UNIVERZITET U BEOGRADU
Matematički fakultet
Grupa za matematiku

Branko J. Malešević

GRUPNA FUNKCIONALNA JEDNAČINA

– Magistarska teza –

Odbrana: 20.03.98

Komisija: 1. S. Prešić (mentor)
2. Ž. Mijajlović (predsednik Komisije)
3. A. Krapež
4. M. Merkle

Pitanja
1. Transfer sa mat. jedn. na funkc. jedn.
2. Analitičke osobine

BEOGRAD 1998.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

PREDGOVOR

Predmet ovog magistarskog rada je tzv. grupna funkcionalna jednačina. Za neprazan skup S neka bijekcije $\theta_1, \ldots, \theta_n : S \longrightarrow S$ u odnosu na kompoziciju $(\circ)$ obrazuju grupu $\mathbb{G} = (G, \circ)$. Za zadano polje $\mathbb{K}$ sa $\mathcal{F} = \{f : S \longrightarrow K\}$ označimo skup svih funkcija koje preslikavaju skup S u polje $\mathbb{K}$. Pod *grupnom funkcionalnom jednačinom* podrazumevamo funkcionalnu jednačinu:

$$a_1(x) \cdot f(\theta_1(x)) + a_2(x) \cdot f(\theta_2(x)) + \ldots + a_n(x) \cdot f(\theta_n(x)) = h(x),$$

po nepoznatoj funkciji $f \in \mathcal{F}$ za zadane funkcije $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{F}$ i $h \in \mathcal{F}$. Grupnu funkcionalnu jednačinu određujemo kao *nehomogenu* ako je $h(x) \not\equiv 0$, odnosno kao *homogenu* ako je $h(x) \equiv 0$. Ako su zadane funkcije $a_1, \ldots, a_n$ konstantne onda je reč o grupnoj funkcionalnoj jednačini sa *konstantnim koeficijentima*. Opštu grupnu funkcionalnu jednačinu uveo je i rešio S. Prešić [SP2], [SP6]. Pri tom se kao osnovni matematički aparat za određivanje opšteg rešenja javljaju uopšteni inverzi matrica.

U skladu sa tom činjenicom magistarski rad je podeljen u dve celine. Prva celina jesu uopšteni inverzi matrica, druga celina jeste razmatranje grupne funkcionalne jednačine.

UOPŠTENI INVERZI MATRICA. Istorijski posmatrano prvi je E. Moore 1920. godine definisao i proučio uopštene inverze matrica. Do ponovnog uvodjenja i proučavanja uopštenih inverza nezavisno su došli A. Bjerhammar 1951. godine i R. Penrose 1955. godine. S. Prešić, u cilju određivanja opšteg rešenja homogene grupne funkcionalne jednačine, nezavisno od navedenih autora 1963. godine uveo je i koristio u današnjim oznakama uopšteni $\{1\}$-inverz matrice. Oblast uopštenih inverza matrica uspešno se prenela sa matrica na razna područija matematike i danas se intezivno proučava. Prema podacima sa AMS diskova u periodu od 1940. godine do 1995. godine za pojam generalisanih-uopštenih inverza matrica[0] vezano je 2368 referenci.

U prvoj celini, ovog rada, u okviru pet delova, uvodi se teorija uopštenih inverza matrica koja se upotrebljava za razmatranje opšteg rešenja grupne funkcionalne jednačine.

Prvi deo je uvodnog karaktera i u njemu se razmatra rešen oblik jednačine i pojam reproduktivnost. Takođe, navode se osnovne osobine u vezi sa inverznom matricom i Kroneckerovim–tenzorskim proizvodom matrica.

[0] [(GENERALIZ(S)ED INVERSE<S>) or (PSEUDOINVERSE<S>)] and [MATRIX or MATRICES]

KLEINove grupne funkcionalne jednačine sa *Teoremom* 3.2.1. Takođe, kao doprinos dat je *paragraf* 3.3. sa naslovom *Računarsko rešenje partikularnih slučajeva uz pomoću programa* DERIVE.

Četvrti deo odnosi se na nehomogenu grupnu funkcionalnu jednačinu i PREŠIĆevu matričnu metodu rešavanja.

Peti deo odnosi se na uopštenje grupne funkcionalne jednačine na semigrupnu funkcionalnu jednačinu. Kao *doprinos* dato je *proširenje* Λ*-matričnog metoda* na homogenu semigrupnu funkcionalnu jednačinu, sa konstantnim koeficijentima. Navedeni doprinos dat je sa *Teoremom* 5.1.1. Takođe, razmatraju se partikularni primeri homogenih semigrupnih funkcionalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima. Kao doprinos jedinstvenim postupkom data su rešenja funkcionalnih jednačina koje su razmatrali S. PREŠIĆ, J. KEČKIĆ, D. MITRINOVIĆ, P. VASIĆ i M. KUCZMA.

Zahvaljujem se profesoru dr Slaviši Prešiću na upućivanju u problematiku grupne funkcionalne jednačine i na nesebičnom pomaganju pri proučavanju navedene tematike. Takođe zahvaljujem se profesorima dr Žarku Mijajloviću, dr Aleksandru Krapežu i dr Milanu Merkleu na stručnim savetima i korisnim sugestijama pri izradi ovog rada. Na kraju želim da se zahvalim mojoj porodici na razumevanju i bezrezervnoj podršci.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

SADRŽAJ

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

I. UOPŠTENI INVERZI MATRICA

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

1. Uvod

1.1. Rešen oblik jednačine. Reproduktivnost

U uvodu dajemo neke osnovne pojmove u vezi sa rešenim oblikom jednačine i pojmom reproduktivnosti. *Jednakosna formula-jednakost* jeste formula u kojoj su dva izraza t_1 i t_2 vezana relacijskim znakom jednakosti ($=$). *Jednačina* je jednakosna formula $J(x)$ koja sadrži i promenljive koje su naznačene kao nepoznate sa vrednostima u nekom nepraznom skupu S. *Rešenje jednačine* $J(x)$, po x, je takav elemenat $x_0 \in S$ za koji je $\mathcal{T}(J(x_0)) = \top$ (gde smo sa $\mathcal{T}$ označili istinitosnu vrednost). Tako ako se radi o matričnoj jednačini rešenje je matrica (određenog formata), ako se radi o funkcionalnoj jednačini rešenje je funkcija (odgovarajućeg domena i kodomena).

Ukoliko važi: $(\exists x \in S)\ J(x)$, kažemo da je jednačina $J(x)$ *neprotivurečna-moguća po* x. Označimo sa $R = R(J)$ skup svih elemenata $x \in S$ koji zadovoljavaju jednačinu $\mathcal{T}(J(x)) = \top$, tada se $R \subseteq S$ naziva *skup rešenja date jednačine.* U narednom razmatramo samo moguće jednačine $J(x)$, tj. takve jednačine $J(x)$ da je ispunjeno $R(J) \neq \emptyset$. Za funkciju Φ, domena S koja uzima vrednosti u S, formula $x = \Phi(\lambda)$ $(\lambda \in S)$, određuje *generalno-opšte rešenje* jednačine $J(x)$ ako i samo ako važe sledeće dve implikacije:

$$(1) \qquad (\forall x \in S)(\forall \lambda \in S)\big(x = \Phi(\lambda) \Longrightarrow J(x)\big),$$

$$(2) \qquad (\forall x \in S)\big(J(x) \Longrightarrow (\exists \lambda \in S)\, x = \Phi(\lambda)\big).$$

Implikacija (1) označava da formula $x = \Phi(\lambda)$, za svako $\lambda \in S$, daje rešenja jednačine $J(x)$. Odatle funkcija Φ za kodomen ima skup rešenja $R = R(J) \subseteq S$. U daljem razmatranju smatramo da je funkcija Φ sa domenom S i kodomenom R. Implikacija (2) označava da je svako rešenje jednačine $J(x)$ oblika $x = \Phi(\lambda)$, za neko $\lambda \in S$. Odatle funkcija Φ jeste surjektivna–„na" funkcija. Posebnim izborom $\lambda_0 \in S$, sa $x_0 = \Phi(\lambda_0)$ dobijamo *partikularno-posebno rešenje jednačine* $J(x)$. Nije teško pokazati da se konjukcija formula (1) i (2), koja određuje formulu opšteg rešenja, može zameniti sa jednom formulom:

$$(3) \qquad (\forall x \in S)\big(J(x) \Longleftrightarrow (\exists \lambda \in S)\, x = \Phi(\lambda)\big).$$

Odatle *rešeni oblik jednačine* $J(x)$ jeste jednačina $J'(x)$ data formulom $(\exists \lambda \in S)\, x = \Phi(\lambda)$ [SP-MP]. Primetimo da važi $(\forall x \in S)$ $(J(x) \Longleftrightarrow J'(x))$ i pri tom rešenja jednačine $J(x)$ mogu se direktno pročitati *funkcijom rešenja* $x = \Phi(\lambda) : S \longrightarrow R$.

$$\begin{aligned} & x = \varphi(\lambda) \\ \Longrightarrow\ & \varphi(x) = \varphi \circ \varphi(\lambda) \\ \Longrightarrow\ & \varphi(x) = \varphi(\lambda) = x. \end{aligned}$$

Sa druge strane proverimo da svako rešenje x jednačine (5) jeste oblika $x = \varphi(\lambda)$, za neko $\lambda \in S$. Zaista, za $\lambda \in S$ dovoljno je izabrati x. Sveukupno, dokazano je da opšte rešenje jednačine (5) jeste dato formulom (6). ■

Napomena 1. *Primetimo da za jednačinu (5), reproduktivne formule (6) zadržavaju-reprodukuju rešenja:* $\varphi(\lambda)|_{\lambda=x} = \varphi(x) = x$.

Napomena 2. *Ako je neka formula rešenja jednačine $J(x)$ reproduktivna formula, tada ona predstavlja opšte rešenje posmatrane funkcionalne jednačine.*

Primer 1.3. *Naći opšte reproduktivno rešenje sledeće funkcionalne jednačine:*

$$f(x) = f(-x),$$

u skupu funkcija $\mathcal{F} = \{f : R \longrightarrow R\}$.

Rešenje. Za funkciju $\varphi(\Pi) = \frac{1}{2} \cdot \Pi(x) + \frac{1}{2} \cdot \Pi(-x)$ važi ekvivalencija:

$$(*) \qquad f(x) = f(-x) \iff f(x) = \varphi(f(x)) = \frac{1}{2} \cdot f(x) + \frac{1}{2} \cdot f(-x).$$

Proverimo da φ ispunjava uslov reproduktivnosti

$$\begin{aligned} \varphi \circ \varphi(\Pi(x)) &= \varphi\left(\frac{\Pi(x) + \Pi(-x)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Pi(x) + \Pi(-x)}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Pi(-x) + \Pi(x)}{2} \\ &= \frac{\Pi(x) + \Pi(-x)}{2} = \varphi(\Pi(x)). \end{aligned}$$

Na osnovu ekvivalencije $(*)$, primenom teoreme 1.2., zaključujemo da je opšte reproduktivno rešenje dato sa

$$f(x) = \varphi(\Pi)(x) = \frac{1}{2} \cdot \Pi(x) + \frac{1}{2} \cdot \Pi(-x),$$

gde je $\Pi \in \mathcal{F}$ proizvoljna funkcija. Navodimo još dva reproduktivna oblika funkcije φ, prema [SP-BA], koje daju opšta reproduktivna rešenja u drugoj formi

$$f(x) = \varphi(\Pi)(x) = \min\{\Pi(x), \Pi(-x)\} \quad \text{i} \quad f(x) = \varphi(\Pi)(x) = \max\{\Pi(x), \Pi(-x)\}.$$

Ako je jednačina $J(x)$ zadana kao reproduktivna jednačina $x = \varphi(x)$, tada se opšte rešenje nalazi jednostavno primenom teoreme 1.2. Sledeće tvrđenje se odnosi na egzistenciju reproduktivne jednačine.

Teorema 1.4. (Prešić) [SP4]. *Za svaku moguću jednačinu $J(x)$ oblika $x = g(x)$, gde je $g : S \longrightarrow S$ zadana funkcija, postoji bar jedna ekvivalentna reproduktivna jednačina $x = \varphi(x)$, gde je $\varphi : S \longrightarrow S$ neka reproduktivna funkcija.*

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Na kraju razmatranja reproduktivnosti navodimo primer određivanja reproduktivnih rešenja CAUCHYjeve funkcionalne jednačine.

Primer 1.5. *Odrediti reproduktivno rešenje* CAUCHY*jeve funkcionalne jednačine:*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in R, \tag{13}$$

gde je $f : R \longrightarrow R$ neprekidna funkcija.

Rešenje. Poznato je, npr. [JA], [MK2], da formula svih neprekidnih rešenja CAUCHYjeve funkcionalne jednačine data sa:

$$f(x) = ax \qquad x \in R, \tag{14}$$

gde je a ma koji realan broj. Proverom uslova reproduktivnosti $f^2 = f$ opšte neprekidno rešenje dato sa formulom (14) jeste reproduktivno ako i samo ako $a = f(1)$ uzima vrednost bilo 0, bilo 1. Sa druge strane, formulu svih neprekidnih reproduktivnih rešenja, prema [SP-AK], možemo dati i sa formulom:

$$f(x) = \Pi(1)\, x \qquad x \in R, \tag{15}$$

gde je $\Pi : R \longrightarrow R$, ma koja neprekidna funkcija takva da $a = \Pi(1) = f(1)$ uzima vrednost 0 ili 1. Primetimo da formula (15) zadržava-reprodukuje rešenja: $(\Pi(1)\, x)|_{\Pi = f} = f(1)\, x = f(x)$.

1.2. Inverzna matrica. Kronecker-ov proizvod

U celom radu razmatraćemo matrice nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Označimo sa $\mathbb{C}^{m\times n}$ skup matrica formata $m \times n$ nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ i sa $\mathbb{C}_r^{m\times n}$ skup matrica formata $m \times n$ nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ ranga r. Kvadratna matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ formata $n \times n$ nad poljem kompleksnih brojeva jeste *regularna matrica* ako i samo ako postoji matrica $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takva da $AX = XA = I$, gde je $I \in \mathbb{C}^{n\times n}$ jedinična matrica formata $n \times n$. U tom slučaju matrica X se zove *inverzna matrica* matrice A i označava sa A^{-1}. Nije teško proveriti da ako postoji inverzna matrica za datu matricu ona je jedinstveno određena.

Navodimo bez dokaza neke poznate osobine i metode izračunavanja inverzne matrice. Pretpostavljamo da su odgovarajuće matrice koje se u narednom javljaju kvadratne i dodatno matrice čiji se inverzi u narednom javljaju jesu regularne. Važi:

(*i*) $(A^{-1})^{-1} = A$;

(*ii*) $A^{-1} = \frac{Adj\,(A)}{Det\,(A)}$;

(*iii*) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

(*iv*) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$, *gde je A^* konjugovano-transponovana matrica;*

(*v*) $A^{-1} = E_r E_{r-1} \cdots E_2 E_1$, *gde su E_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ matrice elementarnih transformacija na vrstama matrice A, tako da $Q\,A = (E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1)\,A = I$;*

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

2. Osnovne osobine uopštenih inverza matrica

2.1. Moore – Penrose-ov inverz

Definicija 2.1.1. Za matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, matrica $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ jeste MOORE-PENROSE*ov inverz* matrice A, ako ispunjava sistem od sledeće četiri PENROSEove jednačine:

$$(1) \qquad AXA = A,$$

$$(2) \qquad XAX = X,$$

$$(3) \qquad (AX)^* = AX,$$

$$(4) \qquad (XA)^* = XA.$$

MOORE–PENROSEov inverz matrice A označavamo sa $A^\dagger$ [RP1].

Za brojeve $i,\ldots,k \in \{1,2,3,4\}$ ma koje rešenje PENROSEovih jednačina $(i),\ldots,$ (k) označavamo sa $A^{(i,\ldots,k)}$. Skup svih rešenja označavamo sa $A\{i,\ldots,k\}$. Napomenimo da u slučaju regularne kvadratne matrice A, MOORE – PENROSEov inverz $A^\dagger$ podudara se sa inverzom A^{-1} posmatrane matrice.

Pokazaćemo da sistem PENROSEovih jednačina (1) – (4) ima najviše jedno rešenje. U narednim paragrafima ovog dela pokazaćemo da postoji bar jedno rešenje posmatranog sistema. Važi sledeće tvrđenje.

Teorema 2.1.2. (PENROSE). *Ako sistem* PENROSE*ovih jednačina* (1) – (4) *ima rešenje, ono je jedinstveno.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoje dve matrice X i Y kao rešenje sistema PENROSEovih jednačina (1) – (4). Tada važi:

$$\begin{array}{rcll} X &=& X(AX) & (2)\\ &=& X(AX)^* & (3)\\ &=& XX^*A^* & (*)\\ &=& XX^*(AYA)^* & (1)\\ &=& XX^*A^*Y^*A^* & (*)\\ &=& X(AX)^*(AY)^* & (*)\\ &=& X(AX)(AY) & (3)\\ &=& XAY & (1) \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} Y &=& (YA)Y & (2)\\ &=& (YA)^*Y & (4)\\ &=& A^*Y^*Y & (*)\\ &=& (AXA)^*Y^*Y & (1)\\ &=& A^*X^*A^*Y^*Y & (*)\\ &=& (XA)^*(YA)^*Y & (*)\\ &=& (XA)(YA)Y & (4)\\ &=& XAY & (1) \end{array}$$

Odatle $X = Y$, tj. rešenje PENROSEovog sistema (1) – (4) jeste jedinstveno. ■

Napomena. *U slučaju nula matrice* $A = 0 \in \mathbb{C}_0^{m\times n}$ *(nultog ranga), na osnovu matrične jednačine* (2), *svako rešenje je nula matrica* $A^\dagger = 0 \in \mathbb{C}_0^{n\times m}$.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

2.3. Mac – Duffee-eva formula za $A^\dagger$

Polazeći od faktorizacije punog ranga matrice MAC-DUFFEE je dao eksplicitnu formulu za MOORE-PENROSEov inverz $A^\dagger$ matrice A. Važi sledeće tvrđenje.

Teorema 2.3.1. *Neka je data matrica $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ ranga $0 < r \le \min\{m,n\}$ sa faktorizacijom punog ranga $A = C \cdot D$, gde su $C \in \mathbb{C}_r^{m\times r}$ i $D \in \mathbb{C}_r^{r\times n}$. Jedinstveno rešenje* PENROSE*ovog sistema* (1) – (4) *dato je formulom:*

$$A^\dagger = D^*(C^*AD^*)^{-1}C^*. \tag{6}$$

Dokaz. Dokažimo da je kvadratna matrica $C^*AD^* = C^*C \cdot DD^*$ regularna. Za to je dovoljno dokazati da su kvadratne matrice C^*C i DD^*, reda r, regularne. Poznato je da za proizvoljnu matricu $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ važi $rank(B) = rank(B^*) = rank(B^*B) = rank(BB^*)$ [XИ]. Samim tim $C^*C \in \mathbb{C}_r^{r\times r}$ i $DD^* \in \mathbb{C}_r^{r\times r}$. Odatle, zaključujemo da postoji inverz $(C^*AD^*)^{-1} = (C^*C \cdot DD^*)^{-1} = (DD^*)^{-1} \cdot (C^*C)^{-1}$. Dalje, dokažimo da matrica $X = D^*(C^*AD^*)^{-1}C^* = D^*(DD^*)^{-1} \cdot (C^*C)^{-1}C^*$ ispunjava PENROSEove jednačine (1) – (4). Proveravamo redom
(*i*) $AXA = CD \cdot D^*(DD^*)^{-1}(C^*C)^{-1}C^* \cdot CD = CD = A$.
(*ii*) $XAX = X$ - analogno.
(*iii*) $(AX)^* = (CD \cdot D^*(DD^*)^{-1}(C^*C)^{-1}C^*)^* = (C(C^*C)^{-1}C^*)^* = C(C^*C)^{-1}C^* = AX$.
(*iv*) $(XA)^* = XA$ - analogno.
Sveukupno matrica X jeste rešenje PENROSEovog sistema (1) – (4). Na osnovu teoreme 2.1.1. rešenje je jedinstveno. Odatle zaključujemo $X = A^\dagger$. ■

Posledica. *Ma koji podsistem* PENROSE*ovog sistema* (1)–(4) *jeste moguć sistem jednačina čije je jedno rešenje* MOORE-PERNOSE*ov inverz.*

U slučaju nula matrica $A = 0$ ($r = 0$), prema napomeni uz teoremu 2.1.2., važi $A^\dagger = 0$. Navodimo bez dokaza neke osnovne osobine MOORE-PENROSEovog inverza.

Teorema 2.3.2. *Za svaku matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ važi:*

$$(A^\dagger)^\dagger = A, \quad (A^*)^\dagger = (A^\dagger)^*, \tag{a}$$

$$A^\dagger = (A^*A)^\dagger A^* = A^*(AA^*)^\dagger. \tag{b}$$

Napomena. *Formula navedena u teoremi* 2.3.2 *pod* (*b*) *omogućava da se* MOORE-PENROSE*ov inverz nekvadratnih matrica računa pomoću* MOORE-PENROSE*ovog inverza kvadratnih matrica manjeg formata* [TS], [BV].

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Teorema 2.4.2. (OPŠTI {2}-INVERZ) *Neka su za matricu* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *određene regularne matrice* $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ *i* $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *takve da važi* (8). *Matrica* $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *oblika* (9) *ispunjava matričnu jednačinu* (2) *ako i samo ako matrice* $X_0 \in \mathbb{C}^{r\times r}$, $X_1 \in \mathbb{C}^{r\times(m-r)}$, $X_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$ *i* $X_3 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$ *ispunjavaju matrične jednačine:*

$$(11) \qquad X_0^2 = X_0 \ \wedge \ X_0X_1 = X_1 \ \wedge \ X_2X_0 = X_2 \ \wedge \ X_3 = X_2X_1.$$

Dokaz. Rešenje matrične jednačine (2) tražimo u obliku (9) gde su $X_0 \in \mathbb{C}^{r\times r}$, $X_1 \in \mathbb{C}^{r\times(m-r)}$, $X_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$ i $X_3 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$ odgovarjuće podmatrice matrice X. Zamenom matrice X u matričnu jednačinu (2), matrica X jeste rešenje matrične jednačine $XAX = X$ ako važi

$$P\left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] Q \cdot Q^{-1} \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] P^{-1} \cdot P \left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] Q = P \left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] Q,$$

odnosno ako važe matrične jednačine (11). Obratno, svaka matrica oblika (9), za koju podmatrice X_0, X_1, X_2, X_3 ispunjavaju matrične jednačine (11) jeste rešenje matrične jednačine (2). Odatle dobijamo tvrđenje teoreme. ■

Posledica. (OPŠTI {1,2}-INVERZ) *Za matricu* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *neka su određene regularne matrice* $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ *i* $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *takve da važi* (8). *Matrica* $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *oblika* (9) *ispunjava matrične jednačine* (1) *i* (2) *ako i samo ako važi:*

$$(12) \qquad X = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_2 \cdot X_1 \end{array}\right] \cdot Q,$$

gde su $X_1 \in \mathbb{C}^{r\times(m-r)}$ *i* $X_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$ *proizvoljne podmatrice.*

Neka su za matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$ elementarnim transormacijama iz (7). Formirajmo blok matrice:

$$(13) \quad Q \cdot Q^* = \left[\begin{array}{c|c} S_1 & S_2 \\ \hline S_3 & S_4 \end{array}\right] \ (S_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}) \quad \text{i} \quad P^* \cdot P = \left[\begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \\ \hline T_3 & T_4 \end{array}\right] \ (T_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}).$$

Neposredno se proverava da su matrice $Q \cdot Q^* \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $P^* \cdot P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitske. Odatle dobijamo redom jednakosti

$$S_1^* = S_1, \ S_2^* = S_3, \ S_4^* = S_4, \ T_1^* = T_1, \ T_2^* = T_3 \ \text{i} \ T_4^* = T_4.$$

Samim tim su i podmatrice S_1, S_4, T_1 i T_4 hermitske. Dalje, koristimo tvrđenje da ako je $\mathcal{A}$ regularna linearna transformacija unitarnog prostora $\mathbb{C}$, tada su i linearne transformacije $\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}$ i $\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^*$ pozitivno definitne [VP1/I], str. 311. Samim tim na osnovu regularnosti matrica Q i P sleduje pozitivna definitnost matrica $Q^* \cdot Q$ i $P \cdot P^*$. Odatle sleduje i pozitivna definitnost podmatrica S_4 i T_4 [VP2]. U daljem razmatranju koristimo samo posledicu pozitivne definitnosti da su matrice S_4 i T_4 regularne.

$$\left(Q^{-1}\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]P^{-1}\right)^* \cdot \left(P\left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right]Q\right)^* = P\left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right]Q\cdot Q^{-1}\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]P^{-1},$$

što se računom može dovesti do oblika

$$\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c} X_0^* & X_2^* \\ \hline X_1^* & X_3^* \end{array}\right]\cdot P^*P = P^*P\cdot\left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right],$$

Odatle, na osnovu (13), važe matrične jednačine (16). Obratno, svaka matrica oblika (9), za koju podmatrice X_0, X_2 ispunjavaju matrične jednačine (16) jeste rešenje matrične jednačine (4). ■

Posledica. (OPŠTI $\{1,4\}$-INVERZ) *Za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ neka su određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da važi* (8) *i neka je određena matrica $Q\cdot Q^*$ u vidu blok matrice* (13). *Matrica $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ oblika* (9) *ispunjava matrične jednačine* (1) *i* (4) *ako i samo ako važi:*

$$X = P\cdot\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline -T_4^{-1}T_3 & X_3 \end{array}\right]\cdot Q. \tag{17}$$

za proizvoljne podmatrice $X_1 \in \mathbb{C}^{r\times(m-r)}$ i $X_3 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$.

Teorema 2.4.5. (MOORE-PENROSE-OV INVERZ) *Neka su za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da važi* (8) *i neka su određene matrice $Q\cdot Q^*$ i $P^*\cdot P$ u vidu blok matrice* (13). *Matrica $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ oblika* (9) *ispunjava sistem* PENROSE*ovih jednačina* (1) – (4) *ako i samo ako je oblika:*

$$X = A^\dagger = P\cdot\left[\begin{array}{c|c} I_r & -S_2S_4^{-1} \\ \hline -T_4^{-1}T_3 & T_4^{-1}T_3S_2S_4^{-1} \end{array}\right]\cdot Q \tag{18}$$

Dokaz. Direktno na osnovu posledica prethodne tri teoreme. ■

Prema V. PERIĆu [VP2] metod predstavljanja uopštenih inverza u obliku blok matrica potiče[2] od C. ROHDEa [CR]. Na kraju ovog paragrafa napomenimo da matrica (10) predstavlja *opšti* $\{1\}$-*inverz* jer svaki $\{1\}$-inverz može se prikazati u navedenom obliku. U tom smislu možemo reći da matrica (12) predstavlja *opšti* $\{1,2\}$-*inverz*, odnosno matrica (15) predstavlja *opšti* $\{1,3\}$-*inverz* i matrica (17) predstavlja *opšti* $\{1,4\}$-*inverz*. U literaturi se javljaju i drugi oblici „*opštih inverza*". Navodimo „opšte inverze" koji se dobijaju iz *singularno vrednosne dekompozicije* (SDV) realne matrice

$$A = U\left[\begin{array}{c|c} \Sigma & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]V^T,$$

pri čemu su U, V odgovarajuće ortogonalne matrice i Σ dijagonalna podmatrica sa realnim singularnim vrednostima $\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \ldots \geq \sigma_r(A) > 0$. Tada, prema [ABI-RB], *opšti* $\{1\}$-*inverz* je dat u obliku blok matrice

$$X = V\left[\begin{array}{c|c} \Sigma^{-1} & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right]U^T,$$

[2] TAKODJE U RADU S. PREŠIĆ-A [SP2] $\{1\}$-INVERZ PRESDTAVLJEN JE U OBLIKU BLOK MATRICE

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

$$P^*P = \left[\begin{array}{cc|c} \frac{61}{9} & -2 & -19 \\ -2 & 1 & 6 \\ \hline -19 & 6 & 54 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad QQ^* = \left[\begin{array}{cc|c} 29 & -12 & 9 \\ -12 & 5 & -4 \\ \hline 9 & -4 & 6 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{bmatrix}$$

određujemo matrice $X_0 = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $X_1 = -S_2S_4^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$, $X_2 = -T_4^{-1}T_3 = [\frac{19}{54} \; \frac{-1}{9}]$ i $X_3 = X_2X_1 = [\frac{-65}{108}]$. MOORE-PENROSEov inverz $A^\dagger = P \begin{bmatrix} X_0 & X_1 \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix} Q$ dat je sa matricom:

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 6 \\ \frac{4}{3} & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{19}{54} & \frac{-1}{9} & \frac{-65}{108} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-23}{36} & \frac{-1}{6} & \frac{11}{36} \\ \frac{-1}{18} & 0 & \frac{1}{18} \\ \frac{19}{36} & \frac{1}{6} & \frac{-7}{36} \end{bmatrix}.$$

2.5. Neke primene {1}, {2}, {3}, {4} – inverza u obliku blok matrica

Navodimo dokaze nekih poznatih tvrđenja korišćenjem {1}, {2}, {3}, {4} – inverza u obliku blok matrica. Kao *doprinos* dokazi su *jednostavniji* od dokaza navedenih u monografijama [ABI-TG] i [SC-CM]. Važi pomoćno tvrđenje.

Lema 2.5.1. *Za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ neka su određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}_m^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}_n^{n\times n}$ takve da je $QAP = E_r$. Tada važi:*

$$A^{(1)}A = P \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline X_2 & 0 \end{array}\right]_{n\times n} P^{-1} \quad i \quad AA^{(1)} = Q^{-1} \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]_{m\times m} Q, \tag{19}$$

gde su X_1 i X_2 ma koje matrice odgovarajućeg formata.

Dokaz. Neka su određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}_m^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}_n^{n\times n}$ takve da je $QAP = E_r$. Tada je $A = Q^{-1}E_rP^{-1} = Q^{-1} \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] P^{-1}$. Prema teoremi 2.4.1. ma koji {1}-inverz matrice A možemo odrediti u obliku $A^{(1)} = P \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] Q$, gde su X_1, X_2 i X_3 proizvoljne matrice odgovarajućeg formata. Direktno, blokovskim množenjem matrica A i $A^{(1)}$ sleduju navedene formule (19). ∎

Na osnovu formula (19), prethodne leme, dobijamo da važe sledeća dva tvrđenja.

Teorema 2.5.2. *Za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ važi:*

$$rank(A^{(1)}A) = rank(AA^{(1)}) = rank(A). \tag{20}$$

Teorema 2.5.3.[3] *Za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ važe ekvivalencije:*

$$A^{(1)}A = I_n \Longleftrightarrow r = n, \tag{21}$$

$$AA^{(1)} = I_m \Longleftrightarrow r = m. \tag{22}$$

[3] TVRDJENJE O LEVOM I DESNOM INVERZU

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

koja rešenja sistema matričnih jednačina (11). Pretpostavka $rank(A) = rank(A^{(2)}) = r$ ekvivaletna je sa jednakošću

$$rank\Big(P\left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right]Q\Big) = rank\Big(\left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right]\Big) = rank\Big(\left[\begin{array}{c|c} X_0^2 & X_0X_1 \\ \hline X_2X_0 & X_2X_0^2X_1 \end{array}\right]\Big) = r,$$

što je ekvivaletno sa

$$rank\Big(\left[\begin{array}{c|c} X_0^2 & X_0X_1 \\ \hline X_2X_0 - X_2X_0^3 & 0 \end{array}\right]\Big) \underset{(11)}{=} rank\Big(\left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_0X_1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]\Big) = rank\Big(\left[\begin{array}{c|c} X_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]\Big) = r.$$

Na osnovu $rank(X_0) = r$ matrica X_0 je regularna i na osnovu matrične jednačine $X_0^2 = X_0$ važi $X_0 = I_r$. Samim tim, prema teoremi 2.4.1., važi $A^{(2)} = X \in A\{1\}$, tj. ispunjen je uslov (i).

<u>$(iii) \wedge (i) \Longrightarrow (ii)$</u> Za matricu $X = A^{(1)}$ pretpostavimo da je $rank(X) = rank(A) = r$. Neka su određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}_m^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}_n^{n\times n}$ takve da je $QAP = E_r$. Prema teoremi 2.4.1. važi $A^{(1)} = P\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right]Q$, za ma koje matrice X_1, X_2 i X_3 odgovarajućeg formata. Pretpostavka $rank(A^{(1)}) = rank(A) = r$ ekvivaletna je sa jednakošću

$$rank\Big(P\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right]Q\Big) = rank\Big(\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right]\Big) = rank\Big(\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline 0 & X_3 - X_2X_1 \end{array}\right]\Big) = r,$$

na osnovu koje ustanovljavamo $X_3 = X_2X_1$. Odatle, prema teoremi 2.4.2., važi $A^{(1)} = X \in A\{2\}$, tj. ispunjen je uslov (ii). ■

Teorema 2.5.5. predstavlja odgovarajuću teoremu 2 monografije [ABI-TG] (str. 12), pri tom, kao *doprinos*, dokaz je izveden prema metodi iz članka [VP2]. Takođe, kao *doprinos*, dajemo direktan dokaz odgovarajuće teoreme 4 monografije [ABI-TG] (str. 21). U ovom radu, navedena teorema, koristi se u paragrafu 3.3.

<u>**Teorema 2.5.6.**</u> <u>(URQUHART)</u> *Za matricu* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *važi:*

$$A^{\dagger} = A^{(1,4)}A\,A^{(1,3)}. \tag{24}$$

<u>**Dokaz.**</u> Neka su određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}_m^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}_n^{n\times n}$ takve da je $QAP = E_r$. Pri tom neka su matrice PP^* i Q^*Q predstavljene u obliku blok matrica (13). Zapisujući matricu $A^{(1,4)}$ u obliku (17) i matricu $A^{(1,3)}$ u obliku (15), blokovskim množenjem

$$\begin{aligned} A^{(1,4)} \cdot A \cdot A^{(1,3)} &= P\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline -T_4^{-1}T_3 & X_3 \end{array}\right]Q \cdot A \cdot P\left[\begin{array}{c|c} I_r & -S_2S_4^{-1} \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right]Q \\ &= P\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline -T_4^{-1}T_3 & X_3 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I_r & -S_2S_4^{-1} \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right]Q \\ &= P\left[\begin{array}{c|c} I_r & -S_2S_4^{-1} \\ \hline -T_4^{-1}T_3 & T_4^{-1}T_3S_2S_4^{-1} \end{array}\right]Q. \end{aligned}$$

Rezultat je MOORE-PENROSEov inverz $A^{\dagger}$ dat u obliku formule (18). Navedeno dokazuje da važi formula (24). ■

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Napomena 1. R. PENROSE *u članku* [RP1] *iz* 1955 *dao je opšte rešenje u reproduktivnom obliku:*

$$X = f(Y) = A^{(1)}D\,B^{(1)} + Y - A^{(1)}A\,Y\,B\,B^{(1)} \quad (Y \in \mathbb{C}^{n\times p}), \tag{4}$$

Kao doprinos navedena formulacija prethodne teoreme je šira u odnosu na originalnu formulaciju iz članka [RP1] *jer obuhvata kako reproduktivna rešenja, tako i ostala rešenja.*

Napomena 2. *Opšte rešenje matrične jednačine* (1), *pre* PENROSE*a, razmatrao je i* BJERAHMMAR *u članku iz* 1951 [AB2] (*kao i u knjizi* [AB1]). *Opšte rešenje je dato u funkciji od dve matrice:*

$$X = \Phi(Y,Z) = A^{(1)}D\,B^{(1)} + (I - A^{(1)}A)Y + Z(I - BB^{(1)}) \quad (Y, Z \in \mathbb{C}^{n\times p}). \tag{5}$$

Napomenimo da je veza izmedu formula (4) *i* (5) *data sa:* $f(Y) = \Phi(Y, YBB^{(1)})$.

Kao neposrednu posledicu teoreme 3.1.1. dobijamo da za linearne sisteme važi naredno tvrđenje.

Teorema 3.1.2. *Za matricu* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *i vektor* $\vec{b} \in \mathbb{C}^m$ *linearan sistem:*

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{6}$$

je moguć po vektoru $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ *ako i samo ako za ma koji* $\{1\}$*-inverz* $A^{(1)}$ *važi uslov:*

$$AA^{(1)}\vec{b} = \vec{b}. \tag{7}$$

Ako je vektor $\vec{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ *neko posebno rešenje linearnog sistema* (6), *tada je opšte rešenje dato u obliku:*

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{y} - A^{(1)}A\,\vec{y} \quad (\vec{y} \in \mathbb{C}^n). \tag{8}$$

Opšte reproduktivno rešenje linearnog sistema (6) *je dato u obliku:*

$$\vec{x} = A^{(1)}\vec{b} + \vec{y} - A^{(1)}A\,\vec{y} \quad (\vec{y} \in \mathbb{C}^n). \tag{9}$$

Primer 3.1.3. *Za matricu i vektor*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad i \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

naći opšte rešenje linearnog sistema $A\vec{x} = \vec{b}$.

Dokaz. Neka je $X = A^{(1)}$ ma koji $\{1\}$-inverz matrice A. Tada, za svaki vektor $\vec{b}$ za koji je sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ moguć, na osnovu uslova $AA^{(1)}\vec{b} = \vec{b}$, zaključujemo da je vektor $\vec{z} = A^{(1)}\vec{b} = X\vec{b}$ jedno njegovo rešenje. Obratno, birajmo vektor $\vec{b}_j = \vec{A}^{(j)}$ kao j-tu kolonu matrice A ($j = 1, \dots, n$). Tada je sistem $A\vec{x} = \vec{b}_j$ moguć za $\vec{x} = \vec{e}_j$ i neka je vektor $\vec{z}_j = X\vec{b}_j$ rešenje posmatranog sistema. Samim tim iz $A\vec{z}_j = \vec{b}_j$ zaključujemo $AX\vec{A}^{(j)} = \vec{A}^{(j)}$ ($j = 1, \dots, n$). Odatle je $AXA = A$, što dokazuje da je X $\{1\}$-inverz. ■

3.2. Formule rešenja nekih matričnih jednačina

U prethodnom paragrafu pokazali smo na koji način, pomoću $\{1\}$-inverza, nalazimo opšte rešenje mogućih linearnih sistema. U ovom paragrafu pokazaćemo da se na osnovu teoreme 3.1.1. može naći rešenje nekih matričnih jednačina, kao i da je moguće dati karakterizaciju nekih klasa uopštenih inverza.

S. Prešić je u članku [SP3] iz 1963 godine dokazao naredno tvrđenje.

Teorema 3.2.1. *Za kvadratnu matricu $A \in \mathbb{C}_r^{n\times n}$ i matricu $B \in A\{1\}$ važe ekvivalencije:*

(*i*) $AX = 0 \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = Y - BAY,$

(*ii*) $XA = 0 \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = Y - YBA,$

(*iii*) $AXA = A \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = B + Y - BAYAB,$

(*iv*) $AX = A \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = I + Y - BAY,$

(*v*) $XA = A \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = I + Y - YBA.$

S. Prešić, u radu [SP4] iz 1968 godine, pojam reproduktivnosti proširio je na proizvoljne jednačine i uveo je postupak „ureproduktivljavanja" nereproduktivnih rešenja. Tako na primer, opšta rešenja (*iii*) – (*v*) prethodne teoreme jesu nereproduktivna. Navedena rešenja dobijaju se direktno prema proširenoj Penroseovoj teoremi[4] 3.1.1. M. Haverić u tezi [MH1] razmatrala je navedeni postupak „ureproduktivljavanja". Tako, sva reproduktivna opšta rešenja matričnih jednačina prethodne teoreme data su narednim tvrđenjem [MH2].

Teorema 3.2.2. *Za kvadratnu matricu $A \in \mathbb{C}_r^{n\times n}$ i matricu $B \in A\{1\}$ važe ekvivalencije:*

(*i*) $AX = 0 \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = Y - BAY,$

(*ii*) $XA = 0 \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = Y - YBA,$

[4] Napomenimo da dobijena rešenja ne slede direktno iz originalne Penrose-ove formulacije iz 1955 godine

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Dokaz. Neka je $X \in A\{1,4\}$, dokazujemo da matrica X ispunjava matričnu jednačinu (14). Zaista

$$\begin{aligned} A^{(1,4)}A &= A^{(1,4)}AXA = (A^{(1,4)}A)(XA) = (A^{(1,4)}A)^*(AX)^* \\ &= A^*(A^{(1,4)})^*A^*X^* = (AA^{(1,4)}A)^*X^* = A^*X^* = (XA)^* = XA. \end{aligned}$$

Obratno, neka je matrica X rešenje matrične jednačine (14). Tada važi $AXA = AA^{(1,4)}A = A$, tj. $X \in A\{1\}$. Sa druge strane iz $XA = A^{(1,4)}A$ sleduje $(XA)^* = (A^{(1,4)}A)^* = A^{(1,4)}A = XA$, tj. $X \in A\{4\}$. Sveukupno zaključujemo da $X \in A\{1,4\}$. ■

Kao posledicu teoreme 3.1.1.i prethodne teoreme dobijamo karakterizaciju $\{1,4\}$-inverza u obliku skupa:

(15) $$A\{1,4\} = \{A^{(1,4)} + Y(I - A^{(1,4)}A) \mid Y \in \mathbb{C}^{n\times m}\}.$$

Neka je $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ matrica ranga $r > 1$. Za prirodan broj $0 < s < r$ označimo sa $A\{1,\dots,k\}$ *skup svih* $\{i,\dots,k\}_s$*-inverza ranga* s. Tada važi naredno tvrđenje.

Teorema 3.2.5. (STEWART) *Za matricu* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *ranga* $r > 1$ *i prirodan broj* $0 < s < r$ *važi:*

(16) $$A\{2\}_s = \{X \mid (\exists Y \in \mathbb{C}_s^{n\times s})(\exists Z \in \mathbb{C}_s^{s\times m})\, X = YZ \,\wedge\, ZAY = I_s\}.$$

Dokaz. Neka je $X \in A\{2\}_s$ proizvoljna matrica ranga s. Koristeći faktorizaciju punog ranga postoje matrice $Y \in \mathbb{C}_s^{n\times s}$ i $Z \in \mathbb{C}_s^{s\times m}$ takve da je tačno $X = YZ$. Prema teoremi 2.5.3. važi $Y^{(1)}Y = I_s$ i $ZZ^{(1)} = I_s$. Primetimo da je uslov $XAX = X$ ekvivalentan sa $YZAYZ = YZ$. Množeći prethodnu jednakost sa leve strane sa $Y^{(1)}$ i sa desne strane sa $Z^{(1)}$ dobijamo da važi i drugi uslov $ZAY = I_s$. Obratno, neka je $X = YZ$ i $ZAY = I_s$, za neke matrice $Y \in \mathbb{C}_s^{n\times s}$ i $Z \in \mathbb{C}_s^{s\times m}$. Proverimo da je X $\{2\}$-inverz ranga s. Zaista $XAX = YZAYZ = YI_sZ = YZ = X$. Dalje iz $ZAY = I_s$ množeći sa leve strane sa Y dobijamo jednakosti $YZAY = XAY = Y$, na osnovu koje zaključujemo $s = rank(Y) \le rank(X)$. Sa druge strane iz jednakosti $X = YZ$ zaključujemo $rank(X) \le rank(Y) = s$. Sveukupno matrica X je ranga s. ■

Kao posledicu teoreme BJERHMMARa i prethodne teoreme dobijamo karakterizaciju $\{1,2\}$-inverza u obliku skupa:

(17) $$A\{1,2\} = A\{2\}_r = \{X \mid (\exists Y \in \mathbb{C}_r^{n\times r})(\exists Z \in \mathbb{C}_r^{r\times m})\, X = YZ \,\wedge\, ZAY = I_r\}.$$

Na kraju ovog paragrafa navodimo, bez dokaza, tvrđenje koje je dokazala M. HAVERIĆ u [MH3].

Teorema 3.2.6. *Za matricu* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *ranga* $r > 1$ *i prirodan broj* $0 < s < r$ *važi:*

(18) $$A\{2,3\}_s = \{X \mid (\exists Y \in \mathbb{C}_s^{n\times s})\, X = Y(AY)^{(1,3)} \,\wedge\, AY \in \mathbb{C}_s^{m\times s}\},$$

(19) $$A\{2,4\}_s = \{X \mid (\exists Y \in \mathbb{C}_s^{n\times s})\, X = (AY)^{(1,4)}Y \,\wedge\, YA \in \mathbb{C}_s^{s\times n}\}.$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Lema 3.3.1. *Neka je data matrica* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *i vektor* $\vec{b} \in \mathbb{C}^m$. *Tada za proizvoljni vektor* $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ *važi jednakost:*

(25) $$\|A\vec{x} - \vec{b}\|^2 = \|A\vec{x} - AA^{(1,3)}\vec{b}\|^2 + \|\vec{b} - AA^{(1,3)}\vec{b}\|^2.$$

Dokaz. Primetimo da važe sledeće jednakosti

$$A = AA^{(1,3)}A \quad \wedge \quad (AA^{(1,3)})^* = AA^{(1,3)}.$$

Odatle dobijamo da važe sledeće dve jednakosti:

(26) $$(I_m - AA^{(1,3)})^*A = (I_m - AA^{(1,3)})A = A - AA^{(1,3)}A = 0,$$

(27) $$A^*(I_m - AA^{(1,3)}) = A^*(I_m - AA^{(1,3)})^* = ((I_m - AA^{(1,3)})A)^* = 0,$$

koje ćemo koristiti u računanju vrednost izraza $\|A\vec{x} - \vec{b}\|^2 = \mathrm{tr}\Big((A\vec{x} - \vec{b})^* \cdot (A\vec{x} - \vec{b})\Big)$. Na osnovu prethodnog zaključujemo

$$\begin{aligned}
\|A\vec{x} - \vec{b}\|^2 &= \mathrm{tr}\Big(\big(A\vec{x} - \vec{b}\big)^* \cdot (A\vec{x} - \vec{b})\Big) \\
&= \mathrm{tr}\Big(\big((\vec{x} - A^{(1,3)}\vec{b})^*A^* - \vec{b}^*(I_m - AA^{(1,3)})^*\big) \\
&\quad \cdot \big((A\vec{x} - AA^{(1,3)}\vec{b}) - (I_m - AA^{(1,3)})\vec{b}\big)\Big) \\
&= \mathrm{tr}\Big((A\vec{x} - AA^{(1,3)}\vec{b})^*(A\vec{x} - AA^{(1,3)}\vec{b})\Big) \\
&- \mathrm{tr}\Big(\vec{b}^* \cdot \underbrace{(I_m - AA^{(1,3)})^*A}\cdot(\vec{x} - A^{(1,3)}\vec{b})\Big) \qquad (\text{ANULIRA SE PREMA } (26)) \\
&- \mathrm{tr}\Big((\vec{x} - A^{(1,3)}\vec{b})^* \cdot \underbrace{A^*(I_m - AA^{(1,3)})}\cdot\vec{b}\Big) \qquad (\text{ANULIRA SE PREMA } (27)) \\
&+ \mathrm{tr}\Big((\vec{b} - AA^{(1,3)}\vec{b})^*(\vec{b} - AA^{(1,3}\vec{b})\Big) \\
&= \|A\vec{x} - AA^{(1,3)}\vec{b}\|^2 + \|\vec{b} - AA^{(1,3)}\vec{b}\|^2.
\end{aligned}$$

Sveukupno, dokazana je jednakost (25). ■

Dokazujemo dva tvrđenja koje karakterišu srednje kvadratna rešenja sistema linearnih jednačina (22).

Teorema 3.3.2. *Neka je data matrica* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *i vektor* $\vec{b} \in \mathbb{C}^m$. *Vektor* $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ *jeste srednje kvadratno rešenje sistema linearnih jednačina* (22) *ako i samo ako je vektor* $\vec{x}$ *rešenje matrične jednačine:*

(28) $$A\vec{x} = (AA^{(1,3)}) \cdot \vec{b}.$$

Specijalno vektor:

(29) $$\vec{x} = A^{(1,3)}\vec{b}$$

jeste srednje kvadratno rešenje sistema linearnih jednačina (22).

Teorema 3.3.5. *Neka je data matrica* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. *Ako je* $M \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *takva matrica da za svako* $\vec{b} \in \mathbb{C}^n$ *vektor:*

$$\vec{x} = M\vec{b} \tag{34}$$

predstavlja rešenje minimalne norme sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, *tada je matrica* M *jedan* $\{1,4\}$*-inverz matrice* A.

R. PENROSE, u radu [RP2], uveo je najbolje aproksimativno rešenje sistema (22), kao onaj vektor $\vec{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ za koji je ispunjen uslov:

$$(\forall \vec{x}) \Big(\|A\vec{x}_0 - \vec{b}\| < \|A\vec{x} - \vec{b}\| \veebar \big(\|A\vec{x} - \vec{b}\| = \|A\vec{x}_0 - \vec{b}\| \wedge \|\vec{x}_0\| \le \|\vec{x}\| \big) \Big). \tag{35}$$

A. BEN-ISRAEL i T. GREVILLE, u monografiji[5] [ABI-TG], definišu vektor $\vec{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ kao srednje kvadratno rešenje minimalne norme za sistem (22), ako ispunjava uslov:

$$(\forall \vec{x}) \Big(\|A\vec{x}_0 - \vec{b}\| \le \|A\vec{x} - \vec{b}\| \wedge \big((\vec{x} \ne \vec{x}_0 \wedge \|A\vec{x} - \vec{b}\| = \|A\vec{x}_0 - \vec{b}\|) \Longrightarrow \|\vec{x}_0\| < \|\vec{x}\| \big) \Big). \tag{36}$$

Nije teško proveriti da su uslovi (35) i (36), za vektor $\vec{x}_0 \in \mathbb{C}^n$, međusobno ekvivaletni. Samim tim, najbolje aproksimativno rešenje se podudara sa srednjim kvadratnim rešenjem minimalne norme.

Na kraju ovog paragrafa dokazujemo osnovno tvrđenje kojim dajemo odgovor na pitanje[6] *Kakav odgovor daje vektor* $A^\dagger\vec{b}$? (formiran pomoću MOORE-PENROSEovog inverza).

Teorema 3.3.6. (PENROSE). *Vektor* $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ *jeste srednje kvadratno rešenje minimalne norme matrične jednačine* (22) *ako i samo ako je vektor* $\vec{x}$ *rešenje matrične jednačine* (28). *Vektor:*

$$\vec{x} = A^\dagger\vec{b} \tag{37}$$

jeste srednje kvadratno rešenje minimalne norme sistema (22).

Dokaz. Prema teoremi 3.3.2. srednje kvadratna rešenja sistema linearnih jednačina $A\vec{x} = \vec{b}$ podudaraju se sa rešenjima sistema $A\vec{x} = (AA^{(1,3)})\vec{b}$. Prema teoremi 3.3.4. rešenje sa minimalnom normom sistema $A\vec{x} = (AA^{(1,3)}\vec{b})$ podudara se sa rešenjima sistema $A\vec{x} = (AA^{(1,4)}) \cdot (AA^{(1,3)}\vec{b})$ i pri tom je sa sa vektorom:

$$\vec{x} = (A^{(1,4)}AA^{(1,3)})\,\vec{b} \tag{38}$$

dato je srednje kvadratno rešenje sa minimalnom normom polaznog sistema $A\vec{x} = \vec{b}$. Saglasno URQUHARTovoj teoremi vektori (37) i (38) se podudaraju i odatle sledi tvrđenje teoreme. ■

Napomenimo da MOORE-PENROSEov inverz ima značajne primene u matematičkoj statistici. Tako na primer MOORE-PENROSEov inverz se koristi u regresionoj analizi [SC-CM] i ocenjivanju parametara u linearnim modelima [SS-DC].

[5] NA OSNOVU DEFINICIJA SREDNJE KVADRATNOG REŠENJA I REŠENJA MINIMALNE NORME

[6] KOJE ODGOVARA NASLOVU PARAGRAFA 2.1. MONOGRAFIJE [SC-CM]

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

<u>Teorema 3.4.1.</u> *Za svaku nenula matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ opšti $\{1\}$-inverz $A^{(1)} = A^{(1)}(t_1,\dots,t_k)$, dat sa formulom (41), jeste afini prostor dimenzije $k = m\cdot n - r^2$ vektorskog prostora matrica $\mathbb{C}^{m\times n}$. Pri tom direktrisa D, data formulom (44), ne podudara se sa afinim prostorom opšteg $\{1\}$-inverza $A^{(1)}$.*

<u>Primer 3.4.2.</u> *Za matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ odrediti opšti $\{1\}$-inverz u obliku afinog potprostora.*

<u>Rešenje.</u> Na osnovu primera 2.4.6. opšti $\{1\}$-inverz je dat u sledećem obliku

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}^{(1)} &= \mathrm{P}\cdot\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right]\cdot \mathrm{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 6 \\ \frac{4}{3} & 0 & -3 \end{bmatrix}\cdot\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ \hline t_3 & t_4 & t_5 \end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \dots = \\
&= \begin{bmatrix} (t_1 - 15t_3 + 6t_4 - 3t_5 + 5) & (-2t_1 + 6t_3 - 3t_4 + 6t_5 - 2) & (t_1 - 3t_5) \\ (-2t_1 + t_2 + 30t_3 - 12t_4 + 6t_5 - 12) & (4t_1 - 2t_2 - 12t_3 + 6t_4 - 12t_5 + 5) & (-2t_1 + t_2 + 6t_5) \\ (\frac{4}{3}t_1 - 15t_3 + 6t_4 - 3t_5 + \frac{20}{3}) & (-\frac{8}{3}t_1 + 6t_3 - 3t_4 + 6t_5 - \frac{8}{3}) & (\frac{4}{3}t_1 - 3t_5) \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

pri čemu u prethodnom zapisu učestvuje $k = 3\cdot 3 - 2^2 = 5$ nezavisnih parametara t_i. Odatle dobijamo dekompoziciju $\{1\}$-inverza u obliku afinog prostora

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -12 & 5 & 0 \\ -\frac{20}{3} & -\frac{8}{3} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}\cdot t_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot t_2 \\
&+ \begin{bmatrix} -15 & 6 & 0 \\ 30 & -12 & 0 \\ -15 & 6 & 0 \end{bmatrix}\cdot t_3 + \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -12 & 6 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}\cdot t_4 + \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}\cdot t_5 \\
&= \mathrm{C} + \mathrm{B}_1\cdot t_1 + \mathrm{B}_2\cdot t_2 + \mathrm{B}_3\cdot t_3 + \mathrm{B}_4\cdot t_4 + \mathrm{B}_5\cdot t_5.
\end{aligned}
$$

Pri tome, direktrisa $D(t_1,\dots,t_5) = B_1t_1 + B_2t_2 + B_3t_3 + B_4t_4 + B_5t_5$ jeste 5-dimenzionalni potprostor 9-dimenzionalnog vektorskog prostora $\mathbb{C}^{3\times 3}$, koji se ne podudara sa afinim prostorom $A^{(1)}$.

3.5. Rešavanje sistema linearnih jednačina pomoću specijalnih izbora {1}-inverza matrice

Neka su dati matrica $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ i vektor $\vec{b} \in \mathbb{C}^m$ tako da je sa njima određen moguć nehomogen sistem linearnih jednačina:

$$
A\cdot\vec{x} = \vec{b}. \tag{45}
$$

Za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ postoje regularne matrice $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da je $QAP = E_r$. U paragrafu 3.4. pokazali smo da je opšti oblik $\{1\}$-inverza $A^{(1)}$ dat sa:

$$
A^{(1)} = P\cdot\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right]\cdot Q, \tag{46}
$$

gde su $X_1 = [x_{ij}]$, $X_2 = [y_{ij}]$ i $X_3 = [z_{ij}]$ matrice u kojima učestvuje ukupno $k = m\cdot n - r^2$ međusobno nezavisnih promenljivih. Vektorski prostor rešenja sistema (45) jeste $(n-r)$-dimenzionalni potprostor n-dimenzionalnog prostora $\mathbb{C}^n$ npr. [PT-AΦ]. U ovom paragrafu određujemo minimalni broj međusobno nezavisnih promenljivih iz X_1, X_2 i X_3 tako da je opšte rešenje sistema (45) dato formulom:

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

za $n-r$ zavisnih promenljivih $\tau_1 = \sum_{i=1}^{r} b'_i y_{1i}, \ldots, \tau_{n-r} = \sum_{i=1}^{r} b'_i y_{n-r\,i}$ iskazanih preko nezavisnih promenljivih y_{ij}. Budući da se radi o nehomogenom sistemu postoji bar jedna nenulta koordinata $b'_j \neq 0$ vektora $\vec{b}' = Q\vec{b}$. Za prethodno određenu j-tu koordinatu izborom matrica:

$$(50) \qquad X_1 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & y_{1j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & \cdots & y_{n-r\,j} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

dobijamo $\tau_1 = y_{1j}, \ldots, \tau_{n-r} = y_{n-r\,j}$ kao linearno nezavisne promenljive. Za tako odredjeno rešenje, pomoću formule (47), dobijamo $(n-r)$-dimenzionalni potprostor vektorskog prostora rešenja[7]. Samim tim, za specijalan izbor blok matrica (50) sa formulom (47) dobijamo ceo vektorski prostor rešenja sistema (45).

Zaključak *Neka su dati matrica $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ i vektor $\vec{b} \in \mathbb{C}^m$ tako da je sa njima određen moguć nehomogen sistem linearnih jednačina (45) i neka su $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ regularne matrice takve da je $QAP = E_r$. Neka je formulom (46) dat opšti oblik $\{1\}$-inverza $A^{(1)}$, gde su podmatrice X_1, X_2 i X_3 po koordinatama date sa međusobno nezavisnim promenljivima. Formula (47) određuje opšte rešenje sistema (45) sa najviše $r\cdot n - r^2$ nezavisnih promenljivih. Tačan broj promenljivih je dat brojem $q = (r-s)\cdot(n-r)$, gde je sa s označen broj nula koje se javljaju u među prvih r koordinata vektora $\vec{b}' = Q\cdot\vec{b}$. Izborom podmatrica X_1, X_2 i X_3 u obliku (50) dobijamo opšte rešenje sistema (45) sa minimalnim brojem nezavisnih promenljivih.*

Primer 3.5.1. *Odrediti opšta rešenja linearnih sitema:*

$$(i) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad (ii) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Označimo sa A matricu sistema. Elementarnim transformacijama po vrstama i kolonama na proširenoj matrici sistema određujemo regularne matrice

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{13}{4} & -\frac{9}{4} \\ 1 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

takve da važi $QAP = E_2$. Matrica $A \in \mathbf{R}^{4\times 4}$ je ranga 2. Dalje, neka su $\vec{b}_1 = [1\ 2\ 3\ 4]^T$ i $\vec{b}_2 = [1\ 5\ 9\ 13]^T$ odgovarajuće kolone slobodnih članova. Potražimo opšta rešenja u obliku formule (47), za odgovarajući izbor matrica

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}.$$

[7]KOJI JE ISTE DIMENZIJE KAO I PROSTOR REŠENJA

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

4. Tenzorska veza između koeficijenata linearnog sistema

Tenzorska veza. Neka je dat moguć sistem m linearnih jednačina sa n nepoznatih $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{lcl} \mathcal{J}_1 & \stackrel{def}{=} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1 = 0, \\ \mathcal{J}_2 & \stackrel{def}{=} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - b_2 = 0, \\ & \vdots & \\ \mathcal{J}_m & \stackrel{def}{=} & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n - b_m = 0, \end{array}\right.$$

gde su a_{ij} i b_i zadani elementi polja $\mathbb{C}$ ($i \in \mathbb{I}_m \stackrel{def}{=} \{1,\ldots,m\} \ \wedge \ j \in \mathbb{I}_n \stackrel{def}{=} \{1,\ldots,n\}$). U ovom delu, za proizvoljne elemente $t_i \in \mathbb{C}$ ($i \in \mathbb{I}_n$), određujemo pod kojim uslovima postoje rešenja prethodnog sistema u obliku:

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \varphi_1(t_1,\ldots,t_n) = t_1 - \sum\limits_{r=1}^{m} \lambda_{1r}\cdot\mathcal{J}_r = t_1 + \sum\limits_{r=1}^{m}\lambda_{1r}\cdot(\sum\limits_{s=1}^{n} b_r - a_{rs}t_s), \\ x_2 & = & \varphi_2(t_1,\ldots,t_n) = t_2 - \sum\limits_{r=1}^{m} \lambda_{2r}\cdot\mathcal{J}_r = t_2 + \sum\limits_{r=1}^{m}\lambda_{2r}\cdot(\sum\limits_{s=1}^{n} b_r - a_{rs}t_s), \\ & \vdots & \\ x_n & = & \varphi_n(t_1,\ldots,t_n) = t_n - \sum\limits_{r=1}^{m} \lambda_{nr}\cdot\mathcal{J}_r = t_n + \sum\limits_{r=1}^{m}\lambda_{nr}\cdot(\sum\limits_{s=1}^{n} b_r - a_{rs}t_s), \end{array}\right.$$

gde su nepoznati parametri $\lambda_{ji} \in \mathbb{C}$ ($i \in \mathbb{I}_m \ \wedge \ j \in \mathbb{I}_n$).

Označimo sa $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m\times n}$ matricu polaznog sistema. Polazni sistem (1) matrično zapisujemo u vidu:

$$(3)\qquad A\cdot\vec{x} = \vec{b},$$

gde je $\vec{x} = [x_1 \ \ldots \ x_n]^T \in \mathbb{C}^n$ vektor rešenja. Ako je $\vec{t} = [t_1 \ \ldots \ t_n]^T \in \mathbb{C}^n$ proizvoljni vektor, tada formule (2) matrično zapisujemo u vidu:

$$(4)\qquad \vec{x} = \varphi(\vec{t}) = \vec{t} + \Lambda\cdot(\vec{b} - A\vec{t}),$$

gde je $\Lambda = [\lambda_{ji}] \in \mathbb{C}^{n\times m}$ matrica nepoznatih parametara $\lambda_{ji} \in \mathbb{C}$ ($i \in \mathbb{I}_m \ \wedge \ j \in \mathbb{I}_n$).

Zamenimo vektor $\vec{x}$ iz (4) u matričnu jednačinu (3). Na taj način dobijamo ekvivalenciju

$$A\Big(\vec{t} + \Lambda(\vec{b} - A\vec{t})\Big) = \vec{b} \iff$$
$$(A - A\Lambda A)\vec{t} + (A\Lambda\vec{b} - \vec{b}) = \vec{0}.$$

gde su A i B regularne kvadratne matrice. U tom slučaju iz (7) vektor parametara $\vec{\Lambda}$ jednoznačno je određen formulom:

$$\vec{\Lambda} = (A^{-1} \otimes (A^T)^{-1}) \cdot \vec{A}, \tag{10}$$

odnosno matrica parametara Λ određena je formulom:

$$\Lambda = A^{-1}. \tag{11}$$

U slučaju regularnih kvadratnih sistema formulama (10) i (11) određena su dva ekvivalentna matrična oblika veza za nepoznate koeficijente λ_{ji}. Pri tom, jedinstveno rešenje eksplicitno je dato formulom $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$.

Primer 4.3. *Rešiti jednačinu:*

$$J = ax + p = 0, \tag{12}$$

gde su a i p zadani realni brojevi takvi da je $a \neq 0$.

Rešenje. Rešenje tražimo u reproduktivnom vidu

$$x = \varphi(x) = x + \lambda \cdot (ax + p),$$

gde je λ nepoznati parametar. Zamenimo prethodnu vrednost x u jednačinu (12), tada dobijamo

$$\begin{aligned} ax + p = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad a(x + \lambda \cdot (ax + p)) + p = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (1 + a\lambda) \cdot x + p(1 + a\lambda) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 1 + a\lambda = 0. \end{aligned}$$

Samim tim imamo tačnu vrednost $\lambda = -a^{-1}$. Odatle dobijamo dobro poznato rešenje

$$x = \varphi(x) = x - a^{-1} \cdot (ax + p) = -a^{-1} \cdot p.$$

Primer 4.4. *Rešiti sistem linearnih jednačina:*

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1 = ax + by + p = 0, \\ J_2 = cx + dy + q = 0, \end{array} \right\} \tag{13}$$

gde su a, b, c, d, p i q zadani realni brojevi takvi da je $\Delta = ad - bc \neq 0$.

Rešenje. Rešenje tražimo u reproduktivnom vidu

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(x, y) = x + \lambda_1(ax + by + p) + \mu_1(cx + dy + q), \\ y &= \varphi_2(x, y) = y + \lambda_2(ax + by + p) + \mu_2(cx + dy + q), \end{aligned}$$

gde su λ_1, λ_2, μ_1 i μ_2 nepoznati parametri. Odredimo vezu između parametara. Zamenimo prethodne jednakosti po x i y u jednačinu (13), tada dobijamo da važi

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

$$
\begin{aligned}
\vec{\Lambda} &= (A^{-1} \otimes (A^T)^{-1}) \cdot -\vec{A} = \left(\begin{bmatrix} \frac{d}{\Delta} & \frac{-b}{\Delta} \\ \frac{-c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{d}{\Delta} & \frac{-c}{\Delta} \\ \frac{-b}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ -c \\ -d \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{\Delta^2} \begin{bmatrix} d^2 & -cd & -bd & bc \\ -bd & ad & b^2 & -ba \\ -cd & c^2 & ad & -ac \\ bc & -ac & -ab & a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ -c \\ -d \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta^2} \begin{bmatrix} -\Delta d \\ \Delta b \\ \Delta c \\ -\Delta a \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} -d \\ b \\ c \\ -a \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Na osnovu (16) i (17) dobijamo iste vrednosti nepoznatih koeficijenata

$$
\left\{ \lambda_1 = -\frac{d}{\Delta}, \quad \mu_1 = \frac{b}{\Delta}, \quad \lambda_2 = \frac{c}{\Delta}, \quad \mu_2 = -\frac{a}{\Delta}, \right\}
$$

kao određene realne brojeve. Neposredno se proverava da su za tako određene vrednosti parametara λ_1, μ_1, λ_2 i μ_2 treća i šesta jednačina sistema (14) ispunjene. Odatle, dobijamo rešenje

$$
x = x + \frac{-d}{\Delta}(ax + by + p) + \frac{b}{\Delta}(cx + dy + q) = \frac{bq - dp}{ad - bc},
$$

$$
y = y + \frac{c}{\Delta}(ax + by + p) + \frac{-a}{\Delta}(cx + dy + q) = \frac{aq - cp}{ad - bc},
$$

koje predstavlja dobro poznate <u>KRAMER*ove formule*</u> za posmatrani sistem.

(*ii*) Razmatrimo slučaj kada je matrica A polaznog sistema (3) singularna. Pretpostavimo da je matrica A ranga $\rho < n$. Polazni sitem (3) ima ρ linearno nezavisnih vrsta koje zovemo *glavnim vrstama* [MS]. Elementarnim transformacijama na vrstama iz sistema (3) možemo eliminisati $n - \rho$ neglavnih vrsta

$$
[A \,|\, \vec{b}] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{c|c} C & \vec{d} \\ 0 & \vec{0} \end{array} \right],
$$

gde je $C = [c_{ij}]_{\rho \times n}$ nekvadratna matrica sa ρ linearno nezavisnih vrsta i $\vec{d}$ vektor dimenzije ρ. U tom slučaju polazni sistem (3) je ekvivalentan sa nekvadratnim sistemom:

$$
C \cdot \vec{x} = \vec{d}, \tag{18}
$$

formata $\rho \times n$. Rešenje, kao i ranije, tražimo u reproduktivnom vidu:

$$
\vec{x} = \psi(\vec{x}) = \vec{x} + \Gamma \cdot (\vec{d} - C\vec{x}), \tag{19}
$$

gde je $\Gamma = [\gamma_{ji}]_{n \times \rho}$ matrica nepoznatih parametara γ_{ji} ($i \in I_\rho \ \wedge \ j \in I_n$). Zamenom formule (19) u sistem (18) dobijamo odgovarajući parametarski C-sistem:

$$
(C \otimes C^T) \cdot \vec{\Gamma} = \vec{C}, \tag{20}
$$

gde je $\vec{\Gamma}$ vektor kolona parametara dobijena od matrice Γ zapisivanjem matrice u vektor po vrstama. Primetimo da je parametarski C-sistem (20) sa $\rho \cdot n$ jednačina i $\rho \cdot n$ nepoznatih parametara γ_{ji}. Matrica sistema (20) je matrica $C \otimes C^T \in \mathbb{C}^{\rho n \times \rho n}$ ranga ρ^2. Tada postoji regularna kvadratna podmatrica M, reda ρ^2, matrice $C \otimes C^T$ posmatranog sistema (20). Dalje, nazovimo *zavisnim parametrima* one parametre γ_{ji} koji se javljaju u sistemu (20) uz koeficijente regularne podmatrice M, ostale parametre nazovimo *nezavisnim parametrima*.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

$$(24) \qquad \{\, ax + by + p = 0. \,\}$$

Reproduktivno rešenje tražimo u vidu

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \varphi_1(x,y) = x + \lambda(ax+by+p), \\ y = \varphi_2(x,y) = y + \mu(ax+by+p), \end{array} \right\}$$

gde su λ i μ nepoznati parametri. Zamenimo prethodne vrednosti x i y u jednačinu (24), tada dobijamo da važi

$$\begin{array}{rcl} ax+by+p=0 & \Longleftrightarrow & ax + a\lambda(ax+by+p) + by + b\mu(ax+by+p) + p = 0 \\ & \Longleftrightarrow & (ax+by)\cdot(1+\lambda a+\mu b) + p\cdot(1+\lambda a+\mu b) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & 1+\lambda a+\mu b = 0. \end{array}$$

Odatle, opšte rešenje jednačine (24) je dato u vidu

$$x = \varphi_1(x,y) = x + \lambda(ax+by+p) = (1+\lambda a)x + \lambda by + \lambda p,$$

$$y = \varphi_2(x,y) = y + \mu(ax+by+p) = -\tfrac{a}{b}(1+\lambda a)x - \lambda ay - \tfrac{p}{b}(1+\lambda a) \quad (\lambda \in R).$$

Primetimo da je broj nezavisnih parametara $m = \rho\cdot n - \rho^2 = 1\cdot 2 - 1^2 = 1$ (λ - parametar).

Primer 4.7. *Rešiti sistem linearnih jednačina:*

$$(25) \qquad \left\{ \begin{array}{l} J_1 = ax + by + cz + p = 0, \\ J_2 = dx + ey + fz + q = 0, \\ J_3 = gx + hy + iz + r = 0, \end{array} \right\}$$

gde su $a, b, c, \ldots, i, p, q, r \in R$ zadani realni brojevi takvi da je

$$(c \neq 0 \vee f \neq 0) \quad \wedge \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0 \quad \wedge \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0.$$

Rešenje. Razmatramo samo slučaj kada je sistem moguć. U tom slučaju sistem je ekvivalentan sa sistemom:

$$(26) \qquad \left\{ \begin{array}{l} J_1 = ax + by + cz + p = 0, \\ J_2 = dx + ey + fz + q = 0. \end{array} \right\}$$

Reproduktivno rešenje tražimo u vidu

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \varphi_1(x,y,z) = x + \lambda_1(ax+by+cz+p) + \mu_1(dx+ey+fz+q), \\ y = \varphi_2(x,y,z) = y + \lambda_2(ax+by+cz+p) + \mu_2(dx+ey+fz+q), \\ z = \varphi_3(x,y,z) = z + \lambda_3(ax+by+cz+p) + \mu_3(dx+ey+fz+q), \end{array} \right\}$$

gde su λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2 i μ_3 nepoznati parametri. Zamenimo prethodne vrednosti x, y i z u jednačine (26), tada dobijamo da važi

$$\begin{array}{rcl} ax+by+cz+p=0 & \Longleftrightarrow & ax + a\lambda_1(ax+by+cz+p) + a\mu_1(dx+ey+fz+q) + \\ & & by + b\lambda_2(ax+by+cz+p) + b\mu_2(dx+ey+fz+q) + \\ & & cz + c\lambda_3(ax+by+cz+p) + c\mu_3(dx+ey+fz+q) + p = 0 \\ & \Longleftrightarrow & (a + a^2\lambda_1 + ad\mu_1 + ab\lambda_2 + bd\mu_2 + ac\lambda_3 + cd\mu_3)\cdot x + \\ & & (b + ab\lambda_1 + ae\mu_1 + b^2\lambda_2 + be\mu_2 + bc\lambda_3 + ec\mu_3)\cdot y + \\ & & (c + ac\lambda_1 + af\mu_1 + bc\lambda_2 + bf\mu_2 + c^2\lambda_3 + cf\mu_3)\cdot z \\ & & (p + ap\lambda_1 + aq\mu_1 + bp\lambda_2 + bq\mu_2 + cp\lambda_3 + cq\mu_3) = 0 \end{array}$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

$$
\begin{array}{rclcl}
x = \varphi_1(x,y,z) & = & x + \frac{(bf-ec)\lambda_3 - e}{ae-bd}(ax+by+cz+p) & = \ldots = & \frac{bf-ec}{ae-bd}(a\lambda_3 + d\mu_3)\cdot x \\
 & & + \frac{(bf-ce)\mu_3 + b}{ae-bd}(dx+ey+fz+q) & & + \frac{bf-ec}{ae-bd}(b\lambda_3 + e\mu_3)\cdot y \\
 & & & & + \frac{bf-ec}{ae-bd}(c\lambda_3 + f\mu_3 + 1)\cdot z \\
 & & & & + \frac{bf-ec}{ae-bd}(p\lambda_3 + q\mu_3) + \frac{qb-ep}{ae-bd},
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rclcl}
y = \varphi_2(x,y,z) & = & y + \frac{(cd-af)\lambda_3 + d}{ae-bd}(ax+by+cz+p) & = \ldots = & \frac{cd-af}{ae-bd}(a\lambda_3 + d\mu_3)\cdot x \\
 & & + \frac{(cd-af)\mu_3 - e}{ae-bd}(dx+ey+fz+q) & & + \frac{cd-af}{ae-bd}(b\lambda_3 + e\mu_3)\cdot y \\
 & & & & + \frac{cd-af}{ae-bd}(c\lambda_3 + f\mu_3 + 1)\cdot z \\
 & & & & + \frac{cd-af}{ae-bd}(p\lambda_3 + q\mu_3) + \frac{pd-aq}{ae-bd},
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rclcl}
z = \varphi_3(x,y,z) & = & z + \lambda_3(ax+by+cz+p) & = \ldots = & (a\lambda_3 + d\mu_3)\cdot x \\
 & & + \mu_3(dx+ey+fz+q) & & + (b\lambda_3 + e\mu_3)\cdot y \\
 & & & & + (c\lambda_3 + f\mu_3 + 1)\cdot z \\
 & & & & + (p\lambda_3 + q\mu_3).
\end{array}
$$

Napomenimo da dobijene formule predstavljaju *uopštene* KRAMER*ove formule* za sistem (26). Broj nezavisnih parametara je $m = \rho \cdot n - \rho^2 = 2 \cdot 3 - 2^2 = 2$ (λ_3, μ_3-parametri) jer je $(bf - ec \neq 0)$ ili $(cd - af \neq 0)$. U suprotnom[9] ako je $bf = ec$ i $cd = af$ dolazimo do kontradikcije sa $\Delta \neq 0$.

Nekvadratni sistemi. Neka je A nekvadratna matrica formata $k \times n$ nad poljem $\mathbb{C}$ $(k \neq n)$. Pretpostavimo da je matrica A ranga $\rho \leq d = \min\{k, n\}$. Razlikujemo dva slučaja.

(i) Neka je $k < n$. Dopunimo sistem (3) sa $n - k$ nula jednačina do kvadratnog sistema. Na taj način ovaj slučaj sveo se na slučaj singularnog kvadratnog sistema.

(ii) Neka je $k > n$. Pod pretpostavkom da je sistem (3) moguć rang matrice sistema A jednak je rangu proširene matrice sistema Ab i manji je ili jednak od n. Samim tim postoji $k - n$ jednačina sistema koje se mogu eliminisati pomoću najviše n jednačina istog sistema. Na taj način ovaj slučaj svodimo na slučaj bilo regularnog bilo singularnog kvadratnog sistema.

Na osnovu prethodnog razmatranja i teoreme 4.5., kao *doprinos*, dobijamo da za linearne sisteme važi sledeće tvrđenje.

Teorema 4.8. *Neka je dat moguć sistem linearnih jednačina* (3) *formata* $k \times n$ *i ranga* $\rho \leq d = \min\{k, n\}$. *Opšte rešenje sistema oblika* (4) *dopušta da* $m = \rho \cdot d - \rho^2$ *parametara proglasimo za nezavisne parametre polja* $\mathbb{C}$. *Ostali parametri se izražavaju kao linearne kombinacije nad poljem* $\mathbb{C}$ *prethodnih nezavisnih parametara.*

Napomena. *Rešavanje grupne i semigrupne funkcionalne jednačine sa konstantnim koeficijentima* PREŠIĆ*evim* Λ*-matričnim metodom, u paragrafima* 2.2. *i* 5.1. *druge celine ovog rada, svodi se na rešavanje odgovarajućih linearnih sistema postupkom opisanim u ovom delu.*

[9] RAZLIKOVANJEM SLUČAJEVA $c, f \underset{(\neq)}{=} 0$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

$$\vec{x} \in Ker\big((A-\lambda I)^p\big) \setminus Ker\big((A-\lambda I)^{p-1}\big). \tag{7}$$

Otuda, λ-vektori matrice A koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti $\lambda \in \mathbb{C}$, postoje za konačan skup vrednosti stepena $p \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Za sopstvenu vrednst $\lambda \in \mathbb{C}$, kvadratne matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, vektorski prostor generisan svim λ-vektorima odredjuje *λ-prostor matrice A*. Vektorski prostor generisan svim λ-vektorima za sve nenula sopstvene vrednosti razmatramo kao *glavni nenula prostor matrice A*, koji označavamo ga sa $\mathcal{R}_{A,\lambda}$ i nazivamo *Λ-prostor matrice A*. Specijalno ako je 0 sopstvena vrednost matrice A, tada možemo razmatrati vektorski prostor generisan svim 0-vektorima kao *glavni nula prostor matrice A*, koji označavamo sa $\mathcal{R}_{A,0}$ i nazivamo *0-prostor matrice A*.

Dve matrice $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ su <u>spektralno inverzne matrice</u> ako važi:

$$\left\{\begin{array}{lcl} A \in B\{1,2\} & \text{i} & B \in A\{1,2\}; \\ \mathcal{R}_{A,\lambda} = \mathcal{R}_{B,\lambda} & \text{i} & \mathcal{R}_{A,0} = \mathcal{R}_{B,0}. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Definišemo <u>uopšteni inverz skalara</u> na sledeći način:

$$\lambda^{\dagger} = \left\{\begin{array}{lcl} \lambda^{-1} & : & \lambda \neq 0, \\ 0 & : & \lambda = 0. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Tada za dve matrice $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ kažemo da su <u>*S-inverzne matrice*</u> ako je za svako $\lambda \in \mathbb{C}$ ispunjen uslov: vektor $\vec{x}$ jeste λ-vektor matrice A stepena p ako i samo ako vektor $\vec{x}$ jeste $\lambda^{\dagger}$-vektor matrice B stepena p. Posebno, dve matrice $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ su <u>*S'-inverzne matrice*</u> ako za svako $\lambda \neq 0$ je ispunjen uslov: vektor $\vec{x}$ jeste λ-vektor matrice A stepena p ako i samo ako vektor $\vec{x}$ jeste λ-vektor matrice B stepena p, dok za $\lambda = 0$ stepeni 0-vektora matrica A i B nisu medusono isti.

Navodimo, bez dokaza, tvrdenje dato u [ABI-TG], kojim odredujemo pod kojim uslovima su dve matrice S'-inverzne, odnosno S-inverzne.

<u>Teorema 5.1.1.</u> *Za kvadratnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ neka postoji prirodan broj l i kvadratna matrica $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takva da je:*

$$B \cdot A^{l+1} = A^l. \tag{10}$$

Tada za svaki kompleksan broj $\lambda \neq 0$ svaki λ-vektor matrice A stepena p je istovremeno i λ^{-1}-vektor matrice B stepena p.

<u>Indeks matrice.</u> Za kvadratnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, najmanji nenegativan ceo broj k takav da je $rank(A^k) = rank(A^{k+1})$ naziva se <u>*indeks matrice A*</u> i označava se sa $Ind(A)$. Navodimo, bez dokaza, tvrdenje, dato u [SC-CM], kojim prethodnu

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

$$\begin{aligned} E &= XA & F &= AY \\ &= X(AYA) \quad (1) & &= (AXA)Y \quad (1) \\ &= (XA)(YA) & &= (AX)(AY) \\ &= (XA)(AY) \quad (5) & &= (XA)(AY) \quad (5) \\ &= EF, & &= EF. \end{aligned}$$

Odatle $E = XA = AX = AY = YA = F$. Samim tim, dobijamo traženi zaključak o jedinstvenosti

$$\begin{aligned} X &= XAX \quad (2) & Y &= YAY \quad (2) \\ &= EX & &= YF \\ &= FX & &= YE \\ &= YAX, & &= YAX. \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je matrica A indeksa $k = Ind(A) \geq 2$. Neka je minimalni polinom $\mu(x)$ matrice A, stepena m, dat formulom (11). Množeći matričnu jednačinu

$$\mu(A) = A^m + c_{m-1}A^{m-1} + \ldots + c_k A^k = 0,$$

grupnim inverzom $A^{\#}$, na osnovu jednačina (1) i (5), dobijamo, za $k \geq 2$, matričnu jednačinu nižeg stepena

$$\mu(A)A^{\#} = A^{m-1} + c_{m-1}A^{m-2} + \ldots + c_k A^{k-1} = 0,$$

na osnovu koje formula (11) ne određuje minimalni polinom stepena m. Svođenjem na apsurd, dokazano je tvrđenje teoreme. ∎

Teorema 5.2.2. *Za kvadratnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ indeksa 1 i odgovarajući q-polinom matrica $q(A)$ je jedan $\{1\}$-inverz matrice A. Sistem jednačina (1), (2) i (5) ima rešenje rešenje iskazano preko q-polinoma u obliku formule:*

$$A^{\#} = A \cdot \Big(q(A)\Big)^2 \tag{14}$$

Dokaz. Neka je $\mu(x)$ minimalni polinom matrice A i $q(x)$ q-polinom matrice A. Iz veze $\mu(x) = c_1\big(x - x^2 q(x)\big)$, gde na osnovu $Ind(A) = 1$ važi $c_1 \neq 0$, zaključujemo da važi polinomska jednačina $x\,q(x)\,x = x - \frac{1}{c_1}\mu(x)$. Odatle dobijamo da je $q(A)$ jedan $\{1\}$-inverz matrice A

$$A \cdot q(A) \cdot A = A.$$

Dalje, proverimo da je sa matricom $A^{\#}$, datom sa formulom (14), određen jedan $\{5\}$-inverz. Budući da je $x \cdot q(x) = q(x) \cdot x$ matrice A i $q(A)$ komutiraju. Otuda je

$$A \cdot A^{\#} = A^2 \cdot \big(q(A)\big)^2 = A \cdot \big(q(A)\big)^2 \cdot A = A^{\#}A.$$

Na osnovu činjenice da je $A^{\#}$ jedan $\{5\}$-inverz i na osnovu činjenice da A i $q(A)$ komutiraju dobijamo

$$A \cdot A^{\#} \cdot A = A^3\big(q(A)\big)^2 = A^2 q(A) \cdot Aq(A) = A \cdot Aq(A) = A^2 q(A) = A.$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Napomena. *U radu* [GM-PS1], *na osnovu faktorizacije punog ranga i formule* (15), *dato je više novih formula za grupni inverz u obliku blok matrica. Napomenimo da je u disertaciji* [PS], *između ostalog, dat pregled formula za grupni inverz koristeći reprezentacije sa determinatama, reprezentacie pomoću* JORDAN*ove kanonske forme, racionalne kanonske forme i u obliku blok matrica.*

Kao *doprinos*, u analogiji sa teoremom 2.4.5., dokazujemo naredno tvrđenje koje daje jedan *dovoljan uslov* za postojanje grupnog inverza.

Teorema 5.2.4. *Za matricu* $A \in \mathbb{C}_r^{n\times n}$, *neka su određene regularne matrice* $Q, P \in \mathbb{C}_n^{n\times n}$ *takve da je* $QAP = E_r$ *i pri tom neka važi blokovska dekompozicija:*

$$Q \cdot P = \left[\begin{array}{c|c} V_1 & V_2 \\ \hline V_3 & V_4 \end{array}\right] \quad (V_1 \in \mathbb{C}_r^{r\times r}). \tag{18}$$

Ako je $V_4 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(n-r)}$ *regularna matrica, tada postoji grupni inverz u obliku blok matrice:*

$$A^{\#} = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & -V_2V_4^{-1} \\ \hline -V_4^{-1}V_3 & V_4^{-1}V_3V_2V_4^{-1} \end{array}\right] \cdot Q. \tag{19}$$

Dokaz. Polazimo od opšteg oblika $\{1,2\}$-inverza u obliku blok matrice

$$X = P \cdot \begin{bmatrix} I_r & X_1 \\ X_2 & X_2X_1 \end{bmatrix} \cdot Q,$$

gde su $X_1 \in \mathbb{C}^{r\times(n-r)}$ i $X_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$ proizvoljne matrice. Odredimo matrice X_1 i X_2 iz uslova da blok matrica X ispunjava matričnu jednačinu $XA = AX$. Važi

$$XA = AX \iff P\begin{bmatrix} I_r & X_1 \\ X_2 & X_2X_1 \end{bmatrix} QQ^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = Q^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}P\begin{bmatrix} I_r & X_1 \\ X_2 & X_2X_1 \end{bmatrix} Q.$$

Odatle matrica $X \in A\{1,2\}$ ispunjava jednačinu (5) ako važi matrična jednačina

$$QP\begin{bmatrix} I_r & X_1 \\ X_2 & X_2X_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & X_1 \\ X_2 & X_2X_1 \end{bmatrix} QP.$$

Na osnovu blokovske dekompozicije (18) prethodna matrična jednačina može se zapisati u sledećem obliku

$$\begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & X_1 \\ X_2 & X_2X_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & X_1 \\ X_2 & X_2X_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix}.$$

Samim tim matrica $X \in A\{1,2\}$ ispunjava jednačinu (5) ako važi matrična jednačina

$$\begin{bmatrix} (V_1 + V_2X_2) & 0 \\ (V_3 + V_4X_2) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (V_1 + X_1V_3) & (V_2 + X_1V_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

koja se svodi na sistem

$$V_2X_2 = X_1V_3 \quad \wedge \quad V_4X_2 + V_3 = 0 \quad \wedge \quad X_1V_4 + V_2 = 0.$$

Saglasno pretpostavci o regularnosti matrice V_4 dobijamo formulu (19). Neposredno se proverava da matrica određena formulom (19) ispunjava jednačine (1), (2) i (5), tj. jeste grupni inverz. ■

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Navodimo bez dokaza dva osnovna tvrđenja u vezi EP-matrica.

Teorema 5.2.9. *Matrica $A \in \mathbb{C}_r^{n\times n}$ jeste EP-matrica ako i samo ako postoji unitarna matrica $U \in \mathbb{C}_n^{n\times n}$ i regularna matrica $C \in \mathbb{C}_r^{r\times r}$, tako da važi:*

$$A = U \cdot \left[\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \cdot U^*. \tag{20}$$

Teorema 5.2.10. *Matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, indeksa $Ind(A) = 1$, jeste EP-matrica ako i samo ako važi $N(A) = N(A^*)$ i $R(A) = R(A^*)$.*

Primer 5.2.11. *Naći grupni inverz matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Matrica A ima minimalni polinom sledećeg oblika $\mu(x) = x^3 - 15x^2 - 18x$. Dakle, matrica A je indeksa $Ind(A) = 1$, pa postoji grupni inverz matrice. Odredićemo na tri načina grupni inverz. Na osnovu primera 2.4.6. dodatno zaključujemo da je matrica A jedna EP-matrica.

I. Način. Iz minimalnog polinoma $\mu(x)$ određujemo q-polinom eksplicitno u obliku polinoma $q(x) = \frac{1}{18}x - \frac{5}{6}$. Tada, prema teoremi 5.2.2. grupni inverz je dat eksplicitno u obliku matrice

$$A^{\#} = A \cdot \big(q(A)\big)^2 = \ldots = \begin{bmatrix} \frac{-23}{36} & \frac{-1}{6} & \frac{11}{36} \\ \frac{-1}{18} & 0 & \frac{1}{18} \\ \frac{19}{36} & \frac{1}{6} & \frac{-7}{36} \end{bmatrix}.$$

II. Način. U primeru 2.4.6. (I način) određena je faktorizacija punog ranga sa matricama

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Primenom formule (15), date u teoremi 5.2.3. (a), dobijamo da je grupni inverz dat u obliku matrice

$$A^{\#} = C \cdot (DC)^{-2} \cdot D = \ldots = \begin{bmatrix} \frac{-23}{36} & \frac{-1}{6} & \frac{11}{36} \\ \frac{-1}{18} & 0 & \frac{1}{18} \\ \frac{19}{36} & \frac{1}{6} & \frac{-7}{36} \end{bmatrix}.$$

III. Način. U primeru 2.4.6. (II način) određene su regularne matrice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 6 \\ \frac{4}{3} & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad Q = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

takve da važi $QAP = E_2$. Dalje, na osnovu blokovskog razbijanja matrice

$$Q \cdot P = \left[\begin{array}{c|c} V_1 & V_2 \\ \hline V_3 & V_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 9 & -2 & -27 \\ -4 & 1 & 12 \\ \hline -\frac{19}{3} & -2 & -18 \end{array}\right]$$

određujemo podmatrice $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $X_1 = -V_2V_4^{-1} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 2/3 \end{bmatrix}$, $X_2 = -V_4^{-1}V_3 = [19/54 \ -1/9]$ i $X_3 = X_2X_1 = [65/108]$. Primenom formule (19), date u teoremi 5.2.4., dobijamo da je grupni inverz dat eksplicitno u obliku matrice

$$A^{\#} = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_2 & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] \cdot Q = \ldots = \begin{bmatrix} \frac{-23}{36} & \frac{-1}{6} & \frac{11}{36} \\ \frac{-1}{18} & 0 & \frac{1}{18} \\ \frac{19}{36} & \frac{1}{6} & \frac{-7}{36} \end{bmatrix}.$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

II. GRUPNA FUNKCIONALNA JEDNAČINA

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

1. Homogena grupna funkcionalna jednačina

1.1. Saglasnost matrice sa grupom

Uvod. Neka su $\theta_1, \ldots, \theta_n$ bijektivna preslikavanja nepraznog skupa S na samog sebe, tako da skup $G = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ u odnosu na kompoziciju funkcija $(\circ)$ obrazuje *prateću grupu* $\mathbb{G} = (G, \circ)$ reda n. Pretpostavimo da je θ_1 neutral posmatrane grupe $\mathbb{G}$. Označimo sa $\mathbb{C}$ polje kompleksnih brojeva i sa $\mathcal{F} = \{f : S \longrightarrow C\}$ skup svih funkcija koje preslikavaju skup S u polje $\mathbb{C}$.

Pod *homogenom grupnom funkcionalnom jednačinom* podrazumevamo funkcionalu jednačinu:

$$(1) \qquad a_1(x) \cdot f(\theta_1(x)) + a_2(x) \cdot f(\theta_2(x)) + \ldots + a_n(x) \cdot f(\theta_n(x)) = 0,$$

po nepoznatoj funkciji $f \in \mathcal{F}$ za zadane funkcije $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{F}$. Broj n nazvivamo *dimenzijom* funkcionalne jednačine (1). Izložićemo metodu rešavanja funkcionalne jednačine (1) datu prema radu S. PREŠIĆa [SP2] i odgovarajućem prikazu u monografiji M. KUCZMA [MK1]. U drugoj celini, kao *doprinos*, primenom inverznih permutacija, daćemo jednostavnije dokaze nekih već poznatih rezultata, kao i neke nove rezultate.

Za skup $\mathbb{I}_n \stackrel{def}{=} \{1, 2, \ldots, n\}$ posmatrajmo n permutacija $p_1, \ldots, p_n : \mathbb{I}_n \longrightarrow \mathbb{I}_n$ definisanih sa:

$$(2) \qquad p_{ij} \stackrel{def}{=} p_i(j) = m \quad \text{akko} \quad \theta_m = \theta_i \circ \theta_j,$$

gde $i, j, m \in \mathbb{I}_n$. Primetimo da se permutacije p_i $(i \in \mathbb{I}_n)$ definišu vrednostima permutacija indeksa pri kompoziciji bijekcija iz skupa G. Iz (2) sleduje:

$$(3) \qquad \theta_i \circ \theta_j = \theta_{p_{ij}},$$

za $i, j \in \mathbb{I}_n$. Važi $\theta_j = \theta_1 \circ \theta_j = \theta_{p_{1j}}$ i $\theta_i = \theta_i \circ \theta_1 = \theta_{p_{i1}}$, za $i, j \in \mathbb{I}_n$. Samim tim važi:

$$(4) \qquad p_{1j} = j \quad \text{i} \quad p_{i1} = i,$$

za $i, j \in \mathbb{I}_n$. Odatle je p_1 identička permutacija (jedinično preslikavanje). Takođe važi asocijativnost kompozicije u sledećem obliku:

$$(5) \qquad p_{ijk} \stackrel{def}{=} p_{p_{ij}k} = p_{ip_{jk}}.$$

Na osnovu prethodnog sleduje da skup $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$, u odnosu na kompoziciju $(\circ)$, obrazuje *grupu p-permutacija* $\mathbb{P} = (P, \circ)$ reda n.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Dokaz. $(a), (b)$ Jednakosti direktno sleduju iz ekvivalencije (6). (c) Za svako $i, j, k \in \mathbb{I}_n$ važi

$$\theta_{q_{p_{ik}p_{jk}}} = \theta_{p_{jk}} \circ \theta_{p_{ik}}^{-1} = (\theta_j \circ \theta_k) \circ (\theta_i \circ \theta_k)^{-1} = \theta_j \circ \theta_i^{-1} = \theta_{q_{ij}}.$$

Samim tim važi jednakost $(11c)$.

Primetimo da iz formula $(11a)$ i $(11b)$ q-permutacije određujemo, u određenom redosledu, po kolonama iz p-permutacija. Navedeno ilustrujmo primerom.

Primer 1.1.3. Neka je dat polazni niz permutacija $p_1 = (1,2,3)$, $p_2 = (2,3,1)$ i $p_3 = (3,1,2)$. Za $k = 1$ relacija $(11b)$ glasi $p_{q_{1j}1} = j$ $(j = 1,2,3)$. Samim tim $p_{q_{11}1} = 1 (= p_{11})$, $p_{q_{12}1} = 2 (= p_{21})$, $p_{q_{13}1} = 3 (= p_{31})$. Odatle, očitavamo po prvoj koloni $q_{11} = 1$, $q_{12} = 2$ i $q_{13} = 3$. Za $k = 2$ relacija $(11b)$ glasi $p_{q_{2j}2} = j$ $(j = 1,2,3)$. Odatle, očitavamo po drugoj koloni $q_{21} = 3$, $q_{22} = 1$ i $q_{23} = 2$. Za $k = 3$ relacija $(11b)$ glasi $p_{q_{3j}3} = j$ $(j = 1,2,3)$. Odatle, očitavamo po trećoj koloni $q_{31} = 2$, $q_{32} = 3$ i $q_{33} = 1$. Sveukupno određen je niz permutacija $q_1 = (1,2,3)$, $q_2 = (3,1,2)$ i $q_3 = (2,3,1)$ dobijen iz polaznog skupa permutacija zapisivanjem, u redosledu inverznih permutacija, po kolonama.

Definišimo kvadratne matrice $M_k = [\alpha_{ij}^k]$ reda n $(k \in \mathbb{I}_n)$ po koordinatama:

(12)
$$\alpha_{ij}^k = \begin{cases} 1 & : \; j = p_{ik}, \\ 0 & : \; j \neq p_{ik}. \end{cases}$$

Primenom q-permutacija formula (12) prelazi u formulu:

(13)
$$\alpha_{ij}^k = \begin{cases} 1 & : \; i = q_{kj}, \\ 0 & : \; i \neq q_{kj}. \end{cases}$$

Na osnovu formule (12) primetimo da je i-ta vrsta matrice M_k sa nulama na svim pozicijama, sem na poziciji p_{ik}. Na osnovu formule (13) primetimo da je j-ta kolona matrice M_k sa nulama na svim pozicijama sem na poziciji q_{kj}. Samim tim i-ta vrsta matrice M_k jednaka je p_{ik}-jediničnom vektoru $e_{p_{ik}}$ prostora R^n i j-ta kolona matrice M_k jednaka je q_{kj}-jediničnom vektoru $e_{q_{kj}}$ prostora R^n. Odatle, za $k = 1, \dots, n$, dobijamo eksplicitan izraz za M_k matricu zapisanu po vrstama:

(14)
$$M_k = [e_{p_{1k}}, e_{p_{2k}}, \dots, e_{p_{nk}}]_{\rightarrow}$$

i eksplicitan izraz za M_k matricu zapisanu po kolonama:

(15)
$$M_k = [e_{q_{k1}}, e_{q_{k2}}, \dots, e_{q_{kn}}]_{\downarrow}.$$

Primetimo da za matricu $M_k = [e_{p_{1k}}, e_{p_{2k}}, \dots, e_{p_{nk}}]_{\rightarrow}$ i proizvoljni vektor kolonu $\vec{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ važi:

(16)
$$M_k \cdot \vec{x}^T = M_k \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_{p_{1k}} & x_{p_{2k}} & \cdots & x_{p_{nk}} \end{bmatrix}^T.$$

Analogno, za matricu $M_k = [e_{q_{1k}}, e_{q_{2k}}, \dots, e_{q_{nk}}]_{\downarrow}$ i proizvoljni vektor vrstu $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ važi:

(17)
$$\vec{x} \cdot M_k = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \cdot M_k = \begin{bmatrix} x_{q_{k1}} & x_{q_{k2}} & \cdots & x_{q_{kn}} \end{bmatrix}.$$

gde su odgovarajuće vrste, odnosno kolone matrica jedinični vektori prostora R^3. Samim tim matrice M_1, M_2 i M_3 eksplicitno date su sa

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Primetimo da su grupe $\mathbf{M} = (\mathcal{M}, \cdot)$ i $\mathbf{P} = (P, \circ)$ međusobom izomorfne. Pri tom su grupe $\mathbf{G}$ i $\mathbf{P}$ i $\mathbf{M}$ međusobno izomorfne i anti-izomorfne sa grupom $\mathbf{Q}$. Navedeno važi i u opštem slučaju.

Teorema 1.1.5. *Grupe $\mathbb{G} = (G, \circ)$, $\mathbb{P} = (P, \circ)$ i $\mathbb{M} = (\mathcal{M}, \cdot)$ međusobno su izomorfne i anti-izomorfne sa grupom $\mathbb{Q} = (Q, \circ)$.*

Dokaz. Grupa bijekcija $\mathbb{G} = (G, \circ)$ i grupa permutacija indeksa odgovarajućih bijekcija $\mathbb{P} = (P, \circ)$ jesu izomorfne, jer je *bijekcija* $\varphi : G \longrightarrow P$ definisana sa $\varphi(\theta_k) = p_k$ izomorfizam. Zaista, uočimo $\varphi(\theta_i \circ \theta_j) = \varphi(\theta_{p_{ij}}) = p_{p_{ij}}$. Samim tim važi $(p_{p_{ij}})_s = p_{ijs} = p_{ip_{js}} = (p_i \circ p_j)_s$ za svako $s \in \mathbb{I}_n$. Odatle $p_{p_{ij}} = p_i \circ p_j$, na osnovu čega zaključujemo

$$\varphi(\theta_i \circ \theta_j) = p_{p_{ij}} = p_i \circ p_j = \varphi(\theta_i) \circ \varphi(\theta_j).$$

Dalje, posmatrajmo *bijekciju* $f : \mathcal{M} \longrightarrow P$ definisanu sa $f(M_k) = p_k$. Dokažimo da je f izomorfizam grupa $\mathbb{M} = (\mathcal{M}, \cdot)$ i $\mathbb{P} = (P, \circ)$. Za dve M-matrice M_i i M_j važi

$$M_i \cdot M_j = \begin{bmatrix} e^{\mathrm{T}}_{p_{1i}} \\ e^{\mathrm{T}}_{p_{2i}} \\ \vdots \\ e^{\mathrm{T}}_{p_{ri}} \\ \vdots \\ e^{\mathrm{T}}_{p_{ni}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{q_{j1}} & e_{q_{j2}} & \cdots & e_{q_{js}} & \cdots & e_{q_{jn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\mathrm{T}}_{(p_1 \circ p_i)_j} \\ e^{\mathrm{T}}_{(p_2 \circ p_i)_j} \\ \vdots \\ e^{\mathrm{T}}_{(p_r \circ p_i)_j} \\ \vdots \\ e^{\mathrm{T}}_{(p_n \circ p_i)_j} \end{bmatrix}.$$

Zaista, proizvod $e^{\mathrm{T}}_{p_{ri}} \cdot e_{q_{js}}$ jednak je 1 akko $q_{js} = p_{ri}$. Odatle, po pravilima izvođenja, dobijamo $p_{p_{ri}j} = s$, tj. $(p_r \circ p_i)_j = s$. Sa druge strane, neka je

$$M_t = M_i \cdot M_j = \begin{bmatrix} e^{\mathrm{T}}_{p_{1t}} \\ e^{\mathrm{T}}_{p_{2t}} \\ \vdots \\ e^{\mathrm{T}}_{p_{rt}} \\ \vdots \\ e^{\mathrm{T}}_{p_{rn}} \end{bmatrix}.$$

Iz prethodne dve jednakosti, za svako $r \in \mathbb{I}_n$, zaključujemo da važi $(p_r \circ p_i)_j = p_{rt}$, što je ekvivaletno sa $p_{rp_{ij}} = p_{rt}$. Odatle zaključujemo $t = p_{ij}$, tj. dokazana je jednakost

$$M_i \cdot M_j = M_{p_{ij}}.$$

Samim tim $f(M_i \cdot M_j) = f(M_{p_{ij}}) = p_{p_{ij}} = p_i \circ p_j = f(M_i) \circ f(M_j)$.

Anti-izomorfizam grupa $\mathbb{G}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{M}$ sa grupom $\mathbb{Q}$ sleduje na osnovu leme 1.1.1. ∎

Posledica. *Prethodno tvrđenje, ujedno predstavlja i dokaz opšte teoreme o predstavljanju grupa pomoću matrica u teoriji reprezentacija* [DK], [MM-DC].

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Nije teško proveriti da u tom slučaju za $i, j \in \mathbb{I}_n$ važi:

$$a_i(\theta_j(x)) = a_{jp_{ij}}(x) \qquad (x \in S). \tag{23}$$

Otuda, ako formiramo matricu $A(x) = [a_{ij}(x)]$, sistem jednačina (21) može se zapisati u odgovarajućem matričnom obliku:

$$A(x) \cdot \begin{bmatrix} f(\theta_1(x)) \\ f(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ f(\theta_n(x)) \end{bmatrix} = \vec{0}. \tag{24}$$

Ako uvedemo oznaku $\vec{f}(x) = [f(\theta_1(x)), \ldots, f(\theta_n(x))]^T$, tada polazna funkcionalna jednačina (1) zapisuje se u obliku ekvivalentne matrično-funkcionalne jednačine:

$$A(x) \cdot \vec{f}(x) = \vec{0}. \tag{25}$$

Homogena linearna matrično-funkcionalna jednačina (24) uvek je moguća i njeno opšte rešenje po funkciji f S. PREŠIĆ je dao u matričnom obliku:

$$\vec{f}(x) = \big(I - B(x) \cdot A(x)\big) \cdot \vec{g}(x), \tag{26}$$

za odgovarajući vektor $\vec{g}(x) = [g(\theta_1(x)), \ldots, g(\theta_n(x))]^T$ i matricu $B(x)$ za koje važe uslovi:

1°. Matrica $B(x)$, u odnosu na matricu $A(x)$, jeste jedan $\{1\}$-*inverz.*

2°. Matrica $C(x) = I - B(x)\,A(x)$ *saglasna je sa grupom* $\mathbb{G}$ i pri tom vektor $\vec{g}(x) = [g(\theta_1(x)), \ldots, g(\theta_n(x))]^T$ zavisi od jedne proizvoljne funkcije $g \in \mathcal{F}$.

Primetimo ako bi koordinate vektora $\vec{f}(x)$ bile međusobno nezavisne prvi uslov[12] predstavlja jedan dovoljan uslov da formula (26) daje opšte rešenje matrične jednačine (25). Na osnovu činjenice da se iz svake koordinate vektora $\vec{f}(x)$ može dobiti ma koja druga koordinata odgovarajućim zamenama, drugi uslov je dovoljan da navedeno svojstvo zadrži vektor rešenja.

U narednim tvrđenjima razmatramo uslov saglasnosti matrice sa grupom.

<u>Teorema 1.2.1.</u> *Ako za kvadratnu matricu* $B(x)$ *reda* n *važi uslov:*

$$B(\theta_k(x)) = M_k \cdot B(x) \cdot M_k^{-1}, \tag{27}$$

gde $k \in \mathbb{I}_n$ *i* $x \in S$, *tada je matrica* $B(x)$ *saglasna sa grupom* $\mathbb{G}$.

[12] SAGLASNO TREĆEM DELU PRVE CELINE

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Dokaz. Dovoljno je dokazati jednakost:

$$A(\theta_k(x)) = M_k A(x)\, M_k^{-1}, \tag{31}$$

za svako $k \in \mathbb{I}_n$ i $x \in S$. Sa jedne strane, prema formuli (22), dobijamo:

$$A(\theta_k(x)) = [a_{ij}(\theta_k(x))] = [a_{q_{ij}}(\theta_i \circ \theta_k(x))] = [a_{q_{ij}}(\theta_{p_{ik}}(x))].$$

Sa druge strane, prema formulama (18) i (19), dobijamo

$$M_k A(x)\, M_k^{-1} = M_k[a_{ij}(x)]\, M_k^{-1} = M_k[a_{ip_{jk}}(x)] = [a_{p_{ik}p_{jk}}(x)] = [a_{q_{p_{ik}p_{jk}}}(\theta_{p_{ik}}(x))].$$

Prema formuli (11c), leme 1.1.2., važi $[a_{q_{p_{ik}p_{jk}}}(\theta_{p_{ik}}(x))] = [a_{q_{ij}}(\theta_{p_{ik}}(x))]$. Odatle, na osnovu prethodne dve jednakosti, sleduje jednakost (31). ∎

Teorema 1.2.3. *Za funkcionalnu jednačinu* (1) *kvadratna matrica:*

$$B(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_k^{-1} A^{(1)}(\theta_k(x))\, M_k, \tag{32}$$

jeste $\{1\}$*-inverz matrice* $A(x)$ *koji je saglasan sa grupom* $\mathbb{G}$, *gde je* $A^{(1)}(x)$ *ma koji* $\{1\}$*-inverz matrice* $A(x)$.

Dokaz. Proverimo da je sa matricom $B(x)$ dat $\{1\}$-inverz matrice $A(x)$. U dokazu koristimo posledicu formule (31):

$$A(x) = M_k^{-1} A(\theta_k(x))\, M_k, \tag{$*$}$$

za $k \in \mathbb{I}_n$ i $x \in S$. Odatle:

$$\begin{aligned}
A(x)\,B(x)\,A(x) &= A(x)\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_k^{-1}A^{(1)}(\theta_k(x))\,M_k\Big)A(x)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A(x)\,M_k^{-1}A^{(1)}(\theta_k(x))\,M_k A(x)\\
&\underset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{n}\frac{\big(M_k^{-1}A(\theta_k(x))\,M_k\big)\,M_k^{-1}A^{(1)}(\theta_k(x))\,M_k\big(M_k^{-1}A(\theta_k(x))\,M_k\big)}{n}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{M_k^{-1}A(\theta_k(x))\,A^{(1)}(\theta_k(x))\,A(\theta_k(x))\,M_k}{n}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{M_k^{-1}A(\theta_k(x))\,M_k}{n} \underset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{n}\frac{A(x)}{n} = A(x).
\end{aligned}$$

Dalje, proverimo saglasnost matrice $B(x)$ sa grupom $\mathbb{G}$. Za $k \in \mathbb{I}_n$ i $x \in S$ važi

$$\begin{aligned}
B(\theta_k(x)) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} M_j^{-1}A^{(1)}(\theta_j \circ \theta_k(x))\,M_j\\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} M_k(M_jM_k)^{-1}A^{(1)}(\theta_{p_{jk}}(x))\,(M_jM_k)M_k^{-1}\\
&= M_k\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{(M_jM_k)^{-1}A^{(1)}(\theta_{p_{jk}}(x))\,(M_jM_k)}{n}\Big)\,M_k^{-1}
\end{aligned}$$

Saglasno napomeni 2 teoreme 1.2 (prve celine) matrična formula (34), odnosno koordinatna formula (35), zadržava-reprodukuje sva rešenja funkcionalne jednačine (1). ■

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

1.3. Metod minimalnog polinoma

U ovom paragrafu izlažemo metod rešavanja homogene grupne funkcionalne jednačine pomoću minimalnog polinoma koji potiče od S. PREŠIĆa [SP2].

Teorema 1.3.1. *Za funkcionalnu jednačinu* (1) *neka matrica* $A(x) = [a_{q_{ij}}(x)]$ *ispunjava uslov:*

$$A^m(x) + \lambda_{m-1}A^{m-1}(x) + \ldots + \lambda_1 A(x) = 0, \tag{36}$$

za svako $x \in S$ *i njime određene koeficijente* $\lambda_{m-1}, \ldots, \lambda_1 \in C$ $(\lambda_1 \neq 0)$ *i prirodan broj* $m > 1$. *Opšte rešenje funkcionalne jednačine* (1) *dato je u obliku matrične formule:*

$$\begin{bmatrix} f(\theta_1(x)) \\ f(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ f(\theta_n(x)) \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_1}(A^{m-1}(x) + \lambda_{m-1}A^{m-2}(x) + \ldots + \lambda_1 I) \cdot \begin{bmatrix} g(\theta_1(x)) \\ g(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ g(\theta_n(x)) \end{bmatrix}, \tag{37}$$

gde je $g \in \mathcal{F}$ *proizvoljna funkcija.*

Prema pretpostavci (36), prethodne teoreme, matrica $A(x)$ je indeksa $Ind\big(A(x)\big) = 1$ za sve vrednosti $x \in S$. Pod navedenom pretpostavkom postoji grupni inverz $A(x)^{\#}$ za sve vrednosti $x \in S$. Dokažimo tvrđenje koje daje formulu opšteg rešenja preko grupnog inverza. Važi naredno tvrđenje.

Teorema 1.3.2. *Za funkcionalnu jednačinu* (1) *neka matrica* $A(x) = [a_{q_{ij}}(x)]$ *ispunjava uslov* (36). *Neka je* $A(x)^{\#}$ *grupni inverz matrice* $A(x)$ *za sve vrednosti* $x \in S$. *Opšte reproduktivno rešenje funkcionalne jednačine* (1) *dato je matričnom formulom:*

$$\begin{bmatrix} f(\theta_1(x)) \\ f(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ f(\theta_n(x)) \end{bmatrix} = \Big(I - A(x)^{\#}A(x)\Big) \cdot \begin{bmatrix} g(\theta_1(x)) \\ g(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ g(\theta_n(x)) \end{bmatrix}, \tag{38}$$

gde je $g \in \mathcal{F}$ *proizvoljna funkcija. Pri tom su formule opšteg rešenja* (37) *i* (38) *jednake u svakoj tački* $x \in S$.

Odatle, prema teoremi 1.2.3, jedan $\{1\}$-inverz koji se slaže sa grupom $\mathbb{G}$ dat je sa formulom

$$B = \frac{1}{3}\Big(M_1^{-1}A^{(1)}M_1 + M_2^{-1}A^{(1)}M_2 + M_3^{-1}A^{(1)}M_3\Big) = \frac{1}{3}I.$$

Prema teoremi 1.2.4. opšte reproduktivno rešenje funkcionalne jednačine dato je matričnom formulom

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} f(\theta_1(x)) \\ f(\theta_2(x)) \\ f(\theta_3(x)) \end{bmatrix} &= \Big(I - B(x)\cdot A(x)\Big)\cdot \begin{bmatrix} g(\theta_1(x)) \\ g(\theta_2(x)) \\ g(\theta_3(x)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g(\theta_1(x)) \\ g(\theta_2(x)) \\ g(\theta_3(x)) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

odnosno, po prvoj koordinati, skalarnom formulom

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}\big(2g(x_1, x_2, x_3) - g(x_2, x_3, x_1) - g(x_3, x_1, x_2)\big),$$

gde je $g \in \mathcal{F}$ proizvoljna funkcija. Ako u postupku rešavanja biramo opšti $\{1\}$-inverz, sa 8 medjusobno nezavisnih parametara, tada dolazimo do iste formule opšteg rešenja. Navedeno važi i u opštem slučaju za homogene grupne funkcionalne jednačine sa konstantnim koeficijentima.

2. Homogena grupna funkcionalna jednačina sa konstantnim koeficijentima

Posmatrajmo homogenu grupnu funkcionalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima:

(1) $$a_1 \cdot f(\theta_1(x)) + a_2 \cdot f(\theta_2(x)) + \ldots + a_n \cdot f(\theta_n(x)) = 0,$$

po nepoznatoj funkciji $f \in \mathcal{F}$ za zadane konstantne koeficijente $a_1, \ldots, a_n \in C$. Zadržaćemo oznake koje smo uveli u razmatranju opšte homogene grupne funkcionalne jednačine.

2.1. Prešićev matrični metod

Navodimo specifičnosti matričnog metoda rešavanja funkcionalne jednačine (1), prema radu S. Prešića [SP1], za slučaj konstantnih koeficijenata. Ako je $A = [a_{ij}]$ konstantna matrica, koja ne zavisi od $x \in S$, tada $\{1\}$-inverz $A^{(1)}$ takodje ne zavisi od $x \in S$. Za funkcionalnu jednačinu (1) kvadratna matrica $B = [b_{ij}]$ formirana na sledeći način:

(2) $$B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M_i^{-1}A^{(1)}M_i,$$

jeste $\{1\}$-inverz matrice A koji je saglasan sa grupom $\mathbb{G}$ i ne zavisi od $x \in S$. U tom slučaju eksplicitna formula opšteg rešenja (35), navedena u prvom delu, data je u obliku:

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Prelazimo na određivanje veze između parametara. Primetimo da ako u k-toj jednačini

$$\mathcal{J}_k = a_1 A_{p_{1k}} + a_2 A_{p_{2k}} + \ldots + a_n A_{p_{nk}}$$

izvršimo zamenu $x \mapsto \theta_r(x)$, tada $A_{p_{ik}} = f(\theta_{p_{ik}}(x))$ prelazi u $f(\theta_{p_{ik}} \circ \theta_r(x)) = f(\theta_{p_{p_{ik}r}}(x)) = f(\theta_{p_{ip_{kr}}}(x)) = A_{p_{ip_{kr}}}$ $(i \in \mathbb{I}_n)$. Navedenom zamenom $x \mapsto \theta_r(x)$, cela k-ta jednačina $\mathcal{J}_k$ prelazi u p_{kr}-tu jednačinu $\mathcal{J}_{p_{kr}}$ datu sa

$$\mathcal{J}_k^{(r)} = \mathcal{J}_{p_{kr}} \stackrel{def}{=} a_1 A_{p_{1p_{kr}}} + a_2 A_{p_{2p_{kr}}} + \ldots + a_n A_{p_{np_{kr}}}.$$

Polazeći od formule (8) pomoću zamena $x \mapsto \theta_1(x), x \mapsto \theta_2(x), \ldots, x \mapsto \theta_n(x)$ formiramo sistem:

$$\text{(9)} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} A_1 & = & A_1 - \lambda_1 \mathcal{J}_{p_{11}} - \lambda_2 \mathcal{J}_{p_{21}} - \ldots - \lambda_n \mathcal{J}_{p_{n1}}, \\ A_2 & = & A_2 - \lambda_1 \mathcal{J}_{p_{12}} - \lambda_2 \mathcal{J}_{p_{22}} - \ldots - \lambda_n \mathcal{J}_{p_{n2}}, \\ & \vdots & \\ A_n & = & A_n - \lambda_1 \mathcal{J}_{p_{1n}} - \lambda_2 \mathcal{J}_{p_{2n}} - \ldots - \lambda_n \mathcal{J}_{p_{nn}}. \end{array} \right\}$$

U terminima q-permutacija prethodni sistem zapisujemo u obliku:

$$\text{(10)} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} A_1 & = & A_1 - \lambda_{q_{11}} \mathcal{J}_1 - \lambda_{q_{12}} \mathcal{J}_2 - \ldots - \lambda_{q_{1n}} \mathcal{J}_n, \\ A_2 & = & A_2 - \lambda_{q_{21}} \mathcal{J}_1 - \lambda_{q_{22}} \mathcal{J}_2 - \ldots - \lambda_{q_{2n}} \mathcal{J}_n, \\ & \vdots & \\ A_n & = & A_n - \lambda_{q_{n1}} \mathcal{J}_1 - \lambda_{q_{n2}} \mathcal{J}_2 - \ldots - \lambda_{q_{nn}} \mathcal{J}_n. \end{array} \right\}$$

Samim tim, odgovarajuće rešenja matrične jednačine (7) tražimo u obliku matrične formule:

$$\text{(11)} \qquad \vec{A} = \varphi(\vec{A}) = \vec{A} - \Lambda \cdot \vec{\mathcal{J}} = (I - \Lambda\, \mathbf{A}) \cdot \vec{A},$$

gde je Λ matrica nepoznatih parametara koji ispunjavaju dodatne jednakosti[16]:

$$\text{(12)} \qquad \Lambda = [\lambda_{ij}] = [\lambda_{q_{ij}}],$$

za $i, j \in \mathbb{I}_n$.

Iz (10) zamenom izraza za $A_1, A_2, \ldots, A_n$ u polaznu jednačinu (4) dobijamo:

$$\begin{array}{c} a_1(A_1 - \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{q_{1j}} \mathcal{J}_j) + a_2(A_2 - \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{q_{2j}} \mathcal{J}_j) + \ldots + a_n(A_2 - \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{q_{nj}} \mathcal{J}_j) = 0 \\ \iff a_1\big(A_1 - \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{q_{j1}} \sum\limits_{r=1}^{n} a_{q_{jr}} A_r\big) + a_2\big(A_2 - \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{q_{j2}} \sum\limits_{r=1}^{n} a_{q_{jr}} A_r\big) + \ldots + \\ a_k\big(A_k - \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{q_{jk}} \sum\limits_{r=1}^{n} a_{q_{jr}} A_r\big) + \ldots + a_n\big(A_n - \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{q_{jn}} \sum\limits_{r=1}^{n} a_{q_{jr}} A_r\big) = 0 \end{array}$$

[16] NA OSNOVU KOJIH JE Λ MATRICA ODREDJENA q-PERMUTACIJAMA ELEMENATA PRVE VRSTE

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

(*ii*) U radu [SN3] pokazano je da uslov, iz pretpostavke teoreme, jeste dovoljan za zaključak: jednakost (12) ekvivaletna je sa saglasnošću matrice Λ sa pratećom grupom. Prema prethodnom delu teoreme matrica Λ, u odnosu na matricu A, jeste jedan $\{1\}$-inverz. Iz $A\Lambda A = A$ primenom tenzorske veze između koeficijenata linearnog sistema dobijamo sistem (14). Dalje, iz prvih n jednačina sistema (14) koristeći jednakosti (12) ili ekvivaletno uslov saglasnosti matrice sa pratećom grupom, dobijamo Λ-sistem. Odatle svaki $\{1\}$-inverz saglasan sa pratećom grupom jeste rešenje Λ-sistema. Prema teoremi 1.2.3. skup takvih matrica jeste neprazan skup, na osnovu čega zaključujemo da je Λ-sistem uvek moguć. ∎

Teorema 2.2.2. *Ako postoji tačka $x_0 \in S$, takva da za svako $i \in \mathbb{I}_n \backslash \{1\}$ važi $\theta_i(x_0) \neq x_0$, tada za matricu Λ određenu iz Λ-sistema formula opšteg reproduktivnog rešenja funkcionalne jednačine* (1) *data je sa:*

$$f(x) = \Pi(x) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_j a_{ij} \Pi(\theta_i(x)), \tag{16}$$

gde je $\Pi \in \mathcal{F}$ proizvoljna funkcija.

Dokaz. Na osnovu prethodne teoreme Λ-sistem homogene grupne funkcionalne jednačine sa konstantnim koeficijentima (1) je moguć. Matrica $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ određena iz Λ-sistema jeste jedan $\{1\}$-inverz saglasan sa pratećom grupom. Za proizvoljnu funkciju $\Pi \in \mathcal{F}$ vratimo smene $A_1 = \Pi(\theta_1(x)), A_2 = \Pi(\theta_2(x)), \ldots, A_n = \Pi(\theta_n(x))$ u desnu stranu formule (11). Na taj način dobijamo jedno rešenje funkcionalne jednačine (1) u matričnom obliku. Na osnovu reproduktivnosti tako određene matrične formule rešenje je opšte. Odatle po prvoj koordinati opšte reproduktivno rešenje dato je u skalarnom obliku (16). ∎

Kao *doprinos* dokazaćemo[17] korišćenu činjenicu u dokazu teoreme 2.2.1. (*ii*) da je jednakost (12) ekvivaletna sa saglašnošću matrice Λ sa pratećom grupom. Dokaz je dat prema radu S. Nikčević [SN3] u terminima p i q permutacija.

Navodimo, bez dokaza, naredno pomoćno tvrđenje[18] za proizvoljne grupe [SN3].

Lema 2.2.3. *Ako postoji tačka $x_0 \in S$, takva da za svako $i \in \mathbb{I}_n \backslash \{1\}$ važi $\theta_i(x_0) \neq x_0$, tada za svaku funkciju $\varphi \in \mathcal{F}$ važi:*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(\theta_i(x)) = 0 \iff \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0, \tag{17}$$

za ma koji izbor skalara $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in C$ i $x \in S$.

[17] U OBLIKU TEOREME 2.2.4.
[18] RANIJE DOKAZANO ZA CIKLIČNE GRUPE U [SP-BZ]

(*i*) *Matrica* B *je saglasna sa grupom* $\mathbb{G}$.

(*ii*) *Za elemente matrice* $B = [b_{ij}]$ *važi* $b_{ij} = b_{q_{ji}}$ $(i, j \in \mathbb{I}_n)$.

(*iii*) *Važi matrična jednakost* $M_k B M_k^{-1} = B$ *za svako* $k \in \mathbb{I}_n$.

Dokaz. (*i*) $\Longleftrightarrow$ (*ii*) Dokazano sa teoremom 2.2.4. (*ii*) $\Longrightarrow$ (*iii*) Analogno sa dokazom teoreme[19] 1.2.2. (*iii*) $\Longrightarrow$ (*i*) Dokazano sa teoremom 1.2.1. ■

Na kraju, kao *doprinos*, dokazujemo da za svaki izbor Λ matrice, formula opšteg reproduktivnog rešenja (16) funkcionalne jednačine (1) ima jednoznačno određene koeficijente uz sabirke $\Pi(\theta_i(x))$ $(i \in \mathbb{I}_n)$. Naime, važi naredno tvrđenje.

Teorema 2.2.6. *Neka postoji tačka* $x_0 \in S$, *takva da za svako* $i \in \mathbb{I}_n \backslash \{1\}$ *važi* $\theta_i(x_0) \neq x_0$. *Za ma koju matricu* $\Lambda = [\lambda_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, *koja je* $\{1\}$*-inverz matrice* A *saglasan sa grupom* $\mathbb{G}$, *skalari* $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} a_{ij}$ $(i \in \mathbb{I}_n)$ *jedinstveno su određeni.*

Dokaz. Neka su Λ' i Λ'' ma koja dva $\{1\}$-inverza matrice A saglasna sa pratećom grupom. Za matricu Λ' formirajmo skalare $\alpha_i' = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}' a_{ij}$ $(i = 1, \ldots, n)$ i za matricu Λ'' formirajmo skalare $\alpha_i'' = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}'' a_{ij}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Formirajmo dve formule rešenja

$$\Phi'(\Pi) = \Pi(x) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \Pi(\theta_i(x))$$

i

$$\Phi''(\Pi) = \Pi(x) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i'' \Pi(\theta_i(x)),$$

gde je $\Pi \in \mathcal{F}$ proizvoljna funkcija. Oduzimanjem prethodnih funkcija dobijamo

$$\Phi'(\Pi) - \Phi''(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i' - \alpha_i''\right) \Pi(\theta_i(x)).$$

Uzimajući za Π ma koje rešenje f funkcionalne jednačine (1), na osnovu reproduktivnosti prethodnih formula rešenja, važi $\Phi'(f) - \Phi''(f) = f - f = 0$. Odatle, saglasno lemi 2.2.3., zaključujemo $\alpha_i' = \alpha_i''$ $(i = 1, \ldots, n)$. ■

Na kraju ovog paragrafa, pod pretpostavkom prethodne teoreme, za ma koji izbor Λ matrice kao $\{1\}$-inverza saglasnog sa pratećom grupom, formula opšteg reproduktivnog rešenja funkcionalne jednačine (1) data je u jedinstveno određenom *kanonskom obliku*:

$$f = \Phi(\Pi) \stackrel{def}{=} \Pi(x) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Pi(\theta_i(x)), \tag{22}$$

za jedinstveno određene skalare $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} a_{ij}$ $(i \in \mathbb{I}_n)$ i $\Pi \in \mathcal{F}$ proizvoljnu funkciju. U trećem delu, ove celine, dajemo kanonske oblike homogene grupne funkcionalne jednačine sa konstantnim koeficijentima za dimenzije $n = 2, 3, 4$.

[19] UZ KORIŠĆENJE LEME 1.1.2. I FORMULA (18) I (19) PARAGRAFA 1.1.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

J. KEČKIĆ u radu [JK5] primenio je metod eliminacionog polinoma na rešavanje homogene funkcionalne jednačine sa konstantnim koeficjentima. Potpunosti radi izložićemo, bez navođenja dokaza, osnovne rezultate u vezi sa metodom eliminacionog polinoma.

Na skupu $\mathcal{F}$ definišimo funkciju $F = F(f) : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ na sledeći način:

$$F(f)(x) = a_1 f(\theta_1(x)) + \ldots + a_n f(\theta_n(x)). \tag{26}$$

Tada funkciju $F^2(f) = F\big(F(f)\big)$ možemo odrediti na sledeći način:

$$\begin{aligned} F\big(F(f)\big)(x) &= a_1 F\big(f(\theta_1(x))\big) + \ldots + a_n F\big(f(\theta_n(x)\big) \\ &= a_1\Big(a_1 f(\theta_1 \circ \theta_1(x)) + \ldots + a_n f(\theta_n \circ \theta_1(x))\Big) + \\ &\vdots \\ &+ a_n\Big(a_1 f(\theta_1 \circ \theta_n(x)) + \ldots + a_n f(\theta_n \circ \theta_n(x))\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{i=1}^{n} a_i f(\theta_i \circ \theta_j(x)) = \sum_{i_2=1}^{n}\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_2} a_{i_1} f(\theta_{p_{i_1 i_2}}(x)) \;=\; \sum_{i=1}^{n} b_j^{(2)} f(\theta_j(x)), \end{aligned}$$

za odgovarajuće koeficijente $b_j^{(2)} \in C$ $(j \in \mathbb{I}_n)$. U opštem slučaju, za ma koji prirodan broj k, funkcija $F^k(f) = F\big(F^{k-1}(f)\big)$ može se prikazati u obliku jednakosti:

$$F^k(f)(x) = \sum_{i=1}^{n} b_j^{(k)} f(\theta_j(x)), \tag{$\mathfrak{f}_k$}$$

za odgovarajuće koeficijente $b_j^{(k)} \in C$ $(j \in \mathbb{I}_n)$. Primetimo da postoji prirodan broj $p \leq n$ takav da se iz spiska jednakosti $(\mathfrak{f}_1)$, …, $(\mathfrak{f}_p)$ eliminacijom $f(\theta_i(x))$ $(i \in \mathbb{I}_n)$ dobija normalizovan polinom:

$$F^p + c_{p-1}F^{p-1} + \ldots + c_1 F + c_0 I = 0, \tag{27}$$

za određene koeficijente $c_0, c_1, \ldots, c_{p-1} \in C$. Pri tome je $I = I(x) = x$ identičko preslikavanje. Prethodno određen polinom nazivamo <u>*eliminacioni polinom*</u> homogene grupne funkcionalne jednačine sa konstantnim koeficijentima (1). Može se pokazati da ako je $c_0 \neq 0$, tada je opšte rešenje trivijalno $f(x) = 0$. Dalje, u analogiji sa teoremom 2.3.1., J. KEČKIĆ je dao tvrđenje, koje navodimo bez dokaza, na osnovu koga se primenjuje metod eliminacionog polinoma.

<u>**Teorema 2.4.1.**</u> *Neka za funkcionalnu jednačinu* (1) *funkcija* F *definisana sa jednakošću* (26) *ispunjava uslov:*

$$F^p + c_{p-1}F^{p-1} + \ldots + c_1 F = 0, \tag{28}$$

za određene koeficijente $c_{p-1}, \ldots, c_1 \in C$ $(c_1 \neq 0)$ *i prirodan broj* $p > 1$. *Opšte rešenje funkcionalne jednačine* (1) *je dato formulom:*

$$f(x) = \frac{1}{c_1}\Big(F^{p-1}(\Pi(x)) + c_{p-1}F^{p-2}(\Pi(x)) + \ldots + c_1\Pi(x)\Big) \tag{29}$$

gde je $\Pi \in \mathcal{F}$ *proizvoljna funkcija.*

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

3.1. Ciklične grupne funkcionalne jednačine

Teorema 3.1.1. *Homogena grupna funkcionalna jednačina sa konstantnim koeficijentima drugog reda:*

(1) $$a_0 f(x_1, x_2) + a_1 f(x_2, x_1) = 0,$$

po nepoznatoj funkciji $f = f(x, y) : S^2 \longrightarrow C$, *gde skup* S *ima bar dva različita elementa, u zavisnosti od koeficijenata* $a_{0,1} \in C$, *ima opšte reproduktivno rešenje dato sa formulama:*

1^0. *Ako važi uslov* $a_0 = a_1 = 0$ *tada je opšte reproduktivno rešenje dato u obliku:*

(2) $$f(x_1, x_2) = \Pi(x_1, x_2).$$

2^0. *Ako važi uslov* $a_0 = -a_1 \neq 0$ *tada je opšte reproduktivno rešenje dato u obliku:*

(3) $$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(\Pi(x_1, x_2) + \Pi(x_2, x_1)).$$

3^0. *Ako važi uslov* $a_0 = a_1 \neq 0$ *tada je opšte reproduktivno rešenje dato u obliku:*

(4) $$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(\Pi(x_1, x_2) - \Pi(x_2, x_1)).$$

4^0. *Ako važi uslov* $a_0^2 \neq a_1^2$ *tada je opšte reproduktivno rešenje dato u obliku:*

(5) $$f(x_1, x_2) = 0.$$

U prethodnom formulama $(2)-(5)$ *sa* $\Pi : S^2 \longrightarrow C$ *označena je proizvoljna funkcija.*

Dokaz. Za $X = (x_1, x_2)$ uvedimo bijekcije $i(X) = (x_1, x_2)$ i $\alpha(X) = (x_2, x_1)$. Skup $G = \{i, \alpha\}$ u odnosu na kompoziciju ($\circ$) obrazuje cikličnu grupu $\mathbb{G}$ datu tablicom:

(6)

$\circ$	i	α
i	i	α
α	α	i

Označimo $A = f(X)$ i $B = f(\alpha X)$, tada funkcionalna jednačina (1) prelazi u jednačinu $\mathcal{J}_1 = a_0 A + a_1 B = 0$. Zamenama $X \mapsto i(X)$ i $X \mapsto \alpha(X)$ iz prethodne jednačine dobijamo sistem:

(7) $$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{J}_1 = a_0 A + a_1 B = 0, \\ \mathcal{J}_2 = a_0 B + a_1 A = 0, \end{array} \right\}$$

po nepoznatim A i B. Rešimo sistem (7). Rešenja tražimo u obliku formule:

(8) $$A = A + \lambda \mathcal{J}_1 + \mu \mathcal{J}_2.$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Teorema 3.1.2. *Homogena grupna funkcionalna jednačina sa konstantnim koeficijentima trećeg reda:*

$$a_0 f(x_1, x_2, x_3) + a_1 f(x_2, x_3, x_1) + a_2 f(x_3, x_1, x_2) = 0, \tag{17}$$

po nepoznatoj funkciji $f = f(x, y, z) : S^3 \longrightarrow C$, *gde skup* S *ima bar dva različita elementa, u zavisnosti od koeficijenata* $a_{0,1,2} \in C$, *ima opšte reproduktivno rešenje dato sa formulama:*

1^0. *Ako važi uslov* $a_0 + a_1 + a_2 = 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 = 0$ *tada je opšte reproduktivno rešenje dato u obliku:*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \Pi(x_1, x_2, x_3). \tag{18}$$

2^0. *Ako važi uslov* $a_0 + a_1 + a_2 = 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 \neq 0$ *tada je opšte reproduktivno rešenje dato u obliku:*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}\big(\Pi(x_1, x_2, x_3) + \Pi(x_2, x_3, x_1) + \Pi(x_3, x_1, x_2)\big). \tag{19}$$

3^0. *Ako važi uslov* $a_0 + a_1 + a_2 \neq 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 = 0$ *tada je opšte reproduktivno rešenje dato u obliku:*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}\big(2\Pi(x_1, x_2, x_3) - \Pi(x_2, x_3, x_1) - \Pi(x_3, x_1, x_2)\big). \tag{20}$$

4^0. *Ako važi uslov* $a_0 + a_1 + a_2 \neq 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 \neq 0$ *tada je opšte reproduktivno rešenje dato u obliku:*

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0. \tag{21}$$

U prethodnom formulama (17) – (21) *sa* $\Pi : S^3 \longrightarrow C$ *označena je proizvoljna funkcija.*

Teorema 3.1.3. *Homogena grupna funkcionalna jednačina sa konstantnim koeficijentima četvrtog reda:*

$$a_0 f(x_1, x_2, x_3, x_4) + a_1 f(x_2, x_3, x_4, x_1) + a_2 f(x_3, x_4, x_1, x_2) + a_3 f(x_4, x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{22}$$

po nepoznatoj funkciji $f = f(x, y, z, w) : S^4 \longrightarrow C$, *gde skup* S *ima bar dva različita elementa, u zavisnosti od koeficijenata* $a_{0,1,2,3} \in C$, *ima opšte reproduktivno rešenje dato sa formulama:*

1^0. *Ako važi uslov* $a_1 = -a_0, a_2 = a_0, a_3 = -a_0, a_0 \neq 0$ *tada je opšte reproduktivno rešenje dato u obliku:*

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) \;&=\; \tfrac{3}{4}\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4) + \tfrac{1}{4}\Pi(x_2, x_3, x_4, x_1) \\ &-\; \tfrac{1}{4}\Pi(x_3, x_4, x_1, x_2) + \tfrac{1}{4}\Pi(x_4, x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \tag{23}$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

3.2. Klein-ova grupna funkcionalna jednačina

Odredimo sve kanonske oblike opštih reproduktivnih rešenja za KLEINovu homogenu grupnu funkcionalnu jednačinu, sa konstantnim koeficijentima:

(31) $a_0 f(x_1,x_2,x_3,x_4)+a_1 f(x_2,x_1,x_4,x_3)+a_2 f(x_3,x_4,x_1,x_2)+a_3 f(x_4,x_3,x_2,x_1)=0,$

po nepoznatoj funkciji $f=f(x,y,z,w):S^4\longrightarrow C$, u zavisnosti od koeficijenata $a_{0,1,2,3}\in C$. Za $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ uvedimo bijekcije $\theta_1(X)=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $\theta_2(X)=(x_2,x_1,x_4,x_3)$, $\theta_3(X)=(x_3,x_4,x_1,x_2)$ i $\theta_4(X)=(x_4,x_3,x_2,x_1)$. Tada KLEINovu funkcionalnu jednačinu (31) zapisujemo u obliku:

(32) $$a_0\cdot f(\theta_1(X))+a_1\cdot f(\theta_2(X))+a_2\cdot f(\theta_3(X))+a_3\cdot f(\theta_4(X))=0,$$

Skup bijekcija $G=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\}$ u odnosu na kompoziciju ($\circ$) obrazuje KLEINovu grupu reda 4:

(33)

$\circ$	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
θ_1	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
θ_2	θ_2	θ_1	θ_4	θ_3
θ_3	θ_3	θ_4	θ_1	θ_2
θ_4	θ_4	θ_3	θ_2	θ_1

Pri tome je θ_1 neutral KLEINove grupe $\mathbb{G}=(G,\circ)$. Ako označimo $A=f(\theta_1(X))$, $B=f(\theta_2(X))$, $C=f(\theta_3(X))$ i $D=f(\theta_4(X))$, tada funkcionalna jednačina (32) zamenama: $X\mapsto\theta_1(X)$, $X\mapsto\theta_2(X)$, $X\mapsto\theta_3(X)$ i $X\mapsto\theta_4(X)$ prelazi u sistem:

(34) $$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{J}_1=a_0A+a_1B+a_2C+a_3D=0,\\ \mathcal{J}_2=a_0B+a_1A+a_2D+a_3C=0,\\ \mathcal{J}_3=a_0C+a_1D+a_2A+a_3B=0,\\ \mathcal{J}_4=a_0D+a_1C+a_2B+a_3A=0, \end{array}\right\}$$

po nepoznatim A, B, C i D. Matrica sistema (34) je data sa:

(35) $$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3\\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2\\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1\\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Determinanta matrice $\mathbf{A}$ je data sa:

(36) $$\begin{array}{rcl}\Delta=|\mathbf{A}| & = & (a_0+a_1+a_2+a_3)\cdot(a_0+a_1-a_2+a_3)\cdot\\ & & (a_0+a_3-a_1-a_2)\cdot(a_0+a_2-a_1-a_3).\end{array}$$

Rešenja tražimo sistema (34) tražimo u obliku formule:

(37) $$A=A+\lambda_1\mathcal{J}_1+\lambda_2\mathcal{J}_2+\lambda_3\mathcal{J}_3+\lambda_4\mathcal{J}_4.$$

4^0. *Ako važi* $a_0 = a_1+a_2-a_3$ *i* $a_1+a_2,\ a_2-a_3,\ -a_3+a_1 \neq 0$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato sa:*

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \tfrac{1}{4}(\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4)-\Pi(x_1,x_2,x_4,x_3)- \\
&\quad \Pi(x_3,x_4,x_1,x_2)+\Pi(x_4,x_3,x_2,x_1)).
\end{aligned} \tag{46}
$$

5^0. *Ako važi* $a_0 = a_1-a_2+a_3$ *i* $a_1-a_2,\ -a_2+a_3,\ a_3+a_1 \neq 0$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato sa:*

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \tfrac{1}{4}(\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4)-\Pi(x_1,x_2,x_4,x_3)+ \\
&\quad \Pi(x_3,x_4,x_1,x_2)-\Pi(x_4,x_3,x_2,x_1)).
\end{aligned} \tag{47}
$$

6^0. *Ako važi* $a_0 = -a_3,\ a_1 = -a_2$ *i* $|a_1| \neq |a_3|$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato sa:*

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{2}(\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4)+\Pi(x_4,x_3,x_2,x_1)). \tag{48}$$

7^0. *Ako važi* $a_0 = -a_1,\ a_3 = -a_2$ *i* $|a_1| \neq |a_2|$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato sa:*

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{2}(\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4)+\Pi(x_2,x_1,x_4,x_3)). \tag{49}$$

8^0. *Ako važi* $a_0 = -a_2,\ a_3 = -a_1$ *i* $|a_1| \neq |a_2|$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato sa:*

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{2}(\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4)+\Pi(x_3,x_4,x_1,x_2)). \tag{50}$$

9^0. *Ako važi* $a_0 = a_2,\ a_3 = a_1$ *i* $|a_1| \neq |a_2|$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato sa:*

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{2}(\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4)-\Pi(x_3,x_4,x_1,x_2)). \tag{51}$$

10^0. *Ako važi* $a_0 = a_3,\ a_1 = a_2$ *i* $|a_2| \neq |a_3|$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato sa:*

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{2}(\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4)-\Pi(x_4,x_3,x_2,x_1)). \tag{52}$$

11^0. *Ako važi* $a_0 = a_1,\ a_3 = a_2$ *i* $|a_1| \neq |a_2|$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato sa:*

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{2}(\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4)-\Pi(x_2,x_1,x_4,x_3)). \tag{53}$$

12^0. *Ako važi* $a_0 = a_1 = -a_2 = -a_3$ *i* $|a_3| \neq 0$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato sa:*

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \tfrac{1}{4}(3\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4)-\Pi(x_1,x_2,x_4,x_3)+ \\
&\quad \Pi(x_3,x_4,x_1,x_2)+\Pi(x_4,x_3,x_2,x_1)).
\end{aligned} \tag{54}
$$

13^0. *Ako važi* $a_0 = -a_1 = a_2 = -a_3$ *i* $|a_3| \neq 0$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato sa:*

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \tfrac{1}{4}(3\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4)+\Pi(x_1,x_2,x_4,x_3)- \\
&\quad \Pi(x_3,x_4,x_1,x_2)+\Pi(x_4,x_3,x_2,x_1)).
\end{aligned} \tag{55}
$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

pod uslovom: $|a_1| \neq |a_3|$ $(t_1, t_2 \in K)$. Tako dolazimo do slučaja 6^0. Iz (37) i (60) nalazimo:

$$A = A + \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 + \lambda_4 J_4 = \ldots = \frac{1}{2}(A + D).$$

Odatle nalazimo opšte reproduktivno rešenje u obliku formule (48). Ako je $a_1 = -a_3$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_1, -a_1, -a_1)$ $(a_1 \neq 0)$. Iz odgovarajućeg sistema (41) dobijamo rešenje u obliku:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= t_1, \\ \lambda_2 &= t_2, \\ \lambda_3 &= t_3, \\ \lambda_4 &= t_1 + t_2 - t_3 + \tfrac{1}{4a_1}, \end{aligned} \tag{61}$$

za $t_1, t_2, t_3 \in K$. Tako dolazimo do slučaja 12^0. Iz (37) i (61) nalazimo:

$$A = A + \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 + \lambda_4 J_4 = \ldots = \frac{1}{4}(3A - B + C + D).$$

Odatle nalazimo opšte reproduktivno rešenje u obliku formule (54). Ako je $a_1 = a_3$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a_1, a_1, -a_1, a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ iz odgovarajućeg sistema (41) dobijamo rešenje u obliku:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= t_1, \\ \lambda_2 &= t_2, \\ \lambda_3 &= t_3, \\ \lambda_4 &= t_1 - t_2 + t_3 - \tfrac{1}{4a_1}, \end{aligned} \tag{62}$$

za $t_1, t_2, t_3 \in K$. Tako dolazimo do slučaja 13^0. Iz (37) i (62) nalazimo:

$$A = A + \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 + \lambda_4 J_4 = \ldots = \frac{1}{4}(3A + B - C + D).$$

Odatle nalazimo opšte reproduktivno rešenje u obliku formule (55). Ovim je kompletiran razmatrani slučaj.

b) $(a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 \neq 0$ i $a_1 + a_3 = 0)$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a_2, a_1, a_2, -a_1)$ iz odgovarajućeg sistema (41) dobijamo rešenje u obliku:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= t_1, \\ \lambda_2 &= t_2, \\ \lambda_3 &= t_1 + \tfrac{a_2}{2(a_1^2 - a_2^2)}, \\ \lambda_4 &= t_2 + \tfrac{a_1}{2(a_1^2 - a_2^2)}, \end{aligned} \tag{63}$$

pod uslovom: $|a_1| \neq |a_2|$ $(t_1, t_2 \in K)$. Tako dolazimo do slučaja 8^0. Iz (37) i (63) nalazimo:

$$A = A + \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 + \lambda_4 J_4 = \ldots = \frac{1}{2}(A + C).$$

Odatle nalazimo opšte reproduktivno rešenje u obliku formule (50). Ako je $a_1 = -a_2$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_1, -a_1, -a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ tada odgovarajućeg sistema (41) ima rešenje u obliku formule (61). Tako dolazimo do slučaja 12^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (54). Ako je $a_1 = a_2$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a_1, a_1, a_1, -a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ iz odgovarajućeg sistema (41) dobijamo rešenje u obliku:

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

pod uslovom: $a_1 - a_2 \neq 0$ i $a_1 - a_3 \neq 0$ i $a_2 + a_3 \neq 0$ $(t \in K)$. Tako dolazimo do slučaja 3^0. Iz (37) i (59) nalazimo:

$$A = A + \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 + \lambda_4 J_4 = \ldots = \frac{1}{4}(A + B - C - D).$$

Odatle nalazimo opšte reproduktivno rešenje u obliku formule (45). Komplementaran slučaj prethodnom je $a_0 = -a_1 + a_2 + a_3 \neq 0$ i $(a_1 - a_2 = 0$ ili $a_1 - a_3 = 0$ ili $a_2 + a_3 = 0)$, odnosno $(a_0 = -a_1 + a_2 + a_3 \neq 0$ i $a_1 - a_2 = 0)$ ili $(a_0 = -a_1 + a_2 + a_3 \neq 0$ i $a_1 - a_3 = 0)$ ili $(a_0 = -a_1 + a_2 + a_3 \neq 0$ i $a_2 + a_3 = 0)$. Samim tim imamo mogućnosti:

<u>a)</u> $(a_0 = -a_1 + a_2 + a_3 \neq 0$ i $a_1 - a_2 = 0)$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_3, a_1, a_1, a_3)$ iz odgovarajućeg sistema (41) dobijamo rešenje u obliku:

$$\text{(68)} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= t_1, \\ \lambda_2 &= t_2, \\ \lambda_3 &= t_2 + \tfrac{a_1}{2(a_1^2 - a_3^2)}, \\ \lambda_4 &= t_1 + \tfrac{a_3}{2(a_1^2 - a_3^2)}, \end{aligned}$$

pod uslovom: $|a_1| \neq |a_3|$ $(t_1, t_2 \in K)$. Tako dolazimo do slučaja 10^0. Iz (37) i (68) nalazimo:

$$A = A + \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 + \lambda_4 J_4 = \ldots = \frac{1}{2}(A - D).$$

Odatle nalazimo opšte reproduktivno rešenje u obliku formule (52). Ako je $a_1 = -a_3$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a_1, a_1, a_1, -a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (64). Tako dolazimo do slučaja 14^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (55). Ako je $a_1 = a_3$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_1, a_1, a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ iz odgovarajućeg sistema (41) dobijamo rešenje u obliku:

$$\text{(69)} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= t_1, \\ \lambda_2 &= t_2, \\ \lambda_3 &= t_3, \\ \lambda_4 &= -t_1 - t_2 - t_3 - \tfrac{1}{4a_1}, \end{aligned}$$

za $t_1, t_2, t_3 \in K$. Tako dolazimo do slučaja 15^0. Iz (37) i (69) nalazimo:

$$A = A + \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 + \lambda_4 J_4 = \ldots = \frac{1}{4}(3A - B - C - D).$$

Odatle nalazimo opšte reproduktivno rešenje u obliku formule (56). Ovim je kompletiran razmatrani slučaj.

<u>b)</u> $(a_0 = -a_1 + a_2 + a_3 \neq 0$ i $a_1 - a_3 = 0)$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_2, a_1, a_2, a_1)$ iz odgovarajućeg sistema (41) dobijamo rešenje u obliku:

$$\text{(70)} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= t_1, \\ \lambda_2 &= t_2, \\ \lambda_3 &= -t_1 + \tfrac{a_2}{2(a_1^2 - a_2^2)}, \\ \lambda_4 &= -t_2 - \tfrac{a_1}{2(a_1^2 - a_2^2)}, \end{aligned}$$

pod uslovom: $|a_1| \neq |a_2|$ $(t_1, t_2 \in K)$. Tako dolazimo do slučaja 9^0. Iz (37) i (70) nalazimo:

$$A = A + \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 + \lambda_4 J_4 = \ldots = \frac{1}{2}(A - C).$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Odatle nalazimo opšte reproduktivno rešenje u obliku formule (53). Ako je $a_2 = a_1$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_1, -a_1, -a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (61). Tako dolazimo do slučaja 12^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (54). Ako je $a_2 = -a_1$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_1, a_1, a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (69). Tako dolazimo do slučaja 15^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (56).

U slučaju da je $a_0 = 0$ i $a_i \neq 0$ za neko $i = 1, 2, 3$, razmatranje se vrši analogno sa prethodnim slučajevima $a)-b)$. Tako dobijeni slučajevi se intepretiraju sa odgovarajućim slučajem iz navedenog spiska 1^0. – 16^0.

<u>c)</u> $(a_0 = a_1 + a_2 - a_3 \neq 0$ i $a_3 - a_1 = 0)$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_2, a_1, a_2, a_1)$ i $|a_1| \neq |a_2|$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (70). Tako dolazimo do slučaja 9^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (51). Ako je $a_1 = a_2$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_1, a_1, a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (69). Tako dolazimo do slučaja 15^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (56). Ako je $a_1 = -a_2$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a_1, a_1, a_1, -a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (64). Tako dolazimo do slučaja 14^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (55).

U slučaju da je $a_0 = 0$ razmatranje se vrši analogno sa prethodnim slučajevima $a) - b)$. Tako dobijeni slučajevi se intepretiraju sa odgovarajućim slučajevima iz navedenog spiska 1^0. – 16^0.

<u>*(iv)* $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0$.</u> Pretpostavimo da je $a_0 = a_1 - a_2 + a_3 \neq 0$. Rešavajući odgovarajući sistem (41) dobijamo rešenje u obliku:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= t, \\
\lambda_2 &= -t + \tfrac{2a_1 - a_2 + a_3}{4(a_2 - a_1)(a_1 + a_3)}, \\
\lambda_3 &= t + \tfrac{a_1 - 2a_2 + a_3}{4(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)}, \\
\lambda_4 &= -t - \tfrac{a_1 - a_2 + 2a_3}{4(a_1 + a_3)(a_3 - a_2)},
\end{aligned} \tag{73}
$$

pod uslovom: $a_1 - a_2 \neq 0$ i $-a_2 + a_3 \neq 0$ i $a_3 + a_1 \neq 0$ $(t \in K)$. Tako dolazimo do slučaja 4^0. Iz (37) i (73) nalazimo:

$$A = A + \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 + \lambda_4 J_4 = \ldots = \frac{1}{4}(A - B + C - D).$$

Odatle nalazimo opšte reproduktivno rešenje u obliku formule (47). Komplementaran slučaj prethodnom je $a_0 = a_1 - a_2 + a_3 \neq 0$ i $(a_1 - a_2 = 0$ ili $-a_2 + a_3 = 0$ ili $a_3 + a_1 \neq 0)$, odnosno $(a_0 = a_1 - a_2 + a_3 \neq 0$ i $a_1 - a_2 = 0)$ ili $(a_0 = a_1 - a_2 + a_3 \neq 0$ i $-a_2 + a_3 = 0)$ ili $(a_0 = a_1 - a_2 + a_3 \neq 0$ i $a_3 + a_1 = 0)$. Samim tim imamo mogućnosti:

<u>a)</u> $(a_0 = a_1 + a_2 - a_3 \neq 0$ i $a_1 - a_2 = 0)$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_3, a_1, a_1, a_3)$ i $|a_1| \neq |a_3|$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (68). Tako dolazimo do slučaja 10^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (52). Ako je $a_1 = a_3$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_1, a_1, a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (69). Tako dolazimo do slučaja 15^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (56). Ako je $a_1 = -a_3$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a_1, a_1, a_1, -a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (64). Tako dolazimo do slučaja 14^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (55).

Napomena. *U zborniku* [DM-PV2] *postavljen je problem* 9.4.9.: *Proveriti da li je sa formulom* $f(x,y,z,t) = F(x,y,z,t)+F(t,z,y,x)$, *gde je* $F : R^4 \longrightarrow R$ *proizvoljna funkcija, određeno opšte rešenje funkcionalne jednačine* $f(x,y,z,t) - f(t,z,y,x) = 0$. *Prema slučaju* 6^0., *prethodne teoreme, odgovor je potvrdan, pri tom navedena formula opšteg rešenja može se „ureproduktiviti" do formule* (49).

3.3. Računarsko rešenje partikularnih slučajeva uz pomoć programa DERIVE

Razmatraćemo nalaženje opštih reproduktivnih rešenje parikularnih slučajeva homogene grupne funkcionalne jednačine, sa konstantnim koeficijentima, za dimenzije $n = 2,3,4$. Koristimo program DERIVE (DOS verzija 2.58) koji omogućava simbolički račun sa algebarskim izrazima. Program DERIVE je napisan na programskom jeziku LISP. Istaknimo neke razaloge za izbor programa DERIVE. Pored male veličine programa i jednostavne upotrebe [AH], program DERIVE primenjiv je na svim PC-računarima. Uporedna analiza sa drugim simboličkim „rešavačima" data u radu [LB] pokazala je da DERIVE daje bolje rezultate od mnogih drugih programa po pitanju raznih primera linearnih i nelinearnih sistema.

Navodimo procedure i funkcije programa DERIVE-a koje koristimo u rešavanju razmatranog problema u paragrafima 4.1. i 4.2. Matrica X zadaje se[22] kao vektor čiji su elementi vektori-kolone. Funkcija ELEMENT(X,i,j) određuje element u i-toj vrsti i j-toj koloni zadane matrice X. Dalje, za zadan konačan i moguć sistem linearnih jednačina $u_1 = v_1, u_2 = v_2, \ldots$, procedura:

$$\text{SOLVE}([u_1 = v_1,\ u_2 = v_2,\ \ldots],\ [\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots]) \tag{74}$$

određuje sva rešenja sistema sa $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. U slučaju nemogućeg linearnog sistema prethodna procedura ne daje rezultat. U nalaženju opštih reprduktivnih rešenja homogene grupne funkcionalne jednačine sa konstantnim koeficijentima Λ-sistemi koji se javljaju uvek su mogući. Ako se u rešenju javljaju parametri $t_1, t_2, \ldots$, tada se oni redom označavaju sa: @1, @2, ... Kao rezultat procedure (74), za moguće sisteme, dobijamo vektor rešenja u obliku:

$$[\lambda_1 = \varphi_1(@1,@2,\ldots),\ \lambda_2 = \varphi_2(@1,@2,\ldots),\ \ldots]. \tag{75}$$

Na kraju, za jednakost $p = q$ funkcija RHS$(p = q)$ određuje desnu stranu jednakosti, tj. izraz q.

Navodimo računarska rešenja grupnih funkcionalnih jednačina redom za $n = 2,3,4$.

[22] PORED ZADAVANJA PUTEM MTH-PROGRAMA U MATRICU MOGUĆE JE ZADATI U DERIVE-U „RUČNO" PUTEM DERIVE-EDITORA (VRSTA PO VRSTA)

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

$\underline{n=4.}$ (i) Analogno slučaju $n = 2$, sa sledećim DERIVE programom nalazimo sva rešenja homogene ciklične grupne funkcionalne jednačine (22) sa konstantnim koeficijentima $a_0 = a$, $a_1 = b$, $a_2 = c$ i $a_3 = d$:

$$(82)\quad \left\{\begin{array}{lll}
\mathtt{M1}(a,b,c,d) & := & [[a,b,c,d],[b,c,d,a],[c,d,a,b],[d,a,b,c]] \\
\mathtt{M2}(a,b,c,d) & := & [[a^2+b^2+c^2+d^2,(a+c)*(b+d),2*(a*c+b*d),(a+c)*(b+d)], \\
 & & [(a+c)*(b+d),2*(a*c+b*d),(a+c)*(b+d),a^2+b^2+c^2+d^2], \\
 & & [2*(a*c+b*d),(a+c)*(b+d),a^2+b^2+c^2+d^2,(a+c)*(b+d)], \\
 & & [(a+c)*(b+d),a^2+b^2+c^2+d^2,(a+c)*(b+d),2*(a*c+b*d)]] \\
\mathtt{LS}(a,b,c,d) & := & \mathtt{M2}(a,b,c,d)*[[p],[q],[r],[s]]+[[a],[b],[c],[d]] \\
\mathtt{C4}(a,b,c,d) & := & \mathtt{RHS(ELEMENT}([[x]]+\mathtt{SOLVE}(\mathtt{LS}(a,b,c,d),[p,q,r,s]) \\
 & & *\mathtt{M1}(a,b,c,d)*[[x],[y],[z],[w]],1,1))
\end{array}\right\}$$

gde su sa x, y, z i w označene nepoznate vrednosti $f(\theta_1(X)) = f(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $f(\theta_2(X)) = f(x_2,x_3,x_4,x_1)$, $f(\theta_3(X)) = f(x_3,x_4,x_1,x_2)$ i $f(\theta_4(X)) = f(x_4,x_1,x_2,x_3)$.

Za zadane vrednosti koeficijenata $a_0 = \alpha_1$, $a_1 = \alpha_2$, $a_2 = \alpha_3$ i $a_3 = \alpha_4$ vrednost funkcije $\mathtt{C4}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ računar određuje u obliku:

$$(83)\qquad \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta_4 w.$$

Iz prethodnog izraza opšte reproduktivno rešenje funkcionalne jednačine (22) određeno je u kanonskom obliku:

$$(84)\qquad f(X) = \beta_1\Pi(\theta_1(X)) + \beta_2\Pi(\theta_2(X)) + \beta_3\Pi(\theta_3(X)) + \beta_4\Pi(\theta_4(X)).$$

$\underline{n=4.}$ (ii) Analogno slučaju $n = 2$, sa sledećim DERIVE programom nalazimo sva rešenja homogene KLEINove grupne funkcionalne jednačine (32) konstantnim koeficijentima $a_0 = a$, $a_1 = b$, $a_2 = c$ i $a_3 = d$:

$$(85)\quad \left\{\begin{array}{lll}
\mathtt{M1}(a,b,c,d) & := & [[a,b,c,d],[b,a,d,c],[c,d,a,b],[d,c,b,a]] \\
\mathtt{M2}(a,b,c,d) & := & [[a^2+b^2+c^2+d^2,2(a*b+c*d),2(a*c+b*d),2(a*d+b*c)], \\
 & & [2(a*b+c*d),a^2+b^2+c^2+d^2,2(a*d+b*c),2(a*c+b*d)], \\
 & & [2(a*c+b*d),2(a*d+b*c),a^2+b^2+c^2+d^2,2(a*b+c*d)], \\
 & & [2(a*d+b*c),2(a*c+b*d),2(a*b+c*d),a^2+b^2+c^2+d^2]] \\
\mathtt{LS}(a,b,c,d) & := & \mathtt{M2}(a,b,c,d)*[[p],[q],[r],[s]]+[[a],[b],[c],[d]] \\
\mathtt{K4}(a,b,c,d) & := & \mathtt{RHS(ELEMENT}([[x]]+\mathtt{SOLVE}(\mathtt{LS}(a,b,c,d),[p,q,r,s]) \\
 & & *\mathtt{M1}(a,b,c,d)*[[x],[y],[z],[w]],1,1))
\end{array}\right\}$$

gde su sa x, y, z i w označene nepoznate vrednosti $f(\theta_1(X)) = f(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $f(\theta_2(X)) = f(x_2,x_1,x_4,x_3)$, $f(\theta_3(X)) = f(x_3,x_4,x_1,x_2)$ i $f(\theta_4(X)) = f(x_4,x_3,x_2,x_1)$.

Za zadane vrednosti koeficijenata $a_0 = \alpha_1$, $a_1 = \alpha_2$, $a_2 = \alpha_3$ i $a_3 = \alpha_4$ vrednost funkcije $\mathtt{K4}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ računar određuje u obliku:

$$(86)\qquad \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta_4 w.$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

4. Nehomogena grupna funkcionalna jednačina

Neka su $\theta_1, \ldots, \theta_n$ bijektivna preslikavanja nepraznog skupa S na samog sebe, tako da skup $G = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ u odnosu na kompoziciju funkcija ($\circ$) obrazuje grupu reda n. Pretpostavimo da je θ_1 neutral posmatrane grupe $\mathbb{G} = (G, \circ)$. Za polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ neka je $\mathcal{F} = \{f : S \longrightarrow C\}$ skup svih funkcija koje preslikavaju skup S u polje $\mathbb{C}$. Koristićemo oznake i rezultate date u paragrafima 1.1. i 1.2.

Pod *nehomogenom grupnom funkcionalnom jednačinom* podrazumevamo funkcionalnu jednačinu:

$$(1) \qquad a_1(x) \cdot f(\theta_1(x)) + a_2(x) \cdot f(\theta_2(x)) + \ldots + a_n(x) \cdot f(\theta_n(x)) = h(x),$$

po nepoznatoj funkciji $f \in \mathcal{F}$ za zadane funkcije $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{F}$ i $h \in \mathcal{F}$; pri čemu $h(x) \not\equiv 0$. Izložićemo matričnu metodu rešavanja funkcionalne jednačine (1) prema radu S. PREŠIĆa [SP6] iz 1969 godine.

Polazeći od funkcionalne jednačine (1) zamenjujući redom x sa $\theta_k(x)$, za $k \in \mathbb{I}_n$, dobijamo n ekvivalentnih funkcionalnih jednačina:

$$(2) \qquad a_1(\theta_k(x)) \cdot f(\theta_1(\theta_k(x))) + \ldots + a_n(\theta_k(x)) \cdot f(\theta_n(\theta_k(x))) = h(\theta_k(x)).$$

Odatle nalazimo da je

$$\begin{bmatrix} a_1(\theta_k(x)) & a_2(\theta_k(x)) & \cdots & a_n(\theta_k(x)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(\theta_{p_{1k}}(x)) \\ f(\theta_{p_{2k}}(x)) \\ \vdots \\ f(\theta_{p_{nk}}(x)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(\theta_1(x)) \\ h(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ h(\theta_n(x)) \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} a_1(\theta_k(x)) & a_2(\theta_k(x)) & \cdots & a_n(\theta_k(x)) \end{bmatrix} \cdot M_k \cdot M_k^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f(\theta_{p_{1k}}(x)) \\ f(\theta_{p_{2k}}(x)) \\ \vdots \\ f(\theta_{p_{nk}}(x)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(\theta_1(x)) \\ h(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ h(\theta_n(x)) \end{bmatrix}.$$

Saglasno formulama (16) i (17), iz paragrafa 1.1., iz prethodne jednakosti dobijamo

$$\begin{bmatrix} a_{q_{k1}}(\theta_k(x)) & a_{q_{k2}}(\theta_k(x)) & \cdots & a_{q_{kn}}(\theta_k(x)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(\theta_1(x)) \\ f(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ f(\theta_n(x)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(\theta_1(x)) \\ h(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ h(\theta_n(x)) \end{bmatrix}.$$

Prethodna matrična formula rešenja predstavlja formulu (6). Primetimo da je formula (7) ekvivaletna matričnoj formuli (6), kojom je dato rešenje matrične jednačine (4). Otuda, skalarnom formulom (7) dato je rešenje funkcionalne jednačine (1). Obratno, svako rešenje predstavljivo je u obliku formule (6), jer je posmatrana formula, saglasno teoremi 3.1.2. (prve celine), reproduktivna formula. Reproduktivnost formule $\vec{f}(\vec{g}) = B\cdot\vec{h}+(I-BA)\cdot\vec{g}$ možemo dokazati i direktno:

$$\begin{aligned}\vec{f}\circ\vec{f}(\vec{g}) &= B\cdot\vec{h}+(I-BA)\cdot\Big(B\cdot\vec{h}+(I-BA)\vec{g}\Big)\\ &= B\cdot\vec{h}+(B\cdot\vec{h}-B\cdot AB\vec{h})+(I-BA)^2\vec{g}\\ &= B\cdot\vec{h}+(I-BA)\cdot\vec{g}+B\cdot(\vec{h}-AB\vec{h}) \underset{(5)}{=} B\cdot\vec{h}+(I-BA)\cdot\vec{g}=\vec{f}(\vec{g}).\end{aligned}$$

Saglasno napomeni 2 teoreme 1.2. (prve celine) matrična formula (6), odnosno koordinatna formula (7), zadržava-reprodukuje sva rešenja funkcionalne jednačine (1). ∎

Napomena. *Dva osnovna postupka za određivanje* $\{1\}$*-inverza* $B(x)$*, koji su saglasni sa pratećom grupom, dati su sa teoremom* 1.2.3. *i teoremom*[24] 1.3.1. *Konkretno, prema teoremi* 1.2.3. *za matricu* $A(x)$ *formiramo odgovarajuću matricu* $B(x)$ *na sledeći način:*

(9) $$B(x)=\sum_{i=1}^{n} M_i^{-1}A^{(1)}(\theta_i(x))\,M_i,$$

gde je $A^{(1)}(x)$ *ma koji* $\{1\}$*-inverz matrice* $A(x)$ *za* $x\in S$. *Specijalno ako za matricu* $A(x)$ *važi* $Ind(A(x))=1$, *prema teoremi* 5.2.2. *(prve celine), sledeća matrica:*

(10) $$B(x)=q\big(A(x)\big),$$

jeste $\{1\}$*-inverz koji je, kao polinom po* $A(x)$*, saglasan sa pratećom grupom.*

Neka je nehomogena grupna funkcionalna jednačina (1) moguća i neka je dato ma koje posebno rešenje φ_0 posmatrane funkcionalne jednačine. U postupku rešavanja možemo koristiti PENROSEovu teoremu 3.1.1. (prve celine) i to u opštem nereproduktivnom obliku. Formirajmo vektor $\vec{\varphi_0}(x)=[\varphi_0(\theta_1(x))\ldots\varphi_0(\theta_n(x))]^T$. Matrično-funkcionalna jednačina (4) moguća je, jer vektor $\vec{\varphi_0}(x)$ predstavlja jedno njeno rešenje. Neka je određena matrica $B(x)$ kao ma koji $\{1\}$-inverz koji je saglasan sa pratećom grupom. Tada, prema PENROSEovoj teoremi 3.1.1. (prve celine), imamo matričnu formulu opšteg rešenja:

(12) $$\begin{bmatrix} f(\theta_1(x))\\ f(\theta_2(x))\\ \vdots\\ f(\theta_n(x))\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \varphi_0(\theta_1(x))\\ \varphi_0(\theta_2(x))\\ \vdots\\ \varphi_0(\theta_n(x))\end{bmatrix}+(I-B(x)A(x))\cdot\begin{bmatrix} g(\theta_1(x))\\ g(\theta_2(x))\\ \vdots\\ g(\theta_n(x))\end{bmatrix},$$

[24] AKO JE MATRICA $A(x)$ INDEKSA $Ind(A(x))=1$ ZA SVAKO $x\in S$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

za proizvoljne parametre $a,\dots,k \in C$. Dalje, prema teoremi 1.2.3. (opšti) $\{1\}$-inverz matrice A, koji se slaže sa pratećom cikličnom grupom reda 3, određen je u sledćem obliku

$$B = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} M_i^{-1}A^{(1)}M_i = \begin{bmatrix} \frac{-a-b-c+2d+e-g+h+1}{3} & \frac{a-d+e+f-g-2h}{3} & \frac{b+c-d-2e-f+2g+h}{3} \\ \frac{b+c-d-2e-f+2g+h}{3} & \frac{-a-b-c+2d+e-g+h+1}{3} & \frac{a-d+e+f-g-2h}{3} \\ \frac{a-d+e+f-g-2h}{3} & \frac{b+c-d-2e-f+2g+h}{3} & \frac{-a-b-c+2d+e-g+h+1}{3} \end{bmatrix}.$$

Neposredno se proverava da važi jednakost $AB = \frac{1}{3}A$. Odatle, uslov mogućnosti $AB\vec{h} = \vec{h}$ dat je u sledećem obliku $\frac{1}{3}A\vec{h} = \vec{h}$. Samim tim, potreban i dovoljan uslov da posmatrana funkcionalna jednačina jeste moguća, dat je u obliku jednakosti:

$$(*) \qquad h(x_1,x_2,x_3) = h(x_2,x_3,x_1)\ (\,= h(x_3,x_1,x_2)\,).$$

Na osnovu uslova $(*)$ opšte rešenje dato je u matričnom obliku koji nezavisi od parametara $a,\dots,k \in C$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f(x_1,x_2,x_3) \\ f(x_2,x_3,x_1) \\ f(x_3,x_1,x_2) \end{bmatrix} &= B \begin{bmatrix} h(x_1,x_2,x_3) \\ h(x_2,x_3,x_1) \\ h(x_3,x_1,x_2) \end{bmatrix} + (\,I - B\cdot A\,)\cdot \begin{bmatrix} g(x_1,x_2,x_3) \\ g(x_2,x_3,x_1) \\ g(x_3,x_1,x_2) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} h(x_1,x_2,x_3) \\ h(x_2,x_3,x_1) \\ h(x_3,x_1,x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g(x_1,x_2,x_3) \\ g(x_2,x_3,x_1) \\ g(x_3,x_1,x_2) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

odnosno, po prvoj koordinati, opšte rešenje dato je skalarnom funkcijom

$$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{3}h(x_1,x_2,x_3) + \frac{1}{3}\big(2g(x_1,x_2,x_3) - g(x_2,x_3,x_1) - g(x_3,x_1,x_2)\big),$$

gde je $g \in \mathcal{F}$ proizvoljna funkcija. Ako je φ_0 ma koje rešenje posmatrane negomogene funkcionalne jednačine tada matrična formula opšteg rešenja data je u obliku

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f(x_1,x_2,x_3) \\ f(x_2,x_3,x_1) \\ f(x_3,x_1,x_2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varphi_0(x_1,x_2,x_3) \\ \varphi_0(x_2,x_3,x_1) \\ \varphi_0(x_3,x_1,x_2) \end{bmatrix} + (\,I - B\cdot A\,)\cdot \begin{bmatrix} g(x_1,x_2,x_3) \\ g(x_2,x_3,x_1) \\ g(x_3,x_1,x_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \varphi_0(x_1,x_2,x_3) \\ \varphi_0(x_2,x_3,x_1) \\ \varphi_0(x_3,x_1,x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g(x_1,x_2,x_3) \\ g(x_2,x_3,x_1) \\ g(x_3,x_1,x_2) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

odnosno, po prvoj koordinati, opšte rešenje dato je skalarnom funkcijom

$$f(x_1,x_2,x_3) = \varphi_0(x_1,x_2,x_3) + \frac{1}{3}\big(2g(x_1,x_2,x_3) - g(x_2,x_3,x_1) - g(x_3,x_1,x_2)\big),$$

gde je $g \in \mathcal{F}$ proizvoljna funkcija.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Na osnovu prethodnog sleduje da skup $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$, u odnosu na kompoziciju ($\circ$), obrazuje <u>*semigrupu p-varijacija*</u> $\mathbb{P} = (P, \circ)$ reda n. Nije teško proveriti da skup $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ u odnosu na kompoziciju ($\circ$) obrazuje semigrupu $\mathbb{P} = (P, \circ)$ reda n izomorfnu sa semigrupom $\mathfrak{G} = (G, \circ)$.

Iz p-varijacija možemo formirati skup:

$$\mathfrak{q}_{ij} = \{\, k \in \mathbb{I}_n \mid p_i(k) = j \,\}, \tag{7}$$

gde $i, j \in \mathbb{I}_n$. Primetimo da ako je $\mathfrak{G}$ grupa, tada je skup $\mathfrak{q}_{ij}$ jednočlan i određuje vrednost q-permutacije $k = q_{ij}$.

Navodimo postupak rešavanja funkcionalne jednačine (2) sa konstantnim koeficijentima koji je predložio S. Prešić, a predstavlja direktno proširenje Prešićevog Λ-matričnog metoda za grupnu funkcionalnu jednačinu. Označimo sa $A_1 = f(\theta_1(x))$, $A_2 = f(\theta_2(x)), \ldots, A_n = f(\theta_n(x))$ nepoznate vrednosti funkcije f. Tada funkcionalnu jednačinu (2) možemo shvatiti kao linearnu jednačinu:

$$\mathcal{J}_1 = a_1 \cdot A_1 + a_2 \cdot A_2 + \ldots + a_n \cdot A_n = 0, \tag{8}$$

po nepoznatim $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Izvršimo zamenu x redom sa $\theta_k(x)$ za $k \in \mathbb{I}_n$. Tada linearna jednačina (8) ekvivaletna je sa sistemom:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{J}_1 & = & a_1 A_{p_{11}} + a_2 A_{p_{21}} + \ldots + a_n A_{p_{n1}} = 0, \\ \mathcal{J}_2 & = & a_1 A_{p_{12}} + a_2 A_{p_{22}} + \ldots + a_n A_{p_{n2}} = 0, \\ & \vdots & \\ \mathcal{J}_n & = & a_1 A_{p_{1n}} + a_2 A_{p_{2n}} + \ldots + a_n A_{p_{nn}} = 0. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Izračunavanjem koeficijenata uz odgovarajuće nepoznate A_j, u i-toj vrsti prethodnog sistema, dobijamo da sistem ima matricu sistema $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ sa elementima:

$$a_{ij} = \left\{\begin{array}{lcl} \displaystyle\sum_{k \in \mathfrak{q}_{ij}} a_k & : & \mathfrak{q}_{ij} \neq \emptyset, \\ 0 & : & \mathfrak{q}_{ij} = \emptyset. \end{array}\right. \tag{10}$$

Za prethodno određenje koeficijente, sistem (9) zapisujemo u ekvivaletnom obliku:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{J}_1 & = & a_{11} A_1 + a_{12} A_2 + \ldots + a_{1n} A_n = 0, \\ \mathcal{J}_2 & = & a_{21} A_1 + a_{22} A_2 + \ldots + a_{2n} A_n = 0, \\ & \vdots & \\ \mathcal{J}_n & = & a_{n1} A_n + a_{n2} A_n + \ldots + a_{nn} A_n = 0. \end{array}\right\} \tag{11}$$

Uvedimo matrične oznake:

$$\vec{\mathcal{J}} = [\ \mathcal{J}_1 \ \ \mathcal{J}_2 \ \ldots \ \mathcal{J}_n\ ]^T \quad \text{i} \quad \vec{\mathcal{A}} = [\ A_1 \ \ A_2 \ \ldots \ A_n\ ]^T. \tag{12}$$

Sistem (11) zapisujemo u obliku homogene linearne matrične jednačine:

$$\vec{\mathcal{J}} = \mathbf{A} \cdot \vec{\mathcal{A}} = \vec{0}. \tag{13}$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

$\{1\}$-inverz matrice $\mathbf{A}$. Ako je $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ ma koji $\{1\}$-inverz matrice $\mathbf{A}$, tada formula (21) određuje opšte rešenje matrične jednačine (13).

Zamenom jednakosti (20) u jednačinu (8), dobijamo odgovarajući Λ-*sistem* po λ_k parametrima ($k \in \mathbb{I}_n$). Ako je odgovarajući Λ-sistem moguć i ako se u formulu (21) vrate uvedene zamene, pitanje da li je sa tako određenom matričnom formulom određeno jedno rešenje funkcionalne jednačine (2) povezano je sa pojmom saglasnosti matrice sa semigrupom. S. NIKČEVIĆ u [SN1] definisala je[27] *matrica $B(x) = [b_{ij}(x)]$ saglasna je sa semigrupom $\mathfrak{S} = (G, \circ)$* ako matrična jednakost:

$$\begin{bmatrix} \varphi(\theta_1(x)) \\ \varphi(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ \varphi(\theta_n(x)) \end{bmatrix} = B(x) \cdot \begin{bmatrix} g(\theta_1(x)) \\ g(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ g(\theta_n(x)) \end{bmatrix} \tag{22}$$

jednoznačno definiše funkciju $\varphi \in \mathcal{F}$ za ma koji izbor funkcije $g \in \mathcal{F}$. Ako su kvadratne matrice B i C, reda n, saglasne sa pratećom semigrupom to su takođe i matrice $B \pm C$, $B \cdot C$ i λC ($\lambda \in C$), kao i jedinična matrica I reda n. Direktno se proverava da je matrica $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ saglasna sa pratećom semigrupom. Ako je Λ-sistem moguć, tada λ_k-parametri, na osnovu jednakosti (18), odredjuju matricu $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ kao jedan $\{1\}$-inverz. Na osnovu prethodnog razmatranja, kao uopštenje teoreme 2.2.2 važi naredno tvrdnje.

Teorema 5.1. *Ako je Λ-sistem homogene semigrupne funkcionalne jednačine sa konstantnim koeficijentima* (2) *moguć i ako je matrica $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ saglasna sa semigrupom $\mathfrak{S}$, tada za matricu Λ određenu iz Λ-sistema formula opšteg reproduktivnog rešenja funkcionalne jednačine* (2) *data je sa:*

$$f(x) \;=\; \Pi(x) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} a_{ij} \Pi(\theta_i(x)), \tag{23}$$

gde je $\Pi \in \mathcal{F}$ proizvoljna funkcija.

Napomena. *Neka je Λ-sistem homogene semigrupne funkcionalne jednačine sa konstantnim koeficijentima* (2) *moguć. Ako reproduktivna matrična formula* (21) *ne određuje rešenje funkcionalne jednačine* (2) *tada matrica $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ nije saglasna sa semigrupom $\mathfrak{S}$.*

U vezi prethodne napomene postavlja se sledeći *problem*: ako funkcionalna jednačina (2) nije rešiva u pratećoj semigrupi, odrediti širu semigrupu u kojoj je posmatrana funkcionalna jednačina rešiva. Navedeni problem razmotrićemo za homogene semigrupne funkcionalne jednačine, sa konstantnim koeficijentima, koje su razmatrali PREŠIĆ, KEČKIĆ, MITRINOVIĆ, VASIĆ i KUCZMA.

[27] U CILJU REŠAVANJA FUNKCIONALNE JEDNAČINE (2) ZA MATRICA INDEKSA $Ind(\mathbf{A}) \le 1$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Rešenje prethodnog sistema je dato u obliku

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} I = I + \lambda\mathcal{J}_1, \\ B = B + \lambda\mathcal{J}_1' = B + \lambda\mathcal{J}_3 = B, \\ C = C + \lambda\mathcal{J}_1'' = C + \lambda\mathcal{J}_4 = C, \end{array}\right\}$$

pri čemu su poslednje dve jednačine dobijene iz prve jednačine zamenama $X \mapsto \beta X$ i $X \mapsto \gamma X$. Ako se izvrši zamena prethodnih izraza za B i C u polaznu jednačinu $\mathcal{J}_1 = B - C = 0$, dobijamo istu jednačinu. Na taj način Λ-sistem po λ je oblika $0\lambda = 0$, tj. rešenje je ma koji parametar λ. Sad, iz formule $I = I + \lambda(B - C)$, potencijalno opšte reproduktivno rešenje je oblika

$$(4)\qquad f(X) = \Pi(X) + \lambda(\Pi(\beta X) - \Pi(\gamma X)),$$

gde je $\Pi : R^2 \longrightarrow R$ proizvoljna funkcija. Formula (4) jeste rešenje posmatrane funkcionalne jednačine ako i samo ako je funkcija Π rešenje polazne funkcionalne jednačine. Dakle, formula (4) nije rešenje posmatrane funkcionalne jednačine. Navedeni primer pokazuje da *semigrupna funkcionalna jednačina ne mora imati rešenja u pratećoj semigrupi.* U narednom će mo pokazati kako je moguće dobiti opšte reproduktivno rešenje u široj semigri od prateće.

Neka je $k \in R$ proizvoljna konstanta. Tada je funkcionalna jednačina (1) ekvivalentna sa sledećom funkcionalnom jednačinom:

$$(5)\qquad f(x,x) = f(k,k),$$

po nepoznatoj funkciji $f : R^2 \longrightarrow R$. Semigrupu funkcija $\mathbb{S}$ proširimo sa funkcijom $\delta : R^2 \longrightarrow R^2$, definisanom sa $\delta X = (k,k)$. Na taj način formiramo skup $Q = \{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ koji u odnosu na kompoziciju $(\circ)$ određuje semigrupu sa neutralom $\mathbb{Q} = (Q, \circ)$. CAYLEYeva tablica semigrupe je data sa:

(6)

$\circ$	ε	α	β	γ	δ
ε	ε	α	β	γ	δ
α	α	ϵ	β	γ	δ
β	β	γ	β	γ	δ
γ	γ	β	β	γ	δ
δ	δ	δ	δ	δ	δ

Označimo sa $I = f(\varepsilon X) = f(X)$, $A = f(\alpha X)$, $B = f(\beta X)$, $C = f(\gamma X)$ i $D = f(\delta X)$ vrednosti nepoznate funkcije $f : R^2 \longrightarrow R$. Dalje, zamenama $X \mapsto \varepsilon X$, $X \mapsto \alpha X$, $X \mapsto \beta X$, $X \mapsto \gamma X$ i $X \mapsto \delta X$ iz polazne jednačine:

$$(7)\qquad \mathcal{J}_1 = f(\beta X) - f(\delta X) = B - D = 0$$

dobijamo homogen linearan sistem po I, A, B, C i D:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathcal{J}_1 & = & f(\beta X) - f(\delta X) = B - D = 0, \\ \mathcal{J}_2 & = & f(\gamma X) - f(\delta X) = C - D = 0, \\ \mathcal{J}_3 & = & f(\beta X) - f(\delta X) = B - D \equiv 0, \\ \mathcal{J}_4 & = & f(\gamma X) - f(\delta X) = C - D \equiv 0, \\ \mathcal{J}_5 & = & f(\delta X) - f(\delta X) = D - D \equiv 0. \end{array}\right\}$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Rešimo funkcionalnu jednačinu (12) u pratećoj semigrupi $\mathbb{Q}$. Polazeći od jednačine:

$$\mathcal{J}_1 = I + A - 2D = 0, \tag{13}$$

zamenama $X \mapsto \varepsilon X, X \mapsto \alpha X, X \mapsto \beta X, X \mapsto \gamma X, X \mapsto \delta X$ dobijamo homogen linearan sistem po I, A, B, C i D

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathcal{J}_1 & = & I + A - 2D = 0, \\ \mathcal{J}_2 & = & A + I - 2D = 0, \\ \mathcal{J}_3 & = & B + B - 2D = 0, \\ \mathcal{J}_4 & = & C + C - 2D = 0, \\ \mathcal{J}_5 & = & D + D - 2D \equiv 0. \end{array}\right\}$$

Rešenje prethodnog sistema dato je sa:

$$\left\{\begin{array}{lcl} I & = & I + \lambda_1(I + A - 2D) + \lambda_2(B - D) + \lambda_3(C - D), \\ A & = & A + \lambda_1(A + I - 2D) + \lambda_2(C - D) + \lambda_3(B - D), \\ D & \equiv & D, \end{array}\right\} \tag{14}$$

pri čemu su poslednje dve jednačine dobijene iz prve jednačine zamenama $X \mapsto \alpha X$ i $X \mapsto \delta X$. Ako se izvrši zamena I, A i D u (13) dobijamo jednačinu

$$I + A - 2D = (2\lambda_1 + 1)(I + A) + (\lambda_2 + \lambda_3)(B + C) - 2(2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 1)D = 0,$$

na osnovu koje dobijamo Λ-sistem po λ_1, λ_2 i λ_3

$$\left\{\begin{array}{c} 2\lambda_1 + 1 = 0, \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 1 = 0. \end{array}\right\}$$

Rešenje sistema dato je u obliku

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \quad \wedge \quad \lambda_2 = t \quad \wedge \quad \lambda_3 = -t,$$

gde je t realan parametar. Samim tim iz

$$I = \frac{I}{2} - \frac{A}{2} + Bt - Ct + D$$

potencijalno opšte rešenje dato je u obliku:

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(\Pi(x, y) - \Pi(y, x)) + t(\Pi(x, x) - \Pi(y, y)) + \Pi(k, k), \tag{15}$$

gde je $\Pi : R^2 \longrightarrow R$ proizvoljna funkcija. Neposredno se proverava da je sa (15) dato rešenje funkcionalne jednačine (12). Usled reproduktivnosti funkcije (15) rešenje je opšte. Specijalno, za $t = 0$ dobijamo opšte reproduktivno rešenje:

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(\Pi(x, y) - \Pi(y, x)) + \Pi(k, k). \tag{16}$$

u obliku S. Prešića [SP2] i J. Kečkića [JK1].

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Označimo sa $A = f(\varepsilon X) = f(X)$, $B = f(\alpha X)$, $C = f(\beta X)$ i $D = f(\gamma X)$ vrednosti nepoznate funkcije $f : R^2 \longrightarrow R$. Zamenama $X \mapsto \varepsilon X$, $X \mapsto \alpha X$, $X \mapsto \beta X$ i $X \mapsto \gamma X$ iz polazne jednačine dobijamo homogen linearan sistem po A, B, C i D:

(3) $$\mathcal{J}_1 = a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C + d \cdot D = 0,$$

(4) $$\mathcal{J}_2 = a \cdot B + b \cdot A + c \cdot D + d \cdot C = 0,$$

(5) $$\mathcal{J}_3 = a \cdot C + b \cdot C + c \cdot C + d \cdot C = 0,$$

(6) $$\mathcal{J}_4 = a \cdot D + b \cdot D + c \cdot D + d \cdot D = 0.$$

Primetimo da su rešenja sistema (2) – (5) data u obliku

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} A & = & A & + & \lambda\mathcal{J}_1 & + & \mu\mathcal{J}_2, \\ B & = & B & + & \lambda\mathcal{J}_1' & + & \mu\mathcal{J}_2', \\ C & = & C & + & \lambda\mathcal{J}_1'' & + & \mu\mathcal{J}_2'', \\ D & = & D & + & \lambda\mathcal{J}_1''' & + & \mu\mathcal{J}_2''', \end{array}\right\}$$

pri čemu su poslednje tri formule dobijene iz prve zamenama $X \mapsto \alpha X$, $X \mapsto \beta X$ i $X \mapsto \gamma X$. Važi : $\mathcal{J}_1' = \mathcal{J}_2$ i $\mathcal{J}_2' = \mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_1'' \equiv 0$ i $\mathcal{J}_2'' \equiv 0$, $\mathrm{J}_1''' \equiv 0$ i $\mathcal{J}_2''' \equiv 0$. Odatle rešenja sistema (3) – (6) data su u obliku

$$\left\{\begin{array}{ccccc} A & = & A & + & \lambda\mathcal{J}_1 + \mu\mathcal{J}_2, \\ B & = & B & + & \lambda\mathcal{J}_2 + \mu\mathcal{J}_1, \\ C & = & C & , & \\ D & = & D & . & \end{array}\right\}$$

Zamenom izraza za A, B, C i D redom iz prethodnih formula u formulu (3), grupišući koeficijente uz A, B, C i D, dobijamo Λ-sistem po λ i μ:

(7) $$(a^2 + b^2)\lambda + 2ab\mu = -a,$$

(8) $$2ab\lambda + (a^2 + b^2)\mu = -b,$$

(9) $$(ac + bd)\lambda + (ad + bc)\mu = -c,$$

(10) $$(ad + bc)\lambda + (ac + bd)\mu = -d.$$

Neka je $\Pi : R^2 \longrightarrow R$ proizvoljna funkcija. Razlikujemo dva slučaja:

<u>1) $a + b + c + d \neq o$.</u> Tada iz jednačina (4) i (5) zaključujemo da je $C = f(\beta X) \equiv 0$ i $D = f(\gamma X) \equiv 0$. Funkcionalna jednačina (1) je oblika $a \cdot f(x, y) + b \cdot f(y, x) = 0$. Razlikujemo dva podslučaja:

<u>1.a) $a^2 + b^2 = o$.</u> Tada važi: $a = b = 0 \ \wedge \ c \neq -d$. Samim tim važi: $a \cdot f(x, y) + b \cdot f(y, x) \equiv 0$ i $f(x, y) = 0$. Opšte reproduktivno rešenje posmatrane funkcionalne jednačine dato je sa:

$$f(x, y) = \Pi(x, y) - \Pi(x, x).$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Prema primeru 1 b), ako je k proizvoljna realna konstanta, opšte reproduktivno rešenje posmatrane funkcionalne jednačine dato je sa

$$f(x,y)=\frac{\Pi(x,y)-\Pi(y,x)}{2}+\Pi(k,k).$$

2.b.ii) $a=b \ \wedge \ a=-c(\neq 0)$. Iz uslova $a+b+c+d=0$ zaključujemo da je $a=-d(\neq 0)$. Λ-sistem (7) – (10) dovodi do veze $\lambda+\mu=-\frac{1}{2a}$. Zamenom rešenja $\lambda=-\mu-\frac{1}{2a} \ \wedge \ \mu\in R$ u jednačinu $A=A+\lambda\mathcal{J}_1+\mu\mathcal{J}_2$ dobijamo

$$A=A+(-\mu-\frac{1}{2a})(aA+aB-aC-aD)+\mu(aA+aB-aC-aD)=\frac{A-B+C+D}{2}.$$

Odatle proveravamo da je opšte reproduktivno rešenje funkcionalne jednačine (1) dato u obliku

$$f(x,y)=\frac{\Pi(x,y)-\Pi(y,x)+\Pi(x,x)+\Pi(y,y)}{2}.$$

2.b.iii) $a=-b(\neq 0)$. Iz uslova $a+b+c+d=0$ zaključujemo $c=-d(\neq 0)$. Λ-sistem (7) – (10) dovodi do veze $\lambda-\mu=-\frac{1}{2a}$. Zamenom rešenja $\lambda=\mu-\frac{1}{2a} \ \wedge \ \mu\in R$ u jednačinu $A=A+\lambda\mathcal{J}_1+\mu\mathcal{J}_2$ dobijamo

$$\begin{aligned}A &= A+(\mu-\tfrac{1}{2a})(aA-aB+cC-cD)+\mu(aA-aB+cC-cD)\\ &= \tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B-\tfrac{c}{2a}C+\tfrac{c}{2a}D+2\mu(aA-aB+cC-cD).\end{aligned}$$

Odatle zaključujemo da ako postoji opšte reproduktivno rešenje funkcionalne jednačine (1) ono je oblika

$$\begin{aligned}f(x,y) &= \frac{1}{2}\Pi(x,y)+\frac{1}{2}\Pi(y,x)-\frac{c}{2a}\Pi(x,x)+\frac{c}{2a}\Pi(y,y)\\ &+ 2\mu(a\Pi(x,y)-a\Pi(y,x)+c\Pi(x,x)-c\Pi(y,y)).\end{aligned}$$

Zamenom u polaznu jednačinu $a\ f(x,y)\ -\ a\ f(y,x)\ +\ c\ f(x,x)\ -\ c\ f(y,y)\ =\ 0$ nalazimo vrednost koeficijenta $\mu=0$ ($\lambda=-\frac{1}{2a}$). Samim tim, opšte reproduktivno rešenje funkcionalne jednačine (1) dato je u vidu

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\Pi(x,y)+\frac{1}{2}\Pi(y,x)-\frac{c}{2a}\Pi(x,x)+\frac{c}{2a}\Pi(y,y).$$

2.b.iv) $a^2\neq b^2$. Iz Λ-sistema (7) – (10) nalazimo jedinstveno rešenje po parametrima

$$\lambda=-\frac{a}{a^2-b^2}\ \wedge\mu=\frac{b}{a^2-b^2}.$$

Zamenom vrednosti $\lambda=-\frac{a}{a^2-b^2}$ i $\mu=\frac{b}{a^2-b^2}$ u jednačinu $A=A+\lambda\mathcal{J}_1+\mu\mathcal{J}_2$ dobijamo da važi

$$A=A-\frac{a}{a^2-b^2}(aA+bB+cC+dD)+\frac{b}{a^2-b^2}(aB+bA+cD+dC).$$

Odatle zaključujemo da je opšte reproduktivno rešenje funkcionalne jednačine (1) dato u vidu

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

pri čemu su poslednje dve jednačine dobijene iz prve jednačine zamenama $\mathcal{X} \mapsto \alpha\mathcal{X}$ i $\mathcal{X} \mapsto \beta\mathcal{X}$. Ako se izvrši zamena T i Z u jednačinu $\mathcal{J}_1 = T - Z = 0$, dobijamo istu jednačinu. Dakle Λ-sistem je oblika $0\lambda = 0$, tj. rešenje je ma koji parametar λ. Iz $\Xi = \Xi + \lambda\mathcal{J}_1$, potencijalno opšte reproduktivno rešenje je oblika:

$$F(\mathcal{X}) = \Pi(\mathcal{X}) + \lambda(\Pi(\alpha\mathcal{X}) - \Pi(\beta\mathcal{X})), \tag{3}$$

gde je $\Pi : R^3 \longrightarrow R$ proizvoljna funkcija. Formula (3) jeste rešenje ako i samo ako je funkcija Π rešenje polazne funkcionalne jednačine. Samim tim homogena semigrupna funkcionalna jednačina (1) nema rešenje u pratećoj semigrupi. Pokazaćemo da funkcionalna jednačina (1) ima rešenje u široj semigrupi.

Definišimo redom funkcije $\alpha_1, \ldots, \alpha_{27} : R^3 \longrightarrow R^3$ kao *varijacije sa ponavljanjem* od tri elementa:

$$\begin{array}{lll}
\alpha_1(\mathcal{X}) = (x,x,x), & \alpha_2(\mathcal{X}) = (x,x,y), & \alpha_3(\mathcal{X}) = (x,x,z), \\
\alpha_4(\mathcal{X}) = (x,y,x), & \alpha_5(\mathcal{X}) = (x,y,y), & \alpha_6(\mathcal{X}) = (x,y,z), \\
\alpha_7(\mathcal{X}) = (x,z,x), & \alpha_8(\mathcal{X}) = (x,z,y), & \alpha_9(\mathcal{X}) = (x,z,z), \\
\alpha_{10}(\mathcal{X}) = (y,x,x), & \alpha_{11}(\mathcal{X}) = (y,x,y), & \alpha_{12}(\mathcal{X}) = (y,x,z), \\
\alpha_{13}(\mathcal{X}) = (y,y,x), & \alpha_{14}(\mathcal{X}) = (y,y,y), & \alpha_{15}(\mathcal{X}) = (y,y,z), \\
\alpha_{16}(\mathcal{X}) = (y,z,x), & \alpha_{17}(\mathcal{X}) = (y,z,x), & \alpha_{18}(\mathcal{X}) = (y,z,z), \\
\alpha_{19}(\mathcal{X}) = (z,x,x), & \alpha_{20}(\mathcal{X}) = (z,x,y), & \alpha_{21}(\mathcal{X}) = (z,x,z), \\
\alpha_{22}(\mathcal{X}) = (z,y,x), & \alpha_{23}(\mathcal{X}) = (z,y,y), & \alpha_{24}(\mathcal{X}) = (z,y,z), \\
\alpha_{25}(\mathcal{X}) = (z,z,x), & \alpha_{26}(\mathcal{X}) = (z,z,y), & \alpha_{27}(\mathcal{X}) = (z,z,z).
\end{array}$$

Posmatrajmo skup funkcija $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{27}\}$ koji u odnosu na kompoziciju ($\circ$) obrazuje semigrupu funkcija $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, \circ)$. CAYLEeva tablica semigrupe[29] $\mathbb{A}$ data je sa:

$\circ$	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$\alpha_4\alpha_5\alpha_6$	$\alpha_7\alpha_8\alpha_9$	$\alpha_{10}\alpha_{11}\alpha_{12}$	$\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{15}$	$\alpha_{16}\alpha_{17}\alpha_{18}$	$\alpha_{19}\alpha_{20}\alpha_{21}$	$\alpha_{22}\alpha_{23}\alpha_{24}$	$\alpha_{25}\alpha_{26}\alpha_{27}$
α_1	$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\alpha_{14}\alpha_{14}\alpha_{14}$	$\alpha_{14}\alpha_{14}\alpha_{14}$	$\alpha_{14}\alpha_{14}\alpha_{14}$	$\alpha_{27}\alpha_{27}\alpha_{27}$	$\alpha_{27}\alpha_{27}\alpha_{27}$	$\alpha_{27}\alpha_{27}\alpha_{27}$
α_2	$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\alpha_2\alpha_2\alpha_2$	$\alpha_3\alpha_3\alpha_3$	$\alpha_{13}\alpha_{13}\alpha_{13}$	$\alpha_{14}\alpha_{14}\alpha_{14}$	$\alpha_{15}\alpha_{15}\alpha_{15}$	$\alpha_{25}\alpha_{25}\alpha_{25}$	$\alpha_{26}\alpha_{26}\alpha_{26}$	$\alpha_{27}\alpha_{27}\alpha_{27}$
α_3	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{15}$	$\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{15}$	$\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{15}$	$\alpha_{25}\alpha_{26}\alpha_{27}$	$\alpha_{25}\alpha_{26}\alpha_{27}$	$\alpha_{25}\alpha_{26}\alpha_{27}$
α_4	$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\alpha_4\alpha_4\alpha_4$	$\alpha_7\alpha_7\alpha_7$	$\alpha_{11}\alpha_{11}\alpha_{11}$	$\alpha_{14}\alpha_{14}\alpha_{14}$	$\alpha_{17}\alpha_{17}\alpha_{17}$	$\alpha_{21}\alpha_{21}\alpha_{21}$	$\alpha_{24}\alpha_{24}\alpha_{24}$	$\alpha_{27}\alpha_{27}\alpha_{27}$
α_5	$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\alpha_5\alpha_5\alpha_5$	$\alpha_9\alpha_9\alpha_9$	$\alpha_{10}\alpha_{10}\alpha_{10}$	$\alpha_{14}\alpha_{14}\alpha_{14}$	$\alpha_{18}\alpha_{18}\alpha_{18}$	$\alpha_{19}\alpha_{19}\alpha_{19}$	$\alpha_{23}\alpha_{23}\alpha_{23}$	$\alpha_{27}\alpha_{27}\alpha_{27}$
α_6	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$\alpha_4\alpha_5\alpha_6$	$\alpha_7\alpha_8\alpha_9$	$\alpha_{10}\alpha_{11}\alpha_{12}$	$\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{15}$	$\alpha_{16}\alpha_{17}\alpha_{18}$	$\alpha_{19}\alpha_{20}\alpha_{21}$	$\alpha_{22}\alpha_{23}\alpha_{24}$	$\alpha_{25}\alpha_{26}\alpha_{27}$
α_7	$\alpha_1\alpha_4\alpha_7$	$\alpha_1\alpha_4\alpha_7$	$\alpha_1\alpha_4\alpha_7$	$\alpha_{11}\alpha_{14}\alpha_{17}$	$\alpha_{11}\alpha_{14}\alpha_{17}$	$\alpha_{11}\alpha_{14}\alpha_{17}$	$\alpha_{21}\alpha_{24}\alpha_{27}$	$\alpha_{21}\alpha_{24}\alpha_{27}$	$\alpha_{21}\alpha_{24}\alpha_{27}$
α_8	$\alpha_1\alpha_4\alpha_7$	$\alpha_2\alpha_5\alpha_8$	$\alpha_3\alpha_6\alpha_9$	$\alpha_{10}\alpha_{13}\alpha_{16}$	$\alpha_{11}\alpha_{14}\alpha_{17}$	$\alpha_{12}\alpha_{15}\alpha_{18}$	$\alpha_{19}\alpha_{22}\alpha_{25}$	$\alpha_{20}\alpha_{23}\alpha_{26}$	$\alpha_{21}\alpha_{24}\alpha_{27}$
α_9	$\alpha_1\alpha_5\alpha_9$	$\alpha_1\alpha_5\alpha_9$	$\alpha_1\alpha_5\alpha_9$	$\alpha_{10}\alpha_{14}\alpha_{18}$	$\alpha_{10}\alpha_{14}\alpha_{18}$	$\alpha_{10}\alpha_{14}\alpha_{18}$	$\alpha_{19}\alpha_{23}\alpha_{27}$	$\alpha_{19}\alpha_{23}\alpha_{27}$	$\alpha_{19}\alpha_{23}\alpha_{27}$
α_{10}	$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\alpha_{10}\alpha_{10}\alpha_{10}$	$\alpha_{19}\alpha_{19}\alpha_{19}$	$\alpha_5\alpha_5\alpha_5$	$\alpha_{14}\alpha_{14}\alpha_{14}$	$\alpha_{23}\alpha_{23}\alpha_{23}$	$\alpha_9\alpha_9\alpha_9$	$\alpha_{18}\alpha_{18}\alpha_{18}$	$\alpha_{27}\alpha_{27}\alpha_{27}$
α_{11}	$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\alpha_{11}\alpha_{11}\alpha_{11}$	$\alpha_{21}\alpha_{21}\alpha_{21}$	$\alpha_4\alpha_4\alpha_4$	$\alpha_{14}\alpha_{14}\alpha_{14}$	$\alpha_{24}\alpha_{24}\alpha_{24}$	$\alpha_7\alpha_7\alpha_7$	$\alpha_{17}\alpha_{17}\alpha_{17}$	$\alpha_{27}\alpha_{27}\alpha_{27}$
α_{12}	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$\alpha_{10}\alpha_{11}\alpha_{12}$	$\alpha_{19}\alpha_{20}\alpha_{21}$	$\alpha_4\alpha_5\alpha_6$	$\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{15}$	$\alpha_{22}\alpha_{23}\alpha_{24}$	$\alpha_7\alpha_8\alpha_9$	$\alpha_{16}\alpha_{17}\alpha_{18}$	$\alpha_{25}\alpha_{26}\alpha_{27}$
α_{13}	$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\alpha_{13}\alpha_{13}\alpha_{13}$	$\alpha_{25}\alpha_{25}\alpha_{25}$	$\alpha_2\alpha_2\alpha_2$	$\alpha_{14}\alpha_{14}\alpha_{14}$	$\alpha_{26}\alpha_{26}\alpha_{26}$	$\alpha_3\alpha_3\alpha_3$	$\alpha_{15}\alpha_{15}\alpha_{15}$	$\alpha_{27}\alpha_{27}\alpha_{27}$
α_{14}	$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\alpha_{14}\alpha_{14}\alpha_{14}$	$\alpha_{27}\alpha_{27}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\alpha_{14}\alpha_{14}\alpha_{14}$	$\alpha_{27}\alpha_{27}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\alpha_{14}\alpha_{14}\alpha_{14}$	$\alpha_{27}\alpha_{27}\alpha_{27}$
α_{15}	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{15}$	$\alpha_{25}\alpha_{26}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{15}$	$\alpha_{25}\alpha_{26}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{15}$	$\alpha_{25}\alpha_{26}\alpha_{27}$
α_{16}	$\alpha_1\alpha_4\alpha_7$	$\alpha_{10}\alpha_{13}\alpha_{16}$	$\alpha_{19}\alpha_{22}\alpha_{25}$	$\alpha_2\alpha_5\alpha_8$	$\alpha_{11}\alpha_{14}\alpha_{17}$	$\alpha_{20}\alpha_{23}\alpha_{26}$	$\alpha_3\alpha_6\alpha_9$	$\alpha_{12}\alpha_{15}\alpha_{18}$	$\alpha_{21}\alpha_{24}\alpha_{27}$
α_{17}	$\alpha_1\alpha_4\alpha_7$	$\alpha_{11}\alpha_{14}\alpha_{17}$	$\alpha_{21}\alpha_{24}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_4\alpha_7$	$\alpha_{11}\alpha_{14}\alpha_{17}$	$\alpha_{21}\alpha_{24}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_4\alpha_7$	$\alpha_{11}\alpha_{14}\alpha_{17}$	$\alpha_{21}\alpha_{24}\alpha_{27}$
α_{18}	$\alpha_1\alpha_5\alpha_9$	$\alpha_{10}\alpha_{14}\alpha_{18}$	$\alpha_{19}\alpha_{23}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_5\alpha_9$	$\alpha_{10}\alpha_{14}\alpha_{18}$	$\alpha_{19}\alpha_{23}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_5\alpha_9$	$\alpha_{10}\alpha_{14}\alpha_{18}$	$\alpha_{19}\alpha_{23}\alpha_{27}$
α_{19}	$\alpha_1\alpha_{10}\alpha_{19}$	$\alpha_1\alpha_{10}\alpha_{19}$	$\alpha_1\alpha_{10}\alpha_{19}$	$\alpha_5\alpha_{14}\alpha_{23}$	$\alpha_5\alpha_{14}\alpha_{23}$	$\alpha_5\alpha_{14}\alpha_{23}$	$\alpha_9\alpha_{18}\alpha_{27}$	$\alpha_9\alpha_{18}\alpha_{27}$	$\alpha_9\alpha_{18}\alpha_{27}$
α_{20}	$\alpha_1\alpha_{10}\alpha_{19}$	$\alpha_2\alpha_{11}\alpha_{20}$	$\alpha_3\alpha_{12}\alpha_{21}$	$\alpha_4\alpha_{13}\alpha_{22}$	$\alpha_5\alpha_{14}\alpha_{23}$	$\alpha_6\alpha_{15}\alpha_{24}$	$\alpha_7\alpha_{16}\alpha_{25}$	$\alpha_8\alpha_{17}\alpha_{26}$	$\alpha_9\alpha_{18}\alpha_{27}$
α_{21}	$\alpha_1\alpha_{11}\alpha_{21}$	$\alpha_1\alpha_{11}\alpha_{21}$	$\alpha_1\alpha_{11}\alpha_{21}$	$\alpha_4\alpha_{14}\alpha_{24}$	$\alpha_4\alpha_{14}\alpha_{24}$	$\alpha_4\alpha_{14}\alpha_{24}$	$\alpha_7\alpha_{17}\alpha_{27}$	$\alpha_7\alpha_{17}\alpha_{27}$	$\alpha_7\alpha_{17}\alpha_{27}$
α_{22}	$\alpha_1\alpha_{10}\alpha_{19}$	$\alpha_4\alpha_{13}\alpha_{22}$	$\alpha_7\alpha_{16}\alpha_{25}$	$\alpha_2\alpha_{11}\alpha_{20}$	$\alpha_5\alpha_{14}\alpha_{23}$	$\alpha_8\alpha_{17}\alpha_{26}$	$\alpha_3\alpha_{12}\alpha_{21}$	$\alpha_6\alpha_{15}\alpha_{24}$	$\alpha_9\alpha_{18}\alpha_{27}$
α_{23}	$\alpha_1\alpha_{10}\alpha_{19}$	$\alpha_5\alpha_{14}\alpha_{23}$	$\alpha_9\alpha_{18}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{10}\alpha_{19}$	$\alpha_5\alpha_{14}\alpha_{23}$	$\alpha_9\alpha_{18}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{10}\alpha_{19}$	$\alpha_5\alpha_{14}\alpha_{23}$	$\alpha_9\alpha_{18}\alpha_{27}$
α_{24}	$\alpha_1\alpha_{11}\alpha_{21}$	$\alpha_4\alpha_{14}\alpha_{24}$	$\alpha_7\alpha_{17}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{11}\alpha_{21}$	$\alpha_4\alpha_{14}\alpha_{24}$	$\alpha_7\alpha_{17}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{11}\alpha_{21}$	$\alpha_4\alpha_{14}\alpha_{24}$	$\alpha_7\alpha_{17}\alpha_{27}$
α_{25}	$\alpha_1\alpha_{13}\alpha_{25}$	$\alpha_1\alpha_{13}\alpha_{25}$	$\alpha_1\alpha_{13}\alpha_{25}$	$\alpha_2\alpha_{14}\alpha_{26}$	$\alpha_2\alpha_{14}\alpha_{26}$	$\alpha_2\alpha_{14}\alpha_{26}$	$\alpha_3\alpha_{15}\alpha_{27}$	$\alpha_3\alpha_{15}\alpha_{27}$	$\alpha_3\alpha_{15}\alpha_{27}$
α_{26}	$\alpha_1\alpha_{13}\alpha_{25}$	$\alpha_2\alpha_{14}\alpha_{26}$	$\alpha_3\alpha_{15}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{13}\alpha_{25}$	$\alpha_2\alpha_{14}\alpha_{26}$	$\alpha_3\alpha_{15}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{13}\alpha_{25}$	$\alpha_2\alpha_{14}\alpha_{26}$	$\alpha_3\alpha_{15}\alpha_{27}$
α_{27}	$\alpha_1\alpha_{14}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{14}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{14}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{14}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{14}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{14}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{14}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{14}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{14}\alpha_{27}$

[29] FORMIRANA RAČUNAROM POMOĆU ODGOVARAJUĆEG C-PROGRAMA

Prema prethodnom razmatranju, funkcionalna jednačina (1) nije rešiva u semigrupi $\mathbb{S}$. Ispitajmo rešivost funkcionalne jednačine (1) u široj semigrupi $\mathbb{A}$ (odnosno $\mathbb{B}$). Polazna funkcionalna jednačina, prema prethodnim oznakama, može se zapisati u obliku:

$$F(\alpha_{21}X) - F(\alpha_{27}X) = 0, \tag{6}$$

odnosno u obliku:

$$\mathcal{J}_1 = T - Z = 0. \tag{7}$$

Izvršimo zamene $\mathcal{X} \mapsto \alpha_1\mathcal{X}, \ldots, \mathcal{X} \mapsto \alpha_{27}\mathcal{X}$ u jednačini (6). Prema tablici proizvoda (5) iz jednakosti (7), $(\cdot)$-množenjem sa desne strane, dobijamo redom sledeće *netrivijalne proizvode*:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{J}_1 = T - Z = 0, \\ \mathcal{J}_2 = J - M = 0, \\ \mathcal{J}_3 = D - A = 0, \\ \mathcal{J}_4 = W - Z = 0, \\ \mathcal{J}_5 = F - A = 0, \\ \mathcal{J}_6 = P - M = 0. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Ostali proizvodi su trivijalni, tj. dovode do izraza koji su indetički jednaki 0. Samim tim rešenje, po $\Xi = F(x,y,z)$, tražimo u obliku:

$$\Xi = \Xi + \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \mathcal{J}_i, \tag{9}$$

za nepoznate realne parametre $\lambda_1, \ldots, \lambda_6$. Jednačina (9) eksplicitno data je u obliku

$$\begin{array}{rcllll} \Xi & = & \Xi & + \ \lambda_1(T-Z) & + & \lambda_2(J-M) \\ & & & + \ \lambda_3(D-A) & + & \lambda_4(W-Z) \\ & & & + \ \lambda_5(F-A) & + & \lambda_6(P-M). \end{array}$$

Iz prethodne jednačine zamenom $\mathcal{X} \mapsto \alpha_{21}\mathcal{X}$, odnosno distributivnom $(\cdot)$-množenjem sa desna sa T, dobijamo jednačinu

$$\begin{array}{rcllll} T & = & T & + \ \lambda_1(Z-Z) & + & \lambda_2(F-A) \\ & & & + \ \lambda_3(T-Z) & + & \lambda_4(T-Z) \\ & & & + \ \lambda_5(Z-Z) & + & \lambda_6(F-A), \end{array}$$

odnosno jednačinu:

$$T = T + (\lambda_3 + \lambda_4)(T - Z) + (\lambda_2 + \lambda_6)(F - A). \tag{10}$$

Iz jednačine (9) zamenom $\mathcal{X} \mapsto \alpha_{27}\mathcal{X}$, odnosno distributivnim $(\cdot)$-množenjem sa desna sa Z, dobijamo jednačinu

$$\begin{array}{rcllll} Z & = & Z & + \ \lambda_1(Z-Z) & + & \lambda_2(Z-Z) \\ & & & + \ \lambda_3(Z-Z) & + & \lambda_4(Z-Z) \\ & & & + \ \lambda_5(Z-Z) & + & \lambda_6(Z-Z), \end{array}$$

odnosno trivijalnu jednačinu:

$$Z = Z. \tag{11}$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Rešenja postavljenog problema dali su M. KUCZMA [MK1] i P. VASIĆ [DM-PV2]. Pri tom P. VASIĆ dao je rešenje bez dodatne pretpostavke da jednačina $2X = A$ $(X, A \in M)$ ima jedinstveno rešenje po X.

Navodimo rešenje primenom PREŠIĆevog Λ–metoda. Iz funkcionalne jednačine (1) zaključujemo da je $f(x_1, x_1, x_1) = 0$ i $f(x_1, x_1, x_3) = 0$. Funkcionalna jednačina

$$f(x_1, x_2, x_3) - f(x_2, x_1, x_3) = f(x_2, x_1, x_2), \tag{2}$$

koja se izvodi iz (1), uz dodatni uslov $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, ekvivaletna je sa polaznom funkcionalnom jednačinom (1). Opšte rešenje funkcionlne jednačine (2) tražimo uz pretpostavku[31] $x_1 \neq x_2$. Tako dobijeno rešenje dopunjujemo sa 0 kao rešenjem u slučaju $x_1 = x_2$.

Za $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ uvedimo funkcije $i, \alpha, \beta : R^3 \longrightarrow R^3$ na sledeći način $i\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$, $\alpha\mathcal{X} = (x_2, x_1, x_3)$ i $\beta\mathcal{X} = (x_2, x_1, x_2)$. Skup $\{i, \alpha, \beta\}$ nije zatvoren za kompoziciju $(\circ)$. Dopunimo prethodni skup sa funkcijama $\gamma, \delta, \eta : R^3 \longrightarrow R^3$ definisanim redom sa $\gamma\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_2)$, $\delta\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_1)$ i $\eta\mathcal{X} = (x_2, x_1, x_1)$. Na taj način skup $S = \{i, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta\}$ u odnosu na kompoziciju $(\circ)$ obrazuje semigrupu sa jedinicom $\mathbb{S} = (S, \circ)$. Odgovarajuća CAYLEYeva tablica semigrupe $\mathbb{S}$ data je sa:

(3)

$\circ$	i	α	β	γ	δ	η
i	i	α	β	γ	δ	η
α	α	i	δ	η	β	γ
β	β	γ	δ	η	β	γ
γ	γ	β	β	γ	δ	η
δ	δ	η	β	γ	δ	η
η	η	δ	δ	η	β	γ

Označimo sa $I = f(i\mathcal{X}), A = f(\alpha\mathcal{X}), B = f(\beta\mathcal{X}), C = f(\gamma\mathcal{X}), D = f(\delta\mathcal{X})$ i $E = f(\eta\mathcal{X})$ nepoznate vrednosti funkcije $f : R^3 \longrightarrow R$. Polazeći od jednačine (2) dobijamo linearnu jednačinu:

$$\mathcal{J}_1 = I - A - B = 0. \tag{4}$$

Uvedimo redom zamene: $\mathcal{X} \mapsto i\mathcal{X}$, $\mathcal{X} \mapsto \alpha\mathcal{X}$, $\mathcal{X} \mapsto \beta\mathcal{X}$, $\mathcal{X} \mapsto \gamma\mathcal{X}$, $\mathcal{X} \mapsto \delta\mathcal{X}$ i $\mathcal{X} \mapsto \eta\mathcal{X}$ tada prethodna jednačina ekvivaletna je sa linearnim sistemom:

$$\left\{\begin{array}{rcccl} \mathcal{J}_1 & = & I - A - B & = & 0, \\ \mathcal{J}_2 & = & A - I - C & = & 0, \\ \mathcal{J}_3 & = & B - 2D & = & 0, \\ \mathcal{J}_4 & = & C - 2E & = & 0, \\ \mathcal{J}_5 & = & D - 2B & = & 0, \\ \mathcal{J}_6 & = & E - 2C & = & 0. \end{array}\right\} \tag{5}$$

[31] IZ FUNKCIONALNE JEDNAČINE (2) ZAMENAMA NIJE IZVODIV USLOV $f(x_1, x_1, x_3) = 0$.

$$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases} \frac{1}{2}\Pi(x_1,x_2,x_3)+\frac{1}{2}\Pi(x_2,x_1,x_3)+ & \\ \tau\Big(\Pi(x_2,x_1,x_2)+\Pi(x_1,x_2,x_2)\Big)- & \\ (\tau+\frac{1}{2})\Big(\Pi(x_1,x_2,x_1)+\Pi(x_2,x_1,x_1)\Big) & : \ x_1\neq x_2, \\ 0 & : \ x_1=x_2, \end{cases}$$

gde je $\tau\in R$. Zamenom prethodne funkcije u funkcionalnu jednačinu (2) nalazimo da samo za vrednost parametra $\tau=-\frac{1}{6}$ sa prethodnom funkcijom dato je rešenje funkcionalne jednačine (2). Samim tim opšte reproduktivno rešenje funkcionalne jednačine (1) dato je u sledećem obliku:

$$(12)\qquad f(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases} \frac{1}{2}\Pi(x_1,x_2,x_3)+\frac{1}{2}\Pi(x_2,x_1,x_3)- & \\ -\frac{1}{6}\Big(\Pi(x_2,x_1,x_2)+\Pi(x_1,x_2,x_2)\Big)- & \\ -\frac{1}{3}\Big(\Pi(x_1,x_2,x_1)+\Pi(x_2,x_1,x_1)\Big) & : \ x_1\neq x_2, \\ 0 & : \ x_1=x_2. \end{cases}$$

Navedimo opšte rešenje koje je dao M. KUCZMA i P. VASIĆ. Za skup $E^3=E\times E\times E$ definišimo podskupove: $A=\{(x_1,x_2,x_3):x_1=x_2\}$, $B_0=\{(x_1,x_2):(x_2,x_1)\notin B_0\wedge x_1\neq x_2\}\subset E^2$, $B=B_0\times E$, $C=(E\times E\times E)\backslash(A\cup B)$, $D=\{(x_1,x_2,x_3):x_2=x_3\}\cap B$ i $F=\{(x_1,x_2,x_3):x_1=x_3\}\cap C$. M. KUCZMA, u radu [MK1], dao je opšte rešenje u obliku funkcije:

$$(13)\qquad f(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases} g(x_1,x_2,x_3) & : \ (x_1,x_2,x_3)\in B\backslash D, \\ -2g(x_1,x_2,x_3)+a(x_1) & : \ (x_1,x_2,x_3)\in D, \\ g(x_2,x_1,x_3)+g(x_2,x_1,x_2)+a(x_1) & : \ (x_1,x_2,x_3)\in C\backslash F, \\ -g(x_2,x_1,x_2)+a(x_1)+a(x_2) & : \ (x_1,x_2,x_3)\in F, \\ a(x_1) & : \ (x_1,x_2,x_3)\in A, \end{cases}$$

za proizvoljne dve funkcije: $g:E^3\longrightarrow M$ i $a:E\longrightarrow M$, pri čemu funkcija a ispunjava $a(x)=-a(x)$. P. VASIĆ dao je opšte rešenje u obliku:

$$(14)\qquad f(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases} H(x_1,x_2,x_3)+H(x_2,x_1,x_3)+G(x_1,x_2) & : \ x_1\neq x_2\wedge x_1\neq x_3, \\ G(x_2,x_1)-G(x_1,x_2) & : \ x_1=x_3, \\ 0 & : \ x_1=x_2, \end{cases}$$

za proizvoljne dve funkcije $H:E^3\longrightarrow M$ i $G:E^2\longrightarrow M$.

Dobijeno opšte rešenje (12) jeste reproduktivno i ono zavisi od jedne funkcije. Sa formulom (12) pokazano je da za opšte rešenje nije neophodno uvesti proizvoljne funkcije različitih „arnosti" kao u slučaju formula (13) i (14).

Primer 5. D. SINCOV (*prema* [DM-PV2]) *postavio je problem određivanja opšteg rešenja funkcionalne jednačine:*

$$(1)\qquad f(x_1,x_2)+f(x_2,x_3)=f(x_1,x_3),$$

po nepoznatoj funkciji $f:R^2\longrightarrow R$.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Uvedimo oznake $\lambda = \lambda_1$, $\mu = \lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6 + \lambda_7$ i $\tau = \lambda_3 + \lambda_8$, tada opšte rešenje tražimo u obliku:

(7) $$I = I + \lambda\mathcal{J}_1 + \mu\mathcal{J}_2 + \tau\mathcal{J}_5.$$

Izvršimo redom zamene $\mathcal{X} \mapsto \alpha\mathcal{X}$, $\mathcal{X} \mapsto \beta\mathcal{X}$, $\mathcal{X} \mapsto \gamma\mathcal{X}$ u jednačini (7), tada dobijamo:

(8) $$A = A + \lambda\mathcal{J}_2 + \mu\mathcal{J}_3 + \tau\mathcal{J}_5,$$

(9) $$B = B + \lambda\mathcal{J}_1 + \mu\mathcal{J}_2 + \tau\mathcal{J}_5$$

i

(10) $$C = C + \lambda\mathcal{J}_2 + \mu\mathcal{J}_2 + \tau\mathcal{J}_5.$$

Zamenom prethodnih izraza za A, B i C u jednačinu (4), dobijamo:

$$\mathcal{J}_1 = (\lambda + 1)A + (\lambda + 1)B - (\lambda + 1)C + (\mu + \tau)K = 0,$$

odnosno dobijamo Λ-sistem:

(11) $$\{\ \lambda + 1 = 0 \quad \wedge \quad \mu + \tau = 0\ \}$$

Rešenje Λ-sistema linearnih jednačina dato je u obliku:

(12) $$\left\{\begin{array}{c} \lambda = -1 \\ \mu = -t \\ \tau = t \end{array}\right\}$$

gde je t realni parametar. Iz formule (7) nalazimo:

$$I = I - (A + B - C) + t(E - K)$$

Potencijalno opšte reproduktivno rešenje funkcionalne jednačine (2) dato je u obliku:

(13) $$\begin{aligned}\varphi(k, x_1, x_2, x_3) \;=\; & \Phi(k, x_1, x_2, x_3) - \\ & \big(\Phi(k, k, x_1, x_2) + \Phi(k, k, x_2, x_3) - \Phi(k, k, x_1, x_3)\big) + \\ & t\big(\Phi(k, k, k, x_2) - \Phi(k, k, k, k)\big),\end{aligned}$$

gde je t realni parametar i gde je $\Phi : R^4 \longrightarrow R$ ma koja funkcija. Zamenom prethodne funkcije u funkcionalnu jednačinu (2) određujemo vrednost parametra $t = 0$. Odatle dobijamo opšte rešenje funkcionalne jednačine (1) u obliku:

(14) $$f(x, y) = \varphi(k, k, x, y) = \Phi(k, k, k, y) - \Phi(k, k, k, x) = \Pi(y) - \Pi(x),$$

gde je $\Pi : R \longrightarrow R$ proizvoljna funkcija. Navedenim postupkom „upotpunjavanja" zaključujemo da „nepotpune" semigrupne funkcionalne jednačine moguće je razmatrati u širem obliku semigrupnih funkcionalnih jednačina.

OZNAKE

$\mathcal{T}$	istinitnosna vrednost
$\top, \perp$	tačno, netačno
$\emptyset$	prazan skup
$\mathbb{I}_n$	skup prvih n prirodnih brojeva $1, \dots, n$
$\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	skupovi prirodnih, realnih, kompleksnih brojeva
$\mathbb{C}^{m\times n}$	skup kompleksnih matrica formata $m \times n$
$\mathbb{C}_r^{m\times n}$	skup kompleksnih matrica ranga r i formata $m \times n$
$Adj(A)$	adjungovana matrica A
$\lvert A\rvert$, $Det(A)$	determinanta kvadratne matrice A
A^{-1}	inverzna matrica ($A \in \mathbb{C}_n^{n\times n}$)
I, I_n	jedinična matrica
$I = I(x)$	identičko preslikavanje
e_i	jedinični vektor $[0 \dots \underset{(i)}{0}1 0 \dots 0]^T$ u prostoru R^n
E_r	matrica sa r jedinica na prvih r mesta dijagonale i na ostalim mestima sa nula elementima ($E_r \in \mathbb{C}_r^{n\times m}$)
$R(A)$	prostor slike matrice A
$N(A)$, $Ker(A)$	nula prostor matrice A, jezgro matrice A
$rank(A)$	rang matrice A
$Ind(A)$	indeks matrice A
$\vec{A}$	vektor dobijen upisivanjem vrsta matrice A
$[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n]_\rightarrow$	matrica M zapisana po vrstama
$[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n]_\downarrow$	matrica M zapisana po vrstama
$A^{(j)}$	j-ta kolona matrice A
A^T	transponovana matrica A
A^*	konjugovano-transponovana matrica A
$\otimes$	KRONECKERov ili tenzorski proizvod matrica
$A\{j\}$	skup j-inverza matrice A, $(j = 1, 1^k, 2, 3, 4, 5, 5^k)$
$A^{(j)}$	ma koji $A\{j\}$-inverz $(j = 1, 1^k, 2, 3, 4, 5, 5^k)$
$\lambda^\dagger$	uopšteni inverz skalara $\lambda^\dagger \overset{def}{=} \begin{Bmatrix} \lambda^{-1} & : & \lambda \neq 0 \\ 0 & : & \lambda = 0 \end{Bmatrix}$
$A^\dagger$	MOORE-PENROSEov inverz

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

LITERATURA

1. [JA-MG-MH] J. ACZÉL, M. GHERMANESCU, M. HOSSZÚ: *On cyclic equations*, Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 5 A, 215-221, Budampeast 1960.

2. [JA] J. ACZÉL: *Lectures on functional equations and their applications*, New York, London 1966.

3. [AB1] A. BJERHAMMAR: *Theory of errors and generalized matrix inverses*, Elsevier sci. publ. comp., New York 1973.

4. [AB2] A. BJERHAMMAR: *Applications of calculus of matrices to the method of least squares with special references to geodetic calculations*, Trans. R. Inst. Technol. 49. Stockholm 1951.

5. [ABI-TG] A. BEN-ISRAEL, T. N. E. GREVILLE: *Generalized Inverse, Theory and Applications*, John Wiley & Sons (Pure & applied mathematics–monographs), New York 1974.

6. [ABI-RB] A. BEN-ISRAEL, R.B. BAPT: *Singular Values and Maximum Rank Minors of Generalized Inverses*, Reutcor Research Report 1995 (To appear in *Lin. and Multilin. Alg.*)

7. [ABI] A. BEN-ISRAEL: *Generalized inverses of matrices: a perspective of the work of Penrose*, Math. Proc. Proc. Cambridge Philos. Soc. 100 (1986), 407-425.

8. [LB] L. BERNARDIN: *A Review of Symbolic Solvers*, preprint 1997, `http://www.inf.ethz.ch/personal/bernardi/solve/review_A4.ps`

9. [SC-CM] S. L. CAMPBELL, C. D. MEYER: *Generalized Inverses of Linear Transformations*, Dover books, New York 1992.

24. [JK3] J. KEČKIĆ: *Reproductivity of some equations of analysis II*, Publications de l'institut mathematique, Beograd Nouvele serie, tome 33 (47) 1983.

25. [JK4] J. KEČKIĆ: *On general solutions of some functional equations*, Publications de l'institut mathematique, Beograd Nouvele serie, tome 35 (49) 1984.

26. [JK5] J. KEČKIĆ: *Explicit solutions of some linear matrix equations*, Publications de l'institut mathematique, Beograd Nouvele serie, tome 35 (49) 1984.

27. [JK6] J. KEČKIĆ: *The general linear equation on vector spaces*, Publications de l'institut mathematique, Beograd Nouvele serie, tome 37 (51) 1985.

28. [AK-ЮМ] А. И. КОСТРИКИН, Ю. И. МАНИН: *Линейная алгебра и геометрия*, МГУ, Москва 1980.

29. [MK1] M. KUCZMA: *Solution d'un problème de D. S. Mitrinović concernant une équation fonctionnelle*, Publikacije ETF № 129, Beograd 1964.

30. [MK2] M. KUCZMA: *A survey of the theory of functional equations*, Publikacije ETF № 130, Beograd 1964.

31. [MK3] M. KUCZMA: *Functional equations in a single variable*, Warszawa 1968.

32. [DK] D. KUREPA: *Viša algebra* I/II, GK, Beograd 1979.

33. [SK] S. KUREPA: *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, SNL, Zagreb 1986.

34. [DK] D. E. KNUTH: *The art of computer programming*, Addison-Wesley Publ. Comp., Massachusetts 1973.

35. [PL] P. LANCASTER: *Explicit solutions of linear matrix equations*, SIAM Review 12, 1970.

36. [AL] A. LIPKOVSKI: *Linearna algebra i analitička geometrija*, NK, Beograd 1992.

37. [EM] E. MENDELSON: *Introduction to mathematical logic*, D. Van comp. inc., Princeton 1964.

38. [ŽM] Ž. MIJAJLOVIĆ: *An introduction to model theory*, Institute of Mathematics, Novi Sad 1987.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

52. [VP2] V. PERIĆ: *Generalizirana reciproka matrice*, Stručno metodički Časopis Matematika, Zagreb 1982.

53. [RP1] R. PENROSE: *A generalized inverses for matrices*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 51 (1955), pp. 406-413.

54. [RP2] R. PENROSE: *On best approximate solution of linear matrix equations*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 52 (1956), pp. 17-19.

55. [SP1] S. B. PREŠIĆ: *Méthod de résolution d'une classe d'équations fonctionnelles linéaires*, C. R. Acad. Sci., 257, Paris 1963.

56. [SP2] S. B. PREŠIĆ: *Méthode de résolution d'une classe d'équations fonctionnelles linéaires*, Publikacije ETF № 119, Beograd 1963.

57. [SP3] S. B. PREŠIĆ: *Certaines équations matricielles*, Publikacije ETF № 121, Beograd 1963.

58. [SP4] S. B. PREŠIĆ: *Une classe d'équations matricielles et l'équation fonctionnelle $f^2 = f$*, Publications de l'institut mathematique. t. 8 (30), Beograd 1968.

59. [SP5] S. B. PREŠIĆ: *A method for solving a class of cyclic functional equations*, Matematički vesnik 5 (20), 375-377, Beograd 1968.

60. [SP6] S. B. PREŠIĆ: *Méthode de résolution d'une classe d'équations fonctionnelles linéaires non homogènes*, Publikacije ETF № 247 – 273, Beograd 1969.

61. [SP7] S. B. PREŠIĆ: *Opšta grupna funkcionalna jednačina*, Matematički vesnik 7 (22), Beograd 1969.

62. [SP-BA] S. B. PREŠIĆ, B. ALIMPIĆ: *Jedan način formiranja generalizacija polazeći od dokaza izvesne teoreme*, Matematička biblioteka 41, 143-156, Beograd 1969.

63. [SP-AK] S. B. PREŠIĆ, A. KRAPEŽ: *Development of Functional Equations in Serbia*, (TO APPEAR) Beograd 1997.

64. [SP-MP] S. B. PREŠIĆ, M. PREŠIĆ: *Rešavanje jednačina, nejednačina, formula*, Zagreb 1980.

65. [SP-BZ] S. B. PREŠIĆ, B. M. ZARIĆ: *Sur un théoréme concernant le cas général d'équation fonctionnelle cyclique, linéire, homogène a coefficients constants*, Publications de l'institut mathematique. t. 11 (25), Beograd 1971.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs