао тренутног обртања 57
 Узастопне трансформације 385
 Укљештен 140
 Укљештена плоча 310, 311, 312, 313, 315, 318, 344
 Укупни напон 14

- униформно непрекидна функција 373
- униформна функција 373
- унутрашње множење 350
- Упоредници-паралеле 328
- Услов непрекидности деформација 125
- Услови непрекидности еластичне површи 312
- Услов(и)
 - гранични 17, 100, 280
 - довољни 25
 - Cauchy-јеви 100
 - компатибилности напона 100
 - компатибилности деформација 71, 79, 84
 - контурни 17, 280
 - накнадни 24
 - потребни 25
 - равнотежни 24
 - статички гранични 17
- Физичке компоненте 107
- Физичке координате 47, 362
- Физички параметар 355
- Фиксна тачка 382, 386
- Фиктивно аксијално напрезање 106
- „Филм од сапунице“ 167
- Flamant-ов проблем 242
- Förri-ова теорија 145
- Форма
 - позитивно дефинитна 325
 - семидефинитна 325
 - стационарна 325
 - формула трансформације координата 44
- Fouquier-ов ред 291
- Функција
 - Airy-јева 194
 - аналитичка 375, 382
 - Bessel-ова 272
 - бихармонијска 99, 100, 194
 - брзине 169
 - Weber-ова 272
 - вишезначна 373
 - депланације 141
 - елементарна 376
 - експоненцијална 376
 - Жуковског 388
 - једнозначна 373
 - комплексне променљиве 147, 237, 372
 - Цела функција 395
 - Центар савијања 190
 - Центар хомотетије 383
 - Цилиндрична крутост плоче 278
 - Цилиндрични пробојац 262
 - Циркулација 171
 - Чисто (а)
 - ротација 384
 - ротација директна 384
 - ротација индиректна 384
 - савијање 202, 233, 283
 - смицање 202, 233
 - увијање 202, 284
 - Шупљы цилиндар 339
 - Штап 5
- Хармонијске функције 99, 100, 142
- Хидромеханичка аналогича 169
- Хидростатички притисак 211, 290
- Хипербола 146, 257
- Хиперболоид 31, 39
 - двограни 31, 64
 - једнограни 31, 64
- Хиперпростор 353
- Хиперболички параболоид 284
- Хиперболичка функција 377
- Хиперболички диск 222
- Хипотеза Журавског 175, 177, 210
- Хипотеза праволинијског елемента 274
- Хипотеза сталних нормала 333
- Хипотеза о природном стању деформабилног тела 130
- Хипоциклоидни пресек 151
- Ходограф 321
- Холоморфна функција 375
- Хомоген 5
- Хомогена деформација 62
- Хомогена линеарна трансформација 354
- Хомографска трансформација 385
- Хомотетија 383
 - директна 383
 - инверзна 383
- Ногнер-ова схема 28