СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

ГЛАС CLXXXIX

ПРВИ РАЗРЕД

95

ПРИРОДЊАЧКЕ НАУКЕ

6.

А. БИЛИМОВИЋ

ПРИЛОГ ГЕОМЕТРИСКОЈ ТЕОРИЈИ ГЕНЕРАЛИСАНИХ САСТАВЉЕНИХ И ПРОЈИЦИРАНИХ ВЕКТОРА

БЕОГРАД, 1946

ПРИЛОГ ГЕОМЕТРИСКОЈ ТЕОРИЈИ ГЕНЕРАЛИСАНИХ САСТАВЉЕНИХ И ПРОЈИЦИРАНИХ ВЕКТОРА

од

АНТОНА БИЛИМОВИЋА

ПРИЛОГ ГЕОМЕТРИСКОЈ ТЕОРИЈИ ГЕНЕРАЛИСАНИХ САСТАВЉЕНИХ И ПРОЈИЦИРАНИХ ВЕКТОРА

од
АНТОНА БИЛИМОВИЋА

(Приказано на скупу Академије природних наука 5-II-1943 год.

Садржај: 1. Увод. 2. Физички вектор. 3. Састављени или контраваријантни вектор. 4. Пројицирани или коваријантни вектор. 5. Случај векторског поља. 6. Веза између састављеног и пројицираног вектора, Улога метричке форме. 7. Закључак.

1. Увод

Савремено излагање теорије вектора разликује већ у Еуклидову простору ове врсте слободног вектора:

1. физички вектор,
2. контраваријантни вектор,
3. коваријантни вектор.

За физички вектор је одомаћена његова претстава помоћу праволиниске дужи одређеног смера, чији је интензитет претстављен именованим бројем са именовањем које одговара физичкој природи векторске величине. Као потпуно самостални, конкретни геометриски облик, он је инваријантан по самој својој природи према свакој промени координатног система, јер не зависи од тог система. Његово одређивање помоћу компонената или пројекција у односу на осе било каквог триједра јавља се као другостепени процес. Све операције са таквим векторима могу бити вршене чисто геометриским путем без неопходног искоришћавања његових координата. Целокупна моћ векторског рачуна лежи у том чисто геометриском, инваријантном поступку векторских операција. Алгебра и анализа скаларних величина овде су замењене алгебром и анализом геометриских величина. Практички се она своди на графички поступак.

Друкчије се уводе у теорију вектора појмови контраваријантног и коваријантног вектора. То су у тродимензионалном простору тројке бројева или функција. За доказ да њима одговара једна инваријантна суштина, један облик, потребно је увек прво доказати да са променом координатног система ова суштина остаје без промене. Сваку операцију са тим тројкама треба испитати, да ли је она инваријантна према промени координатног система. Такво излагање теорије вектора одузима тој теорији њезину главну особину — конкретну претставу свих операција и резултата и претвара је, како то показује развијена алгебра и анализа те теорије, у збирку правила формалног карактера која недовољно упућеном читаоцу даје утисак жонглирања индексима горњим и доњим.

Циљ је овом чланку да покаже како се може развити теорија контраваријантних и коваријантних вектора чисто геометриским путем, увођењем појмова генералисаних компонената и генералисаних пројекција, и то у односу на тако звани именовани триједар. Највише материјала за такво излагање даје књига Hermann-a Rothe-a [1], независно од тога што је и код њега база излагања теорије вектора и тензора аналитичка. Наше излагање је у суштини геометриско, а разликује се од Rothe'ова и са формалне стране.

2. Физички вектор

Из теорије тог вектора наводимо само оно што је потребно за излагање наше геометриске концепције.

Нека интензитет физичког вектора има одређено именовање, које у општем случају можемо одредити овим изразом за вектор $\mathfrak{A}$:

$$[\mathfrak{A}] = L^a M^b T^c,$$

где су L, M, T симболи, као увек, дужине, масе и времена, a, b, c стварни бројеви.

Уводимо три некомпланарна, произвољна вектора са истим почетком O

$$e_1,\ e_2,\ e_3,$$

исто тако сваки одређеног именовања према ознаци

$$[e_i] = L^{a_i} M^{b_i} T^{c_i}.$$

То су *основни вектори*, који одређују *основни именовани триједар референције*. Ми ћемо га кратко означавати са Oe_i.

Сваки вектор $\mathfrak{A}$ можемо тада претставити овако:

$$(1) \qquad \mathfrak{A} = A^1 e_1 + A^2 e_2 + A^3 e_3 = \sum_{i=1}^{3} A^i e_i = A^i e_i,$$

где су

$$A^1,\ A^2,\ A^3$$

генералисане компоненте вектора $\mathfrak{A}$ у односу на Oe_i. Генералисана компонента се претвара у обичну компоненту, ако је њезин основни вектор орт и то апстрактни орт, тј. вектор јединичног интензитета без именовања. У општем случају, ако вектор $\mathfrak{A}$ има димензију $L^a M^b T^c$, а орт, рецимо, e_1 димензију $L^{a_1} M^{b_1} T^{c_1}$, генералисана компонента има димензију $L^{a-a_1} M^{b-b_1} T^{c-c_1}$ и према томе може имати другу димензију него сам вектор $\mathfrak{A}$.

Ако је вектор $\mathfrak{A}$ дат геометриски, а исто тако је познат основни триједар Oe_i, за одређивање генералисаних компоненета треба извршити овај геометриски поступак.

Ако саставимо векторски производ $[e_2 e_3]$ према познатом геометриском правилу и тим производом помножимо чланове једначине (1), онда ћемо добити

$$A^1 = \frac{(\mathfrak{A}\,[e_2 e_3])}{(e_1\,[e_2 e_3])}$$

и слично за остале компоненте. Производ

$$(e_1\,[e_2 e_3]) = \delta$$

бројно одговара запремини паралелепипеда конструисаног из основних вектора, а његово именовање има димензију

$$L^{a_1+a_2+a_3} M^{b_1+b_2+b_3} T^{c_1+c_2+c_3}.$$

Замислимо сад да смо место триједра Oe_i увели нов триједар $O\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$, који кратко означавамо са $O\bar{e}_i$. Сваки стари основни вектор може бити изражен помоћу нових основних вектора овако:

$$(2) \qquad e_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_i^j \bar{e}_j = \alpha_i^j \bar{e}_j,$$

где је α_i^j компонента i-тог старог основног вектора у правцу и односу новог j-ог основног вектора. Јасно је да у општем случају нови основни вектори могу бити различитог именовања од старих основних вектора и да компоненте α_i^j имају одговарајућа именовања.

Ако са $\overline{A}^j$ означимо генералисане компоненте вектора у односу на нови триједар $O\bar{e}_j$, онда имамо

(3) $$\mathfrak{A} = \sum_{j=1}^{3} \overline{A}^j \bar{e}_j = \overline{A}^j \bar{e}_j .$$

Ако у једначину (1) ставимо вредности (2) за основне векторе e_j, можемо написати

(4) $$\mathfrak{A} = \sum_{i=1}^{3} A^i \sum_{j=1}^{3} \alpha_i^j \ \bar{e}_j = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3} A^i \alpha_i^j\right) \bar{e}_j .$$

Упоређивање једначина (3) и (4) даје ове вредности нових генералисаних компонената:

(5) $$\overline{A}^j = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^j \ A^i .$$

Ове једначине можемо формулисати овим ставом:

При трансформацији основног триједра, ***нове*** генералисане компоненте вектора једнаке су збиру свих *старих* генералисаних компонената, претходно помножених свака одговарајућим коефицијентом у изразима *старих* основних вектора помоћу *нових* основних вектора (обратити пажњу на ред: прво — нове, старих, а затим — старих, нових).

Пошто вектори e_1, e_2, e_3 и $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ нису ни компланарни ни колинеарни, једначине (2) можемо решити по новим основним векторима. Ако то решење напишемо у облику

(6) $$\bar{e}^j = \sum_{k=1}^{3} \overline{\alpha}_j^k \ e_k ,$$

између коефицијената α_i^j и $\overline{\alpha}_j^k$ имамо везе:

(7) $$\sum_{j=1}^{3} \alpha_i^j \ \overline{\alpha}_j^k = \begin{cases} 1 \text{ за } k = i \\ 0 \text{ за } k \neq i . \end{cases}$$

Помоћу нових коефицијената можемо изразити старе генералисане компоненте помоћу нових овако:

(8) $$A^i = \sum_{j=1}^{3} \overline{\alpha}_j^i \ \overline{A}^j .$$

Овим једначинама одговара став сличан претходном са истом примедбом о реду.

Конструишимо сад пројекције вектора $\mathfrak{A}$ на осе истог основног триједра Oe_i. Уведимо место тих пројекција скаларне производе вектора $\mathfrak{A}$ и вектора e_1, e_2, e_3. Ако су ови вектори апстрактни ортови, скаларни производи тачно дају вредности пројекција. Означимо скаларне производе са

(9) $$A_1 = (\mathfrak{A}\, e_1), \quad A_2 = (\mathfrak{A}\, e_2), \quad A_3 = (\mathfrak{A}\, e_3).$$

Ове величине ћемо звати *генералисане пројекције* датог вектора у односу на дати именовани триједар. Скаларна множења (9) одређују онај геометриски поступак који одређује генералисане пројекције.

Упоредно са триједром Oe_i уведимо реципрочни или поларни триједар Ae^i са основним векторима e^1, e^2, e^3, који су одређени једначинама:

(10) $$e^1 = \frac{1}{\delta}\left[e_2 e_3\right], \ e^2 = \frac{1}{\delta}\left[e_3 e_1\right], \ e^3 = \frac{1}{\delta}\left[e_1 e_2\right].$$

Из ових једначина следују једначине

(11) $$\left(e^i \ e_k\right) = \begin{cases} 1 \text{ за } i = k \\ 0 \text{ за } i \neq k , \end{cases}$$

а такође једначине

(12) $$e_1 = \frac{1}{\delta'}\left[e^2 e^3\right], \quad e_2 = \frac{1}{\delta'}\left[e^3 e^1\right], \quad e_3 = \frac{1}{\delta'}\left[e^1 e^2\right],$$

где је
$$\delta' = (e^1 [e^2 e^3]),$$
при чему је
$$\delta\delta' = 1.$$

Ако за момент означимо компоненте вектора $\mathfrak{A}$ у односу на реципрочни триједар са A', A'', A''', онда према (1) треба написати

(13) $$\mathfrak{A} = A' e^1 + A'' e^2 + A''' e^3 .$$

Помножимо сад ову векторску једначину скаларно са e_1, тада према (9) и (11) имамо

$$(\mathfrak{A}\, e_1) = A_1 = A' .$$

На тај начин место (13) можемо написати ову једначину

(14) $$\mathfrak{A} = A_1 e^1 + A_2 e^2 + A_3 e^3,$$

која изражава овај став:

Генералисане пројекције вектора у односу на један именовани триједар су генералисане компоненте истог вектора у односу на реципрочни триједар и обратно.

Ако од триједра Oe_i прелазимо на нови триједар $O\bar{e}_i$, реципрочном триједру Oe^i одговара нов реципрочни триједар $O\bar{e}^i$. Лако је утврдити ове везе између основних вектора старог и новог реципрочног триједра:

$$e^i = \sum_{j=1}^{3} \overline{\alpha}^i_j \; \bar{e}^j$$

$$\bar{e}^j = \sum_{k=1}^{3} \alpha^j_k \; e^k,$$

а затим наћи изразе нових генералисаних пројекција помоћу старих:

(15) $$\overline{A}_j = \sum_{i=1}^{3} A_i \; \overline{\alpha}^i_j .$$

Овим једначинама одговара овај став:

При трансформацији основног триједра *нове* генералисане пројекције вектора једнаке су збиру свих *старих* генералисаних пројекција, помножених свака одговарајућим коефицијентом у изразима *нових* основних вектора помоћу *старих* основних вектора (обратити пажњу на ред: прво — нове, старих и затим такође — нових, старих).

Слично претходном можемо написати и обрасце за израз старих генералисаних пројекција помоћу нових:

$$A_k = \sum_{j=1}^{3} \overline{A}_j \; \alpha^j_k .$$

3. Састављени или контраваријантни вектор

Ако је дата тројка именованих бројева

(17) $$A^1, A^2, A^3,$$

који могу бити сматрани као генералисане компоненте вектора у односу на именовани триједар са датим основним векторима, такав вектор можемо звати *састављени* вектор. Али тај једини услов, да за одређена три броја (17) можемо успоставити према једном одређеном именованом триједру један вектор, није довољан да тим бројевима заиста одговара један самосталан, конкретни облик, који није конструисан вештачки за дати триједар. Потребно је убедити се да тај облик постоји независно од сваког координатног система. Испитивање тројке бројева (17) у том смислу врши се помоћу прелаза на други и то произвољни координатни систем. Ако такво испитивање ма из којих разлога није могуће, не можемо у суштини одговорити на питање да ли заиста тројка (17) претставља један вектор, а не вештачки спојену тројку од три именована броја. Ако означена три броја после прелаза на нови координатни систем дају три нова броја

(18) $$\overline{A}^1, \overline{A}^2, \overline{A}^3,$$

који задовољавају услове прелаза (5) или (8), онда заиста можемо тврдити да бројеви (17), односно (18) претстављају један вектор.

Према томе једначине (5) или (8) играју улогу не само образаца понекад потребних трансформација, него играју важнију улогу: мерила, да ли имамо посла са векторском величином или не. Како то мерило показује инваријантност вектора, и та инваријантност за генералисане компоненте је изражена правилом са супротним (контра) редом узимања коефицијената трансформације, састављени вектор се зове ***контраваријантни вектор***. Према томе појам контраваријантности вектора у Еуклидову простору може бити изведен из одређивања тог вектора помоћу његових генералисаних компонената, тј. из чисто физичко геометриских елемената.

4. Пројицирани или коваријантни вектор

Расуђивања претходног параграфа можемо поновити и за тројку бројева сматрајући их за генералисане пројекције

$$A_1, A_2, A_3,$$

вектора на дати именовани триједар. И према њима можемо успоставити један вектор. Тај вектор је природно звати ***пројицирани вектор***. Испитивање векторске природе тог вектора се врши сада помоћу једначина (15) или (16) и пошто је инваријантност таквог вектора одређена правилом са истим (ко)редом узимања коефицијената трансформације, пројицирани вектор се зове *коваријантни вектор*. Према томе појам коваријантности се изводи из појма генералисаних пројекција, тј. и овде из чисто физичко-геометриских елемената.

5. Случај векторског поља

Нека је дат вектор $\mathfrak{V}$ као функција вектора положаја $\mathfrak{r}$, тј.

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}\,(\mathfrak{r}).$$

Такав вектор одређује векторско поље. Аналитички, сваки од вектора $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{r}$ може бити или састављени или пројицирани вектор. Према томе имамо четири могуће врсте једначина:

(19) $V^i = V^i\,(r^j)$, (20) $V^i = V^i\,(r_j)$,

(21) $V_i = V_i\,(r_j)$, (22) $V_i = V_i\,(r^j)$.

Овај запис је кратак. Детаљније, на пример, прве једначине треба развити овако:

$$V^1 = V^1\,(r^1, r^2, r^3),$$
$$V^2 = V^2\,(r^1, r^2, r^3),$$
$$V^3 = V^3\,(r^1, r^2, r^3).$$

Оне показују да је вектор $\mathfrak{V}$ одређен својим генералисаним компонентама као функцијама генералисаних компонената вектора положаја. Један и други вектор су вектори састављени, тј. контраваријантни.

Ако поново пређемо на нови триједар, могуће је извести четири серије образаца за трансформацију вектора поља. Ове једначине за векторе (19) – (22) изгледају овако:

(19′) $\overline{V}^j = \dfrac{\partial \bar r^j}{\partial r^i} V^i$, $\quad V^i = \dfrac{\partial r^i}{\partial \bar r^j} \overline{V}^j$;

(20′) $\overline{V}^j = \dfrac{\partial r_i}{\partial \bar r_j} V^i$, $\quad V^i = \dfrac{\partial \bar r_j}{\partial r_i} \overline{V}^j$;

(21′) $\overline{V}_j = \dfrac{\partial \bar r_j}{\partial r_i} V_i$, $\quad V_i = \dfrac{\partial r_i}{\partial \bar r_j} \overline{V}_j$;

(22′) $\overline{V}_j = \dfrac{\partial r^i}{\partial \bar r^j} V_i$, $\quad V_i = \dfrac{\partial \bar r^j}{\partial r^i} \overline{V}_j$.

Једначине (19′) и (20′) се односе на састављени вектор, а (21′) и (22′) на пројицирани. Знак сумирања је изостављен

према познатом правилу при понављању истог индекса. Наведени обрасци су важни стога што њихово изражавање не садржи коефицијенте α_i^j или $\overline{\alpha}_i^j$, који одређују положај новог триједра и према томе они служе као база чисто аналитичке теорије вектора.

6. Веза између састављеног и пројицираног вектора. Улога метричке форме

Овим смо поставили геометриске везе између основних вектора и вектора уопште исте природе за нови и стари триједре. Поставимо још везе између основних вектора датог и њему реципрочног триједра, тј. између вектора e_i и e^i и уопште састављених и пројицираних вектора у односу на исти именовани триједар.

Ако упоредимо изразе (1) и (14), добићемо

$$\sum_{i=1}^{3} A^i e_i = \sum_{i=1}^{3} A_i e^i, \tag{23}$$

одакле на основу (11) имамо:

$$A^k = \sum_{i=1}^{3} A_i g^{ik} = g^{ik} A_i,$$
$$A_k = \sum_{i=1}^{3} A^i g_{ik} = g_{ik} A^i, \tag{24}$$

где су

$$(e_i\, e_k) = g_{ik} = g_{ki},$$
$$(e^i\, e^k) = g^{ik} = g^{ki}. \tag{25}$$

За основне векторе, ако искористимо (23) и (24), пишемо:

$$e^k = \sum_{i=1}^{3} g^{ik} e_i, \qquad e_k = \sum_{i=1} g_{ik} e^i. \tag{26}$$

Претходни обрасци показују да величине g_{ik}, g^{ik} морају играти капиталну улогу у геометрији вектора кад се оперише са косоуглим триједром.

Од величина g_{ik} имамо свега шест независних

$$g_{11} = e_1^{\,2},\ g_{22} = e_2^{\,2},\ g_{33} = e_3^{\,2};\ \ g_{23} = e_2 e_3 \cos\alpha_1,\ g_{31} = e_3 e_1 \cos\alpha_2,$$
$$g_{12} = e_1 e_2 \cos\alpha_3,$$

које одређују интензитете основних вектора и њихов релативни положај. α_1, α_2, α_3 су углови између одговарајућих вектора. Величине g^{ik} се односе у истом смислу на реципрочни триједар.

Између величина g_{ik} и g^{ik} лако је поставити везе. Ако у једну групу једначина (26) ставимо вредности из друге групе, онда ћемо добити

$$e^k = \sum_{i=1}^{3} g^{ik} \sum_{i=1}^{3} g_{ij} e^j = \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} g^{ik} g_{ji} \right) e^j,$$

одакле непосредно следује:

$$\sum_{i=1}^{3} g^{ik} g_{ji} = \begin{cases} 1 \text{ за } k = j \\ 0 \text{ за } k \neq j. \end{cases}$$

Ове једначине дају могућност да се изразе g^{ik} помоћу g_{ij} и обратно.

Величине g_{ik}, односно g^{ik}, су коефицијенти *метричке форме*, кратко, *метрички коефицијенти*. Заиста, узмимо вектор положаја $\mathfrak{r}$ било у састављеном било у пројицираном облику:

$$\mathfrak{r} = r^1 e_1 + r^2 e_2 + r^3 e_3 = r_1 e^1 + r_2 e^2 + r_3 e^3$$

и дигнимо га на квадрат, тада ћемо добити:

$$r^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} g_{ij} r^i r^j = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} g^{ij} r_i r_j = \sum_{i=1}^{3} r^i r_i .$$

Ти изрази одређују метричку форму само за генералисане компоненте, само за генералисане пројекције и за генералисане компоненте са генералисаним пројекцијама. Последња форма не зависи од метричких коефицијената, она је најпростија и тиме показује вредност заједничке употребе генералисаних компонената и генералисаних пројекција.

У вези са различитим формама метричке форме стоје и изрази за скаларни производ двају вектора:

$$(\mathfrak{r}\mathfrak{s}) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} g_{ij} r^i s^j = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} g^{ij} r_i s_j = \sum_{i=1}^{3} r_i s^i = \sum_{i=1}^{3} r^i s_i .$$

7. Закључак

Изложена геометриска теорија контраваријантних и коваријантних вектора, сматраних као састављених или пројицираних од генералисаних компонената, односно генералисаних пројекција, може бити проширена на случај n-димензионалног Еуклидова простора и на случај Риманова простора, а такође и на величине вишег реда, на тензоре. Тако, на пример, наша геометриска теорија диаде и афинора [2], основана на проучавању модела површине другог степена, развијена за косоугли систем координата, у потпуности обухвата аналитичку теорију тензора другог реда у Еуклидову простору.

Пошто геометриска теорија увек има пред собом ту предност да непосредно решава сва питања о изналажењу инваријаната, јер се у њој инваријанте добивају само посматрањем одговарајућег геометриског облика, налазимо да дубље проучавање геометриских основа те теорије има врло важно место у такозваној геометриској теорији инваријаната.

Литература

1. *Hermann Rothe* — Einführung in die Tensorrechnung. Wien. 1924.
2. *А. Билимовић* — Геометриске основе рачуна са диадама. I. Диада и афинор. Београд. 1930.

К ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ КОНТРАВАРИАНТНЫХ И КОВАРИАНТНЫХ ОБОБЩЕННЫХ ВЕКТОРОВ

АКАДЕМИКА АН. Д. БИЛИМОВИЧА

(Доложено на заседании Академии Естественных Наук 5-II-1943)

РЕЗЮМЕ

Содержание: 1. Введение. 2. Физический вектор. 3. Вектор составленный или контравариантный. 4. Вектор определяемый проэкциями или ковариантный. 5. Случай векторного поля. 6. Связь вектора составленного с вектором определенным проэкциями. Роль метрической формы. 7. Заключение.

Современное изложение Теории векторов различает уже в Эвклидовом пространстве следующие три вида свободных векторов:

1. Физический вектор,
2. Контравариантный вектор,
3. Ковариантный вектор.

С физическим вектором связано представление его помощью прямолинейного отрезка определенного направления; величина его определятся именованным числом, именование которого отвечает природе физического понятия. Как совершенно самостоятельный конкретный геометрический образ он инвариантен по самой своей природе по отношению ко всякой координатной системе, тек как не зависит от этой системы. Определение его составляющими или проэкциями по отношению к осям какого угодно триэдра является прицессом второстепенным. Все операции с такого рода векторами могут быть выполнены чисто геометрическим путем без необходимого привлечения их координат. Вся моць векторного исчисления состоит именно в этом чисто геометрическом, инвариантном характере векторных операций. Алгебра и анализ скалярных величин здесь заменяется алгеброй и анализом геометрических величин. Практически это сводится на графические операции.

По иному вводятся в Теорию векторов понятия векторов контравариантных и ковариантных. В трехмерном пространстве это тройки чисел или функций. Для доказательства, что каждой такой тройке отвечает определеная инвариантная сущность, определенный образ, надо всегда доказать, что при перемене координатной системы эта сущность остаетя без перемены. Каждую операцию с такими тройками необходимо исследовать, остается ли она инвариантной при перемене координатной системы. Такое изложение Теории векторов отнимает от этой теоремы ее главное свойство — конкретное представление всех операций и результатов, и обращает ее, как это показывает изложение алгебры и анализа этой теории, в собрание правил формалного характера, каторые на недостаточно знакомого с сущностью читателя производят впечатление жонглирования индексами, верхним и нижним.

Задача этой статьи показать возможность развития теории контраравариантных и ковариантных векторов чисто геометрическим путем, путем введения понятий обобщенных составляющих и обобщенных проэкций и то по отношению к так называемому именованному триэдру. Больше всего материала для такого изложения дает книга Hermann'a Rothe [1] независимо от того, что и у него изложение Теории векторов и тензоров является аналитическим. Наше изложение по существу геометрическое; оно отличаетая от изложения Rothe и с формальной стороны [2].