Универзитет у Београду

Математички факултет

Мастер рад

Примери из динамике и оптике у настави математике за средњу школу

Бранка Збиљић

Ментор: доцент др Срђан Н. Вукмировић

Комисија: доцент др Мирослава Антић,
ванредни професор др Дејан Урошевић

Београд, 2015. године

Садржај:

Глава 1

Увод

Свима нам је добро познато да је ученике потребно заинтересовати за оно што изучавају, нарочито ако они имају предубеђење да се ради о тешком предмету. Како њихово интересовање за дати предмет битно зависи, између осталог, и од индивидуалних способности, научно-стручне и педагошке спреме, као и људских квалитета наставника, то нама, будућим наставницима, треба да буде јасно да морамо бити активни учесници у настави. При томе не смемо заборавити да исто захтевамо и од својих ученика.

Први циљ овог мастер рада јесте давање практичних примера из физике који се повезују са градивом из математике. Успешно извођење таквог наставног часа и успешна интерпретација наставне теме (и уопште наставне целине) код ученика утиче на развијање позитивног односа према математици и на уважавање математике као подручја људске делатности.

У наставним плановима и програмима математике и физике појављују се велике неусклађености у обради наставних садржаја. Дакле, приликом обраде наставници физике често користе математички апарат који је непознат ученицима, али углавном поједностављују начин обраде и долазак до решења задатака.

Други циљ овог рада јесте да се укаже на потребу усклађивања садржаја предмета математике и физике. Интегрисан приступ у настави ће наставу учинити квалитетнијом и занимљивијом, како ученицима, тако и наставницима. У раду је, у неколико примера, приказано како се градиво које се изучава на часовима математике понекад може много боље разумети уколико се изучава на примерима из физике.

Неусклађеност у наставним програмима физике и математике представља проблем који доводи до недовољног разумевања одређених појава у физици. Интегрисани приступ, који ће помоћи у решавању овог проблема, није лако остварити у свим наставним јединицама. Међутим, тамо где је то могуће, треба тежити ка што већем повезивању знања. Примери које наводим у раду се могу користити и на часовима математике и на часовима физике.

У овом уводном делу дискутујемо повезаност математике и физике као и прожимање ових наука у процесу наставе. Такође, спомињемо научнике као најважније личности ових двеју наука.

У другој глави дискутујемо неусклађеност наставних програма кроз дефинисање тренутне брзине и убрзања и кроз примере са квадратном једначином.

Треће поглавље је посвећено примерима из динамике. Помоћу одговарајућег математичког апарата детаљно смо образложили примере векторског рачуна, кретања тела по косој равни, косог хица, равномерно кружног кретања, центрипеталног убрзања, рада и снаге.

У четвртом поглављу, уз помоћ бесконачног реда и лимеса низа, изводимо формулу за момент инерције штапа.

Тема петог поглавља је геометријска оптика. Дискутујемо о равном и сферном огледалу као и о њиховим једначинама.

Шесто поглавље је критика наставних програма математике и физике, као и сугестија шта предузети како би се настава математике унапредила и повезала са осталим наукама.

Захвалила бих се свим члановима комисије на читању рукописа и на конструктивним сугестијама које су овај рад учиниле бољим. Поред тога захваљујем се драгом Драгану на стрпљењу, пријатељима на подршци, а родитељима и брату на свему.

1.1 Повезаност математике и физике

У развоју математичких идеја значајан подстицај увек је био проналажење математичких структура које су прецизно описивале понашање физичких појава.

Сматра се да је први физички закон, изражен математички пре две и по хиљаде година, било Питагорино откриће да се окидањем напетих жица добију складни тонови ако је однос дужина жица једнак односу малих целих бројева (скраћењем жице на половину тон се повећава за октаву, скраћивањем на 2/3 повећава за квинту, ...). Тек много касније откривено је да ти односи два мала цела броја заправо показују односе фреквенција.

Највећи научни процват, 3. век пре н.е., је епоха у којој је живео Архимед [1]. Сматра се да се Архимед прославио конструисањем разноврсних ратних машина. У римским хроникама су остали забележени катапулти који су бацали камење. Помињу се и друге справе па чак и, наводно, паљење римских бродова сунчевим зрацима помоћу фокусираних огледала. Његова слава је почивала на његовим проналасцима у механици и ратној технологији, а не на математичким радовима због којих га данас славимо.

У истраживању природних појава физичари користе законе природе, коју су у данашњем облику формулисали Роџер Бејкон[2] у 13. веку и Галилео Галилеј[3] почетком 17. века. Ти закони потичу још од Сократа[4] који је истраживао магнетске појаве. Суштина закона природе јесу следећи кораци: експеримент и посматрање природних појава на основу којих научник ствара поједностављену слику изражену математичким језиком, затим се израчунати резултати упоређују с резултатима мерења и зависно од слагања са мерењима, теоријски модел се прихвата или одбацује и тражи боље решење. Успешан модел предвиђа и својства која дотад нису мерена и на основу претпоставки врше се нови експерименти. И тако се круг затвара.

До 20. века овај се приступ примењивао углавном у физици, а затим све се више примењује и у другим природним наукама. На почетку је исти физичар радио и експеримент и теоријски модел и рачунао (на пример Галилеј и Њутн[5]). Због све већег обима и сложености, дошло је до поделе посла: већ у 20. веку експерименте претежно изводе експериментални физичари, а теорију и прорачуне теоријски физичари (на пример Ајнштајн[6] и Бор[7]).

---

[1] Αρχιμηδης (287 п.н.е.-212 п.н.е.) грчки математичар, физичар и астроном
[2] Roger Bacon(1214-1294) енглески филозоф
[3] Galileo Galilei (1564-1642) италијански астроном, математичар, физичар и филозоф
[4] Σωκράτης (470 п.н.е.-399 п.н.е.) грчки филозоф
[5] Isaac Newton (1643-1727) енглески физичар, математичар, астроном, алхемичар и филозоф
[6] Albert Einstein (1879-1955) немачки теоријски физичар

Теоријска истраживања која користе језик математике, омогућују претпоставке резултата експеримената пре него што они буду спроведени и често упућује на смер у којем треба вршити даље експерименте. Многи физичари сматрају да заправо нема разлога очекивати да је овај приступ уопште могућ, али у стварности често даје резултате који са великом прецизношћу предвиђају и репродукују резултате мерења.

Већ је у зачецима модерне физике Галилеј утврдио да математика представља природан језик физике. Све до почетка 20. века заправо није било велике разлике између теоријске физике и математике. Неки од највећих научника тог доба: Њутн, Лаплас[8], Лежандр[9], Хамилтон[10], Гаус[11], Фурије[12]... били су и физичари и математичари. Математика је пружила окосницу и за две велике научне револуције које су обележиле физику 20. века: општу теорију релативитета и квантну механику.

Пре више од педесет година нобеловац Еуген Вигнер[13] је, у свом раду *О несхватљивој делотворности математике у природним наукама*, указао на загонетку огромне употребљивости и корисности математике у опису природних појава, за коју заправо не постоји разумљиво објашњење. Такође је интригантно да су у природним законима често реализована она решења која су уједно и математички најелегантнија. С друге стране, тајновитост успеха примене математичких концепата поставља питање јединствености наших физичких теорија.

1.2 Важније личности математике и физике

Галилео Галилеј (1564-1642)

Италијански физичар и математичар. Зачетник је развоја механике (дефинисао брзину, убрзање, поставио Принцип релативности, закон инерције, законе убрзаног кретања и слободног падања тела). Увео је експеримент у физику (познати су његови експерименти на Косом торњу у Пизи). Конструисао је више телескопа помоћу којих је дошао до значајних астрономских открића. Био је један од највећих бораца за

[7] Niels Henrik David Bohr (1855-1962) дански физичар
[8] Pierre-Simon, markiz de Laplace (1749-1827) француски математичар и астроном
[9] Adrien-Marie Legendre (1752-1833) француски математичар
[10] William Rowan Hamilton (1805-1865) ирски математичар, физичар и астроном
[11] Johann Carl Friedrich Gauß (1777-1855) немачки математичар
[12] Joseph Fourier (1768-1830) француски математичар и физичар
[13] Eugene Paul Wigner (1902-1995) мађарски и амерички теоријски физичар и математичар

Коперникову теорију о кретању планета око Сунца; било је то у супротности са учењем католичке цркве, па је Галилеј последње године живота провео у кућном притвору.

"Природа је огромна књига у којој је написана наука . Она је стално отворена, пред нашим очима, али је човек не може разумети уколико претходно не научи језик и слова којима је написана. Написана је језиком математике, а њена су слова троуглови, кружнице и друге математичке фигуре ."

Исак Њутн (1643-1727)

Енглески физичар и математичар, највећи научник XVII и XVIII века, најзначајније име у класичној физици и једно од најзначајнијих у физици и математици уопште. У књизи *Математички принципи природне филозофије* објаснио је појмове механике (маса, количина кретања, сила, центрипетална сила) и формулисао три основна закона класичне механике. Један од његових најзначајнијих доприноса науци је закон гравитације, а поставио је и закон хлађења, закон вискозности, открио дисперзију светлости...

Врло млад је почео да ради као професор на Универзитету у Кембрицу, био је млад и када је постао члан Енглеске академије наука. О томе колико је велики ум био сведочи и натпис на његовом споменику у Лондону: „Људи себи честитају што је постојао такав и толики украс људског рода“.

Речи великог математичара и физичара Исака Њутна (који је записао на крају предговора *Принципа*, свог највећег дела), а које бих и сама упутила вама читаоцима, са најдубљим уверењем да ћете разумети моје разлоге томе:

„Усрдно молим да се ово чита добронамерно и да читаоци мање траже и куде грешке које ће открити у тако тешком предмету, већ наставе новим напорима ово истраживање и са благонаклоношћу да допуњују“.

1.3 Прожимање наука у процесу наставе

Развој и промена друштвено економског живота и света око нас изазивају потребу за реформом нашег школства, како основног тако и средњошколског. Као резултат тога, доносе се нове смернице у развоју школства и планира израда нових наставних програма. Наставом природних наука, школа је дужна да олакша младим нараштајима сналажење у мноштву техничких, друштвених и природних збивања. Истакнута је потреба да се наставни програми појединих наука редукују и поједноставе, а природне науке међусобно боље повежу.

Природне науке имају велико васпитно значење јер савремено образован човек, посебно у свету чији је развој толико условљен развојем науке, мора поседовати и елементарна знања из природних наука и познавати њихову методологију. Код изучавања природних наука, теоријске садржаје треба уско повезивати с практичном применом ради успостављања квалитетног знања и разумевања.

Математика и физика су тесно повезане са напретком цивилизације и технике савременог друштва. Настава математике и физике треба допринети сазнању да математика и физика и остале природне науке чине темељ разумевања научних достигнућа човечанства. Ученике треба упућивати у свет физичких појава које они треба да схвате и уоче законитости истих.

Директан и сталан контакт ученика са природом и појавама у њој помоћи ће ученицима да открију везу и јединство теоријског и практичног знања. Најзначајнији задатак наставе је да ученика подстакне на усвајање знања о природним појавама, да код њих развије способност опажања и откривања односа, узрока и последица до извођења закључака на основу изведене анализе.

Степен и начин употребе математике у настави физике зависи првенствено од доба ученика и наставног програма математике и физике. У том смислу значајна је усклађеност наставних програма математике и физике. Повезаност математике и физике требало би да се одрази у настави математике јер физика нуди математици богат избор примера примене и разумевања садржаја. У уџбенике математике требало би унети што више задатака из подручја физике и технике. Код састављања збирки, физичари би могли математичарима препоручити такве задатке.

У настави физике готово да нема теме при обрађивању у којима се не може применити математика (мерење простора и времена, тежине и густине материје, код мерења сила и притиска у течностима и гасовима ...). Уз помоћ математичких операција и графичког представљања упоређују се резултати, из познатих израчунавају непознате величине, код неких се закона користе функције и њихово графичко прдстављање. Увек треба пред ученике постављати проблеме на такав начин који ће у њима пробудити радозналост и изазвати потребу за решавањем проблема и задатака.

Математичке методе у настави физике примењују се код:

а) одређивања физичких величина које се не могу непосредно измерити;

б) изражавања физичких закона математичким релацијама;

в) израчунавања мерних јединица и претварања физичких релација;

г) примене физичких закона у примерима из свакодневице;

д) решавања задатака.

Глава 2

Неусклађеност наставних програма математике и физике

Ако бисмо "загребали" испод површине одређених формула из физике у средњој школи, открили бисмо да иза њих стоје математичка објашњења. У бољем описивању и дефинисању елемената програма физике подразумева се математичко знање. Ту откривамо главни проблем неслагања ова два предмета. Догађа се то да би ученици морали знати математички апарат који се учи у вишим разредима средње школе како би разумели дате формуле. У наставку дајемо неке од примера.

2.1 Дефинисање тренутне брзине и убрзања

Дакле, прва наставна јединица из *Физике 1* за први разред гимназије (види [4]) је Кретање. Уводе се појмови везани за кретање и физичке величине пут, време, брзина. Један од проблема јавља се код дефинисања тренутне брзине.

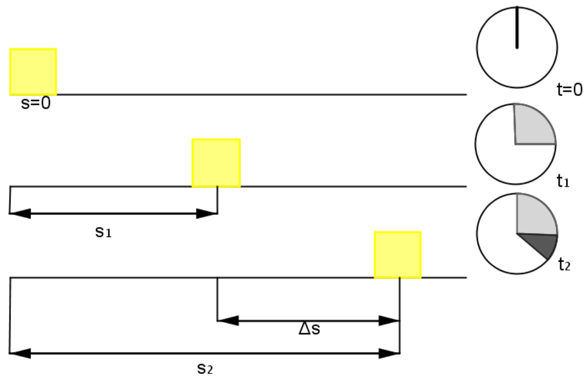
Пример 1. Тело се у почетку посматрања *(t=0)* налази у почетном положају *(s=0).* Након тренутка t_1 налази се на положају s_1, и након t_2 на положају s_2.

Средња брзина дефинише се као

$$\bar{v} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1},$$

где се $s_2 - s_1$ означава са Δs и назива интервалом пута који тело пређе у току временског интервала од тренутка t_1 до тренутка t_2. Дужину временског интервала називамо временом кретања; ако се то време означи са Δt, формула за средњу брзину је:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$



Слика 2.1.1. Графички приказ интервала пута у јединици времена

Након дефинисања средње брзине, уводи се појам тренутне брзине. Тачна дефиниција тренутне брзине подразумева коришћење математичких садржаја које ученици уче тек у 4. разреду средње школе. Реч је о појмовима граничне вредности (лимес) и диференцијалног рачуна из *Математике 4* (види [20]).

„За одређивање тренутне брзине треба посматрати померај тела у бесконачно малом временском интервалу јер је само бесконачно мали временски интервал близак једном тренутку. Ако за бесконачно мало време Δt тело направи бесконачно мали померај $\overrightarrow{\Delta r}$, тренутна брзина тела је:

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}.“$$

Дефинисање тренутне брзине и убрзања се може радити у 4. разреду гимназије као пример лимеса, наставна тема: *Функције*, наставна јединица: *Гранична вредност функције, појам и особине лимеса*.

Могло би се дефинисати да је тренутна брзина гранична вредност средње брзине када $\Delta t \to 0$, тј.

$$v = \lim_{t \to 0} \bar{v} = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

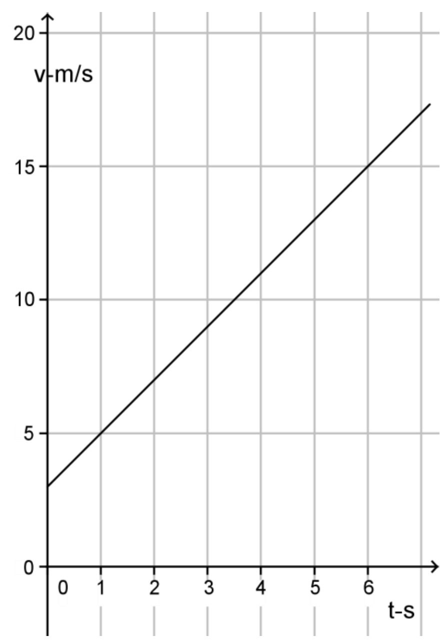
Аналогно се уводи појам средњег убрзања $\bar{a} = \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta \mathrm{t}}$ уз Δv као промену брзине, а Δt промену времена или временски интервал.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{dv}{dt} \quad \text{или} \quad a = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Из математике у 4. разреду може се радити пређени пут (оно што следи у тексту) као пример примене интеграла и веза интеграла и извода.

Такође је могуће поновити на часу физике у 4. разреду лекцију о кретању, користећи лимес и тиме додатно повезати појмове.

Пример 2. У почетном тренутку тело има брзину 3 m/s. Тело посматрамо 6 секунди и током тог кретања убрзање тела је 2 m/s^2. Потребно је нацртати дијаграм зависности брзине од времена па одредити пут који је тело прешло у првих 6 секунди кретања.



Слика 2.1.2. Дијаграм зависности брзине од времена

У почетном тренутку брзина посматраног тела је 3 m/s. Брзину за $t = 6s$ рачунамо из познате релације $v = v_0 + at$ па заменом добијамо

$$v = 3m/s \ + 2\, m/s^2\ 6s = 15m/s.$$

Пут у првих 6 секунди кретања рачунамо из релације

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

$$s = 3ms^{-1} \cdot 6s + \frac{1}{2} \cdot 2\, ms^{-2} \cdot (6s)^2 = 54m.$$

Математичко извођење ове релације следи из следећег.

Када је убрзање константно, брзина се мења равномерно. Средња брзина је једнака аритметичкој средини почетне и крајње брзине:

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2},$$

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v_0 + at}{2} = \frac{2v_0 + at}{2}.$$

Иста формула може се написати у облику:

$$\bar{v} = \frac{2v_0}{2} + \frac{at}{2}, \quad \text{тј.} \quad \bar{v} = v_0 + \frac{at}{2}.$$

Из дефиниције средње брзине следи да је пређени пут једнак производу средње брзине и протеклог времена:

$$s = \bar{v} \cdot t, \quad \text{тј.} \quad s = (v_0 + \frac{at}{2}) \cdot t,$$

даље је

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Међутим, поставља се питање можемо ли пут израчунати директно из графика зависности брзине од времена без употребе познатих релација.

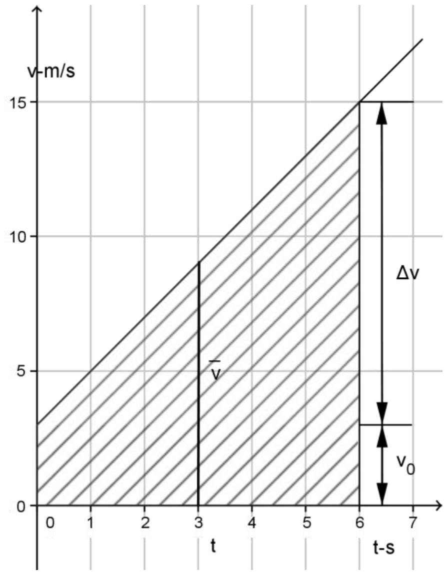
Дата формула за израчунавање средње брзине $\bar{v} = \frac{v_0+v}{2}$ је управо дужина средње линије трапеза. Потребно време је висина правоуглог трапеза, па је производ висине и средње линије површина трапеза, тј.

$$m = \frac{3 + 15}{2} = 9,$$

$$h = 6,$$

$$P = mh = 9 \cdot 6 = 54.$$

Резултат је једнак резултату добијеном преко формуле.



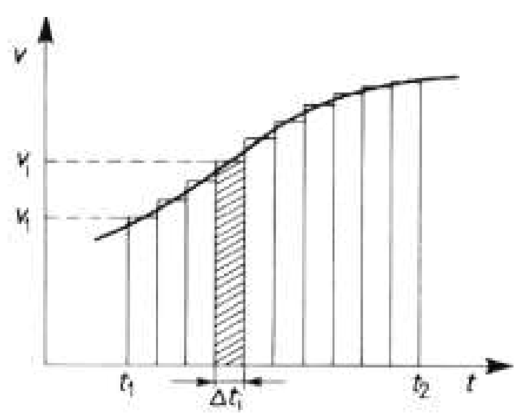
Слика 2.1.4. Површина испод графика зависности v од t

Из разлога што ученици нису упознати са интегралним рачуном у првој години, површину испод графика криве могу израчунати разлагањем површина на познате геометријске ликове и рачунати њихову површину.

Видимо, у наведеном примеру, да се пут дефинише као површина испод графика зависности брзине од времена и то без увођења сложеног математичког формализма (интегралног рачуна).

Тада се уопштено преко интеграла дефинише појам површине испод дате криве.

$$s = \sum_i v_i \Delta t = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i \bar{v}_i \, \Delta t = \int_{t1}^{t2} v dt.$$



Слика 2.1.5. Дијаграм v-t општи случај

Тачно рачунање пута при мењању брзине припада подручју диференцијалног и интегралног рачуна. То нам говори да је ово добар пример у математици када се уче интеграли. С друге стране, сугестија је да се у четвртој години у градиву физике ови појмови поново обраде кроз призму диференцијалног рачуна.

Решење овог промера урадићемо и помоћу интеграла и аналитичке геометрије.

Са графика зависности v од t узимамо кординате почетне и крајње тачке:

$$A = (0,3), B = (6,15).$$

Једначину праве одређеном тачкама A и B добијамо применом формуле за једначину праве кроз две тачке која гласи $AB\colon y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$, даље следи

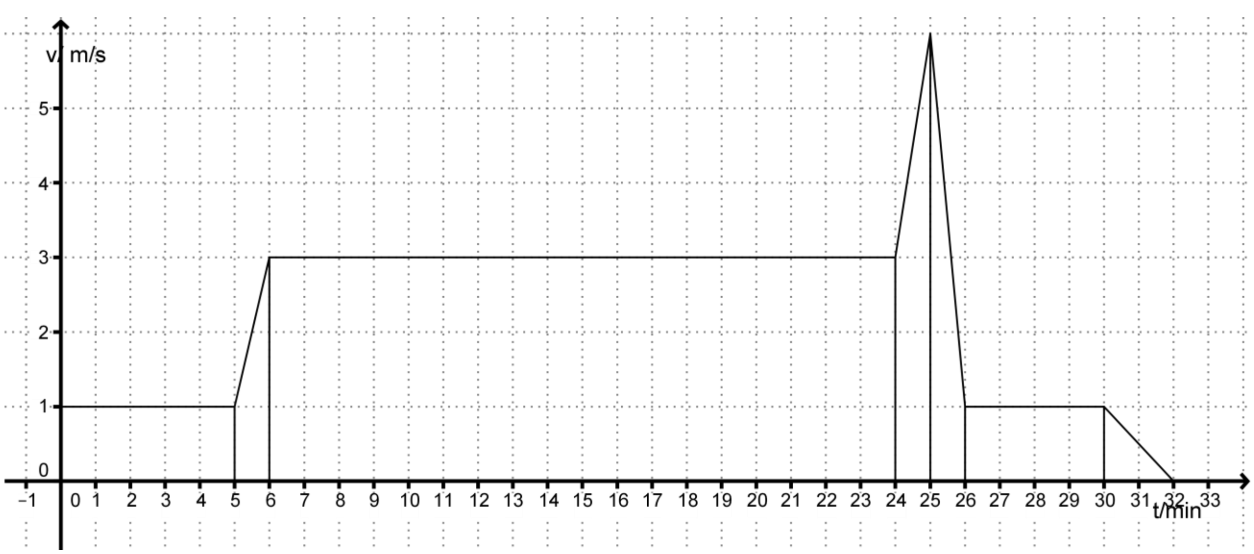
$$AB\colon \quad y - 15 = \frac{15-3}{6-0}(x-6),$$

$$\text{AB:} \quad y = 2x + 3.$$

Применом интеграла добијамо решење:

$$s = \int_0^6 (2x+3)dx = 2\frac{x^2}{2}|_0^6 + 3x|_0^6 = 36 + 18 = 54m.$$

Пример 3. Дечак се спрема за Београдски полумаратон. Његов први тренинг је приказан на графику зависности брзина од времена. Израчунати колико је километара претрчао дечак?



Слика 2.1.6. Графички приказ дечаковог тренинга (v-t)

Најпре је потребно да податке са осе која представља време из минута претворити у секунде како бисмо усагласили јединице са јединицом за брзину ($1\min = 60s$).

Пут који је дечак претрчао се рачуна као површина испод криве на графику. Да бисмо лакше рачунали разложимо површину на више мањих површина које знамо да израчунамо (површина троугла, правоугаоника и трапеза).

$$P_1 = 300s \cdot \frac{1m}{s} = 300m.$$

На сличан начин рачунамо и остале површине ($P_2, P_3 \ldots, P_7$), а пут који је дечак прешао једнак је збиру тих површина.

$$s = P_1 + P_2 + \ldots . + P_6$$

$$s = 4440\ m = 4{,}44km.$$

2.2 Задаци са квадратном једначином

Проблем решавања задатака у којима се појављује квадратна једначина је најчешће једначина облика $ax^2 = b$ који је лако решити једноставним кореновањем. Наставник тада истиче да се добију два решења од којих негативно, понекад, одбацујемо јер нема физичког значаја. Уколико се ученицима та чињеница прећути и једноставно запише само једно решење, може доћи до збуњивања ученика јер ће они у 2. разреду из математике научити да квадратна једначина има два решења.

Нешто је већи проблем када једначина нема једноставни облик већ општи облик

$$ax^2 + \mathrm{b}x + c = 0,$$

па се ученик наводи како да реши дату једначину растављањем средњег фактора или увођењем математичке релације за решавање квадратне једначине.

Следећим примерима показаћу како је важно добро анализирати решења једначине унутар задатка из физике.

Пример 4. Аутомобил креће из стања мировања уз стално убрзање од 1,9 m/s^2. За које ће време прећи растојање од 240 метара?

Из задатка уочавамо да је реч о убрзаном кретању код којег је позната релација за рачунање пута $s = \frac{1}{2}at^2$. Будући да се у задатку тражи време, изразимо га као $t^2 = \frac{2s}{a}$. Видимо да је реч о раније наведеном облику квадратне једначине који решавамо кореновањем и добијемо

$$t_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2s}{a}}.$$

Код решавања задатака у физици нећемо писати $\pm$ већ ћемо се усресредити само на позитивно решење.

Наставник у расправи са ученицима треба доћи до закључка да се негативно решење одбацује јер негативо време нема смисла у овом примеру. Дакле, t = 15,89s, односно аутомобил ће прећи 240 метара уз стално убрзање од 1,9 m/s^2 за 15,89s.

У следећем примеру видећемо да ће оба решења квадратне једначине времена бити позитивна, али ћемо анализом једно одбацити.

Пример 5. Пустимо да тело падне са непознате висине. У последњој секунди тело је прешло половину свог пута. Са које је висине тело падало?

У последњој секунди тело је прешло половину пута, а у преосталих $(t-1)$ секунди такође половину пута, односно *s / 2*.

Пут код слободног пада рачунамо по формули

$$s = \frac{g}{2}t^2,$$

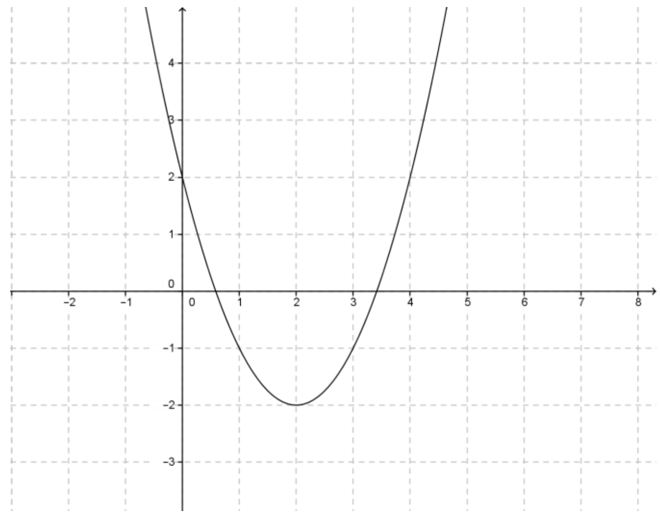
односно

$$\frac{s}{2} = \frac{g}{2}(t-1)^2,$$

где је $g -$ убрзање гравитације.

Ако заменимо услове из задатка добијемо $\frac{g}{4}t^2 = \frac{g}{2}(t-1)^2$. Након сређивања добијемо квадратну једначину за време у облику $t^2 - 4t + 2 = 0$. Решавањем добијемо следеће вредности:

$$t_1 = 3{,}41s \quad \text{и} \quad t_2 = 0{,}59s.$$



Слика 2.2.1 Графички приказ решења квадратне једначине

Оба су решења позитивна па се поставља питање има ли задатак два решења. Потребно је анализирати решења и видети да ли оба имају смисла.

Из самог услова задатка да је тело у задњој секунди прешло половину пута следи закључак да време мора бити сигурно веће од 1s. Дакле, иако је друго решење позитивно, одбацујемо га јер не задовољава услов задатка. Једино решење задатка је $t_1 = 3{,}41s$.

Рачунамо висину с којег је тело пало по релацији за пут и закључујемо да за $t_1 = 3{,}41s$ падне са висине од $x = 57{,}04\,m$ уз услов да је у задњој секунди прешло половину пута.

У овом примеру је коришћен поступак решавања задатака који би требало да се што чешће користити:

а) у првом кораку смо испитали услове задатка, нацртали слику која нам графички предочава решење задатка;

б) у другом кораку смо поставили задатак у алгебарском облику не уврштавајући вредности физичких величина. У случају сложенијих система једначина, могуће је олакшати проблем решавањем помоћних вредности које поједностављују једначине када их уврстимо;

в) у трећем кораку израчунавамо тражену величину пазећи да су све задате вредности у истом систему мерних јединица.

Глава 3

Динамика и тригонометрија

Тригонометрија има огромну улогу у свим подврстама физике. Светлост, звук, радио таласи, таласи из микроталасне пећнице, електромагнетни таласи, сви они се мере и читају у виду графика преко тригонометријских функција као што су синус и косинус. Тригонометрију користимо у физици за разлагање силе по хоризонталној и вертикалној компоненти, за израчунавање одређених величина применом дефиниција тригонометријских функција, за израчунавање углова троугла итд.

3.1 Векторски рачун

Већ су се у основној школи ученици упознали с појмом вектора, са операцијама сабирања и одузимања вектора на правцу. У средњој школи ученици се упознају и са осталим случајевима.

Проблем се појављује када одређујемо интензитет збира два вектора. Случај је једноставан када се вектори сила налазе под правим углом па се износ добије коришћењем Питагорине теореме, односно:

Вектори сила не морају бити под правим углом и тада је налажење тражене величине сложеније. Такав је случај размотрен у следећем примеру.

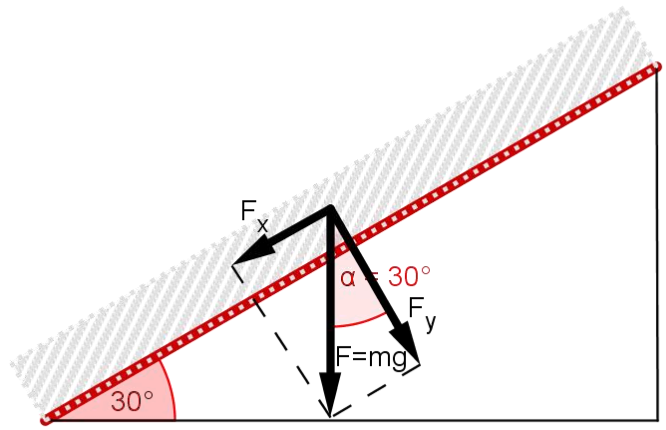
Пример 1. Кућа има кров дужине $10m$ и ширине $5m$. Пало је $50cm$ снега на кров (мерено вертикално у односу на кров), чија је густина $125kg/m^3$. Колики је притисак снега на кров:

а) ако је кров нагиба 30° у односу на хоризонталу?

б) ако је кров нагиба 60° у односу на хоризонталу?

На снег делују сила теже $F = mg$. Силу можемо разложити на вертикалну компоненту F_y и хоризонталну компоненту, силу F_x која иде низ кров.

$$F_x + F_y = F.$$



Слика 3.1.1. Растављање силе на хоризонталну у вертикалну компоненту

Сила теже делује на подлогу под углом од 30° и она има компоненту у правцу нормале на падину. Применом дефиниције косинуса угла долазимо до следеће једнакости:

$$F_y = mg \cdot \cos 30°$$

даље је,

$$F_y = mg \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Кров је површине $P = 50m^2$, а запремина снега на крову $V = 25m^3$. Даље је маса снега

$$m = \rho \cdot V = 3125kg.$$

Сила која делује нормално на кров је:

$$F_y \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3215kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \approx 26549N.$$

Знамо да је притисак количник силе која делује нормално на површину и површине на коју сила делује нормално, даље уврштавањем у формулу за израчунавање притиска, добијемо:

$$p = \frac{26549N}{50m^2} = 530{,}98Pa.$$

За други случај када је кров стрмији, сила која делује нормално биће:

$$F_y \approx \frac{1}{2} \cdot 3215kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \approx 15770N,$$

а притисак:

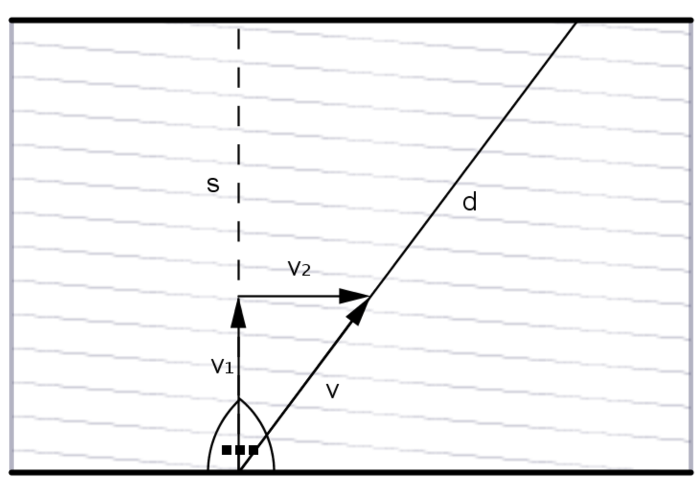
$$p = \frac{15770N}{50m^2} = 315{,}4Pa.$$

Можемо приметити да је притисак мањи ако је нагиб крова већи. То је један од разлога што се у планинским крајевима праве стрмији кровови.

Овај пример се може радити у првој години гимназије, наставна тема: *Сличност троуглова*, наставна јединица: *Тригонометријске функције оштрог угла*. Сугестија за наставу и наставника физике, када у другој години обрађују наставну јединицу: *Притисак*, јесте да нагласе примену тригонометријских функција оштрог угла.

У следећем примеру видећемо како се у решавању сличних задатака користи знање из сличности правоуглих троуглова које су ученици упознали већ у основној школи, а у средњој школи ће је тек касније користити.

Пример 2. Чамац се креће преко реке под правим углом у односу на смер њеног тока. Брзина чамца је 5 $\frac{m}{s}$, а брзина реке 2 $\frac{m}{s}$. Растојање између две обале је 200m. Колико је времена потребно да чамац пређе са једне на другу обалу?



Слика 3.1.2. Графички приказ преласка брода преко реке

Пример ћемо решити применом сличности правоуглих троуглова и применом тригонометрије.

Означимо са $v -$ брзину чамца под утицајем реке, $v_1 -$ брзина чамца и $v_2 -$ брзина реке.

За интензитете тих вектора важи

$$\frac{|v|}{|v_1|} = \frac{d}{s} \to d = \frac{|v| \cdot s}{|v_1|}.$$

Применом формуле за брзину добијамо време пловидбе $t = \frac{d}{|v|}$ и увршттавањем добијеног односа следи $t = \frac{d}{|v|} = \frac{s}{|v_1|}$. Убацивањем података из текста примера добијамо $t = 40s.$

Интересантно је што време не зависи од брзине кретања реке. Дакле, у теорији, свеједно је да ли прелазимо преко реке или језера исте дужине.

Са друге стране проблем можемо решити применом тригонометрије, тј. дефиниције тангенса угла.

Са слике видимо, $\tan\alpha = \frac{|v_2|}{|v_1|}$, па помоћу калкулатора можемо израчунати угао $\alpha = 21° \, 48'$.

Пут чамца рачунамо помоћу $\cos\alpha = \frac{s}{d}$, а време прелажења је тада $t = \frac{d}{|v|}$, где d изразимо преко s и α, а $|v|$ рачунамо помоћу Питагорине теореме примењене на векторе v_1 и v_2.

$$tg\ \alpha = \frac{|v_2|}{|v_1|} = \frac{2}{5},$$

одакле налазимо угао $\alpha = \text{arctg}(0{,}4) = 21{,}8 = 21°48'$.

$$\cos\alpha = \frac{s}{d}.$$

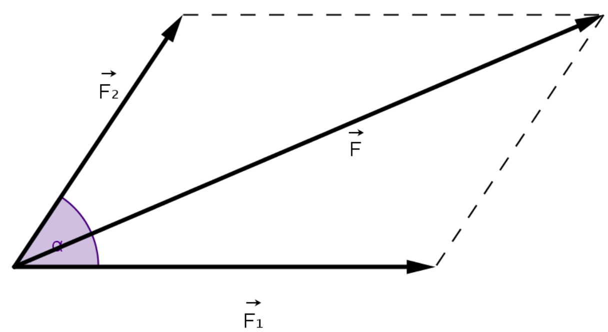
Даље рачунамо пређени пут чамца услед деловања тока реке:

$$d = \frac{s}{\cos\alpha} = \frac{200}{0{,}9285} = 215{,}4m.$$

Брзину рачунамо преко $|v|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2$ и добијамо $|v| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29} = 5{,}385$, тј. $v = 5{,}385\frac{m}{s}$. Као и време

$$t = \frac{d}{|v|} = \frac{215{,}4}{5{,}385} = 40s.$$

У задацима се понекад може користи и косинусна теорема коју ученици уче у другом разреду средње школе, због тога овакво решење треба избегавати у првој години, али ћемо и њега размотрити.



Слика 3.1.3. Збир два вектора

Најпре ћемо вектор $\vec{F}$ представити као збир вектора $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}.$$

Косинусна теорема гласи : $F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(\pi - \alpha)$, како је $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$, важи $F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha$.

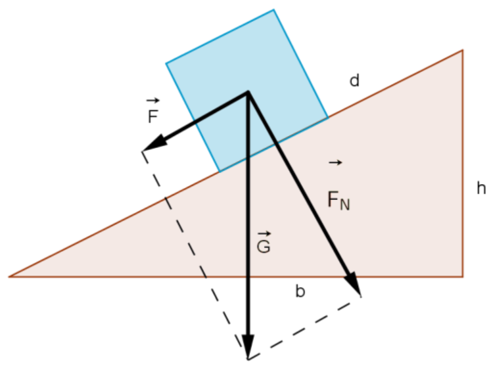
Због чињенице да чамац прелази реку под правим углом у односу на смер њеног кретања, закључујемо да је $\alpha = 90°$, а самим тим и $\cos 90° = 0$.

Следи $F^2 = F_1^2 + F_2^2$, а из ове једначине добијамо да је $v = 5{,}385\,\frac{m}{s}$.

3.2 Кретање тела по косој равни

Код задатака везаних за косину често се примењује и знање тригонометрије. Поред решавања задатака употребом тригонометрије, користи се и решавање употребом знања из сличности правоуглих троуглова. У следећем примеру видећемо оба начина решавања задатака.

Пример 3. Тело масе 0,7kg клизи без трења низ косину висине 2,9m и базе 4 m. Израчунај: а) силу која покреће тело низ косину; б) силу вертикалну на подлогу; в) убрзање кретања тела; г) време за које ће се тело спустити низ косину ?



Слика 3.2.1. Приказ кретања тела на косој равни

Означимо са d - дужина косине; h - висина косине; b - база косине; F_N - сила којом тело притиска подлогу; G - тежина тела; F- сила која тело покреће низ косину.

Из сличности троуглова важи:

$$\frac{F_N}{G} = \frac{b}{d},$$

даље је

$$F_N = G\frac{b}{d} = mg\frac{b}{d},$$

одакле се види да је $F_N < G$.

Из сличности троуглова важи:

$$\frac{F}{G} = \frac{h}{d},$$

одакле се добија

$$F = G\frac{h}{d} = mg\frac{h}{d}.$$

По Питагориној теореми следи $d^2 = h^2 + b^2$, а главни услов је $\frac{F_N}{b} = \frac{G}{d} = \frac{F}{h}$.

У примеру:

а) $\frac{F}{G} = \frac{h}{d}$, одакле се добија $F = G\frac{h}{d} = mg\frac{h}{d} = 4{,}03N$ *уз* $d^2 = h^2 + b^2 \rightarrow d = 4{,}9m$,

б) $\frac{F_N}{G} = \frac{b}{d}$, одакле се добија $F_N = G\frac{b}{d} = mg\frac{b}{d} = 5{,}61N$,

в) $a = \frac{F}{m} = 5{,}8m/s^2$,

г) $d = \frac{a}{2}t^2$, одакле се добија $t = \sqrt{\frac{2d}{a}} = 1{,}3s$.

Коришћењем тригонометрије могуће је такође доћи до релације за F_N и F.

$$\frac{F_N}{G} = \frac{b}{d} = \cos\alpha,$$

даље је

$$F_N = G\cos\alpha = mg\cos\alpha.$$

Важи

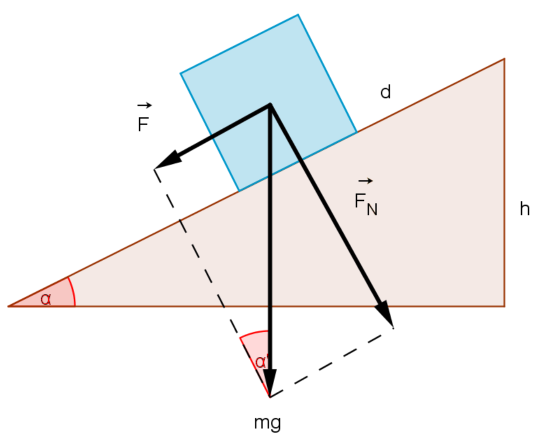
$$\frac{F}{G} = \frac{h}{d} = \sin\alpha,$$

одакле се добија

$$F = G\sin\alpha = mg\sin\alpha,$$

где су: $\sin\alpha$ = висина косине / дужина косине,

$\cos\alpha$ = база косине / дужина косине.



Слика 3.2.2. Приказ кретања тела на косини, примена сличности

Следећи пример описује случај кретања низ косину уз трење и решићемо га преко сличности и коришћењем тригонометрије.

Пример 4. Коефицијент трења између подлоге и предмета, који клизи косином нагиба 45° износи $\mu = 0{,}4$. Колики пут предмет пређе у прве две секунде након почетка клизања?

Потребно је израчунати пут из задатих величина t=2s, $\alpha = 45°, \mu = 0{,}4 \; i \; g = 9.81 m/s^2$. Из већ изведених услова имамо

$$\frac{F_1}{G} = \frac{h}{d} = \sin\alpha,$$

одакле добијамо

$$F_1 = mg\sin\alpha.$$

Важи

$$\frac{F_2}{G} = \frac{b}{d} = \cos\alpha,$$

одакле добијамо

$$F_2 = mg\cos\alpha.$$

Сила трења је $F_{tr} = \mu F_2 = \mu mg\cos\alpha$.

Сила која делује на тело и убрзава га једнака је разлици сила F_1 $и$ F_{tr}. Пишемо дакле

$$F = F_1 - F_{tr} = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Будући да је F=ma након скраћивања једначине са m добијемо израз за рачунање убрзања a=g($\sin\alpha - \mu\cos\alpha$).

Заменом убрзања у формулу за пут равномерно убрзаног кретања

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t^2$$

добијемо да је s = 8,32m.

Задатак без употребе тригонометријских функција можемо решити на следећи начин:

$$F = F_1 - F_{tr}.$$

$$\mathrm{ma} = \mathrm{mg} \cdot \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{d}} - \mu m g \cdot \frac{b}{d},$$

помножимо једначину са d,

$$\mathrm{ad} = \mathrm{gh} - \mu g b,$$

а како је $\alpha = 45°$, одакле важи да $b = h$,

$$d^2 = h^2 + b^2,$$

одакле следи $\mathrm{d} = \mathrm{h}\sqrt{2}$, даље је

$$\mathrm{ah}\sqrt{2} = gh - \mu gh.$$

Скратимо једначину са h:

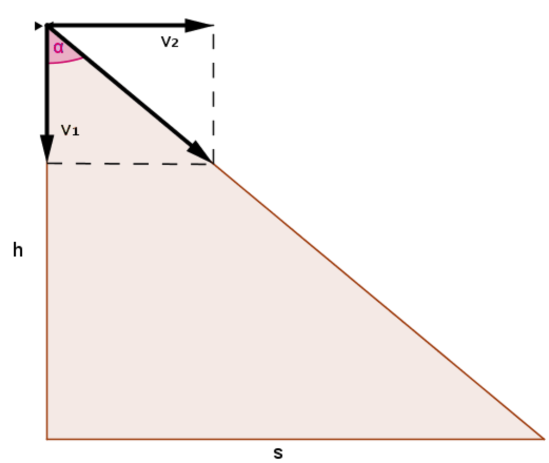
$$\mathrm{a} = \frac{g}{\sqrt{2}}(1 - \mu).$$

Овако добијени израз за убрзање уврстимо у формулу за пут

$$\mathrm{s} = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \frac{g}{\sqrt{2}} (1 - \mu) t^2$$

те уврштавањем добијемо s = 8,32m.

Пример 5. Кад нема ветра, мало семе падало би са врха дрвета сталном брзином од 35cm/s. Колико ће далеко од подножја дрвета пасти семенка ако пада с висине од 30m, а ветар дува брзином од 36 km/h у хоризонталном смеру?



Слика 3.2.3. Графички приказ пада семена са дрвета

Задате су величине v_1 = 35cm/s = 0,35m/s , h = 30m и v_2 = 36km/h = 10m/s.

1.начин: из осенченог троугла $tg\alpha = \frac{v_2}{v_1}$, а из већег $tg\alpha = \frac{s}{h}$. Дакле однос који посматрамо је

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{s}{h}.$$

Даље је

$$s = \frac{hv_2}{v_1},$$

односно s = 857m.

2.начин: Из сличности правоуглих троугла добијемо однос

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{s}{h},$$

и аналогно претходном начину следи да је

$$s = \frac{hv_2}{v_1}$$

односно s = 857m.

3.начин: Будући да је реч о сложеном кретању, користимо начело независности кретања. Из равномерног кретања нам следи да је

$$t_1 = \frac{h}{v_1}.$$

За време t_2 тело би брзином v_2 прешло пут s. Дакле,

$$t_2 = \frac{s}{v_2}.$$

Знамо да су времена једнака, добијемо однос

$$\frac{h}{v_1} = \frac{s}{v_2},$$

и заменом добијемо s= 857m.

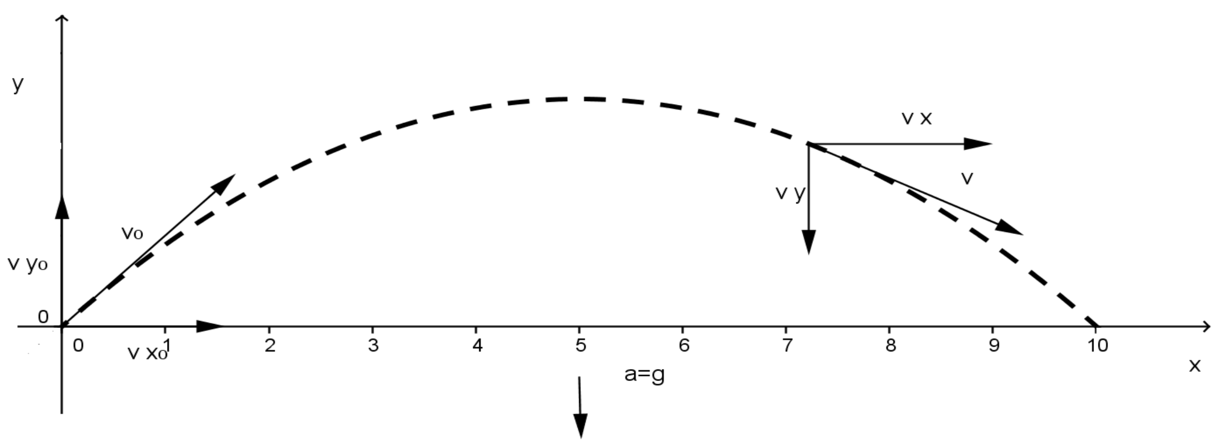
3.3 Коси хитац

У настави физике се у обрађивању вертикалног и хоризонталног хица не користи сложен математички апарат, али код сложенијег кретања знаног као коси хитац ствари се мењају. Већина задатака је таква да се користе углови 30°, 45° или 60°.

Коси хитац је сложено кретање које описујемо растављањем на кретање у хоризонталном и вертикалном смеру.

Кретање у хоризонталном смеру је равномерно праволинијско кретање брзине једнаке хоризонталној компоненти почетне брзине $v_x = v_{x0}$ где се од почетног положаја удаљи $x = v_{x0}t$.

$$v_x = v_{x0} \;=>\; v_x = v_0 \cos\alpha.$$



Слика 3.3.1.Коси хитац

Вертикално кретање се састоји од вертикалног кретања према горе и слободног пада. Брзина таквог кретања је дата са

$$v_y = v_{y0} - gt \quad => \quad v_y = v_0 \sin\alpha - gt.$$

Ако узмемо у обзир да је брзина први извод пута по времену, применом интеграла можемо добити удаљеност од почетног положаја:

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt \quad / \int dt,$$

$$\int v_y dt = \int v_0 \sin\alpha dt - \int gtdt,$$

$$v_y t = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2} + c,$$

$$y = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2 + c, \text{тј.}$$

$$y = v_{y0} t - \frac{1}{2} g t^2 + c.$$

Следи извођење једначине за домет косог хица без почетне висине када је $c = 0$. Домет косог хица одређен је хоризонталним кретањем D = v_{x0} t_{max} ,а време лета одређено ударом тела у тло, односно једначином y = 0.

$$0 = v_{y0} t_{\max} - \frac{1}{2} g t_{\max}^2 ,$$

$$t_{\max} \left(v_{y0} - \frac{1}{2} g t_{\max} \right) = 0,$$

$$t_{\max} = 0 \ \vee t_{\max} = \frac{2 v_{y0}}{g}.$$

Решење $t_{\max} = 0$ нема смисла јер је тада домет такође једнак нули, па га одбацујемо.

Домет је

$$D = \frac{2 v_{x0} v_{y0}}{g}.$$

Домет зависи од угла избачаја и највећи је када је избачен под 45°. Тада је :

$$v_{x0} = v_{y0},$$

$$v_0 = \sqrt{{v_{x0}}^2 + {v_{y0}}^2} = \sqrt{2 v_{x0}}.$$

И формула је :

$$D_{kh}(45°) = \frac{{v_0}^2}{g}.$$

Ако није реч о наведеним угловиме онда је домет теже рачунати без коришћења тригонометрије. Уопштено примењујући дефиницију синуса и косинуса добијамо:

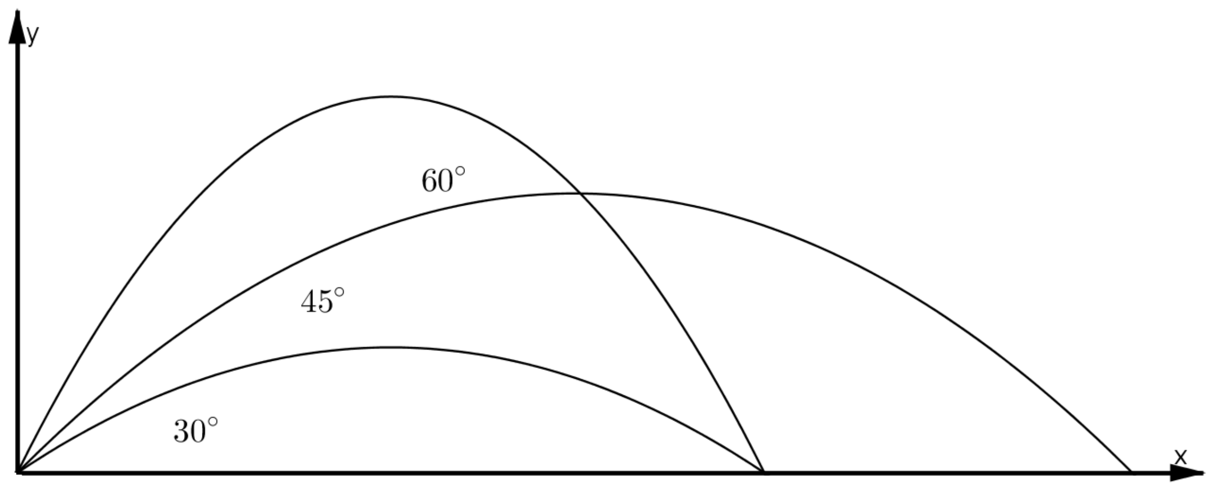
$$v_{x0} = v_0 \cos\alpha,$$

$$v_{y0} = v_0 \sin\alpha ,$$

$$D = \frac{2{v_0}^2 \ \sin\alpha \ \cos\alpha}{g},$$

а како је sin 2α = 2sinα·cosα следи формула

$$D(\alpha) = \frac{{v_0}^2 \sin 2\alpha}{g}.$$



Слика 3.3.3.Домет косог хица у зависности од угла избачаја

Величине v_o и g су константне величине тако да $D(\alpha)$ достиже максимум за максималну вредност $sin2\alpha$. Максимална вредност синуса је за угао од 90°, одавде следи:

$$2\alpha = 90°, \alpha = 45.$$

Путања кретања тела у косом хицу је парабола, па се може представити квадратном функцијом облика $f(x) = ax^2 + bx + c$. Следи извођење квадратне једначине путање кретања тела у косом хицу:

$$v_x = v_{x0} \;=>\; v_x = v_0 \cos \alpha,$$

$$x = v_{x0}\, t \;\;=>\;\; t = \frac{x}{v_{x0}} => \;t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha},$$

$$y = y_0 + \operatorname{tg} \alpha \; x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\, x^2,$$

где је $y_0 = c$ висина са које је бачено тело по путањи косог хица. Дакле, уколико једно од решења квадратне једначине буде негативно, њега одбацујемо и за домет косог хица узимамо позитивно решење. У том случају парабола сече y −осу тј. постоји висина y_0. У случају непотпуне квадратне једначине $(y_0 = 0)$, једно решење је увек $x = 0$, а друго позитивно решење је домет хица. Сви остали случајеви су искључени као могућност.

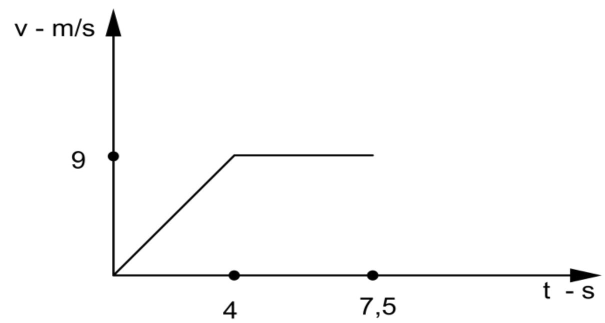
Такође, применом извода и интеграла можемо израчунати дужину путање коју пролази тело при косом хицу, као и тачку у којој достиже максималну висину $\mathrm{A} = (x_{\max}, y_{\max})$.

Пример 6. Ивана Шпановић на залетишту се спрема да изведе скок у даљ. Према подацима са графика испитати:

а) дужину залетишта;

б) да ли ће оборити светски рекорд од $7{,}52m$?

(Сматра се да скаче под углом од 45˚ јер је она професионална атлетичарка. Наравно, ови подаци нису релевантни већ узети као претпоставка.)



Слика 3.3.4. Дијаграм зависности брзине од времена на залетишту

Дужину залетишта означићемо са s и израчунати је преко површине трапеза испод криве.

Ивана константно убрзава у прве 4 секунде и то до : $v_0 = 9\frac{m}{s}$ а у преостале 3,5 секунде наставља да трчи истом брзином. Познате су нам основице трапеза као и његова висина.

$$s = \frac{7{,}5 + 3{,}5}{2} 9 = 49{,}5m.$$

Дакле, дужина залетишта је $49{,}5m$.

Како је Ивана професионални скакач, можемо претпоставити да скаче под углом од 45°. Дужина њеног скока се рачуна по формули за домет косог хица

$$D_{kh}(45°) = \frac{{v_0}^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{\left(9\frac{m}{s}\right)^2 90°}{9{,}81\ m/s^2} = 8{,}26m.$$

Ивана ће оборити светски рекорд ако трчи 32,4 km/h.

3.4 Равномерно кружно кретање

Кретање материјалне тачке по кружници брзином сталног интензитета назива се равномерно кружно кретање. Код равномерног кружног кретања и угаона брзина је константна ($\omega = const$). Интензитет брзине материјалне тачке при равномерном кружном кретању једнак је количнику пређеног пута (дужине кружног лука) и времена кретања.

Одговарајућа угаона брзина једнака је количнику описаног угла и протеклог времена кретања

$$\omega = \frac{\theta}{t}.$$

3.4.1 Центрипетално (нормално) убрзање

Нормална компонента убрзања има правац нормале на тангенту на путањи и смер ка центру кривине путање. Код кретања по кружници нормално убрзање је усмерено дуж полупречника кружнице ка њеном центру, па се зато назива радијално или центрипетално убрзање.

Интензитет центрипеталног убрзања при равномерном кружном кретању сразмеран је квадрату брзине тела, а обрнуто сразмеран полупречнику кружне путање

$$a_c = \frac{v^2}{r}.$$

При равномерном кружном кретању, интензитет центрипеталног убрзања се не мења у току кретања, али се мења његов правац. Центрипетално убрзање увек има правац полупречника кружнице.

Веза између центрипеталног убрзања, брзине, периода и фреквенције се налази из зависности $v = \omega r$.

Ако то заменимо у претходну једначину и ако знамо да је $\omega = \frac{2\pi}{r} = 2\pi f$ добијамо:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2\omega^2}{r} = \omega^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} r,$$

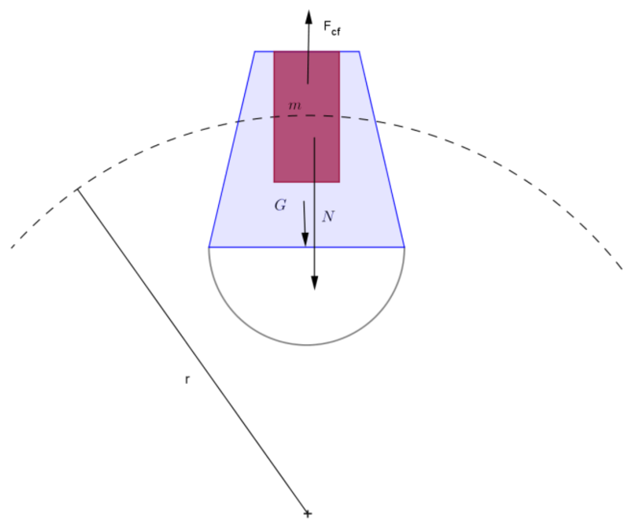
где је $f -$ фреквенција или учесталост обртања, а $T -$ период ротације, даље је:

$$a_c = 4\pi^2 f^2 r.$$

Интензитети и правци брзине и убрзања, као и координате тела, после времена које одговара једном периоду, понављају вредности.

Примери кружног кретања су многобројни: делови точка који се ротира, делићи компакт диска (ЦД) док се репродукује... Ротација месеца око земље и планете око сунца се крећу по приближно кружној путањи.

Пример 7. Професор обрће кофу у вертикалној равни у којој се налази цигла. Колико брзо треба да замахује руком да цигла остане у контакту са кофом?



Слика 3.4.1. Илустрација примера 7

Да би цигла остала у контакту са кофом потребно је да важи $ma_c \geq mg + N$, где је N сила реакције. Ова констатација је логична, јер уколико би $mg + N \geq ma_c$, убрзање земљине теже би "надјачало" центрипетално убрзање и тако одвојило циглу од кофе. При минималној могућој брзини сила реакције једнака је нули, па је:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = r\left(\frac{2\pi rad}{t}\right)^2.$$

Одавде изразимо време:

$$t = 2\pi rad\sqrt{\frac{r}{a_c}} \leq 2\pi rad\sqrt{\frac{\bar{r}}{g}}.$$

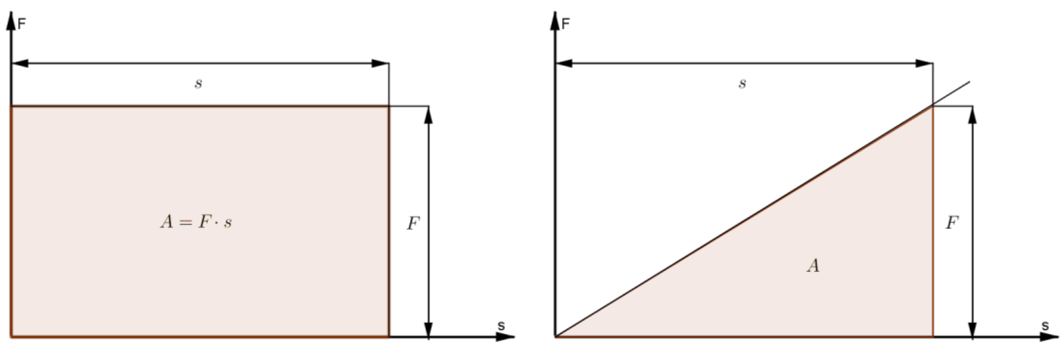
Како је $g \sim 9{,}81 ms^{-2}$ и под претпоставком да је $\bar{r} = 1m$ добијамо да је $t \leq 2s$ а брзина $v = \pi rad\,\frac{m}{s}$.

Закључујемо да професор треба да врти кофу два круга у секунди да би цигла остала у контакту са кофом.

3.5 Рад и снага

Посматрамо честицу која се креће дуж правца док на њу делује сила. Ако је честица прешла пут s уз деловање сталне силе F, а смер силе се подудара са смером кретања, обављен је рад $\mathrm{A} = Fs$.

Графички приказ рада видљив је на слици.



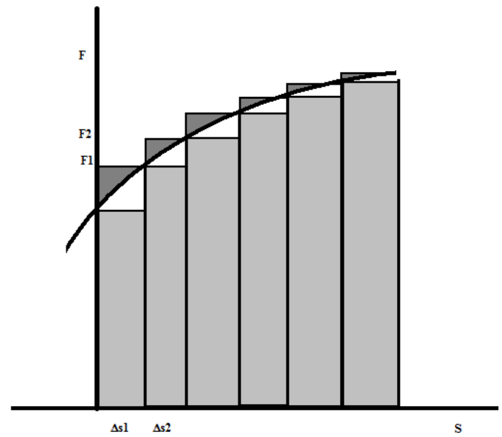
Слика 3.5.1. Графички приказ рада

Код променљиве силе (нпр. еластичне силе) $F_{el} = kx$ функција *F(x)* и рад A су приказани на слици.

Уопштено узмимо сада да на тело делује активна сила чији се интензитет дуж пута мења. Пут се може изделити на делиће дужина $\Delta s_{1,}\Delta s_{2,}\Delta s_{3,}$ ... Рад на првом делићу приближно је једнак $F_1 \Delta s_1$, где је F_1 средња вредност активне силе на путу $\Delta s_{1,}$. На другом делићу пута рад је $F_2 \Delta s_2$, на трећем $F_3 \Delta s_3$ и тако даље. Укупан рад на путу s је:

$$A = F_1 \Delta s_1 \ + F_2 \Delta s_2 \ + F_3 \Delta s_3 \ + \cdots,$$

Односно приближно је једнак површини свих правоугаоника приказаним на графику. Ако су интервали пута бесконачно мали ($\Delta s \to 0$), тада ће збир површина таквих правоугаоника заправо бити једнак површини испод криве.



Слика 3.5.2 Израчунавање рада као површине испод криве

Дакле, ако се тело креће праволинијски у истом смеру: Рад је једнак површини на графику зависности активне компоненте силе од пута.

Површина се израчунава помоћу одређеног интеграла, тако да би, наставник у четвртом разреду при обради наставне јединице: *Одеђени интеграл*, требало да спомене ученицима директну примену на *Рад* и *Снагу* коју су ученици научили још у првој години гимназије.

Снага је изражена тако да обављени рад А поделимо с временом обављања рада, односно релацијом:

$$P = \frac{\mathrm{A}}{t} = \frac{Fs}{t}.$$

У следећем примеру видећемо како решавамо задатке у којима сила и пут нису на истом правцу са и без коришћења тригонометрије.

Пример 8. Дечак вуче санке по снегом прекривеним путем равномерном брзином, помоћу ужета дужине $l= 1m$. Рука којом повлачи санке је $h=60cm$ изнад површине снега као што је видљиво на слици. Сила трења између санки и снега је $F_{tr} = 36{,}22\ N$. Одреди силу којом дечак повлачи уже и рад који дечак обави на путу $s=80m$. Да ли ће дечак тим радом да утроши енергију коју је унео једном чоколадицом од $10g$ $(57{,}4\ kcal = 239{,}4\ kJ)$?

Пошто је реч о равномерном кретању, сила трења F_{tr} се поништава са силом (компонента силе F у смеру у којем дечак вуче санке) која је приказана на слици, tj $F_{tr} = F_S$.

Дакле, коришћењем сличности правоуглих троуглова добијемо:

$$\frac{F_S}{F} = \frac{d}{l}.$$

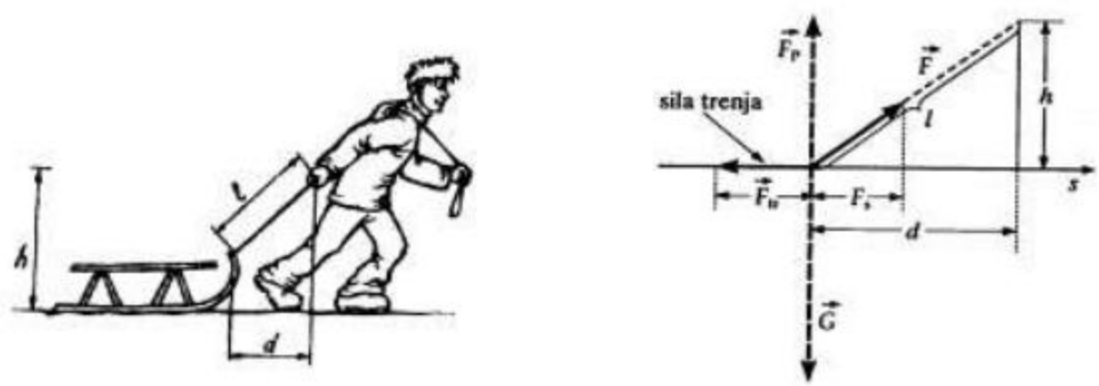
Одакле добијамо:

$$F = F_S \frac{l}{d} = 45{,}28\ N.$$

Уз коришћење да је $d = \sqrt{l^2 - h^2} = 0{,}8m$ растојање дечака од саоница, а обављени рад је једнак површини правоугаоника чије су странице $s = 80m$ и $Fs = 36{,}22N$:

$$\mathrm{A} = F_s \cdot s = 2897{,}6\ J.$$

Како је $1kJ = 1000J$, закључујемо да је дечак обавио рад $2{,}8976kJ$, и није утрошио енергију коју је унео чоколадицом.



Слика 3.5.3. Илустрација примера 8

Решавамо ли користећи тригонометријске функције, сила којом дечак повлачи уже је:

$$\frac{F_S}{F} = \cos\alpha,$$

одакле важи да је

$$F = \frac{F_S}{\cos\alpha} = 45{,}28\ N.$$

Дечак повлачи уже под углом од

$$\cos\alpha = \frac{d}{l} \Rightarrow \alpha = 36°52'12''.$$

Глава 4

Момент инерције

Момент инерције је мера инертности тела при ротационом кретању. Момент инерције је аналоган маси код транслаторног кретања.

Појаву инерције први је проучавао Галилео Галилеј. Инерцију описује I Њутнов закон, по коме свако тело задржава стање мировања или равномерног праволинијског кретања док га неко друго тело не присили да то стање промени. Инертност је својство тела да се одупире промени стања мировања или равномерног праволинијског кретања. Тела веће масе су инертнија (тромија). Маса је мера интерности тела.

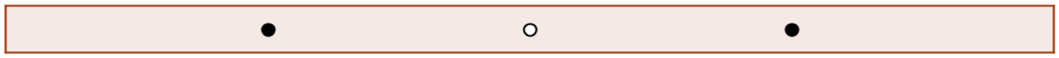
4.1 Момент инерције штапа

У случају наших средњих школа, ђаци се прво упознају са моментом инерције материјалне тачке, а за сложена тела наставник само напише формуле. Баш ово пружа могућност реалистичке математике. На почетку четврте године математичари објашњавају бесконачне редове. Зато предлажем да наставник математике, употребом бесконачног реда, докаже формулу за сопствени момент инерције штапа.

Ученици знају формулу за инерцију материјалне тачке масе, која се креће по кружној путањи полупречника r, $I = mr^2$.

Нека је дат штап дужине l и масе m. Сасвим је јасно да за одређивање њеног момента инерције не можемо узети да је сва маса сконцентрисана у тежишту. Тада би било $r = 0$, па би и момент инерције био једнак нули, што није случај.

Зато можемо представити да уместо штапа имамо две тачке са масом половине масе штапа, које су за четвртину дужине штапа удаљене од центра ротације.



Слика 4.1.1. Штап подељен на четри једнака дела

Укупан момент инерције ове две материјалне тачке је

$$I_1 = \left(\frac{1}{2}m\right)\left(\frac{1}{4}l\right)^2 + \left(\frac{1}{2}m\right)\left(\frac{1}{4}l\right)^2.$$

Свакако, ово је тек прва апроксимација. Зато ћемо штап сада поделити на четири дела.

Слика 4.1.2 Штап подељен на осам једнаких делова

Друга апроксимација момента инерције је

$$I_2 = \left(\frac{1}{4}m\right)\left(\frac{1}{8}l\right)^2 + \left(\frac{1}{4}m\right)\left(\frac{3}{8}l\right)^2 + \left(\frac{1}{4}m\right)\left(\frac{1}{8}l\right)^2 + \left(\frac{1}{4}m\right)\left(\frac{3}{8}l\right)^2.$$

Прва апроксимација је $I_1 = 0,0625\, ml^2$, а друга $I_2 = 0,0780\, ml^2$. Ова разлика упућује нас на нове апроксимације. Овај пут ћемо поделити штап на осам једнаких делова и добијамо

$$I_3 = \left(\frac{1}{8}m\right)(\frac{1}{16}l)^2 + \left(\frac{1}{8}m\right)(\frac{3}{16}l)^2 + \left(\frac{1}{8}m\right)(\frac{5}{16}l)^2 + \left(\frac{1}{8}m\right)(\frac{7}{16}l)^2 + \left(\frac{1}{8}m\right)(\frac{1}{16}l)^2$$
$$+ \left(\frac{1}{8}m\right)(\frac{3}{16}l)^2 + \left(\frac{1}{8}m\right)(\frac{5}{16}l)^2 + \left(\frac{1}{8}m\right)(\frac{7}{16}l)^2.$$

Скратимо запис:

$$I_3 = 2\left(\frac{1}{8}m\right)l^2\left(\frac{1}{16}\right)^2(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2).$$

Резултат је $I_3 = 0,0820\, ml^2$. Уместо поделе на 16 делова потражићемо одмах поделу на n делова. Гледајући једначину за I_3 једноставно можемо записати

$$I_n = 2\left(\frac{1}{n}m\right)l^2\left(\frac{1}{2n}\right)^2(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots\ldots + (2n-1)^2).$$

Ученици у четвртој години знају коначан збир

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Како нама треба збир квадрата непарних бројева од збира свих квадрата одузећемо квадрате парних бројева. Њихов збир је

$$2^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = 2^2\left(1^2 + 2^2 + \cdots + \left(\frac{n^2}{2}\right)\right) =$$

$$= 2^2\,\frac{(n/2)((n/2)+1)(2(n/2)+1)}{6}.$$

Даље је збир квадрата непарних бројева једнак $\frac{n(n^2-1)}{6}$. После сређивања можемо записати

$$I_n = 2ml^2\left(\frac{1}{n\cdot 4n^2}\cdot\frac{n(n^2-1)}{6}\right),$$

и у граничном случају, када $n \to \infty$, добијамо израз за сопствени момент инерције штапа

$$I = \frac{1}{12}ml^2,$$

који је без извођења у настави физике у првом разреду написан као готова формула.

Глава 5

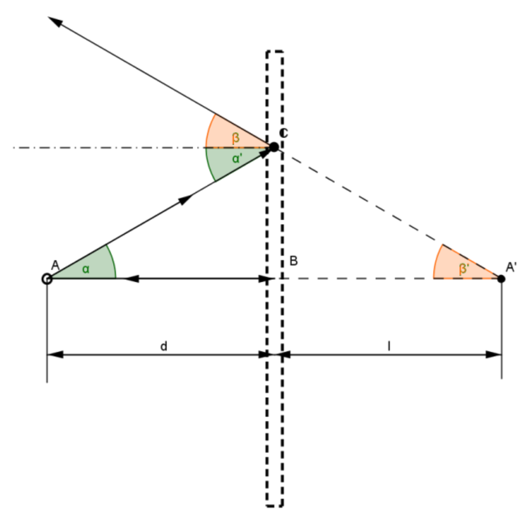
Геометријска оптика

Геометријска оптика је област физике која даје једноставнији приказ простирања светлости кроз различите средине. Узима се да је кретање светлости кроз хомогену средину строго праволинијско, што се приказује помоћу светлосних зрака, односно светлосних снопова.

Ликови предмета које дају огледала и сочива могу бити реални и имагинарни (виртуелни). Око види имагинарни лик, док се реални лик види на заклону постављеном на месту његовог формирања.

5.1 Равно огледало

На слици показан је извор светлости A на растојању d од површине равног огледала. Посматрајмо два зрака од извора. Један пада на површину огледала под углом од $90°$, и одбија се од ње у истом правцу, али супротном смеру. Други зрак пада у тачку C на површини огледала тако да заклапа угао α са нормалом на њу. Од површине тај зрак се одбија под углом, једнаким упадном углу ($\alpha = \beta$).



Слика 5.1.1. Равно огледало

Када се правац одбијеног зрака, како пролази од огледала, продужи уназад иза огледала, сече се са правцем зрака ка тачки B у тачки A'. За посматрача изгледа као да сви зраци одбијени од огледала крећу из исте тачке A' на растојању l од површине огледала. Одредимо положај те тачке. Нека је растојање $d(B, C)$ означено са h. Из троуглова ABC и $A'BC$ је

$$tg\ \alpha = \left(\frac{h}{d}\right), \text{и}$$

$$tg\ \beta = \left(\frac{h}{l}\right).$$

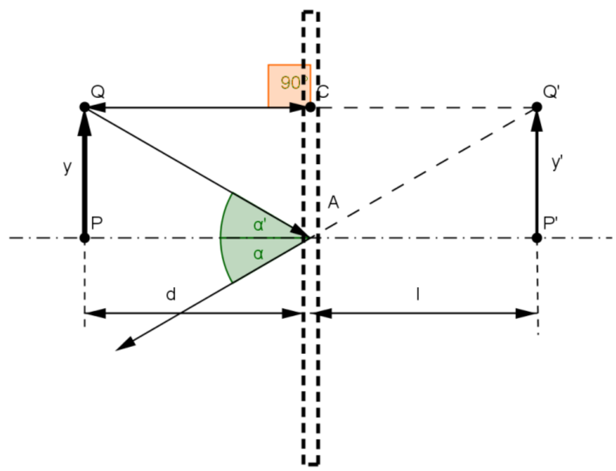
Пошто су углови α и β међусоно једнаки следи

$$l = d,$$

тј. тачка из које као да потичу сви светлосни зраци одбијени од површине равног огледала налази се иза огледала на растојању једнаком растојању извора од површине огледала. Тачка A' назива се лик светлосног извора, а растојање l назива се растојање лика од огледала.

За описивање стварања лика предмета коначне величине користи се појам увећање. Увећање U је дефинисано као количник величина лика y' и предмета y постављеног испред огледала

$$U = \frac{y'}{y}.$$



Слика 5.1.2. Одраз лика у огледалу

Нека је предмет постављен на растојању d од површине огледала. Из тачке предмета Q повучена су два зрака. Један пада ортогонално на површину огледала и одбија се у истом правцу, али супротном смеру. Други зрак пада у тачку A на огледалу, где пада и ортогонални зрак из тачке P предмета. Пресецањем праваца одбијених зрака уназад, иза огледала, добија се тачка Q', из које као да сви ти зраци полазе. То је положај лика предмета. Нека се тај лик налази на растојању l од површине огледала, и нека му је величина y'. Из троуглова PQA и $P'Q'A$ добија се

$$tg\, \alpha = \frac{y}{d} = \frac{y'}{l},$$

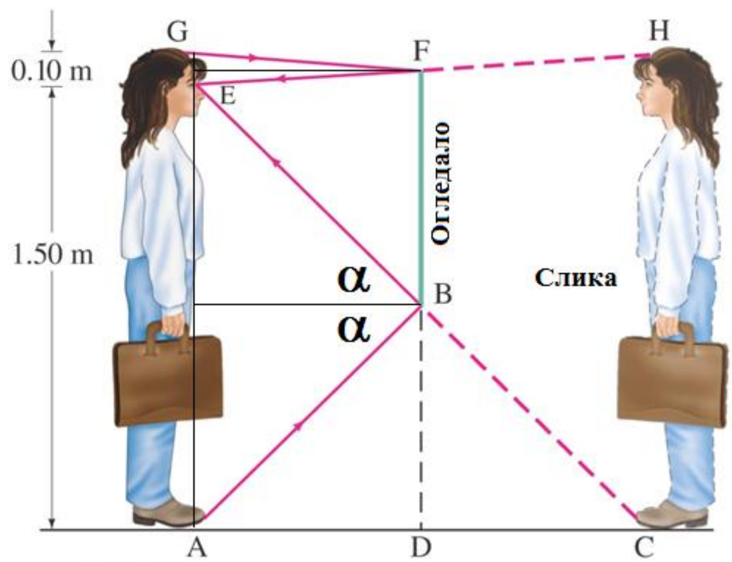
а пошто је $l = p$, следи да је

$y = y'$, тј. $U = 1$,

што значи да лик има исту величину као предмет.

Пример 1. На којој висини мора бити постављено огледало?

Жена 1,60 m висока стоји испред вертикално постављеног равног огледала. Која минимална величина огледала мора бити и на којој висини мора бити постављено огледало да би жена видела цело тело? Претпоставимо да јој се очи налазе на 10 cm од врха главе.



Слика5.1.3. Жена испред огледала

Минимална величина огледала ће бити ако светлост од њених ципела односно од врха главе удара у доњу односно горњу ивицу огледала и рефлектује се у њеним очима. Да бисмо решили овај проблем посматраћемо га са геометријског аспекта, и до решења ћемо доћи помоћу основа геометрије.

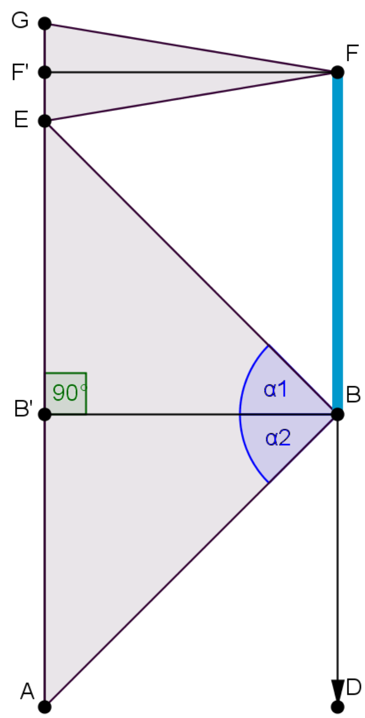
На слици је означено:

$FB -$ дужина огледала, $BD -$ растојање огледала од пода.

Покажимо да су троуглови BB'E и BB'A подударни:

BB' заједничка страница (представља удаљеност жене од огледала),
$\sphericalangle EBB' = \alpha 1 \cong \sphericalangle ABB' = \alpha 2$,
$\sphericalangle EB'B \cong \sphericalangle AB'B = 90°$,

=> троугао $BB'E$ је подударан троуглу $AB'B$ (УСУ),
=> $EB' = AB'$ (последица подударности троуглова).



Слика 5.1.4. Геометријска илустрација примера 1

На сличан начин доказујемо подударност троуглова $GF'F$ и $EF'F$. Последица те подударности је $GF' = EF'$.

Примећујемо да подударност ових троуглова не зависи од величине дужи BB' односно FF' тј. удаљености жене од огледала.

Дуж $GA = 1{,}60m$ представља висину жене испред огледала, дуж $EA = 1{,}50m$ представља растојање од очију до пода. Закључујемо да је растојање

$$d(D, B) = B'A = \frac{1}{2}\, 1{,}50m = 0{,}75m.$$

и висина огледала је:

Огледало $= \frac{1}{2}\, 1{,}50m + \frac{1}{2}\, 0{,}10m = 0{,}80m.$

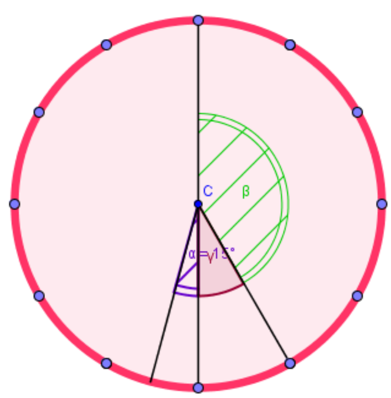
Примећујемо да величина огледала и растојање жене од огледала није пресудно да би се жена могла видети у огледалу.

Пример2. („Алиса у земљи чуда“ – доручак са Лудим шеширџијом и Мартовским кунићем) Имаш часовник код кога пуне сате означавају исти показивачи, а казаљке су једнаке дужине. Нађи време између шест и седам када би се исто време читало и гледајући сат у огледалу.

Пошто су сви подеоци на сату обележени једнаким показивачима и без бројева, назовимо, подеок на који показује минутна казаљка у пуним сатима „0-тим подеоком“, па онда редом остале – првим, другим, итд. 11-тим подеоком на сату. Треба да или (1) слика сатне казаљке у огледалу поново показује сате, а слика минутне казаљке минуте, или (што је могуће због једнаких дужина казаљки) (2) слика сатне казаљке у огледалу показује минуте, а слика минутне казаљке сате.

(1) У првом случају, сатна казаљка је у 6 сати на шестом подеоку и у збиљи и у огледалу, а минутна казаљка на 0-том подеоку и у збиљи и у огледалу. То је једина могућност, јер потом се сатна казаљка у збиљи налази између шестог и седмог подеока, а у огледалу нам показује време између 5 и 6.
(2) У другом случају, желимо да слика сатне казаљке у збиљи представља минутну казаљку у огледалу и обрнуто. У огледалу слика сатне казаљке прелази пут од 6-тог до 5-тог подеока, док она у збиљи показује време између 6 и 7, што значи да желимо да се у збиљи минутна казаљка нађе између 5-тог и 6-тог подеока, а то значи да у збиљи покаже време између 6 сати и 25 минута и пола 7. Прецизније време можемо одредити превођењем кретања казаљки у времену на линеарну зависност пређеног угла у функцији протеклог времена и решавање једног система од две линеарне једначине са две непознате.

Нека је α угао који направи слика сатне казаљке, а β угао који направи минутна казаљка у збиљи. Тада је $\gamma = 180° - \beta$ угао између ње и 6-тог подеока (и у збиљи и у огледалу). Желимо да буде $\gamma = \alpha$. Зависност угла од протеклог времена је линеарна: $y = kx + n$, при чему x означава време (у минутима), а y угао између казаљке и 6-тог подеока.



Слика 5.1.5. Сат

У случају слике сатне казаљке, $\alpha = 0°$ у 6 сати (тј. после 0 минута), а $\alpha = 15°$ у пола седам (тј. после 30 минута). Другим речима:

$$0 = k \cdot 0 + n,$$

$$15 = k \cdot 30 + n.$$

Решавајући систем, добијамо $k = \frac{1}{2}, n = 0$, односно функцију $y = \frac{1}{2}x$, за угао α.

Аналогно, у случају минутне казаљке, $\beta = 0°$ у 6 сати, а $\beta = 180°$ у пола седам, одакле $\gamma = 180°$ у 6 сати (после 0 минута), а $\gamma = 0°$ у пола седам (после 30 минута). Другим речима:

$$180 = k \cdot 0 + n,$$

$$0 = k \cdot 30 + n.$$

Решавајући систем, добијамо $k = -6, n = 180$, односно функцију $y = -6x + 180$, за угао γ. Изједначавањем функција по y, добијамо x минута после којих је $\alpha = \gamma$:

$$\alpha = \frac{1}{2}x = -6x + 180 = \gamma, \quad \text{тј. } x = \frac{360}{13} \approx 27{,}7 \text{ (минута).}$$

Тражено време је, дакле, нешто пре 6 сати и 28 минута.

5.2 Сферно огледало

Под сферним огледалом подразумева се огледало чија је површина део сфере, тј. лопте полупречника кривине R.

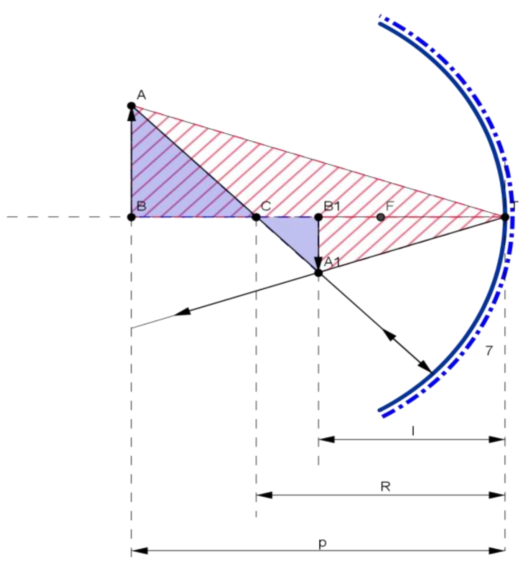
Сферна огледала се широко примењују. Неке од најважнијих и најраспрострањенијих примена сферних огледала су микроскоп, телескоп, рефлектор, ретровизор, фарови.

У пракси се одбијени зраци заправо не секу у истој тачки, што код малих огледала не долази до изражаја, и за њих је ова апроксимација добра.

5.3 Једначина огледала. Линеарно увећање огледала – примена сличности троуглова

Положај и величина лика зависе од положаја и величине предмета и од геометријских карактеристика огледала (полупречника R и од тога да ли је огледало конвексно или конкавно). Жижа или фокус је тачка на оптичкој оси кроз коју пролазе одбојни зраци.

Једначина огледала даје везу између удаљености лика (l), удаљености предмета (p), и полупречника кривине (R), односно жижне даљине (f). Веза ових величина може се наћи на основу слике.



Слика 5.2.1 Конкавно огледало

Нека је A_1B_1 лик предмета AB.

$\measuredangle ABC \cong \measuredangle A_1B_1T = 90°$

$\measuredangle ATB \cong \measuredangle A_1TB_1$

$=> \Delta\, ABT \sim \Delta\, A_1B_1T$ (два троугла су слична ако су им бар два угла подударна).

Троуглови ABT и $A_1\mathrm{B}_1\mathrm{T}$ су слични, па су им одговарајуће странице пропорционалне,

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A_1B_1}} = \frac{\mathrm{BT}}{\mathrm{B_1T}} = \frac{p}{l}.$$

Троуглови ABC и A_1B_1C су такође слични, па је

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A_1B_1}} = \frac{\mathrm{B}C}{B_1C} = \frac{p-R}{R-l}.$$

Изједначавањем десних страна ових једнакости следи да је

$$\frac{p}{l} = \frac{p-R}{R-l}.$$

Одакле је

$pR - pl = pl - lR$, тј. $pR + lR = 2pl.$

Дељењем последње једначине са plR добија се

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{p} = \frac{2}{R} \ ,$$

односно

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f} \ ,$$

где је $f = \frac{2}{R}$. Ово је једначина огледала.

Добијена једначина важи и за конвексна огледала, само што се жижина даљина и удаљеност лика узимају са знаком „-” (минус),

$$-\frac{1}{l} + \frac{1}{p} = -\frac{2}{R} = -\frac{1}{f}.$$

Приметимо да се једначина сферног огледала може применити и на равно огледало. Како је код равног огледала полупречник кривине бесконачно велики ($R = \infty$), а такође и жижина даљина ($f = \infty$), а лик имагинаран, једначина огледала ће имати облик

$$-\frac{1}{l} + \frac{1}{p} = 0.$$

Из ове једначине следи да је $l = p$, што значи да су предмет и лик постављени симетрично у односу на раван огледала. Линеарно увећање огледала U једнако је количнику величине лика $h^{'}$ и величине предмета h (h и h' су димензије предмета и лика у правцу нормалном на главну оптичку осу),

$$U = \frac{h^{'}}{h}.$$

На слици је $h = AB$, $h^{'} = A_1B_1$, па, поново на основу сличности троуглова ABT и A_1B_1T следи да је

$$\frac{h^{'}}{h} = \frac{\mathrm{A_1B_1}}{AB} = \frac{l}{p}.$$

За линеарно увећање огледала добијамо

$$U = \frac{h^{'}}{h} = \frac{l}{p}.$$

Уколико је лик имагинаран, узима се апсолутна вредност растојања l,

$$U = \frac{h^{'}}{h} = \frac{|l|}{p}.$$

Увећање може имати вредности веће од 1 (када је лик већи од предмета) или мање од 1 (умањење).

Пример 3. Дијамантски прстен величине $1{,}5cm$ налази се на $20cm$ од конкавног огледала чији је полупречник $30cm.$ Колика је величина слике прстена и на којој удаљености се слика налази од огледала?

Позната нам је удаљеност прстена $p = 20cm$ и полупречник $R = 30cm.$

Простом применом раније изведене једначине налазимо удаљеност лика од огледала

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{p} = \frac{2}{R}.$$

Даље је $l = 60cm.$

Однос величина лика и предмета, увећање, је (следи из сличности) однос растојања лика и растојања предмета од огледала

$$U = \frac{h^{'}}{h} = \frac{l}{p}.$$

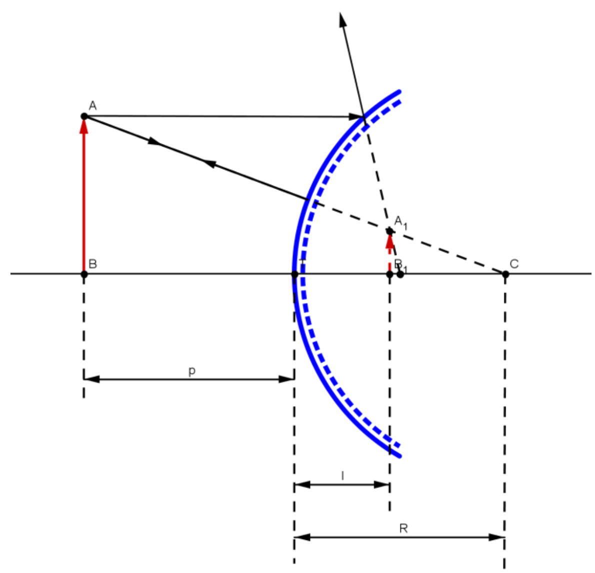
Лако налазимо величину лика $h^{'} = 4{,}5cm.$

Пример 4. Видимо камион у ретровизору који има конвексно огледало полупречника $15m$. Делује нам да се налази на удаљености око $5m$. На којој удаљености се он стварно налази и који је проценат умањења?

Како је огледало ретровизора конвексно, удаљеност лика узимамо као негативну вредност, односно $l = -5m$, док је $R = -15m$.

Применом раније изведене једначине налазимо удаљеност лика од огледала

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{p} = \frac{2}{R}.$$



Слика 5.2.2.Конвексно огледало, ретровизор

Даље је $p = 15m$. Како је лик у огледалу имагинаран, за линеарно увећање (умањење) огледала, узима се апсолутна вредност растојања l,

$$U = \frac{h'}{h} = \frac{|l|}{p}.$$

Решавањем добијамо $U = \frac{1}{3}$, што нам казује да је лик у огледалу умањен око 33,3%.

Глава 6

Наставни програми – преопширни и претешки

Преоптерећен наставни програм је проблем који се већ годинама спомиње. Ученици су оптерећени великим бројем предмета, малим бројем часова за њихову реализацију и преамбициозним захтевима наставника чак и за изборне предмете. Мода контролних задатака не заобилази ни грађанско васпитање, музичку и ликовну културу.

Наставни програми за средњу школу су преобимни, а реализација је сведена на два до пет часова седмично. Програми математике и физике нису се годинама мењали, а ни градиво није лепо распоређено, тако да многе појмове ученици прво сазнају од наставника физике па тек онда од наставника математике.

Сматрам да је градиво математике за први разред пренатрпано и да нема довољно времена за увежбавање свих наставних јединица. Полази се од тога да су многе области ученици обрадили у основној школи, а често то није случај. Проблем су и неравномерно распоређени ученици по успеху, а бројно стање ученика је посебно оптерећење. Инклузија је заступљена и у средним школама, што представља додатне проблеме када је сваки минут драгоцен.

Градиво математике другог, трећег и четвртог разреда је лепо распоређено и има довољно времена за увежбавање, али то није случај са градивом физике. Наставни садржаји трћег и четвртог разреда су неприкладни. Наиме такво градиво захтева превише озбиљан математички апарат (вероватнођу, теорију група, Лоренцове трансформације).

Као резултат преамбициозних наставних програма наводим чињенице познате у пракси:

1. наставници који свесно желе да потпуно обраде сваку наставну јединицу користе додатне и допунске часове како би до краја године испунили наставне циљеве;
2. наставници који се стриктно држе програма површно „прелете“ или изоставе „мање битне“ наставне делове, а као последицу тога имамо ученике са „рупама“ у знању;

3. у збиркама је мали број задатака који су повезани са свакодневним животом тако да се наши ученици врло тешко сналазе и у најједноставнијим задацима из праксе;
4. градиво математике и физике је слабо повезано и требало би водити рачуна да ученици наставне садржаје прво усвајају из математике а тек онда примене у физици.

Закључујем да би требало размислити о делимичној измени програма. Желимо да ученици на часовима науче да размишљају па је боље обрадити квалитетније мање целина него површно обрадити већину њих.

Као могуће решење, предлажем формирање одељења са мањим бројем ученика (око 15 ученика). На тај начин би се могло ученицима посветити више пажње. Наставник не мора да троши време на испитивање тј. оцењивање, већ прати рад сваког ученика кроз полугодиште. У наставу би требало увести примере који су практични како би градиво приближили ученицима. Код наставних јединица обраде требало би избегавати предавачку наставу него конструисати знање у дијалогу и расправи. На тај начин дозволити деци да више причају и развијају културу говора.

Глава 7

Закључак

Увиђајући да се начин и приступ данашњем школовању највише разликује од било ког претходног периода и да данас технолошки и други развоји увелико ученицима могу да преусмере поље интересовања, ниво концентрације и степен привржености, а који de facto неће просто нестати, закључујемо да исти тај развој изискује промене и код нас, изискује реформисање постојећег система образовања. Знајући да је математика као наука повезана са осталим наукама, при састављању нових савремених наставних програма треба водити рачуна о повезивању и усклађивању свих осталих природних наука.

Иако наставници поседују све што је потребно за преношење знања ученицима, то просто некада није довољно. Они су и те како свесни какви су им услови потребни за наставу која се одвија на обострано задовољство. Ми, будући наставници математике, могли бисмо својим залагањем да исправимо неусаглашеност школског програма, тако што бисмо у градиво математике укључили што више задатака и примера из физике. На тај начин деци кроз математику можемо да приближимо физику, самим тим и природу и природне појаве, а све у циљу како би ученици и математику прихватили као предмет који могу да виде, осете, искористе, и како је не би посматрали као апстрактну науку која нема практичну примену у животу.

Надам се да ће мој рад бити мали допринос у унапређивању наставе математике кроз примере који описује физика.

Литература:

[1] Н. Каделбург, К. Панић : *Физика за трећи разред гимназије*, Круг, Београд 2010;

[2] Л. Керол: *Алиса у земљи чуда*, 1865;

[3] http://physics.about.com/ ;

[4] Н. Чалуковић: *Физика 1, уџбеник за први разред гимназије,* Круг, Београд, 2004;

[5] *Математика, општа енциклопедија Larousse,* Вук Караџић, Београд, 1967;

[6] В. Готовац, *Потешкоће у интерпретацији грагичких приказа (примери из кинематике),*Математичко-физички лист 167, 1991;

[7] Н. Чалуковић: *Физика 2, уџбеник за други разред гимназије природно-математичког смера,* Круг, Београд, 2012;

[8] Ж. Михарија, *Наставни програми-преопширни и претешки,* Зрно, 1994;

[9] www.phys.unsw.edu.au ;

[10] М. Курепа, Ј. Пурић: *Основи физике,* Научна књига, Београд, 1994;

[11] В. Мужић, *Шта узрокује преоптерећеност ученика и како је уклонити?,*Зрно, 1994

[12] Ј. Питер, Н. Петровић, В. Сотировић, Д. Липовац, *Општа методика наставе математике,* Сомбор, 1996;

[13] В. Вучић, Д. Ивановић, *Физика 1*, Научна књига, Београд, 1967;

[14] М. Божић, *Преглед историје и филозофије математике,* Завод, Београд, 2002;

[15] H.Dorrie, *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover Publications, NY, 1965;

[16] Ч. Сифе, *Нула,* Стилос, Београд, 2007;

[17] Т. Голеж, *Fizika in matematika vs. fizika, matematika*, Математика в шоли, Љубљана, 2007;

[18] Д. Георгијевић, М. Обрадовић, *Математика са збирком задатака за трећи разред средње школе,* Завод за уџбенике, Београд, 1994;

[19] http://www.physicstutorials.org/home/mechanics/dynamics/equilibrium;

[20] Ж. Ивановић, С. Огњановић, *Математика 4*, Круг, Београд, 2010.