СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

ГЛАС CLXXXIX

ПРВИ РАЗРЕД

95

ПРИРОДЊАЧКЕ НАУКЕ

4.

А. БИЛИМОВИЋ

ПРИРОДНА ОСОБИНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КОНИЧНОГ ПРЕСЕКА

БЕОГРАД, 1946

ПРИРОДНА ОСОБИНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КОНИЧНОГ ПРЕСЕКА

од

АНТОНА БИЛИМОВИЋА

ПРИРОДНА ОСОБИНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КОНИЧНОГ ПРЕСЕКА

од
АНТОНА БИЛИМОВИЋА

(Приказано на скупу Академије природних наука 15-VI-1942)

Садржај. — 1. Диференцијална једначина коничног пресека. — 2. Природна особина коничног пресека. — 3. Диференцијална природна особина коничног пресека. — 4. Природна диференцијална једначина коничног пресека. — 5. Једначина коничног пресека изражена помоћу природних елемената. — 6. Закључак.

1. Диференцијална једначина коничног пресека

Једначини другог реда

(1) $$a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_1 x + 2a_2 y + a_0 = 0,$$

где су a_{11}, a_{12}, ..., a_0 произвољне константе, одговара позната диференцијална једначина, коју можемо добити овако.

Ако претпоставимо да је $a_{22} \neq 0$, једначину (1) увек можемо претставити овако:

(2) $$(y + Ax + B)^2 = Cx^2 + Dx + E,$$

где су A, B, ..., E константе, чије вредности лако одређујемо помоћу констаната a_{11}, a_{12}, ..., a_0.

Ако уведемо ознаке

$$P = y + Ax + B,$$

$$Q = \frac{dP}{dx} = y' + A$$

из једначине (2), коју пишемо овако

$$P^2 = Cx^2 + Dx + E,$$

прво после трипут поновљеног диференцирања искључујемо константе C, D и E и добијамо: $Py''' + 3Qy'' = 0$.

За елиминисање констаната A и B, које улазе у P и Q, пиференцирамо претходну једначину још двапут; после тога дишемо овај систем једначина:

$$Py''' + 3Qy'' = 0,$$
$$Py^{IV} + 4Qy''' + 3y''^2 = 0,$$
$$Py^{V} + 5Qy^{IV} + 10y''y''' = 0.$$

Резултат елиминисања можемо написати у облику детерминанте:

$$\begin{vmatrix} y''', & 3y'', & 0 \\ y^{IV}, & 4y''', & 3y'' \\ y^{V}, & 5y^{IV}, & 10y''' \end{vmatrix} = 0.$$

У израчунатом облику ова детерминанта даје тражену познату диференцијалну једначину:

(3) $$9y''^2y^{V} + 45y''y'''y^{IV} + 40y'''^3 = 0$$

коничног пресека произвољне форме и произвољног положаја у равни, изузев случаја $a_{22} = 0$.

У специјалном случају, кад је $a_{22} = 0$, а $a_{12} \neq 0$, једначину (1) можемо написати овако:

$$y(x+a) = Lx^2 + Mx + N,$$

где су a, L, M и N константе. Сходно претходном, после диференцирања добијамо систем:

$$y'''(x+a) + 3y'' = 0,$$
$$y^{IV}(x+a) + 4y''' = 0,$$

који после елиминисања a доводи до једначине:

(4) $$4y'''^2 - 3y''y^{IV} = 0.$$

Други специјални случајеви, чију анализу нећемо вршити, доводе до још једноставнијих диференцијалних једначина. Тако, на пример, једначина параболе

$$y^2 - 2px = 0,$$

где је p произвољна константа, доводи до једначине првог реда:

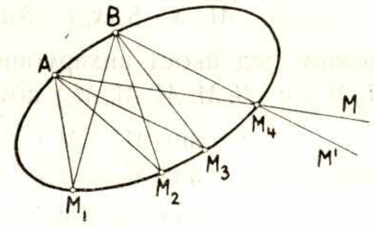
(5) $$2xy' - y = 0.$$

2. Природна особина коничног пресека

За природну особину сваког коничног пресека можемо узети особину, коју изражава ова Chasles'ова теорема:

Праве линије које спајају две сталне тачке A и B коничног пресека са променљивом тачком M тог пресека описују редом два хомографичка снопа.

Другим речима, ако су M_1, M_2, M_3, M_4 четири тачке тог пресека, а A и B су исто тако његове тачке, онда снопови $(A.M_1M_2M_3M_4)$ и $(B.M_1M_2M_3M_4)$ имају исте анхармоничке односе (слика 1).



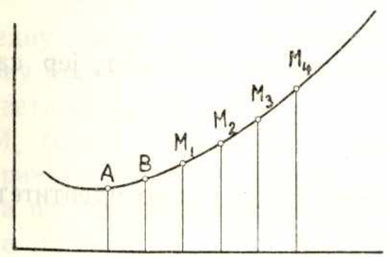
Сл. 1.

На тај начин, ако су A, B, M_1, M_2, M_3, пет тачака, које одређују конични пресек, онда сваку шесту тачку тог пресека можемо конструисати овако. Конструишимо произвољну праву AM, тада ћемо добити комплетан сноп $(A.M_1M_2M_3M)$ са центром у A и са анхармоничким односом одређене вредности. Узимајући сад тачку B за центар, конструишимо сноп $(B.M_1M_2M_3M')$ са правом BM', тако да он има са првим снопом исти анхармонички однос. Пресек правих AM и BM', тачка M_4, припада коничном пресеку.

Исказана особина шесте тачке коничног пресека је природна особина те криве линије, јер она сама и њезино изражавање не зависе од било каквог координатног система.

3. Диференцијална природна особина коничног пресека

Ако узмемо на коничном пресеку шест бескрајно блиских тачака A, B, M_1, M_2, M_3, M_4, изразимо за те тачке горе споменуту природну особину па пређемо на граничне вредности, добићемо диференцијалну природну особину тог пресека. У специјалним случајевима једна или више тачака могу бити и на коначном, чак и бесконачном растојању од осталих.



Сл. 2.

Изразимо прво ту диференцијалну особину помоћу Декартових координата.

Узмимо на кривој линији са једначином

$$y = f(x)$$

шест бескрајно блиских тачака (слика 2) са координатама:

$$(6)\quad \begin{array}{lll} 1. & A & x,\quad y \\ 2. & B & x+dx,\ y+dy \\ 3. & M_1 & x+2\,dx,\ y+2\,dy+d^2y \\ 4. & M_2 & x+3\,dx,\ y+3\,dy+3\,d^2y+d^3y \\ 5. & M_3 & x+4\,dx,\ y+4\,dy+6\,d^2y+4\,d^3y+d^4y \\ 6. & M_4 & x+5\,dx,\ y+5\,dy+10\,d^2y+10\,d^3y+5\,d^4y+d^5y \end{array}$$

и изразимо једнакост анхармоничких односа снопова $(A.M_1 M_2 M_3 M_4)$ и $(B.M_1 M_2 M_3 M_4)$ помоћу једначине:

$$(7)\quad \frac{\sin(M_3 A M_1)}{\sin(M_3 A M_2)} : \frac{\sin(M_4 A M_1)}{\sin(M_4 A M_2)} = \frac{\sin(M_3 B M_1)}{\sin(M_3 B M_2)} : \frac{\sin(M_4 B M_1)}{\sin(M_4 B M_2)}.$$

Израчунавање сваког синуса заменимо израчунавањем површине одговарајућег троугла. Тако, на пример,

$$\sin(M_3 A M_1) = \frac{2(M_3 A M_1)}{A M_1 \cdot A M_3},$$

где смо са $(M_3 A M_1)$ означили површину троугла са наведеним теменима, а са $A M_1$ и $A M_3$ дужине страна тог троугла.

Ако увртимо ове вредности синуса у једначину (7), долазимо до једначине:

$$(8)\quad \frac{(M_3 A M_1)}{(M_3 A M_2)} : \frac{(M_4 A M_1)}{(M_4 A M_2)} = \frac{(M_3 B M_1)}{(M_3 B M_2)} : \frac{(M_4 B M_1)}{(M_4 B M_2)},$$

коју замењујемо овом:

$$(9)\quad (M_3 A M_1)(M_4 A M_2)(M_3 B M_2)(M_4 B M_1) = (M_3 B M_1)(M_4 B M_2)(M_3 A M_2)(M_4 A M_1).$$

Ако сад у једначину (9) ставимо вредности (6) координата тачака, извршимо потребна множења и одаберемо на левој и десној страни чланове истог реда незнатности, добићемо узастопце ове резултате:

за бескрајно мале 8-ог реда имамо идентитет, јер са обе стране стоји члан

$$180\,(d^2y)^4;$$

за бескрајно мале 9-ог реда исто тако имамо идентитет са вредношћу страна

$$1080\,(d^2y)^3\,d^3y.$$

За бескрајно мале 10-ог реда исто тако имамо идентитет са вредностима:

$$495\,(d^2y)^3\,d^4y + 2400\,(d^2y)^2\,(d^3y)^2.$$

За 11-ти ред имамо једначину

$$d^2y\left[66\,(d^2y)^2\,d^5y + 2175\,d^2y\,d^3y\,d^4y + \frac{7000}{3}\,(d^3y)^3\right] = d^2y\left[69\,(d^2y)^2\,d^5y + 2160\,d^2y\,d^3y\,d^4y + \frac{7040}{3}\,(d^2y)^3\right].$$

После свођења чланова и поделе са dx^{11} добићемо једначину за изводе:

$$y''\,(9\,y''^2\,y^{\mathrm{V}} - 45\,y''\,y'''\,y^{\mathrm{IV}} + 40\,y'''^3) = 0.$$

Она се замењује једначинама:

$$y'' = 0,$$

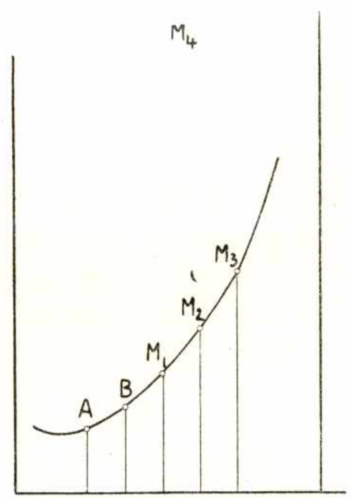
што одговара правој линији, и

$$(10)\quad 9\,y''^2\,y^{\mathrm{V}} - 45\,y''\,y'''\,y^{\mathrm{IV}} + 40\,y'''^3 = 0,$$

која претставља диференцијалну једначину (3) коничног пресека. Према томе долазимо до овог резултата:

Диференцијална једначина петог реда коничног пресека изражава диференцијалну природну особину тог пресека која се састоји у томе да, узимајући две бескрајно блиске тачке за центре хомотетичких снопова чији зраци пролазе кроз остале четири бескрајно блиске тачке тог пресека, добивамо два снопа са истим анхармоничким односом.

Ако конични пресек има једну тачку у бесконачности, ову бесконачну тачку можемо узети за шесту тачку, за тачку M_4 (слика 3) и тада, после примене тог истог обрасца (9), са примедбом да су површине са теменом у тачки M_4, рецимо површина $(M_4 A M_1)$, про-



Сл. 3

порционалне растојањима другог темена од бескрајне стране, за наш случај дужини $2\,dx$, долазимо до једначине:

$$(4\,d^2y+4\,d^3y+d^4y)\left(\frac{3}{2}\,d^2y+\frac{5}{2}\,d^3y+d^4y\right)=$$

$$=(3\,d^2y+4\,d^3y+d^4y)\left(2\,d^2y+\frac{8}{3}\,d^3y+d^4y\right).$$

Из те једначине добијамо два идентитета са вредностима

$$6\,(d^2y)^2 \quad \text{и} \quad 16\,d^2y\,d^3y$$

и једначину

$$\left(\frac{3}{4}+4\right)d^2y\,d^4y+10\,(d^3y)^2=$$

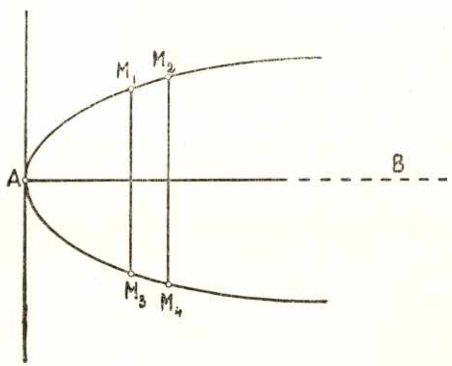
$$=(3+2)\,d^2y\,d^4y+\frac{32}{3}(d^3y)^2,$$

која доводи до једначине (4)

$$4\,y'''^2-3\,y''\,y^{\mathrm{IV}}=0.$$

Према томе и у овом специјалном случају диференцијална једначина коничног пресека изражава диференцијалну природну особину тог пресека.

И у случају параболе са диференцијалном једначином (5) можемо показати, да и ова једначина одговара истој природној особини коничног пресека. Заиста, ако узмемо тачку A (слика 4) у темену параболе, тачку B у бесконачности на оси симетрије параболе, тачке M_1 и M_2 са координатама $(x,\ y)$, $(x+dx,\ y+dy)$ и M_3 и M_4, симетричне са претходним у односу на осу симетрије параболе, онда примена једначине (9) доводи до једначине



Сл. 4

$$x\,(x+dx)\,[\,A\,B\,(2\,y+dy)-(2\,xy+x\,dy+y\,dx)\,]^2=$$

$$=(A\,B-x)\,(A\,B-x-dx)\,[\,2\,xy+x\,dy+y\,dx\,]^2,$$

где смо са AB означили бескрајно растојање тачака A и B. Бирајући коефицијент код AB^2, добићемо једначину

$$x\,dx\,(dy)^2+2\,xy\,dx\,dy-y^2\,(dx)^2=0,$$

из које, задржавајући само чланове другог реда, имамо тражену једначину (5):

$$2\,xy'-y=0.$$

4. Природна диференцијална једначина коничног пресека

Узмимо диференцијалну једначину

(10) $$9\,y''^2\,y^{\mathrm{V}}-45\,y''\,y'''\,y^{\mathrm{IV}}+40\,y'''^3=0,$$

уведимо кривину K криве линије, која се одређује обрасцем

(11) $$K=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

и помоћу величине K и извода те величине по *дужини лука* криве изразимо изводе y'', y''', y^{IV} и y^{V} и заменимо их у једначини (10).

Ако ставимо

$$(1+y'^2)^{3/2}=M,$$

једначину (11) можемо написати овако:

(12_1) $$y''=KM,$$

одакле после узастопног диференцирања имамо:

(12_2) $$y'''=K'\frac{ds}{dx}M+KM'=(K'+3y'\,K^2)\,M^{4/3},$$

(12_3) $$y^{\mathrm{IV}}=(K''+10y'\,KK'-12\,K^3)\,M^{5/3}+15\,K^3\,M^{7/3},$$

(12_4) $$y^{\mathrm{V}}=(K'''+15y'\,KK''+10y'\,K'^2+86\,K^2K'-60y'\,K^4)\,M^2+$$
$$+105\,K^2K'\,M^{8/3}+105y'\,K^4\,M^{8/3},$$

где су

(13) $$K'=\frac{dK}{ds},\quad K''=\frac{d^2K}{ds^2},\quad K'''=\frac{d^3K}{ds^3},$$

тј. изводи кривине по дужини лука криве линије.

Ако се сад место произвољних оса зауставимо на природним осама, од којих је прва тангента на кривој линији, а друга нормала, онда за такве осе је

$$y' = 0$$

и, према томе,

$$M = 1.$$

Обрасци трансформације (12_1)—(12_4) тада узимају облик:

$$\begin{aligned} y'' &= K, \\ y''' &= K', \\ y^{\mathrm{IV}} &= K'' + 3K^3, \\ y^{\mathrm{V}} &= K''' + 19K^2K'. \end{aligned} \tag{14}$$

После примене тих образаца, једначина (10) доводи до једначине:

$$9K(KK''' - 5K'K'' + 4K^3K') + 40K'^3 = 0, \tag{15}$$

коју треба сматрати као *природну диференцијалну једначину коничног пресека општег облика* изражену помоћу кривине.

Ако место кривине уведемо полупречник кривине R, преко везе

$$KR = 1,$$

и извршимо смену у једначини (15), добићемо једначину

$$9(R^2R''' - RR'R'' + R') + 4R'^3 = 0, \tag{16}$$

која претставља исту природну једначину изражену помоћу полупречника кривине.

E. Cesàro у својим предавањима о природној геометрији (Vorlesungen über natürliche Geometrie. Zweite Auflage, 1926), на страни 45, даје под (12) једначину

$$\frac{1}{9}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 = -1 + A\rho^{2/3} - B\rho^{4/3}, \tag{17}$$

где је $\rho = R$, а A и B су произвољне константе, из које изводи *природну једначину коничног пресека* (die natürliche Gleichung des Kegelschnitts) у облику:

$$s = \frac{1}{3}\int \frac{d\rho}{\sqrt{-1 + A\rho^{2/3} - B\rho^{4/3}}}.$$

Ако из Cesàro-ве једначине (17) елиминишемо константе A и B, добићемо поново нашу природну диференцијалну једначину у облику (16).

Једначина (16) може бити добивена и непосредном применом природне особине коничног пресека изражене једначином (9), ако за тачке A, B, M_1, M_2, M_3, M_4 узмемо шест узастопних тачака на једнаким растојањима ds.

5. Једначина коничног пресека изражена помоћу природних елемената

Диференцијална једначина коничног пресека у природном облику показује да сваки конични пресек можемо конструисати овако. Полазећи од дате тачке и правца тангенте, што одређују први елемент криве, конструишемо други елемент помоћу кривине, трећи елемент помоћу првог извода кривине по луку, четврти помоћу другог извода. Вредности кривине и тих извода морају да буду дате. Пети и сваки идући елемент претходним подацима је већ одређен, јер вредности трећег и идућих извода кривине по луку одређује диференцијална једначина коничног пресека.

Према томе једначину сваког коничног пресека можемо изразити само помоћу константних величина K, K', K'', које претстављају вредности кривине и њезиних првих двају извода по дужини лука за одређену тачку тог пресека. Покажимо како се изражава та једначина.

Ако почетак координатних оса сместимо у тачку на кривој линији, осу x пружимо дуж тангенте, а осу y у смеру кривине, онда једначину сваког коничног пресека можемо написати овако:

$$A x^2 + 2B xy + C y^2 + 2E y = 0. \tag{18}$$

Изводи $y', y'', y''', y^{\mathrm{IV}}$, израчунати из ове једначине за почетак координата, имају вредности:

$$y' = 0,\ y'' = -\frac{A}{E},\ y''' = 3\frac{B}{E}\cdot\frac{A}{E},\ y^{\mathrm{IV}} = -3\frac{A}{E}\left(4\frac{B^2}{E^2} + \frac{AC}{E^2}\right).$$

Ако упоредимо ове вредности извода са вредностима из једначина (14), можемо израчунати коефицијенте једначине (18) и то у облику:

$$A = -KE,\ B = -\frac{1}{3}\frac{K'}{K}E,\ C = \left(\frac{4}{9}\frac{K'^2}{K^3} - \frac{K''}{3K^2} - K\right)E.$$

Ако ставимо ове вредности у једначину (18), добићемо тражену једначину коничног пресека:

$$9K^4x^2 + 6K'K^2xy + (K^4 - 4K'^2 + 3KK'')\,y^2 - 18K^3y = 0,$$

која садржи само природне елементе — кривину и њезина два извода по дужини лука за одређену тачку криве линије.

Ако место кривине уведемо полупречник кривине, из претходне једначине, после трансформације, добићемо једначину

$$9x^2 - 6R'xy + (9 + 2R'^2 - 3RR'')y^2 - 18Ry = 0.$$

Природа криве линије зависи од вредности величине, пропорционалне дискриминанти,

$$R'^2 - 3RR'' + 9 = \Delta,$$

наиме: за услове $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$ имамо елипсу, параболу и хиперболу или њихове дегенеранте.

Ако је $R' = 0$, крива линија је симетрична у односу на нормалу. Ако је при томе и $R'' = 0$, крива линија се претвара у кружну линију са једначином

$$x^2 + y^2 - 2Ry = 0.$$

Ако је $R' = 0$ и $R'' \neq 0$ под условима $R'' < \frac{3}{R}$, $R'' = \frac{3}{R}$ $R'' > \frac{3}{R}$ имамо елипсу, параболу и хиперболу, чије су једначине написане у односу на систем координата са почетком у темену и осом дуж осе симетрије.

Ако је $R'' = 0$, а $R' \neq 0$, крива линија увек спада у класу елипсе.

У нашем извођењу смо претпоставили да је $E \neq 0$. Ако је $E = 0$, једначини (18) одговарају две стварне, имагинарне или поклапајуће праве линије. Природно посматрање скупа тих правих, као криве линије, искључује се.

6. Закључак

Претходно излагање показује да пројективна особина коничног пресека, изражена Chasles-овом теоремом заиста може бити сматрана као основна геометриска особина те криве линије не само у коначном облику него и у диференцијалном.

Неколико писаца [1] се бавило диференцијалном једначином коничног пресека. На жалост, нисмо имали могућности да прегледамо радове тих писаца. Под руком нам је била само књига Блашкеа [2], који се бави том једначином са гледишта афине геометрије. Према томе нисмо нашли оно тумачење претходне једначине које овде износимо. Ако оно постоји, не оспоравамо приоритет претходника, али и у том случају наш чланак може бити од интереса са гледишта продубљавања класичног материјала.

О НАТУРАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ КОНИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

АКАДЕМИКА АН. Д. БИЛИМОВИЧА

(Доложено на заседании Академии Естественных Наук 15-VI-1942)

РЕЗЮМЕ

Содержание: 1. Дифференциальное уравнение конического сечения. 2. Натуральное свойство конического сечения. 3. Дифференциальное натуральное свойство конического сечения. 4. Натуральное дифференциальное уравнение конического сечения. 5. Уравнение конического сечения выраженное помощью натуральных элементов.

1. Из уравнения конического сечения в форме

$$(y + Ax + B)^2 = Cx^2 + Dx + E$$

получается помощью весьма простых операций следующее известное дифференциальное уравнение конического сечения

$$9y''^2 y^{V} - 45y''y'''y^{IV} + 40y'''^3 = 0;$$

кроме того анализируются некоторые специальные случаи.

2. Натуральное свойство конического сечения основывается на следующей теореме Chasles'a:

Прямые, которые соединяют две постоянные точки A и B конического сечения с переменной точкой M этого сечения, образуют последовательно два гомографических (проэктивных) пучка.

Другими словами, если M_1, M_2, M_3, M_4 четыре точки конического сечения, а A и B также точки этого сечения, то пучки

$$A.\ M_1M_2M_3M_4 \quad \text{и} \quad B.\ M_1M_2M_3M_4$$

находятся в проэктивном соотношении (черт. 1).

Если взять шесть бесконечно близких точек A, B, M_1, M_2, M_3, M_4 конического сечения (черт. 2), выразить помощью их вышеуказанное натуральное свойство конического сечения и перейти к пределу, то получится дифференциальное натуральное свойство этого конического сечения.

После выражения этого дифференциального свойства для кривой с уравнением $y = f(x)$ получается дифференциальное уравнение конического сечения. Это выражается теоремой:

Дифференциальное уравнение пятого порядка конического сечения выражает его дифференциальное натуральное свойство, которое состоит в следующем: если две бесконечно близкие точки взят за вершины пучков, прямые которых проходят через четыре другие точки конического сечения, то пучки будут проэктивными.

4. Так как выраженное свойство конического сечения натурально, то соответствующее дифференциальное уравнение можно выразить через кривизну K и ее производные по длине дуги. Так выраженное уравнение имеет форму

$$9K(KK'' - 5K'K'' + 4K^3K') + 40K'^3 = 0$$

и представляет в общей форме натуральное дифференциальное уравнение конического сечения.

5. Из последнего уравнения легко видеть, что всякое коническое сечение определяется одной точкой, касательной в этой точке и величинами K, K', K''. Помощью этих постоянных уравнение конического сечения выражается следующим образом:

$$9K^4x^2+6K'K^2xy+(K^4-4K'^2+3KK'')y^2-18K^3y=0,$$

причем за координатные оси взяты касательная и нормаль к кривой.

6. Предыдущие рассуждения показывают что теорема Chasles'я может быть использована не только в конечной но и в дифференциальной форме.

Дифференциальным уравнением конического сечения занималось много авторов [1]. К сожалению мы не имеем возможности ознакомиться с их работами. Мы имеем в распоряжении только книгу Blaschke [2], который рассматривает это уравнение и точки зрения аффинной геометрии. Толкование уравнения, которое предлагается нами, нам неизвестно. Если же таковое существует, то мы не настаиваем на приоритете, но полагаем, это та форма, в которой здесь излагается этот вопрос представляет интерес с точки зрения углубления классического материала.

Литература

1. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. B. III. 3. Heft 7. *L. Berwald.* Differentialinvarianten in der Geometrie. S. 96.

2. *W. Blaschke* — Vorlesungen über Differentialgeometrie. II. Affine Differentialgeometrie. 1923.