17968

Extrait du Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres
Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles. Série *A*: Sciences Mathématiques
1936

Remarque sur les zéros des intégrales de Laplace-Abel

par

M. Petrovitch

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1937

Publié par l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, sous la direction de M. K. Dziewoński, Secrétaire de la Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles (Cracovie, Institut de Chimie Organique de l'Université, rue K. Olszewski 2).

Nakładem Polskiej Akademii Umiejętności.
Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego pod zarządem Józefa Filipowskiego.

17968

Extrait du Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres
Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles — Série *A*: Sciences Mathématiques
1936

517.63

Uwaga o zerach całek Laplace'a-Abel'a. — Remarque sur les zéros des intégrales de Laplace-Abel.

Note

de M. ***MICHEL PETROVITCH*** m. c.,

présentée le 9 Novembre 1936.

1. On sait qu'il n'existe pas d'intégrales de Laplace-Abel

$$\Phi(z) = \int_a^b e^{zt} \varphi(t)\, dt \tag{1}$$

φ étant une fonction réelle, a et b deux constantes réelles) non identiquement nulles ayant comme zéros la suite naturelle des nombres entiers

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots \tag{2}$$

situés sur l'axe réel des z.

Ceci subsiste également pour la suite (2) présentant des lacunes en nombre quelconque, et distribuées d'une manière quelconque, pourvu que la série des inverses des termes restants diverge.

Mais il n'en est pas ainsi de la même suite (2) *située sur l'axe imaginaire* des z. On sait en effet que $\Phi(z)$ ne peut avoir pour zéros les termes de la suite *complète*

$$0, i, 2i, 3i, 4i, \ldots \tag{3}$$

mais il est facile de voir qu'il existe des $\Phi(z)$ s'annulant pour les termes de la suite (3) *lorsque celle-ci présente des lacunes.* Telle serait, par exemple, l'intégrale

$$\Phi(z) = \int_0^{2\pi} e^{zt} \varphi(t)\, dt \tag{4}$$

où

$$\varphi(t) = \cos mt \quad \text{resp.} = \sin mt;$$

l'intégrale, ayant pour valeur

$$\frac{z(e^{2\pi z}-1)}{z^2+m^2} \quad \text{resp.} -\frac{m(e^{2\pi z}-1)}{z^2+m^2}$$

s'annule pour tous les termes de (3) sauf pour $z = im$.

Telle serait aussi l'intégrale (4) où

$$\varphi(t) = A_1 \cos m_1 t + A_2 \cos m_2 t + \ldots + A_p \cos m_p t$$

s'annulant pour tous les termes de (3) sauf pour

$$z = im_1,\ im_2, \ldots\ im_p.$$

Et ceci subsiste également pour une infinité de lacunes de la suite (3), distribuées d'une manière quelconque; il suffit de choisir les A_n de manière que la série

$$A_1 \cos m_1 t + A_2 \cos m_2 t + A_3 \cos m_3 t + \ldots$$

converge, ce qui est manifestement toujours possible. Le fait analogue subsiste lorsqu'on considère les formules où figurent les cos. avec les sin.

Envisageons la suite naturelle des nombres premiers

$$0, 1, 2, 3, 5, 7, 11, \ldots \tag{5}$$

Il n'existe aucune fonction (4) non identiquement nulle ayant pour zéros les termes de cette suite, complète ou à lacunes, pourvu que la série des inverses des termes restants diverge. Mais la même suite (5) étant située sur l'axe imaginaire, *il existe des* $\Phi(z)$ *s'annulant pour tous ses termes, la suite étant complète ou à lacunes.* Ceci résulte simplement de ce que la suite (5) est elle-même une suite (1) à lacunes.

2. Nous allons exposer une manière, basée sur ce principe, de former effectivement autant qu'on en veut des intégrales $\Phi(z)$ non identiquement nulles, s'annulant pour tous les termes de la suite $i\alpha_k$ où α_k est un nombre premier, sans s'annuler pour aucun terme $i\beta_k$ où β_k serait un nombre composé [1]). Le procédé exige l'emploi de séries doubles présentant l'avantage de mieux mettre en évidence la loi de formation des fonctions $\varphi(t)$.

[1]) Le procédé a été, en principe, indiqué dans ma Note »*Intégrales définies portant sur les séries de Lambert généralisées*« (Compt. rend. t. 182. 1926. p. 435).

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЕТНОСТИ - БЕОГРАД БИБЛИОТЕКА
И.ф. 378212

A cet effet considérons l'intégrale

$$\Phi(z) = \int_0^{2\pi} e^{zt}\varphi(t)dt \tag{6}$$

où la fonction $\varphi(t)$ est de la forme

$$\varphi(t) = \sum_{k=2}^{\infty} A_k f(kt) \tag{7}$$

$f(t)$ étant une fonction périodique, à période 2π, dont le développement en série de Fourier

$$\Sigma(a_m \cos mt + b_m \sin mt) \tag{8}$$

commence par $m=2$, les A_k étant des nombres tels que la série (7) converge dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

Tel serait, par exemple, le développement

$$\frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 4t}{4} + \ldots \tag{9}$$

dont la valeur dans la première période est

$$\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} - \sin x \tag{10}$$

et qui définit la fonction périodique à période 2π

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left[t - E\left(\frac{t}{2\pi}\right)2\pi\right] + \sin t \tag{11}$$

$E(x)$ désignant la partie entière du nombre x.

Nous allons démontrer le résultat suivant:

La fonction $\Phi(z)$, définie par l'intégrale correspondante (6), est une fonction entière de genre un, s'annulant pour les valeurs $z = qi$ lorsque q est zéro ou un nombre premier quelconque, tandis qu'elle diffère de zéro lorsque q est un nombre composé.

Pour le faire voir, remarquons qu'en vertu des développements

$$\begin{aligned} A_2 f(2t) &= \sum_{m=2}^{\infty} A_2(a_m \cos 2mt + b_m \sin 2mt) \\ A_3 f(3t) &= \sum_{m=2} A_3(a_m \cos 3mt + b_m \sin 3mt) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{12}$$

la fonction $\varphi(t)$ s'exprime par la série double

$$\varphi(t) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} A_n (a_m \cos mnt + b_m \sin mnt). \tag{13}$$

Il s'ensuit que

$$\Phi(z) = \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} [A_m a_m P_{m,n}(z) + A_m b_m Q_{m,n}(z)] \tag{14}$$

où

$$P_{m,n}(z) = \int_0^{2\pi} e^{zit} \cos mnt \cdot dt = zi \frac{e^{2\pi zi} - 1}{(mn)^2 - z^2} \tag{15}$$

$$Q_{m,n}(z) = \int_0^{2\pi} e^{zit} \sin mnt \cdot dt = mn \frac{1 - e^{2\pi zi}}{(mn)^2 - z^2}. \tag{16}$$

Chacune des deux fonctions $P_{m,n}$ et $Q_{m,n}$ s'annule pour n=nombre *premier.* Pour $z =$ nombre *composé mn* ces deux fonctions apparaissent sous la forme $\frac{0}{0}$ mais l'on s'assure facilement que la première acquiert la valeur π, et la deuxième la valeur πi. Par suite, pour $z =$ nombre premier on a $\Phi(z) = 0$, tandis que pour $z =$ nombre composé $\Phi(z)$ diffère généralement de zéro (sauf pour les suites A_k, a_m, b_m exceptionnelles).

D'autre part, de

$$\Phi(z) = h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + \ldots \tag{17}$$

où

$$h_m = \int_0^{2\pi} \frac{1}{n!} \varphi(t) t^n \, dt \tag{18}$$

on tire l'inégalité

$$|\Phi(z)| < M e^{2\pi r} \qquad r = |z|$$

où M est une constante positive finie, d'après quoi Φ est une fonction entière de z, de genre zéro ou un. Or, la série des inverses des modules des zéros de cette fonction diverge; il s'ensuit que c'est une fonction *du genre un.* Le résultat se trouve ainsi démontré.

Si, par exemple, on prend pour $f(z)$ la fonction (11), la fonction $\varphi(t)$ serait celle représentée par le développement

$$\begin{aligned}\varphi(t) = & \frac{\pi}{2}(A_2 + A_3 + A_4 + \ldots) - \\ & - \frac{t}{2}(2A_2 + 3A_3 + 4A_4 + \ldots) - \\ & - \pi\left[E\left(\frac{2t}{2\pi}\right)A_2 + E\left(\frac{3t}{2\pi}\right)A_3 + E\left(\frac{4t}{2\pi}\right)A_4 + \ldots\right] \\ & - (A_2 \sin 2t + A_3 \sin 3t + A_4 \sin 4t + \ldots).\end{aligned}$$

3. Les intégrales (1) se comportent donc de même manière, ou bien de deux manières différentes par rapport aux deux suites, la suite naturelle des nombres entiers et celle des nombres premiers, suivant que ces suites se trouvent situées sur l'axe réel ou bien sur l'axe imaginaire. Il n'existe aucune intégrale $\Phi(z)$ s'annulant pour l'une ou l'autre des deux suites *situées sur l'axe réel.* Lorsqu'elles se trouvent *sur l'axe imaginaire,* il n'existe aucune intégrale $\Phi(z)$ s'annulant pour la première suite, tandis qu'il en existe une infinité s'annulant pour la seconde.

On serait tenté, de prime abord, d'attribuer cette différence à celle des propriétés arithmétiques de deux suites. Ce qui précède fait voir que la seule raison de la différence réside dans le fait que la seconde suite complète n'est que la première suite à lacunes distribuées d'ailleurs suivant une loi arithmétique.

Remarquons encore que la généralisation de M. Szász du théorème de M. Müntz sur l'approximation des fonctions continues par des combinaisons linéaires des puissances

$$x^{\lambda_k} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

pour les valeurs imaginaires de λ_k laisse possible l'existence des intégrales (1) ayant comme zéros la suite complète

$$\lambda_k = i\alpha_k \qquad \alpha_k = k\text{-ième nombre premier.}$$

En effet, cette suite échappe au théorème de M. Szász qui ne prend pas en considération le cas où la partie réelle des λ_k est nulle. Il en est de même pour le théorème du même auteur relatif à l'approximation des fonctions continues par des combinaisons linéaires des fonctions

$$1, \quad \sin \lambda_k x, \quad \cos \lambda_k x,$$

à λ_k imaginaires.

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЕТНОСТИ - БЕОГРАД
БИБЛИОТЕКА

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES ET DES LETTRES

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

SÉRIE *A*: SCIENCES MATHÉMATIQUES

DERNIERS MÉMOIRES PARUS

Octobre—Novembre 1936.

TABLE DES MATIÈRES

Décembre 1936.

Le »*Bulletin International*« de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres (Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles) paraît en deux séries. La première *(A)* est consacrée aux travaux sur les Mathématiques, l'Astronomie, la Physique, la Chimie, la Minéralogie, la Géologie etc. La seconde série *(B)* se divise en deux sous-séries; l'une d'elles »I« contient les mémoires qui se rapportent aux diverses branches de la Botanique (la Systématique, l'Anatomie et la Physiologie des Plantes), l'autre »II« est réservée aux publications qui concernent le vaste domaine des recherches morphologiques et physiologiques sur l'homme et les animaux (Anatomie, Biologie générale, Embryologie, Histologie, Pathologie, Pharmacologie, Physiologie, Psychologie, Zoologie systématique et expérimentale).

Depuis 1928, le »*Bulletin International*« ne contient que les communications dont l'étendue ne dépasse pas une limite strictement définie; les mémoires de plus grande envergure sont réunis en un Recueil spécial, les »*Mémoires*« de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres (Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles). Les »*Mémoires*« sont également publiés en deux séries: *A* et *B*. Chaque mémoire publié dans les »*Mémoires*« se vend séparément

Les abonnements au »*Bulletin International*« sont annuels et partent de Janvier. Les livraisons de ce Recueil se vendent aussi séparément.

Adresser les demandes à l'Académie ou à la Librairie „Gebethner et Wolff"
Rynek Gł., Cracovie (Pologne).