UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET

PREDRAG TANOVIĆ

PRILOG TEORIJI PROBABILISTIČKIH LOGIKA

MAGISTARSKI RAD

BEOGRAD, 1987

UVOD

Osnove probabilističkih logika postavio je Keisler u svom radu "HYPERFINITE MODEL THEORY" 1977. godine. Posmatrajući strukture snabdevene verovatnoćom na domenu formirao je logiku čije formule sadrže umesto uobičajenih egzistencijalnih i univerzalnih kvantora probabilističke. Potom u radovima Keislera, Hoovera, Raškovića i još nekolicine matematičara utvrđen je niz osobina ovakvih logika. Tako, dokazana je potpunost, apstraktna potpunost, apstraktna kompaktnost i Robinsonova neprotivrečnost takvih logika. Utvrđeno je i nekoliko osobina, zakon velikih brojeva na primer, koje nemaju analognih u logici prvog reda.

Jedan od važnih problema u teoriji probabilističkih logika danas je istraživanje mešovitih logika, tj. logika koje pored probabilističkih sadrže egzistencijalne i univerzalne kvantore. U takvim se logikama mogu izraziti neke nove osobine strukture sa merom, invarijantnost u odnosu na translaciju na primer. Osnovni problem koji se javlja dodavanjem egzistencijalnog kvantora je merljivost projekcije merljivog skupa.

Mešovite logike će biti osnovna tema ovog rada. Pri tome ćemo umesto strukture sa verovatnoćom posmatrati strukture sa konačnom merom na domenu, iako ćemo i dalje logike nazivati probabilističkim i kvantor označavati sa P.

U prvom poglavlju dat je pregled rezultata potpunosti probabilističkih logika koje sadrže samo probabilističke kvantore. U poslednjem delu opisano je Loeb-ovo proširenje mere.

U drugom poglavlju formirana je najoppštija mešovita logika $L_{\omega_1\exists}$ koja sadrži probabilističke, egzistencijalne i univerzalne kvantore, kao i prebrojive konjukcije i disjunkcije u proizvoljnom poretku. Za ovu logiku dokazana je slaba potpunost, tj. potpunost ukoliko posmatramo strukture sa konačnom konačno aditivnom merom na domenu. U dokazu koristimo Hooverovu modifikaciju Makkaievog dokaza potpunosti logike $L_{\omega_1\omega}$.

U trećem poglavlju formirana je mešovita probabilistička logika $L_{AP}(L_{\omega\omega})$ u kojoj egzistencijalni i univerzalni kvantor ne mogu dejstvovati na formulu sa probabilističkim kvantorima. Dokazana je potpunost ove logike koristeći potpunost logike $L_{\omega_1\exists}$ i Loebovu konstrukciju.

U četvrtom poglavlju dokazano je da svaka $L_{\omega_1\exists}$ formula ima normalnu formu, tj. da je ekvivalentna formuli koja sadrži samo monotone konjukcije i disjunkcije.

HC označava skup nasledno prebrojivih skupova, A je dopustiv skup i $A\subseteq HC$, L je fiksiran A-rekurzivan skup relacijskih, funkcijskih i simbola konstanti.

1. KOMPLETNOST OSNOVNIH PROBABILISTICKIH LOGIKA

U prva četiri dela ovog poglavlja daćemo pregled rezultata kompletnosti osnovnih probabilističkih logika, koje ne sadrže egzistencijalni i univerzalne kvantore. U poslednjem delu skiciraćemo Löeb-ov proces ekstenzije mere, koji je osnovno sredstvo za dobijanje jakih probabilističkih modela.

1.1. SINTAKSA.

1.1.1. Definicija. Logika $L_{\mathbb{A}P}$ ima sledeće logičke simbole:

a) Prebrojiv spisak promenljivih v_n, za $n\in\omega$.

b) Veznike $\neg$ i $\bigwedge$.

c) Kvantore $(P\bar{x}\geq r)$, gde je $\bar{x}$ niz $(x_1,x_2,...,x_n)$ različitih promenljivih, a $r\in\mathbb{A}\cap[0,1]$.

d) Simbol jednakosti $=$.

1.1.2. Definicija. Skup formula logike $L_{\mathbb{A}P}$ je najmanji skup Form $(L_{\mathbb{A}P})$ koji sadrži sve atomične formule logike prvog reda i zadovoljava:

a) Ako $\varphi\in$Form $(L_{\mathbb{A}P})$ tada $\neg\varphi\in$Form $(L_{\mathbb{A}P})$.

b) Ako $\Phi\in\mathbb{A}$ i $\Phi\subseteq$Form $(L_{\mathbb{A}P})$, pri čemu formule iz Φ sadrže samo konačno mnogo promenljivih, tada i $\bigwedge\Phi\in$Form $(L_{\mathbb{A}P})$.

c) Ako $\varphi\in$Form $(L_{\mathbb{A}P})$ i $(P\bar{x}\geq r)$ kvantor tada i

$$(P\bar{x}\geq r)\varphi\in\text{Form }(L_{\mathbb{A}P})$$

Iako prethodna definicija nije konstruktivna (nad $\mathbb{A}$)

podrazumevamo da su formule konstruisane skupovno-teoretski tako da je Form $(L_{\mathbb{A}P})\subseteq\mathbb{A}$. U slučaju $\mathbb{A}$=HC (skup svih nasledno prebrojivih skupova) $L_{\mathbb{A}P}$ označavamo sa $L_{\omega_1 P}$. Nije teško videti da važi $\mathrm{Form}(L_{\mathbb{A}P}) = \mathrm{Form}(L_{\omega_1 P}) \cap \mathbb{A}$.

Na prirodan način uvodimo veznike $\leftrightarrow, \rightarrow, \vee, \wedge$ logike prvog reda i veznik $\bigvee$.

U slučaju probabilističkih kvantora uvodimo sledeće skraćene zapise:

$(P\bar{x}<r)\varphi$ za $\neg(P\bar{x}\geq r)\varphi$

$(P\bar{x}\leq r)\varphi$ za $(P\bar{x}\geq 1-r)\neg\varphi$

$(P\bar{x}>r)\varphi$ za $\neg(P\bar{x}\geq 1-r)\neg\varphi$

1.2. PROBABILISTIČKI MODELI.

1.2.1. Definicija. Konačno aditivni prostor verovatnoće je uređena trojka (M,S,μ), gde je S prsten podskupova skupa M i $\mu:S\rightarrow[0,1]$ zadovoljava: $\mu(X\cup Y)=\mu(X\setminus Y)+\mu(Y\setminus X)+\mu(X\cap Y)$ i $\mu(M)=1$. Elemente prstena S zovemo μ-merljivim skupovima, μ je konačno aditivna verovatnoća. (M,S,μ) je prostor verovatnoće ako je μ još i σ-aditivna: za svaki niz $X_0\subseteq X_1\subseteq X_2\subseteq\dots\dots$ μ-merljivih skupova $\bigcup_n X_n$ je μ-merljiva i $\mu(\bigcup_n X_n)=\lim_n \mu(X_n)$. U ovom slučaju μ je verovatnoća.

Na uobičajen način definišemo i proizvod dva prostora verovatnoće (M,S,μ) i (N,T,ν) kao trojku $(M\times N, S\otimes T, \mu\otimes\nu)$, gde je $S\otimes T$ σ-algebra generisana merljivim pravougaonicima $X\times Y$, $X\in S$, $Y\in T$ i $(\mu\otimes\nu)(X\times Y)=\mu(X)\mu(Y)$.

n-ti stepen prostora (M,S,μ) označavamo sa (M^n,S^n,μ^n), gde je $S^n=S\otimes S\otimes\dots\otimes S$ i $\mu^n=\mu\otimes\mu\otimes\dots\otimes\mu$.

Primetimo da dijagonala proizvoda nije obavezno μ^2-merljiva.

Stoga ćemo modifikovati stepenovanje.

<u>1.2.2. Definicija</u>. Neka je (M,S,μ) prostor verovatnoće u kome je svaki singlton μ-merljiv. Za svaki prirodan broj n definišemo $S^{(n)}$ kao najmanju σ-algebru koja sadrži S^n i sve dijagonalne skupove $D_{ij}=\{\bar{x}\in M^n \mid x_i=x_j\}$, $i\neq j$. $i,j\leq n$.
Primetimo da postoji jędintvena ekstenzija verovatnoće μ^n na σ-prsten $S^{(n)}$, označimo je sa $\mu^{(n)}$, za koju važi:

$$\mu^{(n)}(D_{ij})=\sum_{x\in M}\mu(x)^2$$

Ovako definisan niz prostora verovatnoće $(M^n,S^{(n)},\mu^{(n)})$ za $n\in\mathbb{N}$ zadovoljava Fubinijevu teoremu.

<u>1.2.3.Teorema</u>. Neka je μ verovatnoća pri čemu je svaki singlton merljiv, i $B\subseteq M^{m+n}$ $\mu^{(m+n)}$-merljiv skup. Tada važi:

i) Skup $B(\bar{x})=\{\bar{y}\in M^n \mid \bar{x}\bar{y}\in B\}$ je $\mu^{(n)}$-merljiv za svaki $x\in M^m$.

ii) Funkcija $f(\bar{x})=\mu^{(n)}(B(\bar{x}))$ je $\mu^{(m)}$-merljiva.

iii) $\mu^{(m+n)}(B)=\int f(\bar{x})d\mu^{(m)}$.

<u>1.2.4. Definicija</u>. Probabilistička struktura za jezik L je

$$\mathfrak{A}=(A,R_i^{\mathfrak{A}},f_j^{\mathfrak{A}},c_k^{\mathfrak{A}},\mu)\quad i\in I,\ j\in J,\ k\in K$$

pri čemu su $R_i^{\mathfrak{A}}$ relacije, $f_j^{\mathfrak{A}}$ funkcije, $c_k^{\mathfrak{A}}$ konstante u A, a μ verovatnoća na nekom σ-prstenu podskupova skupa A, i svaki singlton, svaka relacija i svaka funkcija je merljiva.

Neka je $\mathfrak{A}$ probabilistička struktura jezika L. Relacija zadovoljenja u strukturi $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\models\varphi(\bar{a})$ definiše se rekurzivno, kao i za $L_{\mathbb{A}}$, izuzev u slučaju kvantifikatora :

$\mathfrak{A}\models (P\bar{y}\geq r)\varphi(\bar{x},\bar{y})[\bar{a}]$ akko je skup $\{\bar{b}\in M^n \mid \mathfrak{A}\models\varphi(\bar{a},\bar{b})\}$ $\mu^{(n)}$-merljiv i važi $\mu^{(n)}(\{\bar{b}\in M^n \mid \mathfrak{A}\models\varphi(\bar{a},\bar{b})\})\geq r$.

$\mathfrak{A}$ je model rečenice φ akko $\mathfrak{A}\models\varphi$, $\mathfrak{A}$ je model skupa rečenica akko je $\mathfrak{A}$ model svake rečenice tog skupa.

<u>1.2.5. Teorema</u>. Za svaku probabilističku strukturu $\mathfrak{A}$, formulu

$\varphi(\bar{x},\bar{y})\in L_{\mathbb{A}P}$ i n-torku $\bar{a}\in A^m$ skup $\{\bar{b}\in M^n \mid \mathfrak{A}\models \varphi[\bar{a},\bar{b}]\}$ je merljiv. Za razliku od logike $L_{\mathbb{A}P}$ koja sadrži samo jednu vrstu probabilističkih kvantora postoje i probabilističke logike sa više vrsta probabilističkih kvantora. Tako sa $L_{\mathbb{A}P_1P_2}$ označavamo probabilistističku logiku koja ima dve vrste kvantora, $(P_1\bar{x}\geq r)$i $(P_2\bar{x}\geq r)$.Slično kao i za $L_{\mathbb{A}P}$ definišemo pojam strukture, s tom razlikom što sada struktura sadrži dve mere μ_1 i μ_2. U odnosu na uzajamni položaj mera μ_1 i μ_2 razlikujemo singularnu $L_{\mathbb{A}P_1P_2}$, kada je mera μ_1 singularna u odnosu na μ_2, i apsolutno neprekidnu $L_{\mathbb{A}P_1P_2}$, kada je mera μ_1 apsolutno neprekidna u odnosu na meru μ_2.

1.2.6. Definicija. Slaba probabilistička struktura za $L_{\mathbb{A}P}$ je struktura $\mathfrak{A}=(A,R_i^{\mathfrak{A}},f_j^{\mathfrak{A}},c_k^{\mathfrak{A}},\mu_n)$ $i\in I$, $j\in J$, $k\in K$, $n\in\mathbb{N}$, gde je μ_n konačno aditivna verovatnoća na M^n, pri čemu je svaki singlton merljiv i, uz prirodno definisanu relaciju zadovoljenja, skup $\{\bar{b}\in M^n \mid \mathfrak{A}\models \varphi[\bar{a},\bar{b}]\}$ μ_n-merljiv za svaku formulu $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ i m-torku $\bar{a}\in M^m$.

1.2.7. Definicija.Graduirana probabilistička struktura za $L_{\mathbb{A}P}$ je struktura $\mathfrak{A}=(A,R_i^{\mathfrak{A}},f_j^{\mathfrak{A}},c_k^{\mathfrak{A}},\mu_n)$ $i\in I$, $j\in J$, $k\in K$, $n\in\mathbb{N}$, takva da:

a) μ_n je verovatnoća na M^n.

b) Svaka relacija i funkcija je merljiva.

c) Ako je $B\subseteq M^n$ μ_n-merljiv, tada je i $B\times M^m$ μ_{m+n}-merljiv.

d) μ_n se čuva permutovanjem indeksa. Ako je π permutacija skupa $\{1,2,\ldots,n\}$, tada:

$$(Px_1x_2\ldots x_n\geq r)\varphi \text{ akko } (Px_{\pi 1}x_{\pi 2}\ldots x_{\pi n}\geq r)$$

e) $(\mu_n \mid n\in\mathbb{N})$ ima Fubinijevo svojstvo: Ako je $B\subseteq M^{m+n}$ merljiv tada:

i) Skup $B(\bar{x})=\{\bar{y}\in M^m \mid \bar{x}\bar{y}\in B\}$ je μ_m-merljiv za svaki $\bar{x}\in M^n$

ii) Funkcija $f(\bar{x})=\mu_m(B(\bar{x}))$ je μ_n -merljiva.

iii) $\mu_{m+n}(B)=\int f(\bar{x})d\mu_n$.

1.3. AKSIOME I PRAVILA.

1.3.1. Definicija. Aksiome za slabu $L_{\mathbb{A}P}$ logiku su:

A1) Aksiome za $L_{\mathbb{A}}$ bez kvantifikatora.

A2) Monotonost $(P\bar{x}\geq r)\varphi \rightarrow (P\bar{x}\geq s)\varphi$, gde je $r\geq s$

A3) $(P\bar{x}\geq r)\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow (P\bar{y}\geq r)\varphi(\bar{y})$

A4) $(P\bar{x}\geq 0)\varphi$

A5) Konačna aditivnost:

a) $(P\bar{x}\geq r)\varphi \wedge (P\bar{y}\geq r)\psi \wedge (P\bar{x}\leq 0)(\varphi\wedge\psi) \rightarrow (P\bar{x}\geq r+s)(\varphi\vee\psi)$

b) $(P\bar{x}\leq r)\varphi \wedge (P\bar{x}\leq s)\psi \rightarrow (P\bar{x}\leq r+s)(\varphi\vee\psi)$

A6) Arhimedovo svojstvo:

$(P\bar{x}>r)\varphi \leftrightarrow \bigvee_n (P\bar{x}\geq r+\frac{1}{n})\varphi$

1.3.2. Definicija. Aksiome za graduiranu $L_{\mathbb{A}P}$ logiku su aksiome za slabu $L_{\mathbb{A}P}$ logiku i:

B1) σ-aditivnost : $\bigwedge_{\psi}(P\bar{x}\geq r)\bigwedge\psi \rightarrow (P\bar{x}\geq r)\bigwedge\Phi$ gde ψ prolazi skupom konačnih podskupova skupa formula Φ.

B2) Simetrija

$(Px_1x_2\ldots x_n\geq r)\varphi \Leftrightarrow (Px_{\pi1}x_{\pi2}\ldots x_{\pi n}\geq r)\varphi$ gde je π proizvoljn permutacija skupa $\{1,2,\ldots,n\}$.

B3) Nezavisnost proizvoda

$(P\bar{x}\geq r)(P\bar{y}\geq s)\varphi \rightarrow (P\bar{x}\bar{y}\geq rs)\varphi$ gde su nizovi promenljivih $\bar{x}$ i $\bar{y}$ disjunktni.

1.3.3. Definicija. Aksiome za $L_{\mathbb{A}P}$ su aksiome za graduiranu $L_{\mathbb{A}P}$ kao i sledeća aksioma:

B4) Merljivost proizvoda:

$(P\bar{x}\geq 1)(P\bar{y}>0)(P\bar{z}\geq r)(\varphi(\bar{x},\bar{z}) \leftrightarrow \varphi(\bar{y},\bar{z}))$, gde su $\bar{x}$ i $\bar{y}$ disjunktni nizovi promenljivih i $r<1$ nenegativan realan broj.

1.3.4. Definicija. Aksiome za apsolutno neprekidnu $L_{\mathbb{A}P_1P_2}$ logiku su sve aksiome za logiku $L_{\mathbb{A}P}$, po obadva kvantora P_1 i P_2, i dodatna aksioma:

$$\bigwedge_{\varepsilon}\bigvee_{\delta}\bigwedge_{n\in\mathbb{N}}\bigvee_{\varphi\in\Phi}((P_2\bar{x}\leq\delta)\varphi \rightarrow (P_1\bar{x}\leq\varepsilon)\varphi)$$

gde je $\Phi=\cup\Phi_n$, $\Phi,\Phi_n\in\mathbb{A}$ i :

$\Phi_n=\{\varphi\in\Phi \mid \varphi$ ima n slobodnih promenljivih$\}$

1.3.5. Definicija. Aksiome za singularnu $L_{\mathbb{A}P_1P_2}$ logiku su sve aksiome za logiku $L_{\mathbb{A}P}$, po obadva kvantora, i dodatna aksioma

$$(P_ix=0)((P_1y>0)(x=y)\wedge(P_2y>0)(x=y)) \quad \text{za } i=1,2.$$

Sve dosad uvedene probabilističke logike imaju ista pravila izvođenja. To sa pravila :

(R1) Modus ponens: $\dfrac{\varphi,\varphi\rightarrow\psi}{\psi}$

(R2) Konjukcija: $\dfrac{\{\psi\rightarrow\varphi \mid \varphi\in\Phi\}}{\psi\rightarrow\bigwedge\Phi}$

(R3) Generalizacija: $\dfrac{\varphi\rightarrow\psi(x)}{\varphi\rightarrow(Px\geq 1)\psi(x)}$

Na uobičajen način uvodi se pojam izvođenja formule φ iz skupa rečenica Φ, $\Phi\vdash\varphi$, kao i $\vdash\varphi$; $\Phi\vdash\varphi$; $\vdash\varphi$. Važi teorema dedukcije:

1.3.6. Teorema. Ako je φ rečenica i $\Phi\cup\{\varphi\}\vdash\psi$, tada $\Phi\vdash\varphi\rightarrow\psi$.

1.4. TEOREME KOMPLETNOSTI.

1.4.1. Teorema. Skup rečenica Φ je konzistentan u slaboj $L_{\mathbb{A}P}$ logici akko ima slab model.

1.4.2. Teorema. Skup rečenica Φ je konzistentan u graduiranoj $L_{\mathbb{A}P}$ logici akko ima graduiran model.

1.4.3. Teorema. Skup rečenica Φ je konzistentan u $L_{\mathbb{A}P}$ logici akko ima model.

Važi i jači rezultat od teoreme 1.4.3. ukoliko se ograničimo na analitičke strukture, tj. strukture čiji je domen analitički skup realnih brojeva, čije su sve relacije i funkcije analitičke, a mera, osim možda u tačkama pozitivne mase, apsolutno neprekidna u odnosu na odgovarajuću restrikciju Lebegove mere. Pod Borelovom strukturom podrazumevamo analitičku strukturu čiji je domen Borelov skup realnih brojeva i čije su sve relacije i funkcije Borelove

1.4.4. Teorema. Skup rečenica Φ je konzistentan u $L_{\mathbb{A}P}$ logici akko ima analitički model.

Ukoliko jezik L ne sadrži funkcijske znake važi:

1.4.5. Teorema. Skup rečenica Φ je konzistentan u logici $L_{\mathbb{A}P}$ akko ima Borelov model.

Važe i teoreme kompletnosti za singularnu i apsolutno neprekidnu logiku $L_{\mathbb{A}P_1P_2}$:

1.4.6. Teorema. Skup rečenica Φ, složenosti Σ_1 nad $\mathbb{A}$, apsolutno neprekidne $L_{\mathbb{A}P_1P_2}$ logike ima apsolutno neprekidan model akko je konzistentan.

1.4.7. Teorema. Skup rečenica Φ, složenosti Σ_1 singularne

$L_{\mathbb{A}P_1P_2}$ logike ima singularan model akko je konzistentan.

Za probabilističke logike ne važi klasičan stav kompaktnosti, što pokazuje sledeći primer:

<u>1.4.8. Primer</u>. Neka je R relacijski znak jezika L (pretpostavljamo da postoji), posmatrajmo sledeći skup formula:

$$\Phi=\{(P\bar{x}>0)\varphi\} \cup \{(P\bar{x}\le \frac{1}{n})\varphi \mid n\in N\}$$

Svaki konačan podskup skupa Φ ima model, ali ceo skup Φ nema model.

Kao i za logiku $L_{\mathbb{A}}$ važe stavovi apstraktne(Barwise-ove) kompletnosti i kompaktnosti.

<u>1.4.9. Teorema</u>. Skup svih valjanih rečenica logike $L_{\mathbb{A}P}$ je složenosti Σ nad $\mathbb{A}$.

<u>1.4.10. Teorema</u>. Ako je skup Φ rečenica logike $L_{\mathbb{A}P}$ složenosti Σ nad $\mathbb{A}$ i svaki $\mathbb{A}$-konačan njegov podskup ima model, tada i sam skup Φ ima model.

<u>1.5. LÖEBOVA MERA</u>.

<u>1.5.1. Definicija</u>. Nestandardno raširenje univerzuma $V(X)$ je preslikavanje $*\ :\ V(X)\to V(Y)$, koje zadovoljava sledeće uslove:

a) ${}^*X=Y$, $X\subseteq Y$, ${}^*x=x$ za svaki $x\in X$.

b) Princip prenosa: $*$ čuva fomule sa ograničenim kvantorima. Ako je $\varphi(\bar{x})$ formula prvog reda jezika teorije skupova koja sadrži samo ograničene kvantore i $\bar{a}\in V(X)$, tada važi:

$$(V(X),\in)\models\varphi(\bar{a}) \text{ akko } (V({}^*X),\in)\models\varphi({}^*\bar{a}).$$

c) ω_1-zasićenost: Za svaki prebrojiv opadajući niz internalnih, nepraznih skupova $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ iz nekog ${}^*V_n(X)$ važi $\bigcap_n A_n \neq 0$.

$(V({}^*X), \in)$ zovemo nestandardni univerzum.

Nestandardno proširenje univerzuma se dobija klasičnim sredstvima teorije modela, ultrastepenovanjem ili tranzitivnim kolapsiranjem unije elementarnog lanca.

Pretpostavimo da je $(V({}^*U), \in)$ nestandardni univerzum, gde je U skup urelemenata. Po potrebi, možemo pretpostaviti da su neki objekti od značaja u daljnjem razmatranju urelementi; na primer prirodni brojevi, realni brojevi, simboli jezika L.

Neka je (M,S,μ) internalan skup u $(V({}^*U), \in)$. (M,S,μ) je hiperkonačno aditivan prostor verovatnoće ako je S polje podskupova skupa M zatvoreno za hiperkonačne, internalne preseke, $\mu : S \to {}^*[0,1]$ hiperkonačno aditivna funkcija i $\mu(M)=1$.

Löeb-ova mera hipermere μ je funkcija $\bar{\mu} : \sigma(S) \to \mathbb{R}$ definisana sa $\bar{\mu}(X) = st(\mu(X))$, pri čemu je $\sigma(S)$ σ-prsten generisan prstenom S, a 'st' standardni-deo preslikavanje. Sledeća teorema opravdava neformalni opis Löeb-ove mere.

1.5.2. Teorema. Löebova mera postoji i jedinstvena je.

1.5.3. Teorema. Neka $X \in \sigma(S)$.

i) Za svaki prirodan broj n postoje $Y, Z \in S$ takvi da je $Y \subseteq X \subseteq Z$ i $\mu(Z \setminus Y) < \frac{1}{n}$.

ii) Postoji $Y \in S$ takav da je $\bar{\mu}(X \Delta Y) = 0$.

2. KOMPLETNOST LOGIKE $L_{\mathbb{A}\exists}$

U ovom poglavlju uvešćemo logiku $L_{\mathbb{A}\exists}$ koja sadrži pored probabilističkih, egzistencijalni i univerzalni kvantor.

2.1. LOGIKA $L_{\mathbb{A}\exists}$.

2.1.1. Definicija. Logika $L_{\mathbb{A}\exists}$ sadrži sledeće logičke simbole

a) prebrojiv spisak promenljivih v_n, za $n\in\mathbb{N}$.

b) veznike $\neg$, $\bigwedge$ i $\bigvee$.

c) Kvantore $(P\bar{x}\geq r)$, $(P\bar{x}\leq r)$, $(P\bar{x}>r)$, $(P\bar{x}<r)$, $(\forall y)$, $(\exists y)$ gde je $\bar{x}$ n-torka $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ različitih promenljivih i r nenegativan realan broj.

d) Simbol jednakosti = .

2.1.2. Definicija. Skup formula logike $L_{\mathbb{A}\exists}$ je najmanji skup $Form(L_{\mathbb{A}\exists})$ koji sadrži sve atomične formule jezika L i zadovolj

a) Ako $\varphi\in Form(L_{\mathbb{A}\exists})$ tada i $\neg\varphi\in Form(L_{\mathbb{A}\exists})$.

b) Ako $\Phi\in\mathbb{A}$ i $\Phi\subseteq Form(L_{\mathbb{A}\exists})$, pri čemu formule iz Φ sadrže samo konačno mnogo promenljivih, tada i $\bigwedge\Phi\in Form(L_{\mathbb{A}\exists})$, $\bigvee\Phi\in Form(L_{\mathbb{A}\exists})$.

c) Ako $\varphi\in Form(L_{\mathbb{A}\exists})$ i $r\in\mathbb{A}$ je nenegativan realan broj, tada i $(P\bar{x}\geq r)\varphi$, $(P\bar{x}\leq r)\varphi$, $(P\bar{x}<r)\varphi$, $(P\bar{x}>r)\varphi$, $(\forall x)\varphi$ $(\exists y)\varphi\in Form(L_{\mathbb{A}\exists})$.

Rečenice su formule koje ne sadrže slobodne promenljive.

Na uobičajen način uvode se veznici $\leftrightarrow$, $\rightarrow$, $\wedge$, i $\vee$.

2.1.3. Definicija. $L_{\mathbb{A}\exists}$ struktura je struktura

$$\mathfrak{A}=(A,R_i^{\mathfrak{A}},f_j^{\mathfrak{A}},c_k^{\mathfrak{A}},\mu_n)_{i\in I,j\in J,k\in K,n\in\mathbb{N}}$$

pri čemu je μ_n konačna konačno aditivna mera na M^n, svaki singlton je merljiv, $\mu_n(M^n)>0$ i, uz prirodno definisanu relaciju zadovoljenja, za svaku formulu $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ i m-torku $\bar{a}\in M^m$ skup $\{\bar{b}\in M \mid \mathfrak{A}\models \varphi(\bar{a},\bar{b})\}$ je μ_n-merljiv.

2.1.4. Definicija. Za datu formulu φ logike $L_{A\exists}$, indukcijom po složenosti, definišemo formulu $\varphi\neg$:

a) φ je atomična. $\varphi\neg$ je $\neg\varphi$.

b) φ je $\neg\psi$. $\varphi\neg$ je ψ.

c) φ je $\bigwedge\Phi$. $\varphi\neg$ je $\bigvee\{\neg\varphi \mid \varphi\in\Phi\}$.

d) φ je $\bigvee\Phi$. $\varphi\neg$ je $\bigvee\{\neg\varphi \mid \varphi\in\Phi\}$.

e) φ je $(\exists x)\psi$. $\varphi\neg$ je $(\forall x)\neg\psi$.

f) φ je $(\forall x)\psi$. $\varphi\neg$ je $(\exists x)\neg\psi$.

g) φ je $(P\bar{x}\geq r)\psi$. $\varphi\neg$ je $(P\bar{x}<r)\psi$.

h) φ je $(P\bar{x}\leq r)\psi$. $\varphi\neg$ je $(P\bar{x}>r)\psi$.

i) φ je $(P\bar{x}<r)\psi$. $\varphi\neg$ je $(P\bar{x}\geq r)\psi$.

j) φ je $(P\bar{x}>r)\psi$. $\varphi\neg$ je $(P\bar{x}\leq r)\psi$.

2.2. DEDUKTIVNI APARAT

2.2.1. Definicija. Aksiome logike $L_{A\exists}$ su:

(A1) Sve formule dobijene zamenom iz tautologija.

(A2) $(\neg\varphi) \Leftrightarrow (\varphi\neg)$

(A3) $\bigwedge\Phi \Rightarrow \varphi$, za svaku formulu $\varphi\in\Phi$

(A4) $(\forall x)\varphi(x) \Rightarrow \varphi(t)$, gde je t term slobodan za x u φ.

(A5) $x=x$

(A6) $x=y \Rightarrow y=x$

(A7) $\varphi(x) \wedge x=t \Rightarrow \varphi(t)$, gde je t term slobodan za x u φ.

(A8) $(P\bar{x}\geq 0)\varphi$

(A9) $(P\bar{x}>0)\bar{x}=\bar{x}$

(A10) $(P\bar{x}\leq 0)\bar{x}\neq\bar{x}$

(A11) $(P\bar{x}\le r)\varphi \wedge (P\bar{x}\le s)\psi \to (P\bar{x}\le r+s)(\varphi\vee\psi)$

(A12) $(P\bar{x}\ge r)\varphi \wedge (P\bar{x}\ge s)\psi \wedge (P\bar{x}\le 0)(\varphi\wedge\psi) \to (P\bar{x}\ge r+s)(\psi\vee\varphi)$

(A13) $(P\bar{x}\ge r)\varphi \to (P\bar{x}\ge s)\varphi$, gde je $s\le r$

(A14) $(P\bar{x}\le r)\varphi \to (P\bar{x}\le s)\varphi$, gde je $r\le s$

(A15) $(P\bar{x}\ge r)\psi(\bar{x}) \leftrightarrow (P\bar{y}\ge r)\psi(\bar{y})$

(A16) $(P\bar{x}\le r)\psi(\bar{x}) \leftrightarrow (P\bar{y}\le r)\psi(\bar{y})$

(A17) $(P\bar{x}>r)\varphi \leftrightarrow \bigvee_n (P\bar{x}\ge r+\frac{1}{n})\varphi$

(A18) $(P\bar{x}<r)\varphi \leftrightarrow \bigvee_n (P\bar{x}\le r-\frac{1}{n})\varphi$

(A19) $\bigvee_r (P\bar{x}\le r)\varphi$

<u>2.2.2. Definicija</u>. Pravila izvođenja logike $L_{\mathbb{A}\exists}$ su:

(R1) Modus ponens: $\dfrac{\varphi,\ \varphi\to\psi}{\psi}$

(R2) Konjunkcija: $\dfrac{\{\psi\to\varphi \mid \varphi\in\Phi\}}{\psi\to\bigwedge\Phi}$

(R3) Generalizacija: $\dfrac{\psi\to\varphi(x)}{\psi\to(\forall x)\varphi(x)}$

(R4) $\dfrac{\varphi\to\psi}{(Px\ge r)\varphi\to(Px\ge r)\psi}$

(R5) $\dfrac{\psi\to\varphi}{(Px\le r)\varphi\to(Px\le r)\psi}$

Neka je $\Phi\subseteq Form(L_{\mathbb{A}\exists})$ i $\varphi\in Form(L_{\mathbb{A}\exists})$.

<u>2.2.3. Definicija</u>. Skup posledica skupa formula Φ je najmanji skup formula logike $L_{\mathbb{A}\exists}$ koji sadrži sve formule iz Φ, aksiome (A1)-(A19) i zatvoren je za pravila (R1)-(R5). $\Phi\vdash_{L_{\mathbb{A}\exists}}\varphi$ označava da je φ posledica skupa formula Φ. $\emptyset\vdash_{L_{\mathbb{A}\exists}}\varphi$ označavamo sa $\vdash_{L_{\mathbb{A}\exists}}\varphi$. Φ je konzistentan u $L_{\mathbb{A}\exists}$ ako ne postoji formula φ tako da $\Phi\vdash_{L_{\mathbb{A}\exists}}\varphi$ i $\Phi\vdash_{L_{\mathbb{A}\exists}}\neg\varphi$.

Kao i u $L_{\mathbb{A}}$ pokazuje se da Φ nije $L_{\mathbb{A}\exists}$-konzistentan akko $\Phi\vdash_{L_{\mathbb{A}\exists}} x\ne x$. Primetimo da $\Phi\vdash_{L_{\mathbb{A}\exists}}\varphi$ akko postoji niz $\varphi_0,\varphi_1,\ldots\ldots,\varphi_\xi=\varphi$, $\xi<\omega_1$, čiji je svaki član aksioma, formula iz Φ ili je dobijen iz prethodnih članova primenom nekog od pravila. Tako, važi teorema dedukcije:

<u>2.2.4. Teorema</u>. Neka je $\Phi\subseteq Form(L_{\mathbb{A}\exists})$, φ, $\psi\in Form(L_{\mathbb{A}\exists})$. Tada $\Phi\cup\{\varphi\}\vdash_{L_{\mathbb{A}\exists}}\psi$ akko $\Phi\vdash_{L_{\mathbb{A}\exists}}\varphi\rightarrow\psi$.

<u>2.2.5. Definicija</u>. φ je semantička posledica skupa formula Φ, $\Phi\models_{L_{\mathbb{A}\exists}}\varphi$, ako je φ zadovoljena u svakom modelu za Φ. $\emptyset\models_{L_{\mathbb{A}\exists}}\varphi$ označavamo sa $\models_{L_{\mathbb{A}\exists}}\varphi$, u ovom slučaju kažemo da je φ teorema logike $L_{\mathbb{A}\exists}$.

Neka je C skup konstantnih simbola i $C\cap L=\emptyset$. Proširimo jezik L do jezika $M=L\cup C$ i formirajmo odgovarajuću logiku $M_{\mathbb{A}\exists}$. Za formulu φ logike $L_{\mathbb{A}\exists}$ i skup $\Phi\subseteq Form(L_{\mathbb{A}\exists})$ važi:

(1) $\varphi\in Form(M_{\mathbb{A}\exists})$

(2) φ je aksioma logike $L_{\mathbb{A}\exists}$ akko je φ aksioma logike $M_{\mathbb{A}\exists}$.

(3) φ je izvedena iz Φ primenom nekog od pravila logike $L_{\mathbb{A}\exists}$ akko je φ izvedena iz Φ primenom nekog od pravila logike $M_{\mathbb{A}\exists}$.

Iz (1),(2) i (3) sledi da ako je niz $\varphi_0,\varphi_1,\ldots\ldots,\varphi_\xi=\varphi$ dokaz u $L_{\mathbb{A}\exists}$ za φ iz Φ tada je on dokaz i u $M_{\mathbb{A}\exists}$ za φ iz Φ. Time smo dokazali:

<u>2.2.6. Lema</u>. Neka $\varphi\in Form(L_{\mathbb{A}\exists})$ i $\Phi\subseteq Form(L_{\mathbb{A}\exists})$. Ako $\Phi\vdash_L\varphi$ tada $\Phi\vdash_{M_{\mathbb{A}\exists}}\varphi$.

U nekim slučajevima važi i obrnuto tvrđenje:

<u>2.2.7. Lema</u>. Neka je C konačan skup novih konstantnih simbola, $M=L\cup C$, $\varphi\in Form(L_{\mathbb{A}\exists})$, $\Phi\subseteq Form(L_{\mathbb{A}\exists})$ i $\Phi\vdash_{M_{\mathbb{A}\exists}}\varphi$. Tada $\Phi\vdash_{L_{\mathbb{A}\exists}}\varphi$.

Dokaz: Pretpostavimo da je $C=\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$. Neka je dalje niz $\varphi_0,\varphi_1,\ldots\ldots,\varphi_\xi=\varphi$ dokaz u $M_{\mathbb{A}\exists}$ za φ iz Φ. Kako je skup promenljivih jezika M beskonačan, možemo pretpostaviti da promenljive $v_1,v_2,\ldots,v_n$ ne uučestvuju ni u jednoj od formula

$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\xi$. Neka je ψ_α, za svaki $\alpha\leq\xi$, formula jezika L dobijena zamenom u φ_α svakog pojavljivanja konstante c_j promenljivom v_j, za $j=1,2,\ldots,n$. Važi:

(1) Ako je φ_α aksioma logike $M_{\mathbb{A}\exists}$ tada je ψ_α aksioma $L_{\mathbb{A}\exists}$.

(2) Ako $\varphi_\alpha\in\Phi$ tada $\psi_\alpha\in\Phi$.

(3) Ako je $A\subseteq\xi+1$, $\alpha\leq\xi$ i φ_α je dobijena iz $\{\varphi_\nu|\nu\in A\}$ primenom nekog od pravila logike $M_{\mathbb{A}\exists}$, tada je ψ_α je dobijena iz $\{\psi_\nu|\nu\in A\}$ primenom nekog od pravila logike $L_{\mathbb{A}\exists}$.

Iz (1),(2) i (3) sledi da je $\psi_0,\psi_1,\ldots,\psi_\xi=\varphi$ dokaz u $L_{\mathbb{A}\exists}$ za φ iz Φ. Znači $\Phi\vdash_{L_{\mathbb{A}\exists}}\varphi$.

2.2.8. Posledica. Neka je C konačan skup novih konstantnih simbola, $M=L\cup C$, $\Phi\subseteq Form(L_{\mathbb{A}\exists})$. Φ je $L_{\mathbb{A}\exists}$-konzistentan akko je $M_{\mathbb{A}\exists}$-konzistentan.

2.2.9. Lema. Ako je $\Phi\subseteq Form(L_{\mathbb{A}\exists})$-konzistentan i $\Phi\cup\{\varphi\}$ nije konzistentan tada $\Phi\vdash_{L_{\mathbb{A}\exists}}\neg\varphi$.

2.2.10. Lema. Ako je $\Phi\subseteq Form(L_{\mathbb{A}\exists})$ $L_{\mathbb{A}\exists}$-konzistentan tada je bar jedan od skupova $\Phi\cup\{\varphi\}$, $\Phi\cup\{\neg\varphi\}$ $L_{\mathbb{A}\exists}$-konzistentan.

2.3. TEOREMA KOMPLETNOSTI.

U ovom delu $C=\{c_n|n\in N\}$ jeskup novih konstantnih simbola i $M=L\cup C$. Kako su L i C prebrojivi i M je prebrojiv, pa je i $Form(M_{\mathbb{A}\exists})$ prebrojiv. Možemo pretpostaviti da je $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n,\ldots$ niz svih rečenica logike $M_{\mathbb{A}\exists}$ i $t_0,t_1,\ldots,t_n,\ldots$ niz svih terma jezika M.

2.3.1. Lema. Neka je $\Phi\subseteq Form(L_{\mathbb{A}\exists})$ $L_{\mathbb{A}\exists}$-konzistentan. Postoji niz podskupova skupa $Form(M_{\mathbb{A}\exists})$ $\Phi_0,\Phi_1,\ldots$ i niz $C_0,C_1,\ldots$ konačnih podskupova skupa C tako da su za svaki prirodan broj n ispunjeni sledeći uslovi:

(1) $\Phi_0=\Phi$, $C_0=\emptyset$, $\Phi_n\subseteq\Phi_{n+1}$, $C_n\subseteq C_{n+1}$.

(2) $\Phi_n\subseteq Form(M^n_{\mathbb{A}\exists})$, gde je $M^n=L\cup C_n$.

(3) t_n je term jezika M^n.

(4) Φ_n je $M^n_{\mathbb{A}\exists}$-konzistentan.

(5) $\varphi_n\in\Phi_n$ ili $\neg\varphi_n\in\Phi_n$.

(6) Ako $\varphi_n\in\Phi_n$ i φ_n je $\bigvee\Psi$, tada za neku formulu $\psi\in\Psi$ $\psi\in\Phi_n$.

(7) Ako $\varphi_n\in\Phi_n$ i φ_n je $(\exists x)\psi(x)$ tada za neku konstantu $c\in C_n$, $\psi(c)\in\Phi_n$.

(8) Za neku konstantu $c\in C_n$ $(c=t_n)\in\Phi_n$.

Dokaz: Konstrukciju vršimo induktivno. Pretpostavimo da su Φ_n i C_n konstruisani i da su uslovi (1)-(8) ispunjeni.

Neka je C'_n skup svih novih konstanti koje učestvuju u φ_{n+1} ili u t_{n+1}. Kako je C beskonačan, a C i C_n konačni, postoje $d,e\in C\setminus C'_n\setminus C_n$ tako da je $d\neq e$. Stavimo $C''_n=C_n\cup C'_n\cup\{d\}$. Po 2.2.8. Φ_n je $(L\cup C''_n)_{\mathbb{A}\exists}$-konzistentan.

Označimo sa Φ'_n skup $\Phi_n\cup\{t_{n+1}=d\}$.

<u>Tvrđenje 1</u>: Φ'_n je $(L\cup C''_n)_{\mathbb{A}\exists}$-konzistentan.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno. Tada po lemi 2.2.9. $\Phi_n\vdash\neg(t_{n+1}=d)$. Neka je $\psi_0,\psi_1,\dots,\psi_\xi$ dokaz za $\neg(t_{n+1}=d)$. Pretpostavimo da promenljiva v_1 ne učestvuje ni u jednoj od formula ψ_α za $\alpha\leq\xi$. Neka je χ_α, za $\alpha\leq\xi$, formula dobijena zamenom u ψ_α svakog pojavljivanja konstante d promenljivom v_1. Tada je $\chi_0,\chi_1,\dots,\chi_\xi$ dokaz za $\neg(t_{n+1}=v_1)$ u $(L\cup C'_n)_{\mathbb{A}\exists}$. Po lemi 2.2.6. $\Phi_n\vdash(\forall v_1)\neg(t_{n+1}=v_1)$. Kako $\Phi_n\vdash(\exists v_1)(t_{n+1}=v_1)$ zaključujemo da je Φ_n protivrečan. Kontradikcija.

Slučaj 1: $\Phi'_n\cup\{\neg\varphi_{n+1}\}$ je $(L\cup C''_n)_{\mathbb{A}\exists}$-konzistentan.

Stavimo $C_{n+1}=C''_n$, $\Phi_{n+1}=\Phi'_n\cup\{\neg\varphi_{n+1}\}$. Uslovi (1)-(3) tvrđenja leme su zadovoljeni konstrukcijom C_{n+1}, uslov (4) pretpostavkom $(L\cup C''_n)_{\mathbb{A}\exists}$-konzistentnosti $\Phi'_n\cup\{\neg\varphi_{n+1}\}$, uslov (5) je zadovoljen jer $\neg\varphi_{n+1}\in\Phi_{n+1}$, uslovi (6) i (7) jer $\varphi_{n+1}\notin\Phi_{n+1}$, uslov (8) jer $(d=t_{n+1})\in\Phi'_n$. Time je u ovom slučaju lema dokazana.

Slučaj 2: $\Phi'_n\cup\{\neg\varphi_{n+1}\}$ nije $(L\cup C''_n)_{\mathbb{A}\exists}$-konzistentan.

Po lemi 2.2.10. $\Phi'_n\cup\{\varphi_{n+1}\}$ je $(L\cup C''_n)_{\mathbb{A}\exists}$-konzistentan. Označimo $\Phi'_n\cup\{\varphi_{n+1}\}$ sa Φ''_n. Ukoliko φ_{n+1} nije oblika $\bigvee\Psi$ ili $(\exists x)\psi(x)$ $C_{n+1}=C''_n$ i $\Phi_{n+1}=\Phi''_n$ zadovoljavaju tvrđenje leme.

a) φ_{n+1} je $\bigvee\Psi$.

Stavimo $C_{n+1}=C''_n$. Dovoljno je dokazati da je za neko $\psi\in\Psi$ skup $\Phi''_n\cup\{\psi\}$ $M^{n+1}_{\mathbb{A}\exists}$-konzistentan, u tom slučaju $\Phi_{n+1}=\Phi''_n\cup\{\psi\}$ zadovoljava tvrđenje leme.

<u>Tvrđenje 2</u>: Za neko $\psi\in\Psi$, $\Phi''_n\cup\{\psi\}$ je $M^{n+1}_{\mathbb{A}\exists}$-konzistentan.

Dokaz: Pretpostavimo da je $\Phi''_n\cup\{\psi\}$ protivrečan za svaku formulu $\psi\in\Psi$. Tada, po lemi 2.2.10. $\Phi''_n\cup\{\neg\psi\mid\psi\in\Psi\}$ je konzistentan, pa je i $\Phi''_n\cup\{\bigwedge\neg\psi\mid\psi\in\Psi\}$ konzistentan. Odavde $\Phi''_n\cup\{\neg\bigvee\Psi\}$ je konzistentan. Ali $\bigwedge\Psi\in\Phi''_n$. Kontradikcija.

b) φ_{n+1} je $(\exists x)\psi(x)$.

Stavimo $C_{n+1}=C''_n\cup\{e\}$, $\Phi_{n+1}=\Phi''_n\cup\{\psi(e)\}$. Dovoljno je dokazati:

<u>Tvrđenje 3</u>: Φ_{n+1} je $M^{n+1}_{\mathbb{A}\exists}$-konzistentan.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno. Po lemi 2.2.9. $\Phi''_n\vdash\neg\psi(e)$. Neka je $\psi_0,\psi_1,\ldots,\psi_\xi$ dokaz za $\neg\psi(e)$ u kome promenljiva v_1 ne učestvuje. Sada zamenom svakog pojavljivanja konstante e promenljivom v_1 u dokazu $\psi_0,\psi_1,\ldots,\psi_\xi$ dobijamo dokaz za $\neg\psi(v_1)$. Tako $\Phi''_n\vdash(\forall v_1)\neg\psi(v_1)$. Kako $(\exists v_1)\psi(v_1)\in\Phi''_n$ dobijamo da je Φ''_n protivrečan. Kontradikcija.

Ovako definisani C_{n+1} i Φ_{n+1} zadovoljavaju sve uslove tvrđenja leme, čime je lema dokazana.

Neka nizovi $\Phi=\Phi_0\subseteq\Phi_1\subseteq\Phi_2\subseteq\ldots$ i $\emptyset=C_0\subseteq C_1\subseteq C_2\subseteq\ldots$ zadovoljavaju tvrđenje leme 2.3.1. i $\Phi_\omega=\bigcup_n\Phi_n$. Φ_ω ima sledeće osobine:

Za svaku formulu φ jezika M koja sadrži konačno mnogo simbola iz C, svaki term t i svaki prirodan broj n važi:

(1) $\varphi\in\Phi_\omega$ akko $\neg\varphi\notin\Phi_\omega$

(2) Postoji konstanta $c\in C$ takoda $(t=c)\in\Phi_\omega$.

(3) $\Phi_\omega\cap Form((L\cup\{c_1,c_2,\dots,c_n\})_{\mathbb{A}\exists}$ je konzistentan.

(4) Ako $(\exists x_1x_2\dots x_n)\varphi(\bar{x})\in\Phi_\omega$ tada $\varphi(c_1,c_2,\dots,c_n)\in\Phi_\omega$ za neke $c_1,c_2,\dots,c_n\in C$.

(5) Ako $\bigvee\Psi\in\Phi_\omega$ tada $\psi\in\Phi_\omega$ za neku $\psi\in\Psi$.

Na skupu C definišimo relaciju $\approx$:

$$c\approx d \quad \text{akko} \quad (c=d)\in\Phi_\omega.$$

<u>2.3.2. Lema</u>. $\approx$ je relacija ekvivalencije.

Dokaz: Dokazaćemo prvo tranzitivnost, zato pretpostavimo da $c,d,e,\in C$, $(c=d)\in\Phi_\omega$, $(d=e)\in\Phi_\omega$. $(x=y)\wedge(y=z)\rightarrow(x=z)$ je aksioma (A7) za $\varphi(y)$ je $(x=y)$. Koristeći (A7) i pravilo (R1) dobijamo $\vdash_{L_{\mathbb{A}\exists}}(c=d)\wedge(d=e)\rightarrow(c=e)$. Kako $(c=e)\in Form(L_{\mathbb{A}\exists})$ postoji $n\in\mathbb{N}$ tako da je φ_n formula $(c=e)$. Neka je $m\geq n$ tako da $(c=d),(d=e)\in\Phi_m$. Zbog $\vdash_{L_{\mathbb{A}\exists}}(c=d)\wedge(d=e)\rightarrow(c=e)$ imamo $\Phi_m\vdash_{L_{\mathbb{A}\exists}}(c=e)$, pa kako je Φ_m konzistentan i $\varphi_n\in\Phi_m$ ili $\neg\varphi_n\in\Phi_m$ mora $(c=e)\in\Phi_m$. Analogno iz (A5) se dobija refleksivnost, iz (A6) simetrija.

U narednom nizu lema konstruisaćemo $M_{\mathbb{A}\exists}$-strukturu koja će ujedno biti model za Φ. Neka je $A=C/\approx$.

<u>2.3.3. Lema</u>. Neka je R relacijski simbol dužine n. Uslovom:

$$R^{\mathfrak{A}}(c_1/\approx,c_2/\approx,\dots c_n/\approx) \quad \text{akko} \quad R(c_1,c_2,\dots,c_n)\in\Phi_e$$

definisana je relacija na skupu A.

Dokaz: Neka je $c_1/\approx=d_1/\approx,c_2/\approx=d_2/\approx,\dots,c_n/\approx=d_n/\approx$, odnosno $(c_1=d_1)\in\Phi_\omega$, $(c_2=d_2)\in\Phi_\omega,\dots,(c_n=d_n)\in\Phi_\omega$. Iz (A4), (A6) i (A7) imamo $\vdash R(c_1,c_2,\dots,c_n)\leftrightarrow R((d_1,d_2,\dots,d_n)$. Odavde, zbog konzistentnosti Φ_ω i uslova (1), dobijamo:

$$R(c_1,c_2,\dots,c_n)\in\Phi_\omega \quad \text{akko} \quad R(d_1,d_2,\dots,d_n)\in\Phi_\omega$$

Znači: $R(c_1/\approx, c_2/\approx, \dots, c_n/\approx)$ akko $R(d_1/\approx, d_2/\approx, \dots, d_n/\approx)$, što je i trebalo dokazati.

<u>2.3.4. Lema</u>: Neka je f funkcijski znak dužine n. Uslovom:

$$f^{\mathfrak{A}}(c_1/\approx, c_2/\approx, \dots c_n/\approx) = c/\approx \text{ akko } f^{\mathfrak{A}}(c_1, c_2, \dots, c_n) = c \in \Phi_\omega$$

definisana je funkcija $f^{\mathfrak{A}}: A^n \to A$.

Dokaz: Neka je $c_1/\approx = d_1/\approx, c_2/\approx = d_2/\approx, \dots, c_n/\approx = d_n/\approx$, odnosno $(c_1=d_1)\in\Phi_\omega$, $(c_2=d_2)\in\Phi_\omega, \dots, (c_n=d_n)\in\Phi_\omega$. Po uslovu (2) postoje $c, d \in C$ tako da $(f(c_1, c_2, \dots, c_n)=c)\in\Phi_\omega$, $(f(d_1, d_2, \dots, d_n)=d)\in\Phi_\omega$. Zbog $(c_1=d_1)\in\Phi_\omega$, $(c_2=d_2)\in\Phi_\omega, \dots, (c_n=d_n)\in\Phi_\omega$, iz (A4) i (A7) mora biti $(f(c_1, c_2, \dots, c_n)=f(d_1, d_2, \dots, d_n))\in\Phi_\omega$. Odavda dobijamo $(c=d)\in\Phi_\omega$, odnosno $c/\approx = d/\approx$, pa je $f^{\mathfrak{A}}$ dobro definisana.

Neka $Form^n(M_{\mathbb{A}\exists})$ označava skup svih formula φ jezika M koje imaju n slobodnih promenljivih $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, i neka je:

$$E^n_\varphi = \{(c_1/\approx, c_2/\approx, \dots c_n/\approx) \mid \varphi(c_1, c_2, \dots, c_n)\in\Phi_\omega\}$$

$$S_n = \{E^n_\varphi \mid \varphi\in Form^n(M_{\mathbb{A}\exists})\}.$$

<u>2.3.5. Lema</u>. S_n je prsten podskupova od A^n.

Dokaz: $\emptyset\in S_n$, jer je za φ $\bar{x}\neq\bar{x}$, $E^n_\varphi=\emptyset$, $E^n_\varphi \cap E^n_\psi = E^n_{\varphi\wedge\psi}$ važi jer $\varphi(c_1, c_2, \dots, c_n)\in\Phi_\omega$ i $\psi(c_1, c_2, \dots, c_n)\in\Phi_\omega$ akko $(\varphi\wedge\psi)(c_1, c_2, \dots, c_n)\in\Phi_\omega$. Zbog (1) je $\varphi(c_1, c_2, \dots, c_n)\in\Phi_\omega$ akko $\neg\varphi(c_1, c_2, \dots, c_n)\notin\Phi_\omega$, pa je $E^n_{\neg\varphi} = A^n \setminus E^n_\varphi$. Znači S_n je prsten.

<u>2.3.6. Lema</u>. Sa $\mu_n(E^n_\varphi) = \sup\{r \mid (P\bar{x}\geq r)\varphi\in\Phi_\omega\}$ je definisana funkcija $\mu_n: S_n \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$.

Dokaz: Po (A8) $0\in\{r \mid (P\bar{x}\geq r)\varphi\in\Phi_\omega\}$, pa je $\mu_n(E^n_\varphi)\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Neka je $E^n_\varphi = E^n_\psi$. Tvrdimo da $(\forall\bar{x})(\varphi(\bar{x})\leftrightarrow\psi(\bar{x}))\in\Phi_\omega$. U suprotnom $\neg(\varphi(\bar{x})\leftrightarrow\psi(\bar{x}))\in\Phi_\omega$, pa $(\exists\bar{x})(\varphi(\bar{x})\wedge\neg\psi(\bar{x}))\vee(\exists\bar{x})(\neg\varphi(\bar{x})\wedge\psi(\bar{x}))\in\Phi_\omega$. Po (5), $(\exists\bar{x})(\varphi(\bar{x})\wedge\neg\psi(\bar{x}))\in\Phi_\omega$ ili $(\exists\bar{x})(\neg\varphi(\bar{x})\wedge\psi(\bar{x}))\in\Phi_\omega$. Neka važi prvi slučaj. Iz (4) dobijamo $\neg\psi(c_1, c_2, \dots, c_n)\in\Phi_\omega$ i $\varphi(c_1, c_2, \dots, c_n)\in\Phi_\omega$ za neke $c_1, c_2, \dots, c_n\in C$. Iz (1) dobijamo

$\psi(c_1,c_2,\dots,c_n)\notin\Phi_\omega$. Znači $(c_1/\approx,c_2/\approx,\dots c_n/\approx)\in E^n_\varphi$ ali $(c_1/\approx,c_2/\approx,\dots c_n/\approx)\notin E^n_\psi$. Kontradikcija. Zaključujemo da važi $(\forall\bar{x})(\varphi(\bar{x})\leftrightarrow\psi(\bar{x}))\in\Phi_\omega$ pa i $\Phi_\omega\vdash\varphi(\bar{x})\leftrightarrow\psi(\bar{x})$. Odavde, prema (R4),

$\Phi_\omega\vdash(P\bar{x}\geq r)\psi(\bar{x})\rightarrow(P\bar{x}\geq r)\varphi(\bar{x})$

$\Phi_\omega\cup\{(P\bar{x}\geq r)\psi(\bar{x})\}\vdash(P\bar{x}\geq r)\varphi(\bar{x})$

Analogno se dobija i $\Phi_\omega\cup\{(P\bar{x}\geq r)\varphi(\bar{x})\}\vdash(P\bar{x}\geq r)\psi(\bar{x})$.

Tako dobijamo $(P\bar{x}\geq r)\varphi(\bar{x})\in\Phi_\omega$ akko $(P\bar{x}\geq r)\psi(\bar{x})\in\Phi_\omega$, što je ekvivalentno sa $\mu_n(E^n_\varphi)=\mu_n(E^n_\psi)$, pa je $\mu_n:S_n\rightarrow\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ funkcija.

2.3.7. Lema a) $(P\bar{x}\geq r)\varphi\notin\Phi_\omega$ akko $(P\bar{x}<r)\varphi\in\Phi_\omega$.

b) $(P\bar{x}\leq r)\varphi\notin\Phi_\omega$ akko $(P\bar{x}>r)\varphi\in\Phi_\omega$.

Dokaz: Zbog simetrije dovoljno je dokazati samo a).

a) Zbog (1) je $(P\bar{x}\geq r)\varphi\notin\Phi_\omega$ akko $\neg(P\bar{x}\geq r)\varphi\in\Phi_\omega$

Zbog (2) je $\Phi_\omega\vdash\neg(P\bar{x}\geq r)\leftrightarrow(P\bar{x}>r)\varphi$, pa je:

$\neg(P\bar{x}\geq r)\varphi\in\Phi_\omega$ akko $(P\bar{x}<r)\varphi\in\Phi_\omega$.

Odavde zaključujemo:

$(P\bar{x}\geq r)\varphi\notin\Phi_\omega$ akko $(P\bar{x}<r)\varphi\in\Phi_\omega$

što je i trebalo dokazati.

2.3.8. Lema. $(P\bar{x}\leq r)\varphi\notin\Phi_\omega$ akko za neko $n\in\mathbb{N}$ $(P\bar{x}\geq r+\frac{1}{n})\varphi\in\Phi_\omega$.

Dokaz: Prema lemi 2.3.7. važi: $(P\bar{x}\leq r)\varphi\notin\Phi_\omega$ akko $(P\bar{x}>r)\varphi\in\Phi_\omega$.

Po (A17) je $\vdash(P\bar{x}>r)\varphi\leftrightarrow\bigvee_n(P\bar{x}\geq r+\frac{1}{n})\varphi$

Iz prethodnog imamo

$(P\bar{x}>r)\varphi\in\Phi_\omega$ akko za neko $n\in\mathbb{N}$ $(P\bar{x}\geq r+\frac{1}{n})\varphi\in\Phi_\omega$.

Po osobini (5) važi:

$(P\bar{x}>r)\varphi\in\Phi_\omega$ akko $(P\bar{x}\geq r+\frac{1}{n})\varphi\in\Phi_\omega$ za neko $n\in\mathbb{N}$

Iz prethodnog zaključujemo:

$(P\bar{x}\leq r)\varphi\notin\Phi_\omega$ akko za neko $n\in\mathbb{N}$ $(P\bar{x}\geq r+\frac{1}{n})\varphi\in\Phi_\omega$

što je i trebalo dokazati.

2.3.9. Lema. Za realne nenegativne brojeve $r\leq s$ važi:

$(P\bar{x}\leq s)\varphi\in\Phi_\omega$ ili $(P\bar{x}\geq r)\varphi\in\Phi_\omega$.

Dokaz: Predpostavimo da $(P\bar{x}\leq s)\varphi\in\Phi_\omega$. Po lemi 2.3.8. za neki $n\in\mathbb{N}$ $(P\bar{x}\geq s+\frac{1}{n})\varphi\in\Phi_\omega$, pa kako je $s+\frac{1}{n}\geq r$ po (A13) dobijamo $(P\bar{x}\geq r)\varphi\in\Phi_\omega$. Znači $(P\bar{x}\leq s)\varphi\in\Phi_\omega$ ili $(P\bar{x}\geq r)\varphi\in\Phi_\omega$.

<u>2.3.10. Lema</u>. Za realne brojeve $r<s$ važi:

$$(P\bar{x}<s)\varphi\in\Phi_\omega \quad \text{ili} \quad (P\bar{x}>r)\varphi\in\Phi_\omega.$$

Dokaz: Predpostavimo da $(P\bar{x}<s)\varphi\notin\Phi_\omega$. Po lemi 2.3.7. $(P\bar{x}\geq s)\varphi\in\Phi_\omega$. Izaberimo $n\in\mathbb{N}$ tako da je $r<r+\frac{1}{n}<s$. Iz (A13) dobijamo $(P\bar{x}\geq r+\frac{1}{n})\varphi\in\Phi_\omega$, pa po lemi 2.3.8. $(P\bar{x}\leq r)\varphi\notin\Phi_\omega$. Odavde po lemi 2.3.7. $(P\bar{x}>r)\varphi\in\Phi_\omega$. Zaključujemo:

$$(P\bar{x}<s)\varphi\in\Phi_\omega \quad \text{ili} \quad (P\bar{x}>r)\varphi\in\Phi_\omega.$$

<u>2.3.11. Lema</u>. $\mu_n(E^n_\varphi) = \inf\{s \,|\, (P\bar{x}\leq s)\varphi\in\Phi_\omega\}$.

Dokaz: Prvo dokažimo:

$$\sup\{r \,|\, (P\bar{x}\geq r)\varphi\in\Phi_\omega\} \geq \inf\{s \,|\, (P\bar{x}\geq s)\varphi\in\Phi_\omega\}$$

Pretpostavimo suprotno. Tada za neke realne brojeve $r<s$ važi:

$$(P\bar{x}\geq r)\varphi\in\Phi_\omega \quad \text{i} \quad (P\bar{x}\leq s)\varphi\in\Phi_\omega$$

Po lemi 2.3.7. važi $(P\bar{x}>r)\varphi\notin\Phi_\omega$ i $(P\bar{x}<s)\varphi\notin\Phi_\omega$, što protivreči lemi 2.3.10. Znači:

$$\mu_n(E^n_\varphi) \leq \inf\{s \,|\, (P\bar{x}\geq s)\varphi\in\Phi_\omega\}$$

Predpostavimo da je $\mu_n(E^n_\varphi) < \inf\{s \,|\, (P\bar{x}\geq s)\varphi\in\Phi_\omega\}$.

Tada postoji realan broj r za koji važi:

$$\mu_n(E^n_\varphi) < r < \{s \,|\, (P\bar{x}\geq s)\varphi\in\Phi_\omega\}$$

Odavde je $(P\bar{x}\leq r)\varphi\notin\Phi_\omega$ i $(P\bar{x}\geq r)\varphi\notin\Phi_\omega$, što protivreči lemi 2.3.9.

<u>2.3.12. Lema</u>. $\mu_n : S_n \to \mathbb{R}$.

Dokaz: $\mu_n(E^n_\varphi)\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ po lemi 2.3.6. Po lemi 2.3.10. $\mu_n(E^n_\varphi)<\infty$.

<u>2.3.13. Lema</u>. μ_n je konačna konačno aditivna mera na M^n.

Dokaz: Iz (A10) i leme 2.3.10. $\mu_n(\emptyset)=0$. Prema aksiomi (A19) μ_n je konačna funkcija, pa nam preostaje da pokažemo da je μ_n konačno aditivna.

Neka je $E^n_\varphi\cap E^n_\psi=\emptyset$. Važi:

$\varphi(c_1,c_2,\dots,c_n)\in\Phi_\omega$ ili $\psi(c_1,c_2,\dots,c_n)\in\Phi_\omega$ akko $(\varphi\vee\psi)(c_1,c_2,\dots,c_n)\in\Phi_\omega$. Odavde $E^n_\varphi\cup E^n_\psi=E^n_{\varphi\vee\psi}$, pa je dovoljno dokazati da je $\mu_n(E^n_\varphi)+\mu_n(E^n_\psi)=\mu_n(E^n_{\varphi\vee\psi})$.

Po (A17), ako $(P\bar{x}\le r)\varphi\in\Phi_\omega$ i $(P\bar{x}\le s)\varphi\in\Phi_\omega$ tada $(P\bar{x}\le r+s)\varphi\in\Phi_\omega$.

Odavde dobijamo:

$$\inf\{s\,|\,(P\bar{x}\le s)\varphi\in\Phi_\omega\}+\inf\{s\,|\,(P\bar{x}\le s)\psi\in\Phi_\omega\}\le\inf\{s\,|\,(P\bar{x}\le s)(\varphi\vee\psi)\in\Phi_\omega\},$$

odnosno: $\mu_n(E^n_\varphi)+\mu_n(E^n_\psi)\le\mu_n(E^n_{\varphi\vee\psi})$.

Iz $E^n_\varphi\cap E^n_\psi=\emptyset$, kao i u lemi 2.3.6. dobijamo $\varphi(\bar{x})\wedge\psi(\bar{x})\to\bar{x}\ne\bar{x}\in\Phi_\omega$.

Odavde po pravilu (R5) $(P\bar{x}\le 0)(\psi(\bar{x})\wedge\varphi(\bar{x}))\in\Phi_\omega$.

Iz (A12) $\vdash(P\bar{x}\ge r)\varphi\wedge(P\bar{x}\ge s)\psi\wedge(P\bar{x}\le 0)(\varphi\wedge\psi)\to(P\bar{x}\ge r+s)(\psi\vee\varphi)$.

Kako $(P\bar{x}\ge r)\varphi\in\Phi_\omega$, $(P\bar{x}\ge s)\varphi\in\Phi_\omega$, $(P\bar{x}\ge 0)\varphi\in\Phi_\omega$, zaključujemo:

$$(P\bar{x}\ge r+s)(\psi\vee\varphi)\in\Phi_\omega.$$

Time je dokazano:

$\sup\{r\,|\,(P\bar{x}\ge r)\varphi\in\Phi_\omega\}+\sup\{r\,|\,(P\bar{x}\ge r)\varphi\in\Phi_\omega\}\ge\sup\{r\,|\,(P\bar{x}\ge r)\varphi\in\Phi_\omega\}$

odnosno $\mu_n(E^n_\varphi)+\mu_n(E^n_\psi)\ge\mu_n(E^n_{\varphi\vee\psi})$. Zaključujemo:

$\mu_n(E^n_\varphi)+\mu_n(E^n_\psi)=\mu_n(E^n_{\varphi\vee\psi})$, čime je lema dokazana.

Definišimo $M_{A\exists}$-strukturu

$$\mathfrak{A}=(A,R_i^{\mathfrak{A}},f_j^{\mathfrak{A}},c_k^{\mathfrak{A}},\mu_n^{\mathfrak{A}})_{i\in I,j\in J,k\in K\cup N,n\in N}$$

na sledeći način:

$R_i^{\mathfrak{A}}(c_1/\approx,c_2/\approx,\dots,c_n/\approx)$ akko $R_i(c_1,c_2,\dots,c_n)\in\Phi_\omega$, $i\in I$

$f_j^{\mathfrak{A}}(c_1/\approx,c_2/\approx,\dots,c_n/\approx)=c/\approx$ akko $(f_j(c_1,c_2,\dots,c_n)=c)\in\Phi_\omega$, $j\in J$

$c/\approx$ je interpretacija konstanntnog simbola c_k akko $(c=c_k)\in\Phi_\omega$ pri čemu $k\in K\cup N$.

μ_n-merljivi su samo skupovi E^n_ψ, i $\mu_n(E^n_\psi)=\sup\{r\,|\,(P\bar{x}\ge r)\psi\in\Phi_\omega\}$

Leme 2.3.3., 2.3.4. i 2.3.13. garantuju dobru definisanost strukture $\mathfrak{A}$.

<u>2.3.14. Lema</u>. $\varphi\in\Phi_\omega$ akko $\mathfrak{A}\models\varphi$.

Dokaz: Indukcijom po složenosti formule φ.

a) φ je atomična.

Predpostavimo, jednostavnosti radi, da je φ oblika

$$f(c_1,c_2,\ldots,c_n) = g(d_1,d_2,\ldots,d_n)$$

ili $$R(c_1,c_2,\ldots,c_n)$$

gde su f i g funkcijski, a R relacijski znak jezika L.

Prema definiciji relacije $R^{\mathfrak{A}}$ važi:

$$R^{\mathfrak{A}}(c_1/\approx,c_2/\approx,\ldots,c_n/\approx) \quad \text{akko} \quad R(c_1,c_2,\ldots,c_n)\in\Phi_\omega$$

Odavde dobijamo:

$$\mathfrak{A}\models R^{\mathfrak{A}}(c_1/\approx,c_2/\approx,\ldots,c_n/\approx) \quad \text{akko} \quad (R(c_1,c_2,\ldots,c_n))\in\Phi_\omega$$

,što je i trebalo dokazati.

Neka sada važi drugi slučaj i neka su, po (3), $c,d\in C$ tako da:

$(f(c_1,c_2,\ldots,c_n)=c)\in\Phi_\omega$ i $(g(d_1,d_2,\ldots,d_n)=d)\in\Phi_\omega$. Tada:

$f^{\mathfrak{A}}(c_1/\approx,c_2/\approx,\ldots,c_n/\approx) = c/\approx$ i

$g^{\mathfrak{A}}(d_1/\approx,d_2/\approx,\ldots,d_n/\approx) = d/\approx$

Predpostavimo da $\varphi\in\Phi_\omega$. Tada, po (A4) i (A7)

$$(c=d)\in\Phi_\omega, \text{ odnosno } c/\approx=d/\approx.$$

Odavde dobijamo:

$f^{\mathfrak{A}}(c_1/\approx,c_2/\approx,\ldots,c_n/\approx) = g^{\mathfrak{A}}(d_1/\approx,d_2/\approx,\ldots,d_n/\approx)$, tj $\mathfrak{A}\models\varphi$.

Neka sada $\mathfrak{A}\models\varphi$:

$$f^{\mathfrak{A}}(c_1/\approx,c_2/\approx,\ldots,c_n/\approx) = g^{\mathfrak{A}}(d_1/\approx,d_2/\approx,\ldots,d_n/\approx)$$

Tada $c/\approx = d/\approx$, pa $(c=d)\in\Phi_\omega$. Ponovo prema (A4) i (A6) je:

$(f(c_1,c_2,\ldots,c_n) = g(d_1,d_2,\ldots,d_n))\in\Phi_\omega$, odnosno $\varphi\in\Phi_\omega$.

b) φ je $\neg\psi$.

Prema induktivnoj hipotezi:

$$\psi\in\Phi_\omega \quad \text{akko} \quad \mathfrak{A}\models\psi, \text{ pa važi i:}$$

$$\psi\notin\Phi_\omega \quad \text{akko} \quad \mathfrak{A}\models\neg\psi, \text{ što je prema (1)}$$

$$\neg\psi\in\Phi_\omega \quad \text{akko} \quad \mathfrak{A}\models\neg\psi, \text{ ili}$$

$$\varphi\in\Phi_\omega \quad \text{akko} \quad \mathfrak{A}\models\varphi.$$

c) φ je $\bigwedge\Psi$.

Zbog osobine (1) i konzistentnosti Φ_ω važi:

$\varphi\in\Phi_\omega$ akko za svaku formulu $\psi\in\Psi$ važi $\psi\in\Phi_\omega$

akko, prema induktivnoj hipotezi, za svaku formulu $\psi\in\Psi$ $\mathfrak{A}\models\psi$

akko $\mathfrak{A}\models\varphi$.

d) φ je $\bigvee\Psi$.

Prema osobini (5):

$\varphi\in\Phi_\omega$ akko za neku formulu $\psi\in\Psi$, $\psi\in\Phi_\omega$

akko, prema induktivnoj hipotezi, za neku formulu $\psi\in\psi$ $\mathfrak{A}\models\psi$,

akko $\mathfrak{A}\models\bigvee\Psi$

e) φ je $(\exists x)\psi(x)$.

Prema osobini (1):

$\varphi\in\Phi_\omega$ akko za neku $c\in C$ $\psi(c)\in\Phi_\omega$

akko ,prema induktivnoj hipotezi, $\mathfrak{A}\models\psi(c/\approx)$

akko $\mathfrak{A}\models(\exists x)\psi(x)$.

f) φ je $(\forall x)\psi(x)$.

Prema (1): $\varphi\in\Phi_\omega$ akko $\neg(\forall x)\psi(x)\notin\Phi_\omega$

akko, prema (2), $(\exists x)\neg\psi(x)\notin\Phi_\omega$

akko $\neg\psi(c)\notin\Phi_\omega$ za svaku $c\in C$

akko, prema induktivnoj hipotezi, $\mathfrak{A}\models\psi(c/\approx)$ za svaku $c\in C$

akko $\mathfrak{A}\models(\forall x)\psi(x)$

g) φ je $(P\bar{x}\geq r)\psi$.

$(P\bar{x}\geq r)\psi\in\Phi_\omega$ akko $r\in\{s\mid(P\bar{x}\geq s)\in\Phi_\omega\}$

akko $\sup\{s\mid(P\bar{x}\geq r)\psi\in\Phi_\omega\}\geq r$

akko $\mu_n^{\mathfrak{A}}(E_\psi^n)\geq r$ akko $\mathfrak{A}\models(P\bar{x}\geq r)\psi$.

h) φ je $(P\bar{x}>r)\psi$.

Prema (A17) $(P\bar{x}>r)\psi\in\Phi_\omega$ akko $\bigvee_n(P\bar{x}\geq r+\frac{1}{n})\psi\in\Phi_\omega$

akko za neko $n\in\mathbb{N}$ $(P\bar{x}\geq r+\frac{1}{n})\psi\in\Phi_\omega$

akko, prema (g), za neko $n\in\mathbb{N}$ $\mathfrak{A}\models(P\bar{x}\geq r+\frac{1}{n})\psi$

akko $\mathfrak{A}\models(P\bar{x}>r)\psi$.

i) φ je $(P\bar{x}\leq r)\psi$.

$(P\bar{x}\leq r)\psi\in\Phi_\omega$ akko $r\in\{s\mid(P\bar{x}\leq s)\in\Phi_\omega\}$

akko $\inf\{s \mid (P\bar{x}\leq s)\psi\in\Phi_\omega\}\leq r$

akko $\mu_n^{\mathfrak{A}}(E_\psi^n)\leq r$ akko $\mathfrak{A}\models(P\bar{x}\leq r)\psi$.

j) φ je $(P\bar{x}<r)\psi$.

Prema (A18) $(P\bar{x}<r)\psi\in\Phi_\omega$ akko $\bigvee_n (P\bar{x}\leq r+\frac{1}{n})\psi\in\Phi_\omega$

akko za neko $n\in\mathbb{N}$ $(P\bar{x}\leq r+\frac{1}{n})\psi\in\Phi_\omega$

akko, prema i), za neko $n\in\mathbb{N}$ $\mathfrak{A}\models(P\bar{x}\leq r+\frac{1}{n})\psi$

akko $\mathfrak{A}\models(P\bar{x}<r)\psi$.

Znači, $\mathfrak{A}$ je model za Φ_ω, pa je $\mathfrak{A}$ i model i za Φ. Primetimo, još i da je $\mathfrak{A}$ prebrojiv. Time smo dokazali:

2.3.15. Teorema. Svaki konzistentan skup rečenica ima model.

Neposredna posledica prethodne teoreme je i potpunost $L_{\mathbb{A}\exists}$:

2.3.16. Teorema. Neka je Φ skup rečenica logike $L_{\mathbb{A}\exists}$ i $\varphi\in Form(L_{\mathbb{A}\exists})$. Tada: $\Phi\vdash_{L_{\mathbb{A}\exists}}\varphi$ akko $\Phi\models_{L_{\mathbb{A}\exists}}\varphi$.

3. KOMPLETNOST LOGIKE $L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega})$

3.1. SINTAKSA.

3.1.1. Definicija. Logika $L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega})$ sadrži sledeće simbole:

a) Prebrojiv spisak promenljivih v_n, za $n\in\mathbb{N}$.

b) Veznike $\bigwedge$ i $\neg$.

c) Kvantifikatore $(\exists v_n)$, $(P\bar{x}\geq r)$, $(P\bar{x}\leq r)$, gde je $\bar{x}$ n-torka $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ različitih promenljivih a r nenegativan realan broj.

d) simbol jednakosti $=$.

3.1.2. Definicija. $Form(L_{\omega\omega})$ je najmanji skup koji sadrži sve atomične formule i zadovoljava:

a) Ako $\varphi\in Form(L_{\omega\omega})$ tada i $\neg\varphi\in Form(L_{\omega\omega})$.

b) Ako $\varphi_1\in Form(L_{\omega\omega})$ i $\varphi_2\in Form(L_{\omega\omega})$ tada i

$$\bigwedge\{\varphi_1,\varphi_2\}\in Form(L_{\omega\omega}).$$

c) Ako $\varphi\in Form(L_{\omega\omega})$ tada i $(\exists x)\varphi\in Form(L_{\omega\omega})$.

3.1.3. Definicija. Skup formula logike $L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega})$ je najmanji skup $Form(L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega}))$ koji sadrži $Form(L_{\omega\omega})$ i zadovoljava:

a) Ako $\varphi\in Form(L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega}))$ tada i $\neg\varphi\in Form(L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega}))$.

b) Ako $\Phi\subseteq Form(L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega}))$ i $\Phi\in\mathbb{A}$, tada $\bigwedge\Phi\in Form(L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega}))$.

c) Ako $\varphi\in Form(L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega}))$ i $(P\bar{x}\geq r)$, $(P\bar{x}\leq r)$ su kvantori, tada i $(P\bar{x}\geq r)\varphi$, $(P\bar{x}\leq r)\varphi\in Form(L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega}))$.

U narednoj definiciji uvešćemo paralelno pojam slabe $L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega})$- strukture i zadovoljenja u njoj.

<u>3.1.4. Definicija</u>. Slaba $L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega})$-struktura je struktura $(\mathfrak{A},\mu)$, gde je $\mu=(\mu_n|n\in\mathbb{N})$

$$\mathfrak{A} = (A,R_i^{\mathfrak{A}},f_j^{\mathfrak{A}},c_k^{\mathfrak{A}})_{i\in I,j\in J,k\in K}$$

L-struktura prvog reda, za svaki $n\in\mathbb{N}$ μ_n je konačna konačno aditivna mera na M^n, $\mu_n^{\mathfrak{A}}(M^n)>0$ i važi:

1) Za $\varphi(\bar{x},\bar{y})\in Form(L_{\omega\omega})$, $\bar{a}\in A^n$, $\bar{b}\in A^m$ i prirodno definisanu relaciju zadovoljenja $\mathfrak{A}\models\varphi(\bar{a},\bar{b})$

$$\{\bar{b}\in A^m|\mathfrak{A}\models\varphi(\bar{a},\bar{b})\}\in dom(\mu_m)$$

2) Za $\bar{a}\in A^n$, $\Phi\in\mathbb{A}$ i $\Phi\subseteq Form(L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega}))$:

$$\cap\{\{\bar{a}\in A^m|\mathfrak{A}\models\varphi(\bar{a},\bar{b})\}|\varphi\in\Phi\}\in dom(\mu_m)$$

$$(\mathfrak{A},\mu)\models\bigwedge\Phi \quad \text{akko} \quad \text{za svaku } \varphi\in\Phi\ \mathfrak{A}\models\varphi.$$

3) Za $\bar{a}\in A^k$, $\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\in Form(L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega}))$ i $r\in\mathbb{R}$:

$$\{\bar{c}\in A^n|\mu_m(\{\bar{b}\in A^m|(\mathfrak{A},\mu)\models\varphi(\bar{a},\bar{b},\bar{c})\})\geq r\}\in dom(\mu_n)$$

$$\{\bar{c}\in A^n|\mu_m(\{\bar{b}\in A^m|(\mathfrak{A},\mu)\models\varphi(\bar{a},\bar{b},\bar{c})\})\leq r\}\in dom(\mu_n)$$

$$(\mathfrak{A},\mu)\models(P\bar{x}\geq r)\varphi(\bar{a},\bar{x},\bar{c}) \quad \text{akko} \quad \mu_m(\{\bar{b}\in A^m|(\mathfrak{A},\mu)\models\varphi(\bar{a},\bar{b},\bar{c})\})\geq r$$

$$(\mathfrak{A},\mu)\models(P\bar{x}\leq r)\varphi(\bar{a},\bar{x},\bar{c}) \quad \text{akko} \quad \mu_m(\{\bar{b}\in A^m|(\mathfrak{A},\mu)\models\varphi(\bar{a},\bar{b},\bar{c})\})\leq r$$

Primetimo da prethodna definicija obezbeđuje μ-merljivost svakog definabilnog sa parametrima podskupa od A^n.

<u>3.1.5. Definicija</u>. $L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega})$-struktura je slaba struktura $(\mathfrak{A},\mu)$ koja zadovoljava dodatne uslove:

a) μ_n je σ-aditivna konačna mera na A^n.

b) $(\mu_n|n\in\mathbb{N})$ ima Fubinijevo svojstvo:

1) $\mu_n\otimes\mu_m\subseteq\mu_{n+m}$

2) μ_n je invarijantna u odnosu na permutacije. Ako je π permutacija skupa $\{1,2,...,n\}$ i $S\in dom(\mu_n)$ tada i

$$\{(a_{\pi(1)},a_{\pi(2)},...,a_{\pi(n)})|(a_1,a_2,...,a_n)\in S\}\in dom(\mu_n)$$

i važi:

$$\mu_n(\{(a_{\pi(1)},a_{\pi(2)},\dots,a_{\pi(n)})\,|\,(a_1,a_2,\dots,a_n)\in S\})=\mu_n(S)$$

3) Ako $S\subseteq A^{m+n}$ i $S\in dom(\mu_{n+m})$

$$\{\bar{a}\in A^m\,|\,(\bar{a},\bar{b})\in S\}\in dom(\mu_m)$$

$$\{\bar{b}\in A^n\,|\,\mu_m(\{\bar{a}\,|\,(\bar{a},\bar{b})\in S\})\geq r\}\in dom(\mu_n)$$

$$\mu_{n+m}(S) = \int(\int_S\mu_m(dx))\mu_n(dy)$$

Aksiome za slabu $L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega})$ logiku su aksiome (A1)-(A19) iz dela 2.1.

Pravila za slabu $L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega})$ su pravila (R1)-(R5) iz dela 2.1.

Aksiome za $L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega})$ su aksiome (A1)-(A16), (A19) i aksiome:

(B1) Aksiome neprekidnosti

$$\bigwedge_n\bigvee_m (P\bar{y}<\tfrac{1}{n})((P\bar{x}\geq r-\tfrac{1}{m})\varphi(\bar{x},\bar{y})\wedge\neg(P\bar{x}\geq r)\varphi(\bar{x},\bar{y}))$$

$$\bigwedge_n\bigvee_{\Phi_0} (P\bar{y}<\tfrac{1}{n})(\bigwedge\Phi_0(\bar{y})\wedge\neg\bigwedge\Phi(\bar{y})) \quad \text{gde je } \Phi_0\subseteq\Phi \text{ konačan.}$$

(B2) $(P\bar{x}\geq r)(P\bar{y}\geq s)\varphi(\bar{x},\bar{y}) \rightarrow (P\bar{x}\bar{y}\geq rs)\varphi(\bar{x},\bar{y})$

$(P\bar{x}\leq r)(P\bar{y}\leq s)\varphi(\bar{x},\bar{y}) \rightarrow (P\bar{x}\bar{y}\leq rs)\varphi(\bar{x},\bar{y})$

Umesto aksioma (B1) mogu stajati i aksiome (A17) i (A18), ali je ovaj oblik podesniji za kasniju primenu.

Pravila za $L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega})$ su (R1)-(R5) iz dela 2.1.

3.2. TEOREME KOMPLETNOSTI.

Neposredna posledica teoreme 2.3.15. je i kompletnost slabe logike $L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega})$.

3.2.1. Teorema. Svaki konzistentan skup $\Phi\subseteq Form(L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega}))$ u slaboj $L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega})$ logici ima slab model.

Neka je, od sada, $\Phi\subseteq Form(L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega}))$ fiksiran, konzistentan skup u $L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega})$. Predpostavimo da Φ sadrži sve aksiome logike

$L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega})$. Tada je Φ konzistentan i u slaboj $L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega})$ logici pa, prema teoremi 3.2.1. Φ ima slab model. Neka je to $(\mathfrak{A},\mu)$, gde je

$\mathfrak{A} = (A, R_i^{\mathfrak{A}}, f_j^{\mathfrak{A}}, c_k^{\mathfrak{A}})_{i\in I, j\in J, k\in K}$ i $\mu = (\mu_n | n\in\mathbb{N})$.

Neka je dalje $*: V(A) \to V(^*A)$ nestandardno proširenje univerzuma.

Neka je:

$*\mathfrak{A} = (^*A, ^*R_i^{\mathfrak{A}}, ^*f_j^{\mathfrak{A}}, c_k^{\mathfrak{A}})_{i\in I, j\in J, k\in K}$, $*\mu = (^*\mu_n | n\in\mathbb{N})$

Primetimo da je u opštem slučaju $*\mathfrak{A} \not\equiv {}^*\mathfrak{A}$ i $*\mu \not\equiv {}^*\mu$.

$*\mathfrak{A}$ je L-struktura prvog reda, za $n\in\mathbb{N}$ $^*\mu_n$ je konačna $*$-konačno aditivna mera na $^*A^n$. Tako, $^*\mu_n$ zadovoljava sve uslove za egzistenciju Löeb-ove ekstenzije. Neka je $\bar{\mu}_n = L(^*\mu_n)$ Löeb-ova ekstenzija mere $^*\mu_n$, za $n\in\mathbb{N}$. Uvedimo niz

$$\bar{\mu} = (\bar{\mu}_n | n\in\mathbb{N})$$

Pod formulom $\varphi(\bar{x})$ ćemo podrazumevati i skup svih n-torki $\bar{a}$ za koje je $\varphi(\bar{a})$ zadovoljena. Tako, u odnosu na $(\mathfrak{A},\mu)$ φ je u $V_1(A)$, a skup svih formula je u $V_2(A)$. Analogno u odnosu na $(*\mathfrak{A},\bar{\mu})$ i $(^*\mathfrak{A}, ^*\mu)$. Da bi iz konteksta bilo jasno u odnosu na koju od struktura $(*\mathfrak{A},\bar{\mu})$ ili $(*\mathfrak{A},*\mu)$ se zadovoljenje odnosi, koristimo različit zapis za probabilističke kvantore $(P\bar{x}\geq r)$ i $(^*P\bar{x}\geq r)$. Primetimo da $\bigwedge {}^*\Phi = \bigwedge\{^*\varphi | \varphi\in\Phi\}$ važi akko je Φ konačan.

Neka je $M = L\cup A$.

3.2.2. Lema. Za $\varphi\in Form(M_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega}))$ važi:

$$(\mathfrak{A},\mu) \models \varphi \quad \text{akko} \quad (*\mathfrak{A},\bar{\mu}) \models \varphi.$$

Dokaz: Indukcijom po složenosti formule φ.

a) $\varphi \in Form(L_{\omega\omega})$.

Dokazaćemo da $\mathfrak{A}\models\varphi$ akko $*\mathfrak{A}\models\varphi$.

φ je atomična. Prema definiciji je:

$$R(a_1,a_2,\dots,a_n) \text{ akko } {}^*R(a_1,a_2,\dots,a_n)$$

$$f(a_1,a_2,\dots,a_n)=a \text{ akko } {}^*f(a_1,a_2,\dots,a_n)=a$$

φ je $(\exists x)\psi(x)$. Važi:

$$\mathfrak{A}\models(\exists x)\psi(x) \quad \text{akko} \quad (\exists a\in A)\mathfrak{A}\models\psi(a)$$

akko, prema principu prenosa, $(\exists a\in {}^*A)\,{}^*\mathfrak{A}\models\psi(a)$

akko $\quad {}^*\mathfrak{A}\models(\exists x)\psi(x)$

b) φ je $\neg\psi$.

Prema induktivnoj hipotezi važi:

$$(\mathfrak{A},\mu)\models\psi \quad \text{akko} \quad ({}^*\mathfrak{A},\bar{\mu})\models\psi.$$

Odavde $\quad ({}^*\mathfrak{A},\bar{\mu})\models\varphi \quad \text{akko} \quad (\mathfrak{A},\mu)\models\varphi.$

c) φ je $\bigwedge\Phi$.

$(\mathfrak{A},\mu)\models\bigwedge\Phi$ akko za svaku formulu $\psi\in\Phi$ $(\mathfrak{A},\mu)\models\psi$

akko, prema induktivnoj hipotezi, za svaku formulu $\psi\in\Phi$

$({}^*\mathfrak{A},\bar{\mu})\models\psi$,

akko $({}^*\mathfrak{A},\bar{\mu})\models\bigwedge\Phi$.

d) φ je $(P\bar{x}\geq r)\psi$ ili $(P\bar{x}\leq r)\psi$. Zbog simetrije, dokazaćemo samo prvi slučaj: φ je $(P\bar{x}\geq r)\psi(\bar{x})$.

Po principu prenosa važi:

$\mu_n(\{\bar{a}\in A^n \mid (\mathfrak{A},\mu)\models\psi(\bar{a})\})\geq r$ akko ${}^*\mu_n(\{\bar{a}\in{}^*A^n \mid ({}^*\mathfrak{A},{}^*\mu)\models{}^*\psi(\bar{a})\})$.

Stoga je dovoljno dokazati sledeće:

<u>Tvrđenje</u>: $\bar{\mu}_n(\{\bar{a}\in A^n \mid ({}^*\mathfrak{A},\bar{\mu})\models\psi(\bar{a})\}\,\Delta\,\{\bar{a}\in A^n \mid ({}^*\mathfrak{A},{}^*\mu)\models{}^*\psi(\bar{a})\}) = 0.$

Dokaz: Indukcijom po složenosti formule ψ. Jedini netrivijalni koraci su ψ je $\bigwedge\Phi$ i ψ je $(P\bar{x}\geq r)\varphi$ (ili $(P\bar{x}\leq r)\varphi$).

1) ψ je $\bigwedge\Phi$.

Prema aksiomi neprekidnosti izaberimo konačan $\Psi\subseteq\Phi$ tako da za $\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ važi:

$$\mu_n(\{\bar a\in A^n \mid (\mathfrak{A},\mu)\models\bigwedge\Phi(\bar a)\}\ \Delta\ \{\bar a\in A^n\mid(\mathfrak{A},\mu)\models\bigwedge\Psi(\bar a)\}) \le \varepsilon$$

Po principu prenosa:

$$^*\mu_n(\{\bar a\in {}^*A^n\mid({}^*\mathfrak{A},{}^*\mu)\models\bigwedge{}^*\Phi(\bar a)\}\ \Delta\ \{\bar a\in{}^*A^n\mid({}^*\mathfrak{A},{}^*\mu)\models\bigwedge{}^*\Psi(\bar a)\})\le\varepsilon$$

pa, prema definiciji $\bar\mu$:

(I) $$\bar\mu_n(\{\bar a\in{}^*A^n\mid({}^*\mathfrak{A},{}^*\mu)\models\bigwedge{}^*\Phi(\bar a)\}\ \Delta\ \{\bar a\in{}^*A^n\mid({}^*\mathfrak{A},{}^*\mu)\models\bigwedge{}^*\Psi(\bar a)\})\le\varepsilon$$

Kako je $\bar\mu_n$ σ-aditivna na $^*A^n$ i

$$\bigcap_{\varphi\in\Phi}\{\bar a\in{}^*A^n\mid({}^*\mathfrak{A},\bar\mu)\models\varphi(\bar a)\} = \{\bar a\in{}^*A^n\mid({}^*\mathfrak{A},\bar\mu)\models\bigwedge\Phi(\bar a)\}$$

izaberimo konačan Ψ_1 tako da važi:

(II) $$\bar\mu_n(\{\bar a\in{}^*A^n\mid({}^*\mathfrak{A},\bar\mu)\models\bigwedge\Psi_1(\bar a)\}\ \Delta\ \{\bar a\in{}^*A^n\mid({}^*\mathfrak{A},\bar\mu)\models\bigwedge\Phi(\bar a)\})\le\varepsilon$$

Bez umanjenja opštosti možemo predpostaviti da je $\Psi=\Psi_1$.

$$\bar\mu_n(\{\bar a\mid({}^*\mathfrak{A},\bar\mu)\models\bigwedge\Phi(\bar a)\}\ \Delta\ \{\bar a\mid({}^*\mathfrak{A},{}^*\mu)\models\bigwedge{}^*\Phi(\bar a)\})\le$$
$$\bar\mu_n(\{\bar a\mid({}^*\mathfrak{A},\bar\mu)\models\bigwedge\Phi(\bar a)\}\ \Delta\ \{\bar a\mid({}^*\mathfrak{A},\bar\mu)\models\bigwedge\Psi(\bar a)\})\ +$$
$$\bar\mu_n(\{\bar a\mid({}^*\mathfrak{A},{}^*\mu)\models\bigwedge{}^*\Psi(\bar a)\}\ \Delta\ \{\bar a\mid({}^*\mathfrak{A},\bar\mu)\models\bigwedge\Psi(\bar a)\})\ +$$
$$\bar\mu_n(\{\bar a\mid({}^*\mathfrak{A},{}^*\mu)\models\bigwedge{}^*\Psi(\bar a)\}\ \Delta\ \{\bar a\mid({}^*\mathfrak{A},{}^*\mu)\models\bigwedge{}^*\Phi(\bar a)\})\le\varepsilon+0+\varepsilon=2\varepsilon$$

Prvi sabirak smo ograničili prema (I), drugi prema induktivnoj hipotezi primenjenoj na svaku od konačno mnogo formula iz Ψ, a treću prema (II). Kako ε može biti proizvoljno mali realan broj dobijamo:

$$\bar\mu_n(\{\bar a\in A^n\mid({}^*\mathfrak{A},\bar\mu)\models\psi(\bar a)\}\ \Delta\ \{\bar a\in A^n\mid({}^*\mathfrak{A},{}^*\mu)\models{}^*\psi(\bar a)\}) = 0$$

što je i trebalo dokazati.

2) ψ je $(P\bar x\ge r)\varphi$.

Prema aksiomi neprekidnosti imamo:

(i) $$\bar\mu_n(\{\bar a\mid({}^*\mathfrak{A},{}^*\mu)\models(P\bar x\ge r)^*\varphi(\bar x,\bar a)\}\Delta\{\bar a\mid({}^*\mathfrak{A},{}^*\mu)\models({}^*P\bar x\ge r)^*\varphi(\bar x,\bar a)\})=0$$

Treba da dokažemo:

$$\bar\mu_n(\{\bar a\mid({}^*\mathfrak{A},\bar\mu)\models(P\bar x\ge r)\varphi(\bar x,\bar a)\}\ \Delta\ \{\bar a\mid({}^*\mathfrak{A},{}^*\mu)\models({}^*P\bar x\ge r)^*\varphi(\bar x,\bar a)\})=0$$

Imamo:

$$\bar\mu_n(\{\bar a\mid({}^*\mathfrak{A},\bar\mu)\models(P\bar x\ge r)\varphi(\bar x,\bar a)\}\ \Delta\ \{\bar a\mid({}^*\mathfrak{A},{}^*\mu)\models({}^*P\bar x\ge r)^*\varphi(\bar x,\bar a)\})\le$$
$$\bar\mu_n(\{\bar a\mid({}^*\mathfrak{A},{}^*\mu)\models({}^*P\bar x\ge r)^*\varphi(\bar x,\bar a)\}\ \Delta\ \{\bar a\mid({}^*\mathfrak{A},{}^*\mu)\models(P\bar x\ge r)^*\varphi(\bar x,\bar a)\})+$$

$\bar{\mu}_n(\{\bar{a} \mid (*\mathfrak{U},*\mu) \models (P\bar{x}\geq r)^*\varphi(\bar{x},\bar{a})\}\ \Delta\ \{\bar{a} \mid (*\mathfrak{U},\bar{\mu}) \models (P\bar{x}\geq r)\varphi(\bar{x},\bar{a})\})$

Prvi sabirak je 0 prema (i). Za drugi, prema induktivnoj hipotezi za formulu $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ imamo:

$\bar{\mu}_{m+n}(\{(\bar{b},\bar{a}) \mid (*\mathfrak{U},*\mu) \models^* \varphi(\bar{b},\bar{a})\}\ \Delta\ \{(\bar{b},\bar{a}) \mid (*\mathfrak{U},\bar{\mu}) \models \varphi(\bar{b},\bar{a})\})=0$

Odavde za skoro sve $\bar{a}\in {}^*A^n$:

$\bar{\mu}_m(\{\bar{b} \mid (*\mathfrak{U},*\mu) \models^* \varphi(\bar{b},\bar{a})\}\ \Delta\ \{\bar{b} \mid (*\mathfrak{U},\bar{\mu}) \models \varphi(\bar{b},\bar{a})\})=0$,

pa za skoro sve $\bar{a}\in {}^*A^n$:

$\bar{\mu}_m(\{\bar{b} \mid (*\mathfrak{U},*\mu) \models^* \varphi(\bar{b},\bar{a})\})\geq r$ akko $\bar{\mu}_m(\{\bar{b} \mid (*\mathfrak{U},\bar{\mu}) \models \varphi(\bar{b},\bar{a})\})\geq r$.

Tako smo dokazali da je i drugi sabirak 0, čime je dokaz leme završen.

3.2.3. Lema. $(*\mathfrak{U},\bar{\mu})$ je $L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega})$ struktura.

Dokaz: Ostalo je da proverimo da $\bar{\mu}$ ima Fubinijevo svojstvo. To sledi iz činjenice da $(\mathfrak{U},\mu)$ zadovoljava aksiome (B2), pa ih po lemi 3.2.2. zadovoljava i $(*\mathfrak{U},\bar{\mu})$.

Znači $(*\mathfrak{U},\bar{\mu})$ je model za Φ. Time smo dokazali:

3.2.4. Teorema. Svaki $L_{\mathbb{A}P}(L_{\omega\omega})$ konzistentan skup rečenica ima model.

4. NORMALNA FORMA $L_{\omega_1\exists}$ FORMULA

Normalna forma formule iskaznog računa sa prebrojivim konjukcijama i disjunkcijama je njoj ekvivalentna formula koja sadrži samo monotone beskonačne konjukcije i disjunkcije. Slično tvrđenje važi i za formule logike $L_{\omega_1\omega}$. U ovom delu ćemo dokazati da isto tvrđenje važi i za formule logike $L_{\omega_1\exists}$.

4.1.1. Definicija. Prebrojiva konjukcija $\bigwedge\varphi_n$ je monotona ako za svaki prirodan broj n $\vdash \varphi_{n+1}\to\varphi_n$. Prebrojiva disjunkcija $\bigvee\varphi_n$ je monotona ako za svaki prirodan broj n $\vdash \varphi_n \to \varphi_{n+1}$. Skup svih monotonih $L_{\omega_1\exists}$ formula je najmanji skup koji sadrži sve konačne $L_{\omega_1\exists}$ formule i zatvoren je za kvantifikovanje i monotone konjukcije i disjunkcije.

4.1.2. Teorema. Neka je $\mathfrak{B}$ σ-kompletna Bulova algebra $\mathfrak{B}_0$ podalgebra od $\mathfrak{B}$ i $C(\mathfrak{B}_0)\subseteq\mathfrak{B}$ σ-kompletiranje od $\mathfrak{B}_0$. Tada je $C(\mathfrak{B}_0)$ presek svih Bulovih algebri $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{B}_0\subseteq\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{B}$, zatvorenih za supremum rastućih i infimum opadajućih ω-nizova.

Za formule φ i ψ kažemo da su ekvivalentne ako $\vdash \varphi\leftrightarrow\psi$.

4.1.3. Lema. Svaka $L_{\omega_1\exists}$ formula koja ne sadrži kvantore je ekvivalentna monotonoj $L_{\omega_1\exists}$ formuli koja ne sadrži kvantore.

Dokaz: Neka je $\phi(\bar{x})$ skup svih $L_{\omega_1\exists}$ formula koje ne sadrže kvantore. Identifikujmo ekvivalentne formule. Dobijamo σ-kompletnu Bulovu algebru $\mathfrak{B}$. Primetimo da je $\mathfrak{B}$ generisana algebrom svih konačnih $L_{\omega_1\exists}$ formula, označimo je sa $\mathfrak{B}_0$.

Formirajmo niz: $\mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{B}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{B}_\xi \subseteq \ldots$ $(\xi<\omega_1)$ gde je:

$\mathfrak{B}_{\xi+1}$ algebra svih $b\in\mathfrak{B}$ koji su supremum rastućeg ili infimum opadajućeg ω-niza u $\mathfrak{B}_\xi$.

$\mathfrak{B}_\xi = \cup\{\mathfrak{B}_\eta \mid \eta<\xi\}$ za granične ξ.

Prema teoremi 4.1.2. $\mathfrak{B}=\cup\{\mathfrak{B}_\xi \mid \xi<\omega_1\}$. Za $b\in\mathfrak{B}$, neka je :

$$\mathrm{rank}(b) = \min\{\xi<\omega_1 \mid b\in\mathfrak{B}_\xi\}$$

Tvrđenje leme dokazujemo indukcijom po rank(b).

Neka je $\mathrm{rank}(b)=\xi$. Tada postoji monoton ω-niz $b_0, b_1, \ldots$ tako da je $\mathrm{rank}(b_n)<\xi$ i $b=\bigvee b_n$ ukoliko je rastući, ili $b=\bigwedge b_n$ ukoliko je opadajući. Kako je svaka od formula b_n, prema induktivnoj hipotezi, monotona zaključujemo da je i b monotona.

<u>4.1.4. Teorema</u>. Svaka $L_{\omega_1\exists}$ formula je ekvivalentna monotonoj $L_{\omega_1\exists}$ formuli.

Dokaz: Neka je $\mathfrak{B}_0$ algebra svih konačnih formula. Definišimo $\mathfrak{B}_\xi$ za $\xi<\omega_1$.

$\mathfrak{C}_\xi$ je zatvorenje $\mathfrak{B}_\xi$ za konačne veznike.

$\mathfrak{D}_\xi$ je zatvorenje $\mathfrak{C}_\xi$ za prebrojive $\bigwedge$, $\bigvee$ i za $\neg$.

$\mathfrak{B}_{\xi+1}$ je zatvorenje $\mathfrak{D}_\xi$ za kvantore.

$\mathfrak{B}_\xi = \cup\{\mathfrak{B}_\eta \mid \eta<\xi\}$ za granične ξ.

Za n-torku $\bar{x}$ promenljivih, definišimo $\mathfrak{B}_\xi(\bar{x})$, $\mathfrak{C}_\xi(\bar{x})$, $\mathfrak{D}_\xi(\bar{x})$ kao skup svih formula iz $\mathfrak{B}_\xi$, $\mathfrak{C}_\xi$, $\mathfrak{D}_\xi$ koje mogu slobodno sadržati samo promenljive iz $\bar{x}$.

Induktivno, po ξ, dokazaćemo da je svaka formula $\varphi(\bar{x})\in\mathfrak{D}_\xi(\bar{x})$

ekvivalentna nekoj monotonoj formuli iz $\mathfrak{D}_\xi(\bar{x})$. Za $\xi=0$ to je lema 4.1.3. Predpostavimo da tvrđenje važi za svaki $\eta<\xi$ i za svaki konačan niz promenljivih $\bar{x}$.

Neka je $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}_\eta$ ako je $\xi=\eta+1$, i $\mathfrak{D}=\mathfrak{B}_\xi$ ako je ξ graničan. $\mathfrak{B}_\xi$ je zatvorenje $\mathfrak{D}$ za kvantore i $\mathfrak{D}$ je zatvoren za $\bigwedge$, $\bigvee$, $\neg$ i slobodne substitucije.

Koristeći dokaz postojanja preneks normalne forme imamo da je svaka $\varphi(\bar{x})\in\mathfrak{C}_\xi(\bar{x})$ ekvivalentna nekoj $\psi(\bar{x})\in\mathfrak{B}_\xi(\bar{x})$. Identifikujući ekvivalentne formule, $\mathfrak{B}_\xi(\bar{x})$ je podalgebra σ-kompletne Bulove algebre $\mathfrak{D}_\xi(\bar{x})$, i $\mathfrak{B}_\xi(\bar{x})$ σ-generiše $\mathfrak{D}_\xi(\bar{x})$. Prema teoremi 4.1.2. svaka $\varphi(\bar{x})\in\mathfrak{D}_\xi(\bar{x})$ je ekvivalentna formuli $\psi(\bar{x})$ dobijenoj od formula iz $\mathfrak{B}_\xi(\bar{x})$ koristeći samo monotone konjukcije i disjunkcije. Prema induktivnoj hipotezi, $\psi(\bar{x})$ je ekvivalentna formuli $\theta(\bar{x})$ dobijenoj iz monotonih formula iz $\cup\{\mathfrak{D}_\eta(\bar{x})\,|\,\eta<\xi\}$ koristeći samo kvantore i monotone konjukcije i disjunkcije. Tako, $\theta(\bar{x})$ je monotona formula iz $\mathfrak{B}_\xi(\bar{x})$ ekvivalentna sa $\varphi(\bar{x})$, što je i trebalo dokazati.

<u>4.1.5. Posledica</u>. Svaka $L_{\omega_1\omega}$ formula je ekvivalentna monotonoj $L_{\omega_1\omega}$ formuli.

<u>4.1.6. Posledica</u>. Svaka $L_{\mathbb{A}P}$ formula je ekvivalentna monotonoj $L_{\mathbb{A}P}$ formuli.

Važi jači rezultat od posledice 4.1.6. za $L_{\mathbb{A}P}$ formule:

<u>4.1.7. Teorema</u>. Svaka $L_{\mathbb{A}P}$ formula je ekvivalentna σ-bulovo kombinaciji formula $(P\bar{x}\geq r)\varphi(\bar{x})$ i $(P\bar{x}\leq r)\varphi(\bar{x})$, gde je $\varphi(\bar{x})$ konačna disjunkcija konačnih konjukcija atomičnih formula ili njihovih negacija.

4.2. NORMALNA FORMA $L_{\mathbb{A}\exists}$ FORMULA.

Primetimo da teorema 4.1.4. za formulu $\varphi\in Form(L_{\mathbb{A}\exists})$ garantuje postojanje njoj ekvivalentne monotone $L_{\omega_1\exists}$ formule, ali u opštem slučaju ne garantuje postojanje njoj ekvivalentne monotone $L_{\mathbb{A}\exists}$ formule. U ovom delu ćemo, uz dodatnu pretpostavku o dopustivom skupu $\mathbb{A}$, to dokazati.

U ovom delu $\mathbb{A}$ je dopustiv skup $(M,A,\in,\dots)$ nad $L_{\mathbb{A}\exists}$ strukturom. $\mathbb{A}$ je lokalno prebrojiv, tj. $\omega\in\mathbb{A}$ i za svaki beskonačan $a\in\mathbb{A}$ postoji $f\in\mathbb{A}$ tako da je f bijekcija ω na a.

A je rekurzivan ako postoji $\mathbb{A}$-rekurzivna bijekcija iz $Ord(\mathbb{A})$ na $M\cup A$. ($Ord(\mathbb{A})$ je najmanji ordinal koji nije u $\mathbb{A}$, ekvivalentno: skup svih ordinala koji su u $\mathbb{A}$.)

4.2.1. Teorema. Neka je $\mathbb{A}$ lokalno prebrojiv dopustiv skup.

a) Svaka $L_{\mathbb{A}\exists}$ formula $\varphi(\bar{x})$ je ekvivalentna monotonoj $L_{\mathbb{A}\exists}$ formuli.

b) Ako je A rekurzivan, tada postoji $\mathbb{A}$-rekurzivna funkcija $F: Form(L_{\mathbb{A}\exists}) \to Form(L_{\mathbb{A}\exists})$, tako da za svaku $\varphi(\bar{x})\in Form(L_{\mathbb{A}\exists})$ $F\varphi$ je monotona formula ekvivalentna sa $\varphi(\bar{x})$.

Dokaz: Formulu φ nazovimo normalnom ako pripada najmanjem skupu formula koji sadrži sve konačne formule i zatvoren je za konačne konjukcije i disjunkcije, kvantore i monotone konjukcije i disjunkcije. Koristeći činjenicu da je $\mathbb{A}$ lokalno prebrojiv, dokazaćemo da je svaka $\varphi(\bar{x})\in Form(L_{\mathbb{A}\exists})$ ekvivalentna normalnoj formuli iz $L_{\mathbb{A}\exists}$. Ideja dokaza je da prvo sve negacije u φ pomerimo udesno do atomičnih formula i zatim sve beskonačne konjukcije i disjunkcije zamenimo, u $\mathbb{A}$, ekvivalentnim monotonim konjukcijama odnosno disjunkcijama.

Neka je $Form(K_{\omega_1\exists})$ najmanji skup $L_{\omega_1\exists}$ formula koji sadrži sve konačne formule i zatvoren je za kvantifikovanje i konačne i beskonačne konjukcije i disjunkcije, odnosno $Form(K_{\omega_1\exists})$ je skup svih formula koje sadrže negacije samo konačnih podformula.

Definišimo:

$$G\colon Form(K_{\omega_1\exists}) \to Form(K_{\omega_1\exists})$$

tako da važi:

1) $G\varphi$ je ekvivalentna sa φ.

2) Ako je φ normalna $G\varphi$ je monotona.

3) Restrikcija G na $\mathbb{A}$ (odnosno na $Form(L_{\mathbb{A}\exists})$) je $\mathbb{A}$-rekurzivna funkcija.

G definišemo induktivno na sledeći način:

φ je konačna, $G\varphi$ je φ.

$G((P\bar{x}\geq r)\varphi)$ je $(P\bar{x}\geq r)G(\varphi)$, isto i za ostale kvantore.

$G(\bigwedge\{\varphi|\varphi\in\Phi\})$ je $\bigwedge\{G(\varphi)|\varphi\in\Phi\}$, isto i za $\bigvee$.

Kada je φ beskonačna a ψ konačna $G(\varphi\wedge\psi)$ je:

$(P\bar{x}\geq r)G(\varphi_0\wedge\psi)$, ako je φ $(P\bar{x}\geq r)\varphi_0$ i $\bar{x}$ nije slobodan u ψ, slično i za ostale kvantore;

$\bigwedge\{G(\varphi_0)\wedge\psi|\varphi_0\in\Phi\}$, ako je φ $\bigwedge\{\varphi_0|\varphi_0\in\Phi\}$, slično i za $\bigvee$;

$G(G(\varphi_1\wedge\varphi_2)\wedge\psi)$, ako je φ $\varphi_1\wedge\varphi_2$, slično i za $\vee$.

Kada je ψ beskonačna, $G(\varphi\wedge\psi)$ je:

$(P\bar{x}\geq r)G(\varphi\wedge\psi_0)$, ako je ψ $(P\bar{x}\geq r)\psi_0$ i $\bar{x}$ nije slobodan u φ, slično i za ostale kvantore;

$\bigwedge\{G(\varphi\wedge\psi_0|\psi_0\in\Psi\}$, ako je ψ $\bigwedge\{\psi_0|\psi_0\in\Psi\}$, slično i za $\bigvee$;

$G(\varphi\wedge G(\psi_1\wedge\psi_2))$, ako je ψ $\psi_1\wedge\psi_2$, slično i za $\vee$.

Analogno se definiše $G(\varphi\vee\psi)$.

Definišimo rang $K_{\omega_1\exists}$ formula na sledeći način:

φ je konačna, $r(\varphi)=0$.

$r(\varphi\wedge\psi)=r(\varphi\vee\psi)=\omega(r(\varphi)+r(\psi))$

$r((P\bar{x}\geq r)\varphi)=r(\varphi)+1$, analogno za ostale kvantore.

$r(\bigwedge\{\varphi|\varphi\in\Phi\})=r(\bigvee\{\varphi|\varphi\in\Phi\})=\sup\{r(\varphi)+1|\varphi\in\Phi\}$.

Indukcijom po $r(\varphi)$ lako se pokazuje da je G dobro definisana da je $r(G\varphi)\leq r(\varphi)$, i da ako je $\varphi\wedge\psi$ beskonačna važi:

(I) $$r(G(\varphi\wedge\psi)) < r(\varphi\wedge\psi)$$

Primetimo da su $G((P\bar{x}\geq s)\varphi)$ i $G(\bigwedge\Phi)$ definisani preko funkcije G primenjene na formule manjeg ranga. Dokaz za (I) sledi iz činjenice da ako je ψ konačna $r(\varphi\wedge\psi)$ raste kada $r(\varphi)$ raste, inače $r(\varphi\wedge\psi)$ raste kada $r(\psi)$ raste.

Indukcijom se lako pokazuje da G ima osobine 1) i 2). Dokazaćemo da G ima osobinu 3), tj da je restrikcija G na $\mathbb{A}$ $\mathbb{A}$-rekurzivna funkcija. Prema teoremi Gandy-a za induktivne definicije, dovoljno je da primetimo da je restrikcija G na $\mathbb{A}$ najmanja fiksna tačka R-pozitivne Σ-formule $\theta(R,u,v)$, gde je $\theta(R,u,v)$ konačna disjunkcija, po jedan disjunkt za svaki deo definicije G. Na primer deo za:

$$G(\varphi\wedge(\psi_1\wedge\psi_2)) = G(\varphi\wedge G(\psi_1\wedge\psi_2)) \qquad \text{je:}$$

$$(\exists u_1 w_1 w_2 v_1)(u=u_1\wedge(w_1\wedge w_2) \text{ i } R(w_1\wedge w_2,v_1) \text{ i } R(u_1\wedge v_1,v))$$

a) Neka $\varphi(\bar{x})\in Form(L_{\mathbb{A}\exists})$. Izaberimo normalnu formulu $\psi(\bar{x})\in Form(L_{\mathbb{A}\exists}))$ ekvivalentnu sa $\varphi(\bar{x})$. Tada je $G\psi\in Form(L_{\mathbb{A}\exists})$ monotona prema 2) i ekvivalentna sa $\psi(\bar{x})$ prema 1). Kako je $\psi(\bar{x})$ ekvivalentna sa $\varphi(\bar{x})$, $G\psi$ je monotona i ekvivalentna sa $\varphi(\bar{x})$, što je i trebalo dokazati.

b) Kako je A rekurzivan postoji $\mathbb{A}$-rekurzivna funkcija H takva da je za $\varphi\in Form(K_{\mathbb{A}\exists})$ formula $H\varphi$ normalna i ekvivalentna sa formulom $\varphi(\bar{x})$. Tada je $F(\varphi)=G(H(\varphi))$ $\mathbb{A}$-rekurzivna i ima traženu osobinu.

<u>4.2.2. Posledica</u>. Neka je $\mathbb{A}$ lokalno prebrojiv dopustiv skup.

a) Svaka $L_{\mathbb{A}}$ formula $\varphi(\bar{x})$ je ekvivalentna monotonoj formuli $\psi(\bar{x})\in Form(L_{\mathbb{A}})$.

b) Ako je A rekurzivan, tada postoji $\mathbb{A}$-rekurzivna funkcija $F:L_{\mathbb{A}}\to L_{\mathbb{A}}$ takva da je $F\varphi$ monotona formula ekvivalentna sa $\varphi(\bar{x})$.

Korišteni su elementi teorije dopustivih skupova iz [B], nestandardne analize iz [D] i [SL] i teorije mere iz [H]. Korišten je i pregledni rad [K3].

Teorema 1.2.3. i definicije 1.3.1.-1.3.3. su iz [K3]; definicije 1.3.4. i 1.3.5. su iz [R1] i [R2ć; teoreme 1.4.1. i 1.4.2. iz [Ho1], 1.4.4. i 1.4.5. iz [Ho3], 1.4.6. iz [R1], 1.4.9. i 1.4.10. iz [Ho1], 1.5.2. i 1.5.3. iz [L],4.1.2. iz [H], 4.1.5. i 4.1.6. iz [K1], 4.1.7. iz [Ho2].

Zahvaljujem profesoru Miodragu D. Raškoviću na svesrdnoj pomoći prilikom izrade ovog rada.

LITERATURA

[B] Barwise J. Admissible Sets and Structures
Springer Verlag, 1975

[D] Davis M. Applied Nonstandard Analysis
John Willey, 1977

[Ha] Halmos P. Measure Theory
Van Nostrand, 1950

[Ho1] Hoover D. N. Probability Logic
Anals of Mathematical Logic vol 14, 1978

[Ho2] Hoover D. N. A normal form theorem for $L_{\omega_1 P}$ with applications, JSL vol 47/3, 1982

[K1] Keisler H. J. Model Theory for Infinitary Logics
North Holland, 1971

[K2] Keisler H. J. Hyperfinite Model Theory
Logic Syposium '76, Gandy & Hyland editors, 1977

[K3] Keisler H. J. Probability Quantifiers
Model Theoretic Logic, Barwise & Feferman edts. 1985

[L] Loeb P. Conversion from nonstandard to standard measure spaces and applications to probability, Trans. Am. Math. Soc. 211, 1975

[R1] Rašković M. D. Completeness theorem for biprobability models, JSL vol 51, 1986

[R2] Rašković M. D. Completeness theorem for singular biprobability models, Proc. Am. Math. Soc.

[SL] Stroyan K. D. & Luxembourg W. A. J. Introduction to The Theory of Infinitesimals Academic Press, New York, 1967