

Математички факултет
Универзитет у Београду

Александеров полином кроз миленијуме

Мастер рад

Студент:

Стефан Михајловић

Комисија:

Проф. др Сениша Врећница, шеф комисије

Проф. др Марко Стошић, ментор

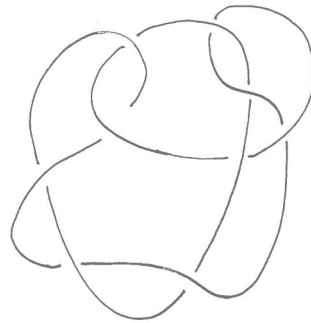
Проф. др Владимир Грујић, ментор

Апстракт

Чвор ће бити један од најважнијих појмова у овом раду, али чворови нису главни разлог његовог постојања. Они су видљива слика дубоке математике која лежи испод, у одговорима на питања која о њиховој природи постављамо. Покушаћемо да кроз причу о једној инваријанти за чворове, Александеровом полиному, прикажемо како је математика напредовала у току последњег века, и дамо наговештај нових тополошких хоризоната отворених почетком овог миленијума.

Увод

Чворове знамо као пертле на ципелама, упетљане конопце којима морнари везују једра, или шеме по којима млади извиђачи уче да учврсте шатор. Ово су физички објекти који сви имају ту особину да су некако упетљани али није тако лако објаснити шта то значи. На крају крајева, увек можемо узети крај конопца и провлачити га кроз запетљано клупко док не добијемо само једно обично одмршено парче. Какво значење има *упетљаност* онда? Већина чворова у стварном свету своју снагу заправо дугује трењу између различитих крајева ужета. Међутим, ове особине физичких чворова су јако компликоване за моделовање и о снази различитих чворова се и дан данас углавном зна из праксе. Ми ћемо се бавити једноставним математичким моделом - бесконачно танким ужетом и спојеним крајевима који не дозвољавају да се чворната творевина лако одмрси. Да већ такав модел пружа јако много интригантних питања уверићемо се у наставку.



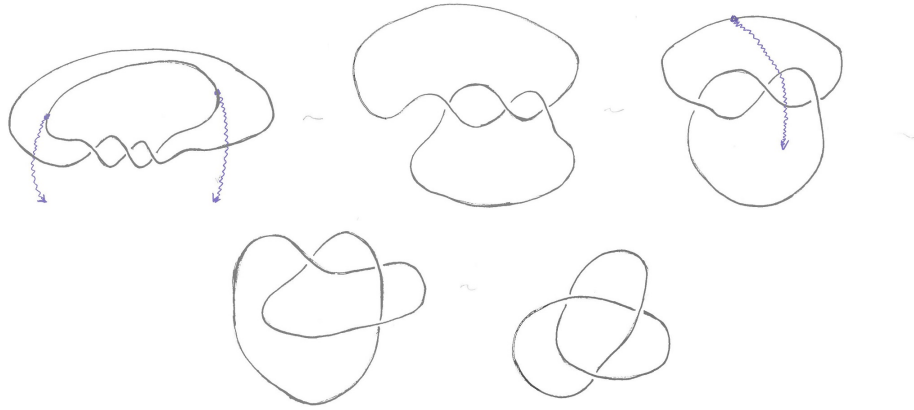
По дефиницији, чвор је непрекидно и инјективно пресликавање кружнице S^1 у тродимензионални простор \mathbb{R}^3 . Уобичајено представљање чвора је преко дијаграма у равни, који су пројекције чвора из \mathbb{R}^3 на неку раван такве да је пресликавање $1-1$ сем у коначно много тачака. Те тачке се у паровима сликају у исте тачке равни које називамо *укрштањима*, а захтевамо и да ту пројекција сече сама себе трансверзално, односно да криве нису тангентне једна другој. Да би представљање укрштања било потпуно, део чвора који је пре пројекције ближи равни на коју пројектујемо означен је прекинутом линијом.

Два чвора сматрамо еквивалентним ако можемо слику једног деформисати на слику другог, односно ако постоји амбијентна изотопија која један преноси у други:

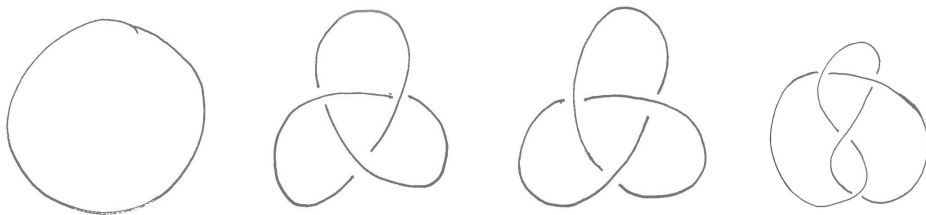
Дефиниција. Чворови K_1 и K_2 су еквивалентни ако постоји непрекидно пресликавање $F : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ за које је F_0 идентитет, $F_1(K_1) = K_2$ и F_t је хомеоморфизам за свако

$t \in [0, 1]$.

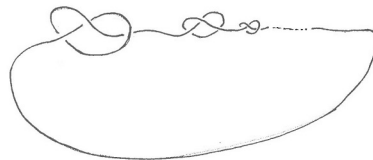
Кључно питање *Теорије чворова* је одредити да ли су два задата чвора еквивалентна или не. Наредни низ дијаграма илуструје деформацију једног чвора у простору. Вијугаве линије нису део дијаграма већ само помажу да се види куда се који делови чвора повлаче.



Најједноставнији чвор је *нечвор*, граница диска стандардно постављеног у неку раван у \mathbb{R}^3 . Овај чвор не делује упетљано, али на одређен начин представља неутрални елемент. Ту су затим *десни* и *леви трolist*, као и *осмица*. Убудуће ћемо задавање чвора преко дијаграма сматрати дефиницијом.

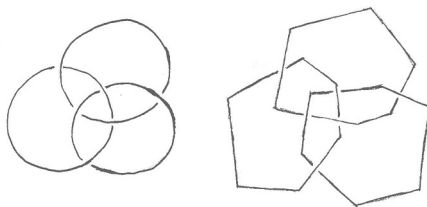


Када је реч о општем непрекидном пресликавању, може се догодити да добијемо слике какве нисмо очекивали, попут ситуације са Пеановом кривом или фракталима. *Дивљи чворови* су они који немају глатке представнике у својој класи, док оне који нису дивљи називамо *питомим чворовима*. У овом раду ће бити речи само о питомим чворовима, па тај придев неће бити наглашаван надаље. Међутим, занимљиво је да се уз помоћ дивљих чворова могу показати неки основни резултати везани за питоме [17].



У свакој класи која има глатког представника, има и представника који је изломљена полигонална линија, а важи и обрнуто. Прво се може видети тако што око сваке тачке глатког чвора опишемо тродимензионалну лопту чији је пресек са чвором хомеоморфан сегменту (ово је могуће због тога што је чвор подмногострукост од \mathbb{R}^3). Како је чвор компактан објекат, можемо издвојити коначно покривање тим лоптама. Преостаје да се унутар сваке две суседне лопте компонента чвора која спаја њихове центре замени сегментом који их спаја. Са друге стране, да бисмо од затворене полигоналне линије дошли до глатког чвора, довољно је да само загладимо изломљену линију на преломима. С обзиром да нам је циљ да разумемо оно што видимо, формализам у који се то уклапа није толико важан док год постоји.

Чвор је слика једне кружнице у \mathbb{R}^3 , док непрекидну и инјективну слику дискјунктне уније неколико кружница називамо *линком*. Пример линка представљеног глатким и полигоналним кривама приказан је на наредној слици. То су чувени Боромејски прстенови, где никоје две компоненте нису уланчане, али се сва три дела заједно не могу раздвојити.

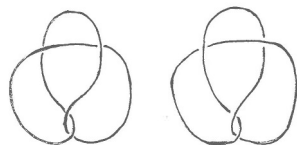


Занимљиво је да се овај линк без проблема може реализовати као приказана полигонална линија, али не и са три савршена круга (приказана на првој слици). Изузетно леп доказ овог геометријског тврђења дат је у фантастичној књизи Мартина Аигнера и Гинтера Циглера, *Proofs from the book*[10].

Из претпоставке о глаткости, чвор увек можемо подебљати, односно наћи му торусну околину $\nu(K)$ дифеоморфну са $S^1 \times D^2$. То доказујемо на сличан начин, узимајући прво лопту око сваке тачке чвора, издвајајући коначно много њих и најзад бирајући најмањи полупречник за дебљину торусне околине.

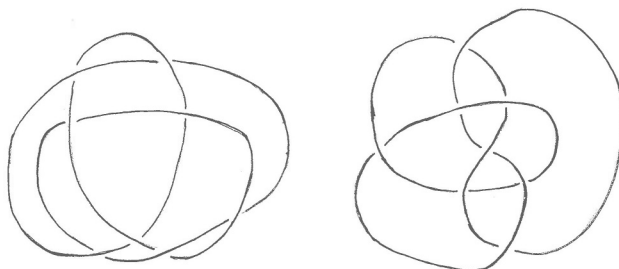
Инваријанте су својства математичких објеката која се не мењају при изабраним трансформацијама. Код чворова су кроз њихову историју то били разни бројеви, али и полиноми, групе или целе хомолошке теорије, као што ћемо видети касније.

Претходно је преко дијаграма приказано неколико једноставних чворова који су наизглед различити. Међутим, чворови могу имати јако сличне дијаграме и бити различити, као и сасвим различите дијаграме који престављају исти објекат. На првој слици је чвор са леве стране - леви троллист, док је десно осмица.



Наредна слика приказује два дијаграма за исти чвор. Слика два дијаграма истог чвора

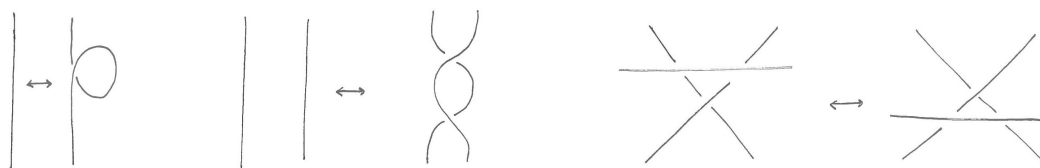
добијена је пертурбацијом једног правог кабла.



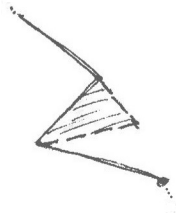
Покушаћемо да у наставку покажемо зашто четири дијаграма са треће слике представљају различите чворове. Прво показујемо да се леви и десни тролист разликују од нечвора и осмице, и то уз помоћ инваријанте добијене бојењем.

Три-бојењем дијаграма чвора називамо додељивање једне од три боје (црвене, зелене и плаве) сваком луку на дијаграму чвора. Лук је сегмент чвора од једног до другог под-укрштања. На сваком укрштању постоје укупно три лука, два која се ту завршавају и један који пролази преко. Постоје два захтева за бојење: први је да су на сваком укрштању или све боје исте или све боје различите, а други је да се не користи само једна боја.

Овим смо дефинисали неко својство дијаграма, али не знамо да ли ће то својство имати и сваки дијаграм који представља тај чвор. У оваквој ситуацији био би користан неки комбинаторни критеријум који говори о томе када су два дијаграма представници истог чвора, и један такав је давно створен. Теорема из 1926-1927 говори о три *Рајдемајстерови потези* који су, примењени неколико пута, довољни да преведу дати дијаграм у било који други дијаграм који представља исти чвор. Они су схематски приказани на следећој слици, са које видимо један смер теореме, тј. да ако имамо два дијаграма који су повезани неким од ових потеза, они морају представљати исти чвор. Важно је нагласити то да су ово локални потези, тј. остатак чвора се не мења при њима. Такође, уз ова три потеза, подрезујевају се и изотопије у равни дијаграма, односно непрекидне трансформације које не укључују укрштања.

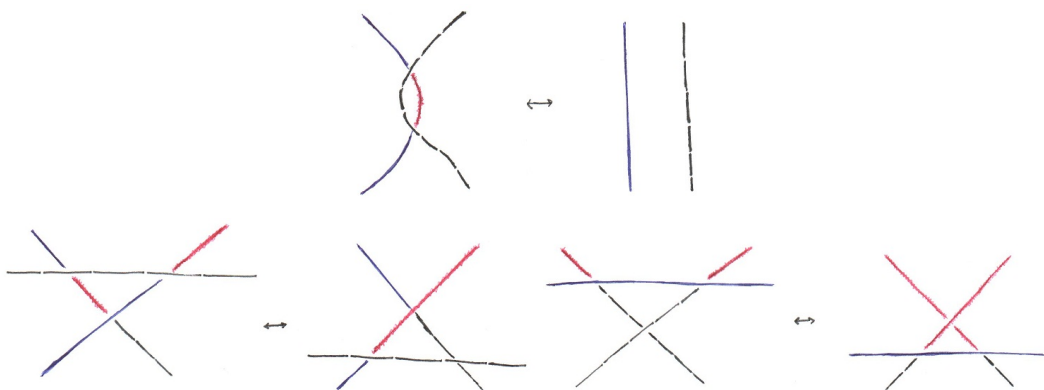


Други смер теореме, који тврди да су ови потези довољни, може се доказати користећи се најпре еквивалентношћу глатког и део-по-део линеарног (*енг. piecewise linear*) представљања истог чвора. Интуитивно, гладак потез над чвором представљеним изломљеном линијом у \mathbb{R}^3 можемо апроксимирати са пуно *троугаоних потеза* који један крак преводу у два крака уоченог троугла изабраног тако да остатак линка не пробија његову унутрашњост. Линеарна еквивалентност два чвора представљена део-по-део линеарним пресликавањем је управо низ троугаоних потеза који их доводе до поклапања.

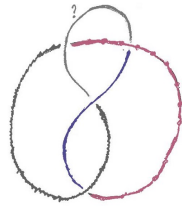


Оно што остаје да се испита је како се ови троугаони потези пројектују на раван дијаграма и интерагују са остатком пројекције. Поделивши троугао на више мањих ако је потребно, и разложивши троугаони потез на пуно финијих, можемо добити коначан скуп суштински различитих међусобних положаја пројекције троуглића и лукова дијаграма. Анализом ових случајева се добија да су три наведена Рајдемајстерова потеза довољна да се изврши било који троугаони потез citereidemeisterPotezi. Самим тим, ако су два дијаграма еквивалентна можемо наћи низ ових потеза који један преводу у други.

Инваријантност 3-обојивости за чворове се сада може показати тако што се за сваки Рајдемајстеров потез произвољном обојеном дијаграму додели ново бојење после дејства потеза. Мењајући бојење кроз низ потеза који успостављају еквивалентност стижемо до бојења за циљани дијаграм. При сваком Рајдемајстеровом потезу мењамо боје само делу дијаграма који учествује у потезу, па лукови који тај део везују за остатак чвора, остају исте боје. Ако су сви лукови који учесвују у потезу исте боје, нема потребе да мењамо боју било чега након потеза јер ће сва укрштања бити једнобојна. Преостале ситуације, при потезима 2 и 3, приказане су на наредним сликама:



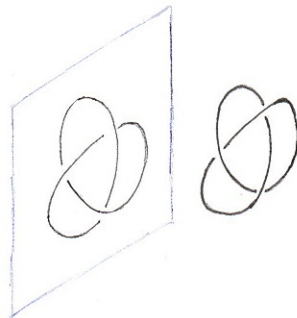
С обзиром да смо захтевали да 3-бојење чвора не садржи само једну боју, видимо да нечвор није 3-обојив. Осмица такође није 3-обојива. Како смо доказали да ова особина не зависи од дијаграма, узмимо онај са слике 3. који има 4 укрштања, а тиме и 4 лука. Кренувши од доњег укрштања и бојењем лукова који се ту сустичу у три различите боје, не можемо никако обојити преостали лук да задовољимо услове на остала три укрштања. Наравно, са слике испод видимо да нисмо могли да кренемо ни од три исте боје у доњем укрштању.



Са друге стране, и леви и десни тролист јесу 3-обојиви па смо овим доказали да они нису еквивалентни нечвору, тј. показали смо њихову нетривијалност која се наслеђивала.



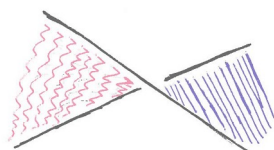
Уз то, добили смо и да је осмица различита од тролиста. Да бисмо се уверили да је осмица заиста упетљана, односно различита од нечвора, користимо Александеров полином. Ово је добра инваријанта за разликовање чворова са малим бројем укрштања са једном озбиљном маном. Наиме, Александеров полином не разликује слике у огледалу, односно увек даје исте вредности за два чвора која су један другогме слика у огледалу.



Понекад чвор заиста јесте еквивалентан својој слици у огледалу и то се може проверити у случају осмице. Међутим, леви тролист се не може деформисати у десни и ово је први пут доказао Макс Ден 1914. испитивањем неких својстава фундаменталне групе комплемента чвора. Занимљиво је да се пре неколико година појавио чисто комбинаторни доказ који користи нешто компликованије бојење [4]. Да бисмо дошли до Александеровог полинома, увешћемо прво један други појам који је сам по себи занимљив.

Зајфертове површи

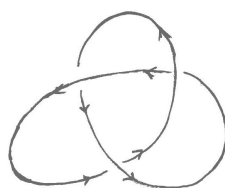
Сваки чвор је граница неке компактне, оријентисане и повезане површи у амбијентном простору. Најједноставнији пример за ово је нечвор који граничи диск, а иако остали чворови не могу бити граница диска, за сваког постоји површ која га има за границу. Међутим, иако у први мах може деловати чудно да је могуће тако сместити површ, ако кренемо од дијаграма произвољног чвора постоји поступак којим од њега конструишемо оријентисану површ која га граничи. Основа за ово је излажење на крај са укрштањима, и један начин је да се на свако укрштање налепи уврнута трака, као на слици:



У општем случају, овако добијену површ зовемо шаховским бојењем. На пример, од стандардног дијаграма за тролист добијамо површ која је трипут уврнута трака хомеоморфна Мебијусовој:



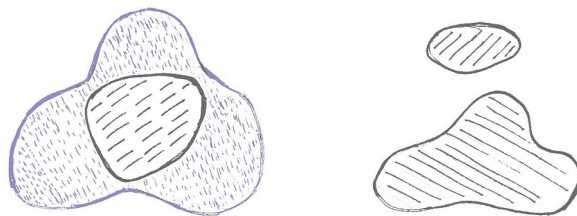
С друге стране, видимо да се овако може добити и неоријентабилна површ. Ако тражимо оријентабилност, неопходно је да прилагодимо претходни поступак новом захтеву и један начин за то је *Зајфертов алгоритам* [6][16]. Почињемо од дијаграма чвора задавањем произвољне оријентације:



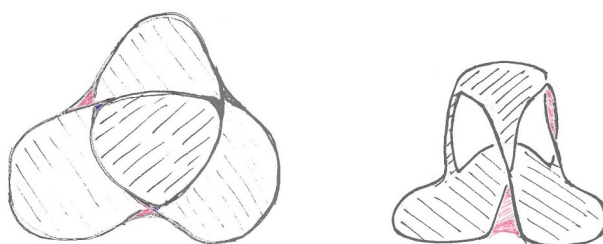
Следи помоћни корак *заглађивања укрштања* који зависи од оријентације на следећи начин:



На овај начин добијамо колекцију кружница у равни које попуњавамо дисковима, а затим раздвајамо транслирајући их дуж праве нормалне на дијаграм.

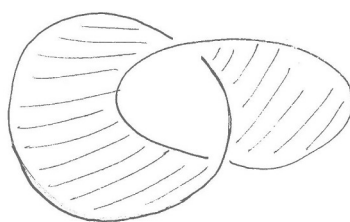


На крају користимо уврнуте траке да изађемо на крај са укрштањима:



На овај начин смо добили компактну и повезану површ чија је граница жељени чвор. Можемо оријентисати дискове тако што прво оријентишемо сваки диск задавањем нормале, на пример из равни дијаграма ка читаоцу. Са слике видимо да нормала транслирана са једног нивоа на други по некој уврнутој траци не мења смер. Без позивања на слику, могли смо оријентисати један диск и транслирати нормалу даље јер се свака од уврнутих трака, независно од смера ротације, уврће за 180 степени, па све нормале завршавају на истој страни новог нивоа. Ово је само другачији опис задавања оријентације, а у сваком случају, добијена површ је оријентисана.

Можемо тражити овакву површ и за линкове. Пример за то је најједноставнији Хопфов линк, као и двапут уврнута трака која га граничи.

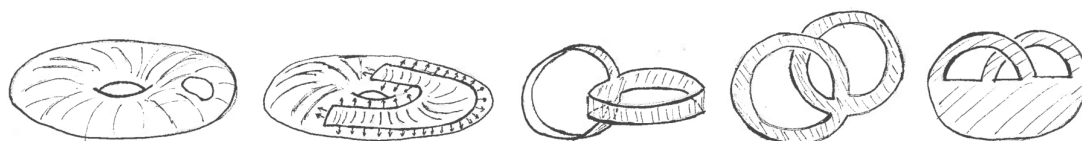


Геометријски опис Александеровог полинома

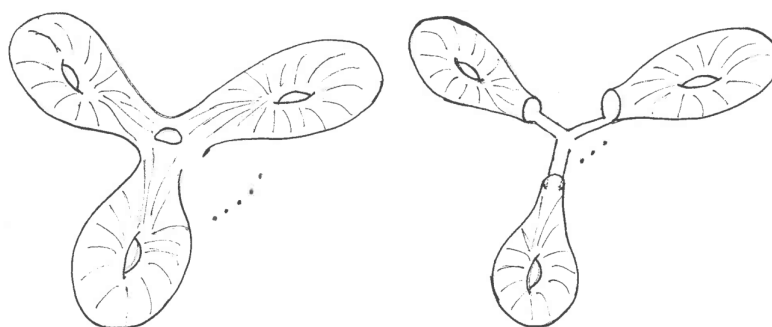
У свом раду из 1923. године [1] Александер је нове инваријанте за чворове добио полазећи од дијаграма чвора и записујући релације међу луковима, површима које они граниче и укрштањима, преко линеарних једначина. Разматрајући систем који на тај начин настаје, добио је као једну од инваријанти и полином који ће касније носити његово име. Међутим, ми ћемо у овом излагању комбинаторни приступ оставити за касније, а сада ћемо се посветити геометријској дефиницији. Она није сувише компликована, али у први мах никако није јасно зашто би таква конструкција давала нешто што не зависи од свих избора које смо направили.

Узмимо линк и неку његову Зајфертову површ, односно површ такву да је њена граница тај линк, док је она сама компактна, повезана и оријентабилна. Ако по компонентама те границе апстрактно налепимо дискове идентитетом по кружницама, добијамо затворену, оријентабилну и повезану површ. Из класификације површи [18] знамо да је то торус са одређеним бројем ручки, односно нека површ генуса g . Иначе, за оријентабилну површ са или без границе, генус се дефинише као максимални број дисјунктних простих затворених кривих које не граниче диск унутар површи, а чијим се уклањањем добија повезана многострукост. Знамо да је прва хомолошка група површи генуса g само \mathbb{Z}^{2g} , односно генерисана је са $2g$ генератора $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2g}$. Уклањањем n дискова добијамо још $n - 1$ генератор $\alpha_{2g+1}, \alpha_{2g+2}, \dots, \alpha_{2g+n-1}$ што се може видети на наредним сликама, а објаснићемо потом и формалније користећи алгебарску топологију. Књига *Algebraic topology* аутора Алена Хечера налази се у електронском облику на његовој страници и одлична је референца за основе ове области [5].

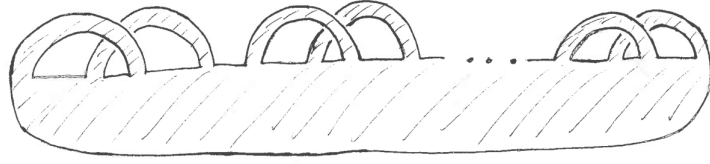
Торус са уклоњеним диском се може деформисати до облика који скоро да лежи у једној равни и згодан је за визуелизацију генератора прве хомологије.



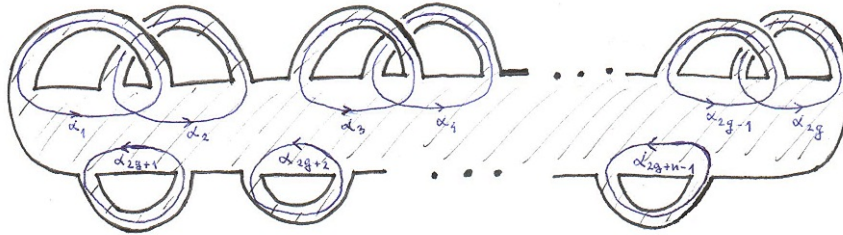
Случај опште оријентисане површи са уклоњеним диском свешћемо на случај торуса постављајући ручке у положај сличан букету кружница:



Ово нам омогућава да деформацију коју смо вршили на торусу извршимо појединачно на сваком парчету и добијемо следећи корпичасти облик:



Чворови су сачињени од само једне упетљане кружнице, па је њихова Зајфертова површ хомеоморфна површи која је управо представљена. У случају општег линка, граница може имати више компоненти односно састојати се из више кружница.¹ Тада се на претходној слици уклања још $n - 1$ диск, па добијамо додатних $n - 1$ ручки на корпици. На следећој слици приказан је тај општи облик и изабрани генератори за $H_1(F)$.



Овим смо приказали чему је хомеоморфна Зајфертова површ за било који чвор, али не и како је смештена у \mathbb{S}^3 . Наиме, ручке корпице су у општем случају на неки начин увијене и испреpletане и неке информације о томе даје управо Александеров полином.

Формалније, генератори прве хомолошке групе Зајфертове површи могу се добити из *Мајер-Вијеторисовог дугог тачног низа* који повезује хомологије два простора, њихове уније и пресека.² Узмимо за један простор Зајфертову површ F , а за други дисјунктну унију дискова $\bigsqcup_{i=1}^n \mathbb{D}_i$ који затварају F . Њихова унија ће бити затворена површ S , док је пресек дисјунктна унија кружница $\bigsqcup_{i=1}^n \mathbb{S}_i^1$. Део низа који нас занима је:

$$\begin{array}{c}
 H_2(F) \oplus H_2(\bigsqcup_{i=1}^n \mathbb{D}_i) \longrightarrow H_2(S) \\
 \left. \begin{array}{c} \longrightarrow H_1(\bigsqcup_{i=1}^n \mathbb{S}_i^1) \longrightarrow H_1(F) \oplus H_1(\bigsqcup_{i=1}^n \mathbb{D}_i) \longrightarrow H_1(S) \\ \longrightarrow H_0(\bigsqcup_{i=1}^n \mathbb{S}_i^1) \longrightarrow H_0(F) \oplus H_0(\bigsqcup_{i=1}^n \mathbb{D}_i) \longrightarrow H_0(S) \end{array} \right\}
 \end{array}$$

Знајући хомологију затворених површи, кружнице и дискова, као и да је хомологија дисјунктне уније само директна сума хомологија, на крају добијамо и $H_1(F)$. За повезан простор је нулта

¹Граница површи је једнодимензионална многострукост без границе, а то може бити само кружница, што је на пример доказано у додатку мале Милнорове књиге: *Topology From The Differentiable Viewpoint* [11]

²Постоји и технички услов да унутрашњости два скупа која посматрамо заједно покривају унију, но када радимо са глатким многострукостима, не морамо бринути за ово - увек се може узети нека њихова отворена околина која им је хомотопна, па тиме има и исте хомолошке групе

хомолошка група изоморфна са \mathbb{Z} , док при дисјунктној унији добијамо по један генератор за сваку компоненту. Све више хомолошке групе диска су тривијалне јер је то контрактибилан простор, док је у случају уније кружница, прва хомологија $H_1(\bigsqcup_{i=1}^n \mathbb{S}_i^1) = \mathbb{Z}^n$. Позната нам је хомологија затворене површи генуса g где су сем нулте, само $H_1(S) = \mathbb{Z}^{2g}$ и $H_2(S) = \mathbb{Z}$ нетривијалне. За површ са границом имамо $H_2(F) = 0$ јер њу, тријангулисану, почев од ивица на граници, можемо колапсирати на 1-скелет. Из претходних коментара, очигледно је да претходни низ постаје:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow H_1(F) \longrightarrow \mathbb{Z}^{2g} \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}$$

За пресликавања у М-В низу имамо експлицитан облик који ћемо користити у доказу једне теореме у наредном поглављу. Анализом ових једноставних пресликавања, а користећи тачност низа, добијамо прво да се реп низа, сачињен од нултих хомолошких група, може одвојити и добити:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow H_1(F) \longrightarrow \mathbb{Z}^{2g} \longrightarrow 0$$

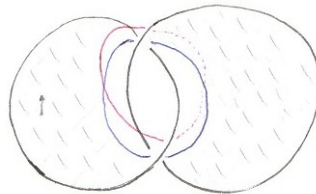
Уз прву теорему о изоморфизму, примењену на почетак овог последњег тачног низа, имамо:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^{n-1} \longrightarrow H_1(F) \longrightarrow \mathbb{Z}^{2g} \longrightarrow 0$$

Овај низ *се цена* јер је група \mathbb{Z}^{2g} слободна, па је $H_1(F) = \mathbb{Z}^{2g} \oplus \mathbb{Z}^{n-1}$ па коначно $H_1(F) = \mathbb{Z}^{2g+n-1}$. Из низа се види и да су генератори за $H_1(F)$ управо сви генератори затворене површи заједно са граничним компонентама. Међутим, како n граничних кружница разалине површ F која је неки два-цикл, постоји једна линеарна једначина у групи \mathbb{Z}^n , што елиминира један генератор.

У овом тренутку постаје важно то што смо за површ тражили да буде оријентабилна. Одаберимо једну од две класе оријентације тако што на непрекидан начин у свакој тачки површи F изаберемо јединичну нормалу. Ове нормале ће нашу *оријентабилну* површ учинити *оријентисаном*. Уочимо околину површи F добијену подебљавањем у правцу вектора нормале. Постојање овакве околине хомеоморфне са $F \times [-1, 1]$ гарантује нам *Теорема о цевастој околини* доказана укратко у чланку [8].

У новој нотацији, цевасту околину идентификујемо са $F \times [-1, 1]$, чиме је површ исто што и $F \times \{0\}$. За произвољну криву α на површи, можемо дефинисати надкриву $\alpha \times \{1\}$ (*push-out*) и подкриву $\alpha \times \{-1\}$ (*push-in*). Ако означимо $k = 2g + n - 1$, генератори прве хомологије Зајфертове површи су неке криве $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k$, док одговарајуће надкриве означавамо $\alpha_1^+, \alpha_2^+ \dots \alpha_k^+$, а подкриве $\alpha_1^-, \alpha_2^- \dots \alpha_k^-$.



Суштину дефиниције Александеровог полинома чини начин на који се генератори упетљавају са надгенераторима, што у ствари говори о томе како се Зајфертова површ уврће како обилазимо петље на њој. Наиме, приказали смо чему је хомеоморфна Зајфертова површ за било који чвор, али не и како је смештена унутар амбијента. Ручке корпица су на неки начин увијене и испреплетане. Да бисмо ово формализовали увешћемо *коэффицијент уланчавања* за оријентисан линк са две компоненте, односно две оријентисане криве. Ако је линк представљен дијаграмом уочимо само укрштања на којима се сусрећу различите компоненте линка. Доделитемо уоченим укрштањима знак $+1$ или -1 у зависности од оријентација лукова који се сустичу у том укрштању. Задавши оријентацију равни дијаграма, укрштању додељујемо $+1$ ако оријентисани лук који пролази изнад, са оријентисаним луком који пролази испод, у том редоследу, даје оријентацију равни; у супротном, укрштању додељујемо -1 . Коэффицијент уланчавања дефинишемо као $\frac{1}{2}$ збира бројева додељених укрштањима, и он је инваријата линка, што се одмах добија из Рајдемајстерове теореме. Наиме, потез 1 не утиче на коэффициент јер се тиче само једне компоненте, потез 3 не мења ни број $+1$ -ца и -1 -ца појединачно, док потез 2 додаје по један $+1$ и -1 , па збир поново остаје непромењен. За криве α и β , коэффициент уланчавања означавамо са $lk(\alpha, \beta)$.

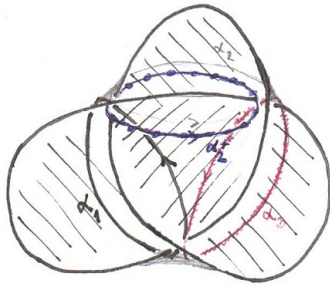
Зајфертова форма је билинеарна форма која пару кривих α и β на Зајфертовој површи додељује број $lk(\alpha, \beta^+)$. Користећи изотопију која криве помера дуж координате $t \in [-1, 1]$, видимо да је овај број једнак $lk(\alpha^-, \beta)$. Зајфертовим матрицама зовемо матрице које представљају ову форму и користећи неке генераторе $\alpha_1 \dots \alpha_k$, добијамо матрицу A :

$$\begin{pmatrix} lk(\alpha_1, \alpha_1^+) & lk(\alpha_1, \alpha_2^+) & lk(\alpha_1, \alpha_3^+) & \dots & lk(\alpha_1, \alpha_k^+) \\ lk(\alpha_2, \alpha_1^+) & lk(\alpha_2, \alpha_2^+) & lk(\alpha_2, \alpha_3^+) & \dots & lk(\alpha_2, \alpha_k^+) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ lk(\alpha_k, \alpha_1^+) & lk(\alpha_k, \alpha_2^+) & lk(\alpha_k, \alpha_3^+) & \dots & lk(\alpha_k, \alpha_k^+) \end{pmatrix}$$

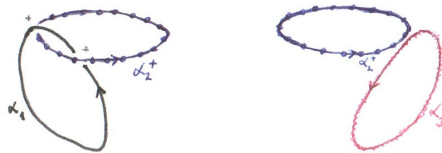
Дефиниција. Ако је A једна Зајфертова матрица чвора K , његов Александеров полином $\Delta_K(t)$ се дефинише до на \pm умножак целобројним степеном независне променљиве t , као детерминанта матрице $A - tA^T$.

Сада ћемо израчунати Александеров полином у случају десног тролиста. Пошто Зајфертову површ задајемо сликом, њоме ћемо се овај пут служити и при рачунању. У поглављу 4, након доказа инваријантности, показаћемо како се Александеров полином комбинаторно добија само из дијаграма произвољног чвора.

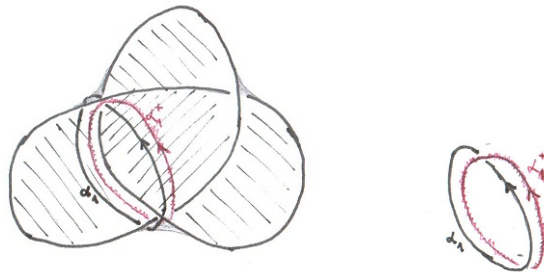
Изаберимо генераторе прве хомологије Зајфертове површи за тролист, криве α_1 и α_2 тако да је α_2 добијено од α_1 ротацијом слике за трећину пуног угла око осе која пролази кроз центар слике.



Надкрива криве α_2 на свим мањим сликама представљена је плавом линијом са перлама. Са прве слике видимо да је $lk(\alpha_1, \alpha_2^+) = +1$, док $lk(\alpha_2, \alpha_1^+)$ видимо јасније користећи ротациону симетрију површи. Наиме, ако са α_3 означимо ротацију криве α_1 за две трећине пуног угла, претходни коефицијент уланчавања једнак је $lk(\alpha_3, \alpha_2^+)$, што је 0 јер криве нису уланчане.



Наредне две слике приказују α_1 и α_1^+ одакле видимо да је $lk(\alpha_1, \alpha_1^+) = -1$, а због симетрије је и $lk(\alpha_2, \alpha_2^+) = -1$.



Све у свему, Зајфертова матрица за генераторе α_1 и α_2 је:

$$\begin{pmatrix} lk(\alpha_1, \alpha_1^+) & lk(\alpha_1, \alpha_2^+) \\ lk(\alpha_2, \alpha_1^+) & lk(\alpha_2, \alpha_2^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Одавде је Александеров полином за десни тролист:

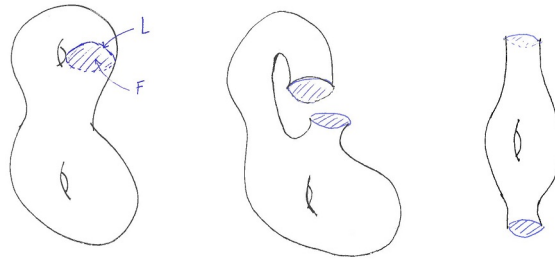
$$\Delta(t) = \left| \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{matrix} -1+t & 1 \\ -t & -1+t \end{matrix} \right| = t^2 - t + 1$$

Доказ инваријантности

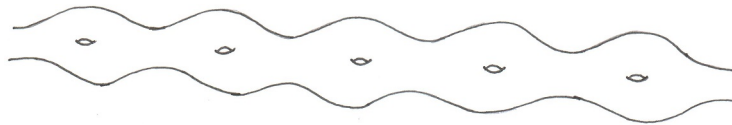
Инваријантност Александеровог полинома доказаћемо у неколико корака. Најпре ћемо конструисати одређено *наткривање* комплемента линка X добијено сечењем по Зајфертовој површи и показати да ово наткривање, као ни његова група трансформација, не зависе од избора површи већ само од линка. Од групе трансформација G и њеног дејства на $H_1(X)$ на природан начин ћемо добити дејство модула³ $\mathbb{Z}G$ на $H_1(X)$. Затим ћемо за произвољан коначно генерисани модул описати конструкцију *презентационе матрице* и показати да за овако добијену матрицу главни минор не зависи од избора презентације. Најзад ћемо у случају нашег модула наткривајућих трансформација експлицитно израчунати презентациону матрицу коју ћемо изабрати тако да буде квадратна. Њен главни минор, односно њена детерминанта, је управо Александеров полином.

Кренувши од линка L и површи F која га разапиње, узмимо $S^3 \setminus F$ и компактификујмо ову 3-димензиону многострукост са две копије површи F , и назовимо их F^+ и F^- . Заправо, овај простор, назовимо га Y , је само комплемент цевасте околине површи F , тј. $S^3 \setminus (F \times (-1, 1))$. Он је хомотопски еквивалентан $S^3 \setminus F$ па су им и хомологије једнаке.

Следећа слика илуструје ситуацију у којој режем дуж Зајфертове површи F , која је диск, док улогу чвора има кружница унутар пуног турса са две ручке (за разлику од уобичајене ситуације када је амбијент тродимензиона сфера):

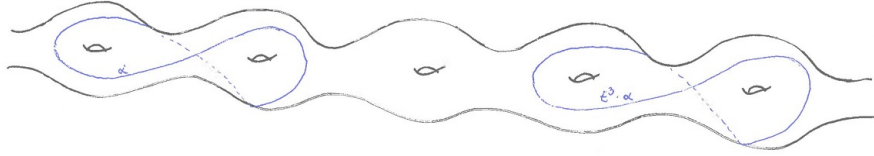


Узмимо пребројиво много копија простора Y и индексирајмо их целим бројевима. Идентификујући, за свако $i \in \mathbb{Z}$, F^- из i -те и F^+ из $i+1$ -ве копије, добијамо наткривање X_∞ простора X .



Дакле, ако су Y_i простори такви да је $h_i : Y \rightarrow Y_i$ хомеоморфизам, простор $X_\infty = \bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}} Y_i / \sim$ при чему је \sim релација која идентификује $h_i(F_-)$ и $h_{i+1}(F_+)$, за све $i \in \mathbb{Z}$. Можемо дефинисати хомеоморфизам $t : X_\infty \rightarrow X_\infty$ који на сваком Y_i делује са $h_{i+1} \circ h_i^{-1}$ и тако све транслира "за један корак у десно". Хомеоморфизам t индукује аутоморфизам t_* који делује на $H_1(F)$, а зваћемо га исто t због једноставности. На тај начин цела циклична група генерисана са t , односно $\langle t \rangle = \{\dots t^{-2}, t^{-1}, 1, t, \dots\}$ делује на прву хомологију. На наредној слици је као пример приказано дејство хомеоморфизма t^3 на неку криву α у X_∞ .

³Модул над прстеном је природна генерализација појма векторског простора над пољем



Прстен \mathbb{Z} природно дејствује на прву хомологију било којег простора, јер множење целим бројевима прави формалне линеарне комбинације елемената из $H_1(F)$. Користећи претходно описано дејство цикличне групе $\langle t \rangle$ можемо дефинисати дејство *групног прстена*⁴ $\mathbb{Z}\langle t \rangle$. Типичан елемент овог прстена је $\dots a_{-2}t^{-2} + a_{-1}t^{-1} + a_0 + a_1t + a_2t^2 \dots$ где су $a_i, i \in \mathbb{Z}$, цели бројеви. Другим речима, $\mathbb{Z}\langle t \rangle = \mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ је *прстен Лоранових полинома*, тј. полинома са целим коефицијентима и целобројним степенима независне променљиве. Све у свему, $H_1(F)$ је модул над прстеном $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$.

О наткривањима

Када говоримо о наткривањима $p : E \rightarrow B$ уопштено, претпостављамо да је базни простор B путно повезан и локално путно повезан, док је наткривајући простор E (којег такође зовемо *наткривањем*) путно повезан, док нека тврђења захтевају још по који технички услов. Међутим, с обзиром да у остатку рада имамо посла са повезаним многострукостима, сви технички услови ће бити задовољени и нећемо их помињати. Главна својства наткривања, осим да су локални хомеоморфизми и да се у сваку тачку базе B слика дискретни скуп тачака скупа E , јесу својства подизања пресликавања. Доказује се да се свака путања у бази на јединствени начин подиже у путању у наткривању ако фиксирамо њену почетну тачку. За хомотопију важи слично тврђење, а та претходна обједињује теорема о подизању пресликавања [12]:

Теорема. *Ако је $p : E \rightarrow B$ наткривање и $f : (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$, онда постоји јединствено подизање $\tilde{f} : (X, x_0) \rightarrow (E, e_0)$ (односно \tilde{f} такво да $p \circ \tilde{f} = f$) ако и само ако је $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0))$.*

Из својства подизања петљи произволна петља у базном простору се подиже у неку путању у наткривању. Међутим, та подигнута путања ће и сама бити петља само ако њена хомотопска класа припада групи $p_*(\pi_1(E, e_0))$. Ову подгрупу групе $\pi_1(B, b_0)$ називамо *групом наткривања*. Приметимо да је хомоморфизам p_* инјективан јер се петља у (B, b_0) , која је хомотопна константном пресликавању, подиже у петљу у (E, e_0) , хомотопну константном пресликавању. Због тога је група $\pi_1(E, e_0)$ изоморфна групи наткривања $p_*(\pi_1(E, e_0))$.

Лема. *Ако два наткривања $p_1 : E_1 \rightarrow B$ и $p_2 : E_2 \rightarrow B$ истог базног простора B имају исту групу наткривања, она су изоморфна у смислу да постоји хомеоморфизам $h : E_1 \rightarrow E_2$ такав да је $p_2 \circ h = p_1$.*

Доказ. Применићемо теорему о подизању пресликавања прво на наткривање E_2 и $p_1 : E_1 \rightarrow B$ у улози f -а из теореме. Услов за подизање је задовољен због претпоставке да су групе оба наткривања једна иста подгрупа од $\pi_1(B, b_0)$. Зато постоји подизање h тако да је $p_2 \circ h = p_1$, па треба показати да је h хомеоморфизам. Даље примењујемо теорему на наткривање E_1 и пресликавање $p_2 : E_2 \rightarrow B$, па постоји g такво да је $p_1 \circ g = p_2$. Одавде и из претходног је: $p_2 \circ h \circ g = p_2$. Ако сада по трећи пут применимо теорему на пресликавање $p_2 : E_2 \rightarrow B$, али када

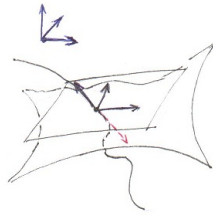
⁴За прстен R и групу G групни прстен RG је прстен који се састоји од формалних линеарних комбинација елемената групе са коефицијентима из прстена. Сабирање је формално, а множење је задато множењем операцијом у групи и множењем у прстену тако да буде дистрибутивно у односу на сабирање

је наткривање које посматрамо баш E_2 , видимо да је $h \circ g$ једно подизање пресликавања p_2 . С обзиром да је и идентичко пресликавање подизање истог пресликавања, из јединствености следи да је $h \circ g = 1$. Аналогно се добија $g \circ h = 1$, чиме смо доказали да је h тражени хомеоморфизам.

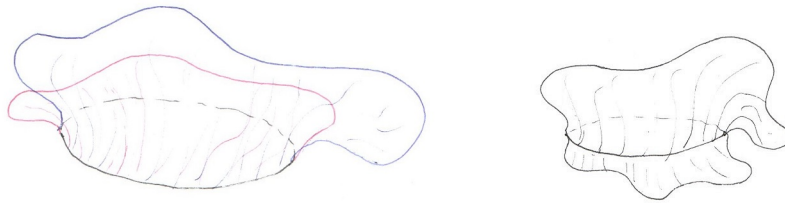
□

Да бисмо показали да су наткривања добијена од комплемента чвора сечењем по две различите Зајфертове површи хомеоморфни простори користићемо претходна општа тврђења о наткривањима, али и појам индекса пресека две многострукости. Индекс пресека формално можемо дефинисати за глатку петљу α и глатку површ F које се секу трансверзално. Ово значи да ни у једној тачки пресека крива није тангентна на површ, а ово се увек може постићи малом пертурбацијом тако да обе остану у својим хомотопским класама. Сва непрекидна пресликавања између две глатке многострукости се могу изотопијом превести у глатка пресликавања, па можемо претпоставити да су α и F глатке [14].

Задајмо оријентацију амбијентног простора односно комплемента линка X . С обзиром да је F по дефиницији оријентисана у свакој тачки пресека њена оријентација, заједно са оријентацијом петље α , даје неку оријентацију амбијента. Ако се ова оријентација слаже са оном задатом на почетку тој тачки пресека додељујемо $+1$, а у супротном -1 . На скици, заједно са оријентацијом површи, црна пуна стрелица одређује исту оријентацију као што је амбијентна, док црвена испрекидана одређује супротну.

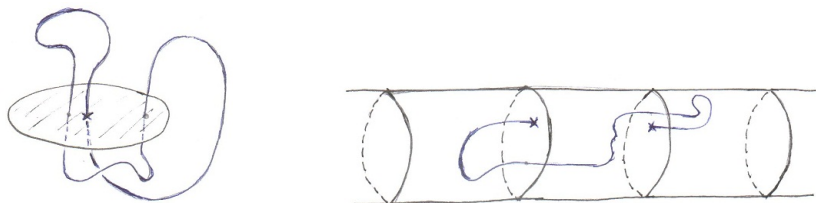


Како су и F и α компактне и глатке, а њихов пресек трансверзалан, то мора бити коначан скуп тачака. Индекс пресека сада се дефинише као збир $+1$ -ца и -1 -ца додељених свим пресечним тачкама на описан начин. Важно је да се овај број не мења ако изотопијом деформишемо нашу површ и криву, што се показује основним техникама диференцијалне топологије. Нама ће бити потребно само то да индекс пресека не зависи од тога коју смо Зајфертову површ одабрали, а ово ћемо показати на једноставнији начин.



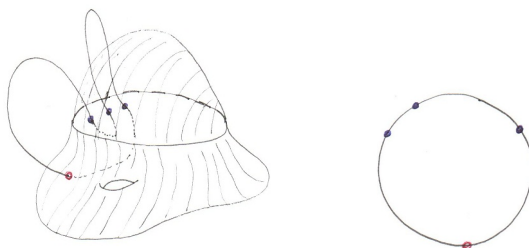
Теорема. Наткривање X_∞ не зависи од избора Зајфертове површи F . Такође, дејство аутоморфизма t на $H_1(X_\infty)$ независно је од изабране површи, тј. слаже се са изоморфизмом наткривања.

Доказ. По претходној лемји биће довољно да покажемо да су групе наткривања инваријантне, тј. не зависе од избора површи. Кључно је запажање да се група наткривања $X_\infty \rightarrow X$ састоји из оних петљи у X којима је индекс пресека са F једнак нули. Ово следи из тога што сваки пут када петља α пресече F , путања у наткривању пређе из једне копије компонента чвора у суседну.



Две Зајфертове површи F_1 и F_2 које граниче исти линк у унији дају једну затворену оријентабилну површ S . Индекс пресека петље α и површи S је збир индекса пресека α са Зајфертовим површима понаособ. Међутим, овај број је 0 и један начин да то видимо је следећи: индекс пресека рачуна се као збир неких $+1$ и -1 у тачкама где се површ и крива секу, и ово важи без обзира на амбијент; како је $X \subset \mathbb{S}^3$, ако комплемент чвора оријентишемо као подскуп од \mathbb{S}^3 , видимо да је индекс пресека исти било да је амбијентна многострукост X или \mathbb{S}^3 . Унутар \mathbb{S}^3 лако можемо раздвојити F и α изотопијом, па из чињенице да се индекс пресека не мења при изотопији можемо закључити да је и на почетку био једнак 0.

Међутим, у нашој ситуацији, служећи се једнодимензионалношћу криве α , индекс пресека можемо добити и без позивања на инваријантност при изотопији, и то посматрањем шта се дешава са узастопним пресецима криве са површи. Ако посматрамо петљу α као слику кружнице $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$ можемо означити тачке на \mathbb{S}^1 које се сликају у тачке пресека.



Површ S је глатка и оријентисана хиперповрш у \mathbb{S}^3 , па дели амбијент на два скупа A и B чија је заједничка граница површ S , а унутрашњости су им дисјунктне. Ово је садржај Жордан-Брауерове теореме која се елегантно доказује за компактне хиперповрши које су нам овде од интереса [8]. Ако одаберемо једну оријентацију за S , из доказа се види и да су нормале које одређују ту оријентацију усмерене ка унутрашњости само једног од скупова A и B . Путања која спаја две узастопне пресечне тачке не сече S својом унутрашњошћу, па се мора цела наћи у једном од два скупа на која S дели амбијент, рецимо A . Знак који додељујемо пресеку зависи само од тога да ли је смер криве α исти или различит од смера нормале одабране оријентацијом. Како α у једној тачки улази, а у другој излази из A , угао који заклапа са нормалама у тим тачкама је у једном случају оштар а у другом туп, па одавде следи да су узастопни пресеци петље α са S различитог знака.

Показавши да наткривање не зависи од Зајфертове површи, остаје да се види зашто дејство са t не зависи од површи. Тиме бисмо показали да се и дејство целог модула $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ на $H_1(X_\infty)$ не мења при промени површи, тј. да је $H_1(X_\infty)$ посматран као $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ -модул, инваријанта за линк.

Нека је $x \in X_\infty$ и $h : X_\infty \rightarrow X'_\infty$ изоморфизам наткривања, односно важи $p' \circ h = p$, при чему је $p' : X'_\infty \rightarrow X$ наткривање добијено од неке друге Зајфертове површи F' . Требало би показати да је $t \circ h(x) = h \circ t(x)$. Тачку $t(x)$ можемо са x спојити путањом γ у X_∞ , чија ће слика у базном простору X бити петља $p \circ \gamma$. Имамо $p' \circ h \circ \gamma = p \circ \gamma$, па је $h \circ \gamma$ подизање петље $p \circ \gamma$ при наткривању $p' : X'_\infty \rightarrow X$. При овом подизању, почетна тачка $h(x)$ такође завршава један корак удесно јер смо у претходном делу доказа објаснили да крајња тачка зависи само од индекса пресека, а овај број само од линка. Дакле, транслирана тачка $t \circ h(x)$ је управо крајња тачка подизања при p' тачке $p \circ t(x)$. Међутим, $p \circ t(x) = p' \circ h \circ t(x)$, па је $t \circ h(x)$ исто што и тачка $h \circ t(x)$.

□

Напомена. Означени пресек петље α са F је заправо коефицијент уланчавања $lk(\alpha, L)$. Овај појам први пут се појављује у форми двоструког интеграла у Гаусовом дневнику и прича која га прати има позадину у електромагнетизму, а може се наћи у чланку [15]. Ту је представљено још неколико модерних дефиниција коефицијента уланчавања са доказима еквивалентности.

Модули и презентационе матрице

Покажимо како се модул може представити матрично и како то представљање зависи од избора које смо направили. Сетимо се да модул M над комутативним прстеном R задовољава исте аксиоме као векторски простор над пољем, али коефицијенти немају увек инверзе. Модул зовемо *слободним* ако има базу, тј. сваки елемент се на јединствен начин може представити као линеарна комбинација неког одабраног скупа елемената. Коначном презентацијом *коначно генерисаног* модула M зовемо тачан низ:

$$F \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0$$

при чему су E и F слободни модули. Заједно са овим слободним модулима, тачност овог низа заправо нам даје све потребне информације о генераторима модула M и релацијама међу овим генераторима. Најпре, ϕ је сурјективно, па слике базних елемената из E генеришу M . Језгро хомоморфизма ϕ представља релације међу овим генераторима за M , с обзиром да је $M \cong E/\ker(\phi)$. Међутим, из тачности низа на месту E , језгро за ϕ је слика од F , па база модула F генерише све елементе који се анулирају при пресликавању ϕ . У слици од ϕ то су релације међу генераторима што нам говори управо да елементи модула E представљају генераторе, а F релације у модулу M . Пресликавање α је између два модула са базом па може бити представљено матрично као и у случају векторских простора. Као и код линеарних пресликавања, матрице добијене на овај начин биће у некој вези и о томе нам говори следећа лема.

Лема. За модул M се сваке две презентационе матрице A и A_1 разликују до на наредних неколико потеза и њихове инверзе:

- i) пермутација колоне и врста
- ii) замена матрице A матрицом $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- iii) додавање колоне или врсте попуњене нулама
- iv) додавање умношка једне колоне другој и аналогно за врсте .

Доказ. Претпоставимо да матрице A и A_1 одговарају неким двама презентационим дијаграмима модула M . Конструисаћемо прво пресликавања β и γ између ових дијаграма која ће нам помоћи да успоставимо везу између пресликавања α и α_1 , као и између њихових презентационих матрица.

$$\begin{array}{ccccccc} F & \xrightarrow{\alpha} & E & \xrightarrow{\phi} & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \beta & & \downarrow \mathbb{1} & & \\ F_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & E_1 & \xrightarrow{\phi_1} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Пресликавање β дефинисемо на бази простора E и проширујемо до хомоморфизма модула: како је ϕ_1 сурјекција, за $e \in E$ скуп $\phi_1^{-1}(\phi(e))$ је непразан, па можемо $\beta(e)$ дефинисати тако да буде неки од елемената у њему, и ово ће омогућити да десни квадрат комутира. Слично, пресликавање γ тражимо тако да и леви квадрат буде комутативан, тј. да $\alpha_1 \circ \gamma = \beta \circ \alpha$. Ово можемо постићи на аналоган начин као и код β ако је слика пресликавања $\beta \circ \alpha$ садржана у слици од α_1 . Из тачности горњег низа и комутативности десног квадрата је $\phi_1 \circ \beta \circ \alpha = \mathbb{1} \circ \phi \circ \alpha = 0$, па је слика од $\beta \circ \alpha$ садржана у језгру од ϕ_1 . Тачност доњег низа каже да је ово језгро управо слика пресликавања α_1 , па заиста можемо дефинисати γ тако да и леви квадрат комутира, односно да је $\alpha_1 \circ \gamma = \beta \circ \alpha$.

На исти начин, заменивши улоге горњег и доњег низа, конструишу се пресликавања β_1 и γ_1 таква да $\alpha \circ \gamma_1 = \beta_1 \circ \alpha_1$. Линеарна алгебра нам говори да матрице које представљају конструисана пресликавања у раније одабраним базама задовољавају $A_1 C = B A$ и $A C_1 = B_1 A_1$. У наредним редовима служићемо се овим једнакостима и потезима i)-iv) да бисмо показали еквивалентност матрица A и A_1 . Пре тога приметимо да нам потез iv) омогућава да и блоковски множимо колоне и врсте. Тако је на пример: $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B_1 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, где смо првој блок-врсти $(A \ 0)$ додали другу $(0 \ I)$ помножену са B_1 .

$$A \sim \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B_1 \\ 0 & I \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B_1 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B_1 & B_1 A_1 \\ 0 & I & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B_1 & A C_1 \\ 0 & I & A_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B_1 & 0 \\ 0 & I & A_1 \end{pmatrix}$$

На овај начин се матрица A_1 појавила у низу еквиваленција, али се треба ослободити B_1 . У томе ће нам помоћи комбинација пресликавања β и β_1 и дијаграми који их дају. Пресликавање $\beta_1 \circ \beta$ је хомоморфизам модула E у самог себе. Из комутативности десног квадрата у дијаграму за β_1 имамо $\phi \circ \beta_1 = \mathbb{1} \circ \phi_1$, па је $\phi \circ \beta_1 \circ \beta = \mathbb{1} \circ \phi_1 \circ \beta = \phi$, сада из дијаграма за β . Све у свему, $\phi \circ \beta_1 \circ \beta = \phi$, односно $\phi \circ (\beta_1 \circ \beta - \mathbb{1}_E) = 0$, тј. језгро од ϕ садржи слику од $\beta_1 \circ \beta - \mathbb{1}_E$. Из тачности низа је $\ker(\phi) = \text{im}(\alpha)$, па ово значи да је слика пресликавања $\beta_1 \circ \beta - \mathbb{1}_E$ садржана у слици од α . Због претходног, и због тога што E има базу, можемо конструисати ново пресликавање $\delta : E \rightarrow F$ које ће задовољавати $\beta_1 \circ \beta - \mathbb{1}_E = \alpha \circ \delta$. Ако је матрица пресликавања δ означена са D , важи $B_1 B - I = A D$. Сада је:

$$\begin{pmatrix} A & B_1 & 0 \\ 0 & I & A_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B_1 & 0 & B_1 B \\ 0 & I & A_1 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B_1 & 0 & I+AD \\ 0 & I & A_1 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B_1 & 0 & I \\ 0 & I & A_1 & B \end{pmatrix}$$

Пермутацијом колона и врста добијамо: $\begin{pmatrix} A & B_1 & 0 & I \\ 0 & I & A_1 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A_1 & B & 0 & I \\ 0 & I & A & B_1 \end{pmatrix}$, при чему се матрица на десној страни може добити применом целе претходне процедуре кренувши од A_1 уместо A . Зато коначно закључујемо да је $A \sim A_1$.

□

Пошто знамо да је модул инваријантан и да презентациона матрица врло правилно зависи од избора које смо направили, можемо из матрице извести неке нумеричке вредности које су инваријантне у односу на промену матрица. Овде се може рећи да је избор природан, јер смо већ упознати са инваријантима матрица које се не мењају при пермутацији и линеарној комбинацији колона и врста, што чини потезе i) и iv). То су *минори матрице*, односно детерминанте квадратних матрица добијених уклањањем неког броја врста и колона. Прецизније, за $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модул $H_1(X_\infty)$ његовим елементарним идеалом називамо идеал од $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ генерисан свим минорима фиксираним димензије $k \times k$. Искоментарисали смо зашто се при потезима i) и iv) минори матрице мењају највише до на знак. Потез ii) проширује матрицу идентитетом, па је детерминанта сваког новог минора детерминанта неког старог помножена са 1, док потез iv) може само да дода неке 0-миноре. У сваком случају, елементарни идеали се не мењају, па је сваки од њих инваријантан за линк. Специјално, минор највеће димензије сам генерише један елементарни идеал, и у случају када је презентациона матрица квадратна, то је управо њена детерминанта.

Сада, када смо показали тополошку инваријантност овако конструисане детерминанте, остаје да израчунамо конкретну презентациону матрицу за $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модул $H_1(X_\infty)$.

Теорема. *Једна презентациона матрица $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модула $H_1(X_\infty)$ је $A - tA^T$.*

Доказ. Простор X_∞ састављен је од пребројиво много копија простора Y налепљених у низ, па можемо наслутити да је због правилности конструкције могуће изразити однос између хомологија ових простора. Поделићемо простор X_∞ на два дела и употребити М-В низ у коме ће се презентациони тачан низ за $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модул $H_1(X_\infty)$ јавити као један део. Пажљивом анализом тога како се у Мајер-Вијеторисовом низу сликају генератори хомологија које знамо, добићемо и конкретну презентациону матрицу.

Представимо простор $X_\infty = \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} Y_i$ као унију *парног* $Y_P = \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} Y_{2i}$ и *непарног* простора $Y_N = \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} Y_{2i+1}$. Пресек уочених простора је пребројива унија Зајфертових површи по којима смо лепили $Y_P \cap Y_N = \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} F_i$. Мајер-Вијеторисов низ настаје применом цик-цак леме на кратак тачан низ ланчастих комплекса:

$$0 \longrightarrow C_*(Y_P \cap Y_N) \xrightarrow{\alpha} C_*(Y_P) \oplus C_*(Y_N) \xrightarrow{\beta} C_*(Y_P \cup Y_N) \longrightarrow 0$$

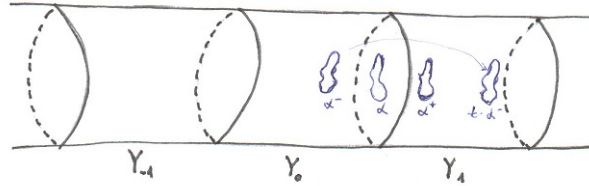
при чему је $X_\infty = Y_P \cup Y_N$, па је последњи члан низа $C_*(X_\infty)$. Сви ланчasti комплекси су и $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модули, иако $C_*(Y_P)$ и $C_*(Y_N)$ појединачно то нису. Наиме, множење елементом t прстена $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ елементе из $C_n(Y_P)$ шаље у $C_n(Y_N)$ и обрнуто, али све остаје у групи $C_n(Y_P) \oplus C_n(Y_N)$.

Пресликавања између комплекса у низу иста су као и у стандардној ситуацији када примењујемо М-В низ: $\alpha : C_*(Y_P \cap Y_N) \rightarrow C_*(Y_P) \oplus C_*(Y_N)$ дефинисано је са $\alpha(c) = (c, -c)$ за цикл c произвољне димензије, док је $\beta : C_*(Y_P) \oplus C_*(Y_N) \rightarrow C_*(Y_P \cup Y_N)$ дато са $\beta(a, b) = a + b$ за произвољне циклове a и b .

Део М-В дугог тачног низа који нам је од интереса је:

$$\begin{array}{c} H_1(Y_P \cap Y_N) \xrightarrow{\alpha_*} H_1(Y_P) \oplus H_1(Y_N) \xrightarrow{\beta_*} H_1(X_\infty) \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ H_0(Y_P \cap Y_N) \xrightarrow{\alpha_*} H_0(Y_P) \oplus H_0(Y_N) \xrightarrow{\beta_*} H_0(X_\infty) \end{array}$$

Испитајмо прво нулте хомолошке групе из доњег дела слике. $Y_P \cap Y_N$ је пребројива унија повезаних површи F , па група $H_0(Y_P \cap Y_N)$ има по један генератор за сваку копију површи. Ако је изабрана тачка $x \in F_0$ као генератор, група $H_0(Y_P \cap Y_N)$ је генерисана скупом тачака $\{\dots t^{-2}, t^{-1}x, x, tx, \dots\}$. Међутим, као $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модул, ово је модул са само једним генератором $x \in H_0(Y_0 \cap Y_1)$ на пример, па је $H_0(Y_P \cap Y_N) \cong \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ где је \cong изоморфизам $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модула, односно ово је тривијалан $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модул. Слично, обе групе $H_0(Y_P)$ и $H_0(Y_N)$ су генерисане пребројивим скупом тачака, али можемо изабрати генератор $(x, 0)$ за $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модул $H_0(Y_P) \oplus H_0(Y_N)$, при чему смо узели x , већ изабран генератор модула $H_0(Y_P \cap Y_N)$. Хомеоморфизам t , односно индуковано пресликавање у хомологији делује на $H_*(Y_P) \oplus H_*(Y_N)$ на следећи начин: $t_*(a, b) = (b, a)$, с обзиром да генераторе хомологије транслира за један корак удесно.



У нултој хомологији имамо $\alpha_*(x) = (x, -x) = (x, 0) - (0, x)$, па како је $t \cdot (x, 0) = (0, x)$, добијамо $\alpha_*(x) = 1 \cdot (x, 0) - t \cdot (x, 0) = (1 - t) \cdot (x, 0)$.

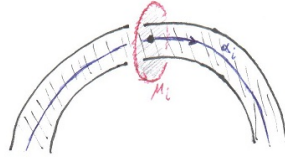
Видимо да је α на модулу $H_0(Y_P \cap Y_N)$ инјективно, па је β на $H_1(Y_P) \oplus H_1(Y_N)$ сурјективно, што нам оставља тачан низ $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -модула:

$$H_1(Y_P \cap Y_N) \xrightarrow{\alpha_*} H_1(Y_P) \oplus H_1(Y_N) \xrightarrow{\beta_*} H_1(X_\infty) \longrightarrow 0$$

Дакле, матрица пресликавања α_* биће презентациона матрица коју тражимо. Као и у случају нултих хомологија, $H_1(Y_P \cap Y_N)$ је директан збир пребројиво много копија $H_1(F)$, па је један скуп генератора модула $H_1(Y_P \cap Y_N)$ скуп $\{1 \cdot \alpha_i, i \in \{1, 2, \dots, k\}\}$, где су са α_i означени генератори $H_1(Y_0 \cap Y_1)$. Модул $H_1(Y_P) \oplus H_1(Y_N)$ је директан збир пребројиво много модула $H_1(Y)$ који су изоморфни $H_1(\mathbb{S}^3 \setminus F)$.

Хомологију комплемента Зајфертове површи $\mathbb{S}^3 \setminus F$ није тешко израчунати, поново уз помоћ Мајер-Вијеторисовог низа, и она је изоморфна хомологији саме Зајфертове површи. Генеришу

је меридијани μ_i . Свака од ових кривих добијена је као граница малог диска садржаног у цевастој околини генератора α_i , при чему диск сече α_i само у једној тачки, и μ_i је оријентисана тако да је $lk(\alpha_i, \mu_i) = +1$. За $j \neq i$ је $lk(\alpha_i, \mu_j) = 0$, што лако видимо, јер се μ_i може потпуно раздвојити од свих генератора сем α_i . Детаљи се могу наћи у књизи *An Introduction to Knot Theory* аутора Рејмонда Ликориша која је коришћена и за друге делове доказа инваријантности Александоровог полинома [7].



Слика генератора $1 \cdot \alpha_i$ од $H_1(Y_P \cap Y_N)$ при пресликавању α_* је $1 \cdot (\alpha_i, -\alpha_i) \in H_1(Y_P) \oplus H_1(Y_N)$. Кључно је разумети да је $(\alpha_i, 0) \in H_1(Y_P) \oplus H_1(Y_N)$ у ствари исто што и $(\alpha_i^-, 0)$, елемент добијен од под-криве криве α_i изотопијом у правцу нормале усмерене ка $H_1(Y_0)$. Аналогно је $(0, \alpha_i) = (0, \alpha_i^+) \in H_1(Y_P) \oplus H_1(Y_N)$. Раније смо објаснили да је $(0, \alpha_i^+) = t \cdot (\alpha_i^+, 0)$, па имамо $\alpha_*(1 \cdot \alpha_i) = (\alpha_i, -\alpha_i) = (\alpha_i, 0) - (0, \alpha_i) = (\alpha_i^-, 0) - t \cdot (\alpha_i^+, 0)$. Сада нам недостаје само још да видимо који су ово елементи у $H_1(Y)$, тј. који су коефицијенти уз елементе базе $\{\mu_i, i \in \{1, 2, \dots, k\}\}$ овог модула.

Оно што ће нам бити потребно за крај је хомолошка дефиниција коефицијента уланчавања кривих γ и δ у \mathbb{S}^3 [7]. Прва хомологија комплемента криве у \mathbb{S}^3 је изоморфна \mathbb{Z} , са природним генератором меридијаном криве, и ово поново следи из Мајер-Вијеторисовог низа. Зато има смисла говорити о броју $[\gamma]$ који у ствари означава умножак класе $[\mu_\delta] \in H_1(\mathbb{S}^3 \setminus \delta)$. За коефицијент уланчавања сада важи $lk(\gamma, \delta) = [\gamma] \in H_1(\mathbb{S}^3 \setminus \delta) = [\delta] \in H_1(\mathbb{S}^3) \setminus \gamma$.

Нека је сада $[\alpha_i^-] = \sum_{j \in \{1, 2, \dots, k\}} \lambda_j [\mu_j] \in H_1(\mathbb{S}^3 \setminus F)$ за неке бројеве $\lambda_j \in \mathbb{Z}$. Ако погледамо шта је коефицијент уланчавања са неким α_j за леву и десну страну претходне једнакости, добијамо $lk(\alpha_i^-, \alpha_j) = \sum_j \lambda_j lk([\mu_j], \alpha_j)$. Сада је на левој страни управо члан Зајфертове матрице A_{ij} , док је због тога што су μ_j меридијани $lk(\mu_j, \alpha_j) = \delta_{i,j}$, што је Кронекеров симбол. Дакле, коефицијент $\lambda_j = A_{ij}$, па је $[\alpha_i^-] = \sum_j A_{ij} [\mu_j]$. На потпуно исти начин добијамо да је $[\alpha_i^+] = \sum_j A_{ji} [\mu_j] = \sum_j A_{ij}^T [\mu_j]$. Најзад:

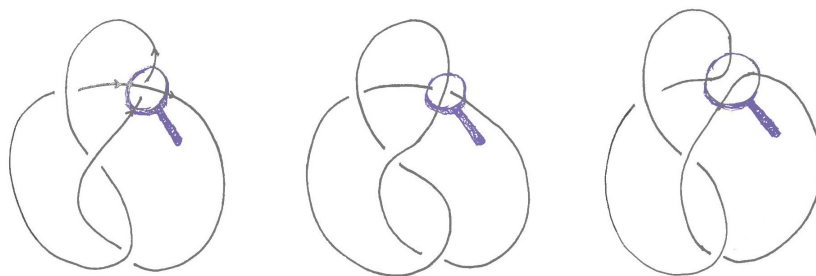
$$\alpha_*(1 \cdot \alpha_i) = (\alpha_i, -\alpha_i) = (\alpha_i, 0) - (0, \alpha_i) = (\alpha_i^-, 0) - t \cdot (\alpha_i^+, 0) = \sum_j (A_{ij} - t \cdot A_{ij}^T) [\mu_j]$$

Закључујемо да је у бази $\{[\alpha_i], i \in \{1, 2, \dots, k\}\}$ модула $H_1(Y_P \cap Y_N)$ и бази $\{[\mu_j], j \in \{1, 2, \dots, k\}\}$ модула $H_1(Y_P) \oplus H_1(Y_N)$ пресликавање α_* дато матрицом $A - tA^T$, па је то и презентациона матрица модула $H_1(X_\infty)$.

□

Скејн релација

Скејн релација повезује Александеров полином за три оријентисана линка добијена варијацијама фиксираниг укрштања. Наиме, могуће је изразити полином за линк L преко полинома за чвор са једним укрштањем мање и полинома за чвор код којег је једно под-укрштање замењено над-укрштањем. На слици су за случај осмице приказана сва три дијаграма са уоченим укрштањем:



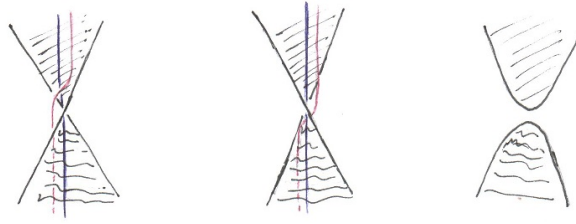
Да бисмо уште говорили о сабирању полинома не можемо их имати дефинисане само до на степен независне променљиве. Међутим, нама је овде важно показати комбинаторну моћ скејн релације док се детаљи тога зашто се степен фиксира тако да је $\Delta(t) = \det(t^{\frac{1}{2}}A - t^{-\frac{1}{2}}A^T)$ могу наћи у [7]. Када као аргумент у неколико Александерових полинома пишемо варијације једног укрштања мислимо на вредности полинома у линковима добијеним изменом само тог једног дела. Скејн релација гласи:

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \times \\ \searrow \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \times \end{array}\right) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) \cdot \Delta\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right)$$

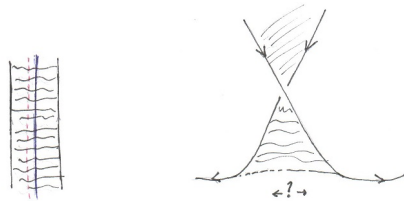
Теорема. *Александеров полином задовољава скејн релацију.*

Доказ. Да бисмо ово показали користећемо слободу у избору Зајфертове површи и њених генератора прве хомолошке групе. Изабраћемо три веома сличне површи за три линка која су део скејн релације, и то тако да ће се површи разликовати само у једној траци. Зајфертовим алгоритмом описали смо како линку додељујемо површ постављајући дискове на неколико нивоа и спајајући их уврнутим тракама тако да остваримо тај линк као границу. За три линка у скејн релацији бирамо три Зајфертове површи које се разликују само на месту укрштања на које се односи релација, а за генераторе $H_1(F)$ узимамо такве да тачно један пролази дуж траке коју лепимо на то укрштање. На тај начин ћемо лако исконтролисати промену Зајфертових матрица и њихових детерминанти.

За три линка у скејн релацији имамо следећа три облика траке, генератора који ту пролази и његових над-кривих у зависности од површи:



На последњој површи један генератор нестаје, иако на први поглед може деловати могућа ситуација где је трака постављена паралелно. То није могуће јер би значило да су обе ивице траке усмерене на горе или на доле што се коси са оријентацијом циклуса насталог у Зајфертовом алгоритму:



Када смо овако изабрали генераторе Зајфертових површи, јасно је да се само променом смера увртања траке ниједан други члан Зајфертове матрице, сем $lk(\alpha_i, \alpha_i^+)$, не мења с обзиром да се ван ових локалних слика ниједан део површи није променио. Прецизније, Зајфертове матрице A и B , које одговарају левој страни скејн релације, имају све исте уносе сем што се елемент са индексом ii смањило, односно повећао за 1. Због тога су одговарајуће презентационе матрице $P_A = t^{\frac{1}{2}}A - t^{-\frac{1}{2}}A^T$ и $P_B = t^{\frac{1}{2}}B - t^{-\frac{1}{2}}B^T$ исте, сем за елемент са индексом ii где се разликују за $t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}$. Из вишелинеарности детерминанте можемо раздвојити колону у којој се налази та разлика на:

$$\begin{pmatrix} P_{1i} \\ \vdots \\ P_{ii} + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) \\ \vdots \\ P_{ki} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1i} + 0 \\ \vdots \\ P_{ii} + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) \\ \vdots \\ P_{ki} + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1i} \\ \vdots \\ P_{ii} \\ \vdots \\ P_{ki} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Уз развијање детерминанте по колони са свим нулама и $t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}$ на месту ii видимо да је разлика детерминанти презентационих матрица, односно разлика Александерових полинома управо $(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) \cdot \det(P_{A^i})$, где је матрица A^i добијена брисањем i -те врсте и i -те колоне матрице A . Ово смо и желели да добијемо јер је последња детерминанта Александеров полином за линк коме је Зајфертова површ изгубила генератор α_i .

□

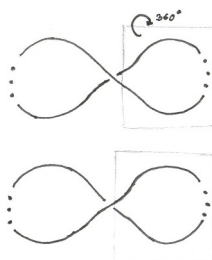
Неке особине

Теорема. За линк са бар две независне компоненте Александеров полином идентички је једнак нули.

Доказ. Претпоставка је да се линк састоји из две компоненте које се могу изотопијом потпуно раздвојити, односно произвољно удаљити. Нека је то линк L са две неповезане компоненте L_1 и L_2 . Применићемо скејн релацију на три линка: почетни $L = L_1 \sqcup L_2$, и два добијена спајањем компоненти L_1 и L_2 над-укрштањем и под-укрштањем као на слици.



Међутим, оба линка добијена спајањем помоћу укрштања представљају заправо исти линк, јер један можемо добити од другог ротацијом само једне компоненте за пун угао.



Скејн релација сада каже да је Александеров полином за L , помножен са неким ненула полиномом, разлика два иста полинома, односно нула. Овим смо показали и специјално да је за унију неколико независних кружница Александеров полином нула.

□

Највеће добро скејн релације је могућност да се Александеров полином експлицитно израчуна комбинаторно, односно само помоћу манипулација дијаграма. Ово није јасно одмах из дефиниције, јер се од почетног линка добија веза са нова два, једним који је једноставнији јер има укрштање мање, и другим који има једнак број укрштања. Међутим, можемо наћи процедуру помоћу које рачунамо Александеров полином користећи скејн релацију неколико пута.

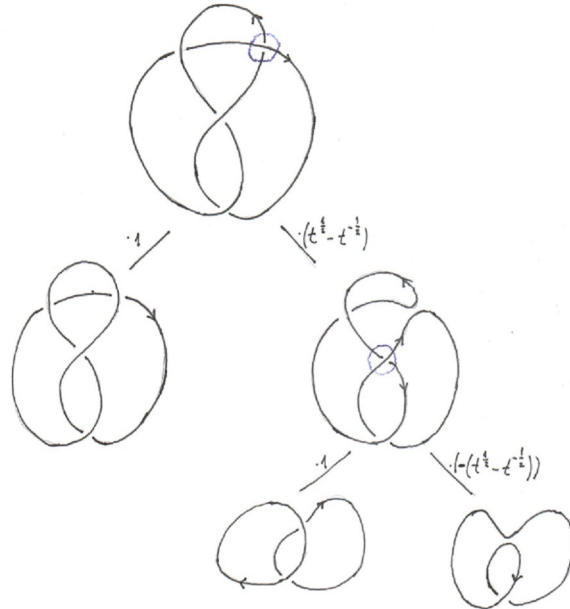
Можемо користити индукцију по броју укрштања на дијаграму линка. База индукције је случај када је број укрштања 0, и имамо је из претходно доказаног јер тада линк или можемо раздвојити на независне компоненте, па је Александеров полином нула, или је нечвор, па је Александеров полином 1.

Ако бисмо у дијаграму дозволили мењање над-укрштања под-укрштањима, и обрнуто, било би могуће доћи од произвољног дијаграма до таквог који је унија неколико независних кружница, односно представља тривијалан линк. Ово видимо тако што на дијаграму од којег полазимо изаберемо једну компоненту линка, кренемо дуж ње у неком смеру и покушамо да

је поставимо изнад свих осталих компоненти. Идући дуж изабране компоненте и наишавши на над-укрштање не радимо ништа, док под-укрштање променимо у над-укрштање, чиме смо на крају процеса ту компоненту поставили изнад остатка линка. На исти начин можемо поступити и са осталим компонентама добивши тако неколико независних кружница.

Ако имамо дијаграм са k компоненти, када знамо да можемо променом одређених укрштања доћи до раздвојеног линка можемо применити скејн релацију најпре на једно од тих укрштања. У релацији фигуришу још два дијаграма, и као што смо напоменули, један има једно укрштање мање од почетног дијаграма, а други има замењено укрштање, али тако да је за један корак ближи тривијалном дијаграму. По индуктивној претпоставци, за линк са $k - 1$ -им укрштањем можемо израчунати Александеров полином. Узастопном променом укрштања стижемо до дијаграма тривијалног линка којем је из почетног дела доказа Александеров полином 0 или 1.

Прикажимо ову процедуру на примеру осмице који смо обећали у уводу. Рачун спроводимо вршећи скејн релације на назначеним местима у дијаграмима на наредној слици:



Користимо чињеницу да је Александеров полином за нечвор 1, а за две неуланчане кружнице по претходној теорему 0, па пратећи релације имамо:

$$\Delta(t) = 1 \cdot 1 + (t^{1/2} + t^{-1/2}) \cdot (1 \cdot 0 - (t^{1/2} + t^{-1/2})) \cdot 1 = -(t^{1/2} + t^{-1/2})^2 + 1 = -t^{-1} + 3 - t$$

Нормирајући резултат тако да имамо само позитивне степене независне променљиве и да је слободан члан различит од нуле, добијамо да је Александеров полином за осмицу $t^2 - 3 + 1$, што се разликује од тролита и нечвора, па смо најзад показали да је ово заиста нетривијалан чвор.

Александров полином није савршена инваријанта, односно неким чворовима који нису еквивалентни додељује исте вредности. Постоје чак и примери нетривијалних чворова који имају тривијалан Александров полином, па их ова инваријанта не разликује од нечвора. Један од најједноставнијих таквих примера је *Киношита-Терасака чвор*:



Теорема. Александров полином је исти за чвор K и његову слику у огледалу K^* .

Доказ. За овај доказ нам заправо није потребно ништа више од дефиниција. Слика у огледалу чвора K је само слика од K при рефлексiji у односу на неку раван на коју се чвор нормално пројектује, у смислу да има правилан дијаграм описан у уводу. Ако је за чвор K уочена Зајфертова површ F можемо за слику у огледалу K^* узети Зајфертову површ F^* , која је само слика у огледалу површи F . Генератори прве хомологије површи F дају нам елементе Зајфертове матрице за K , док Зајфертову матрицу за K^* можемо добити као слике при рефлексiji ових генератора. Ако за раван дијаграма узмемо раван рефлексije видимо да свако под-укрштање постаје над-укрштање посматрано са друге стране равни, па тако и коефицијент уланчавања $lk(\alpha_i, \alpha_j^\pm)$ само мења знак при рефлексiji, јер све $+1$ -це и -1 -це додељене укрштањима на дијаграму мењају знак. Све у свему, ако смо имали Зајфертову матрицу A за K , једна Зајфертова матрица за K^* је $-A$. Одатле је Александров полином за слику у огледалу $\delta_{K^*}(t) = \det((-A) - t(-A)^T) = \pm \det(A - tA^T)$, па како је Александров полином дефинисан до на умножак са \pm целобројним степеном променљиве t , добијамо да је једнак Александровом полиному за K .

□

Као што смо већ коментарисали у уводу, слике у огледалу могу бити заиста различити чворови и тако је већ и у случају левог и десног тролиста. Изузетно важна полиномска инваријанта за чворове која разликује тролисте је *Џонсов полином*. Он је добијен вештим покушајем да се искористи тополошка инваријантност коефицијента уланчавања код линкова да би се направила инваријанта за чворове. Џонсов полином, као и једна модерна инваријанта - Кованова хомологија, објављена на почетку трећег миленијума, описани су у прегледном раду Дрор Бар Натана [2].

Нови миленијум

Почетком трећег миленијума родила се нова велика област истраживања у ниско-димензионој топологији која је и тренутно актуелна. То су *Хеегаард-Флоер хомолошке теорије* које комбинују технике класичне ниско-димензионе топологије и Флоерове хомологије[13].

Први део се огледа у конструкцији која полази од класичног резултата о тродимензионим многострукостима - Хегаардовом разлагању. Наиме, свака затворена тродимензиона многострукост може се разложити на два идентична *тела са ручкама* која су некако налепљена по граници, некој затвореној површи. Кренувши од Хегаардовога дијаграма који је упутство за лепљење двају тела, конструише се једна високо димензиона многострукост погодна за други део, Флоерову теорију. Она са друге стране долази из дубоких геометријских резултата о псеудохомоморфним кривама и њиховим модулским просторима. Коначност димензије ових простора и једна врста компактности дају градивне елементе за дефиницију диференцијала и тиме заснивање хомолошке теорије[3].

У случају чворова, релативна верзија ових инваријанти за три-многострукости даје фантастичне резултате до сада неприступачне елементарним средствима. Чвору се додељује цео дводимензиони ланчасти комплекс за чију се хомологију доказује да је инваријанта за чвор. Веза са Александеровим полиномом била је неочекивана јер су ове теорије дошле из неких сасвим другачијих светова. Међутим, испоставило се да је Александеров полином на одређен начин *Ојлерова карактеристика* Хегаард-Флоер хомологије чвора.

Када је снага резултата у питању, доказано је да Хегаард-Флоер хомологија детектује нечвор што је до скоро био изузетно тежак проблем. То практично значи да израчунавши ту хомологију можемо са сигурношћу рећи да ли је конкретан чвор упетљан или не. И то не важи само за нечвор, показано је да ова инваријанта разликује сва четири мала чвора од свих осталих, а охрабрује је и то што је комбинаторно израчуњљива, за шта већ постоји више различитих конструкција[9].

Међутим, није још увек јасно да ли је ова хомологија геометријска у смислу да долази као стандардна хомологија неких zgodних простора. Такође, сасвим је могуће да је много снажнија инваријанта него што је то могуће доказати тренутним приступима. Један од личних циљева аутора је наћи начин да се измери и разуме колико су снажне овакве инваријанте, и једна могућа идеја била би посматрање на неки начин просечног скуша чворова, наспрам стандардно изучаваних класа.

Литература

- [1] J. W. Alexander. “Topological invariants of knots and links”. в: *Transactions of the American Mathematical Society* 30.2 (1928), с. 275–306. DOI: 10.2307/1989123.
- [2] Dror Bar-Natan. *On Khovanov’s categorification of the Jones polynomial*. URL: <https://arxiv.org/pdf/math/0201043.pdf>.
- [3] Dietmar Salamon Dusa McDuff. *J-holomorphic curves and Quantum homology*. URL: http://barnard.edu/sites/default/files/inline/jholism_0.pdf.
- [4] Roger Fenn. *Tackling the Trefoils*. URL: <https://arxiv.org/pdf/1110.0582.pdf>.
- [5] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. URL: <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>.
- [6] Richard Hepworth. *Seifert surfaces and Seifert’s algorithm*. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=sYRv0AWl7Ms>.
- [7] W.B.Raymond Lickorish. *An Introduction to Knot Theory*. Springer, 1997. ISBN: 0-387-98254-X.
- [8] Elon L. Lima. “The Jordan-Brouwer Separation Theorem for Smooth Hypersurfaces”. в: *The American Mathematical Monthly* 95.1 (1988), с. 39–42. DOI: <http://www.jstor.org/stable/2323445>.
- [9] Ciprian Manolescu. *An introduction to knot Floer homology*. URL: <https://arxiv.org/abs/1401.7107>.
- [10] Günter M. Ziegler Martin Andler. *Proofs from the book, 5th edition*. Springer, 2014. ISBN: 978-3-662-44205-0.
- [11] John Milnor. *Topology From The Differentiable Viewpoint*. URL: <http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/milnortop.pdf>.
- [12] Siniša Vrećica Milosav Marjanović. *Topologija*. Zavod za udžbenike, 2012. ISBN: 978-86-17-17791-9.
- [13] Zoltan Szabo Peter Ozsvath. *An introduction to Heegaard Floer homology*. URL: <http://math.mit.edu/~petero/Introduction.pdf>.
- [14] Loring W. Tu Raoul Bott. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Graduate texts in mathematics 82. Springer, 1982. ISBN: 0-387-90613-4.
- [15] Bernardo Nipoti Renzo L. Ricca. *Gauss’ linking number revisited*. URL: <http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/ricca.pdf>.
- [16] V.V.Prasolov. *Intuitive topology*. Mathematical World 4. American Mathematical Society, 2000. ISBN: 0-8218-0356-5.
- [17] A.B.Sossinsky V.V.Prasolov. *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds*. Translations of mathematical monographs; Volume 154. American Mathematical Society, 1996. ISBN: 0-8218-0588-6.
- [18] Jeffrey R. Weeks. *The Shape of Space, Second Edition, Appendix C*. Marcel Dekker, Inc., 2002. ISBN: 0-8247-0709-5.