Matematička gimnazija
Beograd

MATURSKI RAD IZ MATEMATIKE

GEOMETRIJA LOBAČEVSKOG

mentor :
Mirjana Perovanović

učenik :
Bojan Živković

Beograd
jun 2002.

Sadržaj:

Euklid i problem petog postulata

Istorijski gledano, geometrija je nastala iz praktičnih razloga. Ona se sastojala iz pravila koja su određivala položaj zvezda i Sunca ili su služila za određivanje površine zemljišta. Prva znanja o geometriji doneli su trgovci iz Egipta i Vavilona u antičku Grčku gde je ona kasnije postala deduktivna disciplina. Vekovi razmatranja i reorganizovanja kulminirali su u **Euklidovom** kapitalnom delu ***Elementi.*** **Euklid** (oko 330. god. p.n.e. – oko 270. god. p.n.e.) je u svojim ***Elementima*** (trinaest knjiga) praktično skupio sva dotadašnja znanja iz matematike. Za nas je najvažnija prva knjiga ***Elemenata*** u kojoj su izloženi osnovi geometrije (uslovi podudarnosti trouglova, teorija paralelnih linija, odnos između stranica i uglova trougla, učenje o površinama trouglova i paralelograma, Pitagorina teorema itd.). U njoj će **Euklid** izneti postulate i aksiome[1] na kojima će zasnovati čitavu geometriju.

S obzirom na njihovu važnost navešćemo ih u celini.

Postulati:

1. Neka se od tačke do tačke može povući prava linija.
2. Neka se duž može produžiti na obe strane neograničeno.
3. Neka se iz svake tačke u ravni, kao iz centra, u proizvoljnom poluprečniku u toj ravni može opisati krug.
4. Neka su svi pravi uglovi međusobno jednaki.
5. Neka se svaki put, kada prava pri preseku sa drugim dvema pravama obrazuje unutrašnje uglove sa iste strane čiji je zbir manji od dva prava ugla, te prave seku s one strane sa koje je taj zbir uglova manji od dva prava.

Aksiome:

1. Dve veličine, od kojih je svaka zasebno jednaka trećoj, jednake su i međusobno.
2. Ako se jednakim veličinama doda jednako, onda će i rezultat biti jednak.
3. Ako se od jednakih veličina oduzme jednako, onda će i rezultat biti jednak.
4. Ako se nejednakom doda jednako, rezultat će biti nejednak (smisao jednakosti se neće izmeniti).
5. Ako udvojimo jednake veličine, onda će i rezultat biti jednak.
6. I polovine jednakih su međusobno jednake.
7. Kongruentne figure jednake su međusobno.
8. Celina je veća od svog dela.
9. Dve prave linije ne mogu da obrazuju zatvoren prostor.

[1] U Euklidovo vreme postojala je izvesna razlika između postulata i aksioma koja je nestala do današnjih dana. Zato se pod rečju aksioma podrazumevaju postulati. Svi oni zajedno čine sistem aksioma Euklidovih *Elemenata*.

Zbog svoje sveobuhvatnosti *Elementi* će tokom narednih 2000 godina biti smatrani vrhuncem naučne tačnosti. Oni će biti osnovni udžbenik generacijama matematičara, citiraće ih velika imena nauke, po nekim procenama doživeće najveći broj izdanja u celoj zapadnoj civilizaciji posle Biblije, a čak i danas geometrija kao školski predmet gradi se na *Elementima*.

Ali, i pored svega, *Elementi* sadrže i veliki broj nedostataka. Najslabiju tačku *Elemenata* predstavljaju definicije geometrijskih pojmova, čijim spiskom počinje svaka od trinaest knjiga. Naime, **Euklid** pokušava da definiše tačku ("Tačka je ono što se ne sastoji iz delova"), pravu ("Prava je linija koja u odnosu na sve svoje tačke jednako stoji") i ravan ("Ravan je površina koja u odnosu na sve svoje prave jednako stoji", pri čemu "Površina je ono što ima samo dužinu i širinu"). Naravno, **Euklidove** definicije tačke, prave i ravni nisu logički ispravne.

Drugi veliki nedostatak **Euklidovih** ***Elemenata*** jeste nepotpunost njegove aksiomatike. **Euklid** ih je formulisao 14, dok ih u savremenom modelu aksioma ima 23.

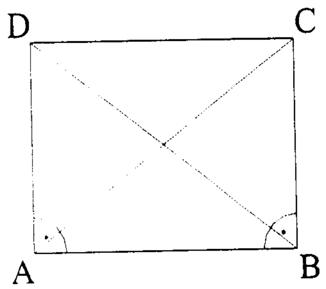
Ipak najviše polemike izazvao je peti **Euklidov** postulat. Više od 2000 godina matematičari su pokušavali da ga dokažu kao teoremu. Ali svi ti dokazi, ma kako vešto izvođeni, na kraju su se pokazivali pogrešnim. Ispostavilo se da se peti postulat ne može dokazati pomoću ostalih aksioma **Euklidove** geometrije. Prvi koji je pokazao (ali nije dokazao) nedokazivost petog postulata bio je ruski matematičar **Nikolaj Ivanovič Lobačevski** (1792. – 1856.). Nedokazivost petog postulata je potpuno ispravno dokazao nemački naučnik **David Hilbert** (1862. – 1943.). Ali trud naučnika koji su pokušavali da dokažu peti postulat nije bio uzaludan. Oni su svojim radom prokrčili put novoj geometriji, takozvanoj apsolutnoj geometriji koja se zasnivala na svim aksiomama izuzev petog postulata.

2. Naučnici koji su razvili potpuno novu ideju u svetu matematike

Naučnik koji je započeo eru nove geometrije bio je italijanski matematičar **Đovani Đirolamo Sakeri** (1667. – 1733.). I on je, kao i ostali njegovi savremenici, pokušao da dokaže peti postulat iz ostalih aksioma. U cilju dokaza konstruisao je četvorougao ABCD, čiji su uglovi A i B pri donjoj osnovici pravi, a bočne strane AD i BC jednake. Takve četvorouglove nazivaćemo Sakerijevim četvorouglovima. U sledećoj teoremi dokazaćemo da su uglovi C i D Sakerijevog četvorougla podudarni.

<u>Teorema 2.1.</u> U Sakerijevom četvorouglu ABCD, čiji su uglovi A i B pri donjoj osnovici pravi, važi $\angle ADC \cong \angle BCD$.

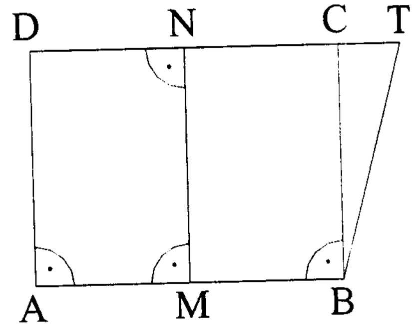
Dokaz: Spojimo temena A i C, odnosno B i D. Kako je AD ≅ BC, AB ≅ BA i ∠DAB ≅ ∠CBA = d, gde je d mera pravog ugla, sledi da je ΔBAD ≅ ΔABC.[2] Odatle je AC ≅ BD. Kako sada važi AD ≅ BC, DC ≅ CD i AC ≅ BD, sledi da je ΔBCD ≅ ΔADC. Kako iz prethodne dve podudarnosti važi ∠ADB ≅ ∠BCA i ∠BDC ≅ ∠ACD znači da su uglovi kod temena C i D, ∠ADC i ∠BCD podudarni.♦



Sledeće što je **Sakeri** dokazao je:"Ako je M središte duži AB, a N središte duži CD Sakerijevog četvorougla ABCD, gde su AB i CD osnovica, odnosno protivosnovica, tada je MN normalno na AB i normalno na CD". Upravo ovo tvrđenje poslužiće za dokaz sledeće teoreme.

Teorema 2.2. Neka je ABCD Sakerijev četvorougao kod koga su uglovi kod A i B pravi. Ako su uglovi kod C i D oba oštra, oba prava ili oba tupa, tada je AB < CD, AB = CD ili AB > CD, respektivno.

Dokaz: Neka su M i N središta duži AB i CD, redom. Razmotrićemo slučaj kada su oba ugla kod C i D oštra (ako su oba ugla prava, ovo tvrđenje je već poznato iz euklidske geometrije, a ako su oba tupa, tvrđenje se izvodi slično kao i za oba oštra). Pretpostavimo da je CD < AB. Tada je CN < BM, a CD možemo produžiti preko tačke C do tačke T, takve da je NT ≅ MB. Tada je ∠MBT > d. Sada je u Sakerijevom četvorouglu MNBT sa pravim uglovima kod M i N, ∠BTN ≅ ∠TBM po teoremi 2.1. Kako smo pretpostavili da su uglovi kod C i D oba oštra, sledi da je ∠BCN < d < ∠MBT = ∠BTN, što je u suprotnosti sa teoremom apsolutne geometrije po kojoj je spoljašnji ugao trougla veći od unutrašnjih nesusednih ponaosob. Dakle, AB < CD.♦



Za Sakerijev četvorougao ABCD sa osnovom AB **Sakeri** je postavio tri hipoteze:

1. hipotezu tupog ugla, prema kojoj su uglovi kod C i D tupi;
2. hipotezu pravog ugla, prema kojoj su uglovi kod C i **D** pravi i
3. hipotezu oštrog ugla, prema kojoj su uglovi kod C i **D** oštri.

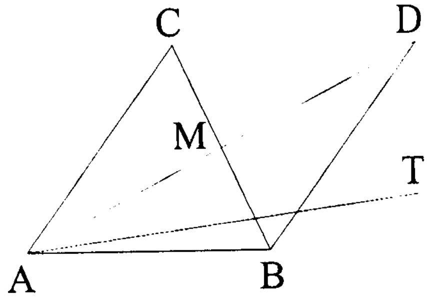
Sakeri je pokazao da je hipoteza o pravom uglu ekvivalent petog Euklidovog postulata. Pošto je tu hipotezu smatrao za jedinu ispravnu, pokušao je da dokaže da prva i treća hipoteza nisu logički ispravne.

[2] U apsolutnoj geometriji postoji pet stavova o podudarnosti trouglova. Više govora o ovome biće pri kraju četvrtog poglavlja.

Tvrđenje da uglovi kod temena C i D ne mogu biti tupi **Sakeri** je vrlo lako dokazao. Da je to zaista tako govori sledeća teorema koja je ekvivalent gore pomenutog tvrđenja.

<u>**Teorema 2.3. (Sakeri – Ležandrova teorema)**</u> Zbir unutrašnjih uglova trogla je manji ili jednak 2d.

<u>**Dokaz.**</u> Pretpostavimo da je zbir unutrašnjih uglova trougla ABC veći od 2d za neki ugao podudaran $\angle BAT$. Ne umanjujući opštost pretpostavimo da je $\angle BAC$ najmanji od tri unutrašnja ugla ΔABC. Neka je M središte duži BC i neka je D tačka na polupravoj AM sa temenom A takva da je $AM \cong MD$. Trouglovi CMA i BMD su očigledno podudarni ($AM \cong DM$, $CM \cong BM$ i $\angle AMC \cong \angle DMB$).



Pošto je $\angle BAM + \angle CAM = \angle BAC$, jedan od uglova BAM, odnosno CAM, manji je ili jednak polovini ugla BAC, a odavde jedan od uglova BAD, odnosno BDA, manji je ili jednak polovini ugla BAC. Dalje imamo da je:

$\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = \angle BAD + \angle BDA + \angle ABC + \angle MBD =$ $= \angle BAD + \angle BDA + \angle ABD$. Dakle, imamo da je zbir unutrašnjih uglova trouglova ABD i ABC jednak, s tim što je jedan od uglova trogla ABD manji ili jednak polovini ugla BAC. Nastavimo li ovaj postupak, posle **n** puta dobićemo trougao čiji je zbir unutrašnjih uglova jednak zbiru unutrašnjih uglova trougla ABC i sa jednim uglom manjim ili jednakim $(1/2^n)\angle BAC$. Po aksiomi kontinuiteta, za dovoljno veliko **n**, taj ugao će postati manji od ugla BAT. Kako u dobijenom trouglu zbir uglova za ugao BAT veći od 2d, zbir dva preostala ugla dobijenog trougla je veći od 2d. Međutim, to je kontradiktorno teoremi apsolutne geometrije po kojoj je zbir bilo koja dva unutrašnja ugla trougla manji od 2d. Dakle, zbir unutrašnjih uglova trougla ABC je manji ili jednak 2d.♦

Preostala je da se opovrgne još samo hipoteza oštrog ugla. Pokušavajući da obori ovu hipotezu, **Sakeri** je izveo veliki broj tvrđenja nadajući se da će doći do kontradikcije. Ali ne našavši nikakvu kontradikciju **Sakeri** se uplašio i odustao od ove, naizgled, nelogične geometrije. Ipak, za sobom je ostavio nekoliko veoma važnih teorema neeuklidske geometrije:

1. Ako su u jednom Sakerijevom četvorouglu ABCD sa bazom AB uglovi kod C i D oštri, onda su ti uglovi oštri i u svakom Sakerijevom četvorouglu;
2. Zbir unutrašnjih uglova svakog četvorougla je manji od 4d;
3. Zbir unutrašnjih uglova trougla je manji od 2d;
4. Vertikala i kosa na jednoj pravoj mogu i da se ne seku;
5. Dve normale na jednoj istoj pravoj koje se nalaze u istoj ravni neograničeno se razilaze jedna od druge.

6. Postoje prave koje se, uzete u paru, u jednom smeru neograničeno razilaze, a u drugom asimptotski približavaju;
7. Geometrijsko mesto tačaka jednako udaljenih od date prave i postavljenih sa njene iste strane u ravni jeste kriva (ekvidistanta), koja sa pravom ima najviše dve zajedničke tačke.

Sledeći u nizu naučnika koji su uzdigli hiperboličku geometriju bio je samouki Švajcarac **Johan Hajnrih Lambert** (1728. – 1777.). On je slično **Sakeriju** konstruisao četvorougao ABCD čiji su uglovi kod temena A, B i C pravi (Lambertov četvorougao). **Lambert** takođe postavlja tri hipoteze:

1. hipoteza tupog ugla prema kojoj je ugao kod D tup;
2. hipoteza pravog ugla prema kojoj je ugao kod D prav;
3. hipoteza oštrog ugla prema kojoj je ugao kod D oštar.

U daljem radu **Lambert** je lako opovrgao prvu hipotezu, dok je treću hipotezu bezuspešno pokušavao da dovede do apsurda. Ipak, **Lambert** je stigao dalje od **Sakerija**. Uveo je pojam mere duži, površine i zapremine, a čak je i bio sklon da zaključi da je treća hipoteza primenljiva u nekoj zamišljenoj sferi.

Nakon svega se moraju spomenuti i dvojica sjajnih matemačara, **Švajkart** (1780. – 1859.) i **Taurinus** (1794. – 1874.), koji su se svojevremeno bavili pitanjem petog postulata i dali svoj doprinos u razvoju nove geometrije.

Ipak, istinski tvorci prve neeuklidske geometrije pored **Lobačevskog** bila su dva poznata imena u svetu matematike. Prvi od njih, **Karl Fridrih Gaus** (1777. – 1855.), spada u grupu matematičara koji su uspeli da sagledaju horizonte nove geometrije. Nažalost, nije otišao dalje od ličnih stavova iznetih u pismima. **Gaus** uopšte nije žurio da podržava nove ideje, a svaku publikaciju u tom smeru smatrao je preuranjenom. Tek posle njegove smrti objavljena je pisana zaostavština ovog velikog naučnika, a sa njom i prepiska posvećena neeuklidskoj geometriji. S druge strane, Mađar **Janoš Boljaj** (1802. – 1860.) nije se libio da objavi svoje ideje. Interesovanje za problem petog **Euklidovog** postulata nasledio je od oca Farkaša i bavio se njim gotovo čitavog života. Njegov celokupan rad kulminirao je u delu ***Appendix*** objavljenom 1832. godine. Ali izgleda da je to bilo sve od ovog perspektivnog matematičara. Kada je jednom prilikom dobio raspravu **Lobačevskog, *Geometrijska istraživanja iz teorije paralelnih linija,*** **Boljaj** se oduševio radom, ali se nakon toga povukao u sebe i kroz nekoliko godina umro sasvim nepoznat.

3. N. I. Lobačevski – pionir nove geometrije

Nikolaj Ivanovič Lobačevski rođen je 1. decembra 1792. u Nižnjem Novgorodu u Rusiji. Sa deset godina upisao je Kazanjsku gimnaziju, a sa petnaest tek osnovani univerzitet u Kazanju, gde studije završava za samo tri godine. Tamo će pod budnim okom profesora **Bartelsa**, a kasnije astronoma **Litrova**, fizičara **Bronera** i mehaničara **Renera**, **Lobačevski**

stasati u jednog od najboljih studenata, te će već u osamnaestoj godini magistrirati s najboljim ocenama, u dvadesetoj godini dobiti titulu asistenta matematike i postati pomoćnik profesora, a u dvadeset trećoj postati redovni profesor. Tokom svog profesorskog rada, držao je sva univerzitetska predavanja iz svih oblasti matematike, fizike, teorijske mehanike i astronomije, dovodio u red nesređenu biblioteku i bogatu muzejsku zbirku. Zahvaljujući svojim zalaganjima, **Lobačevski** 1821. dospeva do položaja dekana za matematiku i fiziku, gde se zadržao dve godine. Svoje kapitalno delo ***Geometrija*** kompletirao je 1823. koje je u svojoj originalnoj formi objavljeno tek 1909. Nedugo zatim saopštio je čuvenu raspravu ***Kratko izlaganje osnova geometrije sa strogim dokazom poučka o paralelama***, 23.februara 1826. godine na sednici Fizičko – matematičkog fakulteta Kazanjskog univerziteta. Taj dan se obeležava kao rođendan neeuklidske geometrije. Godinu dana kasnije naimenovan je za rektora Univerziteta i na toj dužnosti ostaje do 1846. jer je uzastopno biran šest puta. U tom periodu, dve katastrofe pogodile su univerzitet u Kazanju – epidemija kolere 1830. godine i veliki požar 1842. Međutim, merama sprovedenim od strane Lobačevskog šteta je svedena na minimum, dok je za aktivnost tokom epidemije kolere Lobačevski dobio zahvalnicu od samog cara. Godine 1832. oženio se **Varvarom Aleksejevnom Mojsijevom**, ženom mnogo mlađom od njega koja je poticala iz jedne vrlo imućne porodice.I pored toga u braku su dobili sedmoro dece. Zahvaljujući **Gausu, Lobačevski** je 1842. godine bio izabran za spoljnjeg dopisnika Kraljevskog društva iz Getingena. Kada je 1855. Univerzitet slavio pedesetogodišnjicu postojanja, izdaje delo pod naslovom ***Pangeometrija*** koje je diktirao skoro slep. Nedugo potom, 24. februara 1856. godine, na godišnjicu **Gausove** smrti, umro je i **Lobačevski**, još uvek nepriznat u visokim naučnim krugovima. Priznanje za njegov rad stiglo je tek nekoliko decenija kasnije, kada su nemački naučnici **David Hilbert i Feliks Klajn** (1849. – 1925.) uzdigli ideje **Lobačevskog** na viši nivo i obogatili ih novim sopstvenim otkrićima.

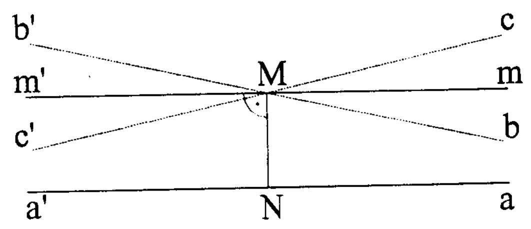
N.I. Lobačevski

4. Osnove hiperboličke geometrije u ravni

Za osnovu svoje geometrije **Lobačevski** je uzeo sve aksiome i teoreme apsolutne geometrije, kao i negaciju **Plejferove** aksiome (koja je ekvivalent petog **Euklidovog** postulata):

Ako tačka A ne pripada pravoj p, tada u ravni njima određenoj postoje bar dve prave koje sadrže tačku A i disjunktne su sa pravom p.

Sa ovako postavljenim sistemom aksioma uvešćemo i osnovne odnose među pravama u ravni. Zato ćemo u ravni Lobačevskog uzeti pravu a'a i proizvoljnu tačku M izvan nje. Zatim ćemo spustiti normalu MN iz M na pravu a'a, gde je N podnožje normale. Dalje, kroz tačku M u odnosu na pravu MN povući ćemo normalu m'm, koja se sa pravom a'a ne seče na



osnovu teoreme apsolutne geometrije. Razmotrićemo sve prave sadržane u pravom uglu mMN, koje prolaze kroz tačku M. Podelićemo te prave u dve grupe: 1. one koje seku pravu a'a i 2. one koje su s njom disjunktne (a koje postoje po aksiomi Lobačevskog). Kako su ta dva skupa pravih neprazna (MN pripada prvom, a m'm drugom skupu), disjunktna i kako između svake dve prave jednog skupa nema pravih drugog skupa (trivijalno!), po Dedekindovoj teoremi (posledica Dedekindove aksiome) postoji granična prava između ova dva skupa. Ta prava pripada drugom skupu inače bi, u suprotnom, postojala prava drugog skupa koja preseca pravu a'a. Obeležimo tu graničnu pravu sa b'b. Tu pravu Lobačevski je nazvao pravom paralelnom pravoj a'a u tački M u smeru a'a. Kraće ćemo pisati b||a u tački M u smeru a'a. Analogno ćemo unutar ugla m'MN dobiti pravu c'c paralelnu sa a'a u tački M, u smeru aa'. Uglovi bMN i c'MN su jednaki, inače bi pri osnoj refleksiji u odnosu na pravu MN dobili dve prave paralelne pravoj a'a u istom smeru.

Normalu MN nazvaćemo duž paralelnosti, a ugao bMN (odnosno ugao c'MN) ugao paralelnosti duži MN. Poluprave Mb i Na zvaćemo paralelnim i pisaćemo Mb||Na.

Posle gore definisane relacije paralelnosti dobijaju se sledeći rezultati:

1. Kroz tačku M uzetu van prave a'a uvek se mogu povući tačno dve različite prave b i c takve da je b paralelno sa a'a u jednom smeru, a c paralelno sa a'a u suprotnom smeru.
2. Sve prave koje sadrže tačku M, u skladu sa odnosom sa pravom a'a mogu se podeliti u tri kategorije. U prvu kategoriju spadaju prave b i c koje su paralelne sa a'a. U drugu spadaju sve prave koje seku a'a, a samim tim se nalaze unutar ugla bMc', koji je jednak 2α, gde je α ugao paralelnosti. Takvih pravih ima beskonačno mnogo. Pod treću kategoriju potpadaju sve ostale prave kojih takođe ima neograničeno mnogo. Te prave prema odnosu sa pravom a'a nazivaju se hiperparalelne prave.

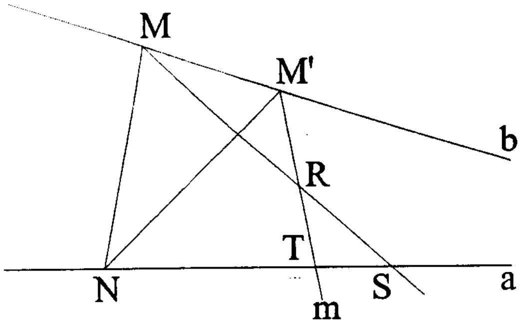
U daljem tekstu pri dokazivanju teorema koristićemo definiciju paralelnih pravih u sledećem obliku: Prava b paralelna je pravoj u navedenom smeru u tački M koja pripada pravoj b ako a i b leže u istoj ravni, b ne seče a i svaka prava m koja prolazi kroz tačku M i kroz unutrašnjost ugla bMQ (Q je bilo koja tačka prave a), seče a u nekoj tački R.

U nastavku ćemo preći na osnovne teoreme koje opisuju ravan Lobačevskog.

Teorema 4.1. Ako je prava b paralelna pravoj a u nekoj tački M u jednom smeru, onda je ona paralelna u tom smeru i u svakoj drugoj tački.

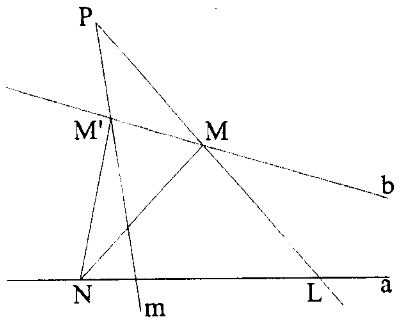
Dokaz. Neka je M' proizvoljna tačka prave b. Postoje dva slučaja:

1° Tačka M' je "desno" u odnosu na tačku M. Dokazaćemo da je b||a u tački M' u istom smeru. Uzećemo proizvoljnu pravu m koja prolazi kroz tačku M' i kroz unutrašnjost ugla bM'N, gde je N proizvoljna tačka prave a. Dokazaćemo da m seče a.



Uzmimo proizvoljnu tačku R unutar trake paralelizma na pravoj m (pod trakom paralelizma podrazumeva se deo ravni ograničen dvema paralelnim pravama). Kako je b paralelno sa a u tački M, prava MR će seći pravu a u nekoj tački S. Kako prava m seče stranicu MS trougla MNS po Pašovoj aksiomi seći će i stranicu NS (stranicu MN ne može seći jer se tačka R nalazi unutar ugla bM'N). Dakle, m preseca a u nekoj tački T. Kako b i a leže u istoj ravni, ne seku se i m seče a, znači da je b paralelno sa a u svakoj tački M' desno od tačke M.

2° Tačka M' je "levo" u odnosu na tačku M. Dokazaćemo da je b||a u tački M'. Neka je N proizvoljna tačka prave a.Uzećemo proizvoljnu pravu m koja prolazi kroz tačku M' i kroz unutrašnjost ugla bM'N.

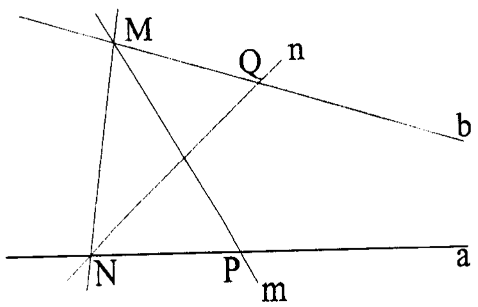


Zatim ćemo uzeti bilo koju tačku P prave m iznad M' i spojićemo je pravom sa tačkom M. Kako je b paralelno sa a u tački M u navedenom smeru, prava PM seče pravu a u nekoj tački L. Na osnovu teorema apsolutne geometrije prava m će seći duž MN, a zatim na osnovu Pašove teoreme primenjene na trougao MNL seći stranicu NL, odnosno pravu a. Kako b i a leže u istoj ravni, ne seku se i m seče a, znači da je b paralelno sa a u svakoj tački M' levo od tačke M.♦

Nakon dokazane teoreme govorićemo samo da je b paralelno sa a u navedenom smeru.

Teorema 4.2. Ako je prava b paralelna pravoj a u bilo kom smeru, onda je i obratno – prava a paralelna je pravoj b u tom istom smeru.

Dokaz. Na pravoj b uzećemo proizvoljnu tačku M, kroz nju ćemo konstruisati pravu koja sa pravama a i b gradi jednake uglove (moguće po teoremi apsolutne geometrije) i neka je presek te prave sa pravom a tačka N. Obeležimo uglove bMN i aNM sa α. Sada ćemo konstrisati pravu n kroz tačku N i kroz unutrašnjost ugla aNM. Potrebno je dokazati da prava n preseca pravu b. Ugao MNn ćemo označiti sa β, gde je $\beta < \alpha$, po konstrukciji. Konstruisaćemo dalje pravu m koja prolazi kroz M, kroz unutrašnjost ugla bMN, tako da je ugao NMm jednak β. Kako je b paralelno sa a, prava m seći će pravu a u nekoj tački P. Zatim ćemo na pravoj b označiti tačku Q takvu da je $MQ \cong NP$, tako da se MQ proteže u pravcu paralelnosti pravih a i b. Spojivši N i Q dobili smo dva trogula MNQ i NMP koji su podudarni ($MN \cong NM$, $NP \cong MQ$ – po konstrukciji i $\angle MNP \cong \angle NMQ = \alpha$). Kako se kod podudarnih trouglova naspram jednakih stranica nalaze jednaki uglovi, to je $\angle MNQ \cong \angle NMP = \beta$, pa se prava n podudara sa pravom NQ, tj. prava n preseca pravu b. Kako se prave a i b nalaze u istoj ravni, ne presecaju se i kako proizvoljna prava n, koja prolazi kroz tačku N i kroz unutrašnjost ugla aNM seče b, sledi da je $a \| b$ u tački N, pa znači i u svakoj drugoj svojoj tački.♦

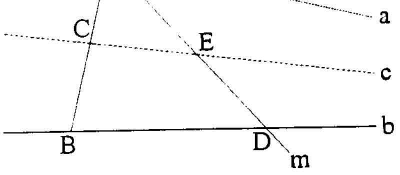


Teorema 4.3. Ako tri prave a, b i c leže u istoj ravni, i ako je a paralelno b, b paralelno c, onda je i a paralelno c, pri čemu se uzima smer paralelizma na istu stranu.

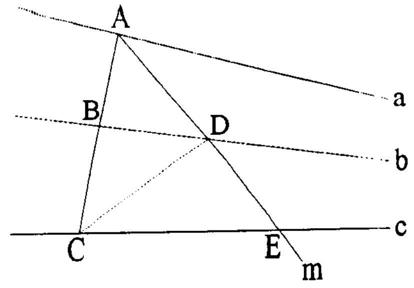
Dokaz. Postoje dva slučaja:

1° Prave a i c se nalaze na istoj strani u odnosu na b. Sada postoje dve varijante: 1. c je između a i b i 2. a je između c i b. Obe varijante se rešavaju na isti način, pa ćemo dati dokaz samo prve varijante.

Dakle, prave a i c se nalaze s iste strane prave b, pri čemu je c između a i b i važi da je $a \| b$ i $b \| c$. Uzmimo proizvoljne tačke A i B na pravama a i b, redom, i spojimo A i B. Kako su a i b sa različitih strana prave c, tada duž AB seče pravu c u nekoj tački C. Zatim ćemo povući proizvoljnu pravu m kroz tačku A i kroz unutrašnjost ugla aAC. Sada imamo da su prave a i c u istoj ravni i da se ne seku (inače bi kroz presečnu tačku postojale dve prave paralelne sa b u istom smeru). S druge strane, prava m seče pravu b u nekoj tački D jer je a paralelno sa b. Kako su tačke A i D sa različitih strana prave c, duž AD preseca pravu c u nekoj tački E. Dakle, proizvoljna prava m kroz tačku A i ugao aAC preseca pravu C. Pošto su ispunjeni svi uslovi paralelnosti, znači da je $a \| c$.



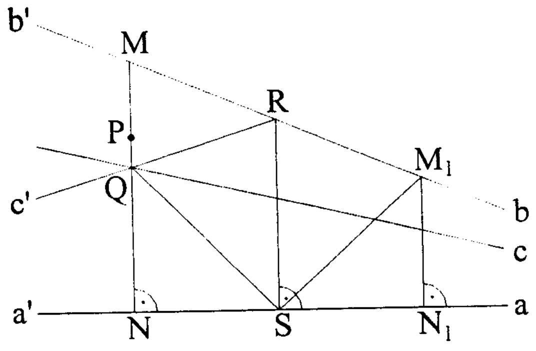
2° Prave a i c nalaze sa različitih strana prave b i važi da je $a \| b$ i $b \| c$. Uzmimo na pravama a i c proizvoljne tačke A i C i spojimo ih. Kako su A i C sa različitih strana prave b, duž AC seći će pravu b u tački B. Povucimo pravu m kroz tačku A i ugao aAC. Prvo primetimo a prave a i c leže u istoj ravni i da se ne seku (inače bi, po Pašovoj aksiomi, prava b sekla ili pravu a ili pravu c). S druge strane, prava m će seći b u nekoj tački D jer je a paralelno sa b. Spojimo tačke C i D. Kako m prolazi kroz tačku D i unutrašnjost ugla bDC, i kako je $b \| c$, to prava m preseca pravu c u nekoj tački E. Dakle, m seče c, pa je $a \| c$. ♦



Teorema 4.4. Dve paralelne prave asimptotski se približavaju u smeru njihove paralelnosti, tj. rastojanje između tačke koja se nalazi na jednoj od paralelnih pravih i druge prave, neograničeno se smanjuje ako navedenu tačku premeštamo po prvoj pravoj u smeru paralelnosti, i neograničeno se povećava u suprotnom smeru.

Dokaz. Neka su date dve paralelne prave a'a i b'b za koje ćemo dokazati da se asimptotski približavaju u smeru paralelnosti. Uzmimo na pravoj b'b tačku M i iz nje, na pravu a'a spustimo normalu MN, gde je N podnožje normale. Dokazaćemo da za svaki dovoljno mali odsečak ε možemo duž MN pomerati po pravama a'a i b'b u smeru paralelnosti, gde će MN uvek biti normalno na a'a, tako da dobijemo odsečak M_1N_1 za koji važi $M_1N_1 < \varepsilon$.

Uzmimo na duži MN tačku P tako da je $PN = \varepsilon$ (uz pretpostavku da je $MN > \varepsilon$, inače bi dokaz bio završen), i uzmimo proizvoljnu tačku Q na otvorenoj duži PN. Tada je $QN < \varepsilon$. Konstruišimo kroz tačku Q prave c' i c paralelne sa pravom a'a u smeru aa', odnosno a'a, redom. Na osnovu osobine tranzitivnosti prave a'a, b'b i c biće paralelne. S druge strane, prava c' će seći pravu b'b u nekoj tački R. Obeležimo na pravoj b'b u smeru paralelnosti tačku M_1 takvu da je $RQ \cong RM_1$, i neka su S i N_1 podnožja normala na pravoj a'a iz tačaka R i M_1.



Spojimo tačku S sa tačkama Q i M_1. Trouglovi QRS i M_1RS su podudarni ($QR \cong M_1R$– po konstrukciji, $RS \cong RS$ i $\angle QRS \cong \angle M_1RS$ – kao uglovi paralelnosti –imaju zajedničku duž paralelnosti). Na osnovu podudarnosti je $QS \cong M_1S$. Sada imamo i da su trouglovi QNS i M_1N_1S podudarni ($QS \cong M_1S$, $\angle NSQ \cong \angle N_1SM_1$ – pošto su to uglovi koji dopunjuju iste uglove QSR i M_1SR do pravih uglova i $\angle QNS \cong \angle M_1N_1S = d$).

Iz ove podudarnosti je $M_1N_1 \cong QN$, a kako je $QN < \varepsilon$, sledi da je $M_1N_1 < \varepsilon$. Odatle se prave a'a i b'b asimptotski približavaju u pravcu paralelnosti.

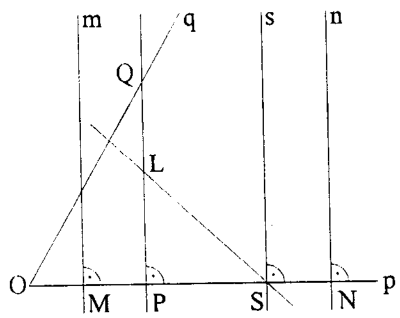
Da bismo dokazali da se prave a'a i b'b razilaze u suprotnom smeru posmatraćemo prave b' i c' iz tačke R. Kako one imaju zajedničko teme, one se neograničeno razilaze jedna od druge. Kako je c' paralelno sa aa', sledi da se a'a i b'b, u smeru suprotnom paralelnosti, neograničeno razilaze.♦

Sledeća teorema se dokazuje skoro isto kao teorema 4.4., pa je zato dajemo bez dokaza.

__Teorema 4.5.__ Ako su a i b dve međusobno paralelne prave, a l proizvoljna duž, tada na pravoj b postoji jedinstvena tačka L kojoj je tačka L' podnožje normale na pravu a, tako da je LL' ≅ l.

__Teorema 4.6.__ U hiperboličkoj ravni postoji jedinstvena prava normalna na jednom kraku, a paralelna sa drugim krakom oštrog ugla.

__Dokaz.__ Još je **Ležandr** pokazao da kad bi sve prave normalne na jednom kraku oštrog ugla pOq sekle drugi krak, tada bi u hiperboličkoj ravni postojao trougao kome je zbir spoljašnjih uglova 2d, što je nemoguće. Zato ćemo sve tačke poluprave Op podeliti u dva skupa M i N takva da važi da proizvoljna prava normalna na Op u nekoj tački skupa M seče krak Oq i proizvoljna prava normalna na Op u nekoj tački skupa N ne seče krak Oq. Primetićemo da su skupovi M i N neprazni i da sve tačke kraka Op pripadaju tačno jednom skupu. Trivijalno se dokazuje da između tačaka jednog od tih skupova nema tačaka drugog skupa. Sada, pošto su ispunjeni uslovi Dedekindove teoreme, postoji tačka S koja razdvaja ta dva skupa, i koja pripada skupu N (inače bi "desno" od nje postojala tačka u kojoj bi normala na Op sekla Oq).



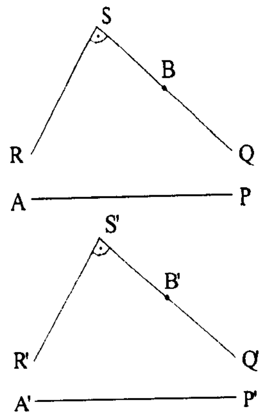
Neka je prava s normalna u S na krak Op. Tada s i Oq nemaju zajedničkih tačaka. Neka je L proizvoljna tačka unutar ugla OSs i unutar ugla SOq, i neka je P normalna projekcija L na krak Op. Kako je ugao OSL oštar, tačka P pripada duži OS, pa PL seče Oq u nekoj tački Q. Kako prava SL seče stranicu PQ trougla OPQ, po Pašovoj aksiomi seći će i duž OQ. Odatle direktno dobijamo da je Oq||s.♦

Uzmemo li ugao pOq iz prethodne teoreme i izvršimo osnu refleksiju u odnosu na Op, slika kraka Oq biće poluprava Oq'. Prava s biće paralelna sa oba kraka Oq i Oq' ugla q'Oq. Takvu pravu s nazivamo granična prava. Sledeća teorema je direktna posledica teoreme 4.6. pa ćemo je ostaviti bez dokaza.

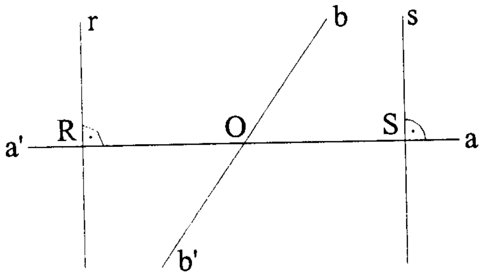
__Teorema 4.7.__ Unutar svakog ugla manjeg od 2d, postoji tačno jedna granična prava.

__Teorema 4.8.__ Svaki par paralelnih pravih može se dovesti do poklapanja sa proizvoljnim parom paralelnih pravih.

Dokaz. Uočimo dva para paralelnih pravih: AP||BQ i A'P'||B'Q'. Na osnovu prethodnih teorema može se konstruisati prav ugao QSR (S je jedinstvena tačka na pravoj BQ) takav da je AP granična prava tog ugla. Isto tako je i prava A'P' granična prava pravog ugla Q'S'R'. Kako su uglovi QSR i Q'S'R' pravi, mogu se dovesti do poklapanja, pa će se tada poklopiti i prave AP i A'P' jer za jedan ugao postoji samo jedna granična prava. Dakle, prave AP i A'P' , odnosno BQ i B'Q' su dovedene do poklapanja.♦



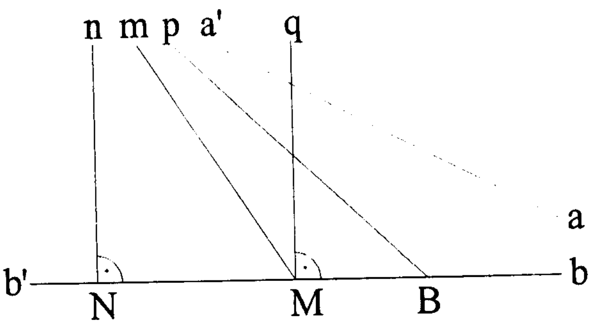
Teorema 4.9. Ako se prave a'a i b'b seku, normalna projekcija jedne na drugu je tačka ili otvorena duž.



Dokaz. Neka se prave a'a i b'b seku u tački O. Ako su one međusobno normalne, projekcija jedne na drugu je tačka. U suprotnom ćemo posmatrati oštre uglove aOb i a'Ob'. Na osnovu teoreme 4.6. na pravu a'a mogu se postaviti prave s i r normalne na nju takve da su one paralelne sa polupravom Ob, odnosno Ob'. Odavde je normalna projekcija prave b'b na pravu a'a otvorena duž SR, gde su S i R presečne tačke pravih s i r sa pravom a'a, redom.♦

Teorema 4.10. Ako su prave a'a i b'b međusobno paralelne, normalna projekcija jedne na drugu je otvorena poluprava.

Dokaz. Neka je B proizvoljna tačka prave b'b i p prava kroz teme B paralelna pravoj a'a u smeru aa'. Ako je p⊥b'b, obeležićemo pravu p sa n, u suprotnom konstruisaćemo pravu n normalnu na b'b i paralelnu sa p (koja postoji na osnovu teoreme 4.6.). Neka je presek prave n i prave b'b tačka N. Otvorena poluprava Nb je normalna projekcija prave a'a na pravu b'b. Zaista, lako se dokazuje da podnožje normale iz proizvoljne tačke prave a'a na pravu b'b pripada polupravoj Nb. S druge strane, obeležimo sa M proizvoljnu tačku otvorene poluprave Nb i kroz nju konstruišemo pravu m paralelnu pravama a'a i n. Kako je ugao NMm oštar i kako je prava a'a granična prava ugla bMm, prava q kroz tačku M normalna na b'b presecaće pravu a'a. Dakle, normala u proizvoljnoj tački na otvorenoj polupravi Nb preseca a'a, a kako se još uz to svaka tačka prave a'a slika na jednu tačku



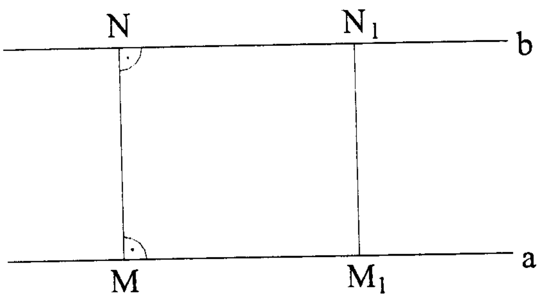
poluprave Nb sledi da otvorena poluprava Nb zaista predstavlja projekciju prave a'a na pravu b'b.♦

<u>Teorema 4.11.</u> Ako je prava p hiperparalelna pravoj q, onda je i q hiperparalelna pravoj p.

<u>Dokaz.</u> Prava q ne može presecati pravu p niti biti paralelna pravoj p jer je prava p hiperparalelna pravoj q. Jedina preostala mogućnost je da je prava q hiperparalelna pravoj p.♦

<u>Teorema 4.12.</u> U ravni Lobačevskog prave ne mogu imati više od jedne normale, pri čemu prave koje se seku i paralelne prave nemaju zajedničkih normala, a prave koje su hiperparalelne mogu je imati, i to samo jednu.

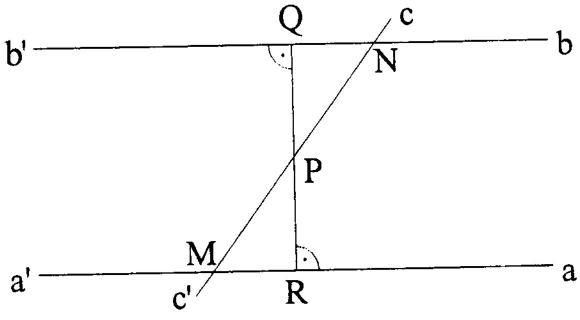
<u>Dokaz.</u> Uočimo u ravni proizvoljnu pravu a i na njoj proizvoljnu tačku M. Konstruisaćemo kroz tačku M normalu na pravu a, na njoj izabrati proizvoljnu tačku N različitu od M i u njoj konstruisati pravu b normalnu na MN. Prave a i b imaju zajedničku normalu po konstrukciji. Kada bi prave a i b imale još jednu zajedničku normalu M_1N_1, tada bi zbir uglova u četvorouglu MNM_1N_1 bio 4d, što je ekvivalentno petom Euklidovom postulatu. Dakle, u ravni Lobačevskog dve prave ne mogu imati dve zajedničke normale.



Ako se dve prave seku u nekoj tački, one ne mogu imati zajedničku normalu jer bi tada postojao trougao sa dva prava ugla. Ako su dve prave paralelne, takođe ne mogu imati zajedničku normalu jer bi ugao paralelnosti bio d, što je ekvivalentno petom Euklidovom postulatu. Dakle, prave koje mogu imati zajedničku normalu moraju biti hiperparalelne.♦

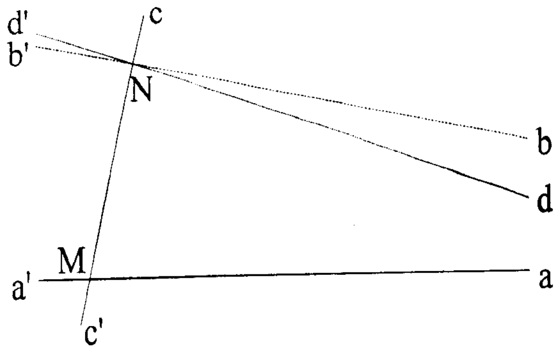
<u>Teorema 4.13.</u> Da bi dve prave bile hiperparalelne neophodno je i dovoljno da postoji barem jedna prava koja bi, sekući date dve, obrazovala sa njima jednake unakrsne uglove.

<u>Dokaz.</u> Neka su date prave a'a i b'b i neka ih prava c'c seče u M i N, respektivno. Tada su po pretpostavci uglovi aMc i b'Nc' podudarni. Podelimo odsečak MN na dve polovine tačkom P i iz tačke P spustimo normale PR i PQ na prave a'a i b'b. Tada su trouglovi PMR i PNQ podudarni ($PN \cong PM$, $\angle PQN \cong \angle PRM = d$, $\angle PNQ \cong \angle PMR$). Iz ove podudarnosti je $\angle MPR \cong \angle NPQ$.



Prema zakonima apsolutne geometrije ova dva ugla biće unakrsna, što znači da je RPQ prava linija. Kako prave a'a i b'b imaju zajedničku normalu RQ, one su po prethodnoj teoremi hiperparalelne.♦

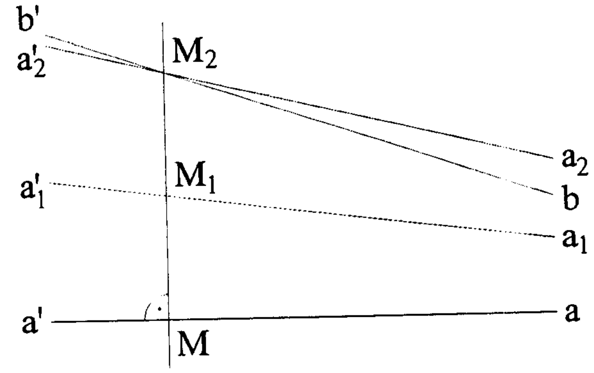
Teorema 4.14. Ako dve paralelne prave presečemo trećom, onda u smeru paralelnosti tih pravih zbir unutrašnjih uglova koji se nalaze sa iste strane uvek je manji od 2d.



Dokaz. Neka je a'a||b'b i neka ih prava c'c seče u tačkama M i N, redom. Obeležimo $\angle aMN = \alpha$ i $\angle bNM = \beta$. Ako je $\alpha + \beta = 2d$, tada su na osnovu posledice prethodne teoreme prave a'a i b'b hiperparalelne. Neka je $\alpha + \beta > 2d$. Tada ćemo kroz tačku N povući pravu d'd, tako da ona sa pravom c'c obrazuje $\angle c'Nd = \chi$, pri čemu je $\alpha + \chi = 2d$. Odatle je $\beta > \chi$, pa prava d'd prolazi kroz ugao bNc'. Po malopređašnjem razmatranju prave d'd i a'a su hiperparalelne. Kako je s druge strane b'b paralelna sa a'a u tački N, proizilazi da se prave d'd i a'a seku. Kontradikcija! Jedina preostala solucija je $\alpha + \beta < 2d$.♦

Teorema 4.15. Ugao paralelnosti $\Pi(x)$ jeste funkcija duži paralelnosti x koja se stalno smanjuje, tj. sa povećanjem duži paralelnosti x ugao paralelnosti $\Pi(x)$ se smanjuje i obrnuto, sa smanjivanjem duži paralelnosti ugao paralelnosti se povećava, pri čemu svakoj vrednosti duži paralelnosti x odgovara sasvim određena vrednost ugla paralelnosti $\Pi(x)$ i oblast postojanja te funkcije predstavlja interval od 0 do $+\infty$, tj. $0 < x < +\infty$.

Dokaz. Uzmimo proizvoljnu pravu a'a i na njoj proizvoljnu tačku M u kojoj ćemo na tu pravu postaviti normalu. Na toj normali iznad tačke M obeležimo tačke M_1 i M_2 tako da je $MM_1 = x_1$, $MM_2 = x_2$ i $x_1 < x_2$. Kroz tačke M_1 i M_2 povucimo odgovarajuće prave $a_1'a_1$ i $a_2'a_2$ paralelne pravoj a'a u smeru a'a. Dokazaćemo da je $\Pi(x_1) > \Pi(x_2)$. Pretpostavimo suprotno. Ako je $\Pi(x_1) = \Pi(x_2)$, tada će prave $a_1'a_1$ i $a_2'a_2$ biti hiperparalelne. S druge strane je $a_1'a_1 \| a'a$ i $a_2'a_2 \| a'a$, pa je $a_1'a_1 \| a_2'a_2$. Kontradikcija.

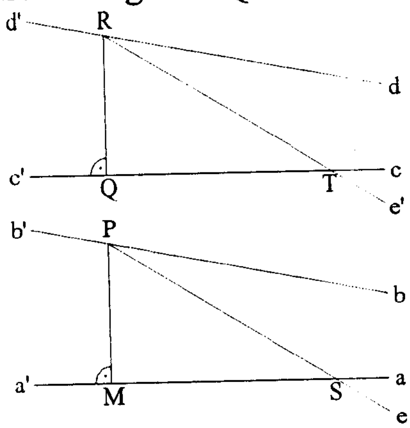


Pretpostavimo da je $\Pi(x_1) < \Pi(x_2)$. Tada kroz tačku M_2 konstruišemo pravu b'b tako da je $\angle MM_2b \cong \angle MM_1a_1$. Prava b'b pripadaće tada uglu MM_2a_2. Prave b'b i $a_1'a_1$ su hiperparalelne pošto su odgovarajući uglovi koje obrazuju te prave sa sečicom M_1M_2 jednaki međusobno. S druge strane, prave b'b i $a_1'a_1$ se seku pošto je $a_2'a_2 \| a_1'a_1$ u tački M_2. Kontradikcija. Prema tome, $\Pi(x_1) > \Pi(x_2)$.

U drugom delu dokaza pokazaćemo da ugao paralelnosti zavisi samo od veličine duži paralelnosti i ne zavisi od položaja prave a'a i tačke M na njoj.

Neka je a'a proizvoljna prava, prava b'b' paralelna sa njom, PM duž paralelnosti (P pripada pravoj b'b, M pripada pravoj a'a i PM $\perp$ a'a) i Π(MP) ugao paralelnosti duži MP. Uzmimo bilo koju pravu c'c različitu od a'a i na njoj proizvoljnu tačku Q. Iz te tačke konstruišemo normalu na pravu c'c i na toj normali iznad Q odmerimo tačku R tako da je QR podudarno MP. Zatim kroz tačku R povučemo pravu d'd paralelnu pravoj c'c. Dokazaćemo da je Π(QR) = Π(MP).

Pretpostavimo da je Π(QR) < Π(MP). Povucimo koz tačku P u smeru paralelnosti polupravu Pe koja sa MP obrazuje ugao ePM jednak uglu Π(QR). Ona će prolaziti kroz ugao bPM. Kako je b'b||a'a, poluprava Pe seći će a'a u nekoj tački S. Sada na pravoj c'c u smeru paralelnosti označimo tačku T takvu da je QT $\cong$ MS. Trouglovi QRT i MPS su podudarni (QR $\cong$ MP , QT $\cong$ MS – po konstrukciji i $\angle$RQT $\cong$ $\angle$PMS = d). Iz ove podudarnosti je $\angle$QRT $\cong$ $\angle$MPS = Π(QR). Ali tada se prava d'd podudara sa pravom RT koja seče pravu c'c u tački T, odakle se d'd i c'c seku, dok bi po uslovu trebalo da bude da su paralelne. Kontradikcija.

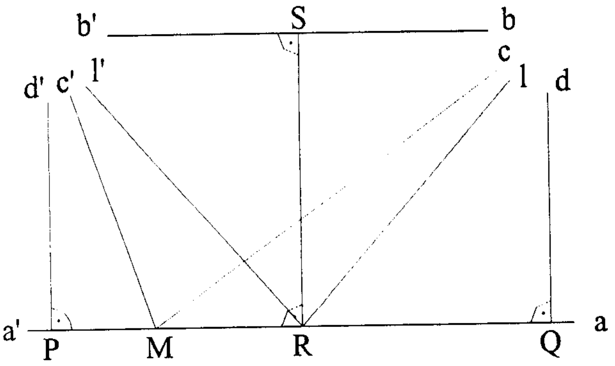


Analogno se dokazuje da Π(QR) nije veće od Π(MP). Prema tome, Π(QR) = Π(MP).♦

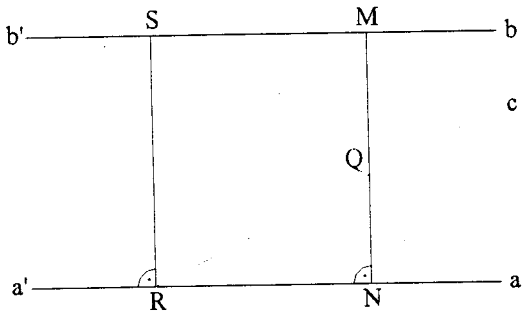
<u>**Teorema 4.16.**</u> Dve prave koje su hiperparalelne uvek imaju zajedničku normalu i to samo jednu, od koje se one neograničeno razilaze jedna od druge, na obe strane, tj. rastojanje tačke uzete na jednoj od pravih koje su hiperparalelne do druge prave prema njenom udaljavanju od zajedničke normale neograničeno se povećava.

<u>**Dokaz.**</u> Neka su a'a i b'b dve hiperparalelne prave i M tačka na jednoj od njih, npr. na pravoj a'a. Povucimo kroz tačku M prave c i c', takve da važi da je c paralelna sa b'b u smeru b'b i c' paralelna sa b'b u smeru bb'. Svaka od pravih c i c' sa pravom a'a je normalna ili sa njom pravi po jedan oštar ugao. Ako prava c, odnosno c', nije normalna na pravu a'a, tada ćemo unutar oštrog ugla koji ona gradi sa pravom a'a konstruisati pravu d, odnosno d', normalnu na pravu a'a i paralelnu sa pravom c, odnosno c' (prava d, odnosno d', postoji po teoremi 4.6.). Ako je prava c (c') normalna na a'a, tada ćemo pravu c (c') obeležiti sa d (d'). Neka su tačke Q i P presečne tačke pravih d i d' sa a'a, redom, i neka je R tačka prave a'a takva da važi PR $\cong$ RQ. Iz tačke R na pravu b'b spustićemo

normalu, i podnožje normale obeležićemo sa S. Konstruisaćemo dalje prave l i l' kroz tačku R, tako da je l paralelno sa b'b u smeru b'b i l' paralelno sa b'b u smeru bb'. Tada su uglovi SRl i SRl' podudarni kao uglovi paralelnosti nad istom duži paralelnosti SR. Takođe su podudarni uglovi QRl i PRl' jer važi da je Qd paralelno sa Rl (paralelno sa b'b u smeru b'b), Pd' paralelno sa Rl' (paralelno sa b'b u smeru bb') i PR ≅ RQ (pa su uglovi QRl i PRl' podudarni kao uglovi paralelnosti nad podudarnim dužima paralelnosti). Dobili smo da je ∠SRl ≅ ∠SRl' i ∠QRl ≅ ∠PRl', pa su uglovi kod tačke R, QRS i PRS podudarni, a njihov zbir je 2d. Dakle, oba ta ugla su prava. Time smo dokazali da je prava RS normalna na pravu a'a, tj. hiperparalelne prave a'a i b'b imaju zajedničku normalu. Da je ta normala jedinstvena, dokazali smo teoremom 4.12.



Ostaje da dokažemo da se prave a'a i b'b razilaze u oba smera. U tu svrhu konstruisaćemo pravu c kroz tačku R – gde su R i S tačke zajedničke normale pravih a'a i b'b i pripadaju pravim a'a i b'b, redom, takvu da je c paralelno sa b'b, u smeru b'b. Kako se prave a'a i c seku, one se u smeru a'a neograničeno razilaze. Uzmimo na polupravoj Sb proizvoljnu tačku M i spustimo normalu iz tačke M na pravu a'a. Neka je N podnožje normale iz tačke M na pravu a'a i Q presečna tačka duži MN i prave c. Kako se prave a'a i c neograničeno razilaze, pomeranjem tačke M po pravoj b'b u smeru b'b odsečak NQ će se neograničeno povećavati, a samim tim i duž MN. Odavde je jasno da se prave b'b i a'a neograničeno razilaze u smeru b'b, odnosno a'a.



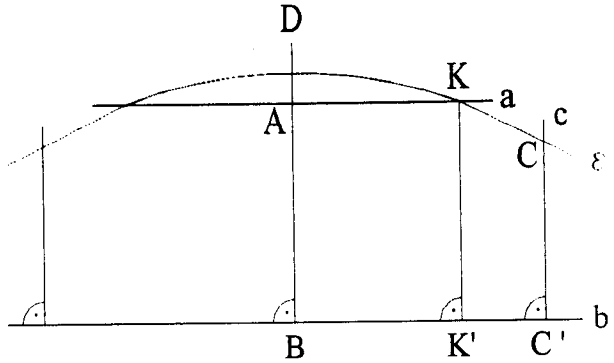
Analogno se dokazuje da se prave a'a i b'b neograničeno razilaze i u suprotnom smeru.♦

Naredna teorema je posledica teoreme 4.16.

__Teorema 4.17.__ Ako su prave p i q hiperparalelne, normalna projekcija jedne na drugu je otvorena duž.

__Teorema 4.18.__ Ako je prava n u tačkama A i B normalna na dvema različitim pravama a i b, a l proizvoljna duž veća od duži AB, onda na pravoj a postoje tačno dve tačke K i L kojima su podnožja normala na pravoj b tačke K' i L' takve da je KK' ≅ LL' ≅ l.

Dokaz. Neka je D tačka polupravе BA sa temenom B, takva da je BD ≅ l, i neka je c prava normalna na b, a paralelna pravoj a. Neka je C' presečna tačka pravih b i c i neka je C tačka prave c takva da je CC' ≅ l (duž C'C se prostire u pravcu paralelnosti pravih a i c). Tada tačke C i D pripadaju ekvidistanti (videti poglavlje o pramenovima pravih) i nalaze se sa raznih strana prave a, pa prava a i ekvidistanta imaju tačku preseka K. Ako je K' podnožje normale iz K na b, tada je KK' ≅ l. Kako

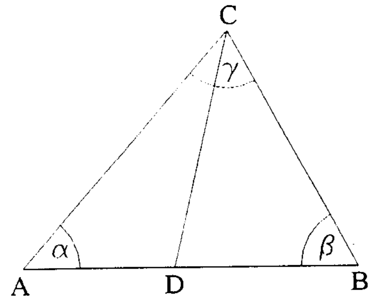


postoje dve različite prave c normalne na b i paralelne sa a, postojaće i dve različite tačke K i L na pravoj a, takve da je KK' ≅ LL' ≅ l, gde su K' i L' podnožja normala iz K i L na pravu b. ♦

Teorema 4.19. Zbir unutrašnjih uglova trougla u ravni Lobačevskog jeste promenljiva veličina (zavisi od dužina stranica) i uvek je manji od 2d.

Dokaz. Da zbir unutrašnjih uglova trougla ne može biti veći od 2d, govori teorema 2.3. Ukoliko je zbir uglova u trouglu jednak 2d, onda je to ekvivalent petog Euklidovog postulata, pa u ravni tog trougla važi Euklidska geometrija. Dakle, zbir unutrašnjih uglova trougla u ravni Lobačevskog je manji od 2d.

Dokazaćemo da je zbir uglova u trouglu u hiperboličkoj ravni promenljiva veličina. Posmatrajmo trougao ABC i njegove odgovarajuće uglove α, β i χ. Neka je $\alpha + \beta + \chi = k$, gde je k konstanta za sve trouglove. Uzmimo dalje na otvorenoj duži AB tačku D i spojimo je sa tačkom C. Obeležimo uglove ACD, DCB, ADC, BDC sa χ_1, χ_2, δ_1, δ_2, respektivno. Primetimo da je $\chi_1 + \chi_2 = \chi$ i $\delta_1 + \delta_2 = 2d$. Iz pretpostavke imamo da je



$\alpha + \delta_1 + \chi_1 = k$, kao i $\beta + \delta_2 + \chi_2 = k$. Kombinovanjem prethodnih jednakosti dobijamo niz ekvivalentnih izraza:

$$\alpha + \delta_1 + \chi_1 + \beta + \delta_2 + \chi_2 = 2k$$
$$\alpha + \beta + (\chi_1 + \chi_2) + (\delta_1 + \delta_2) = 2k$$
$$(\alpha + \beta + \chi) + 2d = 2k$$
$$k + 2d = 2k$$
$$k = 2d,$$

odakle je $\alpha + \beta + \chi = 2d$, što ne može biti u ravni Lobačevskog. Dakle, zbir uglova u trouglu u hiperboličkoj ravni je promenljiva veličina. ♦

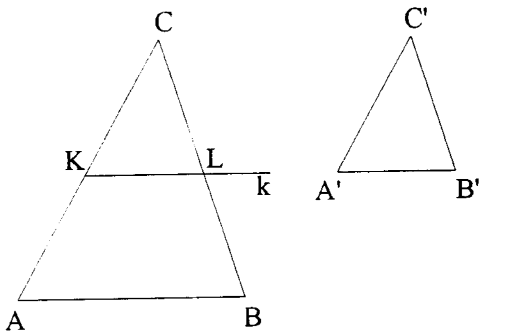
Narednu teoremu dobijamo kao posledicu prethodne teoreme.

Teorema 4.20. Zbir unutrašnjih uglova bilo kojeg n – tougla u ravni Lobačevskog manji je od $(n-2)\cdot 2d$.

Kao što je poznato u apsolutnoj geometriji postoji pet stavova podudarnosti trouglova (SUS, USU, SSS, SSU, UUS). Tih pet stavova važi kako u Euklidskoj, tako i u hiperboličnoj geometriji. Primetimo još i to da su u Euklidskoj geometriji stavovi USU i UUS ekvivalentni, dok u geometriji Lobačevskog postoji razlika između njih, ali su oba podjednako primenljiva. U geometriji Lobačevskog postoji i šesti stav o podudarnosti trouglova, o čemu govori sledeća teorema.

Teorema 4.21. Dva trougla su podudarna ako i samo ako su im odgovarajući uglovi međusobno podudarni.

Dokaz. Neka trouglovi ABC i A'B'C' imaju podudarne odgovarajuće uglove kod temena A, B, C, odnosno, A', B', C'. Pretpostavimo da trouglovi ABC i A'B'C' nisu podudarni i da važi da je AC > A'C', ne umanjujući opštost. Tada na stranici AC trougla ABC možemo odrediti takvu tačku K za koju važi da je KC ≅ A'C'. Konstruišimo kroz K polupravu k takvu da je ∠CKk ≅ ∠C'A'B' i da poluprava Kk prolazi kroz unutrašnjost trougla ABC. Po Pašovoj aksiomi prava koja sadrži polupravu Kk seći će ili stranicu BC ili stranicu AB. Kako je ∠CKk≅∠C'A'B'≅ ∠CAB, sledi da su poluprave k i AB hiperparalelne, pa se ne mogu seći. Dakle, Kk će presecati BC u nekoj tački L. Trouglovi CKL i C'A'B' biće podudarni (∠LCK ≅ ∠B'C'A', ∠LKC ≅ ∠ B'A'C' i KC ≅ A'C'). Ali odatle dobijamo da je zbir unutrašnjih uglova četvorougla ABLK jednak 4d, što je u suprotnosti sa teoremom 4.20. Dakle, trouglovi ABC i A'B'C' su podudarni. ♦



Posle ove teoreme jasno je da u ravni Lobačevskog nema sličnih trouglova, i uopšte, ne postoje slične figure, tj. jedina moguća sličnost koja postoji je sličnost sa koeficijentom 1.

Na kraju ćemo se još dotaći i pitanja izometrijskih transformacija u hiperboličkoj ravni. Pored izometrijskih transformacija koje važe u euklidskoj ravni, a i u ravni Lobačevskog, u hiperboličkoj ravni postoji još jedna izometrijska transformacija koju nazivamo paralelno pomeranje ili oriciklična rotacija. Naime, paralelno pomeranje je kompozicija osnih refleksija u odnosu na dve međusobno paralelne prave. Zato važi sledeća teorema:

Teorema 4.22. U hiperboličkoj ravni direktne izometrijske transformacije su: identičnost, rotacija, translacija i paralelno pomeranje, a indirektne izometrijske transformacije su osna refleksija i klizajuća refleksija.

5. Pramenovi pravih u ravni

Pramen pravih u ravni je podskup χ svih pravih te ravni takav da za svake tri prave a, b i c tog podskupa važi da je kompozicija osnih refleksija $S_c \circ S_b \circ S_a$ takođe osna refleksija i da ne postoji prava p van skupa χ za koju važi da je $S_p \circ S_b \circ S_a$ osna refleksija.

Već nam je poznato da u Euklidskoj ravni postoje dve različite vrste pramenova pravih – pramen konkurentnih i pramen paralelnih pravih. U ravni Lobačevskog postoje tri različite vrste pramenova pravih:

1. Skup pravih koje prolaze kroz neku tačku O te ravni. Tačku O nazivamo središtem pramena, a pramen nazivamo pramenom konkurentnih pravih ili eliptičkim pramenom, i obeležavamo ga sa χ_O.
2. Skup pravih normalnih na nekoj pravoj s te ravni. Pravu s nazivamo osnovicom tog pramena, a sam pramen nazivamo ortogonalnim ili hiperboličkim pramenom, i obelečavamo ga sa χ_S.
3. Skup pravih paralelnih datoj pravoj u jednom smeru u ravni. Takav pramen nazivamo pramenom paralelnih pravih ili paraboličkim pramenom.

Pre nego što krenemo dalje, pomenućemo da je pramen potpuno određen sa dve svoje prave. Ovo tvrđenje nam je poznato još iz apsolutne geometrije.

Neka su χ i χ' dva pramena pravih iz te ravni. Ako je jedan od ta dva pramena eliptički, oni će imati tačno jednu zajedničku pravu. Ako je jedan od tih pramenova hiperbolički, a drugi parabolički, postojaće jedinstvena prava koja im pripada ako i samo ako osnovica hiperboličkog pramena nije paralelna pravama paraboličkog pramena. Ako su oba pramena pravih hiperbolička, oni će imati zajedničku pravu koja im pripada ako i samo ako su im osnovice hiperparalelne. Ako su oba pramena parabolička, oni će u svakom slučaju imati jednu zajedničku pravu.

Još jedna zanimljiva osobina paraboličkog pramena je da se translacijom duž bilo koje prave koja mu pripada preslikava na sebe.

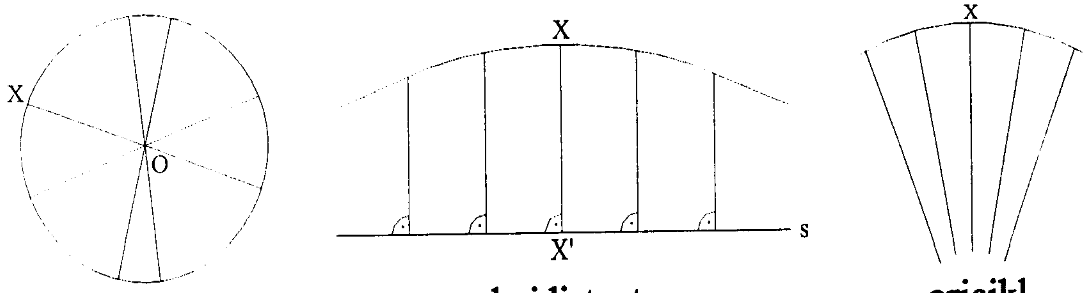
Neka je χ pramen pravih u hiperboličkoj ravni i X bilo koja tačka na nekoj od pravih tog pramena (različita od O ako se radi o pramenu χ_O, i koja ne pripada pravoj s ako se radi o pramenu χ_S). Skup svih tačaka u toj ravni osnosimetričnih tački X u odnosu na prave tog pramena naziva se epicikl.

Kako je epicikl definisan pramenom χ i tačkom X obeležavaćemo ga sa $\varepsilon(\chi, X)$. U zavisnosti od vrste pramena postoje tri različite vrste epicikala:

1. Ako je χ_O eliptički pramen, epicikl $\varepsilon(\chi_O, X)$ zove se krug, tačka O središte ili centar kruga, a duž OX poluprečnik kruga.

2. Ako je χ_S hiperbolički pramen, epicikl ε (χ_S, X) zove se ekvidistanta, prava s osnovica ekvidistante, a XX' visina ekvidistante, gde je X' podnožje normale iz tačke X na pravu s.

3. Ako je χ parabolički pramen, epicikl ε (χ, X) zove se oricikl.

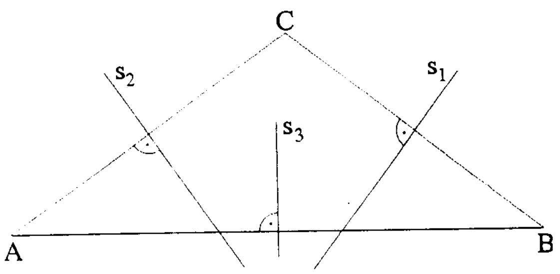


krug **ekvidistanta** **oricikl**

Navešćemo nekoliko osnovnih osobina epicikala. Svi epicikli su linije konstantne krivine koje sa pravom mogu imati najviše dve zajedničke tačke. Krug je zatvorena linija za koju važi da je svaka tačka na njoj jednako udaljena od centra O. Oricikl nije zatvorena linija i svaka dva oricikla se podudaraju. Ekvidistanta takođe nije zatvorena linija, a dve ekvidistante su podudarne ako i samo ako su im visine podudarne. Ekvidistanta ima još i tu osobinu da su njene sve tačke podjednako udaljene od osnovice ekvidistante. Da svaki trougao u ravni može da se upiše u jedan epicikl govori sledeća teorema:

<u>Teorema 5.1.</u> Oko bilo kojeg trougla uvek se može opisati linija konstantne krivine – ili krug ili oricikl ili ekvidistanta.

<u>Dokaz.</u> Posmatrajmo trougao ABC. Neka su s_1, s_2 i s_3 simetrale stranica BC, AC i AB, respektivno. Postoji teorema koja kaže da ako simetrale dve stranice trougla pripadaju nekom pramenu tada i simetrala treće stranice pripada tom istom pramenu. Zato, ako s_1 i s_2 pripadaju pramenu χ, i s_3 pripada pramenu χ. Ako je χ eliptični pramen pravih, tada tačke A, B i C pripadaju krugu. Ako je χ hiperbolički pramen tačke A, B i C pripadaju ekvidistanti. Ako je χ parabolički pramen, tačke A, B i C pripadaju oriciklu. Time je teorema dokazana.♦



<u>6. Defekt</u>

Zbir unutrašnjijh uglova prostog ravnog n – tougla $A_1A_2...A_n$ označićemo sa σ ($A_1A_2...A_n$). Defekt tog n – tougla definišemo sa

$$\delta\,(A_1A_2...A_n) = (n-2)\cdot 2d - \sigma\,(A_1A_2...A_n).$$

Obeležimo li sa p poligon $A_1A_2...A_n$ defekt tog poligona obeležićemo sa $\delta(p)$.

Teorema 6.1. Ako je poligonska površ p razložena nekom poligonskom linijom l na dve poligonske površi p_1 i p_2 tada je defekt površi p jednak zbiru defekata površi p_1 i p_2.

Dokaz. Ako su m, m_1 i m_2 brojevi temena površi p, p_1, p_2, redom, a n broj temena poligonske linije l (izuzimajući krajeve linije l) koja površ p razdvaja na površi p_1 i p_2, onda je

$$m_1 + m_2 = m + 2n + 2 + r$$

$$\sigma(p_1) + \sigma(p_2) = \sigma(p) + n\cdot 4d + r\cdot 2d,$$

gde je r = 0, 1, 2 u zavisnosti od toga da li su oba kraja poligonske linije istovetna sa temenima površi p ili je samo jedan od tih krajeva teme površi p ili nijedan od tih krajeva nije teme površi p. Tada važi:

$$\begin{aligned}\delta(p) &= (m-2)\cdot 2d - \sigma(p) = \\ &= (m_1 + m_2 - 2n - r - 4)\cdot 2d - \sigma(p_1) - \sigma(p_2) + 2n\cdot 2d + r\cdot 2d = \\ &= [(m_1 - 2)\cdot 2d - \sigma(p_1)] + [(m_2 - 2)\cdot 2d - \sigma(p_2)] = \\ &= \delta(p_1) + \delta(p_2).\end{aligned}$$

Dakle, $\delta(p) = \delta(p_1) + \delta(p_2)$.♦

Pomoću prethodne teoreme i matematičke indukcije dokazuje se sledeća teorema.

Teorema 6.2. Ako je poligonska površ p razložena na konačno mnogo poligonskih površi $p_1, p_2, ..., p_n$ tada je defekt površi p jednak zbiru defekata površi $p_1, p_2, ..., p_n$.

Zbog njihove dužine i sledeće dve teoremu daćemo bez dokaza.

Teorema 6.3. Trougaone površi jednakih defekata mogu se razložiti na jednake površi.

Teorema 6.4. Ako je X promenljiva tačka ivice BC trougla ABC i ako je x mera duži BX, tada je funkcija $f(x) = \delta(ABX)$ neprekidna i strogo rastuća.

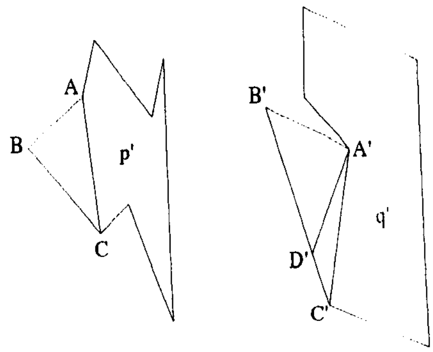
Napomenimo da se pri dokazu teoreme 6.4. koristi teorema 6.1. i tvrđenje da je mera ugla BAX neprekidna funkcija mere x duži BX.

Sada bez problema možemo dokazati i sledeću teoremu.

Teorema 6.5. Poligonske površi jednakih defekata mogu se razložiti na jednake površi.

Dokaz. Neka su p i q dve poligonske površi jednakih defekata od kojih prva ima a, a druga b ivica, i neka je k = a + b. Kada su p i q trouglovi, tj. k = 6, teorema važi na osnovu teoreme 6.3. Teoremu ćemo dokazati metodom potpune indukcije. Pretpostavićemo da ona važi za k = 7, 8,..., n i dokazati da ona važi za k = n + 1.

Uočimo na poligonskoj površi p tri uzastopna temena A, B i C za koje važi da AC pripada površi p i uočićemo na poligonskoj površi q tri uzastopna temena A', B' i C' za koje važi da A'C' pripada površi q. Tada smo dijagonalom AC, odnosno A'C', podelili površ p, odnosno q, na površ p' koja ima a – 1 ivicu i na trougao ABC, odnosno na površ q' koja ima b – 1 ivicu i na trougao A'B'C'. Ako trouglovi ABC i A'B'C' imaju jednake defekte imaće ih površi p' i q' jer povši p i q imaju jednake defekte. Tada se na osnovu indukcijske pretpostavke p' i q' mogu razložiti na jednake površi, a odatle i p i q mogu da se razlože na jednake površi. Ako trouglovi ABC i A'B'C' nemaju jednake defekte, tada, ne umanjujući opštost, neka važi δ (ABC) < δ (A'B'C'). Na osnovu teoreme 6.4. na ivici B'C' tada postoji tačka D' takva d je δ (ABC) = δ (A'B'D'). Neka je q" poligonska površ koja se dobija kada se od q odbije trougao A'B'D'. Kako su defekti trouglova ABC i A'B'D' jednaki, jednaki su i defekti poligonskih površi p' i q", pa se p' i q" mogu, na osnovu indukcijske pretpostavke, razložiti na jednake površi. Odavde dobijamo da se i p i q mogu razložiti na jednake površi.♦



Ako je P skup svih poligonskih površi hiperboličke ravni, tada je funkcija δ, koja svakom poligonu iz P dodeljuje vrednost njegovog defekta δ (p) nenegativna i aditivna. Tako definisanu funkciju δ smatramo merom pa ćemo broj δ (p) nazivati površinom poligonske površi.

Prosto povezan lik p u hiperboličkoj ravni zvaćemo merljivim ako postoji niz q_n poligonskih površi koje pripadaju liku p i niz r_n poligonskih površi koje sadrže taj lik i da važi

$$q_1 \subset q_2 \subset q_3 \subset \ldots \subset q_n \subset \ldots \quad \text{i} \quad r_1 \supset r_2 \supset r_3 \supset \ldots \supset r_n \supset \ldots$$

$$\delta\,(p) = \lim_{n\to\infty} \delta\,(q_n) = \lim_{n\to\infty} \delta\,(r_n)$$

Ovakvo δ (p) zovemo merom ili površinom lika p. Za ovakvu funkciju δ važe sledeće osobine:

1. za svaki merljiv lik p je $\delta\,(p) \geq 0$;
2. ako je lik p unija disjunktnih merljivih likova $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tada je
$$\delta\,(p) = \delta\,(p_1) + \ldots + \delta\,(p_n)$$
3. podudarni likovi imaju istu površinu.

Reći ćemo još i to da važi da ako funkcija $\delta': P \to R$ zadovoljava ova tri uslova ako i samo ako postoji broj $k > 0$ takav da je $\delta' = k \cdot \delta$.

7. Asimptotski poligoni

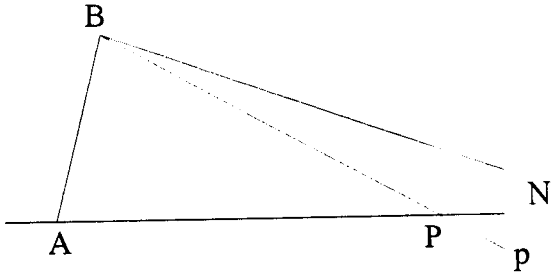
Ako se u nekom poligonu dve susedne ivice ne seku već su paralelne prave (ili poluprave), takav lik zvaćemo asimptotskim poligonom sa jednim nesvojstvenim temenom. Postojaće i poligoni sa više od jednim nesvojstvenim temenom, pa čak i poligoni čija su dva susedna temena nesvojstvena. Kod takvih poligona neke ivice će biti poluprave ili prave.

Poligone koje imaju bar jedno nesvojstveno teme zvaćemo asimptotski poligoni. Uzećemo da je mera ugla kod nesvojstvenog temena jednaka nuli.

Asimptotski trougao može imati jedno, dva ili tri nesvojstvena temena. U sledećih nekoliko teorema dokazaćemo da nekoliko teorema povezanih sa običnim trouglovima važe i za asimptotske trouglove.

Teorema 7.1. Spoljašnji ugao α' kod svojstvenog temena A trougla kome je teme N nesvojstveno, veci je od unutrasnjeg ugla β kod svojstvenog temena B tog trougla.

Dokaz. Ako su uglovi α' i β međusobno podudarni tada su po teoremi 4.13. prave AN i BN hiperparalelne što je suprotno postavci teoreme da ja N nesvojstveno teme.



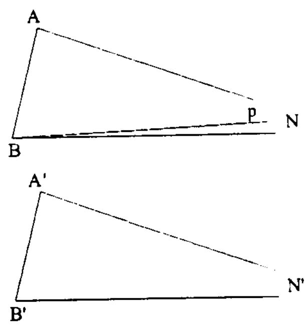
Ako je $\alpha'<\beta$ tada u uglu β postoji poluprava p sa temenom B koja sa polupravom BA zahvata ugao podudaran uglu α'. Kako je BN paralelna sa AN, poluprava p će seći pravu AN u nekoj tački P. Međutim, tada bi u trouglu ABP spoljašnji ugao kod temena A bio jednak unutrašnjem uglu kod temena B, što je nemoguće. Zato je $\alpha' > \beta$.♦

Iz ove teoreme sledi da je zbir unutrašnjih uglova nesvojstvenog trougla manji od 2d, pa je njihov defekt pozitivan.

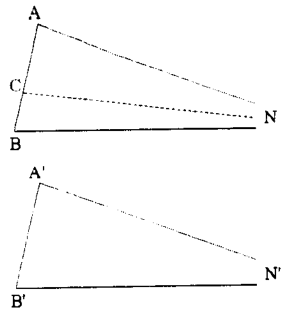
Teorema 7.2. Trouglovi ABN i A'B'N' sa nesvojstvenim temenima N i N' su međusobno podudarni ako i samo ako su:

1. međusobno podudarni uglovi A i A' i stranice AB i A'B';
2. uglovi A i B podudarni uglovima A' i B'.

Dokaz. Ako su trouglovi ABN i A'B'N' podudarni, tvrđenja 1 i 2 su očigledna. Dokažimo i suprotan smer.



1. Pretpostavimo da trouglovi ABN i A'B'N' nisu podudarni, već da je, ne umanjujući opštost, ugao kod B veći od ugla kod B'. Povucimo kroz teme B polupravu p koja sa polupravom BA gradi ugao podudaran uglu kod B'. Međutim, tada kroz teme B prolaze dve prave BN i p paralelne sa pravom AN. Kontradikcija.
2. Pretpostavimo da trouglovi ABN i A'B'N' nisu podudarni i da je, ne umanjujući opštost, AB > A'B'. Tada na stranici AB postoji tačka C takva da je AC ≅ A'B', i postoji poluprava CN paralelna pravoj AN i



pravoj BN. Tada bi asimptotski trouglovi CAN i A'B'N' bili podudarni, pa bi u asimptotskom trouglu CBN spoljašnji ugao kod temena C bio podudaran unutrašnjem uglu kod temena B, što je protivno teoremi 7.1.♦

Sledeće dve teoreme izvode se bez većih problema iz teoreme 7.2.

<u>Teorema 7.3.</u> Dva asimptotska trougla AMN i A'M'N' sa nesvojstvenim temenima M, N i M', N' su podudarni ako i samo ako su im uglovi kod temena A i A' podudarni.

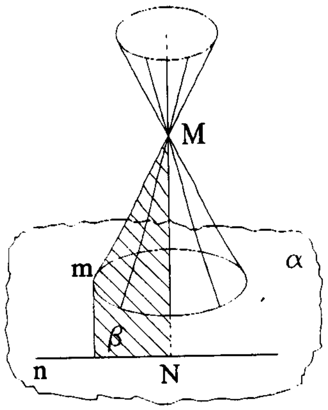
<u>Teorema 7.4.</u> Bilo koja dva trougla sa svim nesvojstvenim temenima su međesobno podudarni likovi.

Napomenućemo još i to da se kod asimptotskih poligona defekt računa na standardan način, tj. $\delta\ (A_1A_2...A_n) = (n-2)\cdot 2d - \sigma\ (A_1A_2...A_n)$ i da poligonska površ sa nesvojstvenim temenima ima konačnu površinu.

8. Hiperbolički prostor

Na početku ovog poglavlja prvo ćemo definisati osnovne odnose pravih i ravni koji vladaju u hiperboličkom prostoru. Naime, dve prave osim što mogu da se seku, da budu paralelne ili hiperparalelne (što nam je poznato iz hiperbličke ravni), mogu i da se mimoilaze. Prava i ravan mogu da imaju jednu zajedničku tačku ako prava probija ravan, prava može da leži u ravni, prava može da bude paralelna sa ravni ako je paralelna sa svojom normalnom projekcijom u toj ravni i prava može da bude hiperparalelna sa ravni ako je hiperparalelna sa svojom normalnom projekcijom u toj ravni. Dve ravni mogu dase seku po nekoj zajedničkoj pravoj, mogu da budu paralelne ako su im paralelne presečne prave sa zajedničkom normalnom ravni (za dve ravni u prostoru uvek postoji ravan normalna na obe te ravni) i mogu da budu hiperparalelne ako su im hiperparalelne presečne prave sa zajedničkom normalnom ravni.

Nakon ovog definisanja odnosa pravih i ravni uočićemo u prostoru Lobačevskog proizvoljnu ravan α i proizvoljnu tačku M van nje. Iz tačke M na ravan α spustićemo normalu MN gde je N tačka u ravni α i kroz tačku N povući pravu Nn u toj ravni. Zatim ćemo u ravni β, koja prolazi kroz prave MN i Nn, kroz tačku M povući pravu Mm, paralelnu pravoj Nn. Nakon toga obrtaćemo ravan β oko prave MN. Prava Mm pri tom obrtanju će opisati površ kružnog konusa. Jasno je da će sve prave tog konusa koje prolaze kroz tačku M biti paralelne sa ravni α. Prave koje prolaze unutar kružnog konusa kroz tačku M, seći će tu ravan, dok će prave izvan kružnog konusa koje prolaze kroz tačku M biti hiperparalelne sa ravni α, jer sa njom neće imati zajedničkih tačaka, a neće biti ni paralelne sa njom. Ovakav konus naziva se konus paralelnosti u tački M u odnosu na ravan α. Tačka M naziva se vrhom konusa, a visina MN visina konusa paralelnosti. Primetićemo još i sledeće. Ako neka ravan χ preseca gore pomenuti konus paralelnosti, tj. ako sa njim ima dve zajedničke prave, ravan χ će seći ravan α. Ako ravan χ sa konusom paralelnosti ima jednu zajedničku pravu, ravni χ i α biće paralelne. Ako ravan χ sa konusom ima jednu zajedničku tačku M, tada će ravni χ i α biti hiperparalelne.



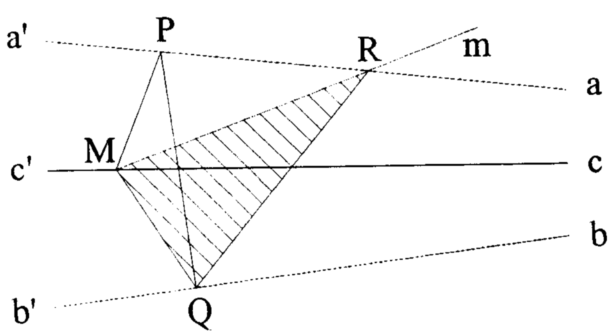
konus paralelnosti

U nastavku ćemo dati neke osnovne teoreme koje važe u hiperboličkom prostoru.

Teorema 8.1. Ako za svaku od dve paralelne prave u prostoru Lobačevskog uočimo po jednu ravan koja je sadrži i ako se te ravni seku, onda će prava njihovog preseka biti paralelna datim dvema pravama.

Dokaz. Neka su α i β ravni koje prolaze kroz paralelne prave a'a i b'b', redom, i neka je c'c presečna prava tih ravni. Dokazaćemo da je c'c||a'a i c'c||b'b u smeru c'c (odnosno a'a i b'b). Uzmimo na svakoj od pravih a'a, b'b i c'c po jednu proizvoljnu tačku P, Q, M, redom, i spojimo ih dužima. Dokazaćemo da je c'c||a'a.

Pre svega, po uslovu zadatka prave c'c' i a'a leže u istoj ravni. Zatim ćemo primetiti da se prave a'a i c'c ne seku. Zaista, ako bi se one sekle, tada bi kroz njihovu presečnu tačku i pravu b'b prolazile dve različite ravni (ravan koju grade prave a'a i b'b i ravan koju grade prave c'c i b'b). Povucimo, sada, kroz tačku M u ravni α unutar ugla cMP proizvoljnu pravu m. Konstruisaćemo kroz prave m i MQ ravan δ. Kako ravan δ sa ravni koju grade prave a'a i b'b ima zajedničku tačku Q, one će imati zajedničku presečnu pravu RQ gde je R tačka na pravoj a'a (presečna prava ravni δ i ravni koju grade prave a'a i b'b mora seći pravu a'a, jer iz uslova da presečna prava ravni δ i α

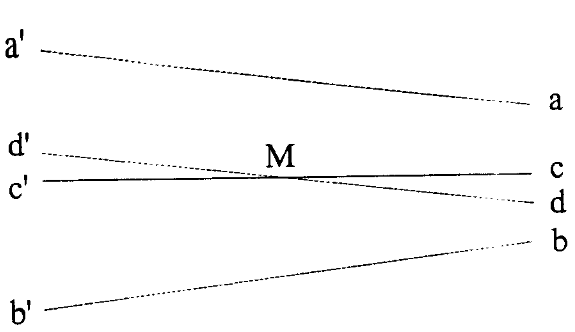


prolazi kroz ugao cMP očigledno sledi da presečna prava ravni δ i ravni koju grade prave a'a i b'b prolazi kroz ugao bQP). Kako je R tačka preseka pravih QR i a'a, znači da će tačka R pripadati pravoj preseka ravni α i δ, koja je ustvari prava m. Dakle, prava m će seći pravu a'a u nekoj tački R, pa će c'c i a'a biti paralelne. Analogno se dokazuje da je $c'c \| b'b$.♦

<u>Teorema 8.2.</u> Ako je u hiperboličkom prostoru $a \| b$, $b \| c$, tada je $a \| c$, pri čemu se smer paralelnosti uzima u istom smeru.

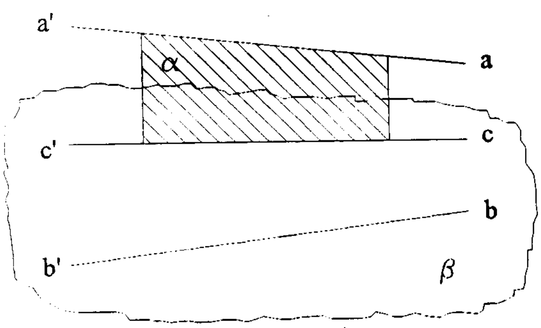
<u>Dokaz.</u> Posmatraćemo u prostoru Lobačevskog tri prave a'a, b'b i c'c, za koje važi da je $a'a \| b'b$ i $b'b \| c'c$ i dokazati da važi $a'a \| c'c$.

Uočimo na pravoj c'c proizvoljnu tačku M i dve različite ravni α i β koje je sadrže tako da ravan α sadrži još i pravu a'a, a ravan β sadrži još i pravu b'b. Kako ravni α i β imaju zajedničku tačku M, one će se seći po nekoj pravoj d'd, koja sadrži tačku M. Po teoremi 8.1. važi $d'd \| a'a$ i $d'd \| b'b$. Kako je po uslovu $b'b \| c'c$, i c'c prolazi kroz tačku M, sledi da se prave c'c i d'd poklapaju. Sada je jasno da je $a'a \| c'c$.♦



<u>Teorema 8.3.</u> Prava koja ne leži u ravni biće paralelna ravni ako je paralelna nekoj pravoj koja se nalazi u toj ravni.

<u>Dokaz.</u> Neka je prava a'a, koja ne leži u ravni β, paralelna pravoj b'b, koja je u ravni β. Neka je zatim α ravan koja prolazi kroz pravu a'a i normalna na ravan β. Presečna prava ravni α i β, prava c'c, sadrži normalnu projekciju prave a'a na ravan β. Po teoremi 8.1. c'c je paralelno sa a'a i paralelno sa b'b. Kako je prava a'a paralelna sa svojom normalnom projekcijom na ravan β, sledi da su prava a'a i ravan β paralelne.♦



Iz teoreme 8.2. sledeća teorema proizilazi kao direktna posledica.

<u>Teorema 8.4.</u> Prava koja ne leži u ravni paralelna je ravni ako je paralelna sa bilo kojom pravom koja je paralelna toj ravni.

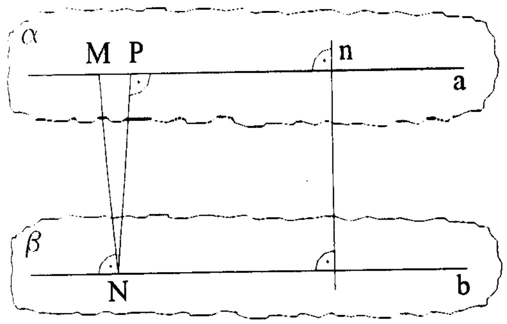
Zbog svoje sličnosti sa teoremama o paralelnim pravama, i s obzirom da su vrlo jednostavna, sledeća dva tvrđenja o hiperparalelnim pravama ostavićemo bez dokaza.

<u>Teorema 8.5.</u> Ako je prava p hiperparalelna ravni π, p' njena normalna projekciju na π, a α ravan koja sadrži pravu p i seče ravan π duž neke prave q, tada su prave p i p' hiperparalelne pravoj q.

Teorema 8.6. Ako je prava p van ravni π, hiperparalelna bilo kojoj pravoj q te ravni, tada je prava p hiperparalelna i ravni π.

Teorema 8.7. Ako su dve ravni α i β hiperparalelne, onda one obavezno imaju zajedničku normalu i to jedinstvenu, od koje se one neograničeno razilaze na sve strane jedna od druge.

Dokaz. Neka su α i β dve međusobno hiperparalelne ravni i neka je M proizvoljna tačka ravni α. Neka je dalje tačka N na ravni β takva da je MN normalna na ravan β i P tačka ravni α takva da je P podnožje normale iz N na ravan α. Očigledno će ravan χ koja sadrži tačke M, N i P biti normalna na ravni α i β i seći ih po nekim pravama a i b. Kako su ravni α i β hiperparalelne, takve će biti i prave a i b, pa na osnovu teoreme 4.16. prave a i b imaju zajedničku normalu n. Ovako dobijena prava n biće normalna na ravni α i β. Da je prava n jedinstvena dokazuje se isto kao i u teoremi 4.12.



Posmatrajmo gore pomenute prave a i b koje se razilaze od njihove zajedničke normale. Kako se one razilaze na obe strane od normale n i ravni α i β će se razilaziti na te strane od prave n. Ako ravan χ obrćemo oko prave n, onda će svoj smer prostiranja menjati i prave a i b. Prave a i b će se i u svim svojim novim položajima nalaziti u ravni α odnosno β i razilaziti jedna od druge u odnosu na normalu n. Zato će se i ravni α i β razilaziti neograničeno jedna od druge u svim smerovima.♦

Teorema 8.8. Kroz pravu paralelnu ravni prolazi samo jedna ravan paralelna datoj ravni.

Dokaz. Neka je prava a paralelna ravni α. Uzmimo proizvoljnu tačku M na pravoj a i iz nje konstruišimo konus paralelnosti u odnosu na ravan α sa vrhom u tački M. Konstuisaćemo ravan β kroz pravu a koja bi doticala konus paralelnosti po izvodnici a. Ravan β će biti jedina ravan koja će prolaziti kroz pravu a i biti paralelna ravni α, što je i trebalo dokazati (jedina jer svaka druga ravan, različita od β, koja sadrži pravu a, preseca konus paralelnosti po još jednoj izvodnici, a odatle seče i ravan α).♦

9.Pramenovi ravni i snopovi pravih i ravni u hiperboličkom prostoru

Pramenom ravni zvaćemo podskup λ skupa svih ravni prostora takav da za svake tri ravni α, β i χ iz tog podskupa važi da je kompozicija ravanskih simetrija $S_\chi \circ S_\beta \circ S_\alpha$ takođe ravanska simetrija i ako van λ ne postoji ravan δ takva da je kompozicija ravanskih simetrija $S_\delta \circ S_\beta \circ S_\alpha$ ravanska simetrija.

U hiperboličkom prostoru postoje tri vrste pramenova ravni:

1. Skup svih ravni koje sadrže neku pravu o je pramen ravni koji se naziva koaksijalni ili eliptički pramen ravni. Ovakav pramen obeležava se sa λ_O, a prava o zove se osa pramena.
2. Skup svih pravih normalnih na nekoj pravoj s naziva se ortogonalni ili hiperbolički pramen ravni. Ovakav pramen obeležava se sa λ_S, a prava s zove se osnovica pramena.
3. Skup svih ravni paralelnih nekoj datoj ravni naziva se parabolički pramen ravni.

Sledećom teoremom dokazaćemo jednu zanimljivu osobinu pramenova ravni.

Teorema 9.1. Ako su α i β dve ravni koje se seku, koje su međusobno paralelne odnosno koje su hiperparalelne, tada je skup λ svih ravni normalnih i na ravni α i na ravni β, redom, hiperbolički, parabolički odnosno eliptički pramen.

Dokaz. Ako se ravni α i β seku duž neke prave s, tada je λ skup svih ravni normalnih na s, pa je zato λ hiperbolički pramen ravni.

Ako su ravni α i β dve međusobno paralelne ravni, onda je presek skupa λ sa svakom od ravni α i β skup pravih koje su sve međusobno paralelne, pa je λ parabolički pramen ravni.

Ako su ravni α i β hiperparalelne ravni, tada postoji jedinstvena zajednička normala n te dve ravni, pa ravni koje su normalne na α i β sadrže pravu n. Zato je λ eliptički pramen ravni.♦

Snopove pravih i ravni možemo zamisliti kao pramenove pravih i ravni "proširenih" u novu dimenziju. Naime, snop pravih predstavlja podskup u skupa svih pravih prostora takvih da su svake dve prave iz tog skupa komplanarne i, ako van tog podskupa ne postoji nijedna prava komplanarna sa svakom pravom podskupa u, i ako sve prave podskupa ne pripadaju istoj ravni. Snop ravni predstavlja skup v svih ravni koje sadrže bar jednu pravu nekog snopa pravih u. Za snop v se kaže da je generisan snopom u. Postoje tri vrste snopova pravih, pa samim tim i tri vrste snopova ravni:

1. Skup svih pravih prostora koje prolaze kroz jednu tačku O zovemo snopom konkurentnih pravih ili eliptičkim snopom pravih i obeležavamo ga sa u_O. Skup ravni generisan ovim snopom pravih naziva se snop konkurentnih ravni ili eliptički snop ravni, a obeležava se sa v_O.
2. Skup svih pravih prostora normalnih na nekoj ravni π nazivamo ortogonalnim ili hiperboličkim snopom pravih, a obeležavamo sa u_π. Skup ravni generisan ovim snopom naziva se ortogonalnim ili hiperboličkim snopom ravni i obeležava se sa v_π.

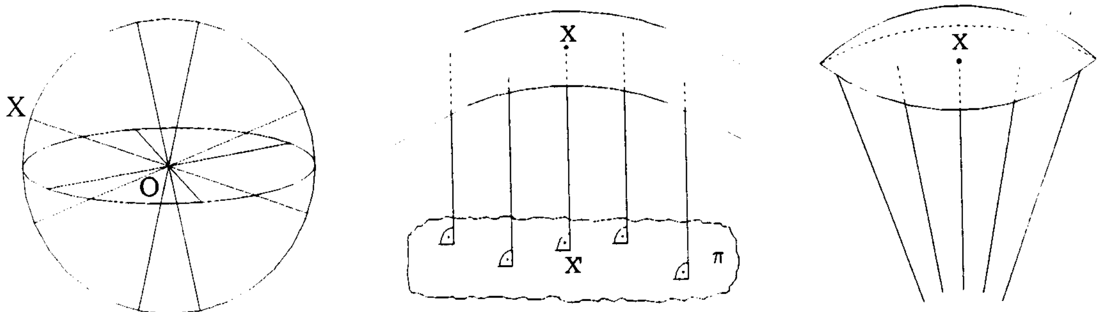
3. Skup svih pravih prostora paralelnih nekoj datoj pravoj nazivamo parabolički snop pravih, a skup ravni generisan ovim snopom naziva se parabolički snop ravni.

Da li dva snopa pravih imaju zajedničku pravu određuje se analogno kao i za dva pramena pravih u ravni. Zanimljivo je još pomenuti da se parabolički snop translacijom duž bilo koje prave koja mu pripada preslikava na sebe.

Neka je u snop pravih i X proizvoljna tačka prostora (različita od O ako se radi o snopu u_O ,i koja ne pripada ravni π ako se radi o snopu u_π).Skup svih tačaka prostora F (u, X) osnosimetričnih tački X u odnosu na prave snopa u naziva se episfera.

Iz prethodne definicije jasno je da episferu određuju snop pravih u i tačka X. U prostoru postoje tri različite vrste episfera:

1. episfera F (u_O, X) naziva se sferom. Tačka O naziva se središtem ili centrom sfere, a duž OX njenim poluprečnikom.
2. episfera F (u_π, X) naziva se ekvidistantna površ ili hipersfera, a ravan π naziva se osnova ekvidistantne površi. Duž XX' zove se visina ekvidistantne površi, gde je X' podnožje normale iz tačke X na ravan π.
3. episfera F (u, X) naziva se orisferom gde je u parabolički snop pravih.



sfera **ekvidistantna površ** **orisfera**

Navešćemo nekoliko zanimljivih osobina vezanih za episfere.

Prava može sa episferom imati najviše dve zajedničke tačke. Ravan može da sa episferom nema zajedničkih tačaka, da je dodiruje, da je preseca po krugu, a ako ravan prolazi kroz osu orisfere, odnosno ekvidistantne površi, onda je presečna linija oricikl, odnosno ekvidistanta. Sfera je zatvorena površ sa osobinom da su sve njene tačke jednako udaljene od centra sfere. Orisfera i ekvidistantna površ su otvorene površi, a ekvidistantna površ ima tu osobinu da su sve njene tačke jednako udaljene od osnove ekvidistantne površi. Dve sfere su podudarne ako i samo ako su im podudarni poluprečnici, dve ekvidistantne površi su podudarne ako i samo ako su im podudarne visine, a dve orisfere su uvek podudarne. Sve episfere su površi konstantne krivine. Postoji još jedna zanimljivost vezana za episfere. Naime, na površi sfere u prostoru Lobačevskog ostvaruje se eliptička geometrija Rimana (**Bernard Riman**, 1826. – 1866.),na površi orisfere ostvaruje se euklidska geometrija, dok se na ekvidistantnoj površi ostvaruje geometrija Lobačevskog. Ovim se pokazuje tesna povezanost euklidske geometrije i geometrije Lobačevskog, ali o tome će biti govora kasnije.

10. Trigonometrija u geometriji Lobačevskog

Osnovne trigonometrijske funkcije u geometriji Lobačevskog ekvivalentne su osnovnim trigonometrijskim funkcijama euklidske geometrije. Naime, ako je dat pravougli trougao ABC sa pravim uglom kod temena C, i ako su a, b i c dužine stranica BC, AC i AB, respektivno, tada će važiti:

$$\sin \angle A = a/c,\ \cos \angle A = b/c,\ \tan \angle A = a/b \text{ i } \cot \angle A = b/a.$$

Pored ovih, u trigonometriji hiperboličke ravni koriste se i hiperboličke funkcije koje se mnogo manje koriste u euklidskoj ravni. Zato ćemo te hiperboličke funkcije ovde definisati jer bez njih ne bismo mogli nastaviti rad na trigonometriji. Te funkcije su definisane na sledeći način:

$$\sinh x = (e^{x} - e^{-x})/2\ ,\ \cosh x = (e^{x} + e^{-x})/2\ ,$$

$$\tanh x = \sinh x / \cosh x = (e^{x} - e^{-x})/(e^{x} + e^{-x})\ ,$$

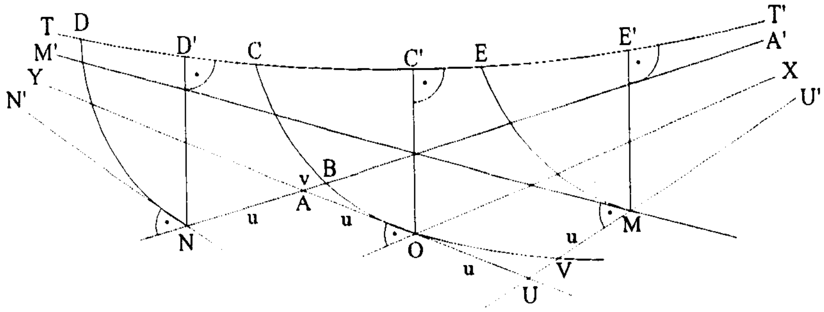
$$\coth x = \cosh x / \sinh x = (e^{x} + e^{-x})/(e^{x} - e^{-x}).$$

Prvi problem koji se postavlja pred nas je određivanje ugla paralelnosti u funkciji od dužine duži paralelnosti. Međutim, kako taj problem nije nimalo lak, potrebno je pre toga dokazati čitav jedan niz teorema.

Teorema 10.1. Neka su OX i OY međusobno normalne prave i neka je OB odsečak oricikla koji prolazi kroz tačku O i čija je osa OX. Obeležimo dužine duži OA i AB sa u i v, a dužinu odsečka oricikla OB sa s, gde je A tačka prave OY, B tačka na oriciklu, i važi da je AB paralelno sa OX u smeru OX. Tada je

$$e^{v/k} = \cosh (u/k).$$

Dokaz. Neka je prava TT' granična prava pravog ugla YOX. Označimo na pravoj OY u smeru OY tačku A tako da je dužina duži OA jednaka u. Konstruišimo kroz tačku A pravu AA' paralelnu sa OX u smeru OX, a zatim povucimo normalu na pravu AA' u tački N tako da je NN' paralelno sa OY u smeru OY. Kako je $\angle OAA' = \Pi(OA) = \Pi(u)$ i kako je $\angle NAY = \angle OAA'$ sledi da je $AN \cong OA$. Obeležimo potom tačku U na pravoj OY u smeru YO tako da je OU dužine u. Povucimo pravu UU' paralelnu sa OX u smeru OX, a zatim povucimo normalu MM' normalnu na pravu UU' u tački M, takvu da je MM' paralelno sa OY u smeru OY. Analogno dobijamo da je dužina duži MU = u. Povucimo onda koncentrične oricikle ND, OC i ME, gde su D, C i E tačke na pravoj TT'. Obeležimo podnožja normala tački N, O i M na pravu TT' sa D', C' i E'. Kako su uglovi kod temena N, O i M pravi, duži ND', OC' i NN' biće podudarne. Ako njihovu dužinu obeležimo sa x, tada je $\Pi(x) = d/2$. Postoji teorema koja kaže su odsečci oricikla nad istim tetivama podudarni. Odatle su odsečci oricikala ND, OC i ME podudarni. Njihovu dužinu obeležićemo sa σ. Takođe postoji teorema koju nećemo



dokazivati, po kojoj je odnos koncentričnih lukova dva oricikla određen sa $AB = A'B' \cdot e^{t/k}$, gde je t rastojanje među lukovima. Obeležimo sa B presek prave AA' i oricikla OC, a sa V presečnu tačku oricikla OC i prave UU'. Tada je $BN = u + v$.Zatim ćemo obeležiti dužinu luka oricikla OB sa s. Tada za lukove ND i OC važi: $\sigma = (\sigma - s) \cdot e^{(u + v)/k}$, odnosno $(\sigma - s)/\sigma = e^{-(u + v)/k}$.

Kako je $VM = u - v$ i imamo koncentrične lukove $VC = \sigma + s$ i $ME = \sigma$, sledi da je $\sigma + s = \sigma \cdot e^{(u - v)/k}$, odnosno $(\sigma + s)/\sigma = e^{(u - v)/k}$. Spajajući dve jednakosti dobijamo:

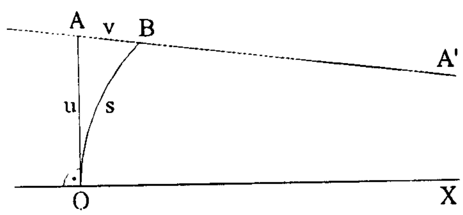
$$2 = (\sigma + s)/\sigma + (\sigma - s)/\sigma = e^{-(u + v)/k} + e^{(u - v)/k}$$

Množeći zadnju jednakost sa $e^{v/k}$, dobijamo

$$e^{v/k} = (e^{u/k} + e^{-u/k})/2 = \cosh (u/k),$$

što je i trebalo dokazati.♦

<u>**Teorema 10.2.**</u> Funkcija zavisnosti dužine luka oricikla s od dužine njegove projekcije u na tangentu u krajnoj tački luka oricikla, iz prethodnog primera, oblika je $s = \sigma \tanh (u/k)$, gde je σ kostantna dužina luka oricikla nad duži paralelnosti kojoj odgovara ugao paralelnosti d/2.



<u>**Dokaz.**</u> Koristeći se prethodnom teoremom dobijamo:

$$2s/\sigma = (\sigma + s)/\sigma - (\sigma - s)/\sigma = e^{(u-v)/k} - e^{-(u+v)/k} = (e^{u/k} - e^{-u/k}) \cdot e^{-v/k}$$

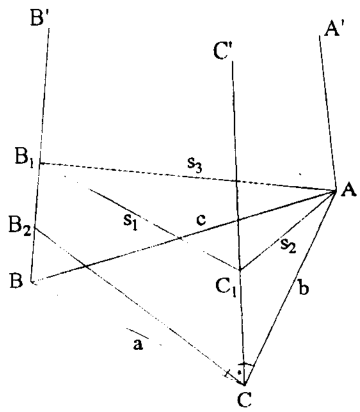
$$(s/\sigma) \cdot e^{v/k} = (s/\sigma) \cosh (u/k) = (e^{u/k} - e^{-u/k})/2 = \sinh (u/k),$$

odakle je $s = \sigma \tanh (u/k)$.♦

Teorema 10.3. (hiperbolička Pitagorina teorema) U pravouglom trouglu ABC sa pravim uglom kod temena C važi:

$$\cosh(c/k) = \cosh(a/k) \cdot \cosh(b/k).$$

Dokaz. Neka je ABC pravougli trougao sa pravim uglom kod temena C. Konstruišimo pravu AA' normalnu na ravan trougla ABC u tački A, i neka su CC' i BB' prave paralelne pravoj AA'. Neka su dalje tačke B_1 i C_1 presečne tačke pravih BB' i CC' sa orisferom konstruisanom kroz tačku A u odnosu na pramen paralelnih pravih AA', BB' i CC', i neka je dalje tačka B_2 presečna tačka prave BB' sa orisferom konstruisanom kroz tačku C u odnosu na isti pramen.



Obeležimo dužine stranica BC, CA i AB sa a, b i c, respektivno, i neka su s_1, s_2 i s_3 dužine lukova oricikala B_1C_1, C_1A i AB_1.

Prvo što ćemo primetiti jeste da je ugao između oricikala B_1C_1 i C_1A jednak d. Kako je ovaj ugao u stvari jednak diedarskom uglu ravni kojima oni pripadaju, treba dokazati da je ugao između ravni AA'CC' i CC'BB' jednak d. Naime, kako je ravan CC'AA' normalna na ravan trougla ABC (jer je AA' normalna na ravan trougla ABC) i kako je BC normalno na CA – presečnu pravu ravni CC'AA' i ABC, sledi da je BC normalno na ravan CC'AA'. Kako ravan BB'CC' sadrži pravu BC, sledi da je ravan BB'CC' normalna na CC'AA', pa je diedarski ugao ovih ravni jednak d.

Koristeći prethodnu teoremu znamo da je $s_2 = \sigma \tanh(b/k)$ i $s_3 = \sigma \tanh(c/k)$. Takođe možemo dobiti i s_1 u funkciji od luka oricikla CB_2:

$$s_1 = CB_2 \cdot e^{-CC1/k} = (\sigma \tanh(a/k))\, e^{-CC1/k}$$

Na osnovu teoreme 10.1. važi:

$$e^{CC1/k} = \cosh(b/k), \text{ pa je } s_1 = \sigma \tanh(a/k) / \cosh(b/k).$$

Kako je AB_1C_1 pravougli trougao orisfere, i kako na orisferi važi euklidska geometrija, tada je $s_3^2 = s_1^2 + s_2^2$. Odatle je

$$\sigma^2 \tanh^2(c/k) = \sigma^2 \tanh^2(a/k) / \cosh^2(b/k) + \sigma^2 \tanh^2(b/k)$$

Koristeći poznati identitet $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, odnosno njegovu posledicu $\tanh^2 x = 1 - 1/\cosh^2 x$, dobijamo:

$$\tanh^2(c/k) = (\cosh^2(a/k) - 1)/(\cosh^2(a/k)\cosh^2(b/k)) +$$
$$+(\cosh^2(b/k) - 1)/\cosh^2(b/k)$$

$$\text{tj. } \tanh^2(c/k) = 1 - 1/(\cosh^2(a/k)\cosh^2(b/k)) \quad (1)$$

S druge strane je

$$\tanh^2(c/k) = (e^{c/k} - e^{-c/k})^2 / (e^{c/k} + e^{-c/k})^2 =$$
$$= (e^{2c/k} - 2 + e^{-2c/k})/(e^{2c/k} + 2 + e^{-2c/k}) =$$

$$= 1 - 4/(e^{2c/k}+2+e^{-2c/k}) = 1 - 1/\cosh^2 (c/k) \quad (2)$$

Iz (1) i (2) sledi $\cosh^2 (c/k) = \cosh^2 (a/k) \cosh^2 (b/k)$, odakle je

$$\cosh (c/k) = \cosh (a/k) \cosh (b/k).\blacklozenge$$

<u>Teorema 10.4. (Lobačevski – Boljajeva teorema)</u> Ako je x mera duži paralelnosti, a Π (x) ugao paralelnosti, tada važi $\Pi (x) = 2\cdot \arctan e^{-x/k}$.

<u>Dokaz.</u> Vratimo se na trenutak na dokaz teoreme 10.3. Kako su ravni BB'AA' i CC'AA' normalne na ravan trougla ABC (jer sadrže AA'), sledi da je diedarski ugao među njima jednak uglu CAB. Odatle za ugao na C_1AB_1, kao za ugao među oriciklima važi $\angle C_1AB_1 = \angle CAB$. Dalje je $s_2=s_3 \cos (\angle CAB)$, pa je $\sigma \tanh (b/k) = \sigma \tanh (c/k) \cos (\angle CAB)$, a odatle $\cos (\angle CAB) = \tanh (b/k) / \tanh (c/k)$. Kada bi umesto AA' prava BB' bila normalna na ravan trougla ABC analogno bismo dobili

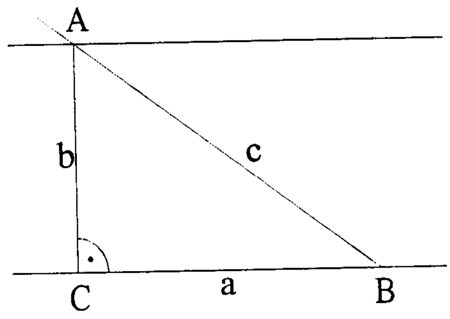
$$\cos (\angle ABC) = \tanh (a/k) / \tanh (c/k).$$

Posmatramo li odnos $s1 = s3 \sin (\angle CAB)$ dobijamo:

$$\sigma \tanh (a/k) / \cosh (b/k) = \sigma \tanh (c/k) \sin (\angle CAB)$$

$$\sin (\angle CAB) = \tanh (a/k) / (\cosh (b/k) \tanh (c/k)).$$

Postavimo trougao ABC tako da AC predstavlja duž paralelnosti normalnu na pravu CB. S obzirom da je $\lim_{x\to\infty}\tanh x = 1$, sledi:



$$\cos \Pi(b) = \lim_{a\to\infty}\cos(\angle CAB) =$$

$$=\lim_{a\to\infty}(\tanh (b/k) / \tanh (c/k)) =$$

$$=\tanh (b/k)$$

$$\sin \Pi(b) = \lim_{a\to\infty}\sin(\angle CAB) =$$

$$=\lim_{a\to\infty} (\tanh(a/k) / (\cosh(b/k) \tanh(c/k))) = 1/ \cosh(b/k).$$

Konačno, da bismo dokazali ovu teoremu, oslonićemo se na poznati identitet $\tan (\varphi/2) = (1 - \cos \varphi) / \sin \varphi$:

$$\tan (\Pi(b) / 2) = (1 - \cos \Pi(b)) / \sin \Pi(b) = (1 - \tanh(b/k)) / (1/ \cosh(b/k))=$$

$$= \cosh(b/k) - \sinh(b/k) = (e^{b/k} + e^{-b/k}) / 2 - (e^{b/k} - e^{-b/k}) / 2 = e^{-b/k}.$$

Odavde je $\Pi(b) = 2 \arctan e^{-b/k}$.$\blacklozenge$

Narednih nekoliko tvrđenja nabrojaćemo, jer su veoma važna, ali ćemo ih ovaj put dati bez dokaza.

<u>Teorema 10.5. (sinusna teorema)</u> U trouglu ABC čije su dužine stranica AB, AC i BC jednake c, b i a, redom, važi:

$$\sinh (a/k) / \sin \angle A = \sinh (b/k) / \sin \angle B = \sinh (c/k) / \sin \angle C.$$

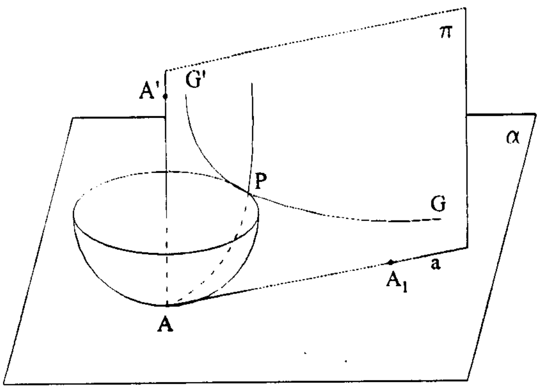
<u>Teorema 10.6. (kosinusna teorema)</u> U trouglu ABC čije su dužine stranica AB, AC i BC jednake c, b i a, redom, važi:

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos c.$$

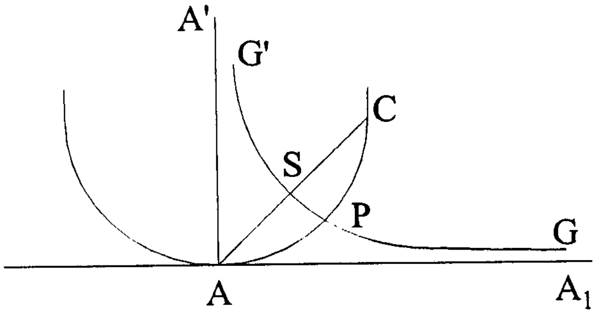
<u>Teorema 10.7.</u> Ako je dužina poluprečnika kruga jednaka R, tada je obim kruga jednak $2\pi k \sinh (R/k)$.

Sada ćemo dati objašnjenje šta je u stvari konstanta k, koja figurira u svim formulama trigonometrije hiperboličkog prostora i karakteriše taj prostor.

Neka je A tačka orisfere. Označimo sa AA' osu orisfere koja prolazi kroz tačku A, sa π proizvoljnu ravan koja sadrži pravu AA', sa α tangentnu ravan orisfere u tački A i neka je a presečna prava ravni α i π. Neka je dalje AA_1 jedna poluprava te prave, a GG' granična prava ugla $A'AA_1$. Kako je GG' paralelno sa AA', prava GG' seče orisferu u nekoj tački P. Stoga svaka osa između AA' i GG' u ravni π seče AA_1 u nekoj tački. Takođe važi da se svaka prava koja sadrži neku tačku poluprave AA_1 i paralelna je sa AA' nalazi između osa AA' i GG'.



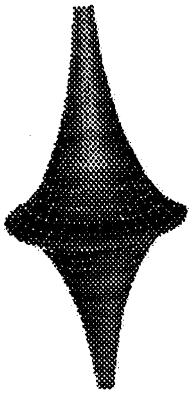
Obrćemo ravan π oko ose AA'. Tačka P tada opisuje kružnicu na orisferi. Dobijeni odsečak orisfere ima osobinu da se svaka tačka u unutrašnjosti kružnice orisfere pri paralelnom projektovanju slika na neku tačku ravni, a da se tačke oboda slikaju u beskrajno daleke tačke ravni, a važi i obrnuto. Obeležimo poluprečnik kružnice orisfere AP sa R (misli se na luk AP). Dokazaćemo da je to R konstantno. Preslikajmo tačku A osnom refleksijom u odnosu na pravu GG' u neku tačku C. Ta tačka C će ležati na orisferi i važiće da je P sredina luka AC. Neka je presek prave GG' i duži AC tačka S. Kako je AC normalno na GG', kako je luk AC jednoznačno određen tetivom AC, kako je $|AC| = 2|AS|$ i kako je AS duž paralelnosti koja odgovara uglu d/2, sledi da je luk AP (koji je polovina luka AC) jednoznačno određen.



Iz ovoga se vidi da je R konstantno i da je ta konstanta karakteristična za hiperbolički prostor (σ je u teoremi 10.1. ekvivalent za ovu konstantu R). Ta konstanta koju smo trigonometrijskim formulama još označavali sa k naziva se poluprečnik krivine hiperboličkog prostora i odlika je svakog hiperboličkog prostora.

11. Geometrija Lobačevskog: realnost ili ne

Nakon svega što je rečeno postavlja se pitanje da li je geometrija Lobačevskog imaginarna i nezamisliva geometrija na papiru ili se njen model može napraviti u euklidskom prostoru tako da nam postane i vizuelno dostupna. Prvi koji je na ovo pitanje direktno odgovorio bio je italijanski geometar **Eudenio Beltrami** (1835. – 1900.). Naime, on je u prostoru konstruisao površ konstantne negativne krivine koju je on nazvao pseudosfera, i na kojoj se realizuje dvodimenzionalna geometrija Lobačevskog. Međutim, ispostavilo da se na pseudosferi geometrija Lobačevskog ostvaruje samo delimično, tj. ostvaruje se samo na onim delovima pseudosfere na kojima nema posebnih tačaka, gde su posebne tačke, tačke ivice pseudosfere. Veo sumnje sa ovog problema potpuno je skinuo nemački matematičar **Klajn** koji je ponudio trodimenzionalno tumačenje hiperboličke geometrije u euklidskom prostoru. Nakon kreiranja njegovog modela postalo je jasno da se neprotivrečnost geometrije Lobačevskog svodi na neprotivrečnost euklidske geometrije. Kako su naučnici uspeli da euklidsku geometriju predstave analitičkom interpretacijom, tj. da naprave "mostić" između euklidske geometrije i aritmetike realnih brojeva, neprotivrečnost euklidske geometrije svela se na neprotivrečnost aritmetike realnih brojeva, čija je neprotivrečnost diktirana viševekovnom praksom ljudskog društva u najširem smislu te reči. Zato se postojanje geometrije Lobačevskog i euklidske geometrije svodi na neprotivrečnost aritmetike realnih brojeva, i njih dve predstavljaju dve nezavisne i podjednako primenljive geometrije bez obzira na to koliko se nama geometrija Lobačevskog u odnosu na euklidsku geometriju činila neshvatljiva i nerealna.



pseudosfera

12. Dodatak: savremeni sistem aksioma

Aksiome incidencije:

I_1 Za svake dve razne tačke postoji tačno jedna prava koja ih sadrži.

I_2 Svaka prava sadrži bar dve tačke.

I_3 Za svake tri tačke postoji bar jedna ravan koja ih sadrži.

I_4 Za svake tri nekolinearne tačke postoji tačno jedna ravan koja ih sadrži.

I_5 Svaka ravan sadrži bar tri tačke.

I_6 Ako dve razne tačke neke prave pripadaju nekoj ravni tada i sve tačke te prave pripadaju toj ravni.

I_7 Ako su dve ravni incidentne sa nekom tačkom, tada su one incidentne sa bar još jednom tačkom.

I_8 Postoje četiri nekomplanarne tačke.

Aksiome rasporeda:

II_1 Ako je $\beta(A,B,C)$ tada su A, B, C tri razne kolinearne tačke.

II_2 Ako je $\beta(A,B,C)$ tada je i $\beta(C,B,A)$.

II_3 Ako je $\beta(A,B,C)$ tada nije $\beta(A,C,B)$.

II_4 Za svake dve tačke A, B na pravoj AB postoji tačka C takva da je $\beta(A,B,C)$.

II_5 Ako su A, B, C tri razne kolinearne tačke tada važi bar jedna od relacija: $\beta(A,B,C)$, $\beta(A,C,B)$, $\beta(C,A,B)$.

II_6 (Pašova aksioma) Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke i l prava ravni ABC koja ne sadrži tačku A i seče pravu BC u tački P takvoj da je $\beta(B,P,C)$, tada prava l seče ili pravu AC u tački Q takvoj da je $\beta(A,Q,C)$ ili pravu AB u tački R takvoj da je $\beta(A,R,B)$.

Aksiome podudarnosti

III_1 Ako je $(A, B) \cong (C, D)$ i $A = B$, tada je i $C = D$.

III_2 Za svake dve tačke A i B je $(A, B) \cong (B, A)$.

III_3 Ako je $(A, B) \cong (C, D)$ i $(A, B) \cong (E, F)$ tada je i $(C, D) \cong (E, F)$.

III_4 Ako su C i C' tačke otvorenih duži AB i A'B', takve da je $(A, C) \cong (A', C')$ i $(B, C) \cong (B', C')$, tada je i $(A, B) \cong (A', B')$.

III_5 Ako su A i B dve tačke i CX poluprava, tada na toj polupravoj postoji tačka D takva da je $(A, B) \cong (C, D)$.

III_6 Ako su A, B i C tri nekolinearne tačke i A',B' tačke ruba neke poluravni π, takve da je $(A, B) \cong (A', B')$, tada u toj poluravni postoji jedinstvena tačka C' takva da je $(A, C) \cong (A', C')$ i $(B, C) \cong (B', C')$.

III_7 Ako su A, B, C i A', B', C' dve trojke nekolinearnih tačaka i D i D' tačke polupravih BC i B'C' takve da je $(A, B) \cong (A', B')$, $(B, C) \cong (B', C')$, $(A, C) \cong (A', C')$ i $(B, D) \cong (B', D')$, tada je i $(A, D) \cong (A', D')$.

Aksioma neprekidnosti:

IV_1 (Dedekindova aksioma) Neka je otvorena duž AB razložena na uniju dva disjunktna neprazna podskupa U i V. Ako nijedna tačka iz skupa U nije između neke dve tačke skupa V i nijedna tačka iz skupa V nije između neke dve tačke skupa U, tada postoji jedinstvena tačka C otvorene duži AB takva da je $\beta(A',C,B')$ za svako $A' \in U \setminus \{C\}$ i svako $B' \in V \setminus \{C\}$.

Aksioma paralelnosti:

V_1' (Plejferova aksioma) Ako tačka A ne pripada pravoj p, tada u ravni njima određenoj postoji tačno jedna prava koja sadrži tačku A i disjunktna je sa pravom p.

V_1'' (Aksioma Lobačevskog) Ako tačka A ne pripada pravoj p, tada u ravni njima određenoj postoje bar dve prave koje sadrže tačku A i disjunktne su sa pravom p.

LITERATURA:

1. V. D. Čistjakov, *Besede o geometriji Lobačevskog*, Klub NT, Beograd 1996.
2. Z. Lučić, *Euklidska i hiperbolička geometrija*, Grafiti i Matematički fakultet, Beograd 1994.
3. M. Mitrović, S. Ognjanović, M. Veljković, Lj. Petković,N. Lazarević, *Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazije*, Krug, Beograd 1998.
4. M. Prvanović, *Osnovi geometrije*, Građevinska knjiga, Beograd 1987.
5. J. McCleary, *Geometry from a Differentiable viewpoint*, Cambridge university press, Cambridge 1994.
6. R. Risojević, *Veliki matematičari*, Nolit, Beograd 1991.
7. Lj. Petković, M. Petković, *Matematrix*, Nova Jugoslavija, Vranje 2000.
8. N. I. Lobachevsky, *Nascent non–Euclidean geometry*, Quantum, may/june 1999.
9. www–groups.dcs.st–andrews.ac.uk/čhistory/Mathematicians/ Lobachevsky.html , *Nikolai Ivanovich Lobachevsky*, University of st Andrews, Scotland 2000.
10. A. P. Korden, *Элементарное введение в геометрию Лобаческого*, Moskva 1953.