UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET

Tatjana Ostrogorski

PROBLEMI SATURACIJE U TEORIJI APROKSIMACIJA REALNIH FUNKCIJA

Magistarski rad

Beograd
1978

S a d r ž a j

Uvod

U ovom radu posmatraćemo aproksimaciju realne funkcije f nekim linearnim operatorima. Za funkciju f pretpostavimo da pripada nekom Banachovom prostoru X i posmatramo ponašanje izraza

$$\|f - A_\rho f\|_X = E\,(f) \tag{i}$$

gde je (A_ρ) familija ograničenih linearnih operatora na X (koja zavisi od realnog parametra $\rho \to \infty$). Ako izraz (i) teži nuli, kad $\rho \to \infty$, kažemo da linearni proces (A_ρ) aproksimira funkciju f.

Aproksimacija linearnim operatorima je jedna od najvažnijih oblasti teorije aproksimacija, s obzirom da obuhvata, naprimer, integralne transformacije, razvoje u Fourierov red, interpolacione procese, itd. Sem toga, linearna aproksimacija u izvesnom smislu dopunjuje teoriju najbolje aproksimacije.

Posmatrajmo jedan primer. Neka se za datu neprekidnu funkciju na konačnom intervalu traži aproksimacija polinomima datog stepena. Prirodno je potražiti najbliži mogući takav polinom. Poznato je da takvo najbolje približenje uvek postoji. Medjutim, pokazuje se da operator najbolje aproksimacije nije linearan (naprimer, ako znamo najbolju aproksimaciju dveju funkcija f_1 i f_2 ništa ne možemo reći o najboljoj aproksimaciji njihovog zbira). To je ustvari glavni nedostatak te teorije: ne postoji jednostavan postupak koji bi svakoj funkciji dodeljivao najbolju aproksimaciju.

Stoga je od interesa posmatrati aproksimaciju linearnim operatorima po cenu nešto veće greške, moguće je aproksimaciju generisati na dosta jednostavan način, nekim linearnim operatorom.

Najbolja aproksimacija ima jednu veoma važnu osobinu, koju u izvesnoj meri čuvaju i linearne aproksimacije. Neka je p_n polinom najbolje aproksimacije za datu funkciju f. Tada razlika $\|f - p_n\| = E_n(f)$ teži nuli, kad $n \to \infty$, utoliko brže ukoliko je funkcija f "bolja" (ima veći broj izvoda). To tvrde poznate teoreme Jacksona i Bernsteina. Jacksonova, direktna, teorema glasi: za proizvoljno $k\in N$, ako funkcija f ima k neprekidnih izvoda, tada je $E_n(f) = O(n^{-k})$. Bernsteinova, inverzna, teorema glasi: ako je $E_n(f) = O(n^{-k})$, $k\in N$, tada je f k puta neprekidno diferencijabilna.

Ovakvu zavisnost stepena aproksimacije od osobina funkcije f pokazuju i aproksimacije linearnim operatorima. Ipak, samo do izvesne granice. Kod većine proznatih operatora poboljšanje stepena aproksimacije u zavisnosti od glatkosti funkcije zaustavlja se kod nekog "kritičnog" stepena. Dalje, i ako pretpostavimo veću glatkost funkcije, nećemo dobiti bolju aproksimaciju. Ovaj fenomen se naziva "saturacija", a pomenuti "kritični" stepen aproksimacije zove se stepen saturacije. Bolji stepen aproksimacije datim operatorom nego što je stepen saturacije imaju samo neke "trivijalne" funkcije (konstante, linearne funkcije i sl.). Od interesa je dakle opisati funkcije koje imaju stepen aproksimacije upravo jednak kritičnom, za takve funkcije se kaže da pripadaju klasi saturacije. Problem saturacije se sastoji u nalaženju stepena saturacije i opisivanju klase saturacije.

Problem saturacije prvi je uveo Jean Favard 1947. za procese sumiranja Fourierovih redova. (Za klasu saturacije ponekad se upotrebljava i izraz Favardova klasa). Otada je problem saturacije rešen najpre za mnoge poznate operatore, a zatim su nadjene i različite opšte metode za rešavanje tog problema. Tako da danas postoji nekoliko knjiga o saturaciji [3], [5], [13], i, naravno, mnoštvo članaka.

Mi ćemo se u ovom radu ograničiti na jednu specijalnu vrstu operatora. To su konvolucioni operatori, zadati na sledeći način

$$K_\rho f(x) = f*k_\rho(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)k_\rho(t)dt \qquad (i)$$

gde je "jezgro"(k_ρ) sastavljeno od funkcija $k_\rho \in L(R)$. Konvolucija je, kako kaže Shapiro [13], jedan od najmoćnijih i najopštijih metoda za generisanje aproksimacije za datu funkciju f. Razlog tome je što konvolucija nasledjuje dobre osobine obadva faktora. Naprimer, ako za jezgro (k_ρ) uzmemo mnogo puta diferencijabilnu funkciju, onda će i $K_\rho f$, transformacija funkcije f, imati ista svojstva.

Za operatore (ii) dobro je poznata teorema saturacije u prostorima $L^p(R)$, $C(R)$, naprimer. Opšti metod za rešavanje tog problema je metod Fourierove transformacije. U I delu ćemo pokazati kako se taj problem na veoma sličan način rešava u svim pomenutim prostorima funkcija definisanih na R, a takodje ukazati i kako se taj problem na isti način može rešiti i za odgovarajuće prostore nad T (periodične funkcije), R^n, T^n.

U II delu razmatramo problem lokalne aproksimacije za operatore (ii), tj. aproksimaciju na datom intervalu $(a,b)\subset R$ i dokazujemo teoremu saturacije. Pokazuje se da su uslovi koje operator treba da zadovoljava da bi bio lokalno saturiran, nešto jači nego za globalnu saturaciju. To ipak nije suviše jako ograničenje, s obzirom da ga zadovoljavaju mnogi poznati operatori. Sunouchi [14] je dokazao odgovarajuću lokalnu teoremu saturacije za periodične funkcije. S obzirom da se Sunouchiev dokaz ne može primeniti na operatore (ii) na R, bilo je potrebno promeniti metod dokaza.

Kao što je rečeno, u II delu su u odnosu na I deo pojačani uslovi koje jezgro operatora (ii) treba da zadovoljava. Pri takvim uslovima moguće je bitno proširiti domen operatora (K_ρ); tako da on sada obuhvata i (lokalno integrabilne) funkcije koje, kad $|x|\to\infty$, ne rastu brže od nekog polinoma. U III delu dokazujemo da lokalna teorema saturacije važi i na tim prostorima.

Primetimo još da je uvek moguće naći linearan operator čiji je stepen saturacije proizvoljno mali. Polazeći od operatora sa stepenom saturacije $O(\rho^{-\alpha})$ i obrazujući na pogodan način linearne kombinacije tog operatora, dobijama operator čiji je stepen saturacije $O(\rho^{-n\alpha})$.(v.odeljak 3.). To je značajno jer omogućuje da se za svaku "dobru" funkciju f nadje linearan operator koji će je dovoljno dobro aproksimirati.

U dodacima navodimo neke opšte definicije i teoreme na koje se u radu pozivamo sa [Dod...].

U Tabeli je dato nekoliko primera najpoznatijih singularnih integrala i pokazano koja svojstva od navedenih u radu oni imaju i koje teoreme zadovoljavaju.

I. GLOBALNA TEOREMA SATURACIJE

1. Osnovna teorema

U ovom odeljku dokazujemo teoremu saturacije za konvolucione operatore. Posmatramo aproksimacionu razliku

$$K_\rho f(x) - f(x) \tag{1}$$

gde je K_ρ konvolucioni operator (Uvod (ii)) i ispitujemo brzinu kojom taj izraz teži nuli, kad $\rho \to \infty$ (u nekom prostoru $X(R)$).

Problem saturacije (Definicija 1.2.1.) sastoji se u nalaženju optimalnog reda aproksimacije, koji mogu postići operatori K_ρ, i opisivanju klase funkcija, na kojima se taj optimalni red postiže. Pronalazimo osobine koje ima funkcija f, ako je poznato da se operatorom K_ρ može aproksimirati do na optimalan stepen (inverzna teorema) i, obratno, pokazujemo da se funkcija koja ima te osobine, može aproksimairati pomoću K_ρ do na optimalan stepen (direktna teorema). Tako da je tvrdjenje, kojim se opisuje klasa saturacije, jedan stav ekvivalencije (direktna teorema je tačna konverzija inverzne).

S obzirom da se radi o konvolucionim operatorima, nije teško pretpostaviti da će Fourierova transformacija biti od velike koristi. Zaista, ovo je takoreći idealan problem, na kome se potpuno može iskoristiti moćna tehnika Fourierove analize. Fourierova transformacija konvolucije $K_\rho f = f * k_\rho$ jednaka je (običnom) proizvodu Fourierovih transformacija $\hat{f}$ i $\hat{k}$. Na taj način je razdvojena funkcija f od jezgra k_ρ i ponašanje aproksimacione razlike svedeno na proučavanje ponašanja njene Fourierove transformacije $(K_\rho f - f)\hat{}(v) = (\hat{k}_\rho(v) - 1)\hat{f}(v)$. To dovodi do uvodjenja uslova (S) i (M) (Definicija 1.2.2.), koje jezgro treba da zadovoljava da bi operator bio saturiran.

Mada ćemo se ograničiti na prostore $L^p(R)$, $C(R)$, metod izlaganja je takav da se može neposredno uopštiti i, naprimer, na odgovarajuće prostore periodičnih funkcija ili funkcija više promenljivih.

Metod dokaza jedinstven je za sve navedene prostore; ipak malo je teže primenljiv u prostorima $L^p(R)$, $p > 2$, za koje Fourierova transformacija ne postoji u klasičnom smislu, kao funkcija. Lema 1.5. omogućuje da se taj problem prevazidje.

(Ova lema je, inače, specijalan slučaj Stava 6.2.6. koji nam na sličan način omogućuje da operišemo i sa Fourierovim transformacijama funkcija iz klasa širih nego što su L^p prostori).

U odeljku 1.7. pokazujemo da se na sličan način mogu tretirati još neki operatori, koji su prividno drugačijeg tipa. Ovo će se pokazati naročito korisnim u karakterizaciji klase saturacije (v. odeljak 2.)

1.1. Uvodne definicije i oznake

Neka je R realna prava. Za funkcije f,g,... pretpostavićemo da su definisane na R i merljive.

$L^p(R)$, $1 \le p \le \infty$, su prostori funkcija, čiji je p-ti stepen (za $1 \le p < \infty$) integrabilan (u Lebesgueovom smislu) na R, odnosno (za $p = \infty$) prostor funkcija bitno ograničenih na R, sa uobičajenim normama.

$C_0(R)$ je prostor neprekidnih funkcija, za koje važi $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$, sa supremum normom.

BV(R) je prostor funkcija ograničene varijacije na R; norma funkcije iz BV(R) jednaka je njenoj totalnoj varijaciji.

Prostore $L^p(R)$, $1 \le p < \infty$, i $C_0(R)$ ćemo ukratko obeležavati sa X(R). Ako je $f \in X(R)$, tada važi $\lim_{h \to 0} \|f(x+h) - f(x)\| = 0$. Ovakvu "neprekidnost po normi" nemaju funkcije iz $L^\infty(R)$ i BV(R).

Familija $(k_\rho)_{\rho \in I}$ funkcija $k_\rho \in L(R)$ naziva se <u>jezgro</u>, ako je $\int_{-\infty}^{\infty} k_\rho(x)dx = 1$, $\rho \in I$. (Ovde je $I \subset R$ neki skup indeksa, za koji je ∞ tačka nagomilavanja. U daljem će se, i kad nije posebno naglašeno, podrazumevati da ρ prolazi skup indeksa I i teži beskonačnosti.)

Svako jezgro (k_ρ) odredjuje jednu familiju ograničenih linearnih operatora $K_\rho : X(R) \to X(R)$, definisanih sa

$$K_\rho f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) k_\rho(t) dt$$

[Dod.A.2.] Familija operatora (K_ρ) naziva se <u>singularni integral</u>. Klasa singularnih integrala može se proširiti, ako se za jezgro, umesto funkcija iz L(R), uzmu funkcije $\mu_\rho \in BV(R)$. I u ovom slučaju dobro je definisana konvolucija μ_ρ sa funkcijama f iz svih prostora $X(R)$ [Dod.A.1.] i tako odredjena familija ograničenih linearnih operatora (M_ρ). Radi jednostavnosti, zadržaćemo se uglavnom na slučaju jezgara iz $L(R)$; prelaz na navedeni opštiji slučaj sasvim je jednostavan (v. 1.7.)

Jezgro (k_ρ) je <u>približan</u> <u>identitet</u> (approximate identity), ako njegov singularni integral predstavlja jedan aproksimacioni proces u $X(R)$, tj. ako za svako $f \in X(R)$ važi

$$\lim_{\rho \to \infty} \| K_\rho f - f \|_{X(R)} = 0 \tag{2}$$

Dovoljan uslov da jezgro (k_ρ) bude približan identitet jeste, naprimer,

$$\lim_{\rho \to \infty} \int_{|x|>\delta} k_\rho(x)dx = 0, \quad \text{za svako } \delta > 0.$$

Predmet proučavanja celog prvog odeljka je brzina, kojom izraz (2) teži nuli. Pokazaće se da ta brzina zavisi od ponašanja Fourierove transformacije jezgra $(\hat{k}_\rho)$. Pri tome se, za $f \in X(R)$ Fourierova transformacija $\hat{f}$ definiše

$$\hat{f}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ivx}dx, \qquad v \in R$$

Za funkciju BV(R) definiše se Fourier-Stieltjesova transformacija

$$\check{\mu}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivx}d\mu(x), \qquad v \in R$$

Za funkciju $f \in L^p(R)$, $1 < p \leq 2$, Fourierova transformacija je ona funkcija $\hat{f} \in L^q(R)$ $(1/p + 1/q = 1)$ za koju važi

$$\lim_{n \to \infty} \| \hat{f}(x) - \int_{-n}^{n} f(u)e^{-iux}du \|_{L^q(R)} = 0 \tag{3}$$

Za $L^p(R)$, $p > 2$, granična vrednost u (3) ne mora da postoji. Pod Fourierovom transformacijom funkcija iz tih prostora podrazumevaćemo Fourierovu transformaciju u prostoru $\mathcal{S}'$ temperiranih distribucija [Dod.C.3.]

Koristićemo sledeće definicije

$\mathcal{D}$ je skup svih beskonačno diferencijabilnih funkcija sa kompaktnim nosačem u R.

$\mathcal{S}$ je skup svih beskonačno diferencijabilnih funkcija h definisanih na R, takvih da $\sup_x |x|^n |h^{(j)}(x)| < \infty$, $n, j \in N$.

$\mathcal{S}'$ je prostor neprekidnih linearnih funkcionela na (na kome je topologija definisana kao u [Dod.C.1.]).

Uvedimo još oznake

$$Y(X,R) = \begin{cases} BV(R), & \text{za } X(R) = L^1(R) \\ L^p(R), & \text{za } X(R) = L^p(R),\ 1 < p < \infty \\ L^\infty(R), & \text{za } X(R) = C_o(R) \end{cases} \tag{4}$$

Prostor $Y(X,R)$ je spregnut Banachov prostor koji sadrži $X(R)$. Za Banachov prostor A kaže se da je spregnut, ako postoji Banachov prostor B, takav da je $B^* = A$. Ponekad ćemo za to pisati $B = A^{-*}$. Primetimo još da je norma prostora $X(R)$ jednaka restrikciji na skup $X(R)$ norme iz $Y(X,R)$.

Koristićemo i skraćene oznake X, $Y(X)$ i slično, svuda gde to neće dovesti do zabune.

1.2. Saturacija; svojstva (S) i (M)

Definicija 1.2.1. Neka je (K_ρ) singularni integral na $X(R)$. Kazaćemo da je singularni integral (K_ρ) saturiran u prostoru $X(R)$, ako postoji pozitivna funkcija $\varphi(\rho) = \varphi_\rho$, koja teži nuli kad $\rho \to \infty$, tako da su ispunjena sledeća dva uslova

(i) ako $\|K_\rho f - f\|_X = o(\varphi_\rho), \rho \to \infty$, tada f pripada trivijalnoj klasi $T(K_\rho, X) = \{f \in X \mid K_\rho f = f\}$.

(ii) skup $S(K_\rho, X) = \{f \in X \mid \|K f - f\|_X = O(\varphi_\rho), \rho \to \infty\}$ sadrži bar jedan netrivijalan element.

$O(\varphi_\rho)$ se naziva red saturacije, a $S(K_\rho, X)$ klasa saturacije singularnog integrala (K_ρ) u prostoru $X(R)$. Problem saturacije sastoji se u nalaženju reda i opisivanju klase saturacije. Primedba. Pojam saturacije može se definisati u mnogo opštijim okvirima: naprimer kada je prostor X proizvoljan Banachov prostor, a (K_ρ) proizvoljna familija operatora na X, koja jako (u operatorskoj topologiji) konvergira ka identičnom operatoru. Lako je videti kako bi definicija saturacije glasila u tom slučaju. Mi ćemo se, medjutim, isključivo baviti singularnim integralima.

U daljem će φ_ρ uvek biti pozitivna funkcija, koja teži nuli kad $\rho \to \infty$; a ψ će biti apsolutno neprekidna funkcija na R, koja u beskonačnosti ne raste brže od nekog polinoma i takva da je $\psi(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Definicija 1.2.2.

Svojstvo (S)

Jezgro (k_ρ) ima svojstvo (S) ako ispunjava sledeće uslove

(i) (k_ρ) je približan identitet

(ii) postoje φ_ρ i ψ sa navedenim osobinama tako da

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{\hat{k}_\rho(v)-1}{\varphi_\rho} = \psi(v)$$

Svojstvo (M)

Jezgro (k_ρ) ima svojstvo (M) ako postoje φ_ρ i ψ sa navedenim osobinama i postoji familija (λ_ρ) funkcija $\lambda_\rho \in BV(R)$, za koju važi $\|\lambda_\rho\|_{BV} = O(1)$, uniformno po ρ, tako da

$$\check{\lambda}_\rho(v) = \frac{\hat{k}_\rho(v)-1}{\varphi_\rho\ \psi(v)}$$

Naredna teorema ustvari tvrdi da je singularni integral, čije jezgro zadovoljava uslove (S) i (M), saturiran. Istovremeno, opisuje se klasa saturacije pomoću Fourierove transformacije funkcija koje joj pripadaju.

Teorema 1.2.3. Neka je (K_ρ) singularni integral na prostoru $X(R)$ i neka njegovo jezgro (k_ρ) zadovoljava uslove (S) i (M).

(i) ako $\|K_\rho f - f\|_X = o(\varphi_\rho)$, kad $\rho\to\infty$, tada $f\in T(K_\rho, X)$

(ii) ako $\|K_\rho f - f\|_X = O(\varphi_\rho)$, kad $\rho\to\infty$, tada $\exists g\in Y(X)$ $\hat{g} = \psi\hat{f}$

(iii) ako $\exists g\in Y(X)$ $\hat{g} = \psi\hat{f}$ tada $\|K_\rho f - f\|_X = O(\varphi_\rho)$,

Teorema će biti dokazana u odeljku 1.5. Vidimo da singularni integral (K_ρ) ima red saturacije $O(\varphi_\rho)$ i klasu saturacije

$$S(K_\rho, X) = \left\{ f\in X \mid \exists g\in Y(X)\ \hat{g} = \psi\hat{f} \right\}$$

Na osnovu ove karakterizacije klase saturacije dobijaju se u odeljku 2. druge karakterizacije i to pomoću svojstava same funkcije f, a ne njene Fourierove transformacije (v. naprimer Teoremu 2.2.4. i Teoremu 2.4.3.).

1.3. Glavna lema

Jedan od dva osnovna koraka u dokazu Teoreme 1.2.3. zasniva se na sledećoj lemi. Ova govori o tome da iz $*$-slabe konvergencije funkcija sledi konvergencija njihovih Fourierovih transformacija. Zbog toga što je Fourierova transformacija različito definisana za razne prostore, lema ima tri dela.

A. Neka je Y jedan od prostora L^p, $1 < p \leq 2$. Neka familija (f_ρ) funkcija $f_\rho \in Y$ konvergira $*$-slabo ka f u Y, $\rho \to \infty$, i neka je $\lim\limits_{\rho \to \infty} \hat{f}_\rho(v) = \varphi(v)$, za skoro svako $v \in R$. Tada

$$\lim_{\rho \to \infty} \hat{f}_\rho(v) = \hat{f}(v) \quad , \text{ za s.s. } v \in R$$

Dokaz. Neka $f_\rho \xrightarrow{*} f$, $\rho \to \infty$, tj. za svako $h \in Y^{-*}$ važi

$$\lim_{\rho \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_\rho(x)h(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(x)dx \,. \tag{5}$$

Kako je $\mathcal{S} \subset Y^{-*}$ [Dod.D.2] relacija (5) će pogotovu važiti za svako $h \in \mathcal{S}$. Odatle, primenom Parsevalove jednakosti [Dod.B.7] sledi

$$\lim_{\rho \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_\rho(v)\hat{h}(v)dv = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v)\hat{h}(v)dv \quad , \quad \forall h \in \mathcal{S}$$

Pošto Fourierova transformacija predstavlja izomorfizam prostora $\mathcal{S}$ na sebe [Dod. C.3.], poslednja relacija je ekvivalentna sa

$$\lim_{\rho \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_\rho(v)g(v)dv = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v)g(v)dv \quad , \quad g \in \mathcal{S} \tag{6}$$

S druge strane, po pretpostavci je

$$\lim_{\rho \to \infty} \hat{f}_\rho(v) = \varphi(v) \qquad \text{za s.s. } v \in R \tag{7}$$

Kako iz $*$-slabe konvergencije (f_ρ) u Y sledi uniformna ograničenost te familije po normi

$$\|f_\rho\|_Y \leq M \tag{8}$$

primenom Titchmarchove nejednakosti $\|\hat{f}_\rho\|_q \leq \|f_\rho\|_p$ [Dod.B.4.] sledi $\|\hat{f}_\rho\|_q \leq M$; tako da možemo primeniti teoremu iz Dod.D.5. i iz (7) dobiti

$$\lim_{\rho \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_\rho(v)g(v)dv = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v)g(v)dv \qquad \forall g \in \mathcal{S} \tag{9}$$

Sada (6) i (9) daju

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v)g(v)dv = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v)g(v)dv \qquad \forall g \in \mathcal{S}$$

a odavde [Dod.D.3.] sledi

$$\hat{f}(v) = \varphi(v) \qquad \text{za s.s. } v \in R$$

a to je i trebalo dokazati.

B. Neka familija (f_ρ) funkcija $f_\rho \in BV$ konvergira $*$-slabo ka f u BV, $\rho \to \infty$, i neka je $\lim \check{f}_\rho(v) = \varphi(v)$, za svako $v \in R$. Tada

$$\lim_{\rho \to \infty} \check{f}_\rho(v) = \check{f}(v)$$

Dokaz. Neka $f_\rho \xrightarrow{*} f$, $\rho \to \infty$, tj. za svako $h \in \check{C}_0$ važi

$$\lim_{\rho \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x)df_\rho(x) = \int_{-\infty} h(x)df(x) \tag{10}$$

Kako, očigledno $\mathcal{S} \subset C_0$, relacija (10) će pogotovu važiti za svako $h \in \mathcal{S}$. Odavde, primenom Parsevalove jednakosti [Dod.B.7.] sledi

$$\lim_{\rho \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}_\rho(v)\hat{h}(v)dv = \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(v)\hat{h}(v)dv$$

a slično kao u dokazu dela A. dobijamo

$$\lim_{\rho \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_\rho(v)g(v)dv = \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(v)g(v)dv \qquad \forall g \in \mathcal{S} \tag{11}$$

Po pretpostavci, pak, imamo

$$\lim_{\rho \to \infty} \check{f}_\rho(v) = \varphi(v)$$

tako da, pošto je $|\check{f}_\rho(v)| \leq \|f_\rho\|_{BV}$ [Dod.B.3.] i $\|f_\rho\|_{BV} \leq M$ (zbog $*$-slabe konvergencije familije (f_ρ)), možemo primeniti Lebesgue-ovu teoremu o dominantnoj konvergenciji i dobiti

$$\lim_{\rho \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_\rho(v)g(v)dv = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v)g(v)dv \qquad \forall g \in \mathcal{S} \tag{12}$$

Relacije (11) i (12) daju

$$\int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(v)g(v)dv = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v)g(v)dv \qquad \forall g \in \mathcal{S}$$

Iz ovoga, kao i malopre, dobijamo

$$\check{f}(v) = \varphi(v)$$

C. Neka je Y jedan od prostora L^p, $2 < p \leq \infty$. Neka familija (f_ρ) funkcija $f_\rho \in Y$ konvergira $*$-slabo ka f u Y, kad $\rho \to \infty$. Tada

$$\hat{f}_\rho \longrightarrow \hat{f}, \quad \rho \to \infty, \quad u \quad \mathcal{S}'$$

Dokaz. Neka $f_\rho \xrightarrow{*} f$, $\rho \to \infty$, odnosno za svako $h \in Y^{-*}$ važi

$$\lim_{\rho \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_\rho(v)h(v)dv = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)h(v)dv$$

Kako je opet $\mathcal{S} \subset Y^{-*}$, onda poslednja relacija pogotovu važi za svako $h \in \mathcal{S}$. To znači da f_ρ konvergira ka f u prostoru $\mathcal{S}'$ $(\rho \to \infty)$, a to je ekvivalentno sa $\hat{f}_\rho \to \hat{f}$ u $\mathcal{S}'$, $\rho \to \infty$. [Dod.C.3.]

1.4. Saturacija u drugim prostorima

Na sličan način kao prostore $X(R)$ (funkcija definisanih na R) možemo posmatrati, naprimer, i odgovarajuće prostore periodičnih funkcija. Obeležimo sa $X(T)$ prostore $L^p(T)$, $1 \leq p < \infty$ i $C(T)$, gde je T jedinični krug u kompleksnoj ravni. Sve dosadašnje definicije i tvrdjenja mogu se doslovce preneti i na ove prostore, samo ako se svuda R formalno zameni sa T.

Pogledajmo nekoliko primera. Jezgro (k_ρ) biće sastavljeno od periodičnih funkcija, koje pripadaju $L(T)$. Singularni integral se definiše, za svaku funkciju $f \in X(T)$

$$K_\rho f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)k_\rho(t)dt$$

Fourierova transformacija funkcije $f \in L(T)$ je u ovom slučaju jednaka nizu Fourierovih koeficijenata $\hat{f}(k)$, $k \in Z$. Teškoće u definisanju Fourierove transformacije za ostale prostore $X(T)$ nestaju u ovom slučaju, s obzirom da je $X(T) \subset L(T)$ (zato što je T kompaktan skup). Fourierova transformacija za $f \in X(T)$ definiše se kao za funkciju iz $L(T)$.

Uslovi (S) i (M) glase na isti način, ako se promenljiva $v \in R$ zameni diskretnom promenljivom $k \in Z$. Pomoću Teoreme 1.2.3. dobili bismo u ovom slučaju karakterizaciju klase saturacije

$$S(K_\rho, X(T)) = f \in X(T) \mid \exists\, g \in Y(X,T) \quad \hat{g}(k) = \psi(k)\hat{f}(k)$$

Dokaz Leme 1.3. mnogo je jednostavniji s obzirom da ne treba razlikovati slučajeve. Evo kako bi glasila ta lema

Neka je $Y(T)$ jedan od prostora $L^p(T)$, $1 < p \leq \infty$, $BV(T)$. Neka familija (f_ρ) funkcija $f_\rho \in Y(T)$ konvergira $*$-slabo ka f u $Y(T)$, $\rho \to \infty$. Tada je $\lim\limits_{\rho \to \infty} \hat{f}_\rho(k) = \hat{f}(k)$.

Dokaz. Ako $f_\rho \xrightarrow{*} f$, $\rho \to \infty$, onda, po definiciji $*$-slabe konvergencije, za svako $h \in Y(T)^{-*}$

$$\lim_{\rho \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_\rho(t)h(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)h(t)dt$$

Kako funkcije e^{-itk}, $k \in Z$ pripadaju svim prostorima $Y(T)^{-*}$, onda iz poslednje relacije sledi

$$\lim_{\rho \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_\rho(t)e^{-itk}dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-itk}dt$$

odnosno

$$\lim_{\rho \to \infty} \hat{f}_\rho(k) = \hat{f}(k) \qquad k \in Z$$

Primetimo da se i dokaz teoreme saturacije (v. 1.5.) i sve karakterizacije klase saturacije (v. 2.) mogu dobiti na sličan način i za periodične funkcije. Dalja uopštenja dobijamo ako R i T zamenimo sa R^n i T^n i posmatramo funkcije definisane na tim prostorima. [4].

Mi ćemo, da ne bi komplikovali pisanje, i dalje posmatrati samo prostore X (R).

1.5. Dokaz teoreme saturacije

1.5.1. Dokaz inverznog dela teoreme saturacije

Dokazujemo deo (ii) Teoreme 1.2.3.

Kao što je u uvodu rečeno, saturaciona svojstva singularnog integrala neposredno zavise od ponašanja Fourierove transformacije aproksimacione razlike. Primenom poznatog pravila o Fourierovoj transformaciji konvolucije [Dod.B.6.] dobijamo

$$\left(\frac{K_\rho f - f}{\varphi_\rho}\right)^\wedge(v) = \frac{\hat{k}_\rho(v)\hat{f}(v) - \hat{f}(v)}{\varphi_\rho} = \frac{\hat{k}_\rho(v) - 1}{\varphi_\rho}\hat{f}(v) \qquad (13)$$

Sada je jasno kako treba upotrebiti uslov (S). U slučaju kada je Fourierova transformacija $\hat{f}$ funkcija (tj. u prostorima L^p, $1 \le p \le 2$) neposrednim prelaskom na limes po ρ u (13) dobijamo

$$\lim_{\rho \to \infty} \left(\frac{K_\rho f - f}{\varphi_\rho} \right)^\wedge(v) = \psi(v)\hat{f}(v) \qquad (14)$$

U prostorima L^p, $p > 2$ i C_0 sve elemente jednakosti (13) treba shvatiti kao temperirane distribucije. U ovom slučaju nema smisla govoriti o konvergenciji tačka po tačka, nego treba pokazati (na osnovu uslova (S) i (M)) da izraz (13) konvergira u prostoru $\mathcal{S}'$. Da je to zaista tako vidi se iz sledeće leme 1.5. (koja istovremeno opravdava i množenje distribucija u (13)).

S druge strane granična vrednost izraza (13) (Fourierova transformacija aproksimacione razlike) može se, osim kao u (14), dobiti na još jedan način. Tome služi lema iz 1.3.

Zaista po pretpostavci teoreme imamo da za funkciju f važi $\|K_\rho f - f\|_X = O(\varphi_\rho)$. Kako je $X \subset Y(X)$ (v.(4)), a norma prostora X jednaka restrikciji norme iz Y(X), neposredno se dobija se da važi i $\|K_\rho f - f\|_{Y(X)} = O(\varphi_\rho)$. Pošto je zatvorena kugla u spregnutom prostoru $Y(X)$ $*$-slabo kompaktna [Dod.D.4.] , zaključujemo da postoji funkcija $g \in Y(X)$ i niz $\rho_j \to \infty, j \to \infty$ tako da

$$\frac{K_\rho f - f}{\varphi_\rho} \xrightarrow{*} g \ , \quad j \to \infty \ , \text{ u } Y(X) \tag{15}$$

Ako sada lemu 1.3. primenimo na $*$-slabo konvergentan niz (15) dobijamo

$$\lim_{\rho \to \infty} \left(\frac{K_\rho f - f}{\varphi_\rho}\right)^\wedge = \hat{g} \tag{16}$$

Tako, izjednačujući granične vrednosti u (14) i (16) dobijamo

$$\hat{g} = \psi \hat{f} \qquad (\text{za neko } g \in Y(X))$$

<u>Lema 1.5.</u> Neka jezgro (k_ρ) zadovoljava uslove (S) i (M). Tada za funkciju f iz jednog od prostora L^p, $2 < p < \infty$, C_o važi

$$\lim_{\rho \to \infty} \left(\frac{K_\rho f - f}{\varphi_\rho}\right)^\wedge = \lim_{\rho \to \infty} \frac{\hat{k}_\rho - 1}{\varphi_\rho} \hat{f} = \psi \hat{f} \quad , \text{ u } \mathcal{S}' \tag{17}$$

Dokaz. Treba dokazati najpre da svi izrazi u (17) imaju smisla, tj. da je Fourierovu transformaciju $\hat{f}$ funkcije f iz L^p prostora moguće množiti funkcijom ψ (apsolutno neprekidnom i u beskonačnosti ograničenom nekim polinomom), a takodje i funkcijom $\hat{k}$ i da tada važi uobičajeno pravilo za Fourierovu transformaciju konvolucije. (v. Primedbe na kraju odeljka).

Pokazaćemo najpre da je sledećim izrazom

$$\langle T,h \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)(\psi h)^\wedge(v)dv \ , \qquad h \in \mathcal{S} \tag{18}$$

definisana jedna temperirana distribucija. Zaista, lako je proveriti da je $f/(1+|x|) \in L^1$ tako da (18) procenjujemo sa

$$|\langle T,h \rangle| \leq \sup_x \ (1+|x|)|(\psi h)^\wedge(x)| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| /(1+|x|) \ dx \tag{19}$$

Sem toga funkcija ψ je lokalno ograničene varijacije (pošto je apsolutno neprekidna), a iz pretpostavke o ograničenosti njenog rasta u beskonačnosti, može se zaključiti da postoji $n \in N$ tako da je $\psi(x)/(1+|x|^n) \in BV(R)$. Tako da je

$$|(ix)(\psi h)^\wedge(x)| = \left|(ix)\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)h(t)e^{-itx}dt\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)h(t)d(e^{-itx})\right|$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}d(\psi(t)h(t))\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |d(\psi(t)h(t))| \leq$$

$$\leq \sup_t \ (1+|t|^n)|h(t)| \int_{-\infty}^{\infty} |d(\psi(t)/(1+|t|^n))| + \sup_t \frac{|\psi(t)|}{1+|t|^n} \int_{-\infty}^{\infty} |d(1+|t|^n)h(t)|$$

$$\leq C \sup_t \ (1+|t|^j)|h^{(i)}(t)|$$

gde je $i = o,1$ a j dovoljno veliko.

Iz poslednje relacije i (19) dobijamo

$$|\langle T,h\rangle| \le C \sup_t (1+|t|^j)|h^{(i)}(t)| \qquad i,j\in N$$

što dokazuje da je T neprekidna linearna funkcionela na prostoru $\mathcal{S}$ [Dod.C.1.]

Temperiranu distribuciju T obeležavaćemo sa $\psi\cdot\hat{f}$.

Na sličan način može se definisati temperirana distribucija $\hat{k}\cdot\hat{f}$. Nije teško dokazati da je ovako definisan proizvod neprekidan po oba faktora (v. [13 I str.117]).

Neka je dalje (f_n) niz funkcija $f_n\in L^1\cap L^p$ koji konvergira ka funkciji f u L^p prostoru. Za funkcije f_n važi

$$(k*f_n)^\wedge = \hat{k}\cdot\hat{f}_n \tag{20}$$

Primenjujući lemu 1.3.C. na nizove $(k*f_n)$ i (f_n) (koji konvergiraju jako u prostoru L^p; a otuda konvergiraju i $*$-slabo) dobijamo

$$(k*f_n)^\wedge \longrightarrow (k*f)^\wedge \quad \text{i} \quad \hat{f}_n \longrightarrow \hat{f}\ , \ n\to\infty \quad \text{u} \ \mathcal{S}'$$

Prelaskom na limes po n u (20) dobija se pravilo o Fourierovoj transformaciji konvolucije

$$(k*f)^\wedge = \hat{k}\cdot\hat{f}$$

za $k\in L^1$, $f\in L^p$. (Slično se dobija za $f\in C_o$).

Tako smo dokazali prvu jednakost u (17). Da bismo dokazali drugu dovoljno je, s obzirom da je operacija množenja neprekidna, pokazati da

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{\hat{k}_\rho - 1}{\varphi_\rho} = \psi \qquad \text{u} \ \mathcal{S}' \tag{21}$$

Iz uslova (M) i osobine Fourier-Stieltjesove transformacije [Dod.B.3.] sledi

$$\left|\frac{\hat{k}_\rho(v) - 1}{\varphi_\rho\ \psi(v)}\right| = |\check{\lambda}_\rho(v)| \le \|\lambda_\rho\|_{BV} < M$$

Pošto je po pretpostavci funkcija ψ neprekidna i ne raste brže od polinoma, lako je uvideti da za proizvoljno $h\in\mathcal{S}$ važi $\psi h\in L^1$. Primenom Lebesgueove teoreme o dominantnoj konvergenciji sledi

$$\lim_{\rho\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(v)\psi(v)\ \frac{\hat{k}_\rho(v) - 1}{\varphi_\rho\ \psi(v)}\ dv = \int_{-\infty}^{\infty} h(v)\psi(v)dv$$

a to je upravo (21). Time je lema u potpunosti dokazana.

1.5.2. Dokaz "o" dela teoreme saturacije

Dokazujemo deo (i) teoreme 1.2.3.

Iz pretpostavke da jezgro (k_ρ) zadovoljava uslove (S) i (M) dobili smo u prethodnoj tački (relacija (14)) da

$$\lim_{\rho\to\infty}\left(\frac{K_\rho f - f}{\varphi_\rho}\right)^\wedge = \psi f^\wedge \tag{22}$$

Iz pretpostavke u (i) da za funkciju f važi $\lim_{\rho\to\infty}\left\|\frac{K_\rho f - f}{\varphi_\rho}\right\|_X = 0$, sledi da i u Y(X) $\lim_{\rho\to\infty}\left\|\frac{K_\rho f - f}{\varphi_\rho}\right\|_{Y(X)} = 0$.

Familija $\left(\frac{K_\rho f - f}{\varphi_\rho}\right)$ koja konvergira jako u Y(X), pogotovo konvergira $*$-slabo u tom prostoru i $*$-slaba granična vrednost takodje je jednaka nuli. Primenjujući Lemu 1.3. dobijamo

$$\lim_{\rho\to\infty}\left(\frac{K_\rho f - f}{\varphi_\rho}\right)^\wedge = 0 \tag{23}$$

Iz (22) i (23) sledi

$$\psi f^\wedge = 0 \tag{24}$$

Po pretpostavci za funkciju važi $\psi(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$, pa se iz (24) dobija da je supp $f^\wedge \subset \{0\}$. Otuda [Dod.C.6.] sledi da je f polinom. Kako je jedini polinom koji pripada prostorima X(R) nula, imamo da je trivijalna klasa

$$T(K_\rho, X(R)) = \{0\}$$

Time je dokazan deo (i) Teoreme 1.2.3. i istovremeno opisana trivijalna klasa.

1.5.3. Dokaz direktnog dela teoreme saturacije

Dokazujemo deo (iii) Teoreme 1.2.3.

Neka je (λ_ρ) familija funkcija $\lambda_\rho \in BV$, koja prema uslovu (M) odgovara jezgru (k_ρ). Tada možemo definisati familiju ograničenih linearnih operatora $L_\rho : Y(X) \longrightarrow Y(X)$

$$L_\rho g = g * d\lambda_\rho \qquad , \; g \in Y(X)$$

Iz uslova (M) tada sledi

$$\|L_\rho g\|_{Y(X)} = \|g * d\lambda_\rho\|_{Y(X)} \leq \|\lambda_\rho\|_{BV}\|g\|_{Y(X)} \leq M\|g\|_{Y(X)} \tag{25}$$

Iskoristimo sada pretpostavku u (iii). Neka je $g \in Y(X)$ takva da je $\hat{g} = \psi f^\wedge$. Tada imamo

$$(g * d\lambda_\rho)^\wedge = \hat{g}\cdot\check{\lambda}_\rho = \psi f^\wedge \frac{\hat{k_\rho} - 1}{\varphi_\rho \psi} = f^\wedge \frac{\hat{k_\rho} - 1}{\varphi_\rho} = \left(\frac{K_\rho f - f}{\varphi_\rho}\right)^\wedge \tag{26}$$

gde sve funkcije koje učestvuju u (26) možemo shvatiti kao elemente prostora $\mathcal{S}'$ i Fourierovu transformaciju posmatrati u tom prostoru. (Pri tome se kao u dokazu Leme 1.5. dokazuje da su svi proizvodi distibucija u (26) dobro definisani). Iz (26) sledi da u prostoru $\mathcal{S}'$ važi

$$g * d\lambda_\rho = \frac{K_\rho f - f}{\varphi_\rho} \tag{27}$$

a kako su i leva i desna strana u (27) funkcije iz Y(X), onda (27) važi i u Y(X), pa imajući u vidu (25) dobijamo

$$\left\|\frac{K_\rho f - f}{\varphi_\rho}\right\|_{Y(X)} = \|g * d\lambda_\rho\|_{Y(X)} = O(1)$$

Medjutim, funkcija $K_\rho f - f$ pripada prostoru X, tako da konačno imamo

$$\|K_\rho f - f\|_X = \|K_\rho f - f\|_{Y(X)} = O(\varphi_\rho)$$

što je i trebalo dokazati.

1.6. Klasa $K(K_\rho,X)$

Definicija 1.6.1. Za singularni integral (K_ρ) na prostoru X definišemo klasu konvergencije

$$K(K_\rho,X) = \left\{f\in X \mid \exists g\in X \ \lim_{\rho\to\infty}\left\|\frac{K_\rho f - f}{\varphi_\rho} - g\right\|_X = 0\right\} \tag{27'}$$

Očigledno klasa $K(K_\rho,X)$ je podskup klase saturacije $S(K_\rho,X)$ i sadrži trivijalnu klasu $T(K_\rho,X)$ (v. Definiciju 1.2.1.).

Pretpostavićemo da jezgro (k_ρ) zadovoljava uslov (S) i sledeći uslov, nešto jači od uslova (M) (za φ_ρ i ψ opet se pretpostavlja da su kao u 1.2.)

Definicija 1.6.2.

Svojstvo (M')

Jezgro (k_ρ) ima svojstvo (M') ako postoje φ_ρ i ψ sa navedenim osobinama i postoji familija (λ_ρ) funkcija $\lambda_\rho\in BV$, koja je približan identitet, tako da

$$\check{\lambda}_\rho(v) = \frac{\hat{k}_\rho(-v) - 1}{\varphi_\rho\,\psi(v)}$$

Teorema 1.6.3. Neka jezgro $(k\ )$ singularnog integrala $(K\ )$ zadovoljava uslove (S) i (M'). Tada je

$$K(K_\rho, X) = \left\{ f \in X \quad \exists g \in X \quad \hat{g} = \psi f^\wedge \right\}$$

Ovaj opis klase konvergencije analogan je opisu klase saturacije iz Teoreme 1.2.3.

Dokaz. Neka $f \in K(K_\rho, X)$. Tada po definiciji postoji $g \in X$ tako da

$$\lim_{\rho \to \infty} \left\| \frac{K_\rho f - f}{\varphi_\rho} - g \right\|_X = 0 \tag{28}$$

Iz (28) sledi

$$\frac{K_\rho f - f}{\varphi_\rho} - g \xrightarrow{*} 0 \ , \rho \to \infty, \text{ u } Y(X)$$

(to zaključujemo na isti način kao u dokazu "o" dela teoreme saturacije (1.5.2.)). Primenom leme 1.3. dobija se da konvergira niz Fourierovih transformacija

$$\lim_{\rho \to \infty} \left(\frac{K_\rho f - f}{\varphi_\rho} - g \right)^\wedge = 0 \tag{29}$$

S druge strane, pošto jezgro (k_ρ) zadovoljava uslove Teoreme 1.2.3. važi relacija (14) dobijena u dokazu te teoreme

$$\lim_{\rho \to \infty} \left(\frac{K_\rho f - f}{\varphi_\rho} \right)^\wedge = \psi f^\wedge$$

tako da iz ovoga i (29) sledi

$$\psi f^\wedge = \hat{g} \tag{30}$$

Obratno, neka postoji $g \in X$ tako da važi (30). Tada u prostoru $\mathcal{S}'$ imamo

$$\left(\frac{K_\rho f - f}{\varphi_\rho} - g \right)^\wedge = \frac{k_\rho^\wedge - 1}{\varphi_\rho} f^\wedge - \hat{g} = \frac{k_\rho^\wedge - 1}{\varphi_\rho \psi} \hat{g} - \hat{g} = \check{\lambda}_\rho \cdot \hat{g} - \hat{g}$$

(gde je opet, slično kao u Lemi 1.5. moguće obrazložiti množenje distribucija). Tako da u prostoru $\mathcal{S}'$ važi

$$\frac{K_\rho f - f}{\varphi_\rho} - g = g * d\lambda_\rho - g \tag{31}$$

a kako se na obadve strane jednakosti nalaze funkcije iz X, relacija (31) važi i u prostoru X.

Po pretpostavci je (λ_ρ) približan identitet, tj.

$$\lim_{\rho \to \infty} \| g * d\lambda_\rho - g \|_X = 0$$

a onda iz (31) sledi

$$\lim_{\rho \to \infty} \left\| \frac{K_\rho f - f}{\varphi_\rho} - g \right\|_X = 0$$

a to je i trebalo dokazati.

Definicija 1.6.4.

$$W(X,\psi) = \left\{ f\in X \mid \exists g\in X \quad \hat{g} = \psi f^{\wedge} \right\}$$
$$V(X,\psi) = \left\{ f\in X \mid \exists g\in Y(X) \quad \hat{g} = \psi f^{\wedge} \right\}$$

Teoreme 1.2.3. i 1.6.3. govore da je za singularni integral (K_ϱ) čije jezgro zadovoljava uslove (S) i (M') klasa saturacije jednaka $V(X,\psi)$, a klasa konvergencije jednaka $W(X,\psi)$.

1.7. Jedno uopštenje

Neposredno je jasno da Teoreme 1.2.3. i 1.6.3. važe i za nešto opštije operatore (M)(pomenute u tački 1.1.) kod kojih su jezgra sastavljena od funkcija $\mu_\varrho \in BV$. Treba samo na analogan način definisati uslove (S) i (M).

Mi se nećemo zadržavati na tom slučaju, nego ćemo odmah još malo proširiti skup posmatranih operatora. Naime, aproksimaciona razlika $M_\varrho f(x) - f(x)$ može se predstaviti u obliku

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,d\nu_\varrho(t) \quad , \text{ gde je } \quad d\nu_\varrho(t) = d\mu_\varrho(t) - d\delta(t) \qquad (32)$$

a δ Diracova funkcija. Za $\nu_\varrho \in BV$ važi

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\nu_\varrho(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu_\varrho(t) - \int_{-\infty}^{\infty} d\delta(t) = 1 - 1 = 0$$

Sada umesto funkcija ν_ϱ, koje su specijalnog oblika (32), posmatramo uopšte funkcije $\nu_\varrho \in BV$, takve da je $\int_{-\infty}^{\infty} d\nu_\varrho = 0$.

Definišemo operatore $N_\varrho : X \to X$ sa $N_\varrho f = f * d\nu_\varrho$. Ako još pretpostavimo da $\lim\limits_{\varrho\to\infty} \int_{|u|>\varepsilon} |d\nu_\varrho(u)| = 0$, za svako $\varepsilon > 0$, nije teško proveriti da za operatore N_ϱ važi

$$\lim_{\varrho\to\infty} \| N_\varrho f \|_X = 0$$

Vidimo da familija (N_ϱ) ne predstavlja aproksimacioni proces, kao što su to (K_ϱ) i (M_ϱ), koje kad $\varrho \to \infty$ konvergiraju (jako) ka identičnom operatoru I; familija (N_ϱ) konvergira ka nultom operatoru. Ipak, na isti način kao što se iz brzine konvergencije ka nuli aproksimacione razlike $\|K_\varrho f - f\|$ mogu dobiti osobine funkcije f, tako se i iz brzine konvergencije ka nuli izraza $\|N_\varrho f\|$ mogu dobiti svojstva funkcije f. U tom smislu može se definisati pojam saturacije i za familiju (N_ϱ).

Lako je videti da bi uslovi (S) i (M) u ovom slučaju izgledali (za φ_ϱ i ψ važe opet pretpostavke iz 1.2.)

Definicija 1.7.1.

Svojstvo (S_o)

Familija (ν_ρ) funkcija $\nu_\rho \in BV$ takvih da je $\int d\nu_\rho = 0$ ima svojstvo (S_o) ako

(i) (ν_ρ) je takva da $\lim\limits_{\rho\to\infty} \|N_\rho f\|_X = 0$

(ii) postoje φ_ρ i ψ sa navedenim osobinama tako da

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{\check{\nu}_\rho(v)}{\varphi_\rho} = \psi(v)$$

Svojstvo (M_o)

Familija (ν_ρ) funkcija $\nu_\rho \in BV$ takvih da je $\int d\nu_\rho = 0$ ima svojstvo (M_o) ako postoje φ_ρ i ψ sa navedenim osobinama i familija (λ_ρ) funkcija $\lambda_\rho \in BV$ tako da je $\|\lambda_\rho\|_{BV} \leq M$ i

$$\check{\lambda}_\rho(v) = \frac{\check{\nu}_\rho(v)}{\varphi_\rho\, \psi(v)}$$

Za operatore N_ρ se na isti način kao u 1.5.-1.7. dobija

Teorema 1.7.2. Neka familija (ν_ρ) funkcija $\nu_\rho \in BV$ ima svojstva (S_o) i (M_o). Tada za operatore $N_\rho f = f * d\nu_\rho$ na prostoru X važi

(i) $\|N_\rho f\|_X = o(\varphi_\rho) \Longrightarrow N_\rho f = 0$

(ii) $\|N_\rho f\|_X = O(\varphi_\rho) \Longleftrightarrow f \in V(X,\psi)$

(iii) $\exists g \in X \ \lim\limits_{\rho\to\infty} \left\| \frac{N_\rho f}{\varphi_\rho} - g \right\|_X = 0 \Longleftrightarrow f \in W(X,\psi)$

1.8. Primedbe

Metod dokaza teoreme saturacije, izložen u ovom odeljku, dobro je poznat (bar što se tiče prostora $L^p(R)$, $1 \leq p \leq 2$). Osnovna dva koraka u dokazu inverznog dela dobijaju se pomoću Leme 1.3. i pomoću teoreme o $*$-slaboj kompaktnosti zatvorene kugle [Dod.D.4.]. Za direktni deo presudnu ulogu igra uslov (M). Pokazuje se čak da je taj uslov neophodan ([3], str.458).

Mi smo pokušali da isti način dokaza primenimo i na prostore $L^p(R)$, $p>2$. Fourierove transformacije funkcija iz tih prostora posmatramo kao temperirane distribucije. Poznato je [12] da se temperirane distribucije u opštem slučaju mogu množiti samo beskonačno direfencijabilnim funkcijama koje imaju polinomijalan rast u beskonačnosti, dok naš način dokaza zahteva množenje funkcijom $\psi(v)$ (v. (14)), koja je u tipičnom slučaju jednaka $|v|^{\alpha}, \alpha > 0$ (i očigledno nije beskonačno diferencijabilna. Ali, kako funkcijom ψ i nije potrebno množiti sve temperirane distribucije nego samo one koje su Fourierova transformacija funkcije iz L^p prostora, pokazuje se da je u tom slučaju moguće dobro definisati proizvod (Lema 1.5.).

Ovaj problem su na nešto drukčiji način rešili GORLICH [6] (on funkciju $|v|^n$ zamenjuje funkcijom $(1+v^2)^{n/2}$, koja nema singularitet u nuli, s tim da dokazuje da ove dve funkcije daju iste klase saturacije) i BOMAN [2] (koji je dokazao da se za funkcije iz L^p može definisati konvolucija, onim distribucijama iz $\mathcal{S}'$, koje su ustvari Fourierove transformacije neke homogene funkcije).

1.2. Postoji jezgro koje je približan identitet, a ne zadovoljava uslov (S) ([3],str.478). Takodje postoji jezgro koje zadovoljava uslov (S), a ne zadovoljava uslov (M) [15].

1.6. O klasi konvergencije će još biti dosta govora, naročito u odeljku 2.5. o relativnom kompletiranju. Poznavanje klase konvergencije omogućuje da se odredi klasa saturacije i u mnogo opštijem slučaju kada operatori nisu konvolucioni, a aproksimacija se vrši na bilo kakvom intervalu (kada, dakle, nije moguće primeniti metod Fourierove transformacije). Tipičan primer takvog načina dokazivanja je teorema saturacije za Bernsteinove operatore ([8], relacija analogna (27′) naziva se u ovom slučaju relacijom Voronovske); ili teorema saturacije za semigrupe operatora na proizvoljnom Banachovom prostoru ([3],str.502); ili pak za konvolucione operatore (SHAPIRO [13], str.28). Ovaj metod dokaza teoreme saturacije, zapravo metod relativnog kompletiranja (v. odeljak 2.5.2.) može se po univerzalnosti meriti sa metodom Fourierove transformacije,

1.7. Uvodjenje operatora N_{ς} omogućiće da se neki "diferencijalni" operatori (naprimer, Riemannov (2.1.) ili Rieszov (2.4.1.)) tretiraju na isti način, kao konvolucioni operatori. Ovo će biti naročito korisno pri karakterizaciji klase saturacije.

2. Karakterizacija klase saturacije

Rešavajući problem saturacije za singularne integrale, u odeljku 1. došli smo do klasa $V(X(R),\psi)=\{f\in X(R) \mid \exists g\in Y(X)\ \hat{g}=\psi\hat{f}\}$. Sada bismo želeli da te klase opišemo pomoću same funkcije f, umesto njene Fourierove transformacije.

Primećujemo odmah da za različite singularne integrale dobijamo istu klasu $V(X(R),\psi)$, ukoliko ti singularni integrali imaju u uslovu (S) istu funkciju ψ. Očigledno, svojstvo "singularnim integralima (K_ρ) i (K'_ρ) odgovara ista funkcija ψ" predstavlja jednu relaciju ekvivalencije u skupu svih singularnih integrala. Tako, svaka karakterizacija klase $V(X(R),\psi)$ predstavlja karakterizaciju klase saturacije za sve singularne integrale iz klase ekvivalencije odredjene funkcijom ψ. Takodje, činjenica da se f aproksimira do na stepen $O(\varphi_\rho)$ nekim singularnim integralom (K_ρ), predstavlja izvesnu karakterizaciju za klase saturacije svih ostalih singularnih integrala koji su sa (K_ρ) ekvivalentni. Ovakva karakterizacija se pokazuje utoliko pogodnijom ukoliko je bolje izabran predstavnik klase ekvivalencije.

Slučaj kada je ψ stepena funkcija je najinteresantniji. To je ujedno i jedini slučaj kada se klasa saturacije može okarakterisati preko neke vrste izvoda funkcije f. Naime, pokazuje se da se u tom slučaju u klasi ekvivalencije odredjenoj funkcijom ψ nalazi i neki "diferencijalni" operator, za koji je lako utvrditi da mu se klasa saturacije sastoji od funkcija koje imaju odredjeni broj izvoda.

Posmatramo prvo slučaj kada je eksponent u ψ ceo broj. (2.1.-2.3.) Tada se u klasi ekvivalencije odredjenoj sa $\psi(v) = (iv)^r$ pojavljuje Riemannov operator. On obezbedjuje za operatore koji su sa njim ekvivalentni karakterizaciju sledećeg oblika: funkcija iz klase saturacije ima ograničenu r-tu Riemannovu diferenciju (= pripada Lipschitzovoj klasi). Dalje se pokazuje da iz egzistencije Riemannovog izvoda po normi prostora X(R) sledi egzistencija običnog izvoda u X(R) (za razliku od izvoda u tački, kada je običan izvod opštiji pojam od Riemmanovog

Ovo je značajno jer omogućuje karakterizaciju pomoću običnog izvoda, koji se ne može predstaviti familijom linearnih operatora. U tački 2.3. pokazujemo kako se iz karakterizacije klase $V(X(R),(iv)^r)$ dobija karakterizacija za klasu $V(X(R),|v|^r)$ (pomoću Hilbertove transformacije).

Slučaj kada je eksponent u ψ proizvoljan realan broj razmatra se u 2.4. Uvodi se pojam izvoda "razlomljenog" reda: Riemann-Liouvilleov, koji odgovara klasi $V(X(R),(iv)^\alpha)$, i Rieszov, koji odgovara klasi $V(X(R),|v|^\alpha)$. Za $0<\alpha<1$ obadva ova izvoda mogu se predstaviti izvesnim singularnim integralima, tako da se klase $V(X(R),(iv)^\alpha)$, odnosno $V(X(R),|v|^\alpha)$ dobijaju kao klase saturacije tih singularnih integrala. Dalje uvodimo Rieszov operator R_ε^α koji je singularni integral za svako $\alpha>0$ i koji karakteriše klasu $V(X(R),|v|^\alpha)$, $\alpha>0$. Njegova uloga je slična ulozi Riemannovog operatora u karakterizaciji klase $V(X(R),(iv)^r)$, $r\in N$.

U poslednjoj tački 2.5. ovog odeljka razmatramo karakterizacije sasvim drugog tipa. Uvodeći pojam relativnog kompletiranja pokazuje se da je klasa saturacije jednaka relativnom kompletiranju klase konvergencije (v.1.9.). Pojam relativnog kompletiranja poslužiće nam i u dokazivanju lokalne teoreme saturacije (v.II i III deo).

2.1. Primer: Riemannov operator

Primenićemo teoremu saturacije na Riemannov operator definisan na sledeći način

$$\Delta_h^r f(x) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j}\binom{r}{j} f(x+jh) \qquad f\in X, \quad r\in N$$

Pokazaćemo da Riemannov operator pripada klasi singularnih integrala razmatranih u odeljku 1. (parametar ρ je u ovom slučaju obeležen sa h^{-1}, tako da $h\to 0$, $\rho\to\infty$).

Riemannov operator izabrali smo kao predstavnika operatora kojima odgovara funkcija $\psi(v) = (iv)^r$.

Neka je $\delta^r\in BV$ funkcija definisana na sledeći način

$$\delta^r(x) = \begin{cases} (-1)^{r-j-1}\binom{r-1}{j}, & -j-1\le x<-j, \quad j=0,\dots,r-1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

i neka je $\delta_h^r(x) = \delta^r(\frac{x}{h})$

Lako je proveriti da za Stieltjesov integral važi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)d\,\delta_h^r(t) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j}\binom{r}{j} f(x+jh)$$

pa je Δ_h^r zaista singularni integral na X.

<u>Definicija 2.1.1.</u> Funkcija $f\in X$ ima Riemannov izvod reda r u X, ako izraz $h^{-r}\Delta_h^r f$ konvergira, $h\to 0$, u prostoru X, tj. ako postoji funkcija u X, koju ćemo obeležavati sa $D_h^r f$, takva da

$$\lim_{h\to 0} \|h^{-r}\Delta_h^r f - D_h^r f\|_X = 0$$

<u>Definicija 2.1.2.</u> Funkcija $f\in X$ pripada Lipschitzovoj klasi $Lip_r(X,\alpha)$, $r\in N$, $\alpha > 0$, ako je

$$\sup_{|h|<\delta} \|\Delta_h^r f\|_X = O(\delta^\alpha)$$

<u>Teorema 2.1.3.</u> Neka je $f\in X$. Tada

a) f ima Riemannov izvod reda r u X $\Longleftrightarrow$ $f\in W(X, (iv)^r)$

b) $\|\Delta_h^r f\|_X = O(|h|^r) \Longleftrightarrow f\in V(X, (iv)^r)$

Dokaz. Za jezgro (δ_h^r) važi $d\delta_h^r(x) = \Delta_h^r 1(x) = 0$, tako da Riemannov operator spada u klasu operatora razmatranih u tački 1.7. Ako za jezgro (δ_h^r) dokažemo da zadovoljava uslove (S_o) i (M_o) u kojima je $\varphi(\rho) = \varphi(h) = h^r$ i $\psi(v) = (iv)^r$, tada će tvrdjenje teoreme neposredno proizilaziti iz Teoreme 1.7.2.

Pošto je Fourier-Stieltjesova transformacija jezgra

$$\check{\delta}_h^r(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivx}d\delta_h^r(x) = \sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}e^{iv(0+jh)} = (e^{ivh}-1)^r$$

imamo da uslov (S_o) u ovom slučaju izgleda

$$\lim_{h\to 0} \frac{\check{\delta}_h^r(v)}{h^r} = \lim_{h\to 0} \frac{(e^{ivh}-1)^r}{h^r} = (iv)^r$$

Da važi uslov (M_o) dobijamo ovako

$$\frac{\check{\delta}_h^r(v)}{\varphi_h\psi(v)} = \frac{(e^{ivh}-1)^r}{h^r(iv)^r} \tag{1}$$

Definišemo funkciju $m_h^r \in L^1$ na sledeći način. Neka je $m(x) = \chi_{[-1,0)}(x)$, $m^r(x) = (m * \ldots * m)(x)$ (konvolucija od r faktora) i najzad

$$m_h^r(x) = \frac{1}{h} m^r(\frac{x}{h})$$

Očigledno je

$$m_h^r \in L^1, \text{ jer } \int_{-\infty}^{\infty} |m_h^r(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |m^r(x)| dx \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |m(x)| dx\right]^r = 1$$

Računamo Fourierovu transformaciju funkcije m_h^r [Dod.B.1. i B.6.]

$$\hat{m}_h^r(v) = \hat{m}^r(hv) = (\hat{m}(vh))^r = (\frac{e^{ivh}-1}{ivh})^r \qquad (2)$$

jer je $\hat{m}(v) = (e^{iv}-1)/iv$. Tako da iz (1) i (2) dobijamo da postoji $m_h^r \in L^1$ tako da je

$$\frac{\check{\delta}_h^r(v)}{\varphi_h \psi(v)} = \hat{m}_h^r(v)$$

Time je dokazano da jezgro (δ_h^r) zadovoljava i uslov (M_0); tako smo dokazali teoremu.

Ovim smo dobili prvu karakterizaciju klase saturacije za singularne integrale kojima odgovara funkcija $\psi(v) = (iv)^r$, $r \in N$: funkcija f pripada klasi saturacije takvog operatora ako i samo ako je $\|\Delta_h^r f\|_X = O(|h|^r)$, odnosno (v. Definiciju 2.1.2.) f pripada Lipschitzovoj klasi $Lip_r(X,r)$. Sada ćemo dobiti i karakterizaciju pomoću običnih izvoda.

2.2. Karakterizacija u slučaju $\psi(v) = (iv)^r$, $r \in N$

Definicija 2.2.1. Neka je $f \in X$. Funkcija f ima r-ti izvod u prostoru X (odnosno prostoru Y(X)), ako je f = h, s.s. za neku funkciju $h \in AC^{r-1}$ takvu da svi izvodi $h^{(j)}$, $j=1,\ldots,r$ pripadaju prostoru X (odnosno prostoru Y(X)). r-ti izvod funkcije f obeležavamo sa $f^{(r)}$.

Stav 2.2.2. Neka je $f \in X$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni

a) f ima r-ti izvod u X

b) f ima r-ti Riemannov izvod u X

Stav 2.2.3. Neka je f X. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni

a) f ima r-ti izvod u Y(X)

b) $f \in Lip_r(X,r)$

Tvrdjenja ova dva stava neočekivana su kada se zna da je Riemannov izvod u tački opštiji pojam od običnog izvoda; ali utoliko su korisnija u karakterizaciji klasa saturacije. Osnovna razlika izmedju ove dve vrste izvoda, sa našeg stanovišta, jeste što se Riemannov izvod, za svako $r\in N$, definiše kao singularni integral (nezavisno od izvoda nižeg reda), dok se običan izvod definiše iterativno (r-ti izvod je izvod r-1-vog izvoda).

Tako nam upravo ova dva stava omogućuju da dobijemo jednu bitno novu karakterizaciju klase saturacije, a ne samo da klasu saturacije jednog singularnog integrala opisujemo pomoću klase saturacije drugog ("ekvivalentnog") singularnog integrala (kao što smo objasnili u uvodu u odeljak 2.). Iz ovoga je takodje jasno da se ovi stavovi moraju dokazati metodom drukčijim od onog koim dokazujemo većinu tvrdjenja u ovom odeljku. Zbog toga se nećemo zadržavati na dokazu ovih stavova (v. [3]).

Neka je (K_ρ) singularni integral čije jezgro zadovoljava uslove (S) i(M'), u kojima je $\psi(v) = (iv)^r$, $r\in N$.

Kombinujući Teoremu 1.2.3. s Teoremom 2.1.3.b) i Stavom 2.2.3. dobijamo karakterizaciju klase saturacije $S(K_\rho,X)$ operatora (K_ρ).

Slično, kombinujući Teoremu 1.6.3. sa Teoremom 2.1.3.a) i Stavom 2.2.2., dobijamo karakterizaciju klase $K(K_\rho,X)$.

Teorema 2.2.4. Neka je (K_ρ) singularni integral čije jezgro zadovoljava uslove (S) i (M), u kojima je funkcija $\psi(v)=(iv)^r$ $r\in N$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni

a) $\|K_\rho f - f\|_X = O(\varphi_\rho)$

b) $f\in V(X),(iv)^r)$

c) $f\in Lip_r(X,r)$

d) f ima r-ti izvod u Y(X)

Teorema 2.2.5. Neka je (K_ρ) singularni integral čije jezgro zadovoljava uslove (S) i (M'), u kojima je $\psi(v) = (iv)^r$, $r\in N$. Tada su, za $f\in X$, sledeći uslovi ekvivalentni

a) $\lim\limits_{\rho\to\infty} \left\|\frac{K_\rho f - f}{\varphi_\rho} - g\right\|_X = 0$, za neko $g\in X$

b) $f\in W(X,(iv)^r)$

c) f ima r-ti Riemannov izvod u X

d) f ima r-ti izvod u X

2.3. Karakterizacija u slučaju $\psi(v) = |v|^r$, $r\in N$

Da bi se tvrdjenja slična prethodnim mogla dobiti i za singularne integrale kojima odgovara funkcija $\psi(v) = |v|^r$, $r\in N$, potrebno je uvesti Hilbertovu transformaciju.

Za $f\in X(R)$ definiše se Hilbertova transformacija (konjugovana funkcija) $\tilde{f}\in X(R)$

$$\tilde{f}(x) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-u)}{u}\, du$$

Stav 2.3.1.

$$\text{a)}\ W(X,|v|^r) = \begin{cases} \{f\in X \mid f \text{ ima } r\text{-ti izvod u } X\}, & r \text{ parno} \\ \{f\in X \mid \tilde{f} \text{ ima } r\text{-ti izvod u } X\}, & r \text{ neparno} \end{cases}$$

$$\text{b)}\ V(X,|v|^r) = \begin{cases} \{f\in X \mid f \text{ ima } r\text{-ti izvod u } Y(X)\}, & r \text{ parno} \\ \{f\in X \mid \tilde{f} \text{ ima } r\text{-ti izvod u } Y(X)\}, & r \text{ neparno} \end{cases}$$

Dokaz. Dokazujemo a); dokaz za b) je potpuno sličan.
Neka je r paran broj. Prema Teoremi 2.2.5. f ima r-ti izvod u X ako i samo ako f pripada $W(X,(iv)^r)$. Ali, kada je r parno očigledno je da je klasa $W(X,(iv)^r)$ jednaka klasi $W(X,|v|^r)$.

Neka je r neparan broj. Poznato je [Dod.B.8. i C.7.] da za Fourierovu transformaciju Hilbertove transformacije važi

$$(\tilde{f})^\wedge = -i\,\mathrm{sgn}\,v\,\hat{f}$$

tako da imamo

$$f\in W(X,(iv)^r) \iff f\in W(X,-i\,\mathrm{sgn}\,v(iv)^r)$$

$$\iff (\exists g\in Y(X))\ \hat{g} = -i\,\mathrm{sgn}\,v(iv)^r\hat{f} \iff (\exists g\in Y(X))\ \hat{g} = |v|^r\hat{f}$$

$$\iff f\in W(X,|v|^r) \tag{3}$$

Iz Teoreme 2.2.5. sledi da $f\in W(X,(iv)^r)$ ako i samo ako f ima r-ti izvod u X. Tako da iz ovoga i (3) sledi zaključak stava.

Pomoću ovog stava lako dobijamo iz Teoreme 2.2.4. karakterizacije klase saturacije onih singularnih integrala, kojima odgovara funkcija $\psi(v) = |v|^r$, $r\in N$.

Teorema 2.3.2. Neka jezgro singularnog integrala (K_ρ) zadovoljava uslove (S) i (M), u kojima je funkcija $\psi(v) = |v|^r$, $r\in N$. Tada su za $f\in X$ sledeći iskazi ekvivalentni:

a) $\|K_\rho f - f\|_X = O(\varphi_\rho)$

b) $f\in V(X,|v|^r)$

c) $f \in Lip_r(X,r)$ (odnosno $\tilde{f} \in Lip_r(X,r)$), za r parno (r neparno)

d) f (odnosno $\tilde{f}$) ima r-ti izvod u Y(X), za r parno (r neparno)

Primedba. Slična teorema važi takodje za klasu konvergencije.

2.4. Karakterizacija za razlomljeni eksponent

2.4.1. Izvodi razlomljenog reda

Dosada smo (u odeljcima 2.2. i 2.3.) dobili karakterizaciju klasa saturacije onih operatora kojima je odgovarajuće stepena funkcija sa celim eksponentom. Videli smo da se klasa saturacije u tom slučaju karakteriše brojem izvoda funkcije (odnosno konjugovane funkcije) koje joj pripadaju. Da bi se slično tvrdjenje moglo dobiti i za operatore kojima odgovara funkcija $\psi(v) = |v|^{\alpha}$, $\alpha > 0$, potrebno je najpre uopštiti pojam izvoda.

Ispostaviće se da je klasa $V(X(R), |v|^{\alpha})$ vezana za Rieszov izvod. Da bismo pokazali kako se dolazi do naizgled komplikovanog izraza za Rieszov izvod, pretpostavimo najpre da je funkcija f dovoljno "dobra" da bi sve navedene relacije imale smisla. Na kraju ćemo dati preciznu definiciju.

Postoji više načina na koje se pojam izvoda može proširiti na izvode razlomljenog reda. Obično se prvo uopštava pojam integrala a zatim izvod reda definiše kao običan r-ti izvod integrala reda $r-\alpha$ $(r>\alpha)$.

Riemann-Liouvilleov integral je najjednostavnije uopštenje običnog integrala. Naime, r-ti (obični) integral funkcije f može se predstaviti u obliku

$$(L_r f)(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_{-\infty}^{x} f(u)(x-u)^{r-1} du$$

Za proizvoljno $\alpha > 0$, Riemann-Liouvilleov integral se definiše kao

$$(L_\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} f(u)(x-u)^{\alpha-1} du$$

Zadržaćemo se na slučaju $0<\alpha<1$. Integrali višeg reda se dobijaju iterativno.

Operator L_α može se predstaviti u obliku konvolucije $L_\alpha f = f * \eta_\alpha$ sa jezgrom

$$\eta_\alpha(x) = \begin{cases} 1/\Gamma(\alpha) x^{\alpha-1} &, \quad x>0 \\ 0 &, \quad x<0 \end{cases}$$

Nas medjutim interesuje izvod $f^{(\alpha)}$ reda α. On će, kao što je rečeno, biti definisan kao običan izvod (po normi prostora X) integrala $L_{1-\alpha}f$.

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{L_{1-\alpha}f(x+h) - L_{1-\alpha}f(x)}{h} - f^{(\alpha)}(x) \right\|_X = 0$$

Posmatrajmo dakle diferenciju

$$L_{1-\alpha}f(x+h) - L_{1-\alpha}f(x) = f*\Delta_h^1\eta_{1-\alpha}(x)$$

gde je $\Delta_h^1\eta_{1-\alpha}(x) = 1/\Gamma(\alpha)\ [(x+h)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}] \in L^1$. Zaista, očigledno je da

$$\Delta_h^1\eta_{1-\alpha} \in L_{loc} \quad \text{i} \quad \Delta_h^1\eta_{1-\alpha}(x) = O(|x|^{2-\alpha}), \text{ kad } |x| \to \infty$$

tako da je $(\Delta_h^1\eta_{1-\alpha})_h$ jezgro singularnog integrala

$$H_hf = f*\Delta_h^1\eta_{1-\alpha} \tag{4}$$

Sledeća teorema pokazuje kako je Riemann-Liouvilleov izvod pogodan za karakterizaciju klase saturacije singularnih integrala kojima odgovara funkcija $\psi(v) = (iv)^\alpha$.

Teorema 2.4.1. Neka je $f\in X$ i $0<\alpha<1$. Tada

a) $\exists g\in X \quad \lim_{h\to 0} \left\| \frac{f*\Delta_h^1\eta_{1-\alpha}}{h} - g \right\|_X = 0 \iff f\in W(X,(iv)^\alpha)$

b) $\| f*\Delta_h^1\eta_{1-\alpha}\|_X = O(h) \iff f\in V(X,(iv)^\alpha)$

Dokaz. Za jezgro singularnog integrala (4) računamo Fourierovu transformaciju

$$(\Delta_h^1\eta_{1-\alpha})\hat{}(v) = \frac{e^{ivh}-1}{(iv)^{1-\alpha}} \tag{5}$$

Kako je $\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_h^1\eta_{1-\alpha}(x)dx = 0$, singularni integral (H_h) spada u klasu operatora koji su razmatrani u 1.7. Stoga je za dokaz teoreme dovoljno, prema Teoremi 1.7.2., pokazati da jezgro zadovoljava uslove (S_o) i (M_o). Kao što se lako vidi, za ovaj operator je $\rho = 1/h$, $\varphi(h) = h$, $\psi(v) = (iv)^\alpha$ i iz (5) sledi

$$(S_o) \quad \lim_{h\to 0} \frac{(\Delta_h^1\eta_{1-\alpha})\hat{}(v)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{ivh}-1}{h(iv)^{1-\alpha}} = (iv)^\alpha$$

$$(M_o) \qquad \frac{(\Delta_h^1 \eta_{1-\alpha})^\wedge(v)}{h\,(iv)^\alpha} = \frac{e^{ivh}-1}{(iv)^{1-\alpha} h (iv)^\alpha} = \frac{e^{ivh}-1}{ivh} = \hat{m}_h(v)$$

gde je $m(x) = \chi_{[-1,0)}(x)$, $m_h(x) = 1/h\; m(x/h)$ (v. (2)). Time je teorema dokazana.

Za razliku od celobrojnog slučaja (2.3.) prethodna teorema nam neće mnogo pomoći u karakterizaciji klasa $W(X, |v|^\alpha)$, $V(X, |v|^\alpha)$. Naime uvodjenjem Hilbertove transformacije sada bismo prešli od klase $W(X,(iv)^\alpha)$ na klasu $W(X,-i\,\mathrm{sgn}\,v(iv)^\alpha)$.

Stoga postupamo drugačije. Umesto funkcije $\eta_\alpha(x)$ uvešćemo funkciju $\nu_\alpha(x) = C_\alpha\, |x|^{\alpha-1}$. Konvolucijom f sa ovakvom funkcijom dobija se Rieszov integral

$$R_\alpha f(x) = C_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{x-u^{1-\alpha}}\, du$$

Da bismo dobili Rieszov izvod, predstavićemo slično kao malopre razliku $R_{1-\alpha}f(x+h) - R_{1-\alpha}f(x)$ u obliku konvolucije sa jezgrom $\Delta_h^1 \nu_{1-\alpha}$ koje pripada L i ima Fourierovu transformaciju

$$(\Delta_h^1 \nu_{1-\alpha})^\wedge(v) = \frac{e^{ivh}-1}{|v|^{1-\alpha}}$$

Lako je videti slično kao u Teoremi 2.4.1. da bi za f X postojanje granične vrednosti u X izraza $h^{-1}(f*\Delta_h^1 \nu_{1-\alpha})$ bilo ekvivalentno sa $f\in W(X,-i\,\mathrm{sgn}\,v\,|v|^\alpha)$. Da bismo se još oslobodili faktora $-i\,\mathrm{sgn}\,v$, treba uvesti Hilbertovu transformaciju. Koristeći poznatu osobinu Hilbertove transformacije $(f*g)^\sim = \tilde{f}*g = f*\tilde{g}$ i činjenicu da

$$(\Delta_h^1 \nu_{1-\alpha})^\sim(x) = \Delta_h^1 \tilde{\nu}_{1-\alpha}(x) = C_\alpha\Big(\frac{\mathrm{sgn}(x+h)}{|x+h|^{1-\alpha}} - \frac{\mathrm{sgn}\,x}{|x|^{1-\alpha}}\Big) \in L^1$$

konačno dolazimo do sledeće definicije Rieszovog izvoda.

<u>Definicija 2.4.2.</u> Neka $f\in X$ i $0<\alpha<1$. Funkcija f ima Rieszov izvod reda α u X ako postoji funkcija $g\in X$ tako da

$$\lim_{h\to 0} \Big\| \frac{f*\Delta_h^1 \tilde{\nu}_{1-\alpha}}{h} - g \Big\|_X = 0 .$$

Funkciju g obeležavaćemo sa $f^{\{\alpha\}}$ i nazivati Rieszovim izvodom funkcije f.

Sada je moguće pomoću Rieszovih izvoda okarakterisati klase saturacije singularnih integrala kojima odgovara funkcija $\psi(v) = |v|^\alpha$.

<u>Teorema 2.4.3.</u> Neka je $f\in X$ i $0<\alpha<1$. Tada je

a) f ima Rieszov izvod reda $\alpha \iff f\in W(X,|v|^{\alpha})$

b) $\|f*\Delta_h^1\tilde{\nu}_{1-\alpha}\|_X = O(h) \iff f\in V(X,|v|^{\alpha})$

Dokaz. Slično kao u dokazu Teoreme 2.4.1. dokazaćemo da jezgro $(\Delta_h^1\tilde{\nu}_{1-\alpha})$ zadovoljava uslove (S_0) i (M_0). Tada će za singularni integral sa tim jezgrom važiti Teorema 1.7.2. a to je ustvari tvrdjenje teoreme.

$$(S_0)\quad \lim_{h\to 0}\frac{(\Delta_h^1\tilde{\nu}_{1-\alpha})\hat{}\,(v)}{h} = \lim_{h\to 0} -i\,\mathrm{sgn}\,v\,\frac{e^{ivh}-1}{h|v|^{1-\alpha}} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{ivh}-1}{hiv|v|^{-\alpha}} = |v|^{\alpha}$$

$$(M_0)\quad \frac{(\Delta_h^1\tilde{\nu}_{1-\alpha})\hat{}\,(v)}{h\,|v|^{\alpha}} = -i\,\mathrm{sgn}\,v\,\frac{e^{ivh}-1}{|v|^{1-\alpha}h|v|^{\alpha}} = \frac{e^{ivh}-1}{ivh} = \hat{m}_h(v)$$

(gde je m_h definisano u (2)).

<u>Definicija 2.4.4.</u> Neka je $f\in X$.

(i) $\alpha=1$, $f^{\{1\}}(x) = h'(x)$ s.s., gde je $h(x) = f(x)$ s.s. i $h\in AC_{loc}$, $h'\in X$

(ii) $\alpha>1$, tada za $\alpha\in N$, $f^{\{\alpha\}} = (f^{\{\alpha-1\}})^{\{1\}}$
za $\alpha\notin N$ $f^{\{\alpha\}} = (f^{\{[\alpha]\}})^{\{\alpha-[\alpha]\}}$

Primedba. Tvrdjenje slično Teoremi 2.4.3. važi i za $\alpha>1$. Za $\alpha\in N$ v. 2.3., a za $\alpha\notin N$ biće

a) f ima Rieszov izvod reda $\alpha \iff f\in W(X,|v|^{\alpha})$

b) $\|f^{\{[\alpha]\}}*\Delta_h^1\tilde{\nu}_{1-\alpha+[\alpha]}\|_X = O(h) \iff f\in V(X,|v|^{\alpha})$

Iz prethodnog sledi, naprimer, da funkcije $\varphi\in\mathcal{S}$ imaju Rieszov izvod $\varphi^{\{\alpha\}}$, za svako $\alpha>0$ i da se on može predstaviti

$$\varphi^{\{\alpha\}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty}|v|^{\alpha}\hat{\varphi}(v)\,e^{ivx}dv$$

2.4.2. Operatori R_ε^α

Definicija 2.4.5. Neka $f\in X$ i $\alpha>0$. Neka je (R_ε^α) familija operatora $R_\varepsilon^\alpha : X \to X$ definisanih sa

$$R_\varepsilon^\alpha f(x) = C_\alpha \int_\varepsilon^\infty \frac{\bar\Delta_u^{2m} f(x)}{u^{1+\alpha}}\,du \qquad (0<\alpha\le 2m),\ \text{gde je}$$

$$\bar\Delta_u^{2m} f(x) = \sum_{j=0}^{2m}(-1)^j\binom{2m}{j} f(x+(2m-j)u), \quad C_\alpha = (-1)^m 2^{2m-\alpha}\int_0^\infty \frac{\sin^{2m} u}{u^{1+\alpha}}\,du$$

R_ε^α je ograničen linearan operator na X za svako α i ε.

Lema 2.4.6. Neka je $\varphi\in\mathcal{S}$. Tada

a) $R_\varepsilon^\alpha\varphi(x) = 1/P(o)\int_{-\infty}^{\infty}\hat\varphi(t)\,|t|^\alpha P(\varepsilon|t|/2)e^{itx}dt, \qquad P(u) = \int_u^\infty \frac{\sin^{2m} v}{v^{1+\alpha}}\,dv$

b) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} R_\varepsilon^\alpha\varphi(x) = 1/C_\alpha\int_0^\infty \frac{\bar\Delta_u^{2m}(x)}{u^{1+\alpha}}\,du = \varphi^{(\alpha)}(x)$

Dokaz. a)

$$C_\alpha R_\varepsilon^\alpha\varphi(x) = \int_\varepsilon^\infty \frac{\bar\Delta_u^{2m}(x)}{u^{1+\alpha}}\,du = \int_\varepsilon^\infty u^{-1-\alpha}\bar\Delta_u^{2m}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\hat\varphi(t)e^{itx}dt\Big)du =$$

$$= \int_\varepsilon^\infty u^{-1-\alpha}du\int_{-\infty}^{\infty}\hat\varphi(t)\,\bar\Delta_u^{2m}(e^{itx})\,dt = \int_\varepsilon^\infty u^{-1-\alpha}du\int_{-\infty}^{\infty}\hat\varphi(t)e^{itx}\Big(-2i\sin\frac{tu}{2}\Big)^{2m}dt$$

$$= (-1)^m 2^{2m}\int_{-\infty}^{\infty}\hat\varphi(t)e^{itx}\int_\varepsilon^\infty \frac{\sin^{2m}(tu/2)}{u^{1+\alpha}}\,du\,dt =$$

$$= (-1)^m 2^{2m-\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\hat\varphi(t)e^{itx}\,|t|^\alpha\int_{\frac{\varepsilon|t|}{2}}^\infty \frac{\sin^{2m} v}{v^{1+\alpha}}\,dv\,dt$$

i pošto je $P(0) = C_\alpha(-1)^{-m}2^{-2m+\alpha}$ dobijamo

$$R_\varepsilon^\alpha\varphi(x) = 1/P(0)\int_{-\infty}^{\infty}\hat\varphi(t)e^{itx}\,|t|^\alpha P(\varepsilon|t|/2)\,dt$$

b) Kako je $|P(\varepsilon|t|/2)| < P(0)$ i integral $\int_{-\infty}^{\infty}|\hat\varphi(t)|\,|t|^\alpha dt$ konvergira, primenom Lebesgueovog stava o dominantnoj konvergenciji sledi

$$\lim_{\varepsilon\to 0} R_\varepsilon^\alpha\varphi(x) = 1/P(0)\int_{-\infty}^{\infty}\hat\varphi(t)\,|t|^\alpha P(0)e^{itx}dt = \varphi^{(\alpha)}(x)$$

Lema 2.4.7. Neka je $\alpha>0$. Tada funkcija $P(u) = \int_{|u|}^\infty \frac{\sin^{2m} tu}{t^{1+\alpha}}\,dt$ ima sledeće osobine

a) postoji $p\in L$ tako da $\hat p(v) = P(v)$; za p važi $|x|^{\alpha+1}|p(x)| \le C$

b) postoji $q\in BV$ tako da je $\check q(v) = |v|^\alpha \hat p(v)$; štaviše $\check q(v) = \hat r(v) - 1$, gde je $r\in L$ takvo da $|x|^{\alpha+1}|r(x)| \le C$.

Dokaz. Za $0<\alpha<2$ tvrdjenje leme dokazano je u [3] str.491.
Neka je $\alpha>2$.

a) $$P(u) = \int_{|u|}^{\infty} \frac{\sin^{2m} v}{v^{1+\alpha}}\, dv = |u|^{-\alpha} \int_{1}^{\infty} \frac{\sin^{2m} tu}{t^{1+\alpha}}\, dt$$

iz ovoga zaključujemo $P\in L^1$ tako da

$$\hat{P}(x) = 2\int_0^{\infty} P(u)\cos ux\, du = \int_0^{\infty} \cos ux \int_u^{\infty} \frac{\sin^{2m} v}{v^{1+\alpha}}\, dv\, du = \int_0^{\infty} \frac{\sin^{2m} v}{v^{1+\alpha}} \int_0^{v} \cos ux\, du\, dv$$

$$= \frac{1}{x} \int_0^{\infty} \frac{\sin^{2m} v}{v^{1+\alpha}} \sin vx\, dv \qquad (6)$$

Kako poslednji integral pripada L^2 (kao Fourierova transformacija funkcije iz L^2), primenom Hölderove nejednakosti dobija se $\hat{P}\in L^1$. Ako stavimo $p(x) = \hat{P}(-x)$ dobijamo prvo tvrdjenje iz a).
Dalje iz (6) sledi

$$|x|^{\alpha+1}|p(x)| = \left| x^{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\sin^{2m} v}{v^{1+\alpha}} \sin vx\, dv \right| = \left| \int_0^{\infty} \frac{\sin^{2m} xt}{t^{1+\alpha}} \sin x^2 t\, dt \right| \leq$$

$$\leq \int_0^{\infty} t^{-1-\alpha} dt = C$$

b) Posmatrajmo $|v|^{\alpha}\hat{p}(v)$. Neka je $v>0$; iz (6) sledi

$$v^{\alpha}\hat{p}(v) = \int_1^{\infty} \frac{\sin^{2m} vt}{t^{1+\alpha}}\, dt = \sum_{j=0}^{m} C_j \int_1^{\infty} \frac{\cos jvt}{t^{1+\alpha}}\, dt =$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha}} + \sum_{j=1}^{m} C_j j^{1+\alpha} \int_1^{\infty} \frac{\cos vx}{x^{1+\alpha}} \frac{dx}{j} =$$

$$= 1 + C_1' \int_1^{2} \frac{\cos vx}{x^{1+\alpha}}\, dx + (C_1'+C_2') \int_2^{3} \frac{\cos vx}{x^{1+\alpha}}\, dx + \dots + \sum_{j=1}^{m} C_j' \int_{m-1}^{m} \frac{\cos vx}{x^{1+\alpha}}\, dx$$

Odavde je očigledno da se $|v|^{\alpha}\hat{p}(v)$ može predstaviti kao Fourierova transformacija funkcije

$$q(x) = r(x) - \delta(x)$$

gde je $r\in L^1$ definisana sa

$$r(x) = \begin{cases} 0, & |x|<1 \\ K_1 |x|^{-1-\alpha}, & 1<|x|<2 \\ \vdots & \\ K_m |x|^{-1-\alpha}, & m-1<|x|<m \end{cases}$$

očigledno je da važi $|x|^{\alpha+1}|r(x)|<C$.

<u>Teorema 2.4.8.</u> Neka je $f\in X$. Tada

a) $\exists g\in X \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\|R_\varepsilon^\alpha f - g\|_X = 0 \qquad f\in W(X, |v|^\alpha)$

b) $\|R_\varepsilon^\alpha f\|_X = O(1) \qquad f\in V(X, |v|^\alpha)$

Dokaz. Najpre ćemo pokazati da se operator R_ε^α može predstaviti kao singularni integral sa jezgrom $q_\varepsilon(x) = q(\varepsilon x/2)$, gde je q funkcija iz Leme 2.4.7.b).

Zaista, neka je $\varphi\in\mathcal{S}$. Tada prema Lemi 2.4.6.a)

$$R_\varepsilon^\alpha\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\hat\varphi(t)\,|t|^\alpha P(\varepsilon t/2)e^{itx}dt$$

tako da je (uz oznake Leme 2.4.7.)

$$(R_\varepsilon^\alpha\varphi)^\wedge(t) = \hat\varphi(t)\,|t|^\alpha\hat p(\varepsilon t/2) = 2^\alpha\varepsilon^{-\alpha}\hat\varphi(t)q(\varepsilon t/2) = 2^\alpha\varepsilon^{-\alpha}(\varphi * dq_\varepsilon)^\wedge(t)$$

pa prema teoremi jedinstvenosti Fourierove transformacije

$$R_\varepsilon^\alpha\varphi(x) = (2/\varepsilon)^\alpha\,\varphi * dq_\varepsilon(x) \tag{7}$$

Kako je $\mathcal{S}$ svuda gust u prostoru X [Dod.D.2.] a obadva operatora koja učestvuju u (7) neprekidna onda (7) važi i za svaku funkciju $f\in X$, tj.

$$R_\varepsilon^\alpha f(x) = (2/\varepsilon)^\alpha f * dq_\varepsilon(x)$$

Da bismo dokazali tvrdjenje teoreme dovoljno je, prema Teoremi 1.7.2. dokazati da jezgro (q_ε) zadovoljava uslove (S_o) i (M_o). To ćemo dobiti primenom Leme 2.4.7.

$$(S_o)\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\check q_\varepsilon(v)}{\varepsilon^\alpha/2^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\check q(\varepsilon v/2)}{\varepsilon^\alpha/2^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^\alpha/2^\alpha\,|v|^\alpha\,\hat p(\varepsilon v/2)}{\varepsilon^\alpha/2^\alpha} = |v|^\alpha\hat p(0)$$

$$(M_o)\qquad \frac{\check q_\varepsilon(v)}{|v|^\alpha\varepsilon^\alpha/2^\alpha} = \hat p_\varepsilon(v)$$

2.5. Relativno kompletiranje

U ovom odeljku ćemo najpre pokazati da klase saturacije i konvergencije singularnih integrala na X čine (normalizovane) Banachove potprostore prostora X.

Zatim uvodimo pojam relativnog kompletiranja, koji omogućuje da se tačno opiše odnos izmedju klase konvergencije i klase saturacije.

2.5.1. Klasa saturacije kao Banachov prostor

Lema 2.5.1. Neka je X proizvoljan Banachov prostor i A zatvoren linearan operator na X. Neka je $D(A) \subset X$ domen operatora A. Tada je D(A) sa normom $\|f\|_{D(A)} = \|f\|_X + \|Af\|_X$ normalizovan Banachov potprostor od X.

Dokaz leme dobija se neposredno iz kompletnosti prostora X i zatvorenosti operatora A.

Vratimo se sada Teoremi 2.2.5. Svaki od skupova definisanih pojedinim iskazima te teoreme može se snabdeti normom tako da čini normalizovan Banachov potprostor prostora X. Zaista

Stav 2.5.2. Neka je prostoru X (K_ρ) singularni integral čije jezgro zadovoljava uslove (S) i (M'), u kojima je $\psi(v) = (iv)^r$ $r \in N$. Svaki od sledećih skupova čini Banachov prostor u odnosu na navedenu normu

a) $K(K_\rho, X)$, $\|f\|_K = \|f\|_X + \|g\|_X$

b) $W(X,(iv)^r)$, $\|f\|_W = \|f\|_X + \|g\|_X$

c) $\mathcal{D}^r_R(X) = \left\{ f \in X \mid f \text{ ima r-ti Riemannov izvod } D^r_R f \in X \right\}$,
$\|f\|_{\mathcal{D}_R} = \|f\|_X + \|D^r_R f\|_X$

d) $W^r_X = \left\{ f \in X \mid f \text{ ima r-ti izvod u } X \right\}$, $\|f\|_{W^r} = \|f\|_X + \|f^{(r)}\|_X$

Svi navedeni prostori su medjusobno jednaki sa jednakim normama.

Skica dokaza. Koristeći Lemu 2.5.1. lako se dokazuje da su svi prostori kompletni. Očigledno je kako se u pojedinim slučajevima definiše operator A iz leme, a lako se dokazuje da je taj operator zatvoren (poznato je da su diferencijalni operatori zatvroreni). Dalje iz Teoreme 2.2.5. sledi da su svi navedeni skupovi medjusobno jednaki i sem toga $D_R^r f = f^{(r)} = g$. Tako da je očigledno da su sve norme medjusobno jednake.

Lema 2.5.3. Neka je X proizvoljan Banachov prostor i (A_ρ) familija ograničenih linearnih operatora na X. Tada skup

$$B(A_\rho) = \left\{ f \in X \mid \sup_\rho \|A_\rho f\|_X = O(1) \right\}$$

snabdeven normom

$$\|f\|_{B(A_\rho)} = \|f\|_X + \sup_\rho \|A_\rho f\|_X$$

čini normalizovan Banachov potprostor od X.

Dokaz. Da bi se dokazalo da je prostor $B(A_\rho)$ kompletan dovoljno je pokazati da je u njemu svaki apsolutno konvergentan red konvergentan.

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{B(A_\rho)} < \infty$, tada i $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_X < \infty$

Kako je X kompletan prostor, onda postoji $u \in X$, tako da $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Pokazaćemo

1° $u \in B(A_\rho)$, 2° $\|\sum_{n=1}^{N} u_n - u\|_{B(A_\rho)} \to 0,\ N \to \infty$

$$1^\circ \quad \|u\|_{B(A_\rho)} = \|\sum_{n=1}^{\infty} u_n\|_X + \sup\|A_\rho(\sum_{n=1}^{\infty} u_n)\|_X \leq \|\sum_1^{\infty} u_n\|_X + \sup\|\sum_{n=1}^{\infty} A_\rho u_n\|_X$$

$$\leq \sum_1^{\infty} \|u_n\|_X + \sup_\rho \sum_1^{\infty} \|A_\rho u_n\|_X \leq \sum_1^{\infty} (\|u_n\|_X + \sup_\rho \|A_\rho u_n\|_X) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{B(A_\rho)}$$

2° se pokazuje na veoma sličan način.

Stav 2.5.4. Neka je na prostoru X (K_ρ) singularan integral čije jezgro zadovoljava uslove (S) i (M) u kojima je $\psi(v) = (iv)^r$, $r \in N$. Tada svaki od sledećih skupova čini Banachov prostor u odnosu na navedenu normu.

a) $S(K_\rho, X)$, $\quad \|f\|_S = \|f\|_X + \sup_\rho \|\frac{K_\rho f - f}{\varphi_\rho}\|_X$

b) $V(X, (iv)^r)$, $\quad \|f\|_V = \|f\|_X + \|g\|_{Y(X)}$

c) $Lip_r(X, r)$, $\quad \|f\|_{Lipr} = \|f\|_X + \sup_h \|\frac{\Delta_h^r f}{h^r}\|_X$

d) $V_X^r = \left\{ f \in X \mid f \text{ ima } r\text{-ti izvod u } Y(X) \right\}$,

$$\|f\|_{V^r} = \|f\|_X + \|f^{(r)}\|_{Y(X)}$$

Svi navedeni prostori su jednaki sa jednakim normama.

Skica dokaza. Tvrdjenje da su prostori u a) i c) Banachovi dokazuje se primenom Leme 2.5.3. Treba samo za A_ρ uzeti

$\frac{K_\rho - I}{\varphi_\rho}$ odnosno $h^{-r}\Delta_h^r$. Za prostore u b) i d) kompletnost se dokazuje (slično kao u Stavu 2.5.2.) pomoću kompletnosti prostora $Y(X)$. Jednakost svih navedenih skupova proizilazi iz Teoreme 2.2.4. a takodje i jednakost normi u b) i d). Lako je dokazati i ekvivalentnost ostalih normi (koristeći [Dod.D.4.])

Primedba. Na sličan način moguće je dokazati da su, za singularne integrale kojima odgovara funkcija $\psi(v) = |v|^\alpha$, sledeći Baanchovi prostori medjusobno jednaki

a) $S(K_\rho, X)$, $\quad \|f\|_S = \|f\|_X + \sup \|\frac{K_\rho f - f}{\varphi_\rho}\|_X$

b) $V(X, |v|^\alpha)$, $\quad \|f\|_V = \|f\|_X + \|g\|_{Y(X)}$

c) $\mathcal{R}^\alpha(X) = \{f\in X \mid f \text{ ima Rieszov izvod reda } \alpha\}$,

$\quad \|f\|_{\mathcal{R}} = \|f\|_X + \sup_\varepsilon \|R_\varepsilon^\alpha f\|_X$

2.5.2. Metod "mollifiera"

Shapiro [13] je uveo metod "mollifiera" za rešavanje problema saturacije. Razmotrićemo taj metod na jednom primeru (koji je očigledno lako uopštiti) i videti kako taj postupak prirodno dovodi do pojma relativnog kompletiranja.

Neka je u prostoru $C_o(R)$ potprostor $C_o^2(R)$ satavljen od svih dvaput diferencijabilnih funkcija. Prema Stavu 2.5.2d) $C_o^2(R)$ je Banachov prostor sa normom $\|f\|_{C_o^2} = \|f\|_{C_o} + \|f''\|_{C_o}$

Neka je (A_ρ) familija konvolucionih operatora $A_\rho\colon C_o(R) \to C_o(R)$ i neka za svako $f\in C_o^2(R)$ važi

$$\lim_{\rho\to\infty} \|A_\rho f - f''\|_{C_o} = 0 \tag{8}$$

Želimo da opišemo skup $S(A_\rho) = \{f\in C_o \mid \|A_\rho f\|_{C_o} = O(1)\}$. Očigledno je $C_o^2 \subset S(A_\rho)$; štaviše, prema Banach-Steinhaussovom stavu postoji konstanta N, tako da je

$$\|A_\rho f\|_{C_o} \leq N \|f\|_{C_o^2} \qquad f\in C_o^2 \tag{9}$$

Neka je sad f proizvoljna funkcija iz C_o. Neka je $h\in C_o^2 \cap L^1$ takva da je $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx = 1$ i neka je $h_n(x) = nh(nx)$. Tada je (h_n) jezgro i približan identitet i definiše singularni integral $H_n f = f * h_n$ (funkcija h se naziva "mollifier": primenom operatora H_n povećava se glatkost funkcije f). Pisaćemo i $f_n = f * h_n$. Iz navedenih osobina jezgra (h_n) sledi

$$1)\quad f_n \in C_0^2, \qquad 2)\quad \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_C = 0 \tag{10}$$

Relacija (9) važi za funkcije f_n (zbog 1))

$$\|A_\rho f_n\|_C \leq N \|f_n\|_{C_0^2}, \text{ uniformno po } \rho \tag{11}$$

Da bi slična relacija važila i za funkciju f, odnosno da bi u (11) bilo moguće preći na limes po n, dovoljno je da bude

$$\|f_n\|_{C_0^2} \leq M, \quad \text{uniformno po } n \tag{12}$$

Tada će iz (10), (11) i (12) biti

$$A\, f_C = O(1) \tag{13}$$

Obratno, dokazaćemo da je uslov (12) neophodan da bi važilo (13). Zaista iz (13) sledi, pošto su A_ρ i H_n konvolucioni operatori (i, znači, medjusobno komutativni)

$$\|A_\rho f_n\|_{C_0} = \|A_\rho H_n f\|_{C_0} = \|H_n A_\rho f\|_{C_0} = \|H_n\| \|A_\rho f\|_{C_0} =$$

$$= \|h_n\|_L \|A_\rho f\|_{C_0} = \|A_\rho f\|_{C_0} = O(1)$$

tako da uzimajući u obzir (8)

$$\|f_n''\|_{C_0} \leq \|A_\rho f_n - f_n''\|_{C_0} + \|A_\rho f_n\|_{C_0} = \varepsilon + O(1)$$

Odatle sledi

$$\|f_n\|_{C_0^2} = \|f_n\|_{C_0} + \|f_n''\|_{C_0} = O(1)$$

(jer je i niz $\|f_n\|_{C_0}$, budući da je konvergentan, ograničen). A to je i trebalo dokazati.

Tako smo dobili da za familiju operatora (A_ρ) koja zadovoljava (8) važi:

Potreban i dovoljan uslov da za f bude $\|A_\rho f\|_{C_0} = O(1)$ jeste egzistencija niza $f_n \in C_0^2$ takvog da

$$\|f_n - f\|_{C_0} \to 0 \qquad \text{i} \qquad \|f_n\|_{C_0^2} \leq M$$

<u>Definicija 2.5.5.</u> Neka je X Banachov prostor i E normalizovan Banachov potprostor od X ($\|f\|_E \geq \|f\|_X$). Relativno kompletiranje (popunjenje) $\widetilde{E}^X$ prostora E u odnosu na X je skup svih $f \in X$, za koje postoji niz $(f_n) \subset E$ takav da $\|f_n\|_E \leq M$, za neku konstantu M, uniformno po n, i $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_X = 0$.

Primer 1. Prema definiciji relativnog kompletiranja prethodni zaključak sa može formulisati na sledeći način

Neka je $X = C_0(R)$ i neka je $E = C_0^2(R)$ potprostor na kome familija (A_ρ) konvergira (jako). Tada je

$$\left\{f \in C_0 \mid \|A_\rho f\|_{C_0} = O(1)\right\} = \widetilde{C_0^2}^{C_0}$$

Primer 2. Ako u primeru 1. uzmemo umesto $C_0(R)$ bilo koji prostor $X(R)$ i umesto (A_ρ) familiju $\left(\frac{K_\rho - I}{\varphi_\rho}\right)$, gde je (K_ρ) singularni integral čije jezgro zadovoljava uslove (S) i (M'), tada familija $\left(\frac{K_\rho - I}{\varphi_\rho}\right)$ konvergira, kad $\rho \to \infty$, na prostoru $K(K_\rho, X(R))$ (v. 1.6. i Stav 2.5.2.), tako da, slično kao malopre, dobijamo

$$S(K_\rho, X(R)) = \left\{f \in X(R) \mid \left\|\frac{K_\rho f - f}{\varphi_\rho}\right\|_{X(R)} = O(1)\right\} = \widetilde{K(K_\rho, X(R))}^{X(R)}$$

Posledica 2.5.6. Svaki od Banachovih prostora navedenih u Stavu 2.5.4. jednak je relativnom popunjenju u odnosu na $X(R)$ odgovarajućeg prostora iz Stava 2.5.2.

Tako smo dobili nekoliko novih karakterizacija klase saturacije.

Posledica 2.5.7. Neka je R_ε^α operator iz 2.4.2. Tada

$$\left\{f \in X(R) \mid \|R_\varepsilon^\alpha f\|_{X(R)} = O(1)\right\} = \widetilde{\left\{f \in X(R) \mid \lim_{\varepsilon \to 0} \|R_\varepsilon^\alpha f - g\|_{X(R)} = 0\right\}}^{X(R)}$$

2.6. Primedbe

I ovaj odeljak izložen je uglavnom na osnovu knjige P.L. BUTZER, R.J.NESSEL [3], ali su mnogi dokazi izmenjeni tako da se uklapaju u način dokaza koji je izložen u uvodu. Ovo nam omogućuje uvodjenje operatora N_ρ iz odeljka 1.7. Time što na isti način predstavljamo "diferencijalne" operatore (Riemannov 2.1., Rieszov 2.4.1., Riemann-Liouvilleov 2.4.1., operatore R_ε^α 2.4.2.) i singularne integrale, postižemo da na isti način možemo tretirati na primer tvrdjenje $\|\Delta_h^r f\| = O(h^r)$, koje predstavlja iskaz o "glatkosti" funkcije (f pripada $\mathrm{Lip}_r(x,r)$) i tvrdjenje $\|K_\rho f - f\| = O(\rho^{-n})$, koje predstavlja iskaz o "stepenu aproksimacije". Ovakvo gledište je u osnovi teorije uporedjivanja (comparison theory) H.S.SHAPIRO [13]. Na ovaj način direktna i inverzna teorema se dokazuju sličnim metodom.

Metod kojim smo dobili karakterizaciju klase saturacije može se i ovako iskazati: "Da bi se dobila karakterizacija klase saturacije dobijene u Teoremi 1.2.3., treba tu istu teoremu primeniti na neki drugi operator".

2.4. Rieszov i Riemann-Liouvilleov izvod definisani su u [3], str.393. Operatori R_ε^α definisani su [3],str.409.

2.5. Za definiciju relativnog kompletiranja v. [3],str.373. Očigledno je da se slično Stavovima 2.5.2. i 2.5.4., koji odgovaraju saturaciji sa celobrojnim stepenom, mogu dokazati odgovarajući stavovi za saturaciju sa necelobrojnim stepenom. Tada bi u iskazima c) i d) pomenutih stavova, umesto običnih izvoda, stajali izvodi razlomljenog reda.

Pojam relativnog kompletiranja omogućuje, kao što smo već primetili, da se tačno opiše odnos izmedju klase konvergencije i klase saturacije. On štaviše daje mogućnost za jedan nov način dokazivanja teoreme saturacije, naprimer metodom "mollifiera" (koji je izložen u 2.5.2., prema H.S.SHAPIRO [13]). Uopštenje "mollifiera" za proizvoljne Banachove prostore predstavljaju "regularizacioni procesi" (definisani u [3],str.502). V. i primedbe uz odeljak 1.6.

5. Iteracije konvolucionih operatora

U ovom odeljku ćemo pokazati kako se pogodnim kombinovanjem iteracija datog singularnog integrala može povećati efikasnost aproksimacije.

Posmatramo familiju operatora $(U_\rho^p)_{\rho\in r}$, $p\in N$, koja se pomoću datog singularnog integrala (K_ρ) definiše na sledeći način

$$U_\rho^p = \sum_{j=1}^{\rho} (-1)^{p-j}\binom{p}{j} K_\rho^j$$

gde je K_ρ^j j-ta iteracija operatora K_ρ: $K_\rho^1 = K_\rho$, $K_\rho^j = K_\rho(K_\rho^{j-1})$, $j>1$. S obzirom da za konvoluciju važi zakon asocijativnosti, lako je proveriti da je operator K_ρ^j opet singularni integral i da mu je jezgro jednako $(k_\rho * k_\rho * \ldots * k_\rho)$ (konvolucija od j faktora). Naprimer, za j = 2 imamo

$$K_\rho^2 f = K_\rho(K_\rho f) = (f * k_\rho) * k_\rho = f * (k_\rho * k_\rho)$$

Za $j>2$, dokazuje se slično,indukacijom.

Očigledno da je operatr U_ρ^p, kao linearna kombinacija konvolucionih operatora, konvolucioni operator i sem toga, ako sa (u^p) obeležimo njegovo jezgro

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_\rho^p(x)dx = \sum_{j=1}^{\rho}(-1)^{p-j}\binom{p}{j}\int_{-\infty}^{\infty}(k_\rho * k_\rho * \ldots * k_\rho)(x)dx = \sum_{j=1}^{\rho}(-1)^{p-j}\binom{p}{j} = 1$$

tako da je (U_ρ^p) takodje singularni integral.

Pretpostavimo sada da je jezgro (k_ρ) "Fejérovog tipa", tj. $k_\rho(x) = \rho k(\rho x)$ (v. 4.1.) i da zadovoljava uslove (S) i (M). U ovom slučaju $\varphi_\rho = \rho^{-n}$, $\psi(v) = |v|^n$, za neko $n\in N$ i uslovi (S) i (M) izgledaju kao u 4.1. ((S_F) i (M_F)). Dokazaćemo da tada jezgro (u_ρ^p) singularnog integrala (U_ρ^p) zadovoljava uslove (S_F) i (M_F) sa stepenom np.

Zaista, očigledno je $u_\rho^p(x) = \rho\, u^p(\rho x)$ i

$$\begin{aligned}(u^p)\hat{}(v) - 1 &= \sum_{j=1}^{p}(-1)^{p-j}\binom{p}{j}(k * k * \ldots * k)\hat{}(v) - 1 = \\ &= \sum_{j=1}^{p}(-1)^{p-j}\binom{p}{j}\hat{k}^j(v) - 1 = (\hat{k}(v) - 1)^p\end{aligned}$$

Tako da imamo,ako za k važi $\lim\limits_{v\to 0}\dfrac{\hat{k}(v) - 1}{|v|^n} = C$, tada

$$\lim_{v\to 0} \frac{(u^p)^\wedge(v) - 1}{|v|^{np}} = \lim_{v\to 0} \left(\frac{\hat{k}(v) - 1}{|v|^n}\right)^p = C^p$$

i ako za k postoji $\lambda \in BV$ $\check{\lambda}(v) = \dfrac{\hat{k}(v) - 1}{|v|^n}$ tada

$$\frac{(u^p)^\wedge(v) - 1}{|v|^{np}} = (\check{\lambda}(v))^p = \check{\lambda}_p(v)$$

gde je $\lambda_p(x) = \lambda * \lambda * \cdots * \lambda(x)$ (konvolucija od p faktora). Tako smo dokazali da pomoću singularnog integrala (K_ρ) koji je saturiran sa stepenpm $O(\rho^{-n})$ i klasom $V(X, |v|^n)$, lako možemo konstruisati singularni integral (U_ρ^p), koji ima stepen saturacije $O(\rho^{-np})$ i klasu saturacije $V(X, |v|^{np})$. Time je pokazano da za dovoljno dobre funkcije uvek možemo naći linearan operator koji će je aproksimirati bolje nego neku drugu manje glatku funkciju.

Mamedov je u [10] razmatrao jednu drugu vrstu linearnih kombinacija konvolucionih operatora. m-singularni integral definisan je na sledeći način

$$T_\rho^m f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x+jt) k_\rho(t)\,dt$$

Vidimo da je T_ρ^m ustvari singularan integral sa jezgrom

$$\tau_\rho^m(x) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} \frac{1}{j} k_\rho\left(\frac{x}{j}\right)$$

pa se tako uslov (2) u [10] svodi na uslov (S) za singularni integral (T_ρ^m).

Napomenimo da ako sama familija funkcija (k_ρ) predstavlja jezgro i singularni integral (K_ρ) zadovoljava uslove (S_F) i (M_F) sa stepenom n, tada i singularni integral (T_ρ^m) zadovoljava iste uslove(sa istim stepenom). Zaista

$$\frac{(\tau^m)^\wedge(v) - 1}{|v|^n} = \frac{\sum_{j=1}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} \hat{k}(jv) - 1}{|v|^n} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} \frac{\hat{k}(jv) - 1}{|v|^n} = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} j^n \frac{\hat{k}(jv) - 1}{|jv|^n}$$

pa odavde sledi da (τ_ρ^m) zadovoljava uslov (S_F) sa stepenom n i ako je λ funkcija koja prema uslovu (M_F) odgovara jezgru (k_ρ), tada je za jezgro (τ_ρ^m) odgovarajuća funkcija jednaka

$$\sum_{j=1}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} j^n \lambda(jv) = \lambda_m(v)$$

Primedba. Linearne kombinacije (1) singularnih integrala dobro su poznate; upotrebljavaju se, naprimer, u dokazu Jacksonove teoreme (o najboljoj aproksimaciji trigonometrijskim polinomima) [3], [8].

May [9] je dokazao teoremu saturacije za izvesne nešto opštije vrste linearnih kombinacija linearnih operatora (koji nisu predstavljeni singularnim integralima).

II LOKALNA TEOREMA SATURACIJE

Za singularni integral (K_ρ), čije jezgro zadovoljava uslove (S) i (M), dokazali smo u I delu globalnu teoremu saturacije. Pokazano je da za funkciju f iz jednog od prostora X(R) brzina kojom izraz $\|K f - f\|_X$ teži nuli, kad $\rho \to \infty$, neposredno zavisi od "glatkosti" (broja izvoda) funkcije f (direktna teorema) i, obratno, da se iz poznavanja te brzine mogu izvesti zaključci o osobinama funkcije (inverzna teorema).

Postavlja se pitanje ako je poznato ponašanje aproksimacione razlike K f(x) - f(x) samo na nekom intervalu $(a,b)\subset R$, da li je moguće izvesti zaključak sličan prethodnom (naravno, samo o osobinama funkcije na pomenutom intervalu); i, obratno, ako je poznato da je funkcija glatka samo na nekom intervalu (a,b) realne prave, da li se onda ona može dovoljno dobro aproksimirati singularnim integralom (K_ρ), na tom intervalu.

Pokazuje se da je odgovor potvrdan, tj. da važi lokalna teorema saturacije. Štaviše lokalna klasa saturacije jednaka je restrikciji na (a′,b′) (pravi podinterval od (a,b)) klase saturacije dobijene u globalnom slučaju. Ovakvo smanjenje intervala je neizbežno s obzirom da za funkciju f nemamo nikakve pretpostavke u levoj okolini tačke a (desnoj okolini tačke b). Potpuna proizvoljnost funkcije f izvan intervala (a,b) može naime da utiče na ponašanje aproksimacione razlike u okolinama krajnjih tačaka.

4. Inverzna lokalna teorema

Osnovni aparat u dokazu globalne teoreme saturacije bila je Fourierova transformacija. Jasno je da se u lokalnom slučaju, kada poznajemo ponašanje funkcije samo na odredjenom intervalu, ne može primeniti metod Fourierove transformacije, bar ne neposredno.

Ipak je dokaz inverznog dela lokalne teoreme na neki način analogan sa dokazom inverznog dela globalne teoreme saturacije.

Prisetimo se da je u dokazu teoreme 1.2.3. ponašanje Fourierove transformacije $(K_\rho f - f)^\wedge$ aproksimakcione razlike, kad $\rho \to \infty$, bilo dobijeno na dva načina.(Pretpostavimo, radi jednostavnosti, da su u uslovima (S) i (M) koje zadovoljava (k_ρ), $\varphi_\rho = \rho^{-\alpha}$, $\psi(v) = |v|^\alpha$).

i) iz osobina jezgra (svojstva (S) i (M)) dobijeno je da

$$\rho^\alpha(K_\rho f - f)^\wedge \longrightarrow |v|^\alpha \hat{f}\ ,\quad \rho \to \infty$$

ii) iz pretpostavke da je izraz $\rho^\alpha(K_\rho f - f)$ ograničen po normi prostora X(R), kad $\rho \to \infty$, primenom Leme 1.5. dobijeno je da postoji funkcija g u Y(X,R) tako da

$$\rho_j^\alpha(K_{\rho_j} f - f)^\wedge \longrightarrow \hat{g}\ ,\quad \rho_j \to \infty$$

Izjednačivši granične vrednosti u i) i ii) dobili smo

$$\hat{g} = |v|^\alpha \hat{f} \qquad (*)$$

U lokalnom slučaju, umesto konvergencije Fourierove transformacije, posmatraćemo $*$-slabu konvergenciju izraza $\rho^\alpha(K_\rho f - f)$ na intervalu (a,b). Tako imamo

i') iz osobina jezgra (svojstva (S_F) i $(M_F()$ sledi (v.4.1.(2)) da za svako $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$

$$\rho^\alpha \int_a^b (K_\rho f(x) - f(x))\varphi(x)dx \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi^{\{\alpha\}}(x)dx, \quad \rho \to \infty$$

ii') iz ograničenosti izraza $\rho^\alpha(K_\rho f - f)$ po normi na intervalu (a,b), dobija se da postoji $g \in Y(a,b)$ i podniz (ρ_j) tako da za svako $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$

$$\rho_j^\alpha \int_a^b (K_{\rho_j} f(x) - f(x))\varphi(x)dx \longrightarrow \int_a^b g(x)\varphi(x)dx, \quad j \to \infty$$

(v. 4.1.(5))

Kombinovanjem i') i ii') dobijamo

$$\int_a^b g(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi^{\{\alpha\}}(x)dx$$

Ova relacija će, slično kao (*) u globalnom slučaju, biti osnov za dobijanje karakterizacije klase saturacije.

4.1. Svojstva (S_F) i (M_F)

U daljem ćemo isključivo posmatrati singularne integrale čija su jezgra "Fejérovog tipa", tj. $k_\rho(x) = \rho\, k(\rho x)$, gde je $k \in L^1$. Ovaj specijalan slučaj obuhvata mnoge poznate singularne integrale na R.

Na jezgro $(k\ )$ nametnućemo sledeće uslove koji odgovaraju uslovima (S) i (M) (v. Definicija 1.2.2.)

Svojstvo (S_F)

i) jezgro (k_ρ) je "Fejérovog tipa"

ii) $\lim\limits_{v \to 0} \dfrac{\hat{k}(v) - 1}{|v|^\alpha} = C > 0$, za neko $\alpha > 0$.

Svojstvo (M_F)

i) jezgro (k_ρ) je "Fejérovog tipa"

ii) postoji $\lambda \in BV$ tako da $\dfrac{\hat{k}(v) - 1}{|v|^\alpha} = (v)$

Fourierova transformacija je za jezgro "Fejérovog tipa" jednaka [Dod.B.1.]

$$\hat{k}_\rho(v) = \hat{k}\left(\frac{v}{\rho}\right)$$

tako da kad su ispunjeni uslovi (S_F) i (M_F) ond su ispunjeni uslovi (S) i (M′). (U ovom slučaju je $\varphi_\rho = \rho^{-\alpha}$, $\psi(v) = |v|^\alpha$). Tako da za ova jezgra važi globalna teorema saturacije iz I dela.

Neka je (a,b) proizvoljan interval iz R. Sa $X(a,b)$ ćemo obeležavati jedan od prostora $L^p(a,b)$, $1 \le p < \infty$, $C(a,b)$. (a',b') će uvek biti pravi podinterval od (a,b).[1)]

Teorema 4.1.1. Neka je $f \in X(R)$ i neka jezgro (k_ρ) singularnog integrala (K_ρ) zadovoljava uslove (S_F) i (M_F). Tada

1) $\|K_\rho f - f\|_{X(a,b)} = o(\rho^{-\alpha}) \Longrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b)\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi^{\{\alpha\}}(x)dx = 0$

2) $\|K_\rho f - f\|_{X(a,b)} = O(\rho^{-\alpha}) \Longrightarrow$

$$(\exists g \in Y(a,b))(\forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b)) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi^{\{\alpha\}}(x)dx = \int_a^b g(x)\varphi(x)dx$$

Dokaz. Neka $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$. Tada očigledno $\varphi \in W(X(R), |v|^\alpha)$, pa kako jezgro zadovoljava uslove (S) i (M′), prema teoremi 1.6.3.

$$\lim_{\rho \to \infty} \|\rho^\alpha(K_\rho\varphi - \varphi) - \varphi^{\{\alpha\}}\|_{X(R)} = 0 \qquad (1)$$

---

1) $Y(a,b)$ je odgovarajući spregnuti prostor koji sadrži $X(a,b)$.

Odavde, primenom Hölderove nejednakosti, sledi

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\rho^{\alpha}(K_\rho\varphi(x)-\varphi(x))-\varphi^{\{\alpha\}}(x)\right]f(x)dx=0 \tag{2}$$

Dalje pošto je

$$\int_{-\infty}^{\infty}K_\rho\varphi(x)f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)K_\rho f(x)dx=\int_a^b\varphi(x)K_\rho f(x)dx$$

iz (2) sledi

$$\lim_{\rho\to\infty}\rho^{\alpha}\int_a^b(K_\rho f(x)-f(x))\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^{\{\alpha\}}(x)f(x)dx \tag{3}$$

Relacija (3) dobijena je samo na osnovu pretpostavki o svojstvima jezgra. Iskoristimo sada pretpostavke u 1) i 2).

1) Neka je $\lim_{\rho\to\infty}\rho^{\alpha}\|K_\rho f-f\|_{X(a,b)}=0$. Tada za svako $\varphi\in\mathcal{D}(a,b)$ važi

$$\lim_{\rho\to\infty}\rho^{\alpha}\int_a^b(K_\rho f(x)-f(x))\varphi(x)dx=0 \tag{4}$$

tako da iz (3) i (4) sledi

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi^{\{\alpha\}}(x)dx=0\qquad \forall\varphi\in\mathcal{D}(a,b)$$

2) Neka je $\|K_\rho f-f\|_{X(a,b)}=O(\rho^{-\alpha})$. Tada slična relacija važi i u prostoru $Y(a,b)$, tako da primenom teoreme o $*$-slaboj kompaktnosti zatvorene kugle u spregnutom prostoru $Y(a,b)$ [Dod.D.4.] dobija se da postoji $g\in Y(a,b)$ i podniz (ρ_j) tako da

$$\lim_{\rho\to\infty}\rho^{\alpha}\int_a^b(K_\rho f(x)-f(x))\varphi(x)dx=\int_a^b g(x)\varphi(x)dx\ ,\quad\forall\varphi\in\mathcal{D}(a,b) \tag{5}$$

iz (3) i (5) sledi

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^{\{\alpha\}}(x)f(x)dx=\int_a^b g(x)\varphi(x)dx\ ,\quad\forall\varphi\in\mathcal{D}(a,b)$$

4.2. Karakterizacija pomoću Rieszovih operatora

U ovom odeljku daćemo još jedan primer primene metode "mollifiera" (v. 2.5.2.).

Neka je $h\in\mathcal{D}(-1,1)$ takva da je $\int_{-\infty}^{\infty}h(x)dx=1$ i neka je $h_n(x)=nh(nx)$, $n\in N$.

Lema 4.2.1. Neka je h funkcija sa navedenim svojstvima i za $f\in X(R)$ stavimo $f_n=f*h_n$. Neka za dati singularni integral $(K\ )$ važi $\|K_\rho f-f\|_{X(a,b)}=O(\rho^{-\alpha})$. Tada sledi

$$\|K_\rho f_n-f_n\|_{X(a+\delta,b-\delta)}=O(\rho^{-\alpha})$$

za svako $\delta>0$, uniformno po n.

Dokaz. Najpre primećujemo

$$K_\rho f_n = f_n * k_\rho = (f * h_n) * k_\rho = (f * k_\rho) * h_n = (K_\rho f) * h_n$$

Neka je sada $\delta > 0$ i $n > 1/\delta$. Tada je supp $h_n \subset (-1/n, 1/n) \subset (-\delta, \delta)$ tako da je

$$K_\rho f_n(x) - f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (K_\rho f(x-t) - f(x-t)) h_n(t) dt$$

$$= \int_{-\delta}^{\delta} (K_\rho f(x-t) - f(x-t) h_n(t) dt \qquad (6)$$

Primenom uopštene nejednakosti Minkovskog iz (6) sledi

$$\|K_\rho f_n - f_n\|_{X(a+\delta, b-\delta)} = \left\| \int_{-\delta}^{\delta} (K_\rho f(x-t) - f(x-t)) h_n(t) dt \right\|_{X(a+\delta, b-\delta)}$$

$$\leq \int_{-\delta}^{\delta} \|K_\rho f(x-t) - f(x-t)\|_{X(a+\delta, b-\delta)} \, h_n(t) \, dt$$

$$\leq \int_{-\delta}^{\delta} \|K_\rho f - f\|_{X(a,b)} |h_n(t)| \, dt = \|K_\rho f - f\|_{X(a,b)}$$

time je lema dokazana.

Posmatrajmo opet operatore R_ε^α iz 2.4.2. Pomoću njih ćemo okarakterisati klasu saturacije i u lokalnom slučaju.

Definicija 4.2.2. Neka je $\mathcal{R}^\alpha(X(a,b))$ sledeći skup

$$\mathcal{R}^\alpha(X(a,b)) = \left\{ f \in X(R) \mid \exists F \in X(a,b) \ \lim_{\varepsilon \to 0} \|R_\varepsilon^\alpha f - F\|_{X(a,b)} = 0 \right\}$$

i neka je na njemu definisana norma

$$\|f\|_{\mathcal{R}^\alpha} = \|f\|_{X(a,b)} + \|F\|_{X(a,b)}$$

Prostor $\mathcal{R}^\alpha(X(a,b)$ je normalizovan Banachov potprostor prostora $X(a,b)$. To se dokazuje na sličan način kao a) iz Stava 2.5.2. (jer je (R_ε^α) singularni integral).

Lema 4.2.3. Neka $f \in W(X(R), |v|^\alpha)$ i neka je $\varphi \in \mathcal{D}$. Tada, ako je $F \in X(R)$ takva da $F^\wedge(v) = |v|^\alpha f^\wedge(v)$, onda

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{\{\alpha\}}(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) F(x) dx$$

Dokaz. Najpre, primenjujući Teoremu 2.4.8., dobijamo da iz $f \in W(X(R), |v|^\alpha)$ sledi

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|R_\varepsilon^\alpha f - F\|_{X(R)} = 0 \qquad (7)$$

Slično pošto $\varphi \in W(X(R), |v|^\alpha)$ i za φ važi $(\varphi^{\{\alpha\}})^\wedge(v) = |v|^\alpha \hat{\varphi}(v)$, prema istoj teoremi imamo

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|R_\varepsilon^\alpha \varphi - \varphi^{\{\alpha\}}\|_{X(R)} = 0 \qquad (8)$$

Sem toga lako je dokazati

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_\varepsilon^\alpha \varphi(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) R_\varepsilon^\alpha f(x) dx \qquad (9)$$

Zaista

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_\varepsilon^\alpha \varphi(x) f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_\varepsilon^\infty \frac{\bar{\Delta}_u^{2m} \varphi(x)}{u^{1+\alpha}} du\, dx = \int_\varepsilon^\infty u^{-1-\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \bar{\Delta}_u^{2m}\varphi(x)dx\, du$$

$$= \int_\varepsilon^\infty u^{-1-\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\, \bar{\Delta}_u^{2m} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\int_\varepsilon^\infty \frac{\bar{\Delta}_u^{2m} f(x)}{u^{1+\alpha}} du\, dx = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)R_\varepsilon^\alpha f(x)dx$$

Sada je lako kombinovanjem izraza (7), (8) i (9) dobiti tvrdjenje leme. Zaista, pomoću (9)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{\{\alpha\}}(x)f(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)F(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} R_\varepsilon^\alpha\varphi(x)f(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)R\, f(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)F(x)dx$$

$$\leq \| \varphi^{\{\alpha\}} - R_\varepsilon^\alpha\varphi\|_{Y^{-*}(R)} \| f\|_{X(R)} + \|\varphi\|_{Y^{-*}(R)} \| R_\varepsilon^\alpha f - F\|_{X(R)}$$

i izraz na desnoj strani poslednje nejednakosti teži nuli, kad $\varepsilon \to 0$, prema (7) i (8) (gde smo u (8) umesto $X(R)$ stavili $Y^{-*}(R)$ v. 1.1.).

<u>Teorema 4.2.4.</u> Neka $f\in X(R)$ i neka, za neko $\alpha > 0$, jezgro (k_ρ) singularnog integrala (K_ρ) zadovoljava uslove (S_F) i (M_F). Tada

1) $\|K_\rho f - f\|_{X(a,b)} = o(\rho^{-\alpha}) \implies \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|R_\varepsilon^\alpha f\|_{X(a',b')} = 0$

2) $\|K_\rho f - f\|_{X(a,b)} = O(\rho^{-\alpha}) \implies f \in \widetilde{\mathcal{R}^\alpha(X(a',b'))}^{X(a',b')}$

Dokaz. 2) Da bismo pokazali da $f \in \widetilde{\mathcal{R}^\alpha(X(a',b'))}^{X(a',b')}$ treba pokazati da postoji niz $f_n\in\mathcal{R}^\alpha(X(a',b'))$ tako da $\|f_n - f\|_{X(a',b')}$ teži nuli, kad $n\to\infty$ i $\|f_n\|_{\mathcal{R}^\alpha} = O(1)$ uniformno po n.

Niz f_n konstruišemo na sledeći način. Neka je h_n kao u Lemi 4.2.1. i neka je $f_n = f * h_n$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{X(a',b')} = 0 \tag{10}$$

(štaviše, $\|f_n - f\|_{X(R)} \longrightarrow 0$, $n\to\infty$, jer je (h_n) približan identitet).

Treba još dokazati $\|f_n\|_{\mathcal{R}^\alpha} = O(1)$. Dokazujemo najpre $f_n\in W(X(R), |v|^\alpha)$. Zaista

$$|v|^\alpha f_n^\wedge(v) = |v|^\alpha (f * h_n)^\wedge(v) = |v|^\alpha h_n^\wedge(v)f^\wedge(v) = (h_n^{\{\alpha\}})^\wedge(v)f^\wedge(v) =$$

$$= (h_n^{\{\alpha\}} * f)^\wedge(v) = F_n^\wedge(v)$$

gde smo sa F_n obeležili $h_n^{\{\alpha\}} * f$. Kako je $h_n^{\{\alpha\}}\in L^1(R)$ (jer je $h_n\in\mathcal{D}$) imamo da je $F_n\in X(R)$.

Primenjujući Teoremu 2.4.8. na funkcije f_n imamo da je $\lim_{\varepsilon\to 0}\| R_\varepsilon^\alpha f_n - F_n\|_{X(R)} = 0$, pa je pogotovu

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\| R_\varepsilon^\alpha f_n - F_n\|_{X(a';b')} = 0 \tag{11}$$

tako smo dokazali $f_n\in\mathcal{R}^\alpha(X(a';b'))$ (v. Definiciju 4.2.2.).

Treba još dokazati da je niz f_n ograničen u normi prostora $\mathcal{R}^\alpha(X(a';b'))$, uniformno po n. Radi toga ćemo najpre na f_n primeniti Lemu 4.2.3. i dobiti

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^{(\alpha)}(x)f_n(x)dx = \int_{a'}^{b'}\varphi(x)F_n(x)dx\,,\quad \varphi\in\mathcal{D}(a';b') \tag{12}$$

Dalje, iz uslova teoreme $\|K_\rho f - f\|_{X(a,b)} = O(\rho^{-\alpha})$, prema Lemi 4.2.1. sledi

$$\|K_\rho f_n - f_n\|_{X(a';b')} = O(\rho^{-\alpha})$$

uniformno po n. Primenjujući na funkcije f_n Teoremu 4.1.1. dobijamo da postoje $g_n\in Y(a';b')$ tako da

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^{(\alpha)}(x)f_n(x)dx = \int_{a'}^{b'}\varphi(x)g_n(x)dx \qquad \varphi\in\mathcal{D}(a';b') \tag{13}$$

pri čemu je iz dokaza te teoreme jasno da je

$$\|g_n\|_{Y(a';b')} = O(1),\ \text{uniformno po n} \tag{14}$$

(v. i [Dod.D.4.]). Tako da iz (12) i (13) sledi

$$\int_{a'}^{b'}\varphi(x)F_n(x)dx = \int_{a'}^{b'}\varphi(x)g_n(x)dx \qquad \forall\varphi\in\mathcal{D}(a';b')$$

a odatle se dobija [Dod.D.3.]

$$F_n(x) = g_n(x) \quad \text{s.s. u } (a';b')$$

pa iz (14) sledi

$$\|F_n\|_{X(a';b')} = \|g_n\|_{Y(a';b')} = O(1),\ \text{uniformno po n}$$

Tako da se iz ovog i (10) dobija

$$\|f_n\|_{\mathcal{R}^\alpha} = \|f_n\|_{X(a';b')} + \|F_n\|_{X(a';b')} = O(1),\ \text{uniformno po n}$$

i ovo zajedno sa (10) daje

$$f\in\mathcal{R}^\alpha\widetilde{(X(a';b'))}\ X(a';b')$$

1) Iz uslova $\|K_\rho f - f\|_{X(a,b)} = o(\rho^{-\alpha})$ sledi prema Lemi 4.2.1. da je $\|K_\rho f_n - f_n\|_{X(a';b')} = o(\rho^{-\alpha})$, pa primenjujući Teoremu 4.1.1.1) dobijamo da je

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^{(\alpha)}(x)f_n(x)dx = 0 \qquad \forall\varphi\in\mathcal{D}(a';b')$$

Koristeći (12) dobijamo da je u ovom slučaju

$$\int_{a'}^{b'} \varphi(x)F_n(x)dx = 0 \qquad \forall\varphi\in\mathcal{D}(a',b')$$

tako da imamo $F_n(x) = 0$, s.s. u (a',b')

Iz relacije (11) sada sledi $\lim_{\varepsilon\to 0}\|R_\varepsilon^{*}f_n\|_{X(a',b')} = 0$ pa, prelaskom na limes po n, dobijamo

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|R_\varepsilon^{*}f\|_{X(a',b')} = 0$$

4.3. Celobrojni slučaj

U ovom odeljku ćemo pokazati da se za one operatore za koje je u uslovima (S_F) i (M_F) α ceo broj, klasa saturacije na intervalu (a,b) može opisati pomoću običnog izvoda (n parno) odnosno izvoda konjugovane funkcije (n neparno). Ovo tvrdjenje za lokalnu teoremu saturacije analogno je karakterizaciji iz odeljka 2.3., u globalnom slučaju.

Treba dakle pokazati

Posledica 4.3.1. Neka je n paran broj. Neka $f\in X(R)$. Tada

1) $\|R_\varepsilon^n f\|_{X(a',b')} = o(1) \implies$ f je polinom stepena n-1 na (a',b')

2) $\|R_\varepsilon^n f\|_{X(a',b')} = O(1) \longrightarrow f^{(n)}\in Y(a',b')$

Dokaz. 2) Neka je $\|R_\varepsilon^n f\|_{X(a',b')} = O(1)$. Iz ograničenosti familije $(R_\varepsilon^n f)$ u normi prostora $X(a',b')$ dobijamo, koristeći teoremu o $*$-slaboj kompaktnosti zatvorene kugle u spregnutom prostoru [Dod.D.4.], da postoji $g\in Y(a',b')$ tako da $R_{\varepsilon_j}^n f$ konvergira $*$-slabo ka g u prostoru $Y(a',b')$, kad $j\to\infty$. Drugim rečima, za svako $\varphi\in\mathcal{D}(a',b')$

$$\lim_{j\to\infty}\int_{a'}^{b'}\varphi(x)R_{\varepsilon_j}^n f(x)dx = \int_{a'}^{b'}\varphi(x)g(x)dx \tag{15}$$

Iz ovoga, koristeći (9), sada dobijamo

$$\lim_{j\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, R_{\varepsilon_j}^n\varphi(x)dx = \int_{a'}^{b'}\varphi(x)g(x)dx$$

a odavde, pošto je za $\varphi\in\mathcal{D}(a',b')$, $\lim_{\varepsilon\to 0}\|R_\varepsilon^n\varphi - \varphi^{\{n\}}\| = 0$ (Teorema 2.4.8.) dobijamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi^{\{n\}}(x)dx = \int_{a'}^{b'}\varphi(x)g(x)dx \qquad \forall\varphi\in\mathcal{D}(a',b') \tag{16}$$

i kako je, za n parno, $\varphi^{\{n\}}(x) \underset{\varepsilon}{=} \varphi^{(n)}(x)$,

$$\int_{a}^{b} f(x)\varphi^{(n)}(x)dx = \int_{a'}^{b'}\varphi(x)g(x)dx \qquad \forall\varphi\in\mathcal{D}(a',b') \tag{17}$$

Parcijalnom integracijom integrala sa desne strane sledi

$$\int_{a}^{b}(f(x)-g_{(n)}(x))\varphi^{(n)}(x)dx=0$$

gde je $g_{(n)}$ n-ti neodredjeni integral od g. Odavde dobijamo [3, str.388.Probl.2]

$$f(x)=g_{(n)}(x)+p_{n-1}(x) \qquad s.s.\ x\in(a';b')$$

i diferencirajući n puta

$$f^{(n)}(x)=g(x)\in Y(a';b')$$

što je i trebalo dokazati.

1) Neka $\|R_{\varepsilon}^{n}f\|_{X(a';b')}=o(1)$. Iz ovoga sledi da za svako $\varphi\in\mathcal{D}(a';b')$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a'}^{b'}\varphi(x)R_{\varepsilon}^{n}f(x)dx=0 \tag{18}$$

pa, kao što smo u dokazu 2) iz (15) dobili (17) tako iz (18) dobijamo

$$\int_{a'}^{b'}f(x)\varphi^{(n)}(x)dx=0 \tag{19}$$

tako da je $f(x)=p_{n-1}(x)$ s.s. $x\in(a';b')$

<u>Posledica 4.3.2.</u> Neka je n neparan broj. Neka je $f\in X(R)$. Tada

1) $\|R_{\varepsilon}^{n}f\|_{X(a',b')}=o(1) \Longrightarrow$ f je polinom stepena n-1 na $(a';b')$

2) $\|R_{\varepsilon}^{n}f\|_{X(a',b')}=O(1) \Longrightarrow \tilde{f}^{(n)}\in Y(a';b')$

Dokaz 2) Na isti način kao u Posledici 4.3.1. dobijamo relaciju

(16) $$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi^{\{n\}}(x)dx=\int_{a'}^{b'}\varphi(x)g(x)dx, \text{ za neko } g\in Y(a';b')$$

Kako je za neparno n

$$\varphi^{\{n\}}(x)=\tilde{\varphi}^{(n)}(x)=(\varphi^{(n)})^{\sim}(x)$$

imamo

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)(\varphi^{(n)})^{\sim}(x)dx=\int_{a'}^{b'}\varphi(x)g(x)dx$$

odavde, primenjujući na levu stranu [Dod.B.9.], a na desnu parcijalnu integraciju imamo

$$\int_{a}^{b}\tilde{f}(x)\varphi^{(n)}(x)dx=\int_{a'}^{b'}\varphi^{(n)}(x)g_{(n)}(x)dx$$

tako da je

$$\tilde{f}(x)=g_{(n)}(x)+p_{n-1}(x) \qquad s.s.\ x\in(a';b')$$

otuda

$$\tilde{f}^{(n)}\in Y(a';b')$$

1) Slično kao u dokazu dela 1) iz Posledice 4.3.1., dobijamo umesto (19)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \tilde{\varphi}^{(n)}(x)dx = 0$$

a odavde

$$f(x) = p_{n-1}(x) \qquad s.s. \quad x\in(a',b')$$

4.4. Primedbe

U ovom i sledećem odeljku dokazujemo lokalnu teoremu saturacije u prostorima X(R). Odgovarajuću teoremu za periodične funkcije dokazao je G.I. SUNOUCHI u [14]. Medjutim, Sunouchiev dokaz se razlikuje od našeg jer predstavlja uopštenje jednog drugog načina dokazivanja globalne teoreme saturacije. Izložićemo taj dokaz ukratko:

Ako pretpostavimo da je $\|K_\rho f - f\|_{X(T)} = O(\rho^{-\alpha})$, tada s obzirom da Fejérov operator σ_N (aritmetičke sredine Fourierovog reda) predstavlja singularni integral, imamo

$$\|\sigma_N(K_\rho f - f)\| \le \|\sigma_N\| \|K_\rho f - f\| = O(\rho^{-\alpha}).$$

Poslednji izraz može se predstaviti Fourierovim redom

$$\Big\| \sum_{n=-N}^{N}\Big(1 - \frac{n}{N+1}\Big) \frac{\hat{k}(n)-1}{\rho^{-\alpha}} \hat{f}(n)\, e^{inx} \Big\|_{X(T)} = O(1) \qquad \text{(i)}$$

puštajući da $\rho\to\infty$, pošto operator zadovoljava uslov (S) dobijamo

$$\Big\| \sum_{n=-N}^{N}\Big(1 - \frac{n}{N+1}\Big) |n|^{\alpha} \hat{f}(n)\, e^{inx} \Big\|_{X(T)} = O(1)$$

Može se dokazati (v. [3], str.233) da poslednja relacija predstavlja potreban i dovoljan uslov da se $|n|^{\alpha}\hat{f}(n)$ može predstaviti kao Fourierova transformacija neke funkcije $g\in X(T)$. Lako je dokazati i obrnuto. I time je ustvari dokazana Teorema 1.2.3. na drugi način.

Ako se sada pretpostavi da je izraz $\|K_\rho f - f\| = O(\rho^{-\alpha})$ samo na nekom podintervalu $(a,b)\subset(-\pi,\pi)$, onda umesto (i) možemo dobiti samo (C,α) ograničenost tog trigonometrijskog reda. Ovo sledi iz Zygmundove (A.Zygmund, Trigonometric series, Cambridge 1959) teorije formalnih proizvoda trigonometrijskih redova. Dalji dokaz inverznog dela lokalne teoreme potpuno je analogan navedenom dokazu globalne teoreme.

I kada se radi o prostorima $L^p(R)$, $1\le p\le 2$, moguće je globalnu teoremu saturacije dokazati na ovde navedeni način. A zatim koristeći teoriju formalnih proizvoda trigonometrijskih integrala (A.Zygmund, Trigonometric Integrals, Ann.Math.48(1947)) može se na sličan način dobiti i lokalna teorema saturacije. Medjutim, ovaj dokaz, kao što se vidi, zasniva se na predstavljanju funkcije f trigonometrijskim integralom $\int_{-\infty}^{\infty}|v|^{\alpha}\hat{f}(v)\, e^{ivx}dv$, pa se on nikako ne može uopštiti na prostore $L^{p}(R)$, $p>2$.

Zbog toga smo se mi opredelili za drugi način dokaza, koji je izložen u uvodu u odeljak 4. i koji takodje predstavlja uopštenje dokaza globalne teoreme (v.I deo). Ovakav način dokaza omogućuje da se on primeni ne samo na prostore $L^{p}(R)$, nego i na prostore "sporo rastućih funkcija"(v.deo III).

5. Direktna lokalna teorema

Primećujemo da su uslovi (S) i (M), iz kojih je dobijena globalna teorema saturacije, dovoljni i za dokazivanje inverznog dela lokalne teoreme. Medjutim, da bi se dobio odgovarajući direktan deo potrebno je pretpostaviti nešto jače uslove za jezgro. Sunouchi je u [14] dokazao lokalnu teoremu saturacije za periodične funkcije (za procese sumiranja Fourierovih redova) i u tom radu uveo uslov za koji je u neperiodičnom slučaju analogan uslov (M_F^n) (v. Posledica 5.2.3.).

Mi ćemo iz funkcije definisane na R dokazati direktnu lokalnu teoremu polazeći od jedne posledice uslova (M_F^n). Pretpostavićemo, naime, da jezgro $k_\rho(x) = \rho\, k(\rho x)$ zadovoljava uslov $|x|^{n+1}|k(x)| = O(1)$. Prirodno je da je uslov ovog tipa potreban u dokazu direktne lokalne teoreme. Ideja dokaza je sledeća. Kako je za funkciju f poznato da je glatka samo na intervalu (a,b), množimo je sa beskonačno diferencijabilnom funkcijom β (v. sliku na str. 56) koja je jednaka 1 na podintervalu (a',b'), i tako dobijamo funkciju $f\beta$ koja je na celoj pravoj R isto toliko glatka kao f. Na tu funkciju primenjujemo direktnu globalnu teoremu i dobijamo da je stepen aproksimacije za tu funkciju jednak traženom. Medjutim funkcija βf razlikuje se od funkcije f izvan intervala (a',b') i sada je potrebno dokazati da je aproksimaciona razlika $K_\rho f - f$ mala izvan intervala (a',b') bez pretpostavki o svojstvima funkcije u toj oblasti. Za to je potrebno da jezgro ima još neke dodatne osobine. Osobina koju smo mi naveli prirodna je jer kazuje da je $k_\rho(x) = O(\rho^{-n}), \rho \to \infty$, a iz toga sledi da i aprokcimaciona razlika izvan nekog konačnog intervala ima taj stepen opadanja.

Primetimo još da ovaj uslov, mada nije posledica uslova (S) i (M), ipak ne sužava mnogo klasu posmatranih operatora, jer je za većinu zadovoljen (v. Tabelu).

5.1. Dokaz teoreme

U ovom odeljku dokazujemo obrat tvrdjenja iz prethodnog odeljka. U inverznoj teoremi smo dokazali da funkcije, koje se singularnim integralom (K_ρ) mogu aproksimirati sa stepenom $O(\rho^{-\alpha})$ (u prostoru $X(a,b)$) pripadaju skupu

$$\widetilde{\mathcal{R}^\alpha(X(a,b))}^{\,X(a,b)} \tag{1}$$

Sada ćemo dokazati da važi i obratno. Radi toga najpre primetimo da je skup (1) jednak skupu

$$\left\{f \mid \|R_\varepsilon^\alpha f\|_{X(a,b)} = O(1),\ \varepsilon\to 0\right\}$$

(v. Definicija 4.2.2. i Posledica 2.5.7.)

Teorema 5.1.1. Neka je $f\in X(R)$ i neka jezgro $(k\ )$ singularnog integrala (K_ρ) zadovoljava uslove (S_F) i (M_F) i neka je $|x|^{\alpha+1}|k(x)| = O(1)$. Tada

$$\|R_\varepsilon^\alpha f\|_{X(a,b)} = O(1) \Longrightarrow \|K_\rho f - f\|_{X(a',b')} = O(\rho^{-\alpha})$$

Dokaz. Neka je $f\in X(R)$ takva da je $\|R_\varepsilon^\alpha f\|_{X(a,b)} = O(1)$. Uvodimo "mollifier" $h_n(x) = nh(nx)$, $h\in\mathcal{D}$. Neka je $f_n = f*h_n$. Tada je

$$f_n\in W(X(R),|v|^\alpha) \tag{2}$$

(v. dokaz Teoreme 4.2.4.). Neka je za $g_n\in X(R)$ $\hat{g}_n(v) = |v|^\alpha \hat{f}_n(v)$ tada imamo

$$\rho^\alpha(K_\rho f_n - f_n)^\wedge(v) = \rho^\alpha \frac{\hat{k}_\rho(v) - 1}{|v|^\alpha}|v|^\alpha \hat{f}_n(v) = \hat{\lambda}_\rho(v)\hat{g}_n(v) = (g_n * \lambda_\rho)^\wedge(v)$$

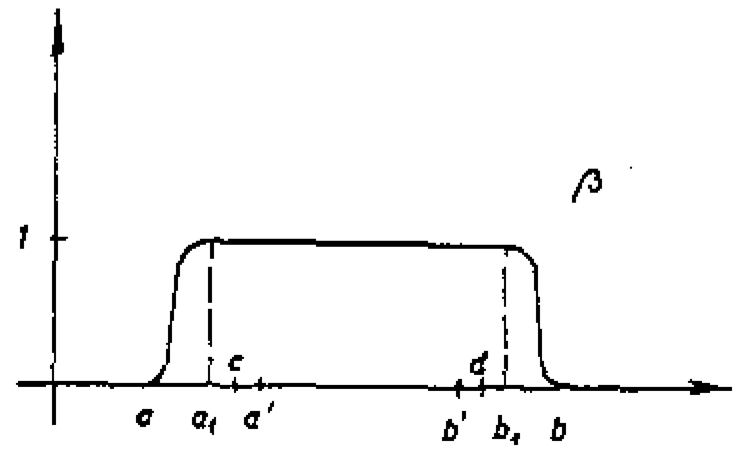
tako da iz teoreme jedinstvenosti Fourierove transformacije sledi

$$(K_\rho f_n(x) - f_n(x)) = (g_n * \lambda_\rho)(x) \tag{3}$$

Iz uslova teoreme $\|R_\varepsilon^\alpha f\|_{X(a,b)} = O(1)$ sledi, prema Lemi 4.2.1.

$$\|R_\varepsilon^\alpha f_n\|_{X(a',b')} = O(1),\ \text{uniformno po } n \tag{4}$$

Dokazaćemo da iz ovog proizilazi da je $g_n*\lambda_\rho$ ograničeno u $X(a',b')$ uniformno po n; tada će iz (3) prelaskom na limes po n slediti tvrdjenje teoreme. (Obeležimo interval (a',b') opet sa (a,b).)



Neka je $\beta\in\mathcal{D}$ kao na slici. Tada iz (4)

$$\|R_\varepsilon^\alpha f_n(x)\beta(x)\|_{X(R)} = O(1)$$

uniformno po n. A odavde pošto je (λ_ρ) jezgro

$$\Big\|\int_{-\infty}^{\infty} R_\varepsilon^\alpha f_n(t)\beta(t)\lambda_\rho(x-t)dt\Big\|_{X(R)} = O(1), \text{ uniformno po n}$$

Pretpostavimo da je dokazana sledeća relacija

$$\Big\|\int_{-\infty}^{\infty} R_\varepsilon^\alpha f_n(t)\beta(t)\lambda_\rho(x-t)dt - \int_{-\infty}^{\infty} R_\varepsilon^\alpha f_n(t)\lambda_\rho(x-t)dt\Big\|_{X(a';b')} = O(1) \qquad (5)$$

za dovoljno malo ε, uniformno po n. Tada je

$$\|R_\varepsilon^\alpha f_n * \lambda_\rho\| = \Big\|\int_{-\infty}^{\infty} R_\varepsilon^\alpha f_n(t)\lambda_\rho(x-t)dt\Big\|_{X(a';b')} = O(1) \qquad (6)$$

S druge strane, iz relacije (2), prema Teoremi 2.4.8. sledi

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|R_\varepsilon^\alpha f_n - g_n\|_{X(R)} = 0$$

tako da iz ovoga i (6) sledi $\|g_n * \lambda_\rho\|_{X(a';b')} = O(1)$, uniformno po n, a iz jednačine (3) sada proizilazi

$$\|\rho^\alpha(K_\rho f_n(x) - f_n(x))\|_{X(a';b')} = O(1)$$

puštajući da n teži beskonačnosti, dobija se tvrdjenje teoreme.

Ostaje još da se dokaže (5). Dokazaćemo tvrdjenje za $X(a,b) = C(a,b)$. Slično se dokazuje za ostale prostore.

Neka je $x\in(a';b')$; izraz s leve strane (5) jednak je

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_\varepsilon^\alpha f_n(t)(\beta(t)-1)\lambda_\rho(x-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)R_\varepsilon^\alpha((\beta(t)-1)\lambda_\rho(x-t))dt =$$

$$= \int_{t\in(c,d)} + \int_{t\notin(c,d)} = I_1 + I_2$$

Neka je $t\in(c,d)$.

$$R_\varepsilon^\alpha((\beta(t)-1)\lambda_\rho(x-t)) = \int_\varepsilon^\infty \frac{\bar{\Delta}_u^{2m}(\beta(t)-1)\lambda_{\rho,x}(t)}{u^{1+\alpha}}du \qquad (7)$$

gde smo obeležili $\lambda_\rho(x-t) = \lambda_{\rho,x}(t)$. Neka je $m|u| < \delta = \min(|a_1-c|, |b_1-d|)$; tada je $t\pm mu\in(a_1,b_1)$ tako da je $\beta(t\pm mu) = 1$. Otuda sledi da je (za dovoljno malo ε)

$$\int_\varepsilon^{\delta/m} \frac{\bar{\Delta}_u^{2m}(\beta(t)-1)\lambda_{\rho,x}(t)}{u^{1+\alpha}}du = 0 \qquad (8)$$

sem toga

$$\int_{\delta/m}^{\infty} \frac{\bar{\Delta}_u^{2m}(\beta(t)-1)\lambda_{\rho x}(t)}{u^{1+\alpha}}\,du \le 2m \sup_{u>\delta/m} u^{-1-\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}|\lambda_{\rho,x}(t)|dt \le C$$

tako da iz (7), (8) i poslednje relacije sledi

$$|I_1| \le \int_c^d |f_n(t)||R_\varepsilon^\alpha((\beta(t)-1)\lambda_{\rho,x}(t))|\,dt \le \sup_{t\in(c,d)} |R_\varepsilon^\alpha((\beta(t)-1)\lambda_{\rho,x}(t)|\int_c^d |f_n(t)|dt$$

$$\le C\int_c^d |f_n(t)|\,dt = O(1) \tag{9}$$

Neka $t\notin(c,d)$

$$I_2 = \int_{t\notin(c,d)} f_n(t)R_\varepsilon^\alpha(t)\lambda_{\rho,x}(t)dt - \int_{t\notin(c,d)} f_n(t)R_\varepsilon^\alpha\lambda_\rho(x-t)dt = I_2^1 + I_2^2 \tag{10}$$

Procenjujemo integral I_2^2. Primetimo najpre

$$\lambda_\rho \in V(L(R), |v|^\alpha) \tag{11}$$

Zaista neka je $\mu(x) = \int_{-\infty}^{x} k(t)dt - \delta(x)\in BV(R)$. Tada prema uslovu (M_β) $\check{\mu}(v) = k^\wedge(v) - 1 = |v|^\alpha \lambda^\wedge(v)$. Iz ovoga se dobija da za $\lambda_\rho(x) = \rho\lambda(\rho x)$ važi $|v|^\alpha\hat{\lambda}_\rho(v) = \rho^\alpha \check{\mu}_\rho(v)$, gde je $\mu_\rho(x) = \mu(\rho x)$. Time je (11) dokazano.

Sada ćemo dokazati da za svako $f\in C_0(R)$ važi

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)R_\varepsilon^\alpha\lambda_\rho(x-t)dt = \rho^\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(t)d\mu_\rho(x-t) \tag{12}$$

Zaista, primenjujući (11) i Lemu 2.4.7. najpre dobijamo

$$(R_\varepsilon^\alpha\lambda_\rho)^\wedge(v) - \check{\mu}_\rho(v) = \frac{\check{q}_\varepsilon(v)}{|v|^\alpha}|v|^\alpha\hat{\lambda}_\rho(v) - \rho^\alpha\check{\mu}_\rho(v) = \rho^\alpha(\hat{p}_\varepsilon(v)-1)\check{\mu}_\rho(v)$$

tako da zbog jedinstvenosti Fourierove transformacije imamo

$$R_\varepsilon^\alpha\lambda_\rho(x) - \rho^\alpha\lambda_\rho(x) = \rho^\alpha(p_\varepsilon * d\mu_\rho(x) - \mu_\rho(x)) \tag{12'}$$

Neka je sada $f\in C_0(R)$. Tada

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)R_\varepsilon^\alpha\lambda_\rho(x-t)dt - \rho^\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(t)d\mu_\rho(x-t) =$$

$$= \rho^\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(p_\varepsilon * d\mu_\rho)(x-t)dt - \rho^\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(t)d\mu_\rho(x-t) =$$

$$= \rho^\alpha\int_{-\infty}^{\infty}(f*d\mu_\rho(x-u) - f*d\mu_\rho(x))\,p_\varepsilon(u)du$$

Kako je (p_ε) približan identitet dobijamo da izraz s desne strane poslednje jednakosti teži nuli, kad $\varepsilon\to 0$. Tako smo dokazali (12). Kako je $f_n\in C_0(R)$, iz (12) sledi

$$I_2^2 = \int\limits_{t\notin(c,d)} f_n(t)R_\varepsilon^\alpha\lambda_\rho(x-t)dt \le \rho^\alpha \int\limits_{t\notin(c,d)} f_n(t)d\mu_\rho(x-t) + \eta$$

$$= \rho^\alpha \int\limits_{t\notin(c,d)} f_n(t)k_\rho(x-t)dt - \rho^\alpha \int\limits_{t\notin(c,d)} f_n(t)d\delta(x-t) + \eta \quad (13)$$

kako je po pretpostavci $x\in(a',b')$, onda je $|x-t|>\delta$, tako da je drugi integral u (13) jednak nuli. Za prvi integral, s obzirom da je $k(x) = O(|x|^{-1-\alpha})$, kad $x\to\infty$, i da je $f_n(x)/(1+|x|)=f_n^1\in L(R)$ dobijamo

$$\rho^\alpha\Big|\int\limits_{t\notin(c,d)} f_n(t)k_\rho(x-t)dt\Big| \le \rho^\alpha \sup_{t\notin(c,d)} (1+|t|)|k_\rho(x-t)| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f_n(t)|}{1+|t|}dt$$

$$\le \rho^\alpha \sup_{|u|>\delta} |u||k_\rho(u)| \, \|f_n^1\|_{L(R)} = \rho^{\alpha+1} \sup_{|u|>\rho\delta} |u\, k(\rho u)| \|f^1\|_{L(R)} = O(1)$$

iz ovoga i (13) sledi

$$|I_2^2| = O(1) \quad (14)$$

Ostaje još da se proceni I_2^1 iz (10): Neka je $h_{\rho,x} = \beta\cdot\lambda_{\rho,x}$. Tada kao što je lako proveriti $h_{\rho,x}\in W(L(R),|v|^\alpha)$, tj. postoji $H_{\rho,x}\in L(R)$ tako da $H^\wedge_{\rho,x}(v) = |v|^\alpha(\beta\cdot\lambda_{\rho,x})^\wedge(v)$. Iz ovoga, prema Teoremi 2.4.8. sledi

$$\lim_{\varepsilon\to0} \|R_\varepsilon^\alpha(\beta\,\lambda_{\rho,x}) - H_{\rho,x}\|_{L(R)} = 0$$

tako da

$$|I_2^1| \le \Big|\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)R_\varepsilon^\alpha(\beta\cdot\lambda_{\rho,x})(t)dt\Big| \le$$

$$\le \Big|\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)(R_\varepsilon^\alpha(\beta\cdot\lambda_{\rho,x})(t) - H_{\rho,x}(t))dt\Big| + \Big|\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)H_{\rho,x}(t)dt\Big| \le$$

$$\le \|f\|_{C_0(R)} \|R_\varepsilon^\alpha(\beta\cdot\lambda_{\rho,x}) - H_{\rho,x}\|_{L(R)} + \|f\|_{C_0(R)} \|H_{\rho,x}\|_{L(R)} = O(1)$$

iz ovoga, (14) i (9) sledi (5) i time je teorema u potpunosti dokazana.

5.2. Klasa BV_{n+1}

Definicija 5.2.1. Neka je $n\in N$. Funkcija h pripada klasi BV_{n+1} ako je $h, h', \ldots h^{(n-1)}\in AC_{loc}(0,\infty)$, $h^{(n)}$ $BV_{loc}(0,\infty)$ i

$$\int_0^\infty x^n |dh^{(n)}(x)| < \infty \quad (15)$$

<u>Lema 5.2.2.</u> Neka je $h \in C_0(R)$ parna i pripada klasi BV_{n+1}. Tada $h \in BV_{j+1}$, za $j = 0,1,\dots,n$. Specijalno, postoji $\lambda \in L(R)$ takva da

$$\lambda^{\wedge}(v) = h(v)$$

Dokaz. Za dokaz prvog tvrdjènja v. [17] . Iz toga posebno sledi da $BV_{n+1} \subset BV_2$, za $n \geqslant 1$; a kada h pripada klasi BV_2, poznato je da postoji $\lambda \in L(R)$ tako da $\lambda^{\wedge}(v) = h(v)$ ([3], Theorem 6.3.11.) Funkcije iz klase BV_2 obično se nazivaju kvazi-konveksne.

<u>Posledica 5.2.3.</u> Neka $f \in X(R)$. Neka je jezgro (k_ρ) singularnog integrala (K_ρ) parno i zadovoljava uslove (S_F) i

$$(M_F^n) \quad \exists\, h \in BV_{n+1} \quad \frac{k^{\wedge}(v) - 1}{|v|^n} = h(v)$$

Tada

$$\|R_\varepsilon^n f\|_{X(a,b)} = O(1) \qquad \|K_\rho f - f\|_{X(a',b')} = O(\rho^{-n})$$

Dokaz. Dokazaćemo da jezgro (k_ρ) zadovoljava uslove Teoreme 5.1.1 Zaista prema Lemi 5.2.2. postoji $\lambda \in L(R)$ tako da je $\lambda^{\wedge}(v) = h(v)$ pa jezgro (k_ρ) zadovoljava uslov (M_F). Treba još dokazati da važi $|x|^{n+1}|k(x)| = O(1)$. To ćemo dokazati u sledeće tri leme.

<u>Lema 5.2.4.</u> Neka $h \in BV_{n+1}$ i $h \in C_0(0,\infty)$. Tada

$$\lim_{\rho\to\infty} \rho^j h^{(j)}(\rho) = 0, \qquad j = 1,\dots,n$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^j h^{(j)}(\varepsilon) < \infty, \qquad j = 1,\dots,n$$

Dokaz. Za $n = 1$ lema se svodi na Proposition 6.3.6. iz [3] , a za $n > 1$ dokazuje se slično, indukcijom po n, (parcijalnom integracijom integrala (15)).

<u>Lema 5.2.5.</u> Neka je funkcija k parna i neka zadovoljava uslov (M_F^n). Tada je $k^{\wedge} \in AC^{n-1}$, $(k^{\wedge})^{(n)} \in BV(R)$ i svi izvodi $\hat{k}^{(j)}$, $j = 1,\dots,n$ su u beskonačnosti ograničeni nekim polinomom.

Dokaz. Po pretpostavci k zadovoljava uslov (M_F^n) u kome se, s obzirom na Lemu 5.2.2., h može zameniti sa $\lambda^{\wedge}$. Tako da za $v > 0$

$$k^{\wedge}(v) - 1 = v^n \lambda^{\wedge}(v)$$

Tada pošto je, po pretpostavci, $\lambda\hat{}\in AC^{n-1}_{loc}(0,\infty)$ imamo

$$\hat{k}'(v) = nv^{n-1}\hat{\lambda}(v) + v^n\,\hat{\lambda}'(v)$$

$$\hat{k}''(v) = n(n-1)v^{n-2}\,\hat{\lambda}(v) + 2nv^{n-1}\,\hat{\lambda}'(v) + v^n\,\hat{\lambda}''(v)$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\hat{k}^{(n)}(v) = n!\,\hat{\lambda}(v) + C_1 v\,\hat{\lambda}'(v) + C_2 v^2\,\hat{\lambda}''(v) + \ldots + v^n\,\hat{\lambda}^{(n)}(v)$$

tako da $\hat{k}\in AC^{n-1}$ i $\hat{k}^{(n)}\in BV_{loc}(0,\infty)$ i u beskonačnosti su svi izvodi ograničeni nekim polinomom i sem toga

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |d\hat{k}^{(n)}(v)| &\le C_0\int_0^\infty |d\lambda\hat{}(v)| + C_1\int_0^\infty |d(v\,\hat{\lambda}'(v))| + \ldots + \int_0^\infty |d(v^n\,\hat{\lambda}^{(n)}(v))| \\ &\le C_0\int_0^\infty |d\lambda\hat{}(v)| + C_1\int_0^\infty |v\,d\hat{\lambda}'(v)| + C_1\int_0^\infty |\hat{\lambda}'(v)|dv + \ldots \\ &\quad + \int_0^\infty v^n |d\hat{\lambda}^{(n)}(v)| + n\int_0^\infty v^{n-1}|\hat{\lambda}^{(n)}(v)|dv \end{aligned} \tag{16}$$

Prema Lemi 5.2.2. $\hat{\lambda}\in BV_{n+1}$ povlači $\hat{\lambda}\in BV_{j+1}$, za svako j manje od n, tako da važi

$$\int_0^\infty v^j |d\hat{\lambda}^{(j)}(v)| < \infty\,, \qquad j = 0,1,\ldots,n \tag{17}$$

Sem toga za $j = 1,\ldots, n-1$ imamo

$$\int_0^\infty v^j |\hat{\lambda}^{(j+1)}(v)|dv = \int_0^\infty v^j |d\hat{\lambda}^{(j)}(v)| \tag{18}$$

tako da iz (17) i (18) sledi da su svi integrali u (16) konvergentni, pa smo dobili

$$\int_0^\infty |d\hat{k}^{(n)}(v)| < \infty \tag{19}$$

Sem toga, prema Lemi 5.2.4. postoji konačna granična vrednost $\hat{k}^{(n)}(v)$, kad $v\to 0$. Pošto je k parna funkcija, onda je i $k\hat{}$ parna i iz (19) sledi $\hat{k}^{(n)}\in BV(R)$.

<u>Lema 5.2.6.</u> Neka je funkcija $k\in L(R)$ parna i $k\hat{}\in L(R)$ i zadovoljava uslov (M^n_F). Tada $|x|^{n+1}|k(x)| = O(1)$, $x\in R$.

Dokaz. Kako k zadovoljava uslove prethodne leme, zaključujemo da $\hat{k}^{(n)}\in BV(R)$. Sada primenjujući poznato tvrdjenje o Fourierovoj transformaciji izvoda ([3], Proposition 5.3.13.) dobijamo

$$(-iv)^{n+1}(\hat{k})\hat{}(v) = (\hat{k}^{(n)})^{\vee}(v) \tag{20}$$

i odavde, pošto je $(\hat{k})\hat{}(v) = k(-v)$, a izraz na desnoj strani (20) ograničen, dobija se tvrdjenje leme.

5.3. Neki specijalni slučajevi

Pokazaćemo kako se u nekim specijalnim slučajevima direktna teorema dobija veoma jednostavno.

Kada je eksponent u uslovu (S_F) paran, $\alpha = 2n$, najčešći je slučaj jezgara koja zadovoljavaju sledeći uslov:

Postoji moment $2n$-tog reda funkcije k i različit je od nule, momenti reda manjeg od $2n$ su svi jednaki nuli, tj.

$$\text{(i)} \qquad \begin{aligned} M_j' &:= \int_{-\infty}^{\infty} t^j k(t)\,dt = 0, \quad j = 1,\dots,2n-1 \\ M_{2n}' &= \int_{-\infty}^{\infty} t^{2n}\, k(t)\,dt = C \neq 0 \end{aligned}$$

U slučaju kada je eksponent u (S_F) neparan broj, $\alpha = 2n-1$, tipičan je primer jezgara koja zadovoljavaju uslov:

$$\text{(ii)} \qquad |t^{2n}\, k(t)| \leq M$$

(upravo onaj uslov, polazeći od koga smo dokazali direktnu teoremu u opštem slučaju).

Sledeća tvrdjenja dokazaćemo samo u prostoru $C(a,b)$. Slično se dokazuje i u opštem slučaju.

Posledica 5.3.1. Neka je jezgro (k_ρ) singularnog integrala (K_ρ) Fejérovog tipa i neka zadovoljava uslov (i). Tada je singularni integral (K_ρ) saturiran sa stepenom $O(\rho^{-2n})$, na svakom intervalu (a,b), i klasa saturacije sastoji se od funkcija kojima je $2n$-ti izvod bitno ograničen na (a,b). Trivijalna klasa sastoji se od polinoma na (a,b).

Dokaz. Dokazaćemo najpre direktan deo teoreme saturacije. Neka $f^{(2n)} \in L^\infty(a,b)$. Tada $f^{(2n-1)} \in \mathrm{Lip}1$. Neka je $x \in (a',b')$ i t dovoljno malo (tako da $x+t \in (a,b)$). Iskoristićemo sledeći identitet

$$f(x+t) - \sum_{j=0}^{2n-1} \frac{f^{(j)}(x)t^j}{j!} = \frac{1}{(2n-1)!} \int_x^{x+t} \left[f^{(2n-1)}(u) - f^{(2n-1)}(x)\right] (x+t-u) \qquad (21)$$

(u kome je desna strana, obeležimo je sa $R_n(t)$, ograničena sa $t^{2n}/(2n)!$), da bismo procenili aproksimacionu razliku.

$$K_\rho f(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x+t) - f(x))k_\rho(t)\,dt = \int_{|t|<\delta} + \int_{|t|>\delta} = I_1 + I_2$$

Primetimo sada da ako jezgro zadovoljava uslov (i), tada

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2n} k_\rho(t)dt = O(\rho^{-2n}) \tag{22}$$

što se jednostavno proverava smenom promenljive u integralu. Sem toga je

$$\int_{|t|>\delta} t^j k_\rho(t)dt = o(\rho^{-2n}), \quad j=0,\dots,2n \tag{23}$$

Zaista

$$\int_{|t|>\delta} t^j k_\rho(t)dt = \rho^{-j}\int_{|u|>\rho\delta} u^j k(u)du < \delta^{-j+2n}\rho^{2n}\int_{|u|>\rho\delta} u^{2n}k(u)du = o(1)$$

zbog uslova (i). Time je dokazano (23). Za $x\in(a',b')$ integral I_1 procenjujemo pomoću (21)

$$|I_1| = \left|\int_{|t|<\delta}(f(x+t)-f(x))k_\rho(t)dt\right| = \left|\sum_{j=1}^{2n-1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}\int_{|t|<\delta} t^j k_\rho(t)dt + \int_{|t|<\delta} R_n(t)k(t)\right|$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{2n-1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}\left(\int_{-\infty}^{\infty} - \int_{|t|<\delta}\right)t^j k_\rho(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} R_n(t)k_\rho(t)dt\right| \leq$$

$$\leq \quad 0 \quad + \sum_{j=1}^{2n-1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}\quad o(\rho^{-2n}) + \int_{-\infty}^{\infty}|t|^{2n}|k_\rho(t)|dt$$

pomoću (23). Poslednji sabirak s desne strane procenjujemo sa (22) i tako dobijamo da je

$$|I_1| = O(\rho^{-2n})$$

Za I_2 imamo

$$|I_2| \leq \left|\int_{|t|>\delta}(f(x+t)-f(x))k_\rho(t)dt\right| \leq 2\sup_{x\in(a',b')}|f(x)|\int_{|t|>\delta}|k_\rho(t)|\,dt = o(\rho^{-2n})$$

primenom (23). Time je dokazano

$$\sup_{a'<x<b'}|K_\rho f(x) - f(x)| = O(\rho^{-2n}) \tag{24}$$

To je direktan deo teoreme saturacije.

Invezni deo je dokazan u Teoremi 4.2.4. i Posledici 4.3.1. Primećujemo, naime, da su u dokazu Teoreme 4.2.4. uslovi (S_F) i (M_F) korišćeni samo za dokazivanje relacije 4.1.(1)

$$\lim_{\rho\to\infty}\left\|\rho^{-2n}(K_\rho\varphi - \varphi) - \varphi^{(2n)}\right\| = 0$$

za $\varphi\in\mathcal{D}(a,b)$. Medjutim očigledno je da se ta relacija, za operatora čije jezgra zadovoljavaju uslov (i), može dobiti na isti način kao što smo dobili (24). To znači da Teorema 4.2.4. važi za ove operatore i time je dokazan i inverzni deo lokalne teoreme saturacije.

Posledica 5.3.2. Neka je jezgro (k_ρ) singularnog integrala (K_ρ) parno i zadovoljava uslove (S_F), (M_F) i (ii). Tada je singularni integral (K_ρ) saturiran sa stepenom $O(\rho^{-2n+1})$, na svakom intervalu (a,b), i klasa saturacije se sastoji iz funkcija za koje je $2n-1$-vi izvod konjugovane funkcije bitno ograničen na (a,b).

Dokaz. Dokaz inverznog dela lokalne teoreme saturacije dobija se iz Teoreme 4.2.4. i Posledice 4.3.2. Pokazaćemo kako se u ovom slučaju (neparnog stepena) dokaz direktnog dela može dobiti na mnogo jednostavniji način nego u opštem slučaju.(Teorema 5.1.1.

Zaista, lako je proveriti da je

$$\tilde{f}^{(2n-1)}(x) = \int_0^\infty \frac{\bar{\Delta}_t^{2n} f(x)}{t^{2n}}\, dt$$

i kako je,po pretpostavci, $\tilde{f}^{(2n-1)}$ bitno ograničena na (a,b), onda

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in(a,b)} \left| \int_0^\infty \frac{\bar{\Delta}_t^{2n} f(x)}{t^{2n}}\, dt \right| \le M \tag{25}$$

Dokazaćemo da iz (25) proizilazi

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in(a,b)} \left| \int_0^\infty \frac{\bar{\Delta}_t^{2} f(x)}{t^{2n}}\, dt \right| \le M \tag{26}$$

Zaista

$$\int_0^\infty \frac{\bar{\Delta}_t^{2n} f(x)}{t^{2n}}\, dt = \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j \binom{2n}{j} \int_0^\infty \frac{f(x+(2n-j)t)}{t^{2n}}\, dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{2n}{j} \int_0^\infty \frac{f(x+(2n-j)t) - 2f(x) + f(x-(2n-j)t)}{t^{2n}}\, dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{2n}{j} (2n-j)^{2n-1} \int_0^\infty \frac{f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)}{t^{2n}}\, dt$$

i iz ovoga sledi (26). Sada je veoma lako dobiti direktno tvrdjenje.

$$K_\rho f(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x-t) - f(x)) k_\rho(t)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (f(x-t) - 2f(x) + f(x+t)) k_\rho(t)\, dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\bar{\Delta}_t^{2} f(x)}{t^{2n}}\, t^{2n} k_\rho(t)\, dt$$

tako da je

$$\sup_{x\in(a,b)} | K_\rho f(x) - f(x)| \leq \sup_t |t^{2n} k_\rho(t)| \ \operatorname{ess}\sup_{x\in(a,b)} \int_0^{\rho} \frac{\bar{\Delta}_t^2 f(x)}{t^{2n}} dt = O(\rho$$

prema (26) i uslovu (ii).

5.4. Primedbe

Kao što je u 4.4. već rečeno, lokalna direktna teorema 5.1.4. za prostore X(R) analogna je Sunouchievoj lokalnoj teoremi za periodične funkcije. Medjutim, na prostore X(R) nije moguće primeniti Sunouchiev dokaz za direktnu teoremu, kao ni za inverznu (v. Primedbe 4.4.).

5.1. Relaciju (3) iz koje dobijamo lokalnu direktnu teoremu treba uporediti sa relacijom 1.5.(27) iz koje je dobijena globalna direktna teorema.

Uslov analogan uslovu $|x|^{\alpha+1}|k(x)| = O(1)$ (o kome smo govorili u uvodu) zadovoljavaju svi operatori za koje važi lokalna teorema saturacije. To se odnosi i na operatore koji nisu predstavljeni singularnim integralom. Kao primer mogu da posluže pozitivni linearni operatori L_n(DE VORE [5]), koji su saturirani na intervalu (a,b). Pomenuti uslov koji oni zadovoljavaju je sledeći (str.133) " ako se f anulira na nekom otvorenom podskupu $\theta\subset(a,b)$ i $y\in\theta$ tada $f(y) - L_n(f(y) = o(\mu_n(y))$" ($\mu_n(y)$ je stepen saturacije). Sličnu ulogu ima i relacija (22) u dokazu Posledice 5.3.1.

5.2. U ovom odeljku smo dodatni uslov koji jezgro treba da zadovoljava da bi bilo lokalno saturirano, predstavili kao uslov (M_F^n). Uslov analogan ovome uveo je G.I.SUNOUCHI [14] u dokazivanju direktnog dela lokalne teoreme saturacije za trigonometrijske redove. Tako da je Posledica 5.2.3. analogon za trigonometrijske integrale Sunouchieve teoreme. Tu se uslov (M_F^n) pojavljuje sasvim prirodno kao uopštenje uslova (M) iz globalnog slučaja. Naime, (v.Primedbe uz odeljak 4.) videli da iz ograničenosti trigonometrijskog reda na intervalu sled njegova (C,n) ograničenost. Sada, ako jezgro (k_ρ) zadovoljav uslov (M_F^n) onda je odgovarajuće λ_ρ multiplikator,koji preslik (C,n) ograničene trigonometrijske redove u (C,n) ograničene.

(v. [17]). To omogućava da se dobije direktna teorema.

5.3. Ovaj odeljak razmatra uslove koji se javljaju kod najvećeg broja poznatih operatora (kod kojih je stepen saturacije celobrojan). Iz uslova u ovakvom obliku lakše je dobiti teoremu saturacije nego u opštem slučaju. Dokaz Posledice 5.3.1. postoji u SHAPIRO [13] samo za globalan slučaj, a takodje i Dokaz Posledice 5.3.2. za n = 1 (str.53 i 33).

III LOKALNA TEOREMA SATURACIJE ZA SPORO RASTUĆE FUNKCIJE

U II delu, da bismo dokazali lokalnu teoremu saturacije, pojačali smo, u odnosu na I deo, uslove koje jezgro treba da zadovoljava. Dodali smo naime uslov

$$|x|^{\alpha+1}\,|k(x)| \leq C \tag{i}$$

Sada ćemo pokazati da su takvi operatori pogodni i za aproksimaciju jedne klase funkcija, koja je šira nego L^p prostori.

6. Sporo rastuće funkcije

U ovom odeljku ćemo, prema BOCHNERu [1], uvesti definiciju klase P_α (sporo rastućih funkcija) i pokazati da singularni integrali, čija jezgra zadovoljavaju uslov (i), predstavljaju aproksimacione procese i na toj klasi funkcija.

Kako prostori P_α očigledno pripadaju prostoru $\mathcal{S}'$, za funkcije iz P_α može se definisati Fourierova transformacija u smislu temperiranih distribucija. Pokazujemo, analogno Lemi 1.3., da iz konvergencije familije (f_ρ) u prostoru P_α sledi konvergencija Fourierovih transformacija $(\hat{f}_\rho)$ u prostoru $\mathcal{S}'$ (Lema 6.2.1.); zatim, analogno Lemi 1.5., da se Fourierova transformacija funkcije iz P_α može množiti funkcijama koje imaju samo odredjeni broj izvoda (Stav 6.2.3.; v. i Primedbe na kraju odeljka); kao i teoremu o Fourierovoj transformaciji konvolucije (Teorema 6.2.5.). Ovi pomoćni stavovi nam omogućuju da u 7. dokažemo lokalnu teoremu saturacije u prostorima P , na sličan način kao u L^p prostorima.

6.1. Prostori P_α; konvolucije

Definicija 6.1.1. Neka je $\alpha > 0$. Funkcija f pripada prostoru P_α sporo rastućih funkcija, ako je lokalno integrabilna i

$$\|f\|_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)|}{1+|x|^\alpha}\, dx < \infty \tag{1}$$

Familija (f_ρ) funkcija $f \in P_\alpha$ je α-konvergentna ka $f \in P_\alpha$, ako

$$\lim_{\rho\to\infty} \|f_\rho - f\|_\alpha = 0$$

Prostor P_α sa normom (1) je Banachov. Za $\alpha < \beta$ je $P_\alpha \subset P_\beta$.

Stav 6.1.2. Neka je $\alpha > 1$ i neka je $\beta \le \alpha$. Neka su $f_n, f \in P_\beta$, $n \in N$ i neka za $k \in L^1$ važi $(1+|x|^\alpha)|k(x)| \le C$. Tada

a) $f * k \in P_\beta$

b) ako je niz (f_n) β-konvergentan ka f, kad $n \to \infty$, tada je i $(f_n * k)$ β-konvergentan ka $f * k$, kad $n \to \infty$.

c) familija $(f * k_\rho)$, gde je $k_\rho(x) = \rho k(\rho x)$, je β-konvergentna ka f, kad $\rho \to \infty$.

Ovaj stav tvrdi da domen singularnog integrala (K_ρ), čije jezgro (k_ρ) zadovoljava navedeni uslov, može da obuhvati i prostor P_α. Singularni integral tada predstavlja aproksimacioni proces na P_α. Dokaz ovog stava prilično je jednostavan, pa ga nećemo navoditi (v. BOCHNER [1], str. 146).

6.2. Fourierova transformacija

Lema 6.2.1. Neka je familija (f_ρ) funkcija $f_\rho \in P_\alpha$ α-konvergentna ka $f \in P_\alpha$, kad $\rho \to \infty$. Tada

$$\lim_{\rho\to\infty} f_\rho^\wedge = f^\wedge \quad \text{u} \quad \mathcal{S}'$$

Dokaz. Po pretpostavci $\|f_\rho - f\|_\alpha \to 0$, kad $\rho \to \infty$. Odavde sledi, za svako $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} (f_\rho(x) - f(x))\varphi(x)dx\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_\rho(x) - f(x)}{1+|x|^\alpha}(1+|x|^\alpha)\varphi(x)dx\right| \le$$

$$\le \sup_x (1+|x|^\alpha)|\varphi(x)| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f_\rho(x) - f(x)|}{1+|x|^\alpha}\, dx \le C\,\|f_\rho - f\|_\alpha \to 0, \quad \rho \to \infty$$

tako da $f_\varrho \to f$ u $\mathcal{S}'$. Odavde sledi [Dod.C.3.] da $\hat{f}_\varrho \to f^\wedge$ u $\mathcal{S}'$.

<u>Lema 6.2.2.</u> Neka je $n \in N$. Neka je $h \in C^{n-1}$ takva da je $h^{(n)} \in BV_{loc}$ i $h^{(j)}(x)$ je ograničeno nekim polinomom, kad $|x| \to \infty$, $j = 0,\ldots,n$. Tada je, za svako $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$|x|^{n+1} |(h\varphi)^\wedge(x)| \leq C$$

Primedba. Specijalno, za n-ti Rieszov izvod $\varphi^{\{n\}}(x) = (|v|^n \varphi^\wedge)^\wedge(x)$ funkcije $\varphi \in \mathcal{S}$ važi $|x|^{n+1} |\varphi^{\{n\}}(x)| \leq C$.

Dokaz. Kako je $\varphi \in \mathcal{S}$, a funkcija h po pretpostavci ne raste brže od polinoma, imamo $\varphi h \in L^1$. Sem toga

$$(-ix)^{n+1}(h\varphi)^\wedge(x) = (-ix)^{n+1}\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\varphi(t)e^{-itx}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\varphi(t)(e^{-itx})^{(n+1)}dt$$

Pošto se svi izvodi do reda n funkcije $h(t)\varphi(t)$ anuliraju u beskonačnosti, parcijalnom integracijom poslednjeg integrala dobijamo

$$(-ix)^{n+1}(h\varphi)^\wedge(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} d((h\varphi)^{(n)}(t)) \qquad (2)$$

i kako je funkcija $(h\varphi)^{(n)}(t)$ ograničene varijacije, onda je funkcija $(-ix)^{n+1}(h\varphi)^\wedge(x)$ ograničena (kao Fourierova transformacija funkcije ograničene varijacije).

<u>Stav 6.2.3.</u> Neka je $n \in N$. Neka je $f \in P_{n+1}$ i neka je h kao u prethodnoj lemi. Tada je sledećim izrazom

$$\langle T,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(h\varphi)^\wedge(x)dx \quad , \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

definisana jedna temperirana distribucija. Distribuciju T obeležavaćemo sa $h \cdot f^\wedge$.

Dokaz. Kako funkcija h zadovoljava uslove prethodne leme, za svako $\varphi \in \mathcal{S}$ važi relacija (2), pa imamo

$$|\langle T,\varphi\rangle| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(h\varphi)^\wedge(x)dx\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{1+|x|^{n+1}} (1+|x|^{n+1})(h\varphi)^\wedge(x)dx\right|$$

$$\leq \sup_x (1+|x|^{n+1})|(h\varphi)^\wedge(x)| \; \|f\|_{n+1} \qquad (3)$$

Desnu stranu u (3) procenjujemo pomoću (2). Ako se u integralu u (2) razvije n-ti izvod (po Leibnitzovoj formuli) i iskoristi svojstvo funkcije h da su joj svi izvodi ograničeni nekim polinomom u beskonačnosti, može se dobiti sledeća procena

$$\sup_x (1+|x|^{n+1})|(h\varphi)^\wedge(x)| \leq C \sup_{j,m} \sup_x (1+|x|^j)|\varphi^{(m)}(x)|$$

pa pomoću ovoga iz (3) sledi da je T neprekidna linearna funkcionela na prostoru $\mathcal{S}$ [Dod.C.2.], tj. $T\in\mathcal{S}'$.

Očigledno je da tvrdjenje Stava 6.2.3. važi i ako se prostor P_{n+1} zameni nekim prostorom P_α, za $\alpha < n+1$.

Stav 6.2.3. omogućuje da se uvede sledeća definicija. (Funkcija h biće $h(x) = |x|^n$).

Definicija 6.2.4. Klasa $W(P_\alpha, |v|^n)$, $\alpha \leq n+1$, je skup svih funkcija $f\in P_\alpha$, za koje postoji $g\in P_\alpha$, tako da je $\hat{g} = |v|^n f^\wedge$.

Takodje primenom Stava 6.2.3. dokazujemo sledeću teoremu.

Teorema 6.2.5. Neka je $\alpha > 0$. Neka $f\in P_\alpha$, $\alpha \leq n+1$ i neka je $k\in L^1$ takva da $k^\wedge \in AC^{n-1}$, $k^{\wedge(n)} \in BV$ i $k^{\wedge(j)}$ je u beskonačnosti ograničeno nekim polinomom, $j = 0,1,\dots,n$. Tada je

$$(f*k)^\wedge = k^\wedge \cdot f^\wedge \tag{4}$$

Dokaz. Ako k zadovoljava navedene uslove, tada prema Lemi 6.2.2. $(1+|x|^{n+1})|k(x)| \leq C$, tako da prema Stavu 6.1.2. leva strana u (4) je Fourierova transformacija funkcije iz P_α. Koristeći Stav 6.2.3. vidimo da je i desna strana u (4) distribucija iz $\mathcal{S}'$.

Neka je (f_i) niz "sasečenih" funkcija: $f_i(x) = f(x)$, za $x\in(-i, i)$, a inače $f_i(x) = 0$. Funkcije $f_i\in L^1$ i lako je videti da je niz (f_i) α-konvergentan ka f. Tada je prema Stavu 6.1.2. i niz (f_i*k) α-konvergentan ka $f*k$.

Za funkcije $f_i, k\in L^1$ važi pravilo za Fourierovu transformaciju konvolucije [Dod.B.6.]

$$(f_i*k)^\wedge = k^\wedge\cdot f_i^\wedge \tag{5}$$

Primenjujući Lemu 6.1.1., iz α- konvergencije niza $(f_i\ k)$ dobijamo

$$(f_i*k)^\wedge \longrightarrow (f*k)^\wedge \quad, \ i\to\infty, \text{ u } \mathcal{S}' \tag{6}$$

i iz α-konvergencije niza (f_i)

$$f_i^{\wedge} \longrightarrow f^{\wedge}, \text{ kad } i \to \infty, \text{ u } \mathcal{S}' \qquad (7)$$

Iz (5),(6) i (7) sledi (4).

6.3. Primedbe

Bochner je, kako primećuje R.E.Edwards[1], očito prvi primetio da se pojam Fourierove transformacije može proširiti tako da bude primenljiv i na funkcije koje imaju polinomijalan rast u beskonačnosti (za razliku od klasične Fourierove transformacije koja je primenljiva samo na prostore L^p, $1 \leq p \leq 2$). Teorija (temperiranih) distribucija L.Schwartza veoma je, bar sa formalne strane, uprostila Bochnerov pristup (i rešila problem Fourierove transformacije za mnogo šire klasu objekata nego što su (sporo rastuće) funkcije.

Medjutim, prostor svih temperiranih distribucija je veoma obuhvatan tako da je množenje u njemu definisano samo jednom jako uskom klasom funkcija (O_M - klasa "množitelja" temperiranih distribucija je skup svih beskonačno diferencijabilnih funkcija koje imaju polinomijalan rast u beskonačnosti, [12]). Stoga se javlja potreba da se prostor svih temperiranih distribucija razloži, na izvestan način, na uniju potprostora, u kojima će biti moguće množenje funkcijama koje imaju samo odredjeni broj izvoda. To je učinio J.KUČERA [7]; on je prostor $\mathcal{S}'$ razložio na uniju Hilbertovih prostora. Medjutim, kako nas interesuju samo one distribucije koje su (lokalno integrabilne) funkcije, ili njihove Fourierove transformacije, problem njihovih množitelja možemo rešiti i na osnovu Bochnerovog pristupa, tačnije izdvajanjem prostora P_n iz prostora $\mathcal{S}'$. To je učinjeno u Stavu 6.2.6. u kome je pokazano da se Fourierove transformacije funkcija iz P_n mogu množiti funkcijama koje imaju samo n-ti izvod (dakle, ne pripadaju O_M).

Tako smo dokazali da je $\hat{f}$, Fourierovu transformaciju funkcije $f \in P_n$, moguće množiti funkcijom $\psi(v)$, koja je u tipičnom slučaju jednaka $|v|^n$. Ovo je glavni problem u dokazu teoreme teoreme saturacije i on se javlja još u dokazu za L^p prostore ($p > 2$). (Lema 1.5.). Sada vidimo da se on na isti način može rešiti i u P_n prostorima.

[1] R.E.Edwars, Functional Analysis.Theory and Applications,New York 1965.

7. Teorema saturacije

U ovom odeljku dokazujemo lokalnu teoremu saturacije za prostore P_α sporo rastućih funkcija. Kao što smo već ranije primetili, uslovi koje jezgro singularnog integrala treba da zadovoljava isti su kao i za lokalnu saturaciju na prostorima X(R). Štaviše i metod dokaza, kako inverznog, tako i direktnog dela, veoma su slični metodima dokaza iz II dela. Za dokaz inverzne teoreme potrebna nam je Lema 7.1. koja daje pojačanje uslova 4.1.(1) iz kojeg je dobijena inverzna lokalna teorema u X(R). Dokaz direktnog dela takodje je veoma sličan ranijem dokazu, treba samo opravdati mogućnost množenja nekih distribucija. To se postiže pomoću Stava 6.2.3.

7.1. Lokalna inverzna teorema

Lema 7.1.1. Neka jezgro (k_ρ) singularnog integrala (K_ρ) zadovoljava uslove (S_F) i (M_F^n). Tada za svako $\varphi\in\mathcal{S}$ i svako $\delta>0$ važi

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |x|^{n+1-\delta}\left|\rho^n(K_\rho\varphi(x) - \varphi(x)) - \varphi^{\{n\}}(x)\right| \longrightarrow 0,\ \rho\to\infty$$

Dokaz. Kako je uslov (M_F^n) (Posledica 5.2.3.) jači od uslova (M_F), primenjujući Teoremu 1.6.3. imamo

$$\lim_{\rho\to\infty} \|\rho^n(K_\rho\varphi - \varphi) - \varphi^{\{n\}}\|_C = 0 \qquad (1)$$

Uvedimo oznaku $F_\rho(x) = \rho^n(K_\rho\varphi(x) - \varphi(x)) - \varphi^{\{n\}}(x)$. Dokazaćemo najpre da je

$$F_\rho(x) = O(|x|^{-n-1}),\quad |x|\to\infty \qquad (2)$$

Zaista, pošto jezgro (k_ρ) zadovoljava uslov (M_F), prema Lemi 5.2.5. za $k^\wedge$ važi: $k^\wedge\in AC^{n-1}$, $k^{\wedge(n)}\in BV$ i svi izvodi do reda n su ograničeni polinomom. Primenom Leme 6.2.2. dobija se da je $K_\rho\varphi(x) = (k^\wedge\cdot\hat{\varphi})^\wedge(x) = O(|x|^{-n-1})$. Takodje je (v. primedbu posle Leme 6.2.2.) $\varphi^{\{n\}}(x) = O(|x|^{-n-1})$. Time je dokazano (2). Dalje imamo

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |x|^{n+1-\delta}|F_\rho(x)| \le \sup_{|x|<M} |x|^{n+1-\delta}|F_\rho(x)| + \sup_{|x|>M} |x|^{n+1-\delta}|F_\rho(x)|$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Tada prema (2) može se izabrati dovoljno veliko M, tako da drugi sabirak bude manji od $\varepsilon/2$. Prvi sabirak procenjujemo

$$\sup_{|x|<M} |x|^{n+1-\delta}|F_\rho(x)| \leq M^{n+1-\delta} \sup_{|x|<M}|F_\rho(x)|$$

i desna strana, prema (1) teži nuli, kad $\rho\to\infty$. Time je lema dokazana.

<u>Teorema 7.1.2.</u> Neka je $f\in P_{n+1-\delta}$ i neka jezgro (k_ρ) singularnog integrala (K_ρ) zadovoljava uslove (S_F) i (M_F). Tada

1) $\|K_\rho f - f\|_{X(a,b)} = o(\rho^{-n}) \Longrightarrow \forall\varphi\in\mathcal{D}(a,b) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi^{\{n\}}(x)dx = 0$

2) $\|K_\rho f - f\|_{X(a,b)} = O(\rho^{-n}) \Longrightarrow$

$$\exists g\in Y(a,b)\,\forall\varphi\in\mathcal{D}(a;b) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi^{\{n\}}(x)dx = \int_a^b g(x)\varphi(x)dx$$

Dokaz. Neka je $\varphi\in\mathcal{D}$. Tada prema Lemi 7.1.1.

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |x|^{n+1-\delta}|\rho^n(K_\rho\varphi(x) - \varphi(x)) - \varphi^{\{n\}}(x)| \underset{\rho\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (3)$$

Za $f\in P_{n+1-\delta}$ imamo

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left[\rho^n(K_\rho\varphi(x) - \varphi(x)) - \varphi^{\{n\}}(x)\right] f(x)dx\right| \leq$$

$$\sup_x (1+|x|^{n+1-\delta})|\rho^n(K_\rho\varphi(x) - \varphi(x)) - \varphi^{\{n\}}(x)| \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(x)|}{1+ x^{n+1-\delta}}dx \qquad (4)$$

i poslednji izraz teži nuli, kad $\rho\to\infty$, primenom (3). Kako je sem toga

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_\rho\varphi(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)K_\rho f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)K_\rho f(x)dx \qquad (5)$$

iz (4) i (5) sledi

$$\lim_{\rho\to\infty}\rho^n\int_a^b(K_\rho f(x) - f(x))\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi^{\{n\}}(x)f(x)dx \qquad (6)$$

Relacija (6) dobijena je samo na osnovu pretpostavki o svojstvima jezgra. Iskoristimo sada pretpostavke u 1) i 2).

1) Neka je $\lim_{\rho\to\infty}\rho^n\|K_\rho f - f\|_{X(a,b)} = 0$. Tada za svako $\varphi\in\mathcal{D}(a,b)$

$$\lim_{\rho\to\infty}\rho^n\int_a^b(K_\rho f(x) - f(x))\varphi(x)dx = 0 \qquad (7)$$

Dakle iz (6) i (7) sledi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi^{\{n\}}(x)dx = 0 \qquad \varphi\in\mathcal{D}(a,b)$$

2) Neka je $\|K_\rho f - f\|_{X(a,b)} = O(\rho^{-n})$. Tada ovo pogotovu važi u prostoru Y(a,b) (spregnutom prostoru koji sadrži X(a,b)). Primenom teoreme o $*$-slaboj kompaktnosti zatvorene kugle u

spregnutom prostoru [Dod.D.4.] dobija se da postoji $g \in Y(a,b)$ i podniz (ρ_j) tako da

$$\lim_{j\to\infty} \rho_j^n \int_a^b (K_\rho f(x) - f(x))\varphi(x)dx = \int_a^b g(x)\varphi(x)dx \qquad \varphi\in\mathcal{D}(a,b) \quad (8)$$

Iz (6) i (8) se dobija

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{\langle n\rangle}(x)f(x)dx = \int_a^b g(x)\varphi(x)dx \qquad \varphi\in\mathcal{D}(a,b)$$

<u>Stav 7.1.3.</u> Neka je $n\in N$ i $\alpha \leq n+1$. Neka je f $W(P_\alpha, |v|^n)$ i neka je g ona funkcija iz P_α za koju važi $\hat{g} = |v|^n f^\wedge$. Tada

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \| R_\varepsilon^n f - g \|_\alpha = 0$$

Dokaz. Prema Lemi 2.4.7.b) operator R_ε^n može se predstaviti u obliku

$$R_\varepsilon^n f(x) = f * r_\varepsilon(x) - f(x)$$

gde za r važi $|x|^{n+1}|r(x)| \leq C$. Iz Stava 6.1.2. sada sledi da je $R_\varepsilon^n f \in P_\alpha$, i pošto nije teško proveriti da r zadovoljava i uslove Teoreme 6.2.5. dobijamo

$$(R_\varepsilon^n f)^\wedge = (\hat{r}_\varepsilon(x) - 1)f^\wedge \qquad (9)$$

Po pretpostavci je $\hat{g} = |v|^n f^\wedge$, tako da

$$(R_\varepsilon^n f)^\wedge - \hat{g} = \frac{\hat{r}_\varepsilon(v)-1}{|v|^n}\hat{g} - \hat{g} = \hat{p}_\varepsilon(v)\cdot\hat{g} - \hat{g} = (p_\varepsilon * g)^\wedge - \hat{g} \qquad (10)$$

gde smo za drugu jednakost primenili Lemu 2.4.7., a za treću Teoremu 6.2.5. (jer se i za p može dokazati da zadovoljava uslove te teoreme). Iz (10) sledi

$$R_\varepsilon^n f(x) - g(x) = p_\varepsilon * g(x) - g(x) \qquad (11)$$

i kao g i p zadovoljavaju uslove Stava 6.1.2. imamo da je $p_\varepsilon * g$ α-konvergentan ka g, kad $\varepsilon \to 0$. Tako da iz (11) sledi tvrdjenje stava.

<u>Lema 7.1.4.</u> Neka je $f\in W(P_\alpha, |v|^n)$, $\alpha \leq n+1$, i neka je g ona funkcija iz P_α za koju važi

$$\hat{g} = |v|^n f^\wedge$$

Tada za svako $\varphi\in\mathcal{S}$ važi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{\langle n\rangle}(x)f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)g(x)dx$$

Dokaz. Jezgro (r_ε) operatora (R_ε^n) zadovoljava uslove Leme 7.1.1. tako da za svako $\varphi \in \mathcal{S}$ važi

$$\sup_x |x|^\alpha |R_\varepsilon^n \varphi(x) - \varphi^{\{n\}}(x)| \longrightarrow 0\,, \quad \varepsilon \to 0 \tag{12}$$

gde je α prozvoljan broj manji od n+1. Sada se tvrdjenje leme lako dobija

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{\{n\}}(x) f(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)g(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{\{n\}}(x)f(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} R_\varepsilon^n \varphi(x)f(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)R_\varepsilon^n f(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)g(x)dx$$

$$\sup_x (1+|x|^\alpha)|\varphi^{\{n\}}(x) - R_\varepsilon^n \varphi(x)| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)|}{1+|x|^\alpha} dx$$

$$+ \sup_x (1+|x|^\alpha)|\varphi(x)| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|R_\varepsilon^n f(x) - g(x)|}{1+|x|^\alpha} dx$$

i prvi sabirak s desne strane teži nuli, kad $\varepsilon \to 0$, prema (12) a drugi prema Stavu 7.1.3. Time je lema dokazana.

<u>Definicija 7.1.5.</u> Neka je $n \in N$ i $\alpha \le n+1$. Sledeći skup

$$\mathcal{R}^n(P_\alpha, X(a,b)) = \{f \in P_\alpha \mid \exists g \in X(a,b) \ \lim_{\varepsilon \to 0} \|R_\varepsilon^n f - g\|_{X(a,b)} = 0\}$$

je normalizovan Banachov potprostor prostora X(a,b) u odnosu na normu

$$\|f\|_{\mathcal{R}^n} = \|f\|_{X(a,b)} + \|g\|_{X(a,b)}$$

<u>Teorema 7.1.6.</u> Neka $f \in P_{n+1-\delta}$ i neka jezgro (k_ρ) singularnog integrala (K_ρ) zadovoljava uslove (S_F) i (M_F^n). Tada

1) $\|K_\rho f - f\|_{X(a,b)} = o(\rho^{-n}) \implies$ f je polinom stepena n-1 na (a', b')

2) $\|K_\rho f - f\|_{X(a,b)} = O(\rho^{-n}) \implies f \in \mathcal{R}^n(P_{n+1-\delta}, X(a',b'))\ X(a',b')$

Dokaz je veoma sličan dokazu Teoreme 4.2.4. Slično kao u tom dokazu uvodimo "mollifier" $h_i \in \mathcal{D}$, $i \in N$, $f_i = f * h_i$ i dokazujemo da je

$$f_i \in W(P_{n+1-\delta}, |v|^n) \tag{13}$$

Zaista

$$|v|^n f_i^\wedge = |v|^n (f * h_i)^\wedge = |v|^n h_i^\wedge \cdot f^\wedge = (h_i^{\{n\}})^\wedge \cdot f^\wedge = (h_i^{\{n\}} * f)^\wedge = g_i^\wedge$$

gde smo za drugu jednakost upotrebili Teoremu 6.2.5., za treću definiciju Rieszovog izvoda (v. kraj odeljka 2.4.1.), za četvrtu opet Teoremu 6.2.5. (čije uslove funkcija $h_i^{\{n\}}$ očigledno zadovoljava, v. Lemu 6.2.2.) i na kraju smo sa g_i obeležili $h_i^{\{n\}} * f$. Prema Stavu 6.1.2., funkcije g_i pripadaju prostoru $P_{n+1-\delta}$. Tako je dokazano (13).

Dalje dokaz proizilazi iz Teoreme 7.1.2. pomoću Leme 7.1.4. Kao što je Teorema 4.2.4. dokazana iz Teoreme 4.1.1. pomoću Leme 4.2.3.

7.2. Lokalna direktna teorema

U ovom odeljku dokazujemo obrat tvrdjenja iz prethodnog odeljka. Dokazaćemo da funkcije iz prostora P_α, $\alpha \le n+1$, koje pripadaju skupu

$$\mathcal{R}^n(P_\alpha, X(a,b))^{X(a,b)} \qquad (14)$$

mogu biti aproksimirane singularnim integralom (K_ρ) sa stepenom $O(\rho^{-n})$. Iskoristićemo opet jednakost skupa (14) sa sledećim skupom

$$\left\{ f \in P_\alpha \;\middle|\; \|R_\varepsilon^n f\|_{X(a,b)} = O(1),\ \varepsilon \to 0 \right\}$$

Teorema 7.2.1. Neka f $P_{n+1-\delta}$ i neka jezgro singularnog integrala (K_ρ) zadovoljava uslove (S_F) i (M_F^n). Tada

$$\|R_\varepsilon^n f\|_{X(a,b)} = O(1) \implies \|K_\rho f - f\|_{X(a',b')} = O(\rho^{-n})$$

Dokaz. Kao u dokazu Teoreme 7.1.6. uvodimo "mollifier" $h \in \mathcal{D}$ $h_i(x) = ih(ix)$, $f_i = f * h_i$. U (13) je dokazano

$$f_i \quad W(P_{n+1-\delta}, |v|^n)$$

Neka je g_i ona funkcija iz $P_{n+1-\delta}$ za koju važi $g_i^\wedge = |v|^n f_i^\wedge$.

Kako jezgro (k_ρ) koje ima svojstvo (M_F^n), prema Lemi 5.2.5. zadovoljava uslove Teoreme 6.2.5. možemo primeniti pravilo za Fourierovu transformaciju konvolucije i dobiti

$$\rho^n(K_\rho f_i - f_i)^\wedge = \rho^n \frac{k_\rho^\wedge(v) - 1}{|v|^n} |v|^n f_i^\wedge = \lambda_\rho^\wedge(v)\, g_i^\wedge = (g_i * \lambda_\rho)^\wedge$$

Zbog jedinstvenosti Fourierove transformacije odatle imamo

$$\rho^n(K_\rho f_i(x) - f_i(x)) = (g_i * \lambda_\rho)(x) \tag{15}$$

Iz uslova teoreme $\| R_\varepsilon^n f \|_{X(a,b)} = O(1)$ sledi

$$\| R_\varepsilon^n f_i \|_{X(a',b')} = O(1) \quad \text{uniformno po } i \tag{16}$$

(ovo se može dokazati na sličan način kao Lema 4.2.1.). Dokazaćemo da iz (16) sledi da je $g_i * \lambda_\rho$ ograničeno u $X(a',b')$, uniformno po i. Tada će iz (15) slediti tvrdjenje teoreme, prelaskom na limes po i.

Dokazaćemo tvrdjenje samo za prostor $C(a,b)$. Slično se dokazuje u ostalim slučajevima. Interval (a',b') obeležimo opet sa (a,b). Pretpostavimo da je funkcija $\beta \in \mathcal{D}$ kao na slici na str. 56. Tada iz (16) sledi

$$\| R_\varepsilon^n f_i(x) \beta(x) \|_{C(R)} = O(1), \text{ uniformno po } i$$

a odavde, pošto je (λ_ρ) jezgro

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} R_\varepsilon^n f_i(t) \beta(t) \lambda_\rho(x-t)\,dt \right\|_{C(R)} = O(1), \text{ uniformno po } i$$

Pretpostavimo da je dokazana relacija

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} R_\varepsilon^n f_i(t) \beta(t) \lambda_\rho(x-t)\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} R_\varepsilon^n f_i(t) \lambda_\rho(x-t)\,dt \right\|_{C(a',b')} = O(1) \tag{17}$$

odatle bi sledilo

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} R_\varepsilon^n f_i(t) \lambda_\rho(x-t)\,dt \right\|_{C(a',b')} = O(1), \quad \text{uniformno po } i \tag{18}$$

Sem toga iz (13) pomoću Stava 7.1.3. sledi

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| R_\varepsilon^n f_i - g_i \|_{C(a',b')} = O(1)$$

tako da iz ovoga i (18) proizilazi

$$\| \lambda_\rho * g_i \|_{C(a',b')} = O(1), \text{ uniformno po } i$$

i pomoću (15)

$$\rho^n \| K_\rho f_i - f_i \|_{C(a',b')} = O(1), \text{ uniformno po } i$$

puštajući da i teži beskonačnosti, dobijamo tvrdjenje teoreme.

Ostaje još da se dokaže (17).

Neka je $x \in (a', b')$. Izraz u (17) možemo predstaviti u obliku

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_\varepsilon^n f_i(t)(\beta(t)-1)\lambda_\rho(x-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t)R_\varepsilon^n((\beta(t)-1)\lambda_\rho(x-t))dt =$$

$$= \int_{t\in(c,d)} + \int_{t\notin(c,d)} = I_1 + I_2$$

Neka je $t \in (c,d)$. Tada kao u dokazu Teoreme 5.1.1. (v. (7), (8) i dalje) sledi da je

$$\sup_{t\in(c,d)} |R_\varepsilon^n((\beta(t)-1)\lambda_{\rho,x}(t))| = O(1) \qquad (19)$$

pa je

$$|I_1| \le \int_c^d |f_i(t)R_\varepsilon^n((\beta(t)-1)\lambda_\rho(x-t))|dt \le \sup_{t\in(c,d)} |R_\varepsilon^n((\beta(t)-1)\lambda_{\rho,x}(t))| \int_c^d |f_i(t)|dt$$

ograničen (pomoću (19)).

Neka je $t \notin (c,d)$. Predstavimo integral I_2 u obliku

$$I_2 = \int_{t\notin(c,d)} f_i(t)R^n(\beta(t)\lambda_{\rho,x}(t))dt - \int_{t\notin(c,d)} f_i(t)R_\varepsilon^n\lambda_\rho(x-t)dt = I_2^1 + I_2^2$$

Koristeći relaciju (12′) dobijenu u dokazu Teoreme 5.1.1.

$$R_\varepsilon^n \lambda_\rho(x) - \rho^n \mu_\rho(x) = \rho^n(p_\varepsilon * d\mu_\rho(x) - \mu_\rho(x)) \qquad (20)$$

gde je $\mu(x) = \int_{-\infty}^{x} k(t)dt - \delta(x)$, a (p_ε) jezgro operatora R_ε^n, najpre ćemo dokazati

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t)R_\varepsilon^n\lambda_\rho(x-t)dt = \rho^n \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t)d\mu_\rho(x-t) \qquad (21)$$

Zaista iz (20) sledi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_i(t)R_\varepsilon^n\lambda_\rho(x-t)dt = \rho^n \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t)\int_{-\infty}^{\infty} p_\varepsilon(x-t-u)d\mu_\rho(u)\, dt =$$

$$= \rho^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_i(t)p_\varepsilon(x-t-u)dt\, d\mu_\rho(u) = \rho^n(f_i * p_\varepsilon * k_\rho(x) - f_i * p_\varepsilon(x)) \qquad (22)$$

Kako je $|x|^{n+1}|p(x)| = O(1)$, onda prema Stavu 6.1.2.c) sledi da je $f_i * p_\varepsilon = f_i^\varepsilon$ $n+1-\delta$-konvergentna ka f_i, kad $\varepsilon \to 0$. Kako i (k_ρ) zadovoljava uslove istog stava prema njegovom delu b) sledi da je familija $f_i^\varepsilon * k_\rho$ $n+1-\delta$-konvergentna ka $f_i * k_\rho$, kad $\varepsilon \to 0$. Kako uopšte α-konvergencija (za proizvoljno $\alpha > 0$) povlači uniformnu konvergenciju na svakom konačnom intervalu, imamo

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|f_i^\varepsilon * k_\rho - f_i * k_\rho\|_{C(a',b')} = 0$$

Tako da iz (22) sledi

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) R_\varepsilon^n \lambda_\rho(x-t)dt \right\|_{C(a';b')} = \lim_{\varepsilon\to 0} \rho^n \| f_i * p_\varepsilon * k_\rho - f_i * p_\varepsilon \|_{C(a';b')}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \rho^n \| f_i^\varepsilon * k_\rho - f_i^\varepsilon \|_{C(a';b')} = \rho^n \| f_i * k - f_i \|_{C(a';b')} \qquad (23)$$

Za integral I_2^2 imamo iz (23) (treba samo oblast integracije zameniti sa $t\notin(c,d)$)

$$|I_2^2| \le \lim_{\varepsilon\to 0} \left\| \int_{t\notin(c,d)} f_i(t) R_\varepsilon^n \lambda_\rho(x-t)dt \right\|_{C(a';b')} + \eta$$

$$\le \sup_{x\in(a',b')} \rho^n \int_{t\notin(c,d)} |f_i(t) k_\rho(x-t)|\, dt + \sup \rho^n \int_{t\notin(c,d)} |f_i(t) d\delta(x-t)| + \eta$$

$$\le \rho^n \sup_{x\in(a',b')} \sup_{t\notin(c,d)} (1+|t|^{n+1-\delta}) |k_\rho(x-t)| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f_i(t)|}{1+t^{n+1-\delta}}\, dt + 0 + \eta$$

$$\le \rho^n \sup_{|u|>\varepsilon} |k_\rho(u)| (1+|u|^{n+1-\delta}) \, \| f_i \|_{n+1-\delta} + \eta$$

$$\le \rho^{n+1} \sup_{|u|>\rho\varepsilon} (1+|u|^{n+1-\delta}) |k(\rho u)| \, \| f_i \|_{n+1-\delta} + \eta = O(1)$$

pošto jezgro (k_ρ) koje zadovoljava svojstvo (M_F^n), važi $|x|^{n+1} |k(x)| = O(1)$, kad $|x|\to\infty$.

Ostaje još da se dokaže da je I_2^1 ograničen. Neka je $h_{\rho x} = \beta\cdot\lambda_{\rho,x}$. Tada postoji $H_{\rho,x}\in L^1$ tako da je $H_{\rho,x}^\wedge(v) = |v|^n (\beta\cdot\lambda_{\rho,x})^\wedge(v)$. Na sličan način kao u Lemi 6.2.2. može se dokazati da je $|t|^{n+1} |H_{\rho,x}(t)| = O(1)$, kad $|t|\to\infty$. Sem toga, kako jezgro (p_ε) operatora R_ε^n zadovoljava uslov $|x|^{n+1}|p(x)| = O(1)$, nije teško dokazati

$$\sup_t |t|^{n+1-\delta} |R_\varepsilon^n(\beta\cdot\lambda_{\rho,x}) - H_{\rho,x}| \longrightarrow 0, \quad \varepsilon\to 0 \qquad (24)$$

tako da za I_2^1 imamo

$$|I_2^1| \le \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) R_\varepsilon^n(\beta\cdot\lambda_{\rho,x})(t)\, dt \right| \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} |f_i(t) (R_\varepsilon^n(\beta\cdot\lambda_{\rho,x})(t) - H_{\rho,x}(t))|\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} |f_i(t) H_\rho(x-t)| dt$$

$$\le \sup_t (1+|t|^{n+1-\delta}) |R_\varepsilon^n(\beta\cdot\lambda_{\rho,x})(t) - H_{\rho,x}(t)| \, \| f_i \|_{n+1-\delta} + f_i * H_\rho$$

Prvi sabirak teži nuli kad $\varepsilon\to 0$ (za svako ρ), prema (24). Ako u drugom pustimo da $\rho\to\infty$, prema navedenim osobinama H $f_i * H_\rho$ $n+1-\delta$-konvergira ka f_i. Sem toga niz f_i je $n+1-\delta$-konvegentan ka f tako da je ograničen u $n+1-\delta$ normi uniformno po i. Time je dokazano da je I_2^1 ograničen uniformno po i (za dovoljno malo ε i dovljno veliko ρ). Tako smo dokazali (17), pa je dokaz teoreme završen.

7.3. Primedbe

Aproksimaciju funkcija koje su u beskonačnosti neograničene posmatrali su SIKKEMA [16] i MAY [9]. Operatori u tim radovima nisu konvolucioni; ipak zadovoljavaju izvesne uslove, analogne našem $|x|^{n+1}|k(x)| \leq C$. Za funkciju f se takodje pretpostavlja da u beskonačnosti ima ograničen rast.

7.1. Lema 7.1.1. nije najbolja moguća, jer nije dokazano da je neophodno δ u tvrdjenju leme.

Teorema 7.1.2. je potpuno analogna Teoremi 4.1.1., samo što je u ovom slučaju potrebno primeniti Lemu 7.1.1. umesto relacije 4.1.(1). Stav 7.1.3. uvodi operator R_{ε}^{n} za sporo rastuće funkcije. To je moguće zato što jezgro operatora R^{n} zadovoljava uslove Teoreme 6.2.5., pa ga je moguće primeniti i na sporo rastuće funkcije.

Jasno je da bi se i za sporo rastuće funkcije mogle dobiti karakterizacije klase saturacije u terminima običnih izvoda, kao u 4. i 5.

Metod dokaza omogućuje da se iskazi slični navedenim u 6. i 7. dobiju i za proizvoljno $\alpha>0$, umesto za celobrojno n. Za to je potrebno uvesti klase $BV_{\alpha+1}$, $\alpha > 0$ [17].

D O D A C I

A. Konvolucije

Neka su f i g dve merljive funkcije na R. Tada se izraz

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(u)du$$

zove konvolucija. Ako je μ funkcija ograničene varijacije, konvolucija $f * d\mu$ se definiše

$$f * d\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)d\mu(u)$$

A.1. Neka $f \in X(R)$ i $\mu \in BV(R)$. Tada $f * d\mu$ postoji skoro svuda kao apsolutno konvergentan integral

$$\|f * d\mu\|_{X(R)} \leq \|f\|_{X(R)} \|\mu\|_{BV(R)} \qquad [3, \text{str.}13]$$

A.2. Specijalno kada je μ apsolutno neprekidna, odnosno postoji $g \in L^1(R)$ tako da je $d\mu(x) = g(x)dx$, iz prethodnog se dobija da postoji konvolucija $f * g$, za $f \in X(R)$, $g \in L^1(R)$ i

$$\|f * g\|_{X(R)} \leq \|f\|_{X(R)} \|g\|_{L^1(R)} \qquad [3, \text{str.}5]$$

B. Osobine Fourierove transformacije

U celom ovom odeljku su $f, g \in L^p(R)$, $1 \leq p \leq 2$, i $\mu \in BV(R)$, ako nije drukčije naznačeno.

B.1. $(f+g)\hat{}(v) = f\hat{}(v) + g\hat{}(v)$, $\quad (cf)\hat{}(v) = cf\hat{}(v)$

$$(f(\cdot+h))\hat{}(v) = e^{ih\cdot} f\hat{}(v)$$

$$(e^{-ih\cdot}f)\hat{}(v) = f\hat{}(h+v)$$

$$(hf(h\cdot))\hat{}(v) = f\hat{}(v/h) \qquad [3, \text{str.}189,212]$$

B.2. Teorema jedinstvenosti

$$f\hat{}(v) = 0 \implies f(x) = 0 \qquad [3, \text{str.}193,214]$$

B.3.

$$f \in L^1 \Rightarrow |f\hat{}(v)| \leq \|f\|_1 \quad , v \in R \qquad [3, \text{str. } 189,219]$$

$$|\check{\mu}(v)| \leq \|\mu\|_{BV} \quad , v \in R$$

B.4. Titchmarchova nejednakost

$$\|f^\wedge\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p} \quad (1/p + 1/q = 1)$$ [3,str.188]

B.5. Ako je $\mu \in BV$ apsolutno neprekidna, tj. postoji $g \in L^1$ tako da je $d\mu(x) = g(x)dx$, onda $\check{\mu}(v) = g^\wedge(v)$ [3]

B.6. Pravilo za konvoluciju

$$(f * d\mu)^\wedge(v) = f^\wedge(v)\,\check{\mu}(v)$$

specijalno kada je apsolutno neprekidna

$$(f * g)^\wedge(v) = f^\wedge(v) g^\wedge(v), \quad g \in L^1$$ [3]

B.7. Parsevalova jednakost

$f \in L^p$, $1 \leq p \leq 2$, $g, \hat{g} \in L^1$ tada $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(u)\hat{g}(u)du$

$\mu \in BV$, $g \in L^1$ tada $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(u)d\mu(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{\mu}(u)g(u)du$

[3,str. 214,221]

B.8. Fourierova transformacija Hilbertove transformacije

$$(\tilde{f})^\wedge(v) = -i \operatorname{sgn} v \, f^\wedge(v)$$ [3]

B.9. $$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\tilde{g}(x)dx$$ [3]

C. Temperirane distribucije

C.1. $\mathcal{S}$ je skup svih beskonačno diferencijabilnih funkcija φ definisanih na R, takvih da

$$\sup_x |x|^n |\varphi^{(j)}(x)| < \infty \qquad n, j \in N$$

Funkcije φ nazivaju se brzo opadajuće. Na prostoru $\mathcal{S}$ se definiše topologija: niz $\varphi_i \in \mathcal{S}$ teži nuli u $\mathcal{S}$, ako za svako $n, j \in N$

$$\sup_x |x|^n |\varphi_i^{(j)}(x)| \longrightarrow 0, \quad i \to \infty$$

C.2. $\mathcal{S}'$ je prostor svih neprekidnih linearnih funkcionela na $\mathcal{S}$. Elementi prostora $\mathcal{S}'$ nazivaju se temperirane (sporo rastuće) distribucije. Vrednost funkcionele $f \in \mathcal{S}'$ za $\varphi \in \mathcal{S}$ obeležava se sa $\langle f, \varphi \rangle$.

C.3. Fourierova transformacija predstavlja neprekidno linearno uzajamno jednoznačno preslikavanje prostora $\mathcal{S}$ na $\mathcal{S}$. Inverzno preslikavanje je takodje neprekidno.

Za $f \in \mathcal{S}'$ Fourierova transformacija se definiše Parsevalovom formulom

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

Tako definisana Fourierova transformacija je neprekidno, linearno 1-- 1 preslikavanje prostora $\mathcal{S}'$ na $\mathcal{S}'$. Inverzno preslikavanje je takodje neprekidno.

C.4. O_M je skup svih beskonačno diferencijabilnih funkcija φ za koje važi $|\varphi(x)| \leq K(1+|x|^n)$, za neko $n \in N$ (sporo rastuće funkcije).

O_C' je skup svih distribucija $T \in \mathcal{S}'$, takvih da je za svako $k \in N$, $(1 + x^2)^{k/2}T$ ograničena distribucija.

C.5. Ako je $\psi \in O_M$ i $f \in \mathcal{S}'$ tada postoji proizvod $\psi \cdot f$ (proizvod se definiše $\langle \psi f, \varphi \rangle = \langle f, \psi \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$).

Ako je $g \in O_C'$ i $f \in \mathcal{S}'$ tada postoji konvolucija $g * f \in \mathcal{S}'$. Ovako definisane operacije konvolucije i proizvoda neprekidne su po svakom članu. Sem toga

$$(g * f)^\wedge = \hat{g} \cdot \hat{f} \quad \text{i} \quad (\psi f)^\wedge = \hat{\psi} * \hat{f}$$

C.6. Ako je za distribuciju $f \in \mathcal{S}'$, $\operatorname{supp} f^\wedge \subset \{0\}$, tada je f polinom.

C.7. Za temperiranu distribuciju $f \in \mathcal{S}'$ definiše se Hilbertova transformacija $\tilde{f} = \text{v.p.} \frac{1}{x} * f$. Za Fourierovu transformaciju ove distribucije važi

$$\tilde{f}^\wedge = -i \operatorname{sgn} f^\wedge$$

Sve definicije i tvrdjenja navedena u C. mogu se naći u [12] ili [11].

D.

D.1. Svi prostori $L^p(R)$, $1 \leq p < \infty$, $C(R)$, $BV(R)$ su potprostori prostora $\mathcal{S}'$. [11]

D.2. Prostor $\mathcal{D}$ je svuda gust u prostorima $X(R)$. Kako je $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, onda je i $\mathcal{S}$ svuda gust u $X(R)$. [11]

D.3. Ako za $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, ili $BV(R)$ važi $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = 0$, za svako $\varphi \in \mathcal{D}$, tada je $f(x) = 0$, s.s.

D.4. (Teorema o $*$-slaboj kompaktnosti)
Neka je X Banachov prostor. Neka za niz $(f_n^*) \in X^*$ važi $\|f_n^*\|_{X^*} \leq M$, uniformno po n. Tada (f_n^*) sadrži $*$-slabo konvergentan podniz, tj. postoji (n_j), $n_j \to$, $j \to \infty$ i postoji $f^* \in X^*$ tako da

$$\lim_{j\to\infty} f_{n_j}^*(f) = f^*(f) \quad , \quad \forall f \in X$$

Sem toga
$$\|f^*\|_{X^*} \leq \liminf_{j\to\infty} \|f_{n_j}^*\|_{X^*}$$
[3,str.21]

D.5. Neka $f, f_n \in L^p(R)$, $1 < p < \infty$. Ako postoji M, tako da $\|f_n\|_{L^p} \leq M$, uniformno po n, i ako je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, s.s. tada za svaki $g \in L^q(R)$ važi

$$\lim_{n} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$$
[3,str.24]

	$k(x)$	$k^{\wedge}(v)$	$\psi(v)$	(S_F)	(M_F)
Fejér	$\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin^2 x}{x^2}$	$1-\lvert v\rvert,\ \lvert v\rvert\leq 1$ $0\ ,\ \lvert v\rvert>1$	$\lvert v\rvert$	$\lim\limits_{v\to 0}\frac{1-\lvert v\rvert-1}{\lvert v\rvert}=-1$	$\hat{\lambda}(v)=\begin{cases}-1, & \lvert v\rvert\leq 1\\ -\frac{1}{\lvert v\rvert}, & \lvert v\rvert>1\end{cases}$
Cauchy Poisson	$\frac{1}{\pi}\ \frac{1}{1+x^2}$	$e^{-\lvert v\rvert}$	$\lvert v\rvert$	$\lim\limits_{v\to 0}\frac{e^{-\lvert v\rvert}-1}{\lvert v\rvert}=-1$	$\hat{\lambda}(v)=\frac{e^{-\lvert v\rvert}-1}{\lvert v\rvert}$
Weier-strass	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\ e^{-\frac{x^2}{4}}$	e^{-v^2}	v^2	$\lim\limits_{v\to 0}\frac{e^{-v^2}-1}{v^2}=-1$	$\hat{\lambda}(v)=\frac{e^{-v^2}-1}{v^2}$
Picard	$\frac{1}{2}\ e^{-\lvert x\rvert}$	$\frac{1}{1+v^2}$	v^2	$\lim\limits_{v\to 0}\frac{\frac{1}{1+v^2}-1}{v^2}=-1$	$\hat{\lambda}(v)=\frac{1}{1+v^2}$
Bochner Riesz	$2^{\alpha}\,\Gamma(1+\alpha)\frac{J_{1/2+\alpha}(x)}{\lvert x\rvert^{1/2+\alpha}}$ $\alpha>0$	$(1-v^2)^{\alpha},\ \lvert v\rvert\leq 1$ $0\ ,\ \lvert v\rvert>1$	v^2	$\lim\limits_{v\to 0}\frac{(1-v^2)^{\alpha}-1}{v^2}=-\alpha$	$\hat{\lambda}(v)=\begin{cases}\frac{(1-v^2)^{\alpha}-1}{-\alpha v^2}\\ \frac{-1}{\alpha v^2}\end{cases}$
Weier-strass (opšte)	$W_{\alpha}(x),\ \alpha>0$	$e^{-\lvert v\rvert^{\alpha}}$	$\lvert v\rvert^{\alpha}$	$\lim\limits_{v\to 0}\frac{e^{-\lvert v\rvert^{\alpha}}-1}{\lvert v\rvert^{\alpha}}=-1$	$\hat{\lambda}(v)=\frac{e^{-\lvert v\rvert^{\alpha}}-1}{\lvert v\rvert^{\alpha}}$
Picard (opšte)	$c_{\alpha}(x),\quad o$	$\frac{1}{1+\lvert v\rvert^{\alpha}}$	$\lvert v\rvert^{\alpha}$	$\lim\limits_{v\to 0}\frac{\frac{1}{1+\lvert v\rvert^{\alpha}}-1}{\lvert v\rvert^{\alpha}}=-1$	$\hat{\lambda}(v)=\frac{1}{1+\lvert v\rvert^{\alpha}}$
tipične sredine	$r_{\beta}(x),\quad o$	$(1-\lvert v\rvert^{\beta}),\ \lvert v\rvert\leq 1$ $0\ ,\ \lvert v\rvert>1$	$\lvert v\rvert^{\beta}$	$\lim\limits_{v\to 0}\frac{(1-\lvert v\rvert^{\beta})-1}{\lvert v\rvert^{\beta}}=1$	$\hat{\lambda}(v)=\begin{cases}\frac{(1-\lvert v\rvert^{\beta})-1}{\lvert v\rvert^{\beta}}\\ \frac{-1}{\lvert v\rvert^{\beta}}\end{cases}$
Riesz	$r_{\alpha\beta}(x),\ \alpha,\beta>0$	$(1-\lvert v\rvert^{\beta})^{\alpha},\ \lvert v\rvert\leq 1$ $0\ ,\ \lvert v\rvert>1$	$\lvert v\rvert^{\beta}$	$\lim\limits_{v\to 0}\frac{(1-\lvert v\rvert^{\beta})^{\alpha}-1}{\lvert v\rvert^{\beta}}=1$	$\hat{\lambda}(v)=\begin{cases}\frac{(1-\lvert v\rvert^{\beta})^{\alpha}-1}{\lvert v\rvert^{\beta}}\\ \frac{-1}{\lvert v\rvert^{\beta}}\end{cases}$
	$h(x)$	$1\ ,\ \lvert v\rvert\leq 1$ $1-(1-v^{-2}),\ \lvert v\rvert>1$		$\lim\limits_{v\to 0}\frac{\hat{h}(v)-1}{\lvert v\rvert^{\alpha}}=0$ $\forall\alpha>0$	ne važi

$\lambda(x)$	BV_{n+1}		momenti	globalna saturacija	lokalna saturacija
$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u}{u^2}\,du$	$\hat{\lambda} \in BV_2$	$\lvert x^2 k(x)\rvert = O(1)$		1.2.3.	4.2.4. 4.3.2.
$\frac{1}{2\pi}\log\frac{1+x^2}{x^2}$	$\hat{\lambda} \in BV_2$	$\lvert x^2 k(x)\rvert = O(1)$		2.3.2. 2.5.6.	5.1.1. 5.2.3. 5.3.2.
$e^{-\frac{x^2}{4}} - x\int_{x/2}^\infty e^{-u^2}\,du$	$\hat{\lambda} \in BV_{j+1}, \forall j$	$\lvert x^j k(x)\rvert = O(1)$ $\forall j$	$M_1 = 0$ $M_2 \neq 0$	1.2.3.	4.2.4. 4.3.1.
$e^{-\lvert x\rvert}$	$\hat{\lambda} \in BV_{j+1}, \forall j$	$\lvert x^j k(x)\rvert = O(1)$ $\forall j$	$M_1 = 0$ $M_2 \neq 0$	2.3.2.	5.1.1. 5.2.3. 5.3.1.
	$\alpha \geq 2$ $\hat{\lambda} \in BV_{[\alpha]+1}$	$\lvert x^{\alpha+1} k(x)\rvert = O(1)$	$M_1 = 0$ $M_2 \neq 0$	2.5.6.	4.2.4. samo za $\alpha \geq 2$ važi 5.1.1. 5.2.3.
$\int_0^1 u^{-1/\alpha} w_\alpha\left(\frac{x}{u^{1/\alpha}}\right) du$	$\hat{\lambda} \in BV_{j+1}, \forall j$	$\lvert x^j k(x)\rvert = O(1)$ $\forall j$	$\alpha = 2n$ $M_j = 0$ $j = 1,\dots,2n-1$ $M_{2n} \neq 0$		4.2.4. 5.1.1.
$c_\alpha(x)$	$\hat{\lambda} \in BV_{j+1}, \forall j$	$\lvert x^j k(x)\rvert = O(1)$ $\forall j$	$\alpha = 2n$ $M_j = 0$ $j = 1,\dots,2n-1$ $M_{2n} \neq 0$	1.2.3.	5.2.3.
	$\hat{\lambda} \in BV_2$	$\lvert x^2 k(x)\rvert = O(1)$		2.4.3. 2.4.8.	4.2.4. samo za $\beta \leq 1$ važi 5.1.1. 5.2.3.
	$\hat{\lambda} \in BV_{j+1}$ $j \leq \alpha$	$\lvert x^{\alpha+1} k(x)\rvert = O(1)$			4.2.4. samo za $\beta \leq \alpha$ važi 5.1.1. 5.2.3.

L i t e r a t u r a

1 S.BOCHNER, Lectures on Fourier Integrals, Princeton 1959.

2 J.BOMAN, Saturation Problems and Distribution Theory, in Lecture Notes in Mathematics 187, Springer, Berlin 1971.

3 P.L.BUTZER, R.J.NESSEL, Fourier Analysis and Approximation, Birkhauser Verlag, Basel 1971.

4 P.L.BUTZER, H.BERENS, R.J.NESSEL, Saturation for Singular Integrals in Several Variables I-V, Indag. Math. 28-31 (1966-1969).

5 R.DEVORE, The Approximation of Continuous Dunctions by Positive Linear Operators, Lecture Notes in Mathematics 293, Springer, Berlin 1972.

6 E.GORLICH, Saturation Theory and Distributional Methods, in "Abstract Spaces and Approximation", ISNM 10, Birkhauser Verlag, Basel, 1969.

7 J.KUČERA, Fourier L_2- Transform of Distributions, Czech. Math. J. 19(94)(1969), 143-153.

8 G.G.LORENTZ, Approximation of Functions, New York 1966.

9 C.P.MAY, Saturation and Inverse Theorems for Combination of a Class of Exponential-type Operators, Can.J.Math. 26, No.6(1976), 1224-1250.

10 R.G.MAMEDOV, Prjamye i obratnye teoremy teorii približenija funkcii m-singuljarnymi integralami, Doklady Akad. nauk SSSR, 114, No.2(1962), 272-274.

11 U.RUDIN, Funkcional'nyi analiz, Moskva 1975.

12 L.SCHWARTZ, Théorie des distributions, I,II, Paris 1950.

13 H.S.SHAPIRO, Smoothing and Approximation of Functions, New York 1969.

14 G.SUNOUCHI, Local Saturation of Trigonometric Operators, in "Linear Operators and Approximation II", ISNM 25, Birkhauser Verlag, Basel 1974.

15 G.SUNOUCHI, Direct Theorems in the Theory of Approximation, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 20(1969), 409-420.

16 P.C.SIKKEMA, On Some Linear Positive Operators, Indag. Math. 32(1970),

17 W.TREBELS, Multipliers for (C,α)-Bounded Fourier Expansions in Banach Spaces and Approximation Theory, Lecture Notes in Mathematics 329, Springer, Berlin 1973.