Matematički Fakultet u Beogradu

Magistarski rad

Krajnja proširenja modela

Ilijas Farah

Komisija:

1. Prof. Slaviša Prešić
2. Prof. Žarko Mijajlović
3. Doc. Milan Božić

Odbranjeno: 19.03.1992

Beograd 1992.

Veliku zahvalnost za svesrdnu pomoć pri izradi ovog rada dugujem svom mentoru Žarku Mijajloviću koji je znao da me uputi na prave teme, kao i Stevu Todorčeviću za nekoliko kratkih ali vrlo inspirativnih napomena. Kao poslednjem ali nikako manje važnom, zahvaljujem Kosti Došenu za mnoge praktične savete.

0 Uvod

0.1 Osnovne definicije i opis glavnih rezultata

Navedimo prvo definiciju pojma koji predstavlja osnovnu temu ovog rada.

DEFINICIJA 0.1.1 *Model $\mathfrak{B}$ je (elementarno) krajnje proširenje modela $\mathfrak{A}$ u odnosu na neku binarnu relaciju ρ ($\mathfrak{A} \prec_e \mathfrak{B}$) akko je $\mathfrak{B}$ (elementarno) proširenje modela $\mathfrak{A}$ i ne postoje $\mathbf{b} \in B \setminus A$, $\mathbf{a} \in A$ takvi da važi $\mathfrak{B} \models \rho(\mathbf{b}, \mathbf{a})$. Elementarno krajnje proširenje je jako akko za sve $\mathbf{b} \in B \setminus A$, $\mathbf{a} \in A$ važi $\mathfrak{B} \models \rho(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Elementarno proširenje modela $\mathfrak{A}$ je pravo akko se razlikuje od modela $\mathfrak{A}$, dakle akko je $B \setminus A \neq \emptyset$. U daljem tekstu se podrazumeva da su sva proširenja o kojima se govori prava.*

Kažemo da je model $\mathfrak{A}$ proširiv akko ima (pravo) jako krajnje elementarno proširenje.

Po rezultatu iz [Ž. Mijajlović 1] svaki prebrojiv model koji zadovoljava shemu rečenica prvog reda koju označavamo sa $\mathcal{R}^+$ (videti tekst pre Leme 1.1) ima krajnje elementarno proširenje. S druge strane, po [R. MacDowell–E. Specker], svaki (prebrojiv ili neprebrojiv) model Peanove Aritmetike (**PA**) ima krajnje elementarno proširenje. Ova dva rezultata ostavljaju sledeća pitanja otvorenim:

(1) Da li je shema $\mathcal{R}^+$ i potreban uslov za proširivost nekog prebrojivog modela?

(2) Da li postoje fragmenti **PA** koji su takvi da su svi njihovi modeli proširivi, baš kao i modeli cele **PA**?

U Teoremi 1.1 je dat pozitivan odgovor na (1), iz čega sledi da je proširivost osobina prve vrste za prebrojive modele (Teorema 1.2). Odgovor na pitanje (2) je negativan za vrlo široku klasu fragmenata **PA**— svaki teorija jezika aritmetike koja sadrži shemu aksioma indukcije za Δ_0-formule ($I\Delta_0$) i čiji je svaki model proširiv sadrži **PA**. (Videti recimo u [J. Paris–L. Kirby]).
Rezultat Teoreme 1.2 otvara i sledeće pitanje:

(3) Da li je proširivost osobina prve vrste i za neprebrojive modele?

U Teoremi 2.2 je dokazano da svaki Σ_n-fragment **PA** ima neproširive prebrojive modele (ovo je na drugi način dokazano u [K. McAloon]), ali je dat i primer pravog fragmenta **PA** čiji su svi prebrojivi modeli proširivi. Dokazano je (Teorema 2.3) da svaki Σ_n-fragment svakog kompletnog proširenja **PA** ima prebrojiv neproširiv model.

Ispostavlja se da se stvari veoma komplikuju kada se posmatra proširivost neprebrojivih modela. U Teoremi 4.7 je dokazano da je svaki zasićen model za $\mathcal{R}^+$ proširiv, dok je u Teoremi 4.2 dokazano da postoje neprebrojivi neproširivi modeli za $\mathcal{R}^+$ kardinalnosti $\leq 2^\omega$. Ovo daje negativan odgovor na (3), ali i postavlja mnoga druga pitanja, recimo:

(4) Da li Teorema 4.7 važi i za neku drugu klasu modela, posebno za neko od poopštenja zasićenih modela?

(5) Kako opisati neprebrojive proširive modele (možda pomoću neke apstraktne logike?)

Odgovor na ova dva pitanja možda sadrži podelu svih tipova nad modelom $\mathfrak{A}$ na „bitne" i „nebitne", tako da bi $\mathfrak{A}$ bio proširiv akko realizuje sve svoje „bitne" tipove.

Osim ove, „glavne" linije, rad sadrži i par digresija. Prva je u delu 1 i tiče se ω_1-like modela. Podsetimo se definicije (sa $|A|$ označavamo kardinalnost skupa A).

DEFINICIJA 0.1.2 *Model* $\mathfrak{A}$ *čiji jezik sadrži relacijski simbol* $<$ *je* ω_1*-like model* akko *je* $|A| = \omega_1$ *i* $|\{\mathbf{x} \in A | x < \mathbf{a}\}| = \omega$ *za svaki* $\mathbf{a} \in A$. *Ako je* κ *regularan kardinal, model* $\mathfrak{A}$ *je* $\kappa - like$ akko *je* $|A| = \kappa$ *i* $|\{\mathbf{x} \in A | x < \mathbf{a}\}| < \kappa$ *za svaki* $\mathbf{a} \in A$.

U Teoremi 1.4 je dokazano da kompletna teorija $\mathbf{T}$ ima ω_1-like model akko su joj svi prebrojivi modeli proširivi. Druga digresija je na kraju dela 2, gde je definisana Σ_n-verzija prostog modela neke teorije $\mathbf{T}$. Treću digresiju predstavlja deo 3, u kom su prikazani dokazi Keisler-ove teoreme o dva kardinala (Teorema 3.0.2), i ukazano je na vezu dvokardinalnih teorema sa krajnjim proširenjima modela.

NOTACIJA Sistem aksioma Peanove aritmetike (recimo kao u [C. C. Chang–H. J. Keisler, str. 40]) označavamo sa **PA**. Slovima $\mathfrak{A}$ (A), $\mathfrak{B}$ (B),... označavamo modele (njihove univerzume), dok slovima $\mathfrak{M}$ (M), $\mathfrak{N}$ (N) označavamo modele **PA** (njihove univerzume). Slova $x, y, z, \ldots$ označavaju promenljive, dok slova **a**,**b**,**c**,... označavaju konstante. Za logičke veznike koristimo standardne oznake $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ i $\leftrightarrow$, dok simboli $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$ označavaju metamatematička tvrđenja „implicira“ i „ako i samo ako“ (skraćeno akko).

Za model $\mathfrak{A}$ jezika $\mathfrak{L}$ *teorija* modela $\mathfrak{A}$ (oznaka $Th(\mathfrak{A})$) je skup svih rečenica φ jezika $\mathfrak{L}$ takvih da važi $\mathfrak{A} \models \varphi$. Kažemo da su dva modela $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ istog jezika $\mathfrak{L}$ *elementarno ekvivalentna* (oznaka $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$) akko je $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$. Ako je A neki skup, sa $\mathcal{P}(A)$ označavamo njegov *partitivni skup*—skup svih podskupova skupa A. Za skup rečenica Φ (za model $\mathfrak{A}$), $\mathfrak{L}_\Phi$ ($\mathfrak{L}_\mathfrak{A}$) označava jezik skupa Φ (modela $\mathfrak{A}$).

Kao skupovno-teoretsku osnovu koristićemo Zermelo–Fraenkel-ovu teoriju skupova, ZF (videti recimo u [C. C. Chang–H. J. Keisler]). Grčkim slovima α, β, γ,... označavamo beskonačne kardinale. Kažemo da je kardinal α *regularan* akko za svaki neopadajući niz kardinala $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_\delta, \ldots$ dužine β, gde je β ordinal manji od α, takav da je $\alpha = \bigcup_{\delta<\beta} \gamma_\delta$ važi $\gamma_\delta = \alpha$ za neki $\delta < \beta$. Kardinal α je *nedostižan* akko je regularan i za sve kardinale $\beta < \alpha$ važi $2^\beta < \alpha$. Za proizvoljan ordinal α sa $\aleph_\alpha$ označavamo α-ti beskonačan kardinal. *Hipoteza Kontinuuma* (skraćeno CH) je tvrđenje $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. *Generalisana Hipoteza Kontinuuma* (skraćeno GCH) je tvrđenje „$\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$ za svaki ordinal α“. Kao što je poznato, ova dva tvrđenja su, kao i pretpostavka o egzistenciji nedostižnog kardinala, nezavisna od teorije ZF.

Ako su X i Y skupovi elemenata nekog modela $\mathfrak{A}$ i x njegov element, $x < X$ stoji za $\forall y \in X(x < y)$. Slično definišemo i $X < x$, dok $X < Y$ stoji za $\forall x \in X(x < Y)$. Dakle, $\mathfrak{A} \prec_e \mathfrak{B}$ je ekvivalentno sa $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ i $B \setminus A > A$.

0.2 Definabilni ultraproizvod

Pošto se konstrukcija definabilnog ultraproizvoda koristi u više navrata u tekstu koji sledi, njen opis izdvajamo u poseban odeljak.

Pretpostavlja se da je čitalac upoznat sa pojmom ultraproizvoda i sa Łos-ovom Teoremom (takodje poznatom i kao Fundamentalna teorema o ultraprizvodima). Pregled raznih vrsta ultraproizvoda se može naći u [J. L. Bell–A. B. Slomson], [C. C. Chang–H. J. Keisler] ili [Ž. Mijajlović 3].

DEFINICIJA 0.2.1 *Teorija* $\mathbf{T}$ *jezika* $\mathfrak{L}$ *ima ugrađene Skolemove funkcije* akko *za svaku egzistencijalnu formulu* $\exists x \varphi(x, y_1, \ldots y_n)$ *postoji n-arni term* t_φ *jezika* $\mathfrak{L}$ *takav da*

$$\mathbf{T} \models (\forall y_1, \ldots y_n)(\exists x \varphi(x, y_1, \ldots y_n) \rightarrow \varphi(t_\varphi(y_1, \ldots y_n), y_1, \ldots y_n))$$

Model $\mathfrak{A}$ *ima ugrađene Skolemove funkcije* akko *ih ima teorija* $Th((\mathfrak{A}, \mathbf{a})_{\mathbf{a} \in A})$.

DEFINICIJA 0.2.2 *Neka je* $\mathfrak{A}$ *model koji ima ugrađene Skolemove funkcije. Jezik* $\mathfrak{L}_\mathfrak{A}$ *označavaćemo kratko sa* $\mathfrak{L}$. *Skup* $B \subset A^k$ *je definabilan s parametrima u modelu* $\mathfrak{A}$ akko *postoji formula* $\varphi(x_1, \ldots x_k, z_1, \ldots z_n)$ *jezika* $\mathfrak{L}$ *i n-torka elemenata* $\mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_n$ *iz* A *takvi da je*

$$\langle b_1, \ldots b_k \rangle \in A^k \qquad \text{akko} \qquad \mathfrak{A} \models \varphi(b_1, \ldots b_k, \mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_n).$$

Kažemo da je m-arna funkcija $f: A^m \rightarrow A$ *definabilna u modelu* $\mathfrak{A}$ akko *je njen graf definabilan kao podskup skupa* A^{m+1}.

Označimo sa $\mathcal{D}$ ($\mathcal{F}$) skup svih definabilnih podskupova (definabilnih unarnih funkcija) skupa A u modelu $\mathfrak{A}$. Neka je U ultrafilter skupa $\mathcal{D}$. Definišimo relaciju ekvivalencije $\sim$ na skupu $\mathcal{F}$ sa:

$$f \sim g \quad \text{akko je} \quad \{x \in A | \mathfrak{A} \models fx = gx\} \in D.$$

Definabilni ultrastepen modela $\mathfrak{A}$ je model koji je definisan na sledeći način:

- univerzum modela je skup svih klasa ekvivalencije relacije $\sim$,
- interpretaciju R n-arnog relacijskog simbola ρ jezika $\mathfrak{L}$ definišemo sa:

$$R(\mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_n) \qquad \text{akko} \qquad \{\mathbf{a} \in A | \rho(\mathbf{b}_1(\mathbf{a}), \mathbf{b}_2(\mathbf{a}) \ldots \mathbf{b}_n(\mathbf{a}))\} \in G.$$

(slično se definišu i interpretacije funkcijskih simbola).

Ovako definisan model označavaćemo sa $\mathcal{F}(\mathfrak{B})/U$.

Dokaz da za ovakav model važi verzija Łos-ove teoreme izvodi se indukcijom po kompleksnosti formule φ, jedina razlika u odnosu na dokaz standardne Łos-ove teoreme je u koraku za egzistencijalni kvantifikator, u kom se koristi egzistencija ugrađenih Skolemovih funkcija.

Sledeća Lema se govori o kardinalnosti definabilnog ultraproizvoda i biće iskorišćena kasnije.

LEMA 0.2.1

$$|\mathcal{F}/U| \leq |A| + |\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}|$$

DOKAZ U skupu $\mathcal{F}$ ima elemenata najviše koliko ima formula jezika $\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}$ i konačnih nizova elemenata skupa A, dakle $|A| + |\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}|$. Pošto važi $|\mathcal{F}/U| \leq |\mathcal{D}|$, tvrđenje je dokazano. **Q.E.D.**

Napomenimo još da je istu konstrukciju moguće sprovesti i ako se u njoj skup $\mathcal{D}$ zameni skupom $\mathcal{P}(A)$ (videti recimo u [C. C. Chang–H. J. Keisler, Vežba 6.4.30]). U ovom slučaju definabilan ultraproizvod možemo da smatramo za podmodel (elementaran, naravno) ultrastepena $\Pi_D\mathfrak{A}$ određen definabilnim funkcijama (odnosno njihovim klasama ekvivalencije).

1 Proširenja prebrojivih modela

TEOREMA 1.1 *Model $\mathfrak{A}$ jezika $\mathfrak{L}$ ima jako krajnje elementarno proširenje u odnosu na relaciju ρ samo ako modelira shemu $\mathcal{R}_\rho$, koja se sastoji od svih rečenica oblika*

$$\mathcal{R}_\rho(\varphi): \quad \forall v[\forall x \exists y \forall u(\rho(x,v) \to (\varphi(x,u) \to \rho(u,y))) \to \exists y \forall x \forall u(\rho(x,v) \to (\varphi(x,u) \to \rho(u,y)))],$$

gde je φ bilo koja formula sa dve slobodne promenljive jezika $\mathfrak{L}$.

DOKAZ Pretpostavimo da ovo nije tačno. Tada postoji model $\mathfrak{A}$ jezika $\mathfrak{L}$ koji ima krajnje elementarno proširenje i formula $\varphi(x,y)$ jezika $\mathfrak{L}$ takva da važi $\mathfrak{A} \models \neg\mathcal{R}_\rho(\varphi)$. Imamo

$$\mathfrak{A} \models \exists v[\forall x \exists y \forall u(\rho(x,v) \to (\varphi(x,u) \to \rho(u,y)))\wedge \forall y \exists x \exists u(\rho(x,v) \wedge \varphi(x,u) \wedge \neg\rho(u,y))]$$

Tada postoji neki $\mathbf{a} \in A$ takav da

$$(1) \quad \begin{aligned} &\mathfrak{A} \models \forall x \exists y \forall u(\rho(x,\mathbf{a}) \to (\varphi(x,u) \to \rho(u,y))), \quad \text{i} \\ &\mathfrak{A} \models \forall y \exists x \exists u(\rho(x,\mathbf{a}) \wedge \varphi(x,u) \wedge \neg\rho(u,y)) \\ &\mathfrak{B} \models \forall y \exists x \exists u(\rho(x,\mathbf{a}) \wedge \varphi(x,u) \wedge \neg\rho(u,y)) \end{aligned}$$

Ako je y neki $\mathbf{b} \in B \setminus A$, imamo

$$\mathfrak{B} \models \exists x \exists u(\rho(x,\mathbf{a}) \wedge \varphi(x,u) \wedge \neg\rho(u,\mathbf{b}))$$

pa za neke $\mathbf{c} \in B$ i $\mathbf{d} \in B$ važi:

$$\mathfrak{B} \models (\rho(\mathbf{c},\mathbf{a}) \wedge \varphi(\mathbf{c},\mathbf{d}) \wedge \neg\rho(\mathbf{d},\mathbf{b})),$$

tako da imamo $\mathbf{c} \in A$ i $\mathbf{d} \in B \setminus A$. S druge strane, po (1) imamo:

$$\mathfrak{A} \models \exists y \forall u(\rho(\mathbf{c},\mathbf{a}) \to (\varphi(\mathbf{c},u) \to \rho(u,y)))$$

i za neki $\mathbf{e} \in A$,

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A} \models \forall u(\rho(\mathbf{c},\mathbf{a}) \to (\varphi(\mathbf{c},u) \to \rho(u,\mathbf{e}))) \\ &\mathfrak{A} \models \forall u(\varphi(\mathbf{c},u) \to \rho(u,\mathbf{e})) \\ &\mathfrak{B} \models \forall u(\varphi(\mathbf{c},u) \to \rho(u,\mathbf{e})), \end{aligned}$$

ali postoji $\mathbf{d} \in B$ takav da $\mathbf{d} > \mathbf{e}$ za sve $\mathbf{e} \in A$, i

$$\mathfrak{B} \models \varphi(\mathbf{c},\mathbf{d})$$

Ovo je kontradikcija. **Q.E.D.**

U članku [Ž. Mijajlović 1] dokazano je da svaki prebrojiv model koji zadovoljava sledeće rečenice:

$$\textbf{C1.}\quad \forall x\exists y\neg\rho(x,y)$$
$$\textbf{C2.}\quad \forall x\forall y\exists z(\rho(x,z)\wedge\rho(y,z)),$$

i za sve formule $\varphi(x,u)$ jezika $\mathfrak{L}$:

$$\begin{aligned}\textbf{C3.}\quad \forall v[&\forall x\exists y\forall u(\rho(x,v)\to(\varphi(x,u)\to\rho(u,y)))\to\\ &\exists y\forall x\forall u(\rho(x,v)\to(\varphi(x,u)\to\rho(u,y)))],\end{aligned}$$

ima jako krajnje elementarno proširenje. Uslov **C1.** je ispunjen akko model $\mathfrak{A}$ nema najveći element u odnosu na relaciju ρ, i očigledno je neophodan za egzistenciju jakog krajnjeg elementarnog proširenja. Neophodnost uslova **C3.** je dokazana u Teoremi 1.1. Dokažimo da je i uslov **C2.** neophodan.

LEMA 1.1 *Model $\mathfrak{A}$ ima jako krajnje elementarno proširenje samo ako zadovoljava uslov* **C2**.

DOKAZ Pretpostavimo suprotno, dakle da važi:

$$\mathfrak{A}\models\exists x\exists y\forall z(\neg\rho(x,z)\vee\neg\rho(y,z))$$

i da postoji model $\mathfrak{B}$ koji je jako krajnje elementarno proširenje modela $\mathfrak{A}$. Fiksirajmo neki $\mathbf{a}\in B\setminus A$. Tada postoje $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ iz A takvi da

$$\mathfrak{A}\models\forall z(\neg\rho(\mathbf{b},z)\vee\neg\rho(\mathbf{c},z)),\quad \text{dakle}$$
$$\mathfrak{B}\models\neg\rho(\mathbf{b},\mathbf{a})\vee\neg\rho(\mathbf{c},\mathbf{a})$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je model $\mathfrak{B}$ jako proširenje modela $\mathfrak{A}$. Q.E.D.

Dakle, na osnovu dokazanog imamo

TEOREMA 1.2 *Postojanje jakog krajnjeg elementarnog proširenja je osobina prvog reda za prebrojive modele.*

Simbolom $\mathcal{R}^+_\rho$ označavamo shemu $\mathcal{R}_\rho\cup\{\mathbf{C1},\mathbf{C2}\}$.

Dokaz da neka teorija $\mathbf{T}$ ima κ-like model po pravilu teče tako što se konstruiše lanac krajnjih elementarnih proširenja nekog modela teorije $\mathbf{T}$ kardinalnosti manje od κ. Zbog ovoga je rezultat sledeće Teoreme o nepostojanju κ-like modela za teoriju koja ne sadrži shemu $\mathcal{R}_<$ sasvim očekivan.

Simbol $\mathbf{T}_<$ označava kompletnu teoriju jezika $\mathfrak{L}$ sa binarnim relacijskim simbolom $<$ koja sadrži aksiome linearnog uređenja za $<$.

TEOREMA 1.3 *Neka je κ regularan kardinal. Ako teorija $\mathbf{T}_<$ ne sadrži shemu $\mathcal{R}_<$, onda ona nema κ-like model.*

DOKAZ Pretpostavimo da je model $\mathfrak{M}\models\mathbf{T}_<$ κ-like i da postoji formula $\varphi(x,y)$ jezika $\mathfrak{L}$ koja nije regularna u $\mathfrak{M}$. Tada imamo

(2)
$$\begin{aligned}\mathfrak{M}\models\exists v[&\forall x\exists y\forall u(x<v\to(\varphi(x,u)\to u<y))\wedge\\ &\forall y\exists x\exists u(x<v\wedge\varphi(x,u)\wedge y\le u).\end{aligned}$$

Za svaki $\mathbf{t}\in M$ definišimo skup $M_\mathbf{t}$ sa

$$M_\mathbf{t}=\{\mathbf{x}\in M|\mathfrak{M}\models\exists y>x\varphi(\mathbf{t},x)\}.$$

Ako u (2) fiksiramo $v=\mathbf{v}$, na osnovu prvog dela rečenice za svaki $\mathbf{x}\in M$ skup $M_\mathbf{x}$ je ograničen, a na osnovu drugog važi

$$M=\bigcup_{x<\mathbf{v}}M_x=\bigcup_{x\in M_\mathbf{v}}M_x.$$

Pošto je $\mathfrak{M}$ κ-like, zaključujemo da je skup M unija manje od κ svojih podskupova od kojih je svaki kardinalnosti manje od κ. Pošto je κ regularan, dobili smo kontradikciju. Q.E.D.

Sledeća teorema sumira rezultate ovog odeljka.

TEOREMA 1.4 *Ako je* $\mathbf{T}_<$ *kompletna teorija i jezik* $\mathfrak{L}$ *prebrojiv, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(a) $\mathbf{T}_<$ *ne sadrži shemu* $\mathcal{R}_<^+$.

(b) $\mathbf{T}_<$ *nema proširiv model.*

(c) *Neki prebrojiv model za* $\mathbf{T}_<$ *nije proširiv.*

(d) $\mathbf{T}_<$ *nema* κ*-like model ni za jedan regularan kardinal* κ.

(e) $\mathbf{T}_<$ *nema* ω_1*-like model.*

DOKAZ

$(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c)$ Ovo je Teorema 1.2.

$(a) \Rightarrow (d)$ Teorema 1.3.

$(e) \Rightarrow (c)$ Dokazaćemo kontrapoziciju, $\neg(c) \Rightarrow \neg(e)$.

Neka je model $\mathfrak{M}$ neki prebrojiv model za $\mathbf{T}_<$. Po pretpostavci, $\mathfrak{M}$ ima jako krajnje elementarno proširenje $\mathfrak{M}_1$. Konstruišemo elementarni lanac

$$\mathfrak{M} \prec_e \mathfrak{M}_1 \prec_e \ldots \prec_e \mathfrak{M}_\gamma \prec_e \ldots, \qquad \gamma < \omega_1$$

dužine ω_1. Unija ovog lanca je ω_1-like model za $\mathbf{T}_<$. **Q.E.D.**

Mostowski i Fuhrken su postavili sledeće pitanje (videti [H. J. Keisler 5]):

Za koje parove kardinala κ, λ *svaka teorija* $\mathbf{T}$ *koja ima* κ*-like model ima i* λ*-like model?*

Implikacija $\neg(d) \Rightarrow \neg(e)$ daje delimičan (i ne nov—videti recimo u [Ž. Mijajlović 4]) odgovor na ovo pitanje:

KOROLAR *Svaka teorija* $\mathbf{T}$ *koja ima* κ*-like model za neki neprebrojiv kardinal* κ *ima i* ω_1*-like model.*

2 Modeli fragmenata Peanove aritmetike

Kao što je poznato, u svakom modelu $\mathfrak{M}$ za **PA** je moguće kodiranje konačnih nizova elemenata skupa M pojedinačnim elementima istog skupa. Ako broj $\mathbf{a}$ kodira n-torku brojeva $\langle \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_{n-1}\rangle$, sa $(\mathbf{a})_i$ označavamo $\mathbf{b}_i$ $(i = 0, 1, \ldots n-1)$. Veoma je značajna činjenica da je ovo kodiranje primitivno rekurzivno, dakle formalan zapis tvrđenja „$\mathbf{a}$ kodira n-torku $\langle \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_{n-1}\rangle$" je Σ_0-formula.

Za modele **PA** važi sledeća

TEOREMA 2.1 *(MacDowell–Specker-ova Teorema) Svaki model* **PA** *ima jako krajnje elementarno proširenje iste kardinalnosti. (videti* [R. MacDowell–E. Specker]*)*

U Teoremi 2.2. je dat dokaz da ovo tvrđenje ne važi za modele Σ_n-fragmenata **PA**. Ovde ćemo dati skicu dokaza Teoreme 2.1. (Veoma detaljan dokaz se može naći u [A. Blass]).

Lako se proveri da u standardnom modelu za **PA** važi sledeće

TVRĐENJE 2.1. *Neka je $f(a,b)$ binarna funkcija na skupu ω, i neka je X neograničen podskup od ω. Tada postoji neograničen skup $Y \subset X$ takav da za svaki $n \in \omega$ važi ili*

$$\exists p \exists m \in Y \forall x > m (x \in Y \rightarrow f(n,x) = p) \quad \textit{ili}$$

$$\forall p \exists m \in Y \forall x > m (x \in Y \rightarrow f(n,x) > p),$$

Tvrđenje se, primenom kodiranja u **PA**, lako poopšti za slučaj kada je funkcija f k-arna za neki $k > 1$.

SHEMA DOKAZA TEOREME 2.1

- Tvrđenje 2.1 formalizujemo u **PA**,
- dakle Tvrđenje 2.1 važi u svakom modelu za **PA**, i sada
- fiksiramo model $\mathfrak{M} \models$ **PA**. Sve formule sa tri slobodne promenjljive $\varphi(x,y,z)$ jezika $\mathfrak{L}_{\mathbf{PA}}$ poređamo u niz $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$. Svaka funkcija f definabilna sa parametrima u modelu $\mathfrak{M}$ je definabilna pomoću neke formule iz niza, recimo φ_k, i elementa $\mathbf{a} \in A$ sa $f(x) = y \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \varphi_k(x, \mathbf{a}, y)$ (primena kodiranja n-torki u **PA**!). Konstruišemo niz neograničenih (i definabilnih u $\mathfrak{M}$) skupova

$$M = X \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots$$

tako da se X_{k+1} dobija primenom Tvrđenja 2.1 na X_k i φ_k. Sa (i,∞) označimo skup $\{n \in M | i < n\}$. Skup $\{X_i | i \in \omega\} \cup \{(i,\infty) | i \in M\}$ je sadržan u nekom neglavnom ultrafiltru definabilnih skupova D, i $\mathcal{F}(\mathfrak{M})/D$ je traženo proširenje modela $\mathfrak{M}$. Ovo proširenje je pravo pošto ultrafilter D sadrži skup (i,∞) za svaki $i \in M$, a krajnje je pošto je svaka ograničena funkcija duž D jednaka konstanti. **Q.E.D.**

NAPOMENA Teorema 2.2 važi i za sve teorije **T** prebrojivog jezika $\mathfrak{L} \supset \mathfrak{L}_{\mathbf{PA}}$ koje su takve da postoji ekspanzija standardnog modela za **PA**, $(\omega, S, +, \cdot, <, 0)$ koja je model za **T**. Za teorije koje sadrže neko kompletno proširenje aritmetike različito od $Th(\omega, S, +, \cdot, <, 0)$ ovo u opštem slučaju ne važi, jer svaki prebrojiv nestandardni model aritmetike ima ekspanziju u kojoj ne važi shema regularnosti, naime ekspanziju $\mathfrak{A}$ u kojoj postoji bijekcija $f: \omega \rightarrow A$. (Videti [J. L. Bell–A. B. Slomson, str. 244–245]).

DEFINICIJA 2.1 *Kažemo da je formula ϕ Σ_n-' $(\Pi_n$-$)$ formula akko niz kvantifikatora u nekoj njenoj preneks normalnoj formi počinje sa $\exists$ $(\forall)$ i sadrži najviše $n-1$ promenu tipa kvantifikatora. Formula je Δ_n akko je i Σ_n i Π_n. Formule koje su Boole-ovske kombinacije Σ_n-formula i Π_n-formula (dakle one koje su* *dobijene od njih konačnom primenom konjunkcije i negacije) nazivamo* B_n*-formulama. Ako je* $\mathbf{T}$ *teorija,* $\mathbf{T}_\mathbf{n}$ *označava njen* Σ_n*-fragment, teoriju koja se sastoji od svih* Σ_n *rečenica koje su posledice teorije* $\mathbf{T}$.

Sledeća definicija predstavlja hijerarhijsko profinjenje Definicije 0.1.

DEFINICIJA 2.2 *Model* $\mathfrak{A}$ *je* Σ_n*-elementarno proširenje modela* $\mathfrak{A}$ *(*$\mathfrak{B} \prec_n \mathfrak{A}$*) akko za svaku* Σ_n*-formulu* $\varphi(x_1, \dots x_m)$ *i svaku m-torku* $\mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_m$ *elemenata iz* B *važi*

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_m) \qquad akko \qquad \mathfrak{B} \models \varphi(\mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_m).$$

Na sličan način definišemo krajnje Σ_n*-elementarno proširenje i jako krajnje* Σ_n*-elementarno proširenje.*

Primetimo da je Σ_n-elementarno proširenje isto što i Π_n- ili B_n-elementarno proširenje, uz očekivane definicije ovih pojmova.

Kažemo da teorija $\mathbf{T}$ *sadrži* neku shemu formula akko deduktivno zatvorenje teorije $\mathbf{T}$ sadrži tu shemu kao skup formula.

Neka je $\mathfrak{A}$ model za $\mathbf{PA}$. Za skup $B \subset A^k$ kažemo da je Σ_n*-definabilan sa parametrima* u modelu $\mathfrak{A}$ akko za neki prirodan broj l postoji Σ_n-formula ψ sa $l+k$ slobodnih promenljivih i l-torka $\mathbf{b}_1, \dots \mathbf{b}_l$ elemenata iz A takva da važi:

$$B = \{(\mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_k) | \mathfrak{A} \models \psi(\mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \dots \mathbf{b}_l)\}.$$

Kažemo da je n-arna funkcija f Σ_n*-definabilna* akko je njen graf definabilan kao podskup od A^{n+1}. $F_{\Sigma_n}(\mathfrak{A})$ označava skup svih Σ_n-definabilnih unarnih funkcija u modelu $\mathfrak{A}$, dok $\mathcal{D}_n(\mathfrak{A})$ označava skup svih Σ_n-definabilnih podskupova od A. Fiksirajmo maksimalni filter G nad $\mathcal{D}_n(\mathfrak{A})$. Sa $=_G$ označavamo relaciju jednakosti duž ultrafiltra G na skupu $F_{\Sigma_n}(\mathfrak{A})$. Na količničkoj strukturi $F_{\Sigma_n}(\mathfrak{A}) / =_G$ definišimo interpretacije relacijskih i funkcijskih simbola na isti način kao i u odeljku 0.2. Dobijeni model označavamo sa $F_{\Sigma_n}(\mathfrak{A})/G$.

Za model $F_{\Sigma_n}(\mathfrak{A})/G$ važi oslabljena verzija Łos-ove teoreme, naime $\mathfrak{A} \prec_n F_{\Sigma_n}(\mathfrak{A})/G$. Dokaz ovog tvrđenja se izvodi isto kao dokaz Łos-ove Teoreme za definabilni ultraprizvod u odeljku 0.2, jedino se korak za egzistencijalni kvantifikator izvodi samo do na Σ_n-formule φ. U ovom koraku bitnu ulogu igra mogućnost kodiranja k-torki. (Za dokaz videti recimo u [Ž. Mijajlović 3]).

U $\mathbf{PA}$ postoji Σ_n-formula SAT_{Σ_n} koja izražava Σ_n-definabilnost istine u $\mathbf{PA}$, drugim rečima

$$\mathbf{PA} \models \psi(x_1, \dots x_n) \leftrightarrow \mathrm{SAT}_{\Sigma_n}(\ulcorner \psi \urcorner, x_1, \dots x_n),$$

gde $\ulcorner \psi \urcorner$ označava Gödel-ov broj formule ψ (videti recimo u [C. Smorynski]).

LEMA 2.1 *Za svaki prirodan broj n postoji* Δ_{n+1}*-formula jezika* $\mathbf{PA}$, $\varphi(x, y)$ *i model* $\mathfrak{M}$ *za* $\mathbf{PA}_\mathbf{n} \cup \{\neg \mathcal{R}_<(\varphi)\}$*, i prema tome shema* $\mathcal{R}_<$ *nije sadržana u deduktivnom zatvorenju ni jednog* Σ_n*-fragmenta* $\mathbf{PA}$.

DOKAZ Označimo sa $\mathfrak{M}$ model $F_{\Sigma_n}(\mathfrak{N})/G$, gde je $\mathfrak{N}$ standardni model za $\mathbf{PA}$, $(\omega, S, +, \cdot, <, 0)$. Po Lemi 2.1, $\mathfrak{M} \models \mathbf{PA}_\mathbf{n}$.

Svaki element $\mathbf{a}$ modela $\mathfrak{M}$ je duž filtra G jednak nekoj Σ_n-definabilnoj funkciji f modela $\mathfrak{N}$ i postoji Σ_n-formula $\psi(x, y)$ takva da je

$$fm = n \qquad \text{akko} \qquad \mathfrak{N} \models \psi(m, n).$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} B &= \{n \in \omega | \mathfrak{N} \models \mathrm{SAT}_{\Sigma_n}(\ulcorner \psi \urcorner, n, fn)\} \\ &= \{n \in \omega | \mathfrak{N} \models \psi(n, fn)\} \\ &= \omega, \quad \text{i} \end{aligned}$$

$$\mathfrak{M} \models \mathrm{SAT}_{\Sigma_n}(\ulcorner \psi \urcorner, i_G, \mathbf{a}),$$

gde i_G označava $=_G$-klasu ekvivalencije dijagonale i skupa ω, definisane sa $i(n) = n$ za sve n iz ω. Zaključujemo da za svaki $\mathbf{a}$ iz M postoji $\mathbf{e} \in \omega$ takav da važi

$$\mathfrak{M} \models \mathrm{SAT}_{\Sigma_n}(\mathbf{e}, i_G, \mathbf{a}).$$

Definišimo formulu $\varphi(x,y)$ kao „x je najmanji Gödelov broj koji definiše y", u formalnom zapisu

$$\mathrm{SAT}_{\Sigma_n}(x, i_G, y) \wedge (\forall z < x)\neg\mathrm{SAT}_{\Sigma_n}(z, i_G, y).$$

Formula φ je očigledno Δ_{n+1}. Dokazano je da za svaki $\mathbf{y} \in M$ postoji standardni $\mathbf{x}$ takav da je

$$\mathfrak{M} \models \mathrm{SAT}_{\Sigma_n}(\mathbf{x}, i_G, \mathbf{y}),$$

dakle postoji $\mathbf{y}$ takav da je $\mathfrak{M} \models \varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ samo ako je $\mathbf{x}$ standardan. Preostaje da se dokaže da važi

$$\mathfrak{M} \models \neg\mathcal{R}_<(\varphi), \qquad \text{ili u razvijenom obliku:}$$

(2)
$$\mathfrak{M} \models \exists v[\forall x \exists y \forall u(x < v \rightarrow (\varphi(x,u) \rightarrow u < y)) \wedge \\ \forall y \exists x \exists u(x < v \wedge \varphi(x,u) \wedge y \leq u).$$

Za v fiksiramo neki nestandardni element $\mathbf{v}$ iz M. Neka je $\mathbf{x} < \mathbf{v}$. Dokažimo da važi prvi deo rečenice (2). Ako je $\mathbf{x} \in \omega$, tada postoji jedinstveni $\mathbf{u} \in M$ takav da $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{u})$ važi u $\mathfrak{M}$, i za y možemo da uzmemo $\mathbf{u}+1$. Ako $\mathbf{x}$ nije iz ω, tada ne postoji takav $\mathbf{u}$ u M, tako da za y možemo da uzmemo bilo koji $\mathbf{y}$ iz M.

Drugi deo rečenice sledi iz

$$\mathfrak{M} \models \forall y \forall u < y \exists x(x < \mathbf{v} \wedge \varphi(x,u)),$$

što je posledica činjenice da je svaki standardni $\mathbf{x}$ manji od $\mathbf{v}$. **Q.E.D.**

KOROLAR *Shema $\mathcal{R}_<$ nije sadržana u deduktivnom zatvorenju ni jednog konačnog fragmenta* **PA**.

Sada smo spremni za dokaz teoreme

TEOREMA 2.2 *Za svaki Σ_n-fragment* **T** *Peanove aritmetike postoji neproširiv prebrojiv model $\mathfrak{M} \models$* **T**.

DOKAZ Po Lemi 1.2 postoji prebrojiv model $\mathfrak{M} \models$ **T** koji ne modelira shemu $\mathcal{R}_<$, a po Teoremi 1.1 on nije proširiv. **Q.E.D.**

Naravno, tvrđenje Teoreme 2.2 važi i za konačne fragmente **PA**.

Dobro poznata posledica MacDowell–Speckerove teoreme je postojanje ω_1-like i κ-like (κ je regularan kardinal) modela za **PA**. Na osnovu Teoreme 1.3 i Teoreme 2.2 imamo sledeći

KOROLAR *Za regularan kardinal κ nijedna kompletna ekstenzija teorije* $\mathbf{PA_n}$ *koja ne sadrži shemu $\mathcal{R}_<$ nema κ-like model.*

U [K. McAloon] je dokazano sledeće poopštenje Teoreme 2.2:

TEOREMA 2.2$^+$ *Svaka teorija* **T** *koja je Σ_n-fragment nekog rekurzivnog proširenja* **PA** *ima neproširiv prebrojiv model.*

Dokazaćemo da ovakva teorema važi i za kompletna proširenja Peanove Aritmetike, dakle imamo:

TEOREMA 2.3 *Svaka teorija* **T** *koja je Σ_n-fragment nekog kompletnog proširenja* **PA** *ima neproširiv prebrojiv model.*

Neka je $\mathfrak{M}$ model za **PA**. Kažemo da je neki $\mathbf{a} \in M$ *Σ_n-definabilan* u modelu $\mathfrak{M}$ akko postoji Σ_n-formula $\varphi_\mathbf{a}$ jezika $\mathfrak{L}_{\mathbf{PA}}$ takva da je

$$\mathfrak{M} \models \varphi_\mathbf{a}(\mathbf{a}) \wedge \forall x(\varphi_\mathbf{a}(x) \rightarrow x = \mathbf{a}).$$

Primetimo da za svaku Σ_n-formulu $\varphi(x)$ konzistentnu sa $Th(\mathfrak{M})$ postoji najmanji element $\mathbf{a}_\varphi \in M$ takav da $\mathfrak{M} \models \varphi(\mathbf{a}_\varphi)$. Kažemo da formula φ definiše $\mathbf{a}_\varphi$. Podmodel modela $\mathfrak{M}$ čiji univerzum predstavljaju svi njegovi elementi koji su Σ_n-definabilni označavaćemo sa $\Sigma_n^{\mathfrak{M}}$.

Teorema 2.4 *Uz oznake iz prethodnog pasusa imamo:*

$$\mathfrak{M} \prec_n \Sigma_n^{\mathfrak{M}},$$

prema tome $\Sigma_n^{\mathfrak{M}}$ *je model* Σ_n*-fragmenta teorije* $Th(\mathfrak{M})$.

Napomena U slučaju modela $\Sigma_n^{\mathfrak{M}}$ pravimo izuzetak od uobičajene notacije i koristimo istu oznaku za model i njegov univerzum, pošto će iz konteksta uvek biti jasno da li je reč o modelu ili skupu

Dokaz Pretpostavimo da su Σ_n-formula $\varphi(x,y)$ i $\mathbf{a} \in \Sigma_n^{\mathfrak{M}}$ takvi da za njih važi

$$\mathfrak{M} \models \exists x \varphi(x, \mathbf{a})$$

Pošto je $\mathbf{a}$ Σ_n-definabilan u $\mathfrak{M}$ postoji neka Σ_n-formula $\varphi_{\mathbf{a}}$ takva da je:

$$\mathfrak{M} \models \exists x \exists y (\varphi(x,y) \land \varphi_{\mathbf{a}}(y))$$

Ako kodiramo uređeni par $\langle x, y\rangle$ nekim z dobijamo:

$$\mathfrak{M} \models \exists z (\varphi((z)_0, (z)_1) \land \varphi_{\mathbf{a}}((z)_1))$$

Formula $\varphi((z)_0,(z)_1) \land \varphi_{\mathbf{a}}((z)_1)$ je Σ_n, i ona definiše $\mathbf{b} \in M$ takav da

$$\mathfrak{M} \models (\varphi((\mathbf{b})_0, (\mathbf{b})_1) \land \varphi_{\mathbf{a}}((\mathbf{b})_1))$$

Pošto su $\mathbf{b}$ i $(\mathbf{b})_1$ Σ_n-definabilni u $\mathfrak{M}$, imamo $(\mathbf{b})_1 \in \Sigma_n^{\mathfrak{M}}$, što je i trebalo dokazati. Q.E.D.

Za posledicu ove Leme imamo to da su u $\Sigma_n^{\mathfrak{M}}$ svi elementi Σ_n-definabilni. Za ovakav model možemo da kažemo da je Σ_n-*atomički*. Iz sledeće Leme sledi Teorema 2.3.

Lema 2.2 *Za svaki prirodan broj* n *i svaku teoriju* $\mathbf{T}$ *koja je kompletno proširenje* **PA**, *postoji* Δ_{n+1}*-formula* $\varphi(x,y)$ *jezika* **PA** *i model* $\mathfrak{M}$ *za* $\mathbf{T}_n \cup \{\neg\mathcal{R}_<(\varphi)\}$, *i prema tome shema* $\mathcal{R}_<$ *nije sadržana u deduktivnom zatvorenju ni jednog* Σ_n*-fragmenta teorije* $\mathbf{T}$.

Dokaz Leme 2.2 je vrlo sličan dokazu Leme 2.1 (uostalom, kao i sama formulacija). Uzmimo neki model $\mathfrak{M} \models \mathbf{T}$. Po Teoremi 2.4 imamo $\Sigma_n^{\mathfrak{M}} \models \mathbf{T}_n$. Neka je G neki neglavni ultrafilter na $\mathcal{D}_n(\Sigma_n^{\mathfrak{M}})$. Sada konstruišimo model $F_{\Sigma_n}(\Sigma_n^{\mathfrak{M}})/G$ (i označimo ga sa $\mathfrak{M}_1$) koji je po Teoremi 2.4 takođe model za $\mathbf{T}_n$. Fiksirajmo neki $\mathbf{b} \in M_1$. On je $=_G$-klasa ekvivalencije neke Σ_n-definabilne funkcije f modela $\Sigma_n^{\mathfrak{M}}$. Prema tome, postoje Σ_n-formula $\psi(x,y,z)$ i $\mathbf{a}$ iz $\Sigma_n^{\mathfrak{M}}$ takvi da je

$$fm = n \quad \text{akko} \quad \Sigma_n^{\mathfrak{M}} \models \psi(m,n,\mathbf{a}).$$

Pošto je $\mathbf{a}$ Σ_n-definabilan, postoji Σ_n-formula $\varphi_{\mathbf{a}}$ koja ga definiše u $\Sigma_n^{\mathfrak{M}}$, i imamo

$$\begin{aligned} fm = n \quad &\text{akko} \quad \Sigma_n^{\mathfrak{M}} \models \exists x(\psi(m,n,x) \land \varphi_{\mathbf{a}}(x)),\\ &\text{akko} \quad \Sigma_n^{\mathfrak{M}} \models \theta(m,n). \end{aligned}$$

za neku Σ_n-formulu θ. Dalje,

$$\begin{aligned} B &= \{n \in \Sigma_n^{\mathfrak{M}} | \Sigma_n^{\mathfrak{M}} \models \mathrm{SAT}_{\Sigma_n}(\ulcorner\theta\urcorner, n, fn)\}\\ &= \{n \in \Sigma_n^{\mathfrak{M}} | \Sigma_n^{\mathfrak{M}} \models \theta(n, fn)\}\\ &= \Sigma_n^{\mathfrak{M}}, \quad \text{i} \end{aligned}$$

$$\mathfrak{M}_1 \models \mathrm{SAT}_{\Sigma_n}(\ulcorner\theta\urcorner, i_G, \mathrm{b}),$$

gde i_G označava $=_G$-klasu ekvivalencije dijagonale i univerzuma modela $\Sigma_n^{\mathfrak{M}}$. Zaključujemo da za svaki $\mathbf{b}$ iz $F_{\Sigma_n}(\Sigma_n^{\mathfrak{M}})/G$ postoji $\mathrm{e} \in \omega$ takav da

$$F_{\Sigma_n}(\Sigma_n^{\mathfrak{M}})/G \models \mathrm{SAT}_{\Sigma_n}(\mathrm{e}, i_G, \mathbf{b}).$$

ostatak dokaza je isti kao u Lemi 2.1. **Q.E.D.**

Nazovimo neku teoriju $\mathbf{T}$ *m-elementarno proširivom* akko svaki model za $\mathbf{T}$ ima krajnje Σ_m-elementarno proširenje koje je model za $\mathbf{T}$.

U [K. McAloon] je dokazano sledeće:

TEOREMA 2.4 *Svaki Π_{n+2} fragment svakog rekurzivnog proširenja* **PA** *ima prebrojiv model bez krajnjeg Π_n-elementarnog proširenja koje bi bilo model za Π_{n+2}. Dakle, Π_{n+2}-fragmenti* **PA** *nisu n-elementarno proširivi.*

Hijerarhijskim profinjavanjem dokaza MacDowell–Speckerove teoreme može se dobiti prirodan broj k takav da je svaki Σ_{n+k}-fragment **PA** n-elementarno proširiv. Pošto je za svaku Σ_n-formulu $\varphi(x,y)$ rečenica $\mathcal{R}_<(\varphi)$ Π_{n+3}, dakle nalazi se u Σ_{n+4}-fragmentu **PA**, imamo sledeće:

HIPOTEZA *Neka je $n \in \omega$ i $n > 4$. Za svaki prebrojiv model $\mathfrak{M}$ Σ_n-fragmenta* **PA** *postoji krajnje Σ_{n-4}-elementarno proširenje $\mathfrak{M}_1$.*

DIGRESIJA Za kraj ovog odeljka napravićemo malu razradu napomene navedene posle Teoreme 2.3 o tome da model $\Sigma_n^{\mathfrak{M}}$ možemo da nazovemo Σ_n-atomičkim. Pokazaćemo da takođe možemo da kažemo i da je on Σ_n-prost.

Definicije Σ_n- (Π_n-, B_n-) elementarno ekvivalentnih modela, Σ_n- (Π_n-, B_n-) elementarne klase modela, Σ_n- (Π_n-, B_n-) atomičke teorije se lako izvode iz standardnih, pa ih nećemo navoditi. Standardne definicije se mogu naći recimo u [C. C. Chang–H. J. Keisler]. Primetimo samo da Σ_n-elementarna klasa nije u opštem slučaju isto što i klasa svih modela neke Σ_n-teorije, već klasa modela neke maksimalno konzistentne B_n-teorije. Pošto je ovo samo digresija, ne navodimo dokaze tvrđenja.

Ako posmatramo neku Σ_n-elementarnu klasu modela $\mathcal{M}$ takvih da je njihova Σ_n-teorija atomička, i neki model $\mathfrak{M} \in \mathcal{M}$, presek svih modela iz ove klase je model $\Sigma_n^{\mathfrak{M}}$, i on je Σ_n-elementarno uloživ u sve modele iz $\mathcal{M}$, dakle Σ_n-prost za klasu $\mathcal{M}$.

3 Dvokardinalne teoreme

Neka je $\mathbf{T}$ teorija čiji jezik sadrži unarni relacijski simbol U. Za neki model $\mathfrak{A}$ teorije $\mathbf{T}$, U_A označava skup $\{x \in A | \mathfrak{A} \models U(x)\}$. Neka su κ i λ bekonačni kardinali. Kaže se da teorija $\mathbf{T}$ *dozvoljava* par kardinala (κ, λ) akko $\mathbf{T}$ ima (κ, λ)-*model*, to jest model $\mathfrak{A}$ takav da je $|A| = \kappa$ i $|U_A| = \lambda$. Ako je $\kappa > \lambda$ kažemo da je model $\mathfrak{A}$ *dvokardinalan*. Ako postoji dvokardinalan model za teoriju $\mathbf{T}$, kažemo da $\mathbf{T}$ *dozvoljava dvokardinalne modele*.

Za četvorku beskonačnih kardinala $\kappa, \lambda, \kappa_1, \lambda_1$ formulu

$$(\kappa, \lambda) \Rightarrow (\kappa_1, \lambda_1) \tag{3}$$

interpretiramo kao „Svaka teorija koja dopušta (κ, λ) dopušta i (κ_1, λ_1)". Jedno od opštih pitanja kojima se bavi teorija modela je: Za koje četvorke kardinala važi (3)? Rezultate ovog tipa nazivamo dvokardinalnim teoremama. Kratak pregled važnijih rezultata iz ove oblasti može se naći u [R. Vaught].

Verovatno najstarija dvokardinalna teorema je Vaught-ova teorema:

Teorema 3.0.1 (Vaught-ova teorema o dva kardinala) *Ako je teorija $\mathbf{T}$ dozvoljava dvokardinalne modele, onda $\mathbf{T}$ dozvoljava i (ω_1, ω). ($(\kappa, \lambda) \Rightarrow (\omega_1, \omega)$ za bilo koji par kardinala (κ, λ) takav da je $\kappa > \lambda$).*

Vaught je dokazao ovu teoremu primenom homogenih modela. Mi je nećemo posebno dokazivati, pošto je ona posledica Keisler-ove Teoreme o dva kardinala, koja će biti dokazana u odeljku „Šest dokaza jedne teoreme".

Chang je formulisao sledeće poopštenje Vaught-ove teoreme, koje može da se shvati i kao dvokardinalna verzija donje Löwenheim-Skolemove teoreme:

Chang-ova Hipoteza *Za model $\mathfrak{A}$ iz Teoreme 1.1 postoji $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{A}$ takav da je $\mathfrak{C}$ (ω_1, ω)-model.*

U [F. Rowbottom] je dokazano da je ova Hipoteza nekonzistentna sa Gödel-ovom aksiomom konstruktibilnosti, $V = L$. S druge strane, Chang-ova Hipoteza je konzistentna kao posledica nekih kombinatornih tvrđenja (videti recimo u [S. Todorčević 1]). Spomenimo još da je Chang dao i dvokardinalnu teoremu koja predstavlja poopštenje Vaught-ove teoreme na neprebrojive kardinalnosti i važi uz GCH (Teorema 3.2.2). Za nas je sada interesantna Keisler-ova teorema o dva kardinala:

Teorema 3.0.2 (Keisler-ova teorema o dva kardinala) *Neka je $\mathbf{T}$-teorija na jeziku koji sadrži unarni relacijski simbol U, i neka je model $\mathfrak{A}$ (κ, λ)-model teorije $\mathbf{T}$ (κ i λ su beskonačni kardinali i $\kappa > \lambda$). Tada postoje modeli $\mathfrak{B}$ i $\mathfrak{C}$ takvi da je $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{C}$, $|B| = \omega$, $|C| = \omega_1$ i $U_B = U_C$.*

Dokazaćemo da se ova Teorema po jačini nalazi između Vaught-ove teoreme i Chang-ove hipoteze, dakle

Teorema 3.0.3 *Važi sledeće:*

(a) Teorema 3.0.2 $\Rightarrow$ Teorema 3.0.1

(b) Chang-ova Hipoteza $\Rightarrow$ Teorema 3.0.2

Dokaz
(a) Pretpostavimo da je Teorema 3.0.2 tačna. Model $\mathfrak{C}$ je upravo (ω_1, ω)-model.

(b) Ako Chang-ova Hipoteza važi i $\mathfrak{C}$ je kao iz Chang-ove Hipoteze, za model $\mathfrak{B}$ možemo da uzmemo bilo koji prebrojiv elementaran podmodel modela $\mathfrak{C}$ koji sadrži skup $U_{\mathfrak{C}}$, i Keisler-ova Teorema važi. **Q.E.D.**

Keisler je u [H. J. Keisler 6] dao aksiomatsku karakterizaciju teorija prvog reda koje dozvoljavaju dvokardinalne modele. Dakle, dokazano je da teorija $\mathbf{T}$ čiji jezik sadrži unarni relacijski simbol U dozvoljava dvokardinalne modele akko sadrži shemu svih aksioma oblika:

$$\exists v_0 \forall x_0 \exists y_0 z_0 \ldots \forall x_n \exists y_n z_n$$

$$\Big[\bigwedge_{i=0}^{n} v_0 \neq y_i \wedge \bigwedge_{i,j=0}^{n} ((U(x_j) \wedge x_i = z_i) \rightarrow y_i = x_j) \wedge$$

$$\bigwedge_{j=0}^{m} (\varphi_j(x_1, \ldots x_n) \rightarrow \varphi_j(y_1, \ldots y_n))\Big],$$

gde je $n \in \omega$ i $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_m$ niz formula jezika $\mathfrak{L}_{\mathbf{T}}$ čije su slobodne promenljive među $x_0, x_1, \ldots x_n$.

3.1 Šest dokaza jedne teoreme

Pošto je Keisler-ova teorema usko povezana sa krajnjim elementarnim proširenjima prebrojivih modela, ovaj odeljak posvećujemo prikazima poznatih dokaza ove teoreme. Prvi dokaz ove teoreme je dat u [H. J. Keisler 1], kasnije se pojavilo još nekoliko dokaza ([H. J. Keisler 4], [C. C. Chang–H. J. Keisler], [Ž. Mijajlović 1], [Ž. Mijajlović 2], [Ž. Mijajlović 4]). Svi ovi dokazi, kao što ćemo videti, imaju neke osnovne ideje iste—jezik se proširuje i pravi se ekspanzija modela $\mathfrak{A}$ sa novom relacijom $<$ koja dobro uređuje skup A, i zatim se dokazuje da svaki prebrojiv model $\mathfrak{B}$ teorije dobijenog modela može da se proširi tako da je skup $U_{\mathfrak{B}}$ u proširenju isti kao i u modelu $\mathfrak{B}$. Napomenimo da postoji i poopštenje ove teoreme za logiku $L_{\omega_1\omega}$ ([H. J. Keisler 3]).

Dokaz A [H. J. Keisler 1] U ovom članku je prikazano nekoliko model-teoretskih primena ω-logike. Pod *ω-logikom* se podrazumeva jezik $\mathfrak{L}^{\omega}$ koji se dobija kada se nekom jeziku prvog reda $\mathfrak{L}$ dodaju novi unarni relacijski simbol N i konstantni simboli $0, 1, 2, \ldots$ Model za $\mathfrak{L}^{\omega}$ je *ω-model* akko je u njemu $N = \{0, 1, \ldots\}$. Sledeća teorema formuliše potrebne uslove da neka teorija T u ω-logici ima ω-model.

Teorema 3.A.1 ([S. Orey]) *Neka je T teorija u ω-logici. Ako T ima model i ispunjava uslove*

(1) $N(0), N(1), \ldots$ su posledice teorije T,

(2) Za svaku formulu sa jednom slobodnom promenljivom $\varphi(x)$ važi sledeće: Ako su $\varphi(0), \varphi(1), \ldots$ posledice teorije T, onda važi i $T \models \forall x N(x) \leftrightarrow \varphi(x)$,

tada teorija T ima ω-model.

Za teoriju koja zadovoljava uslove (1) i (2) kažemo da je *ω-kompletna*.

Dokaz 1. je ilustrovan na Shemi 3.A

$$\begin{array}{llll}
(\mathfrak{A}_0, U_{\mathfrak{A}_0}) \succ (\mathfrak{A}, U_{\mathfrak{A}}) \xrightarrow{exp} (\mathfrak{A}, U_{\mathfrak{A}}, <) = \mathfrak{A}^+ \equiv & & & \\
\equiv (\mathfrak{B}, U_{\mathfrak{B}}, <)^* & \xrightarrow{exp} (\mathfrak{B}, U_{\mathfrak{B}}, <, N, \mathbf{b}, 0, 1, \ldots)^*_{\mathbf{b}\in B} = \mathfrak{B}^+ & \xrightarrow{red} & (\mathfrak{B}, U_{\mathfrak{B}})^* \\
\quad \wedge & & & \\
(\mathfrak{B}_1, U_{\mathfrak{B}_1}, <)^* & \xleftarrow{red} (\mathfrak{B}_1, U_{\mathfrak{B}}, <, N, \mathbf{b}, 0, 1, \ldots)^*_{\mathbf{b}\in B} & & \\
\quad \wedge & & & \wedge \\
\quad \vdots & & & \\
(\mathfrak{C}, U_{\mathfrak{B}}, <) & \xrightarrow{red} & & (\mathfrak{C}, U_{\mathfrak{B}})
\end{array}$$

Gde

$\mathfrak{C} \xrightarrow{exp} \mathfrak{D}$ stoji za „Model $\mathfrak{D}$ je ekspanzija modela $\mathfrak{C}$“, i

$\mathfrak{C} \xrightarrow{red} \mathfrak{D}$ stoji za „Model $\mathfrak{D}$ je redukt modela $\mathfrak{C}$“.

Modeli označeni sa * su prebrojivi.

Shema 3.A

Dokaz teče ovako:

Na osnovu donje Lövenheim-Skolemove teoreme model $\mathfrak{A}$ ima elementaran podmodel kardinalnosti λ^+ koji sadrži skup $U_{\mathfrak{A}}$, tako da možemo da pretpostavimo da je model $\mathfrak{A}$ (λ^+, λ)-model. (Na shemi je početni (κ, λ)-model označen sa $\mathfrak{A}_0$).

Sada se konstruiše ekspanzija modela $\mathfrak{A}$ na jezik $\mathfrak{L}^+ = \mathfrak{L} \cup \{<\}$ takva da je skup A dobro uređen relacijom $<$ sa tipom uređenja λ^+. Na Shemi 3.A ovaj model je označen sa $\mathfrak{A}^+$. U modelu $\mathfrak{A}^+$ za svaku formulu $\varphi(x)$ jezika $\mathfrak{L}^+$ sa jednom slobodnom promenljivom x važi sledeća rečenica:

$$
\begin{aligned}
(4) \qquad & (\forall v_1, \ldots v_n)[\forall z \exists y \exists x (z < y \wedge \varphi(x) \wedge \psi(xyv_1, \ldots v_n)) \\
& \rightarrow \exists x \forall z \exists y (z < y \wedge \varphi(x) \wedge \psi(xyv_1, \ldots v_n))],
\end{aligned}
$$

koju možemo da zapišemo na sledeći, pregledniji, način:

$$
\begin{aligned}
& (\forall v_1, \ldots v_n)[\exists_l y \exists x \in \varphi_{\mathfrak{A}} \psi(x, y, v_1, \ldots v_n) \\
& \rightarrow \exists x \in \varphi_{\mathfrak{A}} \exists_l y \psi(x, y, v_1, \ldots v_n)].
\end{aligned}
$$

($\exists_l y \psi(y)$ je skraćenica za $\forall x \exists y (y > x \wedge \psi(y))$, „postoji kofinalno mnogo y za koje važi $\psi(y)$", dok $\varphi_{\mathfrak{A}}$ označava skup svih x iz A za koje $\mathfrak{A} \models \varphi(x)$.).

Ovo sledi iz činjenice da je kardinal κ^+ regularan.

Neka je $(\mathfrak{B}, U_{\mathfrak{B}}, <)$ neki prebrojiv model elementarno ekvivalentan sa $\mathfrak{A}$. Pošto je skup $U_{\mathfrak{B}}$ prebrojiv, formiramo ekspanziju $\mathfrak{B}^+$ ovog modela na jezik $\mathfrak{L}^+ \cup \{N, 0, 1, \ldots\}$ tako da $\mathfrak{B}^+ = (\mathfrak{B}, U_{\mathfrak{B}}, <, N, 0, 1, \ldots)$ bude ω-model i da važi $\mathfrak{B}^+ \models \forall x (N(x) \leftrightarrow U(x))$. Neka je c nova konstanta. Definišimo teoriju $\mathbf{T}$ sa $\mathbf{T} = Th(\mathfrak{B}^+, \mathbf{b})_{\mathbf{b} \in B} \cup \{\mathbf{b} < c | \mathbf{b} \in B\}$. Sledeće tvrđenje predstavlja „srce" ovog dokaza:

TVRĐENJE 3.A.1 *Teorija $\mathbf{T}$ ima ω-model. (ω-model teorije $\mathbf{T}$ je na Shemi 3.A označen sa $\mathfrak{B}_1$).*

Primetimo usput i sledeće:

TVRĐENJE *Za svaka dva ω-modela $\mathfrak{C}$ i $\mathfrak{D}$ takva da je $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{D}$ važi $N_{\mathfrak{C}} = N_{\mathfrak{D}}$. ($N_{\mathfrak{A}}$ označava interpretaciju skupa N u modelu $\mathfrak{A}$.*

DOKAZ Ako za neki $\mathbf{d} \in D$ važi $\mathfrak{D} \models N(\mathbf{d})$, onda postoji $n \in \omega$ takav da je $\mathfrak{D} \models \mathbf{d} = n$, i prema tome je $\mathbf{d} \in C$. Ovim je dokazano $N_{\mathfrak{D}} \subset N_{\mathfrak{C}}$, drugi smer je trivijalan. **Q.E.D.**

Iz Tvrđenja 3.A.1 dobijamo sledeće

TVRĐENJE 3.A.2 *Svaki prebrojiv model $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ ima elementarno proširenje $\mathfrak{B}_1$ takvo da je $U_{\mathfrak{B}} = U_{\mathfrak{B}_1}$.*

Na osnovu Tvrđenja 3.A.2, možemo da izgradimo elementarni lanac modela dužine ω_1,

$$
\mathfrak{B} \prec \mathfrak{B}_1 \prec \mathfrak{B}_2 \prec \ldots \prec \mathfrak{B}_\gamma \prec \ldots \qquad \gamma < \omega_1,
$$

takav da je $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$, i za sve modele $\mathfrak{B}_\gamma$, $\gamma < \omega_1$ važi $U_{\mathfrak{B}} = U_{\mathfrak{B}_\gamma}$, kao i za model $\mathfrak{C} = \bigcup_{\gamma < \omega_1} \mathfrak{B}_\gamma$, tako da uzimanjem redukata modela $\mathfrak{B}$ i $\mathfrak{C}$ dobijamo tvrđenje teoreme. Ovaj lanac je na Shemi 3.A. predstavljen vertikalnim tačkicama.

Preostaje nam još samo da opišemo

DOKAZ TVRĐENJA 3.A.1 Treba dokazati da $\mathbf{T}$ zadovoljava uslove Teoreme 3.A.1 Na osnovu Teoreme o kompaktnosti za predikatski račun prvog reda, $\mathbf{T}$ ima model. Na osnovu iste ove teoreme imamo

TVRĐENJE 3.A.3 *Rečenica $\psi(c)$ je konzistentna sa $\mathbf{T}$ akko važi $\mathfrak{B}^+ \models \forall x \exists y (y > x \wedge \psi(y))$.*

(Dokaz nije naveden iz dva razloga—prvi, pošto nije težak, i drugi, pošto Lema 4.3 koja je dokazana u delu 4 predstavlja poopštenje ovog Tvrđenja.)

Takođe, za svaku formulu $\psi(x, \ldots)$ jezika $\mathfrak{L}^+ \cup \{N, 0, 1, \ldots\}$ postoji formula jezika $\mathfrak{L}^+$ koju označavamo sa $\psi'(x, \ldots)$ takva da

$$
\mathbf{T} \models \forall x \ldots (\psi(x, \ldots) \leftrightarrow \psi'(x, \ldots)).
$$

Uz ovo i shemu (4) dokaz Tvrđenja 3.A.1 je čisto tehnička stvar. **Q.E.D.**

DOKAZ B [H. J. Keisler 4] U ovom članku je ukazano na vezu između model-teoretskog forsinga i Teoreme o ispuštanju tipova. Kao i u [H. J. Keisler 1], dokaz Teoreme 3.0.2 je samo jedan od primera primene ovog aparata. Daćemo samo kratak opis osnovnih teorema iz članka, jer bi potpuniji opis znatno prevazišao okvir ovog rada. Podsetimo se da je $L_{\omega_1\omega}$ jezik u kom sintaksna pravila osim standardnih načina formiranja formula dozvoljavaju i disjunkcije prebrojivih skupova formula. (Videti [H. J. Keisler 3]).

DEFINICIJA 3.B.1 *Neka je Φ skup formula jezika $L_{\omega_1\omega}$. Rečenica φ jezika $L_{\omega_1\omega}$ je $\forall\vee\exists$ nad Φ akko je oblika*

$$\forall x_1 \ldots x_m \bigvee_{n<\omega} \exists y_1 \ldots y_{i_n}(\varphi_{n1} \wedge \varphi_{n2} \wedge \ldots \wedge \varphi_{nj_n}),$$

gde su sve formule φ_{ni} $(1 \leq i \leq j_n)$ iz skupa Φ.

Klasa modela $\mathcal{M}$ je $\forall\vee\exists$-klasa nad Φ akko je to elementarna klasa koja ima skup aksioma koje su $\forall\vee\exists$ rečenice nad Φ. Skup rečenica p je ispunjiv u $\mathcal{M}$ akko postoji model $\mathfrak{M} \in \mathcal{M}$ takav da važi $\mathfrak{M} \models p$.

Neka je C prebrojiv skup novih konstantnih simbola. Za neki skup formula Φ, $\Phi(C)$ označava skup svih rečenica dobijenih zamenom svih slobodnih promenljivih u formulama iz Φ konstantnim simbolima iz C.

Možemo da primetimo da je u modelu $\mathfrak{A}$ $\forall\vee\exists$-rečenica iz Definicije 3.B.1 zadovoljena akko $\mathfrak{A}$ ispušta m-tip

$$\Sigma_n = \{\exists y_1 \ldots y_{i_n} \neg(\varphi_{n1} \wedge \varphi_{n2} \wedge \ldots \wedge \varphi_{nj_n}) | n < \omega\}.$$

TEOREMA 3.B.1, PROŠIRENA TEOREMA O ISPUŠTANJU TIPOVA *Neka je $\mathcal{M}$ $\forall\vee\exists$-klasa nad Φ i neka su*

$$\varphi_n = \forall x_1 \ldots x_{m_n} \psi_n(x_1, \ldots x_{m_n}) \qquad n \in \omega,$$

$\forall\vee\exists$-rečenice nad Φ. Ako je za svako n, svaki konačan skup $p \subset \Phi(C)$ koji je ispunjiv u $\mathcal{M}$ i svaku m_n-torku $\langle c_1, \ldots c_{m_n}\rangle \in C^{m_n}$ skup $p \cup \{\psi_n(c_1, \ldots c_{m_n})\}$ ispunjiv u $\mathcal{M}$, onda $\mathcal{M}$ sadrži prebrojiv model u kojem svako φ_n važi.

Shema 3.B predstavlja ovaj dokaz.

$$
\begin{array}{lllll}
(\mathfrak{A}_0, U_{\mathfrak{A}_0}) \succ (\mathfrak{A}, U_{\mathfrak{A}}) \xrightarrow{exp} (\mathfrak{A}, U_{\mathfrak{A}}, <) = \mathfrak{A}^+ \equiv & & & & \\
\equiv (\mathfrak{B}, U_{\mathfrak{B}}, <)^* & \xrightarrow{exp} & (\mathfrak{B}, U_{\mathfrak{B}}, <, \mathbf{b})^*_{\mathbf{b}\in B} & \xrightarrow{red} & (\mathfrak{B}, U_{\mathfrak{B}})^* \\
 & & \wedge & & \\
 & & (\mathfrak{B}_1, U_{\mathfrak{B}}, <, \mathbf{b})^*_{\mathbf{b}\in B} & & \\
 & & \wedge & & \wedge \\
 & & \vdots & & \\
 & & (\mathfrak{C}, U_{\mathfrak{B}}, <, \mathbf{b})_{\mathbf{b}\in B} & \xrightarrow{red} & (\mathfrak{C}, U_{\mathfrak{B}})
\end{array}
$$

(Oznake su iste kao na Shemi 3.A)

Shema 3.B

Sa sheme vidimo da je jedina suštinska razlika između Dokaza A i Dokaza B u tome što se ovde ne koristi ω-logika. „Vertikalan" korak (sa sheme, korak u kojem se konstruiše prebrojivo proširenje $\mathfrak{B}_1$ modela $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}^+$ takvo da je $U_{\mathfrak{B}} = U_{\mathfrak{B}_1}$) je izveden tako što je dokazano da teorija

$$\mathbf{T} = Th((\mathfrak{B}, U_{\mathfrak{B}}, <, \mathbf{b})_{\mathbf{b}\in B}) \cup \{\mathbf{a} < c | \mathbf{a} \in B\}$$

zadovoljava uslove Teoreme 3.B.1 za sve $\forall\vee\exists$-rečenice $\varphi_{\mathbf{a}} = \forall x(\neg x < \mathbf{a} \vee \bigvee_{\mathbf{b}\in B}(x = \mathbf{b}))$, gde je $\mathbf{a}$ iz B. Prema tome, po Teoremi 3.B.1 teorija $\mathbf{T}$ ima prebrojiv model $\mathfrak{B}_1$ u kom su sve rečenice $\varphi_{\mathbf{a}}$ istinite. Model $\mathfrak{B}_1$ je pravo krajnje elementarno proširenje modela $\mathfrak{B}$. Pošto je skup $U_{\mathfrak{B}}$ ograničen u modelu $\mathfrak{B}$, za neki $\mathbf{b} \in B$ imamo $\mathfrak{B} \models \forall x(U(x) \rightarrow x < \mathbf{b})$, dakle $U_{\mathfrak{B}} = U_{\mathfrak{B}_1}$. Ostatak dokaza je identičan sa odgovarajućim delom Dokaza A.

Dokaz C [C. C. Chang–H. J. Keisler] Postoje samo dve bitne razlike između ovog i prethodnog dokaza:

(a) Koristi se standardna varijanta proširene Teoreme o ispuštanju tipova, i

(b) U „vertikalnom“ koraku se ne konstruiše krajnje proširenje modela $\mathfrak{B}$, već proširenje koje je takvo da su svi novi elementi veći od svih elemenata iz skupa U_B—dakle, proširenje koje je krajnje „do na skup U_B“.

Zbog ovoga se nećemo mnogo zadržavati na ovom dokazu. Osvrnimo se na razliku (b). Primetimo da je i proširenje iz „vertikalnog“ koraka u Dokazu A krajnje do na skup U_B, jer skup $U_{\mathfrak{B}}$ predstavlja početni komad modela $\mathfrak{B}$ za uređenje $<$. (On ne može da bude kofinalan, jer bi inače u modelu $\mathfrak{B}$ važilo $\forall x \exists y > x(U(y))$.

Dokaz D [Ž. Mijajlović 1] Ovaj članak se bavi egzistencijom krajnjih proširenja prebrojivih modela. Dokazano je da je svaki prebrojiv model u kojem je relacija ρ (u odnosu na koju tražimo proširenje) regularna proširiv, i dokaz Teoreme 3.0.2 je jedna od primena navedenih u članku.

Kao što je rečeno u napomeni posle Teoreme 1.1, ovde su dati dovoljni uslovi da prebrojiv model bude proširiv (uslovi **C1**, **C2.** i **C3.**), i ovi uslovi su po Teoremi 1.2 i potrebni.

Shema ovog dokaza je ista kao i Shema 3.B. Ono po čemu se ovaj dokaz razlikuje je način izvođenja „vertikalnog“ koraka, gde se i koristi egzistencija krajnjeg proširenja modela.

U dokazu ključno mesto zauzima sledeća Lema, koja predstavlja varijantu Tvrđenja 3.A.3. Teoriju $Th((\mathfrak{B}, U_{\mathfrak{B}}, <, \mathbf{b})_{\mathbf{b}\in B})$ označavamo sa $\mathbf{T}_<$.

Lema 3.D.1 [Ž. Mijajlović 1, Lema 2] (uporediti sa Tvrđenjem 3.A.3 i Lemom 4.2) *Neka je $\varphi(x)$ formula jezika $\mathfrak{L}_{\mathbf{T}_<}$ sa jednom slobodnom promeljivom. Tada je $\varphi(c)$ nekonzistentno sa $\mathbf{T}_<$ akko je skup $\{x|\mathfrak{B} \models \varphi(x)\}$ ograničen u modelu $\mathfrak{B}$ nekim $\mathbf{a} \in B$, drugim rečima $\mathfrak{B} \models \forall x(\varphi(x) \to x < \mathbf{a})$. (Napomenimo da su ova i sledeća Lema u članku dokazane za bilo koju regularnu relaciju ρ).*

Ova Lema daje semantičku karakterizaciju formula konzistentnih sa teorijom $\mathbf{T}_<$ u modelu $\mathfrak{B}$, tako da se metamatematičko tvrđenje „Teorija $\mathbf{T}_<$ ispušta tip $\Sigma_{\mathbf{a}}$“ pretvara u iskaz o modelu $\mathfrak{B}$.

Lema 3.D.1 se koristi u dokazu sledeće Leme:

Lema 3.D.2 [Ž. Mijajlović 1, Lema 3] *Teorija* $\mathbf{T}_<$ *lokalno ispušta sve tipove oblika*

$$\Sigma_{\mathbf{a}} = \{x < \mathbf{a}\} \cup \{x \neq \mathbf{b} | \mathfrak{B} \models \mathbf{b} < \mathbf{a}\}, \qquad \mathbf{a} \in B.$$

Po Teoremi o ispuštanju tipova teorija $\mathbf{T}_<$ ima prebrojiv model koji ispušta sve ove tipove, i lako se proverava da je ovaj model krajnje elementarno proširenje modela $\mathfrak{B}$.

Dokaz Leme 3.D.2 (uporediti sa dokazom Leme 4.3) Pretpostavimo suprotno, dakle da postoje $\mathbf{a} \in B$ i rečenica $\exists x \varphi(x, c)$ jezika $\mathfrak{L}_{\mathbf{T}_<}$ takvi da je za svaku rečenicu $\sigma \in \Sigma_{\mathbf{a}}$ rečenica $\exists x(\varphi(x, c) \wedge \neg\sigma)$ nekonzistentna sa $\mathbf{T}_<$. Dakle rečenice $\exists x(\varphi(x, c) \wedge \neg x < \mathbf{a})$ i $\exists x(\varphi(x, c) \wedge x = \mathbf{b})$ za svaki $\mathbf{b} \in B$, $\mathbf{b} < \mathbf{a}$ su nekonzistentne sa $\mathbf{T}_<$. Iz ovoga i Leme 3.D.1 dobija se kontradikcija. **Q.E.D.**

Dokaz E [Ž. Mijajlović 2] Logika $L(\mathbf{Q})$ je proširenje logike prvog reda koje dobijamo ako jeziku dodamo novi simbol $\mathbf{Q}$ i novo pravilo formiranja formula—ako je φ formula jezika logike $L(\mathbf{Q})$, onda je i $\mathbf{Q}x\varphi$ formula istog jezika. Interpretacija za $\mathbf{Q}$ je sledeća: $\mathfrak{A} \models \mathbf{Q}x\varphi(x)$ akko je skup $\{x \in A | \mathfrak{A} \models \varphi(x)\}$ neprebrojiv. Kažemo da je model logike $L(\mathbf{Q})$ u kojem ovo važi za svaku formulu φ ***standardni model.***

Navešćemo bez dokaza neke osnovne teoreme o logici $L(\mathbf{Q})$. Detaljan prikaz ove logike može se naći u [H. J. Keisler 2]. Uz sledeće aksiome koje je dao Keisler važi Teorema kompletnosti za $L(\mathbf{Q})$. (φ i ψ su proizvoljne formule jezika $L(\mathbf{Q})$).

Definicija 3.E.1 *Keisler-ove aksiome za* $L(\mathbf{Q})$:

$K1.$ $\neg \mathbf{Q}x(x = y \vee x = z)$,
(„skup kardinalnosti dva nije neprebrojiv“)
$K2.$ $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\mathbf{Q}x\varphi \to \mathbf{Q}x\psi)$,
(„kvantifikator $\mathbf{Q}$ je monoton“)

$K3.\quad \mathbf{Q}x\varphi(x) \leftrightarrow \mathbf{Q}y\varphi(y)$,
(smena promenljive, y se ne pojavljuje slobodno u $\varphi(x)$)
$K4.\quad \mathbf{Q}y\exists x\varphi \rightarrow \exists x\mathbf{Q}y\varphi \vee \mathbf{Q}x\exists y\varphi$,
(„unija prebrojivih skupova je prebrojiv skup")
$K5.\quad \mathbf{Q}x(x = x)$,
(„univerzum je neprebrojiv").

DEFINICIJA 3.E.2 Teorija $\mathbf{T}$ jezika $L(\mathbf{Q})$ *lokalno ispušta* tip $\Sigma(x)$ akko

(a) Za svaku formulu $\exists x\varphi(x)$ konzistentnu sa $\mathbf{T}$ postoji formula $\psi(x) \in \Sigma(x)$ takva da je rečenica $\exists x(\varphi(x) \wedge \neg\psi(x))$ konzistentna sa $\mathbf{T}$, i

(b) Postoji formula $\psi(x) \in \Sigma(x)$ takva da važi $\mathbf{T} \models \neg\mathbf{Q}x\psi(x)$.

TEOREMA 3.E.1 ([H. J. Keisler 2]) Ako teorija $\mathbf{T}$ lokalno ispušta tip Σ, onda ona ima standardni model koji ispušta tip Σ.

Tema ovog članka je mogućnst eliminacije kvantifikatora $\mathbf{Q}$ iz teorija čiji jezik sadrži binarni relacijski simbol ρ. Dokazano je da kvantor $\mathbf{Q}$ uveden definicijom $\mathbf{Q}x\varphi(x) \Leftrightarrow \exists_l x\varphi(x)$ (za definiciju kvantifikatora $\exists_l$ videti Dokaz A) zadovoljava Keisler-ove aksiome za logiku $L(\mathbf{Q})$ (definicija 3.E.1). Prema tome, postoji standardni model za teoriju

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{T} \cup \{\mathbf{Q}\varphi(x) \leftrightarrow (\exists_l x)\varphi(x) | \varphi(x) \text{ je formula jezika } \mathfrak{L}_{\mathbf{T}} \cup \{\mathbf{Q}\}\}.$$

Kao ilustracija ove teoreme naveden je i sledeći dokaz Keisler-ove Teoreme o dva kardinala. Shema dokaza je predstavljena na Shemi 3.E.

$$\begin{array}{llllll}
(\mathfrak{A}_0, U_{\mathfrak{A}_0}) & \succ & (\mathfrak{A}, U_{\mathfrak{A}}) & \xrightarrow{exp} & (\mathfrak{A}, U_{\mathfrak{A}}, <) = \mathfrak{A}^+ & \xrightarrow{exp} \\
 & \xrightarrow{exp} & (\mathfrak{A}, U_{\mathfrak{A}}, <, \mathbf{Q}) = \mathfrak{A}^{++} & \equiv & & \\
 & \equiv & (\mathfrak{B}, U_{\mathfrak{B}}, <, \mathbf{Q}, \mathbf{b})^*_{\mathbf{b}\in B} & \xrightarrow{red} & (\mathfrak{B}, U_{\mathfrak{B}})^* & \\
 & & \wedge & & \wedge & \\
 & & (\mathfrak{C}, U_{\mathfrak{B}}, <, \mathbf{Q}, \mathbf{b})_{\mathbf{b}\in B} & \xrightarrow{red} & (\mathfrak{C}, U_{\mathfrak{B}}). &
\end{array}$$

(Oznake su iste kao na Shemi 3.A)

Shema 3.E

Pošto je tok ovog dokaza standardan zaključno sa konstrukcijom modela $\mathfrak{A}^+$, opis počinjemo od sledećeg koraka, konstrukcije modela $\mathfrak{A}^{++}$. Ovaj model predstavlja ekspanziju modela $\mathfrak{A}^+$ na jezik $\mathfrak{L}^+(Q)$. Kvantifikator $\mathbf{Q}$ se uvodi definicijom

$$\mathbf{Q}x\varphi(x) \leftrightarrow \forall y\exists x(\varphi(x) \wedge y < x)$$

Lako se proveri da ovako uveden kvantifikator $\mathbf{Q}$ zadovoljava Keisler-ove aksiome za logiku $L(\mathbf{Q})$.

Neka je $\mathfrak{B}$ prebrojiv elementaran podmodel modela $\mathfrak{A}^{++}$. Tada važi

LEMA 3.E.1 *Teorija* $\Gamma = Th(\mathfrak{B}, a)_{\mathbf{a}\in B} \cup \{\neg\mathbf{Q}xU(x)\}$ *lokalno ispušta tip* $\Sigma(x) = \{U(x)\} \cup \{x \neq \mathbf{b} | \mathbf{b} \in B\}$.

DOKAZ Treba samo da proverimo uslove da li Γ i $\Sigma(x)$ ispunjavaju uslove (a) i (b) iz Definicije 3.E.2.

(a) Za svaku formulu $\exists x\varphi(x)$ konzistentnu sa Γ važi $\Gamma \vdash \exists x\varphi(x)$, tako da $\mathfrak{B} \models \exists x\varphi(x)$ i za neki $\mathbf{b} \in B$ $\mathfrak{B} \models \varphi(\mathbf{b})$, tako da je formula $\exists x(\varphi x \wedge \neg x \neq \mathbf{b})$ konzistentna sa Γ, i

(b) $\Gamma \vdash \neg\mathbf{Q}xU(x)$. Q.E.D.

Po Teoremi o ispuštanju tipova za $L(\mathbf{Q})$, teorija Γ ima standardni model $\mathfrak{C}$ koji je neprebrojiv i važi $U_C = U_B$.

DOKAZ F [Ž. Mijajlović 4] Ovde je dokazano da svaki prebrojiv model prebrojive teorije koja zadovoljava sledeću varijantu sheme $\mathcal{R}$:

(5) $$\forall z(\forall x \leq z \exists y \varphi(x,y) \rightarrow \exists u \forall x \leq z \exists y \leq u \varphi(x,y))$$

i ima definabilne Skolemove funkcije ima krajnje elementarno proširenje. Interesantna je činjenica da ovde nije upotrebljen ni jedan oblik teoreme o ispuštanju tipova.

Osnovna u dokazu je konstrukcija definabilnog ultraproizvoda. Ovaj dokaz teče isto kao i dokazi B, C i D, razlika je samo u već spomenutom „ispuštanju“ Teoreme o ispuštanju tipova. Sledi opis „vertikalnog“ koraka sa sheme.

Primetimo da je za prebrojiv model $\mathfrak{B}$ svaki definabilan ultraproizvod $\mathcal{F}(\mathfrak{B})/U$ po Lemi 0.2.1 prebrojiv, jer su i $\mathfrak{B}$ i $\mathfrak{L}_{\mathfrak{B}}$ prebrojivi. Pažljivim izborom ultrafiltra U dobija se pravo krajnje proširenje modela $\mathfrak{B}$. Konstrukcija ovog ultrafiltra je veoma slična konstrukciji iz dokaza Teoreme 2.1, i takva je da on obezbeđuje ispuštanje svih tipova oblika $\Sigma_{\mathbf{a}} = \{x < \mathbf{a}\} \cup \{x \neq \mathbf{b} | \mathfrak{B} \models \mathbf{b} < \mathbf{a}\}$ za $\mathbf{a} \in B$ u modelu $\mathcal{F}(\mathfrak{B})/U$.

Konstrukcija ultrafiltra U teče ovako:

(1) Sve ograničene definabilne funkcije (njih ω) se poređaju u niz $f_1, f_2, \ldots$

(2) Formira se prebrojiv niz neograničenih definabilnih skupova $B = X_0 \supset X_1 \supset \ldots$ takav da je na skupu X_i funkcija f_i konstantna.

Dokažimo da je konstrukcija iz (2) izvodljiva. Ako je skup $f_i^{-1}(\mathrm{a})$ beskonačan za neki $\mathrm{a} \in B$, uzmimo $X_i = f_i^{-1}(\mathrm{a})$. Pretpostavimo da ovakav a ne postoji. Pošto je funkcija f_i po pretpostavci ograničena, iz (5) se lako dobija kontradikcija.

Da bi se obezbedilo da $\mathcal{F}(\mathfrak{B})/U$ bude pravo proširenje modela $\mathfrak{B}$, ultrafilter U biramo tako da sadrži sve skupove oblika $\{y \in B | \mathfrak{B} \models x < y\}$ za x iz B, jer je tada dijagonala i_B skupa B duž U veća od svih konstantnih funkcija. Pošto su skupovi X_i neograničeni i formiraju opadajući niz, ovakav ultrafilter U postoji.

3.2. Dvokardinalne teoreme iznad ω_1

U svim navedenim dokazima traženi (ω_1, ω)-model $\mathfrak{C}$ se konstruiše kao unija ω_1-lanca modela $\{\mathfrak{B}_\gamma | \gamma < \omega_1\}$ takvog da za svaka dva ordinala γ i δ takva da je $\gamma < \delta < \omega_1$ važi $\mathfrak{B}_\gamma \prec \mathfrak{B}_{\gamma+1}$ i $U_{B_\gamma} = U_{B_{\gamma+1}}$. Jedini izuzetak je dokaz F. Ovo je naizgled jedini dokaz u kojem je konstrukcija modela $\mathfrak{C}$ direktna—nema koraka u kom se konstruiše neprebrojiv lanac elementarnih proširenja modela. Samo naizgled, jer dokaz Teoreme o ispuštanju tipova za $L(\mathbf{Q})$ sadrži upravo ovakvu konstrukciju. (Videti [H. J. Keisler 2] ili [Ž. Mijajlović 3]).

Možemo da primetimo i da je u tri od ovih pet dokaza lanac takav da je za svaki $\gamma < \omega_1$ model $\mathfrak{B}_{\gamma+1}$ krajnje proširenje modela $\mathfrak{B}_\gamma$. Izuzetak su dokazi A i C, u kojima su proširenja krajnja „do na skup U_B“ (videti primedbu uz dokaz C). Prema tome, u dokazima B, D i F, isto kao i u dokazu E, konstruisani model $\mathfrak{C}$ je ω_1-like dakle ovde je takođe dokazano i sledeće:

KOROLAR *Svaka teorija koja ima (κ, λ)-model za par kardinala (κ, λ) takav da je $\omega \leq \lambda < \kappa$ ima i ω_1-like model.*

Neka su κ, λ i δ beskonačni kardinali, i $\mathfrak{L}$ jezik koji sadrži unarni relacijski simbol U. Kažemo da je (κ, λ)-model $\mathfrak{A}$ jezika $\mathfrak{L}$ *δ-dobar* akko je $\lambda = \kappa$ ili postoje (δ, δ)-model $\mathfrak{B}$ i (δ^+, δ)-model $\mathfrak{C}$ takvi da je $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{C}$ i $U_{\mathfrak{B}} = U_{\mathfrak{C}}$.

Dakle, po Teoremi 3.0.2. svaki (κ, λ)-model je ω-dobar.

PITANJE 3.2.1 *Da li je tačno sledeće poopštenje Keisler-ove teoreme na neprebrojiv slučaj:*

Svaki neprebrojiv model jezika $\mathfrak{L}$ je δ-dobar za svako $|\mathfrak{L}| \leq \delta < |A| = \alpha$.

i, ako nije, za koju klasu neprebrojivih modela (kardinala α) ovo tvrđenje važi? (Primetimo da je ovo tvrđenje konzistentno kao posledica Chang-ove Hipoteze.)

Već spomenuta činjenica da su dve glavne Leme iz Dokaza D poopštene na neprebrojiv slučaj (u delu 4) otvara mogućnost da neki od opisanih dokaza „prevedemo" na neprebrojiv slučaj. Kao perspektivne na prvi pogled izgledaju konstrukcija krajnjeg „do na skup U" proširenja iz Dokaza C i konstrukcija definabilnog ultraproizvoda iz Dokaza F. Ne treba isključiti ni primenu kvantifikatora oblika Q_n („Postoji $\aleph_n$ mnogo") kao u Dokazu E. S druge strane, u dokazima dvokardinalnih teorema koje govore o većim kardinalima, kao na primer

- Morley-eve, koja daje dovoljne uslove da teorema dopušta bilo koji par kardinala, videti recimo u [C. C. Chang–H. J. Keisler, Teorema 7.2.6] ili
- Shelah-ove, $(\aleph_\omega, \omega) \Rightarrow (2^{\aleph_0}, \omega)$ (videti u [S. Shelah 2]),

po pravilu je neizbežna upotreba rezultata iz beskonačne kombinatorike. U prvom slučaju je to čuvena Erdös–Rado-va Teorema. Drugi slučaj je interesantniji—Shelah je prvo dokazao da teorema sledi iz jačeg kombinatornog principa nezavisnog od ZFC (u [S. Shelah 1]), da bi kasnije iskoristio Halpern–Levy Teoremu do koje su autori došli uzgred prilikom konstrukcije modela teorije ZF u kojem ne važi aksioma izbora ali važi teorema o egzistenciji prostog ideala u svakoj Boole-ovoj algebri. HL Teorema sada nalazi sve više primena u teoriji modela i drugim oblastima matematike.

Beskonačna kombinatorika igra isto tako važnu ulogu i u teoriji κ-like modela—recimo u spomenutom članku [H. J. Keisler 5]. Više detalja o kombinatornom aspektu dvokardinalnih teorema i κ-like modela može se naći recimo u [J. H. Schmerl]. (Videti i napomenu posle Teoreme 4.3.)

Kao što je rečeno na početku dela 3, Chang-ova Hipoteza nije konzistentna sa $V = L$. Sledeća teorema predstavlja vrlo specijalan slučaj neprebrojive varijante Chang-ove Hipoteze i važi uz GCH. Ona takođe daje i delimičan odgovor na Pitanje 3.2.1.

TEOREMA 3.2.1 (GCH) *Neka je model $\mathfrak{A}$ elementarno univerzalan model neprebrojive kardinalnosti α, i neka teorija $\mathbf{T} = Th(\mathfrak{A})$ dopušta neki par kardinala (κ, λ) takav da je $\kappa > \lambda > \omega$. Tada za svaki regularan β takav da je $\max(\omega, |\mathfrak{L}_\mathbf{T}|) \leq \beta$ model $\mathfrak{A}$ ima elementaran podmodel $\mathfrak{B}$ koji je (β^+, β)-model.*

Dokaz koristi sledeću teoremu:

TEOREMA 3.2.2 (GCH) (Chang-ova Teorema o dva kardinala) *Ako teorija $\mathbf{T}$ prebrojivog jezika $\mathfrak{L}$ dopušta (κ, λ) za neke kardinale $\kappa > \lambda > \omega$, onda $\mathbf{T}$ dopušta i (β^+, β) za svaki regularan β.*

(Chang je u [C. C. Chang] dokazao da Teorema 3.2.2 važi za prebrojiv $\mathfrak{L}$, a u ([R. L. Vaught]) je dat dokaz za slučaj $\beta \geq |\mathfrak{L}| > \omega$.)

DOKAZ TEOREME 3.2.1 Teorija $\mathbf{T}$ po Teoremi 3.2.2 ima (β^+, β)-model $\mathfrak{B}$. Ovaj model je kardinalnosti β^+ i prema tome je izomorfan elementarnom podmodelu modela $\mathfrak{A}$. **Q.E.D.**

KOROLAR (GCH) *Svaki elementarno univerzalan model $\mathfrak{A}$ je δ-dobar za svako $\delta < |A|$.*

Pošto je svaki zasićen model elementarno univerzalan, dobijamo korolar Teoreme 3.2.1 ako u njenoj formulaciji zamenimo „elementarno univerzalan" sa „zasićen".

4 Proširenja neprebrojivih modela

U delu 1 potpuno su opisani prebrojivi proširivi modeli, i dokazano je da je klasa proširivih modela zatvorena za elementarnu ekvivalenciju u okviru klase prebrojivih modela. U ovom delu je dat dokaz da klasa proširivih modela poseduje ovo svojstvo zatvorenosti i u klasi zasićenih modela, ali ne i u klasi svih neprebrojivih modela. U daljem tekstu se podrazumeva da je svako krajnje proširenje o kom se govori krajnje u odnosu na relaciju $<$.

Simbol $\mathcal{R}(\mathbf{T}_<)$ predstavlja skraćenicu za iskaz „Teorija $\mathbf{T}_<$ sadrži shemu $\mathcal{R}^+_<$". Ako je κ beskonačan kardinal, κ^+ označava najmanji kardinal veći od κ. Kažemo da teorija $\mathbf{T}_<$ *dopušta κ-proširenje* (skraćeno $\mathcal{E}_\kappa(\mathbf{T}_<)$) akko je svaki model $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}_<$ kardinalnosti κ proširiv, a kažemo da $\mathbf{T}_<$ *dopušta κ-like model* (skraćeno $\mathcal{O}_\kappa(\mathbf{T}_<)$) akko $\mathbf{T}_<$ ima κ-like model.

TEOREMA 1.4, U NOVOJ NOTACIJI *Neka je κ neprebrojiv regularan kardinal, i λ neprebrojiv kardinal. Tada važi*

a) $\mathcal{R}(\mathbf{T}_<) \Leftrightarrow \mathcal{E}_\omega(\mathbf{T}_<) \Leftrightarrow \mathcal{O}_\omega(\mathbf{T}_<)$,
b) $\mathcal{E}_\kappa(\mathbf{T}_<) \Rightarrow \mathcal{R}(\mathbf{T}_<)$, *i*
c) $\mathcal{O}_\kappa(\mathbf{T}_<) \Rightarrow \mathcal{R}(\mathbf{T}_<)$.

Postavlja se pitanje da li možemo da simbol $\Rightarrow$ u b) i c) zamenimo sa '$\Leftrightarrow$'. Za b) odgovor je negativan (Teorema 4.2). U slučaju c) ovo pitanje se po Teoremi 1.4 svodi na pitanje „Da li svaka teorija koja ima ω_1-like model ima i κ-like model za svaki regularan kardinal κ?". Postoje primeri teorija koje za neko κ imaju κ^+-like model (dakle po Teoremi 1.4 i ω_1-like model), ali nemaju λ-like model za nedostižan kardinal λ (videti [H. J. Keisler 5]). Dakle, uz pretpostavku o egzistenciji nedostižnog kardinala odgovor je negativan. Bez ove pretpostavke odgovor bi mogao da bude i pozitivan, s obzirom na činjenicu da (uz GCH) teorija koja ima ω_1-like model ima i κ^+-like model za svaki regularan κ (takođe u [H. J. Keisler 5]).

Evo jedne jednostavne teoreme.

TEOREMA 4.1 *Neka je κ neki beskonačan kardinal. Ako za svaki beskonačan kardinal $\lambda \leq \kappa$ važi $\mathcal{E}_\lambda(\mathbf{T}_<)$, tada imamo $\mathcal{O}_\kappa(\mathbf{T}_<)$, ili u neformalnijoj notaciji*

$$(\forall \lambda \leq \kappa\, \mathcal{E}_\lambda(\mathbf{T}_<)) \Rightarrow \mathcal{O}_\kappa(\mathbf{T}_<)$$

DOKAZ Konstruiše se elementarni lanac krajnjih proširenja slično kao u Teoremi 1.6, $\neg(c') \Rightarrow \neg(e)$, ali dužine κ. **Q.E.D.**

NAPOMENA Teorema 4.1 važi i uz ovu, možda slabiju (videti Pitanje 4.1), pretpostavku: Postoji kardinal λ_0 manji od κ takav da za svaki kardinal λ, $\lambda_0 \leq \lambda < \kappa$ važi $\mathcal{E}_\lambda(\mathbf{T}_<)$.

Posle ove (trivijalne) teoreme od koje će kasnije biti koristi, evo jednog pitanja koje po svoj prilici uopšte nije trivijalno:

PITANJE 4.1 *Da li je ovo tačno:*

$$\mathcal{E}_\kappa(\mathbf{T}_<) \Rightarrow \mathcal{E}_\lambda(\mathbf{T}_<), \quad \textit{za svaki par kardinala takav da je} \quad \omega < \lambda < \kappa?$$

U sledećoj Lemi se vraćamo na temu dela 3, vezu između dvokardinalnih teorema i krajnjih proširenja modela.

LEMA 4.1 *Neka je κ neprebrojiv kardinal. Ako $\mathbf{T}_<$ dopušta (α, β) za neki par kardinala α, β takav da je $\alpha > \beta$ i za svaki beskonačan kardinal $\lambda < \kappa$ važi $\mathcal{E}_\lambda(\mathbf{T}_<)$, tada $\mathbf{T}_<$ dopušta (κ, ω).*

DOKAZ Po Keisler-ovoj teoremi o dva kardinala, postoji (ω_1, ω)-model za $\mathbf{T}_<$. Označimo ga sa $\mathfrak{A}$. Uzastopnom primenom pretpostavke $\mathcal{E}_\lambda(\mathbf{T}_<)$ konstruišemo lanac modela

$$\mathfrak{A} \prec_e \mathfrak{A}_1 \prec_e \dots \mathfrak{A}_\gamma \prec_e \dots \qquad 1 < \gamma < \kappa.$$

Unija ovog lanca je (κ, ω)-model za $\mathbf{T}_<$. **Q.E.D.**

LEMA 4.2 *Neka je κ beskonačan kardinal. Tada svaki (κ^+, κ)-model $\mathfrak{A}$ ima ekspanziju $\mathfrak{B}$ na jezik $\mathfrak{L}_\mathfrak{A} \cup \{E, <\}$ ($<$ i E su novi binarni relacijski simboli) takvu da $Th(\mathfrak{B}) \models \mathcal{R}^+_<$, ali za neki kardinal $\alpha \leq 2^\omega$ ne važi $\mathcal{E}_\alpha(Th(\mathfrak{B}))$.*

DOKAZ (Uporediti sa [C. C. Chang–H. J. Keisler, Tvrđenje 3.2.11 (iii)].) Neka $\mathfrak{L}$ označava jezik $\mathfrak{L}_\mathfrak{A}$. Definišemo interpretaciju za $<$ tako da ona dobro uređuje A sa tipom κ^+. Relacijski simbol E interpretiramo tako da u dobijenoj ekspanziji $\mathfrak{B}$ modela $\mathfrak{A}$ važi sledeće:

$$\forall x \forall y (x = y \leftrightarrow \forall z (E(z, x) \leftrightarrow E(z, y)))$$

$$\forall x (\neg U(x) \rightarrow \forall y (E(y, x) \rightarrow U(y)))$$

(Ovo znači da je funkcija $f \colon A \setminus U_A \rightarrow \mathcal{P}(U_A)$ definisana sa $f(x) = \{y | \mathfrak{A} \models E(y, x)\}$ injekcija.)

Ovakva interpretacija za E postoji jer $|U_A| = \kappa$ i $|A| = \kappa^+ \leq 2^k$. Teorija $\mathbf{T}_< = Th(\mathfrak{B})$ modelira shemu $\mathcal{R}^+_<$, jer je model $(B, <)$ izomorfan sa $(\kappa^+, <)$, a kardinal κ^+ je regularan. Teorija $\mathbf{T}_<$ može da ima (κ, λ)-model samo ako je $\kappa \leq 2^\lambda$), dakle $\mathbf{T}_<$ nema $((2^\omega)^+, \omega)$ model.

S druge strane, ako pretpostavimo da za svaki kardinal $\lambda \leq 2^\omega$ važi $\mathcal{E}_\lambda(\mathbf{T}_<)$, po Lemi 4.1 dobijamo $((2^\omega)^+, \omega)$-model za $\mathbf{T}_<$, što je kontradikcija. **Q.E.D.**

Upravo je dokazana

TEOREMA 4.2 *Postoji teorija $\mathbf{T}_<$ takva da važi $\mathcal{R}(\mathbf{T}_<)$, ali $\mathcal{E}_\lambda(\mathbf{T}_<)$ ne važi za neki kardinal λ takav da je $\omega < \lambda \leq 2^\omega$.*

Osim toga, uz CH imamo:

TEOREMA 4.3 (CH) *Postoji teorija $\mathbf{T}_<$ takva da važi $\mathcal{R}(\mathbf{T}_<)$, ali $\mathcal{E}_{\omega_1}(\mathbf{T}_<)$ ne važi.*

NAPOMENA Teorema 4.3 važi i bez (CH). Ovo sledi iz

SPECIJALAN SLUČAJ TVRĐENJA 3.2.11 IV IZ [C. C. Chang–H. J. Keisler] *Postoji teorija $\mathbf{T}$ koja dopušta (ω_1, ω), ali ne dopušta (ω_2, ω).*

DOKAZ ovog tvrđenja, kao i opštijeg tvrđenja da za svaki prirodan broj n postoji teorija koja dopušta (ω_n, ω) ali ne i (ω_{n+1}, ω) izvodi se takozvanim *metodom identiteta.* U slučaju $n = 1$ ovim metodom se dobija činjenica da teorija jezika $\{U, F\}$ koja sadrži rečenicu $\neg\sigma_1$ dozvoljava (ω_1, ω) ali ne i (ω_2, ω). Ovde je F binarni funkcijski simbol, U je unarni relacijski simbol, dok je rečenica σ_1:

$$\exists a, b, c, d, e (U(e) \wedge F(a, b) = e \wedge F(b, c) = e \wedge F(c, d) = e \wedge F(d, a) = e),$$

Suština je u činjenici da za svaku funkciju f koja slika dvočlane podskupove skupa ω_2 u ω (oznaka $f \colon [\omega_2]^2 \rightarrow \omega$) postoje ordinali $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \omega_2$ i $\mathbf{e} \in \omega$ koji verifikuju rečenicu $\neg\sigma_1$ u modelu (ω_2, ω, f), drugim rečima četvorka $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ je na odgovarajući način „obojena“. S druge strane, postoji funkcija $g \colon [\omega_1]^2 \rightarrow \omega$ za koju ne postoje odgovarajući ordinali a, b, c, d i e. (Videti recimo u [J. H. Schmerl] za poopštenje i više detalja o metodu identiteta, a u [S. Todorčević 2] za primer funkcije g. O primeni drugih kombinatornih tvrđenja u teoriji modela videti u [C. C. Chang–H. J. Keisler] i u [Ž. Mijajlović 3].)

Posle negativnog rezultata Teoreme 4.3 dolazi i jedan pozitivan:

TEOREMA 4.4 *Teorija $\mathbf{T}_<$ koja sadrži shemu $\mathcal{R}_<$ ima proširiv model svake nedostižne kardinalnosti.*

NOTACIJA *Fiksirajmo jezik $\mathfrak{L}$ regularne kardinalnosti α sa binarnim relacijskim simbolom $<$. Sa $\mathfrak{L}^+$ označavamo jezik $\mathfrak{L} \cup \{c_\gamma | \gamma < \alpha\}$, gde su c_γ novi konstantni simboli. Za skup formula Φ jezika $\mathfrak{L}^+$ sa $C(\Phi)$ označavamo skup svih novih konstantnih simbola (konstantnih simbola iz $\mathfrak{L}^+ \setminus \mathfrak{L}$) koji se pojavljuju u nekoj formuli iz Φ. Valuacija za skup novih konstantnih simbola $C = \{c_i | i \in I\}$ u modelu $\mathfrak{A}$ je neki skup rečenica V takav da je $V = \{c_i = \mathbf{a}_i | \mathbf{a}_i \in A, i \in I\}$.*

Ako je V valuacija za neki $C(\Phi)$, definišemo $\Phi_V \doteq \Phi \cup V$. $\mathfrak{A} \models \Phi(\mathrm{a})$ je oznaka za „$\mathfrak{A} \models \varphi(\mathrm{a})$ za sve $\varphi \in \Phi$“.

DEFINICIJA 4.1 *Neka je $\mathbf{T}$ teorija jezika $\mathfrak{L}$ i $\Sigma(x)$ tip istog jezika. Kažemo da $\mathbf{T}$ α-ispušta Σ akko za svaki skup formula $\Phi(x)$ jezika $\mathfrak{L}^+$ kardinalnosti manje od α koji je konzistentan sa $\mathbf{T}$ i za svaki novi konstantni simbol c_γ jezika $\mathfrak{L}^+$ postoji neka formula $\varphi(x) \in \Sigma$ takva da je teorija $\mathbf{T} \cup \Phi \cup \{\neg\varphi(c_\gamma)\}$ konzistentna.*

NAPOMENA Dovoljno je pretpostaviti da ovo važi samo za skupove formula Φ zatvorene za konačne konjunkcije, jer za svaki Φ postoji Φ^c takav da $\Phi \subset \Phi^c$, Φ^c je zatvoren za konačne konjunkcije, i $|\Phi^c| = |\Phi|$.

JOŠ JEDNA NAPOMENA Ovako definisano α-ispuštanje se razlikuje od α-ispuštanja definisanog u [C. C. Chang–H. J. Keisler]. Ova varijanta α-ispuštanja omogućava istovremeno ispuštanje α tipova, što se vidi iz sledeće Teoreme.

TEOREMA 4.5, PROŠIRENA TEOREMA O α-ISPUŠTANJU TIPOVA (videti [C. C. Chang–H. J. Keisler, Teoreme 2.2.9, 2.2.15 i 2.2.19]) *Neka je $\mathbf{T}$ konzistentna teorija jezika $\mathfrak{L}$ regularne kardinalnosti α, i neka je $\Sigma_\gamma(x)$ skup formula jezika $\mathfrak{L}$ za svaki $\gamma < \alpha$. Ako $\mathbf{T}$ α-ispušta svaki Σ_γ, tada $\mathbf{T}$ ima model kardinalnosti ne veće od α koji ispušta svaki Σ_γ.*

DOKAZ Ovaj dokaz prati dokaz standardne Proširene teoreme o ispuštanju tipova ([C. C. Chang–H. J. Keisler, Teorema 2.2.9]). Prvo sve rečenice jezika $\mathfrak{L}^+$ uredimo u niz $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_\gamma, \ldots$ $(\gamma < \alpha)$, i tada konstruišemo lanac teorija

$$\mathbf{T} \subset \mathbf{T}1 \subset \ldots \subset \mathbf{T}_\gamma \subset \ldots \quad \gamma < \alpha$$

takav da za svako $\gamma < \alpha$ važi sledeće:

(1) Svaka teorija $\mathbf{T}_\gamma$ je konzistentno proširenje teorije $\mathbf{T}$ sa manje od α novih rečenica.

(2) Ili $\varphi_\gamma \in \mathbf{T}_{\gamma+1}$, ili $\neg\varphi_\gamma \in \mathbf{T}_{\gamma+1}$.

(3) Ako je $\varphi_\gamma = \exists x \psi(x)$ i $\varphi_\gamma \in \mathbf{T}_{\gamma+1}$, tada $\psi(c_\delta) \in \mathbf{T}_{\gamma+1}$, gde je c_δ prva konstanta iz $\mathfrak{L}^+$ koja se ne pojavljuje u $\mathbf{T}_\gamma$ ni u φ_γ.

(4) Za sve ordinale $\delta, \lambda < \gamma$ postoji formula $\sigma_\delta^\lambda(x) \in \Sigma_\lambda$ takva da je $\neg\sigma_\delta^\lambda(c_\delta) \in \mathbf{T}_{\gamma+1}$.

Pre početka konstrukcije uređujemo sve nove konstantne simbole iz $\mathfrak{L}^+$ u niz

$$c_\delta^\delta, c_{\delta+1}^\delta, \ldots c_\gamma^\delta, \ldots \qquad \gamma < \alpha$$

za svaki Σ_δ.

Prvo opišimo konstrukciju teorije $\mathbf{T}_{\gamma+1}$.

(2) Ako je φ_γ konzistentna sa $\mathbf{T}_\gamma$, definišimo $\mathbf{T}_\gamma = \mathbf{T}_\gamma \cup \{\varphi_\gamma\}$, inače $\mathbf{T}_\gamma = \mathbf{T}_\gamma \cup \{\neg\varphi_\gamma\}$. Ovakav zapis je neformalan, ali formalan zapis bi bio opterećen suvišnim indeksima.

(3) Jednostavno.

(4) Ovo je beskonačna konstrukcija dužine γ. U δ-tom koraku se za konstantu c_γ^δ nalazi formula $\sigma_\delta \in \Sigma_\delta$ takva da je rečenica $\neg\sigma_\delta(c_\gamma^\delta)$ konzistentna sa teorijom $\mathbf{T}_\gamma^\delta = \mathbf{T}_\gamma \cup \{\sigma_\lambda(c_\gamma^\lambda) | \lambda < \delta\}$. Takva formula $\sigma_\delta \in \Sigma_\delta$ postoji jer je na osnovu (1) $\mathbf{T}_\gamma^\delta$ oblika $\mathbf{T} \cup \Phi$ za neki skup rečenica Φ jezika $\mathfrak{L}^+$ takav da je $|\Phi| < \alpha$, a po pretpostavci $\mathbf{T}$ α-ispušta Σ_δ. Konačno, $\mathbf{T}_{\gamma+1} = \bigcup_{\delta<\gamma} \mathbf{T}_\delta$.

(1) Sledi iz (2), (3) i (4).

Ovim je opisana konstrukcija za slučaj kada γ nije granični ordinal. Ako je γ granični ordinal, definišemo $\mathbf{T}_\gamma = \bigcup_{\delta<\gamma} \mathbf{T}_\delta$. Na kraju, uzmimo $\mathbf{T}_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} \mathbf{T}_\gamma$. Model za $\mathbf{T}_\alpha$ generisan konstantama iz $\mathfrak{L}^+$ ispušta svaki Σ_γ. **Q.E.D.**

Neka su α regularan kardinal, $\mathfrak{A}$ zasićen model jezika $\mathfrak{L}$ kardinalnosti α takav da za teoriju $\mathbf{T}^0_< = Th(\mathfrak{A}, \mathbf{a})_{\mathbf{a}\in A}$ važi $\mathcal{R}(\mathbf{T}^0_<)$ i c nova konstanta. Neka je teorija $\mathbf{T}_<$ definisana sa $\mathbf{T}^0_< \cup \{\mathbf{a} < c | \mathbf{a} \in A\}$, i za sve $\mathbf{a} \in A$ neka je $\Sigma_{\mathbf{a}}(x)$ skup formula $\{x < \mathbf{a}\} \cup \{x \neq \mathbf{b} | \mathbf{b} \in A,\ \mathbf{b} < \mathbf{a}\}$. U sledeće dve leme dokazujemo da $\mathbf{T}_<$ α-ispušta $\Sigma_{\mathbf{a}}$ za svaki $\mathbf{a} \in A$.

LEMA 4.3 (Uporediti sa [Ž. Mijajlović 1, Lema 2].) *Uz zadržavanje oznaka iz prethodnog pasusa, neka je $\Phi(x)$ neki skup formula jezika $\mathfrak{L}^+$ sa jednom slobodnom promenljivom x zatvoren za konačne konjunkcije, konzistentan sa $\mathbf{T}_<$ i kardinalnosti $\gamma < \alpha$. Neka je $C(\Phi) = \{c_\delta | \delta < \gamma\}$. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(a) Teorija $\Phi(c) \cup \mathbf{T}_<$ nije konzistentna,

(b) Postoji $\mathbf{b} \in A$ takav da je za svaku valuaciju V za $C(\Phi)$ skup

$$S_V = \{x \in A | Th(\mathfrak{A}, \mathbf{a})_{\mathbf{a}\in A} \cup V \models \Phi(x)\}$$

ograničen nekim $\mathbf{b}$ (važi $S_V < \mathbf{b}$),

(c) Postoji formula $\varphi(x, y_1, \dots y_n)$ jezika $\mathfrak{L}$ takva da je za neku n-torku konstantnih simbola $c_1, \dots c_n$ jezika $\mathfrak{L}^+$ formula $\varphi(x, c_1, \dots c_n)$ u Φ, i za neki $\mathbf{b} \in A$:

$$Th(\mathfrak{A}, \mathbf{a})_{\mathbf{a}\in A} \models \forall x, x_1, \dots x_n(\varphi(x, x_1, \dots x_n) \rightarrow x < \mathbf{b}).$$

Za posledicu ove leme imamo da važi $S_V \subset S_\varphi$, gde su S_V i φ kao u formulaciji Leme, dok je

$$S_\varphi = \{x | Th(\mathfrak{A}, \mathbf{a})_{\mathbf{a}\in A} \models \exists x_1, \dots x_n \varphi(x, x_1, \dots x_n)\}.$$

DOKAZ

(a)$\Rightarrow$(c) Pretpostavimo da je teorija $\Phi(c) \cup \mathbf{T}_<$ nekonzistentna. Tada postoje n-torka $\mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_n$ elemenata iz A i formula $\varphi(x, c_1, \dots c_n)$ iz Φ (ovde su $c_1, \dots c_n$ svi konstantni simboli iz $C(\Phi)$ koje se pojavljuju u φ) takvi da važi

$$Th(\mathfrak{A}, \mathbf{a})_{\mathbf{a}\in A} \models (\mathbf{a}_1 < c \wedge \mathbf{a}_2 < c \wedge \dots \mathbf{a}_n < c) \rightarrow \neg\varphi(c, c_1, \dots c_n),$$

i za $\mathbf{b} = \max(\mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_n)$,

$$Th(\mathfrak{A}, \mathbf{a})_{\mathbf{a}\in A} \models \mathbf{b} < c \rightarrow \neg\varphi(c, c_1, \dots c_n)$$
$$Th(\mathfrak{A}, \mathbf{a})_{\mathbf{a}\in A} \models \varphi(c, c_1, \dots c_n) \rightarrow c \leq \mathbf{b}$$
$$Th(\mathfrak{A}, \mathbf{a})_{\mathbf{a}\in A} \models \forall x, x_1, \dots x_n(\varphi(x, x_1, \dots x_n) \rightarrow x \leq \mathbf{b})$$

(c)$\Rightarrow$(b) Trivijalno.

(b)$\Rightarrow$(a) Pretpostavimo da je teorija $\Phi(c) \cup \mathbf{T}_<$ konzistentna i da za neki $\mathbf{b} \in A$ i za svaku valuaciju V važi $S_V < \mathbf{b}$. Tada postoji model $\mathfrak{B}$ jezika $\mathfrak{L}^+$ takav da važi $\mathfrak{B} \models \mathbf{T}_< \cup \Phi(c)$ i $|B| = \alpha$. Neka $A(\Phi)$ označava skup svih imena elemenata iz A koja se pojavljuju u nekoj formuli iz Φ. Pošto je $|A(\Phi)| \leq |\Phi| < \alpha$, model $\mathfrak{A}_1 = (\mathfrak{A}, \mathbf{b}, \mathbf{a})_{\mathbf{a}\in A(\Phi)}$ je zasićen. Neka $\mathfrak{B}^-$ označava redukt modela $\mathfrak{B}$ na jezik $\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}_1}$. Pošto je model $\mathfrak{A}_1$ elementarno univerzalan, model $\mathfrak{B}^-$ je izomorfan njegovom elementarnom podmodelu. Ovo elementarno ulaganje definiše valuaciju W za $C(\Phi)$ takvu da je tip $\Phi_W(x)$ u modelu $\mathfrak{A}$ realizovan nekim $\mathbf{c} > \mathbf{b}$. Prema tome, u modelu $\mathfrak{A}$ skup S_W sadrži element $\mathbf{c} > \mathbf{b}$, kontradikcija. **Q.E.D.**

LEMA 4.4 (Uporediti sa [Ž. Mijajlović 1, Lema 3].) *Teorija $\mathbf{T}_<$ α-ispušta $\Sigma_{\mathbf{a}}$.*

DOKAZ Pretpostavimo suprotno, dakle da postoji neki skup rečenica $\Phi(c, e)$ konzistentan sa $\mathbf{T}_<$ takav da je $|\Phi| = \lambda < \alpha$, i da je za neki tip $\Sigma_{\mathbf{a}}(x)$ i svaku formulu $\sigma \in \Sigma_{\mathbf{a}}$ skup $\Phi(c, e) \cup \{\neg\sigma(e)\}$ nekonzistentan sa $\mathbf{T}_<$.

Pošto je $\Phi(c, e) \cup \{\mathbf{a} \leq e\}$ nekonzistentno sa $\mathbf{T}_<$, po Lemi 4.3 dobijamo da je skup

$$D = \{x \in A | Th(\mathfrak{A}, \mathbf{a})_{\mathbf{a}\in A} \models \Phi(x, e) \cup \{\mathbf{a} \leq e\}\}$$

ograničen nekim $\mathbf{d}_1 \in A$.

Takođe, $\Phi(c, e) \cup \{e \neq \mathbf{b}\}$ je nekonzistentno sa $\mathbf{T}_<$ za svaki $\mathbf{b} \in A$ takav da je $\mathbf{b} < \mathbf{a}$, pa po Lemi 4.3 postoje formula $\varphi_{\mathbf{b}}(x, x_1, \ldots x_n)$ i $\mathbf{d}_{\varphi_{\mathbf{b}}} \in A$ takvi da

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{b}} &= \{x \in A | Th(\mathfrak{A}, \mathbf{a})_{\mathbf{a} \in A} \models \Phi(x, e) \cup \{e = \mathbf{b}\}\} \\ &= \{x \in A | Th(\mathfrak{A}, \mathbf{a})_{\mathbf{a} \in A} \models \Phi(x, \mathbf{b})\} \\ &\subset \{x \in A | Th(\mathfrak{A}, \mathbf{a})_{\mathbf{a} \in A} \models \exists x_1, \ldots x_n \varphi_{\mathbf{b}}(x, x_1, \ldots x_n)\} \\ &\subset \{x \in A | Th(\mathfrak{A}, \mathbf{a})_{\mathbf{a} \in A} \models x < \mathbf{d}_{\varphi_{\mathbf{b}}}\} \end{aligned}$$

Primetimo da je $\Phi_{\mathbf{a}} = \{\varphi_{\mathbf{b}} | \mathbf{b} < \mathbf{a}\}$ podskup od Φ, pa je $|\Phi_{\mathbf{a}}| \leq \gamma$.

TVRĐENJE 4.1 *Skup*

$$\{x \in A | Th(\mathfrak{A}, \mathbf{a})_{\mathbf{a} \in A} \models \Phi(x, e) \cup \{e < \mathbf{a}\}\}$$

je ograničen u A.

DOKAZ Dokažimo prvo da je skup $\bigcup_{\mathbf{b} < \mathbf{a}} D_{\mathbf{b}}$ ograničen u A, iz čega sledi i Tvrđenje.

$$\begin{aligned} \bigcup_{\mathbf{b} < \mathbf{a}} D_{\mathbf{b}} &\subset \bigcup_{\mathbf{b} < \mathbf{a}} \{x \in A | Th(\mathfrak{A}, \mathbf{a})_{\mathbf{a} \in A} \models \exists x_1, \ldots x_n \varphi_{\mathbf{b}}(x, x_1, \ldots x_n)\} \\ &\subset \bigcup_{\varphi \in \Phi_{\mathbf{a}}} \{x \in A | Th(\mathfrak{A}, \mathbf{a})_{\mathbf{a} \in A} \models x < \mathbf{d}_{\varphi}\} \end{aligned}$$

Preostaje samo da se dokaže da je skup $\{\mathbf{d}_{\varphi} | \varphi \in \Phi_{\mathbf{a}}\}$ ograničen u A. Ali, ovaj skup je kardinalnosti manje od α, pa je tip $\Psi(x) = \{\mathbf{d}_{\varphi} < x | \varphi \in \Phi_{\mathbf{a}}\}$ realizovan u $\mathfrak{A}$ nekim e. **Q.E.D.**

Dokazali smo da je skup

$$\{x \in A | Th(\mathfrak{A}, \mathbf{a})_{\mathbf{a} \in A} \models \Phi(x, e) \cup \{e < \mathbf{a}\}\}$$

ograničen nekim $\mathbf{d}_2$, pa je skup

$$\begin{aligned} &\{x \in A | Th(\mathfrak{A}, \mathbf{a})_{\mathbf{a} \in A} \models \Phi(x, e)\} \\ =&\{x \in A | Th(\mathfrak{A}, \mathbf{a})_{\mathbf{a} \in A} \models \Phi(x, e) \cup \{e < \mathbf{a}\}\} \\ \cup&\{x \in A | Th(\mathfrak{A}, \mathbf{a})_{\mathbf{a} \in A} \models \Phi(x, e) \cup \{\mathbf{a} \leq e\}\} \end{aligned}$$

takođe ograničen sa $\mathbf{d}_3 = \max(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$, i po Lemi 4.3, implikacija (b)$\Rightarrow$(a), $\Phi(c, e)$ je nekonzistentno sa $\mathbf{T}_<$, kontradikcija. **Q.E.D.**

TEOREMA 4'.6 *Svaki zasićen model $\mathfrak{A}$ ($|A| = \alpha$, α je regularan) teorije $\mathbf{T}_<$ za koju važi $\mathcal{R}(\mathbf{T}_<)$ je proširiv.*

DOKAZ Neka je $|A| = \alpha$. Teorija $\mathbf{T}_< = Th(\mathfrak{A}, \mathbf{a})_{\mathbf{a} \in A} \cup \{\mathbf{a} < c | \mathbf{a} \in A\}$ α-ispušta tip $\Sigma_{\mathbf{a}}(x) = \{x < \mathbf{a}\} \cup \{x \neq \mathbf{b} | \mathbf{b} \in A, \mathfrak{A} \models \mathbf{b} < \mathbf{a}\}$ za svaki $\mathbf{a} \in A$, tako da teorija $\mathbf{T}_<$ ima model kardinalnosti α koji ispušta tip $\Sigma_{\mathbf{a}}(x)$ za svaki $\mathbf{a} \in A$, a taj model je krajnje elementarno proširenje modela $\mathfrak{A}$. **Q.E.D.**

Pošto teorija $\mathbf{T}_<$ ima zasićen model svake nedostižne kardinalnosti veće od $|\mathfrak{L}_{\mathbf{T}_<}|$, Teorema 4.4 sledi iz dokazanog. Uz (GCH) za svaki regularan kardinal α veći od $|\mathfrak{L}_{\mathbf{T}_<}|$ postoji zasićen model teorije $\mathbf{T}_<$ kardinalnosti α, tako da imamo

TEOREMA 4.7 (GCH) *Teorija $\mathbf{T}_<$ takva da važi $\mathcal{R}(\mathbf{T}_<)$ ima proširiv model svake regularne kardinalnosti α takve da je $\alpha \geq |\mathfrak{L}_{\mathbf{T}_<}|$.*

TEOREMA 4.8 *Za svaku ω_1-kategoričku teoriju $\mathbf{T}_<$ za koju važi $\mathcal{R}(\mathbf{T}_<)$ i za svaki regularan kardinal κ važi*

(a) $\mathcal{E}_{\kappa}(\mathbf{T}_<)$,

(b) $\mathcal{O}_{\kappa^+}(\mathbf{T}_<)$, *i*

(c) *Ovakva teorija ne postoji.*

DOKAZ Po Morley-evoj teoremi o kategoričnosti (videti recimo u [C. C. Chang–H. J. Keisler, Teorema 7.1.14]) svaki neprebrojiv model za $\mathbf{T}_<$ je zasićen, pa (a) sledi iz Teoreme 4.7. (b) sledi iz (a) i primedbe posle Teoreme 4.1.

U zasićenom modelu kardinalnosti κ svaki definabilan skup je kardinalnosti κ, dok je u svakom κ-like modelu $\mathfrak{A}$ za proizvoljni $\mathbf{a} \in A$ skup $A_\mathbf{a} = \{x \in A | \mathfrak{A} \models x < \mathbf{a}\}$ kardinalnosti manje od κ. Prema tome, κ-like model ne može da bude i zasićen. Iz ovoga i (b) sledi (c). **Q.E.D.**

Po Teoremi 4.6 svaki zasićen model teorije $\mathbf{T}_<$ za koju važi $\mathcal{R}(\mathbf{T}_<)$ je proširiv. Dokažimo da klasa neprebrojivih proširivih modela ovim nije potpuno opisana, već da postoje i neprebrojivi proširivi modeli koji nisu zasićeni.

TEOREMA 4.9 *Ako je* $\mathbf{T}$ *teorija prebrojivog jezika* $\mathfrak{L} \supset \mathfrak{L}_{\mathbf{PA}}$ *koja ima model čiji je redukt na* $\mathfrak{L}_{\mathbf{PA}}$ *standardni model aritmetike* $(\omega, S, +, \cdot, <, 0)$ *onda su svi modeli teorije* $\mathbf{T}$ *proširivi.*

DOKAZ Ovo je u stvari Napomena posle Teoreme 4.1. **Q.E.D.**

KOROLAR *Za svaki neprebrojiv kardinal* κ *postoji proširiv model kardinalnosti* κ *koji nije zasićen.*

DOKAZ Neka je $\mathbf{T}$ kao u prethodnoj Teoremi. Ova teorija ima κ-like model, a κ-like model ne može da bude zasićen (videti dokaz Teoreme 4.8). **Q.E.D.**

KOROLAR *Svaka teorija* $\mathbf{T}$ *koja ima* ω*-like model ima proširiv model svake beskonačne kardinalnosti.*

DOKAZ Možemo da pretpostavimo da je $\mathfrak{L}_\mathbf{T} \cap \mathfrak{L}_{\mathbf{PA}} = \{<\}$. Označimo sa $\mathfrak{A}$ ω-like model teorije $\mathbf{T}$. Model $\mathfrak{A}$ ima ekspanziju $\mathfrak{A}^1$ na jezik $\mathfrak{L}_\mathbf{T} \cup \mathfrak{L}_{\mathbf{PA}}$ čiji je redukt na $\mathfrak{L}_{\mathbf{PA}}$ standardni model za $\mathbf{PA}$. Dakle, teorija $\mathbf{T}_1 = Th(\mathfrak{A}^1)$ zadovoljava uslove Teoreme 4.9, i svi modeli su joj proširivi. Redukti modela teorije $\mathbf{T}_1$ su upravo traženi modeli. **Q.E.D.**

Modeli ovakve teorije $\mathbf{T}$ koji nemaju ekspanziju na jezik $\mathfrak{L}_\mathbf{T} \cup \mathfrak{L}_{\mathbf{PA}}$ mogu da budu neproširivi (ukoliko postoje).

Bibliografija

J. L. Bell–A. B. Slomson
Models and ultraproducts, North–Holland, Amsterdam (1969).

A. Blass
Models of arithmetic, Madison (1978).

C. C. Chang
A note on the two cardinal problem, **Proc. AMS** 16 (1965) 1148–1155.

C. C. Chang–H. J. Keisler
Model theory, North–Holland, Amsterdam (1973).

H. J. Keisler
[1] *Some model–theoretic results for ω-logic*, **Israel J. Math.** 4 (1966), str. 249–261.
[2] *Logic with the quantifier "there exists uncountably many"*, **Annals of Mathematical Logic**, 1 (1970) str. 1–93
[3] *Model theory for infinitary logic: Logic with countable conjunctions and countable quantifiers*, North–Holland, Amsterdam (1971).
[4] *Forcing and the omitting types theorem*, u **Studies in model theory**, MAA Studies in mathematics vol 8, ed. M. D. Morley, 1973, str. 96–133.
[5] *Models with orderings*, u **Logic, methodology and philosophy of science**, ed. B. van Rootstelaar i J. F. Staal, North–Holland 1968, str. 35–62.
[6] *First order properties of pairs of cardinals*, **Bull. AMS**, vol. 72 (1966), str. 141–144.

R. MacDowell–E. Specker
Modelle der arithmetik, **Infinitistic methods**, Pergamon Press, London (1959).

K. McAloon
Completeness theorems, incompleteness theorems and models of arithmetic, **Trans. AMS** (1978), str. 253–277.

Ž. Mijajlović
[1] *A note on elementary end extension*, **Publ. Inst. Math.** 21(35) (1976), str. 141–144.
[2] *On the definability of the quantifier "there exists uncountably many"*, **Studia Logica** XLIV, 3 (1985), str. 259–264
[3] *An introduction to model theory*, University of Novi Sad (1987).
[4] *Definable ultrapowers and the omitting types theorem*, **Publ. Inst. Math** (99) (1991).

S. Orey
On ω-consistency and related properties, **JSL** 21, (1956), str. 246–252.

J. Paris–L. Kirby
Σ_n-collection schemas in arithmetic, u **Logic colloquium '77**, North–Holland, Amsterdam (1978) str. 199–209.

F. Rowbottom
Some strong axioms of infinity incompatible with the axiom of constructibility, **Annals of Mathematical Logic**, vol. 3 (1971), str. 1–44.

J. H. Schmerl
Transfer theorems and their application to logics, u **Model–theoretic logics**, ed. J. Barwise–S. Feferman, Springer–Verlag 1985, str. 177-210.

S. Shelah
[1] *A two–cardinal problem*, **Proc. AMS** 48, (1975) str. 207–213.

[2] *A two cardinal theorem and a combinatorial theorem*, **Proc. AMS**, 62 (1977), str. 134–136.

C. Smorynski

The incompleteness theorem, u **Handbook of Mathematical Logic**, ed. J. Barwise, North-Holland, Amsterdam (1977).

S. Todorčević

[1] *Conjectures of Rado and Chang and cardinal arithmetic*, Report No 91–17.

[2] *Partitioning pairs of countable ordinals*, **Acta Math.** 159 (1987), str. 261–294.

R. Vaught

The Löwenheim–Skolem theorem, u **Logic, methodology and philosophy of science, III**, ed. B. van Rootstelaar and J. F. Staal, North-Holland, Amsterdam, str. 81–92.

Sadržaj