K

UNIVERZITET U BEOGRADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

ODLUČIVOST MATEMATIČKIH TEORIJA

magistarski rad

autor

Željko Sokolović, dipl. mat.

U Beogradu, jula 1987.

"Matematičko mišljenje jeste, i mora
ostati, esencijalno kreativno"

E. Post

"što neko sam više duha ima,
nalazi da ima samosvojnih ljudi"

B. Pascal

U radu se razmatra, trima metodama (eliminacija kvantora, model-teoretski i interpretacija), pitanje odlučivosti (rekurzivnosti) matematičkih teorija zadanih semantički ili sintaksno. Odlučivost teorije je objektivna mera njene složenosti, ali se još ne nazire dokaz da su takve teorije vrlo jednostavne.

Iako se glavni rezultati odnosi na teoriju modela, spominju se i pojmovi teorije rekurzija: nerekurzivnost, rekurzivna nabrojivost, kompletan Π_2^0 -skup i slično.

Pošto je uvedena notacija, u prvom delu se razmatraju osnovni rezultati, a konstruisana je i neodlučiva teorija u ω-jeziku sa kompletiranjem koje nije rekurzivno nabrojivo.

U drugom delu je dat prikaz metode eliminacije kvantora sa osvrtom na dodatna model-teoretska svojstva, koja se dobijaju primenom ove metode.

Model-teoretski metod je dat u trećem i četvrtom delu, tako da su u trećem susreću pojmovi kategoričnost i kompletnost (data je i aksiomatizacija za $Th(\omega,s,0)$), a u četvrtom modelsko kompletiranje i zasićenost.

Peti deo se odnosi na metod interpretacije i u njemu je dokazana odlučivost teorije drugog reda klase prebrojivih modela gustog linearnog uređenja bez krajeva, kao i potpunost nekih podteorija odlučive teorije drugog reda.

U zadnjem delu su dati poznati rezultati kompleksnosti u radu razmatranih teorija i pokazana je jedna vrsta ubrzanja za $Th(\omega,+)$.

Svom mentoru prof. dr Žarku Mijajloviću, od koga potiču i svi u radu naznačeni problemi, dugujem veliku zahvalnost za podstrek i uložen trud.

SADRŽAJ

0. NOTACIJA

Koristićemo, izuzev u delu 4, konačne jezike prvog (L^1), slabog drugog ($L^{\vee}(\in,..)$) i monadičke drugog ($L^2(\in,...)$) reda sa uobičajnim svojim konstituentima: relacijama(skup $Rel_{\mathcal{L}}$), operacijama($Fun_{\mathcal{L}}$) i konstantama ($Cons_{\mathcal{L}}$), gde je $\mathcal{L}$ meta-promenljiva za pomenute jezike.

Da bi razlikovali promenljive po kojima ćemo kvantifikovati, meta-promenljive za individualne promenljive jezika L^1 će biti: $x,y,z,...$, a za (konačne) podskupove jezika ($L^{\vee}$),L^2 :$X,Y,Z,...$.

Skupovi terma($Term_{\mathcal{L}}$) i formula ($Form_{\mathcal{L}}$) formiraju se na uobičajni način, kao specijalni konačni nizovi simbola jezika $\mathcal{L}$, logičkih simbola: $\neg$, $\vee$, $\equiv$, individualnih promenljivih $v_0,v_1,...,$ te ostalih simbola: $\exists$,(,) i , uz uobičajne skraćenice: $\wedge,\Rightarrow,\Leftrightarrow,\forall$.

Podrazumevaju se, uobičajna, pravila prioriteta veznika, brisanja zagrada, infiksne notacije za dijadske operacije i relacije, korišćenje meta-jednakosti (=), koncept slobodnih i vezanih promenjljivih, vezivanje istih kvantora u blok ($\forall \underline{x}$ z.z. $\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n$, gde $\underline{x}$ z.z. $x_1x_2...x_n$ ili $x_1,x_2,...,x_n$).

Rečenica je svaka formula bez slobodnih promenljivih, te je

$$Sent_{\mathcal{L}} \subseteq Form_{\mathcal{L}}.$$

Ordinal α je skup svih svojih predhodnika tj. $\alpha=\{\beta:\beta<\alpha\}$, a, specijalno, $\omega = \{0,1,....\}$, gde je $0 = \emptyset$, a $n=\{0,1,...n-1\}$. Pisaćemo dvosmisleno, ali iz konteksta jasno, ω umesto $\aleph_0$ i slično za ostale beskonačne kardinale. α^+ je najmanji kardinal veći od α.

Da bi se, uopšte, govorilo o odlučivosti (rekurzivnosti, efektivnosti) nekog skupa, on mora da bude prebrojiv. Ako je ispunjen ovaj uslov vrši se kodiranje (Gödel-izacija, aritmetizacija) tog skupa, te se posmatra odgovarajući skup kodova. Tek sada, o ovom, najčešće, podskupu prirodnih brojeva možemo govoriti kao o rekurzivno nabrojivom, rekurzivnom, primitivno ili elementarno rekurzivnom i to u konkretnom sistemu izračunljivosti na skupu prirodnih brojeva [u daljem ω].

Da bi izbegli tehničke detalje, upotrebljvaćemo stalno Church-ovu tezu (filozofski princip da je svaka intuitivno izračunljiva funkcija rekurzivna), zapravo, tzv. slabu Church-ovu tezu [12 str. 46] kojom se za neku konstrukciju, postupak ili skup tvrdi da je rekurzivan, elementarno rekurzivan i sl., bez detaljnog i formalnog dokaza oslanjajući se na intuitivno poimanje pojma izračunljivosti.

Tako se pojmovi: rekurzivan jezik (sa kojim ćemo uglavnom raditi) rekurzivan, rekurzivno nabrojiv skup aksioma, efektivno izabrana klasa formula i sl. neće strogo definisati preko svojih kodova, a dokazi će biti bez dugih, tehničkih detalja.

Napomenimo da ćemo kontradikciju (na meta-nivou) označavati sa $\perp$, a da će dokaz biti omeđen na početku rečenicom **Dokaz.**, a na kraju tipografskim simbolom ■, i da broj u uglastim zagradama (npr.[0]) upućuje na literaturu.

1. Osnovni pojmovi

U razmatranju odlučivosti, obično se pod teorijom jezika $\mathcal{L}$ podrazumeva zatvoren (deduktivno ili semantički) podskup rečenica $\mathcal{L}$, pa otuda i:

Definicija 1.1. Neka je $\mathcal{L}$ proizvoljan rekurzivan jezik i neka je H rekurzivan konzistentan skup rečenica jezika $\mathcal{L}$. **Teorija rekurzivno aksiomatizovana** skupom H je skup svih logičkih posledica skupa H tj.

$$Th(H)=\{\varphi\in Sent : H \vdash \varphi\}.$$

Teorija Th(H) i aksiome H su **kompletne** akko za svaku rečenicu φ važi: $\varphi\in Th(H) \vee \neg\varphi\in Th(H)$.

Opšte poznatu teoremu navodimo bez dokaza:

Teorema 1.2. Ako je teorija T jezika L kompletna onda je rekurzivno aksiomatizibilna akko je odlučiva.

Teorema 1.3. [13] Neka je T rekurzivno aksiomatizibilna i pretpostavimo da postoji rekurzivan niz rečenica $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ koji zadovoljava sledeće uslove:

(1) $T\cup\{\varphi_n\}$ je konzistentno za svako n.

(2) Svako kompletiranje $T_1 \supseteq T$ ima skup aksioma $B=\{\psi_1,\ldots,\psi_k,\ldots\}$ tako da $T_1 = Th(B)$, i za svako k postoji n za koje $T \vdash \varphi_n \leftrightarrow \psi_1\wedge\psi_2\wedge\cdots\wedge\psi_k$.

Tada je teorija T odlučiva.

Dokaz. Neka je H rekurzivna aksiomatizacija za T. Kantorovskim načinom izbrojavanja racionalnih brojeva možemo poredjati u niz $D_1, D_2, \ldots$ sve logičke posledice svih skupova $H_n = H$

$\cup \{\varphi_n\}$, $n=1,2,\ldots$:iz reči nad alfabetom H_1 odaberemo najkraću koja je dokaz i zadnju formulu toga dokaza bznačimo sa D_1,zatim prvu narednu koja je dokaz i nju označimo sa D_2,pa onda zadnju formulu najkraćeg (u smislu dužine reči) nad alfabetom sa H_2, itd..

Slično enumerišimo i sve posledice od H u niz $E_1, E_2, \ldots$ .Na taj način ako je proizvoljna rečenica $\varphi \in T$ onda se ona pojavljuje u nizu $E_1, E_2, \ldots$.

Tvrdimo da ako $\varphi \notin T$ onda se $\neg\varphi$ pojavljuje u nizu $D_1, D_2, \ldots$,što je dovoljno za odlučivost teorije T.

Ako $\varphi \notin T$ onda je $T \cup \{\neg\varphi\}$ konzistentna pa je podskup nekog kompletiranja $T_1 \supseteq T \cup \{\neg\varphi\}$.Po (2) T_1 ima aksiomatizaciju $B=\{\psi_1, \psi_2, \ldots\}$ tj. $B \vdash \neg\varphi$, a zbog konačnosti dokaza za neki k $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k \vdash \neg\varphi$.Kako postoji n tako da $T \vdash \varphi_n \leftrightarrow \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_k$ to $T \cup \{\varphi_n\} \vdash \neg\varphi$ pa se $\neg\varphi$ javlja u nizu $D_1, D_2, \ldots$. ∎

Sličan dokaz ima i sledeća :

Teorema 1.4. [11] Neka je T rekurzivno aksiomatizibilna teorija jezika L i pretpostavimo da sve kompletne ekstenzije T mogu biti izlistane efektivno. Onda je T odlučiva.

U sve tri prethodne teoreme se uslov rekurzivna aksiomatizibilnost može oslabiti uslovom rekurzivno nabrojiva aksiomatizibilnost, što pokazuje

Teorema 1.5. (Craig-ov trik)[2] Neka je T rekurzivno nabrojivo aksiomatizibilna. Tada postoji rekurzivna aksiomatizacija za T.

Dokaz. Neka je f rekurzivna funkcija koja nabraja kodove svih aksioma $\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots$ za T. Skup kodova ćemo transformisati td.

bude rekurzivan, a da rečenice tog skupa kodova budu logički ekvivalentne polaznom skupu aksioma, konstruišući polazeći od f monotonu funkciju g, što je dovoljno za tvrđenje teoreme prema [3].

Za g(k) ćemo uzimati kod, konjukcije rečenica φ_k dovoljan broj puta, td. $g(k) \geq g(k-1)$, i naravno, početi sa $g(1)=f(1)$. Kako kodiranje možemo da učinimo monotonim po dužini reči (na primer kodiranje iz [12]) to tvrdjenje teoreme neposredno sledi. ■

Primetimo da se svaka rekurzivno nabrojiva aksiomatizacija može zameniti, elementarno rekurzivnom, dakle relativno jednostavnom. Ovo je zapravo posledica činjenice da je svaki rekurzivno nabrojiv skup slika jedne elementarne funkcije te da je gornja konstrukcija, zapravo, elementarano rekurzivna. Sve ove činjenice su dobijene uz korišćenje Slabe Church-ove teze [12 str.46].

U narednom delu dajemo primer neodlučive rekurzivno aksiomatizibilne teorija sa kompletnim proširenjem koje nije rekurzivno nabrojivo.

Primedbe 1.6.

1) Teorema 1.4. važi i za teorije drugog reda, jer se dokaz zasniva **sintaksnim** osobinama same teorije i njenih kompletiranja.

2) Dovoljan uslov da rekurzivno aksiomatizibilna teorija sa prebrojivo mnogo kompletnih proširenja bude neodlučiva je da bar jedno kompletiranje nije rekurzivno nabrojivo [r.n.], jer se odmah gubi efektivnost nabrajanja rečenica iz kompletiranja.

Primer 1.7. Uslov iz teoreme **1.4.**, da sve kompletne ekstenzije teorije T, mogu biti izlistane efektivno, ne može se oslabiti:

Razmotrimo ω-jezik (ili ekvivalentan monadički slabi jezik drugog reda) $L^{W}=\{+,\cdot,S,O,T_1\}$, gde je arnost operacija + i $\cdot$ 2, operacija S 1, operacije O 0, a relacije T_1 3. U tom jeziku definišimo teoriju T^*:

$$T^* = Th(Q) \tag{1}$$

$$\cup \{T_1(e,i,j) : \omega \models T_1(e,i,j)\} \tag{2}$$

$$\cup \{\neg T_1(e,i,j) : \omega \models \neg T_1(e,i,j)\} \tag{3}$$

$$\cup \{ \forall x \exists n (x \equiv n) \}, \tag{4}$$

gde je

Q skup aksioma [18]:

$Sx \equiv Sy \Rightarrow x \equiv y$

$\neg O \equiv Sy$

$\neg x \equiv O \Rightarrow \exists y (x \equiv Sy)$

$x+O \equiv x$

$x+Sy \equiv S(x+y)$

$x \cdot O \equiv O$

$x \cdot Sy \equiv (x \cdot y)+x$

ω skup prirodnih brojeva,

$T_1(e,x,t)$ Klinijev (Kleene) primitivno rekurzivan predikat[3], koji za program sa Gödel-ovim brojem e i ulazom x daje izlaz u najviše t koraka, i

(4) rečenica zbog koje je čitava teorija T^* slabog drugog reda.

Dokaz. Navešćemo nekoliko činjenica iz kojih neposredno sledi da je T^* teorija sa traženim svojstvima.

a) T^* je rekurzivno aksiomatizibilna.

(Skupovi (2) i (3) su primitivno rekurziyni [3].)

b) T^* nije odlučiva.

(Th(Q) je esencijalno neodlučiva [18].)

c) T^* je konzistentna.

($\mathfrak{A}=(\omega,+,\cdot,T_1)$ je model.)

d) T^* je ω-kategorična.

(Zbog (4) svaka dva modela su izomorfna tj.domen su prirodni brojevi i samo oni.)

e) T^* nije kompletna.

($\forall e\forall x\forall t\ T_1(e,x,t)\notin T^*$ i $\exists e\exists x\exists t\neg T_1(e,x,t)\notin T^*$)

f) T^* ima samo jedno kompletiranje comp(T^*) i ono je konzistentno.

(T^* je ω-konzistentno i ω-kategorično.)

g) comp(T^*) nije rekurzivno nabrojiva.

(Skup TOT$=\{e : \forall x\exists t T_1(e,x,t)\}$ je Π_2^0-kompletan skup [4]. Neka je $\varphi_1,\dots,\varphi_n,\dots$ nabrajanje za comp(T^*). Kako za svako konkretno e je

$\forall x\exists t T_1(e,x,t)\in T^*$ (*) ili

$\exists x\forall t\neg T_1(e,x,t)\in T^*$ (**)

to bi upoređujući (*) i (**) redom sa $\varphi_1,\dots,\varphi_n,\dots$ dobili nabrajanje i skupa TOT.$\perp$.)

Napomene 1.8.

1) T^* može da ima konačno mnogo kompletiranja "pomerajući" kodiranje u prirodnim brojevima udesno tj. dodajući svakom kodu neki fiksiran broj recimo k, a zatim se neizjašnjavajući o važenju predikata T_1 u prvih k prirodnih brojeva na primer:

$T^* = (1) \cup \{T_1(e,i,j) : \omega-(k+1) \vdash T_1(e,i,j)\}$

$\cup \{\neg T_1(e,i,j) : \omega-(k+1) \vdash \neg T_1(e,i,j)\} \cup (4)$

$\cup \{T_1(0,0,0) \vee T_1(1,1,1)\}$

ima tri kompletiranja ($k \geq 1$).

2) Th(Q) se može zameniti bilo kojom esencijalno neodlučivom rekurzivno aksiomatizibilnom teorijom o prirodnim brojevima na primer **R** iz [18].

Za primer, da se, u 1.7. pomenuti uslov iz teoreme 1.4., ne može oslabiti u jeziku prvog reda može korisno da posluži sledeći:

Stav 1.9. Esencijalno neodlučiva rekurzivno aksiomatizibilna (skupom aksioma B) teorija T jezika L ima neprebrojivo mnogo ($2^{\aleph_0}$) kompletnih proširenja.

Dokaz. Kako je T nekompletna teorija to postoji rečenica φ iz jezika teorije T td. $\varphi \notin T$. Teorije $Th(T \cup \{\varphi\})$ i $Th(T \cup \{\neg\varphi\})$ nisu kompletne, jer bi $B \cup \{\varphi\}$, tj. $B\{\neg\varphi\}$ bile njihove rekurzivne aksiomatizacije pa bi teorije bile odlučive,(1.2.) što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je T esencijalno neodlučiva teorija.

Slično, sada možemo da proširujemo teorije $Th(B \cup \{\varphi\})$ i $Th(B \cup \{\neg\varphi\})$ dodajući svakoj od njih rečenicu ψ tj. njenu negaciju, koja ne pripada niti jednoj od pomenutih teorija. Na taj način nastaje puno binarno drvo kod kojeg je koren T a svaki čvor konzistentno nekompletno proširenje od T.

Dakle, svako konzistentno kompletiranje je jedna unija beskonačnog lanca u tom binarnom drvetu, odakle sledi tvrdjenje teoreme. ■

Primedba 1.10. Među prebrojivo mnogo kompletiranja, teorija T mora da ima bar jedno odlučivo kompletiranje (jer T prema 1.9. nesme da bude esencijalno neodlučivo) i bar jedno kompletiranje koje nije r.n.(da bi se izbegla efektivnost nabrajanja ekstenzija).

Problem 1.11. Naći neodlučivu rekurzivno aksiomatizibilnu teoriju jezika prvog reda sa prebrojivo mnogo kompletnih proširenja.

Modeli ili relacijsko-operacijske strukture su osnovni pojam semantičkog ispitivanja teorija i biće uređena četvorka $\mathfrak{A}$ = (A,Rl,Fn,Cn)gde su skupovi:

Rl skup relacija na A ,

Fn skup funkcija na A,

Cn skup istaknutih elemenata A,

interpretacije svih simbola nekog jezika $\mathcal{L}$ uz poklapanje arnosti.

Na uobičajan način [1] definišemo i relaciju zadovoljenja Tarskog $\models$ i valuaciju μ formule φ tj $\mathfrak{A} \models \varphi[\mu]$.

Definicija 1.12. Neka je $\mathcal{L}$ jezik i $\mathfrak{A}$ njemu odgovarajuća struktura.Teorija za $\mathfrak{A}$ je skup svih rečenica jezika $\mathcal{L}$ koje važe u $\mathfrak{A}$ tj.

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in \mathrm{Sent} : \mathfrak{A} \models \varphi \} .$$

Ako je $\mathcal{K}$ klasa struktura istog tipa τ [15] i $\mathcal{L}$ odgovarajući jezik jedne (tj. svih) struktura iz $\mathcal{K}$ onda je

$$\mathrm{Th}(\mathcal{K}) = \bigcap_{\mathfrak{A} \in \mathcal{K}} \mathrm{Th}(\mathfrak{A}).$$

Primetimo da je Th($\mathfrak{A}$) kompletna.

Sledeći pojmovi će biti od koristi u kasnijem izlaganju:

Definicija 1.13. Dva modela $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ su **elementarno ekvivalentna** [$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$] akko zadovoljavaju iste rečenice jezika $\mathcal{L}$,tj.Th($\mathfrak{A}$) =

Th($\mathfrak{B}$).

Lema 1.14. Teorija T je kompletna akko su svaka dva njena modela elementarno ekvivalentna.

Dokaz. $\Rightarrow$:Neka je $\varphi\in$Sent i $\mathfrak{A},\mathfrak{B}\models$ T.Ako $\varphi\in$T onda $\mathfrak{A}\models\varphi$ i $\mathfrak{B}\models\varphi$, a inače $\varphi\notin$T te $\mathfrak{A}\models\neg\varphi$ i $\mathfrak{B}\models\neg\varphi$ tj. $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$.

$\Leftarrow$:Neka je $\varphi\in$Sent i recimo $\mathfrak{A}\models\varphi$,pa i $\mathfrak{B}\models\varphi$,za $\mathfrak{A},\mathfrak{B}\models$ T.No tada $\varphi\in$T i slično ako $\mathfrak{A}\models\neg\varphi$. ∎

Definicija 1.15. Utapanje iz $\mathfrak{A}$ u $\mathfrak{B}$ [$m:\mathfrak{A}\longrightarrow\mathfrak{B}$] je injekciono preslikavanje $m:A\rightarrowtail B$ td.:

(i) $\mathfrak{A}\models R[\underline{a}]$ akko $\mathfrak{B}\models R[m\underline{a}]$, za sve $R\in$Rl.

(ii) $m\circ f^{\mathfrak{A}}[\underline{a}] = f^{\mathfrak{B}}[m\underline{a}]$, za sve $f\in$Fn.

(iii) $m(c^{\mathfrak{A}})=c^{\mathfrak{B}}$, za sve $c\in$Cn;

gde su $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ istog tipa.

Utapanje m je **izomorfizam** akko je surjekcija [$m:\mathfrak{A}\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow\mathfrak{B}$].

Za ilustraciju definicija dajemo sledeće primere:

Primer 1.16. Za teoriju linearnog uredjenja (LU) postoji više načina aksiomatizacije u raznim jezicima, a u Rl=$\{\leq\}$, Cn=Fn=$\emptyset$ se daje sledeći skup aksioma:

(1) $(\forall xyz)(x\leq y \wedge y\leq z \Rightarrow x\leq z)$

(2) $(\forall xy)(x\leq y \;\; y\leq x \Rightarrow x=y)$

(3) $(\forall x)(x\leq x)$

(4) $(\forall xy)(x\leq y \;\; y\leq x)$.

Gusto linearno uredjenje bez krajeva (GLU) ima još i sledeće aksiome[1]:

(5) $(\forall xy)(x\leq y \wedge x\neq y \Rightarrow (\exists z)(x\leq z \wedge z\neq x \wedge z\leq y \wedge z\neq y))$

(6) $(\exists xy)(x\neq y)$

(7) $(\forall x)(\exists y)(x\leq y \wedge x\neq y)$

(8) $(\forall x)(\exists y)(y\leq x \wedge x\neq y)$.

Primer 1.17. Neka je $(\omega,+,\cdot,<,0.1)$ struktura prirodnih brojeva sa binarnim operacijama + i ·, binarnom relacijom < i konstantama 0 i 1. $Th((\omega,+,\cdot,<,0,1))$ = PAR je Presburgerova aritmetika.

Primer 1.18. Neka je (ω,s) struktura prirodnih brojeva sa unarnom operacijom $s(x)=x+1$. $Th(\omega,s)$ je teorija sukcesor funkcije na ω.

2. Metod eliminacije kvantora

Iako naziv potiče od A.Tarskog (1935.) koji je dao i najznačajnije primene ove metode (Bool-ove algebre, algebarski zatvorena polja, realno zatvorena polja, i sa Mostowski-m dobro uredjeni skupovi), metod je u to vreme već postojao 20 godina (Löwenheim, čist predikatski račun sa jednakošću) i imao je još nekoliko primena (Presburger(1929): sabiranje prirodnih brojeva i Langford(1927): gusto linearno uredjenje bez krajeva).

Pored modelsko-teoretskog svojstva, zbog kojeg je i nastao, odlučivost razmatrane teorije, metod daje čitav niz dodatnih modelsko-teoretskih osobina razmatrane teorije:

- pokazuje ponašanje i ostalih formula jezika teorije,
- u nekim slučajevima daje potpunost raznih aksiomatika:

(1) kada je zadana sintaksno njenu kompletnost,

(2)kada je zadana semantički govori u nekim slučajevima o svim kompletnim proširenjima i (elementarnoj) definabilnosti pojedinih podskupova domena u jeziku ili podjeziku strukture.

Nasuprot drugim metodama odlučivosti, ovaj je direktan i efektivno primenljiv na računaru.

Pre konkretnih primera uvedimo još malo notacije:

Definicija 2.1. Za datu teoriju T jezika $\mathcal{L}$ kažemo da su $\varphi,\psi\in$Form **T-ekvivalentne** [T-ekv] akko univerzalno zatvorenje formule $\varphi\Leftrightarrow\psi$ važi u T tj. $T\vdash\varphi\Leftrightarrow\psi$.

Definicija 2.2. Neka je $\mathcal{K}\subseteq$Form$_{\mathcal{L}}$ efektivno izabrana klasa formula. Kažemo da teorija T jezika $\mathcal{L}$ **dopušta eliminaciju kvantora**

do na klasu $\mathcal{K}$ akko

$$\forall\varphi\in Form_{\mathcal{L}}\ \exists\psi\in\mathcal{K}\ T\vdash\varphi\leftrightarrow\psi.$$

Uz dodatak, da postoji efektivan metod odlučivanja da li su rečenice iz klase $\mathcal{K}$ u teoriji T, definicija postaje potpuno primenljiva za potrebe odlučivosti teorija. Primetimo da se za $\mathcal{K}=\mathcal{O}$, gde je $\mathcal{O}=\{$svih bezkvantorskih (otvorenih) formula $\}$, dobija definicija najčešće korišćenja u teoriji modela[1].

Ukratko, metod se sastoji iz sledeća dva koraka [1]:

(1) Za svaku pojedinačnu teoriju se odabere odgovarajući skup osnovih formula (OD KOJIH NEKE MOGU DA SADRŽE KVANTORE) i njihova Bulovska kombinacija (dovoljni su veznici $\vee$ i $\neg$) se proglasi klasom $\mathcal{K}$.

(2) $\forall\varphi\in Form$ se pokaže da je T-ekv iskaznoj kombinaciji osnovnih formula.

Osnovno, za primenu samog metoda je da se vodi računa o slobodnim promenljivama krajnje kombinacije osnovnih formula, i mi ćemo to raditi u sva tri prikaza eliminacije kvantora.

U samom dokazu osnovnu ulogu igra eliminacija kvantora $\exists$ ($\forall$ je skraćenica) što pokazuje sledeća:

Lema 2.3. [1] Neka je T teorija i $\mathcal{K}$ skup svih iskaznih kombinacija osnovnih formula. Da bi svaka formula bila T-ekv nekoj formuli iz $\mathcal{K}$ dovoljno je dokazati da:

(i) Svaka atomična formula je T-ekv nekoj formuli iz $\mathcal{K}$.

(ii) Ako je $\theta\in\mathcal{K}$, onda je $(\exists v_m)\theta$ je T-ekv nekoj formuli iz $\mathcal{K}$.

Dokaz. Neka je Ψ skup svih formula T-ekv formulama iz $\mathcal{K}$.

---

1 Uloga jezika $\mathcal{L}$ iz 2.2. je u neposrednoj vezi sa klasom $\mathcal{K}$. Videti [7] i 4.24..

Dokazaćemo indukcijom po izgradjenosti formule da je svaka $\varphi\in$Form i u Ψ. Ako je φ atomična formula prema (i) je $\varphi\in\Psi$. Ako je $\varphi=\neg\psi$ i $\psi\in\Psi$ onda je i $\varphi\in\Psi$ jer T$\models\varphi\leftrightarrow\neg\psi$ i $\neg\psi\in\Psi$ i slično za $\varphi=\psi_1\vee\psi_2$. Ako je $\varphi=\exists v_m\psi$ i $\psi\in\Psi$, onda je ψ T-ekv sa nekim $\theta\in\mathcal{K}$, pa je T$\models\varphi\leftrightarrow\exists v_m\theta$, po zakonu zamene, a prema (ii) $\exists v_m\theta\in\Psi$ pa i $\varphi\in\Psi$. ■

Stav 2.4. [12] (Teorema o disjunktivnoj normalnoj formi)

Neka je $\mathcal{K}\subseteq$Form$_{\mathcal{L}}$, Bulovska kombinacija nekih osnovnih formula. Tada za bilo koju $\varphi\in\mathcal{K}$ takvu da $\neg\varphi$ nije tautologija postoje osnovne formule ili njene negacije $\psi_{i,j}$ td.

$$\models\varphi\leftrightarrow\bigvee_{i\in p}\ \bigwedge_{j\in m}\psi_{i,j}\text{ , za neke } p,m\in\omega$$

Dokaz. Kao i u slučaju predikatskog računa. ■

Primedba 2.5. Pored suvišnosti eliminacije kvatora $\forall$ i veznika $\wedge$, kao skraćenica, valjanost distributivnosti

$\exists$ prema $\vee$, i

$\exists$ prema $\wedge$ ako jedan od konjukata ne sadrži slobodnu promenljivu koja je uz $\exists$,

kao i 2.3 i 2.4., omogućavaju nam, da razmatramo samo slučajeve eliminacije kvantora za sledeće oblike formula:

$$\exists v_m\psi_1\wedge\psi_2\wedge\ldots\wedge\psi_k\text{, gde svi } \psi_i \text{ sadrže promenljivu } v_m.$$

§ 2.1. Teorija gustog linearnog uredjenja bez krajeva

Prvi primer je teorija definisana sintaksno Th(GLU), a primenom eliminacije kvantora pokazaćemo i kompletnost te teorije.

Osnovne formule će biti atomične formule

$$v_m\equiv v_n \text{ i } v_m\leq v_n.$$

Bulovska kombinacija osnovnih formula $\mathcal{K}$ su tačno otvorene formule tj. $\mathcal{K}=O$. Uz skraćenicu

$$v_m < v_n \text{ z.z. } v_m \leq v_n \wedge \neg v_m \equiv v_n,$$

za dokaz da Th(GLU) dopušta eliminaciju kvantora iskoristićemo neke sintaksne osobine otvorenih formula, uz strogu primenu objekt-promenljivih teorije (vidi O.) za razliku od preostalih primera iz ovog dela, gde ćemo, uglavnom, raditi sa meta-promenljivama. Prikaz dajemo prema [1].

Definicija 2.6. Neka je data n+1 promenljiva $v_0 \ldots v_n$, $n>0$. **Aranžmanom** promenljivih $v_0 \ldots v_n$ smatramo konačnu konjunkciju

$$\theta_0 \wedge \ldots \wedge \theta_{n-1},$$

gde je $u_0 \ldots u_n$, preimenovanje $v_0 \ldots v_n$ i svaka formula θ_i je ili $u_i < u_{i+1}$ ili $u_i \equiv u_{i+1}$.

Sledeća lema dopušta nam "normalnu formu" za svaku otvorenu formulu izgradjenu od aranžmana promenljivih.

Lema 2.7. Svaka otvorena formula $\varphi(v_0 \ldots v_n)$ je GLU-ekv ili jednoj od formula $v_0 \equiv v_0, v_0 < v_0$, ili je disjunkcija konačno mnogo aranžmana promenljivih $v_0, \ldots, v_n$.

Dokaz. Razmotrimo slučaj kad je n=0. Tada je otvorena formula $\varphi(v_0)$ izgradjena od atomičnih formula $v_0 \leq v_0$, $v_0 \equiv v_0$. Kako $GLU \vdash v_0 \equiv v_0$ i $GLU \vdash v_0 \leq v_0$, imamo da $GLU \vdash \varphi$ i $GLU \vdash \varphi \leftrightarrow v_0 \equiv v_0$, ili $GLU \vdash \neg\varphi$ i $GLU \vdash \varphi \leftrightarrow v_0 < v_0$.

Za n>0 važi:

(1) Postoji konačno mnogo različitih aranžmana promenljivih $v_0, \ldots, v_n$.

(2) Za svaki $\mathfrak{A} \models GLU$, svaki niz $a_0, \ldots, a_n \in A$ zadovoljava neki aranžman $v_0, \ldots, v_n$.

(3) Neka je $\varphi(v_0, \ldots, v_n)$ otvorena formula i ψ aranžman promenljivih $v_0, \ldots, v_n$. Onda jedna ili obe formule $\psi \to \varphi$, $\psi \to \neg\varphi$, su posledica GLU.

Neka je $\varphi(v_0, \ldots, v_n)$ otvorena formula. Ako $GLU \vdash \neg\varphi$ onda je φ

GLU-ekv formuli $v_0 < v_0$. Razmotrimo preostalu mogućnost da nije $GLU \vdash \neg\varphi$. Sada $\mathfrak{A} \models GLU$ i $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0 \dots a_n]$. Prema (2), $a_0 \dots a_n$ zadovoljava aranžman ψ, promenljivih $v_0 \dots v_n$ u $\mathfrak{A}$. Tako, ne važi $GLU \vdash \psi \to \neg\varphi$ i prema (3) važi $GLU \vdash \psi \to \varphi$. Formirajmo disjunkciju θ svih aranžmana ψ za koje $GLU \vdash \psi \to \varphi$. θ je disjunkcija od bar jedne, ali konačno mnogo formula (1). Sledi da $GLU \vdash \varphi \to \theta$, a prema definiciji θ i $GLU \vdash \theta \to \varphi$. Tako su φ i θ GLU-ekv, što je i trebalo dokazati. ∎

Primetimo da je gornja lema tačna i za teoriju linearnog uredjenja.

Teorema 2.8. Svaka formula φ je GLU-ekv otvorenoj formuli ψ. Štaviše, sve slobodne promenljive formule ψ su podskup slobodnih promenljivih formule φ $[Sl(\psi) \subseteq Sl(\varphi)]$.

Dokaz. Prema lemi 2.3. dovoljno je dokazati (ii) da za svaku $\psi(v_0 \dots v_n) \in \mathcal{O}$ je $\exists v_m \psi$ je GLU-ekv otvorenoj formuli, jer je $\mathcal{K} = \mathcal{O}$ pa je (i) automatski zadovoljeno. Prema 2.5. možemo pretpostaviti da je $m \le n$, odnosno preimenujući promenljive da je $m = n$. Koristeći 2.5. (ψ zamenimo sa θ) i redundantnost slučajeva kad je ψ logičko tačno u GLU ($v_0 \equiv v_0$) tj. netačno ($v_0 < v_0$), dovoljno je da eliminišemo kvantor iz formula oblika $\exists v_n \theta_i$, gde su θ_i aranžmani promenljivih $v_0, \dots, v_n$.

Ako je $n=1$ onda su jedine mogućnosti za formule $\exists v_1 \theta_i$:

$$(\exists v_1) v_0 \equiv v_1 \quad , \quad (\exists v_1) v_0 < v_1 \;\text{ i }\; (\exists v_1) v_1 < v_0 .$$

Svaka od njih je posledica GLU, pa je $GLU \vdash (\exists v_1)\psi \leftrightarrow v_0 \equiv v_0$. Ako je $n>1$ onda od svakog aranžmana θ_i promenljivih $v_0, \dots, v_n$ može se formirati aranžman θ_i^* promenljivih $v_0, \dots, v_{n-1}$ ispustajući v_n. Lako se dokazuje da $GLU \vdash (\exists v_n)\theta_i \leftrightarrow \theta_i^*$, što označava kraj dokaza prvog dela tvrdjenja teoreme.

Za drugo tvrdjenje dovoljno je primetiti da prema gornjem eliminacija kvantora, zapravo, znači nestanak promenljive uz kvantor iz formule. ∎

Korolar 2.9. Th(GLU) je odlučiva.

Dokaz. Neka je $\varphi\in Sent_{GLU}$. Najpre, za φ odredimo preneks normalnu formu i neka je ona posle prenumeracije promenljivih

$(Q_o v_o)\ldots(Q_n v_n)\psi$,

gde su $Q_o,\ldots,Q_n$ kvantori $\exists$ tj. $\forall$, a ψ matrica. Dovoljno je pokazati slučaj kada je Q_n $\exists$. Kako je ψ disjunkcija konačno mnogo aranžmana to kao u 2.8. eliminišemo kvantor $\exists$. Postupak ponovimo n puta dok ne dobijemo rečenicu $(Q_o v_o)\theta(v_o)$, za koju možemo da odlučimo da li je u Th(GLU) ili nije. ∎

Korolar 2.10. Th(GLU) je kompletna.

Dokaz. Neka je φ proizvoljna rečenica. Prema 2.8. za neko $\psi(v_o)\in\mathcal{O}$ $GLU\models\varphi\leftrightarrow\psi$. Ali za $\psi\in\mathcal{O}$ $GLU\models\psi$ ili $GLU\models\neg\psi$, pa $GLU\models\varphi$ ili $GLU\models\neg\varphi$ tj. GLU je kompletna. ∎

Teorema 2.8. se može poboljšati, tako što se za osnovne formule uzmu, samo, $v_m\le v_n$.

Korolar 2.11. Svaka formula $\rho(v_o\ldots v_p)$ je GLU-ekv Bulovskoj kombinaciji formula oblika $v_m\le v_n$, gde $m,n\in p$.

Dokaz. $Th(GLU)\models v_m\equiv v_n\leftrightarrow v_m\le v_n\wedge v_n\le v_m$. ∎

Primetimo da smo u 2.9. odlučivali o rečenicama sa kvantifikatorima, te da smo uz teoremu 1.2. sa 2.10. dobili još jedan način dokazivanja odlučivosti za Th(GLU).

§ 2.2. Teorija sukcesor funkcije na ω

Umesto $Th(\omega,s)$, koju smo definisali u 1.18., razmotrićemo teoriju $\Gamma=Th(\omega,s,0)$, koja sadrži u svom jeziku i konstantu $0\in\omega$. Γ

je potpuna i konzistentna. Prikaz u ovom i narednom paragrafu dajemo prema [12]. Definišimo konstante jezika $\mathbf{m}$ za svaki $m\in\omega$ i operacijske simbole s tj. $\mathbf{s}^{m+1}=\mathbf{s}\mathbf{s}^{m}$.

Termi jezika su

$s^m x$ za neku promenljivu x i

$\mathbf{m}$ za neki $m\in\omega$.

Osnovne formule su oblika

$s^m v_i=\sigma$, gde term σ ne sadrži v_i i

$0\equiv0$.

Jasno je da postoji efektivan metod za raspoznavanje osnovnih formula.

Lema 2.12. Za bilo koje $\varphi\in$Form efektivno se može naći Γ-ekv formula ψ, koja je bezkvantorna kombinacija osnovnih formula i $\mathrm{Sl}\psi\subseteq\mathrm{Sl}\varphi$.

Dokaz. Za razliku od predhodnog paragrafa ovde da bi iskoristili 2.3. moramo pokazati i za ~~φ atomično, da ima Γ-ekv $\psi\in\mathcal{K}_\Gamma$~~ jer je $\mathcal{K}\subsetneq\mathcal{O}$. Neka je φ atomično. Ako φ nema promenljive onda je oblika $\mathbf{m}\equiv\mathbf{n}$ pa je trivijalno ekvivalentno logičkoj istini $0\equiv0$ ili laži $\neg0\equiv0$. Ako formula φ sadrži promenljive onda je oblika :

(1) $s^m x\equiv s^n x$, tj. Γ-ekv sa $0\equiv0$ ili $\neg0\equiv0$, kao i gore, već prema tome da li je $m=n$ ili $m\neq n$.

(2) $s^m x\equiv\sigma$, koja je bazična formula i

(3) $\sigma\equiv s^m x$, koja je Γ-ekv sa $s^m x\equiv\sigma$.

Ostaje još da se pokaže da je $\exists x\varphi$, Γ-ekv sa nekom Bulovskom kombinacijom osnovnih formula, gde prema 2.5. je φ konjukcija osnovnih formula i njenih negacija i sve sadrže promenljivu x. Tako, možemo pretpostaviti da je $\exists x\varphi$ oblika

$$\exists x(s^{k_0}x\equiv\sigma_0\wedge\ldots\wedge s^{k_{m-1}}x\equiv\sigma_{m-1}\wedge\neg s^{k_m}x\equiv\sigma_m\wedge\ldots\wedge\neg s^{k_n}x\equiv\sigma_n),$$

gde ne mora biti ni pozitivnih ni negativnih jednakosti i $\sigma_0\ldots\sigma_n$, ne sadrže x. Kako $\Gamma\vdash\sigma\equiv\tau \Rightarrow \Gamma\vdash s\sigma\equiv s\tau$, to neka je $l=\max\{k_0,\dots,k_n\}$. Lako se "vidi" da je $\exists x\varphi$ ekvivalentno sa

$$\exists x(s^l x\equiv\tau_0\wedge\dots\wedge s^l x\equiv\tau_{m-1}\wedge\neg s^l x\equiv\tau_m\wedge\dots\wedge\neg s^l x\equiv\tau_n),$$

gde $\tau_0,\dots,\tau_n$ ne sadrže x. No ova formula je, pak, ekvivalentna sa

$$\exists x(\neg x\equiv 0\wedge\dots\wedge\neg x\equiv l-1\wedge x\equiv\tau_0\wedge\dots\wedge x\equiv\tau_{m-1}\wedge\neg x\equiv\tau_m\wedge\dots\wedge\neg x\equiv\tau_n),$$

jer je x vezana promenljiva(!), pa zamena $s^l x$ sa x je dopuštena. Tako je $\exists x\varphi$ ekvivalentno formuli

$$\exists x(x\equiv\rho_0\wedge\dots\wedge x\equiv\rho_{m-1}\wedge\neg x\equiv\rho_m\wedge\dots\wedge\neg x\equiv\rho_p),$$

gde $\rho_0,\dots,\rho_p$ ne sadrže x. Ako je m=0, onda je $\exists x\varphi$ ekvivalentno sa $0\equiv 0$. Ako je m>0 onda je $\exists x\varphi$ ekvivalentno sa

$$\bigwedge_{j<k<m}\rho_j\equiv\rho_k\wedge\neg\rho_0\equiv\rho_m\wedge\dots\wedge\neg\rho_0\equiv\rho_p,$$

što je konjukcija baziČnih formula. ∎

Teorema 2.13. Γ je odlučiva.

Dokaz. Neka je $\varphi\in$Sent i ψ formula dobijena primenom 2.12. na φ. Kako $Sl(\psi)\subseteq Sl(\varphi)$ to je i ψ rečenica nastala kao iskazna kombinacija osnovnih rečenica tj. na osnovu 2.4

$$\Gamma\vdash\psi\leftrightarrow\bigvee_{i\in m}\bigwedge_{j<n}\psi_{i,j},$$

gde je svaka $\psi_{i,j}$ osnovna rečenica ili njena negacija. Medjutim jedina osnovna rečenica je $0\equiv 0$ koja je naravno iz Γ, pa

$\varphi\in\Gamma$ akko $\psi\in\Gamma$ akko $\exists i<m\forall j<n(\psi_{i,j}$ je $0\equiv 0)$. ∎

Korolar 2.14. $Th(\omega,s)$ je odlučiva.

Dokaz. Dovoljno je primetiti da postoji efektivan metod za raspoznavanje kada rečenica φ ne sadrži 0. Za takvu rečenicu $(w,s)\models\varphi$ akko $(w,s,0)\models\varphi$. ∎

Primetimo da su sve procedure u ovom poglavlju zapravo elementarno rekurzivne. To nam omogućava da damo važan primer primene eliminacije kvantora:

Korolar 2.15. Skup $A\subseteq\omega$ je elementarno definabilan u (ω,s) ili u $(\omega,s,0)$ akko je konačan ili kofinitan.

Dokaz. Najpre za $\mathfrak{A}=(\omega,s,0)$.

$\Rightarrow$: Neka φ elementarno definiše A. Tako $Sl(\varphi)\subseteq\{v_0\}$ i $A=\{a\in\omega:\mathfrak{A}\models\varphi[a]\}$. Prema 2.12. neka je ψ Bulovska kombinacija osnovnih formula td. $\mathfrak{A}\models\varphi\leftrightarrow\psi$ i $Sl(\psi)\subseteq\{v_0\}$. Tada ψ takodje elementarno definiše A. ψ je izgradjena od formula $0\equiv0$ i $s^m v_0\equiv n$ koristeći $\neg$ i $\vee$. Kako se sa $s^m v_0\equiv n$ elementarno definiše $\emptyset$ ako je $m>n$ i $\{n-m\}$ ako je $m\leq n$, to je A izgradjeno od skupova ω, $\emptyset$ i singltona $\{p\}$ koristeći komplement i $\cup$. Otuda je A konačan ili kofinitan.

$\Leftarrow$: Trivijalno.

Za strukturu (ω,s) je dovoljno primetiti da ako φ elementarno definiše A u (ω,s), onda to čini i u $(\omega,s,0)$ pa je A konačan ili kofinitan. Obrnuto, bilo koji konačan ili kofinitan podskup od ω je, jasno, elementarno definabilan u (w,s). ∎

§ 2.3. Presburger-ova aritmetika

Umesto na ω kao u primeru 1.17. razmatraćemo isti jezik na skupu $\omega^*+\omega$ tj. na Z. Odlučivost $Th(\mathfrak{A})=Th(Z,+,<,0,1,-)$ će, naravno, dati rezultat i za PAR jer će svi dokazi koje budemo izvodili u Z važiti i u ω sa malo izmena.

$-$ je interpretacija binarne operacije $-$ jezika strukture $\mathfrak{A}$, a imena za cele brojeve m koji se uvode operacijom $+1$ označavaćemo masnim $\mathbf{m}$.

Za $m>1$ i σ i τ terme $\sigma\equiv_m\tau$ je z.z. formulu $\exists x(\sigma-\tau\equiv\underbrace{x+\ldots+x}_{m\text{-puta}})$, a da unesemo još malo efektivnosti, neka x bude prva promenljiva koja se ne pojavljuje u σ i τ.

U ovom slučaju osnovne formule će imati tri oblika:

(1) $\sigma\equiv\tau$,

(2) $\sigma<\tau$ i

(3) $\sigma\equiv_m\tau$.

Primetimo da treća vrsta osnovnih formula nije bezkvantorska, ali da je njen rečenični oblik odlučiv. Kod svih složenijih algoritama svodjenja je ovo pravilo[1].

U glavnoj lemi biće nam od koristi sledeća tri tvrdjenja:

Tvrdjenje 2.16. Ako je x promenljiva terma u jeziku L, onda postoji term v istog jezika i $m\in Z$ tako da:

$$\mathfrak{A}\vdash u\equiv\begin{cases} 0-\underbrace{(x+\ldots+x)}_{|m|\text{-puta},\ m<0}+v & \text{i } v \text{ ne sadrži promenljivu } x,\\ \underbrace{(x+\ldots+x)}_{m\text{-puta},\ m>0}+v & \text{i } v \text{ ne sadrži promenljivu } x. \end{cases}$$

Dokaz. Za konstante i promenljive (x ili neku drugu) se odgovarajuća formula dobije "stavljajući" 0 puta x tj. $v=0$.

(1) Ako je $u=u_1+u_2$ onda

$u_1=m_1x+v_1$

$u_2=m_2x+v_2$, gde x nije ni u v_1 ni u v_2,

pa je $u=(m_1+m_2)x+(v_1+v_2)$.

(2) Ako je $u=v_1-v_2$ onda isto kao (1) uz zamenu + sa −.

Ovim smo dokazali indukcijom po izgradjenosti terma u jeziku $\mathfrak{A}$ uz jasne skraćenice (mx z.z. x+...+x (m puta)) tvrdjenje . ∎

Tvrdjenje 2.17. U $\mathfrak{A}$ važi, za $p\in\omega-1$:

$$u\equiv v \leftrightarrow pu\equiv pv$$

---

1 U istom jeziku Presburger-ova aritmetika za $\mathcal{K}=0$ ne dopušta eliminaciju kvantora [1 i dodatak].

$$u<v \Leftrightarrow pu<pv$$

$$u \equiv_m v \Leftrightarrow pu \equiv_{pm} pv.$$

Dokaz. Trivijalan. ∎

Tvrdjenje 2.18. Neka su $a,b,m,n \in Z$ i $m,n>1$. Neka je $p=NZS(m,n)$ i $q=NZD(m,n)$. Tada:

(1) $pq=mn$ i $NZD(p/m,p/n)=1$, pa $\exists c,d \in Z$ $c(p/m)+d(p/n)=1$.

(2) Sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) $y \equiv_m a$ i $y \equiv_n b$

(ii) $a \equiv_q b$ i $y \equiv_p c(p/m)a + d(p/n)b$

Dokaz.

(1) na osnovu Bezuovog stava.

(2) (i)$\Rightarrow$(ii).

Kako je po pretpostavci $y-a=em$ i $y-b=fn$, za neke $e,f \in Z$ to je $a-b=fn-em$, a to je deljivo sa q, jer $q/m,n$. Dakle, $a \equiv_q b$.

$$\begin{aligned} y-c(p/m)a-d(p/n)b &= c(p/m)y+d(p/n)y-c(p/m)a-d(p/n)b \quad (1) \\ &= c(p/m)(y-a)+d(p/n)(y-b) \\ &= c(p/m)em+d(p/n)fn \\ &\equiv_p 0. \end{aligned}$$

Tako smo dokazali oba iskaza iz (ii).

(ii)$\Rightarrow$(i).

$a-b=vq$. Onda
$$\begin{aligned} y-a=y-1a &= y-c(p/m)a-d(p/n)a \\ &= y-c(p/m)a-d(p/n)b-d(p/n)vq \\ &\equiv_m 0, \end{aligned}$$

jer $y-c(p/m)a-d(p/n)b \equiv_p 0$ po pretpostavci, a $d(p/n)vq \equiv_m 0$ jer $pq/n=mn/n=n$. Slično je i $y \equiv_m b$. ∎

Lema 2.19. Za bilo koju koju $\varphi \in Form$ može se efektivno naći ψ td. $Th(\mathfrak{U}) \models \varphi \Leftrightarrow \psi$, ψ je bezkvantorska kombinacija osnovnih formula i $Sl(\psi) \subseteq Sl(\varphi)$.

Dokaz. Za primenu 4.3. ostaje nam samo uslov (ii) jer su atomične formule jezika $\mathfrak{A}$ podskup osnovnih. Prema 2.4. i 2.5. dovoljno je dokazati lemu za φ oblika $\exists x\psi$ gde je ψ konjunkcija osnovnih formula i njenih negacija, koje sadrže x.

Kako :

$$\mathfrak{A}\models\neg\sigma\equiv\tau\leftrightarrow\sigma<\tau\vee\tau<\sigma \text{ i}$$

$$\mathfrak{A}\models\neg\sigma<\tau\leftrightarrow\sigma\equiv\tau\vee\tau<\sigma \text{ i}$$

$\mathfrak{A}\models\neg\sigma\equiv_m\tau\leftrightarrow\sigma+1\equiv_m\tau\vee\ldots\vee\sigma+(m-1)\equiv_m\tau$, to možemo pretpostaviti da je ψ konjunkcija osnovnih formula.

2.16. nam omogućava da osnovne formule imaju oblik

$nx\equiv\rho$

$nx<\rho$ ili $\rho<nx$

$nx\equiv_m\rho$,

gde ρ ne sadrži x i jasno možemo pretpostaviti da je $n>0$(svaki konjukt treba sa sadrži x).

Otuda je φ ekvivalentno formuli sledećeg oblika:

$$\exists x(n_0x\equiv\rho_0\wedge\ldots\wedge n_{i-1}x\equiv\rho_{i-1}\wedge n_ix<\rho_i\wedge\ldots\wedge n_{j-1}x<\rho_{j-1}\wedge\ldots\wedge\rho_{k-1}<n_{k-1}x\wedge n_kx\equiv_{m_k}\rho_k\wedge\ldots\wedge n_{l-1}x\equiv_{m_{l-1}}\rho_{l-1}), \quad (1)$$

gde $0\le i\le j\le k\le l$ i $l>0, n_0,n_1,\ldots,n_{l-1}>0, m_k,\ldots,m_{l-1}>1$, i $\rho_0,\ldots,\rho_{l-1}$ ne sadrže x.

Prema 2.16. možemo pretpostaviti da je u (1) za neko p $n_0=\ldots=n_{l-1}>1$, te (1) ima formu

$$\exists x(px\equiv\zeta_0\wedge\ldots\wedge px\equiv\zeta_{i-1}\wedge px<\zeta_i\wedge\ldots\wedge px<\zeta_{j-1}\wedge\ldots\wedge\zeta_{k-1}<px\wedge px\equiv_{q_k}\zeta_k\wedge\ldots\wedge px\equiv_{q_{l-1}}\zeta_{l-1}),(2)$$

gde $0\le i\le j\le k\le l$ i $l>0, q_0,q_1,\ldots,q_{l-1}>0$, i $\zeta_0,\ldots,\zeta_{l-1}$ ne sadrže x.

Kako je x vezana promenljiva, (2) je ekvivalentno sa

$$\exists x(x\equiv\zeta_0\wedge\ldots\wedge x\equiv\zeta_{i-1}\wedge x<\zeta_i\wedge\ldots\wedge x<\zeta_{j-1}\wedge\ldots\wedge\zeta_{k-1}<x\wedge$$

$x\equiv_{q_k}\zeta_k\wedge\ldots\wedge x\equiv_{q_{l-1}}\zeta_{l-1}\wedge x\equiv_p 0).$ (3)

U slučaju da je i>0 (3) je ekvivalentno sa bezkvantorskom formulom

$$\zeta_0\equiv\zeta_1\wedge\ldots\wedge\zeta_0\equiv\zeta_{i-1}\wedge\zeta_0<\zeta_i\wedge\ldots\wedge\zeta_0<\zeta_{j-1}\wedge\ldots\wedge\zeta_{k-1}<\zeta_0\wedge$$

$\zeta_0\equiv_{q_k}\zeta_k\wedge\ldots\wedge\zeta_0\equiv_{q_{l-1}}\zeta_{l-1}\wedge\zeta_0\equiv_p 0$.

Tako možemo pretpostaviti da je i=0;(3) je onda ekvivalentno sa

$\exists x(x<\eta_0\wedge\ldots\wedge x<\eta_{s-1}\wedge\ldots\wedge\eta_s<x\wedge\ldots\wedge x\equiv_{r_t}\eta_t\wedge\ldots\wedge x\equiv_{r_{u-1}}\eta_{u-1})$, (4)

gde $0\leq s\leq t\leq u; r_t,\ldots,r_{u-1}>1$, i $\eta_0,\ldots,\eta_{u-1}$ ne sadrži x.

Sada tvrdimo da možemo staviti da je u=t+1,na osnovu 2.18., te ako je s=0 ili t=s jasno je da je (4) ekvivalentno sa $0\equiv 0$.Jedini preostali slučaj je za 0<s<t.No tada je (4) ekvivalentno sa

$$\bigvee_{\substack{0\leq i<s\\ s\leq j<t}}\bigwedge_{\substack{0\leq c<s\\ s\leq d<t}}\left[\eta_d<\eta_j+1\wedge\eta_i<\eta_c+1\wedge\bigwedge_{e<r_t}(\eta_j+e+1<\eta_i\wedge\eta_j+e+1\equiv_{r_t}\eta_t)\right],$$

što je zapis na datom jeziku činjenice da je (4) ekvivalentno sa

$\exists x(\ x<\min(\eta_0,\ldots,\eta_s)=m$ i $\max(\eta_s,\ldots,\eta_{t-1})=M<x$ i $x\equiv_r\eta_t)$, tj.

$\exists x(M<x<m$ i $x\equiv_r\eta_t)$, a da bi x postojalo, očigledno, mora da bude $M<m$ i $(M\equiv_r\eta_t\vee\ldots\vee m\equiv_r\eta_t)$. ∎

Teorema 2.20. Th($\mathfrak{A}$)=Th(Z,+,<,0,1,−) je odlučiva.

Dokaz. Kao i u 2.13. dovoljno je efektizirati odlučivost osnovnih formula bez slobodnih promenljivih,koje imaju sledeći oblik:

$m\equiv n$,

$m<n$,

$m\equiv_n p$.

One su tačne u $\mathfrak{A}$ akko m=n,m<n ili $m\equiv_n p$,što je, naravno, odlučivo.

Na osnovu komentara pre 2.18. sledi:

Korolar 2.21. PAR je odlučiva.

3. KATEGORIČNOST , KOMPLETNOST

Definicija 3.1. Pod **kardinalnošću modela** $\mathfrak{A}$ (u oznaci $|\mathfrak{A}|$) podrazumeva se kardinalnost domena A .

Teorija T je **kategorična u kardinalnom broju** α akko su svi modeli $\mathfrak{A}\models T$ kardinalnosti α međusodbo izomorfni.

Teorija T je **kategorična** akko su svaka dva modela teorije T izomorfna.

Korolar 3.2. Svaka kategorična teorija T je kompletna.

Dokaz. Kako izomorfizam modela povlači elementarnu ekvivalentnost, to su svaka dva modela teorije T elementarno ekvivalentna, pa prema 1.14., T je kompletna. ■

Teorema 3.3. Za bilo koju teoriju T sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) T je kategorična

(ii) postoji $\alpha\in\omega$ td. je T α-kategorično i svi modeli T su kardinalnosti α.

Dokaz. Jasno je da (ii)$\Rightarrow$(i) .

(i)$\Rightarrow$(ii):Kako su svi modeli T izomorfni to su i iste kardinalnosti recimo α. Pretpostavimo da je $\alpha\geq\omega$ i $\mathfrak{A}\models T$. Tada po gornjoj Löwenheim-Skolem-ovoj teoremi [1 str. 109] postoji $\mathfrak{B}\models T$ takav da je $\mathfrak{B}\succ\mathfrak{A}$ i $|\mathfrak{B}|>\alpha$. $\perp$. Zaključujemo $\alpha<\omega$. ■

Dok je prethodna teorema pokazala jednostavnost kategoričnih teorija naredna pokazuje značaj pojma α-kategoričnosti.

Teorema 3.4. (Łoš,Vaught) Ako teorija T nema konačnih modela i kategorična je u nekom (nužno beskonačnom) karadinalu $\alpha\geq|Form_T|$, onda je T kompletna.

Dokaz. Dovoljno je dokazati, prema **1.14.**, da za $\mathfrak{A},\mathfrak{B}\models T$ sledi $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$. Prema Löwenheim-Skolem teoremi (gornjoj ili donjoj) postoje $\mathfrak{A}',\mathfrak{B}'\models T$ td. $\mathfrak{A}'\equiv\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}'\equiv\mathfrak{B}$ i $|\mathfrak{A}|=|\mathfrak{B}|=\alpha$, Sledi $\mathfrak{A}'\cong\mathfrak{B}'$, pa je i $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$. ∎

Pretpostavka da T nema konačne modele je neotklonjiva, jer u čistom predikatskom računu (sa jednakošću) J, koji je kategoričan u svakom kardinalu su teorije $J\cup\{\forall x\forall y(x=y)\}$ i $J\cup\{\neg\forall x\forall y(x=y)\}$ konzistentne, ali $\forall x\forall y(x=y)\notin J$ i $\neg\forall x\forall y(x=y)\notin J$, te je J nekompletna.

Sledeća lema će se koristiti:

Lema 3.5. (Cantor) Neka su $\mathfrak{A},\mathfrak{B}\models GLU$ i $|\mathfrak{A}|=|\mathfrak{B}|=\omega$. Onda $\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}$.

Dokaz. [12] Neka su $(a_n)_{n\in\omega}$ i $(b_n)_{n\in\omega}$ 1-1 nabrajanja skupova A i B, a $<$ i $<'$ interpretacije za $\leq$ u $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$.. Definišimo niz uredjenih parova $(x_n,y_n)_{n\in\omega}$ indukcijom. Neka je $(x_0,y_0)=(a_0,b_0)$. Pretpostavimo da je $(x_0,y_0),\dots,(x_n,y_n)$ definisano za međusobno različite $x_0,\dots,x_n$ i $y_0,\dots,y_n$. Razmotrimo dva moguća slučaja:

Slučaj 1. n je neparno. Definišimo $x_{n+1}=a_m$, gde je $m=\mu p(a_p\notin\{x_0,\dots,x_n\})$. y_m se definiše u zavisnosti od a_m:

a) $(\forall i\leq n)a_m<x_i$. Kako B nema levu granicu skup $M=\{b_p:(\forall i\leq n)b_p<'y_i\}\neq\emptyset$; y_{n+1} je proizvoljan element iz M.

b) $(\forall i\leq n)x_i<a_m$. Slično kao pod a) (B nema ni desnu granicu).

c) $(\exists i,j\leq n)x_i<a_m<x_j$. Postoje jedinstveni s i t td. $x_s=\max\{x_i:i\leq n$ i $x_i<a_m\}$, $x_t=\max\{x_j:j\leq n$, $a_m<x_j\}$. Slučaj $y_t<'y_s$ je nemoguć, jer bi narušavao indukcijsku hipotezu. Ako $\neg\, y_t<y_s$ izaberi y_{n+1} td. $y_s<'y_{n+1}<'y_t$.

Slučaj 2. n je parno. Kao Slučaj 1 samo se zamene mesta skupova A i B.

Indukcijom po n se lako dokazuje da $\forall n<\omega$ $\{(x_0,y_0),\dots,(x_n,y_n)\}$ je 1-1 funkcija td. $x_i<x_j$ akko $y_i<y_j$;

$\{a_o,\ldots,a_n\}\subseteq\{x_o,\ldots,x_{2n}\};\ \{b_o,\ldots,b_n\}\subseteq\{y_o,\ldots,y_{2n}\}.\ \{(x_i,y_i):i\in\omega\}$ je željeni izomorfizam. ∎

Korolar 3.6. Th(GLU) je potpuna i odlučiva.

Dokaz. Kako je, prema 3.5., Th(GLU) ω-kategorična, a zbog aksioma gustine i neograničensti ima samo beskonačne modele to na osnovu Łoš-Vaught-ovog testa je Th(GLU) kompletna. Sada je njena konačna aksiomatizacija dovoljna za odlučivost prema 1.2.. ∎

Lema 3.7. Model $\mathfrak{A}$ svake kompletne teorije T zadovoljava iste rečenice kao i T tj. Th($\mathfrak{A}$)=Th(T).

Dokaz. Po pretpostavci je $\mathfrak{A}\models T$, a po osobini funkcionala Th je Th(T)$\subseteq$Th($\mathfrak{A}$). Medjutim, Th(T), Th($\mathfrak{A}$) su kompletne (1.12.) pa je Th(T)=Th($\mathfrak{A}$). ∎

Primer 3.8. Koristeći 3.7. dokazaćemo da je teorija Th(Q,$\leq$) odlučiva:

Kako je tip uredjenja racionalnih brojeva η td. $\eta\models$ GLU (3.5.), a Th(GLU) je kompletna i odlučiva (2.9.→2.10.) to je Th(η)=Th(GLU) i Th(η) je odlučiva.

Primeri ω tj. ω_1-kategoričnih teorija mogu se naći u [1 str.113 i dopuna]. Naravno, ima niti u jednom kardinalu kategoričnih kompletnih teorija (RUZP na primer), te su razvijene i druge metode dokazivanja odlučivosti, o čemu u preostalim delovima.

Teorema 3.9. Rečenice R:

(1) $\forall xy(Sx\equiv Sy \rightarrow x\equiv y)$

(2) $\forall x(Sx\not\equiv 0)$

(3) $\forall x(x\not\equiv 0 \rightarrow (\exists y)(Sy\equiv x))$

su aksiome za $Th(\omega,S,0)=\Gamma$ (§ 2.2.)

Dokaz. Prema 3.7. dovoljno je dokazati da je Th(R) kompletna. Teorija Th(R) nema konačnih modela, te ako pokažemo da je ω_1-kategorična po Łöš-Vaught-ovom testu (3.4.) će slediti da je kompletna.

Neka su $\mathfrak{A},\mathfrak{B}\models R$ i $|\mathfrak{A}|=|\mathfrak{B}|=\omega_1$. Uvedimo na A relaciju $\approx_A$

$$x \approx_A y \leftrightarrow \exists n\in\omega(\ x=S^n(y)\ \vee y=S^n(x))$$

i slično na B

$$x \approx_B y \leftrightarrow \exists n\in\omega(\ x=S^n(y)\ \vee y=S^n(x)).$$

Lako se proverava da su $\approx_A$ i $\approx_B$ relacije ekvivalencije . Klase ekvivalencije u oba modela su prebrojive (jedna je izomorfna sa ω, a sve ostale sa $\omega^*+\omega$) pa ih ima ω_1. Izomorfizam se uspostavlja tako da se slika $0/\approx_A$ u $0/\approx_B$, a ostale klase iz A se jednostavno preslikavaju u preostale iz B. ∎

Na osnovu 1.2. neposredno sledi jedan način dokazivanja odlučivosti za Th(R) i još jedan način dokazivanja odlučivost za $Th(\omega,S,0)$ (model-teoretski), što iskazuje

Korolar 3.10. $Th(R)=Th(\omega,S,0)$ je odlučiva.

4. MODELSKO KOMPLETIRANJE I ZASIĆENOST

Cilj ovog dela je da koristeći pojmove modelske kompletnosti (potpunosti) i modelskog kompletiranja uvedene od strane A.Robinsona pokažemo odlučivost sledećih teorija:

(i) Algebarski zatvorenih polja (AZP)

(ii) Gustih linearnih uredjenja (GLU)

(iii) Realno uredjenih zatvorenih polja (RUZP)

definisanih aksiomatski. Pregled dajemo prema [16].

§ 4.1. Modelska potpunost

Pored ranije uvedenih definicija dajemo i sledeće:

Definicija 4.1. Preslikavanje $m:A \longrightarrow B$ je **elementarno utapanje iz $\mathfrak{A}$ u $\mathfrak{B}$** [$m:\mathfrak{A} \rightarrowtail \mathfrak{B}$] akko za svaku $\varphi(x_1,\dots,x_n) \in Form$ i svaki niz $\underline{a} \in A$ važi:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[ma_1,\dots,ma_n] \qquad (\varphi[m\underline{a}] \text{ nadalje})$$

Elementarno utapanje je utapanje, jer su atomične formule formule.

Lema 4.2. Preslikavanje $m:A \longrightarrow B$ je elementarno utapanje iz $\mathfrak{A}$ u $\mathfrak{B}$ akko proširenje modela elementima iz A $(\mathfrak{A},a)_{a\in A}$ je elementarno ekvivalentno sa $(\mathfrak{B},ma)_{a\in A}$ tj. $(\mathfrak{A},a)_{a\in A} \equiv (\mathfrak{B},ma)_{a\in A}$.

Tvrdjenje 4.3. Neka su $f: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ i $g: \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}$ utapanja. Tada:

a) Ako su f i g elementarna onda je i $g \circ f$ elementarno utapanje.

b) Ako su g i $g \circ f$ elementarna onda je i f elementarno.

Dokaz. Neka je $\varphi(x_1,\dots,x_n) \in Form$ i $\underline{a} \in A$. $g \circ f: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{C}$ je utapanje. Na osnovu tranzitivnosti $\Leftrightarrow$ slede oba tvrdjenja:

a) $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[fa_1,\dots,fa_n] \Leftrightarrow \mathfrak{C} \models \varphi[g\circ f\underline{a}]$

b) $\mathfrak{A} \models \varphi[fa_1,\dots,fa_n] \Leftrightarrow \mathfrak{C} \models \varphi[g\circ f\underline{a}]$

$\mathfrak{B} \models \varphi[fa_1,\dots,fa_n] \Leftrightarrow \mathfrak{C} \models \varphi[g\circ f\underline{a}]$ ■

Definicija 4.4. $\mathfrak{A}$ je **elementaran podmodel** $\mathfrak{B}$ [$\mathfrak{A} \prec\!\prec \mathfrak{B}$] akko identično inkluziono preslikavanje $i_A : A \hookrightarrow B$ je elementarno tj. $i_A : A \rightarrowtail B$.

Definicija 4.5. Teorija T je **modelski potpuna** akko je svako utapanje između modela teorije T elementarno.

(Elementaran) dijagram modela $\mathfrak{A}$ [$D\mathfrak{A}$] je skup svih atomičnih i negatomičnih rečenica tačnih u $(\mathfrak{A},a)_{a\in A}$.

Nazivajući egzistencijalnim one formule koje u svojoj preneks normalnoj formi imaju samo egzistencijalne kvantore dokazaćemo:

Stav 4.6. Ako je $\varphi(\underline{x})$ egzistencijalna formula i $\mathfrak{A} \models \varphi[\underline{a}]$ i $g: A \longrightarrow B$ onda $\mathfrak{B} \models \varphi[g\underline{a}]$.

Dokaz. Neka je $\varphi(\underline{x}) = \exists y_1,\dots,y_m \psi(\underline{x},y_1,\dots,y_m)$ gde je ψ matrica. Onda $\mathfrak{A} \models \psi[\underline{a},b_1,\dots,b_m]$ za neke $b_1,\dots,b_m \in A$, a kako g čuva atomičnost to $\mathfrak{B} \models \psi[g\underline{a},gb_1,\dots,gb_m]$, pa $\mathfrak{B} \models \varphi[g\underline{a}]$. ■

Karakterizaciju modelske kompletnosti daje :

Teorema 4.7. Sledeći iskazi su ekvivalentni:

(i) T je modelski potpuna.

(ii) $T \cup D\mathfrak{A}$ je kompletna teorija za svaki $\mathfrak{A} \models T$. (Otuda i naziv modelska potpunost.)

(iii) Za svaku $\varphi \in Form$ postoji egzistencijalna formula ψ tako da $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$.

Dokaz. (i)$\Rightarrow$(ii).

Neka je $\mathfrak{A}\models T$ i $\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2\models T\cup D\mathfrak{A}$. Dovoljno je dokazati da je $\mathfrak{B}_1\equiv\mathfrak{B}_2$ prema 1.14.. $\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2$ su modeli i za $D\mathfrak{A}$, pa postoje utapanja $f_i:\mathfrak{A}\longrightarrow\mathfrak{B}_i$, $i\in 2$, i ona su elementarna jer je T modelski potpuna. Dakle,

$$\mathfrak{B}_1\models\varphi[f_1\underline{a}]\Leftrightarrow\mathfrak{B}_2\models\varphi[f_2\underline{a}].$$

(ii)$\Rightarrow$(iii).

Neka je S ekstenzija T rečenicama:

(1) $\varphi(c)$, $c\notin\mathcal{L}_T$ i

(2) $\neg\psi(c)$, gde je $\psi(x)$ bilo koja egzistencijalna formula td. $T\vdash\psi(x)\Rightarrow\varphi(x)$.

Pretpostavimo da je S konzistentna. Onda S ima model $\mathfrak{A}$. $(\mathfrak{A},a)_{a\in A}\models\varphi[c]$, za neko $c\in A$. Prema (ii) sledi da $T\cup D\mathfrak{A}\vdash\varphi(c)$, a na osnovu finitarnosti dokaza $T\vdash\delta(c,a_1,\dots,a_m)\Rightarrow\varphi(c)$, gde je $\delta(c,a_1,\dots,a_m)$ konjunkcija konačno mnogo rečenica iz $D\mathfrak{A}$. Kako $c,a_1,\dots,a_m\in Const_T$, to mogu biti zamenjene promenljivama pa $T\vdash\delta(x,x_1,\dots,x_m)\Rightarrow\varphi(x)$, gde je δ bezkvantorska tj. $T\vdash\psi(x)\Rightarrow\varphi(x)$, gde je $\psi(x)=\exists x_1,\dots,x_m\,\delta(x,x_1,\dots,x_m)$. S druge strane $\mathfrak{A}\models\neg\psi[c]$. $\perp$ sa $\mathfrak{A}\models\varphi[c]$. Protivrečnost S znači da postoje egzistencijalne formule $\varkappa_1,\dots,\varkappa_n$ td. $T\vdash\varkappa_i(x)\Rightarrow\varphi(x)$, za $1\le i\le n$. $T\vdash\varphi(x)\Rightarrow\varkappa_1(x)\vee\dots\vee\varkappa_n(x)$. Neka je $\gamma(x)=\varkappa_1(x)\vee\dots\vee\varkappa_n(x)$. Tada $T\vdash\varphi(x)\Leftrightarrow\gamma(x)$ i γ je logički ekvivalentna egzistencijalnoj formuli.

(iii)$\Rightarrow$(i).

Neka je $g:\mathfrak{A}\longrightarrow\mathfrak{B}$ utapanje modela za T i $\varphi(\underline{a})\in Form$. Prema (iii) $T\vdash\varphi(\underline{x})\Leftrightarrow\psi(\underline{a})$, za neku egzistencijalnu formulu ψ. Neka $\mathfrak{A}\models\varphi[\underline{a}]$. Onda $\mathfrak{A}\models\psi[\underline{a}]$, tj. $\mathfrak{B}\models\psi[g\underline{a}]$, po 4.6., pa i $\mathfrak{B}\models\varphi[g\underline{a}]$. Slično $\mathfrak{B}\models\varphi[\underline{a}]\Rightarrow\mathfrak{A}\models\varphi[g\underline{a}]$, te je T modelski potpuna. ■

§ 4.2. Th(AZP) i Th(GLU)

U ovom paragrafu pokazaćemo modelsku potpunost Th(AZP) i Th(GLU) kao i da su one modelsko kompletiranje, respektivno, teorije polja (P) i teorije linearnog uredjenja (LU).

AZP se dobija dodavanjem prebrojivo mnogo aksioma na aksiome polja:

$(\forall y_1 \ldots y_n)(\exists x)(x^n + y_1 x^{n-1} + \ldots + y_n = 0)$, za svako $n \in \omega - 1$.

Teorema 4.8. (A.Robinson) Th(AZP) je modelski potpuna.

Dokaz. Neka je $f:\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ utapanje AZP. Po pojačanju Löwenheim-Skolem-Tarski teorema [1 str. 109] postoje $\mathfrak{A}_1 \succ \mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}_1 \succ \mathfrak{B}$ sa odgovarajućim elementarnim utapanjima g i h td. $|\mathfrak{A}_1| = |\mathfrak{B}_1| > |\mathfrak{B}| \geq |\mathfrak{A}|$ (f je 1-1). Ako postoji izomorfizam $k:\mathfrak{A}_1 \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{B}_1$ td. $k \circ g = h \circ f : \mathfrak{A} \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{B}_1$ onda je f elementarno (4.3.). Pokažimo da postoji:

Neka je U(V) transcedentna baza za $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{B}_1)$ nad $\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{B})$. $\mathfrak{B}$ je beskonačno pa je $\mathfrak{B}_1$ neprebrojivo tj. $|U| = |V|$ i neka je $k:U \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow V$ bijekcija[9]. Proširimo k na $k_1:\mathfrak{A}(U) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{A}(V)$ i $k_1 \upharpoonright \mathfrak{A} = i_A$. k_1 se može proširiti na $k_2:\mathfrak{A}_1 \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{B}_1$, jer su $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{B}_1)$ algebarska zatvorenja $\mathfrak{A}(U)$ $(\mathfrak{A}(V))$. ■

Pojam modelskog kompletiranja se koristi u eliminaciji kvantora, sada, na bezkvantorske formule $(\mathcal{K} = \mathcal{O})$ za razliku od 2.dela, ali i u dokazivanju: postojanja efektivnih postupaka za rešavanje sistema jednačina i Hilbert-ovog Nullstellensatz-a.

Definicija 4.9. Neka su T i T_1 teorije istog jezika T_1 je **modelsko kompletiranje** T akko

(i) ako je $\mathfrak{A} \models T_1$ onda $\mathfrak{A} \models T$;

(ii) ako je $\mathfrak{A} \models T$ onda postoji ekstenzija $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$ t.d. $\mathfrak{B} \models T_1$;

(iii) ako je $\mathfrak{A} \models T$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} \models T_1$ i $\mathfrak{C} \models T_1$ onda

$$(\mathfrak{B},a)_{a\in A}\equiv(\mathfrak{C},a)_{a\in A}$$

Ako je T_1 modelsko kompletiranje za T onda je T_1 modelski potpuno, ali T_1 može da bude modelski potpuno i da za T zadovoljava (i) i (ii), a da ne bude kompletiranje za T.

Teorema 4.10. (A.Robinson) Modelsko kompletiranje svake teorije T je jedinstveno, ako postoji.

Dokaz. Neka su T_1 i T_2 dva modelska kompletiranja. Pokažimo da je $T_1\subseteq T_2$ tako što ćemo pokazati da $\mathfrak{A}\models T_1 \Rightarrow \mathfrak{A}\models T_2$. Lanac struktura $\{\mathfrak{A}_n : n\in\omega\}$ definisan je sa:

(i) $\mathfrak{A}_0=\mathfrak{A}$

(ii) Neka je $\mathfrak{A}_{2n}\models T_1$. Onda $\mathfrak{A}_{2n}\models T$ prema 4.9.(i) te postoji $\mathfrak{A}_{2n+1}\supseteq\mathfrak{A}_{2n}$ td. je $\mathfrak{A}_{2n+1}\models T_2$.

(iii) Neka je $\mathfrak{A}_{2n+1}\models T_2$. Slično kao pod (ii).

Neka je $\mathfrak{A}_{\infty}=\bigcup\{\mathfrak{A}_{2n}:n\in\omega\}=\bigcup\{\mathfrak{A}_{2n+1}:n\in\omega\}$. Kako su $\{\mathfrak{A}_{2n}:n\in\omega\}$ i $\{\mathfrak{A}_{2n+1}:n\in\omega\}$ elementarni lanci, jer je T_1,T_2 modelski kompletna to $\mathfrak{A}_0\prec\!\!\prec\mathfrak{A}_{\infty}$ i $\mathfrak{A}_1\prec\!\!\prec\mathfrak{A}_{\infty}$ [1 str.115] tj. prema 4.3. $\mathfrak{A}_0\prec\!\!\prec\mathfrak{A}_1$, pa $\mathfrak{A}_0\models T_2$. Slično i $T_2\subseteq T_1$, pa $T_2=T_1$. ■

Sledeća dva iskaza A.Robinsona odnose se na kompletiranje AZP:

Teorema 4.11. Th(AZP) je modelsko kompletiranje Th(P).

Dokaz. Kako je skup aksioma za AZP$\supset$P to 4.9.(i) sledi neposredno, a (ii) na osnovu činjenice da je svako polje produživo do AZP, pa preostaje da pretpostavimo antecedens od (iii):

Neka je $\mathfrak{A}\models P$ i $\mathfrak{B},\mathfrak{C}$ algebarski zatvorene ekstenzije od $\mathfrak{A}$. Po pojačanju Löwenheim-Skolem-Tarski teoreme [1 str. 109] postoje $\mathfrak{C}_1\succ\!\!\succ\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{C}_1\succ\!\!\succ\mathfrak{B}$ td. $|\mathfrak{C}_1|=|\mathfrak{B}_1|>|\mathfrak{A}|$. Neka je $U(V)$ transcedentna baza za $\mathfrak{B}_1(\mathfrak{C}_1)$ nad $\mathfrak{A}$. Tada je beskonačno pa je $\mathfrak{B}_1$ neprebrojivo tj. $|U|=|V|=|\mathfrak{B}_1|$. Neka je $k:U \rightarrowtail\!\!\!\rightarrow V$ bijekcija. Proširimo k na

$k_1:\mathfrak{A}(U) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{A}(V)$ i $k_1 \upharpoonright \mathfrak{A}=i_A$. k_1 se može proširiti na $k_2:\mathfrak{B}_1 \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{C}_1$, jer su $\mathfrak{B}_1(\mathfrak{C}_1)$ algebarska zatvorenja $\mathfrak{A}(U)$ $(\mathfrak{A}(V))$. Prema 4.3. sledi $(\mathfrak{B},a)_{a\in A}\equiv(\mathfrak{C},a)_{a\in A}$. ∎

Teorema 4.12. Th(GLU) je modelsko kompletiranje za Th(LU).

Dokaz. (i) sledi na osnovu aksiomatike za GLU i LU. (ii) sledi dodavanjem $\mathfrak{A}\models$ LU elemenata, koji ispunjavaju sve "praznine". Zato pretpostavimo $\mathfrak{A}\models$ LU, $\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{C}$,$\mathfrak{B}\models$ GLU i $\mathfrak{C}\models$ GLU ali $(\mathfrak{B},a)_{a\in A}\not\equiv(\mathfrak{C},a)_{a\in A}$ tj. za neku $\varphi(\underline{x})\in$Form važi

$$\mathfrak{B}\models\varphi[\underline{a}] \text{ i } \mathfrak{C}\models\neg\varphi[\underline{a}].$$

Neka je $\mathfrak{A}_0$ konačna podstruktura od $\mathfrak{A}$ sa domenom $\{a_0,\dots,a_n\}$. Prema pojačanju donje Löwenheim-Skolem-Tarski teoreme [1 str.109] postoje prebrojive beskonačne strukture $\mathfrak{B}_1$ i $\mathfrak{C}_1$ td. $\mathfrak{A}_0\subseteq\mathfrak{B}_1\prec\!\!\prec\mathfrak{B}$ i $\mathfrak{A}_0\subseteq\mathfrak{C}_1\prec\!\!\prec\mathfrak{C}$ i naravno $(\mathfrak{B}_1,a_0,\dots,a_n)\not\equiv(\mathfrak{C}_1,a_0,\dots,a_n)$. No to je nemoguće, jer postoji izomorfizam $f:\mathfrak{B}_1\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow\mathfrak{C}_1$, td. $f(a_i)=a_i$, za $i\in n$. f se konstruiše Cantor-ovim "nazad-napred" argumentom. Neka je $B_1=\{b_i:i<\omega\}$ i $C_1=\{c_i:i<\omega\}$ enumeracije td. $a_i=b_i=c_i$,za $i\in n$. f se definiše indukcijom po i:

(1) za $i\in n$ $fb_i=c_i$

(2) $i>n$, i parno . f je definisano na nekom konačnom $B_0\subseteq B_1$. Neka je $b\in B_1-B_0$ sa najmanjim indeksom. b je u nekom odnosu sa članovima B_0. Kako je B_0 konačan to postoji $c\in C_1$ koji stoji u istom odnosu sa članovima $f(B_0)$, jer je $C_1\models$ GLU. Neka je $fb=c$.

(3) $i>n$, i neparno. Slično kao (2) uz odgovarajuće zamene. ∎

Definicija 4.13. T je **podmodelski kompletna** akko $T\cup D\mathfrak{A}$ je kompletna za svaki podmodel $\mathfrak{A}$ modela teorije T.

Fundamentalna veza dosad uvedenih pojmova teorije modela sa odlučivošću data je sledećom karakterizacijom eliminacije kvantora na bezkvantorske formule i pripada G.Sacks-u[15]:

Teorema 4.14. T dopušta eliminaciju kvantora akko T je podmodelski kompletna.

Teorema 4.15. (A.Robinson) Ako je T univerzalna teorija sa modelskim kompletiranjem T^* onda T^* dopušta eliminaciju kvantora.

Dokaz. Prema 4.14. dovoljno je dokazati da je T^* podmodelski kompletna. Neka je $\mathfrak{A}$ podstruktura modela T^*. Svaka univerzalna rečenica iz T^* mora biti tačna i u $\mathfrak{A}$ tj. $\mathfrak{A}\models T$. Onda je $T\cup D\mathfrak{A}$ kompletna. ∎

Sada, trivijalno slede dva od tri glavna rezultata dela 4:

Korolar 4.16. Th(AZP) dopušta eliminaciju kvantora, te je odlučiva.

Dokaz. Neposredno na osnovu 4.11. i 4.15. ∎

Napomenimo da je jedan način eliminacije kvantora za Th(AZP) dat u [10].

Korolar 4.17. Th(GLU) dopušta eliminaciju kvantora te je odlučiva.

Dokaz. Neposredno na osnovu 4.12. i 4.15. ∎

§ 4.3. Th(RUZP)

Da bi došli do glavnog orudja za ostatak dela 4 -Blum-ove karakterizacije modelske potpunosti-pretpostavimo da je T kompletna i prebrojiva teorija i uvedimo još nekoliko pojmova .

Za $\forall n\in\omega-1$ neka je F_nT skup svih formula u jeziku T, čije su slobodne promenljive podskup $\{x_1,\dots,x_n\}$. Primetimo da je F_nT monotono rastuća hijerarhija po n.

Definicija 4.18. Formula $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ je **konzistentna sa** T akko $T\vdash \exists x_1,\dots,x_n\varphi(x_1,\dots,x_n)$.

Skup $S \subseteq F_n T$ je **konzistentan** sa T akko egzistencijalno zatvorenje bilo koje konjukcije konačno mnogo članova $F_n T$ je dokazivo u T.

n-tip p je maksimalno (u smislu inkluzije) konzistentan podskup od $F_n T$.

Primetimo da se svaki konzistentan podskup od $F_n T$ može proširiti do nekog n-tipa. Označimo sa $S_n T$ skup svih n-tipova teorije T.

Definicija 4.18. Neka je $\mathfrak{A} \models T$ i $\underline{a} \in A$. Kaže se da $(\underline{a})$ **realizuje** $p \in S_n T$ u $\mathfrak{A}$ akko $\mathfrak{A} \models \varphi[\underline{a}]$ za svaki $\varphi \in p$; tj. $(\underline{a})$ zadovoljava svaki φ iz p u $\mathfrak{A}$.

Definicija 4.19. Neka je $\mathfrak{A}$ beskonačna struktura i $Y \subseteq A$. $\mathfrak{A}$ je **zasićeno nad** Y akko $\forall p \in S_1 T((\mathfrak{A}, y)_{y \in Y})$ je realizovan u $(\mathfrak{A}, y)_{y \in Y}$.

$\mathfrak{A}$ je **zasićeno** akko $\mathfrak{A}$ je zasićeno nad svim $Y \subseteq A$ td. $|Y| < |A|$.

Neka je $\varkappa$ beskonačni kardinal.

$\mathfrak{A}$ je **$\varkappa$-zasi>eno** akko $\mathfrak{A}$ je zasićeno nad svim $Y \subseteq A$ td. $|Y| < \varkappa$.

Sa $\mathfrak{B}(c)$ označimo najmanju nadstrukturu od $\mathfrak{B}$ čiji je domen $B \cup \{c\}$. Dosada uvedeni pojmovi su dovoljni za razumevanje sadržaja sledeće teoreme:

Teorema 4.20. (L.Blum)

Neka su T i T^* dve teorije istog jezika td. $T \subseteq T^*$, T je univerzalna i svaki model od T se može proširiti do nekog modela za T^*. Onda T^* je modelsko kompletiranje od T akko

za svaki $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}(c) \models T$ i $\mathfrak{B}^* \models T^*$ i $\mathfrak{B}^*$ je $|\mathfrak{B}|^+$-zasićeno i $f: \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}(c)$ i $h: \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}^*$ postoji $g: \mathfrak{B}(c) \longrightarrow \mathfrak{B}^*$.

Definicija 4.21. Teorija realno uredjenih zatvorenih polja $Th(RUZP)$ u jeziku $\mathcal{L}_P \cup \{<\}$ ima pored aksioma za polje (P) i:

(1) $(\forall x)(\neg x < x)$,

(2) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z)$,

(3) $(\forall x)(\forall y)(x < y \vee x \equiv y \vee y < x)$,

(4) $(\forall x)(\forall y)(0<x \wedge 0<y \Rightarrow 0<xy)$,

(5) $(\forall x)(\forall y)(0<x \wedge 0<y \Rightarrow 0<x+y)$,

(6) $(\forall x)(\exists y)(0<x \Rightarrow x=yy)$,

i prebrojiv niz aksioma

(7n) $(\forall y_1 \ldots y_n)(\exists x)(x^n+y_1x^{n-1}+\ldots+y_n=0)$,

za svako neparno $n\in\omega$.

Teorema 4.22. Teorija Th(RUZP) je modelsko kompletiranje uredjenih polja [UP] (UP= P +(1)-(5)).

Dokaz. Po Blumovoj teoremi (UP je univerzalna teorija i svaki model za UP je produživ do modela za RUZP) dovoljno je dokazati da: ako $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}(c) \models$ UP i $\mathfrak{B}^* \models$ RUZP i $\mathfrak{B}^*$ je $|\mathfrak{B}|^+$-zasićeno i $f:\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}(c)$ i $h:\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}^*$ onda postoji $g:\mathfrak{B}(c) \longrightarrow \mathfrak{B}^*$. $b^* \in B^*$ se može naći td. je $\mathfrak{B}(b^*) \cong \mathfrak{B}(c)$ nad $\mathfrak{B}$:

(1) Ako je c algebarski nad $\mathfrak{B}$ onda b^* postoji, jer svaka algebarska uredjena ekstenzija uredjenog polja $\mathfrak{B}$ je sadržana u svakom realno uredjenom zatvorenom polju od $\mathfrak{B}$.

(2) c je transcedentan nad $\mathfrak{B}$.

Neka su B_1 i B_2 elementi dvočlane particije B td. $b_1<c<b_2$ za sve $b_1 \in B_1$ i $b_2 \in B_2$. Neka je S skup formula:

(i) $b_1<x<b_2$, za svaki $b_1 \in B_1$ i $b_2 \in B_2$

(ii) $f(x) \neq 0$ za svaki $f(x)$ iz prstena polinoma nad B $B[x]$ koji nije identički jednak nuli.

S je konzistentno sa $T((B^*,b)_{b\in B})$, jer svaki konačan podskup od S može biti zasićen u svakoj realno zatvorenoj ekstenziji od $\mathfrak{B}$. Proširimo S do nekog $p \in S_1 T((B^*,b)_{b\in B})$ prema **4.18.**. Svaka realizacija p u $\mathfrak{B}^*$ može odigrati b^*. Definišimo $gc=b^*$. ∎

Korolar 4.23. Th(RUZP) dopušta eliminaciju kvantora i odlučiva je .

Dokaz. Na osnovu **4.23.** RUZP je modelsko kompletiranje univerzalne teorije UP te zbog **4.15.** sledi tvrdjenje. ■

Problem 4.24. Koristeći Blum-ovu teoremu, dokazati da Presburger-ova aritmetika dopušta eliminaciju kvantora, uvodeći u jezik još jedan predikat, koji izražava treću vrstu osnovnih formula sa str. 27.

Ovaj problem ilustruje da je definicija **2.2.** za $\mathcal{K}=0$ dovoljno široka da se obuhvate sve primene i u odlučivosti uz neminovno proširenje jezika, te baca novo svetlo na **autorove** stavove iz [6].

5. METOD INTERPRETACIJE

Suština metoda je da se za razmatranu teoriju T jezika $\mathcal{L}$ pronadje odlučiva teorija T_o u jeziku $\mathcal{L}_o$ i neko efektivno preslikavanje t, koje svakoj rečenici φ jezika $\mathcal{L}$ dodeljuje rečenicu $t(\varphi)$ jezika $\mathcal{L}_o$ td. važi: $\varphi \in T$ akko $t(\varphi) \in T_o$. Onda možemo tvrditi da je T_o u jeziku $\mathcal{L}_o$ odlučiva.

Napomenimo da je ovaj metod najčešće sredstvo za dokazivanje neodlučivosti teorija i da je, naravno, poželjna što veća ekspresivnost odlučive teorije T_o.

§ 5.1. Semantička interpretacija

Za primenu metoda treba nam još nekoliko pojmova (pre svega dobijanje modela $\mathfrak{A}$ iz modela $\mathfrak{B}$ definabilnom relacijom) i opis semantičke interpretacije, što dajemo prema [14].

Neka je L jezik za $\mathfrak{A}=(A,R)$ i L_1 jezik za $\mathfrak{B}=(B,S_1,S_2,\dots)$ i $\varphi(x,y,\dots)$ formula jezika L_1 sa bar jednom slobodnom promenljivom x (eventualne ostale slobodne promenljive igraju ulogu parametara).Formulu $\varphi(x,y\dots)$ ćemo skraćeno označavati sa $\varphi(x)$ tj. φ.

Definicija 5.1. Neka je θ formula jezika L_1. Formula θ^{φ} je **relativizacija** svih kvantora iz θ na φ akko se dobija induktivnom primenom ova 3 pravila:

1) Ako je θ atomična onda je $\theta^{\varphi}=\theta$.

2) Ako je $\theta=\chi\vee\xi$ ili $\theta=\neg\chi$ onda $\theta^{\varphi}=\chi^{\varphi}\vee\xi^{\varphi}$ tj. $\theta^{\varphi}=\neg\chi^{\varphi}$ respektivno.

3) Ako je $\theta=\exists u\chi$ onda je $(\exists u\chi)^{\varphi} = \exists u(\varphi(u)\wedge\chi^{\varphi})$.

Primetimo da je ponekad potrebno, za korektnu relativizaciju preimenovati promenljive formule φ da bi izbegli vezivanje drugih slobodnih promenljivih iz φ osim x, i da je relativizacija za drugi kvantor: $(\forall u\chi)^{\varphi} = \forall u(\varphi(u)\rightarrow\chi^{\varphi})$,

Neka je $b\in B,\ldots$, niz vrednosti u B za parametre $y,\ldots$, iz φ i definišimo $C=\{a:\mathfrak{B} \models \varphi[a,b,\ldots]\}$. Ovo je domen definisan sa φ dodeljivanjem vrednosti za parametre $y=b,\ldots$ .Skup $C\subseteq B$ indukuje podmodel $\mathfrak{C}=(C,S_1|C,S_2|C,\ldots)$ modela $\mathfrak{B}$.

Efekat relativizacije je da svede zadovoljenje formule φ u $\mathfrak{B}$ na zadovoljenje u podmodelu $\mathfrak{C}$, što pokazuje sledeća, lako dokaziva:

Lema 5.2. Neka je $\theta(\underline{z})$ formula jezika L_1 i neka su φ, B, $b\in B,\ldots$, i C kao gore. Tada za svako $\underline{c}\in C$

$$\mathfrak{B} \models \theta^{\varphi}[\underline{c}] \quad \text{akko} \quad \mathfrak{C} \models \theta[\underline{c}].$$

Radi jednostavnosti, uvešćemo sledeće pojmove samo za formule $\varphi(x)$ (sa tačno jednom slobodnom promenljivom x) i $\psi(u,v)$ jezika L_1 (sa dve slobodne promenljive u,v).

Model $\mathfrak{B}(\varphi,\psi)=(C,R)$ **indukovan u $\mathfrak{B}$** sa $\varphi(x)$ i $\psi(u,v)$ ima domen $C=\{c:\mathfrak{B} \models \varphi[c]\}$ i dijadsku relaciju $R\subseteq C\times C$,
$R=\{(b,c): b,c\in C, \mathfrak{B} \models \psi[b,c]\}$.

Neka je $\theta(\underline{z})$ formula jezika sa binarnom relacijom P. Formula $\theta^{\varphi,\psi}$ je formula dobijena iz θ formirajući prvo relativizovanu formulu θ^{φ}, a onda zamenjujući u θ^{φ} sve atomične formule $P(z_1,z_2)$ sa $\psi(z_1,z_2)$. Primetimo da kvantifikatori u $\psi(u,v)$ nisu relativizovani sa φ.

Sledeća lema daje odnos izmedju zadovoljenja u modelu $\mathfrak{B}$ i indukovanoj strukturi:

Lema 5.3. Za $\underline{c}\in C$,

$$\mathfrak{B}(\varphi,\psi) \models \theta[\underline{c}] \quad \text{akko} \quad \mathfrak{B} \models \theta^{\varphi,\psi}[\underline{c}]$$

Primenu metoda interpretacije omogućava nam

Teorema 5.4. [14] Neka su T i T_1 teorije jezika L i L_1, redom, i neka su $\mathcal{K}$ i $\mathcal{K}_1$ klase struktura td. $T=Th(\mathcal{K})$ i $T_1=Th(\mathcal{K}_1)$. Pretpostavimo da je jezik $\mathcal{L}$ relacijski sa relacijama $P_0,\dots,P_k$. Neka je $\varphi(x,y,\dots)$ formula L_1 i $\psi=(\psi_0,\dots,\psi_k)$ niz formula td. ako je P_i arnosti n_i onda ψ_i ima n_i slobodnih promenljivih $(0\le i\le k)$.

Predpostavimo da

(1) Za sve $\mathfrak{B}\in\mathcal{K}_1$ i sve vrednosti $y=b,\dots$ parametara iz φ $\mathfrak{B}(\varphi,\psi)\models T$.

(2) Za svaku $\mathfrak{A}=(A,R_0,\dots,R_k)\in\mathcal{K}$, postoji model $\mathfrak{B}\in\mathcal{K}_1$ i dodeljivanje vrednosti $y=b\in B,\dots,$ td. za to dodeljivanje $\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}(\varphi,\psi)$.

Pod tim uslovima, ako je T_1 odlučiva onda je i T. I obratno ako je T neodlučiva onda je i T_1.

Dokaz. Neka je θ rečenica jezika L i definišimo $\gamma=\forall y\dots\theta^{\varphi,\psi}$, gde je univerzalna kvantifikacija preko svih promenljivih, koje su parametri u $\varphi(x,y,\dots)$ (ove promenljive su slobodne u θ ako θ ne sadrži kvantore). Prema 5.3. za svako $\mathfrak{B}\in\mathcal{K}_1$ i dodeljivanje $y=b\in B,\dots$ važi

$$(*)\qquad \mathfrak{B}\models\theta^{\varphi,\psi}[b,\dots] \quad\text{akko}\quad \mathfrak{B}(\varphi,\psi)\models\theta.$$

Neka je $\theta\in T$. Uslov (1) implicira $\mathfrak{B}(\varphi,\psi)\models\theta$, za bilo koje $\mathfrak{B}\in\mathcal{K}_1$, $y=b,\dots$,pa prema $(*)$ $\mathfrak{B}\models\gamma$. Ali $\mathfrak{B}\in K_1$ je bilo proizvoljno te $\gamma\in Th(\mathcal{K}_1)=T_1$.

Pretpostavimo $\gamma\in T_1$. Neka je $\mathfrak{A}\in\mathcal{K}$. Tada prema (2) za neko $\mathfrak{B}\in\mathcal{K}$ i $y=b,\dots,\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}(\varphi,\psi)$. Kako $\mathfrak{B}\models\gamma$ to $\mathfrak{B}\models\theta^{\varphi,\psi}[b,\dots]$, pa prema $(*)$, $\mathfrak{B}(\varphi,\psi)\models\theta$, tj. $\mathfrak{A}\models\theta$. Zaključujemo $\mathcal{K}\models\theta$ i $\theta\in T$.

Neka je T_1 odlučiva i θ rečenica iz L. Konstruišimo γ. Kako $\gamma\in T_1$ akko $\theta\in T$, to imamo rešen problem odlučivosti za T. ■

Napomene 5.5.

a) Ukoliko je T konačno aksiomatizibilna onda se ulov (1) može ispustiti modifikujući konstrukciju za γ.

b) Sa odgovarajućim izmenama **5.4.** važi i ako je neki od spomenutih jezika ili čak oba drugog reda.

Jedini zanimljiv slučaj sa stanovišta odlučivosti teorija drugog reda je za monadičke (singularne[8]) jezike, kod kojih promenljive uzimaju vrednosti proizvoljnih podskupova, jer kada imamo kvantifikovanje promenljivih nad binarnim relacijama ili operacijama skup svih tačnih rečenica tog jezika je neodlučiv. Zato će formula u jeziku $\mathcal{L}$ kojom se relativizuje $\varphi(x)$ biti oblika $x\in X$ i X će biti parametar u $\theta^{\varphi,\psi}$. Ako jezik $\mathcal{L}$ ima skupovne promenljive onda se relativizacija sa φ obavlja prema pravilu

$$(\forall X\theta)^{\varphi} = \forall X\,(\forall x\,(x\in X\to\varphi(x))\to\theta^{\varphi}).$$

Sa ovom modifikacijom **5.4.** važi za monadičke jezike drugog reda.

Gornju diskusiju dopunjava

Teorema 5.6. [5 str.95] Ako jezik $\mathcal{L}$ dopušta univerzalnu (egzistencijalnu) kvantifikaciju po dijadskim relacijama i klasa modela K sadrži beskonačan model onda je $Th_2(K)$ je neodlučiva.

§ 5.2. Odlučive teorije drugog reda

Od ovog paragrafa do kraja 5. dela radićemo uglavnom sa monadskim (singularnim [8]) jezicima drugog reda L^2, koji sadrže binarnu relaciju $\in$ i skupovne promenljive X, Y,... .

Primetimo da su definicije **1.1.** i **1.12.** primenljive i za teorije (slabog) drugog reda (Th_w) tj. Th_2.

Najznačajniji rezultati odlučivosti teorija drugog reda koriste metode i rezultate teorije automata. Tako se u dokazu odlučivosti $Th_2(\omega,S)$=S1S koriste automati na ω-nizovima, a za $Th_W(\omega,S)$=WS1S automati na konačnim nizovima.

Prvi značajan rezultat je

Teorema 5.7. [0] Teorija S1S je odlučiva.

Neposredno sledi i da je teorija WS1S odlučiva (vidi **Primedbu 5.15.**).

Vrlo primenljiva teorema o odlučivosti jedne teorije drugog reda je nastala daljim uopštavanjem pojma automata na beskonačim drvetima. Iako se radi o konačnim objektima (automatima) transfinitna indukcija do prvog neprebrojivog kardinalnog broja ω_1 se esencijalno koristi [13 str.19 i str.29].

Neka je $T=\{0,1\}^*$ skup svih konačnih nizova na alfabetu $\{0,1\}$. Prazan niz Λ je, takođe, u T. T se može posmatrati i kao beskonačno puno binarno drvo čiji je koren Λ a čvorovi su elementi iz T. Na T definišimo dve sukcesor funkcije $r_0(x)=x0$ i $r_1(x)=x1$, za $x\in T$, te je S2S prirodno uopštenje $Th_2(\omega,S)$.

Ako je L^2 odgovarajući monadički jezik drugog reda sa unarnim operacijama r_0,r_1 tada važi:

Teorema 5.8. [13] Teorija drugog reda dve sukcesor funkcije $S2S=Th_2(T,r_0,r_1)$ je odlučiva.

Binarno drvo $T_2=T$, u izvesnom smislu sadrži sva drveta sa prebrojivim grananjima. Iz tih razloga, odlučivost S2S implicira odlučivost teorija drugog reda mnogo komplikovanijih drveta i klasa drveta.

Teorema 5.9. [13] Teorija drugog reda SωS od ω sukcesor funkcija je odlučiva.

Dokaz. Neka je $A\subseteq T$ skup sa jedinstvenim korenom $\Lambda_A\in A$, najmanjim prema relaciji $\le$. Definišimo relaciju $S(A)\subseteq A^2$ sa $(x,y)\in S(A)$ akko

$$x\in A \wedge y\in A \wedge x<y \wedge \forall z(\ z\in A \Rightarrow \neg(x < z < y)\ )$$

Ako je $(x,y)\in S(A)$, onda je y neposredni **naslednik** od x u A. Tako $T(A)=(A,S(A))$ je drvo sa korenom Λ_A. Primetimo da je za $x,y\in A$, $x\le y$ (gde je $\le$ parcijlano uredjenje na T) akko x je predhodnik za y u $T(A)$.

Neka je $A = \{\Lambda\} \cup \{1^{n_1}01^{n_2}0\dots1^{n_k}0:\ 1\le k<\omega, 0<n_i, 1\le i\le k\}$. U $T(A)$ skup neposrednih naslednika proizvoljnog $x\in A$ je dobro uredjen u jedan ω-niz sa $\ll$ (leksikografsko uredjenje na T). Sada možemo definisati $r_0^A(x)=y$ sa $(x,y)\in S(A) \wedge \forall z(\ (x,z)\in S(A) \Rightarrow y\ll z\ )$ i induktivno za $n<\omega$, $r_{n+1}^A(x)=y$ sa:

$$(x,y)\in S(A) \wedge \bigwedge_{i<n} r_i^A(x)\ne y \wedge \forall z(\ (x,z)\in S(A) \wedge \bigwedge_{i<n} r_i^A(x)\ne z \Rightarrow y\ll z\ ).$$

Sa ovom definicijom sukcesor funkcija r_n^A, $n\in\omega$, model $(A, r_n^A, \le|A, \ll|A)_{n\in\omega}$ je izomorfan sa $(\omega^*, r_n^A, \le, \ll)_{n<\omega}$.

Sada je skup A i relacije $r_n^A(x)=y$, $n\in\omega$, definabilne u S2S. Na osnovu [13,teorema 1.10. str.10] sledi odlučivost SωS. ∎

§ 5.3. Primene na uređene skupove

Neka je $G_{\le}^{\omega}$ klasa svih gusto uređenih skupova bez krajeva $(A,\le)\models$ GLU sa prebrojivim domenom.

Teorema 5.10. $Th_z(G_{\le}^{\omega})$ je odlučiva.

Dokaz. Na T možemo definisati parcijalno uredjenje $\le$ sa

$$x\le y \text{ akko } \forall X\ (x\in X \wedge \forall z(z\in X \Rightarrow r_0(z)\in X \wedge r_1(z)\in X) \Rightarrow y\in X),$$

a leksikografsko $\ll$ sa

$$x\ll y \text{ akko } x\le y \vee \exists z(r_0(z)\le x \wedge r_1(z)\le y).$$

Uređeni skup $\mathfrak{C}=(\{x1:\ x\in T\}, \ll)$ ima tip uređenja η, jer je gusto linearno uređenje bez krajeva. Kako je svaki $(A,\leq)\in G_{\leq}^{\omega}$ izomorfan sa η prema 3.5. to je $(A,\leq)\cong\mathfrak{C}$. Neka je u 5.4. formula relativizacije $D(x,X)\equiv x\in X$, a $\leq$ zamenimo sa $\ll$. Tada je $Th_2(G_{\leq}^{\omega})$ odlučiva jer se može interpretirati u S2S u skladu sa 5.4. ∎

Korolar 5.11. Slaba teorija drugog reda gustih linearnih uređenja, $Th_w(G_{\leq})$, je odlučiva.

Ako je $K_{\leq}^{\omega}$ klasa svih prebrojivih linearno uređenih skupova onda važi:

Teorema 5.12. [13] $Th_2(K_{\leq}^{\omega})$, teorija drugog reda prebrojivih linearnih skupova je odlučiva.

Dokaz. Kao i u 5.10. definiše se parcijalno uređenje $\leq$ i leksikografsko uređenje $\ll$ i uređeni skup $\mathfrak{C}$ tipa η. Kako za svaki prebrojivi uređeni skup $(A,\leq)$ postoji $\underline{A}\subseteq T$ td. $(A,\leq)\cong(\underline{A},\ll)$, to kao i u 5.10. sledi odlučivost $Th_2(K_{\leq}^{\omega})$. ∎

Korolar 5.13. [13] Slaba teorija drugog reda linearnih uređenja, $Th_w(K_{\leq})$, je odlučiva.

Korolar 5.14. Monadska teorija drugog reda prebrojivih dobro uređenih skupova je odlučiva.

Dokaz. Monadska rečenica drugog reda

$$W\equiv\forall X\forall x\exists y\forall z(\ x\in X\Rightarrow y\in X\wedge(z\in X\Rightarrow y\leq z)\ )$$

ima osobinu da linearno uređen skup $\mathfrak{A}$ zadovoljava W tj. $\mathfrak{A}\models W$ akko $\mathfrak{A}$ je dobro uređen. Tako za bilo koju rečenicu φ važi $K_{\leq}^{\omega}\models W\Rightarrow\varphi$ akko φ je tačna u svim prebrojivim dobro uređenim skupovima. ∎

Primedba 5.15. Neka je $Th_2(K)$, teorija drugog reda klase modela K, odlučiva. Tada je odlučiv i svaki podskup rečenica

$R \subseteq Th_2(K)$ u jeziku $\mathcal{L}$ za koji se efektivno može odrediti da li je rečenica iz R u jeziku $\mathcal{L}$.

Teorema 5.16. Neka je K^ω klasa prebrojivih modela, koji zadovoljavaju skup akioma S td. je $Th_2(K^\omega)$ odlučiva, a S je u slabom jeziku drugog reda (ili nekom njegovom izražajnom ekvivalentu ω-jeziku npr.). Tada je $Th_w(S)$ odlučiva i kompletna.

Dokaz. Prema donjoj Löwenheim-Skolem-ovoj teoremi za svaki $\mathfrak{A} \models S$ postoji prebrojiv model $\mathfrak{B}$ td. $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ gde je $\mathfrak{B} \in K^\omega$. Otuda je $Th_W(S) = Th_W(K^\omega)$, a ova poslednja je odlučiva prema **5.15.** i kompletna, naravno.■

Primetimo da u predhodnoj teoremi Th(S) je kompletna i odlučiva i ako je aksiomatika S u jeziku prvog reda, a da važi i za sve logike za koje važi donja Löwenheim-Skolem-ova teorema ($L_{\omega_1,\omega}$, $L(Q_0)$).

Na osnovu **5.16.** neposredno sledi niz posledica:

Korolar 5.17. Th(GLU) je odlučiva i kompletna.

Korolar 5.18. Th(LU) je odlučiva i kompletna.

Rezultat [19] za dobro uređene skupove [DU]:

Korolar 5.19. Th(DU) je odlučiva i kompletna.

§ 5.4. Th(ω, +)

Konačni nizovi nula i jedinica su dovoljni za kodiranje sabiranja prirodnih brojeva. Naime, karakteristična funkcija skupa X, χ_X, gde je $X \subseteq \omega$ definiše prirodan broj

$$n(X) = 1*\chi_X(0) + 2*\chi_X(1) + \ldots + 2^k*\chi_X(k) + \ldots,$$

a kvantifikacija po konačnim podskupovima skupa ω omogućava zapis sabiranja definišući sabiranje binarnih zapisa datih prirodnih brojeva. Otuda, koristeći odlučivost WS1S

Teorema 5.20. [14] Teorija $Th(\omega,+)$ je odlučiva.

Dokaz. Formula

$$\varphi(X,Y,Z) \equiv \exists T \forall x \; (\quad \neg 0 \in T \land$$

$$(S(x) \in T \Leftrightarrow (x \in X \land x \in Y) \lor (x \in X \land x \in T) \lor (x \in Y \land x \in T) \;) \land$$

$$(x \in Z \Leftrightarrow (x \in X \land x \in Y \land x \in T) \lor (x \in X \land \neg x \in Y \land \neg x \in T) \lor (\neg x \in X \land x \in Y \land \neg x \in T) \lor$$

$$(\neg x \in X \land \neg x \in Y \land \neg x \in T) \;) \quad)$$

u jeziku WS1S će biti tačna u $(\omega,S,0)$ akko $n(X)+n(Y)=n(Z)$. Naime, u φ se razmatraju prenosi prilikom binarnog sabiranja i oni se čuvaju u T.

Zamenom u proizvoljnoj rečenici $\psi \in Th(\omega,+)$ podformule $a+b=c$, sa $\varphi(X,Y,Z)$ gde je $a=n(X)$, $b=n(Y)$ i $c=n(Z)$ dobija se rečenica $\theta \in WS1S$ tj. važi $\psi \in Th(\omega,+)$ akko $\theta \in WS1S$ te možemo odlučiti da li je $\psi \in Th(\omega,+)$. ∎

Iako je jasno iz predhodnog uvoda da kvantifikacija po konačnim podskupovima uz binarnu relaciju $\in$ omogućava izražavanje sabiranja ostaje

Problem 5.21. Naći vezu između dokaza odlučivosti, korišćenjem eliminacije kvantora za, recimo, Pressburger-ovu aritmetiku i interpretacijom u teoriji drugog reda WS1S.

6. KOMPLEKSNOST TEORIJA

U ovom delu razmatraće se kompleksnost algoritama, kojima se dokazuje odlučivost u radu razmatranih teorija. Videćemo da, fakt da su odlučive teorije trivijalne, još nije dokazan i da ne postoje ozbiljnije indikacije njegove verifikacije. Uvešćemo samo pojmove koji nam omogućavaju razumevanje iskazanih teorema i neke specijalne osobine Blum-ovog pojma ubrtanja (speed-up [4])

§ 6.1. Osnovni pojmovi i rezultati

Kako je cilj da se pokaže da je svaki algoritam, kojim se dokazuje da je teorija T odlučiva [tzv. procedura odluke] složena, moramo da imamo pojmove koji izražavaju matematički tu složenost. Motivisan delom praktičnim razmatranjima, obično se posmatra gornje ograničenje resursa datog koncepta izračunljivosti (mi ćemo raditi sa Turing-ovim mašinama) koji je potreban za rešenje problema. Dve zajedničke mere korišćenja resursa bilo kog koncepta izračunavanja su **vreme**, broj koraka u izračunavanju prema datom algoritmu, i **prostor**, veličina memorije korišćene algoritmom. Kad je dat konkretan odlučiv problem i neki algoritam za taj problem gornje ograničenje se dobija razmatranjem potrebnog vremena i prostora prema tom algoritmu. Međutim, za nalaženje optimalnog algoritma potrebno je naći i donje ograničenje kompleksnosti problema, tj. mora se pokazati da je izvesno vreme i prostor korišćen od strane bilo kog algoritma od beskonačno mnogo njih koji rešavaju problem. čak i ako je eksplicitno nađeno gornje i donje ograničenje kompleksnosti problema moguće je na drugi način, implicitno, klasifikovati problem stavljajući ga u neku klasu kompleksnosti, koja obuhvata neki skup problema.

Koristićemo svodljivost, koncept, pozajmljen iz teorije rekurzija [15], za određivanje kompleksnosti jednog problema, kad nam je poznata kompleksnost drugog problema i postoji ograničenje za korišćenje resursa u izračunavanju funkcije f kojom se vrši svođenje. Naime skup A je (više-jedan) **svodljiv** na B funkcijom f akko $x \in A \leftrightarrow f(x) \in B$. Postupak svođenja, koji pripada Cook-u, shematski izgleda ovako:

"kompleksnost za A" ≤ "kompleksnost za B" + "kompleksnost za f"

jer se od bilo kog algoritma M_B koji prihvata skup B može dobiti algoritam M_A, koji prihvata A: za dati ulaz x, algoritam M_A prvo izračuna f(x) a onda primeni M_B na f(x).

Kako su sve procedure odluke, koje ćemo susresti, eksponencijalne složenosti to "kompleksnost za f" neće imati nikakvog uticaja, jer je obično polinomskog tipa. Rezultati koji slede, takođe, neće zavisiti od sistema izračunavanja, jer je kompleksnost prevođenja iz jednog sistema izračunavanja u drugi, takođe, polinomskog tipa.

Pored Turing-ovih mašina kao koncepta izračunavanja, za meru složenosti ćemo koristiti vreme tj. broj koraka u izračunavanju po datom programu.

Rezultati će biti u obliku da za bilo koju proceduru odluke P za datu teoriju T, postoji rečenica φ veličine n (tj. φ je sa n simbola $|\varphi|=n$) za koju P zahteva najmanje f(cn) koraka za odgovor na pitanje da li je $\varphi \in T$. Funkcija f(n) će biti najmanje ekponencijalna oblika 2^n, a c fiksiran realan broj veći od nule.

6.1. Opšti postupak za klasifikaciju kompleksnosti problema T se sastoji u sledećem:

Treba naći klase kompleksnosti $\mathcal{C}_{donja}$ i $\mathcal{C}_{gornja}$ td.

1) $\mathcal{C}_{donja} \leq_{eff}$ T za neku funkciju f koja je efektivna svodljivost tj:

a) izračunljiva Determinističkom Turing-ovom mašinom [DTM] unutar log(n) prostora [u oznaci $\leq_{log}$]

ili b) izračunljiva sa DTM u polinomskom vremenu [$\leq_p$]

ili c) kao pod a) i još $|f(\varphi)| \leq b|\varphi|$, za b>0, gde $|\varphi|$ je dužina rečenica φ [$\leq_{log-lin}$].

ili d) kao pod b) i još $|f(\varphi)| \leq b|\varphi|$, za b>0, gde $|\varphi|$ je dužina rečenica φ[$\leq_{p-lin}$].

2) $T \in \mathcal{C}_{gornja}$.

Naravno, poželjno je da obe klase $\mathcal{C}_{donja}$ i $\mathcal{C}_{gornja}$ budu što bliže, a ako je $\mathcal{C}_{donja} = \mathcal{C}_{gornja} = \mathcal{C}$ onda je T $\mathcal{C}$-kompletna.

Pre nego što iskažemo niz rezultata bez dokaza o kompleksnosti procedura odluka teorija, koje smo posmatrali u prethodnim poglavljima uvedimo sledeću definiciju funkcije F(m,n)

$$F(n,1)=2^n, \quad F(n,m+1)=2^{F(n,m)}, m=1,2,\ldots .$$

Ako je 0<d, onda sa $f(n)=F(n,[dn])$ označimo funkciju koja ima ceo deo od dn "spratova" dvojki.

Teorema 6.2. [14] Postoji konstanta d>0 td. za funkciju f(n), i svaku proceduru odluke P za WS1S postoji beskonačno mnogo rečenica φ td. P zahteva više od $f(|\varphi|)$ koraka za odluku da li $\varphi \in$WS1S. (Ili, kraće, WS1S ima inherentnu kompleksnost $F(n,[dn])$ za neko d>0.)

Teorema 6.3. [14] Teorija prvog reda Th(LU) linearnog uređenja ima inherentnu kompleksnost $F(n,[dn])$ za neko $d>0$.

Analiza dokaza za WS2S i S2S pokazuje da one imaju istu inherentu kompleksnost kao i WS1S i da je to najbolje donje ograničenje.

Za razumevanje sledeće dve teoreme treba nam još nekoliko pojmova:

6.4. Neka je $T: \omega \longmapsto R$ i M Turing-ova mašina. M **prihvata** unutar vremena(prostora) $T(n)$ akko za svako x koje M prihvata postoji izračunavanje td. vreme(prostor) izračunavanja ne prelazi $T(|x|)$.

DTIME(T(n)) (res. DSPACE(T(n)) označava klasu problema koje DTM prihvata unutar vremena (res. prostora) T(n). Slično NTIME(T(n)) i NSPACE(T(n)) samo za nedeterminističku Turing-ovu mašinu.

Prema [17], u kome se mogu naći i sve reference, a u skladu sa 6.1. dajemo sledeće rezultate :

Teorema 6.5. Za Th(w,s) je $\mathscr{E}_{donja}$=NSPACE(n), ostvarena svodljivošću $\le_{log-lin}$, a $\mathscr{E}_{gornja}$=DSPACE(n^2).

Teorema 6.6. Za Th(ω,+) je $\mathscr{E}_{donja}$=NTIME(F(n,2)), ostvarena svodljivošću $\le_{p-lin}$, a $\mathscr{E}_{gornja} = \bigcup_{c\in R^+}$ DSPACE(F(cn,2).

Dakle, PAR ima tzv. supereksponencijalnu kompleksnost.

§ 6.2. Jedna vrsta ubrzanja za Th(ω, +)

Neka je data DTM, koja staje za sve ulaze, i neka $Time_M(x)$ označava broj koraka u izračunavanju DTM M za ulaz x. Skup rečenica nekog jezika možemo da posmatramo i kao podskup svih reči nad datim alfabetom Σ tj $Sent_{\mathcal{L}} \subseteq \Sigma^*$. Sada možemo da damo opštu definiciju jedne vrste ubrzanja.

Definicija 6.7. Reći ćemo da problem $A \subseteq \Sigma^*$ ima **$T(n)$-na polinom efektivno beskonačno često ubrzanje** [$T(n)$-ubrzanje] akko postoji polinom $p \in R[n]$ td. za bilo koju DTM M koja prihvata A mi možemo efektivno konstruisati DTM M_1 koja prihvata A i beskonačan rekurzivan skup $U \subseteq \Sigma^*$ td.

$$Time_M(x) \geq T(|x|) \qquad \text{za sve } x \in U,$$

i

$$Time_{M_1}(x) \leq p(|x|) \qquad \text{za sve } x \in U.$$

Sledeća teorema i napomena iz [17] biće nam potrebni za glavnu teoremu ovog paragrafa.

Teorema 6.8. Za bilo koju elementarnu funkciju $T(n)$, postoji problem A u $\bigcup_{c \in R^+} DTIME(cT(n)^2)$, koji ima $T(n)$-ubrzanje.

Napomena 6.9. Ako je $A \leq_{eff} B$ sa f i f je neka od četiri svodljivosti iz 6.1., onda ako A ima $T(n)$-ubrzanje ima ga i B.

Teorema 6.10. $Th(\omega,+)$ ima 2^n-ubrzanje.

Dokaz. Kako važe sledeće inkluzije

$$\bigcup_{c \in R^+} DTIME(c(2^n)^2) \subseteq DTIME(2^{(2^n)}) \subseteq NTIME(2^{(2^n)})$$

to zbog 6.6. $NTIME(2^{(2^n)}) \leq_{p-lin} Th(\omega,+)$, pa na osnovu 6.8. za $T(n)=2^n$ je neki problem A sa 2^n-ubrzanjem svodljiv $\leq_{p-lin}$ na $Th(\omega,+)$, te $Th(\omega,+)$ ima 2^n-ubrzanje prema 6.9.. ∎

Primetimo da pojam $T(n)$-ubrzanja zapravo pokušaj heurističkog rešavanja složenijih problema te da je glavni zadatak dobiti pogodan rekurzivan skup U za koji važi da se može "lakše" izračunati.

7. LITERATURA

[0] J. Büchi,
On a decision method in restricted second order arithmetic, **Logic, Methodology and Philosophy of science**, Stanford University Press, Stanford, 1962, str.1-11.

[1] C.C.Chang, H.J.Keisler,
Model theory, North-Holland, Amsterdam, 1977. i dodatak za treće izdanje.

[2] W.Craig,
On axiomatizability within a system, **Journal of Symbolic Logic**, Vol 18, 1(1953), str.30-32.

[3] N.Cutland,
Computability. An introduction to recursive function theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[4] M.Davis, E.Weyeker,
Computability, Complexity and Languages, Academic Press, New York, 1983.

[5] O. L.Ershov, I. A.Lavrov, i dr.
Elementarnie teorii, **Uspehi matematičeskih nauk**, tom 20, 4(124), 1965, str.37-108.

[6] P. Krauss,
Quantifier elimination, **Logic Conference, Kiel 1974**, (G. Müller i dr. editor), Springer-Verlag, Berlin, 1975, str.426-44.

[7] G.Kreisel, J.L.Krivine,
Elements of mathematical logic (Model theory), North-Holland, Amsterdam, 1967.

[8] A.I.Kokorin, A.G.Pinus,
Voprosi razrešimosti raširennih teorii, **Uspehi matematičeskih nauk**, tom 38, 2(200), 1978, str.49-84.

[9] S.Lang,
Algebra, Addison-Wesley, Reading Massachusetts, 1965.

[10] Ž.Mijajlović, Z.Marković, K.Došen,
Hilbertovi problemi i logika, Zavod za udžbenike i nastavna

sredstva, Beograd, 1986.

[11] Ž.Mijajlović,

Model theory, pojaviće se

[12] D. Monk,

Mathematical logic, Springer-Verlag, New York, 1976.

[13] M.O.Rabin,

Decidability of second-order theories and automata on infinite trees, **Transactions of the American Mathematical Society,** 141(1969), str.1-35.

[14] M.O.Rabin,

Decidable theories, **Handbook of mathematical logic** (J.Barwise,editor), North-Holland, Amsterdam, 1977, str.595-629.

[15] H.Rogers,

Theory of recursive functions and effective computability, McGrow-Hill, New York, 1967.

[16] G.Sacks,

Saturated model theory, W.A.Benjamin,Inc., Reading Massachusetts, 1972.

[17] L.Stockmeyer,

Classifying the computational complexity of problems, **Journal of Symbolic logic,** vol.52, 1(1987), str. 1-43.

[18] A.Tarski, A.Mostowski, R.Robinson,

Undecidable theories, North-Holland, Amsterdam, 1971, third edition.

[19] A. Tarski, A. Mostowski

Arithmetical classes and types of well ordered systems, **Bulletin of the American Mathematical Society**, vol 55(1949), str. 65.