УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Нела Милошевић

АНАЛИЗА КОМУТАТИВНИХ ПРСТЕНА ПРИДРУЖИВАЊЕМ СИМПЛИЦИЈАЛНИХ КОМПЛЕКСА

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

БЕОГРАД, 2015.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Nela Milošević

ANALYSIS OF COMMUTATIVE RINGS BY ASSOCIATING SIMPLICIAL COMPLEXES

DOCTORAL DISSERTATION

BELGRADE, 2015.

МЕНТОР:

проф. др Зоран Петровић,
ванредни професор, Универзитет у Београду, Математички факултет

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ:

проф. др Александар Липковски,
редовни професор, Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Зоран Петровић,
ванредни професор, Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Зоран Петрић,
ванредни професор, Универзитет у Београду, Математички факултет

др Зоран Пуцановић,
доцент, Универзитет у Београду, Грађевински факултет

Датум одбране:

____

ЗАХВАЛНОСТ

Захваљујем се ментору проф. др Зорану Петровићу на несебичној помоћи при изради ове дисертације као и радова који су довели до ње. Без његове посвећености, охрабрења и смјерница ова дисертација не би била могућа - његова подршка дала је кључан допринос мом професионалном сазријевању. Захваљујем се и осталим члановима комисије на детаљним коментарима и сугестијама које су знатно унаприједиле овај рад.

Посебну захвалност дугујем породици и пријатељима, који су вјеровали у мене током свих година мојег школовања, нарочито родитељима који су улагали у моје образовање и подржали моје амбиције.

Посвећено
Мартини

АНАЛИЗА КОМУТАТИВНИХ ПРСТЕНА ПРИДРУЖИВАЊЕМ СИМПЛИЦИЈАЛНИХ КОМПЛЕКСА

РЕЗИМЕ

Предмет изучавања докторске дисертације су симплицијални комплекси придружени комутативним прстенима са јединицом. Генерално, комбинаторни објекти могу бити придружени прстенима на различите начине, и у овој дисертацији изучавамо више симплицијалних комплекса који дају интересантне резултате. Фокус рада је одређивање хомотопског типа геометријске реализације таквих симплицијалних комплекса у случајевима када је то могуће.

За дјелимично уређен скуп нетривијалних идеала у комутативном прстену, дефинише се уређајни комплекс и одређује његов хомотопски тип у генералном случају.

Симплицијални комплекс може бити и индиректно придружен прстену, као комплекс независности неког графа или хиперграфа који је придружен прстену. За комаксималан граф дефинишемо његов комплекс независности и одређујемо хомотопски тип за генералне комутативне прстене са јединицом.

Даље, ова теза се бави и изучавањем нула дјелитеља тако што се посматрају идеали који су нула дјелитељи и дефинише се комплекс идеала нула дјелитеља. Хомотопски тип овог симплицијалног комплекса одређује се за коначне прстене као и за прстене са бесконачно много максималних идеала. У овом дијелу користи се дискретна теорија Морса за симплицијалне комплексе. Теореме доказане у дисертацији примјењујемо на неке класе комутативних прстена чиме долазимо до интересантних комбинаторних резултата.

Кључне ријечи: симплицијални комплекси, хомотопски тип, комутативни прстени, уређајни комплекс, дискретна теорија Морса, дјелитељи нуле, комаксималан граф

Научна област: Математика

Ужа научна област: Алгебра

УДК број: 512.55:512.71:515.143 (043.3)

АМС класификација: 55P15, 55U10, 05E40, 06A07, 57M15, 13A99

ANALYSIS OF COMMUTATIVE RINGS BY ASSOCIATING SIMPLICIAL COMPLEXES

ABSTRACT

This dissertation examines simplicial complexes associated with commutative rings with unity. In general, a combinatorial object can be attached to a ring in many different ways, and in this dissertation we examine several simplicial complexes attached to rings which give interesting results. Focus of this thesis is determining the homotopy type of geometric realization of these simplicial complexes, when it is possible.

For a partially ordered set of nontrivial ideals in a commutative ring with identity, we investigate order complex and determine its homotopy type for the general case.

Simplicial complex can also be associated to a ring indirectly, as an independence complex of some graph or hypergraph which is associated to that ring. For the comaximal graph of commutative ring with identity we define its independence complex and determine its homotopy type for general commutative rings with identity.

This thesis also focuses on the study of zero-divisors, by investigating ideals which are zero-divisors and defining zero-divisor ideal complex. The homotopy type of geometric realization of this simplicial complex is determined for rings that are finite and for rings that have infinitely many maximal ideals. In this part of the thesis, we use the discrete Morse theory for simplicial complexes. The theorems proven in this dissertation are then applied to certain classes of commutative rings, which gives us some interesting combinatorial results.

Keywords: simplicial complex, homotopy type, commutative rings, order complex, discrete Morse theory, zero divisors, comaximal graph

Academic Expertise: Mathematics

Field of Academic Expertise: Algebra

UDC number: 512.55:512.71:515.143 (043.3)

AMS Subject Classification: 55P15, 55U10, 05E40, 06A07, 57M15, 13A99

САДРЖАЈ

Попис слика

УВОД

Анализирање алгебарских својстава помоћу комбинаторних објеката посебну популарност стекло је последњих година када су се појавили многи резултати у радовима који повезују комутативну алгебру и теорију графова. У пионирском раду Иштвана Бека [6] из 1988. године, први пут се алгебарска својства прстена изучавају алгебарско-комбинаторним методама, тако што се граф придружује прстену и испитују се својства тога графа. Ипак, повезивање теорије комутативних прстена и теорије графова постаје интересантно тек након рада Андерсона и Ливингстона [4] 1999. године. Аутори комутативном прстену придружују *граф дјелитеља нуле* Γ_R тако што за тјемена узимају праве дјелитеље нуле, гдје су два тјемена сусједна ако и само ако је њихов производ нула. Иако дјелитељи нуле имају мултипликативно својство, немају затвореност сабирања у општем случају, тако да скуп дјелитеља нуле не мора бити потпрстен. Међутим, придруживањем графа прстену на овај начин, испоставило се да дјелитељи нуле имају јасну графовску структуру, за разлику од алгебарске. Тако је овај рад привукао велику пажњу и многи аутори су наставили да користе овакав приступ даље изучавајући граф дјелитеља нуле.

Идеја Бека, као и Андерсона и Ливингстона, подстакла је многе алгебристе да осим дјелитеља нуле изучавају и друга алгебарска својства прстена на сличан начин. Па тако, постоји значајан број радова у којима видимо да се граф може придружити прстену на различите начине, и добијени резултати могу бити више или мање значајни. На примјер, у раду [30] аутори дефинишу *комаксималан граф* тако што за тјемена узимају све елементе прстена, гдје су два тјемена сусједна ако и само ако генеришу читав прстен. Даље, у раду [3] аутори дефинишу *тотални граф* комутативног прстена тако што за тјемена узимају све елементе прстена, а два тјемена су сусједна ако и само ако је њихов збир дјелитељ нуле у прстену. Значајан рад који користи овакав алгебарско-комбинаторни приступ је и [9] у којем аутори изучавају нерастављиве елементе ради проучавања факторизације у доменима. За домен R, аутори дефинишу *графове нерастављивих дјелитеља* тако што за дати елемент x у домену, за тјемена узимају све његове нерастављиве дјелитеље, а два тјемена су сусједна ако и само ако је њихов производ дјелитељ од x.

Наведени су само неки од многобројних примјера придруживања графа прстену. Више о графовима који су придружени прстенима на различите начине, читалац може наћи у радовима [1, 7, 27, 34].

Ако посматрамо графове као једнодимензионалне симплицијалне комплексе, природно је уопштити овакву анализу на генералне симплицијалне комплексе. Корист придруживања симплицијалних комплекса комутативним прстенима је то што можемо рачунати хомологију и покушати да одредимо хомотопски тип. За неке од поменутих графова који су придружени прстенима, комплемент тих графова може се природно уопштити на симплицијални комплекс. На примјер, у комплементу комаксималног графа тјемена су сусједна акко не генеришу читав прстен. Уопштено, уколико неки скуп тјемена не генерише читав прстен онда је и сваки подскуп тог скупа такав да тјемена у њему не генеришу читав прстен, па то природно чини симплицијални комплекс. На сличан начин, било којем графу или хиперграфу G можемо придружити његов комплекс независности и изучавати топологију његове геометријске реализације. Комплекс независности (хипер)графа је апстрактан симплицијални комплекс којег чине независни скупови у G, односно скупови који не садрже ниједну ивицу као свој подскуп. Поменули смо више примјера графова који су придружени прстенима на различите начине, али комплекси независности тих графова или хиперграфова као њихових уопштења немају увијек алгебарског смисла, па нема користи од њиховог изучавања. На примјер, за тотални граф комутативног прстена ако збир три елемента није дјелитељ нуле, не мора да значи да збир нека два од та три елемента није дјелитељ нуле, па сам комплекс независности нема и адекватно алгебарско својство.

У овој дисертацији придружујемо симплицијалне комплексе комутативним прстенима са јединицом на различите начине, и фокус је одређивање хомотопског типа тих комплекса, када је то могуће. Симплицијални комплекс може бити дефинисан директно, или индиректно као комплекс независности неког графа.

Рад је организован на следећи начин. У првој глави изложен је кратак преглед основне терминологије и теорема из теорије комутативних прстена. Друга глава бави се ћелијским комплексима, односно, нарочито детаљним дефиницијама и теоремама у вези симплицијалних комплекса. У трећој глави изложен је детаљан осврт на дискретну теорију Морса за симплицијалне комплексе, што је важан метод за одређивање хомотопског типа коначних симплицијалних комплекса.

Остале главе садрже оригиналне резултате. Четврта глава ослања се на рад [23] и посвећена је проучавању уређајног комплекса идеала. Идеја да се симплицијални комплекс дефинише на овакав начин произилази из рада В.А. Васиљева [32] гдје је поменут уређајни комплекс придружен дјелимично уређеном скупу нетривијалних идеала у комутативном прстену са јединицом. У овој глави одређујемо хомотопски тип таквог комплекса за генералне комутативне прстене са јединицом.

Пета глава бави се проучавањем комплекса независности комаксималног графа и комаксималног хиперграфа, и ослања се на рад [21]. И у овом случају одређујемо хомотопски тип комплекса за генералне комутативне прстене са јединицом.

Шеста глава је централна глава ове дисертације и базира се на раду [22]. Инспирисани изучавањем графа нула дјелитеља, као и мало другачијим приступом овом проблему датом у [2], проучавамо симплицијални комплекс идеала који су дјелитељи нуле и анализирамо његову топологију за случај када прстен има бесконачно много максималних идеала, као и за случај коначних прстена. Када је прстен коначан, како би одредили хомотопски тип овог комплекса, користимо напредније методе, односно дискретну теорију Морса описану у трећој глави. У том случају доказујемо да је комплекс хомотопан букету сфера различитих димензија.

У седмој глави представљене су смјернице за даљи рад.

Глава 1

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ИЗ ТЕОРИЈЕ КОМУТАТИВНИХ ПРСТЕНА

У овој глави даћемо кратак преглед основних појмова и дефиниција из теорије комутативних прстена. Упознаћемо се са терминологијом и навешћемо неколико познатих теорема и тврђења потребних за ову дисертацију чије смо доказе додали ради комплетности. Генералне референце за теорију комутативних прстена су стандардни уџбеници [5] и [16].

У овом раду прстен R је увијек комутативан прстен са јединицом, уколико се не нагласи другачије. Скуп елемената који су различити од нуле обиљежавамо са $R^* = R \setminus \{0\}$, скуп инвертибилних елемената са $\mathrm{U}(R)$, док скуп правих нетривијалних идеала обиљежавамо са $I^*(R)$. Са $\langle x \rangle$ обиљежавамо главни идеал генерисан елементом x. Елемент $a \in R$ је *дјелитељ нуле* ако је $ab = 0$ за неко $b \in R^*$. Идеал $I \subset R$ је *дјелитељ нуле* ако је $IJ = 0$ за неки идеал $J \in I^*(R)$. Идеал $I \subset R$ је *прост* ако из $xy \in I$ слиједи да је $x \in I$ или $y \in I$. Идеал $M \subset R$ је *максималан* ако не постоји идеал I такав да је $M \subset I \subset R$. Очигледно, M је максималан идеал ако и само ако је R/M поље. У сваком нетривијалном прстену постоји макар један максималан идеал. Скуп максималних идеала обиљежавамо са $\mathrm{Max}(R)$, односно број максималних идеала једнак је $|\mathrm{Max}(R)|$. Прстен R са јединственим максималним идеалом M зове се *локалан прстен.* Прстен R који има коначан број максималних идеала (и тај број већи је од један) зове се *семилокалан прстен.*

Џекобсонов радикал у прстену R је пресјек свих максималних идеала у прстену, и обиљежавамо га са $J(R)$.

Тврђење 1 ([5])**.** *Елемент $x \in J(R)$ ако и само ако је елемент $1 - xy$ инвертибилан у R за свако $y \in R$.*

Доказ. Претпоставимо да је $x \in J(R)$ и да имамо елемент $1 - xy$ који није инвертибилан за неко $y \in R$. Онда постоји максималан идеал M такав да је $1 - xy \in M$, а с обзиром да $x \in J(R) \subseteq M$, онда је $xy \in M$. Према томе, имамо да је $1 \in M$ чиме долазимо до контрадикције. Обрнуто, претпоставимо да $x \notin J(R)$. Онда постоји максималан идеал M такав да $x \notin M$. Према томе $\langle x \rangle + M = R$, односно постоји $y \in R$ и $m \in M$ тако да је $xy + m = 1$. Дакле $1 - xy \in M$ је неинвертибилан елемент. $\square$

За идеал I у прстену R, анулатор идеала $\mathrm{Ann}(I)$ је скуп свих елемената у прстену $r \in R$ таквих да је $ra = 0$ за свако $a \in I$. Ако је идеал I главни генерисан елементом x, онда умјесто $\mathrm{Ann}(\langle x \rangle)$ пишемо $\mathrm{Ann}(x)$.

Биће нам потребна следећа генерална теорема која нам говори да ако је идеал садржан у коначној унији простих идеала, онда је садржан у једном од њих.

Теорема 2 (Теорема о избјегавању простих идеала, [5])**.** *Нека су $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ прости идеали и нека је идеал I садржан у $\bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$. Онда је $I \subseteq \mathfrak{p}_i$ за неко i.*

Доказ. Доказујемо индукцијом по $n \geq 1$ да ако $I \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ за $1 \leq i \leq n$ онда $I \not\subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$. Ако је $n = 1$ резултат је тривијално тачан. Претпоставимо да је $n > 1$ и да тврђење важи за $n-1$. Примјењујући n пута индуктивну претпоставку, закључујемо да за свако i постоји $x_i \in I$ такво да $x_i \notin \mathfrak{p}_j$ кад год $j \neq i$. Ако за неко i имамо да је $x_i \notin \mathfrak{p}_i$, онда је доказ готов. Онда претпоставимо да је $x_i \in \mathfrak{p}_i$ за свако i. Разматрамо елемент $y = \sum_{i=1}^{n} x_1 \cdots \hat{x_i} \cdots x_n$. Очигледно да је $y \in I$ и $y \notin \mathfrak{p}_i$ за свако $1 \leq i \leq n$. Према томе $I \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$. $\square$

Два идеала I и J су *комаксимална* ако је $I + J = R$. Према томе за комаксималне идеале имамо да је $I \cap J = IJ$.

Теорема 3 (Кинеска теорема о остацима, [5] тврђење 1.10.)**.** *Нека су $I_1, \dots, I_n$ идеали у прстену R такви да су идеали I_i и I_j комаксимални кад год $i \neq j$. Онда је $\prod_{i=1}^{n} I_i = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$, и*

$$R/\cap_{i=1}^{n} I_i \cong R/I_1 \times \cdots \times R/I_n$$

Доказ. Доказаћемо за $n = 2$. Генерални случај слиједи индукцијом тако што ћемо показати да су I_1 и $I_2 \cdots I_n$ комаксимални ако је сваки пар различитих идеала комаксималан. За свако $2 \leq i \leq n$ постоји елемент $x_i \in I_1$ и $y_i \in I_i$ тако да је $x_i + y_i = 1$. Према томе $1 = (x_2 + y_2) \cdots (x_n + y_n) \in I_1 + I_2 \cdots I_n$ па су I_1 и $I_2 \cdots I_n$ комаксимални.

Дакле, доказаћемо резултат за $n = 2$. Нека су I и J комаксимални идеали, и нека је $\phi\colon R \longrightarrow R/I \times R/J$ пресликавање дефинисано са $r \mapsto (r + I, r + J)$. Очигледно, ϕ је хомоморфизам прстена са језгром $I \cap J$. Идеали I и J су комаксимални па постоје $x \in I$ и $y \in J$ такви да је $x + y = 1$. Онда је $\phi(x) = (0, 1)$ и $\phi(y) = (1, 0)$, па за било које $r_1, r_2 \in R$ имамо $\phi(r_2 x + r_1 y) = (r_1 + I, r_2 + J)$. Према томе ϕ је сурјекција. Увијек имамо да је $IJ \subseteq I \cap J$, а када су I и J комаксимални онда за $a \in I \cap J$ имамо $a = a \cdot 1 = ax + ay \in IJ$, па према томе $IJ = I \cap J$. $\square$

Глава 2

ЋЕЛИЈСКИ КОМПЛЕКСИ

Многи важни примјери тополошких простора могу се представити на више начина, а један од њих је помоћу комбинаторних објеката као што су симплицијални комплекси.

Генерално, осим симплицијалних комплекса, ћелијски комплекси који се појављују у комбинаторном контексту су и полиедарски комплекси, кубични комплекси, и коначно CW комплекси. Нарочито су важни CW комплекси као најгенералнија класа ћелијских комплекса, и многа тврђења која су нам потребна у осталим поглављима дефинисана су управо за класу CW комплекса. Стога, прије детаљног бављења симплицијалним комплексима, изложићемо пар дефиниција и кратак увод о CW комплексима.

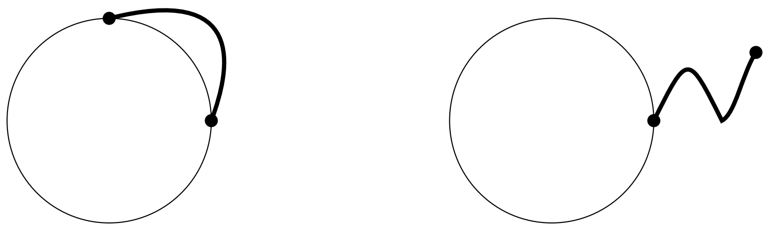
2.1 CW комплекси

CW комплексе као тип тополошког простора увео је Џ.Х.К. Вајтхед за потребе теорије хомотопије. CW комплекс се састоји од основних градивних блокова који се називају *ћелије*, и које су тополошки залијепљене на одређен начин. За сврху ове докторске дисертације, поменућемо само коначне CW комплексе.

Са B^d означићемо затворену јединичну лопту у d-димензионалном Еуклидском простору, односно $B^d = \{x \in \mathbb{E}^d \colon |x| \leq 1\}$. Граница од B^d је јединична $(d-1)$-сфера $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{E}^d \colon |x| = 1\}$. Тополошки простор који је хомеоморфан B^d је *d-ћелија*. Ако је σ нека d-ћелија, са $\dot{\sigma}$ означавамо подскуп од σ којем одговара $S^{d-1} \subset B^d$ под било којим хомеоморфизмом између B^d и σ. *Ћелија* је тополошки простор који је d-ћелија за неко d.

Основна операција код CW комплекса је *додавање ћелија*. Нека је X тополошки простор, σ једна d-ћелија и $f \colon \dot{\sigma} \longrightarrow X$ непрекидно пресликавање додавања. Ћелију σ додајемо тако што узимамо дисјунктну унију X и σ и идентификујемо $x \in \dot{\sigma}$ са $f(x) \in X$, за свако $x \in \dot{\sigma}$. Резултирајући простор обиљежавамо са $X \cup_f \sigma$.

Непрекидно пресликавање додавања мора бити дефинисано у свим тачкама из $\dot{\sigma}$, односно читава граница од σ мора бити залијепљена на X. Слика 2.1 то илуструје кроз примјер гдје је тополошки простор X кружница којој додајемо 1-ћелију. Како морамо залијепити све тачке границе 1-ћелије (односно два краја ивице) видимо да резултирајући простор може бити као у дијелу (i) док резултирајући простор никад не може бити простор представљен у дијелу (ii).



Слика 2.1: Примјер додавања ћелија

Коначан CW *комплекс* је тополошки простор X такав да постоји коначан угнијежден низ

$$\emptyset \subset X_0 \subset X_1 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n = X \tag{2.1.1}$$

такав да за свако $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, X_i је резултирајући простор након додавања ћелије на простор $X_{(i-1)}$.

Примјетимо да ова дефиниција захтијева да X_0 буде 0-ћелија. Ако је X неки CW комплекс, онда за низ као у 2.1.1 кажемо да је CW *декомпозиција од* X.

2.2 Симплекси

Нека су $x_0, x_1, \ldots, x_n$ тачке у неком $\mathbb{R}^d$. За тачку $x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i$ гдје је $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$, кажемо да је *афина комбинација* тачака x_i. *Афина љуска* је скуп свих афиних комбинација. Тачке $x_0, x_1, \ldots, x_n$ су *афино (геометријски) независне* ако су једнакости $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i = 0$ и $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 0$ могуће једино за $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Даље, $n+1$ тачака је афино независно ако и само ако су вектори $x_i - x_0$, за $1 \leq i \leq n$, линеарно независни. У $\mathbb{R}^d$ имамо највише d линеарно независних вектора, па према томе, имамо највише

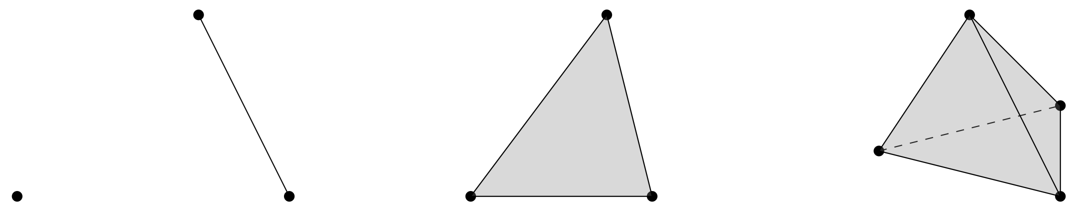
$d+1$ афино независних тачака.

Афина комбинација $x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i$ је *конвексна кобинација* ако је $\lambda_i \geq 0$ за свако $0 \leq i \leq n$. *Конвексна љуска* је скуп свих конвексних комбинација. *Геометријски n-симплекс* је конвексна љуска $n+1$ афино независних тачака, $\sigma = \mathrm{conv}\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Његова *димензија* је $\dim \sigma = n$. *Стандардан* геометријски n-симплекс Δ^n је одређен на следећи начин:

$$\Delta^n := \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 1\},$$

гдје је $\mathbb{R}_+$ скуп свих не-негативних реалних бројева. Постоји афина бијекција између било којег геометријског n-симплекса и стандардног геометријског n-симплекса. У даљем тексту, једноставно користимо појам симплекс умјесто геометријски симплекс.

За првих пар димензија, често користимо посебна имена за симплексе, *тачка* за 0-симплекс, *ивица* за 1-симплекс, *троугао* за 2-симплекс, и *тетраедар* за 3-симплекс (слика 2.2).



Слика 2.2: С лијева на десно: Тачка, ивица, троугао, и тетраедар

Било који подскуп афино независних тачака је такође афино независан, па према томе одређује симплекс. *Лице* симплекса σ је конвексна љуска непразног подскупа тачака x_i, и лице је *право* ако тај подскуп није читав скуп. Пишемо $\tau \subseteq \sigma$ ако је τ лице симплекса σ, односно $\tau \subset \sigma$ ако је то лице право. С обзиром да скуп од $n+1$ елемената има 2^{n+1}

подскупова, укључујући и празан скуп, σ има $2^{n+1}-1$ лица од којих су сва права осим самог σ. *Граница* симплекса, коју обиљежавамо $\mathrm{bd}\,\sigma$, је унија свих правих лица, док је *унутрашњост* симплекса све остало, односно $\mathrm{int}\,\sigma = \sigma - \mathrm{bd}\,\sigma$. Тачка $x \in \sigma$ припада $\mathrm{int}\,\sigma$ ако и само ако су њени коефицијенти λ_i позитивни. Слиједи да свака тачка $x \in \sigma$ припада унутрашњости тачно једног лица, које је генерисано тачкама x_i којима одговарају позитивни коефицијенти λ_i.

2.3 Симплицијални комплекси

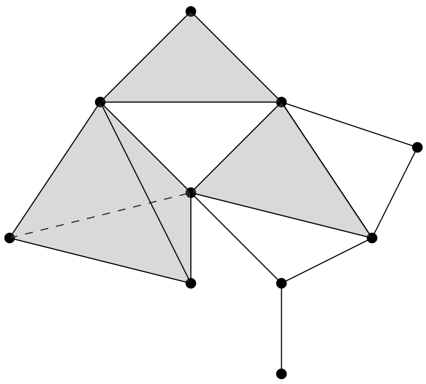
Са $\mathbb{R}^{\oplus J}$ обиљежимо директну суму $|J|$ (гдје J може бити бесконачно; $|J|$ је кардиналност скупа J) копија $\mathbb{R}$ (па је према томе подскуп у $\mathbb{R}^J$ којег чине све тачке $x = (x_j)_{j\in J} \in \mathbb{R}^J$ такве да је $x_j = 0$, за све осим коначно много $j \in J$).

(Геометријски) симплицијални комплекс K у $\mathbb{R}^{\oplus J}$ је колекција симплекса у $\mathbb{R}^{\oplus J}$ која задовољава следећа два услова:

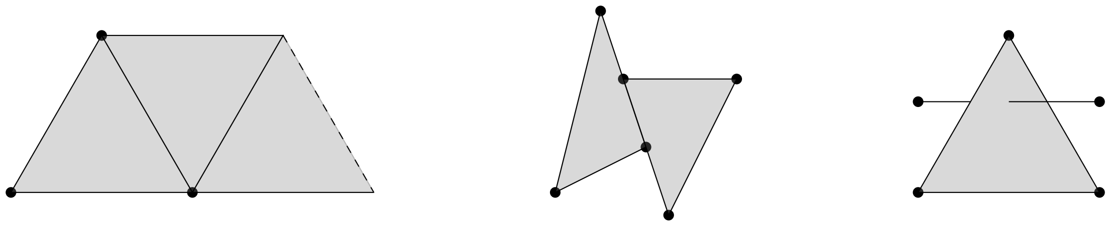
(1) Свако лице симплекса у K је симплекс у K.

(2) Непразан пресјек два симплекса у K је лице сваког од та два симплекса.

Примјер симплицијалног комплекса дат је на слици 2.3. Скуп симплекса који не чине симплицијални комплекс дат је у примјерима (i), (ii) и (iii) на слици 2.4. У примјеру (i) недостаје ивица и два тјемена; у примјеру (ii) пресјек троуглова је сегмент који није лице ни једног ни другог троугла; док у примјеру (iii) ивица пресјеца троугао у тачки која се налази у унутрашњости тог троугла.



Слика 2.3: Примјер симплицијалног комплекса



(i) (i) (iii)

Слика 2.4: Није симплицијални комплекс

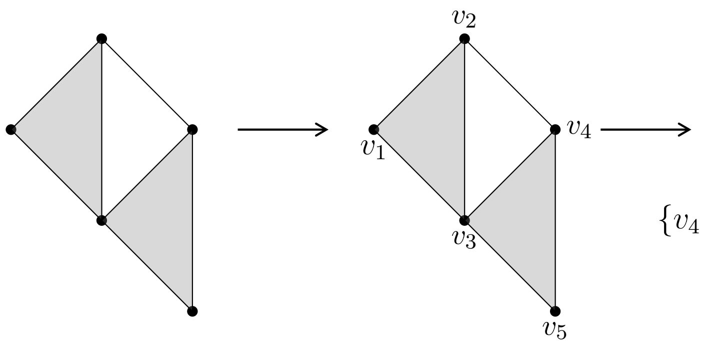
Димензија комплекса K је максимална димензија његових симплекса. Са $|K|$ обиљежавамо унију свих симплекса у K. Овом скупу је дата топологија на следећи начин: скуп $F \subset |K|$ је затворен ако и само ако је $F \cap \sigma$ затворен у σ за сваки симплекс $\sigma \in K$ (сам симплекс σ наслијеђује топологију коју индукује n-димензионална раван коју одређују његова тјемена). Тополошки простор $|K|$ назива се *геометријска реализација* и одређен је до на хомеоморфизам.

2.3.1 Апстрактни симплицијални комплекси

Апстрактни симплицијални комплекси су чисто комбинаторни аналог симплицијалних комплекса. Апстрактне симплицијалне комплексе можемо посматрати као вишедимензионално уопштење графова.

Апстрактан симплицијални комплекс $\mathcal{K}$ је колекција коначних непразних скупова таквих да ако је $A \in \mathcal{K}$, и $\emptyset \neq B \subseteq A$, онда је $B \in \mathcal{K}$. Скупови у $\mathcal{K}$ су његови *симплекси*.

Димензија симплекса је $\dim A = |A| - 1$ а димензија комплекса је максимална димензија његових симплекса. Понекад пишемо $\alpha^{(d)}$ да означимо симплекс α димензије d. *Лице* од A је било који непразан подскуп $B \subseteq A$. *Скуп тјемена* је унија свих симплекса $V(\mathcal{K}) = \cup\mathcal{K} = \cup_{A \in \mathcal{K}} A$. *Поткомплекс* је апстрактан симплицијални комплекс $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$.

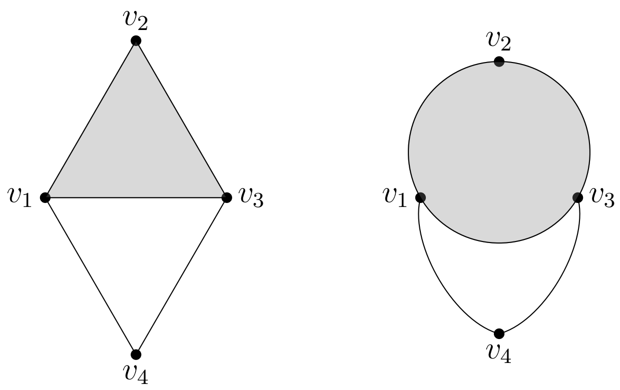


$$\{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_3, v_4, v_5\}\}$$

Слика 2.5: Апстраховање једног геометријског комплекса

Сваки геометријски симплицијални комплекс може се апстраховати, и обрнуто сваком апстрактном симплицијалном комплексу $\mathcal{K}$ може се придружити одговарајући геометријски симплицијални комплекс K, односно говоримо да је $|K|$ *геометријска реализација* комплекса $\mathcal{K}$. Слика 2.5 приказује апстраховање једног геометријског комплекса а слика 2.6 више хомеоморфних геометријских реализација апстрактног симплицијалног комплекса $\mathcal{K} = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \ \{v_3, v_4\},$

$\{v_1, v_2, v_3\}\}$.



Слика 2.6: Хомеоморфне геометријске реализације

Симплекси $\sigma \in K$ који нису садржани ни у једном другом симплексу у комплексу називају се *максимални симплекси*. Симплекс τ назива се *слободно лице* симплекса σ ако је $\tau \subset \sigma$, σ је максималан симплекс и τ није лице ниједног другог максималног симплекса у комплексу. За симплекс $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\} \in K$, користимо ознаке $\sigma \setminus x_i = \{x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots x_n\}$ и $\sigma + y = \{x_0, \ldots, x_n, y\}$.

У наставку рада, апстрактне симплицијалне комплексе обиљежићемо на исти начин као и геометријске, односно са K, L, итд. Када говоримо о тополошким својствима апстрактног симплицијалног комплекса K, то се увијек односи на тополошки простор $|K|$.

2.3.2 Симплицијална пресликавања

Нека је K симплицијални комплекс са тјеменима $x_0, x_1, \ldots, x_k$. Свака тачка у комплексу $x \in |K|$, припада унутрашњости тачно једног симплекса у K. Нека је $\sigma = \mathrm{conv}\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ тај симплекс, онда је $x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i$

са $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$ и $\lambda > 0$ за свако i. Обиљежимо $b_i(x) = \lambda_i$ за свако $0 \leq i \leq n$ и $b_i(x) = 0$ за $n+1 \leq i \leq k$. Имамо да је $x = \sum_{i=0}^{k} b_i(x)x_i$ и $b_i(x)$ зовемо *барицентричне координате* од x у K. Барицентричне координате користимо да бисмо дефинисали симплицијална пресликавања.

Симплицијално пресликавање између два апстрактна симплицијална комплекса K и L је пресликавање дато на тјеменима $f\colon V(K) \longrightarrow V(L)$ такво да ако је $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ симплекс у K, онда је $\{f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ симплекс у L. За такво пресликавање f пишемо да је $f\colon K \longrightarrow L$. Ово пресликавање може се продужити на непрекидно пресликавање између тополошких простора $|K|$ и $|L|$. Непрекидно симплицијално пресликавање $|f|\colon |K| \longrightarrow |L|$ дефинисано је са $|f|(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i(x) f(x_i)$. Када је из контекста јасно да се ради о пресликавању између тополошких простора, то пресликавање ћемо често означити са f умјесто $|f|$.

2.4 Симплицијална топологија

У овом дијелу даћемо кратак преглед теорије хомотопије за симплицијалне комплексе. За обухватнију анализу упућујемо читаоца на [13, 17, 24].

За дата два тополошка простора X и Y, може се увести релација еквиваленције на простору свих непрекидних пресликавања из X у Y.

Нека су $f, g\colon X \longrightarrow Y$ два непрекидна пресликавања и $I = [0,1]$. Непрекидно пресликавање $F\colon X \times I \longrightarrow Y$ је *хомотопија* од f до g ако је $F(-,0) = f$ и $F(-,1) = g$. Хомотопију од f до g означавамо са $f \sim g$.

Хомотопска еквиваленција $f\colon X \longrightarrow Y$ је непрекидно пресликавање такво да постоји непрекидно пресликавање $g\colon Y \longrightarrow X$ такво да је $f \circ g \sim id_Y$ и $g \circ f \sim id_X$. Кажемо да су тополошки простори X и Y *хомотопски еквивалентни*, $X \simeq Y$, ако постоји хомотопска еквиваленција $f\colon X \longrightarrow Y$. За хомотопски еквивалентне просторе кажемо да X има *хомотопски тип* простора Y.

Нека је X тополошки простор са потпростором $A \subseteq X$, и нека је $i\colon A \hookrightarrow X$ инклузија. Непрекидно пресликавање $f\colon X \longrightarrow A$ назива се:

- ретракција ако је $f|_A = id_A$;
- деформацијска ретракција ако је f ретракција и $i \circ f\colon X \longrightarrow X$ хомотопно идентитету id_X.
- јака деформацијска ретракција ако постоји хомотопска еквиваленција $F\colon X \times I \longrightarrow X$ између $i \circ f$ и id_X која је константна на A, односно, $F(a,t) = a$ за свако $t \in I$ и $a \in A$.

У том случају каже се да је A ретракт, деформацијски ретракт, односно јак деформацијски ретракт од X.

Каже се да је простор X *контрактибилан* ако је хомотопски еквивалентан тачки $X \simeq \star$. То је еквивалентно чињеници да је идентитет id_X нулхомотопан, односно хомотопан константном пресликавању.

За апстрактне симплицијалне комплексе K и L кажемо да су хомотопно еквивалентни ако су њихове геометријске реализације $|K|$ и $|L|$ хомотопно еквивалентне. Генерално, када год говоримо о тополошким својствима апстрактног симплицијалног комплекса, говоримо о његовој геометријској реализацији.

Нека је K симплицијални комплекс и $\sigma, \tau \in K$ симплекси такви да је:

(1) $\tau \subset \sigma$;

(2) σ је максималан симплекс, и ниједан други максималан симплекс не садржи τ.

Симплицијални колапс је одстрањење свих симплекса γ таквих да је $\tau \subseteq \gamma \subseteq \sigma$. Ако уз то имамо $\dim \tau = \dim \sigma - 1$ онда се ради о *елементарном колапсу*. Симплицијални колапси су значајни јер доводе до јаке деформацијске ретракције, односно до хомотопске еквиваленције. Даље, симплицијални комплекс K је контрактибилан ако и само ако постоји низ колапса и експанзија (антиколапса, инверзна операција од колапса) који воде од K до неког тјемена и обрнуто.

За симплицијални комплекс K са скупом тјемена $V(K)$ кажемо да је *конус* са врхом $v \in V(K)$ ако за сваки симплекс $\sigma \in K$ важи да је $\sigma \cup \{v\} \in K$. Ако је симплицијални комплекс K конус са врхом v онда је његова геометријска реализација контрактибилна.

Ћелијски комплекс је *букет сфера* ако се састоји од k_d ћелија димензије d као и једине 0-ћелије α тако да се све ћелије сијеку у α и нигдје друго. Букет сфера записујемо са $\bigvee_{k_d} S^d$. У комбинаторној топологији, симплицијални комплекси често имају хомотопски тип букета сфера.

Потребне су нам и следеће леме.

Лема 4 (Лема 2.5, [24]). *Ако је K коначан симплицијални комплекс, онда је тополошки простор $|K|$ компактан. Обрнуто, ако је подскуп A од $|K|$ компактан, онда је $A \subset |K_0|$ за неки коначан поткомплекс K_0 у K.*

Треба обратити пажњу да је ова лема у [24] формулисана за симплицијалне комплексе који се налазе у $\mathbb{R}^N$ за неко N, што ограничава кардиналност комплекса K и димензију његових симплекса. Међутим, у следећем поглављу у [24], аутор уклања ова ограничења, тако да овај резултат важи у генералном случају што ћемо и користити.

Потребна нам је и лема контрактибилног поткомплекса:

Лема 5 (Хачер [13], тврђење 0.17)**.** *Нека су K и L симплицијални комплекси тако да је L контрактибилан поткомплекс у K. Онда су K/L и K хомотопно еквивалентни.*

У истраживању хомотопског типа комплекса више пута ћемо користити тереому Џ.Х.К. Вајтхеда која нам говори да је пресликавање између CW-комплекса које индукује изоморфизме на свим хомотопским групама хомотопска еквиваленција.

Теорема 6 (Теорема Вајтхеда, [13] теорема 4.5.)**.** *Ако је $f\colon X \longrightarrow Y$ пресликавање између два повезана CW комплекса које индукује изоморфизме $f_\star\colon \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(Y)$ за свако n, онда је f хомотопска еквиваленција. У случају када је f инклузија поткомплекса $X \hookrightarrow Y$ онда је X деформацијски ретракт од Y. Посебно, ако је $\pi_n(X)$ тривијална за свако n, онда је X контрактибилан.*

Глава 3

ДИСКРЕТНА ТЕОРИЈА МОРСА

Претпоставимо да имамо коначан симплицијални комплекс K. Често је случај да K има CW декомпозицију са много мање ћелија него у оригиналној симплицијалној декомпозицији. Како можемо наћи такву „ефикасну” CW декомпозицију комплекса K? Управо је дискретна теорија Морса коју је увео Робин Форман ([11, 12]) значајна алатка која олакшава анализу хомотопског типа коначних комплекса тако што смањује величину комплекса истовремено чувајући хомотопски тип. Ова теорија развијена у 1990-тим годинама је комбинаторни аналог оригиналне Морсове теорије, коју је развио Марстон Морс у 20-тим годинама прошлог вијека. Оригинална теорија се бави анализом еквиваленције генералних тополошких простора док дискретна теорија Морса даје сличне методе за анализу тополошких простора који имају дискретну структуру.

Нека је K симплицијални комплекс. Можемо сагледати дискретну теорију Морса као генерализацију теорије симплицијалних колапса. Нека је $\{\sigma, \tau\}$ пар симплекса у K таквих да је $\sigma \subset \tau$ и $\dim \sigma = \dim \tau - 1$. Да бисмо имали елементаран колапс τ на σ, τ мора бити максималан симплекс и једини максималан симплекс у комплексу који садржи σ. Тада можемо одстранити унутрашњост та два симплекса σ и τ. Видимо да низ симплицијалних колапса можемо комбинаторно гледати као скуп парова симплекса $\{\sigma, \tau\}$ који означавају сваки симплицијални колапс. Међутим, произвољни скуп упаривања симплекса не представља нужно и низ симплицијалних колапса. Управо дискретна теорија Морса је метод упаривања симплекса на начин који даје низ симплицијалних колапса, тако да комплекс сведемо на што мањи број ћелија како бисмо одредили његов хомотопски тип.

3.1 Дискретна Морсова функција

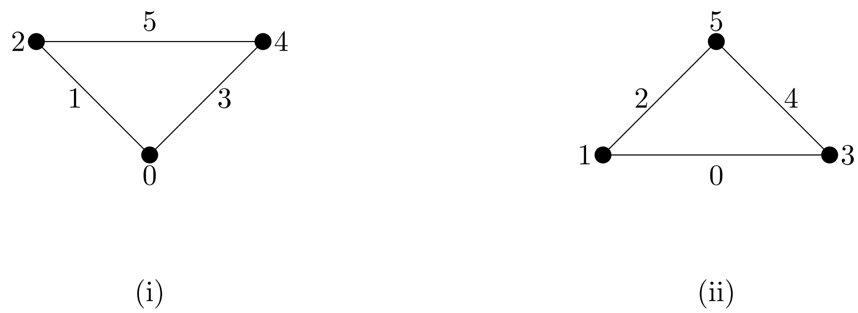
Нека је K коначан симплицијални комплекс и пресликавање $f\colon K \longrightarrow \mathbb{N}$. Размислимо о могућем својству да за сваки пар симплекса $\alpha, \beta \in K$ гдје је α лице симплекса β имамо да је $f(\alpha) < f(\beta)$ (увијек можемо наћи макар једно такво пресликавање f тако што дефинишемо да је $f(\alpha) = d$ гдје је d димензија симплекса α). Дискретна Морсова функција готово да има ово својство, то јест, има највише једну „грешку” локално. Ова идеја је формализована у следећој дефиницији:

Дефиниција 7. *Нека је K симплицијални комплекс. $f\colon K \longrightarrow \mathbb{N}$ је дискретна Морсова функција ако за сваки симплекс $\alpha^{(d)} \in K$ важи да:*

1. $f(\beta^{(d+1)}) \leq f(\alpha^{(d)})$ *за највише један симплекс* $\beta^{(d+1)} \supset \alpha^{(d)}$

2. $f(\beta^{(d-1)}) \geq f(\alpha^{(d)})$ *за највише један симплекс* $\beta^{(d-1)} \subset \alpha^{(d)}$

Као једноставан примјер размотримо слику 3.1. Комплекс је „празан” троугао гдје су тачке (0-симплекси) и ивице (1-симплекси) обиљежени њиховим вриједностима. Примјетимо да у другом дијелу слике, примјер (ii), вриједности које су задате су такве да симплекс $f^{-1}(0)$ (доња ивица троугла) има два лица (тјемена) која имају веће вриједности. Стога, овај симплекс крши друго правило дискретне Морсове функције, па овај примјер нумерисања симплекса није дискретна Морсова функција. С друге стране, примјер дат у дијелу (i) слике 3.1 задовољава аксиоме дискретне Морсове функције.



Слика 3.1: (i) јесте дискретна Морсова функција, (ii) није дискретна Морсова функција

Следећа дефиниција идентификује симплексе који немају ниједну локалну „грешку” у односу на својство монотоности $f(\alpha) < f(\beta)$ гдје је α лице симплекса β.

Дефиниција 8. *За дискретну Морсову функцију f, $\alpha^{(d)} \in K$ је критична тачка ако важи да:*

- $f(\beta^{(d+1)}) > f(\alpha^{(d)})$ *за сваки симплекс* $\beta^{(d+1)} \supset \alpha^{(d)}$
- $f(\beta^{(d-1)}) < f(\alpha^{(d)})$ *за сваки симплекс* $\beta^{(d-1)} \subset \alpha^{(d)}$

Из саме дефиниције дискретне Морсове функције може се показати да сваки симплекс задовољава макар један од услова за тест критичне тачке, односно да се услови 1 и 2 у дефиницији 7 не могу истовремено десити.

Лема 9 (Лема 2.5 у [11]). *Нека је f дискретна Морсова функција дефинисана на комплексу K, и нека је $\alpha^{(d)}$ неки симплекс у K. Не постоје симплекси $\gamma^{(d-1)} \subset \alpha^{(d)} \subset \beta^{(d+1)}$ такви да је $f(\gamma^{(d-1)}) \geq f(\alpha^{(d)}) \geq f(\beta^{(d+1)})$.*

Доказ. Претоставимо супротно, да за неки симплекс $\alpha^{(d)} \in K$ имамо да је $\gamma^{(d-1)} \subset \alpha^{(d)} \subset \beta^{(d+1)}$ тако да је $f(\gamma^{(d-1)}) \geq f(\alpha^{(d)}) \geq f(\beta^{(d+1)})$. Посматрајмо неко друго лице симплекса $\beta^{(d+1)}$ које садржи $\gamma^{(d-1)}$, односно симплекс $\alpha_2^{(d)} \neq \alpha^{(d)}$ тако да $\gamma^{(d-1)} \subset \alpha_2^{(d)} \subset \beta^{(d+1)}$. Према дефиницији дискретне Морсове функције морамо имати $f(\gamma^{(d-1)}) < f(\alpha_2^{(d)})$ па је према томе $f(\beta^{(d+1)}) \leq f(\alpha^{(d)})$ и $f(\beta^{(d+1)}) < f(\alpha_2^{(d)})$ чиме долазимо до контрадикције. □

Сада можемо навести главну теорему дискретне теорије Морса:

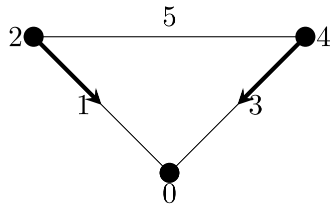
Теорема 10 (Теорема 2.5 [12]). *Нека је K симплицијални комплекс са дискретном Морсовом функцијом. Онда је K хомотопан CW комплексу са по једном ћелијом димензије d за сваки критичан симплекс димензије d.*

Дакле, дискретна Морсова функција даје начин конструкције симплицијалног комплекса тако што придружујемо симплексе редом који је дефинисан функцијом, односно, прво додајемо симплексе који имају најмању вриједност.

3.2 Градијентно векторско поље

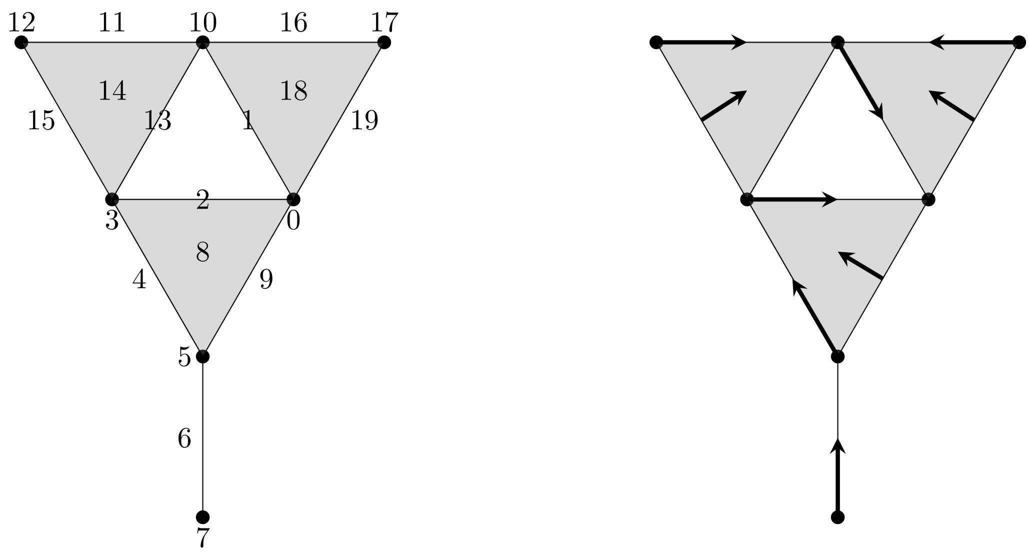
Може се одмах примијетити да за било који комплекс дефинисање дискретне Морсове функције није тешко, довољно је да узмемо $f(\alpha^{(d)}) = d$. Међутим, у том случају сваки симплекс би био критичан па би теорема 10 била само неинтересантна констатација. С друге стране, одређивање дискретне Морсове функције која даје интересантан резултат је много већи изазов. Из поменуте теореме смо видјели да се комплекс може лакше анализирати уколико имамо мање критичних симплекса. Како онда генерално нумерисати сваки симплекс тако да задовољава аксиоме Морсове функције а да при том имамо што мање критичних симплекса? На срећу, у пракси не морамо експлицитно одредити дискретну Морсову функцију. Довољно је одредити градијентно векторско поље за Морсову функцију, што ћемо и објаснити у овом дијелу поглавља.

Илуструјмо ову идеју примјером (i) слика 3.1. Некритични симплекси долазе у паровима. У овом примјеру, $f^{-1}(1)$ није критичан симплекс зато што има лице које је нумерисано већим бројем (то је тјеме $f^{-1}(2)$). Односно, обрнуто гледано $f^{-1}(2)$ није критичан симплекс зато што је садржан у симплексу веће димензије $f^{-1}(1)$ који има мању вриједност. Према леми 9, сваки некритичан симплекс је садржан у тачно једном пару, и тај пар можемо означити тако што ћемо нацртати стрелицу од мањег ка већем симплексу. У овом примјеру стрелица иде од тјемена $f^{-1}(2)$ до ивице $f^{-1}(1)$. Слично томе, имамо стрелицу која иде од тјемена $f^{-1}(4)$ до ивице $f^{-1}(3)$ (видјети слику 3.2).



Слика 3.2: Градијентно векторско поље за дискретну Морсову функцију приказану у примјеру (i) слика 3.1

Овај процес можемо примијенити на било који симплицијални комплекс са дискретном Морсовом функцијом. За сваки некритичан симплекс $\alpha^{(d)}$ за који постоји $\alpha^{(d)} \subset \beta^{(d+1)}$ такав да је $f(\beta) \leq f(\alpha)$, цртамо стрелицу која иде од α до β (увијек од мањег ка већем симплексу). Слика 3.3 илуструје мало сложенији примјер.



Слика 3.3: Још један примјер дискретне Морсове функције и његовог градијентног векторског поља

Из леме 9 произилази да сваки симплекс α задовољава тачно један од следећих услова:

1. α је реп тачно једне стрелице.

2. α је врх тачно једне стрелице.

3. α није ни реп ни врх ниједне стрелице.

Примјетимо да је симплекс критичан ако и само ако није ни реп ни врх ниједне стрелице, односно ако задовољава трећи услов. На примјеру на слици 3.3 критични симплекси су $f^{-1}(0)$ и $f^{-1}(13)$. Теорема 10 нам говори да је овај комплекс хомотопски еквивалентан CW комплексу са тачно једном 0-ћелијом и једном 1-ћелијом, односно, хомотопан је кружници.

Ове „стрелице” или „векторе” са репом у $\alpha^{(d)}$ и врхом у $\beta^{(d+1)}$, можемо посматрати као парове $\{\alpha^{(d)}, \beta^{(d+1)}\}$ који дефинишу дискретно векторско поље.

Дефиниција 11. *Дискретно векторско поље V симплицијалног комплекса K је скуп парова $\{\alpha^{(d)}, \beta^{(d+1)}\}$ гдје је $\alpha^{(d)} \subset \beta^{(d+1)}$, тако да се сваки симплекс у комплексу налази у највише једном пару.*

Према томе, за дату дискретну Морсову функцију $f\colon K \longrightarrow \mathbb{N}$ можемо конструисати дискретно векторско поље тако што формирамо парове $\{\alpha^{(d)}, \beta^{(d+1)}\}$ кад год имамо $f(\alpha^{(d)}) \geq f(\beta^{(d+1)})$ и $\alpha^{(d)} \subset \beta^{(d+1)}$. Такво дискретно векторско поље зовемо *градијентно векторско поље од f*. Као што ћемо видјети касније, лакше је радити са дискретним векторским пољем, односно са стрелицама, него са дискретном Морсовом функцијом.

Видјели смо да када имамо дискретну Морсову функцију f, директно можемо дефинисати дискретно векторско поље формирајући парове симплекса, али када важи обрнуто? Односно, када је дискретно векторско поље симплицијалног комплекса K уједно и градијентно векторско поље неке дискретне Морсове функције f? Да бисмо одговорили на то питање, треба нам дефиниција V-путање.

Нека је V дискретно векторско поље симплицијалног комплекса K. *V-путања* је низ симплекса

$$\alpha_0^{(d)}, \beta_0^{(d+1)}, \alpha_1^{(d)}, \beta_1^{(d+1)}, \alpha_2^{(d)}, \ldots, \beta_r^{(d+1)}, \alpha_{r+1}^{(d)} \tag{3.2.1}$$

тако да за свако $i = 0, \ldots, r$ имамо $\{\alpha_i, \beta_i\} \in V$ и $\beta_i \supset \alpha_{i+1} \neq \alpha_i$. Кажемо да је таква путања *затворена* ако је $\alpha_0 = \alpha_{r+1}$ за неко $r > 0$. Ова дефиниција нам је потребна ради следећег резултата:

Теорема 12 (Теорема 3.4 [12])**.** *Нека је V градијентно векторско поље дискретне Морсове функције f. Онда је низ симплекса као у (3.2.1) V-путања ако и само ако је $\alpha_i \subset \beta_i \supset \alpha_{i+1}$ за свако $i = 0, \ldots, r$, и*

$$f(\alpha_0) \geq f(\beta_0) > f(\alpha_1) \geq f(\beta_1) > \cdots \geq f(\beta_r) > f(\alpha_{r+1}).$$

Према томе V-путање су управо низови симплекса дуж којих се вриједности функције f смањују. Ова теорема управо указује да ако је V градијентно векторско поље, да не постоје затворене V-путање. Главна теорема коју наводимо у овом дијелу поглавља је да је и супротан исказ тачан.

Теорема 13 (Теорема 3.5. у [12])**.** *Дискретно векторско поље V је градијентно векторско поље неке дискретне Морсове функције ако и само ако нема затворених V-путања.*

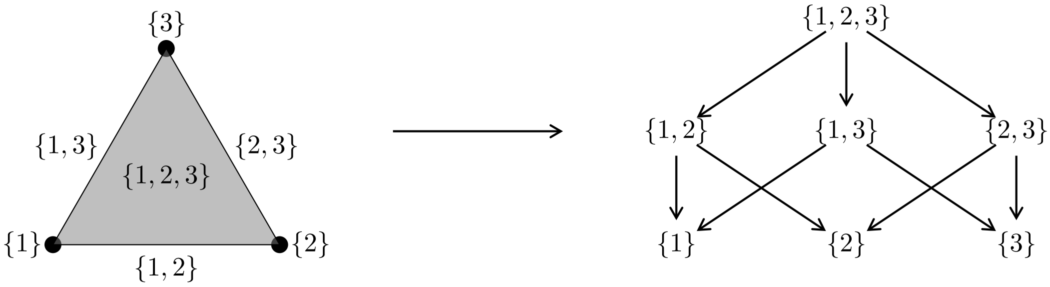
3.3 Комбинаторни аспекти

За дати комплекс K посматрамо његов Хасеов дијаграм, односно, парцијално уређен скуп симплекса у K који су уређени релацијом „бити лице". Тјемена дијаграма су симплекси у комплексу, док су сегментима повезани сусједни елементи уређења, односно два симплекса су сусједна ако је један симплекс лице другог и разлика у њиховим димензијама износи 1. Хасеов дијаграм можемо посматрати и као усмјерени граф (диграф). Тјемена су симплекси у комплексу, и постоји усмјерена ивица од β до α ако и само ако је α лице симплекса β и $\dim \alpha = \dim \beta - 1$. Нека је V дискретно векторско поље комплекса K. Модификујемо описани диграф на следећи начин: за сваки пар $\{\alpha^{(d)}, \beta^{(d+1)}\} \in V$ окренемо смјер ивице између α и β (примјер на слици 3.4). Према томе, комбинаторно гледано, дискретно векторско поље можемо приказати као дјелимично упаривање сусједних симплекса на Хасеовом дијаграму. Неупарени односно критични симплекси су они од којих све усмјерене ивице воде само ка симплексима мање димензије. Ако је сваки симпекс у комплексу садржан у неком пару у V онда кажемо да имамо потпуно упаривање на Хасеовом дијаграму.

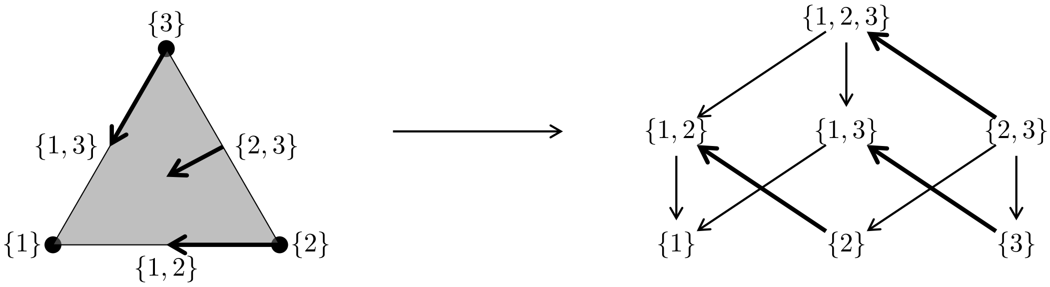
Сада V-путању можемо посматрати као усмјерену путању на овом модификованом графу. Следећи резултат је лако провјерити:

Теорема 14 (Теорема 6.2. [12])**.** *За дато дискретно векторско поље V не постоје затворене V-путање ако и само ако не постоје затворене усмјерене путање на одговарајућем усмјереном Хасеовом дијаграму.*

Дакле, дискретно векторско поље је градијентно векторско поље ако



(i)



(ii)

Слика 3.4: Од дискретног векторског поља до усмјереног Хасеовог дијаграма

и само ако је дјелимично упаривање на Хасеовом дијаграму ациклично. Главну теорему дискретне Морсове теорије сада можемо поново изразити са комбинаторне тачке гледишта. Потребно је нагласити да се обично укључује празан скуп у Хасеовом дијаграму док ми раније нисмо укључивали празан скуп у дискретном векторском пољу.

Теорема 15. *Нека је V ациклично дјелимично упаривање на Хасеовом дијаграму симплицијалног комплекса K (претпоставимо да празан скуп није упарен са неким симплексом). Нека је u_d број неупарених d-симплекса. Онда је K хомотопно еквивалентан CW комплексу са тачно u_d ћелија димензије d, за свако $d \geq 0$.*

Хасеов дијаграм симплицијалног комплекса који је модификован на горе поменути начин (за парове у V ивице иду од симплекса мање ка симплексу веће димензије, за остале смјер ивице је од симплекса ка његовим лицима) обиљежићемо са $D = D(K, V)$. Односно $D = D(K, V)$ је диграф чија су тјемена симплекси у K, и усмјереним ивицама од σ до τ ако и само ако важи неки од следећих услова:

1. $\{\sigma, \tau\} \in V$ $(\sigma \subset \tau)$
2. $\{\sigma, \tau\} \notin V$ и $\sigma = \tau + x$ за неко $x \notin \tau$.

За рефлексивно и транзитивно затворење релације „ивица" од σ до τ у D, кажемо да постоји усмјерена путања од σ до τ у D и пишемо $\sigma \longrightarrow \tau$. За фамилије $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ пишемо $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ ако постоји $M \in \mathcal{M}$ и $N \in \mathcal{N}$ тако да $M \longrightarrow N$. Симбол $\not\longrightarrow$ означава да не постоји таква усмјерена путања. Може се лако показати да је дискретно векторско поље V ациклично ако је D ацикличан, односно, ако из $\sigma \longrightarrow \tau$ и $\tau \longrightarrow \sigma$ слиједи да је $\sigma = \tau$. За више детаља, видјети [15] и [28].

3.4 Симплицијална теорија Морса

Дискретна теорија Морса често се примјењује у циљу доказивања да је неки тополошки простор X хомотопно еквивалентан букету сфера, или макар за рачунање хомолошких група простора X. У неким ситуацијама може се наћи градијентно векторско поље V тако да нема критичних ћелија у сусједним димензијама, што рјешава питање рачунања хомолошких група простора X. Међутим, како би одредили хомотопски тип, мора се на неки начин закључити да су критичне ћелије независне једна од друге. Оригинална дискретна теорија Морса коју је увео Робин Форман у раду [11] може се примијенити на много већу класу ћелијских комплекса, а у овом дијелу поглавља, фокус је на примјену ове теорије на симплицијалне комплексе. Детаљнија анализа симплицијалне теорије Морса може се наћи у [28] и [15] чији приступ усвајамо.

Почећемо са теоремом која указује да је могуће урадити колапс симплицијалног комплекса на његов поткомплекс уколико тај поткомплекс садржи све критичне симплексе и не постоји усмјерена путања од тог поткомплекса до симплекса који нису у том поткомплексу.

Теорема 16 (Јонсон теорема 4.4. [15])**.** *Нека је K_0 поткомплекс у K такав да $K_0 \not\longrightarrow K \setminus K_0$ и такав да сви критични симплекси припадају K_0. Онда је могућ колапс од K на K_0. Посебно, K и K_0 су хомотопно еквивалентни. Према томе K нема хомологију у димензији која је строго већа од* $\dim K_0$.

Доказ. Према претпоставци, рестрикција градијентног векторског поља на $K \setminus K_0$ даје потпуно упаривање, односно сваки симплекс у $K \setminus K_0$ је садржан у неком пару. Наиме, ако је симплекс $\tau \in K \setminus K_0$ упарен са $\sigma \in K_0$, $\tau \not\subset \sigma$ јер је K_0 поткомплекс, па је $\sigma \subset \tau$. Према томе имамо $\sigma \longrightarrow \tau$, што је контрадикција. Доказујемо лему индукцијом по $|K \setminus K_0|$. Ако је $K = K_0$, доказ је готов. У противном, нека је σ симплекс у $K \setminus K_0$ такав да ниједна ивица у диграфу D не завршава у σ (с обзиром да је D ацикличан и с обзиром на претпоставку $K_0 \not\longrightarrow K \setminus K_0$ такав симплекс увијек постоји). Дакле σ је упарен са неким симплексом веће димензије $\tau \in K \setminus K_0$, и σ није лице ниједног другог симплекса. Према томе, колапс комплекса K на поткомплекс $K \setminus \{\sigma, \tau\}$ је могућ. Индуктивно долазимо до закључка да је колапс $K \setminus \{\sigma, \tau\}$ на K_0 могућ, чиме је доказ завршен. $\square$

Наредне теореме које користимо могу се наћи у [15] (видјети доказ теореме 4.11 у [15] и њене посљедице), гдје аутор примјењује Формановe теореме дискретне теорије Морса како би показао да комплекс можемо подијелити на више поткомплекса уколико нема усмјерених путања између тих поткомплекса у диграфу D. Онда је комплекс хомотопно еквивалентан букету тих мањих поткомплекса.

Нека је V градијентно векторско поље коначног симплицијалног комплекса K, и нека је $\mathcal{U}(K,V)$ скуп критичних симплекса у K у односу на V. За непразан скуп критичних симплекса $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}(K,V)$, разматрамо следећи поткомплекс у K:

$$K_{\mathcal{V}} = \{\tau \in K : \sigma \longrightarrow \tau, \text{ за неко } \sigma \in \mathcal{V}\}$$

Узимамо да је $\mathcal{V} \subseteq K_{\mathcal{V}}$. Када $\mathcal{V}$ садржи тачно један симплекс σ, овај поткомплекс обиљежавамо са K_σ.

Лема 17 (Јонсон [15])**.** *$K_{\mathcal{V}}$ је симплицијални комплекс. Ако је $\{\sigma,\tau\} \in V$ са $\sigma \subset \tau$ и $\tau \in K_{\mathcal{V}}$, онда је $\sigma \in K_{\mathcal{V}}$. Односно,*

$$\mathcal{U}(K_{\mathcal{V}}, V_{\mathcal{V}}) = K_{\mathcal{V}} \cap \mathcal{U}(K,V),$$

гдје је $V_{\mathcal{V}}$ рестрикција од V на $K_{\mathcal{V}}$.

Доказ. Претпоставимо супротно. Нека је σ симплекс највеће димензије такав да $\sigma \notin K_{\mathcal{V}}$ и такав да постоји тјеме $\{y\}$ са својством $\sigma + y \in K_{\mathcal{V}}$. С обзиром да имамо $\mathcal{V} \longrightarrow \sigma + y$, онда имамо пар $\{\sigma, \sigma + y\} \in V$ јер би у супротном $(\sigma + y, \sigma)$ била ивица у D. Према томе, $\sigma + y \notin \mathcal{U}(K,V)$. Дакле, постоји ивица $(\tau, \sigma + y)$ у D тако да је $\tau \in K_{\mathcal{V}}$. Пошто $\{\tau, \sigma + y\} \notin V$, мора бити да је $\sigma + y \subset \tau$; према томе, постоји $z \neq y$ тако да је $\tau = \sigma \cup \{y, z\}$.

Према претпоставци максималности симплекса σ ван $K_{\mathcal{V}}$ који има дато својство, имамо да је $\sigma + z \in K_{\mathcal{V}}$. Међутим зато што $\{\sigma, \sigma + z\} \notin V$ мора бити да је $(\sigma + z, \sigma)$ ивица у D чиме долазимо до контрадикције. $\square$

Следећа теорема је адаптирана из [15].

Теорема 18. *Нека је фамилија $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}(K, V)$ таква да је $\Sigma = K_{\mathcal{V}} \cap K_{\mathcal{U} \setminus \mathcal{V}}$ непразан и контрактибилан поткомплекс. Онда је K хомотопно еквивалентан букету $K_{\mathcal{V}} \vee K_{\mathcal{U} \setminus \mathcal{V}}$.*

Доказ. Према теореми 16 и леми 17, K је хомотопно еквивалентан $K_{\mathcal{U}}$; дакле можемо претпоставити да је $K = K_{\mathcal{U}} = K_{\mathcal{V}} \cup K_{\mathcal{U} \setminus \mathcal{V}}$. Према леми контрактибилног поткомплекса (лема 5), K је хомотопан количничком комплексу K/Σ. Према истој леми (лема 5), $K_{\mathcal{V}} \vee K_{\mathcal{U} \setminus \mathcal{V}}$ је хомотопно еквивалентан $(K_{\mathcal{V}}/\Sigma) \vee (K_{\mathcal{U} \setminus \mathcal{V}}/\Sigma)$. Према томе,

$$K/\Sigma \simeq (K_{\mathcal{V}}/\Sigma) \vee (K_{\mathcal{U} \setminus \mathcal{V}}/\Sigma)$$

$\square$

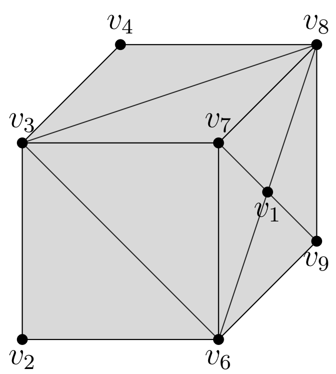
Директна посљедица ове теореме је следећи резултат:

Посљедица 19. *Нека је $\mathcal{U}(K, V)$ фамилија k различитих критичних симплекса, $\mathcal{U}(K, V) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ тако да је $\dim \sigma_1 = 0$ и $\dim \sigma_i > 0$ за све $1 < i \leq k$. Даље, претпоставимо да за свако $1 < i \leq k$, једини критични симплекси у K_{σ_i} су σ_1 и σ_i. Онда је K хомотопно еквивалентан $\bigvee_{i=1}^{k} K_{\sigma_i}$, односно $K \simeq \bigvee_{i=1}^{k} S^{\dim \sigma_i}$.*

Доказ. Нека је S било који подскуп скупа критичних симплекса, $S \subset \mathcal{U}(K, V)$, и нека $\sigma_i \notin S$. С обзиром на претпоставку да за критични симплекс димензије веће од 0 важи да његов комплекс садржи само два критична симплекса (0-симплекс σ_1 и тај дати критични симплекс), онда је

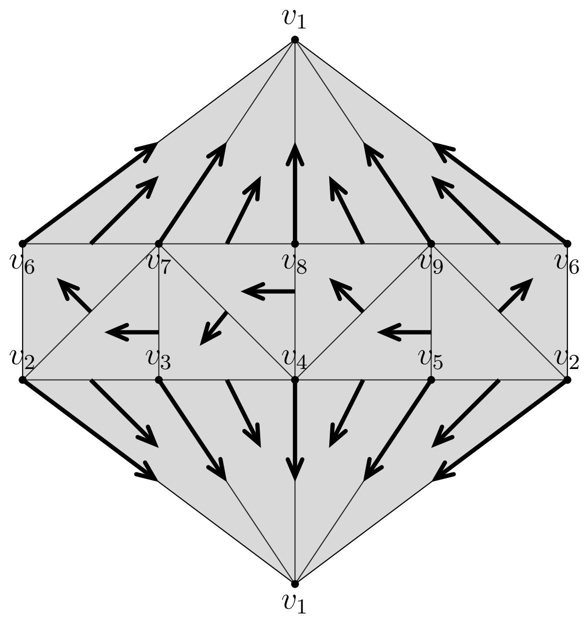
σ_1 једини критични симплекс у $\Sigma = K_{\sigma_i} \cap K_S$ па је стога Σ непразан и контрактибилан. Како ово важи за било који подскуп скупа критичних симплекса, индукцијом по броју критичних симплекса и примјеном теореме 18 доказујемо ову посљедицу. Према томе, $K \simeq \bigvee_{i=1}^{k} K_{\sigma_i}$, а сваки од поткомплекса K_{σ_i} је хомотопно еквивалентан CW комплексу са једном 0-ћелијом и једном ћелијом димензије $\dim \sigma_i$ чија је граница залијепљена на ту 0-ћелију што је управо сфера димензије $\dim \sigma_i$. Према томе имамо да је $K \simeq \bigvee_{i=1}^{k} S^{\dim \sigma_i}$ □

Ова посљедица нам говори да уколико можемо да одредимо ациклично векторско поље са датим условима, можемо показати да је комплекс хомотопан букету сфера. Међутим то је довољан али не и неопходан услов да би комплекс био хомотопан букету сфера. Навешћемо примјер који то илуструје, односно примјер комплекса и градијентног векторског поља за тај комплекс, тако да је комплекс хомотопан букету сфера које одговарају критичним симплексима, а при том постоји критичан симплекс σ такав да K_σ осим σ и критичног 0-симплекса садржи и неки други критичан симплекс.



Слика 3.5: Комплекс L

Посматрамо комплекс L са 9 тјемена који је конструисан на следећи начин: тјемена $v_2, \ldots, v_9$ су тјемена празне коцке чије су четири стране подијељене на по два троугла, а преостале двије супротне стране дијагоналама су подијељене на по четири троугла и извршена је идентификација тих центара које ћемо означати тјеменом v_1 (слика 3.5, страна са тјеменима v_2, v_3, v_4, v_5 је такође подијељена дијегоналама чији је центар тјеме v_1). Како је извршена идентификација тјемена која су пресјеци дијагонала на тим супротним странама, комплекс L је хомотопан букету $S^1 \vee S^2$.



Слика 3.6: Векторско поље комплекса L

На слици 3.6 приказано је векторско поље за овај комплекс. Стрелице које иду од симплекса мање до симплекса веће димензије приказују који су симплекси упарени. Лако је уочити да је ово векторско поље ациклично и да су једини критични симплекси $\{v_1\}$, $\{v_2, v_6\}$ и

$\{v_2, v_5, v_9\}$. Према томе за сваки критичан симплекс имамо сферу исте димензије, односно $L \simeq \bigvee_{i=1}^{3} S^{\dim \sigma_i}$. Међутим како имамо усмјерену путању $\{v_2, v_5, v_9\} \to \{v_2, v_6\}$ поткомплекс $K_{\{v_2,v_5,v_9\}}$ садржи сва три критична симплекса па услови посљедице 19 нису задовољени.

Глава 4

УРЕЂАЈНИ КОМПЛЕКС ИДЕАЛА

За било који дјелимично уређен скуп P, може се дефинисати апстрактан симплицијални комплекс, односно урeђајни комплекс $\Delta(P)$. Тјемена комплекса $\Delta(P)$ су елементи скупа P из којег искључујемо најмањи и највећи елемент (уколико постоје) а за n-симплексе узимају се ланци $n+1$ елемената из скупа P. Уређајни комплекс празног скупа P је празан симплицијални комплекс. Дјелимично уређени скупови се појављују у многим областима, па тиме и уређајни комплекси. За неке скорашње и интересантне примјере уређајних комплекса у алгебарском контексту, читалац може погледати [8, 14, 19, 20, 26, 29, 31]. За опште информације о уређајним комплексима, препоручујемо [17, 33].

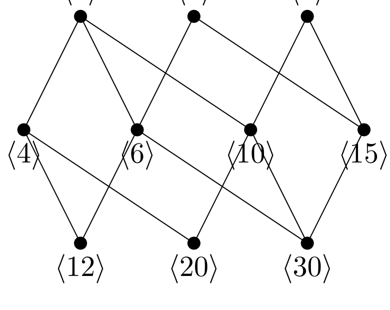
У раду В.А. Васиљева *Topology of discriminants and their complements* [32] поменут је уређајни комплекс придружен дјелимично уређеном скупу нетривијалних идеала у комутативном прстену са јединицом. Ова глава бави се изучавањем тог комплекса и одређивањем хомотопског типа његове геометријске реализације за генералне комутативне прстене са јединицом. Након дефиниције, посматрамо овај уређајни комплекс за случајеве када је прстен локалан, семилокалан и када има бесконачно много максималних идеала. За сваки од ових случајева одређујемо хомотопски тип тиме комплетирајући резултат за генералне комутативне прстене са јединицом.

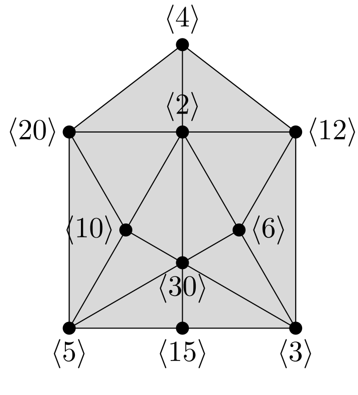
4.1 Дефиниција уређајног комплекса

Нека је R комутативан прстен са јединицом, и нека је $I^*(R)$ скуп свих правих не-нула идеала у R. Уређајни комплекс $\Delta(R)$ са скупом тјемена $I^*(R)$ дефинише се на следећи начин:

$$\{I_0, I_1, \ldots, I_n\} \in \Delta(R) \text{ ако и само ако } I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_n.$$

На примјер, слика 4.1 илуструје дјелимично уређен скуп $I^*(\mathbb{Z}_{60})$, као и геометријску реализацију уређајног комплекса $|\Delta(\mathbb{Z}_{60})|$.





Слика 4.1: Примјер за прстен $R = \mathbb{Z}_{60}$

4.2 Уређајни комплекс за локалне прстене

Тврђење 20. *Ако је прстен R локалан са максималним идеалом M, онда је $|\Delta(R)|$ контрактибилан.*

Доказ. Сваки прави идеал у прстену садржан је у максималном идеалу M, па се сваки ланац идеала $I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_m$ (уколико $I_m \neq M$) може проширити на ланац $I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_m \subset M$. Према томе уређајни комплекс $\Delta(R)$ је конус са врхом M па можемо закључити да је $|\Delta(R)|$ контрактибилан. □

4.3 Уређајни комплекс за семилокалне прстене

Претпоставимо сада да је R семилокалан прстен са $n > 1$ максималних идеала. Прво ћемо показати повезаност комплекса.

Тврђење 21. *Нека је R семилокалан прстен са $n > 1$ максималних идела, тако да R није изоморфан производу два поља. Тада је комплекс $|\Delta(R)|$ повезан.*

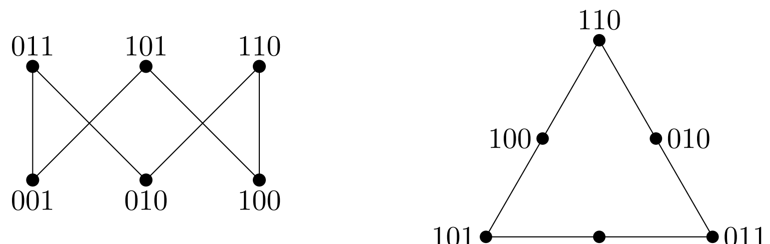
Доказ. Пресјек било која два максимална идеала у прстену није тривијалан. У супротном прстен би био изоморфан производу два поља што је контрадикторно претпоставци. Посматрамо граф који је једнодимензионални скелет комплекса. За нетривијалне праве идеале I и J у прстену, путања на графу која показује повезаност је $I, M_I, M_I \cap M_J, M_J, J$, гдје је M_I било који максималан идеал који садржи I, односно M_J било који максималан идеал који садржи J. □

Можемо примјетити да за случај када је прстен R изоморфан производу два поља, геометријска реализација комплекса $\Delta(R)$ састоји се од двије неповезане тачке (у том случају комплекс није повезан).

Како би одредили хомотопски тип комплекса прво ћемо посматрати семилокалне прстене у којима је Џекобсонов радикал тривијалан.

Тврђење 22. *Нека је R семилокалан прстен. Ако је $|\mathrm{Max}(R)| = n > 1$ и $J(R) = \{0\}$, онда је $|\Delta(R)| \simeq \dot{\Delta}^{n-1}$.*

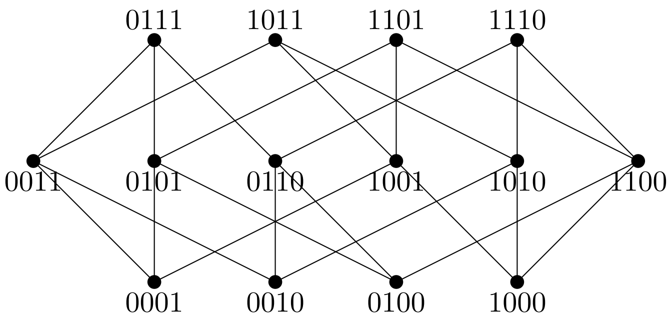
Доказ. С обзиром да $J(R) = \{0\}$, Кинеска теорема о остацима (теорема 3) нам говори да је R изоморфан директном производу коначно много поља, $R \cong F_1 \times \cdots \times F_n$. Према томе, сваки не-нула прави идеал у престену је облика $I_1 \times \cdots \times I_n$ гдје је I_j или $\{0\}$ или F_j, уз услов да није сваки истовремено $\{0\}$ и да није $I_j = F_j$ за свако $1 \leq j \leq n$. Тиме, имамо један-на-један пресликавање скупа $I^*(R)$ на скуп $\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\}) \setminus \{\{1,\ldots,n\},\emptyset\}$. Дакле, симплекси у уређајном комплексу су ланци правих подскупова скупа $\{1,\ldots,n\}$ па је тиме јасно да је геометријска реализација овог уређајног комплекса управо барицентрична подјела $\dot{\Delta}^{n-1}$. $\square$

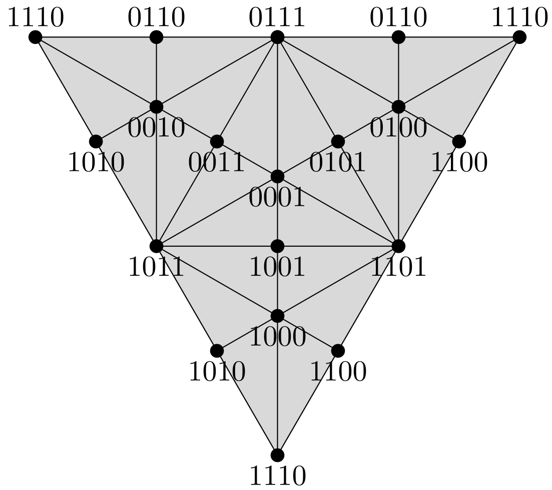


Слика 4.2: Примјер за прстен $R = F_1 \times F_2 \times F_3$

Пар примјера можемо видјети на сликама 4.2 и 4.3 које илуструју

Хасеов дијаграм дјелимично уређеног скупа нетривијалних идеала и геометријску реализацију уређајног комплекса за случај када је $n = 3$ (слика 4.2), односно када је $n = 4$ (слика 4.3). Како бисмо упростили нотацију, 110 означава идеал $F_1 \times F_2 \times \{0\}$ и сл. На примјеру за прстен са четири максимална идеала треба обратити пажњу на идентификације које показују да је $|\Delta(R)|$ у овом случају граница тетраедра.





Слика 4.3: Примјер за прстен $R = F_1 \times F_2 \times F_3 \times F_4$

Следеће трврђење разматра семилокалне прстене у којима $J(R) \neq \{0\}$.

Тврђење 23. *Нека је R семилокалан прстен. Ако $J(R) \neq \{0\}$, онда је $|\Delta(R)|$ контрактибилан.*

Доказ. Прво ћемо показати да постоји максималан идеал M у прстену R такав да $M \cap I \neq \{0\}$ за сваки не-нула идеал I у прстену. Нека је x било који не-нула елемент у $J(R)$. Тврдимо да је идеал $\langle x \rangle + \mathrm{Ann}(x)$ прави не-нула идеал. Наиме, ако је $\langle x \rangle + \mathrm{Ann}(x) = R$, онда је $1 = rx + a$, за неки елемент $r \in R$ и $a \in \mathrm{Ann}(x)$. С обзиром да је $x \in J(R)$, по добро познатом својству Џекобсоновог радикала (тврђење 1), $a = 1 - rx \in U(R)$. Како је $ax = 0$ и a инвертибилан, онда слиједи да је $x = 0$, што доводи до контрадикције.

Сваки не-нула прави идеал је садржан у неком максималном идеалу у прстену, па нека је M максималан идеал који садржи $\langle x \rangle + \mathrm{Ann}(x)$. Даље, нека је I било који не-нула идеал, и нека је t било који не-нула елемент у идеалу I. Разматрамо елемент tx.

1) Ако је $tx = 0$, онда је $t \in \mathrm{Ann}(x)$, па је $t \in I \cap M$. Према томе имамо и $I \cap M \neq \{0\}$.

2) Ако $tx \neq 0$, онда је tx не-нула елемент у $I \cap M$, па имамо $I \cap M \neq \{0\}$.

Са $K(M)$ обиљежићемо поткомплекс уређајног комплекса $\Delta(R)$ чија су тјемена не-нула идеали садржани у максималном идеалу M. Очигледно је да је овај поткомплекс конус са врхом M, па је $|K(M)|$ контрактибилан.

Нека је $I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_n \subset R$ било који ланац идеала у прстену R, односно нека је $\{I_0, I_1, \ldots, I_n\}$ било који симплекс у $\Delta(R)$. Како M нетривијално сијече сваки не-нула идеал у R, имамо да је $\{0\} \neq I_0 \cap M \subseteq I_1 \cap M \subseteq \cdots \subseteq I_n \cap M$. Према томе, $\{I_0 \cap M, I_1 \cap M, \ldots, I_n \cap M\}$ је симплекс у $K(M)$ чија димензија свакако може бити мања од димензије оригиналног симплекса. Тиме имамо пресликавање $I \mapsto I \cap M$ којим добијамо симплицијално пресликавање $f\colon |\Delta(R)| \longrightarrow |K(M)|$. Тврдимо да је ово пресликавање јак деформацијски ретракт. Наиме, сваки симплекс $\{I_0, \ldots, I_n\}$ у $\Delta(R)$ је лице симплекса $\{I_0 \cap M, \ldots, I_n \cap M, I_0, \ldots, I_n\}$ и наше симплицијално пресликавање је ништа друго до пројекција тог већег симплекса на његово лице $\{I_0 \cap M, \ldots, I_n \cap M\}$. Јасно је да је ово (јак) деформацијски ретракт с обзиром да се свака тачка у $|\Delta(R)|$ пресликава на његову слику дуж линије унутар одговарајућег симплекса.

Према томе, $|\Delta(R)| \simeq |K(M)|$, а раније смо примијетили да је $|K(M)|$ контрактибилан с обзиром да је конус. Стога је уређајни комплекс за семилокалне прстене са нетривијалним Џекобсоновим радикалом контрактибилан. □

Као примјер можемо погледати слику 4.1 гдје је $M = \langle 2 \rangle$. Имамо симплицијално пресликавање гдје се идеал $\langle 3 \rangle$ пресликава у $\langle 6 \rangle$, идеал $\langle 5 \rangle$ у $\langle 10 \rangle$, а идеал $\langle 15 \rangle$ се пресликава у $\langle 30 \rangle$. Остаје комплекс сачињен од шест троуглова са заједничким тјеменом $\langle 2 \rangle$.

4.4 Уређајни комплекс за прстене са бесконачно много максималних идеала

Да бисмо одредили хомотопски тип уређајног комплекса за прстене са бесконачно много максималних идеала, прво ћемо доказати следећу лему.

Лема 24. *Нека је прстен R такав да је скуп максималних идеала* $\mathrm{Max}(R)$

бесконачан. Ако је K_0 коначан поткомплекс у $\Delta(R)$, онда постоји поткомплекс K_1 такав да је K_0 поткомплекс у K_1 и $|K_1|$ је контрактибилан.

Доказ. Нека је K_0 било који коначан поткомплекс у $\Delta(R)$, и нека је $\{I_1, \ldots, I_m\}$ скуп свих тјемена у K_0. Прво ћемо показати да постоји максималан идеал M у прстену R такав да $I_k \cap M \neq \{0\}$ за свако $1 \leq k \leq m$. Тиме ћемо и уједно показати да је $|\Delta(R)|$ повезан.

Нека је M_k максималан идеал који садржи $\mathrm{Ann}(I_k)$ и нека је M максималан идеал такав да $M \neq M_k$ за свако $1 \leq k \leq m$. Тврдимо да $M \cap I_k \neq \{0\}$.

По теореми о избјегавању простих идеала (теорема 2) имамо да $M \not\subseteq M_1 \cup \cdots \cup M_m$ па можемо одабрати елемент $x \in M \setminus (M_1 \cup \cdots \cup M_m)$. Нека је $k \in \{1, \ldots, m\}$. С обзиром да $x \notin \mathrm{Ann}(I_k)$, постоји елемент $t_k \in I_k$ такав да $xt_k \neq 0$. Према томе, елемент xt_k је не-нула елемент у $M \cap I_k$. Дакле, максималан идеал M нетривијално сијече сваки идеал у K_0, односно $M \cap I_k \neq \{0\}$ за свако $1 \leq k \leq m$.

Даље, доказ је сличан доказу тврђења 23. Са K_1 обиљежимо поткомплекс $K_0 \cup K(M)$, гдје је $K(M)$ поткомплекс у уређајном комплексу $\Delta(R)$ чија су тјемена сви идеали у R који су садржани у M. Конструишемо симплицијално пресликавање $f\colon |K_1| \longrightarrow |K(M)|$ које је дефинисано на тјеменима са $I \mapsto I \cap M$. Као и раније, ово симплицијално пресликавање је пројекција симплекса на његово лице, што нам показује да је $|K(M)|$ јак деформациони ретракт од $|K_1|$. С обзиром да је $|K(M)|$ контрактибилан, онда је и $|K_1|$ такође контрактибилан. □

Након доказа ове леме можемо одредити хомотопски тип уређајног комплекса $|\Delta(R)|$ за прстен R са бесконачно много максималних идеала.

Тврђење 25. *Ако је скуп максималних идеала* $\mathrm{Max}(R)$ *бесконачан, онда је* $|\Delta(R)|$ *контрактибилан.*

Доказ. С обзиром да $|\Delta(R)|$ има хомотопски тип CW-комплекса, можемо користити Вајтхедову теорему (теорема 6). Треба да покажемо да су све хомотопске групе у $|\Delta(R)|$ тривијалне. Претпоставимо да је $n \geq 1$ и да је $g\colon S^n \longrightarrow |\Delta(R)|$ непрекидно пресликавање. Слика $g[S^n]$ је компактна, па према леми 4, постоји коначан поткомплекс K_0 такав да је $g[S^n] \subseteq |K_0|$. Лема 24 нам говори да постоји поткомплекс K_1 такав да је $K_0 \subset K_1$ и $|K_1|$ контрактибилан. Стога, пресликавање g можемо факторисати кроз контрактибилан простор $|K_1|$ па је хомотопски тривијално. Закључујемо да је $\pi_n(|\Delta(R)|, *)$ тривијална. Ово важи за свако n, па према теореми Вајтхеда закључујемо да је $|\Delta(R)|$ контрактибилан. $\square$

Глава 5

КОМПЛЕКС НЕЗАВИСНОСТИ КОМАКСИМАЛНОГ ГРАФА

Било којем графу или хиперграфу G можемо придружити његов комплекс независности и изучавати топологију његове геометријске реализације. Комплекс независности (хипер)графа је апстрактан симплицијални комплекс којег чине независни скупови у G, односно скупови који не садрже ниједну ивицу као свој подскуп.

У овој глави бавимо се проучавањем комплекса независности комаксималног графа и хиперграфа који су придружени комутативним прстенима са јединицом, и одређујемо хомотопски тип тих комплекса. Скуп тјемена у комаксималном графу чине елементи прстена R, и два различита тјемена x и y су сусједна ако и само ако је $Rx + Ry = R$. Овај граф су првобитно дефинисали Шарма и Батвадекар у [30], када су доказали да је хроматски број коначан ако и само ако је и сам прстен коначан. Даље, овај граф који обиљежавамо са $\Gamma(R)$, изучавали су и

Маимани и други у [18] (они су у ствари и сковали термин комаксималан) и Моцоња и Петровић у [25], одредивши структуру комаксималног графа у случају када је број максималних идеала у прстену R коначан. Слично томе, дефинишемо комаксималан хиперграф $H(R)$ као генерализацију комаксималног графа: тјемена су елементи у прстену R а ивице су непразни подскупови у R који су генераторски скупови тог прстена, односно $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ је ивица ако и само ако је $Rx_0 + \cdots + Rx_n = R$.

5.1 Дефиниција

Комплекс независности комаксималног хиперграфа $\mathrm{Ind}_{H(R)}$ чине симплекси који су независни скупови у $H(R)$, односно, $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathrm{Ind}_{H(R)}$ ако и само ако $Rx_0 + \cdots + Rx_n \neq R$. Ови симплекси природно формирају симплицијални комплекс с обзиром да ако нека $(n+1)$-торка не генерише читав прстен, онда и било који мањи подскуп не генерише читав прстен. Примјетимо да је једнодимензионални скелет овог комплекса граф који је комплементан комаксималном графу.

Симплекси у комплексу независности комаксималног графа $\mathrm{Ind}_{\Gamma(R)}$ су независни скупови у $\Gamma(R)$, односно симплекси су скупови $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ такви да $Rx_i + Rx_j \neq R$ за сваки пар међусобно различитих индекса $0 \leq i, j \leq n$. Када имамо $Rx_0 + \cdots + Rx_n \neq R$ онда $\{x_i, x_j\}$ није ивица у $\Gamma(R)$ за било који пар међусобно различитих индекса $0 \leq i, j \leq n$, тако да је $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ независан скуп у $\Gamma(R)$ и према томе чини симплекс у $\mathrm{Ind}_{\Gamma(R)}$. Дакле, комплекс независности комаксималног хиперграфа је поткомплекс комплекса независности комаксималног графа. Стога, прво ћемо посматрати комплекс независности комаксималног хиперграфа и одредити хомотопски тип његове геометријске реализације, а затим ћемо помоћу ових резултата одредити хомотопски тип комплекса независности комаксималног графа.

Очигледно је да у овим комплексима елементи Џекобсоновог радикала су повезани са сваким неинвертибилним тјеменом, док су инвертибилни елементи изолована тјемена. Стога, интересантније је посматрати комплексе у којима су одстрањена тјемена која су инвертибилни елементи и тјемена која су елементи у Џекобсоновом радикалу; уколико укључимо елементе из $J(R)$ онда би једноставно увијек имали контрактибилане комплексе у случајевима када $J(R) \neq 0$. Према томе, посматраћемо комплексе независности подграфа комаксималног графа $\Gamma_2'(R)$ и подграфа комаксималног хиперграфа $H'(R)$, са скупом тјемена $V(\Gamma_2'(R)) = V(H'(R)) = R \setminus (U(R) \cup J(R))$ (користимо исту нотацију за подграф $\Gamma_2'(R)$ као у раду [18]). Обиљежићемо ове комплексе са $\mathrm{Ind}_{\Gamma_2'(R)}$ и $\mathrm{Ind}_{H'(R)}$ и одредити њихов хомотопски тип.

Комплекс независности комаксималног хиперграфа можемо дефинисати и на еквивалентан начин: $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathrm{Ind}_{H'(R)}$ ако и само ако постоји максималан идеал M у R такав да $x_0, x_1, \ldots, x_n \in M$.

Одредићемо хомотопски тип комплекса $|\mathrm{Ind}_{H'(R)}|$ и $|\mathrm{Ind}_{\Gamma_2'(R)}|$ директним приступом разматрајући три случаја: (1) када је прстен локалан (2) када прстен има бесконачно много идеала и (3) када је прстен семилокалан.

Примјетимо да у случају када је прстен R локалан са максималним идеалом M, резултирајући комплекси $\mathrm{Ind}_{H'(R)}$ и $\mathrm{Ind}_{\Gamma_2'(R)}$ су празни с обзиром да је сваки неинвертибилан елемент из R садржан у M (имамо $J(R) = M$).

5.2 Констриктивни комплекси

Генерално, изучавање топологије комплекса независности представља интересантан истраживачки проблем. У раду [10], аутори Ехренборг и Хетеи изучавали су топологију извјесне класе комплекса независности, тзв. *констриктивних* комплекса. Аутори су показали да је констриктиван комплекс контрактибилан или хомотопски еквивалентан сфери. Закључци у вези комплекса независности комаксималног графа и хиперграфа слични су онима у вези констриктивних комплекса, па је природно запитати се да ли се ови резултати могу добити доказујући да комплекси независности које изучавамо припадају класи констриктивних комплекса.

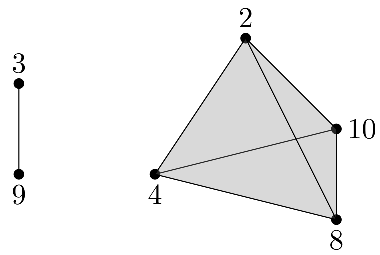
Ехренборг и Хетеи изучавају комплекс K у односу на његова *не-лица*, односно, фамилију $\{A \subseteq V(K) \colon A \notin K\}$. Минимално не-лице симплицијалног комплекса назива се *циклус*.

Дефиниција 26. *Симплицијални комплекс K са скупом тјемена $V(K)$ је констриктиван ако је комплекс K граница симплекса дефинисаног на скупу тјемена $V(K)$ или ако постоји тјеме $v \in V(K)$ које припада највише једном циклусу, и са следећим својствима:*

- *v не припада ниједном циклусу; или*
- *v припада јединственом циклусу $B \neq V(K)$ и постоји тјеме $u \notin B$ такво да контраховање ивице $\{u, v\}$ даје констриктиван комплекс, гдје је ивица $\{u, v\}$ контрактибилна ако и само ако не постоји циклус који садржи $\{u, v\}$.*

Констриктиван комплекс K је хомотопно еквивалентан тјемену или граници неког симплекса.

Иако ћемо у овој глави доћи до сличних закључака у вези хомотопског типа, испоставиће се да комплекси независности које проучавамо нису увијек констриктивни, што ћемо показати контрапримјером. Нека је $R = \mathbb{Z}/p_1^2p_2\mathbb{Z}$ гдје су p_1 и p_2 различити прости бројеви. Разматрамо комплексе $\mathrm{Ind}_{H'(R)}$ и $\mathrm{Ind}_{\Gamma'_2(R)}$ који су идентични за овај прстен. Нека је a било које тјеме у комплексу. С обзиром да елементи из $J(R)$ не припадају скупу тјемена, a је дјељиво са p_1 или p_2 али не и са p_1p_2. Стога, геометријска реализација овог комплекса састоји се од два неповезана конуса, гдје је сваки конус сачињен од тјемена која припадају једном од максималних идеала, а не налазе се у Џекобсоновом радикалу (видјети примјер за прстен $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ на слици 5.1). Очигледно је да овај комплекс није граница симплекса, и с обзиром да сваки конус има најмање два тјемена, онда је свако тјеме дио више од једног циклуса. Циклуси у комплексу за прстен $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ су скупови $\{a, b\}$ гдје је a дјељиво са 2 а b дјељиво са 3. Према томе, овај комплекс није констриктиван.



Слика 5.1: $\mathrm{Ind}_{\Gamma'_2(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})}$

5.3 Комплекси независности за прстене са бесконачно много максималних идеала

Посматрамо случај када прстен R има бесконачно много максималних идеала. Како бисмо одредили хомотопски тип комплекса независности у овом случају, требају нам следеће леме.

Лема 27. *Нека је прстен R такав да је скуп максималних идеала* $\mathrm{Max}(R)$ *бесконачан. Ако је K_0 коначан поткомплекс у* $\mathrm{Ind}_{H'(R)}$*, онда постоји поткомплекс K_1 у* $\mathrm{Ind}_{H'(R)}$ *такав да је K_0 поткомплекс у K_1и $|K_1|$ контрактибилан.*

Доказ. Нека је K_0 било који коначан поткомплекс у $\mathrm{Ind}_{H'(R)}$ и нека је $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ скуп свих максималних симплекса у K_0. За сваки од ових максималних симплекса $\sigma_i = \{x_{i0}, \ldots, x_{in_i}\} \in K_0$ постоји максималан идеал M_i који садржи елементе који су тјемена тог симплекса $x_{i0}, \ldots, x_{in_i}$. Стога имамо коначан скуп максималних идеала $\{M_1, \ldots, M_m\}$ (који не морају бити међусобно различити) који садрже елементе који су тјемена одговарајућих максималних симплекса. Показаћемо да постоји елемент $y \in R \setminus (U(R) \cup J(R))$ такав да је $\{x_{i0}, \ldots, x_{in_i}, y\} \in \mathrm{Ind}_{H'(R)}$ за свако $1 \leq i \leq m$. Тиме ћемо уједно показати да је $|\mathrm{Ind}_{H'(R)}|$ повезан.

Нека је y елемент у $\bigcap_{i=1}^{m} M_i$, такав да $y \notin J(R)$. Такав елемент постоји зато што пресјек коначно много максималних идеала није једнак $J(R)$. Наиме када би имали да је $\bigcap_{i=1}^{m} M_i = J(R)$, онда би за неки други максималан идеал $M_{m+1} \notin \{M_1, \ldots, M_m\}$ важило $\bigcap_{i=1}^{m} M_i \subset M_{m+1}$, што би значило да је $M_i \subseteq M_{m+1}$ за неки индекс $i \in \{1, \ldots, m\}$ чиме долазимо до контрадикције.

Нека је K_1 поткомплекс у $\mathrm{Ind}_{H'(R)}$ којег чине сва тјемена из K_0 заједно са y (примјетимо да y већ може бити елемент који је тјеме K_0, па у том случају узимамо $K_1 = K_0$). За сваки симплекс $\sigma_i = \{x_{i0}, \ldots, x_{in_i}\} \in K_0$, имамо да је $x_{i0}, \ldots, x_{in_i}, y \in M_i$, па је σ_i лице симплекса $\{x_{i0}, \ldots, x_{in_i}, y\} \in K_1$. Према томе $|K_1|$ је конус са тјеменом y, односно контрактибилан. □

Лема 28. *Нека је прстен R такав да је скуп максималних идеала* $\mathrm{Max}(R)$ *бесконачан. Ако је K_0 коначан поткомплекс у $\mathrm{Ind}_{\Gamma_2'(R)}$, онда постоји поткомплекс K_1 у $\mathrm{Ind}_{\Gamma_2'(R)}$ такав да је K_0 поткомплекс у K_1 и $|K_1|$ контрактибилан.*

Доказ. Нека је $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ скуп свих максималних симплекса у K_0. За сваки симплекс $\sigma_i = \{x_{i0}, \ldots, x_{in_i}\} \in K_0$ и сваки скуп парова $\{x_{ij}, x_{ik}\}$, $j \neq k$, који је лице симплекса σ_i, постоји неки максималан идеал M који садржи елементе x_{ij}, x_{ik}, тако да имамо коначан скуп максималних идеала $\{M_1, \ldots, M_t\}$ који садрже парове елемената који су тјемена одговарајућих максималних симплекса. Показаћемо да постоји елемент $y \in R \backslash (U(R) \cup J(R))$ такав да је $\{x_{i0}, \ldots, x_{in_i}, y\} \in \mathrm{Ind}_{\Gamma_2'(R)}$ за свако $1 \leq i \leq m$. Овиме ћемо уједно показати да је $|\mathrm{Ind}_{\Gamma_2'(R)}|$ повезан.

Нека је y елемент у $\bigcap_{i=1}^{t} M_i$, такав да $y \notin J(R)$. Као и у претходној леми, овакав елемент увијек постоји. Нека је K_1 поткомплекс у $\mathrm{Ind}_{\Gamma_2'(R)}$ којег чине сва тјемена из K_0 заједно са y (примјетимо да y већ може бити елемент који је тјеме K_0, па у том случају узимамо $K_1 = K_0$). За сваки симплекс $\sigma_i = \{x_{i0}, \ldots, x_{in_i}\} \in K_0$ и свако $0 \leq j \leq n_i$, неки максималан идеал садржи $\{x_{ij}, y\}$, па стога $\{x_{ij}, y\}$ није ивица у $\Gamma_2'(R)$. Према томе $\{x_{i0}, \ldots, x_{in_i}, y\}$ је независан скуп па чини симплекс у $\mathrm{Ind}_{\Gamma_2'(R)}$. Тиме је сваки симплекс $\sigma_i \in K_0$ лице симплекса $\{x_{i0}, \ldots, x_{in_i}, y\} \in K_1$ па је $|K_1|$

конус са тјеменом y, односно контрактибилан. $\square$

Сада можемо показати следеће:

Теорема 29. *Ако је скуп максималних идеала у прстену бесконачан, онда су комплекси* $|\mathrm{Ind}_{H'(R)}|$ *и* $|\mathrm{Ind}_{\Gamma_2'(R)}|$ *контрактибилни.*

Доказ. Овај доказ је у потпуности аналоган доказу Тврђења 25. Доказ можемо примјенити за оба комплекса па нека Ind означава и $\mathrm{Ind}_{H'(R)}$ и $\mathrm{Ind}_{\Gamma_2'(R)}$.

С обзиром да $|\mathrm{Ind}|$ има хомотопски тип CW-комплекса, можемо користити Вајтхедову теорему (теорема 6). Требамо показати да су све хомотопске групе у $|\mathrm{Ind}|$ тривијалне. Претпоставимо да је $n \geq 1$ и да је $g\colon S^n \longrightarrow |\mathrm{Ind}|$ непрекидно пресликавање. Слика $g[S^n]$ је компактна, па према леми 4, постоји коначан поткомплекс K_0 такав да је $g[S^n] \subseteq |K_0|$. Леме 27 и 28 нам говоре да постоји поткомплекс K_1 такав да је $K_0 \subset K_1$ и $|K_1|$ контрактибилан. Стога, пресликавање g можемо факторисати кроз контрактибилан простор $|K_1|$ па је хомотопски тривијалано. Закључујемо да је $\pi_n(|\mathrm{Ind}|, *)$ тривијална. Ово важи за свако n, па према теореми Вајтхеда закључујемо да је $|\mathrm{Ind}|$ контрактибилан. $\square$

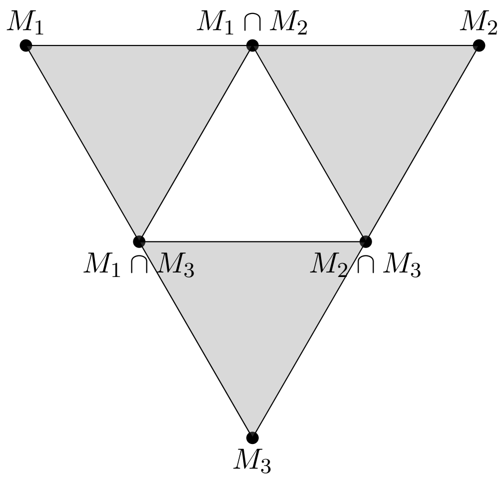
5.4 Комплекс независности комаксималног хиперграфа за семилокалне прстене

Нека је R семилокалан прстен са m максималних идеала $M_1, \ldots, M_m$, $m > 1$. Примјетимо да су максимални симплекси у $\mathrm{Ind}_{H'(R)}$ сачињени од скупова тјемена која су елементи неког максималног идеала, односно имамо m максималних симплекса у комплексу. Према томе биће корисно да прво размотримо сродан комплекс чија су тјемена прави идеали у R (наравно искључујући $J(R)$ и његове подскупове).

Дефиниција 30. *Нека је R комутативан прстен са јединицом и нека је $I^{\circ}(R)$ скуп свих правих идеала у R који садрже и нису једнаки $J(R)$. Комплекс $\mathscr{C}(R)$ са скупом тјемена $I^{\circ}(R)$ дефинише се на следећи начин:*

$$\{I_0, \ldots, I_n\} \in \mathscr{C}(R) \text{ ако и само ако } I_0 + \cdots + I_n \neq R$$

И овдје имамо еквивалентну дефиницију комплекса: $\{I_0, \ldots I_n\} \in \mathscr{C}(R)$ ако и само ако постоји максималан идеал M такав да је $I_0, \ldots I_n \subseteq M$. Посматрамо поткомплекс $\widetilde{K}$ у $\mathscr{C}(R)$ чија су тјемена сви максимални идеали и њихови пресјеци (осим пресјека свих m маскималних идеала), односно, тјемена су $\bigcap_{i \in S} M_i$ гдје је S било који прави непразан подскуп скупа $\{1, 2, \ldots, m\}$. Геометријска реализација овог поткомплекса за случај када је $m = 3$ је приказана на слици 5.2.



Слика 5.2: Комплекс $\widetilde{K}$ за $m = 3$

Примјетимо да је овај комплекс повезан осим када је $|\mathrm{Max}(R)| = 2$.

У наредном дијелу биће корисно означити $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$, док за пресјек и унију свих максималних идеала чији индекси припадају скупу $S \subset [m]$ користимо исту нотацију као у раду [25], односно, $M_S = \bigcap_{i \in S} M_i$ и $M^S = \bigcup_{i \in S} M_i$.

Лема 31. *Нека је R семилокалан прстен, и нека је $|\mathrm{Max}(R)| = m > 1$. Тада је $|\widetilde{K}| \simeq \dot{\Delta}^{m-1}$.*

Доказ. Примјетимо да у комплексу $\widetilde{K}$ постоји тачно m максималних симплекса. Наиме, за сваки индекс $i = 1, \ldots, m$ имамо максималан симплекс чија су тјемена идеали садржани у максималном идеалу M_i. За сваки такав максималан симплекс σ_i, посматрамо његово лице τ_i чија су тјемена идеали $M_{[m]\setminus\{j\}}$ за свако $j = 1, ..., m$ и $j \neq i$. Нека је K_0 поткомплекс са m тјемена $M_{[m]\setminus\{j\}}$ за свако $j = 1, ..., m$. Онда K_0 има тачно m максималних симплекса $\tau_1, \ldots, \tau_m$, и његова геометријска реализација је граница $(m-1)$-симплекса. Дефинишемо непрекидно пресликавање $f \colon |\widetilde{K}| \longrightarrow |K_0|$ тако што свако тјеме M_S у $|\widetilde{K}|$ сликамо у барицентар симплекса чија су тјемена $M_{[m]\setminus\{j\}}$ за свако $j = 1, ..., m$ и $j \notin S$ (то је управо симплекс $\bigcap_{i \in S} \tau_i$). Тиме, било коју тачку $x = \sum_{i=0}^{n} a_i M_{S_i}$ сликамо у $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i f(M_{S_i})$. На овај начин, пројектујемо сваки максималан симплекс σ_i на његово одговарајуће лице τ_i, с обзиром да се било која тачка из $|\widetilde{K}|$ која је унутар σ_i пројектује у одговарајућу тачку симплекса τ_i дуж линије унутар симплекса σ_i. Према томе пресликавање f је јак деформацијски ретракт, па је стога $|\widetilde{K}| \simeq |K_0|$, односно, $|\widetilde{K}| \simeq \dot{\Delta}^{m-1}$. $\square$

На примјер, у случају када је $|\mathrm{Max}(R)| = 3$ (погледати Слику 5.2), имамо три максимална симплекса (у геометријској реализацији представљени су као три пуна троугла) које пројектујемо на одговарајућу страну празног троугла у центру. Имамо пресликавање f које шаље тјеме M_1 у барицентар симплекса $\{M_1 \cap M_2, M_1 \cap M_3\}$, M_2 у барицентар симплекса $\{M_1 \cap M_2, M_2 \cap M_3\}$, и M_3 у барицентар симплекса $\{M_1 \cap M_3, M_2 \cap M_3\}$.

Коначно можемо одредити хомотопски тип комплекса независности $\mathrm{Ind}_{H'(R)}$ када је прстен R семилокалан.

Теорема 32. *Нека је R семилокалан прстен и $|\mathrm{Max}(R)| = m > 1$. Тада је $|\mathrm{Ind}_{H'(R)}| \simeq \dot{\Delta}^{m-1}$.*

Доказ. Како би доказали ову теорему, показаћемо да је $|\mathrm{Ind}_{H'(R)}| \simeq |\widetilde{K}|$ и искористити горе наведену лему.

За сваки прави непразан подскуп $S \subset [m]$, по теореми о избјегавању простих идеала скуп $M_S \setminus M^{S^c}$ мора бити непразан. Према томе, за сваки непразан прави подскуп $S \subset [m]$, можемо одабрати елемент $a_S \in M_S \setminus M^{S^c}$. Сада разматрамо поткомплекс у комплексу независности $\overline{\mathrm{Ind}}_{H'(R)}$ чија су тјемена такви елементи a_S. Нека је симплицијално пресликавање између $\overline{\mathrm{Ind}}_{H'(R)}$ и комплекса $\widetilde{K}$ дато пресликавањем на тјеменима $f : a_S \mapsto M_S$. Ово пресликавање је добро дефинисано и бијективно јер је $a_S = a_T$ ако и само ако је $S = T$, односно, ако и само ако је $M_S = M_T$. Даље, можемо закључити да је ово пресликавање изоморфизам јер $\{a_{S_0}, \dots, a_{S_n}\} \in \overline{\mathrm{Ind}}_{H'(R)}$ ако и само ако постоји $i \in S_0 \cap \dots \cap S_n$, односно акко $M_{S_0}, \dots, M_{S_n} \subseteq M_i$, то јест, акко $\{M_{S_0}, \dots, M_{S_n}\} \in \widetilde{K}$. Према томе комплекси $\overline{\mathrm{Ind}}_{H'(R)}$ и $\widetilde{K}$ су изоморфни, па имамо $|\overline{\mathrm{Ind}}_{H'(R)}| \simeq |\widetilde{K}|$.

Сада дефинишемо симплицијално пресликавање $g : |\mathrm{Ind}_{H'(R)}| \longrightarrow |\overline{\mathrm{Ind}}_{H'(R)}|$

тако што се тјеме x пресликава у a_S гдје је S скуп индекса свих максималних идеала који садрже елемент x, односно, пресликавамо сваки елемент из $R \setminus (U(R) \cup J(R))$ у одговарајућег представника пресјека свих максималних идеала који садрже тај елемент. За било који симплекс $\{x_0, \ldots, x_n\}$ у $\mathrm{Ind}_{H'(R)}$ постоји максималан идеал који садржи елементе $x_0, \ldots, x_n$, који онда такође садржи и елементе $g(x_0), \ldots, g(x_n)$. Према томе, симплекс $\{g(x_0), \ldots, g(x_n)\}$ у комплексу $\mathrm{Ind}_{H'(R)}$ је лице већег симплекса $\{x_0, \ldots, x_n, g(x_0), \ldots, g(x_n)\}$ па је наше симплицијално пресликавање пројекција тог већег симплекса на његово лице. Ово је очигледно јак деформацијски ретракт с обзиром да се свака тачка у $|\mathrm{Ind}_{H'(R)}|$ пресликава дуж линије унутар одговарајућег симплекса. Слиједи да је $|\mathrm{Ind}_{H'(R)}| \simeq |\overline{\mathrm{Ind}}_{H'(R)}| \simeq |\widetilde{K}|$, па имамо $|\mathrm{Ind}_{H'(R)}| \simeq \dot{\Delta}^{m-1}$. □

5.5 Комплекс независности комаксималног графа за семилокалне прстене

За разлику од комплекса независности комаксималног хиперграфа, показаћемо да је комплекс независности комаксималног графа контрактибилан за семилокалне прстене са више од два максимална идеала. Како би то доказали користићемо сличну идеју као у претходном дијелу.

Теорема 33. *Нека је R семилокалан прстен са максималним идеалима $M_1, M_2, \ldots, M_m$. Ако је $m = 2$ онда је $|\mathrm{Ind}_{\Gamma_2'(R)}|$ хомотопно еквивалентан пару неповезаних тачака, а ако је $m > 2$ онда је комплекс $|\mathrm{Ind}_{\Gamma_2'(R)}|$ контрактибилан.*

Доказ. Елементи максималних идеала чине симплексе у комплексу (зато што ниједан пар елемената садржан у максималном идеалу не може генерисати читав прстен), па за сваки прави непразан подскуп $S \subset [m]$ одаберимо елемент $a_S \in M_S \setminus M^{S^c}$, и посматрамо поткомплекс $\overline{\mathrm{Ind}}_{\Gamma_2'(R)}$ чија су тјемена ти елементи. Нека је $g\colon |\mathrm{Ind}_{\Gamma_2'(R)}| \longrightarrow |\overline{\mathrm{Ind}}_{\Gamma_2'(R)}|$ симплицијално пресликавање које пресликава тјеме x на a_S гдје је S скуп индекса свих максималних идеала који садрже x. За било који симплекс $\{x_0, \ldots, x_n\}$ у $\mathrm{Ind}_{\Gamma_2'(R)}$ имамо да је $\{x_0, \ldots, x_n, g(x_0), \ldots, g(x_n)\}$ у $\mathrm{Ind}_{\Gamma_2'(R)}$ зато што је сваки пар тјемена садржан у неком максималном идеалу па не може генерисати читав прстен; наиме $\{x_i, g(x_j)\}$ (овдје i и j не морају бити међусобно различити) и $\{g(x_i), g(x_j)\}$ су подскупови у максималном идеалу који садржи $\{x_i, x_j\}$. Дакле, слично као у доказу теореме 32 можемо закључити да је g јак деформацијски ретракт, па је $|\mathrm{Ind}_{\Gamma_2'(R)}| \simeq |\overline{\mathrm{Ind}}_{\Gamma_2'(R)}|$.

Сада посматрамо пресликавање $f\colon |\overline{\mathrm{Ind}}_{\Gamma_2'(R)}| \longrightarrow |\overline{\mathrm{Ind}}_{\Gamma_2'(R)}|$ које пресликава a_S у барицентар симплекса чија су тјемена $a_{[m]\setminus\{j\}}$ за свако $j = 1, \ldots, m$ и $j \notin S$. Сваки симплекс σ пројектујемо на његово одговарајуће лице дуж линије унутар симплекса σ па је ово јак деформацијски ретракт. Према томе комплекс $|\overline{\mathrm{Ind}}_{\Gamma_2'(R)}|$ је хомотопно еквивалентан поткомплексу којег чине тјемена $a_{[m]\setminus\{1\}}, \ldots, a_{[m]\setminus\{m\}}$. Ако је $m > 2$ ова тјемена чине симплекс зато што је сваки пар елемената садржан у неком максималном идеалу, па је стога комплекс независности $\mathrm{Ind}_{\Gamma_2'(R)}$ контрактибилан у овом случају. Ако је $m = 2$ комплекс независности је хомотопно еквивалентан пару неповезаних тјемена. $\square$

Глава 6

КОМПЛЕКС ИДЕАЛА ДЈЕЛИТЕЉА НУЛЕ

Повезивање теорије комутативних прстена и теорије графова постаје интересантно алгебристима након рада Андерсона и Ливингстона [4] 1999. године. Аутори комутативном прстену придружују *граф дјелитеља нуле* Γ_R тако што за тјемена узимају праве дјелитеље нуле, гдје су два тјемена сусједна ако и само ако је њихов производ нула. Овај рад привукао је велику пажњу, и многи аутори су наставили да користе овакав приступ даље изучавајући граф дјелитеља нуле или придружујући граф прстену на неки нов начин. Аутори Ахтар и Ли у [2] (2007. године) такође се баве проблемом дјелитеља нуле али користе другачији приступ: умјесто нула-дјелитеља за тјемена узимају праве идеале у прстену и изучавају хомологију. У овом раду, аутори се углавном баве рачунањем нулте хомолошке групе за генералне комутативне прстене са јединицом, као и прве хомолошке групе и Ојлерове карактеристике за прстен $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ гдје је p прост број.

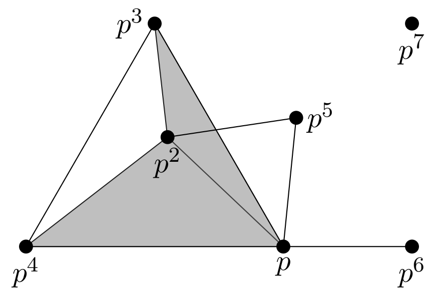
Инспирисани овим приступом, у овој глави изучавамо симлицијални комплекс идеала који су дјелитељи нуле (што је и имплицитно дефинисано у [2]) и анализирамо његову топологију за случај када прстен R има бесконачно много максималних идеала и за случај када је R коначан прстен. За први случај до резултата долазимо директно, а за случај коначних прстена користимо дискретну теорију Морса. Добијене резултате примјењујемо на неке класе и примјере комутативних прстена чиме долазимо до интересантних комбинаторних резултата.

6.1 Дефиниција

Нека је R комутативан прстен са јединицом и нека је $I^*(R)$ скуп свих правих нетривијалних идеала у R. Комплекс идала дјелитеља нуле чији је скуп тјемена $I^*(R)$ дефинише се на следећи начин:

$$\{I_0, I_1, \ldots, I_n\} \in \mathcal{K}(R) \text{ ако и само ако } I_0 I_1 \cdots I_n \neq 0$$

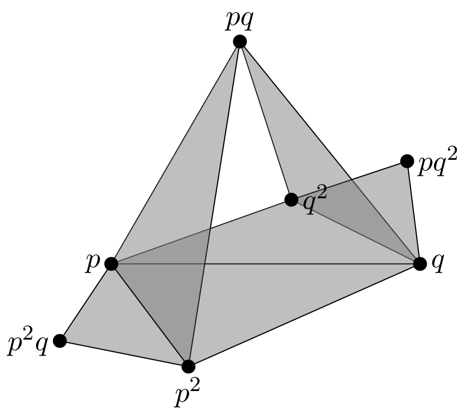
Погледајмо пар примјера овог комплекса, односно како изгледа његова геометријска реализација.



Слика 6.1: $|\mathcal{K}(\mathbb{Z}/p^8\mathbb{Z})|$

Примјер 34. *Нека је* $R = \mathbb{Z}/p^8\mathbb{Z}$ *гдје је* p *прост број. Ради краћег записа, злоупотријебићемо ознаке тако да са* p^i *означавамо идеал* $I = \langle p^i \rangle$*. Геометријска реализација овог комплекса дата је на слици 6.1.*

Примјер 35. *Нека је* $R = \mathbb{Z}/p^2q^2\mathbb{Z}$*, гдје су* p *и* q *различити прости бројеви. Као и у претходном примјеру, ради краћег записа користимо ознаку* p^iq^j *за идеал* $I = \langle p^iq^j \rangle$*. Геометријска реализација овог комплекса дата је на слици 6.2.*



Слика 6.2: $|\mathcal{K}(\mathbb{Z}/p^2q^2\mathbb{Z})|$

6.2 Комплекс прстена са бесконачно много максималних идеала

Лема 36. *Нека је прстен* R *такав да је* $\mathrm{Max}(R)$*, скуп максималних идеала, бесконачан. Ако је* K_0 *коначан поткомплекс у* $\mathcal{K}(R)$*, онда постоји поткомплекс* K_1 *такав да је* K_0 *поткомплекс у* K_1 *и* $|K_1|$ *контрактибилан.*

Доказ. Нека је K_0 било који коначан поткомплекс у $\mathcal{K}(R)$. За сваки симплекс $\sigma_i = \{I_0, \ldots, I_n\} \in K_0$, нека је M_i максималан идеал у R такав да је $\mathrm{Ann}(I_0 \cdots I_n) \subseteq M_i$. С обзиром да постоји коначно много, рецимо k, максималних симплекса у K_0, можемо одредити коначано много таквих максималних идеала $M_1, \ldots, M_k$ (који наравно међусобно не морају бити различити). Одаберимо елемент $a \in R \setminus \bigcup_{i=1}^{k} M_i$ који није инвертибилан (с обзиром да прстен има бесконачно много максималних идеала, такав елемент увијек постоји). Онда, за било који симплекс $\sigma \in K_0$ имамо $\langle a \rangle I_0 \cdots I_n \neq 0$, па уколико $\langle a \rangle$ већ није тјеме у симплексу σ онда је $\{\langle a \rangle, I_0, \ldots, I_n\} \in \mathcal{K}(R)$.

Нека је K_1 поткомплекс у $\mathcal{K}(R)$ који је једнак комплексу K_0 заједно са свим симплексима $\{\langle a \rangle, I_0, \ldots, I_n\}$ за сваки симплекс $\sigma = \{I_0, \ldots, I_n\} \in K_0$ када $\langle a \rangle$ већ није тјеме у σ. Према томе $|K_1|$ је конус са тјеменом $\langle a \rangle$, па је стога контрактибилан. □

Тврђење 37. *Ако је* $\mathrm{Max}(R)$ *бесконачан скуп, онда је* $|\mathcal{K}(R)|$ *контрактибилан.*

Доказ. Прво ћемо показати да је комплекс повезан. Нека су I и J било која два права нетривијална идеала у прстену, и нека су M_1 и M_2 максимални идеали такви да је $\mathrm{Ann}(I) \subseteq M_1$ и $\mathrm{Ann}(J) \subseteq M_2$. Нека је a елемент у $R \setminus (M_1 \cup M_2)$ који није инвертибилан, онда је $\langle a \rangle$ сусједан са тјеменима I и J. У наставку, доказ је еквивалентан доказу у леми 25. Све хомотопске групе у $|\mathcal{K}(R)|$ су тривијалне, па с обзиром да $|\mathcal{K}(R)|$ има хомотопски тип CW-комплекса, уз помоћ теореме Вајтхеда доказујемо да је $|\mathcal{K}(R)|$ контрактибилан. □

6.3 Коначни прстени

За разлику од претходног случаја, када је R коначан прстен хомотопски тип комплекса идеала који су дјелитељи нуле није тривијалан. Резултате добијамо уз помоћ дискретне теорије Морса која је описана у глави 3. Како је директно налажење дискретне Морсове функције која даје значајан резултат (комплекс са што мање критичних симплекса) тежак задатак, користимо приступ налажења дискретног векторског поља, односно дјелимичног упаривања симплекса у комплексу.

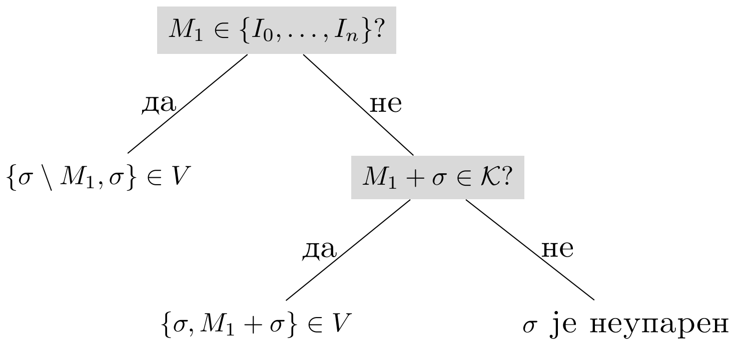
Дакле, у овом дијелу представићемо алгоритам којим се добија дискретно векторско поље V за комплекс идеала нула дјелитеља за коначне прстене. Даље, доказаћемо да је ово векторско поље ациклично и експлицитно ћемо показати који симплекси остају неупарени (критични). Након тога, одредићемо хомотопски тип комплекса.

6.3.1 Ациклично векторско поље

Нека је R коначан комутативан прстен са јединицом. Прстен има коначно много максималних идеала, $|\mathrm{Max}(R)| = m$, које ћемо обиљежити са $M_1, \ldots, M_m$.

Прво ћемо представити векторско поље за случај када је $m = 1$. Нека је $\sigma = \{I_0, \ldots, I_n\}$ било који симплекс у $\mathcal{K}(R)$. Желимо да покажемо да постоји симплекс $\tau^{n-1} \subset \sigma$ такав да је $\{\tau, \sigma\} \in V$ или да постоји симплекс $\rho^{n+1} \supset \sigma$ такав да је $\{\sigma, \rho\} \in V$, или да σ остаје неупарен.

Узмимо да је $\{M_1\}$ неупарен симплекс. За сваки други симплекс $\sigma = \{I_0, \ldots, I_n\}$ примјењујемо алгоритам за упаривање симплекса у V који је дат на слици 6.3).



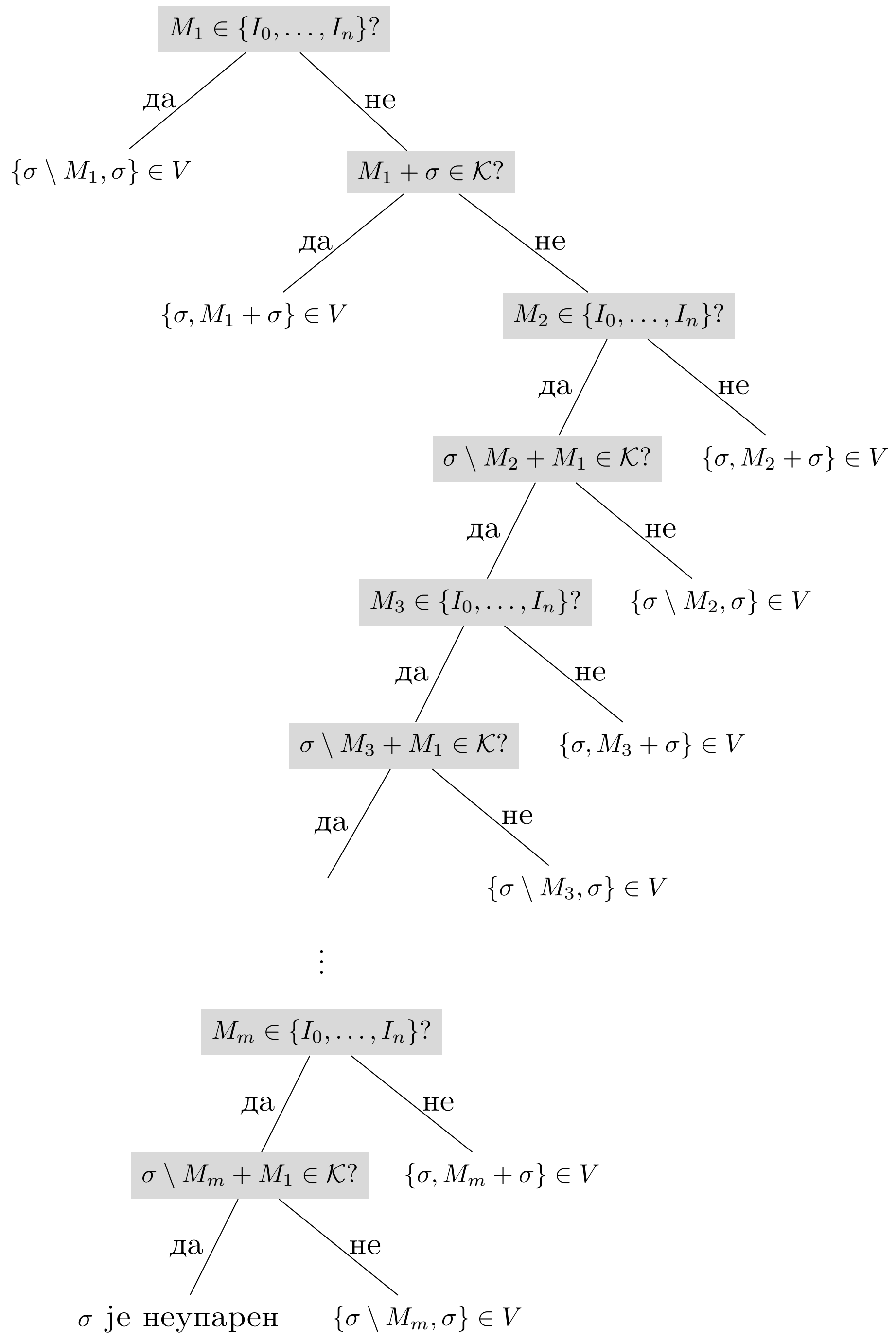
Слика 6.3: Алгоритам дискретног векторског поља за коначан локалан прстен.

Сада претпоставимо да је $m > 1$, и претпоставимо да R није изоморфан производу два поља (односно, да ако R има тачно два максимална идеала онда је $M_1M_2 \neq 0$). Бавићемо се случајем када је $m = 2$ и $M_1M_2 = 0$ касније у поглављу 6.3.3 (тврђење 40), када ћемо директно одредити хомотопски тип комплекса за овај случај.

Узмимо да је $\{M_1\}$ неупарен симплекс. За сваки други симплекс $\sigma = \{I_0, \dots, I_n\}$ примјењујемо алгоритам за упаривање симплекса у V који је дат на слици 6.4.

Како би показали да је ово заиста дискретно векторско поље требаће нам следећа лема, која ће се показати корисном и у наредним дјеловима ове главе.

Лема 38. *Претпоставимо да* $I_0 \cdots I_n \neq 0$ *и да је* $M_iI_0 \cdots I_n = 0$ *за неки максималан идеал* M_i *у* R*. Онда за било који други максималан идеал* M_j *у* R*,* $j \neq i$*, имамо да је* $M_jI_0 \cdots I_n \neq 0$*.*

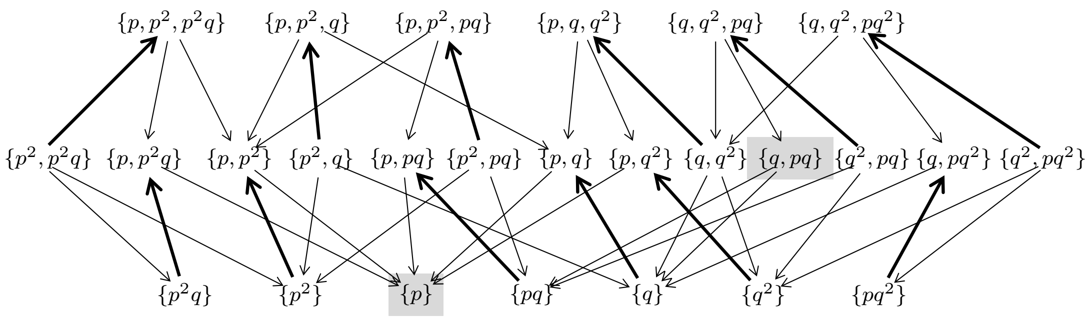


Слика 6.4: Алгоритам дискретног векторског поља за семилокалан коначан прстен који није изоморфан производу два поља.

Доказ. Очигледно да је $M_i \subseteq \mathrm{Ann}(I_0 \cdots I_n)$ па с обзиром да је M_i максималан идеал имамо да је $M_i = \mathrm{Ann}(I_0 \cdots I_n)$. За било који други максималан идеал $M_j \neq M_i$, имамо да $M_j \nsubseteq M_i = \mathrm{Ann}(I_0 \cdots I_n)$, па стога имамо да $M_j I_0 \cdots I_n \neq 0$. $\square$

У датом алгоритму за дискретно векторско поље прије свега треба показати да су сва упаривања валидна. Када је одговор на питање да ли је $M_1 + \sigma \in \mathcal{K}$ негативан (тада је $M_1 I_0 \cdots I_n = 0$), даље питамо да ли је M_2 међу тјеменима тог симплекса. Ако јесте, и ако је $\sigma \setminus M_2 + M_1 \in \mathcal{K}$ даље питамо да ли је M_3 међу тјеменима итд. све док не нађемо максималан идеал који није међу тјеменима (уколико се то не деси, σ остаје неупарен или је упарен са својим лицем $\sigma \setminus M_m$). Нека је M_i први такав максималан идеал који није међу тјеменима симплекса σ. Како је $M_1 I_0 \cdots I_n = 0$ примјеном леме 38 имамо да $M_i I_0 \cdots I_n \neq 0$, па је према томе $M_i + \sigma$ симплекс у комплексу и $\{\sigma, M_i + \sigma\} \in V$ је валидно упаривање. Даље, морамо устврдити да не упарујемо празан скуп у V, односно да не постоји пар $\{\sigma \setminus M_i, \sigma\} \in V$ гдје је $\sigma = \{M_i\}$. Размотримо са којим симплексима упарујемо симплексе $\{M_i\}$, $i > 1$. Ако је $|\mathrm{Max}(R)| = 2$ претпоставили смо да је $M_1 M_2 \neq 0$ па је стога $\{\{M_2\}, \{M_1, M_2\}\} \in V$. Даље, ако је $|\mathrm{Max}(R)| > 2$, тврдимо да је $M_1 M_i \neq 0$. Наиме ако је $M_1 M_i = 0$ и M_j неки трећи максималан идеал, $j \neq 1$ и $j \neq i$, онда је $M_j \supseteq M_1 M_i = 0$, па с обзиром да су максимални идеали прости, имамо да је $M_j \supseteq M_1$ или $M_j \supseteq M_i$ чиме долазимо до контрадикције. Према томе, за сваки максималан идеал M_i, $i > 1$, имамо упаривање $\{\{M_i\}, \{M_1, M_i\}\} \in V$.

Може се закључити да је алгоритам дат на слици 6.4 заиста дискретно векторско поље V за симплицијални комплекс $\mathcal{K}(R)$ за коначан прстен R који није локалан и који није изоморфан производу два поља. Како би илустровали упаривања у датом векторском пољу, на слици 6.5 дат је диграф D (модификован Хасеов дијаграм) за такво векторско поље V за примјер када је $R = \mathbb{Z}/p^2q^2\mathbb{Z}$ гдје су p и q различити прости бројеви. Као и у претходним примјерима ради лакшег записа p^iq^j означава идеал $\langle p^iq^j \rangle$. Стрелице у супротном смјеру показују парове у V. Осјенчени симплекси су неупарени симплекси (нема стрелица у супротном смјеру које воде од ових симплекса).



Слика 6.5: Диграф дискретног векторског поља за $R = \mathbb{Z}/p^2q^2\mathbb{Z}$

Како би показали да је V ациклично дискретно векторско поље (за оба случаја, када је $m = 1$ и за $m > 1$), показаћемо да не постоје затворене V-путање.

Примјетимо да за случај када је $m > 1$ упаривања у V су следећег типа:

1. $\{\{I_0, \ldots, I_n\}, \{M_1, I_0, \ldots, I_n\}\}$, или
2. $\{\{I_0, \ldots, I_n\}, \{M_k, I_0, \ldots, I_n\}\}$ што можемо обиљежити са $\{\sigma \setminus M_k, \sigma\}$. Услови који важе код оваквог типа упаривања су следећи:
   - $M_1 \notin \{I_0, \ldots, I_n\}$

- $M_1 I_0 \cdots I_n = 0$
- $M_i \in \{I_0, \ldots, I_n\}$ и $\sigma \setminus M_i + M_1 \in \mathcal{K}$ за свако $1 < i < k$, и
- $\sigma \setminus M_k + M_1 \notin \mathcal{K}$

Када је R коначан локалан прстен упаривања у V су само првог типа, тако да доказ ацикличности за семилокалне коначне прстене је уједно и доказ за локалне коначне прстене.

Претпоставимо да је $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_r, \beta_r$ нека V-путања. Сваки α_i је n-симплекс, сваки β_i је $(n+1)$-симплекс, $\{\alpha_i, \beta_i\} \in V$ и $\beta_i \supset \alpha_{i+1} \neq \alpha_i$ за свако $0 \leq i \leq r$. Показаћемо да ова путања не може бити затворена, односно, не можемо имати $\alpha_0 = \alpha_{r+1}$ за неко $r > 0$.

Претпоставимо да је $\{\alpha_0, \beta_0\} \in V$ упаривање првог типа, односно да је $\alpha_0 = \{I_0, \ldots, I_n\}$ и $\beta_0 = \{M_1, I_0, \ldots, I_n\}$. С обзиром да је α_1 лице симплекса β_0 и да је $\alpha_1 \neq \alpha_0$, онда је $\alpha_1 = \{M_1, I_0, \ldots, \hat{I}_i, \ldots I_n\}$ за неко $0 \leq i \leq n$. У дискретном пољу V овакав n-симплекс је упарен са $(n-1)$-симплексом $\{I_0, \ldots, \hat{I}_i, \ldots I_n\}$ који не може бити β_1 (β_1 мора бити $(n+1)$-симплекс). Према томе, ова путања завршава се са β_0 и стога није затворена.

Сада претпоставимо да је $\{\alpha_0, \beta_0\} \in V$ упаривање другог типа, односно, $\alpha_0 = \{I_0, \ldots, I_n\}$, $\beta_0 = \{M_k, I_0, \ldots, I_n\}$, са условима који важе за овај тип упаривања. Означимо овај пар као $\{\sigma \setminus M_k, \sigma\}$. С обзиром да је α_1 лице симплекса β_0 и $\alpha_1 \neq \alpha_0$, имамо да је $\alpha_1 = \{M_k, I_0, \ldots, \hat{I}_i, \ldots I_n\}$ за неко $0 \leq i \leq n$. Чему је једнак симплекс β_1 зависи од тога који идеал из симплекса β_0 недостаје у симплексу α_1. Прво ћемо претпоставити да је искључен идеал један од максималних идеала M_j, $1 < j < k$. Услов да је $\sigma \setminus M_j + M_1 \in \mathcal{K}$, нам говори да је $\beta_1 = \alpha_1 + M_1$. Даље, користећи исти аргумент као за упаривање првог типа, α_2 је лице симплекса β_1 различито од α_1, и упарено је са $(n-1)$-симплексом $\alpha_2 \setminus M_1$, па је путања окончана и није затворена. Сада претпоставимо да је искључен идеал I_i неки други максималан идеал M_j, $j > k$ који може бити међу идеалима $\{I_0, \ldots, I_n\}$. Ако $M_1 M_k I_0 \cdots \hat{I}_i \cdots I_n \neq 0$ имамо да је $\beta_1 = \alpha_1 + M_1$ и примјењујемо исти аргумент као раније чиме закључујемо да се путања завршава и да није затворена. У супротном, ако је $M_1 M_k I_0 \cdots \hat{I}_i \cdots I_n = 0$, лема 38 нам говори да $M_1 M_j I_0 \cdots \hat{I}_i \cdots I_n \neq 0$ па је симплекс $\sigma \setminus M_k + M_1 \in \mathcal{K}$ што је контрадикторно једном од услова који важе за овај тип упаривања. Према томе, закључујемо да идеал I_i који је искључен из β_0 како бисмо добили симплекс α_1 не може бити ниједан од максималних идеала. То значи да никад не можемо затворити V-путању, односно не можемо имати $\alpha_0 = \alpha_{r+1}$ за неко $r > 0$ јер никад не можемо поново укључити идеал I_i, с обзиром да не постоји упаривање типа $\{\tau, \tau + I_i\} \in V$ за идеал I_i који није максималан.

Доказали смо да не постоје затворене V-путање, па према теореми 13, V је градијентно векторско поље за неку дискретну Морсову функцију.

6.3.2 Критични симплекси

Из алгоритма за ациклично упаривање V, примјећујемо да

1. за случај када је $m = 1$, неупарени (критични) симплекси су:
   - $\{M_1\}$, и симплекси облика
   - $\{I_0, \ldots, I_n\}$ гдје $M_1 \notin \{I_0, \ldots, I_n\}$ и $M_1 I_0 \cdots I_n = 0$.
2. за случај када је $m > 1$, неупарени (критични) симплекси су:

- $\{M_1\}$, и симплекси облика
- $\{M_2, \ldots, M_m, I_0, \ldots, I_n\}$ за који важи да $M_1 \notin \{I_0, \ldots, I_n\}$, производ $M_1 M_2 \cdots M_m I_0 \cdots I_n = 0$ и производ $M_1 M_2 \cdots \hat{M}_i \cdots M_m I_0 \cdots I_n \neq 0$ за свако $2 \leq i \leq m$.

6.3.3 Хомотопски тип

Како би одредили хомотопски тип комплекса идеала нула дјелитеља за коначне прстене, размотрићемо више случајева коначних прстена.

Теорема 39. *Нека је R коначан локалан прстен са максималним идеалом M. Ако је* $\mathrm{Ann}(M) = 0$ *онда је $\mathcal{K}(R)$ контрактибилан. Ако је* $\mathrm{Ann}(M) = M$ *онда је $\mathcal{K}(R)$ хомотопно еквивалентан унији коначног броја неповезаних тачака. Коначно, ако је* $\mathrm{Ann}(M) \neq 0$ *и* $\mathrm{Ann}(M) \neq M$*, онда је $\mathcal{K}(R)$ хомотопан унији коначног броја неповезаних тачака и повезаног комплекса који је хомотопно еквивалентан букету сфера.*

Доказ. Ако је $\mathrm{Ann}(M) = 0$ онда је очигледно да је $\mathcal{K}(R)$ конус са врхом M, па је контрактибилан. Претпоставимо да $\mathrm{Ann}(M) \neq 0$. $\mathrm{Ann}(M)$ је прави идеал у R, и с обзиром да за било који други не-нула прави идеал I у R имамо да је $I \subseteq M$, онда је $\mathrm{Ann}(M) \cdot I = 0$. Дакле, $\mathrm{Ann}(M)$ је изоловано тјеме. Исто образложење важи и за било који идеал $I \subset \mathrm{Ann}(M)$ који је према томе такође изоловано тјеме.

Када $\mathrm{Ann}(M) \neq M$, комплекс $|\mathcal{K}(R)|$ је унија коначног броја изолованих тјемена и поткомплекса $|\widetilde{\mathcal{K}}(R)|$ чија су тјемена идеали $I \nsubseteq \mathrm{Ann}(M)$. За свако тјеме I у овом поткомплексу имамо да је $I \cdot M \neq 0$, што показује да је овај поткомплекс повезан. Примјенићемо алгоритам за градијентно векторско поље за случај локалног коначног прстена на овај поткомплекс и обиљежити критичне симплексе у односу на ово векторско поље са $\mathcal{U}(\widetilde{\mathcal{K}}, V)$. Критични симплекси су $\{M\}$ и $\{I_0, \ldots, I_n\}$ гдје $M \notin \{I_0, \ldots, I_n\}$ и $MI_0 \cdots I_n = 0$. Нека је $|\mathcal{U}(\widetilde{\mathcal{K}}, V)| = k$. С обзиром да су тјемена у овом комплексу идеали који нису садржани у $\mathrm{Ann}(M)$, онда је M једини критичан 0-симплекс. За сваки критичан симплекс $\sigma \in \mathcal{U}(\widetilde{\mathcal{K}}, V)$, размотримо следећи поткомплекс у $|\widetilde{\mathcal{K}}(R)|$:

$$K_\sigma = \{\tau \in \mathcal{K} : \sigma \longrightarrow \tau\},$$

Ако је $\sigma = \{M\}$ онда је $K_\sigma = \{M\}$. Нека је $\sigma = \{I_0, \ldots, I_n\} \in \mathcal{U}(\widetilde{\mathcal{K}}, V)$. Примјетимо да $MI_0 \cdots \hat{I}_i \cdots I_n \neq 0$ за свако $0 \leq i \leq n$, с обзиром да сваки идеал $I_i \subset M$ и $I_0 \cdots I_n \neq 0$. Према томе за сваки индекс $0 \leq i \leq n$, имамо упарење $\{\{I_0, \ldots, \hat{I}_i, \ldots, I_n\}, \{M, I_0, \ldots, \hat{I}_i, \ldots, I_n\}\} \in V$. Стога, осим лица симплекса σ, једини симплекси $\tau \in \widetilde{\mathcal{K}}$ такви да имамо $\sigma \longrightarrow \tau$ су симплекси $\{M, I_0, \ldots, \hat{I}_i, \ldots, I_n\}$ и природно њихова лица. Према томе, $|K_\sigma|$ је граница $(n+1)$-симплекса, што је хомотопно сфери S^n.

Примјетимо да једини критични симплекси у K_{σ_i} су симплекси $\{M\}$ и σ_i, па према посљедици 19, комплекс идеала нула дјелитеља $|\widetilde{\mathcal{K}}(R)|$ је хомотопно еквивалентан $\bigvee_{i=1}^{k} |K_{\sigma_i}|$, односно букету сфера $\bigvee_{i=1}^{k} S^{\dim \sigma_i}$. □

Тврђење 40. *Нека је R прстен са два максимална идеала M_1 и M_2 такав да је $M_1 M_2 = 0$. Онда је R изоморфан прозиводу два поља и комплекс $|\mathcal{K}(R)|$ је хомотопно еквивалентан унији двије изоловане тачке.*

Доказ. Према кинеској теореми о остацима, $R \cong R/M_1 \times R/M_2$. За било која два идеала таква да је $I \subseteq M_1$ и $J \subseteq M_2$ имамо да је $IJ = 0$. Према томе, комплекс $\mathcal{K}(R)$ је унија два неповезана поткомплекса: $\mathcal{K}(M_1)$ као поткомплекс генерисан свим идеалима који су садржани у M_1 и $\mathcal{K}(M_2)$

као поткомплекс генерисан свим идеалима који су садржани у M_2. Нека је $\{I_0, \ldots, I_n\}$ неки симплекс у $\mathcal{K}(M_1)$ који не садржи тјеме M_1. Ако је $I_0 \cdots I_n M_1 = 0$ онда је $M_1 = \mathrm{Ann}(I_0 \cdots I_n)$ а с обзиром да такође важи да је $M_2 \subseteq \mathrm{Ann}(I_0 \cdots I_n)$ јер је $M_1 M_2 = 0$, долазимо до контрадикције. Према томе, $\mathcal{K}(M_1)$ је конус са врхом M_1, па је стога контрактибилан. Слично томе, $\mathcal{K}(M_2)$ је конус са врхом M_2, па је комплекс $\mathcal{K}(R)$ хомотопно еквивалентан унији двије неповезане тачке. □

Како би одредили хомотопски тип комплекса идеала нула дјелитеља за последњи случај, треба нам следећа лема.

Лема 41. *Нека је R коначан прстен који није локалан и који није изоморфан производу два поља. Нека је $\sigma, \tau \in \mathcal{U}(\mathcal{K}, V)$, и $\dim \tau > \dim \sigma$. Онда важи $\tau \not\supset \sigma$.*

Доказ. Можемо примјетити да ако је $\sigma = \{M_1\}$, онда $\tau \not\supset \sigma$ за било који критичан симплекс τ. Претпоставимо да је $\sigma \subset \tau$, гдје су σ и τ критични симплекси другог типа. Обиљежимо $\sigma = \{M_2, \ldots, M_m, I_0, \ldots, I_r\}$ и $\tau = \{M_2, \ldots, M_m, I_0, \ldots, I_r, I_{r+1}, \ldots, I_n\}$ гдје важе следећи услови за такав тип критичних симплекса:

- $M_1 \notin \{I_0, \ldots, I_n\}$
- $M_1 M_2 \cdots M_m I_0 \cdots I_r = 0$, и
- $M_1 M_2 \cdots \hat{M_i} \cdots M_m I_0 \cdots I_n \neq 0$ за свако $2 \leq i \leq m$.

Размотримо идеал I_{r+1}. Нека је $I_{r+1} \subset M_i$ за неко $1 \leq i \leq m$.

$I_{r+1} \subset M_1 = \mathrm{Ann}(M_2 \cdots M_m I_0 \cdots I_r)$ би било контрадикторно чињеници да $M_2 \cdots M_m I_0 \cdots I_r I_{r+1} \neq 0$ (симплекс $\{M_2, \dots, M_n, I_0, \dots, I_{r+1}\}$ је лице симплекса τ). Према томе $I_{r+1} \subset M_i$ за неко $2 \leq i \leq m$. С обзиром да важе услови да $M_1 M_2 \cdots \hat{M_i} \cdots M_m I_0 \cdots I_r \neq 0$ и да је $M_1 M_2 \cdots M_m I_0 \cdots I_r = 0$, имамо да је $\mathrm{Ann}(M_1 M_2 \cdots \hat{M_i} \cdots M_m I_0 \cdots I_r) = M_i$. Дакле, из $I_{r+1} \subset M_i$ закључујемо да је $M_1 M_2 \cdots \hat{M_i} \cdots M_m I_0 \cdots I_r I_{r+1} = 0$ што је контрадикторно услову који важи за овај тип критичних симплекса, односно $M_1 M_2 \cdots \hat{M_i} \cdots M_m I_0 \cdots I_n \neq 0$. □

Теорема 42. *Нека је R коначан прстен такав да је број максималних идеала $m > 1$, и претпоставимо да R није изоморфан производу два поља. Онда је комплекс $|\mathcal{K}(R)|$ хомотопно еквивалентан букету сфера $\bigvee_{i=1}^{k} S^{d_i}$, гдје је d_i димензија сваког од критичних симплекса σ_i у односу на градијентно векторско поље V.*

Доказ. За било који не-нула прави идеал $I \neq M_1$ у R, ако је $M_1 I = 0$ онда је $M_2 I \neq 0$ (лема 38). Тиме смо показали да је комплекс повезан, с обзиром да R није изоморфан производу два поља па $M_1 M_2 \neq 0$. Осим тога, имамо упарење $\{\{I\}, \{M_i, I\}\} \in V$ гдје је $i = 1$ или $i = 2$, па је $\{M_1\}$ једини критичан 0-симплекс у односу на градијентно векторско поље V.

Нека је $\mathcal{U}(\mathcal{K}, V)$ скуп k критичних симплекса у $\mathcal{K}$ у односу на V, и нека је D одговарајући диграф. Нека је $\sigma \in \mathcal{U}(\mathcal{K}, V)$ и:

$$K_\sigma = \{\tau \in \mathcal{K} : \sigma \longrightarrow \tau\},$$

Ако је $\sigma = \{M_1\}$ онда је $K_\sigma = \{M_1\}$. Нека је $\sigma = \{M_2, \dots, M_m, I_0, \dots, I_n\} \in \mathcal{U}(\mathcal{K}, V)$. Желимо да покажемо да је $\sigma \setminus J + M_1 \in \mathcal{K}(R)$ гдје је J сваки од идеала из скупа $\{M_2, \dots, M_m, I_0, \dots, I_n\}$. Ако је $J \in \{M_2, ..., M_m\}$ или $J \subset M_i$ за неко $2 \leq i \leq m$, онда је тврдња тачна с обзиром да важи услов $M_1 M_2 \cdots \hat{M_i} \cdots M_m I_0 \cdots I_n \neq 0$. Сада претпоставимо да је $J \subset M_1$. Када би имали да $\sigma \setminus J + M_1 \notin \mathcal{K}(R)$ онда би $\sigma \setminus J$ био критичан симплекс што је контрадикторно леми 41. Дакле, осим лица симплекса σ, једини симплекси $\tau \in \mathcal{K}$ такви да $\sigma \longrightarrow \tau$ су симплекси $\sigma \setminus J + M_1$ за $J \in \{M_2, \ldots, M_m, I_0, \ldots, I_n\}$ и природно њихова лица. Дакле, једини критични симплекси у K_σ су σ и M_1. Нека је d димензија симплекса σ (имамо да је $d = n + m - 1$). Можемо закључити да је K_σ граница $d+1$-симплекса који је дат тјеменима $\{M_1, M_2, \ldots, M_m, I_0, \ldots, I_n\}$. Дакле овај комплекс је хомотопан сфери S^d.

Према томе, за сваки критичан симплекс $\sigma_i \in \mathcal{U}(\mathcal{K}, V)$ и $\sigma_i \neq \{M_1\}$, једини критични симплекси у K_{σ_i} су σ_i и $\{M_1\}$. Према посљедици 19, $|\mathcal{K}(R)|$ је хомотопан $\bigvee_{i=1}^{k} |\mathcal{K}_{\sigma_i}|$. Обиљежимо димензије симплекса σ_i са $d_i + 1$. Можемо закључити да је $|\mathcal{K}(R)|$ хомотопно еквивалентан букету сфера $\bigvee_{i=1}^{k} S^{d_i}$. □

6.3.4 Неке примјене резултата

Примјенићемо добијене резултате на неке класе и примјере комутативних прстена.

Тврђење 43. *Када је R коначан прстен изоморфан производу m поља, гдје је $m > 2$, $|\mathcal{K}(R)|$ је хомотопан S^{m-2}.*

Доказ. Имамо да је производ свих максималних идеала $M_1 M_2 \cdots M_m = 0$ па једини критични симплекси у односу на дискретно поље V су $\{M_1\}$ и $\{M_2, \ldots, M_m\}$. Према томе, примјеном теореме 42, $|\mathcal{K}(R)|$ је хомотопан сфери S^{m-2}. □

Тврђење 44. *Нека је $R = \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ гдје је p прост број и $r > 1$. Онда је $|\mathcal{K}(R)|$ хомотопно еквивалентан унији тачке и са њом неповезаног букета сфера*

$\bigvee_{i=1}^{k} S^{d_i}$ гдје је број сфера димензије n једнак броју цјелобројних партиција броја $r-1$ на $n+1$ различитих цијелих бројева који су већи од 1.

Доказ. Идеали у R су облика $I = \langle p^i \rangle$. Примјетимо да је $\mathrm{Ann}(\langle p \rangle) = \langle p^{r-1} \rangle$, који нема не-нула правих подидеала, па је једино изоловано тјеме у комплексу идеал $\langle p^{r-1} \rangle$. Што се тиче повезаног поткомплекса (видјети теорему 39), критични симплекси с обзиром на дискретно векторско поље V су облика $\{\langle p \rangle\}$ и $\{I_0, \ldots, I_n\}$ такви да $\langle p \rangle \notin \{I_0, \ldots, I_n\}$ и $\langle p \rangle I_0 \cdots I_n = 0$. Према томе, идеали $I_0, \ldots, I_n$ су такви да је $I_0 \cdots I_n = \langle p^{r-1} \rangle$. Даље, с обзиром да су идеали облика $I = \langle p^i \rangle$, $i \neq 1$, сваки од идеала мора имати другачији степен броја p као његов генератор и сума свих степена генератора мора бити једнака $r-1$. Дакле, број критичних n-симплекса је број цјелобројних партиција броја $r-1$ на $n+1$ различитих цијелих бројева који су већи 1. □

Подсјетимо се да у раду [2], аутори су изучавали прву хомолошку групу за прстен $R = \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ и израчунали су да је ранг $H_1(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$ (користимо исте ознаке као у [2]) једнак $\frac{r-4}{2}$ када је r паран, односно $\frac{r-5}{2}$ када је r непаран број. Ово је управо број цјелобројних партиција броја $r-1$ на два различита цијела броја који су већи од 1, односно, број сфера димензије 1 што смо и показали у тврђењу изнад.

Тврђење 45. *Нека је $R = \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ гдје је $a = p_1^{r_1} \cdots p_m^{r_m}$ за неке међусобно различите просте бројеве $p_1, \ldots, p_m$ и $m > 1$. Претпоставимо да R није изоморфан производу два поља. Онда је $|\mathcal{K}(R)|$ хомотопно еквивалентан букету сфера $\bigvee_{i=1}^{k} S^{d_i}$ гдје је број сфера димензије n једнак броју начина на који можемо раставити број $p_1^{r_1-1} \cdots p_m^{r_m-1}$ као производ $n-m+2$ међусобно различитих цијелих бројева гдје ниједан од њих није из скупа $\{p_1, \ldots, p_m\}$.*

Доказ. Примјенимо алгоритам за градијентно векторско поље V за семилокалне прстене. Критични симплекси су $\{\langle p_1\rangle\}$ и симплекси облика $\{\langle p_2\rangle, \ldots, \langle p_m\rangle, I_0, \ldots, I_{n-m+1}\}$ гдје је $\langle p_2\rangle \cdots \langle p_m\rangle I_0 \cdots I_{n-m+1} = \langle a/p_1\rangle$. Дакле, постоје критични n-симплекси управо за сваку од комбинација идеала $I_0, \ldots, I_{n-m+1}$ таквих да је $I_0 \cdots I_{n-m+1} = p_1^{r_1-1} \cdots p_m^{r_m-1}$ чиме закључујемо тврђење. □

Глава 7

СМЈЕРНИЦЕ ЗА ДАЉИ РАД

Постоји значајан број радова у којима се графови придружују комутативним прстенима на различите начине. Ова област била је веома популарна у посљедњих петнаест година али како су многобројне идеје већ исцрпљене, интересовање за графове који су придружени прстенима полако јењава. Међутим, можемо добити нов поглед на изучавање алгебарских својстава комбинаторним методама ако такву анализу уопштимо на генералне симплицијалне комплексе. Осим симплицијалних комплекса који су изучавани у овој дисертацији, постоји и низ других начина на које можемо дефинисати симплицијалне комплексе који су придружени комутативним прстенима.

Најпопуларнија идеја придруживања графова комутативним прстенима је преко дјелитеља нуле, представљена у раду Андерсона и Ливингстона [4] као и многобројним радовима који се надовезују. Ову идеју смо донекле користили у Глави 6 у којој умјесто елемената у прстену који су дјелитељи нуле за тјемена симплицијалног комплекса узимамо идеале који су дјелитељи нуле. У овој глави добијени резултати нам дају нека интересантна комбинаторна својства па би сигурно било корисно изучавати и комплекс нула-дјељитеља односно комплекс чија су тјемена прави дјелитељи нуле а симплекси скупови тјемена чији производ није нула.

Даље, значајну популарност стекао је и *граф нерастављивих дјелитеља* у раду [9] у којем аутори изучавају нерастављиве елементе како би проучавали факторизације у доменима. Слична идеја се може примијенити и на симплицијалне комплексе: за дати елемент x у домену R нека су тјемена комплекса сви нерастављиви дјелитељи од x, а скуп тјемена чини симплекс ако и само ако је производ тих тјемена дјелитељ од x. Ова идеја чини се занимљивом иако се тиме „заборавља" колико пута неки дјелитељ дијели x; наиме, из самог комплекса немогуће је видјети степен неког дјелитеља, што ћемо илустровати примјером. Нека је k поље и нека је $D = k[x^3, x^4]$ потпрстен полиномског прстена $k[x]$. Онда је $x^{24} \in D$ и једини нерастављиви дјелиоци од x^{24} у D су x^3 и x^4. Међутим, три различите факторизације $x^{24} = (x^3)^8 = (x^4)^6 = (x^3)^4(x^4)^3$ представљене су као једна иста ивица између два тјемена у комплексу.

Граф пресјека идеала је у [7] дефинисан на следећи начин: тјемена су сви прави не-нула идеали, а два тјемена су сусједна уколико пресјек тих идеала није нула. На сличан начин можемо придружити симплицијални комплекс са истим скупом тјемена: скуп идеала чини симплекс ако и само ако њихов пресјек није тривијалан. Користећи методе из четврте и пете главе у овој дисертацији, може се показати је овај комплекс увијек контрактибилан осим уколико је прстен изоморфан производу n поља - у том случају комплекс је хомотопно еквивалентан граници $(n-1)$-симплекса.

Генералнија смјерница за даљи рад је придруживање симплицијалних комплекса групама умјесто комутативним прстенима. Иако би групе вјероватно биле знатно компликованије за рад него прстени, потенцијално може произаћи велики број идеја као начина придруживања групама. На примјер, за симетричне групе можемо посматрати следећи комплекс: нека су тјемена комплекса све пермутације скупа од n елемената, а скуп тјемена чини симплекс ако и само ако тај скуп није генераторски скуп за S_n. Другим ријечима, максимални симплекси у овом комплексу су максималне подгрупе у S_n. Каква би била корист од оваквог симплицијалног комплекса тек треба да видимо.

Литература

[1] S. Akbari, R. Nikadish, M. J. Nikmehr, *Some results on the intersection graphs of ideals of rings*, J. Algebra Appl. **12** (2013), no. 4, 13pp.

[2] R. Akhtar, L. Lee, *Homology of zero divisors*, Rocky Mountain J. Math, **37** (2007), no. 4, 1105–1126.

[3] D. F. Anderson, A. Badawi, *The total graph of a commutative ring*, J. Algebra **320** (2008), no. 7, 2706–2719.

[4] D. F. Anderson, P. S. Livingston, *The zero-divisor graph of a commutative ring*, J. Algebra **217** (1999), no. 2, 434–447.

[5] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Adison-Wesley Publishing Company, 1969.

[6] I. Beck, *Coloring of commutative rings*, J. Algebra **116** (1988), no. 1, 208–226.

[7] I. Chakrabarty, S. Ghosh, T. K. Mukherjee, M. K. Sen, *Intersection graphs of ideals of rings*, Discrete Math. **309** (2009), no. 17, 5381–5392.

[8] E. Clark, R. Ehrenborg, *The Frobenius Complex*, Ann. Comb. **16** (2012), no. 2, 215–232.

[9] J. Coykendall, J. Maney, *Irreducible divisor graphs*, Comm. Algebra **35** (2007), no. 3, 885–895.

[10] R. Ehrenborg, G. Hetyei, *The topology of the independence complex*, European J. Combin. **27** (2006), no. 6, 906–923.

[11] R. Forman, *Morse theory for cell complexes*, Adv. Math, **134** (1998), no. 1, 90–145.

[12] R. Forman, *A user's guide to discrete Morse theory*, Sem. Lothar. Combin. 48 (2002), Art. B48c, 35 pp.

[13] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[14] P. Hersch, J. Shareshian, *Chains of modular elements and lattice connectivity*, Order **23** (2006), no. 4, 339–342.

[15] J. Jonsson, *Simplicial Complexes of Graphs*, Lecture Notes in Mathematics, 1928. Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[16] I. Kaplansky, *Commutative rings*, Revised Edition, The University of Chicago Press, Chicago, Ill.-London, 1974.

[17] D. Kozlov, *Combinatorial Algebraic Topology*, Algorithms and Computation in Mathematics, 21, Springer, Berlin 2008.

[18] H. R. Maimani, M. Salimi, A. Sattari, S. Yassemi, *Comaximal graph of commutative rings*, J. Algebra **319** (2008), no. 4, 1801–1808.

[19] S. W. Margolis, F. Saliola, B. Steinberg, *Combinatorial topology and the global dimension of algebras arising in combinatorics*, arXiv:1205.1159

[20] R. Meshulam, *On the homological dimension of lattices*, Order **25** (2008), no. 2, 153–155.

[21] N. Milošević, *Independence complexes of comaximal graphs of commutative rings with identity*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.), to appear.

[22] N. Milošević, Z. Z. Petrović, *Ideal zero-divisor complex*, J. Commut. Algebra, to appear.

[23] N. Milošević, Z. Z. Petrović, *Order complex of ideals in a commutative ring with identity*, Czechoslovak Math. J., to appear.

[24] J. R. Munkres, *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, California, 1984.

[25] S. Moconja, Z. Z. Petrović, *On the structure of comaximal graphs of commutative rings with identity*, Bull. Aust. Math. Soc. **83** (2011), no. 1, 11–21.

[26] M. Patassini, *On the (non-)contractibility of the order complex of the coset poset of a classical group*, J. Algebra **343** (2011), 37–77.

[27] Z. Z. Petrović, Z. S. Pucanović, *Toroidality of intersection graphs of ideals of commutative rings*, Graphs and Combinatorics **30** 2014, no. 3, 707–716.

[28] J. Shareshian, *Discrete Morse theory for complexes of 2-connected graphs*, Topology, **40** (2001), no. 4, 681–701

[29] J. Shareshian, R. Woodroofe, *Order complexes of coset posets of finite groups are not contractible*, arXiv:1406.6067.

[30] P. K. Sharma, S. M. Bhatwadekar, *A note on graphical representation of rings*, J. Algebra **176** (1995), no. 1, 124–127.

[31] B. Shelton, *Splitting Algebras II*, The Cohomology Algebra, arXiv:1208.2202.

[32] V. A. Vassiliev, *Topology of discriminants and their complements*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zurich, 1994), Birkhäuser, Basel, 1995, 209–226

[33] M. Wachs, *Poset Topology: Tools and Applications*, Geometric combinatorics, IAS/Park City Math. Ser., 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 497–615.

[34] M. Ye, T. Wu, *Co-maximal ideal graphs of commutative rings*, J. Algebra Appl. **11** (2012), no. 6, 1250114, 14 pp.

Биографија аутора

Нела Милошевић је рођена 03. јануара 1986. године у Котору, гдје је завршила основну школу и прва два разреда опште гимназије, након чега је наставила школовање у иностранству. Средње образовање је завршила на Li Po Chun United World College-у у Хонг Конгу, након чега је уписала студије на департману за математику Williams College-а у Сједињеним Америчким Државама 2004. године. Дипломирала је 2008. године са просјечном оцјеном 3.93 (од 4) и одликовањем *magna cum laude*. Докторске студије на Математичком факултету у Београду уписала је 2009. године на катедри за алгебру и логику. Запослена је на Факултету за информационе системе и технологије Универзитета Доња Горица у Подгорици. Има три рада која су прихваћена за објављивање у часописима са SCI листе.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписана Нела Милошевић

број уписа 2001/2009

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Анализа комутативних прстена придруживањем симлицијалних комплекса

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршила ауторска права и користила интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 24.08.2015.

Nela Milošević

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора: Нела Милошевић

Број уписа: 2001/2009

Студијски програм: Математика

Наслов рада: Анализа комутативних прстена придруживањем симплицијалних комплекса

Ментор: проф. др Зоран Петровић, ванредни професор

Потписана Нела Милошевић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предала за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 24.08.2015.

Nela Milošević

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Анализа комутативних прстена придруживањем симплицијалних комплекса

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предала сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучила.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 24.08.2015.

Nela Milošević

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.