СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

ГЛАС CLXXXIX

ПРВИ РАЗРЕД

95

ПРИРОДЊАЧКЕ НАУКЕ

9.

А. БИЛИМОВИЋ

О МАКСИМАЛНИМ ВРЕДНОСТИМА МОДУЛА ДЕТЕРМИНАНТЕ

БЕОГРАД, 1946

О МАКСИМАЛНИМ ВРЕДНОСТИМА МОДУЛА ДЕТЕРМИНАНТЕ

од

АНТОНА БИЛИМОВИЋА

О МАКСИМАЛНИМ ВРЕДНОСТИМА МОДУЛА ДЕТЕРМИНАНТЕ

од

АНТОНА БИЛИМОВИЋА

(Приказано на скупу Академије природних наука од 6-VII-1943).

Добро позната Hadamard-ова теорема (Résolution d'une question relative aux déterminants Selecta, p. 136) поставља максималну вредност за модуо произвољне детерминанте. Циљ је ових страна да се покаже како је могуће, под извесним условима, поставити низ све тачнијих узастопних максималних вредности за наведени модуо; прва вредност у том низу одговара Hadamard-овој теореми, а последња тачној вредности детерминанте.

Нека је дата детерминанта са стварним члановима (резултати се проширују и на случај имагинарних чланова):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Начинимо њезин квадрат, $\Delta^2 = \pm p_{11} p_{22} \ldots p_{nn}$, где је $p_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \; a_{js}$. Ако уведемо ознаке $p_i^2 = p_{ii}$, детерминанту Δ^2 можемо претставити овако:

$$\Delta^2 = (p_1 p_2 \ldots p_n)^2 D_n, \text{ где је } D_n = D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 1 & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

са

$$\alpha_{ij} = \frac{p_{ij}}{p \; p_j} \leqq 1.$$

---

[1]) W. Blaschke у свом чланку „Ein Beweis für den Determinentensatz Hadamards" (Archiv der Mathematik und Physik. III. Reihe. XX. Heft 3. S. 277—279) употребљује за доказ Hadamard-ове теореме рекурзивну методу, али су његове узастопне вредности различите од наших.

Ако из детерминанте D_n издвојимо детерминанту D_k, чија дијагонала садржи k првих чланова дијагонале детерминанте D_n, детерминанту D_n можемо раставити овако:

$$D_n = D_k + S_k,$$

где је S_k збир свих осталих чланова детерминанте D_n. Јасно је да детерминанта D_k садржи само оне чланове α_{ij}, за које су $i, j \leqq k$. Ако чланове α_{ij}, за које је ма један индекс $i, j > k$, означимо са α^*_{ij}, онда можемо тврдити да сваки члан збира S_k садржи α^*_{ij} и при томе ниједан члан α^*_{ij} не може да уђе а да не буде помножен бар још једним чланом α^*_{ij} или квадриран, јер сваком члану α^*_{ij} одговара минор, који има једну врсту само од елемената α^*_{ij}.

Приметимо да, ако је $k = n-1$, збир S_{n-1} не претставља ништа друго него детерминанту D_n код које је последња јединица дијагонале замењена нулом. Ако такву детерминанту означимо са D_n' имамо

$$S_{n-1} = D_n'$$

и

$$D_n = D_{n-1} + D_n'. \tag{1}$$

Што се тиче знакова величина D_{n-1} и D_n', D_n је за сваку вредност индекса n позитивно по самој својој природи као квадрат детерминанте Δ, а за знак детерминанте D_n' можемо доказати да она не може бити позитивна.

За доказ те особине детерминанте D_n' искористимо једну особину сваке симетричне детерминанте, која се изражава једначином

$$DD_{hhh'h'} = D_{hh}\, D_{h'h'} - D^2_{hh'}, \tag{2}$$

где су: D симетрична детерминанта, D_{hh} — минор који одговара елементу на пресеку h-те врсте и h-тог ступца, $D_{h'h'}$, $D_{hh'} = D_{h'h}$ слично за показане елементе, $D_{hhh'h'}$ — минор другог реда кад се избришу две врсте и два ступца.

Применимо сад једначину (2) на детерминанту D_k'; тада можемо написати

$$D'_k\, D_{k-2} = S_{k-1}\, D_{k-1} - D^2_{hh'}, \tag{3}$$

где је S_{k-1} детерминанта, коју ћемо добити кад код детерминанте D'_k избришемо претпоследњу врсту и претпоследњи стубац.

Искористимо образац (2) за рекурзивно израчунавање. Прво, за $k = 2$ имамо

$$D'^2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & 0 \end{vmatrix} = -\alpha^2_{12} \leqq 0,\quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha^2_{12} \geqq 0.$$

За $k = 3$ из (3) пишемо

$$D'_3\, D_1 = S_2\, D_2 - D^2_{hh'}. \tag{4}$$

Пошто је

$$S_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & 0 \end{vmatrix} \leqq 0,$$

са десне стране (4) оба члана су негативна, а пошто је $D_1 = 1 > 0$, следује да је $D_3' \leqq 0$.

У општем случају из (3) следује да из $S_{k-1} \leqq 0$, следује $D'_k \leqq 0$.

Сад из позитивности за свако n величине D_n и негативности D'_n закључујемо о истинитости ових неједнакости

$$D_1 \geqq D_2 \geqq D_3 \geqq \ldots \geqq D_n = D.$$

Из првог услова $D \leqq D_1$ имамо Hadamard-ову теорему:

$$\Delta^2 \leqq (p_1\, p_2 \ldots p_n)^2. \tag{5}$$

Ако знамо само један израз

$$p_{12} = a_{11}\, a_{21} + a_{12}\, a_{22} + a_{13}\, a_{23} + \ldots + a_{1n}\, a_{2n} = \sum_{s=1}^{n} a_{s1}\, \alpha_{2s},$$

који се саставља од елемената две врсте или два ступца, за које су

$$p_1^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + \ldots + a^2_{1n},$$
$$p_2^2 = a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 + \ldots + a^2_{2n},$$

онда можемо написати ову границу за Δ^2:

$$\Delta^2 \leqq (p_1\, p_2 \ldots p_n)^2 \left(1 - \frac{p_{12}^2}{p_1^2 p_2^2}\right). \tag{6}$$

Приметимо да у случају једнакости две врсте, кад је $p_{12} = p_1^2 = p_2^2$ ова граница даје $\Delta = 0$. За такву детерминанту Hadamard-ова теорема тај резултат не даје.

Идућа граница се изражава овако:

$$\Delta^2 \leqq (p_1\, p_2 \ldots p_n)^2 \left(1 - \frac{p^2_{23}}{p^2_2 p^2_3} - \frac{p^2_{31}}{p^2_3 p^2_1} - \frac{p^2_{12}}{p^2_1 p^2_2} + 2\frac{p_{23}\, p_{31}\, p_{12}}{p^2_1 p^2_2 p^2_3}\right).$$

Ако са A означимо највећи модуо једног од елемената a_{ij}, Hadamard-ово правило даје

$$\Delta^2 \leqq (nA^2)^n. \tag{7}$$

Ако сем тога знамо да постоје такве две врсте за које је $p_{12} \geqq B$, онда из (6) следује ова граница

$$\Delta^2 \leqq (nA^2)^n\left(1 - \frac{B^2}{n^2 A^2}\right). \tag{8}$$

Примери: 1. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Hadamard-ово правило (7) даје

$$\Delta^2 \leqq (4.3^2)^4 = 1.679.616.$$

Правило (8) за $p_{13} = 1+6+6+1 = 14$ доводи до овог резултата:

$$\Delta^2 \leqq (4.3^2)^4\left(1 - \frac{14}{4^2.3^2}\right) = (4.\,3^2)^4.\,\frac{65}{72},$$

тј. смањује границу за округло $10^0/_0$.

Ако поступимо по Hadamard-ову правилу (5), имамо

$$\Delta^2{}_1 = 22500.$$

Идуће приближне ведности према нашим правилима су:

$$\Delta^2{}_2 = 900, \qquad \Delta^2{}_3 = 20, \qquad \Delta^2{}_4 = \Delta^2 = 1.$$

Права вредност детерминанте $\Delta = -1$.

2. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Према Hadamard-ову правилу (5) имамо

$$\Delta^2 \leqq 14.9.11 = 1386.$$

Т. Пејовић (Contribution à l' étude de la valeur maximum du module d'un déterminant. Journal de Mathématiques, Neuvième série), од кога сам узео овај пример, даје $\Delta^2 \leqq 900$.

Правило (6) за $\alpha^2{}_{23} = \frac{9^2}{9.11} = \frac{9}{11}$ даје $\Delta^2 \leqq 14.9.11\left(1 - \frac{9}{11}\right) = 252.$

За $\alpha^2{}_{13} = \frac{8^2}{14.11}$ имамо најнезгоднији случај, кад је

$$\Delta^2 \leqq 14.9.11\left(1 - \frac{8^2}{14.11}\right) = 810.$$

ON THE MAXIMUM VALUES OF DETERMINANT'S MODUL

By ANTON D. BILIMOVITCH

(Reported at the meeting of the Academy of Natural Science 6-VII-1943).

RÉSUMÉ

Given the determinant $\Delta = \pm a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$; let us form its square in the determinant's form $\Delta^2 = \pm p_{11}\, p_{22} \ldots p_{nn}$, where $p_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}\, a_{js}$. If we ntroduce $p_{ii} = p_i{}^2$, the determinant may de expressed as follows:

$$\Delta^2 = (p_1\, p_2 \ldots p_n)^2\, D_n$$

with

$$D_n = D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_{12} \ldots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 1 \ \ldots \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot \ \cdots \cdot \\ \cdot & \cdot \ \cdots \cdot \\ \cdot & \cdot \ \cdots \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \ldots 1 \end{vmatrix}$$

and

$$\alpha_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_i\, p_j} \leqq 1.$$

We introduce the following successive approximations for the determinant $D_n = D$:

$$D_1 \geqq D_2 \geqq D_3 \geqq \ldots \geqq D_{n-1} \geqq D_n = D.$$

From the first condition $D \leqq D_1$ we have the theorem of Hadamard:

$$\Delta^2 \leqq (p_1\, p_2 \ldots p_n)^2.$$

The following inequality may be written for the second approximation:

$$\Delta^2 \leqq (p_1\, p_2 \ldots p_n)^2\left(1 - \frac{p^2{}_{12}}{p_1{}^2\, p^2{}_2}\right).$$

In the article, thereafter, is introduced the third approximation, another Hadamard's criterion is generalized and some examples are analyzed.
