СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

ГЛАС CLXXV

ПРВИ РАЗРЕД

86

А. МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ

4

АНТОН БИЛИМОВИЋ

Коефицијенат раширености једне области

БЕОГРАД 1937

Коефицијенат раширености једне области

Од

АНТОНА БИЛИМОВИЋА

КОЕФИЦИЈЕНАТ РАШИРЕНОСТИ ЈЕДНЕ ОБЛАСТИ

Од

АНТОНА БИЛИМОВИЋА

(Приказано на скупу Академије природних наука 19-X-1936 год.).

САДРЖАЈ

---

§ 1. Дефиниција

Замислимо у равни једну област S, која се састоји из једног или више делова и омеђена је једном или више кривих линија. Целокупну границу те области означимо са L, њезину површину са Q и њезино тежиште са тачком C.

Упоредимо сад са нашом облашћу круг исте површине

Q са центром у тачки C; периферију тог круга означимо са λ. Јасно је да, ако област S није круг, један део те области лежи ван границе λ, а други унутра. Тај део области S што лежи ван круга означимо са Σ, а онај део круга што не припада области S са σ. Тада је очигледно:

$$\text{површ. } \Sigma = \text{површ. } \sigma. \tag{1}$$

Круг можемо сматрати као геометриски облик те особине да је од свих облика у равни исте површине његова површина највише концентрисана (без поклапања) око једне тачке, тј. да нема таквог другог распореда елемената површине у равни да, рецимо, интеграл

$$I_n = \iint\limits_S r^n ds \tag{2}$$

проширен на целокупну област S буде мањи, него што је код круга; у том интегралу смо са r означили отстојање елемента површине ds од тежишта површине, односно центра круга, са n произвољан коначан позитиван број.

Заиста, из једначине (1) следује да сваком елементу ds ван круга, чије отстојање од тежишта означимо са r', одговара други елеменат унутра круга са отстојањем, рецимо r, при чему је

$$r' > r\,,$$

а значи

$$r'^n ds > r^n ds\,;$$

према томе пренашањем спољашних елемената унутра круга смањујемо вредност интеграла (2) — он добива најмању вредност кад сви елементи стану унутра круга.

Упоредимо сад вредност интеграла (2) проширеног на дату област S са вредношћу тог истог интеграла проширеног на област круга исте површине. Тај интеграл означимо са I_n^*.

Разлика

$$I_n - I_n^*$$

показује отступање области S од кружног облика. Да елиминишемо утицај величине наше области можемо да уведемо количник

$$k_n = \frac{I_n - I_n^*}{I_n^*}\,,$$

који ћемо звати ***коефицијенат n'тог реда раширености дате области.***

Не улазећи у анализу коефицијената раширености различитих редова, зауставимо се на случају *квадратичног* коефицијента k_2, који ћемо једноставно означавати са k и звати *коефицијенат раширености дате области.* Према томе имамо:

$$k = \frac{I - I^*}{I^*}\,, \tag{3}$$

где смо са I означили интеграл

$$I = \iint\limits_S r^2 ds \tag{4}$$

проширен на дату област S, а са I^* исти интеграл проширен на област круга исте површине.

Пошто интеграл (4) претставља моменат инерције површине око тежишта те површине, за коефицијенат раширености дате области можемо поставити дефиницију и у следећом облику:

Коефицијенат раширености дате области у равни претставља однос разлике централних момената инерције те области и круга исте површине према истом моменту инерције тог круга.

Из (3) непосредно следује:

$$I = I^* (1 + k)\,. \tag{5}$$

Образац (5) показује да коефицијенат раширености претставља, тако рећи, коефицијенат дилатације централног момента инерције кад област прелази из кружног у свој облик.

Пошто централни моменат инерције круга има вредност:

$$I^* = \frac{1}{2}\, QR^2 = \frac{1}{2}\, \pi R^4.$$

где је Q површина круга и R његов полупречник, за израчунавање коефицијента раширености дате области довољно је израчунати централни моменат инерције само дате области и знати површину те области према којој је могуће израчунати полупречник одговарајућег круга исте површине.

Ако централни моменат инерције дате области I напишемо у облику

$$I = Q\rho^2$$

где је ρ тако звани полупречник инерције дате површине, онда из (3) имамо:

$$k = 2\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 - 1$$

а то значи да је за израчунавање коефицијента k довољно израчунати однос полупречника инерције дате површине према полупречнику круга исте површине.

Учинимо још једну примедбу. При израчунавању разлике $I - I^*$ можемо узети у обзир само оне интеграле, који нису проширени на исте области. То значи за интеграл I треба узети само област Σ, а за интеграл I^* само област σ и према томе имамо:

$$I - I^* = \iint\limits_{\Sigma} r^2 ds - \iint\limits_{\sigma} r^2 ds\,,$$

јер се за заједничку област вредности одговарајућих интеграла скраћују.

Ова примедба има нарочити значај у случају приближног израчунавања означених интеграла поделом области на елементе и израчунавања момента инерције за сваки посебни елеменат.

За приближно одређивање коефицијента раширености дате области може да послужи која било графичка, а нарочито механичка метода. Ако исечемо од хомогене плоче (од картона, плеха или чега сличног) нашу област (тешкоћа у тој методи настаје кад област има више сепаратних делова) и одредимо њено тежиште, централни моменат инерције можемо да одредимо помоћу неке механичке методе (унифиларно или бифиларно вешање, клатно и др.); ако после тога на исти начин одредимо моменат инерције круга исеченог

исте плоче и исте тежине са тежином наше области, одређивање коефицијента раширености захтева само одузимање и дељење.

За случај запреминске области V интеграл I, што фигурише у изразу за коефицијенат раширености, има вредност:

$$I = \iiint\limits_{V} r^2 dv$$

где r поново означава отстојање елемента запремине dv од тежишта области. Други интеграл I^* је проширен на област сфере исте запремине са датом облашћу. Сваки од тих интеграла поново претставља централни моменат инерције, у датом случају тела, око свог тежишта. И у овом случају рачунска метода, нарочито за тела са каквом компликованом површином, може да буде смењена механичком методом. Према познатом обрасцу из геометрије маса:

$$2I = I_x + I_y + I_z$$

где су I_x, I_y, I_z моменти инерције тела око трију ортогоналних оса C_x, C_y, C_z, што пролазе кроз тежиште тела, одређивање момента инерције I у погледу на тачку се своди на одређивање момената инерције око оса, а за одређивање тих последњих момената постоји читав низ различитих практичних метода.

---

§ 2. Примери

Израчунајмо коефицијенат раширености неких фигура у равни и тела.

1. *Правилан многоугаоник.*

Није тешко израчунати да се коефицијенат раширености једног правилног многоуганика са n страна одређује из следеће једначине:

$$1+k=\frac{2\pi}{3n}\cdot\frac{3-2\,\mathrm{Sin}^2\frac{\pi}{n}}{\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi}{n}}.$$

Према том обрасцу можемо да наведемо следеће вредности коефицијента раширености појединих правилних многоугаоника:

n	k
3	0,209
4	0,047
5	0,017
6	0,008
7	0,004
8	0,002
.	. . . .
.	. . . .
∞	0

Ови бројеви одговарају, тако рећи, на питање у којој мери један правилан многоугаоник се разликује од круга. Методом упоређивања при томе служи израчунавање одговарајућег момента инерције.

2. *Правоугаоник.*

За један правоугаоник са односом димензија m лако је извести образац:

$$1+k=\frac{\pi}{6}\left(m+\frac{1}{m}\right).$$

Из тог обрасца природно следује да од свих правоугаоника квадрат ($m=1$) има најмањи коефицијенат раширености.

За целе вредности односа m можемо написати следећу таблицу:

m	k
1	0,047
2	0,309
3	0,745
4	1,225
5	1,723
.	. . . .
.	. . . .

Коефицијенат раширености правоугаоника има вредност јединице за ону вредност односа m, која задовољава једначину:

$$m+\frac{1}{m}=\frac{12}{\pi},$$

а то је:

$$m\gtrsim 3{,}537.$$

3. *Елипса.*

За елипсу са односом оса ε лако можемо извести образац:

$$1+k=\frac{1+\varepsilon^2}{2\varepsilon}$$

одакле:

$$k=\frac{(1-\varepsilon)^2}{2\varepsilon}. \tag{6}$$

Кад елипса дегенерише у круг ($\varepsilon=1$), $k=0$, а кад она тежи отсечку праве линије ($\varepsilon\to\infty$), њезин коефицијенат раширености исто тако тежи бесконачности.

4. *Коцка.*

Пошто моменат енерције коцке са ивицом a око њезиног тежишта има вредност:

$$I=\frac{3}{12}\,Va^2,$$

где је V запремина те коцке, а моменат инерције лопте исте запремине полупречника r се изражава овако:

$$I^* = \frac{3}{5}\, Vr^2$$

онда, узимајући у обзир везу:

$$a^3 = \frac{4}{3}\,\pi r^3,$$

што одговара једнакости запремина коцке и лопте, можемо написати следећу једначину за одређивање коефицијента раширености коцке:

$$1+k = \frac{5}{18}\,\sqrt[3]{6\pi^2}.$$

Ова једначина даје следећу приближну бројну вредност тог коефицијента:

$$k \approx 0{,}083\,.$$

5. *Правоугли паралелепипед.*

За један правоугли паралелепипед са димензијама a, b, c моменат инерције има вредност:

$$I = \frac{1}{12}\, V\,(a^2+b^2+c^2)\,;$$

за лопту он поново износи:

$$I^* = \frac{3}{5}\, Vr^2,$$

при чему постоји веза:

$$\frac{4}{3}\,\pi r^3 = abc\,.$$

Према тим резултатима долазимо до следеће једначине за одређивање коефицијента раширености правоуглог паралелепипеда:

$$1+k = \frac{5}{36}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{2/3}(abc)^{-2/3}(a^2+b^2+c^2)\,,$$

6. *Ваљак.*

Искоришћавајући следећи образац за ваљак:

$$I = \frac{1}{12}\, V\,(6r^2+h^2)\,,$$

где је r — полупречник основе и h висина и узимајући у обзир везу:

$$\pi r^2 h = \frac{4}{3}\,\pi\rho^3$$

где је ρ полупречник одговарајуће лопте, долазимо овде до следеће једначине за одређивање коефицијента раширености ваљка:

$$1+k = \frac{5}{36}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\cdot(r^2h)^{-2/3}(6r^2+h^2)\,.$$

7. *Елипсоид.*

Пошто моменат инерције за елипсоид има вредност:

$$I = \frac{1}{5}\, V\,(a^2+b^2+c^2)\,,$$

где су a, b, c полуосе елипсоида, а за лопту исте запремине поново пишемо:

$$I^* = \frac{3}{5}\, Vr^2$$

и узимамо у обзир везу:

$$\pi abc = \frac{4}{3}\,\pi r^3,$$

за одређивање коефицијента раширености овде имамо једначину:

$$1+k = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\cdot(abc)^{-2/3}(a^2+b^2+c^2)\,.$$

---

§ 3. Коефицијенат раширености и трансформација области. Конформно пресликавање

У равни Oxy замислимо једну област S и у њој тачку M са координатама: x, y. Нека у другој равни са осама $A\xi\eta$ тој тачки одговара тачка N са координатама: ξ, η, које су одређене једначинама:

$$\xi = \xi(x, y),$$
$$\eta = \eta(x, y). \tag{7}$$

Те једначине одређују једну трансформацију области S. Област тачке N означимо са Σ. Једначинама (7) одговарају једначине:

$$x = x(\xi, \eta),$$
$$y = y(\xi, \eta)$$

обратне трансформације.

Замислимо сада један круг s полупречника r са центром у тачки M. После трансформације тај круг се трансформише у једну област σ у равни $A\xi\eta$. Ова област има свој коефицијенат раширености, који означимо са k_r. Може бити случај да тај коефицијенат тежи одређеној граничној вредности k кад полупречник круга r око тачке M тежи нули, тј.

$$\lim_{r \to 0} (k_r) \to k.$$

Коефицијенат k можемо да зовемо *коефицијенат раширености у датој тачки области, која је добивена после дате трансформације.* Он претставља функцију координата тачке N, а то значи и координата тачке M:

$$k = \varphi(\xi, \eta) = f(x, y).$$

Потребно је обратити пажњу да круг полупречника r помоћу којег конструишемо област σ не претставља онај круг исте површине са облашћу σ, који служи за израчунавање коефицијента раширености области σ. Тај круг има исти полупречник само у том случају кад трансформација има особину одржавања величине површине области до и после трансформације (Flächentreue Abbildung).

За израчунавање коефицијента k можемо да поступимо на следећи начин. Ако са x', y' означимо координате тачке M', која се налази на кружној линији полупречника r, имамо:

$$(x'-x)^2 + (y'-y)^2 = r^2. \tag{8}$$

Стављајући

$$x' - x = \frac{\partial x}{\partial \xi}\Delta\zeta + \frac{\partial x}{\partial \eta}\Delta\eta,$$

$$y' - y = \frac{\partial y}{\partial \xi}\Delta\zeta + \frac{\partial y}{\partial \eta}\Delta\eta,$$

тј. заустављајући се само на члановима првога реда, можемо једначину (8) написати у облику:

$$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2\right]\Delta\xi^2 + 2\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)\Delta\zeta\Delta\eta +$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right]\Delta\eta^2 = r^2$$

или

$$A\Xi^2 + 2B\Xi Y + CY^2 = 1 \tag{9}$$

где су

$$A = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2,$$

$$B = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta},$$

$$C = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2$$

и

$$\Xi = \frac{\Delta\xi}{r}, \quad Y = \frac{\Delta\eta}{r}.$$

Написана једначина претставља једну елипсу. Према (6) коефицијенат раширености те елипсе има вредност:

$$k = \frac{(1-\varepsilon)^2}{2\varepsilon} = \frac{(a-b)^2}{2ab},$$

где су a и b полуосе елипсе, а ε њихов однос.

Пошто је за нашу елипсу

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = A + C,$$

$$\frac{1}{a^2 b^2} = AC - B^2$$

можемо лако написати следећу једначину за израчунавање коефицијента k:

$$1+k=\frac{(a+b)^2}{2ab}=\frac{1}{2}(A+C)(AC-B^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Анализирајмо мало вредност коефицијента k одређеног из једначине (10).

Прво се зауставимо на том случају кад коефицијенат k има вредност нуле, а то значи да наша елипса претставља круг. Из једначине (10) тада имамо:

$$(A-C)^2=-4B^2$$

а то може да буде у случају кад је у исто време:

$$B=0\,, \quad A=C\,, \tag{11}$$

што следује такође непосредно из једначине (9), ако она одговара кружној линији.

Услови (11) дају:

$$\begin{gathered}\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}=0\,,\\ \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2.\end{gathered} \tag{12}$$

Из једначине (12) следују или једначине:

$$\frac{\partial x}{\partial \eta}=\frac{\partial y}{\partial \xi}\,, \quad \frac{\partial x}{\partial \xi}=-\frac{\partial y}{\partial \eta} \tag{13}$$

или једначине:

$$\frac{\partial x}{\partial \eta}=-\frac{\partial y}{\partial \xi}\,, \quad \frac{\partial x}{\partial \xi}=\frac{\partial y}{\partial \eta}\,. \tag{14}$$

Једначине (13) одговарају конформној трансформацији са везом:

$$x+yi=F(\xi+\eta i)\,,$$

а једначине (14) са везом:

$$x-yi=F_1(\xi-\eta i)$$

где су F и F_1 произвољне функције.

Према томе можемо нагласити став:

Трансформација са коефицијентом раширености свуда једнаким нули претставља конформну трансформацију и обратно.

Диференцијална једначина трансформације са сталним коефицијентом раширености има облик:

$$(A+C)^2=\alpha\,(AC-B^2)\,, \tag{15}$$

или

$$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2\right]^2+(2-\alpha)\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right]+$$
$$+\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right]^2=-\alpha\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2,$$

где је α константа са вредношћу:

$$\alpha=4\,(1+k)^2.$$

За конформно пресликавање $\alpha=4$. Уопште, константа α не сме да буде мања од 4 да једначина (15) одговара стварној трансформацији.

§ 4. Примене

а. *Коефицијенат раширености Југославије, Румуније и Чехословачке.*

Појам коефицијента раширености може корисно да послужи за прву, приближну, карактеристику облика једне територије. Вредност тог коефицијента, на пример, показује у којој мери је територија једне државе развучена. Ако, на пример, на карти погледамо прво Румунију, а затим Чехословачку, одмах нам пада у очи како је Румунија заокругљена и како је Чехословачка растегнута. Али којим бројем можемо то да карактеришемо? Коефицијенат раширености одговара на то питање.

1. *Коефицијенат раширености Југославије.*

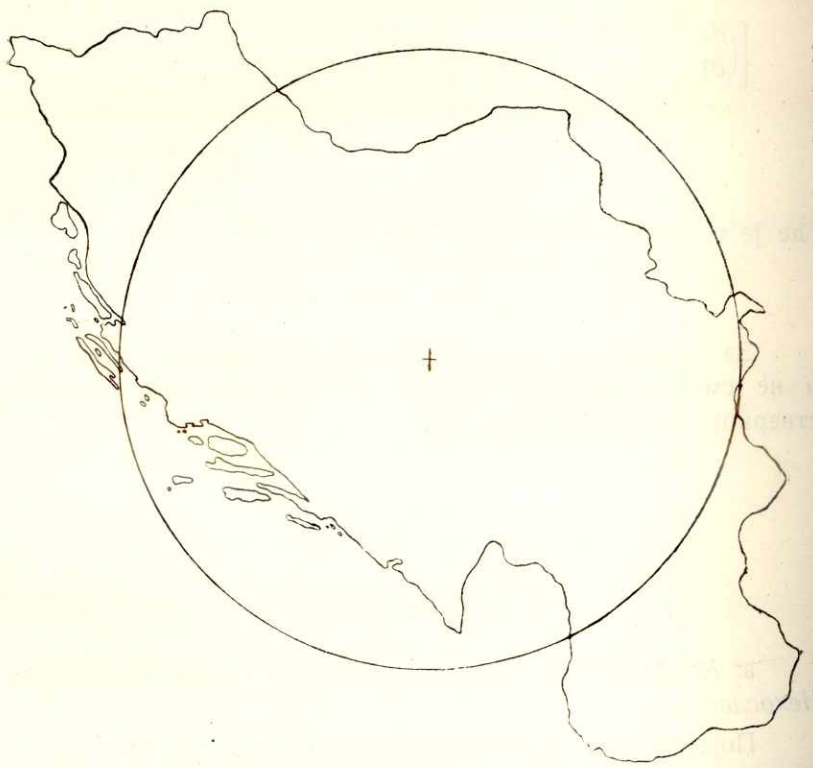
Искористив резултат мог брата[1]) да се центар територије Југославије налази у тачки са координатама:

44⁰ 7′ северне ширине

18⁰56′ источне дужине од Гринвича

и узев вредност површине Југославије у износу од

$= 247542\ \mathrm{km}^2$,



Сл. 1

дошао сам после приближног израчунавања момената инерције оних елемената, који се налазе унутра круга исте по-

[1]) *Александар Билимовић.* Центар територије и центар становништва у Југославији. Посебно издање Географског друштва. Свеска 19. Београд, 1936.

вршине и ван тог куга (слика 1), до следеће вредности коефицијента раширености Југославије:

$$\boxed{k \approx 0{,}395 \approx 0{,}4\,.}$$

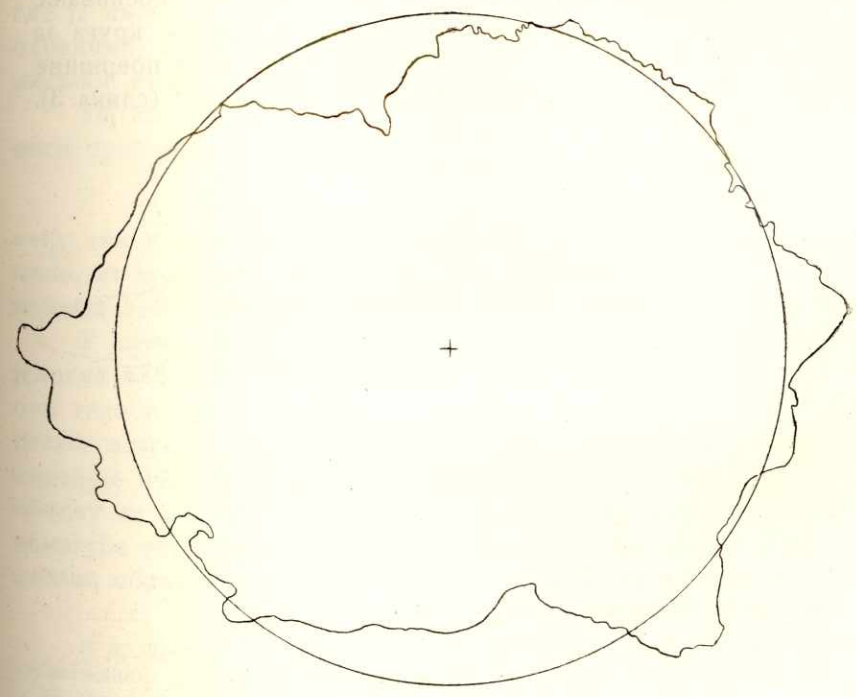
Сем тога сам извршио израчунавање коефицијента раширености Југославије не у погледу на центар површине, него у погледу на положај престонице, Београда. Тај коефицијенат, који показује у којој мери територија Југославије није концентрисана око Београда износи:

$$k' \approx 0{,}924 \approx 0{,}9$$

Видимо да је тај коефицијенат раширености више него два пута већи за Београд него што је за центар територије Југославије.

2. *Коефицијенат раширености Румуније.*

За одређивање коефицијента раширености Румуније смо



Сл. 2

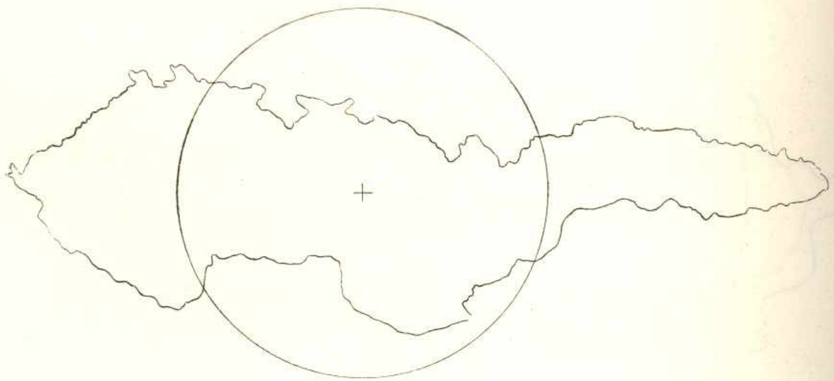
се делимично послужили механичком методом. Прво смо помоћу вешања карте (1 :3.700.000) Румуније (слика 2) исечене од картона одредили положај центра територије, па после, узимајући ту тачку за центар, описали смо кружну линију што одговара површини Румуније приближно од 300.000 km². Затим смо поделили спољашњу и унутрашњу површину на елементе и приближно смо израчунали моменте инерције једних и других елемената. Резултат тог приближног рачуна дао је за коефицијенат раширености Румуније вредност:

$$\boxed{k \approx 0{,}039 \approx 0{,}04}$$

Према томе је коефицијенат раширености Румуније готово десет пута мањи него што је коефицијенат раширености Југославије.

3. *Коефицијенат раширености Чехословачке.*

За одређивање коефицијента раширености Чехословачке смо се послужили истом методом као што и за одређивање коефицијента раширености Румуније. Полупречник круга за упоређивање одредили смо на основу вредности површине Чехословачке, која износи приближно 140.400 km² (слика 3).



Сл. 3

Рачун је довео до резултата да је

$$\boxed{k \approx 1{,}39 \approx 1{,}4\ .}$$

Према томе је тај коефицијенат за Чехословачку готово три и по пута већи него што је за Југославију и готово је тридесет пет пута већи према Румунији. Ти бројеви можда имају и политички значај, нарочито ако узмемо у обзир политичку природу граница набројених држава.

6. *Коефицијенат раширености и комасација земљишта у аграрној реформи.*

Кад аграрна реформа има у виду такође и то да одреди сваком сопственику његову парцелу у што згоднијем облику, она треба да води рачуна о томе како да оцени форму сваке парцеле. Јасно је да је форма парцеле у толико боља за вођење газдинства у колико је њезина површина више сконцентрисана (комасирана) око куће сопственика. Према томе и ту коефицијенат раширености може да има свој теориски и практични значај.

Као један пример распореда делова имања до реформе узмимо имање једног власника у селу Вахау (Wachau) код Лајпцига у Саксонији и према приложеном плану тог села[1]), где је имање споменутог власника показано црном бојом, одредимо приближну вредност коефицијента раширености његовог имања (слика 4).

Тај коефицијенат у погледу на тачку његове куће износи приближно:

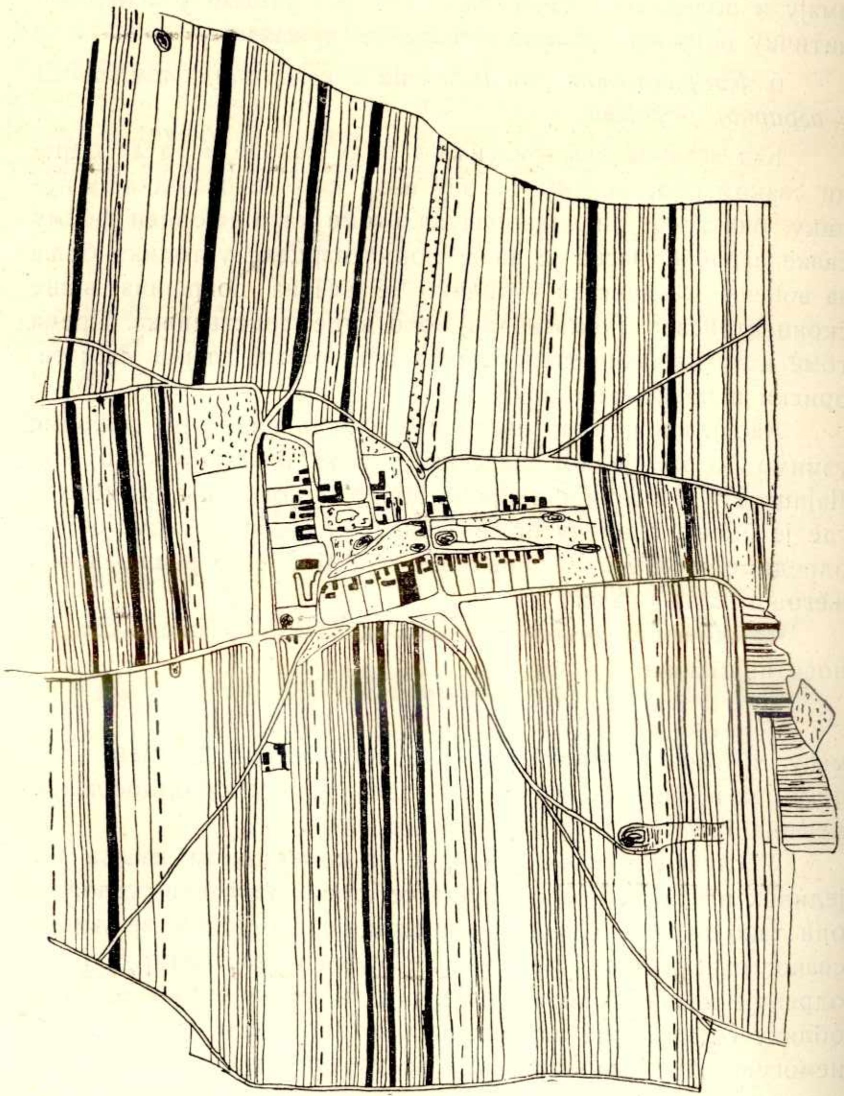
$$k \approx 20,$$

међу тим после комасације вредност тог коефицијента, рецимо, за правоугли облик његове парцеле са односом димензија 1 : 2 треба да се снизи до 0,309.

У случају аграрне реформе са комасацијом имања појединих власника земљомерима се стави одређени услов да они тако израде планове парцелације да облик земљишта сваког власника не сме да буде сувише растегнут, а то се одређује помоћу односа димензија тог правоугаоника, у ком облику се најчешће парцелише земљиште; али је често пута немогуће због природних услова терена дати појединим парцелама облик правоугаоника и тада се поставља питање ка

[1]) *A. Meitzen.* Siedelung und Agrarwesen der Westgermanen und Ostgermanen, der Kelten, Römer, Finnen und Slaven. Berlin. 1895. Band I—III und Atlas (Atlas, Anlage 129).

ко можемо да решимо питање да ли је која парцела сувише растегнута или не. На то питање може да да потпуно одре-



Сл. 4

ђен одговор норма постављена за коефицијенат раширености, коју не сме да премашује ни једна парцела на плану

парцелације. Према томе тај појам може са пуно разлога да искористи земљомерство за своје практичне циљеве.

в. *Коефицијенат раширености код биолошких облика.*

У различим проблемима биологије форма објекта у вези са његовом величином игра капиталну улогу. Величина се једноставно карактерише једним бројем (запремином, тежином и тд.), али је карактерисати особине форме врло тешко. Према томе један појам, који доводи до потпуно одређеног броја, помоћу којег, макар приближно, можемо карактерисати форму једног објекта у његовој битној особини, његовој раширености у простору, може да буде од користи и у биолошким проучавањима. Реченице: „тај или тај предмет (ћелија, орган, организам и тд.) има облик близак сфери, мало издужен, ра тегнут, јако развучен и тд.“ могу да буду смењене изразима веће тачности кад ћемо навести бројну вредност коефицијента раширености одговарајућег геометриског објекта. Тамо, где раширеносност неког тела може да буде постављена у везу са којом другом појавом, која се карактерише једним бројем, можемо да тражимо корелациону везу између тог броја и коефицијента раширености тог тела.

§ 5. Уопштавање појма коефицијента раширености

Појам коефицијента раширености може бити проширен, са једне стране, на геометриске облике у простору више димензија, а са друге, на случај тако званог криволиниског простора.

Суштина првог уопштавања стоји у вези са природом интеграла, који одговара квадратичном централном моменту инерције, наиме у случају n-димензионалног простора треба да ставимо интеграл I у облику:

$$I = \overbrace{\int\int\cdots\int_S}^{n} r^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_n ,$$

где је

$$r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

и према томе је интеграл проширен на све тачке посматране области S.

Друго уопштавање се тиче криволиниског простора. Замислимо, на пр., неку криву површину и на њој једну област ограничену кривом линијом на тој површини. Како можемо да дефинишемо коефицијенат раширености те области на тој површини? Можемо да поступимо на начин сличан претходном само у место праволиниског растојања између две тачке треба да уведемо геодезиско растојање, које се рачуна дуж геодетске линије било на површини, било уопште у криволиниском простору.

Тај појам за криволиниски простор може да има сличне примене као што и за случај праволиниског простора. Тако, на пример, за одређивање коефицијента раширености Енглеске потребно је узети у обзир сферни облик Земљине површине и за израчунавање положаја центра њезине територије са доминионима и колонијама и за одређивање одговарајућих момената инерције потребно је мерити сва отстојања дуж лукова великих кругова.