ACADÉMIE SERBE DES SCIENCES

MONOGRAPHIES
TOME CCCXIV

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES
№ 21

A. BILIMOVIĆ

SUR UN PRINCIPE PHÉNOMÉNOLOGIQUE DIFFÉRENTIEL GÉNÉRAL

Présenté à la II-ème Séance, du 27-II-1958,
de la Classe des Sciences mathématiques et naturelles

Rédacteur
V. V. MICHKOVITCH
Secrétaire de la Classe des Sciences mathématiques et naturelles

BEOGRAD
1958

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

ПОСЕБНА ИЗДАЊА
КЊИГА CCCXIV

ОДЕЉЕЊА ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИХ НАУКА
КЊИГА 21

А. БИЛИМОВИЋ

О ЈЕДНОМ ОПШТЕМ ФЕНОМЕНОЛОШКОМ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОМ ПРИНЦИПУ

Примљено на II скупу, од 27-II-1958, Одељења природно-математичких наука

Уредник
академик *В. В. МИШКОВИЋ*
секретар Одељења природно-математичких наука

ИЗДАВАЧКА УСТАНОВА СРПСКЕ АКАДЕМИЈЕ НАУКА
БЕОГРАД
1958

САДРЖАЈ

ПРЕДГОВОР

Τὸ ὄντως ὄν.
Πλάτων. Πολιτεία, V. 477. B.

Ради конкретизовања уводних објашњења почнимо од напомене о такозваним општим принципима механике.

Сваки од добро познатих општих, диференцијалних и интегралних, принципа механике (види, напр., [1]) може служити као полазна основа теорије механичких појава одређене категорије. Једни принципи су ширег обима примене, други су ужег. Према томе, да ли су системи холономни или нехолономни, склерономни или не, конзервативни или не, са дискретно или непрекидно распоређеним масама, згодно је за проучавање појаве узимати један или други принцип у одређеној форми. Понеки од тих принципа, нарочито екстремални, могу се уопштити и послужити као основа теорије и других, сем чисто механичких, физичких појава и то чак и таквих, где се механичке особине појаве тек назиру по некој аналогији.

Методу решавања механичких проблема помоћу општих принципа можемо рашчланити на ове делове.

I. Преглед и опис датог конкретног материјалног система са гледишта његова састава и стања, тј. са ових гледишта: 1. геометриског (распоред маса, њихов састав и положај; математички то значи увођење, рецимо, координата система у коначном или бесконачном броју, при чему се у последњем случају говори о неким површинама, односно линијама које одређују распоред маса система). 2. кинематичког (област кретања маса, ограничење тих кретања и принудне промене, што се математички изражава једначинама веза, коначних и диференцијалних). 3. динамичког (утолико да саставимо преглед сила, унутрашњих и спољашњих, које дејствују на масе система; математички то значи да набројимо величине, рецимо, координате, које су потребне за одређивање сила, активних и реакција).

II. Избор општег принципа, који одговара оним особинама система које су набројане под I., и његово формулисање за дати материјални систем и за дати проблем о кретању односно мировању тог система.

III. Примена принципа, тј. изражавање свих оних величина и односа међу њима, које су потребне за ту примену.

IV. Примена поступка, односно алгоритма, који тражи одговарајући принцип за добијање диференцијалних једначина проблема и извођење тих једначина.

V. Решавање, тачно или приближно са потребном тачношћу, система диференцијалних једначина проблема узимајући у обзир почетне, односно контурне, услове уоченог проблема.

VI. Анализа потпуног или делимичног добијеног решења, извођење потребних особина кретања или мировања система.

Из овог програма два дела су нарочито карактеристична за сваки појединии принцип. Принципи се управо разликују по тим деловима. То су: *a*. формулисање принципа у математичкој форми било у облику диференцијалног, било интегралног израза и *b*. садржај поступка чија примена доводи до целокупног система диференцијалних једначина.

Математичко формулисање принципа и његова поступка може имати или формалан, чисто и само математички карактер или имати феноменолошко-конкретан карактер, кад свака величина и сваки израз имају јасно физичко тумачење и сваки поступак изражава јасне физичке операције. Јасно је да сваки општи принцип има утолико већи природни значај уколико јаснији и конкретнији феноменолошки карактер има формулисање како самог принципа тако и његова поступка.

У овој расправи, прво, дајемо феноменолошко тумачење оног принципа механике, који смо назвали Пфафовим принципом и чији је садржај, у другој форми, одавно био познат. Примене тог принципа су се показале као врло згодне, а његова теорија поново се, нарочито у последње време, интензивно разрађује. Затим узимамо схему тог принципа за формулисање једног општег феноменолошког диференцијалног принципа. Феноменолошко извођење тог принципа и феноменолошко тумачење његова поступка, односно алгоритма, то је главни циљ ове расправе.

Академику В. В. Мишковићу и професору Т. П. Анђелићу, који су ми, као редактори, помогли, најсрдачније захваљујем. Изражавам захвалност такође Издавачкој установи „Научно дело", њеном управнику С. Н. Рајковићу, као и колективу Графичког предузећа „Академија".

ГЛАВА ПРВА

Историјат Пфафова принципа

1.1. Пфафов израз и његове једначине

У последње време такозвани Пфафов принцип механике, чији математички израз претставља једна диференцијална линеарна форма и чији се поступак састоји у формалном писању такозваних првих Пфафових једначина, почео је да привлачи све већу пажњу на себе.

На жалост ми не располажемо довољном литературом да у свима детаљима успоставимо историјат тог принципа. То је утолико теже, што тај принцип по својој форми стоји у тесној вези са такозваним Пфафовим проблемом о редукцији одговарајуће диференцијалне форме, а овај проблем је уско везан са теоријом парцијалних диференцијалних једначина и једначина са тоталним диференцијалима, а такође и са варијационим рачуном. Према томе је област, где може бити споменуто што се односи на Пфафов принцип, сувише велика и разграната, а тада је тешко повући црвени конац који би повезао само оно што се односи на Пфафов принцип, те према томе је тешко ући и у све фазе историског развитка Пфафовог принципа односно Пфафове методе у механици.

Питање се компликује још и тиме што су се у последње време појавиле код неких група математичара тенденције да се бришу сви раније добивени резултати и од нових формалних основа, у суштини мало различитих од старих, поново се изводе сви, од почетка, стари резултати и издају се за нове, без обзира на то што се они често разликују од старих, и то незнатно, само по форми. Одвајање у таквим излагањима старих резултата од нових то је велики посао, који, мени изгледа, треба да врше, пре свега, сами новатори.

Линеарна диференцијална форма

(1) $$\Phi = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots X_N\,dx_N = \sum_{i=1}^{N} X_i\,dx_i\,,$$

где су X_i $(i=1, 2, \ldots, N)$ функције променљивих $x_1, x_2, \ldots, x_N$, а dx_i $(i=1, 2, \ldots, N)$ њихови диференцијали, зове се *Пфафов израз* или *Пфафова линеарна форма* према немачком научнику Johann-у Friedrich-у Pfaff-у (1765—1825), који је основао теорију таквих диференцијалних израза [2].

Систем диференцијалних једначина

(2) $$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\,dx_j = 0, \qquad (i=1, 2, \ldots, N),$$

са вредностима

$$a_{ij} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j}, \qquad (i, j=1, 2, \ldots, N),$$

претставља *први систем Пфафових једначина,* кратко, *Пфафове једначине.*

Посматране само са аналитичког гледишта, форма (1) и једначине (2) имају ове важне особине.

1. Једначине (2) се не мењају ако форму (1) помножимо ма којим константним множитељем, различитим од нуле.

2. Ако форми (1) додамо тотални диференцијал произвољне функције W променљивих x_i $(i=1, 2, \ldots, N)$, једначине (2) се не мењају.

Ако форме, чије су Пфафове једначине еквивалентне, такође сматрамо као еквивалентне и еквивалентност обележимо са $\approx$, имамо

$$\Phi + dW \approx \Phi\,.$$

Из ове особине непосредно следује да сваки члан $X_i\,dx_i$ форме можемо заменити са $-x_i\,dX_i$, јер имамо ове еквивалентности у односу на форму

$$X_i\,dx_i \approx X_i\,dx_i - d(X_i\,x_i) \approx -x_i\,dX_i\,.$$

3. Ако место променљивах $x_1, x_2, \ldots, x_N$ уведемо нове променљиве, $y_1, y_2, \ldots, y_N$, и претставимо форму Φ у облику

$$\Psi = \sum_{i=1}^{N} Y_i\,dy_i,$$

и саставимо за њу Пфафове једначине

(3) $$\sum_{=1}^{N} b_{ij}\,dy_j = 0\,, \qquad (i=1, 2, \ldots, N),$$

при чему је

$$b_{ij} = \frac{\partial Y_j}{\partial y_i} - \frac{\partial Y_i}{\partial y_j}, \qquad (i, j=1, 2, \ldots, N),$$

лако је доказати (гл., напр., [3]) да је систем једначина (3) еквивалентан са системом једначина (2).

4. Према G. Prange-у [4], E. Schering [5] је први поставио везу између Пфафовог израза и диференцијалних једначина у каноничном облику.

Ставимо $N=2n+1$ и означимо прве $2n$ променљиве са

(4) $$x_1, x_2, \ldots, x_n, \qquad y_1, y_2, \ldots, y_n,$$

а последњу $(2n+1)$—у са t.

Пфафов израз напишимо овако

(5) $$\Phi = \sum_{i=1}^{n} y_i\,dx_i - H\,dt\,,$$

где је H функција променљивих (4) и t. Пфафове једначине тада добивају облик

$$dy_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}\,dt\,,$$

$$0 = dx_i - \frac{\partial H}{\partial y_i}\,dt\,,$$

$$-dH = -\frac{\partial}{\partial t}(H\,dt)$$

и доводе до каноничних једначина

(6) $$\frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

и до идентитета на основу тих једначина.

5. Показана веза између Пфафове форме (5) и Пфафових једначина у каноничном облику (6) даје могућност да се једноставно формулише суштина теорије такозваних каноничних трансформација. Прелаз од променљивих x_i, y_i, t на променљиве ξ_i, η_i, τ

одређује каноничну трансформацију, ако каноничне једначине у првим промењљивим прелазе исто тако у каноничне једначине у другим промењљивим. Као што је познато, каноничне трансформације могу бити или специјалног облика, који важи само за конкретан систем диференцијалних једначина, или општег типа, који се може применити на произвољне каноничне једначине.

Зауставимо се на случају кад t остаје без промене.

Јасно је да је у случају еквивалентности две Пфафове форме

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\, dx - H dt \approx \sum_{i=1}^{n} \eta_i\, d\xi_i - K dt\,,$$

где су

$$H = H(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_n, t),$$
$$K = K(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n;\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, t),$$

систем каноничних једначина прве форме еквивалентан систему каноничних једначина друге форме.

Као што је познато, за каноничну трансформацију општег типа везу између старих и нових промењљивих можемо поставити на овај начин. Уведимо произвољне функције

$$F, f_1, f_2, \ldots, f_m$$

ових аргумената

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, t,$$

и затим ставимо

$$\eta_i = \frac{\partial F}{\partial \xi_i} + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial \xi_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$y_i = -\frac{\partial F}{\partial x_i} - \sum_{s=1}^{m} \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$f_s = 0, \qquad s = 1, 2, \ldots, m,$$

где су λ_s константне величине. Из написаних једначина непосредно изводимо

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\, dx_i - \sum_{i=1}^{n} \eta_i\, d\xi_i = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial F}{\partial \xi_i} d\xi_i\right) - \sum_{s=1}^{m} \lambda_s \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_s}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_s}{\partial \xi_i} d\xi_i\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial t}\right) dt - d\left(F + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s f_s\right).$$

Из овог идентитета добијамо ову везу између две форме

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\, dx_i - H dt \approx \sum_{i=1}^{n} \eta_i\, d\xi_i - K dt\,,$$

где је

$$K = H - \frac{\partial F}{\partial t} - \sum_{s=1}^{k} \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial t}.$$

На тај начин можемо тврдити да је систем једначина

$$\frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

еквивалентан систему

$$\frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial \xi_i}, \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial \eta_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

У специјалном случају кад функције F и f_s $(s = 1, 2, \ldots, m)$ не зависе експлицитно од времена, треба трансформисати само функцију H на нове промењљиве.

Што се тиче општег случаја кад се мења и независно промењљива, тај случај се своди на претходни.

Заиста, допунимо старе промењљиве још промењљивом h, тако да имамо $2n+2$ промењљиве

(1′) $$x_1, x_2, \ldots, x_n, t, y_1, y_2, \ldots, y_n, h,$$

и саставимо за њих форму

(2′) $$\sum y_i\, dx_i + h\, dt,$$

под условом да је

(3′) $$H(x_1, x_2, \ldots, x_n, t, y_1, y_2, \ldots, y_n) + h = 0\,.$$

Затим уведимо нове промењљиве такође на броју $2n+2$

(4′) $$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \tau, \eta_1, \eta_1, \ldots, \eta_n, k,$$

и за њих саставимо форму

(5′) $$\sum \eta_i\, d\xi_i + k\, d\tau + \text{тотални диференцијал},$$

сматрајући да постоји нека веза облика

(6′) $$K(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \tau, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) + k = 0\,.$$

После тога извршимо каноничну трансформацију форме (2′) у форму (5′). На основу те трансформације можемо промењљиве (1′) изразити у функцији промењљивих (4′) и помоћу тих израза из једначине (3′) добити једначину са промењљивим (4′). Ако ту једначину решимо по k добићемо једначину облика (6′), која одређује функцију K, а тиме се завршава трансформација.

Приметимо да у случају каноничних трансформација улогу променљивих, рецимо, x_i и y_i можемо променити и то на основу еквивалентности форми

$$\sum y_i\,dx_i - H\,dt \approx -\sum x_i\,dy_i - H\,dt,$$

јер се те форме разликују само тоталним диференцијалом $d(\Sigma x_i y_i)$. Према томе канонична трансформација се може извршити како помоћу произвољне функције

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

тако и помоћу произвољних функција са овим распоредом аргумената

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_n;\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n).$$

Ако уведемо само једну произвољну функцију првом случају одговара трансформација:

$$(1^*)\qquad \eta_i = \frac{\partial F}{\partial \xi_i}, \qquad y_i = -\frac{\partial F}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

другом

$$(2^*)\qquad x_i = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \qquad \eta_i = \frac{\partial F}{\partial \xi_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

и трећем

$$(3^*)\qquad y_i = -\frac{\partial F}{\partial x_i}, \qquad \xi_i = -\frac{\partial F}{\partial \eta_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

6. Најзад можемо навести још једну важну особину Пфафовог израза и Пфафових једначина у каноничном облику.

Ако место променљивих (4) уведемо нове променљиве

$$(7)\qquad Y_i, X_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

и то тако да Пфафов израз добије облик

$$(8)\qquad \sum_{i=1}^{n} Y_i\,dX_i - dF,$$

где је F функција променљивих (7) и t, каноничне једначине (6) имају интеграле

$$X_i = \alpha_i = \text{const.}, \quad Y_i = \beta_i = \text{const.}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

јер Пфафове једначине за форму (8) изгледају овако

$$dY_i = 0, \quad 0 = dX_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Даљи развитак математичких идеја око Пфафових диференцијалних израза ишао је у разним правцима. Нарочиту улогу је играо такозвани Пфафов проблем о трансформацији Пфафовог израза на нормалне облике у вези са интеграцијом система диференцијалних једначина са потпуним диференцијалима, једначина са парцијалним изводима и обичних диференцијалних једначина, нарочито у каноничном облику [7].

1.2. Пфафова метода у механици

На наведним особинама се заснива такозвана Пфафова метода у механици. Ова метода је ушла чак и у уџбенике механике [6], [1].

E. T. Whittaker је већ у првом издању (1904 г.) свог уџбеника динамике [6] изложио Пфафову методу, али није навео никакву литературу. Он је формулисао ту методу и у последњем издању (1952 г.) не фиксирајући је у облику једног принципа.

Речи „Пфафов принцип“ нашао сам први пут код G. D. Birkhoff-a [8] у смислу „the general Pfaffian variational principle

$$(9)\qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{j=1}^{n} P_j p_j' + Q \right] dt = 0, \ldots“.$$

Али овај варијациони принцип има садржај различит од садржаја оног принципа механике о којем говорим у свом чланку [9], где сам први пут употребио назив „Пфафов принцип механике“.

Пфафовом принципу и његовим конкретним применама у механици и физици посвећен је читав низ радова како мојих лично [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16], тако и мојих ученика и сарадника: Т. Анђелића [17, 18, 19], П. Музена [20], Ђ. Мушицког [21]. Последњи писац је извршио генерализацију Пфафове методе; о тој генерализацији говорићу специјално на другом месту.

Пфафова форма и Пфафове једначине стоје у вези са другим математичким концепцијама, где су заузеле важно место у савременој математици. На прво место у историском реду треба ставити теорију интегралних инваријаната од H. Poincaré [22], коју је затим развио E. Cartan [23]. На најпростијем примеру покажимо ту везу.

1.3. Пфафов израз за материјални систем у теорији инваријаната

Узмимо конзервативни систем са независним координатама q_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ и функцијом сила U.

Таквом систему одговара Пфафова форма, коју можемо написати и овако:

(1) $$\Phi_\delta = \sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\,\delta t,$$

где је

$$H=\sum_{i=1}^{n} q_i' \frac{\partial T}{\partial q_i'} - T - U = H(p_i, q_i),$$

а T је жива сила система и $p_i = \partial T/\partial q_i'$.

Претходна форма може се сматрати као форма од $2n+1$ диференцијала δp_i, δq_i, δt. Ради краткоће уводи се геометриска интерпретација система помоћу репрезентативне тачке, рецимо M, у простору са $2n+1$ димензијом. У том простору замислимо једну затворену криву линију, чије једначине можемо написати овако

$$q_i = \overline{q}_i(t), \qquad p_i = \overline{p}_i(t),$$

где су $\overline{q}_i$ и $\overline{p}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ дате функције што одговарају датој произвољној контури у простору. Ознака диференцијала са δ одговара промени величина q_i, p_i при прелазу система из тачке M у тачку M^* на изабраној контури, коју ћемо означити са C.

Узмимо сад интеграл

(2) $$I = \int_C \Phi_\delta = \int_C \Big(\sum_i p_i\,\delta q_i - H\,\delta t\Big),$$

по датој контури C и покажимо да је тај интеграл инваријантан и према томе претставља једну интегралну инваријанту. Инваријатност треба разумети у овом смислу. Контура C састоји се из тачака M, које карактеришу положај и брзине система у датом моменту t, а специјално и у моменту t_0. За време могућих кретања система свака се тачка M креће по својој трајекторији и у сва-

ком наредном моменту нека тачка M заузме положај M', а целокупна контура C положај C' (сл. 1).

За нову контуру C' поново можемо израчунати интеграл

$$I' = \int_{C'} \Phi_\delta .$$

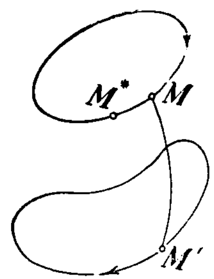
Инваријантност се изражава једначином

$$I' = I.$$

За доказ те инваријантности довољно је доказати да је

(3) $$dI = 0,$$

при чему диференцијал d означава промену интеграла дуж стварних трајекторија система, кад свака променљива добија диференцијални прираштај d и то онај који одговара диференцијалним једначинама кретања система.



Сл. 1.

Докажимо једначину (3) за форму (1).

Према (2) имамо:

$$dI = d\int_C \Phi_\delta = \int_C d\Phi_\delta = \int_C \Big(\sum_i dp_i\,\delta q_i + \sum_i p_i\,d\delta q_i - dH\cdot\delta t - H d\delta t\Big),$$

али један од чланова друге групе можемо трансформисати овако:

$$\int_C p_i\,d\,\delta q_i = \int_C p_i\,\delta\,dq_i = \Big|_C p_i\,dq_i - \int_C dq_i\,\delta p_i .$$

Услед затворености контуре први члан са десне стране после сабирања даје нулу. Исту трансформацију вршимо и са чланом

$$\int_C H d\delta t = \int_C H\,\delta dt = \Big|_C H dt - \int_C dt\cdot\delta H .$$

Према томе дефинитивно имамо

$$dI = \int_C \Big[\sum_i dp_i\,\delta q_i - \sum_i dq_i\,\delta p_i + dt\Big(\sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_i \frac{\partial H}{\delta p_i}\delta p_i + \frac{\partial H}{\partial t}\delta t\Big) - dH\,\delta t\Big],$$

или

$$dI = \int_C \Big[\sum_i \Big(dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}dt\Big)\delta q_i - \sum_i \Big(dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}dt\Big)\delta p_i - \Big(dH - \frac{\partial H}{\partial t}dt\Big)\delta t\Big].$$

Из овог израза за dI следује:

Ако криву C изаберемо произвољно, а то значи да су произвољне величине δq_i, δp_i, δt, услов (3) биће испуњен, ако су испуњени услови

$$dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\, dt = 0,$$

$$dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\, dt = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$dH - \frac{\partial H}{\partial t}\, dt = 0.$$

Последњи услов следује из два претходна, а ти услови не претстављају ништа друго већ каноничне једначине кретања система

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Према томе се вредност интеграла I не мења ако је тај интеграл проширен на криву која се налази на цеви образованој од интегралних кривих које су повучене кроз све тачке контуре C. Та контура може заузимати произвољан положај на површини те цеви, но тако да при упоређивању обухвата цев исти број пута, рецимо, само једанпут. Та особина интеграла I непосредно следује и отуда што померање по површини те цеви увек можемо раставити у две компоненте: једну у правцу интегралне криве, дуж које је $dI = 0$, јер се врши сагласно са диференцијалним једначинама кретања тачке M, и другу компоненту што одговара прелазу са једне интегралне криве на другу, суседну, а разлика интеграла за две тачке на тим кривим увек је иста независно од њиховог положаја на кривим, јер зависи само од крајњих услова кретања који су за све тачке сваке интегралне криве исти.

Према томе можемо тврдити да интеграл задржава своју вредност за сваки пресек изабране цеви, и у томе је његова инваријантност.

Теорија интегралних инваријаната помоћу својих општих теорема не само што може заменити проучавање кретања материјалног система помоћу, рецимо, Хамилтоновог принципа најмањег дејства, већ отвара и веће могућности за таква проучавања. Примену теорије интегралних инваријаната прво је искористио

њихов проналазач H. Poincaré [22], а затим E. Cartan [23], G. Birkhoff [8] и низ других аутора.

Веза која постоји између теорије интегралних инваријаната, с једне стране, и Пфафовог израза и Пфафове методе, с друге стране, још једанпут подвлачи важност и, у неком смислу, универзалност Пфафове методе у примени на проблеме динамике материјалног система.

1.4. Даљи развитак Пфафове методе у механици

Пре но што изнесемо даљи развитак везе Рационалне механике и Пфафове методе навешћемо једну историску примедбу.

Француска математичка школа, прва по својим значајним резултатима у области Рационалне механике, под доминантним утицајем G. Darboux-а (1842—1917), крајем прошлог и почетком овог столећа, готово је игнорисала векторску методу. Darboux није желео ни најмање да отступи од своје кинематичке методе у главној области свог рада, у теорији површина. Међутим векторска метода, после својих тешких почетних форми (Grassmann и Hamilton), добила је нове форме излагања (Америка, Италија, Немачка) и кроз релативно кратак период постала је толико важна дисциплина, не само у вези са геометријом и механиком, већ и у вези са основним аритметичко-алгебарским законима излагања најапстрактнијих расуђивања у математици (теорија множина, алгебра у различитим формама, топологија и др.), тако да су и највернији Дарбуови ученици и пријатељи видели да се више без теорије вектора не може (P. Appell). Високо обдарени француски математичари су признавали своју заосталост у том погледу, али су тек после Дарбуове смрти почели озбиљно да надокнађују пропуштено време. На чело нових француских истраживача је стао E. Cartan. Али како се то готово увек дешава, нарочито код талентованих људи, богатих стваралачким елементима, они неће да надокнађују изгубљено служећи се старим путевима, већ траже нове путеве и, према својој моћи апстракције, увек крче те путеве у некој општијој и апстрактнијој форми. Као нека нова варијанта, у суштини једне гране векторске методе, појавила се нова Cartan-ова „метода спољашњих форми“ (la théorie des formes extérieures), која је сад необично популарна и у Совјетском савезу (С. П. Фиников [24] и др.). Нажалост богата руска литература у тој области за нас није приступачна, а нарочито није нам познато какве је примене та метода показала у проучавању механичких појава.

У француској литератури има више радова посвећених примени спољашњих Cartan-ових форми на проучавање механичких појава. Од тих радова споменућемо радове A. Lichnerowicz [25] и F. Gallissot [26, 27, 28]. Оба ова писца у потпуној мери игноришу литературу која се односи на онај предмет који они третирају. Наведимо, напр., овај цитат (стр. 145) из предговора чланка [26] од F. Gallissot: „Dans ces célèbres leçons*) sur les invariants intégraux E. Cartan a montré que toutes les propriétés des équations différentielles de la dynamique des systèmes holonomes résultaient de l'existence de l'invariant intégral $\int \omega$, $\omega = p_i\, dq^i - H dt$. Ainsi à tout système holonome dont les forces dérivent d'une fonction de forces est associée une forme ω, les équations du mouvement étant les caractéristiques de la forme extérieure $d\omega$." Упоредимо овај цитат са цитатом из Whittaker-овог уџбеника, чије је прво издање штампано 1904 године, тј. пре више од педесет година.

„Consider now the special differential form

$$p_1 dq_1 + p_2 dp_2 + \ldots + p_n dq_n - H dt,$$

in the $(2n+1)$ variables $(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t)$, where H is any fonction of $(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t)$. Forming the corresponding quantities a_{ij}, we find that the first Pfaff's system of differential equa-

*) Интересантно је навести да у овој књизи E. Cartan наводи (стр. VII) у вези са диференцијалном формом $p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \ldots + p_n \delta q_n - H \delta t$, где је H Хамилтонова функција, овај резултат у облику „principe de la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie".

Les mouvements d'un système matériel (à liaisons holonomes parfaites, soumis à des forces dérivant d'une fonction des forces) sont régis par des équations différentielles du premier ordre entre le temps, les paramètres de position et les paramètres de vitesses, et ces équations différentielles sont caractérisées par la propriété que l'intégrale du tenseur „quantité de mouvement-énergie", étendue à une suite continue linéaire fermée quelconque d'états du système, ne change pas de valeur quand on déplace d'une manière quelconque ces états le long de leurs trajectoires respectives.

Према томе се код E. Cartan-а веза диференцијалне форме и диференцијалних једначина кретања, прво, износи као нешто ново и то у 1922 години, 18 година после Whittaker-ова уџбеника, и, друго, не тумачи се још као принцип механике већ као теорема о одржавању одређене величине инваријантне форме. При томе E. Cartan у закључку погрешно наводи (стр. VIII):

Il est important de faire remarquer que ce schéma ne s'applique qu'aux systèmes matériels dépendant d'un nombre fini de paramètres.

Међутим су, први, T. Анђелић [17,18], а затим и F. Gallissot у Француској, тек после девет година, [28], показали да се метода коју зовемо Пфафова метода, може применити и на материјалне системе са бесконачним бројем степена слободе.

tions of this differential form is

$$-dp_r - \frac{\partial H}{\partial p_r} dt = 0, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

$$dq_r - \frac{\partial H}{\partial p_r} dt = 0, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

$$dH - \frac{\partial H}{\partial t} dt = 0.$$

Of these last equation is a consequence of the others: and therefore the system of equations can be written

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \qquad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

but these are the equations of motion of a dynamical system whose Hamiltonian fonction is H is invariantively connected with the differential form

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots X_{2n} dx_{2n} + T d\tau,$$

which is derived from the forme

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \ldots + p_n dq_n - H dt,$$

by the transformation from the variables $(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t)$ to the variables $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}, \tau)$".

Из ова два цитата се види да се различитим речима говори о једном истом математичком факту — о извођењу диференцијалних једначина кретања материјалног система из диференцијалне форме истог облика. Код Whittaker-а извођење је приступачно сваком читаоцу који зна елементе више математике, код Gallissot-а се претпоставља знање математичког апарата, који до истих диференцијалних једначина доводи врло заобилазним путем. Усвајање тог апарата захтева и много труда, видите, напр., [24], и много времена. Без обзира на то, што је тај апарат, можда, и врло користан и конструисан на широким и дубоким основама, ипак је дужност писца да наведе, бар за главне резултате, да су они били познати и разрађени много раније*). Чак се и Whittaker-у може

* Примедба у раду [26] F. Gallissot-а на стр. 146, која гласи: „Dès 1946 M. Lichnerowicz au Bulletin des Sciences Mathématiques tome LXX, p. 90 a déjà introduit les formes extérieures pour la formation des équations des systèmes holonomes et linéairement non holonomes" потврђује да и сам референт Gallissot-ове тезе није био довољно упознат са основном литературом теориске механике.

замерити да при излагању тог питања није навео своје претходнике — E. Schering-a [5] и S. Lie-a; рад последњег не могу сад тачно навести, јер су одговарајући подаци нестали за време рата у изгорелој библиотеци Математичког семинара Београдског универзитета.

Учинимо још једну примедбу. Ако нова метода доводи до битних нових резултата, такве резултате треба протумачити, макар кратко, и у класичној форми. То не би одузело ни много труда нити би заузело много места, али би имало велики значај за утврђивање саме нове методе. Сваки читалац, који се интересује не само за форму, већ на првом месту за садржај резултата, много би се више одушевио новом методом кад би видео нове богате резултате. Стручњак механичар, чак и теоретичар, може улазити у нова формулисања, нова расуђивања и нове дисциплине само ради тога да усвоји заиста нове битне резултате у проучавању механичких појава, но не због тога да прочита старе резултате у новој, апстрактнијој форми, често симболичко-вештачкој, и то само због тога што је та форма постала модернија.

Наводим још један податак. У Београду, на основу класичне методе, која се у тој грани зове Пфафова метода, а стоји у вези са принципом механике, који смо назвали Пфафов принцип, био је обрађен читав низ механичких и физичких проблема. Сад се ти исти проблеми делимично прерађују у новој форми, помоћу нових појмова и нових речи. Ради примера узмимо радове [17], [18] Т. Анђелића, где се говори о Пфафовој методи у примени на течност и на еластичну средину и рад E. Gallissot-a [28] на исту тему. Обрађен је исти предмет — код Т. Анђелића једноставним непосредним начином и код F. Gallissot помоћу Cartan-ова апарата спољашњих форми, ради чијег усвајања треба претходно потрошити доста времена.

Горе наведену анализу наводимо не са циљем критике само ради критике, већ ради објективног свестраног оцењивања различитих научних путева и метода.

Без обзира на то што је у Београду Пфафовој методи био посвећен читав низ радова у којима су били обухваћени проблеми механике, класичне и таласне, физике и астрономије, ја се поново враћам на ту методу са циљем да дубље протумачим чисто феноменолошку страну како такозваног Пфафовог принципа тако и оног општег феноменолошког диференцијалног принципа, који природно проистиче из Пфафовог принципа и који се може применити такође и на појаве које нису механичке или физичке природе.

ГЛАВА ДРУГА

Феноменолошко тумачење Пфафова принципа у механици

2.1. Случај конзервативног система

Као увод за претходно објашњење садржаја општег феноменолошког диференцијалног принципа покажимо феноменолошко тумачење такозваног Пфафовог принципа у механици и то, прво, на једноставном примеру конзервативног холономног материјалног система са коначним бројем степена слободе. Понекад ћемо их, ради јаснијег објашњења неких појмова, тумачити чак и на примеру једне материјалне тачке, при чему материјалну тачку разумемо у смислу објашњеном у нашем курсу Рационалне механике [29], као заступника тела, можда и врло великих димензија, а не само као честицу, „партикл“ (particula).

Узмимо материјални систем од N материјалних тачака са масама m_ν $(\nu=1, 2, \dots, N)$. Масе сматрамо као основне величине скаларне природе помоћу којих се проучавање појаве рашчлањује на проучавање делова и оцењује се важност учешћа сваког дела у појави. У феноменолошком погледу масе играју у механици улогу инерционих коефицијената, у општем случају улогу коефицијената тежине (статистика), односно значаја, утицаја итд. Има таквих, не механичких појава, где улогу масе играју коефицијенти сасвим друге физичке природе него што је маса материјалног тела.

Положај система се одређује векторима положаја $\vec{r}_\nu$ сваке тачке у односу на одређену тачку, рецимо O, непокретног простора. Декартове координате вектора $\vec{r}_\nu$ у односу на непокретан триједар оса $Oxyz$ означимо са x_ν, y_ν, z_ν. Место тих координата можемо на познати начин увести генералисане координате система q_i $(i=1, 2, \dots, n)$. За слободни систем број n износи $3N$, а за неслободни $n=3N-k$, где је k број независних веза система. Претпоставимо да коначне везе не зависе од времена (склерономне), тада не зависе од времена ни оне једначине које одређују Декартове координате x_ν, y_ν, z_ν у функцији координата q_i.

Кретање односно мировање материјалног система је појава, феномен. Ако проучавамо тај феномен у неком коначном интервалу времена, рецимо, од t_0 до t_1, сматрамо да је у том интервалу феномен познат *у коначном облику*, ако су познати вектори положаја, односно њихове координате, свих тачака система, или генералисане координате система као функције времена t у назначеном интервалу времена $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, а такође су познате и све остале механичке величине које су везане за третирану појаву и које се траже у постављеном задатку.

За време кретања система макар једна координата x_ν, y_ν, z_ν, односно q_i, мења се у току времена. У такозваној аналитичкој механици детаљно се проучава математичка природа оних функција које одређују ту промену. У новим математичким схемама природа тих функција се знатно проширила.

Због нарочите важности улоге времена при феноменолошком проучавању појава наведимо једну примедбу, која се односи како на механичке појаве, тако и на друге феномене који се врше у току времена, а може се проширити и на друге случајеве, ако се време замени другом независно променљивом аналогне улоге.

По самој својој природи време је непрекидно променљива величина која се сваким одређеним *моменшом* t дели на *йрошло* и на *будуће* време. При ознаци било које величине која се односи на прошло време употребљаваћемо ознаку те величине са подвученом цртом, а за случај будућег времена са надвученом цртом, а за моменат t без црте. Тако $\underline{M}$, M, $\overline{M}$ означују положај тачке M негде у прошлости, у моменту t и негде у будућности. Интервал времена може бити у прошлости, напр. $\underline{\Delta t}$, или у будућности, $\overline{\Delta t}$. Сваки интервал, који садржи моменат t, дели се на део у прошлости и део у будућности. Инвервал са крајем или почетком у моменту t може бити само у прошлости или у будућности.

Ако се тачка креће и у моменту t стиже у положај M, она је у тај положај дошла са *брзином из йрошлосши*, коју можемо означити са $\underline{\vec{v}}$; та брзина се рачуна према обрасцу

$$\underline{\vec{v}} = \lim_{\underline{\Delta t}\to 0} \frac{\vec{r}(t)-\underline{\vec{r}}(t-\underline{\Delta t})}{\underline{\Delta t}}.$$

После тог момента тачка се креће *брзином будућносши* са вредношћу

$$\overline{\vec{v}} = \lim_{\overline{\Delta t}\to 0} \frac{\overline{\vec{r}}(t+\overline{\Delta t})-\vec{r}(t)}{\overline{\Delta t}}.$$

При непрекидном кретању непрекидном брзином имамо

$$\vec{v} = \overline{\vec{v}} = \vec{v},$$

тј. при доласку и одласку брзина има вредност брзине $\vec{v}$ у моменту t. Али то није увек случај. *Брзина доласка* може имати једну вредност, а *брзина одласка*, напр. услед дејства тренутних сила или удара, другу вредност.

Исто тако елементарно померање око тачке M може бити или у прошлости са вредношћу $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{O\underline{M}}$ или у будућности $\overrightarrow{O\overline{M}}-\overrightarrow{OM}$.

Ако нека величина, било скаларна било векторска, која је добила своју вредност у моменту t из прошлости, напр. брзина $\vec{v}$, узима у даљој промени прираштај, разуме се, прираштај у будућности, тај прираштај једноставно ћемо означита са Δ без црте горе, рецимо за брзину, са $\Delta\vec{v}$. Дакле је

$$\Delta\vec{v} = \overline{\vec{v}} - \underline{\vec{v}} = \overline{\vec{v}}(t+\overline{\Delta t}) - \underline{\vec{v}}(t).$$

Слично можемо написати

$$\Delta\vec{r} = \overline{\vec{r}}(t+\overline{\Delta t}) - \underline{\vec{r}}(t).$$

Протумачили смо потребне појмове са употребом релативно компликованих ознака. Пошто ће у даљем излагању после наведених објашњења у већини случајева природа одговарајућих величина бити јасна и сама по себи, у тим случајевима ћемо допунске црте изостављати.

Како ћемо видети даље, при проучавању кретања материјалног система помоћу диференцијалних једначина тог кретања претпоставља се да је систем дошао у моменту t са познатим величинама, везаним за то кретање, као функцијама времена, тј. познато је кретање у прошлости и потребно је одредити кретање система у будућности. Према томе све величине са цртом доле сматрамо као познате, а са цртом горе или са ознаком Δ — као непознате.

За опис и карактеристику кинетичког стања материјалног система од N материјалних тачака са масама m_ν $(\nu=1, 2, \ldots, N)$ пре свега се уводи за сваку тачку *количина кретања* или *импулс* са вредношћу

$$m_\nu \vec{v}_\nu = \vec{p}_\nu,$$

где брзина има координате x_ν', y_ν', z_ν' (цртица означава извод по времену) при чему се и брзина и импулс односе на оне величине са којима је систем дошао у своје стање у моменту t, тј.

$$\vec{v}_\nu = \underline{\vec{v}_\nu}, \qquad \vec{p}_\nu = \underline{\vec{p}_\nu}.$$

Појам количине кретања или импулса је врло важан у механици, нарочито са феноменолошког гледишта. За најпростији случај праволиниског кретања материјалне тачке количина кретања се изражава, рецимо за x осу, производом $mx' = m\,dx/dt$, а то је, оптерећена масом тачке, вредност извода координате положаја по времену, а тај извод карактерише диференцијалну промену положаја тачке у простору у вези са временом. Природно је да уколико је маса тачке већа, утолико је већа и улога одговарајућег дела материјалног система у оцењивању кинетичког стања система. Али, пошто је феномен у „кретању" система, треба при оцењивању улоге масе m_ν, која се креће, узети у обзир и значај „кретања" те масе. Како се кретање пре свега карактерише брзином, можемо тврдити да значај масе m_ν у феномену „кретања" зависи од брзине, за праволиниско кретање са вредношћу x', а у општем случају са специфичком векторском природом те величине, тј. са вредношћу $\vec{v}_\nu$. Јасно је да је то брзина из прошлости $\underline{\vec{v}_\nu} = \vec{v}_\nu$ за моменат t или брзина доласка.

Означимо са P_t положај материјалног система, а са V_t скуп брзина доласка тачака тог система за моменат t. Претпоставимо да су то познати елементи прошлости третиране појаве.

Замислимо сад да систем из P_t врши неко произвољно елементарно померање, померање у будућности, засад непознато. Означимо померање такве природе тачке m_ν са $\Delta\vec{r}_\nu$.

После изложеног на основу интуитивно феноменолошких размишљања, која се на крају проучавања свих одговарајућих појава потврђују фактима, можемо увести помоћу дефиниције овај израз

$$\sum_{\nu=1}^{N} (m_\nu \vec{v}_\nu, \Delta\vec{r}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{N} (\vec{p}_\nu, \Delta\vec{r}_\nu),$$

где је сваки члан збира скаларни производ количине кретања тачке са којом је тачка дошла у положај P_t са брзинама V_t и неког произвољног елементарног померања те тачке у будућности.

Како је

$$(m_\nu \vec{v}_\nu, \Delta\vec{r}_\nu) = m_\nu x_\nu' \Delta x_\nu + m_\nu y_\nu' \Delta y_\nu + m_\nu z_\nu' \Delta z_\nu,$$

целокупни горенаведени збир претставља линеарну диференцијалну форму, јер сматрамо да су прираштаји са ознаком Δ диференцијалне природе, тј. напр.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta x_\nu = 0.$$

Означимо ову форму са

$$\Phi_s = \sum_{\nu=1}^{N} (m_\nu \vec{v}_\nu, \Delta\vec{r}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{N} (\vec{p}_\nu, \Delta\vec{r}_\nu) =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{N} (m_\nu x_\nu' \Delta x_\nu + m_\nu y_\nu' \Delta y_\nu + m_\nu z_\nu' \Delta z_\nu).$$

То је *кинетичка форма диференцијалног стања система*, коју ћемо кратко звати *форма стања*.

Као основни образац за форму стања сматрамо овај образац

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi_s &= \sum_\nu (\vec{p}_\nu, \Delta\vec{r}_\nu) = \\ &= \sum_\nu (p_{\nu x} \Delta x_\nu + p_{\nu y} \Delta y_\nu + p_{\nu z} \Delta z_\nu).\end{aligned}}$$

Сваки члан форме стања, а према томе и сама форма има димензију

$$[\Phi_s] = ML^2T^{-1}.$$

Приметимо да форма стања садржи у себи, с једне стране, кинетичке елементе прошлости — то су импулси $\vec{p}_\nu = \underline{\vec{p}_\nu}$ са којим је систем дошао у положај P_t, и елементе будућности, непознате елементе померања $\Delta\vec{r}_\nu$, који треба да буду одређени да форма стања одговори стварном померању система у бескрајно блиски стварни положај система у вези са приликама дате појаве, кретања материјалног система.

У случају генералисаних координата система $q_1, q_2, \ldots, q_n$ форма стања се може написати

$$\boxed{\Phi_s = \sum_{i=1}^{n} p_i \,\Delta q_i\,,} \tag{2}$$

где су

$$p_i = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\vec{v}_\nu, \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial q_i'}\right)$$

генералисани импулси из прошлости, јер се и величине $\vec{v}_\nu$ и $\partial\vec{v}_\nu/\partial q_i'$ односе на прошлост; величине Δq_i су диференцијални прираштаји генералисаних координата, који се односе на будућност и подлеже одређивању.

Тачност једначине

$$\sum_\nu (m_\nu \vec{v}_\nu, \Delta\vec{r}_\nu) = \sum_i p_i \,\Delta q_i$$

се лако потврђује, ако се узме у обзир да је, рецимо,

$$\frac{\partial x_\nu'}{\partial q_i'} = \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}$$

и да је

$$\sum_i \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \,\Delta q_i = \Delta x_\nu\,.$$

У овој и сличним једначинама поставља се веза између две серије непознатих величина $\Delta x_\nu, \ldots$ и $\Delta q_i, \ldots$ помоћу линеарних једначина са познатим коефицијентима који се односе на прошлост и момент t.

На тај начин на основу постављене дефиниције и проучених особина форме диференцијалног стања можемо закључити да форму Φ_s, рецимо у облику (2), треба сматрати као функцију од t и будућих померања Δq_i. Импулси p_i су функције времена.

Изнесимо сад план проучавања појаве кретања конзервативног материјалног система помоћу форме Φ_s. То проучавање има ове делове.

Упоредо са формом стања Φ_s треба образовати неки математички израз од којег ће зависити како промена те форме у току времена, тако и одређивање непознатих померања Δq_i за стварно

кретање материјалног система. Феноменолошки ћемо тај израз сматрати као израз оног што *изазива* промену диференцијалног стања система, тј. као израз *акције*. Логички тај израз се поставља дефиницијом и то у облику једног диференцијалног израза, коме се даје назив *форме акције*. Означимо ту форму са Φ_a. Феноменолошка расуђивања разјашњавају смисао сваког члана те форме.

Даље према феноменолошком плану треба поставити везу између форме стања и форме акције. Та веза се формулише помоћу два става, који се, према историској механичкој традицији, зову *законима*.

a) Први закон, кратко формулисан, јесте *закон инерције*.

b) Други закон ћемо кратко звати *закон градијента*.

Излагање садржаја тих закона биће наведено у даљем тексту; овде ћемо рећи само ово. Први закон даје услове за одређивање непознатих елементарних померања, рецимо Δq_i, у форми Φ_s. Други закон одређује промене импулса p_i, тј. њихове диференцијалне прираштаје Δp_i за наредни елемент времена. Са новим вредностима импулса $p_i + \Delta p_i$ прелазимо на састављање форме наредног диференцијалног стања.

Као резултат примене тих закона поставља се тражена веза између две форме, форме стања и форме акције. Математичка форма те везе то су диференцијалне једначине кретања материјалног система.

После остварења изложеног плана феноменолошког извођења диференцијалних једначина кретања материјалног система утврђује се и однос између феноменолошког извођења и формалног извођења на основу Пфафове методе истих диференцијалних једначина. Разуме се да се то ради само ради упоређивања и не чини саставни део феноменолошке методе.

Уђимо сад у детаљно развијање постављеног плана феноменолошког извођења диференцијалних једначина кретања.

Први корак у остварењу тог плана то је образовање форме акције, тј. диференцијалног елемента акције.

Реч „акција" односно „дејство" у обичној речи, како у српском тако и у другим језицима, употребљује се са више значења. Дејство лека, дејство силе (Wirkung einer Kraft), равнотежа дејства и противудејства (Gleichgewicht der Wirkung und Gegenwirkung), принцип најмањег дејства (Prinzip der kleinsten Wirkung), Хамилтонов принцип (varying action of Hamilton), војска је ступила у акцију итд.

Као реч потпуно одређеног математичког садржаја реч „action" = „дејство" се појавила први пут код Хамилтона [53] у облику интеграла

$$W = \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt,$$

где је T жива сила система и U функција сила, а t је време. То дејство има димензију

$$[W] = ML^2 T^{-1}.^{1)}$$

Свака механичка величина са том димензијом може бити протумачена као дејство. Тако, напр., имамо дејство у Хамилтоновом смислу [1, стр. 260] и дејство по Лагранжу [1, стр. 266] са истом димензијом.

Усвојимо терминологију да је Tdt елемент дејства или акције за време dt од живе силе, да је Udt елемент акције за dt од функције силе односно у облику Πdt од потенцијалне енергије тачке, односно система у датом пољу. У општем случају у механици израз $E(t)\, dt$ је елемент акције функције $E(t)$ за време dt ако функција E има димензију

$$[E] = ML^2 T^{-2},$$

тј. димензију енергије. При томе није неопходно да функција E буде изражена експлицитно као функција времена. Она може бити функција координата, импулса и времена.

Важно је обратити пажњу на везе које постоје између појмова дејства (W), силе (F), рада (R) односно енергије, кинетичке (T) или потенцијалне (Π), импулса силе (J) и количине кретања или импулса (p).

Пошто наведене величине имају ове димензије

Величине	W	F	R, T, Π	J	p
Димензије	ML^2T^{-1}	MLT^{-2}	ML^2T^{-2}	MLT^{-1}	MLT^{-1}

1) Ознаку T живе силе нећемо мешати са ознаком T времена при изражавању димензија појединих именованих величина.

можемо поставити ове везе између дејства и наведених појмова.

$$\text{Дејство} = \left\{ \begin{matrix} \text{Рад} \\ \text{или} \\ \text{Енергија} \end{matrix} \right\} \times \text{Време},$$

$$\frac{\text{Дејство}}{\text{Дужина}} = \text{Градијент дејства по дужини} = \text{Количина кретања} = $$
$$= \text{Импулс силе} = \text{Сила} \times \text{Време},$$

$$\frac{\text{Дејство}}{\text{Дужина} \times \text{Време}} = \frac{\text{Градијент дејства по дужини}}{\text{Време}} = \text{Сила},$$

$$\frac{\text{Дејство}}{\text{Количина кретања}} = \text{Градијент дејства по количини кретања} =$$
$$= \text{Дужина}.$$

Наведене везе су од користи при оцењивању квалитативно-феноменолошких односа између величина. Пре свега се види да дејство није сила, већ је рад силе у току одређеног времена, тј.

$$\text{Дејство} = \text{Сила} \times \text{Дужина} \times \text{Време}.$$

Затим можемо закључити да вршећи одређене операције са дејством можемо добити, према операцији, и импулс силе, и силу, и количину кретања, па чак и дужину.

Важно је имати на уму да сама акција не изражава, рецимо, силу која мења кретање тачке, већ само указује да за дати моменат t постоји такав израз, елемент акције, који својим саставом и вредношћу одређује оне силе, које мењају инерционо кретање тачака система и у току интервала времена $\Delta t = dt$ одређују прираштаје, рецимо Δp_i, генералисаних импулса p_i датог материјалног система и то после примене на тај израз одређених операција.

Јасно је да елемент акције, који важи само у току интервала времена dt, мора да садржи множитељ dt. Тада коефицијент код dt треба да има димензију рада односно енергије. Пошто се кинетичко стање система карактерише глобалним кинетичким изразом, живом силом система, односно кинетичком енергијом која може служити као извор силе, а силе могу да и непосредно постану (у вези са потенцијалном енергијом) од такозване функције сила, ако таква постоји, као што је то наш случај конзервативног система, онда елемент акције треба да садржи два члана Tdt и Udt. Збир та два члана омогућава да се изведе она промена у кретању система која доводи систем до новог кинетичког стања. Али та промена треба да се односи само на промену већ постојећег, раније стеченог кинетичког стања, а не на образовање новог кинетичког стања из неког полазног стања мировања. Према томе од наведеног збира треба одузети онај израз који стоји у вези са претходним кинетичким стањем. Другим речима, ако узмемо у обзир да при кретању система у будућности, после момента t, има свој удео и претходно, до момента t, тако рећи инерционо кретање са брзинама $\underline{\vec{v}_\nu} = \vec{v}_\nu$, за које би $\Delta \vec{r}_\nu$ било једнако $\vec{v}_\nu \, dt$, онда члан елемента акције, који одузимамо, треба узети у облику

$$-\sum_\nu m_\nu (\vec{v}_\nu, \vec{v}_\nu)\, dt = -\sum_i p_i q_i' \, dt .$$

На тај начин према феноменолошким расуђивањима елемент акције за конзервативни систем који смо означили са Φ_a треба да има вредност

$$\Phi_a = (-\sum_i p_i q_i' + T + U)\, dt .$$

Учинимо једну феноменолошку примедбу. Уместо да упоредо са формом стања у облику

$$\Phi_s = \sum_\nu (\vec{p}_\nu, \Delta \vec{r}_\nu) = \sum_i p_i \, \Delta q_i$$

анализирамо форму акције у облику

$$\Phi_a = \left[-\sum_\nu (\vec{p}_\nu, \Delta \vec{r}_\nu) + T + U \right] dt ,$$

уносећи при томе у форму Φ_s и инерциони део, можемо упоређивати ове две форме: једну

$$\Phi_k = \Phi_s - \sum_\nu (\vec{p}_\nu, \vec{v}_\nu)\, dt = \sum_\nu (p_\nu, \Delta \vec{r}_\nu - \vec{dr}_\nu),$$

где је dr_ν стварно инерционо померање за време dt, разуме се, под условом да брзина није претрпела скок услед дејства тренутних сила. Форма Φ_k је *форма промене кинетичког стања*, а не самог кинетичког стања у нашем смислу.

Тада од форме акције остаје само ова форма

$$\Phi_d = (T + U)\, dt ,$$

која већ има чист динамички карактер *(динамичка форма)* и не садржи више инерциони део елемента акције.

Изнесена два феноменолошка тумачења су оба исправна и ствар је само договора на чему ће се зауставити. Зауставимо се на првом тумачењу, јер, како ћемо видети у даљем излагању, оно формално има предност: згодније је спојити у један члан ону групу чланова који имају заједнички множитељ $\Delta t = dt$.

Пошто је у случају конзервативног система

$$\sum_i p_i q_i' = 2\, T,$$

имамо за форму акције

$$\Phi_a = (-T + U)\, dt,$$

или дефинитивно

$$\Phi_a = -H\, dt,$$

где је

$$H = T - U = T + \Pi = E,$$

и према томе има вредност тоталне енергије система.

Само после примене форми Φ_s и Φ_a, тј. постављања веза између њих, и сагласности добивених резултата са резултатима који се дају објаснити већ утврђеним теориским схемама, можемо тврдити да су наша феноменолошка расуђивања о саставу форми стања и акције била правилна. Ако се ти резултати поклапају, можемо тврдити да је механика конструисана на наведеном феноменолошком принципу исто толико логички истинита као и, рецимо, класична, Њутнова механика.

Уђимо сад у тумачење неких детаља у вези са уведеним појмовима и изведеним расуђивањима.

Први елемент форме акције

$$-\sum_\nu m_\nu (\vec{v}_\nu, \vec{v}_\nu)\, dt = -\sum_i p_i q_i' \, dt,$$

који смо протумачили као инерциони део акције можемо звати такође и *наслеђена акција*, јер она долази као резултат раније постојећег кинетичког стања система.

Наредни члан акције Tdt је члан одавно познатог израза за дејство у Хамилтоновом смислу. Како зависи од кинетичке енергије, зваћемо га *акција кинетичке енергије* или, кратко, *кинетичка акција*. Ранијем објашњењу феноменолошке улоге тог члана акције додајемо још и ово.

Жива сила T материјалног система је у општем случају квадратна функција брзина q_i', а у случају конзервативног система то је квадратна форма тих брзина. Повежимо са живом силом квадрат елемента лука у Римановом простору и ставимо

(3) $$ds^2 = 2\,T dt^2.$$

У механици ds^2 је дефинитна позитивна форма. Ако се форма (3) може изразити у Еуклидовом облику, тј. као збир квадрата диференцијала

$$ds^2 = dq_1{}^2 + dq_2{}^2 + \ldots + dq_n{}^2,$$

сви су делимични изводи $\partial T/\partial q_i$, који, како ћемо видети, играју врло важну улогу у проучавању кретања система, једнаки нули. За општи случај напишимо ds^2 у облику

$$ds^2 = g_{ij}\, dq^i\, dq^j,$$

при чему смо према познатим правилима овде изоставили знакове сабирања и преношењем положаја индекса код диференцијала координата назначили контраваријантну тензорску природу тих координата. Ако су сви коефицијенти g_{ij} константни, форма се трансформише на Еуклидов облик.

Према томе, ако је

(4) $$\frac{\partial T}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

живој сили одговара форма ds^2 Еуклидовог простора. Као што је познато, тензор кривине тог простора је једнак нули. Ако коваријантни облик тог тензора у Римановом простору означимо са R_{lijk} [31], из претходних једначина (4) следује једначина

(5) $$R_{lijk} = 0.$$

Обратно, из услова (5) једнакости нули тензора кривине следују једначине (4).

У даљем излагању ћемо видети да баш изводи (4) учествују у састављању диференцијалних једначина феномена, кретања материјалног система. Према томе присуство члана $T\,dt$ у изразу за елементарну акцију стоји у вези са локалном геометриском структуром одговарајућег конфигурационог простора, наиме са тензором кривине тог простора. То је разлог због којег можемо сматрати да тај члан акције стоји у вези са геометриском структуром одговарајућег Римановог простора, а то значи према (3) и са структуром кинетичке енергије материјалног система.

Али треба нагласити да и у случају Еуклидовог облика метричке форме $ds^2 = 2\,T dt^2$ члан акције у облику $T dt$, који више не узима учешћа при састављању диференцијалних једначина за одређивање промена dp_i генералисаних импулса, ипак треба да остане у изразу за акцију, јер она игра и другу улогу, наиме, помоћу тог члана, како ћемо видети доцније, природно се повезују променљиве p_i и dq_i.

Завршимо сад проучавање акције проучавањем другог дела Хамилтоновог дејства, односно Хамилтонове акције. Као типични претставник те акције служи дејство неког поља, у нашем случају, напр., поља конзервативних сила. Феноменолошка слика тог дејства је најјаснија, јер је најобичајнија и највише разрађена. Ако је U функција сила, елемент те акције има вредност

$$U\,dt = -\,\Pi\,dt,$$

где је Π потенцијална енергија система. Тај члан акције можемо назвати *потенцијална акција*.

Пошто је за конзервативни систем

$$\Pi = \Pi\,(q_1, q_2, \ldots, q_n),$$

тј. претставља функцију само координата, ова акција показује свој утицај на кретање система само под претпоставком да систем за време кретања прелази са једне еквискаларне површине, где је

$$\Pi\,(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \text{const.},$$

на другу.

Према изложеном целокупна елементарна акција има ове чланове:

1. *Инерциону* односно *наслеђену* акцију са вредношћу

$$(-\sum_i p_i\, q_i')\, dt\,,$$

2. Први члан Хамилтоновог дејства у облику Tdt са називом *кинетичка акција*,

3. Други члан Хамилтоновог дејства у облику Udt или $-\Pi dt$ са називом *потенцијално акција*.

Форму која одговара целокупној акцији зваћемо једноставно *форма акције* са ознаком Φ_a. Према томе имамо, како смо навели и раније,

$$\Phi_a = (-\sum_i p_i\, q_i' + T + U)\, dt\,.$$

У даљем излагању треба поставити везу између промене диференцијалног стања материјалног система, стања које одређује форма Φ_s и акције која је одређена формом Φ_a. Та веза треба да послужи за одређивање непознатих:

1. елементарних померања $\Delta\vec{r}_\nu$, односно Δq_i и
2. прираштаја импулса Δp_i.

После тога можемо написати нову форму стања за моменат $t+dt$. У њу ће ући нова непозната померања $(\Delta\vec{r}_\nu)_{t+dt}$ и нови импулси $p_i+\Delta p_i$ који се односе на моменат $t+dt$ и који су везани за убрзања тачака материјалног система.

Тражена веза се поставља на основу два става, које ћемо звати законима:

1. законом инерције и
2. законом градијента.

Садржај закона инерције, у његовом феноменолошком тумачењу, овај је.

Ако акција Φ_a задовољава услов

$$\lim_{\Delta t\to 0} \Phi_a = 0,$$

а то значи њен коефицијент

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Phi_a}{\Delta t}$$

не тежи бесконачности, тј.

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Phi_a}{\Delta t} \leqslant M, \tag{6}$$

где је M нека коначна стална величина, онда материјални систем продужује своје кретање са оним, тако рећи, почетним за моменат времена t брзинама $\vec{v}_\nu$ са којим је систем дошао у положај у моменту t. Тада, под таквим приликама кретања и само под таквим условима непозната померања се одређују из једначина

$$\Delta\vec{r}_\nu = \vec{\bar{v}}_\nu\,\Delta t = \underline{\vec{v}_\nu}\,\Delta t = \vec{v}_\nu\, dt,$$

где смо ознакама подвукли значај свих одговарајућих појмова: брзина доласка у овом случају је једнака брзини одласка и то је брзина $\vec{v}_\nu$ која се везује за дати моменат t.

Наведени услов (6) за коефицијент акције тражи да на систем не дејствују тренутне силе, рецимо није се десио удар, — само тада се примењује горе наведени закон инерције.

Приметимо да би ипак било погрешно кад бисмо одмах у почетку наших расуђивања ставили $\Delta\vec{r}_\nu = \vec{v}_\nu\, dt$, јер то би било, с једне стране, непотребно ограничење могућности примене општег феноменолошког диференцијалног принципа на све могуће појаве механичке природе (са ударом). Са друге стране, не бисмо имали свесног феноменолошког основа за онај резултат који се изражава једначином

$$\vec{\bar{v}}_\nu = \underline{\vec{v}_\nu} = \vec{v}_\nu.$$

Формулишимо сад у облику диференцијалне једначине онај резултат који следује из закона инерције за наш конзервативни систем.

Пре свега напоменимо да смо навели две серије променљивих величина $\vec{r}_\nu(x_\nu, y_\nu, z_\nu)$, $\nu=1, 2, \ldots, N$, и q_i, $i=1, 2, \ldots, n$, за одређивање положаја система. Између њих се постављају везе

$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, N,$$

самим процесом увођења, у случају потребе, генералисаних координата q_i.

Исто тако за одређивање брзина тачака, не разликујући сад за момент t, према закону инерције, различите брзине, можемо увести једноставно само ове величине

$$\vec{v}_\nu(x_\nu', y_\nu', z_\nu'), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, N,$$

и одговарајуће величине

$$q_i', \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

при чему је

$$\vec{v}_\nu = \sum_i \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_i} q_i', \qquad \nu = 1, 2, \ldots, N.$$

Затим смо увели живу силу система T једначином

$$2\,T = \sum_\nu m_\nu v_\nu^2 = \sum m_\nu (x_\nu'^2 + y_\nu'^2 + z_\nu')^2,$$

коју смо претставили и на овај начин

$$2\,T = ds^2\,(dt)^{-2} =$$
$$= g_{ij}\,dq_i\,dq_j\,(dt)^{-2},$$

где смо за контраваријантне диференцијале поново употребили старе ознаке.

Помоћу живе силе можемо изразити било прави импулс у Декартовим координатама, напр.,

$$m_\nu\,x_\nu' = \frac{\partial T}{\partial x_\nu'},$$

било генералисани импулс

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'}.$$

Последње једначине можемо написати и у другом облику, ако их решимо по q_i', наиме

(7) $$q_i' = \frac{\partial T^*}{\partial p_i},$$

где је T^* такозвани конјуговани израз за живу силу, изражену у функцији импулса p_i. Као што је познато, T и T^* су везани једначином

$$T + T^* = \sum_i p_i\,q_i',$$

која се претвара у идентитет, ако све величине изразимо или у функцији само q_i' или само p_i.

Из претходне једначине следује

$$T^* = \sum_i p_i q_i' - T$$

и, према томе, место (7) можемо написати

$$q_i' = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\sum_i p_i q_i' - T\right).$$

Ако функцију у загради допунимо било којом функцијом која не зависи од генералисаних импулса, напр. функцијом $(-U)$, и уведемо ознаку

$$H = \sum_i p_i q_i' - T - U = H\,(p_i, q_i)$$

за такозвану *Хамилтонову функцију*, онда претходна једначина даје

(8) $$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ове диференцијалне једначине се добивају као резултат примене закона инерције на брзине тачака система.

Пређимо сад на примену другог закона, закона градијента, за одређивање прираштаја $\Delta\,p_i$.

Феноменолошка расуђивања показују да се може поставити веза између $\Delta\,p_i$ и промене акције у вези са променом одговарајуће координате q_i. Како се та промена, као и свака промена у најпростијем случају, карактерише изводом

$$\frac{\partial \Phi_a}{\partial q_i},$$

можемо поставити ову једначину

$$\Delta\,p_i = \frac{\partial \Phi_a}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ако за стварно кретање, одређено претходним условом, ставимо $\Delta\,p_i = dp_i$, можемо дефинитивно написати

$$dp_i = \frac{\partial \Phi_a}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ако делимични извод сматрамо као проширени појам градијента, претходну једначину у нашем случају можемо изразити речима и овако:

Диференцијал импулса једнак је градијенту акције по одговарајућој координати.

Овај став можемо сматрати као *закон градијента акције* у примени на материјални систем.

Јасно је да овде делимично диференцирање има феноменолошки карактер једног оператора који одабира оно што зависи од одговарајуће координате.

Ако уведемо вектор импулса у n димензионалном Еуклидовом простору

$$\vec{p}\,(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

и вектор-градијенат

$$\operatorname{grad}\,\Phi_a\left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial q_1}, \frac{\partial \Phi_a}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial \Phi_a}{\partial q_n}\right),$$

тада можемо поставити закон диференцијалног прираштаја и градијента у овој векторској форми

$$\boxed{d\vec{p} = \text{grad}\,\Phi_a.}$$

Тај закон ћемо звати: *Закон прираштаја и градијента* или, кратко, *закон градијента*.

Према том закону са раније наведеном вредношћу за Φ_a можемо написати ову једначину

$$dp_i = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(-\sum_i p_i q_i' + T + U\right) dt =$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_i}(-H)\, dt,$$

или

(9) $$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Са раније изведеним једначинама (8) имамо познати систем канoничних једначина кретања конзервативног материјалног система.

Протумачили смо феноменолошки пут извођења једначина кретања из две линеарне диференцијалне форме: форме диференцијалног стања система и форме елемента акције. Ради упоређивања са овим феноменолошким путем наведимо и формализовани Пфафов пут за извођење истих једначина.

1. Спојимо форму стања Φ_s и форму акције Φ_a у једну јединy линеарну форму

$$\Phi = \Phi_s + \Phi_a = \sum p_i\, dq_i + \left(-\sum p_i q_i' + T + U\right) dt.$$

То је Пфафова форма датог феномена, која зависи од променљивих p_i, q_i, t и од њихових диференцијала dp_i, dq_i, dt, при чему диференцијали dp_i улазе у облику форме

$$\sum 0 \cdot dp_i,$$

коју нисмо написали, а променљиве q_i' треба да буду изражене у функцији импулса.

2. Према познатом Пфафовом поступку имамо ове Пфафове једначине: за променљиве коефицијенте p_i код диференцијала dq_i

$$dp_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = \frac{\partial \Phi_a}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\, dt,$$

јер је

$$\frac{\partial \Phi_s}{\partial q_i} = 0,$$

и

$$\Phi_a = -H dt,$$

где је, као и раније,

$$H = \sum p_i q_i' - T - U.$$

За коефицијенте код dp_i имамо једначине

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = \frac{\partial \Phi_s}{\partial p_i} + \frac{\partial \Phi_a}{\partial p_i} =$$

$$= dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\, dt,$$

а то су једначине које се поклапају са једначинама (8) раније изведеним из других разлога.

На тај начин за променљиве q_i и p_i добили смо каноничне једначине

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

које смо добили и према феноменолошком расуђивању.

На основу добијених једначина Пфафова једначина за променљиву t у облику

$$d(-H) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

претвара се у идентитет

$$-\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i = \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) dt \equiv 0.$$

У феноменолошком извођењу одвајали смо форму стања од форме акције. Сад видимо да при примени *формалног* Пфафовог поступка нема потребе одвајати једну форму од друге. Можемо потврдити да су и димензије једне и друге форме исте, наиме то је димензија „дејства"

$$ML^2 T^{-1}.$$

Према томе са формалног гледишта можемо једноставно ставити

$$\Phi = \sum p_i \, dq_i - H \, dt =$$
$$= \sum p_i \, dq_i + (-\sum p_i \, q'_i + T + U) \, dt.$$

У овом збиру два члана $\Sigma p_i \, dq_i$ и $\Sigma p_i q'_i \, dt$ имају аналоган облик за сваки конзервативни материјални систем без обзира на његову индивидуалну природу и према томе увек без тешкоће могу бити написани за сваки конзервативни систем, ако знамо масу сваког појединог дела тог система. Такве исте природе је и наредни члан $T \, dt$ за који треба знати масе тачака материјалног система и скаларне изразе њихових брзина. Најзад, последњи члан $U \, dt$ зависи од оних активних сила које дејствују на тачке система, односно од оног поља у којем се врши кретање или равнотежно мировање система. Збир два члана

$$(T + U) \, dt = (T - \Pi) \, dt = W \, dt$$

зове се, како знамо, дејство по Хамилтону.

Према томе закључујемо да формално састављање Пфафове форме можемо почети од изражавања дејства по Хамилтону, па изразу

$$W \, dt = (T + U) \, dt$$

додати и од њега одузети збирове $\Sigma p_i \, dq_i$ и $(\Sigma p_i \, q'_i) \, dt$; добивена форма

$$\sum p_i \, dq_i + (-\sum p_i \, q'_i + T + U) \, dt$$

претставља тражену Пфафову форму. То додавање и одузимање нема чист алгебарски садржај операције са величинама исте природе. Како смо видели, феноменолошка природа тих збирова је различита. То додавање и одузимање битно, формално и феноменолошки, мења како сам резултат тако и феноменолошко објашњење процеса добивања тог резултата. Примена Пфафова поступка на добивену Пфафову форму доводи до тражених диференцијалних једначина кретања материјалног система.

Учинимо две примедбе.

За конзервативни систем жива сила је хомогена функција генералисаних брзина и према томе је

$$\Sigma p_i q_i' = \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_i'} \cdot q_i' = 2 \, T.$$

Пфафову форму за тај систем дефинитивно можемо овако написати

$$\Phi = \Sigma p_i \, dq_i - H dt,$$

где је

$$H = T - U = T + \Pi.$$

Као другу, закључну, примедбу наведимо ово.

У формалном поступку, како смо видели, иде се од елемента дејства по Хамилтону и затим се формално додају и одузимају слични изрази. Наш циљ је био наћи феноменолошку подлогу том додавању и одузимању и на тај начин показати природну, суштинску основу Пфафове методе прво у примени на најпростији случај кретања материјалног система. Видели смо и на том примеру да Пфафов принцип стварно уочава један општи феноменолошки принцип везе између диференцијалног стања и акције и тиме формулише основни динамички принцип природе и то изводи у инваријантној форми независно од оних индивидуалних особина које имају уведене координате.

2.2. Случај неконзервативног система

Како смо навели у историјату Пфафовог принципа, у Београду је био обрађен Пфафовом методом читав низ проблема из механике и физике. Искористимо сад тај материјал ради давања нашем феноменолошком принципу што шире основе.

У мом раду [9] проучена је примена Пфафове методе за извођење диференцијалних једначина кретања и неконзервативног материјалног система са коначним бројем степена слободе. Протумачимо сад то извођење са феноменолошког гледишта.

Број материјалних тачака система поново означимо са N, њихове масе са m_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$, а векторе положаја са $\vec{r}_\nu \, (x_\nu, y_\nu, z_\nu)$. У општем случају неслободног система, под претпоставком да је систем холономан, вектори положаја и време су везани једначинама коначних веза које пишемо у облику

$$(1) \qquad f_l \, (\vec{r}_\nu; t) = f_l \, (x_\nu, y_\nu, z_\nu; t) = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1 \, ; \; \nu = 1, 2, \ldots, N.$$

Претпоставимо да су те везе задржавајуће, јер се случај незадржавајућих веза у суштини своди на случај кад везе дејствују, а тада оне постају задржавајуће.

Из једначина (1) следује да свако могуће диференцијално померање $\Delta\vec{r}_\nu$ тачке m_ν мора у току диференцијалног интервала времена $\Delta t = dt$ задовољавати услове

$$(2)\qquad \sum_{\nu=1}^{N} (\mathrm{grad}_\nu f_l, \Delta\vec{r}_\nu) + \frac{\partial f_l}{\partial t}\Delta t = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1,$$

где је вектор $\mathrm{grad}_\nu f_l$ делимичан градијент скаларне функције везе f_l у односу на вектор $\vec{r}_\nu$, тј. вектор са координатама

$$\frac{\partial f_l}{\partial x_\nu}, \quad \frac{\partial f_l}{\partial y_\nu}, \quad \frac{\partial f_l}{\partial z_\nu},$$

а округле заграде, као и увек код нас, означавају скаларни производ. При проучавању стварног кретања система од момента t величине $\Delta\vec{r}_\nu$ треба сматрати, ако кретање још није познато, као непознате величине које увек треба да задовољавају једначине (2).

Претпоставимо сад да је у моменту t систем дошао у положај P и да су у том моменту коначне везе престале да се мењају у току времена, тј.

$$\left(\frac{\partial f_l}{\partial t}\right)_t = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1.$$

Ако сад постављамо питање: која померања може да врши систем из положаја P? Ако означимо таква померања са $\delta\vec{r}_\nu$, можемо одговорити да таква померања морају задовољавати ове једначнне

$$\sum_\nu (\mathrm{grad}_\nu f_l, \delta\vec{r}_\nu) = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1.$$

Као што је познато, вектори $\delta\vec{r}_\nu$ се зову *могуће варијације* вектора положаја $\vec{r}_\nu$.

После ових претходних објашњења пређимо на образовање форме стања и форме акције за случај нашег неслободног система, који у општем случају може бити и неконзервативан.

Искористимо познато феноменолошко посматрање кретања неслободног система. Кретање неслободног система може се сматрати као слободно кретање али под условом да на такав слободан систем за све време кретања сем такозваних активних сила дејствују

још и допунске силе, силе реакције, чије дејство остварује кретање система у сагласности са једначинама веза, а са замишљеним њиховим отсуством. Према том посматрању форма стања неслободног система је истог састава као и форма стања одговарајућег слободног система.

Ако се прво зауставимо на одређивању положаја тачака система у Декартовом простору, форму стања можемо написати

$$\Phi_s = \sum_\nu (\vec{p}_\nu, \Delta\vec{r}_\nu),$$

где су $\vec{p}_\nu$ вектори импулса, а $\Delta\vec{r}_\nu$ су она непозната померања тачака система која сматрамо у моменту t као померања слободног система.

При образовању форме акције имамо ова четири члана.

1. Инерциони или наслеђени члан, који одговара брзинама доласка са вредношћу $\vec{\underline{v}}_\nu = \vec{\bar{v}}_\nu = \vec{v}_\nu$, а за те брзине померања имају вредности $d\vec{r}_\nu = \vec{v}_\nu dt$, изгледа овако

$$-\sum_\nu (\vec{p}_\nu, \vec{v}_\nu)\, dt = -\sum_\nu \frac{1}{m_\nu} (\vec{p}_\nu, \vec{p}_\nu)\, dt.$$

2. Други члан, као и раније, има облик

$$Tdt,$$

при чему у Декартовим координатама имамо

$$2T = \sum_\nu m_\nu (\vec{v}_\nu, \vec{v}_\nu) = \sum_\nu \frac{1}{m_\nu} (\vec{p}_\nu, \vec{p}_\nu).$$

Према томе два прва члана акције дају

$$-\frac{1}{2} \sum_\nu \frac{1}{m_\nu} (\vec{p}_\nu, \vec{p}_\nu)\, dt.$$

3. За конзервативни систем са функцијом сила трећи члан акције је изгледао овако

$$Udt.$$

Пошто у општем случају неконзервативног система активне силе немају функције сила, а претходни израз садржи коефицијенат U који одговара раду конзервативних сила на неком коначном померању до положаја P система што одговара моменту t, треба и овде за случај неконзервативних сила ставити рад активних сила $\vec{F}_\nu$ што дејствују на тачке система и то од неког почетног положаја до положаја у моменту t. Пошто се тај рад изражава овако

$$\int_{P_0}^{P} \sum_\nu (\vec{F}_\nu, \Delta\vec{r}_\nu),$$

множењем са dt добићемо тражени трећи члан акције.

4. Најзад за израчунавање последњег члана треба активну силу заменити силом реакције која дејствује на ν-ту тачку система. Пошто за случај идеалних веза на ν-ту тачку дејствује ова реакција

$$\sum_l \lambda_l \operatorname{grad}_\nu f_l,$$

где је λ_l множитељ одговарајуће везе, последњи члан акције има облик

$$\left[\int_{P_0}^{P} \sum_\nu \left(\sum_l \lambda_l \operatorname{grad}_\nu f_l, \Delta\vec{r}_\nu\right)\right] dt.$$

На тај начин две тражене форме изгледају овако

$$\Phi_s = \sum_\nu (\vec{p}_\nu, \Delta\vec{r}_\nu),$$

$$\Phi_a = \left[-\frac{1}{2}\sum_\nu \frac{1}{m_\nu}(\vec{p}_\nu, \vec{p}_\nu) + \int_{P_0}^{P}\sum_\nu (\vec{F}_\nu, \Delta\vec{r}_\nu) + \int_{P_0}^{P}\sum_\nu \left(\sum_l \lambda_l \operatorname{grad}_\nu f_l, \Delta\vec{r}_\nu\right)\right] dt.$$

Применимо сад два закона — закон инерције и закон градијента.

Ако је

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Phi_a = 0$$

померање $\Delta\vec{r}_\nu$ треба да има инерциону вредност, тј.

$$\Delta\vec{r}_\nu = \vec{v}_\nu\, dt = d\vec{r}_\nu, \tag{3}$$

или

$$\frac{d\vec{r}_\nu}{dt} = \vec{v}_\nu = \frac{1}{m_\nu}\vec{p}_\nu. \tag{4}$$

Закон градијента даје за x – осу

$$dp_{\nu x} = \frac{\partial}{\partial x}\Phi_a,$$

или

$$dp_{\nu x} = \left(F_{\nu x} + \sum_l \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial x_\nu}\right) dt,$$

а у векторском облику овај резултат

$$\frac{d\vec{p}_\nu}{dt} = \vec{F}_\nu + \sum_l \lambda_l \operatorname{grad}_\nu f_l, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, N. \tag{5}$$

При извођењу Пфафова поступка имамо форму

$$\Phi = \Phi_s + \Phi_a$$

и кад се та форма допуни још и збиром $\sum_\nu 0 \cdot d\vec{p}_\nu$ имамо ову серију Пфафових једначина: једначине (5) за промењљиве векторе положаја $\vec{r}_\nu$, затим једначине

$$0 = \Delta\vec{r}_\nu + \left(-\frac{1}{m_\nu}\vec{p}_\nu\right) dt$$

од коефицијената код $d\vec{p}_\nu$ за одређивање $\Delta\vec{r}_\nu$, а то су једначине (4). И најзад једначину

$$d\frac{\Phi_a}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0,$$

која доводи до идентитета

$$d\left[-\frac{1}{2}\sum_\nu \frac{1}{m_\nu}(\vec{p}_\nu, \vec{p}_\nu) + \int_{P_0}^{P}\sum_\nu (\vec{F}_\nu, \Delta\vec{r}_\nu) + \int_{P_0}^{P}\sum_\nu \left(\sum_l \lambda_l \operatorname{grad}_\nu f_l, \Delta\vec{r}_\nu\right)\right] = 0,$$

на основу једначина (4) и (5).

Заиста, после диференцирања имамо:

$$-\sum_\nu \frac{1}{m_\nu}(d\vec{p}_\nu, \vec{p}_\nu) + \sum_\nu (\vec{F}_\nu, \Delta\vec{r}_\nu) + \sum_\nu \left(\sum_l \lambda_l \operatorname{grad}_\nu f_l, \Delta\vec{r}_\nu\right) = 0.$$

Но према (3) и (4) имамо

$$\Delta \vec{r}_\nu = \frac{1}{m_\nu} \vec{p}_\nu \, dt,$$

па се претходна једначина може написати и овако

$$\sum_\nu (-d\vec{p}_\nu + \{\vec{F}_\nu + \sum_l \lambda_l \operatorname{grad}_\nu f_l\} \, dt, \Delta \vec{r}_\nu) = 0.$$

Пошто је први члан сваког појединог скаларног производа на основу (5) једнак нули, претходна једначина се заиста претвара у идентитет.

Остаје још да се напомене да једначинама (4) и (5) треба додати једначине за одређивање множитеља веза. Те једначине се добивају на познати начин из једначина веза после двоструког диференцирања сваке везе; напр. за h-ту везу имамо

$$\frac{d^2 f_h}{dt^2} = \sum_\nu \left(\operatorname{grad}_\nu f_\nu, \frac{1}{m_\nu} p_\nu \right) + D_2 f_h = 0,$$

где је $D_2 f_h$ квадратна функција импулса познатог састава. Из тих једначина се добивају линеарне једначине по λ_l за одређивање множитеља веза. Њих можемо написати овако

$$\sum_l \lambda_l \left[\sum_\nu \frac{1}{m_\nu} (\operatorname{grad}_\nu f_h, \operatorname{grad}_\nu f_l) \right] + \sum_\nu \frac{1}{m_\nu} (\operatorname{grad}_\nu f_h, \vec{F}_\nu) + D_2 f_h = 0,$$

$$h = 1, 2, \ldots, k_1.$$

Покажимо још на који начин се изводе диференцијалне једначине кретања за неконзервативни систем у случају независних координата $q_1, q_2, \ldots, q_n$, где је $n = 3N - k_1$.

Пре свега трансформишемо на нове координате форму стања

$$\Phi_s = \sum_\nu (\vec{p}_\nu, \Delta \vec{r}_\nu).$$

Помоћу живе силе из једначине

$$2T = \sum_\nu m_\nu \vec{v}_\nu^{\,2},$$

после замене

$$\vec{v}_\nu = \sum_i \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} q_i' + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t},$$

из које следује да је

$$\frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial q'_i} = \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i},$$

уведимо такозвани генералисани импулс

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i}.$$

Њега можемо и овако претставити

$$p_i = \sum_\nu \left(m_\nu \vec{v}_\nu, \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial q'_i} \right) = \sum_\nu \left(\vec{p}_\nu, \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \right).$$

Затим место непознатих померања $\Delta\vec{r}_\nu$ уведимо одговарајуће вредности непознатих Δq_i и то помоћу једначина[1]) које важе за сваки момент времена

$$\Delta r_\nu = \sum_i \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \Delta q_i.$$

На основу добивених резултата можемо извести тражену трансформацију

$$\Phi_s = \sum_\nu (\vec{p}_\nu, \Delta \vec{r}_\nu) = \sum_i (\vec{p}_\nu, \sum_i \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \Delta q_i) = \sum_i \left[\sum_\nu \left(\vec{p}_\nu, \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \right) \right] \Delta q_i =$$

$$= \sum_i p_i \, \Delta q_i.$$

Форма акције се саставља од ових чланова:

---

[1]) У вези са овим једначинама учинимо ову примедбу. Величине $\Delta\vec{r}_\nu$ и Δq_i учествују у двема фазама расуђивања. Прва фаза — то је постављање координатних веза при учешћу времена као сталног параметра. И једне и друге величине тада се могу сматрати као варијације, независне од времена, и означавати са $\delta\vec{r}_i$ и δq_i. У другој фази те исте величине се мењају у току времена и означавамо их са $\Delta\vec{r}_\nu$ и Δq_i. Употреба различитих ознака није обавезна, кад обе величине у исто време мењају своју улогу и промена природе тих улога не изазива никакав неспоразум без обзира на то што у првој фази те величине задовољавају једне услове, а у другој друге. — Сматрајући да са аксиоматичког гледишта питање улоге у рационалној механици појмова стварних и варијационих померања при излагању како диференцијалних тако интегралних принципа механике, без обзира на многобројне радове, још суштински није довољно расветљено, намеравам да посветим том питању нарочиту малу расправу са излагањем свога гледишта.

1. Инерционог дела у облику

$$-\sum_i p_i q_i' \, dt,$$

2. Живе силе

$$T \, dt,$$

3. Активних сила прво у облику

$$\int_{P_0}^{P} \sum_\nu (\vec{F}_\nu, \delta \vec{r}_\nu) \, dt,$$

а затим после трансформације у облику

$$\int_{P_0}^{P} \sum_i Q_i \, \delta q_i \, dt,$$

при чему је

$$Q_i \, \delta q_i = \sum_\nu \left(\vec{F}_\nu, \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}\right) \delta q_i,$$

где је Q_i генералисана сила. Величине $\delta \vec{r}_\nu$ и δq_i су варијационе природе. Оне показују, тако рећи, пробна, варијациона померања, која служе само за одређивање величина сила из величине рада.

4. Најзад, члан који зависи од реакција

$$\int_{P_0}^{P} \sum_l \lambda_l [\sum_\nu (\mathrm{grad}_\nu f_l, \Delta \vec{r}_\nu)] \, dt$$

у случају независних координата једнак је нули, јер се после изражавања у функцији независних координата свака функција f_l претвара у идентитет.

Учинимо још једну претходну примедбу. Пошто како једна тако и друга форма могу зависити само од променљивих q_i, p_i, t, променљиве q_i' треба да буду елиминисане. Ако је једна функција, која зависи од променљивих q_i, q_i', t трансформисана на променљиве q_i, p_i, t, њен нов израз се зове *конјугован* у односу на први. За ознаку конјугованости употребљаваћемо звездицу после ознаке функције, тако, напр.,

$$f(q_i, q_i', t) = f^*(q_i, p_i, t).$$

Према томе дефинитивно форме стања и акције можемо написати овако

$$\Phi_s = \sum_i p_i \, \Delta q_i,$$

$$\Phi_a = \left(-\sum_i p_i q_i'^* + T^* + \int_{P_0}^{P} \sum_i Q_i^* \, \delta q_i\right) dt.$$

Пошто се претпоставља да на систем не дејствују тренутне силе, услов

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Phi_a = 0$$

је испуњен и према томе се кретање врши у сагласности са законом инерције. Према том закону генералисана брзина од непознатог померања Δq_i, тј.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q_i}{\Delta t} = q_i',$$

треба да буде она која одговара живој сили T и импулсу $p_i = \dfrac{\partial T}{\partial q_i'}$ у датом моменту t. Пошто из једначине

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'},$$

на основу познатих Донкинових теорема, следује да је

$$q_i' = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\sum_i p_i q_i'^* - T^*\right),$$

можемо тврдити да из закона инерције следују ове диференцијалне једначине

$$\text{(6)} \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где је

$$K = \sum_i p_i q_i'^* - T^*.$$

Затим треба применити закон градијента:

$$dp_i = \frac{\partial \Phi_a}{\partial q_i} = \left(-\frac{\partial K}{\partial q_i} + Q_i^*\right) dt$$

који доводи до друге серије диференцијалних једначина

(7) $$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial q_i} + Q_i^*,$$

где је Q_i^* конјуговани израз за генералисане силе, ако оне зависе од брзина.

Једначине (6) и (7) чине *Хамилшонов сисшем* диференцијалних једначина кретања материјалног система.

Није тешко показати да се и у овом случају једначина која, према Пфафовој методи, одговара променљивој t претвара у идентитет.

Ако се вратимо на променљиве q_i, q_i', t, добићемо једначине у Лагранжевом облику

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

јер је

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'} \quad \text{и} \quad \frac{\partial K}{\partial q_i} = -\frac{\partial T}{\partial q_i},$$

при чему последња особина функција T и K такође следује из познатих Донкинових теорема.

Ради тумачења различитих улога које играју, с једне стране, померања, а, са друге стране, брзине, у случају веза зависних од времена, наведимо решење, тумачено феноменолошки, једног малог задатка, који решава и G. Hamel [54, стр. 328].

Задатак гласи: Тачка са масом $m=1$ принуђена је да се креће у равни x, y, а под условом да је $y = x\,c(t)$. На тачку дејствује сила са потенцијалом $\Pi = \frac{1}{2}\alpha(t)\,x^2$. Како се креће тачка, ако је $\alpha(t) = \dot{c}^2/(1+c^2)$? (Тачка над словом означава извод по времену).

Узмимо за независно променљиву координату x. Тада је $\dot{y} = \dot{c}x + c\dot{x}$ и жива сила се одређује из ове једначине

$$2\,T = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (1+c^2)\,\dot{x}^2 + 2\,c\dot{c}x\dot{x} + \dot{c}^2x^2.$$

Према томе је

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (1+c^2)\,\dot{x} + c\dot{c}x,$$

и конјуговано

(+) $$\dot{x}^* = (p - x c\dot{c})/(1+c^2).$$

Са друге стране, зависно померање Δy се изражава на овај начин

$$\Delta y = c\,\Delta x.$$

После ових претходних израчунавања форма стања биће

$$\Phi_s = \dot{x}\,\Delta x + \dot{y}\,\Delta y = [(1+c^2)\,\dot{x} + c\dot{c}x]\,\Delta x = p\,\Delta x.$$

Форма акције има тада овај облик

$$\Phi_a = \left(-p\dot{x}^* + T^* - \frac{1}{2}\alpha(t)\cdot x^2\right)dt,$$

где је

$$2\,T^* = (p^2 + \dot{c}x^2)/(1+c^2).$$

Ако уврстимо одговарајуће вредности добићемо овај дефинитивни резултат

$$\Phi_a = \frac{2\,pxc\dot{c} - p^2}{2\,(1+c^2)}\,dt.$$

Пошто је

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Phi_a = 0,$$

важи закон инерције и према томе се непознато померање, као функција, одређује из једначине

$$\Delta x = \dot{x}\,dt = dx.$$

А како се $\dot{x}$ у функцији p, x и t одређује из једначине (+) имамо једначину

(I) $$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{1+c^2} - \frac{xc\dot{c}}{1+c^2},$$

као прву диференцијалну једначину датог задатка.

Другу једначину добијамо из закона градијента

$$dp = \operatorname{grad}_x \Phi_a = \frac{\partial \Phi_a}{\partial x} = \frac{pc\dot{c}}{1+c^2}\,dt,$$

тј.

(II) $$\frac{dp}{dt} = \frac{pc\dot{c}}{1+c^2}.$$

Једначине (I) и (II) су идентичне са једначинама које изводи G. Hamel на основу других расуђивања. Њихови интеграли су

$$p=a\sqrt{1+c^2}, \qquad x=\frac{at+b}{\sqrt{1+c^2}},$$

где су a и b произвољне константе интеграције.

Приметимо да је решавање тог задатка много једноставније кад се рачуни врше не са Декартовим координатама, како то ради G. Hamel, већ са поларним, рецимо, r и θ, јер тада, према једначини $\frac{d\dot{r}}{dt}=0$, имамо $r=at+b$, а угао θ је одређен из једначине везе, наиме $\operatorname{tg}\theta=c(t)$.

2.3. Случај нехолономног система

У нашем раду [9] проучили смо примену Пфафова принципа на нехолономни материјални систем. Извршимо овде феноменолошко извођење диференцијалних једначина кретања тог сисистема и, друго, проширимо незнатно анализу добијених једначина према радовима П. В. Воронца [55,56], G. Hamel-a [54] и Th. Pöschl-a [59].

Пре свега поставимо једначине за Декартове координате тачака система са векторима положаја $\vec{r}_\nu(x_\nu, y_\nu, z_\nu)$, $\nu=1,2\ldots,N$. Нека је систем неслободан са коначним везама

$$f_l(r_\nu, t)=0, \qquad l=1,2,\ldots,k_1, \qquad \nu=1,2,\ldots,N,$$

и са диференцијалним у линеарном облику

$$l_j=\sum_{\nu=1}^{N}(\mathrm{qgrad}_\nu\,\varphi_j, \vec{v}_\nu)+D_j=0, \qquad j=1,2,\ldots,k_2,$$

где су: $\mathrm{qgrad}_\nu\,\varphi_j$ такозвани *квазиградијенти* дате диференцијалне везе у односу на ν-ту тачку и D_j је функција координата и времена. Координате квазиградијента означаваћемо са

$$\mathrm{qgrad}_\nu\,\varphi_j\,(A_{\nu j}, B_{\nu j}, C_{\nu j}), \qquad \nu=1,2,\ldots,N, \qquad j=1,2,\ldots,k_2,$$

при чему су ове координате у општем случају функције координата тачака и времена. Претпоставимо да функције φ_j нису тотални диференцијали неких функција координата тачака и времена, другим речима диференцијалне везе непосредно нису интеграбилне.

Нека на тачке система са масама $m_\nu\,(\nu=1,2,\ldots,N)$ дејствују ове силе: 1. активне силе $\vec{F}_\nu$, 2. реакције коначних веза у облику

$$\vec{R}_\nu=\sum_{l=1}^{k_1}\lambda_l\,\mathrm{grad}_\nu\,f_l, \qquad \nu=1,2,\ldots,N$$

и 3. реакције диференцијалних веза са вредностима

$$\vec{R}_\nu^{\,*}=\sum_{j=1}^{k_2}\mu_j\,\mathrm{qgrad}_\nu\,\varphi_j, \qquad \nu=1,2,\ldots,N,$$

где су λ_l и μ_j множитељи одговарајућих веза.

Како смо протумачили у претходном случају, холономног материјалног система, и овде, у случају нехолономног система, проучавање кретања таквог система се врши на тај начин што се систем претпоставља као слободан, а присуство веза се замењује дејством нарочитих сила, сила реакција. Вредности тих сила се одређују из услова да оне својим присуством остварују такво кретање, које задовољава постављене везе.

Пошто силе улазе само у форму акције, форма стања остаје иста као и за слободни систем са истим масама. Према томе имамо

$$\Phi_s=\sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu\vec{v}_\nu, \Delta\vec{r}_\nu)=\sum_{\nu=1}^{N}(\vec{p}_\nu, \Delta\vec{r}_\nu).$$

На основу горенаведеног форму акције састављамо овако:

$$\Phi_a=\Big[-\sum_\nu(\vec{p}_\nu, \vec{v}_\nu)+T+\int_{P_0}^{P}\sum_\nu(\vec{F}_\nu, \Delta\vec{r}_\nu)+$$

$$+\int_{P_0}^{P}\sum_\nu\Big(\sum_l\lambda_l\,\mathrm{grad}_\nu\,f_l, \Delta\vec{r}_\nu\Big)+\int_{P_0}^{P}\sum_\nu\Big(\sum_j\mu_j\,\mathrm{qgrad}_\nu\,\varphi_j, \Delta\vec{r}_\nu\Big)\Big]dt.$$

Као и раније (§ 2.1) из закона инерције одређујемо непозната померања $\Delta\vec{r}_\nu$ из једначина

$$\Delta\vec{r}_\nu=\vec{v}_\nu\,dt.$$

У Пфафовој методи, кад се уводи форма

$$\Phi=\Phi_s+\Phi_a,$$

имали бисмо према члановима збира $\sum_\nu 0 \cdot dp_\nu$ ову Пфафову једначину

$$0 = \operatorname{grad} p_\nu\, \Phi = \Delta \vec{r}_\nu - \frac{1}{m_\nu} \vec{p}_\nu\, dt =$$
$$= \Delta \vec{r}_\nu - \vec{v}_\nu\, dt,$$

која одговара ранијој једначини изведеној из закона инерције.

Закон градијента са своје стране даје:

$$\frac{d\vec{p}_\nu}{dt} = m_\nu \frac{d^2 \vec{r}_\nu}{dt^2} = \vec{F}_\nu + \sum_l \lambda_l \operatorname{grad}_\nu f_l + \sum_j \mu_j \operatorname{qgrad}_\nu \varphi_j, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, N.$$

То су диференцијалне једначине кретања нехолономног система са множитељима веза. Том систему треба додати једначине за одређивање множитеља веза, које се на познати начин изводе из услова за убрзања тачака система

$$\frac{d^2 f_l}{dt^2} = \sum_\nu (\operatorname{grad}_\nu f_l, \vec{w}_\nu) + D_2 f_l = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k_1,$$

$$\frac{d\varphi_j}{dt} = \sum_\nu (\operatorname{qgrad}_\nu \varphi_j, \vec{w}_\nu) + D_2 \varphi_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2.$$

Ово показује да се на сличан начин како за случај холономног система тако и за случај нехолономног система може применити општи феноменолошки диференцијални принцип.

Покажимо сад како изгледа та примена за случај нехолономног система кад се положај система одређује помоћу независних координата и кад према томе кретање система више није ограничено коначним везама, већ само диференцијалним.

Независне координате означимо са q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Пошто у општем случају коначне везе могу зависити и од времена, жива сила може и не бити хомогена функција генералисаних брзина. Претпоставимо даље да на систем дејствују генералисане силе Q_i, које исто тако могу зависити, у општем случају, од координата, брзина и времена. Најзад претпоставимо да је наш систем нехолономан и да су нехолономне везе диференцијалног линеарног облика:

$$(1) \qquad \varphi_j = \sum_i P_{ji} q_i' + P_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2.$$

Као и у случају неконзервативног система са независним координатама проучавање кретања система се врши на тај начин што се претпоставља да везе не постоје и да се кретање система у сагласности са тим везама остварује на тај начин што су у датом случају везе замењене реакцијама диференцијалних веза, које исто тако претпостављамо као идеалне, тј. са реакцијама само у правцу квазиградијента.

Саставимо сад форме стања и акције.

Форму стања, као и у случају § 2.2, треба написати у облику

$$\Phi_s = \sum_{i=1}^{n} p_i\, \Delta q_i,$$

где је $p_i = \dfrac{\partial T}{\partial q_i'}$, а Δq_i, као и раније, непознати диференцијални прираштаји одговарајућих независних координата.

Форма акције садржи: инерциони део

$$\Big(-\sum_i p_i q_i'\Big)\, dt;$$

члан од живе силе Tdt, при чему жива сила зависи од q_i, q_i', t и из њеног израза нису искључене зависне брзине у вези са диференцијалним везама; члан од активних сила у облику

$$\left[\int_{P_0}^{P} \sum_i Q_i\, \Delta q_i\right] dt = J_A\, dt$$

и члан од реакција диференцијалних веза

$$\left[\int_{P_0}^{P} \sum_i \Big(\sum_{j=1}^{k_2} \mu_j P_{ji}\Big)\, \Delta q_i\right] dt = J_R\, dt.$$

Са J_A и J_R означили смо рад активних сила, односно рад реакција на путу од неког положаја P_0 до положаја P. Пошто су ови интеграли важни само по изразу својих подинтегралних функција, јер оне само после диференцирања одређују одговарајућу силу односно реакцију, за диференцијал узимамо ону промењљиву по којој се врши будуће диференцирање.

Према томе форме стања и акције можемо написати за променљиве q_i и q_i' у облику

$$\Phi_s = \sum_{i=1}^{n} p_i \, \Delta q_i ,$$

$$\Phi_a = [- \sum_i p_i q_i' + T + J_A + J_R] \, dt .$$

Ако искористимо Донкинову теорему, према којој је

$$\sum_i p_i q_i' = T^* + T ,$$

можемо написати и овако

$$\Phi_s = \sum_i \frac{\partial T}{\partial q_i'} \Delta q_i ,$$

$$\Phi_a = [- T^* + J_A + J_R] \, dt .$$

За тако написане форме закон градијента даје:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_i'} = - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} + Q_i + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j P_{ji} , \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

или

$$\text{(3)} \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j P_{ji} , \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

јер, према другој Донкиновој теореми,

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0 .$$

Што се тиче закона инерције, из њега непосредно изводимо да је $\Delta q_i = q_i' \, dt$, тј. $\overline{\Delta q_i} = \overline{dq_i} = \underline{dq_i} = dq_i$.

Проучимо мало дубље једначине (3). За тај циљ решимо једначине (1) по зависним брзинама. Нека то буду оне брзине q_i', за које је $i = r+1, r+2, \ldots, r+k_2 = n$. Са таквим ознакама једначине диференцијалних веза у решеном облику пишемо

$$\text{(4)} \qquad q'_{r+j} - \sum_{\rho=1}^{\nu} a_{j\rho} q_\rho' - a_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2 .$$

Једначине (3) поделимо у две групе: за координате са независним брзинама у облику

$$\text{(5)} \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i - \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j a_{ji} , \qquad i = 1, 2, \ldots, r = n - k_2 ,$$

а за координате са зависним брзинама

$$\text{(6)} \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_{r+j}} - \frac{\partial T}{\partial q_{r+j}} = Q_{r+j} + \mu_j , \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2 .$$

Ако сад вредности множитеља из једначина (8) уврстимо у једначине (5) добићемо ове једначине без множитеља веза

$$\text{(7)} \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_\rho'} - \frac{\partial T}{\partial q_\rho} = Q_\rho - \sum_{j=1}^{k_2} a_{j\rho} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_{r+j}} - \frac{\partial T}{\partial q_{r+j}} - Q_{r+j} \right),$$

$$\rho = 1, 2, \ldots, \; r = n - k_2 .$$

Једначине за нехолономни систем сличне једначинама (7) први пут је дао J. Hadamard, у прилогу књижици P. Appell-a [57]

Систем $r = n - k_2$ једначина (7) заједно са системом једначина (4), рецимо у облику

$$\text{(8)} \qquad q'_{r+j} = \sum_{\rho=1}^{r} a_{j\rho} q_\rho' + a_j , \qquad j = 1, 2, \ldots, k_2 ,$$

сачињава систем од n једначина за решавање проблема о кретању нехолономног материјалног система.

Математичка структура једначина (7) може се упростити помоћу ових трансформација.

Елиминишимо из функције T помоћу (8) зависне брзине и уведимо ознаку

$$T (q_i', q_i, t) = \Theta (q'_\rho , q_i, t).$$

То исто учинимо и са изводом

$$\frac{\partial T}{\partial q'_{r+j}} = \theta_j (q'_\rho , q_i , t),$$

при чему је

$$\rho = 1, 2, \ldots, r; \; i = 1, 2, \ldots, n = r + k_2 .$$

Тада за изводе имамо ове резултате

$$\frac{\partial T}{\partial q'_\rho} = \frac{\partial \Theta}{\partial q'_\rho} - \sum_{j=1}^{k_2} \theta_j \frac{\partial q'_{r+j}}{\partial q'_\rho},$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial \Theta}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^{k_2} \theta_j \frac{\partial q'_{r+j}}{\partial q_i},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \quad \rho = 1, 2, \ldots, r = n - k_2.$$

На основу изведених образаца, једначине (7) можемо заменити овим

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial q'_\rho} - \frac{\partial \Theta}{\partial q_\rho} - \sum_j \frac{\partial \Theta}{\partial q_{r+j}} \frac{\partial q'_{r+j}}{\partial q'_\rho} - Q_\rho - \sum_j Q_{r+j} \frac{\partial q'_{r+j}}{\partial q'_\rho} -$$

$$- \sum_j \theta_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial q'_{r+j}}{\partial q'_\rho} - \frac{\partial q'_{\ +j}}{\partial q_\rho} - \sum_h \frac{\partial q'_{r+j}}{\partial q_{r+h}} \cdot \frac{\partial q'_{r+h}}{\partial q'_\rho} \right) = 0.$$

$$\rho = 1, 2, \ldots, r.$$

У таквој форми једначине за нехолономни систем је написао и применио на решавање низа проблема П. В. Воронец [56, 57].

У свом раду [58] проучио сам једначине за конзервативни систем и после елиминисања времена показао да се у случају, кад су жива сила, потенцијална енергија и коефицијенти диференцијалних хомогених веза рационалне функције координата, могу написати једначане кретања које не садрже ирационалности.

У вези са теоријом диференцијалних једначина кретања за нехолономни систем учинимо још неколико примедаба.

Професор G. Hamel је у својим радовима, чији главни садржај улази у његов уџбеник [54], извео и проучио такозване Euler-Lagrange-еве једначине кретања материјалног система и поставио везу између тих једначина и једначина за нехолономни систем.

Суштина методе, која доводи до Euler-Lagrange-евих једначина, у томе је што се место n генералисаних координата и њима одговарајућих генералисаних брзина (q_i и q_i') уводе такозване *квазикоординате*, које одговарају датим генералисаним координатама, а место генералисаних брзина линеарне функције тих брзина. Ако те линеарне функције означимо са ω_j, оне се одређују једначинама

$$\omega_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu,\nu}\, q_\nu' + c_\mu, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, n,$$

где су $b_{\mu,\nu}$, c_μ дате функције координата и времена. Претходне једначине треба да буду решљиве по генералисаним брзинама

$$q_\nu' = \sum_{\mu=1}^{n} B_{\nu,\mu}\, \omega_\mu + C_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Тако, напр., у случају чврстог тела положај тела, које се обрће око непокретне тачке или око центра маса, одређује се помоћу Euler-ових углова φ, ψ, θ и према Лагранжу за проучавање кретања тог тела уводимо угаоне брзине у облику φ', ψ', θ' а према Euler-у узимамо, рецимо p, q, r — пројекције угаоне брзине тела на осе чврсто везане са телом, које су линеарне функције извода по времену φ', ψ', θ'.

Квазикоординате, које означујемо са ϑ_j ($j = 1, 2 \ldots, n$), нису везане помоћу коначних једначина са генералисаним координатама q_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), већ само помоћу диференцијалних једначина

$$\frac{d\vartheta_j}{dt} = \omega_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Пошто изрази ω_j у општем случају нису тотални изводи неких функција по времену, функције ϑ_j нису функције координата q_i и времена, већ се могу сматрати као функције времена после одређивања координата q_i у функцији времена. Али њихови диференцијали су конкретне величине и они играју одређену улогу при диференцирању функције која зависи од q_i по квазикоординати ϑ_j. То диференцирање неке функције $f(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ се врши према правилу надовезивања овако

$$\frac{df}{d\vartheta_j} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{d\vartheta_j} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{q_i'}{\omega_j} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} B_{ij}.$$

Жива сила система, која се прво јавља као функција аргумената q_i', q_i, t, може се сматрати као функција ω_i, q_i, t, па чак и као функција аргумената ω_i, ϑ_i, t, ако трансформацији подлеже само изводи живе силе по квазикоординатама. Означимо живу силу у том облику са $\mathbf{T}$ и уведимо импулс

$$P_\mu = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \omega_\mu}.$$

Са тим ознакама G. Hamel је изразио своје једначине овако [54, стр. 481]

$$(9) \qquad \frac{dP_\mu}{dt} + \sum_{\rho\tau} \beta_\rho^{\tau,\mu} P_\rho\, \omega_\tau - \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial_\theta} \right) = \mathbf{K}_\mu, \quad (\mu = m+1, m+2, \ldots, n),$$

где су:

$$\beta_\rho^{\tau,\mu} = \sum_{\nu,\sigma}\left(\frac{\partial b_{\rho\nu}}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial b_{\rho\sigma}}{\partial q_\nu}\right) B_{\sigma\tau} B_{\nu\mu},$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \vartheta_\mu}\right) = \sum_\nu \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial q_\nu} B_{\nu\mu},$$

и

$$\mathbf{K}_\mu = \sum_\nu K_\nu B_{\nu\mu},$$

где је K_ν генералисана сила што одговара генералисаној координати q_ν, а $\mathbf{K}_\mu$ — што одговара квазикоординати са диференцијалом $d\vartheta_\mu$.

У случају нехолономног система са m диференцијалних веза у облику

(10) $$\omega_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu} q_\nu' + c_\mu = 0, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m,$$

систем једначина (9) и (10) служи за решавање проблема о кретању система.

Ако је систем холономан, $m=0$ и једначине (10) отпадају, а систем једначина (9) тада добива, према G. Hamel-у, облик

(11) $$\frac{d\omega_\mu}{dt} + \sum_{\rho,\tau} \beta_\rho^{\tau,\mu} \omega_\rho \omega_\tau = \mathbf{K}_\mu, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, n,$$

јер у том случају можемо увести помоћу једначина

(12) $$q_\nu' = \sum_\mu B_{\nu\mu} \omega_\mu$$

такве вредности за ω_μ, за које ће бити

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \sum_\mu \omega_\mu^2$$

и према томе

$$P_\mu = \omega_\mu .$$

У овом случају за решавање проблема о кретању система служе једначине (11) и (12).

Како једначине (9) тако и једначине (11) могу се извести и на основу феноменолошког диференцијалног принципа, односно на основу Пфафовог принципа. То извођење захтева само извођење одређених трансформација. Пошто су те трансформације доста компликоване, а не уносе ништа суштински новог, нећемо овде улазити у те трансформације.

Приметимо да су једначине Euler-Lagrange-еве природе доста компликоване по својој аналитичкој структури и захтевају доста рачунског труда. Сам G. Hamel при изради класичног примера — извођења Euler-ових једначина кретања чврстог тела, одмах, у почетку извођења прелази на векторску методу.

У вези са искоришћавањем Euler-Lagrange-евих једначина наведимо још једну примедбу.

Професор T. Pöschl у раду [59] наводи „канoничне једначине" нехолономног система. Према постојећој номенклатури Pöschl-ове једначине нису „канoничне" једначине већ само изражене помоћу нарочитих импулса, јер оне гласе овако

$$\frac{dp_i}{dt} + \sum g_{i\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \frac{\partial H}{\partial \omega_\nu} = -\left(\frac{\partial H}{\partial \vartheta_i}\right)$$

и према томе садрже како чланове, тако и функције, које не улазе у класичне канoничне једначине облика

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Питању могућности формирања правих канoничних једначина за специјалне нехолономне системе, после чланка С. А. Чаплыгина, био је посвећен и мој чланак [61]. Резултати тог чланка били су поновљени од стране L. Marchetti [62], о чему сам писао у свом раду [63].

2.4. Случај проучавања геометриске стране кретања конзервативног система

У случају конзервативног материјалног система C. G. J. Jacobi [35] је извео диференцијалне једначине трајекторија материјалног система узимајући за независно променљиву место времена једну од координата система. После интеграције тог система време се уводи квадратуром. На тај начин се помоћу Jacobi-евих једначина проблем о кретању конзервативног материјалног система са n степена слободе своди на интеграцију система са $2(n-1)$ диференцијалних једначина првога реда и на квадратуру.

Проучавање проблема извођења Jacobi-евих једначина овде има за циљ да покаже да примена феноменолошког извођења диференцијалних једначина појаве, раздвајањем форме стања од форме акције, може бити и мање конкретно и тежа од непосредне примене Пфафове методе, без раздвајања форме стања и форме акције. И то баш у оним случајевима где се проучавање појаве врши са искоришћавањем чисто аналитичких особина појаве, напр. у случају постојања једног или више интеграла. Може се десити да се тек после извођења нове Пфафове форме, настале после искоришћавања одговарајућих интеграла, може показати у новој форми одвојено форма стања и форма акције. Јасно је да састављање унапред, интуитивно, једне и друге форме при узимању у обзир понекад чисто формалних особина проблема, напр. улоге времена у случају конзервативног система, може бити много компликованије него што је формално, аутоматско искоришћавање тих особина за познате трансформације целокупне Пфафове форме. Непосредна феноменолошка расуђивања су најпригоднија у случајевима проучавања фундаменталних појава од почетка, кад је потпуно јасна улога стања и акције.

При извођењу Jacobi-евих једначина пре свега треба узети у обзир да је

1. жива сила конзервативног система хомогена функција, квадратна форма, генералисаних брзина, тј.

$$T = g_{ij}\, q_i'\, q_j',$$

2. да постоји интеграл живе силе

$$T = U + h,$$

где је U функција сила, а h произвољна константа.

Ако узмемо за независно промењљиву једну од координата, напр. q_1, и ставимо

$$q_j' = \frac{dq_j}{dt} = \frac{dq_j}{dq_1}\cdot\frac{dq_1}{dt} = \dot{q}_j \cdot q_1', \quad j = 2, 3, \ldots, n,$$

где је

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dq_1},$$

можемо живу силу претставити овако

$$T = G q_1'^2,$$

где је G квадратна функција (више није форма) од $\dot{q}_j$ са коефицијентима функцијама од q_i ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 2, 3, \ldots, n$).

Из интеграла живе силе следује

$$q_1' = \sqrt{\frac{U+h}{G}},$$

при чему знак испред корена треба да се изабере према почетним условима. Према томе израз Tdt можемо трансформисати овако

$$Tdt = G q_1'^2\, dt = G q_1'\, dq_1 = G\sqrt{\frac{U+h}{G}}\, dq_1 = P dq_1,$$

где је

$$P = \sqrt{G\,(U+h)}.$$

Применимо сад на наш случај Пфафову методу и пођимо од дејства у Хамилтоновом смислу

$$\Phi = (T+U)\, dt.$$

Пошто је

$$(T-U)\, dt = h\, dt$$

тотални диференцијал, имамо еквивалентност

$$\Phi + h\, dt \approx \Phi,$$

или

$$\Phi \approx (T+U)\, dt + (T-U)\, dt \approx 2\, T\, dt \approx T\, dt \approx P\, dq_1.$$

Ако за функцију P уведемо одговарајуће импулсе

$$\pi_j = \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_j}, \qquad j = 2, 3, \ldots, n,$$

можемо Пфафову форму дефинитивно написати

$$\Phi \approx P\, dq_1 \approx \sum_{j=2}^{n} \pi_j\, dq_j - \left(\sum_{j=2}^{n} \pi_j\, \dot{q}_j - P\right) dq_1 \approx \sum_{j=2}^{n} \pi_j\, dq_j - P^*\, dq_1,$$

при чему смо, према Донкиновој теореми, ставили

$$P + P^* = \sum_j \pi_j\, \dot{q}_j,$$

где је P^* конјугована вредност P.

За промењљиве q_j Пфафове једначине

$$d\pi_j = \frac{\partial P}{\partial q_j}\, dq_1 = -\frac{\partial P^*}{dq_j}\, dq_1$$

доводе до Jacobi-евих једначина

$$\text{(1)} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial P}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 2, 3, \ldots, n.$$

За променљиве π_j, узимајући у обзир збир $\sum_j 0 \cdot d\pi_j$, имамо

$$0 = dq_j - \frac{\partial P^*}{\partial \pi_j} dq_1 = 0,$$

одакле према Донкину имамо

$$\frac{dq_j}{dq_1} - \dot{q}_j = 0,$$

јер је

(2)
$$\frac{\partial P^*}{\partial \pi_j} = \dot{q}_j .$$

Приметимо да се једначине (1) и (2) могу написати у овој каноничној форми

$$\frac{d\pi_j}{-\dfrac{\partial P^*}{\partial q_j}} = \frac{dq_j}{\dfrac{\partial P^*}{\partial \pi_j}} = dq_1, \qquad j = 2, 3, \ldots, n,$$

јер је

$$\frac{\partial P}{\partial q_j} = -\frac{\partial P^*}{\partial q_j} .$$

Учинимо још једну примедбу. У развијеном облику Jacobi-еве једначине садрже ирационалност. Како сам показао [33], та ирационалност може се искључити на овај начин.

Истовремено са Jacobi-евим једначинама можемо узети у обзир и ону Lagrange-еву једначину која одговара променљивој q_1 и која се може сматрати као последица Jacobi-ових једначина и интеграла живе силе.

Према томе ако из једначине

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_1'} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_1}$$

такође елиминишемо време, добићемо после једноставних трансформација ову једначину

$$\sqrt{\frac{U+h}{G}} \frac{d}{dq_1}\left(A \sqrt{\frac{U+h}{G}}\right) - \frac{U+h}{G}\frac{\partial G}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_1},$$

где је

$$A = 2G - \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j .$$

Међутим развијене Jacobi-еве једначине

$$\sqrt{\frac{U+h}{G}} \frac{d}{dq_1}\left(\sqrt{\frac{U+h}{G}} \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{U+h}{G}\frac{\partial G}{\partial q_j} = \frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad j = 2, 3, \ldots, n,$$

могу се написати и овако

$$\frac{d}{dq_1}\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_j} + \frac{G}{U+h}\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_j}\left(\sqrt{\frac{U+h}{G}} \frac{d}{dq_1}\sqrt{\frac{U+h}{G}}\right) - \frac{\partial G}{\partial q_j} =$$

$$= \frac{G}{U+h}\frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad j = 2, 3, \ldots, n.$$

Пошто се једначина за променљиву q_1 може написати и овако

$$\sqrt{\frac{U+h}{G}} \frac{d}{dq_1}\left(\frac{\sqrt{U+h}}{G}\right) = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial U}{\partial q_1} + \frac{U+h}{G}\frac{\partial G}{\partial q_1} - \frac{U+h}{G}\frac{dA}{dq_1}\right),$$

видимо да из претходних једначина можемо елиминисати ирационалност и написати Jacobi-еве једначине овако

$$\frac{d}{dq_1}\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_j} + \frac{1}{A}\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_j}\left(K\frac{\partial U}{\partial q_1} + \frac{\partial G}{\partial q_1} - \frac{dA}{dq_1}\right) - \frac{\partial G}{\partial q_j} = K\frac{\partial U}{\partial q_j}, \qquad j = 2, 3, \ldots, n,$$

где је

$$K = \frac{G}{U+h}.$$

Ове једначине не садрже ирационалност, ако су функција сила и жива сила рационалне функције координата.

Ако жива сила има облик

$$2T = q_1'^2 + A_{22} q_2'^2 + 2A_{23} q_2' q_3' + \cdots + A_{nn} q_n'^2 ,$$

тј. садржи q_1' само у облику квадрата, $A = 1$, Jacobi-еве једначине без ирационалности изгледају

$$\frac{d}{dq_1}\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_j}\left(K\frac{\partial U}{\partial q_1} + \frac{\partial G}{\partial q_1}\right) - \frac{\partial G}{\partial q_j} = K\frac{\partial U}{\partial q_j}, \qquad j = 2, 3, \ldots, n.$$

Најзад, ако је

$$2T = \sum_{i=1}^{n} q_i'^2,$$

Jacobi-еве једначине имају сасвим једноставан облик

$$\frac{d^2q_j}{dq_1^2}+K\dot{q}_j\frac{\partial U}{\partial q_1}=K\frac{\partial U}{\partial q_j}\,,\qquad j=2,3,\ldots,n,$$

са

$$K=\frac{G}{U+h}$$

и

$$G=1+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2+\cdots+\dot{q}_n^2\,.$$

2.5. Случај чврстог тела

Применимо сад наше феноменолошко тумачење Пфафове методе на проучавање кретања чврстог тела. Послужимо се, са малом изменом, оним извођењем диференцијалних једначина кретања чврстог тела по Пфафовој методи које је дао Т. Анђелић у свом раду [19].

Саставимо пре свега форму стања

$$\Phi_s=\sum_i(m_i\vec{v}_i,\Delta\vec{r}_i),$$

где за чврсто тело збир прелази на познати начин у интеграл.

Као што је познато, елементарно померање $\Delta\vec{r}_i$ тачке чврстог тела можемо изразити помоћу два члана, транслаторног и обртног,

$$\Delta\vec{r}_i=\Delta\vec{r}_A+[\Delta\vec{\alpha},\vec{\rho}_i],$$

где је $\Delta\vec{r}_A$ елементарно померање за упоређнвање изабране тачке чврстог тела, $\Delta\vec{\alpha}$ — векторски претставник диференцијалног угла обртања тела око осе вектора $\vec{\Omega}$, тренутне угаоне брзине тела, тј. $\Delta\vec{\alpha}=\vec{\Omega}\Delta t$, и $\vec{\rho}_i=\vec{r}_i-\vec{r}_A$. Са написаном вредношћу елементарног померања имамо овај израз за форму стања

$$\Phi_s=(\sum_i m_i\vec{v}_i,\Delta\vec{r}_A)+\sum_i(m_i\vec{v}_i,[\Delta\vec{\alpha},\vec{\rho}_i])=$$

$$=(\sum_i m_i\vec{v}_i,\Delta\vec{r}_A)+(\sum_i[\vec{\rho}_i,m_i\vec{v}_i],\Delta\vec{\alpha})$$

или дефинитивно

(1) $$\Phi_s=(\vec{K},\Delta\vec{r}_A)+(\vec{I}^{(A)},\Delta\vec{\alpha}),$$

где су: $\vec{K}$ — количина кретања чврстог тела, $\vec{I}^{(A)}$ — моменат количина кретања свих елемената масе чврстог тела око тачке A тела. Заграде означавају, као увек, — округле — скаларни производ, а угласте — векторски.

При састављању форме акције инерциони део треба узети према (1) у облику

$$\{-(\vec{K},\vec{v}_A)-(\vec{I}^{(A)},\vec{\Omega})\}\,dt\,,$$

а два члана Хамилтоновог дејства или у облику

$$(T+U)\,dt\,,$$

ако постоји функција сила, или у облику

$$\left\{T+\int_{P_0}^{P}[(\vec{F},d\vec{r}_A)+(\vec{L}^{(A)},\vec{d\alpha})]\right\}dt$$

за случај произвољних сила са главним вектором $\vec{F}$ тих сила и главним моментом $\vec{L}^{(A)}$ око изабране тачке A тела.

Према томе имамо на располагању ове две форме:

$$\Phi_s=(\vec{K},\Delta\vec{r}_A)+(\vec{I}^{(A)},\vec{\Delta\alpha})\,,$$

$$\Phi_a=\left\{-(\vec{K},\vec{v}_A)-(\vec{I}^{(A)},\vec{\Omega})+T+\int_{P_0}^{P}[(\vec{F},d\vec{r}_A)+(\vec{L}^{(A)},\vec{d\alpha})]\right\}dt\,.$$

Приметимо да у изразу за форму акције живу силу T треба сматрати као функцију променљивих $\vec{v}_A$ и $\vec{\Omega}$ и динамичких константата тела.

Пређимо сад на извођење диференцијалних једначина проблема.

Пошто у наведеном изразу акције тренутне силе не учествују, за системе важи закон инерције према којем одређујемо две непознате величине $\Delta\vec{r}_A$ и $\vec{\Delta\alpha}$, наиме једначинама

$$\Delta\vec{r}_A=\vec{v}_A\,dt,\qquad \vec{\Delta\alpha}=\vec{\Omega}\,dt.$$

Тај исти резултат се добива и непосредно према Пфафовој методи, после увођења целокупне форме $\Phi = \Phi_s + \Phi_a$ и узимања у обзир чланова $0 \cdot d\vec K$ и $0 \cdot d\vec l^{(A)}$ те форме. Заиста, имамо ове две једначине:

$$0 = \mathrm{grad}_{\vec K}\, \Phi = \mathrm{grad}_{\vec K}\, \Phi + \mathrm{grad}_{\vec K}\, \Phi_a =$$

$$= \Delta \vec r_A - \vec v_A\, dt,$$

$$0 = \overrightarrow{\Delta \alpha} - \vec \Omega\, dt,$$

које потврђују наш закључак.

Са своје стране, закон градијента даје:

$$d\vec K = \mathrm{grad}_{\vec r_A}\, \Phi_a = \vec F\, dt,$$

$$d\vec l^{(A*)} = \mathrm{grad}_{\vec \alpha}\, \Phi_a = \vec L^{(A*)}\, dt,$$

где смо са A^* означили непокретну тачку, која се у датом моменту поклапа са датом покретном тачком A тела. Пошто вредност момента сила не мења своју вредност у вези са кретањем тачке A, имамо пре свега

$$\vec L^{(A*)} = \vec L^{(A)}.$$

Што се тиче диференцијала момента количина кретања, он зависи од кретања пола и то на овај начин

$$d\vec l^{(A*)} = d\vec l^{(A)} + [\vec v_A, \vec K]\, dt.$$

Заиста, пошто је

$$\vec l^{(A*)} = \sum [\vec \rho_i, m_i \vec v_i],$$

где је $\vec \rho_i = \vec r_i - \vec r_{A*}$ и $\vec r_{A*} = \mathrm{const.}$, имамо за извод по времену, који означавамо тачком, ову вредност

$$\dot l^{(A*)} = \sum [\vec \rho_i, m_i \dot v_i],$$

а за

$$\vec l^{(A)} = \sum [\rho_i, m_i \vec v_i],$$

где је $\vec \rho_i = \vec r_i - \vec r_A$ и $\vec r_A$ промењиво, ову вредност

$$\dot l^{(A)} = \sum [\vec \rho_i, m_i \dot v_i] - [\vec v_A, \vec K].$$

Упоређивање два добивена резултата и потврђује горенаписани образац за диференцијале.

Према том обрасцу једначине кретања тела можемо изразити овако:

(2)
$$\frac{d}{dt}\vec K = \vec F,$$

$$\frac{d}{dt}\vec l^{(A)} + [\vec v_A, \vec K] = L^{(A)}.$$

Ако сад узмемо у обзир, с једне стране, израз за живу силу чврстог тела из једначине

$$2\,T = \sum_i m_i v_i^2 = m\, v_A^2 + 2\, m\, (\vec v_A\, [\vec \Omega, \vec \rho_c]) + \sum m_i\, ([\vec \Omega, \vec \rho_i]\, [\vec \Omega, \vec \rho_i]),$$

а, са друге стране, вредност вектора $\vec K$ и $\vec l^{(A)}$ у облику

$$\vec K = m \vec v_A + m\, [\vec \Omega, \vec \rho_c],$$

$$\vec l^{(A)} = \sum m_i\, [\vec \rho_i, \vec v_A + [\vec \Omega, \vec \rho_i]\,],$$

где је m маса тела и $\vec \rho_c$, из једначине $\Sigma\, m_i \vec \rho_i = m\, \vec \rho_c$, вектор положаја центра маса, тачке C, у односу на тачку A, онда без тешкоће долазимо до једначина

(3)
$$\vec K = \mathrm{grad}_{\vec v_A}\, T,$$

$$\vec l^{(A)} = \mathrm{grad}_{\vec \Omega}\, T,$$

које изражавају ову теорему динамике чврстог тела: делимични градијент живе силе чврстог тела по транслаторној брзини тела једнак је количини кретања тог тела, а делимични градијент по тренутној угаоној брзини има вредност момента количина кретања око оне тачке тела која одређује транслаторну брзину тог тела.

На основу (3) једначине (2) дефинитивно узимају форму

(4)
$$\frac{d}{dt}\, \mathrm{grad}_{\vec v_A}\, T = \vec F,$$

$$\frac{d}{dt}\, \mathrm{grad}_{\vec \Omega}\, T + [\vec v_A, \mathrm{grad}_{\vec v_A}\, T] = \vec L^{(A)}.$$

То су векторске једначине [30], из којих без тешкоће можемо написати различите диференцијалне једначине кретања чврстог тела у скаларном облику.

2.6. Случај статике

Проверимо да ли се у случају трајног мировања материјалног система, тј. у случају статике, наша феноменолошка посматрања и њихово формулисање не налазе у противуречности са познатим законима статике.

Покажимо да и из феноменолошког диференцијалног принципа могу бити добивени неопходни и довољни услови равнотеже материјалног система.

Прво изведимо неопходне услове. Ако материјални систем треба да мирује трајно у току извесног времена, онда не само форма стања у почетку тог интервала треба да буде једнака нули, већ треба да буде једнака нули и њена промена, коју изазивају градијенти акције. Пошто су у случају мировања система наслеђени део акције и жива сила једнаки нули, треба да буду једнаки сви градијенти функције U или интеграла $\int_{P_0}^{P} \Sigma (\vec{F}_\nu, \overrightarrow{ds_\nu})$ и то на свима могућим померањима тачака система, слободних или везаних. А то доводи до познатих неопходних услова за равнотежу система у облику било

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

било

$$\vec{F}_\nu = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, N,$$

при чему у случају неслободног система у рачун треба да уђу и силе реакција.

Лако је навести расуђивања да су и обратно: написани услови заједно са условима за почетно стање система и довољни услови за равнотежу система.

Према томе можемо закључити да се наша феноменолошка посматрања у потпуности поклапају са другим проучавањима феномена трајног мировања материјалног система. Нећемо се заустављати на детаљном развијању наших посматрања и на извођењу из тих посматрања других метода статике, напр. методе могућих померања.

Познато је да многе научне дисциплине за повезивање факата своје области употребљују схеме и терминологију механичке статике. Општи феноменолошки диференцијални принцип својом статичком граном, с једне стране, даје тачнију подлогу примени статичке схеме и на друге дисциплине сем механике, а са друге, увођењем одговарајућих, за те дисциплине нових појмова, поља, градијента, инерције и др., отвара могућност да се дубље оцене везе између факата односно стања и узрока, који, у вези са акцијом, мењају факте и стања.

2.7. Случај тренутних сила. Удар

За феноменолошко тумачење суштине проблема зауставимо се на случају кретања само једне материјалне тачке кад на њу дејствује тренутна сила.

Нека је у моменту $t_0 = 0$ материјална тачка дошла у положај $\underline{M_0}$ са брзином $\underline{\vec{v}_0}$. Претпоставимо да у том моменту на тачку масе m дејствује сила $\vec{F}$ такве природе да њен импулс за бескрајно мали интервал времена τ тежи коначној векторској вредности $\vec{J}$, кад тај интервал времена тежи нули, тј.

$$\lim_{\tau \to 0} \int_0^\tau \vec{F}\, dt = \vec{J}. \tag{1}$$

За силу $\vec{F}$ се тада каже да је то *бескрајно велика тренутна сила.* Увођење таквих тренутних сила је дозвољена математичка апстракција схематизоване физичке појаве. Операције са таквим силама се правдају задовољавајућим конкретним резултатима при објашњењу стварних природних појава.

Протумачимо сад питање: како се феноменолошки тумачи кретање тачке после момента t_0, почетка дејства тренутне силе са коначним импулсом, при чему се та појава одиграва у интервалу времена који тежи нули?

Прво претпоставимо да је време τ мало али ипак коначно. Означимо са t неки моменат тог интервала и са dt његов диференцијални елеменат. За сваки моменат тог интервала може се написати форма стања и форма акције

$$\Phi_s = (m\vec{v}, \Delta\vec{r}),$$

$$\Phi_a = \left[-(m\vec{v}, \vec{v}) + T + \int_0^t (\vec{F} + \vec{f}, \Delta\vec{r})\right] dt,$$

где је $\vec{f}$ сила коначне величине у поређењу са силом $\vec{F}$ која тежи бесконачности кад τ тежи нули.

Пошто у овом случају, због услова (1), форма акције Φ_a при прелазу на граничну вредност, кад је $t=\tau=dt\to 0$, не задовољава услов

$$\lim_{\Delta t\to 0} \Phi_a = 0,$$

на проучавање кретања тачке из положаја $\vec{r}_0$ не можемо применити закон инерције. Почетна брзина $\vec{v}_0$ се не преноси са истом вредношћу на крај интервала τ, без обзира на то што тај интервал тежи нули. За одређивање те брзине применимо закон градијента, који даје

$$d(m\vec{v}) = \operatorname{grad}_{\vec{r}} \Phi_a = (\vec{F} + \vec{f})\, dt.$$

Ако сад извршимо интеграцију у границама од 0 до τ и означимо са $\vec{v}_\tau$ брзину за крајњи момент, можемо написати

$$m(\vec{v}_\tau - \vec{v}_0) = \int_0^\tau (\vec{F} + \vec{f})\, dt.$$

Пређимо сад на граничне вредности кад $\tau\to 0$. Тада ћемо по услову (1) добити са десне стране за тренутну силу $\vec{F}$ коначни импулс $\vec{J}$, за коначну силу $\vec{f}$ нулу, а са леве стране брзина $\vec{v}_\tau$ добија граничну вредност коју ћемо означити са $\vec{v}_1$ и која се одређује из једначине

$$m(\vec{v}_1 - \vec{v}_0) = \vec{J}. \tag{2}$$

То је једначина закона количине кретања у примени на случај дејства тренутних сила. Даље кретање тачке се врши из истог

положаја са брзином $\vec{v}_1$, као новом почетном брзином, под утицајем коначне силе, јер за време дејства тренутне силе тачка није променила свој положај.

Што се тиче живе силе, она трпи промену са вредношћу

$$T_1 - T_0 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m(\vec{v}_1^2 - \vec{v}_0^2) = \frac{1}{2} m \{(\vec{v}_1 - \vec{v}_0, \vec{v}_0) + (\vec{v}_1 - \vec{v}_0, \vec{v}_1)\} =$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{J}, \vec{v}_0 + \vec{v}_1) = (\vec{J}, \vec{v}_s),$$

где је $\vec{v}_s$ средња векторска брзина почетне и завршне брзине.

Теорија удара, рецимо, материјалне тачке о везу или судара два чврста тела феноменолошки се непосредно тумачи на основу горенаведеног феноменолошког тумачења дејства тренутне силе на материјалну тачку односно на чврсто тело.

Зауставимо се на кратком прегледу удара тачке о површину. Ту површину сматраћемо као непромењиву, јер случај промењиве површине не уноси ништа битно ново, већ само долази у рачуне један допунски члан (види, напр., [29, I, стр. 251]).

Нека је површина дата једначином незадржавајуће везе

$$\Phi(x, y, z) \geqslant 0$$

и нека је тачка за време кретања према коначним једначинама кретања

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t)$$

дошла на ту површину у моменту t_0, при чему је t_0 најмањи корен једначине

$$\Phi(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

већи од момента t_P који одговара почетку кретања тачке.

Из познатих услова за брзину тачке знамо да удар наступа кад је за моменат t_0

$$\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_0 = (\vec{v}_0, \operatorname{grad}\Phi) < 0.$$

Тада се појава рашчлањује на први чин удара, од момента t_0 до момента t_1 кад је

$$\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_1 = (\vec{v}_1, \operatorname{grad}\Phi) = 0,$$

и на други чин, од момента t_1 до момента t_2 са

$$\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_2 = (\vec{v}_2, \operatorname{grad}\Phi) > 0,$$

после чега у општем случају тачка напушта везу и продужује своје кретање као слободна тачка.

За време првог и другог чина на тачку дејствују тренутне силе — реакције везе; у случају идеалне везе те реакције имају правац градијента дате везе у тачки удара, увек напереног у смеру куд функција Φ расте, јер је тако написана једначина незадржавајуће везе. Означимо са $\vec{J}_1$ и $\vec{J}_2$ импулсе тих тренутних сила реакција. За сваки чин можемо написати форму стања и форму акције и поступити на исти начин како смо поступили при посматрању дејства тренутне силе на тачку. Као резултат тог проучавања добићемо, с једне стране, две једначине

$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = J_1,$$

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = J_2,$$

као резултат тренутних акција за први и други чин, а, са друге стране, једначине

$$-m\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_0 = J_1 |\operatorname{grad}\Phi|,$$

$$m\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_2 = J_2 |\operatorname{grad}\Phi|.$$

На тај начин смо добили четири једначине са пет непознатих:

$$J_1, \quad J_2, \quad \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_2, \quad \vec{v}_1, \quad \vec{v}_2.$$

Као што је познато, допунски услов се уводи помоћу такозваног *коефицијента успостављања* који означавамо са ε и који улази у једначину

$$J_2 = \varepsilon J_1,$$

другим речима, одређује вредност J_2 према вредности J_1. После тога се проблем решава до краја.

Видимо да се феноменолошки диференцијални принцип може са успехом применити и у случајевима оних проблема који се третирају помоћу тренутних сила и где се закон инерције у суштини замењује законом количине кретања за тренутне силе.

Приметимо да из посматраног непосредно следује могућност примене и Пфафове методе са збиром две форме, стања и акције.

2.8. Случај механике непрекидне средине

У својим радовима [17, 18] Т. Анђелић је показао како се може послужити Пфафовом методом за извођење основних диференцијалних једначина хидродинамике и механике еластичних тела. Овде, у вези са наведеним радовима Т. Анђелића, искоришћавајући општа расуђивања из механике непрекидне средине, укратко показујемо како се за исти циљ, за извођење основних диференцијалних једначина, може употребити општи феноменолошки диференцијални принцип.

За примену општег феноменолошког диференцијалног принципа на механику непрекидне средине сматрамо ту средину као скуп неслободних, међу собом повезаних материјалних тачака. Узмимо у обзир једну од таквих тачака и означимо њену масу са Δm, а запремину са ΔV. Сваку једначину, нарочито једначину кретања односно равнотеже такве материјалне тачке, делимо са ΔV и прелазимо на граничне вредности кад ΔV тежи нули. При томе

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

даје густину ρ материјалне средине за одговарајућу материјалну тачку, а за једначину говоримо да је израчуната за материјалну тачку у односу на јединицу запремине.

Као што је раније било изведено за примену општег феноменолошког диференцијалног принципа на механику тачке треба саставити две диференцијалне форме — форму стања Φ_s и форму акције Φ_a и применити закон градијента на промену импулса и закон инерције за одређивање стварног померања тачке. За наш случај, после дељења са ΔV и прелаза на граничну вредност, форма стања добива овај облик

$$\Phi_s=(\vec{p}, \Delta\vec{r}),$$

где је $\vec{p}=\rho\vec{v}$, а $\vec{v}$ је брзина тачке у односу на непокретни простор; то је брзина која стварно одговара диференцијалном померању тачке из једног положаја у бескрајно блиски положај и има за координате

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}.$$

Форма акције Φ_a садржи ове чланове:

1. Инерциони део са вредношћу

$$-(\vec{p}, \vec{v})\,dt=-\frac{1}{\rho}(\vec{p}, \vec{p})\,dt.$$

2. Први део Хамилтонова дејства, живу силу са множитељем dt, тј.

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\,T\,dt=\frac{1}{2}(\rho\vec{v}, \vec{v})\,dt=\frac{1}{2\rho}(\vec{p}, \vec{p})\,dt.$$

3. Други део Хамилтонова дејства. То је са dt помножен рад свих сила, које дејствују на тачку, израчунатих за јединицу запремине, на путу од неког полазног положаја тачке до положаја за који се врши израчунавање промене стања по закону градијента. Као што јо познато, потпуно израчунавање тог рада није потребно, али је потребна могућност изражавања градијента тог рада.

Набројимо сад оне силе које дејствују на тачку.

a. Резултанта, у односу на јединицу запремине, запреминских сила. Ту резултанту означимо са $\rho\vec{G}$. Вектор $\vec{G}$ има димензију силе израчунате на јединицу масе, тј. димензију убрзања. Напр., за силу теже имамо $\vec{G}=\vec{g}$, убрзање теже.

b. Површинске силе исто у односу на јединицу запремине.

Остављајући по страни оне површинске силе које дејствују на граници дате области непрекидне средине и које улазе у такозване граничне услове, зауставимо се само на оним површинским силама, које дејствују на површину S нашег елемента са запремином ΔV и које претстављају унутрашње напоне у непрекидној

материјалној средини одређене физичке структуре способне за остварење одговарајућих унутрашњих напона. Општа теорија тих напона добро је разрађена и према томе нема потребе да се овде улази у излагање те теорије. Узећемо из те теорије само оно што је потребно за наш циљ. Што се тиче случајева специјалних средина, зауставимо се, ради конкретности, на проучавању два случаја: на случају (§ 2.81) вискозне течности и на случају (§ 2.82) еластичне средине која се покорава Хукову закону.

Означимо са $\vec{p}_n$ површинску силу напона која дејствује на елеменат dS површине S са ортом $\vec{n}$ спољашње нормале. Пошто је

$$\vec{p}_n=(P, \vec{n}),$$

где је P тензор напона у облику

$$P=\begin{Bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{Bmatrix},$$

а обле заграде означавају скаларни производ тензора и вектора, за резултанту површинских сила проширену на целокупну површину S елемента ΔV, израчунату за јединицу запремине, имамо после прелаза на граничну вредност израз

$$\lim_{\substack{\Delta V\to 0\\ S\to 0}}\frac{1}{\Delta V}\int_S (P, \vec{n})\,dS.$$

После замене по познатој теореми површинског интеграла запреминским, на основу које имамо

$$\int_S (P, \vec{n})\,ds=\int_{\Delta V}(\nabla, P)\,dV,$$

где је ∇ Хамилтонов оператор са вредношћу

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k,$$

и прелаза на граничну вредност добићемо ову вредност за тражену резултанту (∇, P) са координатама

$$\pi_x = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z},$$

$$\pi_y = \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z},$$

$$\pi_z = \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}.$$

На основу наведених резултата други део Хамилтонова дејства можемо изразити збиром

$$\left\{ \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} (\rho \vec{G}, d\vec{r}) + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} ((\nabla, P), d\vec{r}) \right\} dt.$$

Према томе у општем случају за непрекидну средину имамо ове две форме:

$$\Phi_s = (\vec{p}, \Delta \vec{r}),$$

$$\Phi_a = \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{\rho} (\vec{p}, \vec{p}) + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} (\rho \vec{G} + (\nabla, P), d\vec{r}) \right\} dt.$$

Закон градијента за импулс $\vec{p}$ даје ову векторску једначину

$$\text{(I)} \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = \rho \vec{G} + (\nabla, P),$$

коју у скаларном облику можемо написати овако

$$\text{(I')} \qquad \frac{dv_x}{dt} = G_x + \frac{1}{\rho} \pi_x, \quad \frac{dv_y}{dt} = G_y + \frac{1}{\rho} \pi_y, \quad \frac{dv_z}{dt} = G_z + \frac{1}{\rho} \pi_z.$$

Што се тиче друге серије скаларних једначина, она се добива из векторске једначине

$$0 = \Delta \vec{r} - \frac{1}{\rho} \vec{p} dt,$$

која за стварно померање даје

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{\rho} \vec{p} = \vec{v},$$

а то одговара оној вези, која треба да постоји на стварном путу између померања и брзине.

2.81. Случај висковне течности

Према теорији изложеној у претходном параграфу за извођење диференцијалних једначина кретања било какве специјалне средине треба одредити само специјалан облик оног тензора напона који одговара особинама такве материјалне средине и тиме поставити везу између тензора напона и оних деформација које су својствене тој средини.

Зауставимо се прво на вискозној, у општем случају стишљивој течности. Облик тензора напона P за такву течност добро је проучен и сад улази готово у све оне уџбенике хидродинамике, у којима се третира кретање вискозне течности.

Ако претпоставимо да је трење у течности, којим се објашњава вискозност, релативно мало и појављује се у течности само уколико се мењају растојања између тачака течности, тензор P, који садржи и члан који не зависи од трења, тј. одговара случају идеалне течности, може се изразити у овом облику

$$P = (-p + \lambda \operatorname{div} \vec{v}) I + 2\mu D,$$

где су

λ и μ — коефицијенти вискозности,
p — притисак,
I — јединични тензор, тј.

$$I = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

D — тензор деформације, тј,

$$D=\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\theta_3 & \frac{1}{2}\theta_2 \\ \frac{1}{2}\theta_3 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\theta_1 \\ \frac{1}{2}\theta_2 & \frac{1}{2}\theta_1 & \varepsilon_3 \end{Bmatrix}$$

са

$$\varepsilon_1=\frac{\partial v_x}{\partial x},\qquad \varepsilon_2=\frac{\partial v_y}{\partial y},\qquad \varepsilon_3=\frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\theta_1=\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z},\qquad \theta_2=\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x},\qquad \theta_3=\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Ако сад ову вредност тензора P ставимо у једначину (I) претходног параграфа, добићемо

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=\rho\vec{G}-\operatorname{grad}p+\lambda\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}+\mu\,[\Delta\vec{v}+\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}],$$

или

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=\rho\vec{G}-\operatorname{grad}p+(\lambda+2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}-\mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v},$$

јер је

$$\Delta\vec{v}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v}.$$

Написане једначине припадају S. D. Poisson-у [64], како то наводи и C. Truesdell у својој књизи [65], у којој је наведена врло опширна библиографија хидродинамике.

Узимајући у обзир да је

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)\,\vec{v},$$

из горње, прве или друге, векторске једначине можемо добити скаларне једначине од којих наводимо само једну за x—осу:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=$$

$$=G_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho}(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\vec{v}+\frac{1}{\rho}\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right).$$

За случај нестишљиве течности имамо

$$\operatorname{div}\vec{v}=0,$$

члан са коефицијентом $(\lambda+\mu)$ отпада и према томе за такву течност имамо једначину

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{G}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p+\nu\Delta\vec{v},$$

где је $\nu=\mu/\rho$, или

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)\,\vec{v}=\vec{G}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p+\nu\Delta\vec{v}.$$

Овој једначини одговарају скаларне једначине

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=G_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\Delta v_x,$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}=G_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\Delta v_y,$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=G_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\Delta v_z.$$

Том систему једначина треба додати једначину

$$\operatorname{div}\vec{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0.$$

Најзад за идеалну течност имамо ову векторску једначину $(\nu=0)$:

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{G}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p,$$

или

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)\,\vec{v}=\vec{G}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p.$$

2.82. Случај еластичне средине

Пошто теорија еластичности претставља специјалан случај механике непрекидне средине општег типа, коју смо у § 2.8 поставили у везу са општим феноменолошким диференцијалним принципом, јасно је да се и теорија еластичности у првим својим корацима може тумачити схемом тог принципа. Према томе нема потребе понављати оно што је било наведено у том 2.8 параграфу. Довољно је узети у обзир само оно што је специфично у теорији еластичности и то у главној њеној форми, у такозваној линеарној теорији малих померања за коју важи Хуков закон.

Према томе се може непосредно искористити једначина (I) § 2.8

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\rho\,\vec{G}+(\nabla, P). \tag{1}$$

За случај малих померања можемо ставити

$$\vec{v}=\frac{d\vec{u}}{dt}=\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},$$

где је $\vec{u}$ померање тачке из положаја равнотеже, односно из положаја такозваног природног стања средине, еластичног тела, које може бити и у покрету али без деформација и без еластичних унутрашњих сила. Према томе у нашој једначини можемо ставити

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\rho\,\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},$$

где је, као и раније, ρ — густина тела у датој тачки.

Први члан десне стране одржава своју вредност са $\vec{G}$, запреминском силом израчунатом на јединицу масе.

За одређивање вектора (∇, P) треба имати на располагању тензор напона P. Изражавање тог тензора задаје највећу тешкоћу у састављању диференцијалних једначина кретања односно мировања еластичне средине, јер за произвољну анизотропну средину у потенцијал еластичних сила, а после и у тензор напона, улази 21 константа; те константе одређују структурну природу материјала непрекидне средине. Пошто анализа тог тензора не улази у наш задатак, наведимо, ради конкретности, облик оног тензора напона који одговара најпростијој изотропној еластичној средини и који садржи само две константе. Координате тог тензора се изражавају

$$p_{xx}=\lambda\,\mathrm{div}\,\vec{u}+2\,\mu\varepsilon_1,\qquad p_{yz}=p_{zy}=\mu\theta_1,$$

$$p_{yy}=\lambda\,\mathrm{div}\,\vec{u}+2\,\mu\varepsilon_2,\qquad p_{zx}=p_{xz}=\mu\theta_2,$$

$$p_{zz}=\lambda\,\mathrm{div}\,\vec{u}+2\,\mu\varepsilon_3,\qquad p_{xy}=p_{yx}=\mu\theta_3,$$

где је

$$\varepsilon_1=\frac{\partial u_x}{\partial x},\qquad \varepsilon_2=\frac{\partial u_y}{\partial y},\qquad \varepsilon_3=\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\theta_1=\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z},\qquad \theta_2=\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x},\qquad \theta_3=\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}.$$

Величине λ и μ су такозвани Lamé-ови коефицијенти. Наведимо њихову везу са паром других исто тако познатих констаната, наиме са Јунговим модулом E и са модулом смицања G:

$$G=\mu,\quad E=\mu\,\frac{3\,\lambda+2\,\mu}{\lambda+\mu}.$$

Ако сад искористимо вредност тензора напона P за једначину (1), онда после једноставних трансформација добивамо ову векторску једначину

$$\rho\,\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}=\rho\,\vec{G}+(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u}+\mu\Delta\,\vec{u}.$$

Ради примера напишимо и прву од скаларних једначина, која одговара претходној векторској једначини

$$\rho\,\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}=\rho\,G_x+(\lambda+\mu)\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)+$$

$$+\mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right).$$

Као што је познато за решавање проблема о кретању еластичног тела, сем наведене три скаларне једначине, треба узети у обзир још услове компатибилности у облику шест Сен-Венанових једначина, затим граничне услове и почетне услове.

ГЛАВА ТРЕЋА

Феноменолошко тумачење Пфафова принципа у Небеској механици

3.1. Неки специјални проблеми Небеске механике

У својим радовима [15, 10, 14] навео сам неколико примера како се може Пфафова метода применити на проблеме Небеске механике. У овом делу садашњег рада показујем како се ти резултати могу тумачити и са гледишта феноменолошког принципа, при чему мало проширујем обим оних питања која сам третирао. Искоришћавам два класична питања Небеске механике: питање редукције диференцијалних једначина проблема трију тела и питање планетских поремећаја. При томе не постављам себи задатак да исцрпем сав материјал тих питања, већ само да искористим та два класична проблема Небеске механике ради тумачења вредности општег феноменолошког диференцијалног принципа односно његове нарочите форме — Пфафова принципа.

3.2. Редукција система диференцијалних једначина проблема трију тела

Проблем трију тела је проблем о кретању три слободне материјалне тачке из датог почетног кинематичког стања (положај и брзине) под дејством узајамних сила Њутнове гравитације. Пошто је то, са математичког гледишта, проблем о кретању материјалног система са 9 степена слободе, а сваком степену слободе одговара једна диференцијална једначина другога реда, проблем трију тела је проблем осамнаестог реда.

На основу теорема Рационалне механике за тај проблем се могу написати ови интеграли: шест интеграла кретања центра маса система, три интеграла површина и један интеграл одржавања тоталне енергије система. Ових десет класичних интеграла дозвољавају да се ред система диференцијалних једначина снизи на осам.

Сем тога проблем има једну нарочиту механичку особину, која се изражава у томе што је при одређивању положаја система помоћу координата специјалне врсте једна координата циклична, тј. од саме те координате не зависи ни жива сила система ни функција сила. Таквој координати, као што је познато, одговара један интеграл линеаран у односу на брзине. На основу тог интеграла ред система диференцијалних једначина проблема се може снизити још за једну јединицу. Најзад, пошто тај систем једначина не садржи експлицитно време t, већ само диференцијал dt, према теорији конзервативног система тај диференцијал се може елиминисати из једначина система, и на тај начин се добива систем диференцијалних једначина шестог реда. Даље снижавање реда система диференцијалних једначина проблема трију тела у општем случају је немогуће. Сви покушаји одређивања у коначном облику бар још једног интеграла тог проблема за општи случај произвољних маса и произвољног почетног кинематичког стања остали су без успеха. 1887 године H. Bruns [36] је доказао немогућност проналаска новог, сем класичних, општег алгебарског интеграла. Анализи немогућности нових интеграла и друге аналитичке природе били су посвећени и радови H. Poincaré-а и P. Painlevé-а. Савремена проучавања тог проблема се врше помоћу бескрајних конвергентних апроксимативних процеса.

Пре прелаза на конкретне случајеве редукције система диференцијалних једначина учинимо ову примедбу. Сем редукције у вези са интегралима кретања центра маса свака од осталих редукција, за коју се искоришћују интеграли површина, циклична координата и интеграл одржавања тоталне енергије са елиминисањем времена, заиста снижава ред система диференцијалних једначина, али зато се компликује, понекад и веома знатно, форма, нових диференцијалних једначина. Из тог разлога су се многи велики математичари, који су применом својих метода добили значајне резултате у области тог проблема, заустављали на систему једначина који није редукован до краја.

У овој расправи имам за циљ показати примере редукције који стоје у вези са општим феноменолошким принципом, односно са Пфафовим принципом. При томе треба признати да тамо где феноменолошка страна посматрања појаве уступа своју улогу формалним трансформацијама, спајање обе форме, форме стања и форме акције, у једну Пфафову форму може бити корисније за формалну страну добијања резултата.

3.3. Редукција на систем две векторске једначине другога реда

Означимо са $\vec{R}_0$, $\vec{R}$, $\vec{R}_1$ векторе положаја материјалних тачака са масама M, m, m_1 у односу на непомичну тачку O и уведимо разлике

$$\vec{r} = \vec{R} - \vec{R}_0,$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_1 - \vec{R}_0,$$

$$\vec{r}_{12} = \vec{R}_1 - \vec{R} = \vec{r}_1 - \vec{r};$$

према томе имамо

(1) $$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{r},$$

(2) $$\vec{R}_1 = \vec{R}_0 + \vec{r}_1,$$

(3) $$\vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{r}_{12}.$$

Количине кретања тих тачака имају вредности

$$M\dot{R}_0,\ m\dot{R},\ m_1\dot{R}_1,$$

где тачка означава извод по времену.

Форма стања изгледа овако

(4) $$\Phi_s = (M\dot{R}_0, \Delta\vec{R}_0) + (m\dot{R}, \Delta\vec{R}) + (m_1\dot{R}_1, \Delta\vec{R}_1).$$

Форму акције Φ_a састављамо од ових чланова:

1. Инерционог дела

$$-[(M\dot{R}_0, \dot{R}_0) + (m\dot{R}, \dot{R}) + (m_1\dot{R}_1, \dot{R}_1)]\, dt,$$

2. Живе силе система

$$\frac{1}{2}[M\dot{R}_0^2 + m\dot{R}^2 + m_1\dot{R}_1^2]\, dt,$$

3. Функције силе

$$U = f\left(\frac{Mm}{r} + \frac{Mm_1}{r_1} + \frac{mm_1}{r_{12}}\right) dt,$$

где је f коефицијент пропорционалности и r, r_1, r_{12} су интензитети одговарајућих вектора.

Дефинитивну форму Φ_a претставимо овако

(5) $$\Phi_a = \left[-\frac{1}{2}(M\dot{R}_0^2 + m\dot{R}^2 + m_1\dot{R}_1^2) + f\left(\frac{Mm}{r} + \frac{Mm_1}{r_1} + \frac{mm_1}{r_{12}}\right)\right] dt.$$

Примена закона градијента за форме Φ_s и Φ_a доводи до ових векторских једначина кретања система

$$M\ddot{R}_0 = \mathrm{grad}_{R_0}\,\Phi_a = fM\left(\frac{m}{r^3}\vec{r} + \frac{m_1}{r_1^3}\vec{r}_1\right),$$

$$m\ddot{R} = \mathrm{grad}_{R}\,\Phi_a = fm\left(-\frac{M}{r^3}\vec{r} + \frac{m_1}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}\right),$$

$$m_1\ddot{R}_1 = \mathrm{grad}_{R_1}\,\Phi_a = fm_1\left(-\frac{M}{r_1^3}\vec{r}_1 - \frac{m}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}\right).$$

Тај систем једначина, према броју скаларних једначина, је систем осамнаестог реда.

Даље проучавање проблема у датом случају са циљем редукције може ићи било феноменолошким проматрањем појаве било формалистичком анализом Пфафове форме ове појаве. Ови путеви треба да буду повезани и помажу један другог било у индуктивној било у дедуктивној форми.

Са феноменолошког гледишта је јасно да је пожељно, уколико је то могуће, одвојити релативно кретање две тачке у односу на трећу од кретања система у целини према непокретном простору и видети како се то одвајање, потпуно или делимично, одражава на формама стања и акције.

За тај циљ изразимо положај маса m и m_1 у односу на непокретни простор помоћу положаја само масе M у односу на тај простор и релативног положаја тачака m и m_1 у односу на тачку M и систем координата везаног за ту тачку. За то се послужимо једначинама (1) и (2). Форме стања и акције изражавамо

$$\Phi_s = ([(M+m+m_1)\dot{R}_0 + m\dot{r} + m_1\dot{r}_1], \Delta\vec{R}_0) + (m(\dot{R}_0 + \dot{r}), \Delta\vec{r}) +$$
$$+ (m_1(\dot{R}_0 + \dot{r}_1), \Delta\vec{r}),$$

$$\Phi_a = \left\{-\frac{1}{2}[M\dot{R}_0^2 + m(\dot{R}_0 + \dot{r})^2 + m_1(\dot{R}_0 + \dot{r}_1)^2] +\right.$$
$$\left. + f\left(\frac{Mm}{r} + \frac{Mm_1}{r_1} + \frac{mm_1}{r_{12}}\right)\right\} dt.$$

Сад видимо да форма акције не зависи од вектора $\vec{R}_0$, значи градијент акције по том вектору је једнак нули, па према закону градијента коефицијент код ΔR_0 мора имати сталну вредност. На тај начин долазимо до интеграла

$$S\dot{R}_0+m\dot{r}+m_1\dot{r}_1=\overrightarrow{\text{const.}}=\vec{A}\,, \tag{6}$$

где је $S=M+m+m_1$ целокупна маса система и $\vec{A}$ је векторска произвољна константа интеграције.

Лако је видети да интеграл (6) показује сталност брзине центра маса система. Заиста, ако са $\vec{R}_c$ означимо вектор положаја центра у односу на тачку O, имамо

$$S\vec{R}_c=M\vec{R}_0+m\vec{R}+m_1\vec{R}_1$$

и непосредним закључком из (6) долазимо до једначине

$$S\dot{R}_c=\vec{A}\,.$$

Тај први векторски интеграл доводи непосредно и до векторског интеграла

$$S\vec{R}_c=\vec{A}t+\vec{B}\,,$$

где је $\vec{B}$ друга векторска константа интеграције.

Пошто целокупна Пфафова форма

$$\Phi=\Phi_s+\Phi_a$$

не зависи од $\vec{R}_0$, а интеграл (6) даје могућност да се одреди и $\dot{R}_0$ у функцији $\dot{r}$ и $\dot{r}_1$, закључујемо да из даљег проучавања појаве можемо искључити и променљиву $\dot{R}_0$. На тај начин може бити потпуно искључено проучавање транслаторне компоненте кретања нашег система у односу на непокретан простор. Том новом посматрању кретања система одговара нов, еквивалентан облик Пфафове форме. Са формалног гледишта, на основу познате особине еквивалентних форми, у старој форми можемо изоставити члан $(\vec{A}, \Delta\vec{R}_0)=$ $=(\vec{A}, d\vec{R}_0)$, јер се сад јавља као тотални диференцијал $d\,(\vec{A}, \vec{R}_0)$.

После елиминисања $\dot{R}_0$ и увођења ознака

$$\vec{r}=k\vec{\rho}, \qquad \vec{r}_1=k_1\vec{\rho}_1, \qquad \vec{r}_{12}=k\vec{\sigma}=k_1\vec{\sigma}_1,$$

где су

$$k^3=f\,(M+m), \qquad k_1^3=f\,(M+m_1),$$

Пфафову форму, подељену са $\dfrac{kk_1\,mm_1}{S}$, можемо написати са овим деловима

$$\Phi_s=\left(\left\{\frac{1}{\mu}\dot{\rho}-\dot{\rho}_1\right\},\ \Delta\vec{\rho}\right)+\left(\left\{\frac{1}{\mu_1}\dot{\rho}_1-\dot{\rho}\right\},\ \Delta\vec{\rho}_1\right),$$

$$\Phi_a=\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mu}\dot{\rho}^2+\frac{1}{\mu_1}\dot{\rho}_1^2-2\,(\dot{\rho},\dot{\rho}_1)\right]+\left(\frac{1}{\mu\mu_1}-1\right)\left(\frac{\mu_1}{\rho}+\frac{\mu}{\rho_1}+\frac{\nu}{\sigma}\right)\right\}dt,$$

где су

$$\mu=\frac{m_1k_1}{(M+m_1)\,k}\,, \qquad \mu_1=\frac{mk}{(M+m_1)\,k_1}\,.$$

Пошто се члан ν/σ може заменити са ν_1/σ_1, дајемо ове две вредности коефицијената ν и ν_1

$$\nu=\frac{mm_1}{M\sqrt[3]{(M+m)^2\,(M+m_1)}}\,, \qquad \nu_1=\frac{mm_1}{M\sqrt[3]{(M+m)\,(M+m_1)^2}}\,.$$

Ако сад применимо на форме Φ_s и Φ_a закон градијента добићемо две векторске једначине

$$\frac{1}{\mu}\ddot{\rho}-\ddot{\rho}_1=\operatorname{grad}_\rho\Phi_a=\left(\frac{1}{\mu\mu_1}-1\right)\left(-\frac{\mu_1}{\rho^3}\vec{\rho}+\frac{\nu}{\sigma^3}\vec{\sigma}\right), \tag{7}$$

$$\frac{1}{\mu_1}\ddot{\rho}_1-\ddot{\rho}=\operatorname{grad}_{\rho_1}\Phi_a=\left(\frac{1}{\mu\mu_1}-1\right)\left(-\frac{\mu}{\rho_1^3}\vec{\rho}_1-\frac{\nu_1}{\sigma_1^3}\vec{\sigma}_1\right), \tag{8}$$

при чему последњи члан можемо написати и овако

$$\frac{-\nu_1}{\sigma_1^3}\sigma_1=-q\frac{\nu}{\sigma^3}\vec{\sigma},$$

где је $q=k_1:k$.

Ако претходне једначине решимо по $\ddot{\vec\rho}$ и $\ddot{\vec\rho}_1$, добићемо ове једначине

(9) $$\ddot{\vec\rho} = -\frac{1}{\rho^3}\vec\rho - \frac{\mu}{\rho_1^3}\vec\rho_1 + \frac{\lambda}{\sigma^3}\vec\sigma,$$

(10) $$\ddot{\vec\rho}_1 = -\frac{1}{\rho_1^3}\vec\rho_1 - \frac{\mu_1}{\rho^3}\vec\rho - \frac{\lambda_1}{\sigma_1^3}\vec\sigma_1,$$

где су

$$\lambda = \frac{m_1}{M+m}, \quad \lambda_1 = \frac{m}{M+m_1}.$$

Обратимо пажњу на то да троугао Mmm_1 састављен од вектора $\vec r$, $\vec r_1$, $\vec r_{12}$ после трансформације није више сличан троуглу од $\vec\rho$, $\vec\rho_1$, $\vec\sigma$, јер нису испуњени услови

$$\frac{\vec r}{\vec\rho} = \frac{\vec r_1}{\vec\rho_1} = \frac{\vec r_{12}}{\vec\sigma},$$

при чему је вектор $\vec\sigma$ везан са векторима $\vec\rho$ и $\vec\rho_1$ једначином

$$k\vec\sigma = k_1\vec\rho_1 - k\vec\rho.$$

Једначине (7) и (8) односно (9) и (10) имају интеграл одржавања енергије

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mu}\dot\rho^2 + \frac{1}{\mu_1}\dot\rho_1^2 - 2(\dot\rho\,\dot\rho_1)\right] - \left(\frac{1}{\mu\mu_1} - 1\right)\left(\frac{\mu_1}{\rho} + \frac{\mu}{\rho_1} + \frac{\nu}{\sigma}\right) = \text{const.},$$

како то следује из облика форме акције. Пошто Пфафова форма $\Phi = \Phi_s + \Phi_a$ не зависи експлицитно од времена, коефицијент код dt мора бити сталан.

Сем тог скаларног интеграла једначине (7) и (8) имају још један векторски интеграл, интеграл површина. Тај интеграл можемо једноставно добити на овај начин.

Помножимо једначину (7) векторски слева са $\vec\rho$, а једначину (8) са $\vec\rho_1$ и резултате саберимо. Тада добивамо

(11) $$\left[\vec\rho, \frac{1}{\mu}\ddot\rho - \ddot\rho_1\right] + \left[\vec\rho_1, \frac{1}{\mu_1}\ddot\rho_1 - \ddot\rho\right] \equiv 0,$$

јер са десне стране сем чланова са $[\vec\rho\,\vec\rho]$ и $[\vec\rho_1\,\vec\rho_1]$ имамо

$$\left[\vec\rho, \frac{\nu}{\sigma^3}\vec\sigma\right] - \left[\vec\rho_1, \frac{\nu_1}{\sigma_1^3}\vec\sigma_1\right] = \frac{\nu}{\sigma^3}\left\{[\vec\rho, \vec\sigma] - \left[\vec\rho_1, \frac{k_1}{k}\vec\sigma\right]\right\} =$$

$$= -\frac{\nu}{\sigma^3}\left[\frac{k_1}{k}\vec\rho_1 - \vec\rho, \vec\sigma\right] = -\frac{\nu}{\sigma^3}[\vec\sigma, \vec\sigma] \equiv 0.$$

Из једначине (11) непосредно следује интеграл

$$\left[\vec\rho, \frac{1}{\mu}\dot\rho - \dot\rho_1\right] + \left[\vec\rho_1, \frac{1}{\mu_1}\dot\rho_1 - \dot\rho\right] = \overrightarrow{\text{const}} = \vec\Gamma,$$

где је $\vec\Gamma$ векторска константа интеграције. Тај интеграл је трансформисани интеграл површина.

На тај начин једначине (9) и (10) редукују проблем трију тела на систем од две векторске једначине другога реда, тј. на систем дванаест скаларних једначина првога реда, са једним векторским и једним скаларним интегралом који се лако изводе из диференцијалних једначина. Сем тога систем има још један скаларни интеграл и диференцијал времена може бити искључен. Али искоришћавање тог интеграла и елиминисање диференцијала времена је и сувише компликовано за овај систем и може се извести на други начин.

Учинимо још једну примедбу о форми система једначина (9) и (10). Ако ставимо у прву од ових једначина $m_1 = 0$, а при томе имамо $\mu = 0$, $\lambda = 0$, добићемо једначину

$$\ddot\rho + \frac{1}{\rho^3}\vec\rho = 0,$$

и слично из друге једначине за $m = 0$, а то значи $\mu_1 = 0$, $\lambda_1 = 0$, имамо другу једначину

$$\ddot\rho_1 + \frac{1}{\rho_1^3}\vec\rho_1 = 0.$$

То су такозване стандардне једначине проблема двају тела. Остали чланови у једначинама (9) и (10) одговарају такозваним поремећајима у смислу отступања од проблема двају тела. Подробније о томе је изложено у мојим радовима [10] и [15].

3.4 Канонична редукција

У проблему редукције диференцијалних једначина проблема трију тела нарочиту улогу игра редукција на каноничне једначине, нарочито кад се добије систем каноничних једначина најнижег, шестог реда. На том питању је радио читав низ математичара. У раду [33] навео сам неколико од тих редукција, али при томе нисам искоришћавао Пфафову методу. Сад дајем у оквиру те методе пример редукције са применом каноничних трансформација. При чему се, да не отежам излагање тог примера, а да покажем само суштину поступка, заустављам само на каноничној редукцији система 18-ог реда на канонични систем 12-ог реда. Пошто низ даљих редукција до система једначина 6-ог реда не садржи ништа принципски новог, али је везан са специјалним дугачким рачунима, сматрам да у овој расправи та израчунавања могу изоставити. Читалац, који има интерес за те редукције, може се са њима упознати у специјалним радовима.

Елементе теорије тих трансформација сам навео у § 1.1 под 5. тачком ове монографије. При излагању примењујем, где се то може, Теорију вектора за што јаснију претставу неких аналитичких расуђивања.

Ради примене аналитичке методе са, по могућности, векторским тумачењем уведимо нарочите ознаке.

Масе тачака означимо са m_a, m_b, m_c, при чему под ознаком m_i, где i узима вредности од 1 до 9, разумемо ове масе:

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_a, \quad m_4 = m_5 = m_6 = m_b, \quad m_7 = m_8 = m_9 = m_c.$$

Векторе положаја тих тачака и њихове координате у односу на непокретан систем координата означимо на сличан начин овако

$$\vec{x}_a\,(x_1, x_2, x_3), \quad \vec{x}_b\,(x_4, x_5, x_6), \quad \vec{x}_c\,(x_7, x_8, x_9)$$

и импулсе овако

$$\vec{y}_a\,(y_1, y_2, y_3), \quad \vec{y}_b\,(y_4, y_5, y_6), \quad \vec{y}_c\,(y_7, y_8, y_9),$$

при чему је, напр.,

$$\vec{y}_a = m_a\,\dot{\vec{x}}_a.$$

Са уведеним ознакама диференцијалну форму стања можемо написати

$$\Phi_s = \sum_{i=1}^{8} y_i\,dx_i = \sum_\alpha (\vec{y}_\alpha, d\vec{x}_\alpha),$$

где индекс α узима вредности a, b, c.

Форму акције претставимо овако

$$\Phi_a = (-T + U)\,dt,$$

где је T жива сила система

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9}\frac{1}{m_i}y_i^2 = \frac{1}{2}\sum_\alpha \frac{1}{m_\alpha}\vec{y}_\alpha^2$$

и U — функција сила, тј.

$$U = m_a m_b m_c\left[\frac{1}{m_a r_a} + \frac{1}{m_b r_b} + \frac{1}{m_c r_c}\right] =$$

$$= m_a m_b m_c \sum_\alpha \frac{1}{m_\alpha r_\alpha},$$

при чему смо коефицијент пропорционалности f у обрасцу за Њутнову гравитацију узели, из познатих разлога, да је једнак јединици. Отстојања r_a, r_b, r_c имају вредности из једначина

$$r_a^2 = (\vec{x}_b - \vec{x}_c)^2 = (x_4 - x_7)^2 + (x_5 - x_8)^2 + (x_6 - x_9)^2,$$

$$r_b^2 = (\vec{x}_c - \vec{x}_a)^2 = (x_7 - x_1)^2 + (x_8 - x_2)^2 + (x_9 - x_3)^2,$$

$$r_c^2 = (\vec{x}_a - \vec{x}_b)^2 = (x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_6)^2.$$

На тај начин форму акције можемо написати

$$\Phi_a = \left(-\frac{1}{2}\sum_\alpha \frac{1}{m_\alpha}\vec{y}_\alpha^2 + m_a m_b m_c \sum_\alpha \frac{1}{m_\alpha r_\alpha}\right)dt.$$

Ако уведемо Хамилтонову функцију са вредношћу

$$H = -\Phi_a : dt,$$

можемо Пфафову форму проблема трију тела дефинитивно написати у једном од наредних облика

$$\Phi = \sum_{i=1}^{9} y_i\,dx_i - H\,dt = \sum_\alpha (\vec{y}_\alpha, d\vec{x}_\alpha) - H\,dt,$$

где је

$$H=\frac{1}{2}\sum_{\alpha}\frac{1}{m_\alpha}y_\alpha^2-m_a m_b m_c\sum_{\alpha}\frac{1}{m_2 r_\alpha}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9}\frac{1}{m_i}y_i^2-m_a m_b m_c\left\{\frac{1}{m_a}\left[(x_4-x_7)^2+(x_5-x_8)^2+(x_6-x_9)^2\right]^{-\frac{1}{2}}+\right.$$

$$+\frac{1}{m_b}\left[(x_7-x_1)^2+(x_8-x_2)^2+(x_9-x_3)^2\right]^{-\frac{1}{2}}+$$

$$\left.+\frac{1}{m_c}\left[(x_1-x_4)^2+(x_2-x_5)^2+(x_3-x_6)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}.$$

Као што је познато, тој форми одговарају Пфафове једначине у каноничном облику. У скаларном облику оне изгледају овако

$$\frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i},\qquad \frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_i},\qquad i=1,2,\ldots,9,$$

а у векторском овако

$$\dot{\vec{y}}_\alpha=-\operatorname{grad}_{\vec{x}_\alpha}H,\qquad \dot{\vec{x}}_\alpha=\operatorname{grad}_{\vec{y}_\alpha}H,\qquad \alpha=a,b,c.$$

Применимо сад на ове векторске једначине каноничне трансформације на нове променљиве са ознакама

$$\vec{\xi}_a(\xi_1,\xi_2,\xi_3),\qquad \vec{\xi}_b(\xi_4,\xi_5,\xi_6),\qquad \vec{\xi}_c(\xi_7,\xi_8,\xi_9),$$

$$\vec{\eta}_a(\eta_1,\eta_2,\eta_3),\qquad \vec{\eta}_b(r_4,\eta_5,\eta_6),\qquad \vec{\eta}_c(\eta_7,\eta_8,\eta_9).$$

Нека су везе између старих и нових променљивих постављене помоћу функције F, коју изразимо помоћу векторских операција овако

$$F=(\vec{\eta}_a,\vec{x}_b-\vec{x}_a)+(\vec{\eta}_b,\vec{x}_c-\vec{x}_g)+(\vec{\eta}_c,\vec{x}_G),$$

где су $\vec{x}_g$ и $\vec{x}_G$ вектори положаја центара маса, први само маса m_a и m_b, а други — свих маса система; према томе за те векторе имамо

$$(m_a+m_b)\vec{x}_g=m_a\vec{x}_a+m_b\vec{x}_b,$$

$$(m_a+m_b+m_c)\vec{x}_G=m_a\vec{x}_a+m_b\vec{x}_b+m_c\vec{x}_c.$$

Саме везе према теорији на стр. 4 узимамо у векторском облику

$$\vec{\xi}_\alpha=\operatorname{grad}_{\vec{\eta}_\alpha}F,\qquad \vec{y}_\alpha=\operatorname{grad}_{\vec{x}_\alpha}F,\qquad \alpha=a,b,c.$$

После извођења показаних операција имамо ових шест векторских једначина трансформација

$$\vec{\xi}_a=\vec{x}_b-\vec{x}_a,$$

$$\vec{\xi}_b=\vec{x}_c-\vec{x}_g=\vec{x}_c-\frac{1}{m_a+m_b}(m_a\vec{x}_a+m_b\vec{x}_b),$$

$$\vec{\xi}_c=\vec{x}_G=\frac{1}{M}(m_a\vec{x}_a+m_b\vec{x}_b+m_c\vec{x}_c),$$

$$\vec{y}_a=-\vec{\eta}_a-\frac{m_a}{m_a+m_b}\vec{\eta}_b+\frac{m_a}{M}\vec{\eta}_c,$$

$$\vec{y}_b=\vec{\eta}_a-\frac{m_b}{m_a+m_b}\vec{\eta}_b+\frac{m_b}{M}\vec{\eta}_c,$$

$$\vec{y}_c=\vec{\eta}_b+\frac{m_c}{M}\vec{\eta}_c,$$

где је

$$M=m_a+m_b+m_c.$$

Ако решимо групу првих трију једначина по $\vec{x}_a$, $\vec{x}_b$, $\vec{x}_c$ добићемо једначине

$$\vec{x}_a=-\frac{m_b}{m_a+m_b}\vec{\xi}_a-\frac{m_3}{M}\vec{\xi}_b+\vec{\xi}_c,$$

$$\vec{x}_b=\frac{m_a}{m_a+m_b}\vec{\xi}_a-\frac{m_3}{M}\vec{\xi}_b+\vec{\xi}_c,$$

$$\vec{x}_c=\frac{m_a+m_b}{M}\vec{\xi}_b+\vec{\xi}_c,$$

које са једначинама за $\vec{y}_a$, $\vec{y}_b$, $\vec{y}_c$, постављају каноничну трансформацију.

На нове променљиве треба трансформисати само функцију H. После те трансформације имамо

$$H=\frac{1}{2\mu}\vec{\eta}_a^{\,2}+\frac{1}{2\mu'}\vec{\eta}_b^{\,2}+\frac{1}{2}\vec{\eta}_c^{\,2}-U_1,$$

где U_1 сад добива облик

$$U_1 = m_a m_b m_c \left\{ \frac{1}{m_a}\left[\left(\frac{m_a}{m_a+m_b}\vec{\xi}_a - \vec{\xi}_b\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} + \right.$$

$$+\frac{1}{m_b}\left[\left(\frac{m_b}{m_a+m_b}\vec{\xi}_a + \vec{\xi}_b\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} +$$

$$\left. +\frac{1}{m_c}\left[\left(-\vec{\xi}_a\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \right\} =$$

$$= m_a m_b m_c \left\{ \frac{1}{m_a}\left[\vec{\xi}_b^{\,2} - \frac{2m_a}{m_a+m_b}\left(\vec{\xi}_a, \vec{\xi}_b\right) + \left(\frac{m_a}{m_a+m_b}\right)^2 \vec{\xi}_b^{\,2}\right]^{-\frac{1}{2}} + \right.$$

$$+\frac{1}{m_b}\left[\vec{\xi}_b^{\,2} + \frac{2m_b}{m_a+m_b}\left(\vec{\xi}_a, \vec{\xi}_b\right) + \left(\frac{m_b}{m_a+m_b}\right)^2 \vec{\xi}_a^{\,2}\right]^{-\frac{1}{2}} +$$

$$\left. +\frac{1}{m_c}\left[\vec{\xi}_a^{\,2}\right]^{-\frac{1}{2}} \right\},$$

а μ и μ' имају вредности

$$\mu = \frac{m_a m_b}{m_a+m_b}, \qquad \mu' = \frac{m_c(m_a+m_b)}{M}.$$

Пошто се форма стања лако трансформише на облик

$$\Phi_s = (\vec{\eta}_a, d\vec{\xi}_a) + (\vec{\eta}_b, d\vec{\xi}_b) + (\vec{\eta}_c, d\vec{\xi}_c),$$

а $H = -\Phi_a : dt$ не зависи од $\vec{\xi}_c$, тј. $\operatorname{grad}_{\vec{\xi}_c} \Phi_a = 0$, после примене закона градијента имамо једначину

$$d\vec{\eta}_c = 0,$$

а затим и интеграл

$$\vec{\eta}_c = \vec{A} = \overrightarrow{\text{const}}.$$

После тога на основу једначине

$$d\vec{\xi}_c - \vec{\eta}_c\, dt = 0$$

из друге серије Пфафових једначина имамо још један векторски интеграл

$$\vec{\xi}_c = \vec{A}t + \vec{B},$$

где је $\vec{B}$ друга векторска константа интеграције.

Пошто се у Пфафовој форми могу брисати тотални диференцијали, дефинитивно, после трансформације, ту форму можемо изразити

$$\Phi_1 = (\vec{\eta}_a, d\vec{\xi}_a) + (\vec{\eta}_b, d\vec{\xi}_b) - \left[\frac{1}{2\mu}\vec{\eta}_a^{\,2} + \frac{1}{2\mu'}\vec{\eta}_b^{\,2} - U_1\right] dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{6} \eta_i\, d\xi_i - H_1\, dt,$$

где U_1 задржава горе написани облик и

$$H_1 = \frac{1}{2\mu}\vec{\eta}_a^{\,2} + \frac{1}{2\mu'}\vec{\eta}_b^{\,2} - U_1.$$

Тој форми одговара овај систем нових каноничних једначина

$$\frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \xi_i}, \quad \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \eta_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, 6$$

или у векторском облику

$$\eta_\alpha = -\operatorname{grad}_{\vec{\xi}_\alpha} H_1, \quad \xi_\alpha = \operatorname{grad}_{\vec{\eta}_\alpha} H_1, \quad \alpha = a, b.$$

Ове једначине показују да је проблем трију тела сведен на проблем двају тела са масама μ и μ', али са Хамилтоновом функцијом другог облика, него што је у проблему двају тела. У таквом облику проблем трију тела посматрали су још J a c o b i (1843) и B e r t r a n d (1852).

Извршена трансформација редуковала је систем диференцијалних једначина на систем каноничних једначина 12-ог реда. Низ даљих редукција наводи, напр., E. T. W h i t t a k e r у свом чланку [66].

3.5. Проблем планетских поремећаја

У најпростијој својој форми проблем такозваних планетских поремећаја састоји се у овом. За три небеска тела, рецимо, Сунце и две планете P_1 и P_2, која се крећу под утицајем Њутнових сила, прво одвајамо проблем кретања двају тела S и P_1 и у потпуности решавамо тај проблем. Решење показује да је путања елипса и да је кретање потпуно одређено са два константна вектора интеграције који се зову векторски елементи планетског кретања.[1] Означимо те векторе са C и G. Ако затим узмемо у обзир и кретање друге планете P_2, њено дејство на кретање прве планете се показује у томе што ремети сталност векторских елемената прве планете. Задатак поремећаја је у томе да се одреде векторски елементи $\vec{C}$ и $\vec{G}$ као функције времена. Прва фаза решења тог задатка је у извођењу оних диференцијалних једначина које одређују изводе по времену $\dot{C}$ и $\dot{G}$ векторских елемената $\vec{C}$ и $\vec{G}$ после узимања у обзир кретања друге планете. То извођење смо извршили у нашим радовима [10] и [14] примењујући Пфафову методу. Не наводећи детаље рачуна који су дати у тим радовима изложимо укратко схему тих рачуна.

Као што је познато, проблем о кретању две материјалне тачке под утицајем Њутнове силе своди се на проучавање кретања само

---

[1]) У литератури постоје две врсте векторских планетских елемената. Једна врста — означимо их са $\vec{C}$ (константа површина) и $\vec{D}$ (константа вектора према перихелу) — то су вектори управни један на другом и према томе њихов скаларни производ једнак нули: $(\vec{C}, \vec{D})=0$. Пошто је за одређивање планетског кретања потребно шест произвољних констаната, вектори $\vec{C}$ и $\vec{D}$ су недовољни за потпуно одређивање тог кретања, већ је потребно додати још једну скаларну константу, коју можемо узети, рецимо, у облику произвољне константе τ из Кеплеровог интеграла $u-e\sin u=n\,(t-\tau)$, где су ознаке добро познате. Из тих разлога назвао сам елементе $\vec{C}$, $\vec{D}$, τ векторско-скаларним елементима [10]. Два вектора $\vec{C}$ и $\vec{D}$ као векторски елементи планетског кретања, одавно су познати у литератури (Gibbs [67, 68], G. Jaumann [69]) и улазе чак у уџбенике [49]. Њих искоришћава у својим радовима и М. Миланковић [50, 51]. У свом чланку [10] увео сам праве векторске елементе $\vec{C}$ и $\vec{G}$ са шест произвољних констаната. Ти вектори у општем случају могу бити потпуно произвољни, јер између њих не постоји никаква скаларна веза.

једне тачке и то према диференцијалној једначини

$$m\ddot{\vec{R}} = -fm\,(M+m)\,\frac{1}{R^3}\,\vec{R},$$

где су m и M масе тела, f — гравитациона константа, $\vec{R}$ вектор положаја покретне тачке у односу на непокретну тачку O, а R, као увек, интензитет вектора $\vec{R}$.

Ако уведемо нов вектор $\vec{r}$ према обрасцу

$$\vec{R} = \sqrt[3]{f\,(M+m)}\,\vec{r},$$

претходна једначина се своди на једначину

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{1}{r^3}\,\vec{r}, \tag{1}$$

која се зове стандардна једначина проблема двају тела. Приметимо да вектор $\vec{r}$ и његови изводи имају ове димензије

$$[\vec{r}] = T^{2/3}, \quad [\dot{\vec{r}}] = T^{-1/3}, \quad [\ddot{\vec{r}}] = T^{-4/3},$$

где је T време.

За једначину (1) можемо написати ове интеграле:

1. Интеграл секторске брзине:

$$[\vec{r}, \dot{\vec{r}}] = \vec{C} = p_1\,\vec{k} = \overrightarrow{\text{const}},$$

где су: $\vec{C}$ константни вектор интеграције, један од векторских елемената, $\vec{k}$ — орт тог елемента, p_1 интензитет вектора $\vec{C}$ са димензијом $[p_1] = T^{1/3}$.

2. Лапласов интеграл:

$$[\dot{\vec{r}}\,\vec{C}] - \frac{1}{r}\,\vec{r} = \vec{D} = e\vec{i},$$

где је: $\vec{D}$ константни вектор интеграције, али не потпуно произвољан већ управан на вектору $\vec{C}$, $\vec{i}$ — орт вектора $\vec{D}$ и e скалар бројне вредности.

3. Хамилтонов интеграл

$$\dot{\vec{r}}+\frac{1}{p_1 r}[\vec{r}\,\vec{k}]=\frac{e}{p_1}\vec{j},$$

где је $\vec{j}$ сталан орт управан на ортовима $\vec{k}$ и $\vec{i}$.

Хамилтонов интеграл је непосредни закључак двају претходних интеграла.

4. Интеграл живе силе:

$$\dot{r}^2=\frac{2}{r}-\frac{1-e^2}{p_1^2}=\frac{2}{r}-\frac{e'^2}{p_1^2},$$

где је $e'^2=1-e^2$.

5. Једначина путање

$$r=\frac{p}{1+e\cos\nu},$$

где је $p=p_1^2$ и ν угао између вектора $\vec{r}$ и орта $\vec{i}$.

6. Кеплеров интеграл

$$u-e\sin u=n\,(t-\tau),$$

где је u помоћна променљива везана са углом ν једначином

$$\operatorname{tg}\frac{u}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{\nu}{2};$$

она има познато геометриско тумачење. Константа n има вредност

$$n=\left(\frac{e'}{p_1}\right)^3,$$

а τ је произвољна константа интеграције.

Приметимо да између диференцијала du и dt постоји веза

$$\frac{p_1}{e'}\,du=\frac{1}{r}\,dt.$$

Сем уведених констаната можемо увести још и ове константе

$$a=\frac{p_1^2}{e'^2}=a_1^2,\qquad b=\frac{p_1^2}{e'},$$

где је

$$a_1=\frac{p_1}{e'}.$$

Приметимо да Кеплерову интегралу одговара такође један векторски интеграл, али је правац свих чланова тог интеграла исти, наиме правац сталног вектора $\vec{C}$. У векторском облику Кеплерову интегралу можемо дати облик

$$(nt-u+e\sin u)\,\vec{k}=n\tau\,\vec{k}$$

или

$$\frac{1}{C}(nt-u+e\sin u)\,\vec{C}=\frac{n\tau}{C}\vec{C}.$$

У току претходног излагања уведена су три орта: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, за чије одређивање су потребне три независне константе, и константни скалари

$$p_1,\ e,\ e',\ p,\ n,\ \tau,\ a,\ b,\ a_1,$$

од којих независних може бити само три, јер имамо ове везе између њих:

$$e'^2+e^2=1,\quad p=p_1^2,\ n=\left(\frac{e'}{p_1}\right)^3,\quad a=\frac{p_1^2}{e'^2},\quad b=\frac{p_1^2}{e'},\quad a_1^2=a.$$

Све су ове константе добро познате са изузетком e', коју ћемо звати допунски ексцентрицитет.

7. Нови векторски интеграл.

Лапласов векторски интеграл са две независне произвољне константе и Кеплеров интеграл у векторској форми са једном произвољном константом можемо спојити у један векторски интеграл са три произвољне скаларне константе. Наиме можемо написати

$$[\dot{\vec{r}}\,\vec{C}]-\frac{1}{r}\vec{r}+\frac{1}{C}(nt-u+e\sin u)\,\vec{C}=\vec{G},$$

где је $\vec{G}$ константни вектор интеграције, који зависи од три произвољна скалара. Тај вектор је везан са претходним константама векторском једначином

$$\vec{G}=\vec{D}+\frac{n\tau}{C}\vec{C}.$$

Две компоненте вектора $\vec{G}$ управне су једна на другој, пошто је $\vec{D}\perp\vec{C}$. Интензитет сваке је апстрактан број.

Два независна произвољна вектора

$$\vec{C}, \vec{G}$$

треба сматрати као векторске елементе у проблему двају тела. Помоћу тих вектора кретање проблема је потпуно одређено, јер помоћу тих констаната можемо одредити $\vec{r}$ и $\dot{r}$ у функцији времена. Наведимо дефинитивни резултат, при чему претходно уведимо ознаку

$$\vec{D} = \vec{G} - \frac{1}{C^2}(\vec{C}, \vec{G})\,\vec{C}.$$

Тада имамо

$$\vec{r} = \frac{C^2}{D\,(1-D^2)}(\cos u - D)\,\vec{D} + \frac{C}{D\sqrt{1-D^2}}\sin u\,[\vec{C}, \vec{G}],$$

$$\dot{r} = \frac{\sqrt{1-D^2}}{C^2 D} \cdot \frac{1}{1-D\cos u}\left\{-C\sin u \cdot \vec{D} + \sqrt{1-D^2}\cos u\,[\vec{C}, \vec{G}]\right\},$$

при чему се u одређује из једначине

$$u - e\sin u = n\,(t-\tau),$$

где је: $e = D$, $n = \left(\frac{\sqrt{1-D^2}}{C}\right)^3$, $\quad \tau = \frac{C^2}{(1-D^2)^{3/2}}(\vec{G}, \vec{C})$.

Кратко $\vec{r}$ и $\dot{r}$ можемо изразити и овако:

$$\vec{r} = M\vec{i} + N\vec{j}, \qquad (2)$$

$$\dot{r} = M\vec{i} + L\vec{j},$$

где је: $\vec{i}$ орт вектора $\vec{D}$, а $\vec{j}$ вектора $[\vec{C}\,\vec{G}]$ односно вектора $[\vec{C}\,\vec{D}]$ и

$$M = a_1^2(\cos u - e), \qquad N = a_1^2\sqrt{1-e^2}\sin u,$$

$$K = -\frac{\sin u}{a_1(1-e\cos u)}, \qquad L = \frac{\sqrt{1-e^2}\cos u}{a_1(1-e\cos u)};$$

константе a_1 и e, како смо навели, изражавају се овако помоћу векторских елемената:

$$a_1 = C : \sqrt{1-D^2}, \qquad e = D.$$

Претходно излагање је изведено ради упоређивања класичног решења проблема двају тела са решењем помоћу векторских елемената са шест произвољних скалара.

Применимо сад феноменолошки диференцијални принцип односно Пфафову методу на кретање наше тачке.

За форму стања имамо израз

$$\Phi_s = (\dot{r}\,d\vec{r}).$$

Инерциони кинетички део заједно са живом силом даје овај део акције

$$-(\dot{r}\,\dot{r})\,dt + \frac{1}{2}\dot{r}^2\,dt = -\frac{1}{2}\dot{r}^2\,dt,$$

а функција сила Њутнове силе има вредност $1 : r$.

Према томе Пфафова форма проблема изгледа

$$\Phi = (\dot{r}\,d\vec{r}) - \left(\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{1}{r}\right)dt. \qquad (3)$$

Лако је проверити да Пфафове једначине стварно одговарају нашем проблему. Заиста имамо три једначине:

$$d\dot{r} = \mathrm{grad}_{\vec{r}}\,\Phi = \mathrm{grad}_{\vec{r}}\frac{1}{r}\cdot dt = -\frac{1}{r^3}\vec{r}\,dt,$$

$$0 = \mathrm{grad}_{\dot{r}}\,\Phi = d\vec{r} - \dot{r}\,dt,$$

$$-d\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{1}{r}\right) = \mathrm{grad}_t\,\Phi = 0,$$

од којих се прва поклапа са стандардном једначином; друга поставља везу између будућег померања и брзине, а трећа се претвара у идентитет на основу претходних.

Покажимо још да интеграли (2) проблема заиста доводе форму (3) до тоталног диференцијала.

Заиста, ако искористимо интеграле (2), имамо

$$(\dot{r}\,d\vec{r}) = K\,dM + L\,dN = a_1(1 + e\cos u)\,du,$$

$$\dot{r}^2 = K^2 + L^2 = \frac{1}{a_1^2}\cdot\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u},$$

$$r = (M^2+N^2)^{\frac{1}{2}} = a_1^2(1-e\cos u)$$

и према томе форма се изражава

$$\Phi=(\dot{r}\,d\vec{r})-\left(\frac{1}{2}\,\dot{r}^2-\frac{1}{r}\right)dt=$$

$$=a_1\,(1+e\cos u)\,du+\frac{1}{2\,a_1^2}\,dt=$$

$$=d\left[[a_1\,(u+e\sin u)+\frac{1}{2\,a_1^2}\,t\right].$$

За ту форму Пфафове једначине се претварају у идентитет. Према томе интеграли (2) заиста одговарају проблему.

Пређимо сад на примену феноменолошког диференцијалног принципа односно Пфафове методе на проучавање појаве планетских поремећаја.

Ако на материјалну тачку, која се креће под утицајем Њутнове силе привлачења са функцијом силе U, дејствује још која друга сила, са функцијом силе R, ова последња сила ремети основно, елиптичко кретање материјалне тачке под утицајем прве силе. Функција R се зове функција поремећаја. У новом, поремећеном кретању, из сваког положаја $\vec{r}$ тачка добива елементарно померање $d\vec{r}$. То померање можемо раставити у две компоненте: једну $d_c\vec{r}$, кад сматрамо елементе основног елиптичког кретања као сталне величине, и другу, $\delta\,\vec{r}$, која долази услед промене елиптичких елемената. Према томе можемо ставити

$$d\vec{r}=d_c\,\vec{r}+\delta\,\vec{r}\,. \tag{4}$$

На сличан начин можемо раставити и брзину тачке у поремећеном кретању

$$\dot{r}=\dot{r}_c+\delta\,\dot{r}_c\,. \tag{5}$$

Сад је природно рашчланити проучавање појаве целокупног поремећеног кретања материјалне тачке на два проучавања: на проучавање основног, непоремећеног, кретања и на посебно проучавање појаве отступања, појаве поремећаја и у сваком од тих проучавања навести диференцијално стање и елементарну акцију. Велика предност Пфафове методе је у томе што се то рашчлањавање врши готово аутоматски помоћу једноставних алгебарских операција.

Заиста, узмимо Пфафову форму целокупног поремећеног кретања материјалне тачке на коју дејствују силе како од функције сила U, тако и од функције сила R. Ту форму састављамо овако

$$\Phi=(\dot{r}\,d\vec{r})+[-(\dot{r}\,\dot{r})+T+U+R]\,dt=$$

$$=(\dot{r}\,d\vec{r})+[-T+U+R]\,dt\,.$$

После примене образаца (4) и (5) и задржавања чланова само првога реда ова форма се своди на

$$\Phi=(\dot{r}_c\,d\vec{r}_c)+(-T+U)\,dt+$$

$$(\dot{r}_c\,\delta\vec{r})+R\,dt\,.$$

Збир прве врсте

$$\Phi_1=(\dot{r}_c\,d\vec{r}_c)+(-T+U)\,dt$$

је Пфафова форма главног кретања са одговарајућим изразима за форму стања и форму акције.

Збир друге врсте

$$\Phi_2=(\dot{r}_c\,\delta\,\vec{r})+R\,dt$$

је Пфафова форма отступања, форма поремећаја. Ознака $\delta\vec{r}$ обраћа пажњу на то да се промена врши због промене елемената планетског кретања. Први члан карактерише диференцијално стање појаве отступања. Приметимо да у изразу за елементарну акцију не учествује ни инерциони део ни члан одговарајући живој сили и то из разлога што су оба та члана првог односно другог реда, а помножени са dt они треба да буду занемарени.

Видели смо у проучавању планетског кретања да се диференцијална форма која одговара њему претвара у тотални диференцијал. Према томе, ако је познато главно планетско кретање, форма Φ_1 је тотални диференцијал. Како је сад из опште теорије Пфафове методе познато да присуство тоталног диференцијала у форми не утиче на Пфафове једначине форме, форму Φ_1 можемо изоставити и тада ћемо добити

$$\Phi=\Phi_2=(\dot{r}\,\delta\,\vec{r})+R\,dt\,.$$

То је форма појаве планетског поремећаја. Треба имати у виду да су непознате величине које одређују Пфафове једначине ове форме променљиви планетски елементи узети ма у којој форми.

У нашим радовима [10] и [14] дајемо пре свега овај израз за форму Φ_2 изражену помоћу планетских елемената

$$\Phi_2 = p_1 (j, \delta \vec{i}) + a_1 \delta(-n\tau) + Rdt,$$

где су искоришћене раније означене величине.

У тај израз улазе, сем три скалара

$$p_1, a_1, -n\tau,$$

три вектора триједра $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, који се одређује у односу на непокретни простор такође са три скалара. На тај начин имамо потпуни систем од шест скалара за одређивање поремећених планетских елемената као функција времена.

У раду [10] изводимо диференцијалне једначине планетских поремећаја за ове елементе:

a) за Delaunay-ове елементе — канонични једначине,

b) за астрономске елементе — у добро познатом облику решеном по изводима,

c) за векторско-скаларне елементе — у облику две векторске једначине и једне скаларне,

d) за два векторска елемента — у облику две векторске једначине. Те векторске једначине изгледају овако:

$$\dot{\vec{C}} = [\vec{C}, \vec{R}_1] + [\vec{G}, \vec{R}_2], \qquad \dot{\vec{G}} = [\vec{G}, \vec{R}_1] + [\vec{F}, \vec{R}_2],$$

где су: $\vec{C}$ и $\vec{G}$ векторски планетски елементи,

$\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$ делимични градијенти функције R у односу на $\vec{C}$ и $\vec{G}$, тј.

$$\vec{R}_1 = \operatorname{grad}_{\vec{C}} R, \qquad \vec{R}_2 = \operatorname{grad}_{\vec{G}} R,$$

и $\vec{F}$ вектор са вредношћу

$$\vec{F} = \frac{1-D^2}{C^2}\vec{C} + \frac{(\vec{C}\,\vec{G})}{C^2}\vec{G} - \frac{(1-D^2)^{3/2}}{C^2 D^2}[\vec{C}, \vec{G}],$$

при чему се D^2 одређује из једначине

$$D^2 = G^2 - \frac{1}{C^2}(\vec{C}, \vec{G})^2.$$

ГЛАВА ЧЕТВРТА

Феноменолошко тумачење Пфафова принципа у механици промењивих маса

4.1. Механика промењивих маса

До последњих година механика тела, чија се маса повећава или опада, или мења свој распоред за време кретања, била је предмет проучавања од стране врло незнатног броја испитивача. За ово има више разлога. Прво, таква проучавања су имала потпуно теориски карактер и нису имала практичних примена. Друго, за таква проучавања је потребан врло тежак математички апарат, нарочито за важне примере као што је кретање Земље са њеним промењивим воденим и ваздушним покривачем. Треће, нису били савладани врло важни проблеми ни са сталним масама материјалних тачака и према томе главне научне снаге биле су упућене на решавање и обраду оних проблема, који су постали класични. Али, ипак, главни разлог, разуме се, био је у томе што такви проблеми нису били везани за практичан живот, за потребе индустрије, за потребе одбране. Сад, у средини двадесетог века, ствар стоји сасвим друкчије. Авион и његова бомба, дириговани ракетни пројектили, најзад сателити и вештачка небеска тела конструисана са циљем да се достигну Месец и планете и да се врате натраг — све је то од огромне важности. А кретање баш ових објеката зависи како од промене њихове масе (гориво, бомбе, падобранци), тако и од промене распореда њихових маса (диригование).

Циљ је ових неколико врста ове расправе да покаже да се и проблеми о кретању материјалних објеката са промењивом масом могу обухватити општим феноменолошким диференцијалним принципом.

4.2. Случај материјалне тачке променљиве масе

Нека се маса m материјалне тачке мења за време кретања тачке и јавља као функција времена $m(t)$.

Уведимо, без обзира на променљивост масе m, импулс тачке са $\vec{p}=m\vec{v}$. Живу силу тачке означимо са

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2m}p^2$$

и силу, која дејствује на тачку, са $\vec{F}$.

Форму стања Φ_s, као увек, узимамо у облику

$$\Phi_s=(\vec{p}, d\vec{r}),$$

где је $d\vec{r}$ елементарно померање тачке.

Што се тиче форме акције, сем чланова: инерционог $-(\vec{p},\vec{v})\,dt$, члана, који зависи од живе силе, $T\,dt$, и акције спољашње силе $\int(\vec{F}, d\vec{r})$ треба увести још један члан акције, наиме онај који стоји у вези са променом масе тела. Тај допунски члан у овом случају можемо увести на основу ових интуитивних расуђивања. Нека се у току времена dt бескрајно мала маса dm или додаје ($dm>0$) или одузима ($dm<0$) од тела масе m, а према постављеној функцији $m(t)$. Тада dm/dt можемо протумачити као брзину (скаларну) доспирања ($dm>0$) или отсипања ($dm<0$) масе. Ако ту брзину помножимо апсолутном брзином $\vec{u}$ масе dm у моменту t, производ $\vec{u}\,\frac{dm}{dt}$ има димензију силе, коју ћемо звати сила припајања односно одвајања: она дејствује на масу m, кад допунска маса dm или долази у додир са основном масом m или је напушта. Та сила за време dt врши на померању $d\vec{r}$ тачке елементаран рад величине $\left(\vec{u}\,\frac{dm}{dt}, d\vec{r}\right)$ и том раду одговара елементарна акција $\left(\vec{u}\,\frac{dm}{dt}, d\vec{r}\right)dt$.

Сад можемо написати Пфафову форму проблема

$$\Phi=(\vec{p}, d\vec{r})+(0, d\vec{p})+\left[-\frac{1}{2m}p^2+\int(\vec{F}, d\vec{r})+\int\left(\vec{u}\,\frac{dm}{dt}, d\vec{r}\right)\right]dt.$$

Према тој форми састављамо Пфафове диференцијалне једначине:

$$d\vec{p}=\mathrm{grad}_{\vec{r}}\,\Phi=\left(\vec{F}+\vec{u}\,\frac{dm}{dt}\right)dt,$$

$$0=\mathrm{grad}_{\vec{p}}\,\Phi=d\vec{r}-\frac{1}{m}\vec{p}\,dt,$$

$$-\frac{1}{m}(\vec{p}, d\vec{p})+(\vec{F}, d\vec{r})+\left(\vec{u}\,\frac{dm}{dt}, d\vec{r}\right)=\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0.$$

Прве две једначине дају

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}+\vec{u}\,\frac{dm}{dt},\qquad \vec{p}=m\vec{v}, \tag{1}$$

а трећа се на основу прве две претвара у идентитет.

Првој од ових једначина одговара ово правило:

Извод по времену импулса материјалне тачке са променљивом масом једнак је збиру активне силе која дејствује на тачку и допунске силе припајања односно одвајања оних маса које изазивају промену масе тачке.

Ако у једначину (1) ставимо вредност импулса из друге једначине, добићемо

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}+\vec{v}\frac{dm}{dt}=\vec{F}+\vec{u}\,\frac{dm}{dt},$$

или

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}+(\vec{u}-\vec{v})\frac{dm}{dt}.$$

Ако уведемо појам реактивне силе $\vec{R}$ са вредношћу

$$\vec{R}=\vec{\rho}\,\frac{dm}{dt},$$

где је $\vec{\rho}=\vec{u}-\vec{v}$ релативна брзина масе dm према маси m, онда се може написати

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}+\vec{R}$$

и ова једначина прочитати као правило И. В. Мещерског [52].

Једначина кретања материјалне тачке са промењивом масом се своди на једначину кретања тачке са константном масом, ако силама које дејствују на тачку додамо реактивну силу.

4.3. Случај чврстог тела промењиве масе

У својим радовима [70, 71] проучавао сам кретање материјалног система који мало отступа од чврстог тела. Расуђивања тих радова сам затим применио на проучавање проблема о померању Земљина пола под извесним механичким предпоставкама [72, 73, 74, 75, 76, 77]. На третирање ових проблема се може исто тако применити метода којој је посвећена ова монографија. Да не понављам тадашња расуђивања, само на други начин изведена, покушаћу да применим феноменолошки односно Пфафов принцип на други, савременији проблем, на проблем о кретању ракете. Тај проблем је по својој динамичкој структури аналоган проблемима које сам проучавао у горе поменутим радовима. За обраду тог проблема нарочито је згодно феноменолошко тумачење појаве где се подвлачи специјална улога разграничавања проучавања форме стања од форме акције. При проучавању форме стања сам по себи се јавља принцип солидификације. Што се тиче форме акције, у њој се појављују сви они чланови који карактеришу ток појаве и то у облику допунских сила.

Тело ракете посматрамо у два момента: у моменту t и у моменту $t_1 = t + dt$. У моменту t ракету сматрамо као чврсто тело са скупом познатих динамичких параметара чврстог тела. Само то тело и скуп параметара узетих за ту фазу означимо са П. То стање треба сматрати као полазно стање за момент t. За то полазно стање можемо саставити диференцијалну форму стања, стања чврстог тела са параметрима П и непознатим величинама које одређују будуће диференцијално стање.

Према једначини (1) § 2.5 форма стања чврстог тела се изражава овако

$$\Phi_s = (\vec{K}, \Delta \vec{r}_A) + (\vec{I}^{(A)}, \overrightarrow{\Delta\alpha}),$$

где су: $\vec{K}$ — количина кретања чврстог тела П, $\vec{I}^{(A)}$ — момент количинâ кретања свих елемената солидификоване масе чврстог тела око тачке A тела, $\vec{r}_A$ је вектор положаја тачке A тела, рецимо оне тачке која је везана са главном непромењивом масом ракете, $\overrightarrow{\Delta\alpha}$ векторски претставник оног бескрајно малог угла обртања тела око осе вектора $\vec{\Omega}$, тренутне угаоне брзине тела.

Треба узети у обзир да за израчунавање форме Φ_s по обрасцима за чврсто тело треба узети оне вредности параметра П које одговарају моменту t без обзира на то што су ти параметри функције времена.

При састављању форме акције треба узети у обзир ове чланове:

1. Инерциони део

$$\{-(\vec{K}, \vec{v}_A) - (\vec{I}^{(A)}, \vec{\Omega})\}\, dt,$$

2. Члан живе силе

$$T\, dt,$$

3. Чланове од свих сила које дејствују на тело у току времена dt. У случају промењивог тела треба узети у обзир, како то показује анализа појаве чак и у приближном посматрању, ове силе:

a. Резултанту $\vec{F}$ спољашњих сила,

b. Резултантни момент $\vec{L}^{(A)}$ спољашњих сила око тачке A,

c. Резултанту реактивних сила $\vec{R}$,

d. Резултантни момент $\vec{M}^{(A)}$ око тачке A реактивних сила,

e. Резултанту Кориолисових сила $\vec{S}$,

f. Резултантни момент $\vec{N}^{(A)}$ Кориолисових сила око тачке A.

Не улазећи у детаљно извођење вредности тих сила протумачимо њихово значење.

Смисао спољашњих сила је потпуно јасан. Али, узимајући у обзир да се ракета креће у промењивој средини са промењивом густином и да гасови који излазе из ждрела могу утицати на спољашњу средину и стварати промену у дејству те средине на ракету, конкретно израчунавање дејства спољашњих сила, засновано при томе на експериментима, претставља велике тешкоће.

Што се тиче реактивних сила, њихово образложење у потпуности одговара оном образложењу те силе које смо навели у § 4.2 за случај само једне материјалне тачке промењиве масе.

Овде треба узети у обзир сав проток гаса горива који пролази кроз пресек ждрела.

Најзад, што се тиче Кориолисових сила, њих нисмо имали у случају кретања тачке промењиве масе, јер смо тамо сматрали да маса dm, која, рецимо, одлази од основне масе m тачке, одмах губи везу са том масом и према томе не постоји релативно кретање масе dm према маси m. Овде, у случају ракете, ствар стоји друкчије. Гориво до сагоревања сачињава масу чврстог тела и тек при изласку из ждрела показује реактивну силу. Међутим маса гаса од површине сагоревања до пресека ждрела има релативно кретање у односу на главно тело ракете. При том релативном кретању сваки елемент гаса има своје Кориолисово убрзање према телу. Према карактеру кретања гаса по каналима ракете ствара се комплекс нових сила које дејствују на тело и дају своју резултанту и свој резултантни момент око тачке A. Детаљно проучавање тих сила је везано са конструкцијом унутрашњости ракете и врсте горива.

На тај начин форма стања и форма акције за овај случај изгледају овако:

$$\Phi_s = (\vec{K}, \Delta \vec{r}_A) + (\vec{I}^{(A)}, \overrightarrow{\Delta\alpha}),$$

$$\Phi_a = \{-(\vec{K}, \vec{v}_A) - (\vec{I}^{(A)}, \vec{\Omega}) + T + \\ + \int_{P_0}^{P} [(\vec{F} + \vec{R} + \vec{S}, d\vec{r}_A) + (\vec{L}^{(A)} + \vec{M}^{(A)} + \vec{N}^{(A)}, \overrightarrow{d\alpha})]\}\, dt,$$

а основне једначине кретања на основу закона градијента можемо према једначинама (4) § 2.5 написати:

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{grad}_{\vec{v}_A} T = \vec{F} + \vec{R} + \vec{S},$$

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{grad}_{\vec{\Omega}} T + [\vec{v}_A, \mathrm{grad}_{\vec{v}_A} T] = \vec{L}^{(A)} + \vec{M}^{(A)} + \vec{N}^{(A)}.$$

Не улазимо у детаљна проучавања ових векторских и њима одговарајућих скаларних једначина, како се то ради у радовима специјално посвећеним кретању ракете. Види, напр. [78] и [79].

ГЛАВА ПЕТА

Феноменолошко тумачење Пфафова принципа у физици

5.1. Феноменолошко тумачење Пфафова принципа у физици

Пошто циљ овог рада није у разради појединих научних грана помоћу Пфафове методе већ само у томе да се разјасни феноменолошка страна Пфафова принципа као општег феноменолошког диференцијалног принципа, онда се можемо зауставити на малом броју примера из разних области природних наука, који се дају обрадити релативно једноставно. А да то урадимо и што краће, узмимо пре свега оне примере који су већ раније разрађени, било са моје стране [12] било са стране Ђ. Мушицког [21].

5.2. Случај геометриске оптике

Као што је познато, Геометриска оптика се може извести са једним од ових ставова узетим као почетним:

I. Закон Snellius-Descartes-ов.

II. Fermat-ов принцип о стационарности интеграла који изражава време пролаза светлости од једне тачке до друге.

III. Malus-ов принцип о ортогоналности зракова.

Ако се један од тих ставова усвоји за одређену област светлосних појава, у вези са особинама средина кроз које пролази светлост, друга два следују за исту област после извођења дедуктивних расуђивања.

Узмимо најпростији став — закон Snellius-Descartes-ов и изведимо диференцијалну једначину светлосног зрака у средини чији индекс преламања μ зависи само од положаја тачке у средини, тј.

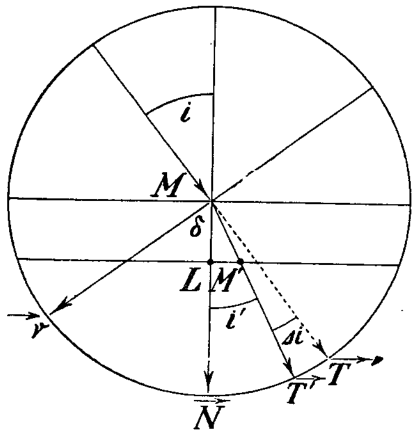
$$\mu = \mu(\vec{r}),$$

где је $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$. Како је усвојено, таква средина се зове изотропна. За такву средину Snellius-Descartes-ов закон се изражава једначинама

$$\mu \sin i=\mu' \sin i'=\text{const},$$

где су μ и μ' индекси преламања две средине, а i и i' углови које зрак чини са нормалом на површини која одваја једну средину од друге; ти углови се одмеравају на познати начин и припадају истој равни.

За извођење векторске диференцијалне једначине зрака светлости у изотропној средини узмимо произвољну тачку M (сл. 2) на зраку и замислимо еквискаларну површину која пролази кроз ту тачку дату једначином



Сл. 2.

$$\mu(\vec{r})=\mu(M)=\mu.$$

Претпоставимо, ради конкретности, да зрак пролази из средине са мањим индексом преламања у средину са већим индексом. Нека из тачке M он долази у тачку M' на отстојању $MM'=\Delta S$ и нека отстојање између тачке M и нове еквискаларне површине, која пролази кроз тачку M', износи $ML=\delta$, а прираштај индекса преламања нека је $\Delta\mu$. Узимајући у обзир диференцијалне елементе само првога реда можемо написати наредне односе између потребних величина, са ознакама наведеним на слици.

Из Snellius-Descartes-ова закона

$$\mu \sin i=(\mu+\Delta\mu)\sin(i-\Delta i),$$

одакле је

$$\Delta\mu\cdot\sin i-\mu\cdot\Delta i\cdot\cos i=0,$$

или

(1) $$\Delta\mu \operatorname{tg} i=\mu\,\Delta i.$$

Непосредно са слике је

(2) $$\vec{T}\cos i+\vec{v}\sin i=\vec{N},$$

(3) $$\vec{v}=\Delta\vec{T}/\Delta i,$$

(4) $$\operatorname{grad}\mu=\vec{N}\cdot\Delta\mu/\delta=\vec{N}\cdot\Delta\mu/(\Delta S\cdot\cos i).$$

Тада из (2) после множења са $\Delta\mu/\cos i$ на основу (1), (3), (4) добивамо

$$\vec{T}\cdot\Delta\mu+\Delta\vec{T}\cdot\mu=\Delta S\cdot\operatorname{grad}\mu,$$

одакле долазимо до ове векторске диференцијалне једначине зрака светлости у изотропној средини:

$$\frac{d}{ds}(\mu\vec{T})=\operatorname{grad}\mu,$$

где је $\vec{T}$ орт тангенте на зрак у тачки M.

Ако уведемо ознаку

$$\mu\vec{T}=\vec{p},$$

та иста једначина је

(5) $$\frac{d\vec{p}}{ds}=\operatorname{grad}\mu.$$

Сад можемо навести за овај проблем Пфафову форму, протумачити је феноменолошки, извести Пфафове једначине и показати да оне одговарају изведеној векторској диференцијалној једначини проблема.

Не улазећи у било какво тумачење природе светлости, можемо тврдити да се у некој средини шири у неком правцу нека појава било у вези са временом, било чисто геометриски, као што се проширује цртање неке криве. Нека носилац те појаве за дату тачку M простора у правцу орта $\vec{T}$ буде вектор $\mu\vec{T}$, где је μ коефицијент пропорционалности који зависи од положаја тачке M.

Уведнмо ознаку

$$\vec{p}=\mu\vec{T}.$$

Скаларни производ $(\vec{p},d\vec{r})$ изражава меру простирања те појаве на наредном елементу зрака $d\vec{r}$. Промена те мере зависи од елемента акције. Тај се елемент састоји од наслеђеног простирања у облику $-(\vec{p},\vec{T})\,ds$ на елементу зрака $\vec{T}ds$ са којим је светлост дошла, и затим из елемента $\mu(\vec{r})\,ds$ који треба сматрати као елемент оне функције, чији градијент, слично сили, изазива девијацију елемента зрака у наредном одређивању положаја елемента тог зрака. Према томе Пфафову форму за ову појаву можемо написати

$$\Phi = (\vec{p}, d\vec{r}) + [-(\vec{p}, \vec{T}) + \mu(\vec{r})]\, ds.$$

Пфафове једначине ове форме дају једначине:

за $\vec{r}$ $$d\vec{p} = \operatorname{grad} \mu \cdot ds,$$

за $\vec{p}$ $$0 = d\vec{r} - \vec{T} ds,$$

за s $$d[(\vec{p}, \vec{T}) - \mu(\vec{r})] = 0.$$

Прва једначина се поклапа са једначином раније изведеном из Snellius-Descartes-ова закона, друга изражава својство тангенте на криву, а трећа се претвара у идентитет на основу прве две.

Ако место променљиве s уведемо променљиву t, рецимо време, са $\vec{T}\, ds/dt = \vec{v}$ форму можемо трансформисати на ову

$$\Phi = (\vec{p}, d\vec{r}) + [-(\vec{p}, \vec{v}) + \mu(\vec{r}) \cdot v]\, dt = (\vec{p}, d\vec{r}) - H\, dt,$$

где је H Хамилтонова функција

$$H = (\vec{p}, \vec{v}) - \mu \cdot v.$$

Овој функцији одговара Fermat-ов интеграл

$$\int_{t_0}^{t} \mu(\vec{r})\, v\, dt = \int_{t_0}^{t} f(x, y, z;\, x', y', z')\, dt,$$

чија стационарност одговара Fermat-ову принципу. Заиста Euler-Lagrange-еве једначине дају

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \ \ldots, \ \ldots.$$

Како је

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \mu\, x'/v = \mu\, T_x = p_x, \ \ldots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = v\,\frac{\partial \mu}{\partial x}, \ \ldots,$$

имамо једначине

$$\frac{dp_x}{dt} = v\,\frac{\partial \mu}{\partial x}, \ \ldots$$

или

$$\frac{dp_x}{ds} = \frac{\partial \mu}{\partial x}, \ \ldots$$

које и одговарају векторској једначини (5).

У случају анизотропне средине кад индекс преламања зависи и од правца зрака, тј. за случај

$$\mu = \mu(\vec{r}, \vec{T}),$$

уводи се вектор

$$\vec{p} = \operatorname{grad}_T \mu,$$

и Пфафовој форми се даје облик [12, стр. 8]

$$\Phi = (\vec{p}, d\vec{r}) - [(\vec{p}, \vec{T}) - \mu]\, ds = (\vec{p}, d\vec{r}) - H ds,$$

где је

$$H = (\vec{p}, \vec{T}) - \mu.$$

Феноменолошко тумачење ове форме је готово идентично са тумачењем у претходном случају.

Форма даје једначине

$$d\vec{p} = -\operatorname{grad}_r H \cdot ds,$$

$$0 = d\vec{r} - \operatorname{grad}_T H \cdot ds,$$

које у скаларној форми имају канонични облик

$$\frac{dp_x}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial r_x}, \ \ldots; \qquad \frac{dr_x}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \ \ldots.$$

5.3. Случај термодинамике

Већина писаца, чак и савремених, који излажу класичну термодинамику, придржавају се историског пута, а тај пут је, углавном, везан за практичне примене термодинамике и у првом реду за термичке моторе. То потврђује и формулисање основних принципа термодинамике од стране многих писаца у вези са perpetuum mobile прве, односно друге врсте. Али без обзира на то што се на том историском путу читав низ великих умова бавио теоријом топлоте уопште и специјално термодинамиком, класична термодинамика још и сад није добила своју дефинитивну теориску форму, у којој би факта експеримената и логички ставови били повезани у строги систем само неопходних појмова и неизбежних расуђивања. За стварање таквог система има више препрека.

Прво, такав систем мора обухватити огроман експериментални материјал, који се сваког дана знатно проширује и везан је не само за физичке појаве у ужем смислу, већ и за хемиске, а сад и за нуклеарне појаве. Још није утврђен ни онај дефинитивни оквир који би јасно оградио онај скуп појава које подлеже проучавању.

Друга принципска тешкоћа у стварању теорије термичких појава је у томе, што без обзира на јако проширење макроскопских опажања наоружаним оком у правцу све мањих објеката, остаје још велика област величина неприступачних за непосредна опажања и према томе је немогуће ући у проучавање оних детаља од којих зависи сама природа појаве.

Задатак теоретичара, нарочито оних који желе применити математичку методу на проучавање термичких појава, у томе је да се са што мањим бројем експерименталних независних факата и са што јаснијим и једноставнијим математичким апаратом изведе теориски систем термодинамичких појава. На основу свега оног што је било раније урађено од стране претходника, од којих треба поменути: J. R. Mayer'a, J. P. Joule'a, H. v. Helmholtz'a, R. Clausius'a, J. Fourier'a, W. Thomson'a (lorda Kelvin'a), W. Rankin'a, J. C. Maxwell'a, G. Kirchoff'a, N. L. Carnot'a, E. Clapeyron'a, J. Van't Hoff'a, J. W. Gibbs'a, M. Planck'a, H. Poincare'a и др., познати математичар C. Carathéodory [37, 38] дао је једну теориску схему излагања основа термодинамике. Carathéodory-ева схема има у знатној мери аксиоматички карактер и са другог аспекта разјашњава везе између величина које учествују у теорији. Без обзира на то што она, можда, не задовољава потребе практичара, јер је сувише теориска, математичка, ипак је она добила широки публицитет [39] и ушла је чак и у школску литературу [40].

Ђ. Мушицки [21] је применио Пфафову методу за извођење диференцијалних једначина промене механичко-термичког стања елемента јединичне масе, при чему се кратко позвао у том делу свога рада на H. v. Helmholtz-a [41] и на немачку енциклопедију [42].

У вези са Carathéodory-евим идејама дајем у овом раду друго извођење основних једначина термодинамике, при чему примењујем схему општег феноменолошког диференцијалног принципа.

Не наводећи тачно Carathéodory-еве дефиниције свих оних појмова који улазе у термодинамичка расуђивања, обратимо нарочиту пажњу на Carathéodory-еву дефиницију квазистатичке промене стања. Код A. L a n d é-a [39, стр. 283] та дефиниција гласи:

Q u a s i s t a t i s c h heisst eine Zustandsänderung, wenn si so langsam im Grenzfall unendlich langsam geführt wird, dass die Zwischenzustände eine kontinuierliche Reihe von lauter Gleichgewichtszuständen bilden.

Теориска могућност проучавања термичких појава преко низа равнотежних стања система знатно упрошћава примену нашег феноменолошког принципа на проучавање таквих специјалних термичких појава. То се упрошћавање изражава у томе што се у изразу акције може изоставити наслеђени, инерциони део акције.

За основне појмове уведимо ознаке:

T — апсолутна температура тела,

a — Helmholtz-ов параметар температуре T; тако да је

$$T=\frac{da}{dt}.$$

U — унутрашња енергија тела. У ту енергију улазе ови сабирци: 1. кинетичка енергија молекула у транслаторном и ротационом кретању, 2. кинетичка осцилаторна енергија атома, 3. потенцијална енергија узајамног привлачења и одбијања молекула односно атома, 4. унутрашња молекуларна хемиска енергија, 5. унутрашња атомска енергија, енергија језгра. Са гледишта феноменолошког тумачења важно је приметити да унутрашња енергија тела U садржи како кинетичку енергију, тј. енергију кретања, тако и потенцијалну енергију, енергију положаја.

pV, где је p — притисак и V запремина, изражава запреминску енергију гаса,

Q — количина топлоте,

S — ентропија.

Сем наведених појмова употребљују се још и ове величине: ентхалпија са вредношћу $H=U+pV$, Helmholtz-ова слободна енергија $A=U-TS$ и Gibbs-ов термодинамички потенцијал $F=U-TS+pV$, који се понекад зове и слободном енергијом.

Од наведених величина две величине можемо узети за независне параметре, трећу за зависни параметар који је везан са претходним параметрима једначином стања, а све остале величине се одређују тада помоћу три поменуте.

Има разлога од променљивих

$$V, \ p, \ T, \ S, \ U, \ H, \ A, \ F$$

узимати само ове комбинације по три величине:

1) U, S, V; 2) H, S, p; 3) A, T, V; 4) F, T, p

и од њих једну узимати за зависну променљиву, а две остале за независне.

Узмимо Gibbs-ову комбинацију и сматрајмо S и V као независне параметре, а величину U као зависну. Једначину стања тада можемо написати у облику

$$U = f(S, V).$$

Карактер функције f зависи од физичке и хемиске природе тела и остаје исти док се та природа не промени.

Применимо сад феноменолошку схему за извођење Пфафових једначина термичке појаве.

Пошто смо за независне параметре узели S и V, диференцијални израз наредног термичког стања тела јединичне масе, тј. форма стања, може се написати овако

$$p_S \, dS + p_V \, dV,$$

где су p_S и p_V одговарајући коефицијенти, засад произвољно бирани. Написани збир има димензију акције израчунате на јединицу масе, тј. $L^2 T_*^{-1}$ (овде T_* означава време). Из овог следују димензије коефицијената p_S и p_V.

Заиста, пошто су

$$[p_S \, dS] = L^2 T_*^{-1}, \quad [S] = L^2 T^{-2} : \text{grad},$$

имамо

$$[p_S] = \text{grad} \cdot T_*$$

и, слично, из

$$[p_V \, dV] = L^2 T_*^{-1}, \quad [V] = L^3,$$

изводимо

$$[p_V] = L^{-1} T_*^{-1} = L T_*^{-2} \cdot L^{-2} \cdot T_* = [p] \cdot T_*,$$

где је $[p]$ димензија притиска.

Ова анализа димензија коефицијената упућује на то да је за коефицијент p_S природно узети Helmholtz-ов параметар a са условом да извод da/dt буде једнак температури T. Слично, за други коефицијент p_V узмимо такву величину да извод те величине по времену одговара притиску и то бирамо са негативним знаком. Према томе наш израз даје форму стања у овом облику

$$a \, dS + p_V \, dV,$$

са условима

$$\frac{da}{dt} = T, \qquad \frac{dp_V}{dt} = -p.$$

Јасно је да наведена расуђивања о димензијама имају само помоћни карактер, а у суштини изабране вредности коефицијената следују из претходног дубљег проучавања термичких појава од стране читавог низа истраживача, практичара и теоретичара.

Пређимо сад на састављање елемента акције. Пошто термички процес проучавамо као низ равнотежних стања система, наслеђени део, како смо навели, не улази у акцију. Ако, сем тога, претпоставимо да у току сваког равнотежног процеса на наш систем не дејствују спољашње, ни термичке, ни силе притиска у случају гаса, онда остали део акције зависи само од унутрашње енергије, коју сматрамо као функцију од S и V.

У случају наведених ограничења Пфафову форму процеса можемо написати

$$\Phi = a dS + p_V dV + U dt.$$

За променљиве S, V, t имамо ове једначине

$$\frac{da}{dt} = T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V,$$

$$\frac{dp_V}{dt} = -p = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S,$$

$$dU = \frac{\partial a}{\partial t} dS + \frac{\partial p_V}{\partial t} dV = T dS - p dV.$$

Ако, са друге стране, U као функција од S и V даје

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S dV,$$

видимо да је једначина, што одговара промењљивој t, закључак претходних једначина. Према томе једначину

$$dU = TdS - pdV$$

можемо сматрати као диференцијалну једначину између величина

$$U,\ T,\ p,\ S,\ V.$$

Ако сад поставимо једначину, која дефинише топлоту тела, у облику

$$\Delta Q = dU + dW,$$

где је ΔQ количина топлоте при прелазу из једног стања у друго, dU диференцијал унутрашње енергије, dW елемент спољашње енергије, рецимо, у облику pdV, онда претходну једначину можемо сматрати као први закон термодинамике, закон одржавања енергије. Прираштај топлоте смо означили са ΔQ, јер, као што је познато, та величина не претставља тотални диференцијал.

Ако упоредимо једначину

$$\Delta Q = dU + dW = dU + pdV$$

са једначином

$$dU = TdS - pdV,$$

изводимо закључак

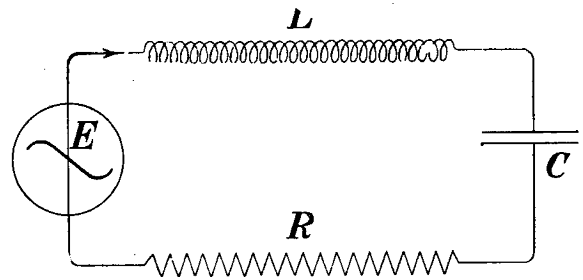
$$\frac{\Delta Q}{T} = dS.$$

Како је dS тотални диференцијал, количник $\frac{\Delta Q}{T}$ је такође тотални диференцијал и према томе $\frac{1}{T}$ можемо сматрати као интеграциони фактор за елемент ΔQ претстављен, рецимо, у облику линеарне диференцијалне форме од два члана. Према Carathéodory-у тај математички факт да се $\frac{1}{T}$ јавља као интеграциони фактор елемента топлоте ΔQ изражава други закон термодинамике или, кратко, закон ентропије.

Овим завршавам овај мали екскурс у област теориске термодинамике. Имао сам за циљ да покажем пример феноменолошког тумачења и термичких појава које имају своје нарочите особености.

5.4. Случај електродинамике

Узмимо још и пример из електродинамике и протумачимо са феноменолошког гледишта познату појаву промене струје у колу у којем се налазе — самоиндукција, омски отпор, кондензатор и генератор (сл. 3).



Сл. 3

За опис ове појаве уведимо неколико величина, при чему уз ознаку сваке величине, коју уводимо, ставимо у загради и његову димензију у апсолутном систему: M — маса, L — дужина, T — време.

Количину електрицитета означимо са $Q\,[M^{\frac{1}{2}}\,L^{\frac{3}{2}}\,T^{-1}]$, самоиндукцију са $L\,[L^{-1}\,T^{2}]$, омски отпор са $R\,[L^{-1}\,T]$, капацитет са $C\,[L]$, електромоторну силу са $E\,[M^{\frac{1}{2}}\,L^{\frac{1}{2}}\,T^{-1}]$, јачину струје са $I\ [M^{\frac{1}{2}}\,L^{\frac{3}{2}}\,T^{-2}]$.

Излагање проучавања појаве можемо знатно скратити на основу познате аналогије између промене струје, рецимо у простом колу и кретања једне материјалне тачке (види, напр., [43] 5). У тој аналогији самоиндукцији L одговара инертна маса материјалне тачке, количини електрицитета Q — померање тачке, јачини струје $I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}$ — брзина тачке. Према томе са феноменолошког гледишта у тој аналогији диференцијал dQ, диференцијал количине електрицитета, игра исту основну улогу у оцењивању електричних појава коју у механичким појавама игра диференцијал померања.

Саставимо сад израз за диференцијално стање наше електричне појаве, тј. израз за форму Φ_s. За то стање уводимо прво величину

$$p_Q = L\dot{Q},$$

аналогну импулсу односно количини кретања и затим израз

$$\Phi_s = p_Q\, dQ + 0 \cdot dp_Q.$$

који одговара основној променљивој Q и диференцијалу коефицијента код dQ како то тражи Пфафов начин формирања израза за диференцијално стање.

Уведени израз има димензију $[p_Q\, dQ] = ML^2 T^{-1}$. Ту исту димензију треба да имају сви чланови одговарајуће Пфафове форме, а према томе и сама форма.

Написани збир је кинетички део Пфафове форме. Диференцијал dQ одговара оном елементу количине електрицитета који се појављује у колу због елементарне акције за време dt.

Саставимо сад форму акције за наше електрично коло. Коефицијент код dt у тој форми има ове делове:

1. наслеђену акцију у облику

$$-p_Q\, \dot{Q} = -\frac{1}{L}\, p_Q^2,$$

2. члан аналоган живој сили, као први део у Hamilton-овом дејству,

$$\frac{1}{2}\, L\dot{Q}^2 = \frac{1}{2}\, L \cdot p_Q^2 \cdot L^{-2} = \frac{1}{2}\, \frac{1}{L}\, p_Q^2.$$

Ова два члана дају заједно

$$-\frac{1}{2}\, \frac{1}{L}\, p_Q^2.$$

Остали чланови у изразу за акцију одговарају оним узроцима, који активно и то, тако рећи, споља мењају стање система, и чију улогу у механици играју силе. При томе треба да узимамо не саме силе, већ њихово дејство за промену у датом случају на елементу dQ. За оне узроке који дејствују у колу и немају потенцијални карактер, тј. не постоји за њих одговарајућа функција силе, треба коефицијент уз dt ставити у облику интеграла. Пошто у нашем колу постоји омски отпор, кондензатор и генератор електро-

моторне силе, онда према законима електродинамике одговарају тим узроцима промене струје ове величине: $-R\,\frac{dQ}{dt}$ за омски отпор, $-\frac{1}{C}\, Q$ за струју померања због кондензатора и најзад E за електромоторну силу коју сматрамо као дату функцију времена. На тај начин у коефицијент за акцију треба да уђу ови чланови:

$$-\int_{A_0}^{A}\left(R\,\frac{dQ}{dt}\right) dQ, \quad -\frac{1}{C}\int_{A_0}^{A} Q\, dQ, \quad \int_{A_0}^{A} E\,(t)\, dQ,$$

где смо са A_0 означили неку константну границу, а са A границу која одговара вредности Q за оно стање за које проучавамо промену нашег диференцијалног стања. Други члан има потенцијални карактер и њега бисмо могли написати у облику

$$-\frac{1}{2C}\,(Q^2 - Q_0^2).$$

Помоћу добивених израза Пфафова форма за промену струје у нашем електричном колу може се изразити овако

$$\Phi = p_Q\, dQ + 0 \cdot dp_Q +$$

$$+\left[-\frac{1}{2}\,\frac{1}{L}\, p_Q^2 - \int_{A_0}^{A}\left(R\,\frac{dQ}{dt}\right) dQ - \frac{1}{2C}\,(Q^2 - Q_0^2) + \int_{A_0}^{A} E\,(t)\, dQ\right] dt.$$

Из овог израза форме према феноменолошком принципу да је диференцијал сваког коефицијента код форме стања једнак градијенту за одговарајућу променљиву од акционог дела имамо пре свега ову једначину

$$dp_Q = \left[-R\,\frac{dQ}{dt} - \frac{1}{C}\, Q + E\,(t)\right] dt,$$

или

$$L\,\frac{d^2Q}{dt^2} + R\,\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}\, Q = E\,(t).$$

Ако и за друге коефицијенте применимо Пфафово правило формирања система једначина, за коефицијент уз dp_Q имамо ову

Пфафову једначину

$$0=dQ-\frac{1}{L}\,p_Q\,dt,$$

која утврђује уведену вредност p_Q у функцији од $\dot{Q}=I$.

Што се тиче треће једначине за променљиву t у облику

$$d\left[-\frac{1}{2}\,\frac{1}{L}\,p_Q^2-\int_{A_0}^{A}\left(R\frac{dQ}{dt}\right)dQ-\frac{1}{2C}\,(Q^2-Q_0^2)+\int_{A_0}^{A}E\,(t)\,dQ\right]=0,$$

јер остали чланови не зависе експлицитно од t, она даје

$$-\frac{1}{L}\,p_Q\,dp_Q-R\frac{dQ}{dt}\,dQ-\frac{1}{C}\,Q\,dQ+E\,(t)\,dQ=0$$

и после трансформације првог члана на $-\frac{dp_Q}{dt}\,dQ$ и скраћивања са dQ поклапа се са првом једначином за променљиву Q.

На тај начин смо добили систем од две диференцијалне једначине које можемо написати и овако

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}\,Q=E,$$

$$\frac{dQ}{dt}=I.$$

То је основни систем за проучавање читавог низа електричних појава у електротехници нарочито везаних за електричне осцилације.

При проучавању наведене појаве искористили смо аналогију између електричне и механичке појаве. Обратно, непосредна примена нашег феноменолошког принципа сама по себи поставља ту аналогију, јер тај принцип по својој природи обухвата све појаве сличне структуре у смислу састављања израза за диференцијално стање и за елементарну акцију.

ГЛАВА ШЕСТА

Опште примедбе о феноменолошком принципу

6.1. Област примена општег феноменолошког диференцијалног принципа

У претходном излагању показали смо садржај општег феноменолошког диференцијалног принципа (кратко о. ф. д. п-а) и његову везу са такозваним Пфафовим принципом. Ђ. Мушицки је у својој тези [21] проширио примену Пфафова принципа на читав низ проблема Теориске физике. Како из излагања Ђ. Мушицког, тако и из садржаја самог принципа види се да се тај принцип може применити на проблеме и многих других наука. Квантна механика, таласна механика, статистичка механика, у класичној и релативистичкој форми — све то се може повезати у феноменолошком облику са о. ф. д. п-ом.

М. Петровић је у свом великом раду [44], као и у другим својим радовима [45, 46, 47, 48], навео читав низ категорија природних појава формално повезаних математичком обрадом. У тој обради се појављују извесне аналогије како између величина помоћу којих се врши опис (дескрипција) појава, тако и између функционалних веза (механизма) које постављају спону између величина. У својим радовима М. Петровић је обухватио врло широке области природних појава, црпећи их увек из оног „бескрајног шаренила природних појава", о којим он говори у првој врсти Увода у свој основни рад о феноменологији [44]. Од оног времена, кад су изашли Петровићеви радови, прошло је много времена, времена у току којег је „математизација" природних појава ишла врло брзим и напредним корацима. Сад математичке схеме показују своју моћ у читавом низу разноврсних научних области, чак и онде где се раније тек показивала извесна тенденција само ка систематизацији факата. Такве су дисциплине — хемија, физичка хемија са огромном нужно хипертрофираном нуклеарном физиком, биологија, психологија, политичка економија, статистика, социологија са теоријом социјалних покрета и др. У све те области и ако не улазе непосредно строге математичке формулације, ипак све више продиру математичке схеме тачних логичких конструкција.

М. Петровић је у својим наведеним радовима узимао за формирање својих математичких схема диференцијалне једначине, које одговарају појединим појавама, и према форми тих једначина и улози оних фактора, који улазе у те једначине, конструисао је математички део своје феноменологије. О. ф. д. п., о којем се говори у овом раду, има за циљ да постави такав принцип, такав упут, који би давао могућност не само класификовати и проучити већ добивене диференцијалне једначине, већ би, обратно, давао правило за састављање самих диференцијалних једначина и то таквих које би имале „инваријантан" карактер, тј. које би одражавале природу појаве а не само математичку форму. У феноменологији М. Петровића имамо: опис појаве са увођењем одговарајућих величина, из теорије тих појава позајмљене диференцијалне једначине, стављање тих једначина у одређене математичке категорије, резултат интеграције једначина и његова анализа. О. ф. д. п. узима опис појаве са увођењем одговарајућих величина, анализира стање система и узроке који изазивају промену тог стања и на основу те анализе саставља један математички израз, па, на крају, на основу нарочитог правила, односно закона (диференцијални прираштај = градијенту), изводи диференцијалне једначине проблема и ставља их на расположење математичару. Била би заблуда мислити да о. ф. д. п. даје опште правило за проучавање свих индивидуалних појава у природи. Не, он даје само математичку схему и показује шта треба да знамо о природи појаве и о оним величинама које играју одређену улогу било у описивању стања појаве било у оној акцији која стоји у вези са промењивим током појаве. Мени изгледа да два основна елемента који улазе, као неопходна, у о. ф. д. п. — диференцијално стање и елементарна акција — то је, уопште, онај минимум, без чијег знања је уопште тешко замислити научну обраду неке природне појаве, коју желимо објаснити према узрочној вези.

Из претходног је јасно да област примена о. ф. д. п-а може бити врло широка. Како имам још и друге идеје, које бих желео разрадити, а моје године су знатно поодмакле, морам се зауставити на изложеном. Међутим, како су примене тог принципа, у облику такозваног Пфафова принципа, већ извршене од стране мојих драгих сарадника, сматрам да би сад било од користи учинити покушај примене тог принципа и у другим научним областима, а нарочито у нуклеарној физици.

У последњем броју реферативног америчког часописа [80] који је стигао по завршетку слагања ове књиге, објављен је реферат M. J. Moravczik-а (Livermore, Calif.) о дисертацији Ђ. Мушицког [21]. У том реферату наведен је потпуни садржај поменутог рада без икакве замерке и, сасвим правилно, наглашен формализам Пфафове методе: The purpose of this paper is to extend Pfaff's formalism to several dimensions and apply it on various domains of theoretical physics.

Формализам Пфафове методе увек је био предмет размишљања оних који су се бавили тим предметом. Ову примедбу додајемо како бисмо потврдили да је питање утврђивања феноменолошке основе за ту методу потпуно актуално. Зато нам се чини да нас, с једне стране, истицање стања и акције, а с друге стране, примењивање природног закона градијента, у знатној мери приближују утврђивању праве, природне, феноменолошке вредности нове методе за проучавања природних појава.

ЛИТЕРАТУРА

1 А. Билимовић — Рационална механика. II. Механика система. Глава шеста. 241—275. Београд. 1951.

2. J. F. Pfaff — Methodus generalis aequationes differentiarum partialium nec non aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quotcunque variabiles complete integrandi. Abh. Preuss. Akad. Phys. math. Kl. 1814—1815. 76—136.

3. G. Darboux — Sur le problème de Pfaff. Paris. 1882.

4. G. Prange — Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. IV. 12 u. 13. 1935. S. 754. Fussnote 412.

5. E. Schering — Hamilton-Jacobische Theorie für Kräfte, deren Mass von der Bewegung der Körper abhängt, Gött. Abh. 18 (1873), S. 3=Werke I, S. 193.

6. E. T. Whittaker — A treatise on the Analytical Dynamics of particles and rigid bodies with an introduction to the problem of three bodies. First Edition, 1904. Имао сам и копију од 1952 године четвртог изд. 1937 г. и руски превод — Аналитическая динамика. М. 1937.

7. E. v. Weber — Vorlesungen über das Pfaffsche Problem. Leipzig, 1900.

8. G. D. Birkhoff — Dynamical systems. New York. 1927. Reproduction 1947.

9. А. Билимовић — Пфафов општи принцип механике. Глас CLXXXIX. Б. 1946.

10. A. Bilimovitch — Ueber die Anwendungen der Pfaffschen Methode in der Störungstheorie. Astronomische Nachrichten. B. 273. Heft 4. Berlin, 1943.

11. А. Билимовић — Хилбертов интеграл независности и Пфафове једначине варијационог рачуна. Глас CLXXXIX. 1946.

12. — — Пфафова метода у геометриској оптици. Глас CLXXXIX. 1946.

13. — — Примена Пфафове методе на теорију подешених каноничних једначина. Глас CXC. 1948.

14. — — Пфафов израз и векторске диференцијалне једначине планетских поремећаја. Глас CXCI. 1948.

15. — — Примена Пфафове методе и векторских елемената на проблем трију тела. Глас CXCI. 1948.

16. A. Bilimovitch — Sur l'accroissement pur de la forme différentielle et son application. Publications de l'Ins. math. Tome I. 1947.

17. T. Angelitch — Sur l'application de la méthode de Pfaff dans la dynamique des fluides. Publications de l'Inst. math. T. II. 1948.

18. — — Équations fondamentales d'élasticité par la méthode de Pfaff. Publications de l'Inst. math. T. III. 1950.

19. Т. Анђелић — Примена Пфафове методе у динамици чврстог тела. Глас CXCI. 1948.

20. P. Musen — Special perturbations of the vectorial elements. The Astronomical Journal. Vol. 59. N 7. 1954, August. No 1219.

21. Ђ. Мушицки — Примена Пфафове методе у теориској физици. Зборник радова Српске академија наука. Књ. L. Математички институт. Књ. 5. Б. 1956.

22. H. Poincaré — Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. T. III. Paris. 1899. p. 414.

23. E. Cartan — Leçons sur les invariants intégraux. Paris. 1922. p. 210.

24. С. П. Фиников — Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Москва. 1948. Стр. 432.

25. A. Lichnerowicz — Les relations intégrales d'invariance et leurs applications à la dynamique. Bulletin des sciences math. Deuxième série. T. LXX. Paris, 1946.

26. F. Gallissot — Les formes extérieures en mécanique. Annales de l'Inst. Fourier. T. IV. Année 1952. Chartres. 1954.

27. — — Les formes extérieures en mécanique. Proceed. of the Intern. Congress of Math. 1954. Vol. I. p. 518—519.

28. — — Les formes extérieures et la Mécanique des milieux continus. C. R. T. 244. 1957. p. 2347—2349.

29. А. Билимовић — Рационална механика. I. Механика тачке. Друго издање. Б. 1950. II. Механика система. Б. 1951. III. Механика чврстог тела. Први део. Кинематика чврстог тела. Б. 1954.

30. — — Динамика чврстог тела. Б. 1955.

31. Т. Анђелић — Тензорски рачун. Б. 1952. Стр. 213.

32. А. Билимовичъ — Уравненія движенія для консервативныхъ системъ съ линейными интегралами. Кіевъ. 1910.

33. — — Уравненія движенія для консервативныхъ системъ и ихъ приложенія. Кіевъ. 1912.

34. А. Билимовић — О једначинама кретања нехолономног система. Глас Српске академије наука. CXXVIII. Б. 1927.

35. C. G. J. Jacobi — Vorlesungen über Dynamik. Berlin. 1884. S. 49—51.

36. H. Bruns — Ueber die Integrale des Vielkörper-Problems. Acta mathematica. 11. 1887—88. S. 25—96.

37. C. Carathéodory — Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik. Math. Ann. B. 67, S. 355. 1909.

38. — — Ueber die Bestimmung der Energie und der absoluten Temperatur mit Hilfe von reversiblen Prozessen. Berl. Ber. 1925. S. 39.

39. A. Landé — Axiomatische Begründung der Thermodynamik durch Carathéodory. Handbuch der Physik. H. Geiger und K. Scheel. B. IX. Theorien der Wärme. S. 281–400. Berlin. 1926.

40. H. Margenau and G. M. Murphy — The mathematics of physics and chemistry. Twelfth printing. N. Y. 1951. First ed. 1943.

41. H. v. Helmholtz — Crelles J. 100, 1886. S. 137, 213.

42. Encyclopädie der Math. Wiss. V_2, 4. S. 695.

43. Т. Карман и М. Био — Математические методы в инженерном деле. Перевод с английского М. Г. Шестопал под редакцией А. М. Лопшица. Издание второе. Москва. 1948. Стр. 203 и 320.

44. М. Петровић — Елементи математичке феноменологије. Б. 1911.

45. — — Аналогије између диспаратних појава. Српски Књижевник Гласник. Том. 7. Б, 1914.

46. M. Petrovitch — Le noyau d'analogie. Revue du Mois, T. 20, Paris. 1919

47. — — Mécanismes communs aux phénomènes disparates Nouvelle collection scientifique, Félix Alcan, Paris, 1921.

48. М. Петровић — Феноменолошка пресликавања. Б. 1933.

49. E. Lohr — Vektor-und Dyadenrechnung für Physiker und Techniker. Berlin. 1939. S. 273–275.

50. M. Milankovitch — Ueber die Verwendung vektorieller Bahnelemente in der Störungsrechnung. Bull. Acad. Math. Natur. (A). Sc. Math. Phys. Nr. 6. Belgrade 1939.

51. М. Миланковић — Успомене, доживљаји и сазнања после 1944 године. Српска академија наука. Посебна издања. CCXXXV. Одељење природно-математичких наука. Књ. 16. Б. 1957. Стр. 33.

52. И. В. Мещерский — Динамика точки переменной массы. СПБ. 1897.

53. W. R. Hamilton — Lond. Phil. Trans. 1834 and 1835.

54. G. Hamel — Theoretische Mechanik. Berlin. 1949.

55. P. Appell — Les mouvements de roulement en dynamique. Avec deux notes de M. Hadamard. Scientia. №. 4. Paris. 1899.

56. П. Воронецъ — Объ уравненіях движенія для неголономныхъ системъ. Математический Сборникъ. Т. XXII.

57. — Уравненія движенія твердаго тела, катящагося безъ скольжения по неподвижной плоскости. Кіев. 1903.

58. A. Billmowitch — Die Bewegungsgleichungen konservativer Systeme mit linearen Bewegungsintegralen. Mathematische Annalen. B. 69. Leipzig. 1910.

59. Th. Pöschl — Sur les équations canoniques des systèmes non holonomes. C. R. T. 156. Paris. 1913.

60. С. А. Чаплыгин — К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе. Математический сборник. Т. XXIII. Москва. 1911. = Собрание сочинений. Т. I. Стр. 15. Москва. 1948.

61. A. Billmowitch — Sur les transformations canoniques des équations du mouvement d'un système non holonome. C. R. T. 158. Paris. 1914.

62. Luigi Marchetti — Riducione alla forma canonica delle equazioni del moto di sistemi anolonomi. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa. Vol. X, Serie II, fasc. III-IV. 1941.

63. A. Bilimovitch — Sur la transformation canonique des équations du mouvement d'un système non holonome. Publications de l'Inst. Math. de l'Académie Serbe des Sciences. T. II. Belgrade. 1948.

64. S. D. Poisson — Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides (1829). J. Ecole Polyt. 13, cahier 20, 1–174. Paris. 1831.

65. C. Truesdell — The Kinematics of Vorticity. Bloomington. 1954.

66. E. T. Whittaker —Prinzipien der Störungstheorie und allgemeine Theorie der Bahnkurven in dynamischen Problemen. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. VI B. 2. T. 512 S. 1912.

67. J. W. Gibbs — Determination of elliptic orbits from three complete observation, Papers 2, p. 118.

68. Gibbs-Wilson — Vectoranalysis (1902), p. 135.

69. G. Jaumann — Theorie der Gravitation. Aus den Sitzungsberichten der k. Akademie der Wissenschaften in Wien. Bd. CXX. Abt. IIa. Jänner 1912.

70. А. Билимовић — О кретању материјалног система, који мало отступа од чврстог тела. Глас. Књ. CXLVI. 1932.

71. A. Bilimovitch — Sur le mouvement d'un système matériel peu différent d'un corps solide. Ann. Soc. Polon. math. 10. 1932.

72. А. Билимовић — О могућности секуларних померања Земљиног пола. Глас. Књ. CLII. 1932.

73. A. Bilimovitch — Zum Mechanismus der Polverlagerungen. Publications mathématiques de l'Université de Belgrade. T. II. 1933.

74. — — Sur la possibilité du mouvement séculaire du pôle terrestre. Bulletin de l'Académie des sciences mathématiques et naturelles. A. N. I. Belgrade. 1933.

75. — — Ueber ein Modell zur Demonstration der säkularen Polverlagerungen. Public. Math. T. III. 1934.

76. А. Билимовић — О ротацији Земље као система са шест степена слободе. Глас. CLXIII. 1934.

77. A. Bilimovitch — Ueber die Drehung der Erde, diese als ein System von sechs Freiheitsgraden aufgefasst. Bulletin. N. 2. 1939.

78. Ф. Р. Гантмахер и Л. М. Левин — Об уравнениях движения ракеты. Прикладная математика и механика. Том XI, 1947. Стр. 301–312.

79. J. Barkley Rosser, R. R. Newton, George L. Gross. Mathematical Theory of Rocket flight. New York. 1947.

80. Math. Rew. Vol. 19. N. 6 p. 695.

RÉSUMÉ

Remarques historiques sur le principe de Pfaff. Interprétations phénoménologiques du principe de Pfaff dans la mécanique générale du système, du corps solide, des fluides et du corps elastique, puis dans la mécanique des masses variables et dans la physique, notamment dans l'optique, dans la thermodynamique et dans l'électrodynamique. Remarques générales sur un principe général différentiel phénoménologique et sur le domaine de ses applications.

РЕЗЮМЕ

В первой главе настоящей работы приводится краткая история приложений к механике теории линейной дифференциальной формы и связанных с ней дифференциальных уравнений. Основателем этой теории надо считать математика Пфаффа. Рассмотрение роли, которую может играть в приложениях теория как линейной формы, так и алгоритма получения соответствующих дифференциальных уравнений, показывает, что на основании этой теории может быть установлен принцип, его называем **принципом Пфаффа**, который может служить не только в механике на ряду с другими общими принципами механики, но и в различных областях других наук, где требуется установить связь между изменением какого нибудь явления и факторами, которые вызывают это изменение. В связи с этим в работе подчеркивается феноменологическое толкование как дифференциальной формы, так и ее алгоритма; форма разделяется на две части: на форму дифференциального состояния и на форму действия, акции, а алгоритм, в главной своей части, ставится в связь с естественным **законом градиента**. В такой обобщенной и феноменологически истолкованной форме принцип Пфаффа обращается в **общий феноменологический дифференциальный принцип**, развитие приложений которого и составляет содержание настоящей монографии.

Вторая глава посвящена приложениям к механике, третья — приложениям к небесной механике, четвертая — двум вопросам из механики точки и твердого тела переменной массы, пятая — трем вопросам физики: из геометрической оптики, из термодинамики и из электродинамики. В последней главе приведены некоторые замечания общего характера.