РЕПУБЛИЧКИ ОДБОР ЗА ПРОСЛАВУ СТОГОДИШЊИЦЕ РОЂЕЊА
МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

1868—1943

Београд 1968

РЕПУБЛИЧКИ ОДБОР ЗА ПРОСЛАВУ СТОГОДИШЊИЦЕ РОЂЕЊА
МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

1868—1943

Београд 1968

Споменицу уредио:

Драган Трифуновић, научни сарадник
Математичког института у Београду

САДРЖАЈ

Републички одбор за прославу стогодишњице рођења
МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

Почасни одбор:

Велибор Глигорић, председник Српске академије наука и уметности

Драгиша Ивановић, ректор Универзитета у Београду

Миладин Радуловић, председник Савета за координацију научних делатности СР Србије

Живан Берисављевић, секретар Секретаријата за образовање у културу СР Србије

Извршни одбор:

Вукић М. Мићовић, секретар Српске академије наука и уметности

Тадија Пејовић, директор Математичког института

Ђуро Курепа, ред. професор Природно-математичког факултета у Београду

Борђе Карапанџић, ред. професор Шумарског факултета у Београду

Драган Трифуновић, научни сарадник Математичког института у Београду

Милан Ђоковић, председник Српске књижевне заруге

Надежда Анрдрић, кустос Музеја града Београда

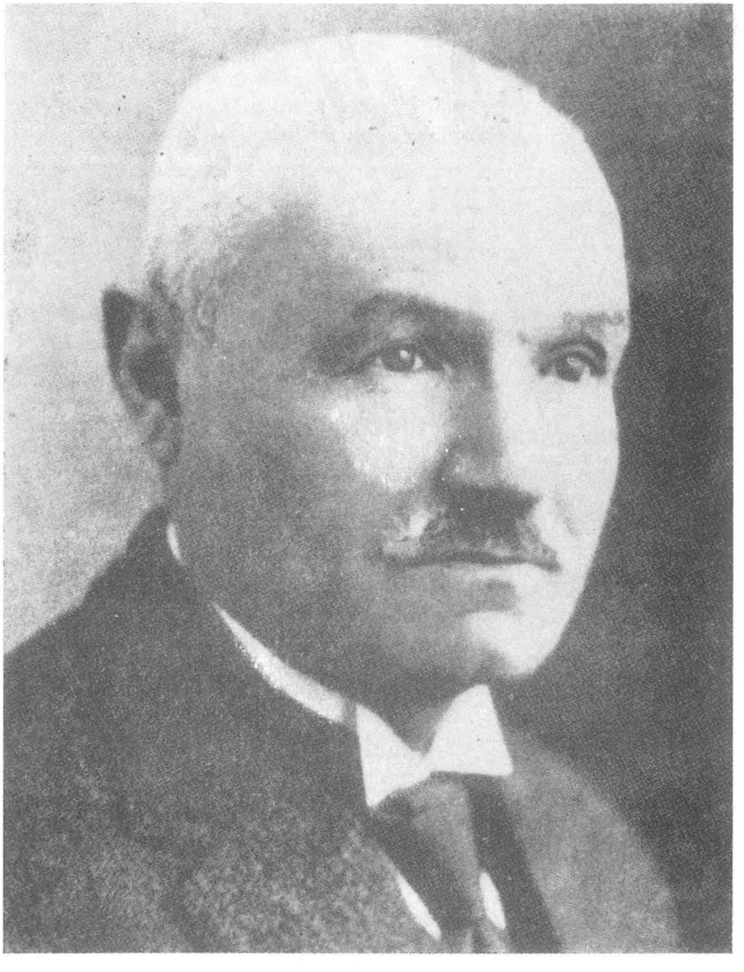
Одбор за организацију Општег симпозијума о животу и раду Михаила Петровића:

Ђуро Курепа, ред. професор Природно-математичког факултета у Београду

Богољуб Станковић, ред. професор Универзитета у Новом Саду

Станимир Фемпл, ред. професор Електротехничког факултета у Београду

Драган Трифуновић, научни сарадник Математичког института у Београду



МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ (1868—1943)

ВЕЛИБОР ГЛИГОРИЋ

Сто година је од рођења знаменитог научника Михаила Петровића. Годишњице нам говоре о знаменитим личностима наше прошлости, о културном наслеђу, но оне нам говоре и о науци, уметности, култури нашег времена, јер су они који су некад духовно стварали уградили своја дела и у наш живот.

Дело Михаила Петровића у математичким наукама далекосежно је. О томе ће бити речи на данашњем научном скупу. Младост научног рада Михаила Петровића на почетку је овог века а овај век је просперитет науке. Дух, покретачки и откривачки је у научном делу Михаила Петровића. Научник Михаило Петровић, својим великим особеним даром разумео је и предвидео да тај дух није статичан, да је револуционаран у науци. Поседовао је такву природу која га је изводила из научних кабинета у живот, и дејствовао је поред великог знања, поред велике ерудиције, такође и креативним снагама живота. Кретао се духом и научним радом напред, те је због тога и савремен. Он није остао и заостао у уским оквирима специјалности, имао је чуло истраживања и откровења, које му је говорило да се у овом нашем веку умне и духовне снаге допуњују, да долази време када ће се различите научне области спајати, када ће се, такође, наука и уметност прожимати, да настаје ново доба за математичке науке када ће оне свима научним и духовним областима постати неопходне.

Михаило Петровић је као научник припадао плејади интелектуалаца код нас, у Србији, која је активно дејствовала на почетку овог века у европеизацији наше културе. Као научник, и он је као и његови савременици ђак француске школе. У духовном штабу је *Српског књижевног гласника*, но и у њему је он личност особена, јер му је и природа особена. Он је у духовној елити свога доба, сопственим ликом. Оригиналан је у личном животу и у пасијама. У научнику се крије уметник. Привидна двојства су у његовој личности: страсни љубитељ природе је *до потребе* да се цео у њу утапа, и научник ерудит је, неуморни и врло скрупулозни сабирач знања, градитељ темеља науке. Живи у математичким наукама, а такође је и врло страстан истраживач у другим областима науке, неуморан истраживач је тајни природе, и у томе пасионирано радознали путник који ужива у слободама природе, а истовремено је дубоко занесен свим оним што је људски ум створио као ризницу науке и културе. Вишестрано је обдарена личност, и вишестрано комуникативна. Вољен је и цењен у Српској академији наука и у другим академијама, а вољен је, и пријатељ је, и друг људима на обалама Саве и Дунава, на речним, морским и океанским водама. Вишестраношћу дарова природе и пасија, поред онога што је дубоко истраживачко у његовом научном раду, он је и остао у сећању као оригинална, изузетна личност у нашој култури.

Отварајући научни скуп посвећен раду и личности Михаила Петровића, верујући да ће овај скуп допринети даљем развитку и напретку оних наука којима је Петровић посветио живот и љубав научника и уметника, ја вам, у име Српске академије наука и уметности, желим много лепих успеха.

Велибор Глигорић, председник Српске академије наука и уметности, отвара Свечану академију поводом стогодишњице рођења Михаила Петровића

(свечана сала САНУ, 8. мај 1968)

ТАДИЈА ПЕЈОВИЋ

ЛИК МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА
(1868 — 1943)

Пре сто година, 28. априла 1868. год. по старом календару родио се у Београду Михаило Петровић. Основну школу и гимназију завршио је у Београду, где је матурирао 1885. год. Још као гимназиста показивао је интересовање за природне науке, што га је и определило да се, после завршене матуре, упише на Природно-математички одсек Философског факултета Велике школе у Београду. За време студија у Великој школи од 1885. до 1889. год. он се није задовољавао само наставним градивом, већ је проширивао своје знање самосталним радом и тиме почео испољавати наклоност за научни рад. Као студент Велике школе истакао се упадљивим семинарским радовима и награђеним тематима.

По завршетку Велике школе у Београду 1889. год. Михаило Петровић одлази у Париз да настави студије у математичким наукама. После припреме од годину дана, полаже са изванредним успехом строги пријемни испит, јуна 1890. год. за пријем у École normale superieure у Паризу. Он је био међу првим странцима који је прекорачио праг париске École normale superieure. Кроз ову школу пролазили су и пролазе људи са изузетно великим способностима.

За време студија у Паризу од 1890. до 1894. год. он је положио лисанс из математичких наука 1892. год., лисанс из физичких наука 1893. год. и докторат из математичких наука 1894. године. По завршетку студија у Паризу враћа се у Београд јула 1894. год. и постаје професор математике у Великој школи у Београду, а доцније кад је Велика школа претворена у Универзитет 1905. год. постаје професор Теоријске математике Философског факултета Београдског универзитета, где је радио до смрти 8. јуна 1943.

Михаило Петровић је започео свој научни рад 1894. године веома интересантном докторском дисертацијом под насловом: „Sur les zéros et les infinis des integrales des équations différentielles algébriques (Paris, 1894 год.). Резиме ове дисертације је претходно објављен, исте године, у Француској академији наука у Паризу. Од тада настаје интензиван научни и наставни рад Михаила Петровића, који траје све до његове смрти. Његова активност манифестовала се у писању научних расправа, научних дела, монографија, универзитетских уџбеника и путописа.

Поље његове научне делатности је врло широко и показује велику разноврсност идеја и метода истраживања. Он је поставио и решио многобројне проблеме из теорије диференцијалних једначина, теорије функција (реалних и комплексних променљивих), интегралног рачуна, алгебре, аритметике, геометрије, механике, математичке физике и хемије. Увео је нове појмове и идеје и створио оригиналне методе помоћу којих је дошао до важних резултата.

Научна делатност Михаила Петровића највише се манифестовала у области диференцијалних једначина, где је дао читав низ теорема. Те се теореме односе на разне особине интеграла диференцијалних једначина. На пример, интеграли једначина као униформне, мероморфне, целе, рационалне, периодичке и друге функције. Све ове теореме о интегралима диференцијалних једначина добијене су из директног посматрања једначина не изражавајући њихове интеграле у експлицитном облику, што је у већини случајева и немогуће. Поред ових теорема он је дао и прилоге о трансформацијама једначина, о свођењу на каноничан облик, о инваријантама њихових интеграла и о механичкој интеграцији. Треба нарочито истаћи његов апарат за механичку интеграцију извесних диференцијалних једначина. Теорија диференцијалних једначина била је најомиљенија област истраживања Михаила Петровића. Прва и последња научна расправа биле су му из диференцијалних једначина.

Михаило Петровић је посветио велики број радова теорији комплексних функција (реалних и комплексних променљивих) и дао више интересантних теорема. То су теореме о функцијама дефинисаним помоћу редова, о декомпозицији аналитичких функција на просте елементе, о специјалним трансцендентама које интервенишу у неким проблемима целих функција које генералишу експоненцијалне и тригонометријске функције, о представљању аналитичких функција помоћу децималних бројева итд.

У области интегралног рачуна он је оставио више општих формула које омогућују израчунавање извесних одређених интеграла.

Теорија алгебарских једначина такође није остала по страни. Проучавајући распоред корена у равни непознате величине, дао је известан број врло општих теорема. Осим тога, користећи се неким познатим алгебарским неједнакостима, извео је из њих друге неједнакости.

Треба напоменути још и читав низ његових радова из аритметике, геометрије и примењене математике (механике, физике и хемије).

Поред истраживања у разним математичким областима Михаило Петровић је створио и нове дисциплине као што су: теорија математичких спектара и математичка феноменологија.

Он је уочио да се појам спектра и спектралне методе могу пренети из физике и хемије на чисту математику. То му је послужило као основ за стварање нове дисциплине назване: теорије математичких спектара, где је увео спектралне методе у аритметици, алгебри, интегралном рачуну и теорији функција. Главни резултати из теорије спектара налазе се у његовој књизи: Leçons sur les spectres mathématiques (Paris, 1928).

Има много разноврсних природних појава, које немају међу собом никакве конкретне везе, али када се апстрахују њихова конкретна факта и када се дубље анализирају суштине тих разноврсних појава, онда се уочавају извесне аналогије између њих. Ове аналогије између диспаратних појава дале су повода МИХАИЛУ ПЕТРОВИЋУ да udари темеље и развије нову научну дисциплину названу: *општа феноменологија* а посебно *математичка феноменологија*. Посматрајући многобројне аналогије између диспаратних природних појава, он је формирао известан број аналошких група са аналошким језгром за сваку групу. Језгро једне аналошке групе обухвата све заједничке особине посматране групе. Формулишући ове аналогије појединих аналошких група математичким релацијама створена је математичка феноменологија. Главни резултати из ове дисциплине налазе се у његовим делима:
Елементи математичке феноменологије, Београд 1911. год. и
Феноменолошко пресликавање, Београд 1933. год. Математичка феноменологија већ је нашла данас примене у новој науци названој кибернетика.

Треба напоменути још и Петровићево дело под насловом: *Један диференцијални алгоритам и његове примене*, Београд 1936, у коме је увео појам *релативног извода* и показао његове примене на разне математичке проблеме, а нарочито на решавање диференцијалних једначина. Он је имао велику интуицију да уочи интересантне проблеме за истраживање и способност да им да елегантна решења. У његовим научним радовима може се увек наћи идеја за нова истраживања. Његова научна дела по обиму и по садржини представљају велику научну ризницу, која ће се и даље разрађивати.

Михаило Петровић је написао више универзитетских уџбеника и дао литографисана предавања од којих треба напоменути: *Рачун са бројним размацима* Београд, 1932 год. *Интеграција диференцијалних једначина помоћу редова*, Београд 1938. год., *Елиптичне функције*, Београд, 1928 год. Прве две књиге су више студије него уџбеници. Од нарочитог интереса је књига

Рачунање са бројним размацима. Има много проблема у теоријској и примењеној математици за које је немогуће наћи тачна решења. Стога је потребно тражити приближно решење или размак у коме се налази посматрано решење. Бројни размаци имају данас велику примену у нумеричкој анализи у вези електронских рачунара. Михаило Петровић је формулисао и развио њихову теорију и примену на многе проблеме.

Карактеристика његових уџбеника и литографисаних предавања је: *прецизност, концизност* и *приступачност* читаоцима којима су намењени.

По завршетку студија у Паризу 1894. год. напојен математичким знањем на извору математичких наука на париској Сорбони и у École normale superieure код тадашњих светских научника, Михаило Петровић долази у Србију носећи са собом богату ризницу математичких знања. Уласком у Велику школу настоји да промени дотадашњи начин извођења наставе математике уводећи начин модеран за то доба и инсистирајући истовремено на унапређењу наставе и науке у Великој школи. Основао је математички семинар за увођење студената у научни рад. Овај семинар одиграо је важну улогу у стварању научног кадра, најпре у Великој школи, а затим на Универзитету. Још од самог доласка на Велику школу радио је много на стварању научног подмлатка, што је успео нарочито после првог светског рата. Многи млади људи његовом заслугом развили су се у научне раднике.

Са својим колегама на Катедри математике основао је 1932. године математички часопис назван Publications mathématiques de l'Université de Belgrade који је излазио на страним језицима у коме су сарађивали наши и страни математичари. Захваљујући томе катедра за математику Београдског универзитета постала је математички центар који је много утицао на развитак науке и наставе у нашој земљи. Овај математички центар са поменутим часописом, био је база за формирање и развитак данашњег Математичког института у Београду .

Михаило Петровић је учествовао на многобројним конгресима и конференцијама, где се увек појављивао с рефератима и предавањима. Држао је предавања на више страних универзитета. Био је члан многих академија и научних друштава у земљи и иностранству.

Он је много путовао и може се рећи да је пропутовао скоро целу земљину куглу од северног до јужног пола. Свако његово путовање доносило је извесне резултате било научног било књижевног карактера.

У часовима одмора и разоноде осим научним радом бавио се риболовом и музиком. Био је страстан риболовац с мајсторском дипломом за аласа, због чега је и прозван Мика-Алас. Исто тако као примаш на виолини у његовом омиљеном „Друштву суз" био је мајстор у извођењу народних песама и игара. Риболов и музика су му служили као предах у научном раду.

У животу је био врло скроман, у опхођењу приступачан и тактичан. Према колегама — математичарима, без обзира на њихов ранг, био је подједнако предусретљив и стајао увек на располагању кад је реч о научном раду, нарочито млађим људима. Научни рад је сматрао као прву дужност наставника Универзитета, јер без науке нема успеха ни у настави, а ни напретка уопште. У опхођењу са студентима био је предусретљив и увек водио рачуна о настави као и о достојанству наставника Универзитета.

Као резервни официр учествовао је у балканским ратовима 1912. и 1913. год. и првом светском рату. У другом светском рату, као резервни потпуковник, био је заробљен и одведен у заробљеништво, одакле је доцније као болестан, отпуштен.

У личности Михаила Петровића били су концентрисани: велики таленат, изванредна енергија и неуморна радна способност, што се и манифестовало у његовим делима великим по обиму, по садржини и резултатима. Ове карактерне особине пратиле су га до смрти. За Михаила Петровића може се рећи: престао је да живи и да рачуна, јер је заиста до смрти рачунао.

По својим научним и наставничким квалитетима Михаило Петровић је био и остаће научник светског гласа и истакнута личност у историји Велике школе и Београдског универзитета као и у историји наше земље.[1]

---

[1] За детаљнија обавештења о научним резултатима Михаила Петровића видети: *Notice sur les travaux scientifiques* de Michel Petrovitch (Gauttier—Villars, Paris 1922) avec la préface de M. Milankovitch.

МИРКО СТОЈАКОВИЋ, проф. Универ. и
дописни члан Српске академије
наука и уметности

НАУЧНИ МЕТОД МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

Говорећи о Михаилу Петровићу почећу оним чиме би требало да завршим: Михаило Петровић је био и остао највећи српски математичар до данас. Његов успон је метеорски: са двадесет шест година професор Универзитета 1894, тако рећи из школске клупе ушао је у Академију наука (1897).

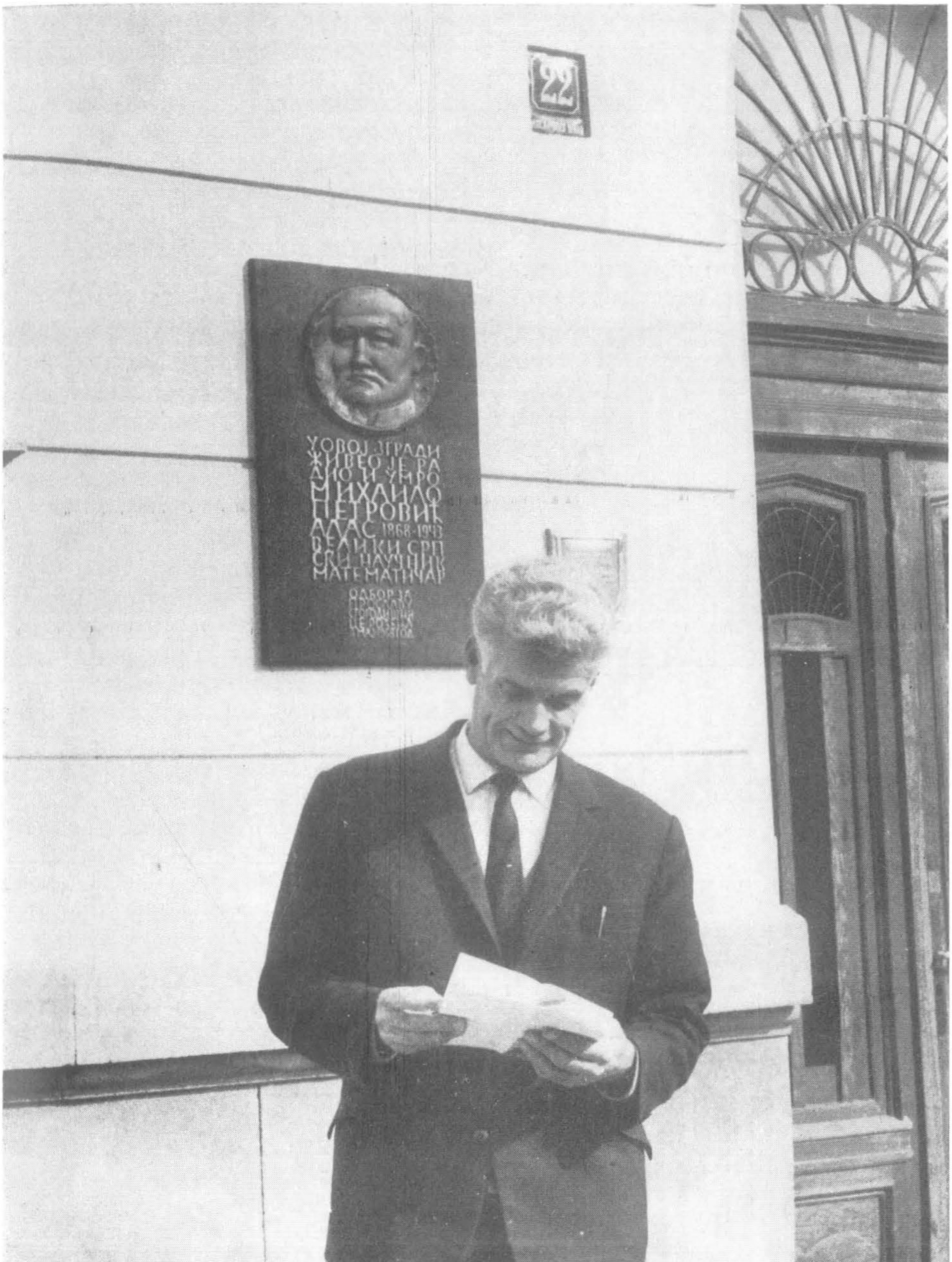
Рођен пре сто година у Београду 1868, завршио је средњу школу 1885, дипломирао на Великој школи у Београду 1889, стекао лисанс математичких и физичких наука 1892, односно 1893. у Паризу, где је и докторирао из математичких наука 1894. године. Од тада, па за даљих педесет година, дакле, укупно пола века, био је професор Велике школе и Универзитета у Београду. За то време објавио је око четири стотине (тачно 393) радова међу којима има чланака на српском и француском језику, у домаћим и страним научним часописима. Писао је монографије, путописе, есеје, расправе и уџбенике, има чланака од десетак страна и књиги од по неколико стотина страна. Обим и обиље радова карактеришу Михаила Петровића као најплоднијег српског научника прве половине двадесетог века не само у области математике, него и у поређењу са научницима других струка.

Они који се и сами баве писањем могу најбоље да оцене колико је то огроман посао био штампати годишње десетак радова (Петровић је у 1936. штампао осамнаест, а у 1938. чак двадесет радова). Да би се рад објавио треба пре свега дуго унапред размишљати, треба пратити одговарајућу литературу, проверавати значај и оригиналност идеја, разговарати са стручњацима, рад треба написати, па саопштити на научном скупу, а затим га дотерати за штампу, вршити редакције и коректуре. Овакви се послови отежу па се често сустижу и међусобно преплићу тако да следећих месеци треба исто то радити и са новим радовима, што веома замара. Петровић је те напоре издржавао пуних педесет година. Нових педесет година је потребно да би се наслеђе које је оставио проучило, а идеје које је у тим радовима изнео испитале и довеле до краја.

Они који су познавали Михаила Петровића наводе да је он имао разрађен систем евиденције, класификације и праћења фаза рада на неком проблему. У том методу најпре су идеје биле записиване, затим су долазиле различите фазе реализовања идеја: радови у припреми, радови у штампи, завршени радови. Кад човек пише један рад годишње, то и није тешко, али Петровић је писао десетак годишње, а неки од њих су били и ванредно обимни. Био је то посао којем се ми данас можемо дивити.

Ово обиље радова праћено је ванредном *разноврсношћу*. Петровић је и иначе *универзалан*. Сем математике, његово интересовање привлачиле су филозофија, књижевност, техника, економија, право, професионални риболов, па и репродуктивна музика. Међутим, не мислимо да инсистирамо на универзалности те врсте. Петровић је био универзалан и у области саме математике. Теорија функција реалне променљиве, теорија функција комплексне променљиве, диференцијалне једначине, теорија бројева, алгебарска анализа, диференцијална геометрија, теорија релативитета, динамика, небеска механика, математички инструменти, теорија редова — све су то области у којима има запажених Петровићевих прилога. У доба Михаила Петровића било је у свету више математичара тако универзалног генија. Такав је био Поенкаре, такав је био Хилберт. Било је таквих и код нас. Но све их мање има. Развитак светске математике ишао је у правцу све веће специјализације. Већ у доба М. Петровића било је то очевидно. Сам Петровић није се могао озбиљно укључити у токове развитка теорије скупова, топологије, теорије група, теорије Е. Галоа, па и у самој анализи која се сматра за основни домен његовог рада, није сасвим прихватио строге квантитативне методе. Његови познаници кажу да је на примедбе о овим моментима одговарао да је доцкан за њега да се укључи у процес све веће модернизације математике проучавајући теорију скупова и апстрактних структура, алгебарских и тополошких. Многи међу нама данас се налазе у заостатку у односу на овај процес и склони су да као Петровић кажу да је доцкан, јер је фаза продирања теорије скупова завршена, а сада је у пуној снази процес све веће специјализације управо на тој основи. И ми смо данас у ситуацији да ни у својој ужој области не можемо све да пратимо, а о некој универзалности у смислу М. Петровића и да не говоримо.

Суштински везана за универзалност Петровићевог генија била је његова способност за *генерализације*. Већ у првом студентском раду *О модификацији Грефеовог поступка за решавање једначина*, Петровић испољава јасно ову црту свог будућег стварања. Колико пута је касније у својим радовима поновио уводну фразу из овога рада: Лепа Грефеова мисао да се једначина



Мирко Стојаковић, дописни члан Српске академије наука и уметности, приликом откривања спомен-плоче на Дому Михаила Петровића

(24. октобар 1968)

трансформише у другу може се остварити не само на начин на који је то Грефе радио него и на ма какав други начин који би за ефекат имао да мањи корени ишчезну у односу на веће. Он одмах и наводи други свој начин да се то постигне истичући опште особине свих начина којима се то може постићи. Овакав метод применио је у многим каснијим својим радовима. Петровић је имао дар да проникне у суштину метода рада сваког аутора, да схвати зашто се таквим методом постиже успех и да одмах изнесе своју идеју за стварање сличних уопштавања. У елементима математичке феноменологије управо ова црта његовог стварања је и доминантна. Обухватити диспаратне феномене једним аналошким језгром у коме је концентрисано оно што је тим феноменима ипак заједничко, а изражено је обично математичким изразима у којима поједине компоненте на сличан начин делују, то је основна идеја на којој се доцније изградила строга теорија математичких модела. Аналогне рачунске машине раде на принципу електронског модела аналошког језгра на што се своде сви други модели.

Петровић је умео да нађе и интересантне специјалне случајеве који су промакли пажњи других аутора, а ти су специјални случајеви или за праксу важни или битно карактеришу неку општу методу или згодно истичу због чега се нека метода не може увек применити. Такав је његов рад *Примедба о проблему трију тела* у коме узима специјалне случајеве распореда и величине маса у проблему трију тела и даје елементарну дискусију, такав је његов рад *О физичком трајању независном од просторних величина* у коме покушава да нађе такав начин мерења времена за које није потребно мерење дужина, што је у теорији релативитета основни моменат, такви су многобројни примери расути по његовим радовима у којима се укратко резимира садржина самога рада.

Но пре свега ваља истражити оригиналност идеја у Петровићевим радовима. Уз способност да види генерално у посебном и да нађе занимљиве облике специјалног у општем, Петровић је просто опседнут оригиналним идејама од којих је многе сам до краја обрадио, а могло би се рећи да је још већи број у радовима изнео, али их није сам проверавао. Он није могао да одоли чарима новог и оригиналног, па је идеје износио слободно, може се рећи претрпавао радове идејама, чак и кад сам није стизао да их обради. Било да су то оригиналне идеје намењене само тренутку, посебном проблему, или оригиналне идеје намењене стварању посебних области науке. Такав му је покушај са стварањем математичке теорије спектара, таква му је математичка феноменологија, такав му је покушај стварања посебне теорије размака или разраде једног посебног диференцијалног алгоритма. Природно је што се у овом обиљу идеја нашло и неколико грешака и мањих неуспеха. Сам Петровић писао је о грешкама великих математичара истичући да учињене грешке нису ни уколико смањиле величину тих математичара. Не греши само онај који ништа не ради. Не ваља кад неко само греши. Он не може себе правдати фразом: ето, и велики математичари су грешили. Петровић је много створио, а број је грешака у томе што је створио минималан и небитан. Он их је и сам уочавао. Он се, на пример, у једном раду извињава што је у претходном раду једну функцију окваликовао као произвољну а она у ствари мора да задовољава извесну диференцијалну једначину. Вероватно је погрешно и његово резоновање у поменутом раду о физичком трајању у коме не интервенишу просторни елементи пошто се закључци у том раду косе са основним поставкама теорије релативитета и ако ни та теорија није неки табу или фетиш, но тај рад, рекао бих, има више методски карактер, а идеје изнете у њему ипак имају одређену вредност.

Петровић је све своје радове писао сам. Нема случајева коауторства, нема радова које је колективно писало више аутора међу којима би један члан био М. Петровић. Ово међутим не значи да је он био затворен у себе. Он је с колегама дискутовао о проблемима, писмено и усмено, помагао другима да доврше започето, али је своје радове писао сам. Има врло мало случајева да је био у ситуацији да расправља о приоритету, а у то мало случајева он је признавао приоритет другима. Лагутински и сл. Управо ова црта Петровићевог стварања — самосталност у стварању — одбијање да пише са другима, звучи необично кад се узме у обзир да је Петровић ипак творац посебне математичке школе у Београду. Један једини рад написао је с Караматом. Петровић је умео да окупи људе, да их подстакне и помогне. Захваљујући томе низ истакнутих научника у области математике делало је још за његова живота, а данашњи колектив научника који ради на универзитетима у Србији или сачињавају Петровићеви ученици или су ученици његових ученика. То показује да се дело М. Петровића развија и живи.

Петровић је и сам ученик француске школе, не само по томе што је у Паризу дипломирао и докторирао него и по својим научним везама у каснијем периоду када је стварао, када је на конгресима математичара представљао младу српску науку, када је у страним часописима објављивао своје радове. Његово стварање има карактеристичне црте ондашње француске школе. Стручњацима је позната разлика између француске и, рецимо, немачке математичке школе. Излагање у стилу „Lemma, Satz, Zusatz, Beweis, Bemerkung, Definition, Erklärung" било је страно Петровићу. Код Петровића је то обрнуто. Најпре се теорема изведе, па се тек онда формулише и ретко кад нумерише. Кад се такав рад чита, стиче се утисак приповедања. Читалац и сам уђе у ток ауторових мисли, прати га и закључак се сам намеће. Међутим Петровић је имао разумевања и за ауторе других школа и чак је и сам потпомагао и на Универзитет довео научнике чији је стил рада био супротан његовом (Карамата, Авакумовић). У том се погледу открива још једна позитивна црта М. Петровића — широкогрудост и објективност. И поред својих великих успеха, увек се радовао успесима својих ученика, па макар они и не ишли непосредно путевима које је он прокрчио.

Осврнућемо се овде на још једну карактеристику Петровићевих радова. Он цитира летературу или је цитира оскудно. Данашњи читалац радова у области математике навикао је да и уз најмању белешку види бар две референције. Отворивши било који часопис на крају било којег рада он ће наћи десетак цитираних радова ранијих аутора који се односе на исту тему. У последњем броју једног нашег часописа један совјетски научник уз рад од десет страна цитира око две стотине радова. То је свакако претерано и везано за експозициони карактер рада, али је зато сигурно неуобичајено оскудно Петровићево цитирање и то обично у фусноти или у тексту где се наводе само име аутора, а не рад и страна на којој се може наћи оно о чему Петровић говори. Био је то у оно време манир, који није уосталом карактеристичан само за Петровића. С једне стране, то је последица стварне оригиналности његових радова а с друге, указује на жељу М. Петровића да се не поводи за другима, већ да друге води. Он је у томе и успевао. Вероватно је он најцитиранији аутор српски у области математичких наука до данас. Чудновато је, међутим, у свему томе можда и то што га страни аутори чешће цитирају него домаћи. Узрок томе је вероватно то што је Петровић многе радове штампао на француском, при чему је само један део радова штампао и на српском у домаћој верзији, с друге стране, мали је број аутора који су његово дело директно следили и развијали. Можда је то случај само с теоријом математичких спектара и донекле с диференцијалним једначинама.

Што се тиче садржине Петровићевих радова треба на прво место поменути прилоге квалитативној интеграцији диференцијалних једначина. Петровић је умео, по особинама коефицијената у диференцијалној једначини, да предвиђа особине њених решења, а да не врши формалну интеграцију једначине. Тако је сазнавао за нулу и полове решења, тако за периодичност, позитивитет, непрекидност или аналитичност.

За слушаоце стручњаке могло би се рећи да је квалитативна метода у теорији диференцијалних једначина предмет истраживања и у данашњој модерној математици. Постоји и савремена совјетска монографија посвећена овој теорији. Нестручњацима ће вероватно бити од користи ако се нагласи да квалитативна метода у теорији диференцијалних једначина одговара методи којом лекар, по квалитетним подацима о болести, предвиђа врсту обољења, њен даљи ток, њен претходни стадијум и узроке, њено понашање на примену терапије и слично. Да не употребљавамо техничке термине рећи ћемо да је Петровић у оваквом послу у математици био истински мајстор и да је највећи и најзначајнији број радова написао управо о овој теми. То је онај исти метод којим аутомобилиста по променама у звуку мотора закључује о неправилности и евентуалном квару у мотору и утврђује који је део оштећен и која је функција мотора и у којем степену неправилна.

Већи број радова Петровић је посветио методама срачунавања одређених интеграла. При томе се ванредно вешто користио функцијама комплексних променљивих, разлагањем у редове, разним граничним процесима и њиховом разменом, ставовима других аутора и све то умео смело да генералише. Како диференцијалне једначине, тако и одређене интеграле или редове, Петровић је обогатио новим класама специјалних трансцендентних функција које, расуте по његовим радовима, заслужују да буду систематизоване и као такве посебно проучене. Данас је познато више монографија о специјалним функцијама но ниједна не цитира Петровића. Наша би дужност била да Петровићеве резултате обновимо и уведемо у ову врсту литературе.

У алгебри Петровић се нарочито бавио распоредом нула полином у равни променљиве. И његов први рад, још из студентских дана, односио се на алгебру. Ове његове радове наставили су неки његови ученици. Данас располажемо кадровима способним да у овој области Петровићеве радове обнове и учине доступним данашњем читаоцу, повезујући га са мрежом проблема који се данас обрађују.

За Петровићев метод карактеристичан је његов покушај стварања нове математичке дисциплине коју је сам и крстио. То је теорија математичких спектара. Око четрдесет година прошло је од објављивања његове монографије на француском о том предмету. Време сасвим довољно да се теорија прихвати или одбаци. Може ли се сад рећи да та теорија није прихваћена у свету? Сем домаћих научника није познат ниједан страни који се одазвао или даље развијао теорију спектара. И док се код математичке феноменологије може жалити што је објављена само на српском, дотле се код теорије спектара то не може узети за разлог, јер је књига објављена у познатој издавачкој кући у Паризу на језику у оно време најчитанијем на свету. Радовали бисмо се ако би домаћи аутори својим напорима допринели да и ово дело Михаила Петровића заузме одговарајуће место у науци.

Идеју да ову теорију направи Петровић је добио служећи се својим омиљеним аналогијама из којих је извукао и огроман број других идеја. Као што физичар и хемичар по оптичком спектру може да закључује о карактеру извора светлости и да сам извор непосредно не посматра, тако се једним јединим децималним бројем може описати читава једна функција сваки пут кад је њено описивање везано за пребројив скуп услова. Ови услови управо се и описују појединим групама децималних цифара, које одговарају спектралним пругама у оптичким спектрима и које су тамо носиоци одређених података о емисионом извору тих пруга. Од ове идеје до њене реализације пут је далек, али је Петровић умео да изађе на крај с многобројним тешкоћама које успут искрсавају, па је сам нашао и примене у аритметици, у теорији редова, у теорији израчунавања одређених интеграла, у теорији аналитичких функција и слично. У раду о бројним спектрима појава Петровић се користи и резултатима из теорије скупова што је иначе реткост у његовим радовима. Чињеницу да скуп тачака у квадрату има исту моћ као и скуп тачака на дужи хтео је да искористи да једним децималним бројем карактерише и функције од две, па тиме и од више променљивих. Тиме се његова теорија спектара преноси и на функције више променљивих. Основну тешкоћу: недостатак уноформности у поступку, недостатак природног пута или коначног представника — ни сам Петровић није могао да отклони.

Док је у теорији математичких спектара аналогија помогла Петровићу само у формирању полазне поставке дотле је у теорији математичких машина аналошко језгро чинило суштину самих радова. Идеја да се две појаве које се врше по истим законима аналитички формулисаним искористе тако да се једном од њих проучавају оне друге није у основи Петровићева. Међутим, у том правцу Петровић је ипак дао неколико оригиналних радова за интеграцију диференцијалних једначина помоћу апарата са течношћу, помоћу хемијских процеса, што данас представља најмодернију ствар у области конструкције рачунских машина. Као што је познато: електронске рачунске машине, иако због брзине рачунања представљају средство без којег се не може замислити савремена технологија, ипак нису погодне у свим ситуацијама. Варничење електричних уређаја у неким случајевима је опасно, рецимо у космичким бродовима, кад се ради са запаљивим материјалима, у рудницима и слично, а у другим ситуацијама, електромагнетске сметње ометају њихов правилан рад. Управо ту и тада корисне су пнеуматичне машине. Ако се Петровићу у овој области не може дати апсолутни приоритет, а оно се сигурно може издејствовати за њега место међу оснивачима ове научне дисциплине. Хемијскокинетичке машине још нису ступиле на сцену, али се може замислити да ће и оне једног дана бити у употреби. Петровић би у том случају свакако могао бити сматран за оснивача те дисциплине. Задатак његових следбеника и ученика, наследника његове научне баштине, био би да њему изборе место у историји ове области, место које је свакако једно од водећих.

КОНСТАНТИН ОРЛОВ

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ НА БЕОГРАДСКОМ УНИВЕРЗИТЕТУ

По повратку из Француске 1894. године Михаило Петровић је био постављен за редовног професора Велике школе иако је у то доба имао само 26 година. Тиме су се пред Михаила Петровића поставили веома тешки и одговорни задаци.

Основни задатак је био да у главни град прекумановске Србије пренесе у малом, сасвим у малом, величанствена постигнућа математике из једне од ондашњих математичких метропола света — Париза. Али како то урадити, када је овде он скоро сам, а тамо је плејада славних научника, када је овде школа сасвим другог типа са врло скромним традицијама, а тамо је универзитет са вековном традицијом и огромним могућностима. Како? Од чега почети? Шта ставити у први план? То су била тешка питања која је себи, сигурно, безброј пута поставио млади Михаило Петровић.

Живот не трпи одлагање ни оклевање, Михаило Петровић се за нешто морао определити. И он се определио. Главни циљ је универзитет. Без универзитета је немогућ прави научни напредак. Према томе, треба што пре створити услове за оснивање универзитета. То постаје главни циљ Михаила Петровића целе прве деценије његова рада. Михаило Петровић је дубоко схватио да главни услов, без кога се фактички универзитет не може основати, јесу научни радници. Никакве организационе схеме и материјални услови не могу заменити недостатак научника. И поред своје пословичне скромности, Михаило Петровић је знао да је баш он највећа вредност ондашње српске математике и да зато мора што пре да се изгради у солидног научника. И он се дао на посао, знајући да ће много штошта у развитку науке — специјално математике — у Србији зависити од његове личне афирмације. После његове запажене докторске дисертације из диференцијалних једначина, најбржи и најлакши пут ка личној афирмацији водио је преко стриктног ограничавања на ову област. Ова област, сама по себи значајна, била је тада у пуном развитку и Михаило Петровић је у њој имао много шта да каже, а много је и казао. То значи, за најбржи лични успех било је најкорисније ограничити се на уску област, можда и што ужу област диференцијалних једначина, затворити се у „кулу од слонове кости" и што пре пожњети богату жетву личног успеха. Али Михаилу Петровићу лична афирмација није била циљ већ средство што је он током свог живота на веома јасан начин и доказао. За универзитет је кориснији научник широког спектра знања у више области математике, и не само математике, већ и њој блиских научних дисциплина, научник који би био у стању да покрене рад на стварању других научника чије би се области рада допуњавале, него уски стручњак из једне дисциплине. И Михаило Петровић је узео на себе изузетно тежак, нарочито за младог научника, задатак да поред диференцијалних једначина, којима ће се бавити целог живота, креативно овлада другим математичким дисциплинама, па и да да научне доприносе другим, блиским математици, наукама. И успео је за изузетно кратко време. За три непуне године (1894—1896) штампао је 16 научних радова, од којих 14 припадају математици, 1 механици и 1 хемији. Од математичких радова 7 су из диференцијалних једначина, 2 из одређених интеграла, 2 из теорије редова, 1 из теорије функција, 1 из алгебре, 1 из математичке феноменологије. Афирмација је ту, али интензитет научног рада не попушта. Тако за 11 година проведених на Великој школи број научних радова се пење на 54 и то из математике 45, из механике 2, из физике 3, из хемије 4. Од математичких радова из диференцијалних једначина 22, из одређених интеграла 7, из теорије редова 5, из теорије функција 4, алгебре 4, математичке феноменологије 3.

Осим тог научног рада, Михаило Петровић је из основе променио и модернизовао предавања из математике која је држао, што само по себи представља како огроман посао тако и огроман допринос настави математике. Тако обимним и разноврсним научним радом Петровић је доказао да је математика у Београду у сигурним рукама и да су на том пољу остварени сви услови за отварање универзитета. Наравно, да ни сама математика, ни сам Михаило Петровић, не би били довољни за стварање универзитета. У то доба интензивно се радило и на другим катедрама Велике школе, али допринос Михаила Петровића успеху тог великог подухвата и те како је значајан.

Циљ је остварен. Универзитет постаје стварност. Осам најистакнутијих професора Велике школе постављају се за редовне професоре Универзитета и њихова је дужност да бирају остало универзитетско наставно особље укључујући и редовне професоре. Међу њима је, наравно, и Михаило Петровић, најмлађи по годинама, коме је тада 37 година. Али времена за одмарање на ловорикама нема. Универзитет је за њега нова обавеза. Треба оправдати поверење и изборити афирмацију за Универзитет, односно његов Филозофски факултет. Путеви су исти: научни рад и усавршавање предавања. Али се појављују и нове бриге: довођење нових професора на факултет и стварање научника од свршених студената. Да би помогао млади Филозофски факултет и у организационом смислу, Михаило Петровић пристаје да буде декан (1908/9), а затим четири узастопне школске године продекан Факултета. Много касније, 1927. године, Михаило Петровић је једногласно изабран за ректора Универзитета, али се не прима ове дужности. Из овог се види да почасти саме по себи нису привлачиле Михаила Питровића. Огромне напоре Михаило Петровић улаже у формирање нових научника — математичара. Долазе ратови, а затим се ствара Југославија. Промена је огромна, за шест година, од 1912. до 1918, Београд, од престонице пре-кумановске Србије, постаје престоница велике Југославије. Могућности су неупоредиво веће, али истовремено и обавезе. Филозофски факултет, који је обухватао и природно-математички, брзо напредује и шири се. Повећава се број група, број професора и доцената, број студената. Математички завод, коме фактички (не увек и номинално) скоро цело време између два рата стоји на челу Михаило Петровић, (до 1938. као редован професор, а даље као хонораран редован професор), обухвата теоријску математику, примењену математику и астрономију. Михаило Петровић улаже велике напоре у консолидовање ових група, њихово повезивање у целину, стварање заједничке библиотеке, веома добро снабдевене часописима и књигама. Колико се његова концепција показала чврста, најбоље показује чињеница да и сада, 25 година после његове смрти, у из основа промењеном друштвеном уређењу, на факултету који се већ 20 година не зове Философски, већ Природно-математички, постоји још увек Математички завод, који обухвата катедре математике, механике и астрономије, сада и са Нумеричким институтом као посебном јединицом, са заједничком библиотеком која је изнова створена, јер је стара, коју је тако брижљиво и са толико љубави стварао Михаило Петровић, изгорела скоро цела, последњих дана окупације, у тренутку када су се већ водиле борбе за ослобођење Београда.

Делатност Михаила Петровића између два рата можемо поделити на научни рад, стварање научног подмлатка, наставу на Универзитету и писање универзитетских уџбеника, али таква подела, уосталом опште усвојена бар у односу на Петровићеву делатност има у себи ипак нечег вештачког, јер сви ти делови сачињавају тако чврсту целину да је између њих немогуће повући оштру границу, што је уосталом и непотребно. Они се не само допуњују већ и преливају један у други. О научном раду Михаила Петровића је већ говорено на овом скупу. Одлучити се коју од ових делатности ставити на прво место, било по њеном објективном значају, било по томе колико је напора, бриге и љубави њој поклањао сам Михаило Петровић је веома тешко, вероватно да то није ни потребно. Све те послове радио је Михаило Петровић са скоро подједнаком темељношћу и љубављу. Сваком од својих ученика, за кога је сматрао да може докторирати, свесрдно је помагао. За скоро пола века наставничке каријере на Великој школи и Универзитету није пропустио ни један час. Уџбенике је припремао на основу широког познавања материје и брижљивог проучавања уџбеничке литературе, уносећи увек толико оригиналности да ниједан његов уџбеник нема велике сличности ни са једним од уџбеника који је већ пре тога постојао у светској уџбеничкој литератури.

Неком од ових врста делатности ипак се мора почети. Почињем са делатношћу на стварању научног подмлатка. Можда зато што се у неким радовима његових ученика може запазити велики утицај њиховог учитеља. Михаило Петровић је имао свој специфичан начин руковођења. Он је пажљиво пратио развитак сваког свог ученика, свесрдно га помагао, али увек са неким префињеним тактом, просто као да се плашио да импозантношћу своје научне фигуре не наметне неком од својих ученика неки свој став, или своје интересовање и тиме не поремети танани процес развијања интегралне научне индивидуалности. „Није ми циљ да стварам петровчиће", што је значило неке своје копије у науци, рекао је једном у искреном разговору. Његово руковођење се није завршавало кандидатовим докторатом већ се протезало и даље у облику драгоцених савета у току даљег рада. Ти савети су му одузимали много времена и захтевали много труда јер, темељан у свему, није олако давао ни савете, већ би о свему претходно добро размислио, па тек онда давао савет, пазећи при томе не само на садржину савета, већ и форму, како би тај савет био путоказ за један од могућих путева, а не притисак у једном одређеном правцу. Укупан број кандидата који су докторирали код њега је 11, од тога пре првог светског рата 2, а 9 после. По темама већина је из диференцијалних једначина, али од 1924. године појављују се тезе и са другом садржином, из других области анализе, из алгебре и математичких спектара. Тезе су се онда штампале као посебна издања о трошку кандидата, а научни радови у *Гласу* Српске академије наука или посебним издањима Академије, односно у издању Југославенске академије знаности и умјетности у Загребу или у иностранству. Заслугом Михаила Петровића број ових радова постајао је из године у годину све већи, и указала се потреба за искључиво математичким (у ширем смислу) научним часописом. Та потреба се поклапала са општим тенденцијама развитка специјализованих научних часописа у свету. Требало је још само наћи финансијска средства и Михаило Петровић их је нашао (из задужбине Луке Ћеловића-Требињца). И други Петровићев сан се остварио. Београд је сада, 1932. године имао не само универзитет с младом али већ изграђеном традицијом, с бројним факултетима и великим бројем студената, већим бројем доктора математике, већ и искључиво математички часопис *Publications mathématiques de* *l'Université de Belgrade*, који је он заједно с другим наставницима математичке катедре основао. За разлику од *Гласа* Српске академије наука у коме су радови штампани на српскохрватском језику (тек од 1933. штампани су, али само у кратком изводу и на страном језику у *Bulletin de l'Academie Serbe de Sciences)*. Радови у новом часопису штампани су на страним језицима. Према томе „*Publications*..." је био први специјализовани математички часопис у Југославији и први математички часопис у Југославији у коме су радови штампани на страним језицима. Корист од покретања часописа била је вишеструка: 1) Око универзитета су се окупљали сви математичари не само наставници Философског и Техничког факултета већ и други, махом доктори математике, који су били запослени ван Универзитета, у средњим школама или на другим дужностима (тада је систематизацијом места било предвиђено на Универзитету врло мало места за математичаре, а асистентских места било је много мање него професорских, виших школа тако рећи уопште није било, тако да су доктори математике морали да се запошљавају у средњим школама, министарствима или Астрономској опсерваторији). 2) Ово окупљање обухватило је математичаре и ван Београда, махом са Загребачког и Љубљанског универзитета. 3) Штампањем на страним језицима радови југословенских математичара постајали су приступачнији страним научницима. 4) Тиме је створена могућност шире сарадње са страним научницима, који су постајали све заинтересованији за сарадњу, која им је давала могућност да штампају на свом језику радове у београдском математичком часопису. Ова издавачка делатност изгледа овако. Од 1932. године сваке године је излазио по један том, који је некад имао и више од 300 страна. Интересантно је истаћи како је Михаило Петровић, наравно уз подршку осталих математичара, организовао рад на издавању часописа. Михаило Петровић није волео компликовану и педантну администрацију, већ га је интересовала суштина подухвата. Издавање часописа он није замислио и остварио као посао прикупљања радова, одређивања референата, писмене реферате о радовима итд., већ као стваралачки рад живом дискусијом. Зато је истовремено са часописом који је, разуме се, као сви часописи, морао да поштује извесне форме, основан и неформални клуб математичара без правила, управе, председника, секретара, годишњих избора и свега осталог што карактерише клубове. Чланови клуба, без чланских карата, били су математичари-наставници Философског и Техничког факултета Београдског универзитета. Састанци су се одржавали једанпут месечно, на њима су излагани радови чланова као и радови других математичара и у дискусији се доносила одлука: који рад и у коме облику треба штампати. Наравно да је такав начин функционисања био могућ само захваљујући великој објективности Михаила Петровића, а нарочито огромном угледу који је он уживао. Овај клуб математичара се може с правом сматрати као предходник данашњег Математичког института, који сада окупља велики број математичара.

Интересантно је пратити даљу судбину часописа *Publications*... Као и Математички завод, о чему је било речи раније, он је за 25 година наджививео свог оснивача и излази и данас под насловом *Publications de l'Institut mathématique*, додуше, не више као једини специјализовани математички часопис у Београду.

Други светски рад је прекинуо и рад клуба математичара и издање часописа *Publications*... Михаило Петровић је отишао у заробљеништво, одакле ће се вратити болестан и занавек склопити очи не дочекавши ослобођење.

После ослобођења *Publications*... издаје Математички институт Српске академије наука (до 1961), а од 1961. издаје га садашњи Математички институт.

Ова трајност свих творевина Михаила Петровића, скоро без икаквих суштинских измена, најбољи је доказ да су оне плод дуготрајног проучавања и поступног, али врло брижљивог и истрајног рада.

Брилантан Петровићев научни рад и веома успешно стварање научног подмлатка могло би, недовољно проницљивог посматрача, навести на мисао да редовна универзитетска настава Михаила Петровића иде некако у други план његове тако плодне делатности. Ништа није погрешније од овог закључка. Петровић је по природи био прави педагог и као такав је још у раној младости, (вероватно под утицајем његовог професора Нешића, који је био изврстан предавач, и француских великана математичке науке, који су њему предавали) схватио да је настава као ланац. Довољно је да само једна карика попусти и ланац се кида. Универзитетска настава је у том низу од одлучног утицаја и на науку и на средњу школу. Сваки недостатак у универзитетској настави неминовно ће се испољити у средњој школи, а затим ће повратном спрегом — погоршавајући спрему оних који долазе на студије — снижавати ниво универзитетских студија и тако, дејствујући у круг, деградирати и средњу школу и универзитет и научни рад.

Михаило Петровић је волео школу и студенте, волео је младост, живот, покрет, промену. У наставном раду видео је стваралаштво високог ранга, које може ићи до виртуозности, где нема места импровизацији, где све мора бити дубоко промишљено, дубоко доживљено, па тек онда може бити с пуним успехом усвојено од стране студената. Час из математике за њих може бити интелектуални доживљај, а сасвим мали детаљ, као у сликарству, може покварити целу слику. Знао је да нема и не може бити савршене наставе, савршенству се само може тежити, да с наставом треба живети, перманентно је усавршавати и никад не бити потпуно задовољан самим собом.

Полазећи од ових поставки, а веома темељан у сваком послу без изузетка, Михаило Петровић је брижљиво приступио планирању наставе. План се очигледно мењао из једне фазе развитка математичке групе у другу, према општим тенденцијама развића ове наставе у свету, према броју и снази наставног особља. Зауставићу се мало детаљније на плану који је био у важности крајем двадесетих и током тридесетих година. Михаило Петровић је био свестан да је највећи научник и најбољи предавач теоријске математике. Осим тога, знао је да физички не може предавати на свим годинама. Стога је направио такав план да његов додир са студентима буде што кориснији, како с гледишта да он што раније, још у првом семестру упозна студенте, односно запази ко од њих има израженије способности, тако да и они поносни и поласкани тиме да њима — бруцошима — предаје највећи српски математичар, још са већим еланом крену на посао. У ту сврху, Михаило Петровић је издвојио из диференцијалног рачуна посебну малу целину, теорију извода, и искључиво сам предавао тај предмет. Изузетно оригиналан, Михаило Петровић је успевао да и тамо где тако рећи скоро уопште није била могућна оригиналност, ипак нађе оригинално и врло успешно решење. Велики значај придавао је своме учешћу у завршној фази студентског школовања и сматрао да при крају студија треба поново да се сретне са оним истим студентима којима је предавао на првој години, како би их проценио како по њиховој апсолутној вредности, тако и по ономе колико су напредовали за последње две године; све ово било је од великог значаја приликом руковођења при изради докторских дисертација. У овој завршној фази Михаило Петровић је предавао теорију функција комплексне променљиве (како општи део, тако и целе и мероморфне функције), затим елиптичке функције. Од предмета везаних за диференцијалне једначине предавао је интеграцију диференцијалних једначина помоћу редова. У сваком од ових предавања Михаило Петровић је нарочито полагао на то да да једну чврсту целину не упуштајући се у споредне детаље. Излагање на часовима било је увек живо, сигурно, научно, али без претеране педантерије.

Остаје да се осврнем на Петровићеве уџбенике. Михаило Петровић је дао читав низ скрипата, која су годинама замењивали уџбенике. Дотирање универзитетских уџбеника уопште није постојало, а сви предмети, које је предавао Михаило Петровић, били су исувише специјални да би могли имати шири круг читалаца. Тек тридесетих година створена је могућност за издавање таквих уџбеника и Михаило Петровић се, иако у седмој деценији живота, свесрдно прихватио писања уџбеника, како би олакшао студентима математике.

Михаило Петровић је написао укупно три универзитетска уџбеника:

1) Бројни размаци
2) Елиптичне функције

3) Интеграција диференцијалних једначина помоћу редова. Концепција сва три уџбеника је оригинална и несумњиво доказује да је аутор дуго прикупљао материјал и размишљао како о општим цртама тако и о свим детаљима. Све оно што је речено о његовој настави важи у истој мери и за његове уџбенике.

Као закључак може се са сигурношћу казати да целокупни математички живот у нас и данас, 25 година после смрти Михаила Петровића, почива на оним темељима које је чврсто и пожртвовано поставио Михаило Петровић својим несебичним радом.

ЂОРЂЕ М. КАРАПАНЏИЋ

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ И ЊЕГОВИ УЧЕНИЦИ

Врло широк дијапазон деловања у областима врло различитим — једна је од особености којима се одликује обимно дело Михаила Петровића.

У многоме, може се уочити да је Петровићево интересовање обухватало све нивое: од врло замршених проблема теорије функција, квантитативне теорије диференцијалних једначина, преко физике и хемије, до најшире схваћене феноменологије и до чланака у Наставнику, Гласнику Професорског друштва па до духовитих додатака за читање у уџбеницима проф. Билимовића и Анђелића намењених ученицима некадашњих нижих и виших разреда гимназије.

Ово сведочи колико је Михаило Петровић имао интересовања за све видове математике, и оповргава мишљење да Петровић није обраћао пажњу на инструктивну страну математике, као и то да је чак био и противник таквих настојања.

Сви који су слушали Петровићева предавања, знају са коликом јасноћом и повезаношћу су биле изложене врло тешке области математичке анализе. Знају и са колико простих потеза је успевало Петровићу да дође до сржи излагања које је у питању. С њим је просто било срасло уверење да онај ко познаје одређену материју мора је излагати само — добро, у оном смислу те речи који значи само суперлатив. У томе је свакако био утицај његовог београдског професора Велике школе Димитрија Нешића као и његових бриљантних француских професора Jules-a, Tannery-ja Charles-a, Hermite-a, Paul-a, Painlaive-a и др. Ипак, Петровић је био против нечег — а то је празан, несадржајан, пуки формализам, који је фаталан баш у инструктивним потезима.

Да је Михаило Петровић поклањао нарочиту пажњу својим ученицима, то се види из интересантне чињенице да је за време 1905—1940. г., дакле за 35 година, докторирао много већи број младих људи него и код једног професора ондашњег Философског факултета — који је обухватао садашњи Природно-математички, Филозофски и Филолошки факултет, а вероватно да је по томе Петровић међу првима — ако не и први — на целом ондашњем Универзитету. У поменутом периоду докторирали су Младен Берић (1911), Сима Марковић (1913), Тадија Пејовић (1923), Радивоје Кашанин (1924), Јован Карамата (1926), Милош Радојчић (1928), Драгослав Митриновић (1933), Данило Михњевић (1934), Константин Орлов (1934), Драгољуб Марковић (1938), Петар Музен (1939), Војислав Авакумовић (1940).

Али не само да је Петровићева преокупација била то старање о тим највишим формама делатности млађих генерација, већ је Петровић и скромнијим потезима својих ученика поклањао пажње. Тако је он са симпатијама гледао на покушај ондашњих студената математике да издају свој часопис, и кад су у част његове седамдесетогодишњице 1938. године издали један број свог „Математичког весника" са својим прилозима штампао је и Петровић заједно са својим ученицима свој прилог *Осетљива места обичних и диференцијалних једначина.*

Том приликом је Никола Салтиков написао чланак о животу и раду Михаила Петровића, Милан Недић чланак о позиву наставника а један прилог је дао и Јован Карамата. Поменути студентски лист је издавало *Удружење студената математике Београдског универзитета.*

Већи број чланака тог Друштва ради и после рата и оснива 1949. г. Друштво математичара, физичара и астронома НР Србије, чији је први председник био проф. Пејовић.

Пре рата проф. Пејовић је био један од оснивача и председник Југословенског математичког друштва, основаног 1938. у Београду, које се одржало до 1941. године.

После рата 1949. г. излази и лист „Весник" Друштва математичара, физичара и астронома НР Србије, који је у неку руку продужење оног часописа Удружења студената математике.

Око тог часописа окупљао се знатан број некадашњих ученика Михаила Петровића из многих генерација — поред и оних млађих генерација које пристижу.

Тако у садашњем Друштву математичара, физичара и астронома СР Србије које броји 1000 чланова, скоро половина чланова су ученици Михаила Петровића.

Прва серија од 16 књига часописа „Весник" са знатним бројем радова углавном из области класичне анализе прилог је ученика Михаила Петровића.

Тај круг ученика Михаила Петровића шири се преко низа наставника средњих школа и школских писаца, међу којима су најпознатији Милан Недић и Властимир Стајић.

Извесно је да Друштво математичара представља најшири форум који окупља математичаре разних профила и на данашњи дан приликом стогодишњице његовог рођења, ми његови ученици — не можемо говорити о Михаилу Петровићу само са једног строго објективистичког гледишта, ми га гледамо из другог угла: ми још чујемо његове речи — његов живахан говор, и видимо његове хитре покрете, и после толиког времена остало је нешто јако сугестивно што продубљује и само његово име.

Михаило Петровић је својом непосредношћу ширио доминантан утицај и против своје воље.

Колико је тај утицај јак, види се и по томе што су се оне дисциплине које он сам није предавао спорије развијале на Београдском универзитету — иако Петровић ни у једној прилици није фаворизовао поједине области математике над осталима.

Стогодишњица рођења Михаила Петровића пада само месец дана раније него двадесетпетогодишњица његове смрти. Тај датум неће можда ничим бити обележен, али баш тим поводом оно што можемо осетити као прекор сами себи — то је да ма у каквом облику није проучено његово дело у целини, сем у неким случајевима, иако има разлога да се верује да су многе идеје о којима се данас у науци говори — антиципиране у његовом делу.

Оправдање за то постоји: до данас нисмо имали издање његових списа и тако је дело Михаила Петровића остало неприступачно ширем кругу математичара. Али и поред тога — морамо мислити на свој дуг према делу Михаила Петровића.

Ученици Михаила Петровића окупљени у Друштву математичара, физичара и астронома СР Србије и Математичком институту придружују се данашњем слављу не само по професионалној обавези већ по осећању поштовања и љубави према успомени на Михаила Петровића, који је за све генерације Београдског универзитета, у току пола века, био светао путоказ по својим особинама човека и научника.

Ученици га неће никада заборавити — а покољења која долазе цениће га по његовом импозантном делу.

МИЛАН ЂОКОВИЋ

О КЊИЖЕВНИМ РАДОВИМА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

Најзначајније што је Михаило Петровић написао изван своје уже струке и безмало све што спада у његове књижевне радове објавила је Српска књижевна задруга; њој је велики математичар тестаментом оставио и рукопис своје последње књиге, завршене пред смрт, *Метафоре и алегорије*. За Српску књижевну задругу је част што је међу своје одане пријатеље и сараднике могла да уброји Михаила Петровића, као што је част за њеног данашњег председника што може да се, у њено име, прикључи овом свечаном скупу и одавању признања великом сину нашег народа.

Ако књижевни радови Михаила Петровића не могу, можда, да стану упоредо са оним што је његов стваралачки дух дао науци, они су, неоспорно, један од најдрагоценијих прилога популарисању научне мисли на нашем језику; уз то, његови књижевни радови представљају велики допринос познавању наше средине и нашег човека у ранијим временима; зато би, без њих, наша писана реч била сиромашнија.

Оно што називамо књижевним радовима Михаила Петровића није плод имагинације. То није ни скуп одабраних података из стварности који се слободним стваралачким процесом трансформишу у нове целине. Књижевност Михаила Петровића је запис једног посматрача, али врло проницљивог посматрача стварних збивања. То је акт у којем су се нашли заједно научник који проверава и писац који своја запажања, било да су она потекла из научног рада било да извиру из животног искуства, хоће да саопшти ширем кругу људи.

Говорећи о рударском инжењеру Драгутину Поповићу, који је у првој и другој деценији овога века ишао као учесник и вођ експедиције у поларну област на рударска истраживања за стране компаније, Петровић о њему бележи да „није био само професионални истраживач", него „човек који је умео да осети лепоте поларне пустиње" и да са „песничким заносом" опише те лепоте „у бескрајном простору, у недогледним снежним и леденим равницама, у огромним леденим брдима која пливају између ледених санти носећи на себи беле медведе, морсеве, фоке и водене поларне птице" . . . , „у величанственој усамљености у којој човек непосредно општи с небом". Све то што је Петровић рекао о другоме могло би, дословно, да се примени на њега самог; и ови изломљени цитати као да су део исповести у којој Петровић објашњава сопствену мотивацију за далека путовања и сопствено усхићење пред необичним чарима природе. Ово није усамљено место у Петровићевим радовима које нам говори о његовим интимним побудама да се, повремено, бави књижевношћу. Он је чврсто веровао да између науке и поезије има заједничког имениоца, неке дубоке везе, и такво његово веровање се и данас све чешће потврђује и науком и поезијом. У децембарској свесци *Српског књижевног гласника* из 1925, посвећеној Његошу, Петровић је објавио чланак *Једна заједничка црта науке и поезије*. Ту „заједничку црту" он овако формулише: „Као правци духовне активности наука и поезија се разилазе, и на први поглед изгледало би да немају и да не могу имати ничега заједничког. Па ипак" . . . „ права поезија и истинска наука имају не само додирних тачака, већ чак и дубоких заједничких црта. Једна од таквих црта, и то баш она у којој је по кашто тешко разазнати шта је ту наука а шта поезија, јесте *откривање и искоришћавање сличности међу диспаратним елементима и фактима*". Ове идеје ће Поповић развити у *Метафорама и алегоријама* а закључак његових поменутих размишљања из 1925. био је да се наука и поезија „одмах после таквих састанака разилазе, идући свака на своју страну, једна за лепим, друга за истинитим". Очевидно да и само ови истргнути ставови из његових философских разматрања довољно јасно потврђују колико је Петровић своје бављење књижевношћу сматрао логичким наставком свог научног рада.

Али се Петровић интересовао и за питања која непосредно спадају у област књижевности и успевао да врло инструктивно и методолошки врло убедљиво, као прави историчар књижевности, покрене нека од тих питања и пружи одговоре на њих. Такав је, на пример, његов рад у *Чупићевој Годишњици* под насловом *Једна енглеска књига у нашој преводној књижевности прошлог века*. Са финим хумором у подтексту Петровић говори о једној врло распрострањеној лектири своје ране младости, делу које је дошло, скоро би се рекло залутало, у наше крајеве, јер га преводилац Лаза Зупан није умео да представи читаоцима и оно је, и поред велике популарности, остало недовољно јасно. Петровић је, са осећањем дужности малтене књижевног историчара хтео да баци светлост на писца и генезу дела. Реч је о књизи Енглеза Џемса Џестиниана Мориела, дипломате, који је узео на себе да својим савременицима дочара више психолошку него друштвену слику ондашње Персије са њеним врло небулозним и смешним представама о Европи, нарочито о Енглеској и Француској. Други пример Петровићевог залажења у питања историје књижевности је за нас значајнији. Мислим на његов рад у *Прилозима* за 1938. год. (свеска у част Павла Поповића, једног од најприснијих пријатеља Петровићевих), под насловом *Једна недовршена или загубљена приповетка Стевана Сремца*. Треба подсетити да је Сремац био од оних писаца који врло дуго и стрпљиво прикупљају *материјал* пре него што започну да пишу. Дражж овог чланка је, пре свега, у томе што нам непосредни сведок даје обавештења како се Сремац припремао да пише приповетку, вероватно једну од оних које су личиле на мале романе, о београдским аласима, с којима га, сигурно, нико тако добро није могао да зближи као Петровић. За проучавање Стевана Сремца то је детаљ који има своју вредност, јер се, евентуално, може претпоставити да је прерана и изненадна смрт овог приповедача лишила нашу књижевност можда исто онако богатог београдског мотива какав је, знамо, био нишки. Не мања драж Петровићевог чланка је и у томе што он, ненаметљиво, хоће да у нама изазове утисак шта је књижевност изгубила управо због ове, недовршене, приповетке. Тако овим поводом најбољи и најаутентичнији познавалац живота на дунавској обали и Дорћолу старог Београда даје нашој историји веома занимљиве податке о једној професији, рибарској, која је, у свом некадашњем облику и некадашњем колориту, нестала заувек. Уместо Сремчеве приповетке, добили смо од Петровића, на његов конкретан, сажет и јасан начин скициран лик неоствареног Сремчевог јунака: „То је био рибар средњих година, нарочита симпатија Сремчева” . . . „Алов се разбацивао по широкој реци свакога сата преко ноћи; између два *мета* скупљали смо се сви око ватре, пекли рибу, пијуцкали и слушали разговоре и приче рибара, понајвише Кркље. Он је као дечак био питомац Српске матице у Новом Саду; из завода је утекао право у рибарске шегрте, у рибарству провео век и 1915. године погинуо на Ади Циганлији. Као младићу, у једној алаској свађи, пробушено му је ножем грло; у рану је уметнута метална цевчица, па је све то лепо зарасло и није му сметало, осим малога кркљања када се наљути. Сремац је највише волео њега слушати, смејати се његовим рибарским авантурама и начину како он то прича, па је с времена на време убележавао по нешто од тога у своју бележницу”. Из то мало Петровићевих речи ми наслућујемо како је, заиста, у Сремчевој имагинацији, могло да испадне занимљиво животно путовање тог Матичиног питомца који је, гоњен нагоном за авантурама, напустио неку удобну грађанску, занатлијску или трговачку каријеру у Новом Саду, па се отиснуо међу одрпане дорћолске рибаре да задовољи страст за неочекиваним и неизвесним, да доскочицама увесељава не само своје друштво него и једног мајстора хумора и с њим људе највишег образовања док седе око његове чорбе у казану на веригама и да, кад је непријатељ напао нашу земљу, погине, крај суседне реке, на Ади Циганлији, као анонимни бранилац слободе Београда.

Петровић је, као писац, имао склоност према необичном. Шта је друго *Роман јегуље* него жеља да се читаоци уведу у тајну рибе чији живот, или чије размножавање мора да покрене радозналост и научника и обичног човека? Ако је један песник Метерлинк, са упорном страшћу научника пратио пчеле и мраве и дивио се њиховом инстинкту организатора и градилаца живота, онда је наш научник са уметничком осетљивошћу описивао једну заиста необичну манифестацију инстинкта за продужењем врсте.

И необичан предео и необичне животињске врсте су у жижи интересовања Михаила Петровића као писца. Али исто тако и необичан човек, који се издваја из нормале и који и иначе привлачи књижевна пера. Посета острву Свете Јелене сигурно да није случајна и оно што је, инспирисан том посетом, Петровић написао не третира случајно мотив о судбини велике личности над којом се, кад падне, ломе тупа и нејуначка копља ситне освете. Једноставна прича о необичној судбини великог војсковође не би, сигурно, била ни написана да последње боравиште Наполеоново не подсећа на вечити мотив о непостојаности људске славе, на чињенице да је, после смрти великог Корзиканца, док се још освета иживљавала, рушењем преградних зидова од његове спаваће собе и радног кабинета начињена штала за говеда, а од собе у којој је издахнуо — млин. Петровић каже, пре него што приђе опису, да му је посета острву донела узбуђење, али ове податке наводи с готово научном објективношћу, мирно, свестан да, понекад, порука самих чињеница говори најречитије.

Два хобија Петровићева, риболов и виолина, морала су да нађу места у његовим нематематичким радовима. Не само о јегуљи, он је написао о рибама и рибарењу далеко више него што се обично мисли. О свирању на цигански начин је, ипак, објавио један од својих најлепших текстова и њиме подигао споменик циганском ћеманету Мије Сеферовића-Јагодинца. Ми морамо веровати Петровићу, који је и сам био одличан виолинист-слухиста, кад каже да је тај Мија надмашио све остале славне примаше-Цигане, да су његови меки и нежни прсти додиривали жицу „као да на њу мећеш мелем". Тај суд потврђује и етнолог и циганолог Тихомир Ђорђевић. „Може мислити ко шта хоће о циганској музици, али, каква је да је, каже Петровић, она је неоспорно . . .„саставни део наше народне културе". У портрету Мије Јагодинца, из пера Михаила Петровића, све је занимљиво и необично: не само његова музика него и његова несхватљива наивност, и његова породица са седам кћери и петнаест синова, и његова слава која га је одводила преко границе да свира пашама и страним дипломатама, па и његова трпеза чији је гост био и Михаило Петровић. Реалистичко сликарство је с највећом пажњом неговало портрет и трудило се да на платну изрази колико телесна још више душевна својства и да никако не изневери истину. Са таквим осећањем и укусом свога времена Петровић је умео да направи писани портрет и прича о Мији је узор те његове способности.

Књижевни радови Михаила Петровића су записи о виђеном и доживљеном. Ти записи су првенствено тачни. Али оно што је чињенично у тим записима има већу вредност од пресликане стварности, јер је обогаћено мишљу и осећањем једнога писца који из чињеница уме да одабере оне најкарактеристичније, да их складно и сликовито распореди, да их осветли изнутра, да им да поенту и поруку.

Петровић је припадао такозваном „београдском стилу”. Одлике тога стила, јасност у излагању и језик ослобођен од претходног језичког пуританизма с краја деветнаестог века, одлике су и његовог стила.

Петровић је задужио нашу писану реч и заслужио да, одајући му признање као великом математичару, придружимо и признање писцу чији су радови ушли у нашу културну баштину.

PAUL MONTEL

MICHEL PÉTROVITCH

J'ai fait la connaissance de Petrović en mai 1927 lors d'un séjour à Belgrade. Je connaissais sa haute valeur scientifique et me souvenais qu'il avait achevé ses études supérieures de mathématiques à l'Ecole Normale Supérieure de Paris et avait préparé en France son doctorat.

J'ai bénéfncné à ce moment, puis en 1932, durant un long voyage en Yougoslavie, de l'attachement qu'il gardait à mon pays et nous sommes liéf d'amitié.

C'était un grand pêcháur, d'abord dans l'océean des mathématiques, puis dans les eaux du Danube où il pêchait au filet. Il m'a instruit sur les poissons de cette région, le starlet, le som, le silure et singulièrement sur l'esturgeon qui remontait le flueve jusque vers Belgrade pour se débarrasser des sangsues et autres parasites du delta.

Il me contait l'histoire de cette statue de la Libération de Mestrović qu'on avait dû installer au Kalé-megdan, face à la Save et au Danube parce que sa vieille nudité offusquait la pudeur des mères de famille quand elle était placée sur la grande avenus qui y menait.

J'ai vu sa maison dominant la Save où il vivait avec sa soeur mariée à un professeur de droit. La porte en était reconnasable par les deux carpes scupées dans ses deux battants.

Dans le voisinage, le mur d'où, avec le prince Karageorgevitch, un obus le précipta dans le fossé qui les ensevelit.

Ce grand savant a profondément honoré sa patrie.

---

* Krajem 1966. poč akademik Jovan Karamata uputio je poznatom francuskom matematičaru i članu Srpske akademije nauka i umetnosti Paul Montel-u, da za ovu proslavu sastavi kraći tekst uspomena na Mihaila Petrovića. Prof. P. Montel, pored svojih uspomena, poslao je i prilog jedino još živog „normalca" Petrovićeve generacije (1890.) sa École Normale Supérieure-a, prof. Ch. Maurin-a. Oba priloga ovde objavljujemo.

CHARLES MAURAIN

PÉTROVITCH A L'ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Pétrovitch, quoiqu'étranger, avait été admis à prendre part au concours d'etrée à l'Ecole Supérieure, Section des Sciences, de 1890, et la façon dont il avait satisfait aux examens avait été si brillante qu'il avait obtenu d'entrer à l'Ecole dans les mêmes conditions que les élèves français. A cette époque les élèves de 1 ère et 2 ème années étraient répartis en plusieurs salles (thurnes en argot normalien); c'est ainsi que je me suis trouvé pendant deux années dans la même thurne que Pétrovitch, et de ce fait, particulièrement lié avec lui, ainsi que deux camarades disparus il y a longtemps. De cette promotion de l'Ecole Normale je suis actuellement le seul survivant.

Je ne suis pas mathématicien et ne saurais donner d'indications sur les études pour suivies par Pétrovitch.

C'était un charmant camarade, en général d'une bonne gaieté, parfois un peu taciturne: il jouait du violon à la manière tzigane, parfois nostalgique: son violon était toujors près de lui et il s'en saisissait sans raison apparente, touiours preêt à le déposer s'il pensait gêner le travail de ses camarades. Il aimait les longues promenades et nous entraînait parfois dans celles qu'il faisait à travers Paris ou dans les environs. Il aimait beaucoup la pêche: il portait sur lui une photo le représentant à côté d'un poisson, un esturgeon je crois, dont la longueur dépssait sa propre taille: il nous racontait des prousses de pêcheur, qui n'ont pas à prendre place ici, car elles n'avaient pas pour victimes les poissons rouges du petit bassin de l'Ecole Normale.

ECOLE NORMALE SUPERIEURE
Section des Sciences

Генерација 1890. године

ĐURO KUREPA

NEKA DOSTIGNUĆA U STOLEĆU 1868—1968*

Slobodan sam otvoriti ovaj opšti simpozij povodom stogodišnjice rođenja matematičara Mihajla Petrovića (1868—1968). Što je godina od Petrovićeva rođenja. Mnogo se je dogodilo u tih sto godina i to i u nauci i u tehnici i u umetnosti i u politici. Raspored snaga danas je posve drukčiji nego od onoga koji je bio pre 100 godina· upravo pre 100 godina, turska posada je najzad napustila Beograd; a danas je Beograd glavni grad države slobodnih južnih Slavena. Ono što se je pod Karađorđem isticalo: »male i velike škole, akademije i sveučilišta u državi postaviti« u punom je pogonu!

Od rezultata iz početne godine 1868. stoleća o kojem je reč spomenimo posebno dva otkrića jer nas ona oba upućuju na razmatranja izvan naših užih okvira.

Prvo otkriće:

1.1. Otkrit je jedan kemijski element koji nije bio poznat na Zemlji; naime engleski astronom J. Locker našao je u Sunčevu spektru crtu nepoznatu na Zemlji pa je nepoznat element prozvan helij (prema grčkoj rječi helos — Sunce). Istom 1895. našao je J. Relay taj element i na Zemlji.

1.2. Drugo otkriće: Italijanski matematičar Beltrami ostvario je neeuklidsku geometriju Lobačevskoga na euklidski način; time je definitivno bilo rešeno da je i ta nova geometrija bar toliko zorna koliko i euklidovska geometrija.

2. *Vrhunac u naziranju atoma kao nedeljivih sastojaka tvari.*

2.1. U 1968. god. izgradio je Mendeljejev svoju glasovitu tablicu kemijskih elemenata: to je završna faza gledanja na atome kao na nedeljive sastojke sa stalnom atomskom težinom, a ujedno početak nove ere u kojoj će redni broj atoma, dakle celi broj pridružen svakom kemijskom elementu igrati presudnu ulogu. To će se objasniti istom kasnije kad se bude saznalo tokom tih 100 godina o čitavoj

---

* Otvaranje Simpozija, 09. 5. 1968.

zamršenoj strukturi atoma: još sitnije čestice od atoma stupit će na pozornicu i to ne jedna vrsta nego više njih.

U svakom slučaju, shvatanje materija kao skup atoma i molekula dalo je izvanredne rezultate u kemiji, kinetičkoj teoriji plinova, na tome će se dalje izgrađivati naučno delanje i naučno gledanje na svet.

2.2. Zrnast sastav tvari, odnosno gledanje na tvar, materiju kao na nešto zrnasto, sastavljeno od sitnih delića i koje gledište je kulminiralo pred jedno stoleće dovelo je najzad čoveka do svesti da zrnast sastav pokuša tražiti svuda, baš svuda...

2.3. Ako bismo hteli dati jedan atribut stoleću naučnog rada i shvatanja u 1868—1968, ja bih upotrebio upravo reč zrnolik, odnosno zrnolikost, odnosno strukturalnost. Pri tome se radi o jedinkama ili sastojcima, članovima i njihovom manjem ili većem skupu. Taj se skup umnožava pridolaženjem kakve nove jedinke, novih jedinki koje su predhodno bile nepoznate ili naslućivane ili su stvorene na osnovu već poznatih jedinki, ili se skup poznatih članova uključuje kao član u kakvu zajednicu višeg reda, koja opet ulazi u sklop zajednice još vićeg reda, itd. To je misaoni put u jednom pravcu. Misaoni put u obrnutom pravcu, shvata jedinku kao nešto složeno od jedinki i delova nižeg reda; na kojima se ista misao provodi dalje.

Eto, ta tako jednostavna i svagdašnja slika, skupovno ili zrnoliko gledanje, daje neverovatan pečat stremljenjima i diostignućma u proteklih 100 godina (1868—1968).

Ogledajmo tu ideju u nekim oblastima.

3. *Matematika*

3.1. Skupovno gledanje na matematiku proširilo joj je domet uvođenjem novih brojeva, transfinitnih brojeva i nalašenjem zakonitosti među njima. Tako npr. nizanjem brojeva 1, 2, 3, ... n, $n+1$, ... prelazi se na odgovarajuću sveukupnost i onda dalje nastaju

$$\omega, \ \omega+1, \ \omega+2, \ldots$$

pa se stvar ponavlja bez kraja i konca! Time se dolazi kao do nekog strahovito dugog lanca, na osnovu kojega se dokazuju razne zakonitosti koje na drugi način ne umemo dokazati.

3.2. Tako npr. veza $x + x = x$ pri običnim brojevima vredi samo pri $x = 0$; naprotiv, svaki beskonačni glavni broj zadovoljava tu relaciju.

3.3. Skupovna razmatranja pokazala su, na jednoj strani, vrlo veliku raznolikost i pluralizam u matematici; na drugoj strani, ona su doprinela da se iskristališu neke tipične matematičke strukture kao što su: skupovno-logičke strukture, algebarske strukture, relacije, topološke strukture.

3.4. Kao vidan i vrlo upečatljiv oblik tih složenih razmatranja ukazujemo na pojavu elektronskih računala koji su izazvali i izazivaju pravi preokret u odnosu Čoveka prema Prirodi.

4. *Astronomija*

4.1. Čovek je na osnovu matematičkog aparata i merenja predskazao da postoje neka nepoznata nebeska tela; pronađen je Neptun — nađen je istog dana, 23. 9. 1846. pomoću dalekozora čim se počelo za njim tragati! Predviđeno je novo telo — i 1930. je pomoću fotografije pronađeno (današnji Pluton).

4.2. No, sve su to bila pojedina nebeska *tela*. Mnogo je veće dostignuće bilo kad je 1920. K. Lundmark dokazao da postoje i čitavi zvezdani svetovi izvan naše Galaksije. Bile su to magline i to spiralne, pa mnogo dalje: eliptične. Šta više, one su članovi skupova: nadgalaksija a dalje su metagalaksije, itd.

4.3. Otkrita su nebeska tela na tisuće puta gušća od najtežih metala (npr. Siriusov pratilac).

4.4. Dokazano je 1927. da se i naša galaktika vrti, a dokazano je da se galaksije međusobno razmiču.

4.5. Čoveku je pošlo za rukom da stvori nebeska tela, sputnjike i da ih ima kao tehnička pomagala u blizini Zemlje (Telestar) ili da ga šalju na Mesec, Veneru, Mars itd. U tom pogledu, 4. oktobar 1957. (pojava prvog veštačkog satelita!) i 12. april 1961. (let Jurija Gagarina!) ostat će zapisani kao krupni datumi u historiji čoveka!

5. *Fizika*

5.1. Stoney je 1891. uveo naziv »elektron« kao »atom elektriciteta«, Lorentz je 1895. dao matematičku teoriju elektrona; u 1897. se zapazilo da nabijene čestice katodnih zraka predstavljaju nešto sa masom mnogo manjom od atoma vodika; uskoro se pokazalo da se tu radi o struji elektrona. Znači, ima i manjih oblika nečega nego što je atom od H. A uskoro se videlo da masa elektrona zavisi od brzine kretanja, dakle da masa nije konstantna.

5.2. A već 1911. Rutherford je izgradio sliku atoma u vidu planetarnog sistema, o čemu je već Tesla imao slične slike; to je kao analogon Haeckelova principa iz živoga sveta prema kojemu jedinka odražava razvoj u malom čitave svoje vrste, odnosno svega živoga. A već 1913. je sazdan Bohrov model atoma sa svojim stacionarnim stazama elektrona. 1900. se uvodi čestica energije, kvant energije (Planck), a Einstein čak uspostavlja i količinsku vezu između energije i mase kao izrazit i tipičan primer korpuskularnosti; atomska energija i njena upotreba u uskoj je vezi s tom problematikom.

5.3. Kao posebno veliko dostignuće u fizici treba spomenuti izgradnju elektromagnetskog spektra: Proširenje onog uzanog dela od 4.10^{-4} cm — 8.10^{-4} cm koje zamećuje naše oko i to na kraće valove do γ-zraka radioaktivnosti, kosmičkih zraka dužine oko 10^{-12} cm, odnosno na drugu stranu, na dulje valove: infracrveni (10^{-2} cm), ultrakratki, kratki, radio-valovi itd.

5.4. I televizija se može shvatiti kao primer skupovnog nizanja...

5.5. I svetlo se shvata skupovno (foton, 1905, Einstein).

6. *Kemija*

6.1. Kao kulminacija atomističkog shvatanja i naglašavanja važnosti atoma kao nedeljivog samostalnog sastojka može se smatrati Mendeljejevljeva tablica prirodnih kemijskih počela; u toj tablici bilo je dosta nepopunjenih mesta no na osnovu drugih poznatih elemenata mogao je Mendeljejev zaključiti na pojedina svojstva onih neznanaca.

6.2. I dogodilo se tu nešto slično kao pre u astronomiji ili matematici: ti predskazani elementi počeli su da se otkrivaju: Element br. 31, galij (1875, Lecoq de Boisbaudran), br. 21, skandij (Nielson 1879), 32 germanij (1886. K. Winkler); 1898. pronađeni su: kripton, ksenon, neon koji zajedno sa helijem i argonom (1894, Ramsay) i Rn ulaze u istu skupinu; br. 84 polonij (1898. M. Sklodowska), br. 95 Am Amercij (1944, Seaborg), . . .

6.3. U tom nizanju kemijskih počéla premašilo se i broj 100 pa imamo počélo 101 Md (mendeljejevij), 102 No (nobelij), 103 Lw (lawrencij). Ne zna se za teoretsku granicu toga brojenja. U matematici, takve granice, teorijski, nema; no u stvarnim razmatranjima, stvar je drukčija.

6.4. U pogledu novih kemijskih otkrića teoretskih, praktičnih i proizvedstvenih možemo spomenuti ovo:

Proizvođenje veštačkog benzina (F. Bergius 1913, F. Fischer, Tropsch 1925); viskozna i acetatna svila, visokomolekularni polimeri (najlon, perlon, dakron . . .) oko 1938. godine. Veštački kaučuk, plastične mase, veštačke smole, veštački građevni materijal, veštačka vlakna, na hiljade novih lekova (među kojima npr penicilin, antibiotici ...), vitamini ... sve se to svodi na strukturalne procese, dakle na skupovnost.

6.5. Vremenom je kontinuum dobio sliku kao nešto premazano i bez struktura, premda mu semantičko značenje kazuje da je sastavljen od stvari koje se drže zajedno. Kontinuum kao skup definiran je strogo istom osamdesetih godina prošloga stoleća.

Inače, možemo reći da izvornoj slici kontinuuma vrlo dobro odgovaraju veštačke tvorevine kao što su sintetička vlakna sastavljena od vanredno mnogo molekula. Na taj način vidimo da stari matematički pojam i slika: Kontinuum nalazi danas svoje ostvarenje u vidu veštačkih vlakana u kemiji i proizvodnji.

7. *Biologija*

7.1. Čitave nove discipline i shvatanja u biologiji vezane su uz ideju skupovnosti, sastava i procesa; evo ih nekoliko: citologija, histologija, fiziologija, genetika (s teorijom gena, hromosoma), teorija i praksa ukrštanja, presađivanja, ekologija, mikrobiologija, molekularna biologija ...

7.2. Šta više, i proces mišljenja, učenja, zaboravljanja, govorenja ... svodi se na strukturalne procese dakle na skupovnost.

8. *Jezik*

Posebno je u tom pogledu zanimljivo ukazati na novo shvatanje o jeziku, prirodnom ili veštačkom, kao sredstvu za prenošenje obaveštenja među pojedinim živim bićima, skupinama živih bića, strojeva i robota i skupine strojeva. Vidni oblik toga shvatanja je današnja automatizacija i kibernetika.

9. *Umetnost*

I u umetnosti strukturalna razmatranja i shvatanja daju svoj pečat; to vredi i u kiparstvu i slikarstvu i u muzici, pevanju, plesu pa i u književnosti. Posebno ukazujemo na elektronsku muziku i na elektronsku poeziju.

10. *Društvene nauke*

U društvenim naukama ideja o skupovima, kolektivima i strukturiranju imala je u stoleću 1868—1968. velikih primena; posebno sredinom tog stoleća dolazi i velika oktobarska revolucija sa svim velikim posledicama po život i pojam čoveka.

U tom plodnom stoleću 1868—1968. i mi smo dali vrednih dostignuća. Nikola Tesla, Mihajlo Pupin, Jovan Cvijić, Dragutin Gorjanović-Kramberger, Andrija Mohorovičić, Brana Petronijević, Pajo Radosavljević, Simo Lozanić, Vladimir Varićak, Ivan Meštrović... Josip Plemelj, današnji slavljenik Mihajlo Petrović, Ivo Andrić... A vekovni narodni duh borbenosti i junaštva dostigao je svoj vrhunac takoreći u našim danima i u minulom sudbonosnom ratu!

Neka ti dosadašnji uspesi i svetli primeri budu naš podstrek u budućnosti kada u novim prilikama stupamo na svetsku pozornicu elektronsko-kiberničko-kosmičkog doba. I ovaj Simpozij treba shvatiti kao jedan pozitivan podstrek i primer u našim nastojanjima.

К. Орлов

НОВЕ РАЧУНСКЕ ОПЕРАЦИЈЕ ИНСПИРИСАНЕ ТЕОРИЈОМ МАТЕМАТИЧКИХ СПЕКТАРА*

У овом излагању под рачунском операцијом подразумеваћу операцију нумеричког карактера тј. ону која се врши над бројем (или више бројева) и даје као резултат број. Под новом рачунском операцијом подразумеваћу ону која се дефинише или изводи другачије него ли све операције, без обзира да ли је она сводљива на дотадашње операције тј. може се ефективно извести помоћу дотадашњих операција. Тако је множење целих бројева нова рачунска операција у односу на сабирање целих бројева иако је ова прва операција сводљива на другу.

Пролазили су векови а да се не пронађе нова рачунска операција или да се не изгуби нека стара рачунска операција. Од рачунских операција које су уведене у ,,новије доба‘‘ поменућу само операцију заокругљивања бројева и операцију померања броја удесно или улево, које је еквивалентно померању зареза (децималног или дуалног) удесно или улево. Од ,,изгубљених‘‘ рачунских операција навешћу операцију ,,удвостручавања‘‘, која је код старих народа сматрана за *посебну операцију*, а не за специјални случај множења, које је тада такође постојало као операција. Временом је оваква посебна операција нестала, управо утопила се у операцију *множења*. Код данашњег програмирања ова операција се не врши командом множења већ командом сабирања, што значи да иако се није поново појавила као посебна операција, ипак је ,,отргнута‘‘ од множења.

Овај мали увод показује да је итекако интересантно обратити пажњу на то да је Теорија математичких спектара у свом кратком веку (од 50 година) сугерирала увођење више нових рачунских операција него претходни милениуми.

1) Прва нова рачунска операција која је уведена, уосталом фундаментална за математичке спектре, јесте *слепљивање* бројева (1). Од више бројева прави се један број, напр. од

(1) $\qquad 13 \qquad 025 \qquad 037$

прави се број

(2) $\qquad 13025037$

спектар горњег низа.

---

* Сви научни прилози у свесци 4 књиге 5 (20) Математичког весника били су изложени на Симпозијуму, 9. и 10. маја 1968 године, одржаном у оквиру стогодишњице рођења Михаила Петровића.

Toutes les contributions scientifiques du fascicule 4 du volume 5 (20) de Bulletin mathématique ont été présentées au Symposium qui a eu lieu les 9 et 10 mai 1968 à l'occasion du centenaire de la naissance de M. Petrović

Ова операција се често назива *дойисивањем* бројева. Тај термин ни нов, наиме и пре математичких спектара дописивани су бројеви, а исључиво састављени од нула, што би данашњим речником било озн чено као померење бројева. Овде је пак реч о *слейљивању* бројева, ко садрже и вредносне (различите од нуле) цифре.

2) *Цейање* бројева је рачунска операција обрнута слепљивању. Помо ове операције можемо напр. из броја (2) добити низ бројева (1). О операција има велики значај у Теорији математичких спектара. Осим то употребљава се у рачунању на машинама, када су у питању *велики* бр јеви тј. они који не могу „да стану" у машину.

3) Трећа нова операција је *разређивање* броја (спектра) убацивање на одређена места *цифара без вредносши* тј. нула или у извесним прил кама деветки (деветки у декадном систему одговара цифра $b-1$ у систем са базом b) [1], [2]. Таквим разређивањем могу се постићи следе резултати:

а) трансформисати бесконачан периодичан разломак у други који ł исто тако био рационалан број.

Напр. од рационалног броја 0,1

$$0{,}1 = 0,|1|1|1|1|1|1 \ldots\ldots$$

може се, убацујући на свако место означено цртом | по исти број нул добити рационалан број.

б) трансформацијом променити карактер броја, напр. од рациона ног добити ирационалан.

Као пример такве трансформације можемо узети трансформаци горњег броја (0,1) такву, да се место k — те црте убаци l_k нула, где l_k монотоно растућа функција од k.

в) из бројне вредности полинома за $x=10^h$ може се добити броj вредност истог полинома за $x=10^{h+k}$, где су h и k позитивни цели бројев

Напр. неидентификовани полином $P(x)$ са целим коефицијентима где је

$$|a_i| < \frac{10^3}{2} \tag{3}$$

има спектар са униформним ритмом $h=3$.

$$S = 2|963|042|975, \tag{4}$$

а то је уједно вредност овог полинома за $x=10^3$. Ако место сваке цр ставимо по две исте цифре, и то две нуле или две деветке, према то да ли непосредно иза ове црте стоји нула или деветка, добићемо бр

$$2999630004299975 \tag{5}$$

који представља вредност тог неидентификованог полинома $P(x)$ $x=10^{3+2}=10^5$.

Интересантно је напоменути да се вредност полинома за $x=10^5$ доби без идентификације полинома, тј. *без одређивања њеīових коефицијенаи*

Доказ ове трансформације постаје евидентант, ако приметимо да са један једини полином $P(x)$ са целим коефицијентима, који испуњава услов (3), има за $x=10^3$ вредност 2963042975. [3]

Најкраћи начин да се непосредно уверимо у исправност трансформације је идентификовање полинома $P(x)$, који је у овом случају

$$3x^3-37x^2+43x-25$$

и затим коришћење теореме о еквивалентности обичног спектра полинома и његове бројне вредности када аргуменат узима вредност одговарајуће декадне јединице.

Напоменимо да се у ранијим случајевима радило о разређивању спектра само нулама, а овде се ради о *комбинованом разређивању* нулама и деветкама.

Пошто се спектри могу формирати за ма коју базу b (b цео позитиван број), то овакво разређивање у општем случају одговара множењу аргумента x са

$$b^k$$

тј. помоћу вредности $P(b^h)$ полинома $P(x)$, без његове идентификације, добија се вредност $P(b^{k+h})$.

Навешћу пример у дуалном систему ($b=2$).

Нека дуални спектар неидентификованог полинома $P(x)$ са целим коефицијентима a_i за које је испуњен услов

$$|a_i|<\frac{2^5}{2}$$

има за $x=2^5$ вредност

(6) $$P(2^5)=111|10100|00111|00011$$

Тражи се да се помоћу операције разређивања добије вредност

$$P(2^8)$$

Како је овде $h=5$, то је $k=3$. Према томе, разређивање се мора извршити убацивањем по 3 исте цифре на место сваке црте, и то три нуле или три јединице, већ према томе да ли непосредно иза црте стоји нула или јединица. Као резултат овог разређивања добија се

(7) $$11111110100000001110000011$$

г) разређивањем извесног броја напр.

(8) $$1|001|998|003$$

који није прост (дељив је напр. са 1003) може се добити класа од бесконачно много бројева од којих *ниједан* није прост број [3].

Ови бројеви се добијају када се место сваке црте напише по k истих цифара, нула или деветки према томе која цифра (нула или деветка) је непосредно иза дотичне црте, где је k неограничено

$$k=1, 2, 3 \ldots$$

4) *Згушњавање* броја је рачунска операција обрнута разређивању. Она се састоји у изостављању цифара 0 или 9 на одређеним местима. За разлику од разређивања, згушњавање није неограничено, што је јасно само по себи. Згушњавање доводи до резултата сличних онима који су изнети код разређивања под а), б), в), г). Осим тога се оно примењује у чисто

практичне сврхе код машинског рачунања, да би се смањио број цифар: бројева (спектара) с којима се оперише. [2], [4].

5) Најнеобичнија од операција инспирисаних математичким спектрима је свакако рачунска операција *унутрашњег* или *формалног заокругљивања* По форми ова рачунска операција је заокругљивање, али она се не врши само на крају броја (као обично заокругљивање) већ и у унутрашњем делу броја (отуд је назив унутрашње). Како се оно врши, најбоље ће с видети на следећем примеру.

Нека је дат број

$$998699819979004199990001$$

и унутрашње заокругљивање се врши по униформном ритму 4. (Наравно да се унутрашње заокругљивање може вршити и по неуниформном ритму) Горњи број третиран по ритму 4 је исто што и спектар са тим ритмом То значи да је горњи број подељен на пруге ширине 4 цифре, што с пише овако

$$9986|9981|9979|0041|9999|0001 \tag{9}$$

Сада пређимо на заокругљивање. Оно се врши здесна улево и то тако што се свака пруга узима *као целина* и заокругљивање се врши *само* у случају када би се заокругљивањем повећала (за јединицу) претходна пруга. Тако идући здесна улево прва пруга остаје непромењена, друга у целини се заокругљује тј. у њој остају саме нуле, а претходна се повећава за једининицу. Трећа, овако повећана, остаје непромењена. Четврта, пета и шеста се заокругљују.

Ток заокругљивања је следећи:

$$\begin{array}{r} |9986|9981|9979|0041|9999|0001\\ |9986|9981|9979|0042|0000|0001\\ |9986|9982|0000|0042|0000|0001\\ |9987|0000|0000|0042|0000|0001\\ 1|0000|0000|0000|0042|0000|0001 \end{array} \tag{10}$$

Ова рачунска радња може се лако аутоматизовати користећи пр томе *карактеристичну цифру* пруге, тј. прву цифру пруге (ако се цифр броје слева удесно). Ако је ова цифра велика (5—9) то се све цифре пруг бришу (замењују нулама), а претходна пруга (она која је непосредно д ње с леве стране) повећава се за јединицу. Ако је карактеристична цифр мала (0—4) пруга остаје непромењена.[1])

Примена ове операције је такође необична. Тако напр. ако је бро на који се примењује унутрашње или формално заокругљивање бројн вредност (за $x=10^h$, h природан број) полинома $P(x)$ са неидентифико ваним коефицијентима a_i, али који испуњавају услов сличан услову (3) онда ће резултат бити бројна вредност (за $x=10^h$) такође неидентифико ваног полинома $P_1(x)$, који је састављен *само* од позитивних чланов полинома $P(x)$. На тај начин ова заокругљена вредност представља *тачн* бројну вредност, али другог полинома. Том операцијом смо уствари *про менили облик* (*форму*) *или* извршили извесну варијацију полинома.

---

[1]) Једина тешкоћа би била с пругама састављеним од цифре 5 иза које следу саме нуле. Али, уколико се не ради са произвољно написаним бројевима већ са *спек трима*, такав случај не може да се појави.

Ради бољег схватања навешћу полиноме $P(x)$ и $P_1(x)$, то су

$$(11)\qquad \begin{aligned} P(x) &= x^6 - 13x^5 - 18x^4 - 21x^3 + 42x^2 - x + 1 \\ P_1(x) &= x^6 + 42x^2 + 1 \end{aligned}$$

Као у свакој аритметици, ове нове рачунске операције могу на разне начине да се комбинују, напр. ако на број (9) који $P(10^4)$ применимо унутрашње заокругљивање (по ритму 4) а затим згушњавање ($k = 2$) добићемо број

$$1000000420001$$

који представља вредност $P_1(10^2)$.

На крају напоменимо да се све ове нове рачунске операције без изузетка могу вршити на бројевима написаним у бројном систему са макојом базом b, а не само у декадном и дуалном систему. Исто тако напоменимо да се оне могу вршити не само на целим бројевима, већ и на разломљеним (написаним у децималном облику, односно општије у облику са базом b).

БИБЛИОГРАФИЈА

[1] M. Petrovitch, *Les spectres numériques*, Gauthier-Villars, Paris, 1919.

[2] K. Orlov, *Osnovi spektralne aritmetike i algebre*, Društvo matemetičara i fizičara FNRJ, Beograd, 1955.

[3] K. Orlov, *Aritmetičke i analitičke primene matematičkih spektara*, Doktorska teza, Beograd, 1935.

[4] C. Orloff, *Simplification de la méthode de Graeffe au moyen des spectres mathématiques*, Vesnik društva matematičara i fizičara SRS, t. VIII, 1—2, 1956, Beograd.

NOUVELLES OPÉRATIONS NUMÉRIQUES SUGGÉRÉES PAR LA THÉORIE DES SPECTRES MATHÉMATIQUES

K. Orlov

Résumé

La théorie des spectres mathématiques durant sa courte existence (50 années) a suggérée plus de nouvelles opérations numériques que ne l'ont fait des milléniums passés.

Par le terme *nouvelle opération* nous entendons une opération définie ou exécutée autrement que toutes les opérations existantes en ce moment, sans tenir compte du fait, si cette opération peut être réduite aux opérations existantes ou ne le peut pas.

Nous indiquerons les opérations suivantes:

1) *Collage* de nombres est une opération faisant de plusieurs nombres un seul. (Voir les formules (1) et (2).

2) *Coupage* de nombres est une opération inverse à l'opération de collage. (Voir les mêmes formules).

3) *Dilution* de nombres est l'introduction d'un certain nombre de zéros o
de 9 dans un nombre donné en places fixées par un raisonnement quelconque

Une telle opération peut, en certains cas, faire garder la rationalité d'u nombre ou bien le transformer en un nombre irrationnel (ou inversement) (Voir a) et b)).

Une telle opération peut, partant d'une valeur numérique $P(10^h)$ d'u polynôme $P(x)$ (le polynôme lui-même n'étant pas connu), faire obtenir un autre valeur numérique $P(10^{h+k})$ du même polynôme (h et k étant nombr naturels). (Voir c) et les formules (3), (4), (5), (6), (7).

Une telle opération partant d'un nombre composé (pas prime) peut fair obtenir une classe illimitée de nombres dont nul n'est nombre prime. (Voir d et la formule (8)).

4) *Condensation* est une opération inverse à l'opération de dilution, don nant des résultats similaires à ceux qui sont obtenus par l'opération de dilutior

5) *Opération d'arrondissement intérieur* ou *formel* a la forme d'arrondisse ment usuel, mais s'applique, partie par partie, à chaque part du nombre (no seulement à l'extrémité droite du nombre). Cette opération, appliquée à un valeur numérique $P(10^h)$ du polynôme non connu $P(x)$, donne la valeur numé rique précise $P_1(10^h)$ du polynôme $P_1(x)$, composé uniquement de termes d polynôme $P(x)$ dont les coefficients sont positifs (termes ayant des coefficient négatifs sont abolis). (Voir les formules (9), (10), (11)).

Toutes ces opérations sont applicables non seulement aux nombres entiers mais aussi aux nombres décimaux.

Toutes ces opérations peuvent s'effectuer non seulement aux nombre écrits en système décade ou dual (en ce cas le rôle du chiffre 9 est jou par le chiffre 1), mais aussi aux nombres écrits en un système quelconqu (à la base b).

Боривој Михајловић

О ПРВИМ РАДОВИМА М. ПЕТРОВИЋА КОЈИ СЕ ОДНОСЕ НА ПРИМЕНУ СПЕКТРАЛНЕ МЕТОДЕ У АЛГЕБРИ И АРИТМЕТИЦИ ИЗ 1917, 1918 И 1919 ГОДИНЕ

Својим првим радовима [1], [2], [3], [4], [5] и [6] из математичких спектара саопштеним 7 и 14 маја 1917 г., 17 септрембра 1917 г. и 25 новембра 1918 г. у Академији наука у Паризу М. Пет,овић поставио је темељ спектралној методи коју је изложио у књизи [7] објављеној 1919 г. ,,Les Spectres Numériques", а за коју је написао предговор Е. Борел.

М. Петровић је дао поступак како се проучавање функција може да сведе на проучавање једног јединог броја. Али свођење проблема на бесконачне децималне разломке даје облик бесконачности са којим се најтеже рукује и који је најмање згодан за рачунање, па бисмо у практичној примени, уместо да дођемо до поједностављења, дошли до непотребних компликација. Међутим, ствар тако не стоји. М. Петровић је много размишљао о аналогијама међу различитим наукама и њиховим методама. Његов оштроуман и плодоносан дух пронашао је неочекиване резултате и учинио ове аналогије лако схватљивим. Његова теорија спектара, настала из радова од 1917—1919 г., преноси у математичку анализу терминологију коју налазимо у физици и хемији у спектралној анализи.

Повод за размишљање, како да се из само једног броја одреди више тражених бројева с једне стране била је игра погађања броја, која се користи за разоноду у друштву, где се оном који погађа тражене бројеве саопштава један други број у чијем састављању он не учествује а који је у ствари састављен из тих бројева, и с. друге стране светлосни спектар из чијих се светлих и тамних делова утврђује из каквих елемената се састоји анализирано тело.

Свођењем извесних питања анализе на проучавање децималних разломака даје нов рачунски поступак, који је у нумеричкој анализи дао већ практичне резултате, а који ће нас без сумње избором подесних облика, међу многобројним које нам се пружају, довести на пут нових открића.

С обзиром да су математички спектри изграђени према идеји, методи и резултатима који се односе на светлосне спектре, као општу дефиницију спектра М. Петровић је узео:

Спектром скупа (0) конкретних или апстрактних објеката 0_1, $0_2, \ldots$ назива се линеарни низ, ограничен или неограничен, коме припада група знакова m_1, $m_2, \ldots$ који су повезани са објектима 0_k тако да један објекат 0_k одређује једну групу знакова m_k и обратно, свака група знакова m_k

одређује само један објекат 0_k под условом да сви објекти 0_k и св знаци m_k могу бити на тај начин одређени.

Емисиони и апсорпциони светлосни спектори дају пример спектар конкретних објеката, а математички спектри дају пример спектра апстрактни објеката.

Математичким спектром једног низа елемената $\{c_i\}$ називамо дана број S, цео или децималан, позитиван или негативан, такав да број једнозначно одређује низ $\{c_i\}$ и обратно, да сваком низу $\{c_i\}$ одговар само један број S под условом да сви елементи низа $\{c_i\}$ и све цифр броја S могу да буду на тај начин одређени.

Према овој општој дефиницији математичких спектара постоји виш врста спектара. Најширу примену нашли су пругасти математички спектр који се данас примењују у аритметици, алгебри, анализи, нумеричк анализи, теорији вероватноће, инфинитезималном рачуну и теорији функциј

Општи поступак у спектралној методи је да се из датих податак b_k у проблему, а после извесних размишљања образује пругасти спекта S из кога се тада може да добије одговор на један од следећих начин

1. свака пруга може да да одговор на по једно од постављени питања

2. само неке од пруга, или само једна пруга даје одговор на пост вљено питање

3. свака пруга може да да одговор на постављено питање са „да или „не"

Конкретно ово ћемо илустровати на неким примерима М. Петровић

Број

$$S=\frac{101^6}{100^6}=1{,}061520150601$$

представља пругасти спектар биномних коефицијената $\binom{6}{k}$ где свака пруг почиње са $(2k-1)$-ом и завршава $2k$-том децималом броја S. Овде свак пруга даје одговор на по једно постављено питање.

Увођењем ознаке 9_k за

$$9_1=9 \quad 9_2=99, \quad 9_3=999, \text{ — — —}$$

М. Петровић формира спектар

$$S=\frac{9_{(m+1)ah}\cdot 9_{(n+1)bh}\cdot\cdot\cdot\cdot 9_{(s+1)gh}}{9_{ah}\cdot 9_{bh}\cdot\cdot\cdot\cdot 9_{gh}}$$

Који је цео број са λh цифара, при чему је

$$\lambda=ma+nb+\cdot\cdot\cdot+sg$$

и где су

(1) $a, b, c, \cdots, g$

(2) $m, n, p, \cdots, s$

два низа целих позитивних бројева, а бројеви првог низа (1) су релативн прости.

Када означимо са $P(k)$ цео позитиван број који показује на колико се начина може написати цео позитиван број $k<\lambda h$

$$k=ax+by+\cdots+gt$$

када $x, y, \cdots, t$ узимају вредности

$$x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

$$y=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

— — — — — — —

$$t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ s$$

број $P(k)$ се подудара са бројем који почиње са $(hk+1)$-овом цифром и завршава са $(k+1)\cdot h$ том цифром спектра S, где је $h\geqq\log P(k)$.

На пример, за

$$19=3x+2y$$

$$x=0,\ 1,\ \cdots,\ 10$$

$$y=0,\ 1,\ \cdots,\ 9$$

и $P(k)\approx\dfrac{k}{ab}+\delta<\dfrac{\lambda}{ab}+1$ [8], биће $h\geqq\log\left(\dfrac{48}{6}+1\right)=\log 9,\quad h=1,$

па је

$$S=1011112122223233334343343334\cdots .$$

Како је $hk+1=20$
и $(k+1)h=20$, то ће 20-та цифра броја S дати тражени одговор. То је цифра 3, тј. постоје три решења једначине

$$3x+2y=19$$

међу целим бројевима, при чему је $x\leqq 10$ и $y\leqq 9$

$$(x_1=5 \text{ и } y_1=2,\quad x_2=3 \text{ и } y_2=5,\quad x_3=1 \text{ и } y_3=8).$$

Значи, само једна пруга даје одговор на постављено питање.

Laguerre [8] је дао општу формулу која даје само приближну вредност броја $P(k)$ за дати низ бројева $(k, a, b, \ldots, g)$ и све могуће системе $(x, y, \ldots, t)$, па се спектар S који даје тачну вредност за $P(k)$ сматра оригиналним доприносом М. Петровића.

Рационални број

$$S=\frac{1}{9_2}+\frac{1}{9_4}+\cdots+\frac{1}{9_{200}}-\frac{1}{100}\,\frac{9_4}{9\cdot 9_2}$$

$$S=0{,}0000000100020002010200040002020300040000402020006 01\ldots$$

је пругасти спектар са константним ритмом $h=2$ из кога се може одредити да ли је природан број $k\leqq 100$ прост или сложен, ако се почевши с лева у десно пруге нумеришу низом природних бројева. Број је прост ако му одговара празна пруга, тј. пруга која се састоји само из нула.

Овде свака пруга даје одговор са „да“ или „не“ на постављено питање.

Сам поступак, помоћу кога М. Петровић дефинише спектар неко проблема доста је необичан. Према дејиницији, математички спектар ј и нумеричка вредност неког израза $\phi(x)$ који за неку нумеричку вредност x, даје спектар S уоченог проблема. Израз $\phi(x)$ назива се спектралном генератрисом.

У општем случају израз $\phi(x)$ образује се помоћу две функциј

$$f(x)=M_0+M_1x+M_2x^2+ \;---.$$

$$\xi(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots$$

од којих прва има за коефицијенте M целе бројеве, а друга коефицијент α самерљиве са негативним степенима броја 10. Функција $f(x)$ назива с главном карактеристиком спектра, и одређује цифре које улазе у саста траженог спектра.

Функција $\xi(x)$ је квалитативна карактеристика спектра (карактеристик спектралног ритма), и не утиче на вредност његових цифара, већ утич само на дисперсију спектра.

Испитујући спектре, образоване од ове две карактеристике М. Петрови је утврдио више његових особина. Тако се зна да ће спектар бити прет стављен коначним децималним бројем ако се $f(x)$ своди на полином Ако је при томе ритам h униформан спектрална генератриса је $\phi(x)=$ $=f(10^{-h}x)$, која за $x=1$ даје спектар $S=f(10^{-h})$.

На пример, треба образовати спектралну генератрису за низ биномни коефицијената

$$\binom{m}{0},\ \binom{m}{1},\ \ldots,\binom{m}{m}$$

са униформним сагласним ритмом h.

Главна спектрална карактеристика је

$$f(x)=(1+x)^m$$

и спектрална генератриса биће

$$\phi(x)=(1+10^{-h}x)^m,$$

па је

$$S=\phi(1)=\frac{(10^h+1)^m}{10^{mh}}.$$

За $m=6$ и $h=2$ биће

$$S=\frac{(100+1)^6}{100^6}=1{,}061520150601.$$

М. Петровић бавио се спектрима више од 20 година и једини ј до 1932 г. објављивао радове из ове области. Спектралну методу тре тирао је као теорijску методу с циљеи да покаже како је могуће да с један алгебарски и аналитички поступак траисформише у чисто аритме тички, без претензије да буде искоришћен у нумеричким рачунима, односн у нумеричкој анализи. Зато се у принципу у даљим прилозима спектралнс методи није много удаљио од резултата објављеним у својим радовима [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], који чине суштину у основи спектралне методе.

Не улазећи у никакве прогнозе о будућем развоју математичких спектара, можемо само констатовати да групно улажење и излажење података у електронски аритметички рачунар може да се схвати као сложенији случај напред поменуте игре погађања броја, где оног који погађа сада замењује аутоматски рачунар.

Две су чињенице јасне. Аналогија између светлосних и математичких спектара постоји. Она је адекватна и до данас је дала многе интересантне и корисне како теоријске тако и практичне резултате. С друге стране електронски аритметички рачунари пружају нове могућности за примену математичких спектара, па се свакако налазимо корак ближе у избору логичких форми које би допринеле изналажењу нових релација између функције и броја.

LITERATURA

[1] M. Petrović, *Sur quelques expressions numériques remarquables*, Comptes rendus Acad. Sci., Paris, t. 164, 1917.

[2] M. Petrović, *Théorèmes aritméthiques sur l'intégrale de Cauchy*, Comptes rendus Acad. Sci., Paris, t. 164, 1917.

[3] M. Petrović, *Détermination spectrale des fonctions*, Comptes rendus Acad. Sci., Paris, t. 167, 1918.

[4] M. Petrović, *Un nouveau procédé d'évaluation numérique des coefficients des séries*, Comptes rendus Acad. Sci., Paris, t. 165, 1918.

[5] M. Petrović, *Propriétés arithmétiques d'une classe de nombres rationnels*, Bulletin Soc. math. France, 1920.

[6] M. Petrović, *Fonctions entières se rattachant aux nombres premiers*, Comptes rendus Acad. Sci., Paris, t. 168, 1919.

[7] M. Petrović, *Les spectres numériques, avec Préface de M. E. Borel*, Paris, 1919.

[8] Laguerre, *Sur la partition des nombres*, Bulletin Soc. math. France, t. V, 1877, Oeuvres, t. I, p. 218—220.

[9] К. Орлов, *Аритметичке и аналитичке примене математичких спектара*, теза, Београд, 1935.

[10] Б. Михајловић, *Модификовани псеудоспектри и њихова примена у нумеричкој анализи*, теза, Београд, 1965.

О ПЕРВЫХ ТРУДАХ М. ПЕТРОВИЧА КОТОРЫЕ ОТНОСЯТСЯ К ПРИМЕНЕНИЮ СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА В АЛГЕВРЕ И АРИФМЕТИКЕ ИЗ 1917, 1918 И 1919 ГОДА

Б. Михайлович

Резюме

М. Петрович, известный югославский математик, в своих трудах по вопросу математических спектров создал основание для нового вычислительного метода в периоде от 1917—1919 года. При помощи этого нового метода установливается такая обостороная связь между функцией и одним числом, которое называется спектром функции.

В этом сообщении в очень сжатой форме изложены основные принципы спектрального метода. Как илюстрация взяты примеры из трудов М. Петровича.

Іраїиша Миштровић

ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈА НЕКИХ ФОРМУЛА М. ПЕТРОВИЋА

У чланку [1] М. Петровић је добио једноставним поступком елегант-ɛ релације које као специјалан случај садрже две врло познате формуле з теорије функција: Cauchy-еву и Jensen-ову. Прва формула се односи на азлику између броја нула и полова мероморфне функције у кругу $|z|\leqq r$. Іруга — једна од фундаменталних формула целих и мероморфних фун-ција, повезује вредности мероморфне функције на рубу круга $|z|=r$ са одулима њених нула и полова који се налазе у том кругу. Интересантно ; споменути да је Jensen открио ову формулу у циљу да одреди дистри-уцију нула Riemann-ове зета функције у критичној прузи.

У оба случаја М. Петровић се ограничио на аналитичке функције еалне на реалној оси. Исти проблем третирао је касније P. Montel опери-ајући са општим аналитичким функцијама, тј. без претходног ограничења.

У разним генерализацијама Jensen-ове формуле, као што су на при-тер и формуле Петровић-Монтел, сингуларне тачке су полови. Циљ овог аопштења је генерализација формула М. Петровића са једног квалитативно ругог гледишта. Уместо полова захтеваћемо да аналитичке функције има-/ есенцијалне сингуларитете.

Лема 1. *Нека је функција $f(z)$ холоморфна (униформна и деривабилна) вуда у круїу $D: |z|\leqq r<\infty$ осим у коначном броју синіуларних шачака b_k $k=1, 2, \ldots, m$), $0<|b_k|<r$. Нека су a_j ($j=1, 2, \ldots, p$) нуле функције $f(z)$, $<|a_j|<r$. Означимо са $B_{n,k}$ коефицијенше ілавноі дела у Laurent-овот раз-оју функције $f'(z)/f(z)$ у околини шачке b_k. Тада је*

$$\text{1)}\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{it})|\,dt=\log|f(0)|+\sum_{j=1}^{p}\frac{r}{|a_j|}+$$

$$\sum_{k=1}^{m}B_{1,k}\log\frac{r}{|b_k|}+Re\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n B_{n+1,k}}{nb_k^n},$$

је сваку нулу шреба узеши онолико йуша колики је њен ред.

Лема 2. *Нека функција $f(z)$ има својсшва као у Леми 1 уз услов да ; $0\leqq|b_k|<r$, $0\leqq|a_j|<r$. Нека је C руб од D. Тада је*

$$\text{2)}\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=N+\sum_{k=1}^{m}B_{1,k},$$

је је N укуйан број нула.

Приметимо да се лева страна формуле (2) може написати у обли

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dt, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]dt, \quad z=re^{it}.$$

Доказ ових лема је једноставна модификација доказа неких ставо објављених у [2].

Означимо са $\mathcal{H}$ класу реалних, непрекидних и ортогоналних функци у односу на низ функција $\{\cos(nt)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ у интервалу $[0, 2\pi]$. Пре поставља се да је средња вредност елемената из $\mathcal{H}$ у том интервалу ра личита од нуле.

На основу претходних Лемâ и Fejér-ove теореме о конвергенцији тр гонометријских редова, могу се доказати ове две теореме:

Теорема 1. *Нека функција* $f(z)$ *задовољава услове из Леме 2. Не је* $F(z)=\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$. *Ако је* $h(t)\in\mathcal{H}$, *тада је*

$$\int_0^{2\pi} h(t)\,\frac{F(z)+F(\overline{z})}{2}\,dt=\left[N+\sum_{k=1}^{m}B_{1.k}\right]\int_0^{2\pi} h(t)\,dt. \tag{3}$$

Означимо са $\mathfrak{F}(f)$ десну страну формуле (1).

Терема 2. *Нека функција* $f(z)$ *задовољава услове из Леме 1. Ако* $h(t)\in\mathcal{H}$, *тада је*

$$\int_0^{2\pi} h(t)\frac{\log|f(z)|+\log|f(\overline{z})|}{2}\,dt=[\mathfrak{F}(f)]\int_0^{2\pi} h(t)\,dt. \tag{4}$$

Покажимо сада да релације (3) и (4) садрже формуле М. Петрови (и P. Montel-a).

Ако су тачке b_k полови функције $f(z)$, тада бројеви $(-B_{1,k})$ озна вају ред ових полова и $\sum\limits_{k=1}^{m} B_{1,k}=-P$, где је P укупан број полова у кругу У исто време двострука сума у формули (4) ишчезава. Тако добија Монтел-ове формуле. Ако осим тога предпоставимо да је функција f реална на оси x, добијамо формуле М. Петровића, јер је тада

$$Re[F(z)]=\frac{F(z)+F(\overline{z})}{2},$$

$$\log|f(z)|=\frac{\log|f(z)|+\log|f(\overline{z})|}{2}.$$

Ако на крају у формулама М. Петровића ставимо још и $h(t)\equiv 1$, добија Cauchy-еву и Jensen-ову формулу.

Примедба. Проширење овог саопштења са доказима добијених рез тата биће обављено у једном часопису.

REFERENCIJE

[1] M. P e t r o v i ć: *Procédé élémentaire d'application des intégrales définies réelles aux équations algébriques et transcendantes*, Nouvelles Annales de Mathématiques, 4,8 (1908), 1—15.

[2] D. M i t r o v i ć: *Sur les valeurs de certaines intégrales définies*, Glasnik mat. fiz. i astr. 10 (1955), 259—263.

[3] P. M o n t e l: *Sur une formule de M. Michel Petrovitch*, Publ. Math. Univ. Belgrade VI-VII (1938), 174—182.

UNE GÉNÉRALISATION DE CERTAINES FORMULES DE M. PETROVIĆ

D. Mitrović

Résumé

Dans une Note ([1]) M. Petrović a obtenu des formules contenant comme cas particuliers la formule de Cauchy et celle de Jensen. La première donne la différence entre le nombre des zéros et celui des pôles d'une fonction méromorphe dans un cercle. La deuxième lie les modules des zéros et ceux des pôles au module de la fonction sur la circonference. M. Petrović s'est borné à la classe des fonctions analytique qui sont réelles sur l'axe réel. En reprenant le même problème, P. Montel a été conduit à étendre les formules de M. Petrovitch en opérant aves les fonctions analytiques générales ([3]).

Le but de cette Note est le suivant: *Établir les formules analogues à celles de Petrović (et Montel) dans lesquelles au lieu de pôles interviennent des points singuliers essentiels.*

В. Дајовић

О РАЗВИТКУ ТЕОРИЈЕ АНАЛИТИЧКИХ ФУНКЦИЈА И РАДУ МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА У ТОЈ ОБЛАСТИ МАТЕМАТИКЕ

Један општи поглед на развитак теорије функција једне и више комплексних промењљивих, а посебно теорије аналитичких функција једне комплексне промењливе, открива да се та теорија развијала, почев од XVII века, упоредо са растом целокупне математике, стално обогаћујући математику плодним генерализацијама и новим могућностима примене.

У тој теорији, ако је посматрамо глобално, доминантну улогу и место имају фундаментални прилози Кошија[1] (фундаментална теорема о интегралу, Кошијеви интеграли и њихове генерализације, и др.), Римана[2] (уочавање једначина $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ као полазне основе за даља испитивања и постављање основа геометријске теорије функција комплексне промењљиве) и Вајерштраса[3] (постављање степеног реда као основног конструктивног елемента те теорије). Учешће тих математичара у развијању теорије комплексних функција истовремено је нашло свој израз у томе што је сваки од њих дао свој начин заснивања те теорије. Њихови радови — трајне и виталне тековине математике — имплицирали су низ синтетичких метода којима се дошло и до нових области математике (као што су, на пример, теорија елиптичких функција, теорија Абелових интеграла, и др.) и, заједно са својим генерализацијама, имају огроман значај у развитку математике и њених примена.

Ти и такви радови настали су после знатног броја појединачних резултата до којих су дошли други математичари, а пре свих и више од свих Л. Ојлер[4].

Тако, једно од основних својстава аналитичких функција — могућност представљања тих функција степеним редом — први је уочио Њутн[5] (*Анализа помоћу једначина с бесконачно много чланова*, 1669. год.; штампано 1711. год.), и то полазећи од биномне формуле са разломљеним и негативним експонентом и развијајући у ред поједине функције у циљу решавања извесних проблема механике. (Њутн је вршио сабирање, множење, дељење и диференцирање тих редова.) У овој првој етапи, коришћење степених редова (и при том усавршавање технике оперисања с њима)

---

[1] Augustin Cauchy (1789—1857).
[2] Bernhard Georg Friedrich Riemann (1826—1866).
[3] Karl Weierstraß (1815—1897).
[4] Leonhard Euler (1707—1783)
[5] Isaac Newton (1642—1727).

употпуњено је прилозима Тејлора[6] (1715. године) и Лагранжа[7] (посебн инверзија степених редова, 1770. године).

Низом својих радова и метода Ојлер је развио широк фронт мат матичке анализе и припремио настанак Кошијеве, Риманове и Вајерштр сове теорије аналитичких функција. У Ојлеровим радовима се као проме љива величина јавља и комплексна промењива. Ојлер открива везе изме тригонометријских функција и експоненцијалне функције и користи беск начни производ за представљање функција, на пример

$$\sin z = z \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{4\,\pi^2}\right) \ldots$$

Ојлер је (углавном четрдесетих година XVIII века) развио теори елементарних функција комплексне промењиве; при том је уз развијан тих функција у степени ред додао тој теорији апарат бесконачних прои вода и представљање функција простим разломцима, увео неке специјалн неелементарне аналитичке функције (Γ-функцију, ζ-функцију, цилиндричн функције), открио везе ових функција са већ познатим функцијама, н пример са елиптичким интегралима, итд.

Значајна чињеница у једном другом правцу развитка теорије анал тичких функција јесте Ојлеров доказ да је $P_x = Q_y$ услов да $P(x, y)\, dx$ $Q(x, y)\, dy$ буде тотални диференцијал неке функције, као и то да реални имагинарни део једне аналитичке функције комплексне промењиве пре стављају решења једначина

$$(*) \qquad P_x = Q_y, \quad P_y = -Q_x.$$

Ову последњу чињеницу је раније, у посебним случајевима (у вез с проучавањем извесних проблема хидродинамике) открио Даламбер[8] међутим, Ојлер је до тог закључка дошао полазећи уопште од аналитичн функције задате степеним редом. Зато с правом треба једначине (*) наз вати и Ојлер-Даламберовим, иако су оне у математичку литературу уш углавном под називом Коши-Риманове једначине.

Поред тога, Ојлер је први користио раздвајање интеграла комплексн функција на реални и имагинарни део у циљу израчунавања интегра појединих реалних функција. У вези с проблемом израде географских кара Ојлер је користио аналитичке функције (при чему имагинарне броје узима као пар реалних бројева или као апсцису и ординату); на тај начи он је био претеча и геометријске теорије комплексних функција.

Према томе, Ојлер је раскрчио пут и принео огромну грађу да серединoм XIX века, захваљујући радовима Коšија, Римана и Вајерштрас теорија функција комплексне промењиве заснује и оформи у самостал математичку дисциплину. Ојлеру је недостајала само представа интегра функције комплексне промењиве дуж (различитих) кривих у комплексн равни да би уочио теорему о независности тог интеграла од облика путан интеграције.

Крајем XVIII и почетком XIX века, за развитак теорије аналитичк функција и, уопште, теорије функција комплексне промењиве имало

---

[6]) Brook Taylor (1683—1731).
[7]) Joseph-Louis Lagrange (1736—1813).
[8]) Jean le Rond d' Alembert (1717—1783).

посебан значај геометријско представљање комплексних бројева (Весел[9], 1799. године, Арган[10], 1806. године, Гаус[11], 1832. године).

Кошијева фундаментална теорема*) о независности интеграла од облика путање, одређивање — помоћу интеграла — аналитичке функције у области ако је она дата на рубу те области, уопште Кошијеве интегралне формуле и теореме о развијању аналитичке функције у степени ред (коју је Коши доказао 1831. године), теорија граничних вредности (коју је изложио у својој *Алгебарској анализи*, 1821. године) и на њој заснована теорија редова и елементарних функција, у којој се посебно третира ред

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

где x узима не само реалне него и имагинарне, уопште комплексне вредности, и утврђује како се одређује радијус конвергенције тог реда, — сви ти значајни резултати представљају суштину Кошијеве теорије функција комплексне промењиве.

Иако је придавао огроман значај развијању аналитичке функције у степени ред, који је јасно осветлио, Коши се није слагао с Лагранжем, који је желео да математичку анализу заснује на теорији редова; тим поводом Коши је наглашавао да и сама Тејлорова формула припада интегралном рачуну (а развијање функције у Тејлоров ред заснива се на Тејлоровој формули), јер њен остатак, како је Коши то чинио у својим делима, изражава се помоћу одређеног интеграла.

Под утицајем Кошијеве *Алгебарске анализе*, Абел[12] је дао значајне прилоге развитку теорије функција комплексна промењиве. Он је први потпуно строго изучавао биномни ред $\sum_{0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$ претпостављајући да су n и x ма који комплексни бројеви и нашао његову суму за све x за које тај ред конвергира. Поред познатих Абелових ставова о степеним редовима, интересантно је поменути да је Абел, одушевљен Кошијевим курсом анализе, уочио и исправио неке Кошијеве нетачне ставове (на пример, да је сума реда чији су чланови непрекидне функције увек непрекидна функција). Иначе, Абел је тада дао фундаменталне резултате у теорији елиптичких функција и теорији интеграла алгебарских функција, која се по њему и зове теорија Абелових интеграла.

Елиптичке функције чине једну специјалну класу аналитичких функција; као што је познато, независно од Абела је значајан прилог теорији елиптичких функција дао и Јакоби[13].

---

*) Интересантно је истаћи да Коши у формулацији фундаменталне теореме не помиње извод функције, већ полази од коначне и непрекидне функције: ,,Ако је функција $f(x+y\sqrt{-1})$ коначна и непрекидна за $x_0 \leqslant x \leqslant X$ и $y_0 \leqslant y \leqslant Y$, тада вредност интеграла не зависи од природе функција $x=\varphi(t)$ и $y=\chi(t)$". —Коши је најпре схватио да је непрекидна функција увек диференцијабилна и да је њен извод непрекидна функција, а говорећи о функцији мислио је на аналитички израз. У свом делу *Exercices d' Analyse et de Physique Mathématique* (1840. године) Коши, после спора са Лиувилом и Штурмом, у формулацију поменуте теореме укључује уз захтев непрекидности функције још и захтев непрекидности њеног извода.

[9]) Caspar Wessel (1745—1818).

[10]) Jean Robert Argand (1768—1822).

[11]) Karl Friedrich Gauß (1777—1855).

[12]) Niels Henrik Abel (1802—1829).

[13]) Karl Gustav Jacob Jacobi (1804—1851).

Средином XIX века *) Риман заснива теорију функција комплексне променљиве на нешто другачијој основи него што је то учинио Коши. Он полази, као што је познато, од система једначина

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x,$$

где су $u(x, y)$ и $v(x, y)$ реални, односно имагинарни део аналитичке функције. У развијању те теорије, Римана инспиришу идеје и методе из области теоријске физике, а посебно у вези с методама решавања једначине

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

под одређеним граничним условима. Непосредно пре тог Римановог рада појавили су се били радови Гауса, Грина [14], Кирхофа, Томпсона и Дирихлеа [15]. Римана је првенствено интересовало да, ослањајући се на Дирихлеов принцип, испита у којој је мери, уз дате контурне услове, аналитичка функција одређена. Наиме, на основу тог принципа утврђује се егзистенција функције која задовољава дате контурне услове и одговарајући интеграл чини минималним.

Риман је прецизирао шта значи конформно пресликавање, односно шта значи геометријска интерпретација аналитичких функција уопште. Зачетак те идеје налази се у Ојлеровим делима. Проучавање функција на такозваним Римановим затвореним површима открило је Риману низ проблема тополошког карактера; решавајући те проблеме Риман је поставио основе топологије површи.

У својој *Теорији Абелових функција* Риман је користио своје раније резултате и објаснио у чему се састоји минимум услова довољних за одређивање Абеловог интеграла с тачношћу до адитивне константе. У почетку тог рада Риман дефинише принцип аналитичког продужења, који има значајну улогу у теорији аналитичких функција, на следећи начин: „Функција од $x+iy$ задата у једном делу (x, y)-равни може се на јединствен начин непрекидно продужити." — То продужење, како истиче Риман, треба да задовољава диференцијалну једначину $if_x = f_y$, а при том аналитички израз функције не мора бити познат.

Синтеза Риманових идеја у теорији функција комплексне променљиве имала је велики значај за цео развитак те теорије и са њом повезаних дисциплина. Критикујући Дирихлеов принцип, Вајерштрас је 1869. године с тим у вези ставио под сумњу доказе неколико Риманових ставова. Тек почетком овог века Хилберт [16] је строго утврдио и доказао правилност пута који је изабрао Риман.

Сасвим различито од Римана је Вајерштрас засновао и развио теорију функција комплексне променљиве. Као што је већ речено, за Вајерштраса је у његовој теорији основни конструктивни елемент степени ред, који он узима заједно са свим могућним његовим аналитичким продужењима (која такође изражава одговарајућим степеним редовима); као такав, сте-

---

*) Године 1851. појавило се Риманово дело *Основи опште теорије функција комплексне променљиве* (докторска дисертација).

[14]) George Green (1793—1841).

[15]) Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805—1859).

[16]) David Hilbert (1862—1943).

пени ред дефинише функцију*). То најгенералније коришћење степеног реда у формирању теорије аналитичких функција свеобухватно карактерише Вајерштрасову концепцију коју је он излагао како у својим предавањима, која је почео држати 1861. године под називом *Ошшта шеорија аналитичких функција*, тако и у својим радовима објављеним крајем прошлог века.

Полазећи од Ојлеровог развитка**) Г-функције у бесконачни производ

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{Cz} \cdot z \cdot \prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} .$$

Вајерштрас је дошао до развитка сваке целе функције у облику бесконачног производа

$$f(z) = z^{\lambda}\, e^{g(z)} \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) e^{\frac{z}{\alpha_n} + \cdots + \frac{z^n}{n\,\alpha_n^n}} .$$

Овим, једним од најплоднијих открића за даљи развој теорије функција комплексних промењљивих, Вајерштрас је изразио аналогију између полинома и трансцендентних целих функција (такозваних ,,полинома бесконачно високог степена''). Та аналогија била је руководећа идеја француском математичару Лагеру[17], који се бавио испитивањем распореда нула целих функција, да уведе појам рода целе функције и да створи основу за теорију целих функција.

Док Кошију и његовим француским следбеницима није пошло за руком да испитају понашање униформних функција у околини (изолованих) есенцијалних сингуларитета, Вајерштрас је, користећи развитак целих функција у бесконачни производ, на основу посматрања количника таквих функција једноставно утврдио да се функција у околини такве тачке приближава произвољно близу било којој унапред датој вредности. Доцније је тај резултат употпуњен — утврђено је да у околини сваке тачке функција узима бесконачно много пута ма коју унапред дату вредност, изузев можда највише две посебне вредности***).

На Вајерштрасовом раду о целим функцијама непосредно се заснива једна општија теорија — теорија мероморфних функција, у којој је један Вајерштрасов ученик, шведски математичар Митаг-Лефлер[18] уопштавајући теорему о представљању рационалне функције помоћу простих разломака добио развитак мероморфне функције у ред по главним деловима.

Крајем прошлог века знатно се развила теорија целих функција, захваљујући у првом реду Римановом раду *О броју ūростих бројева који нису већи од даūе величине* (1859). Наиме, да би се проучила функција $\pi(x)$, која значи број простих бројева мањих од x, Риман је утврдио да треба проучити Ојлерову функцију $\zeta(z) = \sum\limits_{1}^{\infty} 1/n^z$ не само за реалне већ уопште

*) Тим путем је у Француској пошао Méray, коме нису била позната Вајерштрасова предавања.

**) Ојлер је тај производ навео само за реалне вредности независно промењљиве.

***) Ову Пикарову теорему генералисао је Борел, а Шотки (Friedrich Schottky, 1851—1935) је 1904. године доказао ту генералисану Пикарову теорему не користећи модуларне функције.

[17]) Edmond Laguerre (1834—1886).

[18]) Gösta Mittag-Leffler (1846—1927).

за комплексне z, а посебно изучити распоред нула те функције у комплексној равни. У том раду Риман је исказао хипотезу која ни до данас није доказана: Све имагинарне нуле функције налазе се на правој $x = 1/2$. Покушаји да се та Риманова хипотеза докаже били су врло плодни, а посебно у области целих функција, где су радовима Поенкареа[19] (1883. год,), Адамара[20] (1892. год.) и Борела[21] (1896—1897. год.) били установљени основни односи у вези са поретком раста ових функција и распореда њихових нула. Тако је, на пример, Поенкаре доказао да се род једне целе функције налази у блиској вези са редом величине функције за велике вредности променљиве, а Адамар је нашао границу рода целе функције помоћу коефицијената њеног развитка. Та испитивања омогућила су Адамару да докаже релацију *)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\int\limits_{2}^{x} \frac{dx}{\ln x}} = 1.$$

У овом кратком осврту истакнуто је неколико момената у развитку теорије функција комплексне променљиве крајем прошлог века. Међутим, и поред све сажетости излагања, немогућно је не поменути интензивну активност математичара посебно у области алгебарских функција, у којој су се стицале разне методе (у првом реду методе Вајерштраса, Римана и Поенкареа). При том треба поменути и Фуксове функције, како их је назвао Поенкаре, или аутоморфне функције, како их је назвао Клајн[22]. Те функције чине широку генерализацију модуларних функција, које је Ермит[23] проучавао у теорији елиптичких функција.

После овог кратког излагања даћемо један осврт на рад Михаила Петровића у теорији функција комплексне променљиве. Овој теорији непосредно припада око педесет радова М. Петровића. Већина тих радова односи се на испитивање карактера и распореда нула, величине модула и асимтотског понашања функција комплексне променљиве, а нарочито целих функција. При том М. Петровић полази углавном од степених редова служећи се — на један оригиналан начин — скоро увек аналитичким продужењем. У својим истраживањима у тој области М. Петровић се кретао углавном у стваралачком пољу француских математичара с краја XIX и почетка XX века (Лагер, Адамар, Борел, Пикар[24], Пенлеве[25].) У том истраживању највеће интересовање М. Петровића су привлачиле његове функције $\Omega(z)$, $J(z)$, $J_1(z)$, $J_2(z)$, од којих последње три имају многе примене у анализи, а посебно у интеграцији одређених класа диференцијалних једначина.

---

*) Чебишев (Пафнутий Львович Чебышев, (1821—1894) је још 1848. године дошао до две релације између функције $\pi(x)$ и интеграла који се јавља у имениоцу претходне Адамарове релације; из тих двеју релација може се закључити да, ако на левој страни Адамарове релације постоји гранична вредност, та гранична вредност мора бити јединица.

[19]) Henri Poincaré (1854—1912).
[20]) Jacque Hadamard (1805—1963).
[21]) Emile Borel (1871—1956).
[22]) Felix Klein (1849—1925).
[23]) Emile Picard (1856—1941).
[24]) Paul Painlevé (1863—1933).
[25]) Charles Hermite (1822—1901).

Пошто је немогућно у овом кратком излагању изнети најкарактеристичније црте сваког Петровићевог рада појединачно из области теорије функција комплексне промењиве, ми ћемо то учинити само за оне радове који се односе на претходно поменуте Петровићеве функције.

Почетком овог века М. Петровић је посебан интерес показао за проблематику у вези с његовом функцијом $\Omega(z)$, која се први пут јавља у његовом раду *Une classe remarquable de séries entières* (1908. год.). У ствари, проблем захваћен у том раду М. Петровић је имао у виду још 1906. године, почетком 1908. објавио је један део резултата, а тек на Интернационалном конгресу математичара у Риму 1908. године изложио је тај свој рад у целини.

М. Петровић поставља проблем да се нађу неопходни и довољни услови које мора задовољавати функција

$$(*) \qquad \Omega(z)=\sum_{0}^{\infty} a_k z^k$$

да би сви њени апроксимативни полиноми $f_n(z)=\sum_{0}^{n} a_k z^k$, па према томе и $\Omega(z)$, имали само реалне позитивне нуле, или, ако се претпостави да су сви коефицијенти a_k позитивни, да би све нуле тих полинома биле негативне. Да би тај проблем решио, М. Петровић најпре утврђује услове које морају задовољавати коефицијенти полинома $f_n(z)$ да би све нуле тог полинома биле реалне и негативне, а затим полази од полинома

$$(**) \qquad \varphi_n(z)=a_0 z^n+a_1 z^{n-1}+\cdots+a_{n-1} z+a_n$$

чије су нуле реципрочне вредности нула полинома $f_n(z)$ и који такође мора имати све нуле реалне и негативне. Користећи једначину

$$(***) \qquad \Delta_n(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, x)=0,$$

где је $\Delta_n(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ дискриминанта полинома (**), Петровић једноставним расуђивањем утврђује да коефицијент a_n не сме бити већи од најмањег позитивног решења једначине (***).

На тај начин М. Петровић одређује и функцију $\Omega(z)$. Наиме, коефицијенти реда (*) добијају се тако што се — за све полиноме (**) — узастопно одређују под условом да буду једнаки најмањем позитивном решењу једначине (***). При том је М. Петровић доказао да је функција $\Omega(z)$ производ целе функције рода нула и експоненцијалне функције облика Ae^{az}, где је $A=a_0$, $a=a_1/a_0$.

Користећи неке резултате Лагера и Хардија [26], М. Петровић показује како се може ефективно формирати неограничено много редова (*). На крају, М. Петровић указује на то да његова функција $\Omega(z)$ заслужује да се дубље проучи. И заиста, та функција је доцније била предмет проучавања П. Монтела [27] (1914. и 1916. год.) и Г. Поје (1920. год.).

---

[26]) Godfrey Harold Hardy (1877—1947).

[27]) Paul Montel (рођ. 1876).

Наведимо сада Петровићеве функције $J(z)$, $J_1(z)$, $J_2(z)$, које је М
Петровић дефинисао на следећи начин:

$$J(z) = 1 + \frac{\alpha_1}{1} z + \frac{\alpha_2}{1 \cdot 2} z_2 + \frac{\alpha_3}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \cdots,$$

$$J_1(z) = 1 - \frac{\alpha_2}{1 \cdot 2} z^2 + \frac{\alpha_4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} z_4 - + \cdots,$$

$$J_2(z) = \frac{\alpha_1}{1} z - \frac{\alpha_3}{1 \cdot 2 \cdot 3} z_3 + \frac{\alpha_5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} z^5 - + \cdots,$$

где је

$$\alpha_n = \frac{\int\limits_a^b u r^n \, dt}{\int\limits_a^b u \, dt},$$

при чему су функције u и r реалне, ограничене и непрекидне.

С обзиром на то да је

$$J(xi) = J_1(x) + i \cdot J_2(x),$$

М. Петровић указује да се у случају $r = \text{const.}$ ове трансценденте (како о
каже) своде респективно на елементарне функције

$$J(x) = e^{rx}, \quad J_1(x) = \cos rx, \quad J_2(x) = \sin rx,$$

те се, у случају да је r променљива величина, те трансценденте могу тр
тирати као генерализације ових функција. Оне су целе функције рода нул
или један.

Користећи своје трансценденте М. Петровић је генералисао Моавров
формулу; он је такође указао на више примена тих функција у анализи
на пример да је тригонометријски ред специјалан случај хипертригон
метријског реда

$$A_0 + \sum_1^\infty A_n J_1(nx) + \sum_1^\infty B_n J_2(nx),$$

за који наводи и облик суме.

Поред тога, М. Петровић је утврдио и друга својства својих тран
цендената и навео диференцијалне једначине чија су решења неке од ти
функција као и диференцијалне једначине за чију се интеграцију те фун
ције могу користити.

Овде ћемо поменути још само Петровићеву трансценденту

$$\Delta(z, \alpha) = \sum_1^\infty \frac{z^n}{n^{\alpha n}},$$

коју М. Петровић често користи било као компаративни елемент за разн
функције дате степеним редом било као редуктивни елемент за извесн
класе одређених интеграла.

Треба посебно истаћи Петровићеву оригиналну методу коју је он ористио у вези са степеним редовима са целобројним коефицијентима. Iаиме, ти редови се често користе у анализи и теорији бројева; њихови оефицијенти се израчунавају било појединачно:

$$a_n = \varphi(n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

ило рекурентним поступком помоћу низа већ познатих коефицијената. И. Петровић је користећи спектрални рачун, који је створио, израчунавао дједанпут све коефицијенте a_n или по вољи један од тих коефицијената ли пак групу коефицијената, и то помоћу низа децимала само једног роја S.

Интересантно је напоменути да, иако је М. Петровића привлачила римена математике, ипак га није привукао онај правац у теорији функција комплексне промењљиве који је засновао Риман, надахнут идејама из изике; у том правцу развила се снажна грана теорије функција комплексне ромењљиве која је нашла најширу примену — контурни проблеми.

Поред проблематике којом се бавио М. Петровић, а која је још давно, као што је поменуто, представљала богато поље рада, развиле су е у другој половини прошлог и првој половини овог века још многе руге области теорије функција комплексне промењљиве; главни токови те еорије су: геометријска теорија функција комплексне промењљиве, контурни роблеми, гранични проблеми аналитичких функција и теорија функција више комплексних промењљивих.

Геометријска теорија функција комплексне промењљиве изучава аналитичке функције дефинисане неким геометријским својством, а такође и еометријска својства разних класа аналитичких функција. Контурни проблеми обухватају на првом месту Риманов и Хилбертов проблем и проблеме Римановог и Хилбертовог типа. У тој области је наш велики математичар Ј. Племељ [28] дао значајан прилог (Племељеве формуле). Посебно реба истаћи област граничних проблема аналитичких функција, чија је роблематика у вези са испитивањем својстава аналитичких функција у близини њихових граница аналитичности. Теорија функција више комплексних промењљивих обухватила је и генералисала многе чињенице из теорије функција једне комплексне промењљиве, а поред тога развила је и своју специфичну проблематику; нашла је нарочито важну примену у квантној теорији поља.

Данас се теорија функција једне и више комплексних промењљивих у многим проблемима које проучава узајамно прожима и са неколико других математичких дисциплина: са теоријом реалних функција, функционалном анализом, теоријом парцијалних диференцијалних једначина, геометријом, топологијом и алгебром.

---

[28]) Јосип Племељ (1873—1966).

SUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA THÉORIE DES FONCTIONS A UNE VARIABLE COMPLEXE ET LES TRAVAUX DE MICHEL PETROVIĆ DANS CE DOMAINE

Par V. Daïovitch (Belgrade)

Résumé

Un apperçu sur les courants principaux du développement de la théo des fonctions à une variable complexe et les étapes les plus importantes de développement. On souligne particulièrement la place et la portée des trava de M. Petrović dans ce domaine des mathématiques.

Đ. Kurepa

PROGRAMIRANJE I JEDAN PETROVIĆEV PROBLEM O EKSTREMIMA

1. *Petrovićev problem.* U svojem delu [1] str. 144., Mihailo Petrović piše: „Neka je

(1) $$f_1, f_2, f_3, \ldots$$

jedan skup fakata koji se međusobno isključuju, a koji su svi u skladu sa jednim sticajem prilika (E), tako da ni jedan od tih fakata nije u suprotnosti sa (E).

Neka je F jedan fakat u čijem zbivanju sudeluje i igra određenu ulogu taj sticaj prilika (E) i to tako, da bi to sudelovanje moglo povući kao posledicu jedan ma koji od fakata (1) i da, prema tome, ne dolazi u opreku ni sa jednim od njih.

Na posletku, neka je R jedan faktor, tako vezan za fakt F, da ima jednu određenu veličinu kad god se desi jedan ma koji od fakata (1), a da se ta veličina menja kad na mesto jednoga od fakata (1) nastupi drugi koji je iz istoga skupa.

Za faktor R kaže se da je jedan *ekonomski faktor*, u faktu F u datom sticaju prilika (E), a o se, između ovih fakata (1), u realnosti ostvari onaj za koji će R imati *najmanju veličinu*, tako da bi on bio *veći* kad bi na mesto fakata f_i koji se u realnosti ostvario, bio ostvaren ma koji drugi fakt f_k skupa (1).

Tada se kaže da se u faktu F ispoljava *ekonomija faktora R*. Kad je ova onemogućena perturbatorskim uticajima drugih fakata, ali se, oslobođena tih uticaja opet pojavljuje, kaže se da pri zbivanju fakta F, i pored takvih ometanja postoji *težnja za ekonomisanjem toga faktora.*

1.1. *Skup S.* Iskazani problem je vrlo opšti, pogotovo ako dopustimo da (1) može biti i transfinitan niz, odnosno neko dobro uređenje proizvoljna skupa S. Uz tu interpretaciju Petrovićev problem obuhvata raznovrsne probleme o ekstremima, posebno probleme o programiranju.

1.2. U gornjoj formulaciji problema reč je o *minimumu funkcije R* Naravno da se odgovarajući problem o *maksimumu* može iskazati na sličan način.

2. Najjednostavnije je pretpostaviti da su F, R funkcije.

2.1. Slučaj $F=R$.

2.1.1. Posmatrajmo poseban slučaj da R označuje kakvu realnu funkciju, tj. $f: S \to Re$ (S je oblast od f; a vrednosti od f su u skupu Re realnih brojeva).

Tada se problem svodi na traženje eventualnih mesta m iz S sa svojstvom da u nekoj okolini Om od m vredi

$$fm \leqslant fOm.$$

Već vrlo jednostavni primeri pokazuju da takvo m u S ne mora postojati (primer: $fx = x \in S = Re\ (0,1)$).

2.1.2. Ista rasuđivanja vrede ako je antidomen $\mathrm{Dom}^{-1} f$ proizvoljan uređen skup (delimično ili potpuno uređen).

2.2 Slučaj da su F, R funkcije sa istim domenom

$$D = \mathrm{Dom}\, F = \mathrm{Dom}\, R \tag{1}$$

te da se skup vrednosti od F podudara sa S a da su vrednosti od R u skupu realnih brojeva ili u kojem drugom uređenom skupu. Stvar se obrađuje kao i u slučaju 2.1.

2.3. Umesto jednakosti (1) može se pretpostavljati da postoji neko *tolikovanje* t od $\mathrm{Dom}\, R$ na $\mathrm{Dom}\, F$. Taj se slučaj obrađuje kao slučaj 2.1 jer za svako $s \in S$ imamo određeno $ts \in \mathrm{Dom}\, F$ a time i određeno Fts.

3. Slučaj sa programiranjem.

3.1. Neka sticaj (E) prilika u Petrovićevom tekstu znači da se roba iz zadanih m stovarišta $S_1, \ldots, S_m$ po a_m, jedinica u $S_{m'}$ treba razdeliti u zadanih n odredišta $O_1, \ldots, O_n$ po b_n, jedinica u $O_{n'}$.

Neka je $x_{i\nu}$ broj jedinica robe koja se iz S_i otprema u O_ν. Dakle je $x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$

$$x_{1\nu} + x_{2\nu} + x_{m\nu}, \ldots + x_{m\nu} = b_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Tako imamo matricu x poretka (m, n) i s vrednostima $\geqslant 0$.

Ako je c_{ik} cena prevoženja jedinice robe iz S_i u O_k, tada za svaku prethodnu matricu x imamo izdatak

$$I = \sum_{i\nu} c_{i\nu} x_{i\nu}$$

za učinjeno prevoženje robe. Matricu x treba tako odrediti da izraz I bude minimalan.

U Petrovićevom tekstu funkcija R postaje sada funkcija I kojoj je oblast skup svih neodrečnih matrica x reda (m, n); veličina F je sada matrica x, tako da je skup S skup svih tih (m, n)-matrica x.

3.2. U opštem slučaju, linearno programiranje se iskazuje ovako (npr. Đ. Kurepa [1], str. 1003): zadan je niz podataka $c_1, \ldots, c_n$ koje ćemo pisati matrično kao stub c dakle transponirano kao redak: $c^\top = [c_1, c_2, \ldots, c_n]$; nadalje je zadan neodrečni stupac $b \geqslant 0$ poretka $(k, 1)$ te (k, n)-matrica a; u skupu rešenja x od $ax = b$ treba naći ona za koja je vrednost cx ekstremalna (x su matrice poretka $(n, 1)$).

Dokazuje se da svi ti x-ovi čine ispupčan zatvoren skup C, omeđen ravnim delovima. Nadalje se pokazuje da je traženo ekstremalno x vezano za neki vrh mnogosti C (v. Đ. Kurepa [1] str. 1011). I taj problem podređuje se u Petrovićev problem iz čl. 1, i to pridruživanjem ili smenom: $c^\top x \to R$, $C \to S$.

Tada se problem svodi na traženje eventualnih mesta m iz S sa svojstvom da u nekoj okolini Om od m vredi

$$fm \leqslant fOm.$$

Već vrlo jednostavni primeri pokazuju da takvo m u S ne mora postojati (primer: $fx = x \in S = Re\ (0,1)$).

2.1.2. Ista rasuđivanja vrede ako je antidomen $\mathrm{Dom}^{-1} f$ proizvoljan uređen skup (delimično ili potpuno uređen).

2.2 Slučaj da su F, R funkcije sa istim domenom

$$D = \mathrm{Dom}\, F = \mathrm{Dom}\, R \tag{1}$$

te da se skup vrednosti od F podudara sa S a da su vrednosti od R u skupu realnih brojeva ili u kojem drugom uređenom skupu. Stvar se obrađuje kao i u slučaju 2.1.

2.3. Umesto jednakosti (1) može se pretpostavljati da postoji neko *tolikovanje* t od $\mathrm{Dom}\, R$ na $\mathrm{Dom}\, F$. Taj se slučaj obrađuje kao slučaj 2.1 jer za svako $s \in S$ imamo određeno $ts \in \mathrm{Dom}\, F$ a time i određeno Fts.

3. **Slučaj sa programiranjem.**

3.1. Neka sticaj (E) prilika u Petrovićevom tekstu znači da se roba iz zadanih m stovarišta $S_1, \ldots, S_m$ po a_m, jedinica u $S_{m'}$ treba razdeliti u zadanih n odredišta $O_1, \ldots, O_n$ po b_n, jedinica u $O_{n'}$.

Neka je $x_{i\nu}$ broj jedinica robe koja se iz S_i otprema u O_ν. Dakle je $x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$

$$x_{1\nu} + x_{2\nu} + x_{m\nu}, \ldots + x_{m\nu} = b_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Tako imamo matricu x poretka (m, n) i s vrednostima $\geqslant 0$.

Ako je c_{ik} cena prevoženja jedinice robe iz S_i u O_k, tada za svaku prethodnu matricu x imamo izdatak

$$I = \sum_{i\nu} c_{i\nu}\, x_{i\nu}$$

za učinjeno prevoženje robe. Matricu x treba tako odrediti da izraz I bude minimalan.

U Petrovićevom tekstu funkcija R postaje sada funkcija I kojoj je oblast skup svih neodrečnih matrica x reda (m, n); veličina F je sada matrica x, tako da je skup S skup svih tih (m, n)-matrica x.

3.2. U opštem slučaju, linearno programiranje se iskazuje ovako (npr. Đ. Kurepa [1], str. 1003): zadan je niz podataka $c_1, \ldots, c_n$ koje ćemo pisati matrično kao stub c dakle transponirano kao redak: $c^{\top} = [c_1, c_2, \ldots, c_n]$; nadalje je zadan neodrečni stupac $b \geqslant 0$ poretka $(k, 1)$ te (k, n)-matrica a; u skupu rešenja x od $ax = b$ treba naći ona za koja je vrednost cx ekstremalna (x su matrice poretka $(n, 1)$.

Dokazuje se da svi ti x-ovi čine ispupčan zatvoren skup C, omeđen ravnim delovima. Nadalje se pokazuje da je traženo ekstremalno x vezano za neki vrh mnogosti C (v. Đ. Kurepa [1] str. 1011). I taj problem podređuje se u Petrovićev problem iz čl. 1, i to pridruživanjem ili smenom: $c^{\top} x \rightarrow R$, $C \rightarrow S$.

3.3. Problem iz člana 3.2. može se geometrijski formulisati ovako:

Zadan je zatvoren konveksan skup C u 1. delu euklidovskog prostora R_n i linearna funkcija $c^\top x$ u C; naći ona mesta $x \in C$ za koja je funkcija $c^\top x$ ekstremalna.

4. U gornjim opisima linearnog programiranja u čl. 3.2 mogu podaci a, b, c zavisiti stohastički, tako da se može govoriti o stohastičkom programiranju. Na osnovu prethodnog razmatranja znači to da i *stohastička linearna programiranja ulaze u okvir Petrovićeva problema o ekstremima.*

4.1. Zadana funkcija R ne mora biti linearna; ne mora biti strogo određena, nego joj vrednosti mogu zavisiti od nekih *slučajnih* događaja.

4.2. Zato uopšte, problemi o programiranju — linearnom ili nelinearnom, verovatnostnom ili determinističkom — potpadaju pod Petrovićev opšti problem o ekstremima iz čl. 1.

5. Kad smo tako saznali koliko je Petrovićev ekstremalni problem općenit, ne treba se čuditi da nismo u stanju navesti jedan razrađen postupak (algoritam), pomoću kojega bi se taj problem u svakom slučaju mogao rešiti u smislu da rešenje postoji, a onda da ga se može odrediti računom, mehanički ili pomoću raznih pribora.

LITERATURA

[1] Petrović M., *Fenomenološko preslikavanje*, SKAN, Posebna izd. knj. 97, Prir. i mat. spisi, knj. 26, Beograd, 1933, VIII + 236.

[2] Kurepa Đ., *Viša algebra*, Zagreb, 1961, I, (32°) + 764; II, (20°°) + 765—1380.

PROGRAMMATION ET UN PROBLÈME DE PETROVIĆ SUR LES EXTREMA

Đuro Kurepa (Beograd)

Résumé

Dans son livre 1 Transformations phénoménologiques, Mihailo Petrović a formulé (pp. 144/5) le problème général suivant concernant les extrema:

„Soit (1) un ensemble de faits qui s'excluent mutuellement et qui sont tous en concordance avec un certain ensemble (E) de circonstances de manière qu'aucun de ses faits ne soit en contradiction avec (E).

Soit F un fait dans l'accomplissement duquel participe et joue un rôle déterminé ledit ensemble (E) de circonstances de telle manière que cette participation pourrait entraîner l'un des faits (1) et que, par conséquence, elle ne soit en contradiction avec aucun d'eux.

Enfin, soit R un facteur lié au fait F de manière qu'il ait une certaine valeur chaque fois que l'un des faits (1) se produit et que cette valeur change quand au lieu d'un fait de (1) se produit un autre du même ensemble.

On dit que R est un *facteur économique* du fait F dans l'ensemble (E) de circonstances si parmi des faits (1) c'est celui qui se produira qui donnera à R *la valeur minimum*, de manière que R serait plus grand si au lieu de faits f_i qui se sont réellement produits n'importe quel autre de l'ensemble (1) se produirait.

On dit que dans le fait F se manifeste une *économie du facteur* R. Si celle-ci ne se produit pas à cause d'influences perturbartrices d'autres facteurs, et qu'elle se manifeste de nouveau du moment qu'elle se libère de ses perturbations l'on dit que dans l'accomplissement de F, en dépit de telles perturbations, il existe une tendance d'économiser le facteur R".

Dans la Note on montre que la formulation de Petrović englobe aussi les problèmes de programmation (linéaire, nonlinéaire, stochastique ou déterministe).

Beograd, 01. 5. 1968.
Matematički institut.

Милорад Бертолино

ПЕТРОВИЋЕВО ДИРЕКТНО ПРОУЧАВАЊЕ РЕШЕЊА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

I

Резултати Михаила Петровића у области квалитативне анализе диференцијалних једначина бројни су, разноврсни и садрже многе духовите посебне поступке. Ми се нећемо упуштати у анализу свих тих резултата, него ћемо издвојити само област такозваног директног проучавања реалних интеграла, а нарочито неке делове у којима долази до изражаја примена диференцијалних неједнакости. Већином се ради о Петровићевим радовима са којима су у извесној вези резултати аутора овог чланка ([14]—[20]), било да су у тим резултатима ближе анализирани одн. даље разрађивани, било да су послужили инспиративно.

Ако је задана диференцијална једначина $y' = f(x, y)$, основна неједнакост која је значајна у квалитативној анализи биће неједнакост $f(x, y) \lesseqgtr 0$, која одређује област рашћења односно опадања решења диференцијалне једначине, Решење $y = \varphi(x)$ једначине $f(x, y) = 0$ представља скуп стационарних тачака решења. Ове основне околности зачудо се ретко наглашавају у делима о квалитативној анализи, док су у Петровићевим радовима оне и видно истакнуте, и много коришћене. Споменимо следећи Петровићев резултат из 1895. године ([1]), цитиран према изворном тексту:

Нека је дата Рикатијева једначина

$$\frac{dy}{dx} + \varphi_1(x)\, y^2 + \varphi_2(x)\, y + \varphi_3(x) = 0, \tag{1}$$

где су φ_1, φ_2, φ_3 униформне функције x—а.

Сменом $y = \dfrac{u}{\varphi_1(x)}$ добијамо

$$\frac{du}{dx} + u^2 + f_1(x)\, u + f_2(x) = 0 \tag{2}$$

$$\text{са } f_1(x) = \varphi_2(x) - \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)}, \; f_2(x) = \varphi_1(x)\, \varphi_3(x).$$

Први случај. Нека су a_1 и a_2 коначне границе: $\lim f_1(x) = a_1$, $\lim f_2(x) = a_2$. Кад x бесконачно расте, граница којој тежи општи интеграл једначине (2) не зависи од интеграционе константе: она је или потпуно неодређена, па ма какву вредност дали константи, или је равна једној од вредности

$$-\frac{1}{2}(a_1+\sqrt{a_1^2-4\,a_2}),\ -\frac{1}{2}(a_1-\sqrt{a_1^2-4\,a_2}).$$

Други случај. $f_1(x)$ и $f_2(x)$ не теже обе коначним границама, или ако теже, те су обе границе равне нули. Кад је једна од тих граница бесконачна, граница интеграла u извесно је бесконачна. Кад су обе границе равне нули, у општем случају не може се наћи граница интеграла u, али у специјалним случајевима то је често пута могуће.

У првом случају, за $a_1^2-4\,a_2=0$ интеграл тежи ка $-\frac{a_1}{2}$; ако је a_1^2- $-4\,a_2>0$ тежи уопште већем корену квадратне једначине $r^2+a_1\,r+a_2=0$, изузетно може тежити мањем; ако је $a_1^2-4\,a_2<0$, интеграл осцилира бесконачно много пута између $-\infty$ и $+\infty$.

Наведеном резултату могу се ставити замерке са гледишта прецизности доказа, јасноће формулација, одређености термина, недовољног увида у све могуће подслучајеве, њиховог непотпуног разграничења. Али нека читалац покуша да критички приђе овом резултату и да сам прецизира термине и тражи све могуће подслучајеве, па ће се брзо уверити у то да су евентуалне омашке отклоњиве, да је резултат, генерално узев, тачан, да је директна анализа Петровића изванредно инспиративна и инструктивна и да представља одличног путовођу за даље испитивање аналогних проблема. Уосталом, доба у коме је рад настао још се није у потпуности одликовало данашњом ригорозношћу (и ако ово не важи, на пример, за немачку школу), а и сам Петровић је у каснијим резултатима све ближи савременом начину математичког изражавања. Квалитативна анализа компаративних Рикатијевих једначина у нашим чланцима [15], [16] инспирисана је баш овим Петровићевим радом.

У Петровићевим радовима ([5], [6], [7]), значајно место заузима појам квалитативног првог интеграла. Нека је, наиме, дата једначина

$$F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})=0 \tag{3}$$

и нека је уочен израз $\Phi(x,y,y',\ldots,y^{(m)})$. Нека је, даље, $y(x)$ функција која припада одређеној класи решења једначине (3). Израз Φ биће квалитативни први интеграл дате једначине ако он, посматран као функција од x, варира у одређеном интервалу $[\lambda_1,\lambda_2]$ за све функције $y(x)$ из одређене класе интеграла једначине (3), после замене њих и њихових извода укључујући ред m у израз Φ. Ништа се a priori не претпоставља о вези m и n, ма да је већином случај $m<n$ од већег интереса. То се пише на следећи начин:

$$\Phi=\lambda_1+\theta(\lambda_2-\lambda_1)=\lambda \text{ са } 0\leqslant\theta\leqslant 1,$$

где су λ_1, λ_2 константе, а λ и θ функције од x. У случају обичног првог интеграла израз Φ се просто своди на константу.

Из неједнакости, на пример,

$$\frac{1}{2}(y'^2+y^2)^2\leqslant y'^4+y^4\leqslant(y'^2+y^2)^2$$

за $y'^4+y^4=f(x)$, добија се

$$\frac{y'^2+y^2}{\sqrt{f(x)}}=1+\theta(\sqrt{2}-1), \quad 0\leqslant\theta\leqslant 1,$$

квалитативни први интеграл

$$\text{за } y'^4+y^4=f(x).$$

Или, из неједнакости

$$\frac{1}{2}(y'+y)^2\leqslant y'^2+y^2\leqslant(y'+y)^2$$

добија се за једначину

$$y'^2+y^2=f(x) \tag{4}$$

(за сваки њен позитивни монотоно растући интеграл) квалитативни први интеграл:

$$\frac{y'+y}{\sqrt{f(x)}}=1+\theta(\sqrt{2}-1): \quad 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

Петровић проучава такве класе диференцијалних једначина чији квалитативни први интеграли дају једначине $\Phi=\lambda$ лакше за проучавање. Тако, полазећи од простијих једначина, долази до закључака који се односе на решења генералнијих или компликованијих. Функције $y(x)$ задовољавају истовремено и једначину и квалитативни први интеграл.

У овом смислу нарочито је од интереса једначина (4) којом се Петровић доста бавио и којој ћемо и ми посветити мало више пажње. Очигледно је $y'=\pm\sqrt{f(x)-y^2}$, па у области $|y|>\sqrt{f(x)}$ решења једначине не егзистирају. Узмимо, у области $|y|<\sqrt{f(x)}$, једну тачку са координатама (x_0, y_0) где је $y_0>0$. Кроз ову тачку пролазе две интегралне криве $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$, од којих је прва позитивна и растућа (одговара грани $y'=+\sqrt{f(x)-y^2}$), а друга позитивна и опадајућа (одговара грани $y'=-\sqrt{f(x)-y^2}$). Квалитативни први интеграл $\frac{y'+y}{\sqrt{f(x)}}=\lambda$ (са $1\leqslant\lambda\leqslant\sqrt{2}$) одговара, очигледно, кривој $Y_1(x)$. С друге стране, за позитивно y и негативно y' (што одговара кривој $Y_2(x)$), из неједнакости

$$\frac{(y'-y)^2}{2}\leqslant y^2+y'^2\leqslant(y'-y)^2$$

се добија квалитативни први интеграл исте једначине, али за $Y_2(x)$ у облику

$$\frac{y'-y}{\sqrt{f(x)}}=\lambda \text{ (са } -\sqrt{2}\leqslant\lambda\leqslant -1).$$

Интеграција показује да се $Y_1(x)$ налази између кривих

$$y=e^{-x}\left[y_0 e^{x_0}+\int_{x_0}^{x} e^x\sqrt{f(x)}\,dx\right] \text{ и } y=e^{-x}\left[y_0 e^{x_0}+\sqrt{2}\int_{x_0}^{x} e^x\sqrt{f(x)}\,dx\right],$$

а $Y_2(x)$ између кривих

$$y=e^x\Big[y_0\,e^{-x_0}-\sqrt{2}\int\limits_{x_0}^{x} e^{-x}\sqrt{f(x)}\,dx\Big] \text{ и } y=e^x\Big[y_0\,e^{-x_0}-\int\limits_{x_0}^{x} e^{-x}\sqrt{f(x)}\,dx\Big].$$

Очигледно, уже претпоставке о функцији $f(x)$ омогућавају даљу квалитативну анализу, јер ће особине оквирних кривих рећи нешто и о особинама решења $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$. За $y_0<0$ расуђивања су аналогна.

Овим се не исцрпљују сва Петровићева разматрања о наведеној једначини. Између осталих, треба истаћи његов чланак ([9]), где је на свега три стране изванредно јасно показано како и најмање квалитативне промене неког параметра који фигурише у датој једначини могу имати за последицу веома видне квалитативне промене тока интегралних кривих. У својству примера Петровић проучава једначину

$$y'^2+y^2=\alpha\,u(x)+1, \tag{4'}$$

која је специјалан случај претходне једначине. Диференцијабилна функција $u(x)$ претпоставља се монотоном, са $u'(x)\not\equiv 0$. За $\alpha=0$ општи интеграл се добија у облику $y=\sin(x+C)$ дакле скуп осцилаторних кривих. За $\alpha\neq 0$ Петровић диференцира дату једначину и добија једнакост

$$2\,y'(y+y'')=\alpha\,u'(x)$$

одакле се види да мора бити и $y'\neq 0$ (због $\alpha\neq 0$, $u'(x)\not\equiv 0$), па да су, дакле, решења дате једначине монотоно растућа или монотоно опадајућа. Диференцирање дате једначине представља једну од досетки, толико типичних за Петровића, које омогућавају да се из крајње једноставних поступака изведу значајни закључци. Додуше, овде Петровић претпоставља и егзистенцију другог извода решења дате једначине. Доказаћемо, међутим, да је став тачан и без ове претпоставке.

Најпре, једначина се очигледно своди на две једначине $y'=\pm\sqrt{1+\alpha\,u(x)-y^2}$. Зато ћемо, између осталих разматрања, имати у виду и проучавање (посебно) сваке од ових једначина, од којих једна (са знаком $+$) даје само растућа, а друга (са знаком $-$) само опадајућа решења. Израз на десној страни дате једначине није дефинисан за $|y|>\sqrt{1+\alpha\,u(x)}$, у којој области, дакле, нема смисла ни говорити о реалним решењима.

Уочимо ли случај $y^2+y'^2=1$, очигледно је да је општи интеграл, као што Петровић подвлачи, дат изразом $y=\sin(x+C)$. Међутим, праве $y=\pm 1$ такође задовољавају дату једначину. То је сингуларни интеграл, јер све криве $y=\sin(x+C)$ додирују ове праве, па дуж решења $y=\pm 1$ ни у једној тачки није испуњена јединственост. Ако посматрамо две једначине $y'=\pm\sqrt{1-y^2}$, онда видимо да једначина $y'=\sqrt{1-y^2}$ даје решења $y=\sin(x+C)$, али само растуће делове тих кривих, док једначина $y=-\sqrt{1-y^2}$ даје решења $y=\cos(x+C)$, али само опадајуће делове тих кривих. У свакој тачки правих $y=\pm 1$ стичу се: једна крива прве фамилије и једна крива друга фамилије. Пошто крива прве фамилије има у уоченој тачки леви извод једнак нули, а крива друге фамилије десни извод једнак нули, ми можемо скуп ове две криве сматрати као једну криву која, очигледно, и задовољава једначину $y^2+y'^2=1$ и у уоченој тачки има извод једнак нули и обухваћена је општим интегралом $y=\sin(x+C)$. Управо тако „спојене" криве и сачињавају осцилаторна решења о којима говори Петровић.

Исти је случај, уопште, са једначином

$$y^2+y'^2=a^2,$$

коју Петровић спомиње такође. Ту је општи интеграл $y=a\sin(x+C)$, а сингуларни $y=\pm a$.

Када би крива $\varphi(x)=\sqrt{1+\alpha u(x)}$ $(1+\alpha u(x)>0)$ (која се у управо разматраном случају свела на $\varphi(x)=1$) имала нула првог извода, тј. функција $\varphi'(x)=\dfrac{\alpha u'(x)}{2\sqrt{1+\alpha u(x)}}$ тј. функција $u'(x)$ имала нула, у тим нулама било би опет могуће овако „спајање" које би могло да доведе ако не до осцилаторних, а оно бар до немонотоних решења. У случају $u'(x)\neq 0$ не може доћи до објашњеног спајања двеју кривих, што је узрок егзистенцији само монотоних решења.

Напоменимо да, за $\alpha\neq 0$, граничне криве $\pm\sqrt{1+\alpha u(x)}$ не могу бити решења дате једначине, што се лако верификује заменом. Оне, дакле, нису сингуларни интеграли. Посматрајмо једну тачку $x_0, \sqrt{1+\alpha u(x_0)}$ на кривој $\varphi(x)=\sqrt{1+\alpha u(x)}$ (за негативну детерминацију расуђивања су сасвим аналогна). Како је, по претпоставци, $u'(x_0)\neq 0$, то је и $\varphi'(x_0)=\dfrac{\alpha u'(x_0)}{2\sqrt{1+\alpha u(x_0)}}\neq$ $\neq 0$. Претпоставимо, прво, да је $\alpha u'(x_0)>0$ (тада је и $\varphi'(x_0)>0$). Нека је $y_1(x)$ решење једначине $y'=+\sqrt{1+\alpha u(x)-y^2}$ које пролази кроз дату тачку. Мора бити $y_1'(x_0)=0$. Одатле је $\varphi'(x_0)-y_1'(x_0)>0$, тј. $\dfrac{d}{dx}[\varphi(x)-y_1(x)]>0$ за $x=x_0$. Функција $\varphi(x)-y_1(x)$ се у тачки $x=x_0$ анулира и растућа је, па је у некој околини $x<x_0$ испуњено $\varphi(x)-y_1(x)<0$, тј. $\varphi(x)<y_1(x)$. Међутим, у области $y>\varphi(x)$ решења нема. У некој околини $x>x_0$ је испуњено $\varphi(x)-y_1(x)>0$, тј. $y_1(x)<\varphi(x)$.

Ако сада са $y_2(x)$ обележимо оно решење једначине $y'=-\sqrt{1+\alpha u(x)-y^2}$ које пролази кроз уочену тачку, добија се такође да је оно дефинисано само за $x>x_0$ и да је $y_2(x)<\varphi(x)$. Како $y_1(x)$ расте, а $y_2(x)$ опада, то је (за $x>x_0$) $y_2(x)<y_1(x)$ па криве $y_1(x)$ и $y_2(x)$ не могу бити спојене у једно решење (долази до двозначности).

Посматрајмо шта даље бива са решењем $y_1(x)$, за које смо раније констатовали да је у једној околини $x>x_0$ испод криве $\sqrt{1+\alpha u(x)}$. Тврдимо да ће оно стално остати у области испод криве $\sqrt{1+\alpha u(x)}$ па према томе (због $y_1'(x)>0$) стално монотоно. Када би се то решење поново срело са $\sqrt{1+\alpha u(x)}$ у некој тачки $x_1>x_0$, одмах, би се, као малопре, закључило да оно није дефинисано у околини $x<x_1$ што би било у супротности са непрекидношћу решења.

Уочимо ли растуће решење које полази из неке тачке (x_0, y_0) са $y_0<\sqrt{1+\varphi u(x_0)}$ оно ће поготову остати стално монотоно у области $|y|<$ $<\sqrt{1+\alpha u(x)}$ што непосредно следује из претходног. Решење $y_2(x)$ ће такође стално остати у споменутој области. Ако би имало заједничку тачку са $-\sqrt{1+\alpha u(x)}$ за неко $x_1>x_0$, лако се види да би било недефинисано у некој околини $x<x_1$, што је апсурд.

Једном речју, решења се или налазе сва у области $|y|<\sqrt{\alpha u(x)+1}$ немајући заједничких тачака са граничним кривим или, ако у тачки $x=x_0$ имају заједничку тачку са граничном кривом, остају у области за $x>x_0$.

Ако је $\varphi'(x_0)<0$, нека је $y_1(x)$ решење једначине $y'=\sqrt{\alpha u(x)+1-y^2}$ са $y_1(x_0)=\sqrt{\alpha u(x_0)+1}$. Како је $y_1'(x_0)=0$, то је $\dfrac{d}{dx}[\varphi(x)-y_1(x)]<0$ за $x=x_0$ а $\varphi(x_0)=y_1(x_0)$. Значи да је, за $x>x_0$ испуњено $\varphi(x)<y_1(x)$, где решења не може бити. Исто је и за $y_2(x)$.

Закључује се да је за $x<x_0$ испуњено $y_2(x)>y_1(x)$ па се решења не могу спојити у једно, а за $x>x_0$ су непродужива. Но, док су у области $|y|<\sqrt{1+\alpha u(x)}$ она су, свако за себе, монотона. Природно, и овде може бити монотоних решења, која читава остају у области (монотона) а немају заједничких тачака са граничним кривим.

Вратимо се на Петровићеву везу

$$2y'(y''+y)=\alpha u'(x).$$

Сва разматрања која полазе од ње претпостављају, природно, егзистенцију свих израза који се у њој јављају. Како је у тачкама граничних кривих, по самој почетној једначини, $y'=0$ или, боље, десни или леви извод једнак нули, то очигледно горња веза не важи за тачке на граничним кривим, у којима се, међутим, управо и врши оно „спајање“ које омогућава осцилаторни карактер. За $y'\neq 0$ је $y''=-y+\dfrac{\alpha u'(x)}{2y'}$ дефинисан, па је допуштено извршити диференцирање које је спровео Петровић. Чим је написао y' не спомињући леви одн. десни извод, Петровић је искључио тачке на самим граничним кривим, где, под датим условима, како смо видели, има смисла говорити само о десном или левом изводу. Са овог становишта могу тачке на на граничним кривим и не бити признате као тачке кроз које пролазе интегралне криве, чим у њима не може бити речи о двостраном изводу, који се подразумева када се напише диференцијална једначина. Наша решења која смо разматрали полазећи од тачака $x_0, \varphi(x_0)$ била би, дакле, решења са искључењем тих тачака. Међутим, ако под y' подразумевамо само леви или само десни извод, онда се опет могу изводити закључци на основу Петровићеве везе, увек под претпоставком да постоји $y''(x)$. Петровићева једнакост $2yy'(y+y'')=\alpha u'(x)$ каже ово: Доклегод је $u'(x)>0$, а то је претпостављено за све $x\geqslant 0$, не може бити $y'=0$ што се остварује било тако што решења (када се појединачно посматрају криве које задовољавају било $y'=\sqrt{1+\alpha u(x)-y^2}$ било $y'=-\sqrt{1+\alpha u(x)-y^2}$) остају стално у области $|y|<\sqrt{1+\alpha u(x)}$ за свако $x\geqslant a$ и ту су, природно, монотона, било што се приближавају граничној кривој тј. једној тачки на граничној кривој, не спајајући се у њој са кривом друге фамилије у криву која би у тачки $x=x_0$ имала јединствен извод. Напоменимо да недефинисаност израза за $y''(x)$ добијеног формалним диференцирањем дате једначине, још увек не значи да тај извод не постоји. На пример, једначина $y'=\sqrt{1-y^2}$ има решење $y=1$ чији је $y''(x)\equiv 0$, а израз $y''=-\dfrac{yy'}{\sqrt{1-y^2}}$ није дефинисан за $y=1$. Зато уз Петровићев доказ треба подвући чињеницу да он важи под претпоставком егзистенције другог извода. У нашим разматрањима други извод није коришћен, али су разматрања опширнија, дајући, истина, детаљнији увид у разне околности везане за решења дате једначине.

Напоменимо још да у било којој тачки која није на граничној кривој увек важи $\sqrt{1+\alpha u(x)-y^2} \neq -\sqrt{1+\alpha u(x)-y^2}$, па не може бити спајања двеју кривих из разних фамилија које би дале јединствено осцилаторно решење.

Пример 1.

$$\alpha=1 \quad u(x)=x+\frac{1}{4x}-1$$

$$y'=\pm\sqrt{x+\frac{1}{4x}-y^2}.$$

Решење је $y=\pm\sqrt{x}$, монотоно, које остаје у области $|y|<\sqrt{\alpha u(x)+1}$ за $x \geqslant x_0$.

Пример 2.

$$\alpha=1 \quad u(x)=\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}-1$$

$$y'=\pm\sqrt{\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}-y^2}.$$

Решење је $y=\frac{1}{x}$, монотоно, које остаје у области $|y|<\sqrt{\alpha u(x)+1}$. (Примери су наши М. Б.).

Споменимо још да се сличном методом може разматрати једначина

$$y'^m \pm y^n = f(x), \tag{5}$$

где су m и n природни бројеви (видети [20]). На проучавање ове једначине аутора ових редова је инспирисала не само Петровићева метода проучавања једначине $y^2+y'^2=f(x)$, него и једна друга околност која се запажа у вези са Петровићевим резултатима. У последњем случају ($\alpha \neq 0$, $u'(x) \not\equiv 0$) запажа се да решења имају исту особину као функција $u(x)$ која фигурише у једначини (монотоно рашћење или опадање). Намеће се одмах општија помисао: посматрати све оне једначине типа $y'=F(x, y, f(x))$ које омогућавају да се, полазећи од неке квалитативне особине P функције $f(x)$ докаже да постоји скуп решења $y(x)$ дате једначине која имају ту исту особину P. У случају једначине (5) добили смо низ резултата ове врсте. Једначину (4), важну у применама, проучавали су Т. Пејовић и Д. С. Митриновић, између осталих радова и у радовима [12], [13], са гледишта интеграције помоћу квадратура, а сем наведених бавили су се овом једначином и други аутори.

Претпоставимо да је особина P дата исказом ,,бити ограничена функција за $x \geqslant x_0$". Свакој функцији $f(x)$ одговара друга једначина $y'=F(x, y, f)$, а свакој једначини овог типа одговара други (бесконачан) скуп ограничених решења. Овим је дефинисано једно мултиформно пресликавање скупа ограничених функција у себе сама и било би интересантно проучавати особине једног таквог пресликавања, чија је „генератриса" диференцијална једначина. Напоменимо да блискост решења $y(x)$ функцији $f(x)$ наводи на помисао да би проучавање пресликавања о коме је реч требало повезати са проблематиком такозваних „готово фиксних тачака". Позната је дефиниција по којој се каже да подскуп X неког метричког простора има особину готово фиксне тачке ако, за свако непрекидно пресликавање X у себе сама и за свако $\varepsilon>0$ постоји бар једно x_0 тако да је $d(x_0, f(x_0))<\varepsilon$.

III

Облик $y'=F(x,y,f(x))$ нашли смо, међутим, такође код Петровића (видети [3], [6], [7], [10]) у нешто другачијем али ипак доста сродном контексту. Познат је следећи Петровићев резултат, који дајемо према изворном тексту.

Нека је дата једначина $y'=F(x,y,f)$ где је f функција од x која фигурише у F. Нека је (x_0, y_0) тачка у којој су функција F и њен извод $\frac{\partial F}{\partial f}$ одређени, коначни, непрекидни и не мењају знак и за коју се овај парцијални извод анулира. Увек се могу изабрати две функције $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ које испуњавају следеће услове:

1) Оне су одређене, коначне и непрекидне у неком довољно малом интервалу од $x=x_0-a_1$ до $x=x_0+a_2$ (a_1 и a_2 су две позитивне константе);

2) У овом је интервалу $\lambda(x)<f(x)<\mu(x)$; Ако се са u и v означе интеграли једначина

$$u'=F(x,u,\lambda),\quad v'=F(x,v,\mu)$$

који за $x=x_0$ узимају вредност $u_0=v_0=y_0$, функције u и v су одређене, коначне и непрекидне у довољно малом интервалу од $x=x_0-b_1$ до $x=x_0+b_2$ (b_1 и b_2 су две позитивне константе).

Два интервала (x_0-a_1, x_0+a_2) и (x_0-b_1, x_0+b_2) имају увек један заједнички интервал (x_0-h_1, x_0+h_2) који је различит од нуле.

За сваку вредност x из интервала (x_0-h_1, x_0+h_2) интеграл y једначине $y'=F(x,y,f)$ који за $x=x_0$ узима вредност $y=y_0$ је одређен, коначан, непрекидан и *налази се стално између одговарајућих интеграла u и v*.

Очигледно, овде се из неких неједнакости које важе за функцију f изводе неједнакости које важе за решења дате једначине. Особина P из прошлог одељка овде је: „задовољавати неједнакости типа $\lambda(x)<f(x)<\mu(x)$". Наравно, резултат даје и више од овога, јер пружа тачно упутство за формирање компаративних једначина. Ако су једначине $u'=F(x,u,\lambda)$, $v'=F(x,v,\mu)$ лакше за проучавање од дате једначине, моћићемо да добијемо и квантитативну процену и квалитативни опис непознатог решења које је „уоквирено" функцијама u и v.

IV

У претходном одељку ради се о неједнакостима типа $\lambda(x)<f(x)<\mu(x)$ које задовољава функција $f(x)$ која фигурише у десној страни дате једначине. Још су значајнији Петровићеви резултати у вези са неједнакостима типа

$$f_1(x,y)<f(x,y)<f_2(x,y) \tag{6}$$

где су f_1, f, f_2 десне стране једначина

$$y' = f_1(x, y), \quad y' = f(x, y), \quad y' = f_2(x, y). \tag{7}$$

У вези са овим неједнакостима указали смо ([19]) на један важан Петровићев приоритет. Позната је Чаплигинова теорема која гласи:

Нека је дат отворен скуп Ω и функције $f_1(x, y)$, $f(x, y)$, $f_2(x, y)$ непрекидне на том скупу. Нека су $y_1(x)$, $y(x)$, $y_2(x)$ редом решења једначина (7), са $y_1(x_0) = y(x_0) = y_2(x_0) = y_0$ (тачка (x_0, y_0) је у Ω). Тада из (6) следује у Ω

$$y_1(x) < y(x) < y_2(x) \tag{8}$$

за $x > x_0$.

Ову теорему је Чаплигин објавио 1919. године. Међутим, Петровић је 1899. г. (видети [3], [7]) објавио следећи став који наводимо према изворном такстy:

Нека су

$$y' = F(x, y) \tag{9}$$

$$u' = F_1(x, u) \tag{10}$$

$$v' = F_2(x, v) \tag{11}$$

три диференцијалне једначине првог реда. Функције двеју променљивих x и y

$$F(x, y) - F_1(x, y) \tag{12}$$

$$F(x, y) - F_2(x, y) \tag{13}$$

имаће, у равни XOY свака своју позитивну и негативну област. Означимо са:

Δ_1 и Δ_2 позитивну и негативну област функције (12);

Ω_1 и Ω_2 позитивну и негативну област функције (13):

$D_1, D_2 \ldots$ линије које ограничавају те области;

$E_1, E_2 \ldots$ линије које представљају геометријска места сингуларитета функција F, F_1, F_2;

Π део равни који је заједнички за један пар области Δ и Ω супротно означених, нпр., за области Δ_1 и Ω_2.

Нека је $M_0(x_0, y_0)$ једна тачка која не припада ни једној од линија D ни E, а које се налази у области Π.

На послетку, нека су y, u, v интеграли једначина (9), (10), (11) који за $x = x_0$ имају заједничку вредност $y = y_0$, $u = y_0$, $v = y_0$. Тада ће, са једне и друге стране тачке $(x_0, 0)$, постојати на оси Ox један размак различит од нуле, например

$$(x_0 - h_1, x_0 + h_2) \tag{14}$$

(h_1 и h_2 су два позитивна броја) који ће испуњавати ове услове:

а) док се x мења у размаку (14) интеграли u и v као и њихови први изводи су одређени, коначни и непрекидни;

б) контура Γ састављена од кривих u, v и двеју правих $x = x_0 - h_1$ и $x = x_0 + h_2$ садржана је у области Π и она не обухвата ни један део кривих D ни E нити се са којом од ових сече.

Тада се може доказати овај резултат:

Кад се x мења у размаку (14) интеграл једначине (9) биће одређен коначан и непрекидан, а налазиће се стално између u и v.

Очигледно се ради о истом ставу. Чаплигинов став се обично наводи уз претпоставку јединствености решења за средњу једначину, што је излишно, јер став важи и без те претпоставке. Код Петровића, као што видимо, јединственост се такође посебно не подвлачи. О овом приоритету читалац може више наћи у чланку [19]. Овде ћемо нагласити да приоритет о коме је реч не смањује велику улогу Чаплигина, који је још дао основе теорије за једначину реда n, дубоку анализу линеарних једначина n-тог реда, као и своју чувену методу сукцесивног уоквиравања. Из Чаплигинових радова, развио се у СССР и другде читав један правац приближне и квалитативне интеграције диференцијалних једначина. Без умањивања, дакле, значаја Чаплигинове теорије, овај приоритет подвлачи, међутим, видно луцидност и богатство идеја Михаила Петровића.

Ваља напоменути да се Чаплигинова неједнакост јавља код Петровића и раније, у његовом раду [2] из 1896, али не у овако општем и не у експлицитном виду. Ту је важан следећи његов резултат:

Нека су:

$$\frac{dY_1}{dx}=\varphi(Y_1-F_1)(Y_2-F_2) \tag{15}$$

$$\frac{dY_2}{dx}=\varphi(Y_2-\Phi_1)(Y_2-\Phi_2) \tag{16}$$

две једначине за које у интервалу $(0, \alpha)$ важи

$$F_1(x) \gtreqless f_1(x), \quad F_2(x) \gtreqless f_2(x)$$

$$\Phi_1(x) \lesseqgtr f_1(x), \quad \Phi_2(x) \lesseqgtr f_2(x)$$

где су F_1, F_2, Φ_1, Φ_2 позитивне и неопадајуће функције у интервалу $(0, \alpha)$.

У том ће интервалу важити

$$Y_1 < y < Y_2$$

где су Y_1, Y_2 интеграли једначина (15), (16) који се анулирају за $x=0$, а y решење једначине

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(y-f_1)(y-f_2) \tag{17}$$

које се анулира за $x=0$, $\varphi(x)$ је позитивна као и f_1, f_2, при чему се још подразумева да су φ, f_1, f_2 неопадајуће а f_1 и f_2 у случају када пролазе кроз почетак немају обе x осу као тангенту и $f_1 < f_2$.

Ако под овим претпоставкама упоредимо десне стране једначина (15), (17), (16) видићемо да важи неједнакост типа (6), дакле чаплигинска неједнакост. Интересантно је да, 1913 године, Сима Марковић ([11]) користи неједнакост чаплигинског типа у свом специјалном проучавању Рикатијеве једначине, не наводећи општији став Петровићев из 1899. године. Како је сам Петровић био председник испитног одбора, а како се наведена Петровићева теорема не наводи ни у [10], за који приказ је М. Миланковићу сам Петровић дао грађу, може се закључити да Петровић није довољно увиђао значај свог става. Међутим, В. В. Немицки ([21]), говорећи о великом значају чаплигинске теорије изричито подвлачи како у њеним основима лежи позната Чаплигинова лема (како је он назива), о којој је реч у овом одељку.

V

Петровић је дао значајне резултате у вези са линеарним диференцијалним једначинама другог реда, посебно у проучавању осцилаторних и неосцилаторних решења. Познате Штурмове резултате о нулама линеарне једначине другог реда проширивао је на општије једначине, као и на систем једначина. С друге стране, поједине је Штурмове резултате даље прецизирао или их користио и у проучавању једначина првог реда, примењујући неку врсту инверзног цоступка. Сем резултата из ширих области математичке анализе користио је свој појам квалитативног првог интеграла, али и свој диференцијални алгоритам ([8]) одн. свој диференцијални оператор $\Delta_n(y) = \frac{1}{y}\frac{d^n y}{d x^n}$. Задржаћемо се само на једном Петровићевом резултату ([5], [6]), који је Петровић доказао користећи теорему о средњој вредности интеграла.

Овај резултат, у тексту сасвим приближном оригиналу, гласи:

Нека је дата једначина

$$y'' = f(x)\, y \tag{18}$$

где је $f(x)$ реална, коначна, позитивна и непрекидна функција у једном интервалу (a, b). Свака интегрална крива чији се први извод анулира у једној тачки (x_0, y_0) (где је x_0 из интервала (a, b)) биће у интервалу (x_0, x) уоквирена кривим

$$y = y_0 \operatorname{ch}(x - x_0)\sqrt{N} \quad \text{и} \quad y = y_0 \operatorname{ch}(x - x_0)\sqrt{M} \tag{19}$$

где N и M означавају једну доњу и једну горњу границу за $f(\xi)$ за вредности између x_0 и x. Ако је $f(x)$ негативна у (a, b), по претпоставци довољно великом, крива $y(x)$ је осцилаторна, састављена од наизменично позитивних и негативних полуталаса. Сваки полуталас, било позитиван, било негативан, обухваћен је двема кривим

$$y = y_0 \cos(x - x_0)\sqrt{N} \quad \text{и} \quad y = y_0 \cos(x - x_0)\sqrt{M}, \tag{20}$$

где N и M имају претходни смисао, али за $-f(x)$.

Овај је резултат типичан за Петровићев метод уоквиравања интегралне криве помоћу две криве, једне горње и једне доње. Овде се посматра једна ужа класа решења — само решења чији се први извод у тачки (x_0, y_0) анулира, али су зато добијене оквирне криве са великом прецизношћу. У првом случају се види да и решење постаје бесконачно као и оквирне криве када се независно промењива бесконачно увећава, а у другом случају осцилаторност решења долази до изражаја на довољно великом интервалу.

Познато је да се сменом $y = e^{\int z dx}$ једначина (18) своди на Рикатијеву једначину

$$z' + z^2 - f(x) = 0. \tag{21}$$

Својевремено смо ([14], [15]) користећи споменуту смену и једначину (21), применили на (21) Чаплигинову или боље, Петровић-Чаплигинову теорему и посматрајући компаративне једначине $z'+z^2=N$, $z'+z^2=M$ доказали да се као оквирне криве решења једначине (18) добијају опет криве (19) и (20). Тиме је на други начин био доказан Петровићев став (Петровић је користио теореме о средњој вредности интеграла). Напоменимо да се, користећи резултате из чланка [17], директном применом методе ретракта Важевског, резултат може делимично доказати и на трећи начин, који значи повезивање методе Важевског са диференцијалним неједнакостима третираног типа.

У споменутом чланку (17) наглашени су довољни услови да, у случају једначине

$$L(y)=y''+a(x)y'+b(x)y-f(x)=0$$

из неједнакости $L(v)>0$ одн. $L(v)<0$ у интервалу $(x_0, x_1]$ следује $v(x)>y(x)$ одн. $v(x)<y(x)$ у истом интервалу, где је $y(x)$ решење дате једначине, а $v(x)$ било која два пута диференцијабилна функција са $v(x_0)=y(x_0)=y_0$, $v'(x_0)=y'(x_0)=y_0'$ ($a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ су непрекидне функције). Довољни услови су у егзистенцији бар једног непрекидног решења Рикатијеве једначине

$$z'+z^2+a(x)z+b(x)=0$$

у интервалу $[x_0, x_1]$.

У нашем случају једначина о којој је реч јесте

$$L(y)=y''-f(x)y=0,$$

па је одговарајућа Рикатијева једначина

$$z'+z^2-f(x)=0.$$

Посматрајмо најпре случај

$$0<N<f(x)<M$$

и $y_0>0$.

Заменимо ли у леву страну једначине функцију $v(x)=y=y_0 \operatorname{ch}(x-x_0)\sqrt{M}$ добићемо $L(v)>0$. Заменимо ли функцију $u(x)=y=y_0 \operatorname{ch}(x-x_0)\sqrt{N}$, добићемо $L(u)<0$. Треба још размотрити довољне услове о којима је било речи.

За довољно велико z, због ограничености функције $f(x)$, десна страна једначине $z'=-z^2+f(x)$ биће негативног знака. Међутим, за $z=0$ добија се $z'=f(x)>0$. Нека су $z=z_1$ и $z=z_2$ $(z_2<0, z_1>0)$ праве такве да је $-z_1^2+f(x)<0$ и $-z_2^2+f(x)<0$. „Цев" $x>x_0$, $z_2<z<0$ гарантује бар једно непрекидно решење гарантне Рикатијеве једначине у интервалу $(x_0, +\infty)$, а „цев" $x>x_0$, $0<z<z_1$ чак бесконачно много таквих решења. Довољни услови су испуњени и функције u и v су доња и горња оквирна крива решења наше једначине. За $y_0<0$ крива v постаје доња, а u горња оквирна крива.

У случају $0<N<-f(x)<M$, дакле, са $f(x)<0$, заштитна једначина $z'=-z^2+f(x)$ је негативна, па се не могу формирати цеви као у претходном, случају, иако је јасно да постоје околине у којима су решења Рикатијеве једначине непрекидна па важи и Петровићева неједнакост, јер и овде криве

$$u=y_0\cos(x-x_0)\sqrt{N},\ v=y_0\cos(x-x_0)\sqrt{M}$$

задовољавају неједнакости $L(u)>0$, $L(v)<0$ за $y_0>0$ и $L(u)<0$, $L(v)>0$ за $y_0<0$, што се, као и за $f(x)>0$ да лако проверити.

VI

Већ смо споменули једначину (17) коју Петровић проучава у свом раду [2]. У истом раду се третира и једначина

$$y' = \varphi(f_1 - y)(f_2 - y)\dots(f_n - y) \tag{22}$$

(позната Петровићева „хемијска једначина"). Први његов резултат у вези са (17), који се наводи у [2] је следећи:

Уз претпоставке о функцијама f_1, f_2 које смо већ навели, доказује се да интеграл $y(x)$ који се анулира за $x=0$ јесте у $(0, \alpha)$ *позитиван, растући и мањи од* $f_1(x)$.

Сам по себи резултат није нарочито сложен, нити се тешко доказује и Петровићу је важан због даљих математичких, нарочито хемијских примена. Резултат је, међутим, посебно важан методолошки, јер у њему долази до изражаја извесна алгебраизација проблема, Чињеница да је десна страна једначине квадратни трином и то факторизован по y омогућава праћење знака поља праваца, наиме јасно разликовање области рашћења и опадања решења, што омогућава суштинске закључке о решењима.

Проучавајући једначину (22) Петровић констатује да интеграл има исту особину као и у случају (17), тј. да је позитиван, растући, мањи од најмање од функција $f_i(t)$. На овоме се Петровић и зауставља, због примењеног карактера рада, у оквиру кога га интересује само решење које се анулира у почетку. Сама једначина, међутим, због полиномијалног по y облика десне стране пружа широке могућности за проучавање и других решења. Под погодним претпоставкама о функцијама $f_i(x)$ могу се ове функције третирати као приближна решења једначине, јер се права решења приближавају тим функцијама, из могућност прецизног оцењивања грешке (видети [18].) Функције $f_i(x)$ су такозвана „геометријска места стационарних тачака", чија је улога у квалитативној анализи од основног значаја.

Напоменимо да једначину (17) Петровић третира и у свом капиталном делу из феноменологије ([4]), у оквиру проучавања „материјализације Рикатијеве једначине", у делу где је реч о бимолекуларној реакцији.

У вези са једначином (22) напоменимо да стављање $y=0$ у десну страну диференцијалне једначине даје $y' = f_1 \dots f_n > 0$, пошто су функције f_i, по претпоставци, позитивне. Тако се види да је, у једној десној околини тачке $x=0$ решење $y(x)\,(y(0)=0)$ позитивно, што је полазна тачка за даља разматрања. Међутим, у случају једначине

$$y' = (y - f_1)(y - f_2)\cdots(y - f_n) \tag{23}$$

стављање $y=0$ у десну страну једначине даје $y'(0) = (-)^n f_1 \cdots f_n$ што је за парно n позитивно, а за непарно n негативно. За непарно n једначина (23) пружа дакле једну могућност које код једначине (22) нема, тј. да решење $y(x)\,(y(0)=0)$ буде у једној десној десној околини негативно Под хемијском једначином треба, дакле, подразумевати само (22). Омашком посматрајући (23) уместо (22) био сам раније закључио да је један део Петровићевог резултата погрешан (видети [19], стр. 168, ред 7 одозго), што овом приликом исправљам.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Петровић Михаило: „*О асимптотним вредностима интеграла диференцијалних једначина првог реда*", Глас СКАН, L 1895

[2] Petrovitch Michel: „*Sur l'équation différentielle de Riccati et ses applications chimiques*", Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, Prag, 1896, str. 1—25

[3] Petrovitch Michel: „*Sur une manière d'étendre le théorème de la moyenne aux équations différentielles du premier ordre*" Math. Annalen, LIV Band, 3. Heft, pp. 417—436

[4] Петровић Михаило: „*Елементи математичке феноменологије*". Београд, 1911

[5] Petrovitch Michel: „*Intégrales premières à restrictions*", Académie royale de Serbie, Paris 1929

[6] Petrovitch Michel: „*Intégration qualitative des équations différentielles*" Mémorial des sc. math. Paris, 1931.

[7] Петровић Михаило: „*Рачунање са бројним размацима*", Београд, 1932

[8] Петровић Михаило: „*Један диференцијални алгоритам и његове примене*", СКАН, Посебна издања, Прир. и мат. списи књ. 30, Београд, 1936

[9] Петровић Михаило: „*Осетљива места обичних и диференцијалних једначина*", Математички весник; Удружење студената математике на Београдском Универзитету, Београд, 1939, прештампано у Михаило Петровић: *Чланци*. Друштво мат. и физ. НРС, Београд, 1949, стр. 59—61.

[10] „*Notice sur les travaux scientifiques de M. Michel Petrovitch*", Acad. roy. de Serbie, Paris, 1922

[11] Сима М. Марковић: „*Општа Riccati-ова једначина првога реда*", докторска теза, Београд, 1914

[12] Тадија Пејовић: „*Нови случајеви интеграбилитета једне важне диференцијалне једначине*", докторска теза, Београд, 1923

[13] Драгослав С. Митриновић: „*Истраживања о једној важној диференцијалној једначини првога реда*„ докторска теза, Београд, 1935

[14] М. Бертолино: „*Примедба у вези са једним ставом Михаила Петровића*". Весник Друштва мат. и физ. СРС, X, Београд, 1958, стр. 115 — 118

[15] М. Бертолино: „*Једна примена диференцијалних неједнакости*", Математичка библиотека 22, стр. 37 — 45.

[16] M. Bertolino: *Théorèmes sur le comportement asymptotique des solutions de certaines équations différentielles*", Vesnik Društva mat. i fiz. NSR, XIII, 1 — 2, 1961, str. 23 — 34

[17] M. Bertolino: „*Sur la limite (finie ou infinie) d'application des inégalités de Tchapliguine du second ordre*", Ann. di Mat. pura ed appl. (IV), Vol. LXVII, pp. 113 — 126, Bologna, 1965

[18] M. Bertolino: „*Solutions approximatives presque stables des équations différentielles*", Matematički vesnik, 4 (19), sv. 1, 1967, str. 71 — 74.

[19] M. Bertolino: „*Priorité de Michel Petrovitch relative au théorème de Tchapliguine sur les inégalités différentielles du premier ordre*", Matematički vesnik, 4 (19), sv. 2, 1967, str. 165 — 168

[20] M. Bertolino: „*Zone d'influence qualitative de certaines fonctions figurant au deuxième membre des équations différentielles*", Bull. sci., Conseil Acad. RSF Yougoslavie, Section A — Zagreb, Tome 12. N° 9 — 10, 1967, str. 241.

L'ÉTUDE DIRECTE DE PETROVIĆ DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Milorad Bertolino

Résumé

L'étude directe des solutions des équations différentielles joue un rôle visible dans l'oeuvre de Petrović. On étudie dans ce travail surtout celle partie de cette étude qui contient une large application des inégalités différentielles. Parmi ces résultats il y en a qui inspiraient l'auteur du présent travail et qui les développait dans ces articles [14] — [20].

L'équation (1) est caractéristique pour la méthode directe de Petrović. L'intégrale première qualitative de Petrović est une notion bien considérable. On donne l'analyse de l'équation (4) et (4′) où l'auteur souligne ces généralisations dans le cas (5) ainsi qu'une transformation multiforme qui en résulte et qui est, peut-être, intéressante au point de vue de notion de point presque fixe.

L'équation $y' = F(x, y, f)$ traitée dans III est intéressante comme exemple d'une propriété qualitative dont on parle dans II. La priorité de Petrović par rapport au théorème fondamental de Tchapliguine est soulignée encore une fois. Dans les cas (15) et (16) on a aussi des équations tchapliguiniennes. L'équation (18) du second ordre fut déjà traitée par l'auteur - on donne maintenant une nouvelle démonstration, utilisant la méthode de rétracte. „L'équation chimique“ (22) fait la dernière partie de cet exposé - elle est différente de l'équation (23) (quoique très semblable), la dernière permettant, pour n impair, aussi la solution $y(x)$ $(y(0) = 0)$ négative. Le résultat de Petrović concernant (22) dans [2] est donc exact.

Мирко Стојаковић,
Драган Трифуновић,

ПЕТРОВИЋЕВА МОДИФИКАЦИЈА ГРЕФЕОВЕ МЕТОДЕ ЗА РЕШАВАЊЕ АЛГЕБАРСКИХ ЈЕДНАЧИНА

1. Још на студијама у Београду[1], Михаило Петровић је испољио све црте свог талента и показао да се од њега могу у будућности очекивати велика дела. Ни свој таленат, ни ове наде, Петровић није изневерио. На студијама Петровић је у групи одличних великошколаца (Коста Стојановић, Милорад Јовичић и Димитрије Марчић). Показује самосталност у учењу и ради запажене семинарске радове[2] и наградне темате [7].

При крају нешто закаснеле школске 1885/86 године (српско-бугарски рат), 21. новембра 1886. Петровић је као студент I године завршио семинарски рад из математике који је носио назив *О једној модификацији Грефеова метода за решавање виших бројних једначина*[3]. Рад је вероватно читан на семинару код ондашњег Петровићевог професора Димитрија Нешића. Пре свега треба приметити, да излагање 18-годишњака Петровића, студента I године, има обележје креативног и оригиналног. Материјал семинарског рада не показује уобичајен поступак у семинарским радовима: да се изложи све најпотоњије познато о теми, што је, махом, садржано у уџбеницима или неким доступним расправама. Напротив! Млади Петровић, проучивши Graeffe-ову методу, поставља себи потпуно оригиналан задатак, да изнађе могућност егзистенције једне друге функције него што је она у Graeffe-овој методи. Њему је врло добро позната била арбитражност степенасте функције која везује корене полазне једначине $f(x)=0$ са коренима изведене једначине $\varphi(y)=0$

$$y=x^m$$

где је m — произвољно, довољно велико, одабрано и облика

$$m=2^p, \qquad p \in N$$

и уводи *нову функцију* експоненцијалног облика

$$y=a^x$$

---

[1] После завршеног испита зрелости у I београдској гимназији (1885) Петровић је студирао на Природно-математичком одсеку Филозофског факултета Велике школе у Београду (1889).

[2] Поред семинара који ће овде бити изложен, познат је још један Петровићев семинар из филозофије код професора Љубомира Недића *Да се изложе и критички претресу различне теорије о вољи* (1889) [1].

[3] Заоставштина академика Михаила Петровића, Библиотека САНУ. Рукопис се сада налази у Музеју града Београда.

где a бира произвољно и довољно велико. Петровић је, вероватно, ово највише учинио из чињенице што

$$a^x > x^m$$

као и потребе експлицитног изналажења критеријума у конвергенцији децимала корена једначине за унапред дату грешку $10^{-\delta}$.

Увођење нове функције a^x Петровића је приморало да прикаже потпуно свој метод добијања нове — изведене једначине $\varphi(y) = 0$. При овоме, студент I године је показао врло солидно познавање и умешно коришћење ставова математичке анализе. Како овај део рукописа обухвата материјал који је потпуно ван програма ниже математичке анализе у I години Велике школе, то одатле непосредан закључак, да је Михаило Петровић, као студент, математику знатно дубље, шире и „унапред" проучавао. — И поред тога што је на појединим местима непрецизан и недовршен у исказима, Петровићев рукопис о Greaffe-овој методи има своје и научне, и историјске вредности: то је *први* написан математички текст нашег знаменитог математичара који уједно и потврђује да је Петровић од првог додира са математиком био на терену оригиналног стваралаштва.

2. У овом изузетном раду Петровић врло прецизно одређује суштину проблема и читаоца одмах уводи у проблем. Ту нема сувишних речи. Нема заобилажења, нема колебања, нема нејасности. Ако би се за неку енциклопедију захтевала дефиниција *Graeff*-ова метода, та би дефиниција некако изгледала, као што ју је Претровић овде изложио. Можда би се Петровићевој дефиницији могло додати следеће: да је данас метод познатији под именом *метод Лобачевског*[4] и будући да се говори о коренима, реалним и комплексним, треба говорити о модулима корена већим или мањим, а не самим коренима. Наиме, као што се зна, скуп комплексних бројева није тотално уређен.

Петровић свој семинар почиње следећим речима: „Лепа Грефеова мисао, да се једна једначина вишега степена може разрешити без претходног познавања броја и граница, стварних и уображених корена њених, трансформацијом исте у другу једначину чији мањи корени ишчезавају према већима, може се остварити не само на начин којим је Грефе основао свој метод решавања виших бројних једначина, но и на ма какав други начин, којим би се постигло то ишчезавање мањих корена према већима". Добри познаваоци Петровићевих дела препознаће већ у овој једној реченици младог студента стил и технику будућег ствараоца. Петровић је математику волео. За њега је Graeffe-ова мисао „лепа". Осећање за лепоту у тако апстрактним стварима није дато свакоме. Многи ће, напротив, за Graeffe-ов метод наћи да је „гломазан", „заморан" и слично. За Петровића он је леп, што, у ствари, и јесте.

У наставку Петровић каже: „Као што је познато, код Грефеове методе циљ се постиже тиме, што се дата једначина претвара у другу

[4] Нумеричко решавање алгебарске једначине методом квадрирања корена независно су открили математичари Dandelin [1], Лобачевский [2] и Graeffe [3], која је данас позната као Метод Лобачевског [4, 5]. Метода је веома корисна у случајевима реалних једнаких и неједнаких корена и данас се налази у библиотекама свих електронских рачунских центара као стална „рутина" за практично решавање алгебарских једначина. За случајеве када су корени једначине комплексни, метода је нешто неподеснија и поред извесних нових прилога *С. Бродетски*-а и G. Smeal-а [6]. У односу на друге нумеричке методе, Graeffe-ова метода не захтева познавање претходних приближних вредности корена, при чему се одједном налазе сви корени једначине.

чији су корени извесни степени корена дате једначине, па тачност ишчезавања мањих корена према већима зависи од величине степена. Но ова метода само је један специјалан случај између више начина на који се може поменута идеја остварити, а могућност остварења њенога на више начина може се увидети на овај начин.

Нека је дата једначина

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{1}$$

са коренима $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, претворена у једначину

$$\varphi(y) = y^n + b_1 y^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + b_{n-1} y + b_n = 0 \tag{2}$$

чији су корени $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$, и то тако, да између корена дате и нове једначине постоји релација

$$\xi_k = \Delta(\alpha_k) \tag{3}$$

где Δ означава ма какву познату функцију, па се из познатог обрасца

$$\frac{(-1)^k b_k}{\Delta(\alpha_1)\Delta(\alpha_2)\cdots\Delta(\alpha_k)} = 1 + \frac{\Delta(\alpha_1)\cdots\Delta(\alpha_{k-1})\Delta(\alpha_{k+1})\cdots\Delta(\alpha_{n-k})\cdots\Delta(\alpha_n)}{\Delta(\alpha_1)\Delta(\alpha_2)\cdots\Delta(\alpha_k)}$$

а у претпоставци да су функције Δ такве природе, да кад се у њима прапроменљиве[5] количине смене коренима дате једначине, функције мањих корена ишчезавају према функцијама већих — добијамо образац

$$\frac{(-1)^k b_k}{\Delta(\alpha_1)\Delta(\alpha_2)\cdots\Delta(\alpha_k)} = 1. \tag{4}$$

Стављајући у овај образац $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, добија се систем једначина

$$\begin{aligned} -b_1 &= \Delta(\alpha_1) \\ b_2 &= \Delta(\alpha_1)\Delta(\alpha_2) \\ -b_3 &= \Delta(\alpha_1)\Delta(\alpha_2)\Delta(\alpha_3) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (-1)^n b_n &= \Delta(\alpha_1)\Delta(\alpha_2)\cdots\Delta(\alpha_n) \end{aligned} \tag{5}$$

Ако су сад функције такве, да се из њих на елементаран начин могу израчунати и сами корени $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, онда би тиме очевидно и горњи циљ био остварен.

Тражење оваквих функција Δ које задовољавају поменута два услова, и трансформација дате једначине према узетој функцији, није лак посао; такве функције врло су ретке. Грефе је усвојио алгебарску функцију

$$\Delta(x) = x^k \tag{6}$$

пошто та функција за извесну довољно велику вредност степена k задо-

---

[5] У српској математичкој литератури све до почетка овог века независно променљива величина у једном аналитичком поступку називана је *прапроменљива*. На пример, у диференцијалној једначини $f(x, y, y') = 0$, x је прапроменљива, а у решењу ове једначине $\varphi(x, y, c) = 0$ x је променљива.

вољава оба услова. Но, да ли би се уместо ове могла употребити трансцедентна функција

$$\Delta(x) = a^x \tag{7}$$

која се од горње функције разликује тиме, што је у првој произвољна позната количина у изложиоцу $x-a$, а у овој је обратно, x у изложиоцу те произвољне познате количине? Усвојивши ову функцију, како би се могли њоме користити? То су питања на која ћу овде покушати да одговорим".

3. У овом делу рада Петровић показује да солидно влада целокупном проблематиком везаном за проблем решавања једначина, да располаже способношћу да ово познавање проблематике искористи технички и да уме да генералише, тражећи опште услове функције (3) који прате одређени, специјални случај (6) и да одмах из тих општих услова изведе и нове специјалне случајеве (7) дотада непознате. Овај део Петровићевог рада је *оригиналан* допринос питању које проучава. У семинарском раду то се од Петровића није тражило. Зашто Петровић није овај рад касније, уз евентуално дотеривање, публиковао? Вероватно ће то бити објашњено овим што следи.

Ево како студент Петровић излази на крај са трансформисањем алгебарских једначина (1) трансцендентном сменом промењиве (7).

Полазећи од претпоставке да једначина (1) има реалне међусобно различите и позитивне корене уређене по величини што експлицитно у раду није наведено, али из резоновања произлази, Петровић најпре одређује константу a у функцији (7), тако да се може вршити „занемаривање мањих корена према већим". Овај део рада је такође оригиналан. Анализа којом се одређује потребна количина константе a није се имала откуд узети готова, пошто је идеја у целини Петровићева.

Из (7) налазимо да је

$$\xi_i = \Delta(\alpha_i) = a^{\alpha_i}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

одакле је

$$\frac{\xi_{h+1}}{\xi_h} = 1 : a^{\alpha_h - \alpha_{h+1}}$$

Према напред уведеном уређењу можемо писати

$$\xi_{h+1} < \xi_h \tag{8}$$

те је

$$\alpha_{h+1} < \alpha_h \tag{9}$$

и узимајући за a довољно велику вредност, можемо постићи да количник $\xi_{h+1} : \xi_h$ буде по вољи мали. Рецимо, да желимо

$$\frac{\xi_{h+1}}{\xi h} < \frac{1}{10^r}$$

тада би морало бити

$$a^{\alpha_h - \alpha_{h+1}} > 10^r \quad \text{или} \quad a^\delta > 10^r \tag{10}$$

где је δ број мањи од најмање разлике корена једначине (1)[6]. Како је r унапред задато, δ пронађено, то се из (10) одређује вредност за a.

Као што смо поменули, код овог Петровићевог поступка прецизније би било увести апсолутне вредности корена, као и навести претпоставку да нема вишеструких корена, нити корена са једнаким модулима или чак и веома блиским модулима, пошто се тражи број δ за услов

$$\min(\alpha_h - \alpha_{h+1}) > \delta, \quad h \in N.$$

4. Ево како млади Петровић добија коефицијенте b_i трансформоване једначине (2). Newton-ове суме корена

$$S_k = \alpha_1^k + \alpha_2^k + \cdots + \alpha_n^k$$

$$S_k = a^{k\alpha_1} + a^{k\alpha_2} + \cdots + a^{k\alpha_n}$$

изражавају се рекурзивно на познати начин помоћу елементарно симетричких функција тих и истих корена, а то значи помоћу коефицијената одговарајуће једначине

$$S_1 + a_1 = 0$$

$$S_2 + a_1 S_1 + 2\, a_2 = 0$$

$$S_3 + a_1 S_2 + a_2 S_1 + 3\, a_3 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n + a_1 S_{n-1} + a_2 S_{n-2} + \cdots + a_{n-1} S_1 + n a_n = 0$$

односно

$$S_1 + b_1 = 0$$

$$S_2 + b_1 S_1 + 2\, b_2 = 0$$

$$S_3 + b_1 S_2 S_1 + 3\, b_3 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n + b_1 S_{n-1} + b_2 S_{n-2} + \cdots b_{n-1} S_1 + n\, b_n = 0.$$

Исте ове везе могу се користити и за обрнути задатак, да се помоћу *Newton*-ових сума израчунају елементарно симетричне функције, а то значи коефицијенти b_i тражене једначине (2). И тако, са коефицијента a_i задате једначине (1) прелазимо на *Newton*-ове суме S_k корена једначине (1), са ових на *Newton*-ове суме S'_m корена нове једначине (2), а са ових на коефицијенте b_ν једначине (2). Код овакве трансформације, услед трансцедентности функције (7), Петровић је морао да користи редове. Премда се сав овај посао у принципу може обавити, он је знатно дужи него исти код *Graeffe*-ове методе. Мислимо да је то и разлог што је сам Петровић оценио да овај рад треба да остане оно што је: семинарски рад, а не и рад који би, иако с оригиналним прилазима, у пракси могао да се примењује. Ово објашњење, да се Петровић није одлучио да овај рад доцније

---

[6] Број δ може се добити преуређујући једначину $f(x) = 0$ у једначину њених квадратних разлика.

објави не мора да буде ни тачно ни једино. Ево, пак, како се у виду схеме остварује горе наведена трансформација

$$a_i \to S_k \to S'_m \to b_v. \tag{11}$$

Најпре је за свако z

$$a^z = 1 + z\frac{la}{1} + z^2\frac{(la)^2}{2!} + \cdots + z^p\frac{(la)^p}{p!} + \cdots$$

те је

$$a^{k\alpha_i} = 1 + k\,\alpha_i\,\frac{la}{1} + k^2\,\alpha_i^2\,\frac{(la)^2}{2!} + \cdots k^p\,\alpha_i^p\,\frac{(la)^p}{p!} + \cdots$$

за $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, и сумирањем по k добија се

$$S_k = n + kS_1\,\frac{1\,a}{1} + k^2\,S_2\,\frac{(1\,a)^2}{2!} + \cdots + k^p\,S_p\,\frac{(1\,a)^p}{p!} + \cdots$$

за $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Да би се посао донекле олакшао, Петровић предлаже у свом раду и формирање нарочитих таблица у којима би се налазиле готове вредности израза

$$\frac{k^p\,(la)^p}{p!}$$

са двоструким „улазом" за k и p, а које би се могле користити за већу класу једначина узимајућу већа a.

Кад се једном формира једначина (2) са коефицијентима b (11) даљи поступак се не разликује од поступка код *Graeffe*-ове методе. Свеједно је, наиме, којим путем се дошло до једначине (2) у којој се „мањи корени замењују према већим". И у једном (Петровић) и у другом (*Graeffe*) случају из односа коефицијента налазе се вредности корена

$$\begin{aligned} b_1 &= \xi_1 \\ b_2 &= \xi_1\,\xi_2 \\ b_3 &= \xi_1\,\xi_2\,\xi_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ b_n &= \xi_1\,\xi_2\,\xi_3 \cdots \xi_n \end{aligned}$$

Стога, даља анализа коју Петровић изводи, осврћући се накнадно на случај једнаких корена или на случај имагинарних корена, нема у целини оригинални карактер. Таква анализа могла се наћи и у онда доступној литератури. Данас је та литература још богатија али чињеница да су алгоритми гломазни чак и код Graeffe-ove методе, остала је упркос побољшањима.

У литератури се при примени поступка занемаривања сабирака блиских нули, односно фактора блиских јединици у Viète-овим везама трансформисане једначине (2) разликују случајеви вишеструких комплексних корена, јер се за сваки од тих случајева морају примењивати посебни „трикови". Петровић се са тим такође суочио и пошто је ликвидирао случајеве вишеструких реалних и једноструких комплексних корена, он закључује да случај вишеструких комплексних корена није једноставан. Он каже: „Ту се може израчунати производ модула свих комплексних корена али како би се могли наћи појединачно модули корена, то нисам могао решити".

Пошто се на ову тему више није враћао, Петровић то није „решио" ни тада, ни касније. За малу утеху је, међутим, што то нису решили, бар не довољно употребљиво, ни други. Карактеристично је ипак што Петровић, суочен са овим тешкоћама, није тврдоглав, него искрено признаје своју немоћ, а објективност и скромност његову показује и чињеница, да овај рад није даље „протурао", јер је, по нашем мишљењу, увидео да је Graeffe-ова метода ипак употребљивија од његове.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Dandelin: Mem. de la Acad. Royale de Bruxelles.3 (1826), p. 48

[2] Лобачевский: *Алгебра*, Казань, 1834, 257.

[3] Graeffe: *Auflösung der höheren numerichen Gleichungen*, Zürich, 1837.

[4] Scarborough, J.: *Numerical Mathematical Analysis*, Oxford University Press, 1950, p. 213—234.

[5] Whittaker, E. — Robinson, G.: *The Calculus of observations — A Treatise on Numerical Mathematics*, Научна књига, Београд, 1951, стр. 97—107.

[6] Brodetsky S. — Smeal, G.: *On Graeffe's Method for Complex Roots of Algebraic Equations*, Proc. Camb. Phil. Soc., 22 (1924) p. 83—87.

[7] Трифуновић, Д. *Студенски период Михаила Петровића*, Математички весник, Београд 1967, Т. 4 (19), св. 1, стр. 79—97.

[8] Трифуновић, Д.,: *Школовање Михаила Петровића*, Математичка библиотека, Београд, 1966, Т. 32, стр. 137—150.

[9] Трифуновић, Д.,: *Михаило Петровић, Метафоре и алегорије*, Српска књижевна задруга, Коло LX, књ. 405, Београд, 1967, стр. 196.

[10] Трифуновић, Д.,: *Летопис живота и рада Михаила Петровића*, Српска академија наука и уметности, Посебна издања, Одељење природно-математичких наука, Београд, 1968, стр. 768 (у штампи).

LA MODIFICATION DE M. PETROVIĆ DE LA METHODE DE GRAEFFE POUR LA SOLUTION DES EQUATIONS ALGEBRIQUES

M. Stojaković et *D. Trifunović*

Résumé

Les auteurs analyse le premier texte mathématique de M. Petrović „Sur une modification de la méthode de Graeffe pour la solution des équations numériques d'ordre supérieurs" déjà écrit en 1886 lors de ses études à Belgrade. Le jeune Petrović, en s'occupant de la méthode de Graeffe, a introduit une nouvelle fonction

$$y = a^x$$

laquelle lie les racines de l'équation initiale $f(x) = 0$ avec les racines de la fonction résultante $\varphi(y) = 0$.

L'introduction de la nouvelle fonction a^x oblige M. Petrović d'exposer complétement sa méthode pour obtenir sa nouvelle fonction résultante $\varphi(y)=0$. A cette occasion, cet étudiant de la première année a montré une connaissance approfondie et une pertinente utilisation des théorèmes de l'analyse mathématique. Cette partie du manuscript comprenant le matériel qui est tout à fait hors le programme de l'Ecole supérieure, on arrive à la conclusion que M. Petrović comme étudiant, il étudiait les mathématiques assez profondement, largement et ainsi dire „à l'avance", et malgré le fait qu'à certains lieux il n'était pas précis et déterminé dans ses énoncés, son manuscript sur la méthode de Graeffe a sa valeur scientifique et historique. C'est le premier texte connu de notre illustre mathématicien, lequel en même temps confirme qu'il se trouvait sur le terrain de la recherche originale dès le commencement de ses études en mathématiques.

Душан Д. Адамовић

О ПОЈМУ ЕКСПОНЕНТА КОНВЕРГЕНЦИЈЕ КОД МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

0. У раду [1], објављеном 1931. године, Михаило Петровић на почетку указује на од раније познати појам експонента (изложиоца) конвергенције ([2], [3], [4]), који се дефинише на следећи начин:

Дефиниција 1. *Нека је*

$$(1) \qquad (A_n)$$

бројни низ са особинама

$$(2) \qquad A_n > 0 \text{ за свако } n; \qquad \lim_{n\to\infty} A_n = 0.$$

За реални број λ *каже се да је експонент конвергенције низа* (1) *ако за свако* $\varepsilon > 0$ *ред* $\sum A_n^{\lambda+\varepsilon}$ *конвергира, а ред* $\sum A_n^{\lambda-\varepsilon}$ *дивергира. Ако за свако* $\alpha > 0$ *ред* $\sum A_n^{\alpha}$ *дивергира, каже се да низ* (1) *има експонент конвергенције* $\lambda = +\infty$.

На основу ове дефиниције, јасно је да сваки низ (1) са особинама (2) има један и само један експонент конвергенције и да је то увек елемент интервала $[0, +\infty]$. При томе је $\lambda = 0$ ако и само ако ред $\sum A_n^{\varepsilon}$ конвергира за свако $\varepsilon > 0$.

На пример: низ облика

$$\left(\frac{L(n)}{n^{\alpha}}\right) \quad (\alpha > 0),$$

где је $L(x)$ споро промењива функција у смислу Карамате ([5]), има експонент конвергенције $\frac{1}{\alpha}$, низови

$$(e^{-(\ln n)^2}),\ (e^{-n}),\ \left(\frac{1}{n!}\right),\ (e^{-n^2})$$

имају експонент конвергенције 0, док је $+\infty$ експонент конвергенције низова облика

$$\big(L(n)\big) \ \big(L(x) \text{ споро промењива функција и } L(x) \to 0,\ x \to +\infty\big).$$

Пошто је напоменуо да „кадгод број λ није једнак нули ни бескрајан, он у довољној мери прецизира аналитичку природу низа (1) у погледу начина на који чланови овог низа прилази нули код n бескрајно расте“ и да „· · · међутим, кад се има посла са једним од поменута два гранична случаја ($\lambda = 0$ и $\lambda = +\infty$), тада сѐ јавља много већа разноврсност у горњем погледу, тј. у начину опадања низа (1)“, као и да „· · · из претпоставке да $A_n \to 0$ и према горњим примерима изгледа да је разноврсност низова за $\lambda = +\infty$ у горњем погледу мања од оне за $\lambda = 0$,“ — Петровић, у циљу већег „разликовања нијанси у начину на који одговарајући низови теже нули“, на првом месту за случајеве $\lambda = 0$ и $\lambda = +\infty$, уводи нов појам промењљивог експонента конвергенције, дефиницијом која се може (само небитно, терминолошки нешто друкчије него у Петровићевом тексту) исказати овако:

Дефиниција 2. *Низ позитивних бројева* (λ_n) *назива се низом експонената конвергенције, или, краће, експонентом конвергенције, низа* (1) *са особинама* (2) *ако се свако* $\varepsilon > 0$ *ред* $\sum A_n^{\lambda_n(1+\varepsilon)}$ *конвергира, а ред* $\sum A_n^{\lambda_n(1-\varepsilon)}$ *дивергира.*

Ако би се у предходнвј дефиницији речи „позитивних бројева“ замениле речима „реалних бројева“, не би се добио суштински општији појам експонента конвергенције, јер би чланови сваког низа — експонента конвергенције у смислу тако измењене дефиниције 2 очигледно морали бити позитивни за довољно велико n.

Од овог места надаље претпостављамо, удобности ради и очигледно без битног ограничења општости даљег расуђивања, да низ (1) са особинама (2) испуњава и услов

$$A_n < 1 \text{ за свако } n. \tag{3}$$

Одмах се може уочити, што Петровић у чланку нешто даље и чини, да сваки низ (1) са особинама (2) има бар један експонент конвергенције у смислу дефиниције 2. То је, наиме, низ $(\bar{\lambda}_n)$ хоји испуњава услов

$$A_n^{\bar{\lambda}_n} = n^{-1} \text{ за свако } n,$$

тј. низ са општим чланом

$$\bar{\lambda}_n = -\frac{\ln n}{\ln A_n}.$$

(С обзиром на претпоставку (3), $\bar{\lambda}_n > 0$ за свако n.)

Овај низ $(\bar{\lambda}_n)$ назваћемо *стандардним експонентом конвергенције* низа (A_n).

Наглашавамо да је експонент конвергенције у смислу дефиниције 1 ненегативан реалан број или симбол $+\infty$, а у смислу дефиниције 2 низ позитивних бројева (који, као што ћемо видети, ни за један низ (1) са особинама (2) није једнозначно одређен, чак ни до на асимптотско понашање). Одавде надаље термину „експонент конвергенције“ придаваћемо значење из дефиниције 2, а експонент конвергенције у смислу дефиниције 1 називаћемо *бројним експонентом конвергенције*. Термине „стандардни експонент конвергенције“ и „бројни експонент конвергенције“ Петровић није употребио.

Ако низ (A_n) има као бројни експонент конвергенције број $\lambda \in (0, +\infty)$, тада је низ чији су сви чланови једнаки λ очигледно експонент конвергенције низа (A_n). Јасно је да у случајевима $\lambda = 0$ и $\lambda = +\infty$ ово никад не важи. У извесном смислу, стога, појам експонента конвергенције представља уопштење појма бројног експонента конвергенције уколико је овој последњи позитиван број, док се то не може рећи за случајеве кад је он 0 или $+\infty$. У вези са тим, Петровић каже: „*У граничним случајевима, кад је* $\lambda = 0$ *или* $\lambda = +\infty$, *низ изложилаца конвергенције тежиће нули или бескрајности* и брзина опадања, односно рашћења, чланова тог низа чини могућним разликовање нијанса у брзини опадања самог низа (1)" (курзив наш, Д. А.).

Може зе констатовати да курзивом написано тврђење *није коректно*. Наиме, уклико се усвоји баш Петровићева дефиниција експонента конвергенције (дефиниција 2), онда, као што ћемо показати (одељак **1**, тврђење 4°), сваки низ (1) са особинама (2) има осцилаторни експонент конвергенције. Петровићево тврђење није тачно ни за стандардни експонент конвергенције, јер (одељак **1**, тврђење 9°) постоје низови чији су бројни експоненти конвергенције 0 односно $+\infty$, а чији стандардни експоненти конвергенције осцилирају. Сем тога, може се чак поставити питање (одељак **2**) да ли сваки низ чији је бројни експонент конвергенције 0, односно $+\infty$, има бар један експонент конвергенције који тежи ка 0, односно ка $+\infty$.

Петровићев чланак садржи још неколико тврђења која нису сасвим коректно формулисана, заправо, која захтевају прецизирање услова под којима важе. У већини ових тврђења, изледа, имплицитно се претпоставља да термин „експонент конвергенције" има, уствари, уже значење нашег термина „стандардни експонент конвергенције", или да, нешто шире, означава експонент конвергенције асимптотски једнак стандардном. Ако се тако схвате, већи део тих тврђења био би углавном тачан.

На пример, Петровићево тврђење да за сваки експонент конвергенције (λ_n) важи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{\ln n}=0$$

тачно је кад је у питању стандардни или стандарном асимптотски једнак експонент конвергенције. Међутим, тврђење да се „експонент конвергенције целе функције ... не мења ни деривацијом ни интеграцијом функције" није тачно ни у општем случају, ни за случај стандарног експонента конвергенције, него само за бројни експонент конвергенције. При томе се *експонентом конвергенције*, односно *бројним експонентом кенвергенције*, *целе функције*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,$$

где је (a_n) низ комплексних бројева са особином

$$0<|a_n|<1 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots), \tag{4}$$

назива експонент конвергенције, односно бројни експонент кнвергенције, низа са општим чланом

$$A_n=|a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Тада је, наиме, $0<A_n<1$ $(n=,0,\ 1,\ 2,\ldots)$ и према Hadamard-овој формули $\lim\limits_{n\to\infty} A_n=\lim\limits_{u\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}=0$. У Петровићевом чланку услов (4) није експлицитно претпостављен. Извесну некоректност преставља околност што није бар претпостаљено да је $a_n\neq 0$ за довољно велико n. (Услов $|a_n|<1$ није битан.)

Сва остала од поменутих тврђења у чланку Михаила Петровића односе се на експоненте конвергенције целих функција и за њих се може рећи да су тачна у случају стандардног експонента конвергенције, а нису тачна у општем случају. Ово се сасвим лако може проверити.

И поред свих претходних примедби, сматрамо да је Петровићев појам експонента конвергенције интересантан и да пружа могућности за даљу и специфичну разраду, нијансирање одговарајуће проблематике, за уочавање нових односа и постављање нових проблема. Сви резултати које смо у овом правцу добили, а од којих су неки у претходном излагању већ поменути или наговештени, обухваћени ст групом тврђења у одељку **1.** Одељак **2** садржи неколико занимљивих питања на која досада нисмо успели да одговоримо.

Математичко (као и филозофско) наслеђе Михаила Петровића обимно је и многим својим деловима и данас инспиративно, често после ближег испитивања далеко више него што на први поглед изгледа. Међутим, по нашем мишљењу, да би се из њега извукла права и пуна корист, треба му — уз известан слух за специфичнос стила Петровићевог математичког мишљења и његове математичке интуиције — прилазити у исти мах брижљиво и критички. Чини нам се да предходна разматрања и резултати који следе бар унеколико на конкретном примеру ово гледиште потврђују.

Напоменимо да је у Петровићевом чланку [1] био најављен његов наставак, до чијег публиковања, међутим, није дошло.

1. *Важе следећа тврђења:*

1° *Сваки низ* (1) *са особином* (2) *има експонент конверверґенције* (λ_n) *са општим чланом*

$$\lambda_n = -\frac{\ln n}{\ln A_n}\,\omega_n,$$

где је (ω_n) *осцилаторан низ реалних бројева, или, прецизније, где* (ω_n) *има као скуп тачака нагомилавања било који унапред дати затворени део* E *скупа* $[1, +\infty]$ *који садржи тачку* 1. *Такође,* $\alpha = \varliminf_{n\to\infty} \omega_n$ *може бити било која тачка из* $[0, 1]$, *а* $\beta = \varlimsup_{n\to\infty} \omega_n$ *било која тачка из* $[1, +\infty]$.

2° *Потребни услови за низ* (ω_n) *из предходног тврђења су*

$$0 \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \omega_n \leqslant 1 \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \omega_n, \tag{5}$$

тако да низ (ω_n) *може конвергирати само ка јединици. Услови* (5) *нису довољни.*

3° *Ако низ* (A_n) *има бројни експонент конвергенције* λ, *тада је за сваки експонент конвергенције* (λ_n) *низа* (A_n)

$$\varliminf_{n\to\infty} \lambda_n \leqslant \lambda \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \lambda_n.$$

Према томе, ако низ (λ_n) *конвергира, мора бити*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda.$$

4° *Сваки низ* (1) *са особинама* (2) *има осцилаторан експонент конвергенције. Ако је*

$$A_n = 0\,(n^{-\delta}),\quad n^{-\mu} = 0\,(A_n)\quad (n\to\infty),$$

са неким $0<\delta<\mu$, *постоји експонент конвергенција који осцилира између* 0 *и* $+\infty$.

5° *Да би низ позитивних бројева* (λ_n) *био експонент конвергенције некoг низа, потребно је да буде*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\ln n} = 0$$

Услов

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\ln n} = 0$$

довољан је, а није потребан. Прецизније, сваки низ (1) *са особинама* (2) *за свако* $\alpha \in (0, +\infty]$ *има експонент конвергенције* (λ_n) *такав да*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\ln n} = \alpha.$$

6° *Ако је* (λ_n) *експонент конвергенције низа* (A_n) *и* (μ_n) *је низ позитивних бројева са особином* $\mu_n \sim \lambda_n$ $(n \to \infty)$, *тада је и низ* (μ_n) *експонент конвергенције низа* (A_n)

7° *Ако је* (λ_n) *експонент конвергенције низа* (A_n) *и* (B_n) *је низ позитивних бројева са особином* $B_n \sim A_n$ $(n \to \infty)$, *тада је* (λ_n) *експонент конвергенције и низа* (B_n).

8° *Цела функција* $f(z)$ *дата потенцијалним редом чији су сви коефицијенти различити од нуле и њена изводна функција* $f'(z)$ *имају увек исти бројни експонент конвергенције. Ако је бројни експонент конвергенције функције* $f(z)$ *нула, скупови експонената конвергенције функција* $f(z)$ *и* $f'(z)$ *могу бити дисјунктни. Ако је бројни експонент конвергенције позитиван број, ова два скупа експонената конвергенције могу бити различити.*

9° *За свако* $\lambda \in [0, +\infty]$ *стандардни експонент конвергенције низа чији је бројни експонент конвергенције* λ *може осцилирати.*

Потпуности ради, у претходном списку наведено је и тврђење 6°, које иначе и Петровић у раду [1] формулише и доказује. Из истог разлога, у доказу који следи налази се и доказ овог тврђења.

Доказ. 1° Нека је (r_n) један низ образован од свих рационалних бројева из $[1, +\infty)$. За сваки природан број n постоји $x \in E$ такво да је

$$|r_n - x| = \mathrm{Min}\{|r_n - y| : y \in E\}.$$

Ако постоји само један такав број x, ставимо $r_n = x$, а ако постоје два таква броја, онај већи означимо за r_n. Нека се низ (ρ_n) или подудара са претходно одређеним низом (r_n), уколико $+\infty \notin E$, или има за непарне чланове редом чланове низа (r_n) а за парне редом природне бројеве, уколико $+\infty \in E$. Лако се проверава да је у оба случаја E скуп тачака нагомилования низа (ρ_n).

Ставимо

$$\omega_{2k-1} = 1, \qquad \omega_{2k} = \rho_k \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Јасно је да овако одређен низ (ω_n) има такође E као скуп тачака нагомилавања. С друге стране, у овом случају је, за било које $\varepsilon > 0$,

$$A_n^{\lambda_n(1+\varepsilon)} = n^{-\omega_n(1+\varepsilon)} \leqslant n^{-(1+\varepsilon)},$$

што значи да ред $\sum A_n^{\lambda_n(1+\varepsilon)}$ конвергира, и сем тога

$$A_{2k-1}^{\lambda_{2k-1}(1-\varepsilon)}=(2k-1)^{-(1-\varepsilon)},$$

што значи да ред $\sum A_n^{\lambda_n(1-\varepsilon)}$ дивергира.

Остаје да се докаже последња реченица тврђења. Нека је

$$\alpha\in(0,\,1],\qquad \beta\in[1,\,+\infty).$$

Ставимо

$$p_k=2\,[k^{\frac{1}{\alpha}}]\qquad (k=1,\,2,\ldots).$$

Ако је

$$\omega_{p_k}=\alpha\,(k=1,\,2,\,3,\ldots),\ \omega_n=\beta \text{ за остале вредности } n,$$

тада $\varliminf\limits_{n\to\infty}\omega_n=\alpha$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\omega_n=\beta$ и сем тога

$$A_{p_k}^{\lambda_{p_k}}=p_k^{-\alpha}=\{2k^{\frac{1}{\alpha}}[1+o(1)]\}^{-\alpha}=k^{-1}\cdot 2^{-\alpha}[1+o(1)]^{-\alpha}\quad (k=1,\,2,\ldots),$$

$$A_n^{\lambda_n}=n^{-\beta} \text{ за остале вредности } n.$$

Одавде излази да је (λ_n) са овако одређеним (ω_n) експонент конвергенције низа (A_n).

Ако $\alpha>0$, $\beta=+\infty$, треба претходну конструкцију изменити утолико што се за вредности n различите од p_k ставља $\omega_n=n$.

Ако је $\alpha=0$, треба ставити

$$\omega_{k^k}=k^{-1}\qquad (k=1,2,\ldots),$$

а за остале вредности n, $\omega_n=\beta$ одностно $\omega_n=n$, према томе да ли је $\beta<+\infty$ или $\beta=+\infty$.

2° Ако би било

$$\varliminf_{n\to\infty}\omega_n<0,$$

за бескрајно много вредности n имало би се

$$\lambda_n=-\frac{\ln n}{\ln A_n}\,\omega_n<0,$$

супротно претпоставци да је (λ_n) експонент конвергенције.

Ако би било

$$\varliminf_{n\to\infty}\omega_n>1,$$

за довољно велико n имало би се

$$\omega_n\geqslant\delta>1$$

и одатле, са $0<\varepsilon<1$,

$$A_n^{\lambda_n(1-\varepsilon)}=n^{-\omega_n(1-\varepsilon)}\leqslant n^{-\delta(1-\varepsilon)},$$

па би за $\delta(1-\varepsilon)>1$ ред $\sum A_n^{\lambda_n(1-\varepsilon)}$ конвергирао.

Ако би било

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \omega_n<1,$$

за довољно велико n имало би се

$$\omega_n\leqslant\mu<1$$

и одатле

$$A_n^{\lambda_n(1+\varepsilon)}=n^{-\omega_n(1+\varepsilon)}\geqslant n^{-\mu(1+\varepsilon)},$$

тако да би за $\mu(1+\varepsilon)<1$ ред $\sum A_n^{\lambda_n(1+\varepsilon)}$ дивергирао.

Да услови (5) нису довољни доказује пример низа (ω_n) код кога

$$\omega_{2k-1}=\frac{1}{2},\ \ \omega_{2k}=\frac{3}{2}\quad (k=1,2,3,\ldots).$$

У овом случају

$$A_{2k-1}^{\lambda_{2k-1}}=(2k-1)^{-\frac{1}{2}},A_{2k}^{\lambda_{2k}}=(2k)^{-\frac{3}{2}}\quad (k=1,2,\ldots),$$

па (λ_n) не може бити експонент конвергенције.

3° Нека је $\lambda\in(0,\ +\infty)$. Ако би било

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \lambda_n<\lambda,$$

имало би се за n довољно велико $\lambda_n<\alpha<\lambda$ и одатле, са $\varepsilon>0$,

$$A_n^{\lambda_n(1+\varepsilon)}>A_n^{\alpha(1+\varepsilon)},$$

па би са довољно малим ε ред $\sum A_n^{\lambda_n(1+\varepsilon)}$ дивергирао, јер је $\alpha(1+\varepsilon)<\lambda$ за ε довољно мало. Слично се доказује да не може бити

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ \lambda_n>\lambda$$

кад је $\lambda\in[0,\ +\infty)$. Ако је

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \lambda_n<+\infty,$$

тада $\lambda_n\leqslant\beta<+\infty$ за довољно релико n, па

$$A_n^{\beta(1+\varepsilon)}\leqslant A_n^{\lambda_n(1+\varepsilon)}\ \text{за довољно велико } n,$$

што значи да тада не може бити $\lambda=+\infty$. Најзад, неједнакости

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \lambda_n<0\quad\text{и}\quad\underline{\lim_{n\to\infty}}\ \lambda_n>+\infty$$

очигледно нису уопште могуће. Тако је у свим случајевима доказана немогућност неједнакости

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \lambda_n<\lambda\quad\text{и}\quad\underline{\lim_{n\to\infty}}\ \lambda_n>\lambda.$$

4° Ако је $\lambda\in(0,\ +\infty)$ бројни експонет конвергенције низа (A_n), тада је бар један од редова $\sum A_{2k-1}^{\lambda(1-\varepsilon)}$ и $\sum A_{2k}^{\lambda(1-\varepsilon)}$ за свако $\varepsilon>0$ дивергентан. Нека је, на пример, дивергентан први ред. Тада је низ (λ_n) одређен са

$$\lambda_{2k-1}=\lambda,\ \lambda_{2k}=\lambda+1\quad (k=1,2,\ldots)$$

експонент конвергенције низа (A_n). Аналогно се поступа у случају дивергенције другог реда.

Ако је $\lambda = o$, бројни експонент конвергенције низа (A_{2k}) очигледно такође је 0. Нека је (μ_k) стандардни експонент конвергенције низа (A_{2k}). Јасно је да је тада низ (λ_n) дефинисан са

$$\lambda_{2k-1} = 1, \quad \lambda_{2k} = \mu_k \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

експонент конвергенције низа (A_n). Низ (λ_n) је осцилаторан, јер, према 3°, не може бити

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_{2k} = \lim_{k \to \infty} \mu_k = 1.$$

Нека је $\lambda = +\infty$. Свакако постоји строго растући низ природних бројева (p_k) такав да је ред $\sum A_{p_k}$ конвергентан. Нека је (q_k) строго растући низ образован од преосталих природних бројева. Јасно је да низ (A_{q_k}) има $+\infty$ као бројни експонент конвергенције и нека је (μ_k) његов стандардни експонент конвергенције. Лако се увиђа да је низ (λ_n) дефинисан са

$$\lambda_{p_k} = 1, \ \lambda_{q_k} = \mu_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

експонент конвергенције. Он је, поново на основу 3°, осцилаторан.

Ако је $A_n = 0\,(n^{-\delta})$ и $n^{-\mu} = 0\,(A_n)$, са $0 < \mu < \delta$, онда је

$$\ln n = 0\left(\ln \frac{1}{A_n}\right) \quad \text{и} \quad \ln \frac{1}{A_n} = 0\,(\ln n) \quad (n \to \infty)$$

и одатле

$$-\frac{\ln n}{\ln A_n} = \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{A_n}} = 0\,(1), \quad -\frac{\ln A_n}{\ln n} = \frac{\ln \frac{1}{A_n}}{\ln n} = 0\,(1) \qquad (n \to \infty),$$

па ако се узме да је (тврђење 1°)

$$\varliminf_{n \to \infty} \omega_n = 0 \quad \text{и} \quad \varlimsup_{n \to \infty} \omega_n = +\infty,$$

добија се експонент конвергенције (λ_n) код кога

$$\varliminf_{n \to \infty} \lambda_n = 0, \qquad \varlimsup_{n \to \infty} \lambda_n = +\infty$$

5° Ако је

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{\ln n} > 0,$$

за довољно велико n је

$$\lambda_n > \alpha \ln n,$$

где је α неки позитиван број, и одатле

$$A_n^{\lambda_n} < A_n^{\alpha \ln n} = n^{-\alpha \ln \frac{1}{A_n}},$$

тј., са $0 < \varepsilon < 1$,

$$A_n^{\lambda_n (1-\varepsilon)} < n^{-\alpha (1-\varepsilon) \ln \frac{1}{A_n}},$$

тако да у том случају ред $\sum A_n^{\lambda_n(1-\varepsilon)}$ конвергира $\left(\lim\limits_{n\to\infty} ln\frac{1}{A_n}=+\infty\right)$, што значи да (λ_n) не може бити експонент конвергенције низа (A_n) са особинама (2).

Ако је за низ позитивних бројева (λ_n)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{ln\,n}=0,$$

тада низ (A_n) дефинисан са

$$A_n=e^{-\frac{ln\,n}{\lambda_n}}\qquad (n=1,\ 2\ldots)$$

има особине (2). Како је

$$A_n^{\lambda_n}=n^{-1}\qquad n=1,\ 2,\ldots),$$

(λ_n) је експонент конвергенције низа (A_n),

Ако је (A_n) низ са особинама (2), лако се проверава да је низ (λ_n) дефинисан са

$$\lambda_n=-\frac{ln\,n}{ln\,A_n}\omega_n\qquad (n=1,\ 2,\ldots),$$

где је, са $\alpha\in(0,\ +\infty)$,

$$\omega_{2k-1}=1,\quad \omega_{2k}=\alpha\,ln\frac{1}{A_{2k}}\qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ldots),$$

један његов експонент конвергенције. Међутим, тада

$$\frac{\lambda_{2k-1}}{ln(2k-1)}=-\frac{1}{ln\,A_{2k-1}}\to 0,\quad k\to\infty;\quad \frac{\lambda_{2k}}{ln(2k)}=\alpha\qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ldots),$$

тако да је $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \lambda_n=\alpha$. У случају кад $\alpha=+\infty$ треба ставити

$$\omega_{2k}=ln^2\frac{1}{A_{2k}}\qquad (k=1,\ 2,\ldots).$$

6° Имамо, за свако $0<\delta<1$,

$$\lambda_n(1-\delta)<\mu_n<\lambda_n(1+\delta),$$

уколико је n довољно велико, и одатле, са $0<\varepsilon<1$,

$$A^{\mu_n(1-\varepsilon)}>A_n^{\lambda_n(1+\delta)(1-\varepsilon)},\quad A_n^{\mu_n(1+\varepsilon)}<A_n^{\lambda_n(1-\delta)(1+\varepsilon)}$$

за довољно велико n, па како је са довољно малим δ

$$(1+\delta)(1-\varepsilon)<1\ \text{ и }\ (1-\delta)(1+\varepsilon)>1,$$

ред $\sum A_n^{\mu_n(1-\varepsilon)}$ дивергира, а ред $\sum A_n^{\mu_n(1+\varepsilon)}$ конвергира.

7° Имамо

$$B_n = A_n b_n, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 1,$$

па за $0<\varepsilon<1$

$$B_n^{\lambda_n(1\pm\varepsilon)} = e^{(1\pm\varepsilon)\lambda_n(ln A_n + ln b_n)}$$

$$= e^{(1\pm\varepsilon)\lambda_n ln A_n\left(1+\frac{ln b_n}{ln A_n}\right)} = e^{ln A_n\cdot\lambda_n(1\pm\varepsilon)[1+0(1)]}$$

$$= A_n^{\lambda_n(1+\varepsilon)[1+0(1)]}.$$

Одавде је јасно да је (λ_n) експонент конвергенције и низа (B_n).

8° Нека цела функција

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

испуњава услов (4). Њен (бројни) експонент конвергенције је сваки (бројни) експонент конвергенције низа са општим чланом

$$A_n = |a_n|^{\frac{1}{n}},$$

а (бројни) експонент конвергенције њене изводне функције

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\ a_{n+1} z^n$$

је сваки (бројни) експонент конвергенције низа са општим чланом

$$B_n = (n+1)^{\frac{1}{n}} |a_{n+1}|^{\frac{1}{n}}.$$

Део тврђења која се односи на бројне експоненте конвергенције лако се проверава.

Део тврђења који се односи на случај кад је бројни експонент конвергенције нула доказује пример целе функције $f(z)$ са

$$a_n = e^{-n e^n} \qquad (n=0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

Тада имамо

$$A_n = e^{-e^n} \qquad (n=1,\ 2, \ldots)$$

и

$$B_n = (n+1)^{\frac{1}{n}}\ e^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{n+1}} = e^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{n+1}+\frac{1}{n}ln(n+1)}$$

$$= e^{-e^{n+1}[1+0(1)]}.$$

Нека је (λ_n) експонент конвергенције низа (A_n). Онда је, за $0<\varepsilon<1$, $0<\delta<1$ и n довољно велико,

$$B_n^{\lambda_n(1-\varepsilon)} = e^{-e^{n+1}[1+0(1)]\lambda_n(1-\varepsilon)}$$

$$< A_n^{\lambda_n e(1-\delta)(1-\varepsilon)} < A_n^{2\lambda_n},$$

уколико су ε и δ изабрани тако да буде $e(1-\delta)(1-\varepsilon)>2$. Дакле, у том случају ред $\sum B_n^{\lambda_n(1-\varepsilon)}$ за свако ε довољно мало конвергира, због чега (λ_n) не може бити експонент конвергенције низа (B_n).

Последњи момент тврђења доказује случај кад је

$$a_{2k-1}=\frac{1}{(2k-1)^{2k-1}}, \quad a_{2k}=\frac{1}{(2k)^{4k}} \qquad (k=1, 2, 3, \ldots).$$

Тада

$$A_{2k-1}=\frac{1}{2k-1}, \quad A_{2k}=\frac{1}{(2k)^2} \qquad (k=1, 2, \ldots),$$

тако да је низ (λ_n) дат са

$$\lambda_{2k-1}=1, \quad \lambda_{2k}=\frac{1}{2} \qquad (k=1, 2, 3, \ldots)$$

један експонент конвергенције низа (A_n). Међутим, сада је

$$B_{2k}^{\lambda_{2k}}=\left[(2k+1)^{\frac{1}{2k}}a_{2k+1}^{\frac{1}{2k}}\right]^{\frac{1}{2}}=(2k+1)^{\frac{1}{4k}}\cdot\left(\frac{1}{2k+1}\right)^{\frac{2k+1}{4k}},$$

па (λ_n) не може бити експонент конвергенције низа (B_n).

9° Тврђење доказује пример низа (A_n) датог: за случај $\lambda\in(0, +\infty)$ са

$$A_{2k-1}=(2k-1)^{-\frac{1}{\lambda}}, \quad A_{2k}=e^{-k};$$

за случај $\lambda=0$ са

$$A_{2^k}=k^{-1} \ (k=1, 2, 3, \ldots), \quad A_n=2^{-n} \text{ за остале вредности } n;$$

за случај $\lambda=+\infty$ са

$$A_{2k-1}=(ln\, 2k)^{-1}, \quad A_{2k}=e^{-k} \qquad (k=1, 2, 3, \ldots).$$

2. Неколико отворених питања

Да бисмо лакше изложили оно што следи, означимо за $\mathcal{N}$ скуп свих низова (1) са особином (2), а са $\mathcal{E}$ скуп свих експонената конвергенције (у смислу дефиниције 2) елемената скупа $\mathcal{N}$. Затим, нека су функције

$$F\colon \mathcal{N}\to\mathcal{P}(\mathcal{E}) \text{ и } G\colon \mathcal{E}\to\mathcal{P}(\mathcal{N})$$

($\mathcal{P}$ ознака партитивног скупа) дефинисане на следећи начин: за свако $A=(A_n)\in\mathcal{N}$ је $F(A)$ скуп свих експонената конвергенције низа A, а за свако $\lambda=(\lambda_n)\in\mathcal{E}$ је $G(\lambda)$ скуп свих низова чији је експонент конвергенција λ. Даље, бинарне релације ρ и ϱ дефинисане су у $\mathcal{N}$ редом са

$$A\,\rho\, B\Leftrightarrow F(A)\cap F(B)\neq\varnothing, \quad A\,\varrho\, B\Leftrightarrow F(A)=F(B),$$

а бинарне релације Δ и $\mathit{\Delta}$ дефинисане су у $\mathcal{E}$ редом са

$$\lambda\,\Delta\,\mu\Leftrightarrow G(\lambda)\cap G(\mu)\neq\varnothing, \quad \lambda\,\mathit{\Delta}\,\mu\Leftrightarrow G(\lambda)=G(\mu).$$

Овде је реч о следећим питањима:

1° *Може ли се наћи адекватна карактеризација елемената скупа* $\mathcal{E}$?

У вези са овим, подсећамо да смо у **1** (тврђење 5°) установили да је

$$\mathcal{E}_1\subset\mathcal{E}\subset\mathcal{E}_2,$$

где је

$$\mathscr{E}_1=\left\{(\lambda_n):\quad \lambda_n>0\ (n=1,\,2,\,3,\ldots)\wedge \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{\ln n}=0\right\},$$

$$\mathscr{E}_2=\left\{(\lambda_n):\quad \lambda_n>0\ (n=1,\,2,\,3,\ldots)\wedge \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{\ln n}=0\right\},$$

при чему је прва инклузија сигурно права.

2° *Да ли сваки низ из* $\mathscr{N}$ *чији је бројни експонент конвергенције* 0 *или* $+\infty$ *има експонент конвергенције који тежи ка бројном експоненту конвергенције истог низа?*

3° *Да ли за два низа A и B из* $\mathscr{N}$ *са различитим бројним експонентима конвергенције може бити* $A\,\rho\,B$?

4° *Да ли је* ρ *релација еквиваленције у скупу* $\mathscr{N}$?

(У питању је само транзитивност; рефлексивност и симетричност су очигледне.)

5° *Да ли је* Δ *релација еквиваленција у скупу* $\mathscr{E}$?

(Поново је само транзитивност у питању.)

6° $\underline{\rho}$ *је очигледно релација еквиваленције у* $\mathscr{N}$. *Може ли се она ближе окарактерисати; посебно, да ли се она подудара са асимптотском једнакошћу низова из* $\mathscr{N}$?

Овде се има у виду резултат 7° из **1**.

7° *Аналогно питање за релацију* Δ.

Има се у виду резултат 6° из **1**.

Негативан одговор на питање 3° изгледа нам вероватан.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Петровић, Михаило, *О изложиоцу конвергенције*, Глас С К А Н, CXLIII, I разред 70, 1931, 149 — 167.

[2] Pringsheim, A., *Elementare Theorie der ganzen transcedenten Funkcionen von endlicher Ordnung*, Math. Ann. Bd. 58, 1904, 257 — 342.

[3] Pólya-Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze*, Bd. I, 1925, 19—20.

[4] Borel, E., *Leçons sur les fonctions entières*, Paris, 1921, p. 18 et 26.

[5] Adamović, D. D., *Sur quelques propriétés des fonctions à croissance lente de Karamata* I, Мат. весник, 3 (18), св. 2, 1966, 123 — 136.

SUR LA NOTION D'EXPOSANT DE CONVERGENCE DE MICHEL PETROVITCH

D. D. Adamović

Résumé

Pour une suite (1) avec les propriétés (2) on définit l'exposant de convergence comme un nombre $\lambda\in[0,+\infty)$ tel que pour $\varepsilon>0$, la série $\sum A_n^{\lambda_n+\varepsilon}$ converge et la série $\sum A_n^{\lambda_n-\varepsilon}$ diverge. Si la série $\sum A_n^{\alpha}$ diverge pour tout $\alpha>0$, on dit que l'exposant de convergence est $+\infty$. Cette notion est bien connue. En 1931, dans [1], Michel Petrovitch a proposé une nouvelle notion d'exposant de convergence: pour une suite (1) avec les propriétés (2), il a appelé exposant de convergence toute suite (λ_n) de nombres positifs telle que pour tout $\varepsilon>0$ la série $\sum A_n^{\lambda_n(1+\varepsilon)}$ converge et la série $\sum A_n^{\lambda_n(1-\varepsilon)}$ diverge. Quelques résultats relatifs à cette notion-là sont donnés. Quelques questions, dont on ne sait pas encore les réponses, sont formulées à la fin de l'article.

E. Stipanić

PETROVIĆEV SUD O GETALDIĆEVOJ ULOZI U GENEZI ANALITIČKE GEOMETRIJE

Godina 1968. je dvostruko jubilarna za jugoslavensku matematiku, zbog *četirstogodišnjice* rođenja Marina Getaldića i *stogodišnjice* rođenja Mihaila Petrovića. Zanimljivo je istaći, tim povodom, jedan Petrovićev sud o ulozi Marina Getaldića u predekartovskom procesu rađanja analitičke geometrije.[1]

1. Petrović je, kao delegat Srpske akademije nauka, učestvovao u Parizu, 1937. godine, na proslavi tristogodišnjice Descartes-ove geometrije. Tom prilikom stekao je uvid u originalna Getaldićeva dela.[2]

U svom izveštaju o pomenutoj proslavi, koji je podneo Srpskoj akademiji nauka, Petrović je formulisao svoj sud o Getaldićevoj ulozi u genezi analitičke geometrije, podvukavši: a) da je Getaldić algebriziranjem geometrijskih problema obavio „jedan od najvažnijih i najpotrebnijih poslova za stvaranje" analitičke geometrije i da mu zbog toga pripada „uloga pionira" te geometrije, odnosno da njemu „pripada neosporno i u prvom redu" zasluga za uvođenje „opštih brojeva" u geometriju; b) da je svojim metodama došao do vrata analitičke geometrije, ali da nije prešao njen prag, jer da se u njegovim delima ne može naći ni „najslabiji trag koordinata i koordinatnog sistema", pa da mu zato pripada samo „pionirska uloga", a ne i „uloga osnivača i tvorca" analitičke geometrije.

Pošto je Getaldić „algebrizirao geometrijske probleme" samo u svom glavnom delu *De resolutione et compositione mathematica* (Rim, 1630), a ni u jednom drugom njegovom delu nema ni traga o algebarskoj analizi, Petrović je svojim sudom u stvari okarakterisao Getaldićevo glavno delo u odnosu na Descartes-ovo delo *Géométrie* (Pariz, 1637), kojim se tek stvarno rodila analitička odnosno koordinatna geometrija.

2. Viète-ova simbolička algebra (logistica speciosa) bila je *conditio sine qua non* Descartes-ove analitičke odnosno koordinatne geometrije. Getaldić je bio Viète-ov kreativni učenik, sledbenik i saradnik, koji se u Parizu, u direktnom kontaktu sa njim i preko njegovih dela, inspirisao njegovom algebarskom analizom, osetivši čulom dalekovidog matematičara da se tom analizom i njenom primenom

---

[1]) Ovo saopštenje objavljeno je in extenso u 38. knjizi Matematičke biblioteke (*Mihailo Petrović-čovek-filozof-matematičar*, Beograd, 1968, 117—125) pod naslovom *Mihailo Petrović o Getaldićevom učešću u genezi analitičke geometrije.* Ovde se objavljuje u skraćenom i nešto modifikovanom obliku.

[2]) Cf.: Dr E. Stipanić, *Mihailo Petrović o Getaldićevom učešću u genezi analitičke geometrije*, Matematička biblioteka 38, Beograd, 1968, 117—125

u geometriji otvaraju novi putevi razvitku matematike. On je Viète-ovoj algebarskoj analizi dodelio primarnu ulogu u okviru metodološke koncepcije svog glavnog dela, protivstavljajući je metodi antičkih geometričara, kao novu i efikasnu analitičku metodu u tretiranju geometrijskih problema i teorema. Zato svaki sud o Getaldićevoj „ulozi pionira" analitičke geometrije, koji je algebriziranjem geometrijskih problema „izvršio jedan od najvažnijih i najpotrebnijih poslova" za njeno stvaranje, *mora* imati u vidu *Viète-ovu pionirsku ulogu* u razvitku analitičke geometrije i *Viète-ov uticaj* na Getaldića. Dopunjen u tom smislu, Petrovićev sud svrstava se među one sudove kojima se naučno tačno utvrđuje uloga Getaldića, tačnije njegovog dela *De resolutione et compositione mathematica*, u procesu rađanja analitičke geometrije pre Descartes-a.

3. Petrović je u težište Getaldićeve „uloge pionira" analitičke geometrije stavio Getaldićevo „algebriziranje geometrijskih problema". Smatramo, u vezi s tim, da je zanimljivo i ovde svrsishodno podvući — na šta se nije obraćala pažnja u dosadašnjim proučavanjima Getaldićeve algebarske analize — da se u Getaldićevom „algebriziranju geometrijskih problema" metodološki posebno izdvaja njegov *Conspectus resolutionis et compositionis* (Konspekt analize i sinteze), koji naročito jasno potvrđuje osnovni smisao Petrovićevog suda o Getaldićevoj ulozi u genezi analitičke geometrije. Prvi sam skrenuo pažnju na značaj tog Getaldićevog Konspekta 1966. godine u svom saopštenju na Kongresu matematičara u Moskvi i u svojoj raspravi *Marin Getaldić i njegov rad u matematici i fizici*, koja će biti objavljena u ediciji Rasprave i građa za povijest nauka JAZU. Pomenutim Konspektom, na nekoliko mesta u svom glavnom delu, Getaldić izvanredno jasno prezentira ulogu Viète-ove algebre u tretiranju geometrijskih problema i precizno određuje uzajamni odnos analize (*resolutio*) i sinteze (*compositio*), sa izrazitom težnjom da ove matematički formalizuje, a to upravo daje posebnu metodološku vrednost glavnom Getaldićevom delu s obzirom na vreme u kojem se javilo.[3]

4. Malo pažljivija analiza Getaldićevih konstruktivnih rešenja dva geometrijska problema, četvrtog i petog kojima se on bavio u petoj knjizi svog glavnog dela, otkriva, smatramo, u geometrijskom obliku „najslabiji trag koordinata i koordinatnog sistema". Na ovo je već upozorio Oton Kučera, u svojoj studiji o Getaldiću, kada je, između ostalog, napisao:[4] „... mislimo da ne idemo predaleko, ako ustvrdimo, da se Getaldić u ovom a i u sljedećem problemu primaknuo baš na prag temeljnoj misli analitičke geometrije".

Mi ćemo se ovde zadržati na Getaldićevom konstruktivnom iznalaženju trećeg temena trougla u petom problemu[5]: „Super data base triangulum constituere, in quo differentia segmentorum basis sit dupla differentiae crurum, ipsaq. differentia crurum sit dupla excessus, quo crus maius superat basim".

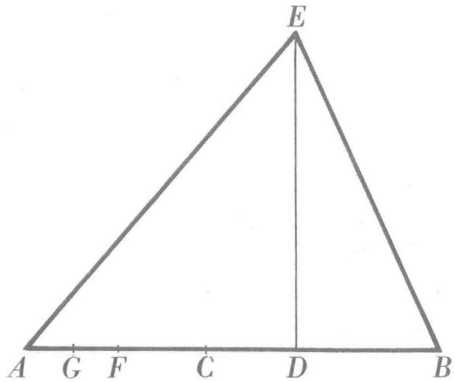
Dva temena trougla su određena datom osnovicom AB (sl. 1). Pošto je odabrao proizvoljnu tačku C na osnovnici AB (Abscindatur a data base AB quaecumque portio AC), Getaldić nalazi sredinu D duži BC i u tački D podiže normalu na osnovicu AB. Zatim nalazi sredinu F duži AC i sredinu G

[3] Cf.: Dr E. Stipanić, Ibidem, 120—123; E. Stipanić, *Une contribution à l'étude de l'oeuvre de Getaldić (Ghetaldus) „De resolutione et compositione mathematica"*, Matematički Vesnik, knjiga 5 (20), sveska 3, Beograd, 1968.

[4] Cf.: Oton Kučera *O Marinu Getaldiću, patriciju dubrovačkom, znamenitom matematiku i fiziku na početku XVII vijeka*, Rad, knj. CXVII, Zagreb, 1893, 60.

[5] Cf.: *De resolutione et compositione mathematica*, Liber quintus, Problema V, 328—330. Kučera je detaljno analizirao samo četvrti problem: „Super data base triangulum constituere, quod habeat differentiam crurum dimidiae basis aequalem."

duži AF. Iz tačke B, kao centra, opisuje kružni luk poluprečnika BG, koji seče u tački E normalu podignutu u tački D. Tačka E je treće teme traženog trougla, odnosno ABE je traženi trougao, što Getaldić precizno dokazuje metodom elementarne geometrije.



Sl. 1

Na poseban način, Getaldić je istakao proizvoljnost odsečka AC i u vezi sa tim zaključio: „... itaque innumera triangula possunt super eadem base constitui, cum in data base AB sumpto puncto C ubicumque..." (... na taj se način nad istom osnovicom može konstruisati beskonačno mnogo trouglova, budući da se tačka C na osnovici AB uzima gde god bilo...).

Getaldić je, dakle, obratio *naročitu* pažnju na tačku C, odnosno na njen položaj (a to implicite znači i na položaj tačke D odnosno na položaj normale DE), jer je očigledno da od njenog položaja (odnono od položaja tačke D) zavisi položaj tačke E. Drugim rečima, obratio je pažnju na *funkcionalnu zavisnost* dužine DE od dužine AC (odnosno od dužine AD). Sem toga, on je, u neku ruku, tačku A *fiksirao* kao stalnu, polaznu, *tačku merenja* (Abscindatur a data base AB quaecumque portio AC), a normalu DE kao pravu na kojoj u zavisnosti od duži AC (odnosno duži AD) određuje tačku E. Nije teško videti da geometrijsko mesto tačaka E predstavlja elipsu, odnosno da sama postavka problema implicira klasičnu definiciju elipse.

Mislimo da nam navedena analiza Getaldićeve odredbe tačke E, odnosno trećeg temena trougla ABE, dozvoljava da možemo kazati: Getaldićeva odredba tačke E sadrži u geometrijskom obliku bar „najslabiji trag koordinata i koordinatnog sistema". Zato smatramo da bi Petrovićev sud, koji smo kratko formulisali pod b) u odeljku 1), dopunjen u smislu navedene analize, *adekvatnije* i *preciznije* tumačio zaključnu misao, prema kojoj Getaldiću pripada samo, „pionirska uloga", a ne i „uloga osnivača i tvorca" analitičke geometrije.

5. Petrovićev sud o Getaldićevoj ulozi u genezi analitičke geometrije, svojim osnovnim zaključcima, potvrđuje da je vreme neposredno pred pojavom Descartes-ove geometrije imalo u Marinu Getaldiću istaknutog pionira analitičke geometrije, a u njegovom delu *De resolutione et compositione mathematica* istaknuto pionirsko delo — na putu ka Descartes-ovom delu *Géométrie*. I upravo ovim, bez obzira na dopune o kojima je bilo napred reči, Petrovićev sud, uzet u celini, spada među one sudove kojima su naučno tačno procenjeni značaj i uloga Marina Getaldića u predekartovskom razvitku analitičke geometrije.

LE JUGEMENT DE MICHEL PETROVITCH SUR LE RÔLE DE GETALDIĆ (GHETALDUS) DANS LA GENÈSE DE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

E. Stipanić

Résumé

A l'occasion du troisième centenaire de la *Géométrie* de Descartes, en 1937., Michel Petrovitch a énoncé l'opinion sur le rôle de Getaldić dans la genèse de la géométrie analytique, en traîtant ce rôle comme „le rôle du pionnier" [cf: (2)]. L'auteur de ce travail, compte tenu de l'oeuvre principale de Getaldić „*De resolutione et compositione mathematica*", a analysé le jugement de Petrovitch à la lumière de la logistique specièuse (logistica speciosa) de Viète et de l'influence de Viète sur Getaldić.

Драīан Трифуновић

О ЈЕДНОЈ АНТИЦИПАЦИЈИ ДАНАШЊИХ ХИДРОИНТЕГРАТОРА

0. УВОД

У историји математичких наука посебно место заузима истраживање у смислу изналажења приоритета ауторства (проналаска) у некој методи, поступку, дисциплини и др. Циљ овог рада је истицање таквог једног приоритета у методологији данашњих концепција хидроинтегратора за решавање обичних и парцијалних диференцијалних једначина. Наиме, ауторов је задатак да Петровићев хидроинтегратор из 1897. са побољшањем у 1898. години, предложи као аналогну рачунску машину која је претеча данашњим хидроинтеграторима.

Како је Петровић радио и у области хемијске и кинематске интеграције, то се у другом делу рада излаже комплетна библиографија Петровићевих радова, као основна информација за даља истраживања.

1. ХИДРОИНТЕГРАТОРИ

1.1. Према извесним радовима из области инструменталне математике и њене примене [9], [10], [11], [12] и [13] уочљиво је запажен нагли пораст примене специјалних аналогних рачунских машина које раде на принципу аналогија са хидростатиком, хидрауликом и пнеуматиком (нпр. [15] и [16]). Разлог појави ове нове врсте рачунске технике јесу специфични услови калкулација који су у директној вези са одговарајућим производним процесом [17].

Пример који ће овде бити изложен и чију ћемо оригиналност допунити Петровићевом антиципацијом из 1897. године, односи се на решавање парцијалне диференцијалне једначине протока топлоте (1). Њено решавање у сложеним случајевима (нпр. сложена конфигурација чврстог тела) чини отворена питања за нумеричку анализу и у општем случају решава се неком од приближних метода.

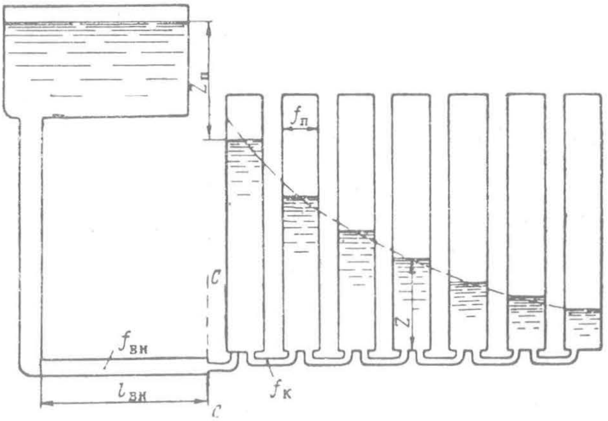
За основну једначину протока топлоте у дефинисаном температурном пољу

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T$$

односно, једноставнију једначину

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{1}$$

где је $a = \lambda/cr$ — коефицијенат температурне проводљивости материјала, Лукьянов је у раду [13], односно [14], изложио хидроинтегратор за решавање једначине (1). Ова метода потиче из 1937. године и успешно се

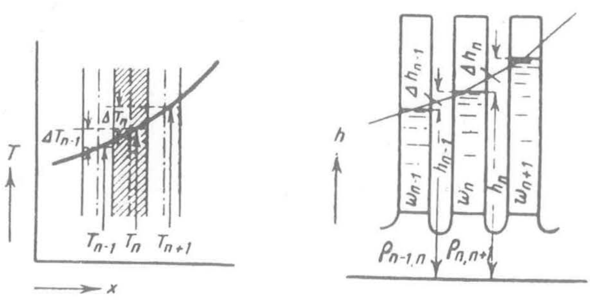


Сл. 1 — Хидроинтегратор из 1937.

користи у ракетној техници [9] или опште, термодинамици [11]. Насупрот познатој Schmidt-овој методи разлика, где се за референтну вредност температуре T, у смислу примене [9], може узети вредност по Зельдович-у [18] или [19], или електричном моделирању [14], Лукьянов моделира такав хидродинамичан модел са системом спојених судова (капиларне цеви) који доводи до аналогне релације

$$(2) \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = b \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \qquad b = k \frac{fk}{fn}$$

Лукьянов је користио директну аналогију „прираштаја" између методе разлика и пораста нивоа течности у капиларном суду, што се види на слици 2. Значи, промена нивоа z течности у тако саграђеном хидроинтегратору (сл. 1) је у аналогији са променом температуе T по дебљини материјала. Промена количине течности у елементарном блоку у аналогији је са променом топлоте у елементарном слоју материјала, а истицање течности у капиларним судовима у аналогији је са топлотним протоком, итд.



Сл. 2 — Аналогни модел

Према начину конструкције хидроинтегратора, а за потребе утврђивања истих елемената у Петровићевом интегратору из 1897—8. године, овде ћемо констатовати следеће елементе у поступку Лукьянов-а.

1.1.1. Изналажење аналогног модела у хидродинамици.

1.1.2. Употреба спојених судова.

1.1.3. Употреба судова са капиларним својством ради добијања различитог нивоа течности у спојним судовима.

1.1.4. Математичка аналогија (моделирање).

1.2. Пре него што изложимо једнакост поступка Лукьянов-а и Петровића, и тиме докажемо Петровићево првенство у методологији савремених хидроинтегратора, изложићемо Петровићеве резултате.

Одмах по доласку са специјалистичког школовања у Паризу (1890—1894) Петровић је пришао студији изналажења нових елемената у рачунској техници, тј. механичкој интеграцији, како се тада називала. Интересовање за ову област примењене математике, на самом почетку научног рада, директна је последица утицаја два Петровићева професора механике у Београду, Љубомира Клерића и на Collège de France-у, Koenigs-a. Тако је, рецимо, годину дана пре објављивања *првог рада* из хидрауличне интеграције 0_4, професор Љубомир Клерић писао: „Било би од велике користи да помишљамо о томе, да пронађемо инструмент, којим би могли наћи интеграл ма које линеарне диференцијалне једначине. На овом питању ради сада професор математике на Великој школи г. Михаило Петровић, и надати се је да ће ово питање, које је *веома* тешко, решити, јер пут којим је пошао коректан је, сасвим оригиналан и веома духовит“ (R_4, стр. 254).

Петровићево интересовање за рачунске машине припада, значи, првим годинама рада на Великој школи у Београду (1894—1899). Изузетак чини рад о курвиметру саопштен у Академији 1913, а објављен 1921. године (0_9). Тачније речено, Петровић се бави изналажењем аналогних модела за потребе рачунске технике у периоду када највише проучава извесне појаве у природи (електрицитет, хемијске реакције, кинетика гасова, хидродинамика и др.) за потребе своје феноменологије. За ово време, Петровић је објавио четири рада из хидрауличне интеграције 0_4, 0_5, 0_6 и 0_7. Како се прва три рада сажимају $0_4 \subseteq 0_5 \equiv 0_6$, то излази да је у овој области Петровић пружио два оригинална прилога 0_6 и 0_7.

Анализирајући *два различита* хидраулична модела (0_6 и 0_7) Петровић 1897. године изналази такав хидроинтегратор (сл. 3 и 4) којим се *машински* могу решавати две класе диференцијалних једначина

$$(A_1) \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{F(x-y)}{\Phi(y)}, \qquad (A_1) \subsetneq 0_6$$

$$(A_2) \qquad P(x, y)\, ax + Q(x, y)\, dy = 0, \qquad (A_2) \subseteq 0_7$$

Променом конструктивних елемената на хидроинтегратору, значи променом облика суда, тела које се потапа у суд, сједињавањем 1, 2 и више судова и интегралних ваљака, Петровић знатно проширује могућност хидрауличне интеграције на ширу класу диференцијалних једначина. У класи (A_1) Петровић добија услове за интеграцију Riccati-еве једначине

$$(A_{11}) \qquad \frac{dy}{dt} = X(t) - \lambda y^2$$

као и једначина

$$(A_{12})\qquad \frac{dy}{dx}+F(y)=F(y)\,\psi(x)$$

$$(A_{13})\qquad \Phi(y)\frac{dy}{dx}+\lambda\sqrt{y}-af'(x)=0$$

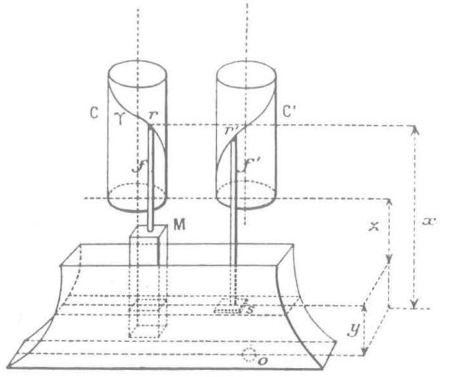
$$(A_{14})\qquad \Phi(y)\frac{dy}{dx}=k\,[f(x)-y]\,f'(x)$$

$$(A_{15})\qquad \frac{dy}{dx}=f(y)\,\psi(ax-y)$$

У класи (A_2) посматрани су ови случајеви

$$(A_{21})\qquad \psi(x-y+\lambda)\,dx+[\Phi(y)-\psi(x-y+\lambda)]\,dy=0$$

$$(A_{22})\qquad f(y)\,dy+\psi(z)\,dz=0$$



Сл. 3 — Принцип хидроинтегратора из 1897.

Петровић је код хидрауличне интеграције у потпуности био у домену савремених принципа моделирања (*материјализације* — по Петровићу). „Са становишта модерне инструменталне математике, која се уопштено речено, с обзиром на улогу *математичких модела* у њој, заснива на једној врсти *феноменолошког пресликавања*, овде је најинтересантније да је Петровић математичке аналогије третирао и као подесно помоћно средство за материјализацију аналитичких проблема“ (R_{33}). Ево, шта сам Петровић вели о моделирању, тј. материјализацији. „Математичке аналогије могу учинити још једну врсту услуга, које у појединим случајевима имају своје нарочите важности: оне су једно подесно помоћно средство за *материјализацију аналитичких проблема*. Материјализација се састоји у томе, да се за један дати аналитички проблем нађе конкретна појава, за коју ће важити исте релације и исти закони, што би се добили аналитичким решењем тога проблема. Дешава се да, при таквој материјализацији, каква релација, или каква нарочита појединост, која је скривена у једначинама аналитичког проблема и коју је тешко истаћи на видик чисто аналитичким средствима, постаје очевидна у конкретној појави која проблем материјализира“ [25, стр. 755].

Петровић је материјализацију аналитичких проблема извео на примерима хидрауличке и хемијске интеграције (0_3). У моделирању хидрауличког процеса за интеграцију диференцијалних једначина (A_1) и (A_2), Петровић је искористио појаву померања нивоа једне течности у суду одређеног облика, кад у течност понире какво чврсто тело. Закон по коме се понаша ниво течности, а што се региструје преко једног периферијског уређаја (нпр. ваљак—писач), зависи од облика суда и тела, као и начина понирања овог тела у течност.

Нека је тело M потопљено у суд B (сл. 3). Ниво течности ће се померати по закону који зависи од облика тела M и суда B. Ако су $\Phi(y)$ и $F(z)$ површине хоризонталног пресека суда B, односно тела M, тада потапајући тело M, величина x се промени у $x-dx$, а y у $y+dy$, те ће запремина која се подигла изнад нивоа y бити

$$[\Phi(y)-F(z)]\,dy \tag{3}$$

Како ова запремина (3) мора да буде једнака са запремином течности коју је испунило тело M када је ово потопљено за dz, тј.

$$F(z)\,dz$$

то се одавде добија једнакост

$$[\Phi(y)-F(z)]\,dy=F(z)\,dz$$

односно (A_1)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{F(x-y)}{\Phi(y)}$$

јер је испуњена релација $z=x-y$.

Ово је основни принцип који је Петровић искористио у „материјализацији" за израду свог хидроинтегратора. Узимајући специјално случајеве пресека тела M и суда B, Петровић је дошао до шире класе диференцијалних једначина (A_{1i}) и (A_{2k}) које се могу графички интегралити помоћу хидроинтегратора.

Што се тиче употребе спојених судова са капиларним својством, што срећемо код Лукьянов-а и савремених хидроинтегратора, Петровић ове елементе није директно користио у конструкцији хидроинтегратора, али је предвидео могућност примене. „Принцип интеграције, истакнут у овоме раду," писао је Петровић, „може се остварити још *и на друге веома разнолике начине и поље за комбинације овакве врсте веома је пространо.* Сваком начину његовога реализовања одговарају читаве класе диференцијалних једначина првог реда, које се њима могу интегралити и читаве класе кривих, које се могу континуално конструисати" (0_5, стр. 16). „Нека је, као пример, поменуто и то, да поједини аналитички факти, везани за криволинијске интеграле, постају очевидни у конкретним (нпр. хидродинамичким) појавама, у којима се на њих наилази; да поједини геометријски факти, на које се наилази у теорији минималних површина, постају очевидни, кад се физички конкретизирају, нпр. у *капиларним појавама*, Plateau-овим експериментима итд" [25, стр. 760].

1.3. Након излагања Петровићеве методе у хидрауличној интеграцији, недвосмислено излази да идеје Лукьянов-а и опште, савремене хидраулике и пнеуматике, припадају Михаилу Петровићу (1868—1943). То пре свега потврђује принцип изналажења аналогне рачунске машине посредством одређеног физичког модела, затим, коришћење закона хидродинамике, као и елемената данашњих хидроинтегратора (интегрални ваљак, елементаран суд, капиларност, писач и др.).

1.4. Проналаском хидроинтегратора Петровић је у рачунској техници још 1897. године отворио потпуно нове могућности у правцу развоја аналогних рачунара. Да је Петровићев хидроинтегратор потпуно ново откриће у рачунској техници потврдиле су и познате монографије De Morih-a (R_{15}) из 1913. године, Kamke-a (R_{26}) из 1942. и Willers-a (R_{19}) из 1943. године, а сам Петровић је о овоме писао: ,,Додајем да су сви до сада предложени интеграфи и апарати за графичку интеграцију појединих врста диференцијалних једначина основани на употреби принципа сасвим друге, чисто кинематичке природе, који су мање подесни за реализацију и доводе до типова једначина много мање општих, но *хидраулични принцип*" (0_5, стр. 16).

Пронашавши потпуно нов и оригиналан апарат за интеграцију диференцијалних једначина, Петровић је желео да искористи и одржавање Светске изложбе и Паризу 1900. године, и у павиљону наше земље прикаже свој проналазак. Ради овога, а непосредно по објављивању шире расправе о хидроинтегратору (0_6), Петровић се обратио надлежнима за помоћ ради израде хидроинтегратора [20]. ,,Господину Министру нар. привреде. Намеран би био конструисати за Париску изложбу 1900 год. и изложити у Српском павиљону изложбе свој графичко-рачунски апарат ,,*интеграф*", помоћу кога се могу графички проучавати и израчунавати одређени и неодређени интеграли, вршити интеграцију диференцијалних једначина и механички решавати разнолики проблеми више математике.

Основна идеја апарата може се видети из приложених под·/·и·//· кратких описа, од којих је један изашао у ,,*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*", а други у *Српском техничком листу*. Додаћу само да принципи употребљени за конструкцију апарата до сад нису били примењени ни у каквоме рачунском апарату.

Апарат би због споредних делова и разноликих услова, које треба у практици да задовољи, био компликованији од онога, који у приложеним описима представља само његову шему. Према добијеним стручњачким проценама, конструкција његовог првог модела, коју бих извршио у Паризу код нарочитога конструктора за прецизионе апарате, са пробама у циљу усавршења његове практичности, *коштало би на хиљаду и пет стотина динара*.

Слободан сам обратити се Господину Министру са учтивом молбом да изволи одобрити, да ми се, из буџета одређеног за учествовање Србије на Париској изложби, изда горња сума на поменути циљ и тиме ми се омогући конструкција апарата у онаквом облику, у каквом би могао достојно фигурисати на светској изложби.

У Београду 31. Окт. 1898 г. Господину Министру понизан
Михаило Петровић
проф. Вел. школе"

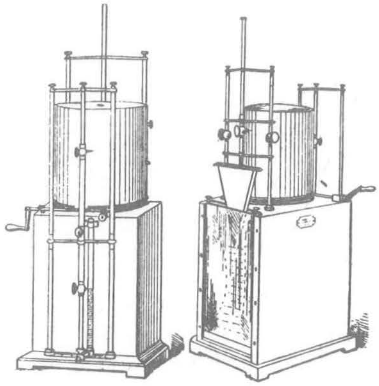
Према сачуваном концепту писма конструктору интегратора (име конструктора Француза остаје и даље непознато), дознајемо да је Петровић учествовао на Светској изложби [21]. ,,Господине. Мој апарат са течношћу за графичку интеграцију, који сте Ви конструисали пре годину дана за изложбу у Паризу, биће изложен у Српском павиљону. Господин комесар Српске секције замолиће Вас да будете добри и пошаљете једног од Ваших радника који ће апарат да монтира и по потреби очисти на рачун ове Секције. Са своје стране Вас молим, да учините ову доброту, гарантујући Вам личну накнаду за рад.

Примите Господине моје поштовање и искрене поздраве
Михаило Петровић

Обратите се комесару Српског павиљона на Париској изложби, господину М. Капетановићу у Посланству Србије."

Произведен хидроинтегратор (на слици 4, која се по први пут објављује у нашој јавности) по величини је био већих размера и, вероватно, у прецизности чинио је мању грешку.

Како се у време Париске изложбе одржавао и Међународни конгрес математичара (Париз, 6 до 12. августа 1900.), то је Петровићева аналогна машина у павиљону наше земље имала потпуну функционалност приказивања и демонстрације. Према материјалима изложбе и казивању академика Милутина Миланковића, Петровић је за изложени хидроинтегратор добио златну медаљу Светске изложбе. Према 0_{11}, стр. 107, сазнајемо да је доцније, 1907. године, Петровић награђен и почасном дипломом математичара Лондона за проналазак хидроинтегратора.



Сл. 4 — Петровићев хидроинтегратор са Светске изложбе у Паризу, 1900. године

Данашње анализе Петровићевог стварања у рачунској техници усредсређене су у правцу добијања нужне аргументације ради прибављања приоритета-првенства у овој врсти рачунске технике, а као што је напред и изложено. Међутим, и у периоду проналаска хидроинтегратора и знатно доцније, Петровић је у светској литератури добио потребно признање са нагласком „да је то прва машина на приципу хидраулике" и „да решава ширу класу диференцијалних једначина" него што је то случај, на пример, са Jacob-овим интегратором који машински интеграли само Riccati-еву једначину првог реда [22]. Друштво француских физичара, чији је Петровић био члан од 1896, прештампава Петровићев рад из Comptes rendus-а (B_6), а што представља изузетак у издавачкој делатности француске науке. Hamburger (R_{10}, R_{17} и R_{27}) обавештава FdM, а Jacob у Научној енциклопедији (R_{13}) детаљно описује Петровићев проналазак. Можда најдетаљнији приказ Петровићеве аналогне рачунске машине, при чему је користио и проспект са Светске изложбе, пружио је A. Price 1900. године (R_{23}). У монографији о инструменталној математици N. De Morih (R_{15}) 1913. године посебно излаже Петровићев проналазак, као специјалну методу машинске интеграције диференцијалних једначина. A. Willers у *Mathematische Instrumente* (R_{19}) 1943. године не заборавља да наведе и Петровићев резултат као потпуно ново решење у аналогној техници (Willers-ову књигу превели су и Руси 1949. године R_{20}). Ово је урадио и Kamke у познатом свом делу Differentialgleichungen: Lösungsmetoden und Lösungen, Bd. I, 1942, Leipzig, s. 642 (R_{26}).

БИБЛИОГРАФИЈА*)

I део

[1] Споменица о отварању Универзитета. Београд, 1906, стр. 105—109.

[2] Liste de travaux de M. Michel Pétrovitch publiés de 1894 a 1921. Notice sur les travaux scientifiques de M. Michel Pétrovitch (1894—1921), Académie royale de Serbie, Editions spéciales, T. XLIII, Sciences mathématiques et naturelles, l. 10, Paris—Belgrade, 1922, p. 1—8.

[3] Liste des publications scientifiques de M. Michel Pétrovitch Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, Belgrade, 1938, T. VI—VII, p. XIII—XXIX.

[4] Годишњак Српске краљевске академије, XI, 141—145; XIII, 269—271; XV, 273—274; XVIII, 355—356; XXI, 427—428; XXII, 345—346; XXV, 331—332; XXVI, 260—264; XXVIII, 237—240; XXXIV, 293—296; XXXVIII, 163—167; XLII, 210—213; XLVI, 266—269.

[5] Д. С. Митриновић, *Прилози за биографију Михаила Петровића*. Весник Друштва математичара и физичара НР Србије. Т. XII (1960), Београд, 1960, стр. 143—145.

[6] Успомени Михаила Петровића. Српска академија наука, Зборник радова, књ. XXXV, Математички институт, књ. 3, стр. VII—XIII.

[7] Инвентар књига Математичког кабинета. ДАС Фонд УБ — Рачуноводство.

[8] Д. Трифуновић, *Летопис живота и рада академика Михаила Петровића* 1868—1943. Српска академија наука и уметности, Посебна издања, Одељење природно-математичких наука, Београд, 1968, стр. XVIII + 623 (у штампи).

[9] Б. Орлов — Г. Мазинг, *Термодинамические и баллистические основы проектирования ракетных двигателей на твёрдом топливе*, Москва, 1964, стр. 181—186.

[10] Л. С. Зйгенсон, *Моделирование*. Советская наука, 1952.

[11] А. И. Вейник, *Приближенный расчёт процессов теплопроводности*, Москва—Ленинград, 1959, стр. 22—24.

[12] В. С. Лукьянов, *Гидравлические приборы для технических расчётов*, Изв. АН СССР, Отд. технич. наук, 2,58, Москва, 1939, стр. 53—67.

[13] В. С. Лукьянов, *Технические расчёты на гидравлических приборах* Москва, 1937.

[14] V. Paschkis, Frans. AFA, 52, 649, 1945; 53, 90, 1945.

[15] Применение вычислителной техники для автоматизации производства, Москва, 1960.

[16] Вопроси пневмо и гидроавтоматики. АН СССР, Москва, 1966.

[17] Стојаковић Мирко, R_{35}.

[18] Я. Б. Зелйдович, . . . , *Импулс реактивной силы пороховых ракет*. Москва, 1963.

[19] D. Trifunović, *Chimie et industrie*, Paris, 1964, XCII, 3, p. 135—136.

[20] ДАС, Мин. нар. привреде, Одељење за трговину, радиност и саобраћај, XVII, 2, 1900.

[21] Фонд Михаила Петровића у Музеју града Београда, ф. 4.

[22] Jacob L., CR, Paris, 29. avril 1907.

[23] Enciclopedia delle matematiche elementari, Milano, 1930, V. I. p. I (411—442).

[24] Walther Dyck, *Catalog mathematischer und mathematisch — physikalischer Modelle — Apparate und Instrumente*. München, 1892—3.

[25] М. Петровић, *Елементи математичке феноменологије*, Београд, 1911.

II део

1 1 *Изложити све начине рачунања површина уопште, како из оригиналних мера, тако и из планова снимљених графичким путем, заједно са средствима (планиметрима) за рачунање површина од најпростијих до најсложенијих и најупотребљивијих у пракси*. Велика школа у Београду, Технички факултет, Београд, 1889.

[Темат за Светосавску награду на Великој школи, достављен 2. јануара, а оцењен 14. јануара 1889; II награда; шифра темата „Non volumus velle, sed facere" — Hobbes; реферат проф. Љубомира Клерића у Академском савету Велике школе; необјавље рукопис; ДАС, Фонд ВШ — 1889, 47 „Темати"]

1 Trifunović Dragan, *Prilog numeričkoj obradi površine poligona*, Naučno-tehnički pregled, Beoprad 1966, T. XVI, br. 46—48.

2 Trifunović Dragan, *Školovanje Mihaila Petrovića*, Matematička biblioteka, Beograd, 1966, T. 32, str. 137—150.

---

*) Библиографија је изложена у два дела. I део обухвата литературу која је директно коришћена у раду, док II део садржи све радове Михаила Петровића у области рачунских машина, као и одговарајуће рецензије и коришћења.

3 T r i f u n o v i ć Dragan, *Studije Mihaila Petrovića*. Математички весник, Београд, 1967, T. 4 (19), св. 1, стр. 47—73.

2 2 *О диференцијалним једначинама првога реда које се могу графички интегралити помоћу г. Клерићевог шестара*, Српска краљевска академија, Глас, књ, LI, Први разред, књ. 18, Београд, 1896, стр. 313—316.

[Саопштено у Академији наука 15. јуна 1896; реферат академика Љубомира Клерића]

4 К л е р и ћ, Љубомир, *Тракторигоаф и конструисање Лудолфовог броја „π“ и основице „e“ природног логаритма*. Српска краљевска академија, Глас, књ. LI, Први разред, књ. 18, Београд, 1896, стр. 245—312.

3 3 *Sur l'équation différentielle de Riccati et ses applications chimique*. Věstnik Král česke společnosti náuk, Třida math. prirodovèdecká, Praha, 1896, T. XXXIX, p. 1—25.

[Саопштено у Чешком научном друштву 20. новембра 1896.]

4 [*Abstract*]. Српска краљевска академија, Годишњак за 1897, Београд, 1899, T. XI, стр. 146.

5 $H_2 c\gamma$, Revue sémestrielle des publications mathématiques, Amsterdam, 1897, T. VI. p. 213—214.

6 *I*., Delo, Beograd, 1897, T. XIV, str. 182.

7 *Lerch*, Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Berlin, 1899, B. XXVII s. 256.

4 5 *Sur un procédé d'integration graphique des équations différentielles*. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris, 1897, T. CXXIV, № 20, p. 1081—1084.

[Saopšteno u Pariskoj akademiji nauka 17. maja 1897; prikazao prof. P. Appell]

6 I s t o. Journal de Physique, Paris, 1897, p. 476—479.

7 [*Abstract*]. Srpska kraljevska akademija, Godišnjak za 1897, Beograd, 1899, T. XI, str. 151—152.

8 Isto. Édit. O. Doin, Paris, 1911, p. 412—415.

8 K l e r i ć Ljubomir R_4.

9 X_6, Revue sémestrielle des publications mathématiques, Amsterdam, 1897, T. VI.

10 H a m b u r g e r, Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Berlin, 1900, B. XXVIII, s. 284.

11 *I*., Delo, Beograd, 1897, T. XV, str. 516.

12 Revue générale des Sciences pures et appliquées, Paris, 1898, T. VIII, 12, p 519.

13 J a c o b L., *Le Calcul mécanique*, Encyclopédie scientifique, Paris, 1911, p. 342—357.

14 D e m o l i s, E., Revue générale des Sciences pures et appliquées, Paris, 1912, T. XIII, 3. p. 119.

15 H. De M o r i h, *Les appareils d'intégration*, Paris, 1913, p. 6 et 194—197.

16 Revue générale des Sciences pures et appliquées, Paris, 1913, T. XXIV, p. 475.

5 9 *О хидрауличној интеграцији*:: Технички лист, Београд, 1898, стр. 1—16.

[Приказано 5 фебруара 1898]

6 10 *Sur l'intégration hydraulique des équations différentielles*. American Journal of Mathematics, Baltimore, 1898, Vol. XX, № 4, p. 293—300.

17 Hamburger, Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Berlin, 1902, B. XXIX, s. 264.

18 L'Enseignement mathématique, Genève, 1899, T. I, 1, p. 36.

19 W i l l e r s, A. F.: *Mathematische Instrumente*, Berlin, 1943, s. III +305.

20 И с т о. Москва, 1949, стр. 302 (превод).

7 11 *Appareil à liquide pour l'Intégration graphique de certains types d'équations, différentielles*. American Journal, of Mathematics, Baltimore, 1899, Vol. XXII, № 1, 1, p. 1—12.

21 H a m b u r g e r, Jahrbuch über die Fortischritte der Mathematik, Berlin, 1904, B. XXXI, s. 348.

22 B r i x, Isto, str. 349.

23 P r i c e, A. W.: *Petrovitch Apparates for integrating Differential Equations of the First Order*, Philosophical Magazine, 49 (1900), p. 487—490.

24 W i l l e r s, A. F., R_{19}.

25 I s t o. R_{20}.

26 K a m k e: Berlin, 1942, s. 148.

8 12 *Intégration graphique de certains types d'équations différentielles de premier ordre*, Bulletin de la Société mathématique de France, Paris, 1899, T. XXVII, p. 200—205.

27 H a m b u r g e r, Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Berlin, 1903, B. XXX, s. 294.

28 М а р к о в и ћ, Сима: *Ойшйа Riccati-ева јеgначина йрвоīа реgа*. Београд, 1914, стр. 88 (докторска теза).

9 13 Квадратура помоћу курвиметара. Српска краљевска академија, Глас, књ. XCIII, Први разред, књ. 39, Београд, 1921, стр. 50—61.

[Саопштено у Академији природних наука 25. новембра 1913.]

29 V a r i č a k, Vladimir, Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Berlin, 1924, B. 48, s. 258.

10 14 Хемија и математика. *Сйоменица йеgесейоīоgишњице йрофесорскоī раgа Симе М. Лозанића*, Београд, 1922, стр. 18—23.

15 И с т о. Д. Трифуновић: Из живота и дела Михаила Петровића. Младо поколење, Београд, 1968 (у штампи).

11 16 Intégration Mécanique. *Notice sur les travaux scientifiques de M. Michel Petrovitch* (1894—1921), Académie royale de Serbie, Éditions speciales, T. XLIII, Sciences mathématiques et naturelles, 1, 10, Paris, 1922, p. 107—110.

30 В у ј и ћ, Владимир, Српски књижевни гласник, Београд, 1922, T. VI (н. сер), 5, стр. 399—400.

31 L'Enseignement mathématique, Genève, 1933, T. XXIII, p. 241.

О рачунским машинама Михаила Петровића писали су још:

32 М и т р и н о в и ћ, Драгослав, *Белешка о gелайносйи Михаила Пейровића у обласйи обичних gиференцијалних јеgначина*. Весник Друштва математичара и физичара НР Србије, Београд, 1955, Т. VII, 1—2, стр. 125—127.

33 С т и п а н и ћ, Ернест, *Феноменолоīија Михаила Пейровића*, Дијалектика, Београд, 1966, Т.I, 2, стр. 117—129.

34 Т р и ф у н о в и ћ, Драган, Предговор за књигу Михаила Петровића *Мейафоре и алеīорије*. Српска књижевна задруга, Београд, 1967, Коло LX, књ. 405, стр. 196.

35 С т о ј а к о в и ћ, Мирко, *Научни йосйуйак Михаила Пейровића*, Споменица Михаила Петровића (Стогодишњица рођења), Београд, 1968 (у штампи).

UNE ANTICIPATION DES HYDROINTEGRATEURS CONTEMPORAINS

Dragan Trifunović

Résumé

Le but de cette Note est de montrer la priorité de Michel Petrović (1868—1943) dans la méthodologie des hydrointégrateurs contemporains pour la solution des équations différentielles ordinaires et de celles aux dérivées partielles. Le but de l'auteur c'est de présenter l'hydrointégrateurs de M. Petrović de l'an 1897 comme une calculatrice analogue comme un prédécesseur des hydrointégrateurs contemporains dans le sens du modelage mathématique (A_{ik}) et des unités analogues techniques.

La comparaison a été effectuée avec le hydrointégrateur de Luk'janov de l'an 1937, [13] et [14].

Petar M. Vasić

SUR UNE INÉGALITÉ DE M. PETROVIĆ

O. Introduction

M. Petrović (voir [1]) a démontré l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leqslant f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + (n-1) f(0), \tag{0.1}$$

où f est une fonction convexe dans $I=[0, a)$ et $x_i \in [0, a)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, $\sum_{i=1}^{n} x_i \in [0, a)$.

A l'occasion de la démonstration des certains nouveaux résultats dans cet article, nous aurons besoin d'une inégalité plus générale que (0.1), à savoir de l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \leqslant f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) - \left(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i\right) f(0), \tag{0.2}$$

où f est une fonction convexe dans $I=[0, a)$, $x_i \in [0, a)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \in [0, a)$ et $p_i \geqslant 1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Observons que T. Popoviciu dans sons livre excellent: *Les fonctions convexes* (voir: [2]), écrit qu'on peut appliquer la théorie générale exposée dans ce livre, pour examiner l'inégalité (0.2), avec $p_i \geqslant 0$ au lieu de $p_i \geqslant 1$. Étant donné que (0.2) n'est pas valable pour chaque $x_i \in I$ dans le cas où $p_i \geqslant 0$, nous donnerons ici une démonstration de l'inégalité (0.2). Cette démonstration est indépendante des résultats exposés dans [2].

Démonstration de l'inégalité (0.2.) Étant donné que f est une fonction convexe dans $I=[0, a)$, on a l'inégalité

$$f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right) \leqslant \frac{pf(x)+qf(y)}{p+q} \quad (x, y \in [0, a);\ p, q \geqslant 0). \tag{0.3}$$

Si l'on fait, dans cette dernière formule,

$$x = p_1 x_1 + p_2 x_2; \quad y = 0, \quad p = 1, \quad q = p_1 - 1 + p_2 \frac{x_2}{x_1},$$

où $x_1, x_2 \in [0, a)$; $p_1 x_1 + p_2 x_2 < a$; $p_1, p_2 \geqslant 1$, il vient

$$(0.4) \qquad f(x_1) \leqslant \frac{x_1}{p_1 x_1 + p_2 x_2} f(p_1 x_1 + p_2 x_2) + \frac{p_1 x_1 - x_1 + p_2 x_2}{p_1 x_1 + p_2 x_2} f(0).$$

En faisant la substitution $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & x_1 & x_2 \\ p_2 & p_1 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}$, de (0.4) on trouve

$$(0.5) \qquad f(x_2) \leqslant \frac{x_2}{p_1 x_1 + p_2 x_2} f(p_1 x_1 + p_2 x_2) + \frac{p_2 x_2 - x_2 + p_1 x_1}{p_1 x_1 + p_2 x_2} f(0).$$

En multipliant l'inégalité (0.4) par p_1 et l'inégalité (0.5) par p_2 et en additionant les inégalités obtenues de la manière indiquée, on obtient

$$(0.6) \qquad p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) \leqslant f(p_1 x_1 + p_2 x_2) - (1 - p_1 - p_2) f(0).$$

Donc, l'inégalité (0.2) est démontrée pour $n = 2$.

Supposons que, pour n fixé, l'inégalité (0.2) est vraie. Alors, d'après (0.6), on a

$$(0.7) \qquad f\left(\sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i + p_{n+1} x_{n+1}\right)$$

$$\leqslant f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) + p_{n+1} f(x_{n+1}) - p_{n+1} f(0).$$

L'inégalité

$$(0.8) \qquad f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i\right) f(0),$$

par hypothèse inductive, est vraie. An additionant les inégalités (0.7) et (0.8), on trouve

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n+1} p_i f(x_i) + \left(1 - \sum_{i=1}^{n+1} p_i\right) f(0).$$

Donc, l'inégalité (0.2) est vraie pour $n+1$, s'il en est ainsi pour n.

1. Généralisation de l'inégalité de S. Gatti

Si $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sont des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^{n} c_i = 0$, on a l'inégalité

$$(1.1) \qquad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} |c_i|^s \leqslant \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} |c_i|\right)^s \quad (s \geqslant 1).$$

Cette inégalité, qui a apparue dans certaines questions de statistique, a été démontré par S. Gatti pour $n = 2$ (voir [3]) et pour n arbitraire par Z. W. Birnbaum (voir [4]; voir aussi l'article [5] de M. De Novelis).

Une généralisation de l'inégalité (1.1) a été donnée par A. W. Marshall, I. Olkin, F. Proschan (voir [6], pp. 177—190).

Nous prouverons ici une autre généralisation de l'inégalité (1.1), à savoír:

Théorème 1. *Soient* $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ *et* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *des suites de nombres réels tels que* $p_i \geqslant 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *et*

$$(1.2) \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 0.$$

Si f est une fonction convexe dans $I=[0,a)$, l'inégalité suivante est valable:

$$(1.3)\qquad \sum_{i=1}^{n} p_i f(|x_i|) \leqslant 2f\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i |x_i|\right) - \left(2-\sum_{i=1}^{n} p_i\right) f(0).$$

Démonstration. Nous pouvons supposer que $x_i \neq 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, car dans le cas où r des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ seraient égaux à 0, on a encore l'inégalité (1.3) avec r au lieu de n.

Sans diminuer la généralité, nous pouvons aussi supposer que

$$(1.4)\qquad x_1, x_2, \ldots, x_k > 0, \quad x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n < 0.$$

Alors, d'après (0.2), nous avons les inégalités

$$\sum_{i=1}^{k} p_i f(x_i) \leqslant f\left(\sum_{i=1}^{k} p_i x_i\right) - \left(1-\sum_{i=1}^{k} p_i\right) f(0),$$

$$\sum_{i=k+1}^{n} p_i f(-x_i) \leqslant f\left(\sum_{i=k+1}^{n} -p_i x_i\right) - \left(1-\sum_{i=k+1}^{n} p_i\right) f(0),$$

où bien, d'après (1.2), les inégalités

$$(1.5)\qquad \sum_{i=1}^{k} p_i f(x_i) \leqslant f\left(\frac{\sum_{i=1}^{k} p_i x_i - \sum_{i=k+1}^{n} p_i x_i}{2}\right) - \left(1-\sum_{i=1}^{k} p_i\right) f(0),$$

$$(1.6)\qquad \sum_{i=k+1}^{n} p_i f(-x_i) \leqslant f\left(\frac{\sum_{i=1}^{k} p_i x_i - \sum_{i=k+1}^{n} p_i x_i}{2}\right) - \left(1-\sum_{i=k+1}^{n} p_i\right) f(0).$$

An additionant (1.5) et (1.6), d'après (1.4), on parvient à l'inégalité (1.3).

Par conséquent, nous avons démontré l'inégalité (1.3).

Si l'on pose

$$f(x)=x^s \ (s>1), \quad p_i=1 \ (i=1,2,\ldots,n),$$

les conditions du théorème 1 sont remplies. Dans ce cas, de (1.3) on obtient l'inégalité (1.1).

2. Généralisation de certaines inégalités de D. Marković

Soit f une fonction représentée par la série

$$(2.1)\qquad \sum_{i=1}^{+\infty} a_i x^i$$

dont le rayon de convergence est a. D. Marković a démontré deux théorèmes suivants:

Théorème 2. *Si $k \geqslant 1$ et*

$$a_1=a_2=\cdots=a_{k-1}=0; \quad a_k \neq 0; \quad a_{k+i} \geqslant 0 \quad (i=1,2,\ldots),$$

l'inégalité

$$(2.2)\qquad f\left(\sqrt[k]{\frac{x_1^k+\cdots+x_n^k}{n}}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$$
$$\leqslant\frac{f(\sqrt[k]{x_1^k+\cdots+x_n^k})+a_0(n-1)}{n}$$

est valable, où

$$x_i\in[0,a)\,(i=1,2,\ldots,n),\quad \sqrt[k]{x_1^k+\cdots+x_n^k}\in[0,a).$$

Théorème 3. *Si*

$$a_i\,(i=0,1,\ldots,k-1)\ \textit{est arbitraire},\ a_k\neq0,\ a_{k+i}\geqslant0\,(i=1,2,\ldots),$$

alors on a

$$(2.3)\qquad f\left(\sqrt[k]{\frac{x_1^k+\cdots+x_n^k}{n}}\right)+\sum_{i=1}^{k+1}a_i\,(M_i^i-M_k^i)$$
$$\leqslant\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$$
$$\leqslant\frac{f(\sqrt[k]{x_1^k+\cdots+x_n^k})+a_0(n-1)+\sum_{i=1}^{k+1}a_i\,(s_i^i-s_k^k)}{n}$$

où

$$s_i=\sqrt[i]{x_1^i+\cdots+x_n^i},\quad M_i=\sqrt[i]{\frac{x_1^i+\cdots+x_n^i}{n}}$$

et

$$x_i\in[0,a)\,(i=1,2,\ldots),\ \sqrt[k]{x_1^k+\cdots+x_n^k}\in[0,a).$$

Tout d'abord nous démontrerons un théorème qui représente une généralisation du théroème 2:

Théorème 4. *Si f admet une dérivée de l'ordre $k+1$ dans $I=[0,a)$ et si f est une fonction convexe d'ordre k dans $[0,a)$ (pour la définition de la fonction convexe d'ordre k, voir [2]) et*

$$(2.4)\qquad f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(k-1)}(0)=0,$$

alors on a les inégalités

$$(2.5)\qquad f\left(\sqrt[k]{\frac{x_1^k+\cdots+x_n^k}{n}}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$$
$$\leqslant\frac{f(\sqrt[k]{x_1^k+\cdots+x_n^k})+(n-1)f(0)}{n}$$

avec $x_i\in[0,a)\quad(i=1,2,\ldots,n);\quad \sqrt[k]{x_1^k+\cdots+x_n^k}\in[0,a).$

Démonstration. Supposons, en premier lieu, que $f(0)=0$. Étant donné que f est une fonction convexe d'ordre k et que $f^{(k+1)}$ existe, on a

$$tf^{(k+1)}(t)\geqslant0\quad(t\in[0,a))$$

En intégrant la dernière relation $k-1$ fois dans $[0, t]$, on arrive à l'inégalité suivante:

$$tf''(t)-(k-1)f'(t)\geqslant 0 \quad (0\leqslant t\leqslant a). \tag{2.6}$$

Si l'on fait la substitution $t=x^{1/k}$ $(0\leqslant x\leqslant a^k)$, on trouve

$$\frac{df(t)}{dt}=n\frac{df(x^{1/k})}{dx}x^{1-1/n},$$

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2}=k^2x^{2-2/k}\frac{d^2f(x^{1/k})}{dx^2}+k(k-1)x^{1-2/k}\frac{df(x^{1/k})}{dx}.$$

D'après cela, si l'on fait $g(x)=f(x^{1/k})$, de (2.6) on obtient

$$g''(x)\geqslant 0 \quad (x\in[0, a^k)),$$

ce qui signifie que g est une fonction convexe sur $[0, a^k)$ et par conséquent l'inégalité suivante est valable:

$$g\left(\frac{x_1^k+\cdots+x_n^k}{n}\right)\leqslant\frac{g(x_1^k)+\cdots+g(x^k)}{n}\leqslant\frac{g(x_1^k+\cdots+x_n^k)}{n}$$

avec $x_i^k\in[0, a^k)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$; $x_1^k+\cdots+x_n^k\in[0, a^k)$.

De là, d'après la substitution $g(x^k)=f(x)$, on obtient l'inégalité (2.5) avec $f(0)$. A partir de la fonction h définie par

$$h(x)=f(x) \text{ (avec } f(0)\neq 0) \ (\Rightarrow h(0)=0).$$

on obtient linégalité (2.5).

Le théorème suivant est une généralisation du théorème 3:

Théorème 5. *Si f admet une dérivée de l'ordre $k+1$ dans $I=[0, a)$, si f est une fonction convexe d'ordre k dans $[0, a)$ et si $f(0)$, $f'(0), \ldots, f^{(k-1)}(0)$ sont arbitraires, on a les inégalités*

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt[k]{\frac{x_1^k+\cdots+x_n^k}{n}}\right)+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}(M_i^i-M_k^i) &\leqslant\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}\\ &\leqslant\frac{f(\sqrt[k]{x_1^k+\cdots+x_n^k})+(n-1)f(0)+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}(s_i^i-s_k^i)}{n}\end{aligned} \tag{2.7}$$

où

$$s_i=\sqrt[i]{x_1^i+\cdots+x_n^i}, \quad M_i=\sqrt[i]{\frac{x_1^i+\cdots+x_n^i}{n}}$$

et $x_i\in[0, a)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, $s_k\in[0, a)$.

Démonstration. Ce théorème est une conséquence du théorème 4. En effet, pour la fonction h, définie par

$$h(x)=f(x)-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i$$

les conditions du théorème 4 sont remplies. En appliquant les inégalités (2.5) à la fonction h, on obtient les inégalités (2.7).

Si au lieu des inégalités

$$g\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{g(x_1)+\cdots+g(x_n)}{n}\leqslant\frac{g(x_1+\cdots+x_n)+(n-1)\,g(0)}{n}$$

on applique l'inégalité

$$g\left(\frac{p_1 x_1+\cdots+p_n x_n}{p_1+\cdots+p_n}\right)\leqslant\frac{p_1 g(x_1)+\cdots+p_n g(x_n)}{p_1+\cdots+p_n}$$

et l'inégalité (0.2), on obtient les théorèmes plus générals que les théorèmes 4 et 5, à savoir

Théorème 6. *Si f satisfait aux conditions du théorème 4, on a les inégalités*

$$f\left(\sqrt[k]{\frac{p_1 x_1^k+\cdots+p_n x_n^k}{p_1+\cdots+p_n}}\right)\leqslant\frac{p_1 f(x_1)+\cdots+p_n f(x_n)}{p_1+\cdots+p_n} \tag{2.8}$$

$$\leqslant\frac{f(\sqrt[k]{p_1 x_1^k+\cdots+p_n x_n^k})+(p_1+\cdots+p_n-1)f(0)}{p_1+\cdots+p_n}$$

avec $p_i\geqslant 1$ $(i=1,2,\ldots,n)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i^k\in[0,a)$.

Théorème 7. *Si f satisfait aux conditions du théorème 5, on a les inégalités*

$$f\left(\sqrt[k]{\frac{p_1 x_1^k+\cdots+p_n x_n^k}{p_1+\cdots+p_n}}\right)+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}(M_i^i-M_k^i) \tag{2.9}$$

$$\leqslant\frac{p_1(x_1)+\cdots+p_n f(x_n)}{p_1+\cdots+p_n}$$

$$\leqslant\frac{f(\sqrt[k]{p_1 x_1^k+\cdots+p_n x_n^k})+\left(\sum\limits_{i=1}^{n}p_i-1\right)f(0)+\sum\limits_{i=1}^{k-1}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}(s_i^i-s_k^i)}{p_1+\cdots+p_n}$$

avec

$$s_i=\sqrt[i]{p_1 x_1^i+\cdots+p_n x_n^i},\quad M_i=\sqrt[i]{\frac{p_1 x_1^i+\cdots+p_n x_n^i}{p_1+\cdots+p_n}}$$

et

$$p_i\geqslant 1\ (i=1,2,\ldots,n),\quad s_k\in[0,a).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Petrovitch, *Sur une fonctionnelle*, Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, **1** (1932), 149—156.

[2] T. Popoviciu, *Les fonctions convexes*, Actualitée 992, Paris 1944.

[3] S. Gatti, *Sul massimo di un indice di anormalità*, Metron, **18** (1956), 181—188.

[4] Z. W. Birnbaum, *On an inequality due to S. Gatti*, Metron, **19** (1958), 243—244.

[5] M. De Novelis, *Some applications and developments of Gatti-Birbaum inequality*, Metron, **19** (1958), 245—247.

[6] O. Shisha (editor): *Inequalities*, New York and London, 1967.

[7] D. Marković, *Povodom jedne nejednakosti M. Petrovića*, Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS, **11** (1959), 45—53.

Живојин Ћулум
Нови Сад

Чланак Михаила Петровића: ,,ОСЕТЉИВА МЕСТА ОБИЧНИХ И ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА" посматран у светлу савремене физике

У својим прецизним, јасним и занимљивим предавањима из разних области теоријске математике, Михаило Петровић је настојао да своја излагања поткрепи и подесно изабраним примерима. Ови примери су били врло инструктивни и најчешће узети из разних области природних наука и технике. У ово сам се лично уверио 1934 и 1935 године, када сам као студент слушао бриљантна предавања Михаила Петровића из теорије аналитичких и елиптичних функција, теорије грешака и рачунања са бројним размацима. Исто ово јасно показује и чланак Михаила Петровића ,,Осетљива места обичних и диференцијалних једначина", објављен маја 1939 године у двоброју 5—6 ,,Математичког весника" Удружења студената математике на Београдском универзитету. Овај двоброј ,,Математичког весника", студенти математике на Универзитету у Београду посветили су свом професору Михаилу Петровићу поводом његове садамдесетогодишњице живота 1938 године, када је пензионисан. Том приликом студенти су изабрали Михаила Петровића за доживотног почасног председника свога удружења. И баш у овом јубиларном двоброју ,,Математичког весника" Михаило Петровић је написао наведени чланак у коме се јасно запажају акценти карактеристични за сва његова предавања.

У овом чланку Михаило Петровић најпре констатује да је ,,обична ствар" да нека обична или диференцијална једначина, која садржи неки параметар α, даје један резултат за вредност параметра $\alpha < a$, а други, битно различит од првог за $\alpha > a$, где је a неки сталан број. Ову констатацију он одмах илуструје једноставним, али подесним примерима. Обична једначина

$$x^2 + y^2 + \alpha = 0 \tag{1}$$

представља систем концентричних кругова за $\alpha < 0$, а тачку $x = 0$, $y = 0$, када је $\alpha = 0$. Решење y линеарне диференцијалне једначине другог реда

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha y = 0 \tag{2}$$

је монотона функција времена t за $\alpha < 0$, а периодична функција времена t, кад је $\alpha > 0$. Када величина y представља електрично оптерећење, онда се диференцијална једначина (2) односи на појаву електричних осцилација при пражњењу електричних кондензатора.

Михаило Петровић наставља свој чланак речима:

,,Али је мање обична ствар да једначина доводи до једног резултата за $\alpha = a$, а до другог, из основе, битно различног, *за ма коју другу вредност* α, било већу, било мању од a, па и за овој бескрајно блиску вредност $\alpha' = a \pm \varepsilon$.''

И ову констатацију он илуструје подесно изабраним примерима и и то најпре из области обичних а затим диференцијалних једначина. Задржаћемо се на примеру диференцијалне једначине

$$y'^2 + y^2 = 1 + \alpha u(x) \tag{3}$$

где $u(x)$ представља монотону функцију, а α неки параметар. За $\alpha = 0$ општи интеграл диференцијалне једначине (3) је

$$y = \sin(x + C) \tag{4}$$

где C представља интеграциону константу. У овом случају y је периодична функција $x - a$.

Да бисмо одредили особине функције y која представља решење диференцијалне једначине (3), за ма коју другу коначну вредност параметра α различиту од нуле, диференцијалимо једначину по x. Тако добијамо

$$2(y'' + y) y' = \alpha u'(x). \tag{5}$$

Пошто је функција $u(x)$ монотона, њен извод $u'(x)$ нема реалних нула. Из једначине (5) излази, да y' такође нема реалних нула, па функција y нема екстремних вредности. То значи да функција y као решење диференцијалне једначине (3), монотоно расте или опада за све вредности параметра α које су различите од нуле.

Затим Михаило Петровић пише: ,,Из таквих се примера види да се може десити ово: образац који изражава какав аналитички, механички, физички итд. факт, може имати какво своје *осетљиво место*, у које ако се само дарне, факт из основе мења свој битни карактер.''

Минималном променом параметра α *осцилаторни* ток функције y као решење диференцијалне једначине (3), нагло се мења и прелази у *монотон* ток. Са математичко — феноменолошког гледишта то значи да и најмања промена неког фактора у посматраној појави, може да доведе до велике и битне промене карактера ове појаве.

Претпоставимо да функција $\lambda(x, y) = 0$ садржи константу α чију праву вредност не знамо већ само њену приближну вредност α'. Ма колико била мала разлика $\alpha' - \alpha = \varepsilon$ приближне и праве вредности, може се десити да се узимањем вредности α' уместо α, битно измени облик криве представљене функцијом $\lambda(x, y) = 0$. На пример, за вредност α крива $\lambda(x, y) = 0$ може да има осцилаторан или периодичан карактер, а за α' монотон карактер или обрнуто.

И овде Михаило Петровић својим слушаоцима и читаоцима упућује речи: ,,Такве врсте појава дају, у исто време, и инструктиван пример несигурности закључака изведених резонујући *тачно* на једначини која би била само *приближна*, а приближна би била стога што је при њеном формирању или њеној употреби нешто што се сматрало као врло слабо и занемарљиво. фактички занемарено.''

Ова важна упозорења прихватали су студенти као савете и инструкције свога омиљеног професора и обилно користили у својој наставничкој пракси. На пример, када смо на часу физике ученицима објашњавали математичко клатно, сећали смо се последњег цитираног пасуса. Рачунајући тачно на основу једначине $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ долазили смо до нетачног закључка, да периода осциловања математичког клатна не зависи од амплитуде. Закључак важи само за мале амплитуде за које се лук који описује клатно практички поклапа са тетивом, а уз ову претпоставку је и формирана наведена једначина математичког клатна.

Многобројне су појаве класичне и савремене физике у којима долазе до пуног изражаја ове идеје Михаила Петровића које је он у свом чланку изложио сажето на приступачан и занимљив начин.

Ми ћемо овде размотрити какав значај имају и како изгледају наведене идеје Михаила Петровића у светлости савремене физике. Ово ћемо показати на примеру примене Шредингерове једначине, као једне од основних једначина квантно — таласне физике.

Општа Шредингерова једначина за кретање честице у пољу неке силе у произвољном правцу, има облик

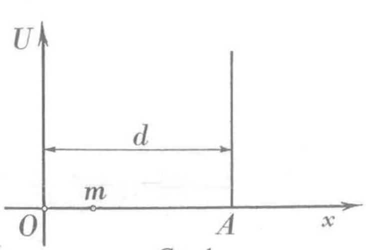
$$\Delta\Psi+\frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-U)\,\Psi=0 \tag{6}$$

где је $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ Лапласов оператор, $\Psi=\Psi_0\, e^{\frac{2\pi i}{h}(E_k t-\vec{p}\cdot\vec{r})}$ де Брољева комплексна таласна функција, m маса честице, h Планкова константа, E укупна а U потенцијална енергија, $E_k=E-U$ кинетичка енергија, $\Psi_0=ae^{\frac{2\pi i\varphi}{h}}$ комплексна амплитуда таласне функције, $\vec{p}=m\vec{v}$ вектор количине кретања честице а $\vec{r}$ радијус — вектор покретне честице. Функција Ψ мора да задовољава неке природне услове и то најпре да буде једнозначна и непрекидна. Сем тога она треба да буде нормирана тако, да вероватноћа сигурног догађаја буде једнака јединици. Према томе вероватноћа да се честица мора да налази ма где у простору, биће

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi\Psi^*\,dV=1 \tag{7}$$

где је $dV=dx\,dy\,dz$ диференцијална запремина ограничена равнима x и $x+dx$, y и $y+dy$, z и $z+dz$, а Ψ^* коњуговано комплексна функција у односу на функцију Ψ. Показаћемо да решења Шредингерове једначине задовољавају ове захтеве само под одређеним условима.

Претпоставимо сада да се честица масе m, на пример, електрон, креће дуж x-осе (сл. 1) у правоуглој потенцијалној јами, односно, између два бескрајно висока потенцијална зида. У свим тачкама дна јаме $OA=d$ за $O<x<d$ потенцијална енергија честице је $U=O$, а на границама јаме за $x=O$ и $x=d$ потенцијална енергија честице бескрајно расте, дакле, $U\to\infty$.



Сл. 1

Шредингерова једначина (6) за честицу у потенцијалној јами, биће

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-U)\Psi=0 \tag{8}$$

или, за $0<x<d$, $U=0$ и $E_k=E-U=E$

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}E_k\Psi=0. \tag{9}$$

Таласна функција Ψ сада има облик $\Psi=\Psi_0\, e^{\frac{2\pi i}{h}(E_k t-px)}$.

Да би наведени услови били задовољени, неопходно је да у тачкама на зидовима јаме, тј. за $x=0$ и $x=d$, функција $\Psi(x)$ буде једнака нули. Ово можемо доказати ако ставимо $\dfrac{d^2\Psi}{dx^2}=\Psi''$ и једначину (8) напишемо у облику

$$\frac{\Psi''}{\Psi}=-\frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-U). \tag{10}$$

За све вредности $0<x<d$, постоји услов $U=0$ и однос $\dfrac{\Psi''}{\Psi}$ има коначну вредност. За $x\to 0$ и $x\to d$ потенцијална енергија $U\to\infty$, па је због коначности и непрекидности функције Ψ једначина (10) могућа само ако $\Psi(x)\to 0$.

Према томе наш задатак се своди на интеграљење диференцијалне једначине (9) уз граничне услове $\Psi(0)=0$ и $\Psi(d)=0$. Задатак је истоветан са задатком о стојећим осцилацијама жице.

Већ на основу образовања диференцијалне једначине (9) закључујемо да осетљивим местима обичних диференцијалних једначина, у овом случају одговарају гранични услови. При решавању задатака методом квантне механике, односно, квантно — таласне физике, као што ћемо видети и из овог примера, од великог је значаја испитивање баш ових крајњих или граничних услова, који објашњавају решења добијена математички и дају им реалан физички смисао.

Ако ставимо $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ и узмемо у обзир де Брољеву једначину $p=\dfrac{h}{\lambda}$, добијамо

$$k^2=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2=\left(\frac{2\pi p}{h}\right)^2=\left(\frac{2\pi m v}{h}\right)^2=\left(\frac{2\pi\sqrt{2mE_k}}{h}\right)^2=\frac{8\pi^2 mE_k}{h^2}. \tag{11}$$

Диференцијална једначине (9) сада биће

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2}+k^2\Psi=0. \tag{12}$$

Опште решење или општи интеграл диференцијалне једначина (12) је

$$\Psi=ae^{ikh}+be^{-ikh} \tag{13}$$

где су a и b интеграционе константе.

За граничне услове решење (13) биће $\Psi(0)=a+b=0$ и $\Psi(d)=ae^{ikd}+$ $+be^{-ikd}=0$, одакле је

$$2\,i\,a\sin kd=0. \tag{14}$$

Из једначине (14) према граничним условима, излази

$$kd=n\pi$$

за $n=1,2,3,\ldots$ Према смени (11) и последњој једначини, биће

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{n\pi}{d} \tag{15}$$

одакле

$$\lambda=\frac{2d}{n}. \tag{16}$$

Физички смисао једначине (16) је у томе, да је кретање честице у потенцијалној јами условљено тиме, што таласне дужине де Брољевих таласа треба да имају вредности

$$2d,\ d,\ \frac{2}{3}d,\ \frac{1}{2}d,\ \frac{2}{5}d,\ldots \tag{17}$$

То значи да n представља број чворних тачака таласне функције.

Према граничним условима и једначини (15), таласна функција (13) биће $\Psi=ae^{ikx}-ae^{-ikx}$ или

$$\Psi=2\,ia\sin\frac{n\pi}{d}x. \tag{18}$$

Пошто је коњуговано комплексна функција $\Psi^*=-2\,ia\sin\frac{n\pi}{d}x$, израз $\Psi_0\Psi_0^*=\Psi\Psi^*$, који одређује веротатноћу да се честица налази на x-оси у интервалу x и $(x+1)$, има вредност

$$\Psi\Psi^*=4\,a^2\sin^2\frac{n\pi}{d}x. \tag{19}$$

Из једначина (11) и (15) излази

$$E_k=\frac{h^2}{8\,md^2}n^2 \tag{20}$$

за $n=1,2,3,\ldots$ За $n=1$ према (20), биће

$$E_{k1}=\frac{h^2}{8\,md^2}. \tag{21}$$

На тај начин из једначине (20) за $n=1,2,3,\ldots$ добијамо низ

$$1^2E_{k1},\quad 2^2E_{k1},\quad 3^2E_{k1},\ldots,n^2E_{k1}. \tag{22}$$

Као што видимо, само при *одређеним дискретним* вредностима енергије, која у једначини фигурише као параметар, решења Шредингерове једначине задовољавају постављене захтеве. На основу низа (22) закључујемо да број n, добијен као резултат граничних услова постављених у општој Шредингеровој једначини, представља у ствари квантни број, који одређује дискретни низ величина кинетичке енергије честица у потенцијалној јами. На тај начин квантна природа енергије атома која излази из Борових постулата постављених 1913 године и Де Брољеве идеје о таласима материје коју је он исказао 1924 године, излази непосредно из постављених граничних услова. И као што у осетљивим местима обичне и диференцијалне једначине одговарајућа појава наједном мења свој карактер и, на пример, из монотоног прелази у осцилаторни ток или обрнуто, тако за граничне услове из Шредингерове једначине уместо континуалне, као резултат добијамо дискретну појаву карактеристичну за квантно — таласну физику.

Већ овај прост пример јасно указује на значај идеја Михаила Петровића и у савременој физици. Ово показују и примене Шредингерове једначине на решавање других проблема квантно-таласне физике, као што су честица у тродимензионалној потенцијалној јами, одбијање и пролажење честице кроз потенцијалне баријере („тунелски ефект"), линеарни хармонијски осцилатор, спрегнути осцилатори, ротатор итд. Гранични услови су значајни такође и за проучавање проблема плазме. Уопште, при решавању разних проблема класичне и савремене физике, врло често се сусрећемо са чињеницама изнесеним у наведеном чланку Михаила Петровића и на његовим предавањима и тада пред нама искрсне насмејан лик нашег професора, великог научника и изврсног педагога.

СТАТЬЯ МИХАИЛА ПЕТРОВИЧА „ЧУВСТВИТЕЛЬНЫЕ МЕСТА ОБИКНОВЕННЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УҒАВНЕНИЙ" РАССМОТРИВАНАЯ В ТОЧКЕ ЗРЕНИЯ СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКИ

Ж. Чулум

Р е з ю м е

В статье „чувствительные места обыкновенных и дифференциальных уравнений", опубликованной в мае 1939 года в 5—6 „Математического вестника" Общества студентов математики Белградского университета, Михайло Петрович объясняет на удачно подобранных примерах внезапные и существенные изменения хода некоей функции, содержащей определенный параметр для двух бесконечно близких величин этого параметра. При минимальном изменении параметра, фигурирующего в функции, представляющей решение заданного дифференциального уравнения, осцилляторнй ход функции может, например, внезапно перейти в монотонный ход. Объясняя это с математико-феноменологической точки зрения, Михайло Петрович констатирует, что даже малейшее изменение какого-нибудь фактора в наблюдаемом явлении может привести к значительным и существенным изменениям этого явления.

Автор этой статьи ставит своей целью на примерах из современной физики осветить факты, изложенные в вышеуказанной работе Михайла Петровича, которые имеют большое значение и для физики. Дискретные величины кинетической энергии в качестве параметров волновой функции Де Бройля в уравнении Шредингера, непосредственно выходят из смежных условий волновой функции. При минимальных изменениях волновой функции для смежных условий, континуальное решение уравнения Шредингера внезапно и существенно изменяет свой характер и становится дискретным.

Внезапное и существенное изменение характера решения уравнения Шредингера для смежных условий напоминает нам примеры, представленные в упомянутой статье Михайла Петровича.

Žarko Dadić | STJEPAN GRADIĆ O PROBLEMIMA GIBANJA

1. Uvod

Ličnost Stjepana Gradića vrlo je složena i po svojoj mnogostranosti i po svojoj važnosti [1]). Ogromna širina njegovih interesa od pjesništva i diplomacije, do filozofije i prirodnih znanosti stavlja ga u sferu istraživanja gotovo svih kulturnih povjesničara. Međutim, uza sve to, do danas nemamo jedne iscrpne monografije o njegovom radu na svim tim područjima, a pogotovo ne na području matematike, fizike i astronomije. Ovaj rad ima zato za cilj da barem djelomično ispuni tu prazninu u području mehanike.

Vjerojatno je najstarije Gradićevo djelo *Peripateticae philosophiae pronunciata disputationibus proposita* [3] koje nema označenu godinu ni mjesto izdanja, ali se može pretpostaviti prema njegovom sadržaju da je pisano za vrijeme Gradićeva školovanja u Rimu. Körbler [15] pretpostavlja da je rasprava nastala u doba Gradićeva boravljenja u isusovačkom zavodu god. 1634. nakon što je završio filozofiju. Ta je pretpostavka vrlo vjerojatna, dapače bi se moglo pretpostaviti da je djelo i nastalo kao školski rad, najvjerojatnije u svrhu izlaganja na završnim akademijama, što je u Gradićevo doba bio običaj. Zbog toga je sasvim razumljivo da je Gradićevo izlaganje u tom djelu u skladu s Aristotelovom filozofijom, koja je bila temelj nastave zavoda. Prema tome se ne može smatrati ovaj rad mjerodavnim za procjenjivanje Gradićevih vlastitih stavova u pojedinim pitanjima fizike kao ni mehanike nego tek odrazom školskog sustava zavoda koji je on pohađao. U okviru filozofskih izlaganja Gradić izlaže i peripatetičku fiziku i astronomiju [3] (str. 10—32) i to uobičajenim redoslijedom kojim su se izlagala Aristotelova djela o prirodi [(2)]. U svim tim razmatranjima izlaže Gradić dakle Aristotelova shvaćanja.

Da je Gradić ostao na tim pozicijama, njegova uloga u povijesti mehanike sigurno ne bi bila od gotovo nikakve važnosti. Jer ne samo da Gradić u tom djelu nije u pogledu mehanike iznio svojih originalnih rješenja, nego je dapače izlagao sustavno Aristotelovu fiziku koja je u doba Gradićeva školovanja bila već sasvim poražena Galilejevom naukom.

Koliko se Gradić zanimao mehanikom prvih dvadeset godina nakon svoga školovanja nije poznato. Ali nakon dolaska švedske kraljice Kristine u Rim, o čijem je dolasku Gradić upoznao i Dubrovački senat 19. 2. 1656. ([15] (str. 14.), i formiranja njezina znanstvena kruga, on se počeo tim pitanjima baviti vrlo živo. On i mnogi drugi učenjaci pristupili su krugu kraljice Kristine i pape Aleksandra VII i tu raspravljali o mnogim problemima. Između god. 1656. i 1660. nastale su najvažnije Gradićeve rasprave, što se vidi iz njegove rukopisne ostavštine koja je sakupljena u opširnom rukopisu pod naslovom *Quaedam meditationes geometricae diversis temporibus a me Stephano Gradio factae*, a koji se nalazi u Vatikanskoj knjižnici pod signaturom 6921 i ima 302 lista [2]. Taj rukopis je znatno heterogeniji nego što bi se očekivalo po njegovom naslovu koji se zapravo odnosi samo na njegov dio. On sadrži ne samo rasprave o geometriji nego i o mnogim pitanjima fizike i astronomije, kao i dio Gradićeve korespondencije o znanstvenim problemima s raznim uvaženim učenjacima toga doba, kao s Evangelistom Torricellijem, Alfonsom Giovannijem Borellijem, Michelangelom Riccijem, Onoratom Fabrijem i Vincenzom Vivianijem. Sadrži i koncept njegova djela koje je god. 1680. izašlo u Amsterdamu pod naslovom *Dissertationes physico-mathematicae quatuor* [1]. Ta djela prikazuju Gradića u sasvim drugom svjetlu od onoga u djelu o peripatetičkoj filozofiji, i pokazuju, da se Gradić razvio u potpunog galilejanca koji je sudjelovao u svim znanstvenim zbivanjima svoga doba u Rimu. Spomenuti Vatikanski rukopis [2] sadrži i mnoštvo nesređenih Gradićevih bilježaka o raznim problemima mehanike, pa se po njemu može izvrsno pratiti i Gradićev razvoj, kao i tok rješavanja pojedinih problema. Četiri objavljene rasprave [1] koje su u nekoliko varijanata sadržane u tom Vatikanskom rukopisu [2] raspravljaju o upravljanju broda kormilom, o ubrzanom gibanju, o jednom geometrijskom problemu koji dolazi u područje infinitezimalnog računa, i o stvarnom i prividnom položaju polarne zvijezde.

Predmet slijedećeg izlaganja bit će samo druga Gradićeva objavljena rasprava o problemima gibanja s naslovom *De causa naturali motus accelerati & aequalibus ejus in descensu corporum gravium ad aequalia momenta temporum incrementis* [1] (str. 22—38). Iz te Gradićeve rasprave moći će se vidjeti koliko je Gradićev rad bio u toku onih napora koji su u razdoblju od Galileja do Newtona pripremali fundamentalno Newtonovo djelo *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* god. 1687.

2. **Gradićevo djelo i bilješke o problemima gibanja**

Kao što je istaknuto, u Gradićevom Vatikanskom rukopisu [2] nalaze se i rukopisi njegova djela objavljenog u Amsterdamu [1], i to po nekoliko puta; naime svi koncepti djela kojeg je postepeno dotjeravao. Rasprava o ubrzanom gibanju nalazi se u rukopisu četiri puta u cijelosti i to na str. 134 r-137 r (I tekst), 198 r-200 v (II tekst), 202 r-205 r (III tekst), 206 r-209 v (IV tekst). Prvi od tih tekstova je definitivni tekst pripremljen za objavljivanje i od slova do slova se slaže s onim objavljenim. Najstariji tekst pisan Gradićevom rukom jest III tekst, zatim ispravljen IV tekst načinjen od prepisivača, zatim II tekst također napravljen od prepisivača, i konačno definitivni I tekst. Ovaj predzadnji tekst (II) gotovo je sasvim jednak s konačnim (I), i tek je tu i tamo napravljen poneki stilistički ispravak.

Rasprava je napisana prije kraja god. 1760, budući da primjedbe na nju daje Onorato Fabri u pismu Gradiću od 7. 1. 1761. [2] (str. 211 r-211 v). Iz kraja rasprave [1] (str. 37—38) vidi se da ju je Gradić najprije uputio Michelangelu Ricciu s molbom da napravi ispravke. Dalje se iz tog teksta vidi da je s Riccijem i prije vodio rasprave o tim pitanjima. Da je zaista najprije poslao tu raspravu na mišnjenje Ricciju vidi se po tome, što je taj tekst sadržan i u najstarijem Gradićevom rukopisu (III tekst). U konačnom I tekstu, kao i u objavljenom, spominje se da je Gradić vodio rasprave o tim pitanjima i s Onoratom Fabrijem [1] (str. 36). Međutim taj pasus nije sadržan u najstarijem Gradićevom rukopisu (III tekst), niti u onom koji je napravljen prema njemu (IV tekst). Tek je naknadno sa strane u tom IV tekstu dodana bilješka o tome na dotičnom mjestu [2] (str. 209 r). Na Fabrijeve primjedbe iznesene u pismu od 7. 1. 1661. [2] (str. 211 r-211 v) odgovorio je Gradić, pa je njegovo pismo sačuvano u konceptu (3). Riccijeve primjedbe nisu sačuvane, ako ih je uopće bilo.

Treba pak istaknuti važnu činjenicu da Gradić usprkos primjedbama koje je dobio nije napravio nikakvih bitnih izmjena u svom najstarijem tekstu (III tekst) koji je vjerojatno i uputio Ricciu i Fabriju da dadu svoje mišljenje. Njegovi pogledi izneseni u tom tekstu ostali su i u definitivnom I tekstu, odnosno u objavljenom, pa se može smatrati da Gradić nije prihvatio Fabrijeve sumnje o nekim pitanjima. Gradić doduše u objavljenom tekstu spominje da je s Fabrijem diskutirao i prihvatio neke njegove stavove [1] (str. 36), ali to je, kao što je već spomenuto, naknadno dodano, bez mijenjanja temeljnog Gradićevog teksta, a to je u ovom slučaju najvažnije. Gradićeve izmjene u tekstu odnose se dakle uglavnom samo na stilistička dotjerivanja, ili najviše podrobnija i jasnija tumačenja, a nikako takve koje bi mijenjale smisao Gradićevih izlaganja. U spomenutim rukopisnim tekstovima Gradić je samo jednom umetnuo jednu stranicu teksta (4), ali ju je opet u konačnom tekstu ispustio.

3. **Gradićevi pogledi o gibanju**

Glavni cilj Gradićeve rasprave o gibanju jest egzaktno određivanje zakona slobodnog pada i to jednim graničnim procesom. Ali kod izvođenja tog zakona njemu je bilo potrebno imati nekoliko pretpostavaka koje ću stoga najprije potanko izložiti.

3.1. **Princip ustrajnosti**

Ovaj princip koji je u istraživanju gibanja izvanredno važan formulirao je ispravno tek Newton u svom djelu *Philosophiae naturalis principia mathematica* god. 1687. Ali napori prethodnih stoljeća nisu bili mali, pa njegove korijene nalazimo već u Srednjem vijeku kad dolazi do nekih sumnji u ispravnost Aristotelovih stavova, po kojima bi za svako gibanje, pa i za jednoliko bila potrebna sila koja ga održava u tom gibanju. Već je Ibn Sina (Avicena) početkom 11. stoljeća smatrao da se projicirano gibanje nastavlja kao rezultat neke inklinacije koja je prenesena od pokretača na tijelo [11] (str. 510—514), a Buridan je slično tvrdio i u svojoj poznatoj impetus teoriji u 14. stoljeću [8] (str. 521—525, 538—540). Znatni korak dalje učinio je Galilei, premda ni on nije uspio formulirati taj princip u sasvim općenitom obliku, kao što pokazuje Cohen [12] i [13]. Galilei dotiče taj problem jedino u vezi s projiciranim gibanjem [5], gdje dolazi do tvrdnje da bi tijelo nastavilo svoje gibanje stalno, ako ne bi bilo trenja, ali iz cjeline njegova izlaganja se vidi da on to još nije uzimao u sasvim općenitom smislu [12] (str. 109—126). E. Torricelli [6] posebno obrađuje probleme u vezi s projiciranim gibanjem i svoja razmatranja nastavlja na Galilejeva, ali ne ulazi u preciznije formuliranje ovog principa.

Gradić, čiji rad pada u razdoblje iza Galileja i Torricellija, a prije Newtona, ne posvećuje tim problemima opširnije diskusije. U terminološkom pogledu on upotrebljava termine *virtus impressa*, *inklinacija i impetus*, ne praveći među njima razlike u značenju, ali su iste termine upotrebljavali također Galilei [5] i Torricelli [6]. Djelomično Gradić prihvaća stav Buridana i Ibn Sine, naime da u početku gibanja tijelo prima neku inklinaciju ili impetus koji ostaju sačuvani u tijelu (5). Nadalje Gradić kaže, da započetim gibanjem tijelo dobiva neku sklonost za gibanje (6). Međutim unatoč toga Gradić ne ulazi u diskusiju o prirodi inklinacije ili impetusa, i naglašava da je za ispitivanje ubrzanog gibanja zapravo važno samo to, da jednom pokrenuta stvar nastavlja svoje gibanje (7). Sigurno je pak najvažnije u Gradićevom izlaganju što on smatra da su prirodna tijela općenito govoreći indiferentna prema lokalnom gibanju (8) ili prema mirovanju koje mu je protivno, i da se tijelo koje miruje ne pomiče, a da ona tijela koja se gibaju nastavljaju svoje gibanje stalno ukoliko nema ništa što bi ih zaustavljalo (9). Gradić dakle uzima da je ta sklonost općenita ne vezujući tu indiferentnost, kako je on naziva, ni za kakve posebne slučajeve. Naravno, da u toj Gradićevoj formulaciji treba još dosta dodati, da bi se došlo do Newtonove formulacije principa inercije, ali ona ipak sigurno sadrži neke elemente koji su bitni za tu formulaciju. Onorato Fabri s kojim je Gradić diskutirao o tim problemima smatrao je ovaj princip prilično nejasnim i prigovorio Gradiću da nije jasno po čemu bi tijela bila indiferentna prema mirovanju ili gibanju [2] (str. 211 r-211 v.) U Gradićevom odgovoru vidimo još jasnije njegov stav u tom pitanju. Naime Gradić smatra, da iskustvo pokazuje da tijelo koje miruje samo od sebe ne započinje gibanje, a tijelo koje se giba da ga održava (10). Ali, napominje Gradić, to se općenito uzima i kod drugih autora [2] (str. 213 r-214 r). Bez obzira koliko je Gradić ostao udaljen od ispravne formulacije ovog principa, on je bez sumnje uočio, da će započeto gibanje biti održano, i da mu je ta činjenica od izuzetne važnosti u izvođenju zakona ubrzanog gibanja, što će se u daljnjem izlaganju bolje vidjeti.

3.2. **Uzrok slobodnog pada**

Uzrok slobodnog pada bio je predmet brojnih diskusija. Već ga je Aristotel tražio i nalazio u težnji približavanja prirodnom mjestu tijela. I u Srednjem vijeku iznijete su razne teorije koje Galilei [5] (str. 333.) spominje, ali ne ulazi u ispitivanje filozofskog pojma tog uzroka. Gradić u skladu s Galilejem odmah na početku svog izlaganja utvrđuje [1] (str. 22—23) da nije moguće dati zadovoljavajuće objašnjenje toga uzroka, ali da se može utvrditi da on stvara jednake priraste brzine. Ostavit će dakle on, kao i Galilei, sve te teškoće i ispitivati samo svojstva jednoliko ubrzanog gibanja što je zapravo bilo najvažnije. Gradić zaključuje da neće konačno biti ni važna priroda uzroka jer su efekti uvijek isti, ma kakav napokon bio taj uzrok. Uvijek će se raditi o jednolikim prirastima brzine što je za njegova razmatranja bitno [1] (str. 26)

Međutim to se odnosi samo na filozofsko određenje uzroka slobodnog pada. Da je uzrok u težini (gravitas) tijela, ne sumnja ni Galilei [5] str. 331—332), a ni Gradić [1] (str. 29—30). Već je J. Buridan uzimao da je težina tijela uzrok slobodnog pada. Smatrao je također da taj uzrok — težina djeluje za vrijeme slobodnog pada neprekidno i stalno, a da je povećanje brzine proizvedeno zbog toga što težina tijela unosi sve više i više impetusa u tijelo. Neprekidni porast impetusa proizvodi neprekidni porast brzine [8] (str. 535—536), [9] (str. 560—561). Koliko je nejasnoća bilo još i u Gradićevo doba u odnosu na taj uzrok vidi se iz Torricellijeva stava u njegovim *Lezioni accademiche*. On zamišlja da kad bi težina bila uvijek jednaka i nepromijenljiva da bi i brzina gibanja trebala biti uvijek jednaka i ista, a kako se brzina stalno povećava trebalo bi dopustiti da se povećava također i uzrok [7] (str. 21). Ovakav Torricellijev stav ne bi nikako mogao dovesti do pravilnog objašnjenja jednakih prirasta brzine. Gradić, čiji je stav bio bliži Buridanovom, govori naprotiv o uvijek istom uzroku [1] (str. 36), koji bi stalno proizvodio jednako povećanje impetusa u tijelu koje pada. Međutim, premda Galilei i Gradić povezuju slobodni pad s težinom tijela oni ne mogu strogo odrediti odnos te težine i akceleracije budući da im nije bilo jasan pojam mase tijela.

Ipak za daljnje izlaganje Gradiću će biti potrebno uvesti još neke pretpostavke o tom uzroku, odnosno fiksirati neka njegova svojstva. On pretpostavlja da taj uzrok ma kakav bio djeluje trenutačno i da posve jednako djeluje ako tijelo miruje ili ako se giba. Ničim nije taj uzrok spriječeniji da djeluje na tijelo koje se giba, nego ako je to tijelo na miru. To je isto tako kao što putnik na brodu nije spriječeniji da se giba po njemu ako brod plovi, nego ako je usidren u luci [1] (str. 27). Napominje da je to očito i u razglabanju činjenica kojima se običava napadati pretpostavka gibanja Zemlje [1] (str. 27.) (11). Ovu Gradićevu tvrdnju o trenutačnom djelovanju uzroka smatrao je također Onorato Fabri prilično nejasnom, pa je to i iznio u pismu Gradiću 7. 1. 1661. [2] (str. 211 r). Gradić međutim u tom pogledu nije izmijenio svoje stanovište.

3.3. Sastavljanje gibanja

Sastavljanje gibanja bilo je temeljito obrađeno u djelima Galileja i Torricellija, posebno u odnosu na projicirano gibanje [5], [6]. Svi pojmovi o tom problemu bili su također kod njih potpuno raščišćeni, pa Gradiću nije preostalo ništa drugo nego da njihove rezultate u cjelosti preuzme i da se na njih pozove [1] (str. 24).

U svom izlaganju Gradić vrlo dobro razlikuje smjer (terminus) gibanja i trag (vestigium) gibanja. Razlikuje slučajeve u kojim se komponente, kako bismo ih zvali danas, podudaraju ili razlikuju u tragu odnosno smjeru, pa u tome ističe tri slučaja [1] (str. 23—26). U prvom od njih komponente nemaju jednake ni tragove ni smjerove. To je slučaj cikloide i slučaj gibanja planeta po nekim naukama koje Gradić ne spominje [1] (str. 23—24.). Takav slučaj je i parabolična krivulja kod projiciranog gibanja. Tu se sastavljaju gibanje koje je upravljeno od projektora i gibanje koje dolazi od težine tijela. U drugom slučaju komponente imaju isti trag, ali različite smjerove. To se događa u slučaju kad putnik ide prema krmi broda koji se pomiče naprijed. Taj slučaj ostvaren je i u slučaju kad je tijelo projicirano vertikalno prema gore, pa se u tom slučaju sastavljaju gibanje koje potječe od težine i gibanje koje potječe od impetusa. U trećem slučaju komponente imaju isti trag i isti smjer. To se ostvaruje u slučaju kad putnik na pokretnom brodu ide prema pramcu.

Gradiću je čitavo to izlaganje bilo potrebno da bi utvrdio kako je sastavljanje gibanja uvijek moguće i da se ono uvijek i ostvaruje ako je tijelo podvrgnuto dvjema tendencijama gibanja. Onorato Fabri u spomenutom pismu od 7. 1. 1661. [2] (str. 211 r) postavio je Gradiću i u ovom pitanju primjedbu smatrajući da nije dovoljno jasno zašto je treće gibanje uzrokovano od dva prethodna, premda on ne niječe da se to stvarno zbiva.

3.4.

Gradićevi zaključci izneseni u prethodnom izlaganju mogu se svesti na slijedeće: 1. Tijelo koje je jednom pokrenuto nastavit će svoje gibanje sa stalnom brzinom ukoliko ne bude nečim ometano. 2. Uzrok pokretanja (kod slobodnog pada težina tijela) djeluje trenutačno i jednako na tijelo bez obzira u kakvom se ono stanju nalazi, u gibanju ili mirovanju. 3. Ako je neko tijelo podvrgnuto dvjema tendencijama gibanja rezultirat će one uvijek u treće gibanje.

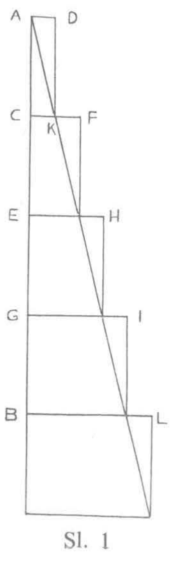
4. Jednoliko ubrzano gibanje

4.1. Gradićevo izvođenje zakona slobodnog pada

Već je Oresme u 14. stoljeću [10] (str. 347—361) došao do zaključka da je moguće put kod jednolikog ubrzanog gibanja predočiti površinom trokuta kojem su katete proteklo vrijeme i konačna brzina. Galilei je preuzeo od Oresma upotrebu ovog trokuta i obilno se s njim služio [5], pa je zbog afirmacije koju je stekao upravo Galilejevom upotrebom općenito nazivan Galilejevim trokutom. Kod dokazivanja da je površina tog trokuta jednaka pređenom putu kod ubrzanog gibanja Oresme i Galilei se služe jednom vrstom infinitezimalnih razmatranja, predstavljajući trokut kao skup crta, ali u njihovom razmatranju nije sadržan nikakav granični proces (Boyer [14], str. 114). Težnja slijedećih godina poslije Galileja bila je da se predočivanje pređenog puta kod ubrzanog gibanja s Galilejevim trokutom prikaže još strožije matematički. Gradićeva nastojanja potpuno su u toku tih napora i može se bez sumnje tvrditi da je Gradić bio među prvima koji se približio egzaktnom tumačenju ovog problema pomoću graničnog procesa. U slijedećem izlaganju bit će to još mnogo jasnije. Evo Gradićeve interpretacije.

Ako se neko tijelo ispusti da slobodno pada s neke visine, ono započinje svoje gibanje zbog djelovanja težine. Međutim, čim je jednom pokrenuto, ono ustraje u tom istom gibanju imajući određeni impetus. Pored tog gibanja, koje je u početku pokrenuto težinom, postoji još uvijek ta težina koja djeluje stalno i to potpuno jednako kao da i nema onog drugog gibanja. Oba gibanja sastavljaju se tako u treće gibanje koje ima brzinu jednaku zbroju prvih dvaju. Kako se radi o neprekinutom djelovanju istog uzroka, nužno je da se brzina stalno povećava i da su efekti uvijek jednaki. Odnos tog istog uzroka koji stalno djeluje i gibanja tijela na koje djeluje i pokreće ga, jest upravo u tim stalnim prirastima brzine, dakle drugim riječima u vidu stalne akceleracije.

Na temelju tih rasuđivanja bit će sada moguće Gradiću izvesti i tvrdnju da kod takvog gibanja, naime jednoliko ubrzanog koje ima svoje podrijetlo u jednom stalnom uzroku (težini), pređeni put predstavlja površina trokuta, kojemu je jedna kateta proteklo vrijeme, a druga kateta konačna brzina koju tijelo slobodno padajući postiže nakon tog vremena.



Sl. 1

Neka se tijelo na početku svog slobodnog pada, naime u času mirovanja nalazi u tački *A* (sl. 1.). Prikažimo grafički pravcem *AB* mjeru vremena koje će biti jednako trajanju samog gibanja. Podijelimo to vrijeme na kolikogod jednakih dijelova *AC*, *CE*, *EG*, *GB* koji su prema tome jednaki vremenski prirasti. Za prvi od ovih razmaka *AC* spusti se spomenuto tijelo jednolikom brzinom čija je mjera *AD*. Tu je brzinu pak tijelo dobilo od svoje težine i onda tom utisnutom silom ili impetusom nastavilo svoje jednoliko gibanje. Mjera puta kod takvog gibanja jest pravokutnik *CAD*. Tijelo i dalje ustraje u svom padanju istom brzinom radi impetusa, ali na tijelo istodobno djeluje i težina tijela na isti način kao da se tijelo nalazi u stanju mirovanja. Zbog toga nakon vremenskog razmaka *AC* tijelo dobiva istu brzinu od svoje težine koju je dobilo na početku gibanja, budući da nema razloga da taj iznos bude različit. Međutim kako se sada tijelo nalazi u gibanju ova brzina je zapravo prirast one već postojeće, pa se prvotna brzina udvostručuje. U slijedećem vremenskom razmaku *CE* nastavlja tijelo dvostrukom brzinom jednoliko gibanje zbog impetusa koji ima na početku tog razmaka. U ovom drugom vremenskom razmaku mjera puta bit će pravokutnik *ECF*. U slijedećem razmaku dodaje se opet isti prirast brzine zbog onog istog uzroka, pa se sada brzini *CF* dodaje brzina *AD* što daje novu brzinu *EH*. Tako se to nastavlja i u slijedećim jednakim vremenskim razmacima. Cijeli put koji prevali tijelo bit će tada jednak zbroju tih pravokutnika, a to je površina zupčastog lika *ABL*. Podjela na upravo toliki broj vremenskih razmaka bila je međutim po volji, pa se mogu uzeti i dvostruko manji razmaci. U skladu s tim uzme se i brzina dvostruko manja od *AD*. Na isti način postupa se onda i dalje, pa će novi likovi biti sve manje zupčasti. Što se budu uzimali uži razmaci vremena to će zupčasti lik biti sve bliže trokutu. Smanje li se ti razmaci najviše što je moguće, ona prva brzina postaje manja od svih mogućih i konačno se svodi na tačku u kojoj je prvi čas gibanja. Više sada nije proizveden zupčasti lik nego savršeni i apsolutni trokut, kako kaže Gradić, pa je time iznesena tvrdnja dokazana. (Gradić [1], str. 32—35).

4.2. Analitički prikaz Gradićeva izvoda

Očito je da se u Gradićevom izvodu radi o jednom graničnom postupku koji se može prikazati i analitički. Neka v bude konačna brzina koju će tijelo postići pri slobodnom padu, t proteklo vrijeme od početka do kraja gibanja, a n broj proizvoljnih vremenskih razmaka. Površina zupčastog lika, jednakog zbroju površina pravokutnika jednaka je

$$P_n = v \cdot \frac{t}{n} + \left(v - \frac{v}{n}\right) \cdot \frac{t}{n} + \left(v - \frac{2v}{n}\right) \cdot \frac{t}{n} + \dots \tag{1}$$

ili

$$P_n = \frac{vt}{n} + \frac{vt}{n} - \frac{vt}{n^2} + \frac{vt}{n} - \frac{2\,vt}{n^2} + \dots$$

što zgodnije pisano daje

$$P_n = vt - \frac{tv}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} m$$

iz čega

$$P_n = vt - \frac{tv}{n^2} \, \frac{n-1}{2} \, (1 + n - 1)$$

pa konačno za površinu zupčastog lika izlazi

$$P_n = \frac{vt}{2} + \frac{tv}{2n} \tag{2}$$

Uzme li se sada da broj intervala teži u beskonačnost, što je uzeo Gradić, dobiva se

$$P = \lim_{n \to \infty} P_n = \lim_{n \to \infty} \left\{\frac{vt}{2} + \frac{tv}{2n}\right\} \tag{3}$$

i konačno

$$P = \frac{vt}{2} \tag{4}$$

a to je površina trokuta kojemu su katete brzina na kraju gibanja i proteklo vrijeme. Kako površina predstavlja pređeni put tim je izrazom dan put kod jednoliko ubrzanog gibanja, što je i želio dokazati Gradić.

5. Gradićeva interpretacija u odnosu na Fabrijevu i njihova diskusija o problemima gibanja

Da bi se moglo ocijeniti Gradićev doprinos u tumačenju ubrzanog gibanja bez sumnje je potrebno usporediti njegov rad s Fabrijevim. Teorija Onorata Fabrija [4] (str. 66—69) u većem svom dijelu ima dapače dosta sličnosti s Gradićevom. U tumačenju ubrzanog gibanja Fabri uzima kao i Gradić najprije vrijeme podijeljeno na neki konačan broj vremenskih intervala. Potpuno na isti način kao i Gradić dolazi Fabri do zupčastog lika koji bi predočivao pređeni put. On također dozvoljava da se vremenski intervali i dalje smanjuju, čime dolazi sve bliže Galilejevom trokutu. Međutim za razliku od Galileja koji je smatrao da se prirasti puta međusobno odnose kao neparni brojevi, a što je u skladu s napredovanjem predočenim Galilejevim trokutom, Fabri drži da se ti prirasti međusobno odnose kao prirodni brojevi, što bi pak bilo u skladu s napredovanjem predočenim zupčastim likom. Da bi pokazao da se ova njegova pretpostavka za iskustvo ne razlikuje od Galilejeve, on napominje, da treba dopustiti da ovi vremenski intervali postaju sve manji, i da je tada razlika između pređenog puta po njegovoj i Galilejevoj pretpostavci sve to manja, i da ta razlika dijeljenjem vremenskih intervala na sve to manje može dapače postati manja od ma kako male zamišljene razlike. Bez sumnje da je Fabri ovdje formulirao vrlo jasno granični proces. Ali po Fabriju se ne smije dopustiti da ovaj proces nastavimo bez kraja. Mi konačno po Fabriju dolazimo do najmanjih nedjeljivih fizikalnih trenutaka koji se osjetima ne mogu osjetiti i prema tome se ne može iskustvom odlučiti između njegove i Galilejeve pretpostavke. On svojoj pretpostavci daje međutim filozofsku prednost smatrajući da ona rješava mnoge teškoće u Galilejevoj pretpostavci.

Premda se u ovoj Fabrijevoj interpretaciji ne dopušta beskonačno napredovanje u dijeljenju onih vremenskih intervala ipak je u njoj ispravno postavljen granični postupak, a i jasno uočena njegova granica.

Gradić je u svojoj interpretaciji dopuštao i taj posljednji korak jer u svojoj izvornoj raspravi (III tekst) nije nigdje spominjao nikakva ograničenja u tom postupku. On jasno kaže, da se taj proces nastavlja bez ograničenja i da se tako konačno dolazi do apsolutnog i savršenog Galilejevog trokuta [1] (str. 35). Ako uzmemo u obzir da sam Galilei nije dolazio do svog trokuta ovakvim graničnim procesom vidimo koliko je Gradić odmakao u interpretaciji tog trokuta i konačno koliko ga je on egzaktnije i matematički ispravnije dobivao od svojih prethodnika. Kao što je napomenuto, Gradić je ove svoje ideje iznosio šesdesetih godina 17. stoljeća u krugu učenjaka okupljenih oko švedske kraljice Kristine, pa je velika šteta da raspravu nije publicirao do god. 1680. Tih dvadesetak godina značilo je mnogo za ono doba u kojem se naporima mnogih učenjaka dosta brzo napredovalo prema novim matematičkim spoznajama.

Ostaje još jedno važno pitanje. Da li je Gradić došao samostalno do ovakve interpretacije ubrzanog gibanja ili ju je možda preuzeo od Fabrija, pogotovo što znamo da je on s njim bio u vezi. Ipak se može pretpostaviti da je on došao do nje samostalno. Naime, Gradić je svoju raspravu napisao prije nego je s Fabrijem raspravljao o tom problemu što se dobro vidi iz njihove sačuvane korespondencije. Ali i Fabri u svom pismu od 7. 1. 1661. jasno kaže da se raduje što je i Gradić došao samostalno do te interpretacije misleći da to i opravdava samu interpretaciju.

Međutim ipak izgleda da je Fabri donekle utjecao na Gradića u pogledu onih nedjeljivih fizikalnih trenutaka. To vidimo iz toga što Gradić naknadno umeće u svoju raspravu jedan dodatak u kojem napominje da je s Onoratom Fabrijem raspravljao o tim najmanjim fizikalnim trenucima i da je pri tome i prihvatio njegov stav. Ipak treba naglasiti da Gradić nije radi toga ništa dirao u svom prethodnom tekstu. Ovu kolebljivost ne smije se zato shvatiti u lošem smislu budući da su u to doba mnoga pitanja pravila velike teškoće, a naročito ona koja su se ticala pojma kontinuiteta. Gradićeva nastojanja treba stoga shvatiti u potpuno pozitivnom smislu.

Fabri je Gradiću bio postavio i neke druge primjedbe koje Gradić nije prihvatio u svojoj raspravi. Ne bi se moglo tvrditi da ni Fabri smatra pogrešnim one pretpostavke o kojima diskutira, a koje je Gradić prihvatio i stavio u temelj svojim izlaganjima, nego da samo želi dati i njihovo filozofsko obrazloženje. Premda su te njegove primjedbe već spomenute u prethodnom tekstu ipak ih radi preglednosti dajem ovdje u cjelini:

1. Što prisiljava prirodno tijelo da je indiferentno prema mirovanju i gibanju? 2. Tijelo koje jedamput miruje nikada se ne giba ako ga nešto ne pokrene. 3. Uzrok pokretanja od težine neposredan je. 4. Treće je gibanje sastavljeno od dva prethodna. 5. Tijelo jedamput pokrenuto prihvaća inklinaciju prema istom gibanju. [2] (str. 211 r).

Kao što se moglo vidjeti u prethodnom izlaganju Gradić se u tim tvrdnjama oslanja uglavnom na iskustvo. On se u svom djelu [1] inače ni ne upušta mnogo u diskusije o njima; njemu su važnija razmatranja koja slijede iz njih, ako se one kao činjenice prihvate. Gradić je zato dao na Fabrijeve primjedbe vrlo kratke odgovore u kojima se u biti ponavlja ono što je već iznio u svom djelu o ubrzanom gibanju [1]. On je svoj odgovor bio skicirao i taj je ostao u rukopisu ([2], str. 218 r-218 v), ali ga nije niti u tom sažetom obliku unio u pismo koje je uputio Fabriju kao odgovor ([2], str. 213 r-214 r). Gradić dakle polazi od tih pretpostavaka kao od nekih aksioma koji imaju svoju potvrdu u iskustvu.

6. **Zaključak**

Kako se iz ovog izlaganja moglo vidjeti, Gradićevi interesi u području gibanja bili su usredotočeni u prvom redu na slobodni pad, ali u vezi s tim i na neka opća pitanja gibanja, kao što je ustrajnost tijela u gibanju, uzrok slobodnog pada i sastavljanje gibanja. Gradić je, kao što je istaknuto u tome bio na galilejevskim pozicijama, a k tome je učestvovao i u odlučnim diskusijama prednjutnovskog i postgalilejevskog doba. Njegov rad u ovom području pokazuje da on nije bio učesnik nekih sporednih zbivanja u mehanici, nego upravo onih najvitalnijih za njezin napredak. Sigurno je da će daljnja istraživanja pokazati kakav je položaj Gradićeva rada u ostalim područjima, ali i samo ovaj mali odsječak njegova rada pokazuje da je Gradić bio vrlo istaknuta ličnost naše znanstvene prošlosti.

LITERATURA

[1] S. Gradić, *Dissertationes physico-mathematicae quatuor*, Amstelodami, 1680.

[2] *Quaedam meditationes Geometricae diversis temporibus a me Stephano Gradio factae* rukopis, Biblioteca Apostolica Vaticana, codex Vat. lat., 6921.

[3] S. G r a d i ć, *Peripateticae philosophiae pronunciata disputationibus proposita*

[4] H o n o r a t o F a b r i, *Dialogi Physici in quibus De motu Terrae Disputatur Marini aestus nova causa proponitur*, Lugduni, 1665.

[5] G. G a l i l e i, *Discorsi e demostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica ed ai movimenti locali*, Opere, sv. 4. Firenze, 1935.

[6] E. T o r r i c e l l i, *De motu gravium naturaliter descendentium, et proiectorum*, Opere sv. 2. Faenza 1919.

[7] E. T o r r i c e l l i, *Lezioni accademiche*, Opere sv. 2, Faenza, 1919.

[8] J. B u r i d a n, *Questions on the Eight Books of the Physics of Aristotle*, u fragmentima u djelu M. Clagett, The Science of Mechanics in the Middle Ages, Madison, 1959.

[9] J. B u r i d a n, *Questions on the Four Books on the Heavens and the World of Aristotle*, u fragmentima u djelu M. Clagett, The Science of Mechanics in the Middle Ages, Madison, 1959.

[10] N. O r e s m e, *On the Configurations of Qualities, u* fragmentima u djelu M. Clagett, The Science of Mechanics in the Middle Ages, Madison, 1959.

[11] M. C l a g e t t, *The Science of Mechanics in the Middle Ages*, Madison, 1959.

[12] B. C o h e n, *Les origines de la physique moderne*, Paris, 1960.

[13] B. C o h e n, *Newton's attribution of the first two laws of motion to Galileo*, Atti del Symposium Internazionale di Storia, Metodologia, Logica e Filosofia della Scienza ,,Galileo nella Storia e nella Filosofia della Scienza", Firenze, 1967.

[14] C. B o y e r, *The history of the calculus and its conceptual development*, New York, 1959.

[15] Đ. Körbler, *Život opata Stjepana Gradića*, Monumenta spectantia, sv. 37, Zagreb, 1915.

BILJEŠKE

(1) Rođen je u Dubrovniku god. 1613; umro je u Rimu god. 1683. U Rimu je studirao na isusovačkom Seminarium Romanum i somaskovskom Collegium Clementinum, zatim na sveučilištu u Bologni. Predstavljao je Dubrovačku republiku kod Vatikana i bio kustos, a kasnije i upravitelj Vatikanske knjižnice. Bio je član znanstvenog kruga kraljice Kristine i pape Aleksandra VII.

(2) Physica, De caelo, De Generatione et Corruptione, Meteorologica.

(3) U rukopisu Quaedam... [2] (str. 213 r-214 r) nalazi se čitav tekst odgovora. Na str. 214 r-214 v nalazi se ponovno dio toga teksta. Zatim su na str. 216 r-217 r koncepti tog istog odgovora, ali s izmjenama i samo djelomično. Konačno na str. 218 r-218 v su neke Gradićeve bilješke u kojima iznosi svoja mišljenja o Fabrijevim primjedbama, ali te nisu sadržane ni u Gradićevom pismu Fabriju, ni na drugim objavljenim mjestima.

(4) U rukopisu Quaedam... [2] nenumerirana stranica između stranica 203 v i 204 r. Tekst je bio napisan bez te stranice, ali je onda naknadno na stranici 203 v označeno mjesto gdje se to umeće. U IV tekstu koji je izrađen od prepisivača ovaj je tekst uklopljen u prijepis i nalazi se na str. 208 r. I i II tekst ne sadrže više tu stranicu teksta.

(5) Verum praeter hujusmodi inclinationem sive virtutem impressam, quae ad motionem semel institutam in suo gradu conservandam satis est,... [1] (str. 31).

(6) ...quamodo vim sibi facit ad se movendum, cum est in quiete, hoc est incipit corpus illud, quod antea quiescebat, per illam inchoationem motus habere propensionem quandam ad talem motum continuandum, vel si mavis, acquirit virtutem impressam ad perseverandum in incepto, & utique perseveraret,... [1] (str. 30—31).

(7) ...dummodo exploratum restet, rem semel motam a quacumque tandem causa, motio procedat... [1] (str. 29).

(8) Izraz motus localis općenito se upotrebljavao u Gradićevo i Galilejevo doba u smislu mehaničkog gibanja. Izraz potječe od Aristotela, ali je dugo kasnije zadržavan u fizici.

(9) Ad motum autem localem, sive ad ejus contrarium, quod est quies, corpora naturalia generatim loquendo indifferentia sunt, ita ut non desint qui putent, cum quid moveri incipit, si nihil, quo detineatur, offendit, motum suum perpetuo continuaturum, nec illi majori id futurum molestiae, quam si quietem ageret, in qua pariter semel accepta, nisi quid se moveat, sine fine res permanentes videmus. [1] (str. 28—29).

(10) Gradićeva neobjavljena bilješka u odnosu na Fabrijeve primjedbe koja nije unesena u odgovor Fabriju. [2] (str. 218 r-218 v).

(11) Ovdje nije ništa precizirano, što se pod tim misli, ali je očito da se radi o slijedećem: Protivnici gibanja Zemlje govorili su da ako bi se Zemlja gibala, odnosno rotirala, onda kamen bačen u vis ne bi pao natrag na isto mjesto jer bi se Zemlja rotacijom odmakla. Već je Kopernik smatrao da se zrak vrti zajedno sa Zemljom koju omotava, pa da kamen pada natrag isto tako kao da Zemlja miruje. Čim je Gradić usporedio to padanje kamena na Zemlji s putnikom na brodu, očito je da je držao kako je bezvrijedan onaj dokaz geocentričara i da se ima isti efekt u slučaju mirne ili pokretne Zemlje. To svakako još ne bi moglo čvrsto odlučiti o tome što je Gradić zapravo držao o gibanju Zemlje. Međutim postoji jedno pismo kardinala Barbariga upućenog Gradiću 29. 12. 1660. (iznio ga je S. Cerva u Bibliotheca Ragusina, rukopis u Dominikanskom samostanu u Dubrovniku) u kojem izričito stoji da se Gradić oslonio na Kopernikovu nauku u svom djelu L'astronomia geometrica koje do danas nije nigdje pronađeno a ne nalazi se niti u skupini njegovih rukopisa i bilježaka Quaedam... [2]. Gradićeva rasprava o polarnoj zvijezdi [1] (str. 55—63) ostavlja to pitanje također otvorenim, pa se ni iz nje ne može izvesti definitivan zaključak. Međutim upravo ova Gradićeva rasprava o ubrzanom gibanju daje osim spomenutog i drugih podataka koji nam u tom pogledu mogu pomoći. Gradić na str. 23. navodi da se dva gibanja slažu u treće i u slučaju gibanja planeta kako ga objašnjavaju neke teorije. Gotovo je sasvim sigurno da se tu radi o geocentričnom sustavu, a ta dva gibanja da su gibanje po deferentu i epiciklu. U tom je pak naročito važno što Gradić dopušta postojanje i drugih teorija, makar i u vidu pretpostavke. Međutim, on se ipak ne izjašnjava s kojim se teorijama slaže. Oba spomenuta mjesta pokazuju dakle da Gradić ne odbacuje heliocentrični sustav, dapače da ga možda i prihvaća, ali da se zbog situacije koja je stvorena zabranom naučavanja heliocentričnog sustava ne želi javno izjasniti o tome. Ima međutim još jedan vrlo važan podatak. U Gradićevom rukopisu rasprave o ubrzanom gibanju (autograf, III tekst) [2] (str. 203 v) navodi se da se tijelo pri slobodnom padu giba „a loco quetis ad mundi centrum" što bi dakle bez dvojbe trebalo shvatiti kao poistovjećivanje središta Zemlje i svijeta, dakle prihvaćanje Aristotelovog stanovišta. Međutim, istom Gradićevom rukom precrtano je na tom mjestu ono „mundi" i umetnuto „terrae", pa je tako ostalo i u svim daljnjim Gradićevim prijepisima, kao i u objavljenom djelu [1]. Može se pretpostaviti da je Gradić upotrijebio onaj prvi izraz u skladu s tradicijom peripatetičkih filozofa, ali da je onda to izmijenio zato što se ipak nije slagao s poistovjećivanjem središta svijeta i Zemlje. Ako se ovaj podatak usporedi sa spomenutim Barbarigovim pismom i navedenim mjestima u Gradićevom djelu o ubrzanom gibanju, može se pretpostaviti s dosta vjerojatnosti da je Gradić pristajao uz heliocentrični sustav, samo što je nastojao da to ne kaže sasvim javno.

STJEPAN GRADIĆ ON THE PROBLEM OF MOTION

Žarko Dadić

Summary

On the problem of motion Gradić wrote only a small sized treatise which was published in his book [1]. Its manuscript has been preserved in a manuscript collection [2] that is being kept in the Library of Vaticano. The chief subject-matter of the treatise is to determine the law of free fall. In order to derive this law Gradić assumes: 1) A body, once sent into motion, and if not obstructed will go on moving uniformly with its initial velocity, 2.) The cause of motion (the gravity of a body in case of free fall) works on the body instantaneously and equally regardless of whether the body was mobile or immobile, 3.) If a body is submitted to two tendencies of motion, these two motions will always result in a third one. Hence Gradić concludes that the same and constant cause of free fall unintermittently and uniformly enlarges the velocity of falling. Gradić wants to prove that the covered way at an accelerated motion is expressed by the surface of right triangle by which the sides represent the passed time and the final velocity. That was also asserted by Galilei. Thus he first observes the uniform motion within a definite interval

of time — the velocity of which is supposed to be given at the beginning. Then the assumes that the body doubles its initial velocity with which it continues up its uniform motion for the same interval of time. The same process should repeat. His conclusion is that the way is expressed by a dentate figure in fig. 1. Then he takes these intervals to converge to zero because of which the dentate figure converges to Galilei's triangle. This derivation of Gradić can be presented analitically. The surface of the dentate figure is expressed by relation (1), and the surface of Galilei's triangle, i. e. the covered way is expressed by relations (3) and (4). The Italian scientist Onorato Fabri made some objections to this treatise of Gradić but they were groundless from the present point of view.

Mahmut Bajraktarević,

QUELQUES REMARQUES SUR LES SOLUTIONS GÉNÉRALES DE CERTAINES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES AUX PLUSIEURS INCONNUES

Soit:

1° $\mathscr{C}$, un corps commutatif, Θ et e l'élément nul respectivement l'élément unité de $\mathscr{C}$;

2° $\nu_i = \{r_{1,i}, r_{2,i}, \ldots, r_{k_i,i}\}$, un ensemble d'entiers positifs $(i = 0, 1, \ldots, n)$;

3° $p(\nu_i) = (s_{1,i}, s_{2,i}, \ldots, s_{k_i,i})$, une permutation des éléments de ν_i;

4° $q(\nu_i) = (t_{1,i}, t_{2,i}, \ldots, t_{k_i,i})$, la permutation des éléments de ν_i ordonnés suivant les valeurs croissantes, $t_{j,i} < t_{j+1,i}$;

5° $X_{s_{j,i}}$ des ensembles non vides $(j = 1, 2, \ldots, k_i;\ i = 0, 1, \ldots, n)$;

6° $X_{p(\nu_i)} = X_{s_{1,i}} \times X_{s_{2,i}} \times \cdots \times X_{s_{k_i,i}}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$;

7° $x_{s_{j,i}}$ élément de $X_{s_{j,i}}$;

8° $x_{p(\nu_i)} = (x_{s_{1,i}}, x_{s_{2,i}}, \ldots, x_{s_{k_i,i}})$, élément de $X_{p(\nu_i)}$;

9°

$$A_k = \begin{bmatrix} \Theta & F_1^0 & F_2^0 & \cdots & F_{k-1}^0 & F_k^0 \\ -F_1^0 & \Theta & F_2^1 & \cdots & F_{k-1}^1 & F_k^1 \\ -F_2^0 & -F_2^1 & \Theta & \cdots & F_{k-1}^2 & F_k^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -F_{k-1}^0 & -F_{k-1}^1 & -F_{k-1}^2 & \cdots & \Theta & F_k^{k-1} \\ -F_k^0 & -F_k^1 & -F_k^2 & \cdots & -F_k^{k-1} & \Theta \end{bmatrix}, \quad E_k = \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_{k-1} \\ e_k \end{bmatrix} \quad (e_i = e;\ i = 0, 1, \ldots, k),$$

$$f^k = [f_0, f_1, \ldots, f_k],$$

les matrices aux éléments dans $\mathscr{C}$ où, pour abréger, on a posé[1)] F_j^i respectivement f_i à la place de $F_j^i(x_{q(\nu_i \cap \nu_j)})$ respectivement de $f_i(x_{p(\nu_i)})$;

[1)] Si $\nu_i \cap \nu_j = \varnothing$, on admettra $F_j^i(x_{q(\nu_i \cap \nu_j)}) = C_j^i$ $(C_j^i = \text{const} \in \mathscr{C})$.

10°

$$A_{m,n}=\begin{bmatrix} \Theta & F_1^0 & F_2^0 \cdots & F_m^0 & \Theta & \Theta & \Theta & \cdots \Theta \\ -F_1^0 & \Theta & F_2^1 \cdots & F_m^1 & \Theta & \Theta & \Theta & \cdots \Theta \\ -F_2^0 & -F_2^1 & \Theta \cdots & F_m^2 & \Theta & \Theta & \Theta & \cdots \Theta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -F_m^0 & -F_m^1 & -F_m^2 \cdots & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \cdots \Theta \\ \Theta & \Theta & \Theta \cdots & \Theta & \Theta & F_{m+2}^{m+1} & F_{m+2}^{m+1} & \cdots F_n^{m+1} \\ \Theta & \Theta & \Theta \cdots & \Theta & -F_{m+2}^{m+1} & \Theta & F_{m+3}^{m+2} & \cdots F_n^{m+2} \\ \Theta & \Theta & \Theta \cdots & \Theta & -F_{m+3}^{m+1} & -F_{m+3}^{m+2} & \Theta & \cdots F_n^{m+3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Theta & \Theta & \Theta \cdots & \Theta & -F_n^{m+1} & -F_n^{m+2} & -F_n^{m+3} & \cdots \Theta \end{bmatrix}$$

11° $A_k E_k$ la matrice de la forme $f^k=[f_0, f_1, \dots, f_k]$ dont les éléments f_i sont donnés par les relations

$$f_i=\sum_{j=0}^{i-1}(-F_i^j)+\sum_{j=i+1}^{k} F_j^i \quad (i=0, 1, \dots, k);$$

12° $\sum\limits_m^n=\Theta \quad (m>n)$.

Dans le cas où $X_{s_{j,i}}=S\neq\emptyset$ pour tous les $s_{j,i}$ $\begin{pmatrix} i=0, 1, \dots, n; \\ j=1, \dots, k_i \end{pmatrix}$ on introduit encore les notations supplémentaires suivantes:

13° $\pi_i(\nu_i)=(\sigma_{1,i}, \sigma_{2,i}, \dots, \sigma_{k_i,i})$, où les $\pi_i(\nu_i)$ sont définis par les relations

$$\pi_i(\nu_i)=p(\nu_i) \text{ pour } i=m+1, \dots, n \quad (0<m<n), \text{ et pour}$$

$$i=0, 1, \dots, m$$

$\sigma_{j,i}=s_{j,i}$ lorsque $s_{j,i}\in\bigcup\limits_{i=m+1}^{n}\nu_i$, autrement les $\sigma_{j,i}$ sont des entiers positifs déterminés, contenus dans

$$(\bigcup_{i=0}^{m}\nu_i)\setminus(\bigcup_{i=m+1}^{n}\nu_i).$$

14° $\overline{f}^k=[\overline{f}_0, \overline{f}_1, \dots, \overline{f}_k], \overline{f}_i=f_i(x_{\pi_i(\nu_i)})\,(i=0, 1, \dots, k;\ k\in\{m, n\})$;

15° $\overline{A}_m$ la matrice A_m dans laquelle les éléments $t_{j,i}$ des ensembles $q(\nu_i\cap\nu_j)$, figurant dans les éléments de la i-ième ligne de A_m, sont remplacés par les éléments correspondants de $\pi_i(\nu_i)\,(i=0, 1, \dots, m)$; les ensembles correpondant aux ensembles $q(\nu_i\cap\nu_j)$ de A_m et figurant dans les éléments de la i-ième ligne de la matrice $\overline{A}_m$ seront désignés par $\varkappa_i(\nu_i\cap\nu_j)$ respectivement.

L'objet de la présente note est de donner les solutions générales des équations fonctionnelles (1), (9), (10), (11) et des systèmes des équations fonctionnelles (13) et (15).

Théorème 1. — *La solution générale de l'équation fonctionnelle*

$$f^n E_n = \Theta, \tag{1}$$

où f^n est inconnue, est donnée par la relation

$$f^n = A_n E_n, \tag{2}$$

A_n étant une matrice de la forme 9° dans laquelle les applications F_j^i ($i = 0, 1, \dots, n-1$; $j = i+1, \dots, n$) sont arbitraires.

Démonstration. — Par la substitution directe de (2) dans (1) on vérifie immédiatement que (2) est une solution de (1).

Pour démontrer que toute solution de (1) est de la forme (2) on va procéder par l'induction. Pour $n=1$, l'équation (1) a la forme

$$f_0(x_{p(\nu_0)}) + f_1(x_{p(\nu_1)}) = \Theta. \tag{3}$$

En y posant $x_i = x_i^0$ ($x_i^0 = \text{const}$, $i \notin \nu_0$), on obtient

$$f_0(x_{p(\nu_0)}) = F_1^0(x_{q(\nu_0 \cap \nu_1)}). \tag{4}$$

A partir de (3) (4) on trouve

$$f_1(x_{p(\nu_1)}) = -F_1^0(x_{q(\nu_0 \cap \nu_1)}). \tag{5}$$

Si l'on pose dans (2) $n=1$, $i=0, 1$, on obtient précisément (4) et (5). Supposons que, pour n fixé, la solution générale de (1) soit donnée par (2). Considérons l'équation

$$\sum_{i=0}^{n+1} g_i(x_{p(\nu_i)}) = \Theta. \tag{6}$$

Si l'on pose $x_i = x_i^0$ ($x_i^0 = \text{const}$, $i \notin \nu_{n+1}$) dans (6), on obtient que l'application g_{n+1} a la forme

$$g_{n+1}(x_{p(\nu_{n+1})}) = -\sum_{\nu=0}^{n} F_{n+1}^i(x_{q(\nu_i \cap \nu_{n+1})}). \tag{7}$$

En posant (7) dans (6) et en introduisant les nouvelles notations (observons le fait évident: $\nu_{n+1} \cap \nu_j \subset \nu_j$):

$$f_i(x_{p(\nu_i)}) = g_i(x_{p(\nu_i)}) - F_{n+1}^i(x_{q(\nu_{n+1} \cap \nu_i)}) \quad (i = 0, 1, \dots, n), \tag{8}$$

on obtient l'équation (1). D'après l'hypothèse inductive, la solution générale de cette équation est donnée par la relation (2). Donc, d'après (2), (7) et (8),

$$g_i(x_{p(\nu_i)}) = -\sum_{j=0}^{i-1} F_i^j(x_{q(\nu_i \cap \nu_j)}) + \sum_{j=i+1}^{n+1} F_j^i(x_{q(\nu_i \cap \nu_j)}) \quad (i = 0, 1, \dots, n+1).$$

Le théorème est donc vrai pour $n+1$ s'il en est pour n. Le théorème est prouvé.

En remplaçant le corps $\mathscr{C}$ par un groupe abélien additif et en posant $X_{s_{j,i}} = S \neq \varnothing$ pour tous les $s_{j,i}$, on obtient le théorème 1 considéré par P. M. Vasić [6] (v. aussi [5]). La formulation du théorème 1 est plus simple que celle donnée dans [6], puisque les F_j^i dans la solution (2) sont dépourvues des facteurs superflus figurant dans la formulation de Vasić. La méthode de démontrer le théorème 1 est essentiellement celle de [6] convenablement modifiée.

Le problème de résoudre les équations fonctionnelles

$$\prod_{i=0}^{n} f_i(x_{p(\nu_i)}) = e, \tag{9}$$

$$f_0(x_{p(\nu_o)}) \cdot \sum_{j=1}^{n} f_j(x_{p(\nu_j)}) = e, \tag{10}$$

$$\prod_{i=0}^{m} f_i(x_{p(\nu_i)}) + \sum_{j=m+1}^{n} f_i(x_{p(\nu_i)}) = \Theta \tag{11}$$

se réduit au problème de résoudre l'équation (1) en faisant échanger le rôle des opérations du groupe $\mathscr{C}$ ou en effectuant des opérations simples sur les équations.

Les conséquences immédiates du Th. 1 sont les théorèmes 2 et 3.

Théorème 2. — *La solution générale de l'équation fonctionnelle* (1), *où les applications* f_i $(i=0, 1, \ldots, m;\ m<n)$ *sont des applications données et les applications* $f_i\,(m<i\leqslant n)$ *sont des inconnues, est donnée par la relation* (2) *où les applications* F_j^i *sont des applications arbitraires remplissant les conditions*

$$\sum_{j=0}^{i-1}(-F_i^j) + \sum_{j=i+1}^{n} F_j^i = f_i\ (i=0, 1, \ldots, m). \tag{12}$$

Théorème 3. — *La solution générale du système d'équations fonctionnelles*

$$f^m E_m = \Theta, \quad f^n E_n = \Theta\ (0<m<n) \tag{13}$$

est donnée par la relation

$$f^n = A_{m,n} E_n \tag{14}$$

$A_{m,n}$ *étant la matrice de la forme* 10° *dans laquelle les applications* F_j^i *sont arbitraires.*

Théorème 4. — *La solution générale du système d'équations fonctionnelles* (*où* $X_{s_{j,i}} = S \neq \varnothing$ *pour tous les* $s_{j,i}$)[2]

$$f^m E_m = \Theta, \quad \overline{f}^n E_n = \Theta\ (0<m\leqslant n) \tag{15}$$

est donnée par la relation (14) *où les applications arbitraires* F_j^i, *figurant dans la matrice* $A_{m,n}$ *sont assujetties à la condition*

$$\sum_{i=0}^{m}\left\{\sum_{j=0}^{i-1}[-F_i^j(x_{\varkappa_i(\nu_i\cap\nu_j)})] + \sum_{j=i+1}^{m} F_j^i(x_{\varkappa_i(\nu_i\cap\nu_j)})\right\} = \Theta. \tag{16}$$

Démonstration du th. 4. — Pour $x_{s_{j,i}} = a = \text{const} \in S$ lorsque $s_{j,i} \notin \bigcup_{i=m+1}^{n} \nu_i$ on a évidemment

$$\overline{f}^n = f^n = \Theta.$$

---

[2]) Le théorème 4 reste valable même dans le cas où $X_{s_{j,i}} = S \neq \varnothing$ pour les $s_{j,i} \in \left(\bigcup_{i=0}^{m} \nu_i\right) \diagdown \left(\bigcup_{i=m+1}^{n} \nu_i\right)$, $X_{s_{j,i}}$ pour $s_{j,i} \in \bigcup_{i=m+1}^{n} \nu_i$ pouvant être différents de S.

Par conséquent, les applications $f_{m+1}, \ldots, f_n$ sont bien déterminées. Le reste de la démonstration est évident.

Pour illustrer l'application du th. 4, on va considérer deux cas particuliers.

Exemple 1. — Considérons le système d'équations fonctionnelles

$$f_0(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i, y_1) = \Theta, \tag{17a}$$

$$f_0(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}) + \sum_{i=1}^{n} f_{j_i}(x_i, y) + f(y_2) = \Theta, \tag{17b}$$

représentant une généralisation des équations analogues considérés dans [2] (v. aussi [1], [4]), avec)[3]

$$x_i \in S, y_j \in S^{K_j};\ f_0 : S^n \to \mathscr{C},\ f_i : S^{1+K_1} \to \mathscr{C},\ f : S^{K_2} \to \mathscr{C},$$

$(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ étant une permutation du n-tuple ordonné $(1, 2, \ldots, n)$.

La solution générale de (17a) étant donnée par les relations

$$\left\{\begin{aligned} & f_0(x_1, \ldots, x_n) = -\sum_{i=1}^{n} F_i(x_i), \\ & f_i(x_i, y) = F_i(x_i) + H_i(y_1)\,(i = 1, \ldots, n), \\ & \sum_{i=1}^{n} H_i(y_1) = \Theta, \end{aligned}\right. \tag{18}$$

la condition correspondante (16) prend la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \{F_i(x_i\} - F_{j_i}(x_i)\} = \Theta$$

d'où

$$F_i(x) = F_{j_i}(x) + A_i, \quad \sum_{i=1}^{n} A_i = \Theta\,(i = 1, \ldots, n).$$

Sans aucun détriment de la généralité, on peut admettre les constantes arbitraires $A_i = \Theta\,(i = 1, \ldots, n)$, puisqu'elles peuvent être englobées dans les applications arbitraires correspondantes $H_i(y_1)$ de sorte que la solution générale du système (17ab) est donnée par les relations (18), où les F_i et les H_i $(i = 1, \ldots, n)$ sont des applications arbitraires aux valeurs dans $\mathscr{C}$ dont les F_i sont liées entre elles par les relations

$$F_i = F_{j_i}\,(i = 1, \ldots, n)$$

avec $f = \Theta$.

Exemple 2. — Reprenons le système

$$\begin{aligned} & f_0(x_1, x_2) + f_1(x_1, x_3, x_4) + f_2(x_2, x_3, x_4) + \\ & + f_3(x_1, x_3, x_5, x_6) + f_4(x_3, x_4, x_5, x_6) = \Theta, \end{aligned} \tag{19a}$$

---

[3]) On peut supposer $y_j \in Y_j \neq S, f_i : S \times Y_1 \to \mathscr{C}, f : Y_2 \to \mathscr{C}$, sans changer les raisonnements.

$$\text{(19b)}\qquad \begin{aligned} &f_0(x_1, x_2)+f_1(x_2, x_3, x_4)+f_2(x_1, x_3, x_4)+\\ &+f_3(x_3, x_4, x_5, x_6)+f_4(x_1, x_3, x_5, x_6=\Theta, \end{aligned}$$

déjà traité par R. Ž. Đorđević [3].

La solution générale de (19a), d'après le th. 1, est donnée par les relations

$$\text{(20)}\qquad \begin{aligned} f_0(x_1, x_2) &= F_1^0(x_1)+F_2^0(x_2)+F_3^0(x_1)+L \qquad (L=F_4^0(x_{q(\varnothing)})).\\ f_1(x_1, x_3, x_4) &= -F_1^0(x_1)+F_2^1(x_3, x_4)+F_3^1(x_1, x_3)+F_4^1(x_3, x_4),\\ f_2(x_2, x_3, x_4) &= -F_2^0(x_2)-F_2^1(x_3, x_4)+F_3^2(x_3)+F_4^2(x_3, x_4),\\ f_3(x_1, x_3, x_5, x_6) &= -F_3^0(x_1)-F_3^1(x_1, x_3)-F_3^2(x_3)+F_4^3(x_3, x_5, x_6),\\ f_4(x_3, x_4, x_5, x_6) &= -L \qquad -F_4^1(x_3, x_4)-F_4^2(x_3, x_4)-F_4^3(x_3, x_5, x_6). \end{aligned}$$

En posant $x_1=x_2=x_3=a=\text{const}$ dans la condition correspondante (16), on obtient que $F_4^3(x_4, x_5, x_6)$ a la forme

$$\text{(21)}\qquad F_4^3(x_4, x_5, x_6)=\Gamma^*(x_4)+\Phi_2(x_5, x_6);$$

puis, pour $x_1=x_4=a=\text{const}$, on tire de (16), vu (21),

$$\text{(22)}\qquad F_3^1(x_2, x_3)=\Gamma(x_2)+\Gamma_3(x_3)$$

et, pour $x_1=x_2=a=\text{const}$, tenant compte de (21) et (22),

$$\text{(23)}\qquad F_4^1(x_3, x_4)+F_4^2(x_3, x_4)=\Gamma^{**}(x_3)+\Gamma_2(x_4).$$

En introduisant (21), (22) et (23) dans (16), cette relation devient

$$\begin{aligned} &[F_1^0(x_1)+F_3^0(x_1)-F_2^0(x_1)-\Gamma^*(x_1)-\Gamma^{**}(x_1)]+\\ &+[F_2^0(x_2)-F_1^0(x_2)+\Gamma(x_2)]+\\ &+[F_3^2(x_3)-F_3^0(x_3)-\Gamma(x_3)+\Gamma_3(x_3)+\Gamma^{**}(x_3)-\Gamma_2(x_3)]+\\ &+[\Gamma_2(x_4)-\Gamma_3(x_4)+\Gamma^*(x_4)-F_3^2(x_4)]=\Theta, \end{aligned}$$

d'où, en posant $F_2^0=\Gamma$ et en désignant par A, B, C_1 des constantes arbitraires,

$$\text{(24)}\qquad \begin{aligned} &F_1^0(x)=\Gamma_0(x)+\Gamma(x)+B,\\ &F_3^0(x)=\Gamma^*(x)-\Gamma(x)+\Gamma^{**}(x)-A-B,\\ &F_3^2(x)=\Gamma^*(x)-\Gamma_3(x)+\Gamma_2(x)-C_1. \end{aligned}$$

En introduisant (21)—(24) dans (20), après avoir mis $\Gamma^*+\Gamma^{**}+L=\Gamma_1$, $C_1+L=C$ et en y posant

$$\Gamma_0(x)=F_2(x)+A, \quad \Gamma_1(x)=F_1(x)-F_2(x)-A, \quad \Gamma_2(x)=F_3(x)-\lambda$$

$$\Phi_1(x_1, x_2)+\Gamma_3(x_1)=-G_1(x_1, x_2)+F_1(x_1)-F_2(x_1)+F_3(x_1)+F_3(x_2)-2\lambda-2A-C,$$

$$\Phi_2(x_1, x_2)=-G_2(x_1, x_2)+\lambda+A+a, \quad 2\lambda+3A+B+C+a=\Theta,$$

on obtient la solution générale du système (19ab)

$$
(25) \quad \begin{cases}
f_0(x_1, x_2) & = \quad F_1(x_1) + F_2(x_2), \\
f_1(x_1, x_2, x_3) & = \quad F_2(x_1) + F_1(x_2) - F_2(x_2) + F_3(x_2) + F_3(x_3) - G_1(x_2 x_3) + a \\
f_2(x_1, x_2, x_3) & = -F_2(x_1) + G_1(x_2, x_3), \\
f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) & = -F_1(x_1) + F_2(x_1) - F_3(x_2) - G_2(x_3, x_4), \\
f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) & = -F_1(x_1) + F_2(x_1) - F_3(x_2) + G_2(x_3, x_4) - a
\end{cases}
$$

dans la forme donnée dans [3].

RÉFÉRENCES

[1] Bajrakterević, M., *Sur les solutions générales de certaines équations fonctionnelles*, Radovi, Akad. znan. umj. Bosne i Hercegovine, Sarajevo. (Sous presse).

[2] Đorđević, R. Ž., *Solutions d'un système d'équations fonctionnelles linéaires*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat Fiz., 154, (1965).

[3] Đorđević, R. Ž., *Sur un système des équations fonctionnelles linéaires*, Glasnik 1 (21), 65—67, Zagreb, (1966).

[4] Mitrinović, D. S., *Équations fonctionnelles à fonctions inconnues dont toutes ne dépendent pas du même nombre d'arguments*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., 120 (1963), 29—30.

[5] Vasić, P. M., *Sur une classe d'équations fonctionnelles linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris, 260 (1965), 5666—5667.

[6] Vasić, P. M. *Résolution d'une classe d'équations fonctionnelles linéaires*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Friz., 190 (1967), 53—60.

Илија А. Шайкарев

НЕКОЛИКО ПРИМЕДАБА О ХОМОГЕНИМ ЛИНЕАРНИМ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИМ ЈЕДНАЧИНАМА ДРУГОГ РЕДА ЧИЈИ СЕ ОПШТИ ИНТЕГРАЛ ДОБИЈА ПОМОЋУ КВАДРАТУРА

I

У овом раду показујемо да се општи интеграл диференцијалне једначине

$$y'' + f(x)\, y' + g(x)\, y = 0, \tag{1}$$

где су $f(x)$ и $g(x)$ произвољне диференцијабилне функције од x, може добити помоћу квадратура, ако међу функцијама $f(x)$ и $g(x)$ постоји једна од релација:

$$\sqrt{\frac{\varphi}{g}}\,(\varphi+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{g}\right)' + f\left(\frac{\varphi}{g}\right) = 0, \tag{2}$$

$$\psi^2\left[f\left(\frac{g}{\psi}\right) - \left(\frac{g}{\psi}\right)'\right]^2 + 2g\psi\left[f\left(\frac{g}{\psi}\right) - \left(\frac{g}{\psi}\right)'\right]' - 4g^3 = 0, \tag{3}$$

$$\theta^2 + \left(\frac{\theta' + f\theta}{2g}\right)'\theta - g\left(\frac{\theta' + f\theta}{2g}\right)^2 = 0, \tag{4}$$

$$h' + fh + h^2 + g = 0. \tag{5}$$

Притом су $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\theta(x)$ и $h(x)$ произвољне диференцијабилне функције од x.

У случају када је испуњена релација (2) односно (5), диференцијална једначина (1) постаје

$$y'' + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{g}{\varphi}\right)\left(\frac{\varphi}{g}\right)' - \sqrt{\frac{g}{\varphi}}\,(\varphi+1)\right]y' + gy = 0, \tag{6}$$

односно

$$y'' + f(x)\, y' - (h' + h^2 + fh)\, y = 0. \tag{7}$$

Општи интеграл једначине (6) је

$$y = \left[C_1 + C_2 \int \exp\left\{-\int\left(f + 2\sqrt{\frac{g}{\varphi}}\right)dx\right\} dx\right] \exp\int\sqrt{\frac{g}{\varphi}}\,dx, \tag{8}$$

а једначине (7)

$$y=[C_1+C_2\int \exp\{-\int (f+2h)\,dx\}\,dx]\exp\int h\,dx. \tag{9}$$

Општи интеграл једначине (1), када је испуњена релација (3) односно (4), гласи

$$y=\left[C_1+C_2\int\frac{\psi}{g}\,dx\right]\sqrt{\frac{g}{\psi}\exp\left(-\int f\,dx\right)} \tag{10}$$

односно

$$y=\left\{C_1+C_2\int\frac{\exp\left(-\int f\,dx\right)dx}{\left[\int\sqrt{\theta\exp\left(-\int f\,dx\right)}\,dx\right]^2}\right\}\int\sqrt{\theta\exp\left(-\int f\,dx\right)}\,dx. \tag{11}$$

II

Како што је познато, ако су $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ два линеарно независна партикуларна решења једначине (1), а C_1 и C_2 произвољне константе, њен општи интеграл гласи

$$y=C_1\,\alpha(x)+C_2\,\beta(x). \tag{12}$$

Елиминацијом констаната C_1 и C_2 из једначине (12) и из њене две прве изводне једначине, добијамо диференцијалну једначину

$$y''-\frac{\alpha\beta''-\alpha''\beta}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}\,y'+\frac{\alpha'\beta''-\alpha''\beta'}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}\,y=0. \tag{13}$$

Упоређењем једначина (1) и (13) добијамо релације

$$f(x)=-\frac{\alpha\beta''-\alpha''\beta}{\alpha\beta'-\alpha'\beta},\qquad g(x)=\frac{\alpha'\beta''-\alpha''\beta'}{\alpha\beta'-\alpha'\beta},$$

које можемо да напишемо у облику

$$\alpha\beta'-\alpha'\beta=A\exp\left(-\int f\,dx\right), \tag{14}$$

$$g(x)=\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\frac{\left(\dfrac{\beta'}{\alpha'}\right)'}{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)'}, \tag{15}$$

где је $A\,(\neq 0)$ произвољна константа.

1. Ако узмемо

$$\frac{\beta'}{\alpha'}=\varphi(x)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)', \tag{1.1}$$

тада из (15) добијамо

$$\alpha=B\exp\int\sqrt{\frac{g}{\varphi}}\,dx, \tag{1.2}$$

а из (14) и (1.2)

$$(1.3)\qquad \beta=\left[BC+\frac{A}{B}\int \exp\left\{-\int\left(f+2\sqrt{\frac{g}{\varphi}}\right)dx\right\}dx\right]\exp\int\sqrt{\frac{g}{\varphi}}\,dx.$$

Притом $B(\neq 0)$ и C су произвољне константе.

Елиминацијом α и β из (1.1), (1.2) и (1.3) добијамо релацију (2). У вези стим следује да општи интеграл једначине (6) је (8).

Пример. Диференцијална једначина

$$e^{4x}y''-(x-2)\,e^{4x}y'+(xe^{2x}-1)\,y=0$$

има општи интеграл

$$y=e^{(-1/2)e^{-2x}}\left[C_1+C_2\int e^{x^2/2-2x+e^{-2x}}dx\right].$$

2. Ако сада узмемо

$$(2.1)\qquad (\alpha'/\alpha)^2\,(\beta'/\alpha')'=\psi(x),$$

тада из (15) добијамо

$$(2.2)\qquad \frac{\beta}{\alpha}=\int\frac{\psi}{g}\,dx+A_1,$$

где је A_1 произвољна константа.

Затим из (14) и (2.2) имамо

$$(2.3)\qquad \alpha=A_2\sqrt{\frac{g}{\psi}\exp\left(-\int f dx\right)},$$

$$(2.4)\qquad \beta=A_2\sqrt{\frac{g}{\psi}\exp\left(-\int f dx\right)}\cdot\left(\int\frac{\psi}{g}\,dx+A_1\right).$$

Притом је $A_2(\neq 0)$ произвољна константа.

Помоћу елиминације α и β из (2.1), (2.3) и (2.4) добијамо тачно релацију (3).

Значи, општи интеграл једначине (1), када њени коефицијенти задовољавају релацију (3), је (10).

Пример. Диференцијална једначина

$$x^2y''-2\,xy'-2\,(2\,x^4+x^2-1)\,y=0$$

има општи интеграл

$$y=xe^{x^2}\left(C_1+C_2\int e^{-2x^2}\,dx\right).$$

3. Ако ставимо

$$(3.1)\qquad \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2=\theta(x)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)',$$

релација (15) постаје

$$(3.2)\qquad \left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right)'=\frac{g(x)}{\theta(x)}.$$

Из (14) и (3.1) добијамо

$$\alpha = B_1 \int \sqrt{\theta \exp(-\int f dx)}\, dx, \tag{3.3}$$

$$\beta = \left[\int \frac{\exp(-\int f dx)}{\left\{ \int \sqrt{\theta \exp(-\int f dx)}\, dx \right\}^2} dx + B_2 \right] B_1 \int \sqrt{\theta \exp(-\int f dx)}\, dx, \tag{3.4}$$

где су $B_1 (\neq 0)$ и B_2 произвољне константе.

Елиминацијом α и β из (3.2), (3.3) и (3.4) добијамо управо релацију (4)

Значи, општи интеграл једначине (1), када њени коефицијенти задовољавају (4), је (11).

Пример. Диференцијална једначина

$$y'' + 2\, e^x y' + e^x (e^x + 1)\, y = 0$$

има општи интеграл

$$y = e^{-e^x} (C_1 + C_2\, x).$$

4. Ако сада узмемо

$$f(x) = \frac{\alpha''\beta - \alpha\beta''}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}, \quad h(x) = \frac{\alpha'}{\alpha}, \tag{4.1}$$

добијамо

$$g(x) = -(h' + h^2 + fh),$$

$$\alpha = D_1 e^{\int h dx},$$

$$\beta = \left[\frac{D_2}{D_1^2} \int e^{-\int (f + 2h) dx}\, dx + D_3 \right] D_1 e^{\int h dx},$$

где су $D_1 (\neq 0)$, $D_2 (\neq 0)$ и D_3 произвољне константе.

У вези стим следује да је општи интеграл једначине (7) дат са (9).

Врло је лако утврдити да већи број диференцијалних једначина, које се налазе у познатој књизи Е. Камкеа [1], претстављају специјалан случај једначине (7).

Исто тако лако се добијају, односно појачавају постојећи критеријуми неких диференцијалних једначина, које се налазе у поменутој књизи, ако се искористи диференцијална једначина (7).

Ми ћемо то овде показати само на две диференцијалне једначине.

4.1. У поменутој књизи [1] наводи се да диференцијална једначина

$$(e^x + 1)\, y'' = y \tag{4.1.1}$$

има општи интеграл

$$y = C_1 (1 + e^{-x}) + C_2 [-1 + (1 + e^{-x}) \ln (1 + e^{-x})]. \tag{4.1.2}$$

Д. С. Митриновић [2] наводи да диференцијална једначина

$$\left(a e^{bx} + \frac{1}{b^2} \right) y'' = y \tag{4.1.3}$$

има партикуларни интеграл облика

$$y_1 = e^{-bx} + ab^2. \tag{4.1.4}$$

Овде ми показујемо да се диференцијална једначина

$$(ae^{bx} + c)\, y'' = y, \tag{4.1.5}$$

може интегралити, ако константе b и c задовољавају релацију

$$4\, b^2 c - 1 = 0. \tag{4.1.6}$$

Да бисмо то показали, упоређујемо једначину (4.1.5) са (7) и у односу на h добијамо Riccati-jеву једначину

$$(ae^{bx} + c)\, h' + (ae^{bx} + c)\, h^2 - 1 = 0, \tag{4.1.7}$$

која помоћу смене $e^{bx} = t$ постаје

$$(abt^2 + bct)\, h' + (at + c)\, h^2 - 1 = 0. \tag{4.1.8}$$

Даље, одредимо константе a_1, a_2, a_3 и a_4 тако да

$$h = \frac{a_1 t + a_2}{t^2 + a_3 t + a_4} \tag{4.1.9}$$

буде партикуларни интеграл једначине (4.1.8).

Ако сада h из (4.1.9) унесемо у (4.1.8), добијамо релацију

$$\begin{aligned} & -(a_1 ab + 1)\, t^4 + (a_1^2 a - 2\, a_2 ab - a_1 bc - 2\, a_3)\, t^3 \\ & + (a_1 a_4 ab - a_2 a_3 ab - 2\, a_2 bc + 2\, a_1 a_2 a + a_1^2 c - a_3^2 - 2\, a_4)\, t^2 \\ & + (a_1 a_4 bc - a_2 a_3 bc + a_2^2 a + 2\, a_1 a_2 c - 2\, a_3 a_4)\, t + a_2^2 c - a_4^2 = 0. \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

Обзиром на то да релација (4.1.10) треба да представља идентитет у односу на t, за одређивање констаната a_1, a_2, a_3 и a_4 добијамо систем једначина

$$\begin{gathered} a_1 ab + 1 = 0, \\ a_1^2 a - 2\, a_2 ab - a_1 bc - 2\, a_3 = 0, \\ a_1 a_4 ab - a_2 a_3 ab - 2\, a_2 bc + 2\, a_1 a_2 a + a_1^2 c - a_3^2 - 2\, a_4 = 0, \\ a_1 a_4 bc - a_2 a_3 bc + a_2^2 a + 2\, a_1 a_2 c - 2\, a_3 a_4 = 0, \\ a_2^2 c - a_4^2 = 0. \end{gathered} \tag{4.1.11}$$

За $a_2 = a_4 = 0$ из прве две једначине из система (4.1.11), добијамо

$$a_1 = -\frac{1}{ab}, \quad a_3 = \frac{1 + b^2 c}{2\, ab^2}$$

и у вези стим из треће једначине овог система између b и c добијамо релацију

$$b^2 c - 1 = 0.$$

За $a_2 a_4 \neq 0$ из прве две и последње две једначине из система (4.1.11) добијамо

$$a_1 = -\frac{1}{ab}, \quad a_2 = \frac{bc + 2\varepsilon\sqrt{c}}{2a^2b^2}, \quad a_3 = \frac{1 - 2b\varepsilon\sqrt{c}}{2ab^2}, \quad a_4 = \frac{2c + bc\varepsilon\sqrt{c}}{2a^2b^2}$$

$$(\varepsilon = \pm 1, \quad \varepsilon b < 0).$$

Ако a_1, a_2, a_3 и a_4 унесемо у трећу једначину овог система, добијамо релацију (4.1.6).

Пример. Диференцијална једначина

$$(e^{x/2} + 1)\, y'' = y$$

има партикуларни интеграл

$$y = 3\, e^{-x} + 4\, e^{-x/2} + 1.$$

4.2. У књизи [1] наводи се да се партикуларна решења диференцијалне једначине

$$y'' \sin x \cos^2 x + y' (a \sin^2 x + b) \cos x + c y \sin x = 0 \tag{4.2.1}$$

могу добити помоћу квадратура у следећим случајевима:

$$c = a(b+1), \qquad y = \cos^a x; \tag{4.2.2}$$

$$c = (a+2)(b-1), \qquad y = \mathrm{tg}^{1-b} x; \tag{4.2.3}$$

$$c = 2(a+b-1), \qquad y = \sin^{1-b} x \cos^{a+b-1} x; \tag{4.2.4}$$

$$a + b + 3 = 0, \quad c = -24, \qquad y = \frac{\sin^{a+4} x}{\cos^6 x} [(a-2) \cos^2 x + 8]. \tag{4.2.5}$$

Упоређењем једначине (4.2.1) и (7) у односу на h добијамо Riccati-јеву диференцијалну једначину

$$\sin x \cos^2 x\, (h' + h^2) + h\, (a \sin^2 x + b) \cos x + c \sin x = 0, \tag{4.2.6}$$

која помоћу смене $\mathrm{tg}\, x = t$ постаје

$$t\,(t^2+1)\, h' + t h^2 + [(a+b)\, t^2 + b]\, h + ct\,(t^2+1) = 0. \tag{4.2.7}$$

Одредимо константе b_0, b_1, b_2, b_3 и b_4 тако да функција

$$h = \frac{b_0 t^3 + b_1 t^2 + b_2 t + b_3}{t\,(t + b_4)} \tag{4.2.8}$$

представља партикуларни интеграл једначине (4.2.7). Да би то био случај за одређивање констаната b_0, b_1, b_2, b_3 и b_4 добијамо систем једначина

$$b_0^2 + (a+b+1)\, b_0 + c = 0,$$

$$2\, b_0 b_4 + 2\, b_0 b_1 + (a+b)\, b_1 + (a+b)\, b_0 b_4 + 2\, b_4 c = 0,$$

$$b_0 - b_2 + b_1 b_4 + b_1^2 + 2\, b_0 b_2 + (a+b)\, b_2 + (a+b)\, b_1 b_4 + b_0 b + b_4^2 c + c = 0,$$

$$2\,b_0b_4 - 2\,b_3 + 2\,b_0b_3 + 2\,b_1b_2 + (a+b)\,b_3 + (a+b)\,b_2b_4 + b_1b + b_0b_4b + 2\,b_4c = 0,$$

$$(4.2.9)\quad b_1b_4 - b_2 - b_3b_4 + b_2^2 + 2\,b_1b_3 + (a+b)\,b_3b_4 + b_2b + b_1b_4b + b_4^2c = 0,$$

$$2\,b_2b_3 - 2\,b_3 + b_3b + b_2b_4b = 0,$$

$$b_3b_4b + b_3^2 - b_3b_4 = 0.$$

За $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$ из (4.2.9) елиминацијом b_0 добијамо (4.2.2).

За $b_1 = b_3 = b_4 = 0$ елиминацијом b_0 и b_2 из (4.2.9) добијамо (4.2.3) и (4.2.4).

За $b_3 \neq 0$ из система (4.2.9) добијамо

$$b_0 = \frac{(1-b)(a+b-1)+c}{b-3}, \quad b_1 = b_0b_4, \quad b_2 = 1-b, \quad b_3 = (1-b)\,b_4$$

и елиминацијом констаната b_0, b_1, b_2, b_3 и b_4 из тог система добијамо релацију

$$(4.2.10)\quad [(a+b-1)(1-b)+c]^2 + (a+b+1)\,[(a+b-1)(1-b)+c]\,(b-3) + (b-3)^2\,c = 0.$$

Значи, партикуларни интеграли једначине (4.2.1) могу се добити помоћу квадратура и у случају када између констаната a, b и c постоји релација (4.2.10).

Овај се поступак може применити и на једначине: 2.11, 2.11 a, 2.24, 2.39, 2.41 a, 2.76 a, 2.77, 2.107, 2.125 b, 2.212 a, 2.304 a, 2.318, 2.363 a, као и на друге једначине које се налазе у поменутој Камкеовој књизи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Москва (1961), с. 526 и 531.

[2] Д. С. Митриновић, Публикације Електротехничког факултета Универзитета у Београду, серија: математика и физика. № 27 (1959), с. 3.

EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER HOMOGENE LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER ZWEITEN ORDNUNG DEREN INTEGRALE IN DER GESCHLOSSENEN FORM ERHALTEN WERDEN KÖNNEN

Ilija A. Šapkarev

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$(1)\qquad y'' + fy' + gy = 0,$$

wo $f(x)$ und $g(x)$ differenzierbare Functionen von x sind, kann in der geschlossenen Form erhalten werden, wenn zwischen die Functionen $f(x)$ und $g(x)$ eine der folgenden Relationen besteht:

$$\sqrt{\frac{\varphi}{g}}(\varphi+1)-\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{g}\right)'+f\left(\frac{\varphi}{g}\right)=0, \tag{2}$$

$$\psi^2\left[f\left(\frac{g}{\psi}\right)-\left(\frac{g}{\psi}\right)'\right]^2+2g\psi\left[f\left(\frac{g}{\psi}\right)-\left(\frac{g}{\psi}\right)'\right]'-4g^3=0, \tag{3}$$

$$\theta^2+\left(\frac{\theta'+f\theta}{2g}\right)'\theta-g\left(\frac{\theta'+f\theta}{2g}\right)^2=0, \tag{4}$$

$$h'+fh+h^2+g=0, \tag{5}$$

dabei sind $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\theta(x)$ und $h(x)$ beliebige differenzierbare Functionen von x.

Wenn die Relation (2) bzw (5) ausgefüllt wird, wird die Differentialgleichung (1)

$$y''+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{g}{\varphi}\right)\left(\frac{\varphi}{g}\right)'-\sqrt{\frac{g}{\varphi}}(\varphi+1)\right]y'+gy=0, \tag{6}$$

beziehungsweise

$$y''+f(x)y'-(h'+h^2+fh)y=0. \tag{7}$$

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung (6) ist

$$y=\left[C_1+C_2\int\exp\left\{-\int(f+2\sqrt{g/\varphi})\,dx\right\}dx\right]\exp\int\sqrt{g/\varphi}\,dx,$$

und der Differentialgleichung (7)

$$y=[C_1+C_2\int\exp\{-\int(f+2h)\,dx\}\,dx]\exp\int h\,dx.$$

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1), wenn die Relation (3) bzw (4) ausgefüllt wird, ist

$$y=\left[C_1+C_2\int(\psi/g)\,dx\right]\sqrt{(g/\psi)\exp(-\int f\,dx)},$$

beziehungsweise

$$y=\left[C_1+C_2\int\frac{\exp(-\int f\,dx)\,dx}{\left(\int\sqrt{\theta\exp(-\int f\,dx)}\,dx\right)^2}\right]\int\sqrt{\theta\exp(-\int f\,dx)}\,dx.$$

G. M. Karapandjitch

SUR QUELQUES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES DU DEUXIEME ORDRE

Dans le livre [1] sur les équations linéaries aux dérivées partielles de M. W. F. Ames on cite une série de 27 équations du II ordre (page 66) L' auteur cite les diverses oeuvres où se trouvent les équations dont il s' agit [2].

Pour résoudre un certaine nombre d' équations qui sont en question on peut utiliser les méthodes immédiates suggérées par N. Saltykow [3]. Ces méthodes ont une efficacité extraordinaire dans les cas favorables.

Le but de cet article est de montrer l'efficacité des méthodes dont il s' agit en les appliquant aux quelques équations citées dans le livre de M. Ames.

Prenons d' abord l' équation (8) de régistre de M. Ames à savoir

$$q \cdot r - p \cdot s = 0$$

qui se laisse écrire en forme d' une déterminante

$$\begin{vmatrix} q & s \\ p & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial y} & \dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial p}{\partial x} \end{vmatrix} = 0.$$

C' est une déterminante fonctionnelle qui est égale à zero — d' où il suit

$$p = f(z) \quad \therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x} = f(z) \quad \therefore \quad \int \frac{1}{f(z)}\, dz = x + \psi(y) \quad \therefore \quad G(z) = x + \psi(y).$$

La dernière relation nous donne

$$z = \Phi\,[x + \psi(y)]$$

ce que présente l' intégrale générale de l' équation donnée.

D' une manière analogue l' équation (9) de registre cité

$$q \cdot s - p \cdot t = 0$$

se peut présenter sous la forme

$$\begin{vmatrix} q & t \\ p & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial y} & \dfrac{\partial q}{\partial y} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial q}{\partial x} \end{vmatrix} = 0$$

d' où on tire

$$q=g(z) \therefore \frac{\partial z}{\partial y}=g(z) \therefore \int \frac{dz}{g(z)}=y+\psi(x) \therefore \mathrm{F}(z)=y+\psi(x)$$

ou

$$z=\Phi[y+\psi(x)]$$

ce que présente l' intégral générale de l' équation donnée.

Le troisième cas (11) est de la forme

$$q \cdot s-p \cdot t=q^3$$

qui peut s' écrire sous la forme

$$\frac{q \cdot s-p \cdot t}{q^2}=q$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{\partial}{\partial y} z$$

d' où on tire immédiatement

$$\frac{p}{q}=z+\varphi(x).$$

La dernière équation est une équation linéare à savoir

$$p-q[z+\varphi(x)]=0.$$

Le système correspondant des équations linéaires est de la forme suivante

$$\frac{dx}{1}=-\frac{dy}{z+\varphi(x)}=\frac{dz}{0}$$

d' où nous obtenons les deux relations

$$z=C_1, \quad -zx-\int \varphi(x)\,dx=y-C_2.$$

En tenant compte de la relation $C_2=\Phi(C_1)$ on tire immédiatement l' intégral générale d' équation (11) à savoir

$$zx+y=\Phi(z)+\psi(x) \qquad -\int \varphi(x)\,dx \equiv \psi(x).$$

Quant à l' équation (12) — elle se trouve résolue dans l' article [3] de N. Saltykow. Nous pouvons seulement d' une manière abrégée, reproduire la solution donnée. L' équation (12) (l' équation de Darboux des surfaces rectilignes avec le plan directoire)

$$q^2 r-2pqs+p^2 t=0$$

se laisse mettre sous la forme suivante

$$q^2\left[r-2\frac{p}{q} \cdot s+\frac{p^2}{q^2} \cdot t\right]=0 \therefore q^2\left[r-\frac{p}{q} \cdot s-\frac{p}{q} \cdot s+\frac{p^2}{q^2} \cdot t\right]=0.$$

Si on rejette la solution triviale $q=0$ on obtient

$$q\left(\frac{r}{q}-\frac{p}{q^2} \cdot s\right)-p\left(\frac{s}{q}-\frac{p}{p^2} \cdot t\right)=0 \therefore q\,\frac{rq-ps}{q^2}-p\,\frac{sq-pt}{q^2}=0$$

d' où il suit

$$q\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{q}\right)-p\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{q}\right)=0.$$

La dernière équation a une forme de déterminante fonctionnelle à savoir

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{p}{q}\right) \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{p}{q}\right) \end{vmatrix}=0 \quad \therefore \quad \frac{}{q}=\Phi(z) \quad \therefore \quad p-q\,\Phi(z)=0.$$

On peut établir imédiatement le système

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{\Phi(z)}=\frac{dz}{0}$$

d' où nous avons

$$z=C_1 \quad y+x\,\Phi(z)=C_2$$

Comme il est $C_2=\psi(C_1)$ nous allons obtenir l' intégral général sous la forme

$$y+x\,\Phi(z)=\psi(z).$$

Le cas d' équation (13) de registre d' Ames

$$q^2 r-2\,pqs+p^2 t=pq^2$$

on peut rattacher à la précédante. Il suit immédiatement

$$q^2\left[q\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{q}\right)-p\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{q}\right)\right]=p\cdot q^2.$$

La solution triviale $(q=0)$ rejetée, on obtient

$$q\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{q}\right)-p\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{q}\right)+1\right]=0 \quad \therefore \quad q\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{p}{q}+y\right]-p\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{p}{q}+y\right]=0$$

La déterminante fonctionnelle étant égale à zéro

$$\begin{vmatrix} q & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{p}{q}+y\right) \\ p & \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{p}{q}+y\right) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{p}{q}+y\right] \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{p}{q}+y\right] \end{vmatrix}=0$$

nous fournit la relation

$$p+q\,[y-\psi(z)]=0.$$

Nous allons établir d' une manière tout à fait analogue aux cas précédents — la solution générale

$$y=\Phi(z)\,e^x+\psi(z).$$

Un intérêt particulier offre l' équation (15) de registre d' Ames de la forme

$$qr-s-ps-qs+t+pt=0.$$

En divisant l'équation donnée par q^2 on obtient

$$\frac{qr-ps}{q^2}-\frac{s}{q^2}-\frac{qs}{q^2}+\frac{t}{q^2}+\frac{pt}{q^2}=0$$

d'où on tire

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{q}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{q}\right)-\frac{sq-pt}{q^2}+\frac{t}{q^2}=0 \quad \therefore \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{p}{q}+\frac{1}{q}\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{p}{q}+\frac{1}{q}\right]=0.$$

Posant

$$\frac{p}{q}+\frac{1}{q}=U$$

nous pouvons écrire $\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial y}$ et la différentielle totale est de la forme suivante

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}\,dx+\frac{\partial U}{\partial y}\,dy=\frac{\partial U}{\partial x}\,[dx+dy]=\frac{\partial U}{\partial x}\,d\,(x+y).$$

D'après une méthode élémentaire d'Euler — on peut poser

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\mathrm{f}'\,(x+y)$$

et nous allons établir

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}\,d\,(x+y)=f'\,(x+y)\,d\,(x+y).$$

Il est évident que la fonction U a la forme

$$U=f\,(x+y).$$

Et tenant compte de la relation

$$\frac{p}{q}+\frac{1}{q}=U \quad \therefore \quad p-q\cdot f\,(x+y)=-1$$

il est facile d'obtenir le système

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-f\,(x+y)}=\frac{dz}{-1}.$$

Le procédé déjà connu nous fournit

$$z=\psi\,(x+y)+\Phi\,(x+z)$$

ce que présente l'intégral général de l'équation (15).

En suivant les idées déjà exposées considerons l'équation (17) d'Ames de la forme

$$(e^x-1)\cdot(qr-ps)=p\cdot q\cdot e^x.$$

On peut écrire l'équation donnée en forme

$$\frac{e^x-1}{e^x}\cdot\frac{qr-ps}{q^2}=\frac{p}{q} \quad \therefore \quad \frac{e^x-1}{e^x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p}{q}.$$

Désignant $p/q=u$ nous pouvons écrire

$$\frac{e^x-1}{e^x}\cdot\frac{du}{dx}=u.$$

Cette équation — tout à fait élémentaire — nous donne

$$u=(e^x-1)\,\alpha(y)$$

où $\alpha(y)$ joue le rôle d' une constante d' intégration.

La substitution $u=p/q$ nous ramène aux anciennes variables ainsi que nous obtenons

$$\frac{1}{e^x-p}\cdot p-\alpha(y)\cdot q=0.$$

Le procédé déjà établi pour les équations linéaires nous offre la relation

$$z=\Phi\,[x-e^x-\psi(y)]$$

ce que présente l' intégral générale de l' équation (17).

On doit remarquer qu' on peut généraliser le cas dont il s' agit. L' équation

$$f(x)\cdot(qr-ps)=p\cdot q\cdot f'(x)$$

se laisse intégrer par le procédé déjà exposé (si on peut intégrer la fonction $f(x)$).

Enfin nous allons nous occuper de l' équation (10) de registre d' Ames. L' équation dont il s' agit a la forme suivante

$$s+rt-s^2=0$$

et elle se laisse écrire en forme

$$\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial q}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}=0 \quad\therefore\quad \frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial q}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial y}-1\right)=0$$

d' où il suit

$$\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial q}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial(p-y)}{\partial y}=0 \quad\therefore\quad \frac{\partial(p-y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial q}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial(p-y)}{\partial y}=0.$$

La dernière équation ne présente qu' une déterminante fonctionnelle de la forme.

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial(p-y)}{\partial x} & \dfrac{\partial q}{\partial x}\\[2ex] \dfrac{\partial(p-y)}{\partial y} & \dfrac{\partial q}{\partial y}\end{vmatrix}=0$$

d' où on peut tirer la relation

$$p-y=f(q).$$

En posant $p=C_1$ (la séparation des variables) on obtient de l' équation précédente

$$q=-\psi'(C_1-y).$$

La differentielle totale nous fournit

$$dz = C_1\, dx - \psi'(C_1 - y)\, dy \quad \therefore \quad z = C_1 x + \psi(C_1 - y) + C_2.$$

En tenant compte de la relation $C_2 = \Phi(C_1)$ on obtient

$$z = C_1 x + \psi(C_1 - y) + \Phi(C_1).$$

La différentiation de la dernière équation à l'égard de C_1 nous donne une nouvelle relation de sorte que l'ensemble de deux équations

$$z = C_1 x + \psi(C_1 - y) + \Phi(C_1) \qquad 0 = x + \psi'(C_1 - y) + \Phi'(C_1)$$

présente l'intégral général en forme paramétrique.

La forme que nous venons d'obtenir est différente de celle que cite M. Ames [2.6].

Les cas que nous venons d'exposer dans cet article illustrent les procédés des méthodes élémentaires données par N. Saltykow [3].

On ne doit pas négliger les méthodes dont il s'agit et n'essayer pas les utiliser avant toutes les autres méthodes, car le caractère tout à fait immédiat de ces méthodes élémentaires et l'efficacité de leurs applications assurent les avantages vis-à-vis les méthodes plus générales que celles-ci.

REFERENCES

[1] William F. Ames, *Non linear Partial Differential Equations in Engineering*, Academic Press, New York—London , 1965.

[2] 1. A. F. Ayres Ir., *Theory and Problems of Differential Equations*, Schaum Publ. Co., New York, 1952.

2. A. R. Forsyth, *Theory of Differential Equations*, Vols. 5 and 6. Dower, New York, 1959.

3. M. H. Martin, Pacific I. Math. 3, 165, 1953.

4. M. Morris and O. E. Brown, *Differential Equations*, Prentice—Hall, Princeton New Jersey, 1942.

5. A. V. Pogorelov, *On Monge—Ampère Equations of Elliptic—type*, Gronningen 1963.

6. I. N. Sneedon, *Elements of Partial Differential Equations*, New York, 1957.

[3] N. Saltykow, *Les méthodes élémentaires d'intégration des équations aux dérivées partielles de deuxième ordre*, Acad. Serbe Sci, Bulletin CLXXXI, I classe 90, Belgrade 1939. (en serbe)

Станимир Фемић

ЈЕДАН TURÁN-OV НИЗ ЕЛИПТИЧКИХ ИНТЕГРАЛА ТРЕЋЕ ВРСТЕ

Низ функција $\varphi_m(x)\,(m=1, 2, \ldots)$ реалне промењиве x које у неком интервалу независном од m имају особину да све детерминанте облика

$$D_m = \begin{vmatrix} \varphi_{m-1}(x) & \varphi_m(x) \\ \varphi_m(x) & \varphi_{m+1}(x) \end{vmatrix} \quad (m=2, 3, \ldots) \tag{1}$$

имају негативну вредност назива се Turán-ov низ [1]. Ти низови имају интересантне особине и познати су многи примери оваквих низова (на пример, [1] — [7]).

Циљ ми је да у овом раду покажем да низ једне класе елиптичких интеграла треће врсте, уз извесне услове, образује Turán-ov низ. Ради се о интегралима облика

$$Л(n, k, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}} \int_0^{\varphi} \frac{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}{1+n \sin^2 p}\, d\varphi\,(0 \leqslant k \leqslant 1), \tag{2}$$

који играју важну улогу у теорији коничних површина. Тако на пример једначина криве линије основе косе кружне купе, кад се њен омотач развије у раван, гласи

$$\theta(\rho) = Л(n, k, \varphi),$$

при чему је θ угао на мрежи између једне почетне изводнице купе и неке произвољне изводнице ρ. Величина $n > 0$ има конктретно геометријско значење [8]. То исто важи и за елиптички конус при чему, разумљиво, величина n има друго значење [8].

Интеграл (2) се може изразити нормалним елиптичким интегралом III врсте Legendre-овог типа [8]

$$Л(n, k, \varphi) = \sqrt{\frac{(n+1)(n+k^2)}{n}}\, \Pi(n, k, \varphi) - k^2 \sqrt{\frac{n+1}{n(n+k^2)}}\, F(k, \varphi),$$

где је

$$\Pi(n, k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+n \sin^2 \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

поменути Legendre-ов интеграл III врсте, док

$$F(k, \varphi)=\int_{0}^{\varphi} \frac{d \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

представља нормални елиптички интеграл I врсте.

Доказујем следећи

Став. *Низ елиптичких интеграла* $Л(n, k, \psi_m)$ $(m=1, 2, \ldots)$ *образује Turán-ов низ кадгод амплитуда* ψ_m *интеграла* $Л$ *задовољава услове*

$$\cos \psi_{\nu+1}=\cos \psi_1 \cos \psi_\nu-\sin \psi_1 \sin \psi_\nu \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi_{\nu+1}} \quad (\nu=1, 2, \ldots m-1) \tag{3}$$

*и уз то је**

$$\psi_\nu \in\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (\nu=1, 2, \ldots m) \tag{4}$$

Пре него што докажемо неједнакост $D<0$, тј. за овај случај,

$$Л(n, k, \psi_{m-1})\, Л(n, k, \psi_{m+1})-Л^2(n, k, \psi_m)<0 \quad (m=2, 3, \ldots), \tag{5}$$

приметимо следеће. Услови (3) нису вештачки постављени. Уз овакве услове важи адициона формула за нормалне елиптичке интеграле I, II и III врсте Legendre-овог типа [9] као и за интеграле типа $Л(n, k, \psi)$ [8].

При доказивању наведеног става користићу један став који сам доказао у раду [6] и који гласи:

Нека је $f(x)$ позитивна, непрекидна и монотоно силазна функција. Интеграли

$$\omega_m=\omega(\psi_m)=\int_0^{\psi_m} f(x)\, dx \quad (m=1, 2, \ldots)$$

увек образују Turán-ов низ кадгод низ $\{\psi_m\}$ монотоно расте и уз то је конвексан.

Доказ става. Из релација (3) и (4) следи

$$\cos \psi_{\nu+1}<\cos \psi_1 \cos \psi_\nu<\cos \psi_\nu,$$

тако да је

$$\psi_{\nu+1}>\psi_\nu \quad (\nu=1, 2, \ldots) \tag{6}$$

Подинтегрална функција функције Л има извод

$$-\frac{2 n+k^2-n k^2 \sin^2 \varphi}{(1+n \sin^2 \varphi)^2 \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \sin \varphi \cos \varphi,$$

па услед $n \geqslant n k^2 \sin^2 \varphi$ тј. $2 n+k^2>n k^2 \sin^2 \varphi$ следи позитивна вредност бројиоца последњег разломка, што значи да је подинтегрална функција функције $Л$ монотоно силазна. Она је и позитивна, а низ $\{\psi_m\}$, према (6),

* У случају да ψ_ν припада ширем интервалу, интеграли $Л$ не морају образовати Turán-ов низ.

монотоно расте. Надаље, услови (3) могу се заменити еквивалентним условима

$$\operatorname{tg}\frac{\psi_{\nu+1}+\psi_{\nu-1}}{2}=\operatorname{tg}\psi_\nu\sqrt{1-k^2\sin^2\psi_1}\ (\psi_0=0,\ \nu=1,2,\ldots m-1),$$

што сам показао у раду [6]. Услед тога је

$$\operatorname{tg}\frac{\psi_{\nu+1}+\psi_{\nu-1}}{2}<\operatorname{tg}\psi_\nu,$$

одакле следи

$$\psi_{\nu+1}-\psi_\nu<\psi_\nu-\psi_{\nu-1}\ (\nu=1,2,\ldots m-1),$$

тј. низ $\{\psi_m\}$ је конвексан. На основу свега овог следи неједнакост (5), чиме је став доказан.

Интересантне су и дегенерације $k=0$ и $k=1$. Тада се интеграл $Л$ своди на $\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{n+1}\operatorname{tg}\varphi)$ одн. на $\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{n}\operatorname{tg}\varphi)$, што значи да низови облика $\{\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{n+1}\operatorname{tg}\psi_m)\}$ уз услове $\psi_{\nu+1}=\psi_\nu+\psi_1$ $(\nu=1,2,\ldots m-1)$, одн. $\{\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{n}\operatorname{tg}\psi_m)\}$ уз услове који следе из (3) за $k=1$, представљају Turàn-ове низове.

LITERATURA

[1] L. Koschmieder, *Elliptische Funktionen als Turánsche Folgen*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, 60 (1957), p. 3 — 6.

[2] P. Turán, *On the zeros of the polynomials of Legendre*, Časopis propestováni matematiky a fysiky, 75, (1950) p. 113 — 122.

[3] M. T. Eweida, *On Turáns determinant....*, Revista mat. Hisp.—Amer. 15, (1955) p. 79—87.

[4] E. F. Beckenbach, W. Seidel and O. Szász, *Recurrent determinants of Legendre and of ultraspherical polynomials*, Duke Math. Journal, 18, (1951) p. 1—10.

[5] W. Al-Salam, *On a generalized Hermite polynomial*, Bolletino Unione mat. italiana IV, (1957) p. 241—246.

[6] S. Fempl, *Über einige Turánsche Folgen.* Publications de l'Institut Mathématique, (Beograd) T. XIV (1960) p. 61—66.

[7] S. K. Chatterjea and B. K. Gosh *Formulas, for the even and odd Legendre polynomials*, Математички Весник, 5, (20) Sv. 3 (1968).

[8] С Фемпл, *О једном шийу елийшичкої иншеїрала III врсше и о њеіовим йрименама*, Зборник радова САН, Мат. Инст., 7, (1959) Београд. 107 — 120.

[9] O. Schlömilch, *Vorlesungen über einzelne Theile der Höheren Analysis*, Braunschweig, 1879.

EINE TURÁNFOLGE ELLIPTISCHER INTEGRALE DRITTER GATTUNG

Stanimir Fempl

Zusammenfassung.

In der Arbeit wird gezeigt dass die Folge elliptischer Integrale dritter Gattung

$$Л(n,k,\psi_m)=\sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}}\int_0^{\psi_m}\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1+n\sin^2\varphi}\,d\varphi\ (0\leqslant k\leqslant 1,\ n>0,\ m=1,2,\ldots)$$

eine Turánfolge bildet, d.h. dass die Determinanten

$$\begin{vmatrix} Л(n, k, \psi_{m+1}) & Л(n, k, \psi_m) \\ Л(n, k, \psi_m & Л(n, k, \psi_{m-1}) \end{vmatrix} \quad (\psi_0 = 0,\ m = 1, 2, \ldots)$$

sämtlich negativ sind, sobald die Amplituden ψ_m dieser Integrale den $m-1$ Bedingungen

$$\cos \psi_{\nu+1} = \cos \psi_1 \cos \psi_\nu - \sin \psi_1 \sin \psi_\nu \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi_{\nu+1}} \quad (\nu = 1, 2, \ldots m-1)$$

und

$$\psi_\nu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (\nu = 1, 2, \ldots m-1)$$

genügen. Unter diesen Bedingungen gelten die Additionsformeln für elliptische Normalintegrale I, II u. III Gattung von Legendretypus, sowie für Integrale $Л$.

Никола Росић

ПРИЛОГ ИНТЕГРАЦИЈИ РАЦИОНАЛНО РАЗЛОМЉЕНИХ ФУНКЦИЈА

Нека је

$$f(x) = P_n(x)/Q_m(x) \tag{1}$$

права рационално разломљена функција. У литератури су позната два општа метода за интеграцију функција (1).

1°. Метод растављања на просте разломке [1], [2], [3].

2°. Метод Остроградског или метод издвајања рационалног дела интеграла, који се примењује, ако полином $Q_m(x)$ има вишеструке реалне или комплексне нуле [1], [2].

Како је примена у пракси поменутих метода често неподесна због много рачуна, циљ овог рада је да дâ неке поступке који ће да поједноставе интеграцију функција (1). Ови поступци се састоје у томе да се у извесним случајевима елиминишу методе 1° и 2°, или ако то није могуће да се рачун упрости. Ови поступци су засновани на следећим ставовима.

Став 1. *Ако полиноми* $P_n(x)$ *и* $Q_m(x)$ *задовољавају услов* $m \geqslant n+2$ *и ако је полином* $Q_m(x)$ *облика*

$$Q_m(x) = (x-a)^p (x-b)^q, \tag{2}$$

тада се функција (1) *може интегралити без растављања на просте разломке*

Доказ. Ако се изврши смена

$$t = (x-a)/(x-b), \text{ тада је } dx = [(b-a)/(t-1)^2]\, dt, \tag{3}$$

па је интеграл

$$J = \int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\, dx = \int \frac{P_n(x)\, dx}{(x-a)^p (x-b)^q} = -\int \frac{(t-1)^{m-n-2} R_n(t)}{(b-a)^{m-1}\, t^p}\, dt,$$

што је и требало доказати, јер се добијена рационално разломљена функција може интегралити без растављања на просте разломке. Доказани став је уопштење резултата [4] у коме је на исти начин рачунат специјалан случај $\int [1/(x-a)^p \cdot (x-b)^q]\, dx$.

Став 2. *Ако полиноми* $P_n(x)$ *и* $Q_m(x)$ *задовољавају услов* $m \geqslant n+2$ *и ако полином* $Q_m(x)$ *има* $x=0$ *нулу* p-*тог реда тада се подинтегрална функција* (полином $Q_m(x)$) *интеграла*

$$J=\int [P_n(x)/Q_m(x] \, dx$$

може ослободити фактора x^p.

Доказ. Према услову става полином $Q_m(x)$ се може написати у облику

$$Q_m(x)=x^p Q_{m-p}(x), \tag{4}$$

па је, према (4), интеграл

$$J=\int \{P_n(x)/[x^p Q_{m-p}(x)]\} \, dx$$

Ако се изврши смена

$$x=1/t, \ dx=-(1/t^2) \, dt$$

биће, интеграл

$$J=-\int \{[t^{m-n-2} R_n(t)]/S_{m-p}(t)\} \, dt$$

што је и требало доказати.

Ставом 2 је исказано једно елементарно запажање чије су последице интересантне са гледишта практичних примена, што значи да он служи као флатформа за интеграцију неких функција (1).

Последица 1. *Ако је полином* $Q_m(x)$ *облика*

$$Q_m(x)=(x-a)^p (x^2+b^2) \tag{5}$$

тада се сменом

$$x=(a^2+b^2)/t+a \tag{6}$$

подинтегрална функција интеграла J *може ослободити фактора* $(x-a)^p$, *а самим тим и функција* (1) *интегралити без растављења на просте разломке, што је евидентно, јер се у овом случају интеграл* J *своди на интеграл*

$$J=-\int \frac{t^{m-n-2} R_n(t) \, dt}{(a^2+b^2)^p (t^2+2\,at+a^2+b^2)}$$

Пример 1. Интеграл

$$J=\int \frac{(x+1) \, dx}{(x-1)^3 (x^2+1)}$$

после смене

$$x=2/t+1, \ dx=-(2/t^2) \, dt,$$

биће

$$J=-\frac{1}{2}\int \frac{(t^3+t^2) \, dt}{t^2+2\,t+2}=-\frac{1}{2}\int \left[t-1+\frac{2}{(t+1)^2+1}\right] dt=$$

$$=-\frac{t^2}{4}+\frac{t}{2}-2 \operatorname{arc\,tg}(t+1)+C,$$

па је коначно

$$J=-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+2\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{x-1}+C.$$

Последица 2. *Ако је полином $Q_m(x)$ облика*

$$Q_m(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_k)^{\alpha_3},$$

тада се сменом

$$x=M/t+a_i,\ i=1,2,\ldots,k,$$

где је $M=N.Z.S.\{|a_i-a_1|,\ldots,|a_i-a_k|\}$, подинтегрална функција интеграла J може ослободити било ког свог фактора $(x-a_i)^{\alpha_i}$.

С обзиром на ову чињеницу целисходно је ослободити се оног фактора $(x-a_i)^{\alpha_i}$, при чему је $\alpha_i=\max\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\}$.

Са гледишта практичних примена изложени поступак је ефикасан, а самим тим и употребљив, ако је полином $Q_m(x)$ облика

$$Q_m(x)=(x-a)^p(x-b)(x-c),\ p>1.$$

Пример 2. Интеграл

$$J=\int\frac{x^2-3x-1}{x(x-2)(x-1)^3}dx$$

после смене

$$x=1/t+1,\ dx=-(1/t^2)\,dt$$

биће

$$J=\int\frac{(t^3-3t-1)\,dt}{(1-t)(1+t)}=\int\left[-t-\frac{2t+1}{(1-t)(1+t)}\right]dt=$$

$$=-\frac{t^2}{2}+\frac{3}{2}\ln(1-t)+\frac{1}{2}\ln(1+t)+C,$$

па је коначно

$$J=-\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{3}{2}\ln\frac{x-2}{x-1}+\frac{1}{2}\ln\frac{x}{x-1}+C.$$

На крају напоменимо, да је предност поступака изложених у ставу 1 и последицама 1 и 2 става 2 над методама 1° и 2° у њиховој економичности, јер се мањим бројем операција долази до вредности интеграла функција (1).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. М. Фихтенгольц: *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, Т. II, Москва, 1959, стр. 45

[2] В. И. Смирнов: *Курс высшей математики*, Т I, Москва 1958, стр. 465

[3] Mangoldt-Knopp: *Einführung in die höhere Mathematik*, III t. 9, Auflage 1948 (S. Hirzel Verlag-Stuttgart str. 34).

[4] А. Ф. Бермант: *Курс математического анализа*, Т I, издање 12, стр. 333

ПРИЛОЖЕНИЕ ИНТЕГРИРОВАНИЮ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

Н. Росич

Резюме

Метод разложения на простые дроби и метод Остроградского или метод выделения рациональной части интеграла являются общими методами для интегрирования функции (1). Но, в практике можно интегрировать функции (1) не ползуясь этими методами, если многочлены $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ удовлетворяют соотношению $m \geqslant n+2$ и многочлен $Q_m(x)$ принимает вид (2) или (5). В этом случае надо совершить соответственно постановку переменой (3) или (6).

Милан Р. Тасковић

ДВА ПРОБЛЕМА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

1. Увод. На Великој школи (1894—1905) и Универзитету (1905—1938) М. Петровић је држао више специјалних курсева математике. У прво време предавао је вишу математику студентима Техничког и Филозофског факултета, да би од 1900. искључиво предавао на Филозофском факултету. За ово време М. Петровић је прешао огроман пут професора васпитача и градитеља научног подмлатка у нас, пут који је ишао упоредо са развојем његовог научног стваралаштва.

Школован на изворима париске математичке школе (1889—1894), М. Петровић је прихватио француски систем наставе. То је била сасвим исправна и плодоносна оријентација М. Петровића, што је било нормално очекивати с обзиром на то да су његови професори били [1]: Poincaré, Darboux, Picard, Hermite, Painlevé, Appell, Tannery, Boussinesq, Koenigs, Lippmann — све славна имена светске науке. Зато он, тематски и садржајно, пресликава те курсеве математике на услове наше наставе математике. Ово је било потпуно ново и реформаторско у настави, и остало и данас као тековина Михаила Петровића.

Према раду [1]. М. Петровић је на београдском Универзитету држао 16 разних курсева математике[1]. За већину ових курсева припремао је литографисане табаке (скрипта) [1], [2]; а објавио је и три уджбеника [3], [4], [5].

Поред овога, М. Петровић је за разлику од својих претходника на Великој школи (Димитрије Нешић и други) обратио пажњу и на квалитет научног стваралаштва и проблема којима се је бавио.

За ову прилику смо издвојили таква два проблема из 1926 године. То су проблеми из диференцијалних једначина, за које у овом тренутку не располажем подацима, који би потврђивали њихову намену.

То је у ствари један тип проблема са две варијанте, при чему је друга варијанте била изостављена тј. прецртана. Зашто? Свакако је разлог сличност проблема, а с'друге стране, први проблем обухвата други, па је такав избор био сасвим разумљив.

Фотокопију оригиналног рукописа ових проблема нашли смо у књизи [2] Д. Трифуновића.

У даљем тексту изложићемо и решење ових проблема.

---

[1]) 1940. године М. Петровић је на тражење професора Д. С. Митриновића лично дао овај податак (написан оловком).

2. Проблем 1. *Формира͞ти једначину облика*

(1) $$y''+f_1 y'+f_2 y+f_3=0$$

коју задовољава функција

(2) $$y=X_1+\lambda\int_0^x \Phi(x)\,dx,$$

īgе је

(3) $$\Phi(x)=\int (X_2 y+X_3)\,dx,$$

īgе су X_1, X_2, X_3, λ да͞те функције оg x.

Обрну͞то, из да͞тих f_1, f_2, f_3 оgреgи͞ти функције X_1, X_2, X_3, ͞тако gа буgе заgовољена јеgначина (1).

2.1. Решење. Диференцирањем функције y из (2) два пута, добија се

$$y'=X_1'+\lambda'\int_0^x \Phi(x)\,dx+\lambda\frac{d}{dx}\left\{\int_0^x \Phi(x)\,dx\right\}$$

(4) $$y''=X_1''+\lambda''\int_0^x \Phi(x)\,dx+2\lambda'\frac{d}{dx}\left\{\int_0^x \Phi(x)\,dx\right\}+\lambda\,\Phi'(x)$$

С друге стране, из (2) за $\lambda\neq 0$ излази

(5) $$\int_0^x \Phi(x)\,dx=\frac{y-X_1}{\lambda}$$

па (4), на основу (3) и (5) добија облик

(6) $$y''-\frac{2\lambda'}{\lambda}y'+\left(\frac{2\lambda'^2}{\lambda^2}-\frac{\lambda''}{\lambda}-\lambda X_2\right)y-\left\{X_1''-\frac{2\lambda'}{\lambda}X_1'+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{2\lambda'^2}{\lambda^2}-\frac{\lambda''}{\lambda}\right)X_1+\lambda X_3\right\}=0,$$

што представлља једначину типа (1), односно једначину коју је и требало формирати.


1) Формирати једначину облика
(1) $y''+f_1y'+f_2y+f_3=0$
коју задовољава функција
$y=X_1+\lambda\int_0^x \phi(x)\,dx$
где је $\phi(x)=\int(X_2y+X_3)\,dx$
где су X_1, X_2, X_3, λ дате функције од x.
Обрнуто, из датих f_1, f_2, f_3 одредити X_1, X_2, X_3, λ тако да буде задовољена једначина (1).

Аутограф првог Петровићевог проблема

Решимо сада обрнути проблем, тј. за дате функције f_1, f_2, f_3 одредимо функције X_1, X_2, X_3, λ. Како једначина (1) мора бити задовољена за функцију y, то се на основу (6) и (1), изједначавањем одговарајућих коефицијената, добија

$$
(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{2\lambda'}{\lambda}+f_1=0, \quad -\dfrac{2\lambda'^2}{\lambda^2}+\dfrac{\lambda''}{\lambda}+\lambda X_2+f_2=0 \\[2ex] X_1''-\dfrac{2\lambda'}{\lambda}X_1'+\left(\dfrac{2\lambda'^2}{\lambda^2}-\dfrac{\lambda''}{\lambda}\right)X_1+\lambda X_3+f_3=0 \end{cases}
$$

Овај систем једначине еквивалентан је систему

$$
\frac{2\lambda'}{\lambda}+f_1=0, \quad \lambda X_2+f_2=\frac{2\lambda'^2}{\lambda^2}-\frac{\lambda''}{\lambda}
$$

$$
X_1''-\frac{2\lambda'}{\lambda}X_1'+(\lambda X_2+f_2)X_1+\lambda X_3+f_3=0
$$

који важи и у случају кад је

$$
(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{2\lambda'}{\lambda}+f_1=0, \quad \lambda X_2+f_2=\dfrac{2\lambda'^2}{\lambda^2}-\dfrac{\lambda''}{\lambda} \\[2ex] X_1''-\dfrac{2\lambda'}{\lambda}X_1'+(\lambda X_2+f_2)X_1=0, \quad \lambda X_3+f_3=0 \end{cases}
$$

Из прве једначине изази

$$
(9) \qquad \lambda=Ce^{-\frac{1}{2}\int f_1\,dx} \quad (C\text{-произвољна константа})
$$

па је даље, на основу (8)

$$
(10) \qquad \begin{cases} X_2=\dfrac{1}{C}e^{\frac{1}{2}\int f_1\,dx}\left\{\dfrac{1}{4}f_2^1+\dfrac{1}{2}f_1'-f_2\right\} \\[2ex] X_3=-\dfrac{1}{C}f_3e^{\frac{1}{2}\int f_1\,dx} \end{cases}
$$

Трећа једнакост у (8) онда постаје

$$
(10a) \qquad X_1''+f_1X_1'+\left(\frac{1}{4}f_1^2+\frac{1}{2}f_1'\right)X_1'=0
$$

Један партикуларни интеграл ове хомогене линеарне диференцијалне једначине је

$$
X_{1_\mathrm{I}}=e^{-\frac{1}{2}\int f_1\,dx}
$$

На основу овог, лако се налази и други њен партикуларни интеграл

$$
X_{1_\mathrm{II}}=xe^{-\frac{1}{2}\int f_1\,dx}
$$

Према томе, општи интеграл предходне хомогено-линеарне диференцијалне једначине гласи:

$$
(11) \qquad X_1 = Ae^{-\frac{1}{2}\int f_1\,dx} + B\,x\,e^{-\frac{1}{2}\int f_1\,dx} \quad (A, B \text{ су произвољне константе})
$$

На тај начин, формулама (9), (10), (11) добијене су тражене функције X_1, X_2, X_3, λ.

2.2. Примедба. Приликом решавања система једначина (7) у првом кораку се намеће функција λ, одређена на претходни начин (Интересантно је да је она једно партикуларно решење за функцију X_1). Наиме, функција λ не може имати другачији облик. Исто то односи се и на израз добијен за функцију X_2.

Међутим, изрази добијени за функције X_1 и X_3, ма да садрже произвољне константе, нису најопштије могући, јер су добијени решавањем система (8), а не система (7). Наиме, свако решење система (8) је и решење система (7), док обрнуто не важи.

Према томе треба напоменути да су преткодним поступком, решавања другог дела проблема 1, сужене могућности за одређивање функција X_1 и X_3. Наиме, из (7) је

$$
X_3 = f(X_1, X_1', X_1'' f_1),
$$

па произвољним бирањем функције X_1 одређује се и функција X_3. Значи, претходно одређене функције X_1 и X_3 у (10) и (11) чине овај поступак специјалним. Но, оне су од интереса због добијене линеарне хомогене једначине (10а), чије је решење добијено у (11).

3. Проблем 2. *Формирати диференцијалну једначину*

$$
(12) \qquad y'' + f(x)\,y' + \varphi(x)\,y + \Psi(x) = 0
$$

коју задовољава функција y дата релацијом

$$
(13) \qquad \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{y - X_1}{X_2}\right) = X_3\,y
$$

īge су X_1, X_2, X_3 даше функције од x.

Обрнуто, моīу ли се, када су даше функције f, φ, Ψ одредити функције X_1, X_2, X_3?

3.1. Решење. За први део проблема треба одредити функције f, φ, Ψ. У том циљу за функцију

$$
g(x) = \frac{y - X_1}{X_2} = \frac{y}{X_2} - \frac{X_1}{X_2}
$$

израчунајмо други извод. Како је

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}\,g(x) &= \frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{X_2}\right)y + \frac{1}{X_2}\,y' - \frac{d}{dx}\left(\frac{X_1}{X_2}\right)\right\} \\
&= \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{X_2}\right)y + 2\,\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{X_2}\right)y' + \frac{1}{X_2}\,y'' - \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{X_1}{X_2}\right),
\end{aligned}
$$

с обзиром на дату релацију (13) је

$$
(14) \qquad y'' + 2\,X_2\,\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{X_2}\right)y' + X_2\left\{\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{X_2}\right) - X_3\right\}y - X_2\,\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{X_1}{X_2}\right) = 0
$$

Према томе, тражена диференцијална једначина (12) је облика (14), где су функције f, φ, Ψ одређене (на основу (14)) тако да је

$$
(15) \qquad \begin{cases} f(x) = 2\, X_2 \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{X_2}\right) \\[2ex] \varphi(x) = X_2 \left\{ \dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{1}{X_2}\right) - X_3 \right\} \\[2ex] \Psi(x) = -X_2 \dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{X_1}{X_2}\right) \end{cases}
$$

Решимо сада обрнут проблем, тј. одредимо функције X_1, X_2, X_3 ако су дате функције f, φ, Ψ у (1). Да би у том случају функција y задовољила једначину (13) довољно је да важи (15).

Једначина

$$
f(x) = 2\, X_2 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{X_2}\right)
$$

еквиланетна је једначини

$$
\frac{1}{2} f(x) = \frac{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{X_2}\right)}{\dfrac{1}{X_2}}
$$

чија интеграција даје

$$
X_2 = C e^{-\frac{1}{2}\int f(x)\, dx} \qquad (C \text{ је константа интеграције}).
$$

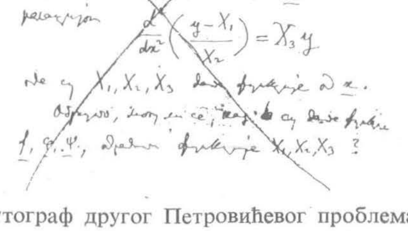
Заменом тако одређене функције X_2 у преосталим двема једначинама (15) добијамо

$$
(17) \qquad X_3 = C_1 \left\{ f'(x) + \frac{1}{2} f^2(x) - 2\varphi(x) \right\} e^{\frac{1}{2}\int f(x)\, dx} \quad \left(C_1 = \frac{1}{2C} \right)
$$

$$
(18) \qquad X_1 = -e^{-\frac{1}{2}\int f(x)\, dx} \left\{ \int \left[\int \Psi(x)\, e^{\frac{1}{2}\int f(x)\, dx}\, dx \right] + C_2 x + C_3 \right\},
$$

где су C_2 и C_3 константе интеграције.

На основу (16), (17) и (18) одређене су функције X_1, X_2, X_3.


2) Формирати диф. једначину облика

$y'' + f(x)y' + \varphi(x)y + \psi(x) = 0$

који задовољава функција y дата релацијом

$\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{y - X_1}{X_2}\right) = X_3\, y$

где су X_1, X_2, X_3 дате функције од x.

Обрнуто, како ће, када су дате функције f, φ, ψ, одредити функције X_1, X_2, X_3 ?

Аутограф другог Петровићевог проблема

3.2. Примедба. Приликом решавања проблема 2, наметнуто је ограничење $X_2 \neq 0$. Међутим ово ограничење намеће се одмах из релације (13), као што се ограничење за функцију λ намеће још у (2).

У решавању претходних проблема узимана су само неопходна ограничења за функције λ у (2) и X_2 у (13).

4. Интересантно би било поставити питање какве је задатке М. Петровић форсирао на испитима, шире речено, какви су проблеми посебно интересовали М. Петровића у његовом научном и педагошком раду, боље речено, шта је у светлости тих проблема М. Петровићу било у средишту педагошког интересовања и каква је била његова концепција испита. Не улазећи подробније у ова питања, може се запазити следеће: М. Петровић није само подигао квалитет испита, већ је очигледно, на испиту од кандидата тражио, бар у извесној мери специфичан, оригинални поступак у решавању проблема.

То је особина да се разним елементарним досеткама, подесним бирањем одређених чињеница, решава одређен проблем. У ствари, то је главна и драгоцена особина и многих Петровићевих радова.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. С. Митриновић, *Прилози за биографију Михаила Петровића*, Весник Друштва мат., физ. и астронома НР Србије, XII (1960), Београд.

[2] Д. Трифуновић, *Летопис живота и рада Михаила Петровића*, САНУ, Од. Прир.-мат. наука, Посебна изд. 652, Београд, 1968 (у штампи).

[3] М. Петровић, *Рачунање са бројним размацима*, Београд, 1932.

[4] М. Петровић, *Елиптичке функције*, Београд, 1937.

[5] М. Петровић, *Интеграција диференцијалних једначина помоћу редова*, Београд 1938.

DEUX PROBLÈMES DE M. PETROVIĆ

Milan R. Tasković

Résumé

On expose avec commentaire les solutions complètes de deux problèmes préparés en 1926 par M. Petrović pour les examens de son cours d'équations différentielles. On essaie d'en tirer quelques conclusions concernant le style du procédé pédagogique et la conception d'examen de Michel Petrovitch.

Ј. Петрић,
Б. Ристић

АНАЛИЗА УТИЦАЈА ВЕТРА НА БАЛИСТИЧКЕ ПУТАЊЕ ПРИМЕНОМ АНАЛОГНИХ РАЧУНАРА*

1. УВОД

У раду се даје методски и практични приступ анализи утицаја услова реалне атмосфере на тела променљиве брзине и масе која лете по балистичкој путањи. До сада су изучавани утицаји само неких параметара реалне атмосфере [1—5] као што су: утицај густине ваздуха и температуре, утицај ветра константног правца и интензитета итд. Ауторима овог рада нису познати радови и резултати који се односе на анализу утицаја рафалних ветрова на растурање око тачке погађања, која се не би јављала у отсуству деловања овог фактора. Циљ рада је да укаже на могућности решавања овог проблема применом аналогних рачунара и генератора белог шума. Упоредо се даје математичка основа постављеног задатка и указује на специфичности одговарајућег аналогног модела што до сада, изузимајући резултате [5], није био случај.

Проблем балистичких путања до сада је најчешће решаван применом методе нумеричке анализе и дигиталних рачунских машина. У радовима [1—4] о анализи балистичких путања ненумеричким поступцима више се говори са математичког становништа, а мање са гледишта реализације одговарајућих аналогних електричних модела. С друге стране, анализу утицаја рафалних ветрова на балистичке путање једино је могуће анализирати применом аналогних модела, што указује на практичан значај добијених резултата, нарочито ако се има у виду квалитативна оцена тражених резултата. За квалитативну и квантитативну оцену резултата предност је на страни хибридних рачунара и њихове примене. То не умањује вредност овога рада, тим пре што је познато да су хибридни рачунари новијег порекла и да се у највећем броју случајева не располаже са њима, због чега, чак и у случајевима када не би било неких других разлога, још увек има смисла парцијална примена аналогних и дигиталних рачунара у решавању различитих задатака из области примењене математике.

---

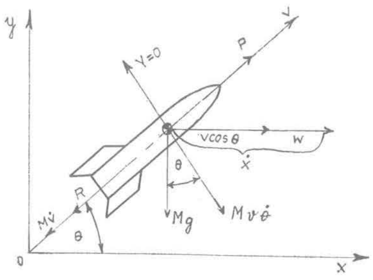
* Овај рад је саопштен на симпозијуму поводом 100-годишњице рођења познатог југословенског математичара М. Петровића — Аласа. Непосредни повод за овај рад поникао је из практичних интереса, док је његово приказивање на скупу у оквиру поменутог симпозија учињено из разлога што се и сам М. Петровић — Алас у периоду 1909 године бавио сличним питањима из ког периода потиче његова расправа „Кретање материјалне тачке у случајевима када отпор средине зависи од брзине и положаја тачке“. (видети Д. Трифуновић „Летопис живота и рада М. Петровића“, Посебно издање САН, Београд, 1968.).

У овом раду пришло се извесном упрошћењу проблема што је са гледишта примене аналогних рачунских машина било оправдано. То је омогућило да се у знатној мери упрости одговарајући аналогни електрични модел и да се при томе добију резултати који се у погледу тачности битно не разликују од резултата који би се добили применом сложенијих модела.

2. ОСНОВА МЕТОДЕ

Анализа утицаја рафалног ветра помоћу аналогног модела изводи се само за случај равни тј. када се посматра путања у вертикалној равни при дејству рафалног ветра у тој равни који има само хоризонталну компоненту са позитивном или негативним знаком. Под појмом рафала подразумева се нагло повећање брзине ветра за пет и више m/sec изнад средње брзине, са трајањем од неколико секунди, али не дуже од 20 sec. На основи ове дефиниције може се закључити да је генератор белог шума идеалан уређај за моделирање карактеристика рафалног ветра.

Полазећи од система сила које дејствују на тело променљиве масе, које се креће по балистичкој путањи у равни xoy, оне се могу приказати као на сл. 1,



Slika 1

где су:

P — сила потиска,

R — сила отпора,

M — маса тела које се креће,

v — брзина,

θ — угао елевације,

g — убрзање земљине теже,

Y — сила узгона,

w — брзина ветра.

Користећи се познатим Деламберовим принципом, имајући у виду сл. 1, могу се поставити следеће диференцијалне једначине кретања

$$M\dot{v}+R-P-Mg\sin\theta=0, \tag{1}$$

$$M\dot{v}\theta+Mg\cos\theta=0, \tag{2}$$

које се добијају пројекцијом свих сила на правац брзине и на правац нормале на брзину. Услови постављеног задатка одређују компоненте брзине

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\dot{x}=v\cos\theta+w,\\ \frac{dy}{dt}&=\dot{y}=v\sin\theta,\end{aligned} \tag{3}$$

одакле после диференцирања, под условом да је $w=\text{const.}$, следи

$$\begin{aligned}\ddot{x}&=\dot{v}\cos\theta-v\dot{\theta}\sin\theta,\\ \ddot{y}&=\dot{v}\sin\theta+v\dot{\theta}\cos\theta.\end{aligned} \tag{4}$$

Сила отпора R има следећу зависност

$$R = \frac{1}{2} C_R \cdot S \cdot \rho v^2,$$

где су:

C_R — коефицијент отпора,

S — карактеристични пресек летилице,

ρ — густина ваздуха.

Коефицијент отпора C_R зависи од Маховог броја и може се са довољном тачношћу представити као функција брзине облика

$$C_R = C_R(v) \approx \begin{cases} A = \text{const.}, & \text{за } 0 \leqslant v \leqslant v_1, \\ m_0 v + n_0, & \text{за } v_1 < v \leqslant v_2, \\ m_1 v + n_1, & \text{за } v > v_2, \end{cases} \tag{4a}$$

где су m_0, n_0, m_1 и n_1 константе које зависе од карактера криве C_R*.

С обзиром да у координатном систему на сл. 1, y — представља висину, промена густине ваздуха ρ може се са довољном тачношћу представити у облику

$$\rho = \rho(y) \approx ay + b, \tag{4b}$$

где су a и b константе. Међутим, ако се жели још тачније представљање зависности густине ваздуха нормалне атмосфере у функцији висине, онда се може користити следећи израз

$$\rho(y) = 0{,}002378\,(1 - 0{,}135 \cdot 10^{-4}\, y)^2.$$

У случајевима када на путањи постоје две активне фазе, сила потиска P може се приказати следећим изразом

$$P = P(t) \approx \begin{cases} B_0 = \text{const.}, & \text{за } 0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ B_1 = \text{const.}, & \text{за } t_1 < t \leqslant t_2, \\ 0 & , \text{ за } t > t_2. \end{cases}$$

Аналогно претходним изразима може се апроксимативно дефинисати и промена масе у функцији од времена:

$$M = \frac{G(t)}{g},$$

где је

$$G(t) \approx \begin{cases} \alpha t + \beta, & \text{за } 0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ \gamma t + \delta, & \text{за } t_1 < t \leqslant t_2, \\ G_0 = \text{const}, & \text{за } t > t_2. \end{cases} \tag{4c}$$

Не постоји никаквих посебних тешкоћа за извођење аналогних поставки оних задатака динамике лета код којих постоји на путањи само једна или више активних фаза.

---

* C_R може такође да се мења у зависности од тога да ли отпада бустер после прве фазе лета или не. У тим случајевима треба C_R генерирати помоћу два генератора функције и једног компаратора што се може применити и у случајевима када апроксимација помоћу правих не задовољава.

На основи једначина (1) и (2), следи

$$
\begin{aligned}
&\dot{v} = \frac{1}{M}(P - R - Mg\sin\theta), \\
(5)\qquad & \\
&\dot{\theta} = -\frac{g\cos\theta}{v},
\end{aligned}
$$

док се на основи израза (3) добија

$$
(6)\qquad \cos\theta = \frac{\dot{x} - w}{v}; \quad \sin\theta = \frac{\dot{y}}{v}.
$$

Користећи се везама (5) и (6), може се написати коначан облик једначина (4)

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x} = \frac{1}{M}(P - R)\frac{\dot{x} - w}{v}, \\
(7)\qquad & \qquad\qquad\qquad (v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2), \\
&\ddot{y} = \frac{1}{M}(P - R)\frac{\dot{y}}{v} - g,
\end{aligned}
$$

које су погодне за примену аналогних електричних модела.

За једначине (7) могу се узети различити почетни услови, што зависи од тога где се налази положај лансирања. Тако на пример, скуп почетних услова

$$
\begin{aligned}
&x(o) \approx 0 \\
&y(o) \approx 0 \\
&\dot{x}(o) = K_1 \\
&\dot{y}(o) = K_2
\end{aligned}
$$

одређује једно партикуларно решење система једначина (7) које одговара путањи лета балистичког пројектила који се лансира са земље. При томе се мора имати у виду да је почетни угао лансирања θ_0 одређен изразом:

$$
\theta_0 = \operatorname{arc\,tg}\frac{\dot{y}(0)}{\dot{x}(0)}.
$$

Овакав избор почетних услова је оправдан за случај када брзина v постиже велику вредност непосредно после лансирања. У противном, неопходно је за $x(0)$ и $y(0)$ узети вредности које су веће од нуле, а којима одговарају компоненте брзине $\dot{x}(0) = K_1$, $\dot{y}(0) = K_2$.

Овакав третман почетних услова је неопходан из разлога што се код моделирања система једначина (7) врши његова трансформација на облик

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x} = \frac{1}{M}\left(\frac{P}{v} - R^*\right)(\dot{x} - w), \\
(8)\qquad & \\
&\ddot{y} = \frac{1}{M}\left(\frac{P}{v} - R^*\right)\dot{y} - g, \quad (v > 0),
\end{aligned}
$$

где је $R^* = \frac{1}{2} C_R S_\rho v$.

Знак испред w у једначинама (7) и (8) може да буде + или —, зависно од тога у ком правцу делује рафални ветар. Ако је његово дество супротно смеру кретања, онда је знак +, док за случај дејства у смеру кретања, сл. 1, испред w стоји знак минус.

Када су у питању балистичке путање артиљеријских зрна, онда се у систему једначина (7), односно (8), узима да је $P=O$, тако да се у том случају уместо једначина (8) решавају једначине

$$\ddot{x}=-\frac{R^*}{M}(\dot{x}-w),\tag{9}$$

$$\ddot{y}=-\left(\frac{R^*}{M}\dot{y}+g\right),$$

чији су почетни услови

$$x(o)=O;\quad y(o)=O,$$

$$\dot{x}(o)=K_1;\quad \dot{y}(o)=K_2.$$

У том случају веза између почетних услова K_1 и K_2 и почетне брзине v_0 дата је изразом

$$v_0^2=K_1^2+K_2^2,$$

док је почетни угао елевације одређен са

$$\theta_0=\operatorname{arc\,tg}\frac{K_2}{K_1}.$$

У последњим двема једначинама познато је v_0 и θ_0, тако да се из њих могу једнозначно одредити вредности константи K_1 и K_2 које се задају као почетни услови.

За случај анализе утицаја рафалног ветра на балистичке путање авио бомби могу се користити једначине (9), при чему су почетни услови;

$$x(o)=O,$$

$$y(o)=H,$$

$$\dot{x}(o)=K_1>O,$$

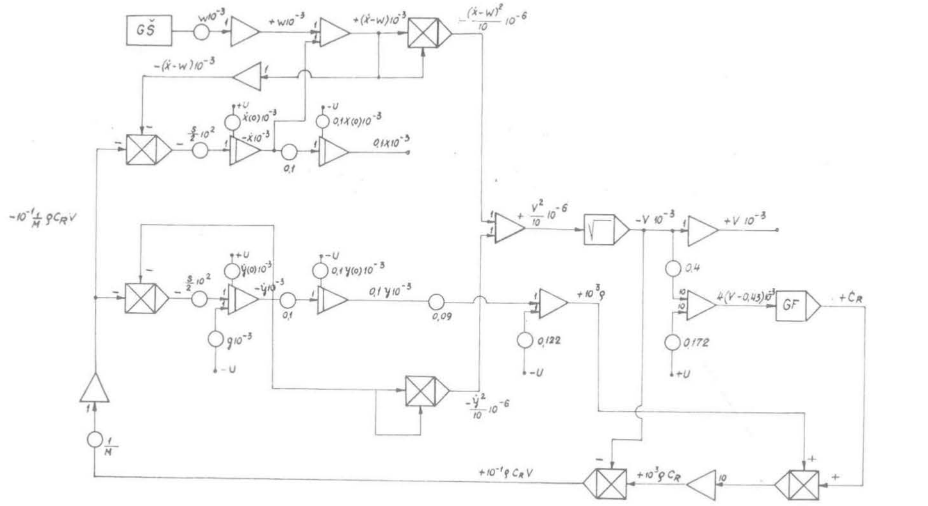
$$\dot{y}(o)=K_2,$$

где K_2 може да буде било који реалан број који зависи од положаја авиона у тренутку откачињања авио бомбе.

3. АНАЛОГНИ ЕЛЕКТРИЧНИ МОДЕЛИ И ЊИХОВА ПРИМЕНА

Из приложених аналогних модела који су дати на сл. 2 и 3, који одговарају систему једначина (8) и (9), може се видети да су од елемента аналогне рачунске технике употребљени: сабирачи, интегратори, множачи, делитељи и генератори функција. Посебна карактеристика ових модела је употреба генератора белог бинарног шума за генерирање рафалног ветра. У аналогним моделима је посматрана једна активна фаза у току лета.

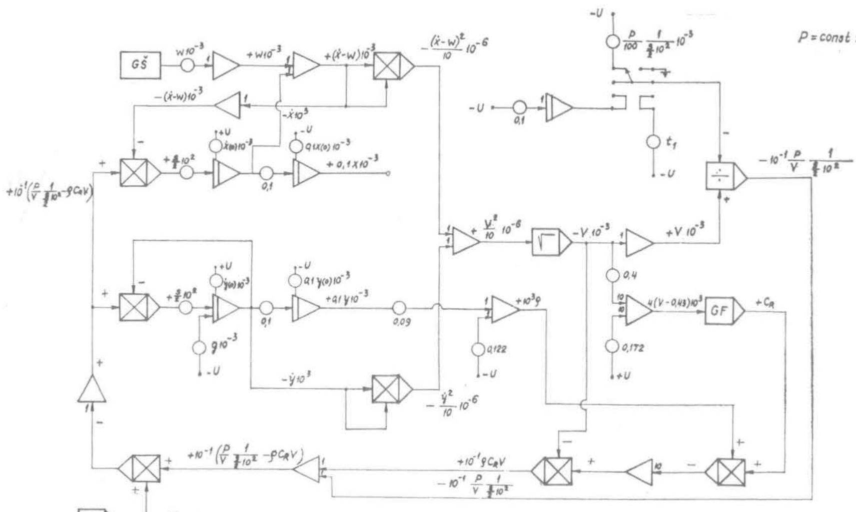
Код анализе путања усвојен је бели бинарни шум чији је прописни опсег спектра снаге од 0,3 Hz. Максимална амплитуда бинарног сигнала бирана је у размери са интензитетом ветра, док периода за усвојени пропусни опсег спекра износи $T = 65.535$ sec (карактеристика примењеног генератора шума). У зависности од дужине трајања балистичког лета бира се периода



$$\ddot{x} = -\frac{R^*}{M}(\dot{x}-w) \qquad R^* = \frac{S}{2} C_R \varrho V \qquad 10^3\varrho = 0{,}122-0{,}09\cdot 0{,}1\,y\,10^{-3}$$

$$\ddot{y} = -\frac{R^*}{M}\dot{y}-g \qquad V = \sqrt{(\dot{x}-w)^2+\dot{y}^2}$$

Сл. 2. Аналогни модел за систем једначина (8)

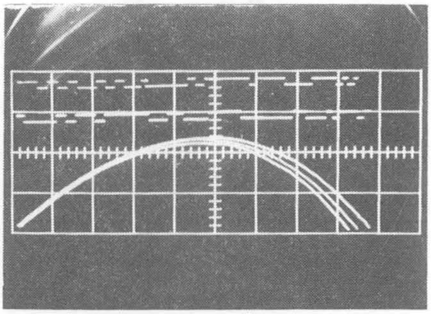


$$\ddot{x} = \frac{1}{M}\left(\frac{P}{V}-R^*\right)(\dot{x}-w) \qquad R^* = \frac{S}{2} C_R \varrho V$$

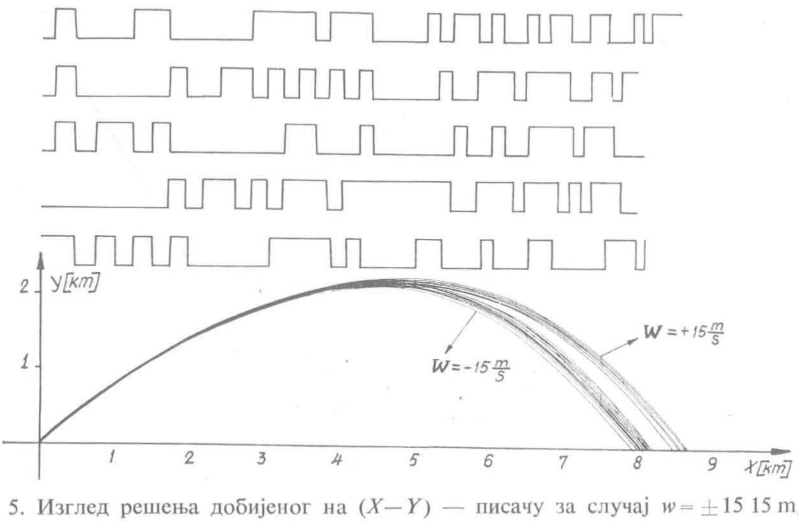
$$\ddot{y} = \frac{1}{M}\left(\frac{P}{V}-R^*\right)\dot{y}-g \qquad V = \sqrt{(\dot{x}-w)^2+\dot{y}^2}$$

Сл. 3. Аналогни модел за систем једначина (9) псеудослучајног белог бинарног сигнала. За функције C_R, $\rho(y)$ и $M(t)$ коришчени су изрази облика (4 a), (4 b) и (4 c) респективно. У случају аналогног модела на сл. 3 маса се не мења са временом па је $M = \text{const}$.

Код конкретних анализа, применом одговарајућих модела, показало се да су резултати задовољавајући већ после 20 комбинација белог бинарног шума. Неке од тих комбинација су снимљене на екрану катодног осцилографа, сл. 4., као и на (X—Y) писачу, сл. 5., са чим се може илустовати изведени закључак. Резултати који су добијени на овај начин, применом аналогних модела, поређани су у односу на номинална решења. Тако на пример, на сл. 4. средња путања представља номинално решење добијено за случај када није узет у обзир утицај рафалног ветра, док граничне путање одражавају утицај ветра брзине $w = \pm 10$ m/sec при узимању у обзир само снимљених комбинација белог бинарног шума. Приказани аналогни модели су веома прикладни за практичну примену, нарочито за случајеве квалитативне анализе утицаја рафалних ветрова



Сл. 4. Изглед резултата снимљен на екрану катадног осцилографа за случај $w = \pm 10$ m/sec



Сл. 5. Изглед решења добијеног на (X—Y) — писачу за случај $w = \pm 15$ 15 m/sec

различитог интензитета, као и за анализе утицаја промене појединих карактеристичних параметара, као што су промена тежине, потиска, карактеристичног пресека и других параметара који су од утицаја на крањи домет. Такве анализе имају посебан значај у процесу пројектовања и одабирања кључних параметара нових конструкција. Сем тога, оне могу у одређеним случајевима, као што је случај анализе утицаја рафалног ветра, да послуже и као квантитативне анализе које су од посебног значаја за практичну примену.

R E F E R E N C E S

[1] B u s h L., P., *A Perturbation Technique for Analog Computers*, IRE Transactions on Electronic Computers, vol EC—8, № 2, pp. 218—221

[2] J o h n s o n C. L., *Analog Computer Techniques*, McGraw-Hill Book, New York, 1956, pp. 83—86

[3] E t e r m a n I. I., *Analog Computers*, Pergamon Press, London, pp. 6—15

[4] K o r n G. A., K o r n T. M., *Electronic Analog and Hybrid Computors*, MgGraw Hill Book, 1964, part IV

[5] P e t r i ć J., R i s t i ć B., *Analiza balističkih putanja pomoću analognih modela*, NTP, Beograd, 1966, str. 3—10.

THE APPLICATION OF ANALOG COMPUTERS FOR THE ANALYSIS OF THE EFFECTS OF WIND ON BALLISTIC TRAJECTORY

By Jovan J. Petrić and Borislav D. Ristić

S u m m a r y

This work treats methodical and practical approach to the analysis of the effects of real atmosphere conditions on the variable mass bodies traveling by ballistic trajectory. The analysis of the effects of rafal winds on the dispersion around the objective is specifically accentuated. The work is aimed to show the possibilities of solving this problem by the analog computers and white noise generators, Paralelly mathematical basis of the task is given and the specificity of corresponding analog models are showed. Up to now, with the exception of results given by [5], this was not the case.

Љубомир Ћирић

О ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈИ НЕКИХ КЛАСА ПОЛИНОМА

1. Bell-ови полиноми су дефинисани у [1] на следећи начин:

$$Hn(c,\ g) = e^{-cg} D^n e^{cg}; \qquad D = \frac{d}{dx}.$$

У [2] SHRIVASTAVA је посматрао полиноме

$$Gn(c,\ g) = e^{-cg}(xD)^n e^{cg}$$

који укључују Truesdell-ове полиноме [4] као специјалан случај за $c = 1$, $g(x) = \lambda \ln x - x$. Није тешко уочити да ови полиноми поседују извесне сличне особине, па је природно очекивати да се може дефинисати нова класа полинома која их обухвата као специјалне случајеве. У овом раду управо дајемо дефиницију таквих полинома преко оператора $\Delta \equiv a x^{\alpha} \dfrac{d}{dx}$. Ставом 1 дате су потребне особине овог оператора, а ставови 3. и 4. дају основне карактеристике ових полинома.

2. Дефинишимо полиноме:

$$Fn(c,\ g,\ f) = e^{-cg}(ax^{\alpha} D)^n [e^{cg} f(x)]$$

$$\text{и} \quad En(c,\ g) = Fn(c,\ g,\ 1) = e^{-cg}(a x^{\alpha} D)^n e^{cg},$$

где су a и α било који реални бројеви, $g(x)$ и $f(x)$ произвољне функције а c произвољна константа.

Став 1. Важе следећа својства оператора $\Delta \equiv a x^{\alpha} D \equiv a x^{\alpha} \dfrac{d}{dx}$:

2.1. $\Delta^n x^{\alpha} = a^n \alpha (2\alpha - 1) \cdots (n\alpha - n + 1)\, x^{(n+1)\alpha - n}$

2.2. $\Delta^n u\, v = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} u \cdot \Delta^k v$

2.3. $\Delta^n [e^{cg(x)} f(x)] = e^{cg} [\Delta + \mathrm{ca}\, x^{\alpha} g']^n f(x); \quad g' \equiv \dfrac{dg(x)}{dx}.$

Доказ: Својство 2.1. је очигледно. За доказ својства 2.2. користи се математичка индукција. За $n = 1$ је

$$\Delta(uv) = ax^{\alpha}(u'v + uv') = ax^{\alpha}u' \cdot v + u \cdot ax^{\alpha} \cdot v' = \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v.$$

Претпоставимо да је

$$\Delta^n (u \cdot v) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} u \cdot \Delta^k v.$$

Тада је

$$\Delta^{n+1} (u \cdot v) = \Delta (\Delta^n uv) = \Delta \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} u \cdot \Delta^k v \right] =$$

$$= \Delta^{n+1} u \cdot v + \binom{n}{o} \Delta^n u \cdot \Delta v + \binom{n}{1} \Delta^n u \cdot \Delta v + \binom{n}{1} \Delta^{n-1} u \cdot \Delta^2 v + \cdots +$$

$$+ \binom{n}{k} \Delta^{n-k} u \cdot \Delta^{k+1} v + \binom{n}{k+1} \Delta^{n-k} u \cdot \Delta^{k+1} v + \cdots + \binom{n}{n} \Delta u \cdot \Delta^n v + u \cdot \Delta^{n+1} v =$$

$$= \Delta^{n+1} u \cdot v + \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right] \Delta^{n-k} u \cdot \Delta^{k+1} v + u \cdot \Delta^{n+1} v =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \Delta^{n+1-i} u \cdot \Delta^i v,$$

чиме је својство 2.2. доказано.

И својство 2.3. доказује се математичком индукцијом. Претпоставимо да је:

$$\Delta^n e^{cg} f = e^{cg} [\Delta + ca\, x^\alpha g']^n f.$$

Лако је проверити исправност за $n = 1, 2, \ldots$ Тада је

$$\Delta^{n+1} e^{cg} f = \Delta (\Delta^n e^{cg} f) = \Delta \{ e^{cg} [\Delta + ca\, x^\alpha g']^n f \} =$$
$$= a x^\alpha e^{cg} cg' [\Delta + ca\, x^\alpha g']^n f + e^{cg} \cdot \Delta \{ [\Delta + ca\, x^\alpha g']^n f \};$$

и

$$e^{cg} [\Delta + ca\, x^\alpha g']^{n+1} f = e^{cg} [\Delta + ca\, x^\alpha g'] \big([\Delta + ca\, x^\alpha g']^n f \big) =$$
$$= e^{cg} \cdot \Delta \{ [\Delta + ca\, x^\alpha g']^n f \} + e^{cg} ca\, x^\alpha g' \cdot [\Delta + ca\, x^\alpha g']^n f$$

одакле следи да је

$$\Delta^{n+1} e^{cg} f = e^{cg} [\Delta + ca\, x^\alpha g']^{n+1} f$$

чиме је особина 2.3. доказана.

Став 2. Ако са $\mathcal{D}$ означимо $\Delta + ca\, x^\alpha g'$, тј. $\mathcal{D} \equiv \Delta + ca\, x^\alpha g'$, тада важи

2.4. $\mathcal{D}^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_{n-k} (c, g) \Delta^k.$

Доказ: На основу особине 2.3. је

$$Fn (c, g, f) = [\Delta + ca\, x^\alpha g']^n f(x) = \mathcal{D}^n f(x)$$
и $$En (c, g) = [\Delta + ca\, x^\alpha g']^n 1 = \mathcal{D}^n \cdot 1.$$

Ако ставимо $f(x) = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$, тада је на основу 2.2. и 2.3:

$$\mathcal{D}^n uv = e^{-cg} \Delta^n [(e^{cg} u) \cdot v] = e^{-cg} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{u}{k} \Delta^{n-k} (e^{cg} u) \cdot \Delta^k v \right) =$$

$$= e^{-cg} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{cg} \mathcal{D}^{n-k} u \cdot \Delta v \right),$$

тј.

$$\mathcal{D}^n uv = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{D}^{n-k} u \cdot \Delta^k v.$$

Када ставимо $u=1$, добија се

$$\mathcal{D}^n v = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{D}^{n-k}\, 1 \cdot \Delta^k v = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_{n-k}(c,\, g) \cdot \Delta^k v$$

и одавде

$$\mathcal{D}^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E\, n-k\,(c,\, g) \cdot \Delta^k$$

што је и требало доказати.

Напомена: Ако је $a=1$, $\alpha=1$ добија се SHRIVASTAVIN оператор

$$\mathcal{D}^* = x\, D + x\, c\, g'.$$

Став 3. За полиноме $F n(c,\, g,\, f)$ важи рекурентна релација

2.5. $F n+1\,(c,\, g,\, f) = a x^{\alpha} D\, F n(c,\, g,\, f) + a x^{\alpha} c g'\, F n(c,\, g,\, f)$.

Доказ: Ако се примени оператор Δ на $F n(c,\, g,\, f)$ следи

$$\begin{aligned}\Delta\,(e^{-cg}\,\Delta^n\, e^{cg} f) &= (\Delta\, e^{-cg})\, \Delta^n\, e^{cg} f + e^{-cg}\, \Delta^{n+1}\, e^{cg} f = \\ &= -a x^{\alpha}\, c g' \cdot e^{-cg}\, \Delta^n\, e^{cg} f + e^{-cg}\, \Delta^{n+1}\, e^{cg} f,\end{aligned}$$

тј. добија се тражена релација.

Ова релација се за $a=1$, $\alpha=1$, $f(x)=1$ редуцира на

$$G n+1\,(c,\, g) = x\, D G\, n(c,\, g) + c x g'\, G n(c,\, g),$$

а за $\alpha=0$, $a=1$, $i\, f(x)=1$ на

$$H n+1\,(c,\, g) = D H n\,(c,\, g) + c g'\, H n\,(c,\, g).$$

Став 4. Обична родна функција за полиноме $F n(c,\, g,\, f)$ је

2.6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} F n(c,\, g,\, f)\, t^n = [1 - t\,\mathcal{D}]^{-1} f,$

а експоненцијална родна функција је за $\alpha=0$ и $a=1$

2.7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} F n\,(c,\, g,\, f)\, \frac{t^n}{n!} = e^{-cg}\, e^{cg\,(x+t)} \cdot f\,(x+t)$

и за $\alpha=1$

2.8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} F n\,(c,\, g,\, f)\, \frac{t^n}{n!} = e^{-cg}\, e^{cg\left(x e^{at}\right)} \cdot f\,(x e^{at}).$

Доказ: Релација 2.6. следи из

$$\sum_{n=0}^{\infty} [1 - t\,\mathcal{D}]\, F n(c, g, f)\, t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[F\, n\,(c,\, g,\, f)\, t^n - t \left(a x^{\alpha} \frac{d}{dx} + \text{ca}\, x^{\alpha} g' \right) F n(c,\, g,\, f) t^n \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [F n\,(c,\, g,\, f)\, t^n - a\, x^{\alpha} (-c\, g')\, e^{-cg}\, \Delta^n\, e^{cg} f \cdot t^{n+1} - e^{-cg}\, \Delta^{n+1}\, e^{cg} f \cdot t^{n+1} -$$

$$- \text{ca}\, x^{\alpha}\, g' \cdot e^{-cg}\, \Delta^n\, e^{cg} f \cdot t^{n+1}]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [F n\,(c,\, g,\, f)\, t^n - F_{n+1}\,(c,\, g,\, f)\, t^{n+1}] = F_0\,(c,\, g,\, f) = e^{-cg} \cdot e^{cg} f = f(x).$$

За доказ релација 2.7. и 2.8. ставимо $F(t)=e^{cg(x+t)}\cdot f(x+t)$

и $\Phi(t)=e^{cg(xe^{at})}\cdot f(xe^{at})$. Тада је лако проверити да је

$$\sum_{n=0}^{\infty} Fn(c,\ g,\ f)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-cg}D^n(e^{cg}f)\frac{t^n}{n!}=e^{-cg}\left(\sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(o)\cdot\frac{t^n}{n!}\right)=e^{-cg}F(t)$$

и $$\sum_{n=0}^{\infty} Fn(c,\ g,\ f)\cdot\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-cg}(axD)^n(e^{cg}f)\cdot\frac{t^n}{n!}=$$

$$=e^{-cg}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\Phi^{(n)}(o)\cdot\frac{t^n}{n!}\right)=e^{-cg}\cdot\Phi(t)$$

чиме је став доказан.

Лако се добијају следеће релације:

2.15. $$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} Fi(c,\ g,\ f)\cdot t^i=[1+t\mathcal{D}]^n f,$$

2.16. $$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} Fn-i(c,\ g,\ f)\,t^i=[t+\mathcal{D}]^n f.$$

3. *Напомене*. Непосредно се види да се за $a=1$, $\alpha=0$, $f(x)=1$ добија $En(c,g)=Hn(c,g)$, тј. класа Bell-ових полинома. Ако је $a=1$, $\alpha=1$, $f(x)=1$, полиноми $En(c,\ g)$ постају уопштени Truesdell-ови полиноми које је посматрао Shrivastava, тј. важи $En(c,\ g)=Gn(c,\ g)$.

Ако је $a=1$, $\alpha=0$ и $c=1$, тада се за специјалне функције $g(x)$ и $f(x)=fn(x)$ добијају следећи класични ортогонални полиноми:

Legendere-ови за $g(x)=0$; $fn(x)=\dfrac{(x^2-1)^n}{2^n\cdot n!}$,

Laguerre-ови за $g(x)=\lambda\ln x-x$; $f_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}$,

Gegenbauer-ови за $g(x)=\left(\lambda-\dfrac{1}{2}\right)\ln(1-x^2)$; $f_n(x)=(2\lambda)_n\dfrac{(1-x^2)^n}{(-2)^n\cdot\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)_n}$,

Чебишевљеви за $g(x)=\pm\dfrac{1}{2}\ln(1-x^2)$; $f_n(x)=\dfrac{(1-x^2)^n}{(-2)^n\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)_n}$,

Jakob-ијеви за $g(x)=\alpha\ln(1-x)+\beta(\ln(1+x)$; $f_n(x)=\dfrac{(1-x^2)^n}{(-2)^n n!}$,

Hermite-ови за $g(x)=x^2$; $f_n(x)\equiv 1$.

Овом приликом желим да изразим захвалност професору D[r] Ђ. Курепи који ми је указао на отворене проблеме у овој области, као и D[r] З. Мамузићу на веома корисним саветима.

За доказ релација 2.7. и 2.8. ставимо $F(t)=e^{cg(x+t)}\cdot f(x+t)$

и $\Phi(t)=e^{cg(xe^{at})}\cdot f(xe^{at})$. Тада је лако проверити да је

$$\sum_{n=0}^{\infty} Fn(c,\ g,\ f)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-cg} D^n(e^{cg}f)\frac{t^n}{n!}=e^{-cg}\left(\sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(o)\cdot\frac{t^n}{n!}\right)=e^{-cg}F(t)$$

и $$\sum_{n=0}^{\infty} Fn(c,\ g,\ f)\cdot\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-cg}(axD)^n(e^{cg}f)\cdot\frac{t^n}{n!}=$$

$$=e^{-cg}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\Phi^{(n)}(o)\cdot\frac{t^n}{n!}\right)=e^{-cg}\cdot\Phi(t)$$

чиме је став доказан.

Лако се добијају следеће релације:

2.15. $$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}Fi(c,\ g,\ f)\cdot t^i=[1+t\mathcal{D}]^n f,$$

2.16. $$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}Fn-i(c,\ g,\ f)\,t^i=[t+\mathcal{D}]^n f.$$

3. *Напомене.* Непосредно се види да се за $a=1$, $\alpha=0$, $f(x)=1$ доби $En(c,g)=Hn(c,g)$, тј. класа Bell-ових полинома. Ако је $a=1$, $\alpha=1$, $f(x)=$ полиноми $En(c,\ g)$ постају уопштени Truesdell-ови полиноми које је посма рао Shrivastava, тј. важи $En(c,\ g)=Gn(c,\ g)$.

Ако је $a=1$, $\alpha=0$ и $c=1$, тада се за специјалне функције $g(x)$ $f(x)=fn(x)$ добијају следећи класични ортогонални полиноми:

Legendere-ови за $g(x)=0$; $fn(x)=\dfrac{(x^2-1)^n}{2^n\cdot n!}$,

Laguerre-ови за $g(x)=\lambda\ln x-x$; $f_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}$,

Gegenbauer-ови за $g(x)=\left(\lambda-\dfrac{1}{2}\right)\ln(1-x^2)$; $f_n(x)=(2\lambda)_n\dfrac{(1-x^2)^n}{(-2)^n\cdot\left(\lambda+\frac{1}{2}\right.}$

Чебишевљеви за $g(x)=\pm\dfrac{1}{2}\ln(1-x^2)$; $f_n(x)=\dfrac{(1-x^2)^n}{(-2)^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)_n}$,

Jakob-ијеви за $g(x)=\alpha\ln(1-x)+\beta(\ln(1+x)$; $f_n(x)=\dfrac{(1-x^2)^n}{(-2)^n n!}$,

Hermite-ови за $g(x)=x^2$; $f_n(x)\equiv 1$.

Овом приликом желим да изразим захвалност професору Dr Ђ Курепи који ми је указао на отворене проблеме у овој области, као Dr З. Мамузићу на веома корисним саветима.

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. RIORDAN: *An introduction to the Combinatorial Analisis*, 1958.

[2] P. SHRIVASTAVA: *On the polynomials of Truesdell type (in print).*

[3] Г. БЕЙТМЕН и А. ЕРДЕЛИ: *Высшие трансцендентние функции*, вол. 2, Москва 1966

[4] Г. БЕЙТМЕН и А. ЕРДЕЛИ: *Высшие трансцедентние функции*, вол. 3, Москва 1966.

[5] М. ПЕТРОВИЋ: *Један диференцијални алгоритам и његове примене*, Београд 1936

ON A GENERALIZATION OF A CLASS OF POLYNOMIALS

Ljubomir Ćirić

Summary

In the present paper the differential operator $\left(ax^{\alpha}\dfrac{d}{dx}\right)^n$ is introduced and certain its properties are given. Polynomials $E_n(c, g, f)$ are defined by the above operator, which for $f(x)=1$; $a=1$ and $\alpha=0$ are reduced to Bell's polynomials, and for $f(x)=1$, $a=1$ and $\alpha=1$ are reduced to the generalized Truesdell's polynomials. Certain properties of these polynomials are given — recurrent relation (2.5), as well as the generating functions (2.6), (2.7) and (2.8) for the case $\alpha=0$ and $\alpha=1$. It is shown when the polynomials $E_n(c, g, f)$. are reduced to the classical orthogonal polynomials.

STANKO PRVANOVIĆ

Aritmetička, geometrijska i harmonijska sredina

Neka su a_1 i a_2 ma koja dva pozitivna broja. Tada se broj:

$x = \frac{a_1 + a_2}{2}$ zove *aritmetička sredina* brojeva a_1 i a_2;

$y = \sqrt{a_1 a_2}$ zove *geometrijska sredina* brojeva a_1 i a_2;

$\frac{2}{z} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$ tj. $z = \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2}$ zove *harmonijska sredina* brojeva a_1 i a_2.

Između tih sredina postoje veze

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqq \sqrt{a_1 a_2} \geqq \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2}, \qquad (v_2)$$

gde znak $=$ postoji samo kad je $a_1 = a_2$.

One se mogu dokazati i analitički i geometrijski. U Matematičko-fizičkom listu br. 2 i 3 za 1955-56 godinu data su dva analitička dokaza i jedan geometrijski. Ovde ćemo izneti još tri (elementarnija) geometrijska dokaza tih relacija, a zatim ćemo ih generalisati za ma koji konačan broj brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

1. 1) Trougao ATB (crtež 1) je pravougli ($\sphericalangle T = 90°$). Neka je:

$[TC] \perp [AB]$, $(AC) = a_1$ $(CB) = a_2$, $[CD] \perp [TO]$.

Tada je:

$[TC] > [TD]$, (iz $\triangle$ CDT)

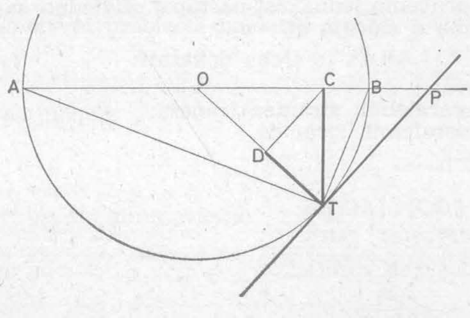
$[TO] > [TC]$, (iz $\triangle$ OCT)

to jest

$$[TO] > [TC] > [TD],$$

pa dakle i

$$(TO) > (TC) > (TD). \qquad (1)$$



Sl. 1.

Kako je

$$(TO) = \frac{(AB)}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2}, \qquad (2)$$

(iz $\triangle$ ATB) $$(TC) = \sqrt{(AC) \cdot (CB)} = \sqrt{a_1 a_2}, \qquad (3)$$

(iz $\triangle$ OCT) $$(TC)^2 = (TD) \cdot (TO), \ (TD) = \frac{a_1a_2}{\frac{a_1 + a_2}{2}} = \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2} \qquad (4)$$

smenom (2), (3) i (4) u (1), dobivamo tražene veze (v_2) gde je, očigledno, $=$ kad se tačke C, D i O poklapaju.

Znači, ako su brojevi a_1 i a_2 prikazani dužima [AC] i [CB] (vidi crtež), onda aritmetičku sredinu tih brojeva prikazuje duž [BO], ili [TO], geometrijsku sredinu prikazuje duž [TC], a harmonijsku sredinu — [TD].

2) Neka je (isti crtež)

$(PA) = a_1$, $(PB) = a_2$, PT tangenta iz P na kružnicu $(O; [AO])$.

tj. s obzirom na (3)

$$\frac{nA_n + (m-n)A_n}{m} \geqq \sqrt[m]{a_1 a_2 \ldots a_n \cdot A_n{}^{m-n}},$$

tj.

$$\frac{mA_n}{m} \geqq A_n \sqrt[m]{a_1 a_2 \ldots A_n{}^{-n}},$$

tj.

$$1 \geqq \sqrt[m]{a_1 a_2 \ldots A_n{}^{-n}},$$

tj.

$$A_n{}^n \geqq a_1 a_2 \ldots a_n,$$

tj.

$$A_n \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

tj. s obzirom na (3)

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \tag{4}$$

pri čemu jednakost postoji samo kad je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Time je dokazano da je aritmetička sredina ma koliko pozitivnih brojeva veća (ili najviše jednaka) od geometrijske sredine tih brojeva.

3) Harmonijska sredina z brojeva $a_1, a_2 \ldots a_n$ zadovoljava

$$\frac{n}{z} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}. \tag{5}$$

Uvedimo brojeve:

$$C_1 = \frac{1}{a_1}, \; C_2 = \frac{1}{a_2}, \ldots, \; C_n = \frac{1}{a_n}. \tag{6}$$

Za njih važi (4), to jest

$$\frac{C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{n} \geqq \sqrt[n]{C_1 C_2 \ldots C_n}$$

tj. s obzirom na (5) i (6),

$$\frac{\frac{n}{z}}{n} \geqq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}},$$

$$\frac{1}{z} \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}$$

tj.

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqq z = \frac{n a_1 a_2 \ldots a_n}{a_2 a_3 \ldots a_n + \cdots + a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}$$

tj.

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqq \frac{n a_1 a_2 \ldots a_n}{a_2 a_3 \ldots a_n + \cdots + a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}. \tag{7}$$

Iz (4) i (7) sledi

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqq \frac{n a_1 a_2 \ldots a_n}{a_2 a_3 \ldots a_n + \cdots + a_1 a_2 \ldots a_{n-1}},$$

(gde znak = imamo samo za $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$) čime je relacija između aritmetičke, geometrijske i harmonijske sredine dokazana u najopširnijem slučaju.

Dr DUŠAN NEDELJKOVIĆ

ETAPE I PERSPEKTIVE PRIRODNE FILOZOFIJE MIHAILA PETROVIĆA

1.

U svojoj knjizi *Aperçu de la philosophie contemporaine en Yougoslavie,* 1934, istakli smo značaj »originalne naučne filozofije« koju je znameniti matematičar Mihailo Petrović gradio i razvijao u svojoj akademskoj besedi *Matematička teorija o dejstvu uzroka,* 1900, francuskoj knjizi *La mécanique des phénomènes fondée sur les analogies,* Paris, 1906, svome voluminoznom delu *Elementi matematičke fenomenologije,* Beograd 1911, svojoj drugoj francuskoj knjizi *Mécanismes communs aux phénomènes disparates,* Paris, 1921, i, najzad, u svojoj četvrtoj knjizi *Fenomenološko preslikavanje,* Beograd, 1933. Tu smo pokušali da sa gledišta samoga autora rezimiramo njegovu novu fenomenološku doktrinu o prirodi, istakavši da: »On eliminiše sve supstancijalističke pojmove gravitacije, afiniteta, vitalne sile itd., i posmatra samo elemente analogija koji sačinjavaju analogne zakone različitih slojeva iste globalne realnosti. Proniknuti u ono što je analogo i zajedničko u disparatnim fenomenima (fizičkim, hemijskim, biološkim, psihološkim, ekonomskim, društvenim, itd.), razlikovati u njemu analoške grupe, odrediti u ovim grupama tipične i apsolutne matematičke sheme i formule, koji su samo delovi više celina i koji bi, komplikujući se izvesnim specijalnim karakteristikama i parametrima, mogli matematički objasniti svekoliku realnost mnoštva stvari, — to je zadatak koji je Petrović postavio preda se osnivajući svoju matematičku fenomenologiju — tu zanimljivu doktrinu koja zamenjuje posebne prirodne zakone opštim shemama koje se odnose prema posebnim prirodnim zakonima kao celina prema delovima koje postavlja . . .«[1]

Autor mi je jednom prilikom kasnije saopštio da se slaže sa ovakvim mojim krajnje sažetim prikazom, ali je i primetio da ga je začudilo kad je video da sam prešao preko mehaničkih osnova njegove fenomenologije. Odgovorio sam mu da to ne bi bila jaka strana, već pre ograničenost njegove koncepcije, u kojoj bi se, što se tiče

[1] *Aperçu de la philosophie contemporaine en Yougoslavie,* Beograd 1934, str. 35—36.

interpretacije, mogao kao i u samoj kvantnoj mehanici, na primer, naći i drukčiji put tumačenja osim onoga što ga pruža klasična mehanika, a kojim njegova koncepcija pokazuje tendencije da se pokriva potpunim mehanicizmom. Uvek i sa mlađim kolegama prisan i duhovit, odgovorio mi je da bi bez Dekarta i klasične mehanike nekako osećao da u svojoj matematičkoj fenomenologiji gubi čvrsto tle pod nogama. Rekao sam mu da je to svakako tačno, ali je tačno i da je sama njegova matematička fenomenologija jedan od moćnih originalnih i donekle izgrađenih puteva da se ne samo to, već i sama fenomenologija prevaziđe, na što je on slegao ramenima i sumnjajući, ali i odobravajući, dopuštao sa: »Možda«. . . »Ima i toga«.

2.

Ali dok smo ovako u *Aperçu-u*, pripremljenom za IX Međunarodni filozofski kongres u Pragu 1934, na kome će se filozofija oštro sukobiti sa nemačkim i italijanskim filozofskim predstavnicima fašističke ideologije, ostajali pri samo otvorenim perspektivama brojnih novih pogleda i shvatanja savremene filozofije u Jugoslaviji, pa i na samo otvorenoj perspektivi nove i napredne analoške matematičke fenomenologije Mihaila Petrovića, — dotle smo se posle oslobodilačkog rata i revolucije morali pozabaviti i time čime se, kakvim sve ograničenjima ove perspektive zatvaraju, te smo u svojoj knjizi *Naša filozofija u borbi za socijalizam*, Beograd 1952, konstatovali da se idejno nova Petrovićeva naučna i filozofska perspektiva zatvara »analoškim fenomenološkim mehanicizmom«,[2] te takvim svojim ograničenjem stoji na liniji onog mehanicizma koji je od Lametrija ostao tipičan za svekoliku, upravo usko klasnu građansku idejnu ograničenost.

Međutim, kako bi Hegel rekao, zakon je kretanja svega konačnog da svoju granicu ukida i prevazilazi, i postaje beskonačnim, pa je i zakon razvojnog kretanja svekolike savremene epistemologije, pa i same Petrovićeve analoške matematičke fenomenologije, upravo ukidanje i prevazilaženje pre svega mehanicističke ograničenosti, kao što smo to pokušali da pokažemo u studijskom ogledu koji smo Petrovićevoj pojavi i liku posvetili 1961. u seriji istorijskih i kritičkih studijskih ogleda »Misao danas«.[3]

Tu smo primetili da je njegova analoška matematička fenomenologija stala već sa njegovom francuskom knjigom *Mehanizmi zajed-*

[2] *Naša filozofija u borbi za socijalizam*, izd. Srpskog filozofskog društva, Beograd 1952, str. 39.
[3] »Politika«, 11 juni 1961, str. 19.

nički disparatnim pojavama, 1921, u red onih vrhunskih dela savremene prirodne filozofije i epistemologije, koja su najčešće upravo sa mehanicističkih pozicija činila napore i pružala protivurečne nove puteve da se upravo sâm mehanicizam prevaziđe. Jer, ovo njegovo delo je ušlo u čuvenu Alkanovu »Novu naučnu biblioteku« među takva vodeća dela kao što su, s jedne strane, *Mehanička koncepcija života* Džona Leba ili *Elementi biološke filozofije* Feliksa Ledanteka, s druge strane, *Transformizam i iskustvo* Etijena Raboa, s treće strane *Naučni ideal* Pjera Butrua i, s četvrte, *Sudbina zvezda* Svanta Arenijusa. A upravo za ova tad vrhunska epistemološka dela uzeta u celini zajedno sa Petrovićevim karakteristično je da predstavljaju one protivurečne tokove savremene epistemologije u kojima bi današnja misao mnogih vodećih naučnika ujedno da održi, ali i produbi, ukine i prevaziđe već u mnogome stereotipizovano i vulgarizovano mehanicističko gledanje i objašnjavanje prirodnog, društvenog i misaonog kretanja.

Kao upravo tipične primere ovakvog paradoksalnog kretanja i razvitka savremene epistemologije, uzeli smo i uporedili nove koncepcije istaknutog francuskog biologa Etijena Raboa i našeg matematičara Petrovića. I videli smo da, dok Rabo vodi borbu za proučavanje samog objektivnog »procesa« a protivu svih teorijskih idola, pa i protivu mehanicističkog, u čijoj se konačno osnovnoj perspektivi i bori, — dotle Mihailo Petrović, sve i neprekidno, kao i Rabo, ističući da se uvek radi samo o »deskripciji toka evolucije« i »napredovanju procesa«,[4] suprotno Rabou otvoreno polazi kako u fizičkim i hemijskim, tako i u biološkim, psihološkim, ekonomskim i istorijskim pojavama upravo od njihovih pretpostavljenih mehanizama da ove analogijama proširi na svekoliko šarenilo prirodnih, društvenih i psihičkih pojava i tako ih uzajamno poveže, ali baš time i zato da i nehotice samu njihovu mehaničnost od krute prvo čini gipkijom, a zatim ublažava i prevazilazi u mnogim pravcima.

Za ovakav svoj razvitak je Petrović bio predodređen ne samo svojom širokom naučnom izgradnjom ujedno matematičara i fizičara prirodnjaka, i ne samo živim svojim univerzalnim duhovnim interesom za sve nauke od prirodnih i tehničkih do društvenih, i ne samo svojim stvaralačkim vezivanjem za otvaranje novih perspektiva novim naučnim metodama, kao što su bile onda u svome začetku analoške metode i metode modelovanja, već i potrebom ujedno svojom intimnom i svoga vremena da se otklanjaju granice koje su zatvarale ove perspektive i da se ostvaruju novi široki i duboki sintetički i

---

[4] *Elementi matematičke fenomenologije*, izd. Srpske akademije nauka, Beograd 1911, str. 769.

integracioni zahvati i pogledi; i u tome je kod nas sa Jovanom Cvijićem nesumnjivo bio u pojedinim svojim naučnim prilozima kao i u celini svoje analoške matematičke fenomenologije jedan od najistaknutijih nosilaca današnjih revolucionarnih preokreta prirodnih, tehničkih, društvenih i filozofskih nauka koji se obavljaju, po našem mišljenju, bitno integracijom u kojoj se prevazilaze brojne ograničenosti jedna za drugom.

Tako u posebnim svojim stvaralačkim istraživanjima, prednjačeći, započne li Petrović u matematičkoj analizi svoja ispitivanja integracije diferencijalnih jednačina, neće on stati dok je preko funkcija određenih redovima konačno ne privede primeni u mehaničkoj integraciji. I obratno, pošavši od spektralne metode koja se koristi u hemijskoj analizi, on zamišlja analogu matematičku spektralnu metodu kojom se rešavaju brojna matematička pitanja i zasniva nove grane matematičkih ispitivanja i disciplina. I mnogi njegov naučni rad od računskih mašina odjeknuo je u svetu najčešće baš time što je njime imala da bude oborena još jedna granica više između prirodnih, tehničkih i matematičkih nauka i otvorena još jedna analoška perspektiva više njihove plodne integracije.

Ali i u celini sa njegovim *Elementima matematičke fenomenologije,* 1911, imale su najzad da budu oborene i sve ove granice i da se najpreciznije prirodne, društvene, psihološke i istorijske nauke integrišu sa matematikom u svojoj naučnoj »deskripciji toka evolucije«, zahvaljujući takvoj novoj Petrovićevoj, kako on veli, »Prirodnoj filozofiji«, koja će matematičkim simbolizmom njegove analoške fenomenološke ujedno analize i sinteze povezati i precizno odrediti svu bezmernu raznolikost pojava sveopšteg »toka evolucije«.

A u ovome jeste on i ostaje zaslužni pionir našega vremena koje je zahtevalo za postizanje novih celovitih i dubinskih zahvata da se pođe još neispitanim putevima novih analoških metoda i metoda modelovanja. To nam sâm on i nehotice kaže prvom rečenicom svoga francuskog opšteg filozofskog dela *Mehanizmi zajednički disparatnim fenomenima,* 1921, saopštavajući da je u svojoj matematičkoj fenomenologiji pošao od čuvenog stava glasovitog engleskog fizičara Vilijama Tomsona: »Razumeti jedan fenomen jeste moći ustanoviti njegov mehanički model«.

Ali je Petrović od ovoga učinio takođe i jedan odsudan korak dalje koji je i doneo njegovu »matematičku fenomenologiju«, odnosno njegovu novu »Prirodnu filozofiju«, time što je on na najopštije logičko odnosno metodološko pitanje Džona Stjuarta Mila — kako doći do najmanjeg mogućeg broja stavova koje pretpostavlja i iz kojih sledi stvarni prirodni poredak, odgovorio: »Svesti mnoštvo fenomena na isti proces, na isti tip mehanizma«.

Iz ovoga se vidi da time što je prirodni proces uopšte shvatio samo kao mehanički, Petrović je poveo svoju novu analošku i modelsku matematičku fenomenološku tipologiju jednostranim putevima mehanicizma odnosno formalne logike, ali nije on zato manje, istaknimo to ovde takođe, morao da analoški, modelski i tipološki rešava probleme matematičkog »preslikavanja« tj. novog matematičkog analoškog fenomenološkog formulisanja samih bitnih dijalektičkih suprotnosti kojima se sâm proces u svojoj osnovi zbiva, kao što to sami sobom pokazuju i sami konkretni primeri koje on obrađuje.

Tako na svome naglašeno mehanicističkom putu Petrović u svojoj »Prirodnoj filozofiji« analoške matematičke fenomenologije ispituje analogije disparatnih pojava da bi u njihovim analoškim jezgrima otkrivao tipove zajedničkih modela koji treba da povezuju sve disparatne pojave od fizičkih i hemijskih do društvenih i psihičkih sveopšteg »toka evolucije« u prirodi, društvu i ljudskom mišljenju i stvaranju. »Takve analogije, isticao je Petrović, pružaju one metafore kojima se često služe razne grane nauka kao i običan svakodnevni govor. Setimo se, na primer, upoređivanja ovog ili onog fenomena i bujice čija razorna sila raste sa preprekom koja joj se protivstavi. Fenomeni koji su različiti po svojoj prirodi (mehanički, fizički, fiziološki, društveni itd.) a koji se sastoje u laganoj oscilaciji između dva krajnja suprotna stanja, često se upoređuju sa ritmičkim kretanjem klatna, sa plimom i osekom ili sa peristaltičkim pokretima u organizmu«.[4a]

I uočimo da kao ovde suprotnosti napona i otpora, oscilacionog kretanja klatna, plime i oseke ili peristaltičkih organskih pokreta, tako su upravo dijalektičke suprotnosti osnova na kojoj se Petrović trudi da analoški i matematički postavi svekoliko tkivo svoje fenomenološke prirodne filozofije koja bi obuhvatala svekoliki »tok evolucije« od mehaničkih i fizičkih do društvenih i psihičkih, utvrđujući »analoške grupe«, »jezgra« i »modele« za svaki stupanj toga razvitka, ali i kartezijanski svodeći složenije i više na prostije i niže, i time sve na najniže mehaničko, i time teorijski u svojim opštim tumačenjima ostajući zarobljen jednostranošću mehanicizma, dok su u osnovi njegovih ispitivanja ostajale konkretne dijalektičke suprotnosti koje su pozivale na nova i dalja analoška dijalektička produbljivanja i svestranija, celovitija sagledavanja i ovladavanja prirodnim pojavama od mehaničkih i fizičkih do društvenih i psihičkih u nerazdvojnoj celini njihove uzajamne dijalektičke povezanosti i uslovljenosti, u kojoj bi postajalo jasno da je u celokupnom prirodnom »toku raz-

[4a] loc. cit.

integracioni zahvati i pogledi; i u tome je kod nas sa Jovanom Cvijićem nesumnjivo bio u pojedinim svojim naučnim prilozima kao i u celini svoje analoške matematičke fenomenologije jedan od najistaknutijih nosilaca današnjih revolucionarnih preokreta prirodnih, tehničkih, društvenih i filozofskih nauka koji se obavljaju, po našem mišljenju, bitno integracijom u kojoj se prevazilaze brojne ograničenosti jedna za drugom.

Tako u posebnim svojim stvaralačkim istraživanjima, prednjačeći, započne li Petrović u matematičkoj analizi svoja ispitivanja integracije diferencijalnih jednačina, neće on stati dok je preko funkcija određenih redovima konačno ne privede primeni u mehaničkoj integraciji. I obratno, pošavši od spektralne metode koja se koristi u hemijskoj analizi, on zamišlja analogu matematičku spektralnu metodu kojom se rešavaju brojna matematička pitanja i zasniva nove grane matematičkih ispitivanja i disciplina. I mnogi njegov naučni rad od računskih mašina odjeknuo je u svetu najčešće baš time što je njime imala da bude oborena još jedna granica više između prirodnih, tehničkih i matematičkih nauka i otvorena još jedna analoška perspektiva više njihove plodne integracije.

Ali i u celini sa njegovim *Elementima matematičke fenomenologije,* 1911, imale su najzad da budu oborene i sve ove granice i da se najpreciznije prirodne, društvene, psihološke i istorijske nauke integrišu sa matematikom u svojoj naučnoj »deskripciji toka evolucije«, zahvaljujući takvoj novoj Petrovićevoj, kako on veli, »Prirodnoj filozofiji«, koja će matematičkim simbolizmom njegove analoške fenomenološke ujedno analize i sinteze povezati i precizno odrediti svu bezmernu raznolikost pojava sveopšteg »toka evolucije«.

A u ovome jeste on i ostaje zaslužni pionir našega vremena koje je zahtevalo za postizanje novih celovitih i dubinskih zahvata da se pođe još neispitanim putevima novih analoških metoda i metoda modelovanja. To nam sâm on i nehotice kaže prvom rečenicom svoga francuskog opšteg filozofskog dela *Mehanizmi zajednički disparatnim fenomenima,* 1921, saopštavajući da je u svojoj matematičkoj fenomenologiji pošao od čuvenog stava glasovitog engleskog fizičara Vilijama Tomsona: »Razumeti jedan fenomen jeste moći ustanoviti njegov mehanički model«.

Ali je Petrović od ovoga učinio takođe i jedan odsudan korak dalje koji je i doneo njegovu »matematičku fenomenologiju«, odnosno njegovu novu »Prirodnu filozofiju«, time što je on na najopštije logičko odnosno metodološko pitanje Džona Stjuarta Mila — kako doći do najmanjeg mogućeg broja stavova koje pretpostavlja i iz kojih sledi stvarni prirodni poredak, odgovorio: »Svesti mnoštvo fenomena na isti proces, na isti tip mehanizma«.

Iz ovoga se vidi da time što je prirodni proces uopšte shvatio samo kao mehanički, Petrović je poveo svoju novu analošku i modelsku matematičku fenomenološku tipologiju jednostranim putevima mehanicizma odnosno formalne logike, ali nije on zato manje, istaknimo to ovde takođe, morao da analoški, modelski i tipološki rešava probleme matematičkog »preslikavanja« tj. novog matematičkog analoškog fenomenološkog formulisanja samih bitnih dijalektičkih suprotnosti kojima se sâm proces u svojoj osnovi zbiva, kao što to sami sobom pokazuju i sami konkretni primeri koje on obrađuje.

Tako na svome naglašeno mehanicističkom putu Petrović u svojoj »Prirodnoj filozofiji« analoške matematičke fenomenologije ispituje analogije disparatnih pojava da bi u njihovim analoškim jezgrima otkrivao tipove zajedničkih modela koji treba da povezuju sve disparatne pojave od fizičkih i hemijskih do društvenih i psihičkih sveopšteg »toka evolucije« u prirodi, društvu i ljudskom mišljenju i stvaranju. »Takve analogije, isticao je Petrović, pružaju one metafore kojima se često služe razne grane nauka kao i običan svakodnevni govor. Setimo se, na primer, upoređivanja ovog ili onog fenomena i bujice čija razorna sila raste sa preprekom koja joj se protivstavi. Fenomeni koji su različiti po svojoj prirodi (mehanički, fizički, fiziološki, društveni itd.) a koji se sastoje u laganoj oscilaciji između dva krajnja suprotna stanja, često se upoređuju sa ritmičkim kretanjem klatna, sa plimom i osekom ili sa peristaltičkim pokretima u organizmu«.[4a]

I uočimo da kao ovde suprotnosti napona i otpora, oscilacionog kretanja klatna, plime i oseke ili peristaltičkih organskih pokreta, tako su upravo dijalektičke suprotnosti osnova na kojoj se Petrović trudi da analoški i matematički postavi svekoliko tkivo svoje fenomenološke prirodne filozofije koja bi obuhvatala svekoliki »tok evolucije« od mehaničkih i fizičkih do društvenih i psihičkih, utvrđujući »analoške grupe«, »jezgra« i »modele« za svaki stupanj toga razvitka, ali i kartezijanski svodeći složenije i više na prostije i niže, i time sve na najniže mehaničko, i time teorijski u svojim opštim tumačenjima ostajući zarobljen jednostranošću mehanicizma, dok su u osnovi njegovih ispitivanja ostajale konkretne dijalektičke suprotnosti koje su pozivale na nova i dalja analoška dijalektička produbljivanja i svestranija, celovitija sagledavanja i ovladavanja prirodnim pojavama od mehaničkih i fizičkih do društvenih i psihičkih u nerazdvojnoj celini njihove uzajamne dijalektičke povezanosti i uslovljenosti, u kojoj bi postajalo jasno da je u celokupnom prirodnom »toku raz-

[4a] loc. cit.

voja« svako kretanje u svojoj suštini i zametku samokretanje koje posle niza kvalitativnih skokova u današnjem razvitku društva i čoveka ostvaruje i skokovit prelaz iz sveta nužnosti u svet slobode.

Jer, okupljajući jednu za drugom, svaku »analošku grupu« disparatnih pojava od mehaničkih do psihičkih i određujući njeno »analoško jezgro«, Petrović ističe: »Analoška jezgra preobražavaju sličnosti u odnose jednakosti«, i to u svome kasnijem delu *Fenomenološko preslikavanje,* 1933, razrađuje posebnim odeljkom, te bi sva njegova matematička fenomenologija imala da putem analogija i u njima određenih tipova uloga i tipova mehanizama izjednači složenije i više biološke, društvene i psihičke pojave, procese i razvitke sa njima analogim prostijim i nižim analogim mehaničkim i fizičkim pojavama i procesima u samom njihovom zajedničkom i tipičnom mehaničkom modelu, pa tako konačno zaključi i sveopštu mehaničnost.

Ali ako su danas sa kibernetikom analoške metode i metode modelovanja u ispitivanju fenomena, mehaničkih ili ne, postale izvanredno plodne i omiljene stvaralačke metode na mnogim pravcima i poljima prirodnih, tehničkih i društvenih nauka, Mihailo Petrović ipak ni među brojnim matematičarima, svojim učenicima i sledbenicima, konstatovali smo mi podjednako pre trideset i pre deset godina, nije našao ni jednog jedinog neposrednog nastavljača svoje ultra-mehanicistički orijentisane matematičke fenomenologije, i pitali smo se: zašto? I odgovorili smo da nam izgleda da je to bilo, s jedne strane, upravo zbog same besplodnosti njegovog naopakog ultra-mehanicističkog smera, a, s druge, što je on upravo kao takav u konkretnim svojim analizama pokazivao i dokazivao upravo suprotno onome što je u svome početnom i osnovnom smeru hteo.

Ovome bi u širem istorijskom i kritičkom razmatranju trebalo dodati da se slično desilo i sa Hegelovom odredbom sveopšteg »toka evolucije« dijalektičkom zakonitošću spiralnog kretanja, koja je imala da konačno učvrsti njegov objektivni idealizam, a u otkrićima i argumentima klasika marksizma, od Marksa i Engelsa do Lenjina, na činjenicama pokazivala i dokazivala upravo suprotno samu činjeničku dijalektičnost kretanja i razvoja prirode, ljudskoga društva i mišljenja.

A ovome bi se, pak, moralo dodati još i to da je revolucionarni skok i razvitak prirodnih, tehničkih i društvenih nauka nametnuo ovima hitna ispitivanja međupojedinačnih odnosa i zakona od atoma i njihovih čestica do ličnosti u društvu, i sa njima nametnuo analoške metode i metode modelovanja uz upotrebu teorije relativnosti i teorije verovatnoće u savlađivanju specijalnih problema pred kojima su stajale, ne setivši se ni prvog Hegelovog uopštenog dijalektičkog modela spirale za sveopšti »tok evolucije«, niti pak mehanicističkog modela fenomenološkog mehanizma, ali činjenički i principijelno potvrđujući konkretnu dijalektičku zakonitost i model spiralnosti sveopšteg »toka evolucije«, kao što su ih potvrđivali i konkretni elementi same Petrovićeve analoške prirodne filozofije, iako početno i u osnovi fenomenološki i mehanicistički usmerene i ograničene.

Jer, kao što smo to istakli pre više godina u sažetom studijskom ogledu o misli Mihaila Petrovića, mora se takođe primetiti da poput svih savremenih revolucionarnih naučnih tekovina i njegova analoška prirodna filozofija, uprkos svojoj apstraktnoj i jednostranoj mehanicističnosti i fenomenologičnosti, nastavlja one napore oko konkretnog dijalektičkog sagledavanja sveopšteg »toka razvoja« kao spiralnog uzdizanja od nižih ka višim stupnjevima, koji se javljaju i sve šire u naukama proveravaju i učvršćuju, najčešće bez ikakve veze sa filozofskim pogledima Hegela, Marksa, Engelsa ili Lenjina. Ako pobliže pogledamo, ona je »disparatnim« nazvala u stvari različite stupnjeve na spirali razvitka prirodnih pojava od mehaničkih i fizičkih, preko hemijskih i bioloških, do društvenih, istorijskih i psihičkih, pa kad je htela da to »disparatno« svede na »mehaničko« kao »zajedničko«, sve više stupnjeve i vrste kretanja na najniži, mehanički stupanj, ona je pošla od onoga što je na raznim stupnjevima karakteristično, tipsko a homologo i tad kod odgovarajućih analogih grupa pojava raznih razvojnih stupnjeva prirodnog toka razvitka otkrivala kao homologe i suštinske najčešće baš u samim suprotnostima i protivurečnostima same dijalektičke elemente ili momente dinamičke strukture odnosno analoškog jezgra ili tipa kao modela tih pojava.

A sve to potvrđuje Lenjinovu reč iz *Materijalizma i empiriokriticizma* o karakteru naučno-tehničke revolucije našega doba da savremena »fizika rađa dijalektički materijalizam«.

3.

I nije nimalo slučajno što upravo ovih poslednjih godina ne samo sovjetski i poljski naučnici otkrivaju posebni značaj analoških metoda i koncepcija analoških grupa, jezgara i tipova Petrovićeve prirodne filozofije, nego i neki naši, i to prvi put složno i odsudno na trećem, opatijskom naučnom skupu »Marks i savremenost« 1965. godine prirodnjaci, matematičari i filozofi, Damnjanović, Stipanić, Kurepa, Sedmak, Mlađenović, Nedeljković i drugi, raspravljajući u svojim saopštenjima, i još više u diskusijama, upravo o analoškim metodama i metodama modelovanja i kibernetike kao najplodnijim i bitno dijalektičkim, i u tome se oslanjajući ne samo na Engelsovu *Dijalektiku prirode*, već i na pionirske rezultate Petrovićevih *Elemenata matematičke fenomenologije* iz 1911.

Tako kad mladi biolog Zvonimir Damnjanović u svome saopštenju *Engelsovo tumačenje zakona prirodnog odabiranja, kao principa dijalektike prirode* hoće da istakne »*opšti* sklad Engelsovih i Marksovih pogleda sa nama savremenom naukom«, on sâm današnji uopšte uzet predmet nauka karakteriše Petrovićevom analoškom formulacijom, ističući značaj konkretnog dijalektičkog pristupa upravo takvom predmetu, »za širinu naučnog pogleda, za visoki stepen apstrakcije i uopštavanja, za pristup prirodi, tehnici, društvu i čoveku, kao skupnom predmetu, kao 'analoškoj grupi fakata'«.[5] A kad treba da konačno danas posle Darvina i Ešbia pokuša da najsvestranije i najkritičnije formuliše zakon prirodnog odabiranja kao bitno zakona pokušaja i greške, on će to izrikom učiniti ne samo rečima, već i konkretnom mišlju Petrovićeve prirodne filozofije i nauke analogija, pišući: »Princip pokušaja i greške, princip prirodnog odabiranja, afirmisao se u savremenoj nauci kao osnovni princip evolucije, ne samo evolucije vrsta, nego i evolucije saznanja, kao aksiomatski osnov onog najšire shvaćenog procesa koji je *Mihailo Petrović* označio kao *univerzalnu evoluciju.* Metoda naučne analogije, teorija fenomenološkog preslikavanja, koju je Petrović prvi formulisao, kibernetika otvara pred nama veličanstvenu panoramu opšteg kretanja i razvoja, jedinstvo u raznolikosti, dijalektiku u prirodi i društvu, a naročito duboko jedinstvo mišljenja i prirode, jedinstvo opštih zakona koji vladaju u ove dve oblasti«.[6]

Sasvim slično, istaknuti mladi matematičar Dr Ernest Stipanić, proučavajući u svome saopštenju Englesovo mišljenje da je »filozof-dijalektičar« Dekart sa promenljivim veličinama matematiku u celini doveo na područje dijalektike i osvrćući se na to šta je sve bitnog na toj liniji u razvitku matematike uopšte, a shvatanja prostora posebno, nastalo do danas, ističe: »Zanimljivo je ovde podvući da je naš istaknuti matematičar Mihailo Petrović, pre više od šezdeset godina, koristio fazni prostor za kvantitativnu i kvalitativnu analizu pojava u svojoj matematičkoj fenomenologiji. On uočava deskriptivni sistem od n elemenata, a uređen kompleks vrednosti od n korespondentnih parametara zove figurativnom tačkom deskriptivnog sistema. Na taj način deskripciju pojave svodi na opis kretanja figurativne tačke u prostoru od n dimenzija i ističe da se: 'Problem mate-

[5] *Marks i savremenost*, III, Beograd 1965, str. 29.
[6] *ibid.*, str. 33—34.

matičke fenomenologije... svodi na problem kretanja u polidimenzionalnom prostoru i rešava se u svim svojim najraznovrsnijim oblicima i varijantama generalizacijom metoda kojima se rešava problem kretanja u običnom prostoru'«.[7]

Tako je Petrovićeva analoška prirodna filozofija upravo kao bitno dijalektička počela da zauzima mesto koje joj i pripada u današnjem revolucionarnom preokretu prirodnih, tehničkih i društvenih nauka, ali je sasvim prirodno pobuđivala da one ograničenosti koje je u sebi nosila, s jedne strane, mehanicizam i, s druge, fenomenologizam i pozitivizam, dođu u saopštenjima i još više u diskusiji ovog velikog naučnog skupa do svojih, tu i tamo, pojačanih izraza. Zato je prof. Stipanić u diskusiji s pravom istakao činjenicu da se u matematičkim modelima preslikavanja prirodno dijalektički preokreće tako da se i model kao slika može preslikavati na sam predmet ili original, a samim tim i proveravati, a to opovrgava podjednako apstrakcionizam kako vulgarnog mehanicizma tako i svakog pozitivističkog fenomenologizma, a potvrđuje konkretne dijalektičke poglede teorije odražavanja. A da upravo ovo pokaže, on sasvim ukratko rezimira sâm sistem postupaka analoških metoda prirodne filozofije Mihaila Petrovića ovim rečima: »U diskusiji o matematičkim modelima naglašeno je da je reč o izvesnom preslikavanju, odnosno, tačnije, o preslikavanju predmeta ili originala na njegovu sliku. Međutim, nije istaknuto inverzno preslikavanje ,naime, slike na original, slike na predmet. — Modeli nastaju na bazi uočavanja sličnosti ili istovetnosti među disparatnim faktima ili fenomenima. Na osnovu toga stvara se analoška grupa fenomena ili fakata, odnosno analoško jezgro, kako je to već pre šezdeset godina istakao *Mihailo Petrović* u *Matematičkoj fenomenologiji.* Analoško jezgro čini podlogu matematičkom modelu pojave, stanja ili procesa, odnosno matematičkom modeliranju pojava ili fenomena. Znači, polazi se od realnih pojava i procesa, i vrši se preslikavanje na analoško jezgro kao zajedničku sliku disparatnih fakata, odnosno svih onih koji su obuhvaćeni jednom analoškom grupom. Kada se ova slika prenosi na realnu pojavu, vrši se inverzno preslikavanje. Tu je izvor snazi predviđanja putem matematičkih modela, odnosno snazi istraživanja teorijskih modela uopšte«.[8]

Ovim je, sasvim paradoksalno ali nepobitno, sama realna i delatna dijalektička struktura analoških zaključivanja i modelovanja Petrovićeve prirodne filozofije pobijala apstraktnu jednostranost svakog fenomenologizma, pozitivizma ili mehanicizma, a potvrđivala

---

[7] *op. cit.*, str. 111—112.

[8] *ibid.*, str. 425.

bitno konkretno, delatno i stvaralačko dijalektičko učenje o saznavanju kao delatnom i stvaralačkom teorijskom i praktičnom odražavanju, pa je, posle razmatranja na osnovu toga nekolikih situacija u razvitku današnjih nauka, prof. Stipanić mogao zaključiti: »Meni se čini da marksistička dijalektika, kao teorija saznanja, daje najadekvatnije odgovore od svih mogućih teorija saznanja na opšta teorijsko-spoznajna pitanja implicirana navedenim i njima sličnim pitanjima«.[9]

A ova kritička razmatranja su se morala kosnuti i nekih koji su na svojim naučnim poljima usvajali ujedno konkretne dijalektičke i Petrovićeve analoške metode, pa je neposredno u diskusiji na njih odgovorio čak i prof. Damjanović ovim rečima: »U onome što sam ranije rekao mislim da je u izvesnom smislu impliciran odgovor na pitanje koje je Dr Stipanić postavio. Jer, onaj mehanizam o kome je govoreno, u stvari je povratna sprega i uzajamno preslikavanje između dva fizička procesa, a matematički model se javlja kao simbolična slika zajedničkog homomorfnog mehanizma za oba ova procesa«.[10] I ovde je očigledan napor da se, i uz pomoć kibernetike, uđe u samu delatnu dijalektičku suštinu Petrovićevih i uopšte savremenih, toliko delotvornih metoda analogije i modelovanja i savladaju jednostranosti, ograničenosti i teškoće savremenog mehanicističkog i fenomenologističkog biološkog tretiranja živih bića samo »živim sistemima«, — i očigledna iskrena Damjanovićeva reč na kraju: »Inače, potpuno se slažem sa osnovnom intencijom, naročito sa zaključkom, kojeg je izneo Dr Stipanić na kraju svoga izlaganja«.[11]

A ovaj dijalog je samo verna slika veoma složene i plodne diskusije koja se u mnogim pravcima i sa mnogih strana na ovom naučnom skupu obavila i u kojoj su se savlađivale mnoge vladajuće metodološke jednostranosti i ograničenosti, pa i onih koje su smetale delotvornijem korišćenju Petrovićeve analoške prirodne filozofije i naročito marksističke materijalističke dijalektike koje su sve više zauzimale mesto koje im pripada u današnjem revolucionarnom metodološkom preokretu matematičkih, prirodnih, tehničkih, društvenih i filozofskih nauka. Time se vodila borba za otklanjanje i ograničenosti same Petrovićeve analoške misli, sa kojima se nekada u svojim pogledima i sâm Petrović, hteo ili ne-hteo, ipak nosio, kao što se vodila borba i za otklanjanje onih ograničenosti jednostranih dogmatičkih uzimanja same materijalističke dijalektike, protivu kojih su se i sami klasici marksizma borili. Fenomenologistička i mehani-

---

[9] *ibid.*, str. 526.

[10] *ibid.*, str. 526—527.

[11] *ibid.*, str. 527.

cistička ljuštura, koja je u *Elementima matematičke fenomenologije*, 1911, htela da pruži jednu novu prirodnu filozofiju kao zatvoren sistem jednog novog univerzalnog analoškog simboličkog matematičkog jezika poput nekadašnje Lajbnicove »Univerzalne karakteristike«, pukla je i oslobodila istraživački otvoreni sistem Petrovićevih analoških metoda, grupa, jezgara, modela, tipova itd. da plodno i ubedljivo povezuje čak i rezultate kibernetike sa osnovama konkretnih dijalektičkih analiza, sinteza i integracija, oslobođenih svake dogmatičke ljušture. Tako su se delatno i dijalektički uključivale originalne komparativne metode analogije, preslikavanja i modelovanja Petrovićeve prirodne filozofije u istraživačka i stvaralačka razmatranja i diskusiju opatijskog naučnog skupa pre nekoliko godina, kao što se, sa pozivom na Petrovića ili ne, uključuju i moraju dalje kritično i samokritično uključivati u današnji burni stvaralački i revolucionarni razvitak nauka i filozofije.

4.

Zato, kad je priređivač izdanja u »Srpskoj književnoj zadruzi« značajnog Petrovićevog naučnog i filozofskog testamentarnog dela *Metafore i alegorije*, 1967, mladi matematičar Dragan Trifunović, nedavno, u svome predgovoru pisao da je Petrović u svojoj matematičkoj fenomenologiji »ostao sâm bez učenika«,[12] to više nije bilo sasvim tačno, jer ako zaista niko nije ni do danas usvojio sâm apstraktni sistem analoškog algoritamskog simbolizma Petrovićeve matematičke fenomenologije u njegovoj celini, u njegovoj mehanističnosti i fenomenologističnosti kao jedini i jedinstveni univerzalni jezik i sistem jedinstvene prirodne filozofije, ne počinju zato manje koristiti već mnogi prirodnjaci, matematičari i filozofi neke bitne tekovine Petrovićevih originalnih pogleda i metoda analogije i modelovanja, na koja su upućeni svekolikim današnjim revolucionarnim dijalektičkim metodološkim preokretom uopšte, a kibernetičkim posebno.

Ali to što se objektivno sa Petrovićevom originalnom mišlju i delom zbiva u revolucionarnom metodološkom razvitku nauke i filozofije našega vremena, zbivalo se već i u samom njegovom delu, dok je ono bilo još samo u njegovim rukama. O tome, i bez obuhvatanja na ovoj liniji bogate geneze njegove istraživačke i stvaralačke misli od pronalazaka njegovih upravljačkih računskih mašina krajem prošlog veka do poslednjeg njegovog rada *Električne analogije*, 1941, iz tehničke fenomenologije, nepobitno i rečito govori već i sama njegova poslednja knjiga *Metafore i alegorije*, koju od 1939. do 1942. piše

[12] *Metafore i alegorije*, izd. Srpske književne zadruge, Beograd 1967, str. 17.

u nekoliko navrata, prekidan drugim svetskim ratom i fašističkim zarobljeništvom koje će mu smrt uskoriti, ali ne i sprečiti ga da u ovo svoje delo unese i poslednje, zaista testamentarne svoje misli i poglede.

U njega je on uneo iz ranijih svojih dela opšte i neke bitne stavove i primere koji su iznosili poglede, perspektive i metode njegove nove prirodne filozofije analogije i modelovanja, ali ih je i dopunio takvim novim odeljcima i razmatranjima kojima je obrazovao zaključno svoje novo delo okrenuto uključivanju delotvornih tekovina njegove originalne misli u revolucionarni preokret i napredak svekolikog duhovnog života, od filozofskog i naučnog, preko književnog i umetničkog, do svakodnevnog, — i zato delo pisano i napisano za izdanja »Srpske književne zadruge«.

Suprotno ma kakvom matematizmu koji bi se zatvarao u jednostranu apstraktnost ma kakvog algoritamskog simbolizma, ova knjiga se već prvim svojim odeljcima sasvim konkretno i široko, i sasvim izrično otvara ujedno »običnom životu, poeziji i nauci« da tamo na izvanrednom obilju konkretnih slučajeva ukaže na prirodno i nužno korišćenje analoškog izražavanja i shvatanja u životu i književnosti, i unese novu svetlost i nove saznavalačke i stvaralačke metodološke mogućnosti filozofski i naučno uopštenih analoških preslikavanja, modelovanja, zaključivanja, predviđanja i stvaranja.

Tu će u ovom novom konkretnom smeru i na ovom najopštijem planu Petrović, polazeći od života i književnosti, razlikovati pre svega metafore i alegorije, pišući: »Kad Viktor Igo upoređuje porodicu sa kristalom ljudske zajednice, a društvo sa tečnošću, to je metafora; kad kaže da zub vremena nagriza ne samo materiju nego i ljudska shvatanja, ili da život teče kao pomamna reka, sa opasnim vrtlozima i čevrntijama, ili da klica sumnje još nije pustila svoje žile, ili kad beduin iz Sahare kaže da prodaje vodu, ali ne prodaje izvor (odaje tajnu, ali ne prikazuje od koga ju je saznao), to su alegorije... Alegorija izražava nešto što se zbiva, dok metafora iskazuje nešto što postoji. Metafora i alegorije imaju i svoje specijalnije oblike u kojima se upotrebljavaju u naročitim prilikama. To su simboli, amblemi i parabole, od kojih se prva dva oblika upotrebljavaju u metaforičkom, a treći u alegorijskom«.[13]

Ali, razume se, Petrović nije mogao da na ovome ostane već se dalje pitao: »Kakav bi bio pravi, dublji smisao metafora i alegorija, i zašto se one tako rado, tako često i gotovo na svakome koraku upotrebljavaju, i u običnome govoru, i u književnosti, i u nauci?«[14]

---

[13] *ibid.*, str. 21—22.

[14] *ibid.*, str. 22.

Уочи претварања Велике школе у Универзитет, Београд, 1904.

Ovakvim pitanjem se on očigledno trudio da svoju matematičku fenomenologiju široko uključi u svekoliko saznavalačko i stvaralačko analoško zaključivanje, predviđanje i modelovanje u životu, umetnosti i nauci, pa je dalje pisao i odgovarao: »Na pitanje se obično daje ovakav prost odgovor: one pružaju jedan izvrstan način za kratko i slikovito izražavanje činjenica, za koje bi, bez njih, često trebalo mnoštvo reči da bi se izrazilo ono što se ima u vidu. Ali to nije sve, i odgovor je nepotpun«...[15]

Zato će ga Petrović dopuniti, s jedne strane, time što će istaći da su one *subjektivno* jedan od zakonitih oblika ljudskoga saznanja, duha i svesti, pišući: »Metafore i alegorije imaju mnogo dublji smisao i dublji koren u ljudskoj svesti: one odgovaraju jednoj instinktivnoj i neodoljivoj potrebi duha, koja se ispoljava u svima fazama razvića svesti... da jedne činjenice preslikava na druge, bar prividno shvatljivije ili izrazitije, u cilju bilo da se učine razumljivijim, izrazitijim ili ulepšanim«, ali će dopuniti i time da ovaj analoški oblik saznavanja i predstavljanja *objektivno* počiva na »činjenicama« i samoj njihovoj »suštini«, pišući: »Preslikavanje je osnovano na sličnosti između raznovrsnih činjenica, koje mogu nemati nikakve međusobne veze, ali imaju nečega neosporno sličnoga u svojoj suštini, što čini da one liče jedna na drugu i da po takvoj sličnosti jedna činjenica ne samo da podseća na drugu, već da se i u običnom životu, i u poeziji, i u nauci jedna zamenjuje drugom«.[16]

Ali ni na ovome Petrović neće ovde ostati, nego će učiniti još jedan odsudan korak dalje ka objektivnoj naučnoj i stvaralačkoj suštini analoških metoda preslikavanja, predviđanja i modelovanja, pišući: »Ali i to još nije sve... Takva sličnost se sastoji u stvarnoj egzistenciji zajedničkih pojedinosti u raznoraznim činjenicama; ove čine da se sličnost pretvara u istovetnost u pogledu tih pojedinosti. Svaka metafora i alegorija ima ovih u svojoj suštini, među činjenicama koje vezuje; ona je jedan naročiti izraz egzistencije takvih pojedinosti. I onda, kad se iz njih izvuče sve što je zajedničko i dođe do onoga što je u činjenicama istovetno, pojavljuje se po jedan apstraktan tip činjenica, u kome sastavci gube svako specifično konkretno značenje i svode se na nešto opšte i apstraktno, što se može vezati za najraznoraznije objekte, bez obzira na konkretnu prirodu stvari, a da pri tom zadrže u sebi mogućnost za pozitivne logičke dedukcije i predviđanja. Time metafore i alegorije ulaze u prostranu oblast pozitivne nauke i tu su činile i čine dragocene usluge«.[17]

---

15 *loc. cit.*

16 *loc. cit.*

17 *ibid.*, str. 23.

Tako, pošavši ovoga puta od metafora i alegorija iz života i književnosti i nabrajajući ih na stotine i hiljade, Petrović uključuje svoju analošku prirodnu filozofiju u burni razvitak samog stvaralačkog analoškog preslikavanja, predviđanja i modelovanja uopšte, kojim je između ostalog okarakterisan revolucionarni preokret delatnog dijalektičkog razvitka metodologije prirodnih, tehničkih, društvenih i filozofskih nauka, kao i mišljenja uopšte u životnoj praksi i umetnosti.

I kao što se ovde sasvim prirodno okreću leđa jednostranosti svakog matematizma, tako i samoj jednostranosti svakog mehanicizma, jer, iako ističe izvanredan značaj i plodnost »mehanističkog preslikavanja« koje se »ostvaruje pomoću mehaničkih modela«[18] na polju fizičkih nauka, Petrović usvaja da na raznim stupnjevima razvitka sveta »vladaju zakoni sasvim drukčije vrste« i da je pogrešno svoditi na mehaničke one koji to nisu, kao što su biološke, fiziološke, društvene, ekonomske, etičke, estetičke itd., pišući: »To se svodilo na izveštačeno mehanističko objašnjenje svega i svačega, nategnuto, neprirodno i lišeno svake logičke osnovice, osim neke ovlašne i nedovoljne sličnosti. Dovoljno je podsetiti na pomenuta nekadašnja ijatrohemičarska objašnjenja fizioloških pojava elementarnim zakonima mehaničke ravnoteže i kretanja... Takav je bio i poznati zlosretni pokušaj da se doktrina evolucije, onakva kakva važi za organski svet, prenese na literarne vrste u književnosti; ili da se ekonomske pojave svedu isključivo na igru cifara koje ne znaju ni za što drugo do za neumitne zakone brojeva«.[19]

Ali ovde okrećući leđa i svakom fenomenologizmu, biva reč »o takvim opštim pojmovima kao što je pojam tipskih uloga i tipskih činjenica koje se mogu privezati za nosioce uloga najraznovrsnijih intimnih priroda« raznih stupnjeva prirodnog razvitka stvari od mehaničkih do psihičkih da se »tipskim ulogama«, »analoškim jezgrima« ili »modelima« i »predviđanjima« činjenički zahvata vertikalno u samu čistu logiku stvari samoga sveopšteg prirodnog »toka razvitka« sa istom naučnom egzaktnošću sa kojom matematičke nauke to čine opštim pojmovima brojeva i poredaka, a da je svakom stupnju prirodnog razvitka prirodnih pojava ostala netaknuta sama njemu svojstvena »intimna priroda« njegovih specifičnih zakonitosti i da je od njih relativno »nezavisno« učinjen ovaj prodor analoškog preslikavanja, zaključivanja, predviđanja i modelovanja u »čistu logiku stvari«, ili kako Petrović veli: »Činjenice, koje proizilaze iz saradnje takvih uloga u njihovoj produkciji, potpuno su nezavisne od intimne

[18] *ibid.*, str. 82—83.

[19] *ibid.*, str. 170.

prirode onoga u čemu se spoljno prikazuju. Njihovo predviđanje, osnovano na čistoj logici stvari, onako isto pouzdanoj kao što su i zaključci o brojevima i porecima, potpuno je opravdano i tačno i za materijalan i za imponderabilan svet činjenica«.[20]

Zaostatak fenomenologističnosti je ovde još samo u podvlačenju »potpune nezavisnosti« novih analoških tipova, jezgara ili modela koji svojim opštim odredbama objedinjuju specifične zakonitosti ili prirode nekolikih raznih stupnjeva razvitka prirodnih pojava, umesto da sagleda njihovu samo relativnu dijalektičku nezavisnost ali i istu takvu zavisnost koja prirodno ovde postoji između analoški razvojno zajedničkog, opšteg, grupnog, tipskog, suštinskog, s jedne, i specifične i konkretne »intimne prirode«, s druge strane.

Ali ovde je naglašeno i ono što je suprotno ovom fenomenologističkom zaostatku, a to je da se analoškim preslikavanjem, zaključivanjem i modelovanjem zahvata u samu »čistu logiku stvari«, kao što će u sledećem izlaganju reći da zahvata u samu »tipsku suštinu« (a ne samo u fenomenologistički fenomen!) »toka razvoja«, pišući: »Metafora i alegorija izražavaju neposredno poneku zapaženu ili naslućenu sličnost među disparatnim bićima, činjenicama ili događajima. Kad se takva sličnost u mislima prečisti i svede na takav oblik da se njena tipska suština može privezati za koji bilo od posmatranih slučajeva, dobija se prečišćeno jezgro sličnosti koje više ne vodi računa o intimnoj konkretnoj prirodi bića, činjenica i događaja, iz kojih je apstrahovano. Jezgro spaja među sobom sve to i daje mu jedno isto tipsko obeležje... Kad se alegorijski kaže da je osvajačka bujica neobuzdane horde to isto što i vodena bujica koja ruši sve na šta naiđe, očevidno se ne misli da te dve stvari time što se među sobom porede imaju čega god zajedničkog po svojoj konkretnoj prirodi. Alegorija kazuje samo to, a što je neosporno tačno: da se tu, i kod osvajačke i kod vodene bujice radi o jednom intenzivnom impulzivnom faktoru koji jača sa preponama što mu se stavljaju nasuprot«.[21]

Dotle Petrović stiže u oslobođavanju svoje nove analoške metode preslikavanja, predviđanja i modelovanja od jednostranosti matematizma, mehanicizma i fenomenologizma u svome predsmrtnom, testamentarnom delu *Metafore i alegorije* kojim bi da ih široko unese u opšti način stvaralačkog analoškog mišljenja, predviđanja i modelovanja našega vremena, i tu po navici tretirajući sve pojave samo horizontalno kao disparatne i bez njihove prirodne i nužne treće i

[20] *ibid.*, str. 171.
[21] *ibid.*, str. 174.

četvrte dimenzije u stupnjevitom modelu dijalektičkog spiralnog kretanja sveopšteg prirodnog »toka razvoja«, do čijeg sagledavanja mu u njegovoj prirodnoj filozofiji beše inače toliko stalo.

5.

Ali, kad je reč o ovom poslednjem, moramo na kraju primetiti da se i ovome on na svoj način beše približavao u jednom svom ranijem delu koje je po svome pokušaju slično ovome poslednjem, to je *Fenomenološko preslikavanje,* iz 1933.

Jer, ako je svojom akademskom besedom *O matematičkoj teoriji aktivnosti uzroka* 1900. godine Petrović obeležio prvu etapu postavljanja osnovnih principa svoje prirodne filozofije kao matematičke fenomenologije, a voluminoznim svojim delom *Elementi matematičke fenomenologije,* iz 1911, drugu etapu formulisanja strogim matematičkim simbolizmom osnovne crte samog njenog sistema, onda je treću etapu nesumnjivo obeležio delom *Fenomenološko preslikavanje,* u 1933. godini, u kojem je pre svega, kako veli, »naročito izbegnut matematički način izlaganja« i svaki »matematički aparat«, i tražen način da se metodama i principima njegove analoške fenomenološke prirodne filozofije obuhvati i rasvetli svekoliki revolucionarni preokret prirodnih i tehničkih nauka od lorda Kelvina do Ajnštajna, a s tim da se u nj sistematski uključe njegove metode i principi analogije, preslikavanja, predviđanja i modelovanja; što se tiče samih novouvedenih apstrakcija, za njih Petrović na kraju *Uvoda* dodaje da: »Ne bi bilo teško sve uvedene apstrakcije *matematizovati* i time ih učiniti preciznijim i potpunijim«.[22] Ovde matematičko nije više ni »osnovno« ni »bitno«, o čemu već govori i sâm naslov koji je od *Elemenata matematičke fenomenologije* postao samo *Fenomenologija preslikavanja.*

Ovde se, međutim, još jedna prenaglašenost, jednostranost i ograničenost — mehanicizam — prethodnih etapa takođe principijelno otklanja, i »mehaničko preslikavanje« ograničava na mehaničke pojave. Tom prilikom se Petrović vraća na sâm istorijat svekolike ove problematike ujedno metodologije i prirodne filozofije od Dekarta, preko Ernesta Maha, do Debroljija i Hajzenberga, da pokaže da se on upravo kritički prema Mahovom mehanicističkom protezanju mehaničkog preslikavanja na sve pojave uključuje u svekoliki savremeni filozofski i naučni, metodološki i principijelni razvitak analoškog zahvatanja suštinâ i celine »razvojnog toka« prirodnih pojava na polju prirodnih nauka, pišući: »Još Dekart je kazao da treba težiti tome da se prirodne pojave predstave i objasne *'per figuras et par mouvement'*. To je i dalo povoda onome što Mah naziva 'Mehanističkom Mitologijom', koja je pokušavala da sve što se dešava u svetu materijalnih fakata svede na pojave ravnoteže i kretanja materijalnih sistema. — Međutim, moderne fizičke koncepcije, kao što su, na primer, one u talasnoj Mehanici Debroljija i Hajzenberga, pokazuju da je to nemogućno čak i za mnoštvo pojava materijalne prirode. To će utoliko pre biti slučaj i za prostrani svet impoderabilnih pojava, gde se mogućnost ili nemogućnost toga ne može ni dokazivati«.[23]

I ukazujući na to kako njegova analoška prirodna filozofija prirodno izrasta iz svekolikog revolucionarnog iskustva analoškog preslikavanja, predviđanja i modelovanja savremene prirodne nauke od Oma, Lomea, Maksuela, Vilijama Tomsona, Lipmana, Helmholca, Bolcmana, Kirhofa, Hajzenberga, Garbasa, Eversa ili Lorenca, do Rikatija, Govija, Dutera, Pjera Kirija, Ajnštajna, Debrolija, i tolikih drugih i kako ga dosledno objedinjuje i svodi na najmanji broj najopštijih metoda i principa, sistematski prevazilazeći pre svega mehanicističke matematičkim analogijama i modelima. »I same po sebi, piše on, nezavisno od usluga koje mogu činiti kao vodilje u pojedinim istraživanjima, matematičke analogije imaju svoj naročiti filozofski interes. Veliki problem Prirodne Filozofije, čije rešenje je idealno, asimptotički cilj svih nauka, i koje se sastoje u tome da se sve ono, što se mora pretpostavljati radi razumevanja prirodnih pojava, kao i broj propozicija, koje obuhvataju sve što se u Prirodi dešava, svede na što je moguće manju meru, postaje u toliko pristupačniji i utoliko više olakšan, ukoliko bude veći broj zapaženijih analogija među disparatnim pojavama«.[24]

A logički i metodološki put koji nužno vodi od analoškog preslikavanja, predviđanja i modelovanja u prirodnim i društvenim naukama ovakvoj prirodnoj filozofiji kao nužnoj njihovoj integraciji i problematski uvek impliciranoj osnovi, Petrović ocrtava jezikom same savremene teorijske ili matematičke fizike na nivou apstrakcije matematičkih analogija, sledećim rečima: »Očevidno je, pre svega, da sve što doprinosi grupisavanju pojava po njihovim mehanizmima, zakonima njihovoga toka i matematičkim relacijama među faktorima koji u tim mehanizmima igraju određene uloge, doprinosi, u isto vreme, i tome da se priđe za koji korak bliže pomenutome asimtotnome cilju. Matematičke analogije koje jednoj masi disparatnih pojava

---

[22] *op. cit.*, str. 12.
[23] *op. cit.*, str. 85.
[24] *ibid.*, str. 74.

daju jedan isti, zajednički tip, jedno su od najmoćnijih sredstava za takvo približavanje tome cilju. Oslobođavajući iz jedne analoške grupe ono što je njome obuhvaćenim pojavama zajedničko, što ih spaja, što im, pored sve disparatnosti, daje jedan isti tip, matematičke analogije dovode do jedne opšte teorije te grupe pojava, u kojoj konkretna priroda, njihova kao i pojedinih faktora u njima nije precizirana, niti igra kakvu ulogu, a koja se, međutim, specifikovanjem te konkretne prirode svodi na specijalne teorije pojedinih od tih pojava i, na taj način, obuhvata jednu masu, na prvi pogled raznorodnih teorija, bez ikakve međusobne veze. To čini mogućnim grupisanje pojava u tipove, po matematičkim analogijama što postoje među njima, a time i redukciju nedoglednoga broja disparatnih pojava na ograničen broj tipova, koje je dovoljno proučiti, pa da, time, i pojave, iz kojih su oni apstrahovani, budu proučene. Jasno je, prema tome, da će se biti vrlo blizu gornjem idealnom cilju, kad pojave budu grupisane i podvedene pod opšte šeme na čije će proučavanje biti, tada, redukovan osnovni problem Prirodne Filozofije«.[25]

I celo ovo delo *Fenomenologija preslikavanja* pruža nov pokušaj metodološke i filozofske sistematizacije samog metodološkog revolucionarnog preokreta današnjih, pretežno uzetih prirodnih nauka upravo metodama analoškog preslikavanja, predviđanja i modelovanja; i u pokušaju ovoga dela, na ovoj trećoj etapi razvitka Petrovićeve filozofske misli, kritičkom prema matematizmu i mehanicizmu, izrastaju fenomenologistička prenaglašenost, jednostranost i ograničenost do takve neočekivane mere da se u zaključku Petrovićeva fenomenologija smelo i paradoksalno postavlja izrično čak i kao nova »naučna mitologija«. U poslednjoj glavi, pod naslovom *Mitologija fakata,* Petrović razmatra razvitak svekolikog ljudskog saznavanja kao »mitskog preslikavanja«, koje počinje stupnjem drevne verske antropomorfne mitologije, nastavlja stupnjem razvitka mehanističkog preslikavanja racionalne i nebeske mehanike kao »mehanističke mitologije« koja je u Laplasovo doba, kako Petrović kritički veli, »bila uzela maha i bila u modi i tamo gde joj nimalo nije bilo mesta«,[26] i koja se na današnjem stupnju matematičkim fenomenološkim preslikavanjem prevazilazi u »fenomenološku mitologiju«, ili kako Petrović veli: »Antropomorfistička mitologija ustupa mesto, prvo onoj koju je Mah nazvao *mehanističkom mitologijom,* koja sve što se može preslikava na svet pojava ravnoteže i kretanja, a ova za tim *fenomenološkoj mitologiji* koja sve svodi na kombinacije apstraktnih tipova uloga i manifestacija njihove saradnje i koja će,

[25] *ibid.*, str. 74—75.
[26] *ibid.*, str. 226.

nesumnjivo, u svoje vreme obuhvatiti celokupan svet fakata pristupačan ljudskome saznanju i ljudskoj izražljivosti«.[27]

I u ovoj fenomenološkoj mitologiji sami novi nepoznati tipovi uloga, kao što je nov tip uloga Ajnštajnovog relativističkog vremena, stupaju kao nova nepoznata naučna božanstva koja preobražavaju naučni pogled na svet, ili kako Petrović veli: »Tipovi uloga ponavljaju se, u svetu ljudski shvatljivih i izražljivih fakata, u raznovrsnim svojim međusobnim kombinacijama i u beskrajno raznovrsnim svojim spoljnim oblicima koji su samo vidljive slike nevidljive zakulisne igre fenomenoloških uloga, božanstva svoje vrste. Skup tih tipova je ograničen, kao što je ograničen i skup antičkih mitoloških božanstava. I ko može znati na kakve će nove koncepcije i nepoznate fakte navesti kakav nov tip uloga o kome se danas ništa i ne sluti! A kakve horizonte otvara pronalazak kakve nove fenomenološke uloge, najočitije pokazuje nova, do najnovijeg vremena nepoznata *uloga vremena* u svetu *materijalnih fakata, relativistička uloga četvrte dimenzije u materijalnoj vasioni*«.[28]

Ali sasvim neočekivano posle stupnja fenomenološkog preslikavanja i »fenomenološke mitologije« dolazi još i stupanj relativističkog preslikavanja i »relativističke mitologije«, i to dolazi upravo pojavom »nepoznate uloge vremena u svetu materijalnih fakata, relativističke uloge četvrte dimenzije u materijalnoj vasioni«, koja (valjda svojom »igrom fenomenološke uloge, božanstva svoje vrste«!) paradoksalno i protivurečno upravo specijalnom i opštom teorijom relativnosti dovodi do, kako sâm Petrović na kraju kaže, »apsolutne fizičke realnosti«, a samim tim, valjda, i do ukidanja svake »fenomenologičnosti«, »mitologičnosti« i »božanstvenosti«.

Jer, iako pod naslovom, po smislu i duhu suprotnom, *Relativistička mitologija,* Petrović pokazuje kako upravo novim naučnim »relativističkim preslikavanjem« počinje da se ukida sama nekadanja mitologičnost apsolutnog vremena novim konkretnijim modelom posebnog relativnog vremena kao četvrte dimenzije prostora, pišući: »Relativističko preslikavanje daje za danas krajnju sliku o svetu fakata, u nizu slika do kojih je redom i postupno dolazila ljudska svest u neprekidnom, sve oštrijem i sve dubljem posmatranju sveta, i sve suptilnijim analiziranjem onoga do čega dovodi neposredno opažanje. Njemu je dalo povoda pripisivanje jedne sasvim nove uloge vremenu, koje je dotle bilo ničim neograničen faktor na koji ništa i ni na koji način ne može uticati, potpuno nezavisan od onoga što biva i onoga što se dešava. Po novoj koncepciji to nije slučaj: vreme

---

[27] *ibid.*, str. 228.

[28] *ibid.*, str. 229.

je u zavisnosti od svega toga, a njegova uloga u svetu materijalnih fakata izražena je načinom na koji njegove promene utiču na fakte što se dešavaju u običnome trodimenzionalnom prostoru. Neposredna posledica takve koncepcije je to, da ne postoji nikakav apsolutan sistem reperaže merljivih elemenata u tome prostoru, tako da bi posmatrači, posmatrajući fakte u različnim prilikama, na primer u različnim kretanjima, zapažali jedan isti fakt promenljiv sa tim prilikama. — Kakve promene unosi ta nova uloga u ljudsko zapažanje i shvatanje materijalnih fakata? Ima li u tome zapažanju i shvatanju čega apsolutnog, nezavisnog od posmatrača i od prilika u kojima se posmatra? — Ta su pitanja stvorila jednu vrstu naučne mitologije fakata koja se iz osnove razlikuje od svih dotadašnjih mitologija, u kojoj nestaje svih i mehanističkih i fenomenoloških entiteta, čijom bi se zakulisnom igrom stvarali materijalni fakti, i u kojoj su ti entiteti smenjeni čisto geometrijskim entitetima u četvoro-dimenzionalnom prostoru. — Po relativističkoj slici, vreme i prostor su komponente jednoga istog četiri-dimenzionalnog entiteta, topohroničkog prostora... Uloga, od vajkada pridavana vremenu, menja se iz osnove. To više nije, po svojoj ulozi, nezavisan, samostalan, ničim neregulisan faktor na koji ništa i ni na koji način ne može uticati. To je samo četvrta komponenta jednoga prozaičnog tetrakompleksnog entiteta, koja nema svoju samostalnu egzistenciju i čiji se efekti ispoljavaju samo u zajednici sa efektima ostalih triju komponenata«.[29]

A kad na osnovu opšte teorije relativnosti Petrović razlaže kako se topohronično-metrički prostor određuje sa četrnaest veličina i kad zaključi: »Fakti preslikani na taj prostor ne zavise više ni od posmatrača, ni od materijalnog sadržaja oblasti u kojoj se ovaj kreće, ni od sistema etalonaže. Svaka takva slika izražava po jednu *apsolutnu fizičku realnost*«,[30] zar nije tu svaka mitologičnost iščezla pred jednim korenito obuhvatnim modelom čiju dijalektičku konkretnost on naziva »apsolutnom fizičkom realnošću«, znači samom suprotnošću svakome fenomenologizmu? Nije li to sasvim analog slučaj onome kad Petrović, govoreći o samom stvarnom »mehanističkom preslikavanju« mehaničkih pojava, mnogo fenomenologistički insistira na tome da se tu analogije odnose »ne na intimne mehanizme pojava«, a, međutim, naprotiv, kad govori o samom modelu uzetom u celini, on će prirodno protivurečno pisati: »Kretanje sistema, što sastavlja model, i pojedinosti u kojima se sastoji njime preslikana pojava, često imaju toliko zajedničkih crta, da se pomoću modela mogu i shvatiti najvažnije pojedinosti na originalu, i na njemu predviđati novi fakti

[29] *ibid.*, str. 230—231.
[30] *ibid.*, str. 235.

koje su posle imali samo da provere dublje posmatranje i eksperimenat«?[31]

Tako se i na ovoj trećoj etapi svoga razvoja, pionirska i istraživačka Petrovićeva misao kreće u protivurečnostima i prevazilaženjima svojih protivurečnosti i sa tim u prevazilaženjima svojih ograničenosti i teškoća svojih i nauke svoga vremena, sa kojima se uporno borio on, koji je u osnovi svega video samo borbu raznih i suprotnih faktora i, na primer, pisao: »Mnoštvo pojava svih konkretnih vrsta asimilira se borbi faktora, čije okolnosti, završetak i epilog ilustruju ono što se u pojavi ima u vidu. Ravnoteže i kretanja materijalnih tela smatraju se kao efekti kontrabalansiranja mehaničkih sila u međusobnoj borbi, a pri čemu je ta borba stegnuta u granice mehaničkih veza. Efekti te borbe ispoljavaju se u geometrijskim i kinematičkim pojedinostima ravnoteže i kretanja. Borba afiniteta hemijskih elemenata, u određenim toplotnim, svetlosnim i električnim prilikama, pod određenim pritiskom, ima kao peripetije sam tok hemijske reakcije, sa svim njegovim kinematičkim pojedinostima«,[32] itd. Ovo, kao i ostala njegova dela, svojim kretanjem i svojim sadržajem, puno je ne samo otvorenih i izričnih oslanjanja na skoro sve dijalektičke zakone, već i konkretnih dijalektičkih razmatranja i rezultata i zato borba i prevazilaženje mnogih teškoća i ograničenosti.

A ovim delom je njegova analoška prirodna filozofija tako prošla treću etapu svoga razvitka, koji će, kao što smo videli, u testamentarnom, predsmrtnom njegovom delu *Metafore i alegorije* zabeležiti i četvrtu, poslednju svoju etapu, na kojoj više neće biti ni reči o nekoj mitologiji, toliko se svaki mitologizam tj. fenomenologizam beše prevazišao u samom zaključku treće etape sam se genetički razlažući na drevni antropomorfni, mehanicistički, matematičko-fenomenologistički i relativistički, i sa ovim poslednjim se ukidajući.

Toliko je buran dijalektički razvitak Petrovićeve analoške prirodne filozofije, verna slika revolucionarnog razvitka novih metoda analogije i modelovanja savremene nauke i filozofije današnjice, u njihovom revolucionarnom preokretu.

Ali i toliko je raznolikih, razvojnih i dubinskih otvorenih i pređenih novih metodoloških i principijelnih perspektiva njegove analoške i sve konkretnije i kritičnije prirodne filozofije koja se sve prisnije uključuje i utkiva u opštu današnju koja se gradi i, vidimo, nužno nastavlja sa samim daljim istraživačkim i stvaralačkim radom i razvitkom današnjih prirodnih, tehničkih, društvenih i filozofskih nauka.

---

[31] *ibid.*, str. 228.

[32] *ibid.*, str. 214.

Tako, da pri kraju sagledamo u celini i ocenimo ulogu i značaj Petrovićeve analoške prirodne filozofije, moraćemo se ovde pre svega poslužiti njenim novim i bitnim osnovnim metodološkim principom i kriterijumom, i reći da je njena »tipska uloga« u svemu i bitno, suštinski analoga revolucionarnim i stvaralačkim ulogama i novim tekovinama prirodnih filozofija takvih naših najistaknutijih naučnika i filozofa prethodnih revolucionarnih epoha modernoga doba, kao što su Dragišić ili Petrić, Ruđer Bošković, Dositej, Njegoš ili Uroš Milanković, Nikola Tesla ili Božidar Knežević, — stvaralačkim ulogama i novim tekovinama koje se mogu samo dalje istraživački, stvaralački, kritički i samokritički razvijati, kao što se i razvijaju.

6.

A kako je Petrović sasvim prirodno i logično uključivao u razvoj pogleda svoje analoške prirodne filozofije misao onih naših predstavnika i nosilaca revolucionarnih i oslobodilačkih težnji prelomnih epoha novijega doba za koje je znao, možda bi bilo već dovoljno karakteristično navesti sledeće njegove reči o Njegoševom shvatanju univerzalnog dijalektičkog zakona »univerzalne i večite borbe faktora svih konkretnih priroda«: »Pesnička pronicljivost Njegoševa uočila je i široko shvatila borbu u svetu, i to ne samo kao usko shvaćenu borbu za život u organskoj prirodi ili u ljudskoj zajednici, već kao univerzalnu i večitu borbu faktora svih konkretnih priroda, u njenom najopštijem, modernom smislu«.[33] Ali, kao što ovaj još heraklitovski osnovni univerzalni dijalektički zakon on u »najopštijem, modernom smislu«, posle onoga što smo gore videli, navodi i po Njegošu, tako i skoro sve ostale poznate najopštije dijalektičke zakone ističe kao faktičke, ne obrađujući i ne sistematizujući ih posebno poput marksista. Ali kad treba da ih sve zajedno i iz korena celovito obuhvati, on će opet »u najopštijem, modernom smislu« to učiniti upravo po jednom drugom filozofu, svoga sopstvenoga doba, po Božidaru Kneževiću, dijalektičkim zakonom univerzalne evolucije kao pre svega stvaralačkog dijalektičkog hoda ujedno od celine i opšteg delovima i pojedinačnom, od prostog složenom i od nižeg višem. Pa da najzad vidimo kako na liniji ovog najdubljeg i vrhunskog problema savremene prirodne filozofije Petrović uključuje u razvitak svoje misli originalne rezultate mukotrpnih Kneževićevih filozofskih istraživanja.

Iako je Mihailo Petrović pošao, kao Paskal ili Lajbnic, od konstruisanja računskih mašina, a Božidar Knežević, ne kao Lamark ili

---

[33] *Metafore i alegorije*, Beograd 1967, str. 71—72.

Darvin, od preobražaja samo živih bića i razvitka vrsta, nego od problema opšte istorije sveta, ljudskoga društva i čoveka, oni su se, dolazeći svaki sa drukčijih strana, tako sreli u zaključnim i najopštijim pogledima svoje filozofije prirode o problemu univerzalne evolucije da je Mihailo Petrović u svojoj značajnoj knjizi *Fenomenološko preslikavanje,* Beograd 1933, mogao napisati jedan od najvažnijih odeljaka, *Analogija među faktima univerzalne evolucije,* izrično istakavši da ga je pisao »po Božidaru Kneževiću«.[34] Međutim, za njega tu ne može biti ni reči o kakvom sledbeništvu, nego samo o susretu i prirodnom uzajamnom dopunjavanju i potvrđivanju na istraživačkom polju prirodne filozofije kao što bi to moglo takođe biti i na ma kome drugom naučnome polju.

A karakteristično je da Petrović ovakvu potvrdu i dopunu nije po osnovnom i opštem problemu univerzalne evolucije našao, niti mogao naći u drugih najistaknutijih predstavnika savremene prirodne filozofije čija dela su bila, zajedno sa njegovim, u svetu štampana u raznim bibliotekama filozofije nauka, kao što su mnoga od Ledanteka ili Raboa do Leba i Arenijusa, niti pak u onih koje je sâm po nekim pojedinostima u svojim delima navodio, kao što su skoro svi njegovi zaslužni savremenici od lorda Kelvina i Ernesta Maha do Ajnštajna, Debrolja i Hajzenberga; a potpuno odgovarajuću dopunu i celovitu potvrdu našao je upravo u konkretno analoški shvaćenim zakonitostima univerzalne evolucije prirodne filozofije Božidara Kneževića, koje su se dijalektički baš tako formulisale da su unapred zasnivale i objašnjavale stvarnu mogućnost novih korenitijih, celovitijih i delotvornijih naučnih zahvata metodama analoškog preslikavanja, predviđanja i modelovanja, koje je Petrović pionirski samostalno i originalno razvijao u nov sistem analoški produbljene i razrađene prirodne filozofije.

Jer sve i kad je istraživanjem, utvrđivanjem i sistematizovanjem disparatnih pojava analoških jezgara, tipova uloga i modela uspeo, u etapama se na izvestan način i donekle oslobodivši matematizma, mehanicizma i čak fenomenologizma, da svi analoški obuhvati posebnom »relativističkom slikom« »četvorodimenzionalnog topohroničkog prostora« i da ovu, zahvaljujući opštoj teoriji relativnosti, uzdigne sa još »četrnaest veličina« ili »metričkih faktora« do »topohronično-metričkog prostora«, na kojem »preslikani fakti ne zavise više ni od posmatrača, ni od materijalnog sadržaja oblasti u kojoj se ovaj kreće, ni od sistema etalonaže«, te u njemu »svaka takva slika izražava po jednu apsolutnu fizičku realnost«,[35] Petroviću su ipak još uvek osta-

[34] *Videti* str. 69—71.

[35] *Fenomenološko preslikavanje,* 1933, str. 230—235.

jale analoški neobuhvaćene upravo same opšte zakonitosti univerzalne evolucije koja stoji u osnovi svih kretanja i rasvetljavaju izvanrednu raznolikost i bogatstvo prirodnih pojava, a baš njih je, i to analoški, pokušao da celovito rasvetli Božidar Knežević u svojoj prirodnoj filozofiji i u delima *Red u istoriji*, Beograd 1898, i *Proporcija u istoriji*, Beograd 1901, koja su nosila zajednički podnaslov *Principi istorije* i donosila već celovito analoški zaključen i obrađen njegov pogled na zakonitosti istorijskog razvitka sveta, društva i čoveka, u vreme kad je Petrović u svojoj akademskoj besedi *Matematička teorija o dejstvu uzroka*, 1900, tek tražio i nalazio matematičke i fenomenološke osnove svojoj novoj analoškoj prirodnoj filozofiji.

Razumljivo je što se Petrović tridesetih godina, oslobađajući se jednostranosti matematizma i fenomenologizma, latio Kneževićevih analoških odredaba opštih zakonitosti univerzalne evolucije, baš kao i ostalih tekovina filozofije i nauke od Dekarta do Ajnštajna, koje su njegove poglede potvrđivale i dopunjavale. Njegovi *Elementi matematičke fenomenologije*, 1911, izneli su u svojim analoškim jezgrima, tipovima i modelima čitavu fenomenološku stratigrafiju razvitka sveta, ali analoški ne zahvativši samu celinu razvoja i ne prisetivši se da su Hegel, Marks i Engels to već učinili sveopštom zakonitošću tj. modelom *spiralnog*, stupnjevitog, evolutivnog i revolucionog kretanja. Njemu su za to bile nužne takve analogije koje će međusobno povezati razne stupnjeve razvitka sveta od mehaničkog, fizičkog i hemijskog, preko biološkog, do ekonomskog i psihičkog i utvrditi najopštije zakonitosti kojima »opsežni fakti« i »moćni faktori« obrazuju njihov univerzalni evolucioni poredak, što on u odeljku, u kojem će se na Kneževićeve poglede osloniti, izrikom i veli, pišući: »Te se analogije odnose poglavito na *red* kojim veliki, opsežni fakti u opštoj evoluciji sleduju jedni za drugima, i na *uloge* koje u tome velikom procesu igraju pojedini moćni faktori«. A mnogobrojne su analogije i mnogobrojne zakonitosti koje one formulišu i kojima se određuju bitni fakti i faktori univerzalne evolucije, od kojih Petrović izrično za primer uzima samo jednu onako kako je nju Božidar Knežević formulisao, pišući: »Između mnogobrojnih zakona te vrste, ovde će, samo primera radi, biti naveden (po Bož. Kneževiću) jedan iz koga će se videti karakteristično obeležje analogija što se imaju u vidu«.

I Petrović ovde navodi onaj od zakona univerzalne evolucije koji je Knežević smatrao osnovnim i najvažnijim, i navodi ga sintetički samim Kneževićevim stavovima iz *Reda u istoriji*, 1898, i *Misli*, 1905, pišući: »Jedan opšti fakt takve vrste, jedan od zakona univerzalne evolucije, sastoji se u tome da se sve pojedino docnije izdvaja iz jednog prvobitnog, opšteg, celog; da uvek celo ide pre delova, jedno pre mnogoga, jednako, prosto pre različnog, složenog. U koliko je nešto u prirodi prvobitnije, niže, u toliko je prostije, tj. njegovi delovi su sličniji jedan drugome; ono u toliko više liči na svoju okolinu i sve pasivnije sudeluje u promenama svoje okoline«.

A da se upravo ovim opštim faktom i zakonom univerzalne evolucije analoški korenito i adekvatno određuje svekoliki poredak stupnjeva u razvitku i sve raznolikijem i bogatijem rascvatu sveta, Petrović ukazuje, često samim Kneževićevim rečima, na konkretnim primerima raznih faza i stupnjeva same univerzalne evolucije, pišući pre svega uopšte: »Ceo prvobitni kosmos zamišlja se kao velika haotična nerazdvojna celina iz koje su se tek docnije izdvajali pojedini delovi, vasionska tela, pojedina stanja i pojedini mehanički, fizički i hemijski faktori. Tako isto su, prvobitno, priroda i svet organizama činili jednu celinu, jedinstvo, iz koga su se docnije diferencirale specije. Svaki, pa i najviši organizam, prvobitno u svome začetku, ne razlikuje se od svakog drugog organizma u njegovom začetku«, itd.

I kao što se ova, analoški zaključena zakonitost potvrđuje u osnovi svake faze prirodnog razvitka, tako i u svakoj fazi duhovnog razvitka čovekovog, kako s obzirom na sadržaj i oblik njegov, tako i na tehniku njegova izražavanja, te na ovom polju Petrović piše: »I prve faze religije jednake su svuda. Fetišizam je svuda i svakad jednak, fetiši su uvek jedni isti; iste prirodne snage i personificirane pojave obožavaju se svuda; tek docnije nastaju religiozne razlike. I te su razlike u suštini mnogo manje, nego razlike u potonjim filozofskim i naučnim pojmovima. Prvobitno su i religija, i filozofija, i nauka, i poezija, u obliku mitova iz kojih se docnije izdvajaju umetnosti, filozofija, nauka. — Tako su se i prvo pisali u slikama izrazi cele misli, kao što i dete prvo razume celu frazu, a pojedinim rečima ne daje nikakva značaja; zatim su se znacima pisale cele reči, zatim celi slogovi i najposle samo pojedini glasovi«.

I ovde je bio momenat da Petrović istakne poseban značaj samog analoškog jezgra, tipa uloga ili modela u samom stvaralačkom razvojnom toku univerzalne evolucije, pišući: »Pošto je tip celina od koje se posle odvajaju egzemplari, to je red, specija, celina od koje se posle odvajaju pojedine individue. Prema tome tip ide pre egzemplara; red, specija pre individue. U celoj prirodi pojava pojedinih rodova počinjala je uvek prototipom cele klase. I čovečanstvo je dugo postojalo kao specija, pre nego što su se iz njega izvile rase, plemena, narodi«.

Ovakvo bitno razvojno stvaralačko povezivanje opšteg i pojedinačnog, celine i dela, prostog i složenog, tipičnog i karakterističnog pokazuje Petrović i na razvitku samog ljudskog saznanja: »Ne odvajajući duh od tela, prvobitni um ne odvaja uobraženo, idealno, od stvarnog; ne odvaja radnju razuma od čulnih opažanja; ne odvaja svet duha od čulnog sveta stvarnosti; ne odvaja unutrašnje od spoljašnjeg. Tako isto, tek docnije iz celine pojma kretanja odvajaju se pojmovi prostora i vremena. Kao što primitivno oko ne odvaja boju od svetlosti, tako su i vazduh i voda prvo shvatani kao prosta tela, elementi, kao celina, i tek docnije hemija odvaja pojedine sastojke iz kojih su one sastavljene, kao što je do mikroskopa smatrano za mnoge stvari da su jedno isto«.

Najzad, u produžetku navedenih konkretnih primera, Petrović zaključuje i svoju sopstvenu kompleksnu formulaciju ove bitne razvojne zakonitosti univerzalne evolucije, koju je po Kneževiću razmatrao, pišući: »Zajedničke pojedinosti, ovde navedene samo u svojim ovlašnim crtama, provlače se kroz celokupnu evoluciju ne samo čoveka kao jedinke i sastavka ljudskog kolektiviteta, već i kroz svaki vremenski proces evolucije kompleksa progresivnim diferenciranjem njegovih sastavaka i njihovim individualisanjem po njima samim i po ulogama koje će igrati prema celini i prema ostalim sastavcima celine. Takve se zajedničke pojedinosti tu ispoljavaju ne samo u opštim potezima, već i u sićušnim pojedinostima za koje bi moglo izgledati da su ostavljene slučajnostima, ali u kojima se, kad se dublje zagleda, ogleda jedan večiti poredak, vezan za zakone univerzalne evolucije«.

Ovakva najšire na faktima proverena celovita analoška i, očigledno, konkretno dijalektička formulacija jedne od bitnih zakonitosti univerzalne evolucije postaje povratnim dejstvom i osnova same metode analoškog preslikavanja, predviđanja i modelovanja, jer ako u sve raznolikijem, dubljem i bogatijem toku uvek sve šire i dublje otvorene perspektive univerzalne evolucije analoški zakonito svuda deluje kao »večiti poredak« to da opšte ide pre pojedinačnog, celina pre dela, prosto pre složenoga, onda je jasno da se može, mora i treba analoški polaziti od složenoga od delova, od pojedinosti da se kroz njih analoški pronikne i obuhvati i prosto, celina, opšte, koji se zakonito u njih razvijaju i stoje u njihovim osnovama.

Ovim i ovakvim pogledima Mihaila Petrovića i Božidara Kneževića ne samo na univerzalnu evoluciju već i prirodnu filozofiju uopšte obeležen je nesumnjivo jedan od misaonih vrhunaca prve polovine našeg veka kod nas i ne samo kod nas. Jer u svetu vidimo ne samo to da u prirodnim i tehničkim naukama tek danas svojim rezultatima cvetaju metode analoškog preslikavanja, predviđanja i modelovanja, nego i to da je sama marksistička misao na jednom od svojih vrhunaca, u Lenjinovim *Filozofskim sveskama* i *Prilogu pitanju o dijalektici* u njima stala pred neophodnošću pobližeg ispitivanja kako heraklitovske dijalektičke zakonitosti deobe jedinstvenog, celovitog na njegove sastavne suprotne delove, tako i dijalektičke zakonitosti prelaženja opšteg u pojedinačno i obratno, kao onih zakonitosti koje sa posebnom dubinom i snagom konkretnije određuju ostale dijalektičke zakonitosti kojima se tkaju i rasvetljavaju stvaralački tokovi univerzalne evolucije prirode i ljudskog društva i mišljenja.

A sa jednog od ovakvih vrhunaca je Mihailo Petrović, uprkos patnjama i nevoljama u drugom svetskom ratu i u njemu oronulom zdravlju, poslednjih godina svoga života našao snage da za »Srpsku književnu zadrugu« napiše svoje poslednje, testamentarno delo *Metafore i alegorije* u kojem je pružio svoj rečiti priručnik »i u običnom životu, i u poeziji, i u nauci« saznavalačkih i stvaralačkih metoda analoških preslikavanja, predviđanja i modelovanja u sveopštoj univerzalnoj evoluciji i njenom ljudskom ovladavanju i stvaralačkom preobražavanju, delo kojim je obeležio poslednju etapu razvitka svoje pionirske, istraživačke i stvaralačke misli i koje je najzad prošle, 1967. godine, ugledalo sveta u LX kolu »Zadruge« i zaslužuje posebnu pažnju ne samo svih učenjaka, umetnika i književnika, već i svih ljudskih graditelja svesnijeg, istinitijeg, ljudskijeg, plodnijeg, lepšeg i srećnijeg života i sveta, za koje će, kao i za Mihaila Petrovića, ostati uvek od posebne važnosti saznavalački i stvaralački preći svojim delom datu etapu i ostvariti nove, ljudski još dublje i delotvornije perspektive.

RÉSUMÉ

Dans son étude historique et critique *Les étapes et les perspectives de la philosophie naturelle de Mihailo Petrović,* l'auteur, Dušan Nedeljković, docteur ès lettres de l'Université de Paris, professeur à l'Université de Beograd et membre de l'Académie serbe des sciences et des arts montre que depuis le discours académique *La théorie mathématique de l'action de la cause,* dans lequel Petrović posait en 1900 les premiers fondements de sa phénoménologie mathématique, en passant par de nombreux ouvrages écrits en serbe et en français, et surtout *Les éléments de la phénoménologie mathématique* de 1911 et *La transformation phénoménologique* de 1933, jusqu'à son ouvrage posthume *Analogies et métaphores,* publié en 1967, la philosophie naturelle de Petrović avait dans son développement traversé quatre étapes successives, dépassant à chacune d'elles une de ses limites.

Les recherches et les inventions que Petrović avait faites dans le domain des machines à calcul, ont fait de lui un pionnier très original et fervent de la méthode d'analogies et des noyaux, types et modèles d'analogies mathématiques déjà vers la fin du siècle dernier. Mais en cherchant à généraliser cette méthode analogique en toute une philosophie naturelle, il avait commencé par voir en toute analogie de phénomènes disparates un élément de leur mécanisme commun de nature purement phénoménologique et mathématique. Par là sa conception aussi bien de la nouvelle méthode que de la nature même était déjà à son origine chargée et limitée triplement de mécanicisme, de mathématisme et de phénoménologisme.

Cependant, suivant la marche marche des transformations révolutionnaires des sciences mathématiques, naturelles et techniques de nos jours depuis la théorie de la reletivité jusqu'à la cybernétique et se libérant a chaqu'étape de son développement d'une de ses limites, la perspective de la méthode et de la philosophie naturelle analogique, opératoire et créatrice concrète de Petrović s'ouvrait de plus en plus large et profonde pour souvent devancer et s'identifier avec celle des vues révolutionnaires des sciences mathématiques, naturelles et techniques, sociales et philosophiques sur les lois de l'évolution universelle du monde et de toutes choses, de l'homme et de sa connaissance, essentiellement, d'après Petrović, analogique créatrice.

ĐURO KUREPA (Beograd)

SPEKTRALNI PRINCIPI

1. UVODNO RAZMATRANJE

Ovom prilikom želim precizirati i formulirati neke principe spektra i izneti nekoliko primena.

1.1. Svakako, ideja vodilja spektra sastoji se u preslikavanju, kodiranju, ... podataka tako da se iz slike ili transformata može putem odkidanja, odstranjivanja, prekrivanja, dekodiranja... doći natrag na podatke.

1.2. Tako npr. svetlu pripada određen spektar sastavljen od crta, pa se od tih crta može postupno doći natrag na vrstu svetla od kojeg svaka crta potiče.

1.3. U skupu ljudi otisci prstiju omogućuju da se pomoću tih otisaka, ljudi međusobno razlikuju i odrede — i to na potpuniji način nego što se to može učiniti ličnim opisom.

1.4. Mihailo Petrović je počev od 1917. godine preneo ideju spektra i na neke matematičke oblasti na način u kojima spektar do tada nije bio upotrebljavan (inače, spektralna metoda u matematici je upotrebljavana i ranije (D. Hilbert), a razvila se naročito u teoriji matrica, odnosno linearnih operatora... nezavisno od Petrovićevih numeričkih spektara).

2. ŠTO JE MATEMATIČKI SPEKTAR?

2.1. U matematici imamo osnovnu alternativu: skup ili funkcija, pa se na osnovu toga i određuje predikat. Da li je spektar skup ili funkcija?

2.2. *Spektar je funkcija!* Samo treba precizirati što se tiče predstavljanja vrednosti te funkcije.

2.3. Ako je zadan kakav niz podataka

(1) $p_1, p_2, \ldots\ldots$

pa ako svakom podatku p_n pridružimo određen redni prirodni broj rp_n, tada se niz dobivenih brojeva rp_n može skupiti tako da rp_n bude odlomak pravog razlomka

(2) $0, rp_1\, rp_2 \ldots.$

Samo je pitanje, kako iz toga decimalnog broja (2) doći natrag na podatke (1)? Ako nam je poznat niz

(3) $b_1, b_2, \ldots\ldots$

koji kazuje koliko članovi (2) imaju mesta, onda je lako iz (2) doći na (1) i to naprosto: komadanjem ili rezanjem niza (2) redom: odrezati početak od b_1 članova, pa od ostatka b_2 članova, itd.

2.4. *Što je spektar?*

U opštem slučaju, polazi se od podataka (1) P i svakom podatku p iz P odredi se određeni skup sp tako da imamo skupovnu funkciju

(2) $p \varepsilon P \longrightarrow sp$

od P na

$$(3) \quad D = \bigcup_{p \in P} sp ;$$

zahtevamo, da to preslikavnje bude *tolikovno* tj. obostrano jednoznačno; nadalje, na svakom sp definiramo određeno oblaganje, ispisivanje, kodiranje ili funkciju rp, i najzad sagradimo uniju ili zbir S tih oblaganja:

$$(4) \quad S \mid D = \bigcup_{p \in P} r \mid sp$$

kao oblaganje skupa D koje se na svakom sp podudara sa oblaganjem $r \mid sp$.

2.4.1. Najjednostavnije je da skupovi sp pri $p\varepsilon P$ budu ne samo različni nego i disjunktni. Na taj način, samo oblaganje $S \mid D$ izlazi, kao stavljanje »zakrpe do zakrpe« (pločice do pločice) ili »slova do slova«, između kojih su prazni prostori ili neki posebni materijal kao *0*, zarez itd.

2.4.2. Ostvarivanje odlomka (odreska) »pločice« $r \mid p$ može se učiniti bez prethodnog skupovnog preslikavanja $s: P \rightarrow D$, jer se ovo time ostvaruje automatski kao

$$p\varepsilon P \rightarrow sp \equiv D_{om\, r} \mid p.$$

2.4.3. Određivanje tih odlomaka vrši se na razne načine, već prema prilikama.

2.5. *Princip spektra* traži da je veza između podataka P i prirodnog spektra $S \mid D$ pregledna i da se ostvarivanje te uzajamne veze vrši na što prirodniji način, npr., pomoću znakova i pojava koje se lako umnažaju, dobro raspoznavaju i međusobno dobro povezuju.[1]

---

[1] Tako npr. ekonomičniji je znak ĉ nego č jer je prvi znak celovitiji od drugoga i prvi znak se lakše povezuje nego drugi (kod ispisivanja znaka ˇ imamo prazan hod ruke pre početka i posle svršetka ispisivanja znaka); nadalje, znak ĉ nije složen od dva slova iste azbuke, a č jest (od c i v); međutim, optički, znak č je uočljiviji i bolje razgovetan od znaka ĉ, osim ako krov ˆ u ĉ ne pišemo previše sitno.

2.5.1. Osnovni i univerzalni znakovi za povezivanje jesu cifre ili znamenke: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Njih prihvataju svi narodi. To je numerička azbuka ili abeceda. Naprotiv, *glasovna azbuka* još nije univerzalna ni jednotna pa i kod jednog te istog naroda.

3. PRIMERI SPEKTARA IZ LINGVISTIKE

Nauka o jeziku pruža vanredno važne brojne primere spektralne metode.

3.1. *Oblaganje* se vrši pismenima ili slovima, koja se raspoređuju u određeni niz sastavljen od redaka ili stubaca (kineski način) koji teku od leva nadesno, odnosno odozgo nadole.

3.2. *Razlaganje* se vrši praznim međuprostorima i raznim posebnim znakovima od kojih su najvažniji: (tačka) (.), zarez (,), tačka-zarez (;), uskličnik (!), upitnik (?) i znak navođenja (»«) i zagrada. Posebno, na taj način iz niza slova u zadanom gradivu dobivaju se nizovi reči, nizovi rečenica, nizovi odlomaka, nizovi paragrafa, odeljaka, poglavlja, delova, svezaka, itd.

3.3. U tome vodećem primeru spektralne metode dobro je držati na umu činjenicu kako je čovečanstvo relativno kasno došlo do slova kao članova i materijala s kojim se oblaže odnosno ispisuje i opet do posebnih znakova za rastavljanje kao što su . , : ; « ? / ().

3.4. Upotreba malih i velikih, kosih, slova također je jedan od načina da se rastavljanje, odnosno čitanje učine preglednijima.

3.5. Premda su znakovi interpunkcije univerzalni, slova nažalost još nisu, i što je najgore: ima *istih slova* sa *raznim značenjima,* pa k tome i u jednom te istom jeziku (kao npr. U, B, C, P, u srpskohrvatskom). Ta se činjenica protivi principu brže i jednoznačne informacije, i principu spektra pa se zato i treba ukloniti.

3.6. Prevođenje sa jednog jezika na drugi jezik je vrlo dobar dalji primer primene principa spektra.

3.7. *Povezivanje pisanih znakova s jedne strane i glasova, odnosno reči s druge strane, dalji je primer principa spektra.*

3.7.1. Tako npr. reč i predmet *igla, I,* je divan primer da bude nosilac glasa i znaka *I,* u svim slavenskim jezicima; zato je zaista šteta što ipak većina Slavena, još ne upotrebljava znak *I* kao znak za početno slovo reči *igla,* pogotovo što je taj znak međunarodan i mnogo jednostavniji od znaka *U* koji treba da preuzme drugu ulogu jer ipak podseća više na *uho* nego znak *Y* koji opet ima drugo značenje (podsetimo se pri tom da *U* i *Y* u grčkom znače jedno te isto slovo i to malo, odnosno veliko *U* — uho).

3.7.2. Također za znak *V* nalaze se Slaveni u vrlo povoljnom položaju jer svi imamo reč *vile V* kao nosioca glasa i odgovarajućeg znaka; reč *vol* na slavenskim jezicima nosilac je toga glasa *V* a i znaka *V* u vidu rogova. Drugim rečima, *kad znakovi I, V, pa U ne bi već imali svoja značenja kao u latinici, svaki slavenski narod bi imao prirodnih razloga da ga izmisli i uvede upravo u tekućem značenju*, posebno svaki slavenski narod ogrešuje se o spektralni princip ako odbija da u pisanju znakovi I, V, i U imaju upravo ona značenja što danas imaju u nauci, tehnici, odnosno u latinici.

3.8. *Princip spektra zahteva da prenošenjem jednog znaka iz jedne azbuke u drugu bude sačuvan i pripadni glas.*

3.8.1. Zato npr. grčko *P* treba da i u latinici ostane za isti glas npr. PUKA, a znak П u grčkom i znak R u latinskoj azbuci, koji su i inače dosta slični međusobno, treba da imaju isto značenje i da međusobno jedan drugom odgovara.

3.8.2. Iz istog principa treba znak 𝒯𝓉, 𝓉̃ kao komplikaciju od T, t zabaciti i upotrebljavati te znakove kao i u grčkom originalu, odnosno u latinskoj varijanti. Latinsko pisano malo t koje je zašlo i na prvi sprat svakako je preglednije od grčkog τ koje se celinom nalazi u prizemlju; ta ocena stoji pogotovo kad su ti znakovi uključeni u kakvu podulju reč.

3.9. *Tolikovanje između članova azbuke pojedinog pisma i glasova koji se javljaju u dotičnom jeziku dalji je osnovni primer metode spektra.*

U našoj ćirilici taj je princip ostvaren; u našoj latinici on nije ostvaren.

3.9.1. Nakon dugih razmišljanja lično mislim da bi naredna abeceda vrlo dobro odgovarala našem jeziku:

a, A, b, B, c, C, ć, Ć, Ĉ, ĉ, d, D, d̂=d, D̂, (d̂=џ u ćirilici), e, E, f, F, g, G, ĝ, Ĝ (=ђ u ćirilici), h, H, i, I, j, J, k, K, l, L, l̂, L̂ (=љ u ćirilici), m, M, n, N, n̂, N̂ (=њ u ćirilici), o, O, r, R (=П), P, p, (=p u ćirilici), s, S, ŝ, Ŝ, (=ш u ćirilici), t, T, u, U, v, V, z, Z, ẑ, Ẑ (=ж u ćirilici).

U tom predlogu, dolazi znak ^ koji se stavlja iznad slova, npr. ĉ=c, L̂ = L̂, na slovo npr. l̂, L̂, a mogao bi se ispisivati i desno gore iznad slova pogotovo ako se piše strojem. Dakle: c^, d^, g^, l^, n^, s^, z^; slično za velika slova: C^, D^, . . ., Z^. Takva azbuka je jednostavna, tolikovna, lako ostvarljiva i opšta.

3.9.2. (Dodano za vreme korekture). D. Trifunović skrenuo je moju pažnju na članak: M. Petrović: *Husov pravopis (po prof. Dr. J. Gebauer-u)*, Prosvetni glasnik — službeni list Ministarstva prosvete i crkvenih poslova, Beograd, 26 (1905) 93—96. Opisanu ulogu znaka ^ (izvrnuto slovo v) vrši pri Janu Husu znak tačke stavljen iznad slova. Zanimljivo je da Petrović u tom članku piše »sveučilište« a ne »univerzitet« (up. str. 95).

3.10. *Sricanje (buhštabiranje ili slabekovanje) dalji je primer spektralnog povezivanja. Zato je važno imati određen naziv i izgovor za svako slovo, npr. ovako:*

A, B (be), C, $\hat{\text{C}}$ ($\hat{\text{C}}$a), Ć (Će), D (de), $\hat{\text{D}}$ ($\hat{\text{d}}$e), E, F (ef), G (ge), $\hat{\text{G}}$ ($\hat{\text{G}}$u), H (haš), I, J, (je), K (ka), L (el), $\hat{\text{L}}$ ($\hat{\text{l}}$e), M (em), N (en), $\hat{\text{N}}$ ($\hat{\text{n}}$e), O, R (Re), P (ro), S (es), $\hat{\text{S}}$ ($\hat{\text{s}}$a), T (te), U, V (ve), Z (Ze), $\hat{\text{Z}}$ ($\hat{\text{Z}}$a).

3.10.1. Primedba o P i R. Posebno, o slovima za glas *p* (pero) i *r* (ruka) u raznim azbukama videti na primer knjigu Zvonimir Kujundžić, *Knjiga o knjizi,* I tom: *Historija pisama;* Zagreb, 1957, 868 str.

3.11. *Kodiranje i dekodiranje, odnosno: pisanje i čitanje dalji su vrlo važni slučajevi spektarskih razmatranja* (videti: *J. Wolfowitz, D. A. Novik).*

4. SPEKTRALNA METODA U MUZICI, UMETNOSTI...

U muzici se nižu note i dr. znakovi sa svrhom da jednoznačno odrede kako se nižu odgovarajući glasovi, ritam, melodija; kao jedan od osnovnih znakova odeljivanja služi uspravna taktovna crta, pa se zadani tekst deli na taktove, odlomke, delove, itd.

Slično je u koregrafiji, ornamentici, građevinarstvu, itd. U tim delatnostima ponavlja se pojedini odlomak kao vodeći motiv i doprinosi ugodnijem slušanju, gledanju, razumevanju, itd.

5. PRINCIP JUKSTAPOZICIJE ILI NADOVEZIVANJA

5.1. Najobičniji slučaj toga principa sastoji se u tome *da se na reč nadopisuje reč:* npr. iz reči *nad* i reči *graditi* nastaje reč *nadgraditi.*

5.2. U daljem slučaju radi se o *zbiru procesa ili funkcija* u smislu da uz zadanu uređenu dvojku $f_1 \mid A_1$; $f_2 \mid A_2$ procesa sa disjunktnim oblastima A_1, A_2 posmatramo i proces $f \mid A$, pri čemu je $A = A_1 \cup A_2$, $f \quad A_i = f_i \mid A_i \; (i = 1,2)$.

5.3. U opštem slučaju, reč je o skupovnoj funkciji $h \mid P$ pri čemu svakom $p \varepsilon P$ odgovara (neprazan) skup h_p te o funkcijama $f_p \mid h_p \; (p \varepsilon P)$ tako da različnim članovima $p \varepsilon P$ odgovaraju disjunktni skupovi h_p a onda se definira funkcija — zbir $f \mid A$ tih funkcija sa oblasti $\text{Dom} f = A = \bigcup_{p \varepsilon P} h_p$ i s vrednostima f za koje je $f \mid h_p = f_p \mid h_p$.

5.4. U nauci o jeziku dobar primer principa nadovezivanja imamo u *gradnji složenica;* vrlo je korisno i poučno pratiti kako se taj princip pojavljuje u pojedinim jezicima: bilo kao prosto nadopisivanje (npr. u engleskom), bilo prostim pripisivanjem, bilo sa pripisivanjem i određenim promenama na spojnom mestu (npr. u nemačkom).

5.5. U okvir principa nadovezivanja ulaze i rasuđivanja o fonetskom i logičkom (korenskom) pravopisu.

6. PRINCIP GRANANJA ILI RAMIFIKACIJE U OZNAČAVANJU

6.1. Taj se princip sastoji u tom da se jedinke (članovi) zadanog skupa označuju šiframa koje se međusobno razlikuju samo po završetku celokupne oznake. Tako npr. sobe na 5. spratu označuju se sa 51, 52, 53, 54, 55, ... 5n, ukoliko na tom spratu ima n soba. U trgovini i u ekonomskim naukama dolazi taj princip do znatnog izražaja. U svojoj suštini i mestovni (pozicioni) način pisanja brojeva odraz je principa grananja; tako npr. ako za broj x znamo da je oblika $x=3. \ldots$, onda ispisivanjem naredne niže znamenke npr. 7 dobijamo jedini tačan izbor $x=37, \ldots$ od 10 mogućih izbora

$$x=30, \ldots;\ x=31, \ldots;\ x=32, \ldots;\ x=39, \ldots$$

Ako naredna znamenka treba glasiti 0, a naredna na to 6 i poslednja 9, dobija se tačna tražena vrednost $x=37{,}069$.

6.2. Pisanje i računanje sa nepotpunim ili približnim vrednostima u najužoj je vezi sa spektralnim principom grananja.

6.3. Petrovićeva definicija brojevnog spektra $S=S(n_1 \ldots n_n)$ zadana niza (1) $n_1, \ldots, n_k$ prirodnih brojeva kao decimalan broj $S=o, on_1 \ldots o.an_2o \ldots an_k$ s unapred određenim brojem 0 ispred svakog od znakova niza (1) direktna je primena metode nadovezivanja, odnosno grananja.

6.4. Slično vredi za spektar S ako članovi niza (1) nisu prirodni brojevi nego celi racionalni ili racionalni pa i iracionalni brojevi.

6.5. Valja držati na umu da pri tom nije od bitne važnosti da je spektar S broj nego da u S imamo na neki način smešten i sam zadan niz (1) zadanih podataka u manje više skrivenom i preinačenom ali uočljivom, odgonetljivom obliku.

7. POOPŠTENJA...

I baš na tom mestu možemo ukazati na poopštenja.

7.1. S jedne strane, ono što se pripisuje ne moraju biti znamenke 0, 1, .. 9 nego redni brojevi 0, 1, 2, .., m', ... koji su manji od m, gde je m bilo koji redni broj; najjednostavnije je uzeti $m=2$. No, može se uzeti ne samo da m bude konačan redan broj nego i beskonačan, npr. $m=\omega$, pa m može biti 0 ili bilo koji prirodni broj. Ako je $m=\omega^2$ ili ω^ω ili ω_1, tada znamenka m' može biti i beskonačan redni broj; posebno se može posmatrati slučaj kad $m-1$ postoji, bez obzira da li je m konačno ili beskonačno.

7.2. Sa druge strane, poopštenje se sastoji u tom da posmatrane »*reči*«, tj. spektri S kao nizovi mogu biti i beskonačni i to proizvoljne »*duljine*« γ; tako npr. pri $\gamma=\omega$, dobiju se obični beskonačni nizovi; ako je $\gamma > \omega$, i $\gamma < \omega_1$, dobiju se beskonačni prebrojivi nizovi-spektri. Ako je $\gamma=\omega_1$ ili $\gamma > \omega_1$ niz je beskonačan i neprebrojiv.

7.2.1. Primer. Posmatrajmo niz 1, 2, 3, ... prirodnih brojeva n sređenih po veličini; pridružimo svakom n niz

$$|n,2| = \underbrace{011\ldots1}_{1+n} \tag{2}$$

duljine $1+n$ koji počinje sa 0 a ostali su mu članovi 1; tada možemo formirati nov niz

$$|1,2|\ |2;2|\ldots\ |n,2|\ldots = 0101101110111\ldots \tag{3}$$

On je dijadski i na očigledan način omogućuje da se iz njega rekonstruira zadani niz (1).

7.2.2 Uopšte, neka je X bilo koji skup, a

$$X_1,\ X_2,\ldots X_n,\ldots \qquad (n < \xi) \tag{4}$$

bilo koje dobro uređenje od X; tada se umesto niza (4) može posmatrati pripadni dijadski niz (3) pišući dijadski niz (2) umesto X_n. Posebno se može pretpostaviti da je duljina ξ niza (4) minimalna, tako da nijedan pravi početni odsečak od (4) nije istobrojan sa čitavim nizom (4); ako je, k tome, ξ beskonačno, tada će i pripadni dijadski niz (3) biti iste duljine ξ koje je i niz (4).

7.2.3. Neka je α bilo koji redni broj, npr. 0 ili 1; neka je ω_α pripadni početni broj a ω_α glavni broj od ω_α; ako je $2 < n < k\omega_\alpha$, tada svakom ω_α -nizu

$$s = s_0,\ s_1,\ldots s_p,\ldots \tag{5}$$

rednih brojeva $\beta = s_p$ za koje je $\beta < W_{(n)}$ pomoću smene

(6) $s_p \to |s_p;2|$ odgovara određen W_α – niz $|s;2|$ od znamenaka 0, 1; to je pridruživanje tolikovno; zato je

(7) $n^{k\alpha} \leq 2^{k\alpha}$ odakle zbog $2^{k\alpha} \leq n^{k\alpha}$ izlazi jednakost brojeva $2^{k\alpha}$, $n^{k\alpha}$ za svako

(8) $2 \leq n \leq kw_\alpha$.

Na osnovu pridruživanja $s \to (s;2)$ odgovara svakom nizu (6) potpuno određen dijadski spektar $|s:2|$ duljine W_α, pri čemu se podela $|s;2|$ vrši u maksimalne intervale sa po jednom jedinom nulom.

7.2.4. Neka je $(S, \leq)$ uređen skup; pri $a \varepsilon S$ neka $S(\,.\,, a]$ označuje skup svih $x \varepsilon S$ za koje je $x \leq a$; neka $f_a | S$ bude dijadska funkcija na S koja je 1 na $S(\,.\,, a]$ a 0 na preostalom delu skupa S; tada se lako vidi da pri $a, b \varepsilon S$ imamo

$$a \leq b \rightleftarrows [f_a(s) \leq f_d(s) \text{ za svako } s \varepsilon S].$$

No, $f_a | S$ je određen trivijalni dijadski spektar nad S s podelom na onaj deo $S(\,.\,, a]$ od S na kojemu je funkcija fa jednaka 1 i na preostali deo od S. Prema tome, svaki uređen skup je sličan s *glavnim uređenjem* neke obitelji dijadskih funkcija-spektara.

7.2.5. Ako je $(S \leq)$ lančasto uređen skup, tada se glavno uređenje iz 7.2.4. može zameniti alfabetskim uređenjem, a dijadske funkcije se mogu pretpostaviti da imaju dobro uređen skup kao svoju oblast. Naravno, umesto dijadskih spektara (funkcija) možemo posmatrati triadske funkcije, funkcije s vrednostima u $(0, 1, \ldots \alpha', \ldots)$ $\alpha' < \alpha$ za bilo koji redni broj α, odnosno s vrednostima u bilo kojem skupu Y. U tom pogledu imamo naredni važni i opšti slučaj.

7.2.6. *Ako je (X, Y) proizvoljan uređen par nepraznih skupova, a $f: X \to Y$ bilo koja funkcija od X u Y, tada je funkcija $f | X$ određen spektar sa slojevima $\{f^{-1} y\}$ $(y \varepsilon fX)$, pri čemu za svako y definiramo*

$$(1) \qquad \{f^{-1} y\} = \{x \mid x \varepsilon X,\ fx = y\},\ y \ \varepsilon fX.$$

7.2.7. Prethodni primeri pokazuju kako je ideja matematičkog spektra opšta i kako u razmatranjima dolaze ne samo pojedini spektri nego još više skupovi spektara.

LITERATURA

Kujundžić Zvonimir 1. *Knjiga o knjizi* I: *Historija pisama*, Zagreb, 1957_2, str. 865.

Kurepa Đuro 1. *Ensembles ordonnés et ramifiés* (Thèse, Paris 1935), Publ. Math. Beograd 4 (1935) 1—144.
2. *Partitivni skupovi i uređeni lanci — Partitive sets and ordered chains* Rad JAZU, Zagreb 302 (1957) 197—203, 205—235.

D. A. Novik 1. *Effektivnoe kodirovanie*, Izd. Energija, M. L. 1965, 236.

K. Orlov 1. *The fundamentals of practical spectral arithmetic and algebra*, Beograd 1955, 46.

M. Petrović 1. *Les spectres numériques*, Paris 1919, 7+110. — *Leçons sur les spectres mathématiques*, Paris, 1928, 1+90.

J. Wolfowitz 1. *Coding theorems of information theory*, Springer Verlag, 1964_2, r. prevod:
Teoremi kodirovanija teorii insormacii, Moskva 1967, 248.

PRINCIPES SPECTRAUX

ĐURO KUREPA (Beograd)

1. Le but de l'article c'est de formuler quelques principes de spectre et d'indiquer quelques applications.

2. *Qu'est — ce qu'un spectre?*

2.4. L'on part des données (1) et à chaque $p \varepsilon P$ par (2) on associe un ensemble sp en exigeant que (2) soit biunivoque; de plus sur chaque sp l'on définit une fonction sp; enfin, la réunion (4) de ces fonctions est le spectre $S \mid D$.

2.5. On demande que la liaison entre P et $S \mid D$ soit claire, facilement réalisable moyennant des matériaux, signes, ... qui se fabriquent facilement, se distinguent mutuellement et se relient mutuellement.

3. *Exemples de spectres en linguistique.*

3.3. Le principe de spectre demande que l'emploi d'un signe d'un alphabet dans un autre alphabet conserve la prononciacion de ce signe.

3.8.1. En conséquence, le signe P en grec et en latin doit signifier la même chose, à savoir le ro en grec; le R en latin doit signifier π en grec.

3.9. On exige la biunivocité entre les éléments d'un alphabet et des sons pour les prononcer.

3.9.1. On propose la suite des caractères de l'alphabet pour satisfaire au principe 3.9.

3.10. L'action d'epeler est un exemple de spectre et l'on propose une façon comment le faire.

4. Méthode spectrale en musique, en arts... se fait voir partout.

5. *Principe de juxtaposition consiste:*

5.1. Dans le cas le plus simple en juxtaposant un mot, une suite, après l'autre;

5.2. En faisant la réunion d'un couple ordonné de processus $f_i \mid A_i$ $(i=1, 2)$;

5.3. En faisant la réunion de processus $p \varepsilon P \rightarrow h_p$ les h_p étant ensembles disjoints et $h \mid P$ étant une fonction ensembliste quelconque.

6. *Principe de ramification en désignation.*

6.1. Il consiste en différenciant des objects p d'un ensemble de manière que les dénotations correspondantes ne se distinguent que par la fin; par exemple, les symboles 51, 52, .. peuvent désigner des chambres 1, 2, .. du 5-ième étage.

6.3. La définition originel de Petrović du spectre S de la suite (1) de nombres positifs est un exemple faisant voir le principe de ramification.

7. *Généralisations ...*

7.1. Généralisations consistent en ce que, d'une part, les »chiffres« peuvent être quelconques et appartenir à n'importe quel segment 0, 1, .. m', .. de nombres ordinaux (finis ou transfinis) ou appartenir à un ensemble quelconque et, d'autre part, que la longueur de »mots« (ou de suites) peut être infinie.

7.2.3. Par la transformation (2) ou (6) appliquée à (5) on obtient $\mid s; 2 \mid$ et donc (7) pourvu que (8).

7.2.4. On indique une représentation isomorphe de chaque ensemble ordonné $(E, \leqslant)$ par un ordonnement principal de fonctions caractéristiques f_a des demi-cones $S(., a]$.

7.2.6. Chaque fonction $f: X \rightarrow Y$ est un spectre avec des rangées (1).

7.2.6. Exemples précédents montrent qu'on doit considérer non seulement spectres mathématiques isolés mais de systèmes de spectres mathématiques.

STEVAN STOJANOVIĆ,
magistar matematičkih nauka

FENOMENOLOŠKO PRESLIKAVANJE U TEORIJI VEROVATNOĆE

Otkrivanje zakonitosti koje vladaju u prirodi i društvu, upravljanje tim zakonitostima i njihovo korišćenje je čovekova težnja. Prema prirodi zakonitosti razvijale su se razne naučne oblasti. Mnogi naučnici su u svojim težnjama išli i dalje, tražili su opšte zakonitosti, težili su rezultatima koji bi bili zajednički za više naučnih oblasti. Jedan od njih je i Mihailo Petrović. Njegov rad (5) »Fenomenološko preslikavanje« upravo jasno ilustruje jednu takvu težnju i, može se reći, sa puno uspeha. Svedoci smo mnogih istraživanja i metoda, koje je M. Petrović predvideo, mnogih značajnih rezultata.

Mi ćemo ovde pokušati da na jednom konkretnom primeru — na primeru preslikavanja fenomena slučajnosti — ilustrujemo opštu ideju fenomenološkog preslikavanja M. Petrovića, i da pokažemo plodotvornost te ideje. Pritom ćemo se koristiti citatima iz pomenutog rada M. Petrovića da čitaoce ovog članka, koji nisu bili u mogućnosti da pročitaju pomenuti rad, upoznamo sa bitnim momentima ideje fenomenološkog preslikavanja, a one koji su ga čitali da podsetimo na te momente.

Rad (5) M. Petrovića podeljen je na Uvod i tri osnovna odeljka: prvi nosi naziv »Preslikavanje fakata«, drugi — »Predviđanje preslikavanjem«, a treći — »Inversno fenomenološko preslikavanje«. Mi ćemo se najviše zadržati na prvom odeljku, i to ne zato što ova druga dva nisu značajna, već zbog toga što su u ovom prvom sadržane osnovne ideje fenomenološkog preslikavanja, koje se dalje prenose na njegove važne komponente — predviđanje preslikavanjem i inversno fenomenološko preslikavanje.

Izlaganje ćemo početi citatom iz pomenutog rada koji se odnosi na opšti pojam preslikavanja [(5), str. 16 i 17].

»Posmatrajmo dva skupa E i E', tj. dve kolekcije od ograničenog ili neograničenog broja sastavaka. Sastavci mogu biti bića ili fakta, ma kakve konkretne ili apstraktne prirode. Kad je među sastavcima skupa E i sastavcima skupa E' uspostavljena takva uzajamnost (correspondance), stvarna ili konvencionalna, da, prema ovoj, svakome od karakterističnih sastavaka e prvoga odgovara po jedan određen sastavak e' drugoga skupa, smatra se da je skup E kao original, preslikan na skup E' kao njegovu sliku prema toj uzajamnosti. Sastavak

e_i, skupa E i sastavak e'_i, skupa E' su homologi sastavci ta dva skupa, a prema istoj uzajamnosti. Preslikavanje se sastoji u tome da se svaki karakteristični sastavak skupa E smeni svojom homologom iz skupa E' na koji se E preslikava.

Atribut »karakterističan«, u ovoj definiciji preslikavanja dolazi otuda što se, u cilju preslikavanja, ne moraju uzimati u obzir svi sastavci skupa E i prenositi na skup E', tj. smenjivati svojim homologama iz ovoga skupa. U najvećem broju slučajeva traži se slika skupa E posmatranog sa jednog određenog gledišta G, a sa takvog gledišta ne moraju biti od interesa svi sastavci skupa«.

M. Petrović dalje kaže:

»Pri preslikavanju fakata kao skupova, homologi su sastavci oni koji u jednome i drugome skupu igraju homologe uloge, tj. sudeluju na jedan isti način u bivanju ta dva skupa fakata. Preslikavanje se tada sastoji u tome da se svaki karakteristični sastavak i njegova uloga u prvome skupu smene svojim homologama u drugome, na koji se prvi skup preslikava. Slika ispoljava ono što je na originalu karakteristično sa gledišta posmatranja. Ona daje mogućnost da se iz nje, smenom sastavaka njihovim homologama sa originala, ovaj rekonstruiše u onome što je za njega karakteristično sa gledišta G«.

Govoreći o primerima zajedničkih pojedinosti u suštinama disparatnih fakata, M. Petrović kaže (str. 24):

»Ali ono što je od bitnog interesa za razmatranja koja su predmet ove knjige, jeste egzistencija karakterističnih zajedničkih pojedinosti i u faktima najdisparatnijih konkretnih primera, koji ne moraju imati nikakve međusobne veze i u kojima ta priroda ne igra nikakvu ulogu«.

Posle ovoga, mi ćemo se zadržati na nekim faktima teorije verovatnoće i njenom kratkom istorijatu, zaključno sa aksiomatikom teorije verovatnoće koju je A. N. Kolmogorov uveo u radu (4). To će nam pomoći da uočimo kako se fenomen slučajnosti, u početku uočen i proučavan samo kod hazardnih igara, postepeno počeo zapažati i proučavati gotovo kod svih pojava u prirodi, da bi se najzad uklopio u jednu aksiomatiku i razvio u jednu novu naučnu-matematičku disciplinu — teoriju verovatnoće.

U toku dugog vremena čovek je proučavao samo determinisane pojave, kod kojih uzroci u potpunosti određuju posledice. Međutim, u hazardnim igrama već davno je uočen drugi tip zakonitosti, koje se nisu uklapale u okvire matematike tog vremena. U radovima nekih naučnika XVII veka, posvećenim hazardnim igrama, naročito u radovima Fermata i J. Bernulija, pojavili su se, u početnom obliku, pojmovi verovatnoće slučajnog događaja i matematičkog očekivanja slučajne veličine. Ti naučnici, baveći se problemima hazardnih igara, predvideli su fundamentalnu ulogu nauke koja proučava slučajne događaje. Oni su bili ubeđeni u to da će na osnovu masovnih slučajnih događaja moći da se otkriju potpuno određene zakonitosti. Međutim, zbog niskog stepena razvitka prirodnih nauka u to vreme, ta predviđanja još dugo nisu mogla da se ostvare. Teorija verovatnoće doživela je buran razvitak u radovima naučnika XIX veka koji su bili posvećeni proučavanju sledećeg problema: veliki broj pojava, čiji ishod zavisi od slučaja, podvrgnut je dejstvu ogromnog broja nezavisnih slučajnih uticaja, od kojih svaki vrši samo mali uticaj na tok posmatrane pojave u celini. Uticaj svakog od tih uzroka izražava se slučajnom veličinom, a njihov sumarni uticaj na pojavu — sumom tih slučajnih veličina. Kako je praktično nemoguće odrediti uticaj svakog od tih uzroka, a čak i broj tih uzroka, jasno je od kolike je važnosti bilo razraditi metode koje bi dozvoljavale izučavanje sumarnog dejstva, nezavisno od prirode svakog posebnog sabirka. Trebalo je naći metode kod kojih veliki broj dejstvujućih uticaja na pojavu ne bi bio prepreka već olakšanje za proučavanje te pojave (što se za metode klasične matematike u to vreme ne može reći). Ti metodi treba da kompenzuju nedovoljno znanje svakog posebnog uticaja njihovim velikim brojem, njihovom masovnošću. Pomenuti naučnici su prokrčili put za dokazivanje tzv. »centralne granične teoreme« u teoriji verovatnoće, koja utvrđuje da se zakon raspodele sumarnog dejstva samo malo razlikuje od tzv. normalnog (Gausovskog) zakona raspodele.

Savremeni razvitak teorije verovatnoće vezan je za imena mnogih naučnika. Još na početku ovog veka teorija verovatnoće je predstavljala još neformiranu matematičku nauku, u kojoj osnovni pojmovi nisu bili dovoljno jasno definisani, što je dovodilo do raznih paradoksa. Razvitak prirodnih nauka zahtevao je rešavanje sve većeg broja problema povezanih sa fenomenom slučajnosti. Došlo se do neophodnosti sistematskog izučavanja teorije verovatnoće, do neophodnosti njene formalno-logičko-aksiomatske konstrukcije, slično drugim, tada već formiranim matematičkim disciplinama (geometrija, teorijska mehanika, i sl.). Bilo je više pokušaja aksiomatskog formiranja teorije verovatnoće, na primer aksiomatika S. N. Bernštajna i Mizesa, ali se aksiomatika A. N. Kolmogorova, predložena u radu (4), pokazala kao najplodotvornija, jer je uspela da uključi u sebi kao specijalne slučajeve i klasičnu i statističku definiciju verovatnoće, do tada uveliko prihvaćene, i da zaobiđe nedostatke te definicije, a pored toga, polazeći od te aksiomatike, mogli su biti obuhvaćeni mnogi problemi slučajne prirode iz raznih oblasti prirodnih i drugih nauka.

Mi ćemo ukratko izložiti osnove ove aksiomatike:

Kolmogorov polazi od skupa (prostora) Ω elementarnih događaja. Šta predstavljaju elementi tog skupa za logički razvitak teorije verovatnoće je svejedno. Dalje se posmatra jedna klasa (razred) F podskupova prostora Ω; elementi klase F se nazivaju slučajni događaji. U odnosu na strukturu klase F pretpostavlja se da su ispunjeni ovi uslovi:

1. F sadrži kao svoj element čitav prostor Ω.

2. Ako A i B (podskupovi prostora Ω) pripadaju F kao njegovi elementi, to F sadrži kao svoje elemente takođe $A \cup B$, AB, $\bar{A}$ i $\bar{B}$, gde oznake U itd. imaju uobičajeno značenje prihvaćeno u opštoj teoriji skupova.

Klasa F sa osobinama 1 i 2 se naziva polje ili telo događaja. Ako se od polja zahteva da bude ispunjeno i

3. Ako su podskupovi $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ prostora Ω elementi klase F, to su njeni elementi i $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$, onda se to polje naziva borelovsko polje događaja (ili σ-polje događaja).

Uvedimo sledeće definicije: ako dva događaja A i B nemaju u svom sastavu jedne iste elemente prostora Ω, onda ćemo reći da su oni nesaglasni. Slučajan događaj Ω se naziva pouzdan događaj a slučajan događaj $\bar{\Omega}$ — nemoguć događaj. Događaj $\bar{A}$ je suprotan događaju A. Sada možemo da pređemo na formulisanje aksioma koje određuju verovatnoću.

Aksioma 1. Svakom slučajnom događaju A iz polja F pridružuje se nenegativan broj $P(A)$ koji se naziva verovatnoća događaja A.

Aksioma 2. $P(\Omega)=1$.

Aksioma 3. (aksioma sabiranja) Ako su događaji $A_1, A_2, \ldots, A_n$ u parovima nesaglasni, onda je $P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$.

Ako posmatramo događaje koji mogu da se razlože na beskonačno mnogo specijalnih slučajeva, potrebna je proširena aksioma sabiranja, ili njoj ekvivalentna aksioma neprekidnosti.

Proširena aksioma sabiranja. Ako je realizacija događaja A ekvivalentna realizaciji bar jednog od događaja $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, koji su nesaglasni u parovima, to je

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)+\ldots$$

Sistem aksioma Kolmogorova je neprotivrečan, jer postoje realni objekti koji zadovoljavaju sve te aksiome. Sistem aksioma Kolmogorova je nepotpun jer dopušta čak i za jedan isti prostor Ω uvođenje verovatnoće na F na različite načine. Međutim, nepotpunost ovog sistema aksioma nije dokaz njegovog nepodesnog izbora, već je uslovljen suštinom problema: u raznim problemima mogu se susresti pojave za čije je izučavanje potrebno posmatranje iste klase slučajnih događaja ali sa raznim verovatnoćama (na primer kod bacanja dve kocke, od kojih je jedna pravilna a druga nepravilna).

Kao što se vidi, ova aksiomatika tesno povezuje teoriju verovatnoće sa savremenom metričkom teorijom funkcija i teorijom skupova. Sa gledišta teorije skupova, data aksiomatska konstrukcija verovatnoće nije ništa drugo do uvođenje u skup Ω normirane, prebrojivo aditivne, nenegativne mere P, definisane za sve elemente klase F. Trojka (Ω, F, P) se naziva stohastički prostor. Zahvaljujući ovoj vezi, teorija verovatnoće je doživela buran razvitak i neslućene primene. U slučaju preslikavanja fenomena slučajnosti, iz svega napred rečenog, mogli bismo dati ovu interpretaciju fenomenološkog preslikavanja M. Petrovića:

Posmatrajmo neki idealizovani eksperiment, sa konačnim ili beskonačnim skupom ishoda E, čija realizacija zavisi od slučaja. Uspostavimo takvu uzajamnu korespondenciju da svakom karakterističnom sastavku skupa E (svakom mogućem ishodu eksperimenta) odgovara homologi sastavak skupa $E' = \Omega$ (odgovarajući elementarni događaj). Svakoj konačnoj ili prebrojivoj kombinaciji ishoda, koja se formira pomoću operacija »ne«, »i«, »ili« (i koja je također ishod), odgovara polje (ili algebra) događaja na prostoru Ω. Najzad, šansi ishoda dodelimo verovatnoću odgovarajućeg događaja. Dakle, sa gledišta ovakvog preslikavanja, od interesa su mogući ishodi i šanse njihove realizacije, a nije bitna priroda eksperimenta i njegovih ishoda. Mi bismo ovde mogli da navedemo mnogobrojne primere koji ilustruju tu činjenicu. Za nas se prostor elementarnih događaja, zajedno sa datom raspodelom verovatnoća na njemu, određuje idealizovanim eksperimentom.

U vezi sa fenomenološkim preslikavanjem, M. Petrović dalje u radu navodi mnoge pojmove i činjenice za koje bismo mi mogli da navedemo analogone kod preslikavanja fenomena slučajnosti. Mi naravno nećemo to učiniti, već ćemo navesti još samo neke od njih. Tako, govoreći o idealnom, asimptotnom cilju svih nauka (koje se sastoji u tome, da se sve ono što se mora pretpostavljati radi razumevanja prirodnih pojava svede na što je moguće manju meru), i govoreći o matematičkim analogijama u disparatnim faktima, M. Petrović kaže (str. 75):

»Očevidno je pre svega da sve što doprinosi grupisanju pojava po njihovim mehanizmima, zakonima njihovoga toka i matematičkim relacijama među faktorima koji u tim mehanizmima igraju određene uloge, doprinosi, u isto vreme, i tome da se priđe za koji korak bliže pomenutome asimptotnome cilju. Matematičke analogije koje jednoj masi disparatnih pojava daju jedan isti, zajednički tip, jedno su od najmoćnijih sredstava za takvo približavanje tome cilju. Oslobađajući iz jedne analoške grupe ono što je njome obuhvaćenim pojavama zajedničko, što ih spaja, što im, pored sve disparatnosti, daje jedan isti tip, matematičke analogije dovode do jedne opšte teorije te grupe pojava, u kojoj konkretna priroda, njihova kao i pojedinih faktora u njima nije precizirana, niti igra kakvu ulogu, a koja se, međutim, specifikovanjem te konkretne prirode svodi na specijalne teorije pojedinih od tih pojava i, na taj način, obuhvata jednu masu, na prvi pogled raznorodnih teorija, bez ikakve međusobne veze«...

...»Pored teorijskog interesa, koji u sebi skrivaju matematičke analogije, one mogu u isto vreme biti i moćno oruđe za pronalaženje novih konkretnih fakata u prirodnim pojavama, koje bi, bez analogija, kao vodilja, mogli ostati nezapaženi, ili bi, bar, konstatovanje njihove egzistencije bilo ostavljeno slučajnosti«.

Ovom prilikom možemo da podsetimo na već pomenutu analogiju između teorije verovatnoće i metričke teorije funkcija, a isto tako još i da navedemo analogiju teorije verovatnoće sa geometrijom i mehanikom, gde su verovatnoće različitih događaja brojevi iste prirode kao rastojanja u geometriji ili mase u mehanici. Plodotvornost takvih analogija za razvitak teorije verovatnoće nije potrebno posebno da naglašavamo. Pored toga, definicija analoškog jezgra za analoške grupe i tipove, koju je dao M. Petrović, sadrži bitne elemente za aksiomatsko formiranje matematičkih teorija.

Govoreći o fenomenološkom preslikavanju toka vremenskih fakata, M. Petrović kaže (str. 85):

»U fenomenološkom prostoru sve što se dešava u toku vremena, svaki vremenski fakt, ma kakve vrste, konkretne prirode i komplikovanosti ovaj bio, može se shvatiti kao kontinualan ili diskontinualan niz promena u toku vremena. Slika koja se u njemu stvara u svesti, sastoji se u nizu sukcesivnih deformacija jedne iste slike, tj. u sukcesiji trenutnih slika koje se kontinualno ili diskontinualno nižu jedna za drugom u toku vremena i od kojih svaka predstavlja po jedno trenutno stanje u pojavi«.

U vezi sa ovim, a što bi se moglo odnositi na teoriju verovatnoće, navešćemo sledeće činjenice. Usavršavanje fizičke statistike, a takođe mnogih prirodnih nauka i mnogih grana tehnike, dovelo je do neophodnosti teorije koja bi proučavala slučajne procese, tj. teorije koja bi proučavala slučajne veličine koje zavise od vremena (na primer proces difuzije, proces hemijskih reakcija, proces radiaoktivnog raspadanja atoma, procesi masovnog usluživanja, itd.). Teorija slučajnih procesa je upravo oblast teorije verovatnoće koja u današnje vreme doživljava buran razvitak.

Sa ovim bismo završili razmatranja koja se odnose na prvi odeljak rada M. Petrovića.

Drugi odeljak ovog rada posvećen je predviđanjima i fenomenološkim preslikavanjem. Na početku odeljka, govoreći o primarnim i izvedenim faktima u jezgru sličnosti, M. Petrović kaže (str. 121):

»Dešava se da u sastav jezgra sličnosti, kao zajedničke slike fakata analoške grupe, ulaze fakti od kojih se jedni ψ_i mogu smatrati kao posledice drugih φ_k sadržanih u istom jezgru. Fakti φ_k su tada primarni, a fakti ψ_i izvedeni fakti u jezgru. Kad je konjukcija između primarnih i izvedenih fakata poznata i dovoljno određena, fakti se ψ_i mogu predviđati pomoću fakata φ_k, i to kako oni koji su već ušli u sastav jezgra sličnosti tako i novi fakti ψ_j koji bi to jezgro dopunjavali. Za takvo predviđanje, samo po sebi i sa čisto fenomenološkog gledišta, bez interesa je pitanje o tome zašto takva konjunkcija postoji i otkuda dolazi nužnost poticanja fakata ψ_i i ψ_j iz φ_k. Za taj cilj je dovoljno samo znati da ta konjukcija i nužnost postoje, poznavati način konjunkcije i umeti se njome poslužiti kao instrumentom za predviđanje«.

U slučaju preslikavanja fenomena slučajnosti to bi moglo da se interpretira na sledeći način. Polazeći od prostora elementarnih događaja i aksiomatike teorije verovatnoće, mogu se predvideti mnoge zakonitosti vezane za naš idealizovani eksperiment i njegove ishode. To su i najvažniji plodovi ideje preslikavanja: uočavati zakonitosti na apstraktnom modelu, predviđati ishode i upravljati njima. Mogli bismo da navedemo mnogo značajnih rezultata koje je apstraktna teorija verovatnoće postigla, ali bi nas to daleko odvelo od osnovne ideje našeg razmatranja.

Poslednji, treći odeljak, posvećen je inverznom fenomenološkom preslikavanju. Na početku odeljka, M. Petrović, govoreći o raznolikosti faktora sa istom fenomenološkom ulogom, kaže: »Pod inversnim fenomenološkim preslikavanjem ima se razumeti preslikavanje jedne fenomenološke slike, tj. jednog skupa fenomenoloških tipova u konkretan svet fakata, u obliku i pojedinostima u kojima se ona neposredno manifestuje u tome svetu kao određen skup fakata *(f)*. Takvo je preslikavanje, kao što se vidi, obrnuto onome kojim se iz određenog skupa *(f)* konkretnih fakata formira njihova zajednička slika (φ), njihov tip«.

Za inverzno fenomenološko preslikavanje mi bismo mogli, grubo govoreći, da kažemo da je to u stvari primena teorijskih rezultata u praksi. Vrednost svake teorije je u njenim primenama. U slučaju teorije verovatnoće možemo reći da su njene primene neograničene. Fenomen slučajnosti, usled mnogih, čoveku nedostupnih, uzroka prisutan je skoro u svakoj pojavi, u ovoj ili onoj meri. Mi smo svedoci velike primene teorije verovatnoće u mnogim granama nauke, a to svakako nisu i jedine.

Naše izlaganje možemo zaključiti sledećim konstatacijama: U radu (5) »Fenomenološko preslikavanje« M. Petrović je dao ideju jednog široko shvaćenog preslikavanja i njime ukazao na bitne momente koje sada susrećemo kod konstrukcije mnogih apstraktnih teorija i njihovih primena. Mi smo naveli samo jedan primer — teoriju verovatnoće, koja doživljava buran razvitak i široku primenu upravo u naše vreme. U ovom radu M. Petrovića, kao i u mnogim drugim njegovim radovima, ogleda se široka kultura ovog zaista univerzalnog naučnika i duboko shvatanje zakonitosti mnogih pojava u prirodi i društvu. To čini da ovaj rad ima širok značaj — kako za matematiku tako i uopšte za prirodne nauke i filozofiju.

LITERATURA

Б. В. Гнеденко, *Курс теории вероятностей*, Москва 1965.

Б. В. Гнеденко, А. Я. Хинчин, *Элементарное введение в теорию вероятностей*, Москва 1961.

J. L. Doob, *Stochastic processes*, New York 1953.

А. Н. Колмогоров, *Основные понятия теории вероятностей*. 1933.

М. Петровић, *Феноменолошко пресликавање*, Београд 1933.

W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. I.

С. СТОЯНОВИЧ

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

РЕЗЮМЕ

В статье рассмотрена работа, М. Петровича „Феноменологическое отображение", Белград 1933, с точки зрения отображения феномена случайности и подчеркнуты существенные моменты идеи феноменологического отображения для конструкций апстрактных теорий на примере конструкции теории вероятностей.

DRAGAN TRIFUNOVIĆ

PRILOG MATEMATIČKOJ FENOMENOLOGIJI (OSOBINE)

1. UVOD

Poslednje godine dovele su do pojačanog interesovanja[1] za tekstove iz fenomenologije znamenitog srpskog naučnika Mihaila N. Petrovića (1868—1943).[2] Razlozi su, verovatno, sledeći: sređivanje naučnih rezultata naših naroda s krajnjim ciljem dobijanja jedne nacionalne istorije naukâ; i drugo, neosporan značaj Petrovićevog opusa za trenutak savremene nauke, specijalno kibernetike i prirodne filozofije. U ovom periodu uočljive su i tri seriozne studije Petrovićeve fenomenologije: najnovija — sa sveokupnošću analize i retrospektive Dušana Nedeljkovića,[3] analitička Ernesta Stipanića (R_3) i istoriografska Dragana Jeremića (R_{42} i B_{10}).[4] I pored ovakvog korisnog i neophodnog materijala za studiju Petrovićeve fenomenologije, mišljenja smo da krajnja analiza ovog Petrovićevog stvaranja nije završena, da ona priželjkuje, kako jednog matematičara, tako više jednog filozofa, koji bi, sa materijalom današnje nauke, a sa razumevanjem i poštovanjem ondašnjih naučnih koncepcija, temeljno proučio, sredio i predao fenomenologiju istoriji naukâ u onom obliku i sa procenom koju i zaslužuje.

Ovakva sugestivnost dovela je autora ovog rada na pomisao da je u ovom trenutku najcelishodnije učiniti jedan faktografski prilog matematičkoj fenomenologiji, koji je po sadržaju i koncepciji tehnološke prirode. Od faktografije, koja je u ovom slučaju imala vrlo skromne razmere, preko informacija i analize dela, izdvojeno je nekoliko karakteristika Petrovićeve fenomenologije. One su nazvane *osobinama* i redosledno se izlažu.

Rad je više rezultat autorovog istraživanja života i rada Petrovićeva.[5] Poveden osećanjem za istorijske događaje koji su pratili Petrovićevo stvaranje, autora više interesuje sudbina pojedinih rezultata, kao i same posledice. Prikaz ima sve elemente faktografije sa povremenim komentarom. Odavde i neophodna autorova želja: sakupiti građu za potrebe dalje studije matematičke fenomenologije. Po sadržaju, rad može da bude direktan prilog navedenim studijama fenomenologije.

Izloženo je petnaest osobina Petrovićeve fenomenologije sa ukupnom bibliografijom radova. Osobine su pokatkad formalističke sa jedinim ciljem isticanja određene vrednosti. Karakteristika svake osobine je isticanje i nagoveštaj njene egzistencije, koju širom studijom treba i potvrditi. Osobine, po sadržaju svome, otvaraju fenomenologiju ka novijim rezultatima.

2. OSOBINE

2.1. *Pojava fenomenologije.* Kod Petrovićeve fenomenologije, koja sadrži očiglednu mehanističku ideju ka uvođenju matematizma u celokupnu ljudsku delatnost i modeliranje procesa u smislu nalaženja analogona u racionalnoj mehanici, zanimljiva je sama pojava i orijentacija prema problemima mehanističkog materijalizma. Kako je Petrović došao da svoje osnovne zamisli u fenomenologiji: analoškom jezgru i mehanizmu pojava? Petrović je bio vrlo oskudan u autobiografskim kazivanjima, malo je pisao o sebi i svojim razmišljanjima u nauci, te je ostalo da arhivski materijal i literatura ukažu na povod, a i same posledice. U stvari, želimo da postavimo jedno pitanje, koje je za istoriografiju fenomenologije i osnovno: koji su to razlozi i preduslovi odlučili da se u ovoj ličnosti nauke decenijama provlači fenomenološki princip? Da li je slučajno što se Petrović u pristupnom predavanju na Velikoj školi, odmah po dolasku iz Pariza, javlja sa fenomenologijom? Da li je slučajno što je za akademijsku besedu izabrao istu oblast nauke? Mišljenja smo da odgovore treba tražiti u mladom Petroviću na Velikoj školi i École Normale Supérieure,[6] kao i u trenutku nauke, gde mehanistički pogled na prirodu pojava i društva doživljava svoje vrhove, da bi se uoči prvog svetskog rata potpuno izgubio.

Petrović je od rane mladosti okrenut prirodi i njenom proučavanju. Još u gimnaziji (1878—1885) družina »Nada« podstiče polemike o energetizmu i materiji, prirodni procesi su stalno prisutni, a đački prevodi poznatijih dela hemije, matematike, fizike ukazuju na želju ka višim studijama i ranoj samostalnosti. Demonstriranje eksperimenata u laboratorijama Vojne akademije kod profesora Marka Leka, direktan uticaj naših prirodnjaka (Jovan Žujović, Sima Lozanić, Ljubomir Klerić i Kosta Alković) trajno će uticati da Petrović vrlo rano ponese interesovanje, želju, znanje. Kao student čita Hobbes-a, razmišlja o Aristotelovoj definiciji metafore, a profesor Ljubomir Nedić se oduševljava Petrovićevim filozofskim razmišljanjima. Kod Nedića radi i temat koji je na Savetu Velike škole posebno zapažen.[7] Ovakvo opšte obrazovanje u prirodnim naukama i filozofiji, Petroviću je pružilo polazne mogućnosti, da bi se kod svojih profesora u Parizu (1890—1894) (Picard, Poincaré, Appel i dr.) potpuno prikazao sa načelima univerzalnosti u nauci koju je Pariska škola i negovala. Uticaj ove škole, kao i sam trenutak mehanicizma u Francuskoj, nije mogao da mimoiđe, Petrovića i nekoliko »normalaca« poznate generacije 1890—1894. na École Normale Supérieure (Sagnac, Maurain, Cotton i Brizard). Slušanje kurseva na Pariskom univerzitetu i Collège de France iz mehanike, fizike, hidrodinamike, hemije kod poznatih fenomenologa XIX veka (Bouty, Pellat, Lippmann, Koenigs i dr.) imalo je snažan uticaj na mladog Petrovića. Sa Sagnac-om, najviše, Cotton-om i Maurain-om u Internatu Normalne škole raspravlja o mehanicizmu, zapaženim analogijama u elektrotehnici i termodinamici, proučava život i rad lorda Kelvina (Thomson).[8] Ideje se stvaraju na samom izvoru i nije slučajno što je, po povratku u Srbiju, svoj nagoveštaj u iznalaženju uopštenja fenomenologa XIX veka najpre saopštio svom drugu Sagnac-u. »Dragi moj Sanjak, Molim te da mi šalješ vesti o svom zdravlju. Koliko se može presuditi po radovima koje često šalješ Akademiji i Udruženju fizičara, čovek ne bi kazao da ne ide baš loše. Piši mi nekoliko reči o tome.

Tvoj brat je verovatno već nastanjen u Caen-u. On polako postaje poznat mojim zemljacima koji se bave istorijom i pravom. Mi imamo njegovu tezu u Univerzitetskoj biblioteci, i baš je izašao jedan kratak prikaz u našem pravnom časopisu *Branitelj*.

Ja sam počeo moje analogije o kojima sam ti ranije pričao u školi, i predložio sam beogradskoj Akademiji (što će tebe podsetiti na akademiju u Ferté-sous-Jouare od Labiche-a) jedan rad u kome sam rezimirao sva moja gledanja. U ovom radu prikazujem mogućnost nalaženja jedne generalne teorije aktivnosti uzroka, podrazumevajući pod istim svaki fenomen koji teži da čini promene itd., i pod njegovom aktivnošću dinamičku stranu, koja se manifestuje pod oblikom jedne izvesne tendencije. Ta tendencija je odlično definisana kad se zna za njen smisao, njen objekt i matematički zakon po kome se menja njen intenzitet. U radu generalizujem osnovnu koncepciju obične dinamike kao što su: sila, brzina, ubrzanje, rad, živa sila, itd., kao i neke osnovne principe dinamike, kao npr.: Dalamberov princip, princip žive sile itd., i sile zamenjene sa tendencijama uzroka, brzina kretanja sa brzinom promena u fenomenu; dinamička inercija je izmenjena tendencijom izvesnih promena koje ostaju onakve kakve su, u trenutku kad uzrok prestaje odjednom da utiče itd. Ovde iznosim ključ svih primećenih analogija, a u drugom redu, kad se zna za dijagram jednog fenomena, može se, pre nego se poznaje konkretna priroda uzroka koji ga proizvodi, znati za specifičnost mehanizma uzroka i zakone varijacije ovih tendencija itd.

Činilo bi mi radost da ti pokažem nekoliko interesantnih detalja, ali odustajem od toga, pošto ne znam da li će te interesovati u ovom trenutku. Uostalom, ja ću to uraditi kada prebrodim neke teškoće koje imam trenutno. Tvoj Mišel«.[9]

Po načelima i koncepciji, Sagnac i Petrović bili su slični. Sagnac je takođe radio na fenomenologiji, gde uspostavlja analogiju evolucije (nasleđa) i klasične mehanike.[10] Poznat je i u računskoj tehnici sa sistemom cifarskih mašina. Sagnac će pisati o Petrovićevoj fenomenologiji. Njihovo sastajanje u Zajednici za unapređenje naukâ Francuske redovito je dovodilo do novih fenomenoloških studija.[11]

Pod uticajem Pariske škole, Petrović postaje matematičar »konkretnog duha« (G. Sagnac), naučnik »prirodne univerzalnosti« (E. Cartan).[12] Potpuno okupiran idejom »nove nauke«, Petrović već u dvadeset sedmoj godini, godinu dana po dolasku iz Pariza, istupa sa idejom matematičke fenomenologije, nagoveštavajući uopštavanje već otkrivenih analogija u prirodi. Na Velikoj školi, 3. maja 1895. čita pristupno predavanje *Jedan pogled na geometriju masa* (O1), gde iznosi prva načela svojih budućih istraživanja.

Ovde, pre svega, Petrović izlaže osnovne ideje fenomenologije. Koristeći mehaniku kao model nauke, Petrović programira svoj budući rad na fenomenologiji. Iskoristio je pojam mase da bi došao do osnovne koncepcije: osloboditi sve prirodne fenomene »konkretnog ruha« i za njih, posredstvom aksiomatike racionalne mehanike, izgraditi »posebnu naučnu disciplinu«. Petrović na samom početku kaže: »Već po samoj svojoj definiciji, geometrija mase ima da se bavi onim pitanjima, u kojima su geometrijski elementi kombinovani sa koncepcijom mase. Ali, i tu baš leži najveći deo interesa cele stvari, *za pojam mase može se uzeti jedan mnogo generalniji pojam od onoga, koji se obično u mehanici pridaje toj reči*«.[13] Posle šireg uopštavanja pojma mase primenjenog na epidemije, jačinu svetlosti i gustinu naseljenosti, Petrović predviđa egzistenciju nove grane nauke. »*I onda sa takvim apstraktnim elementima, kao što su prostor i pomenuti brojni koeficijenat, koji zavisi od prirode posmatranog fenomena, ali čija se konkretna priroda pri građenju opšte teorije ne mora precizirati, mogućno je razraditi jednu samostalnu teoriju, sasvim analognu onoj poznatoj teoriji iz koje se danas sastoji geometrija mase.* Problemi i pitanja koja se u njoj javljaju mogu se generalisati na sve maločas pomenute fenomene. Na taj način stvorila bi se jedna nova matematička disciplina, kojoj bi najbolje odgovaralo ime: *geometrija heterogenoga prostora*,[14] za razliku od obične geometrije, u kojoj su prostorni elementi, sa kojima ona operiše, lišeni svake heterogenosti«.[15]

Pogled (O_1) je, po našem mišljenju, vrsta programa mladog Petrovića. Ovde se nailazi na sva ključna mesta fenomenologije, koja će, docnije, Petrović razraditi u akademijskoj raspravi, *Elementima* i sl. Napomenimo da *Pogled* u potpunosti i otkriva sam smisao spoznaje fenomenološkog principa kod Petrovića. Naime, u Petroviću je bila koncentrisana velika količina pronađenih analogija fenomenologa XIX veka, i na tom »empirijskom« materijalu Petrović se otisnuo u nalaženje »zajedničkog«, tj. posredstvom naučne dedukcije, sve analogije među disparatnim fenomenima povezati u posebnu disciplinu — generalisanu mehaniku pojava. Evo, u celosti, Petrovićevog programa. »Jedna od najvećih koristi tako generalisane geometrije mase biće u tome, što će se, verovatno, takvom generalizacijom moći teorije, koje se odnose na običnu, fizičku masu i koje su danas veoma razrađene, preneti bar u nekoliko i na druge objekte, koji bi u drugim fenomenima igrali ulogu mase. *Takve generalizacije uvek su navodile na značajne analogije, koje često puta postoje između raznorodnih i vrlo disparatnih fenomena, koji nemaju nikakve veze među sobom. Te se analogije često puta manifestuju u prirodnoj filosofiji, i ma da na prvi pogled izgledaju slučajne, ipak nije teško uvideti im pravi uzrok, koji je identičan sa onim, na kome se osniva analogija problema generalisane geometrije mase među sobom.*[16] Često vrlo raznorodni fenomeni, za koje bi retko kome palo na um da ih ma u čemu približi jedan drugom, kad se oslobode svoje konkretne, prirodnjačke odeće i zadrže se u vidu samo uloga svojih integralnih sastojaka i odnosi između ovih, postaju sa tako apstraktnog gledišta jedan i isti fenomen. Raznorodni faktori, koji figurišu u tako raznorodnim fenomenima, često imaju istovetne uloge, pa prema tome i za posledice njihova uticaja važe istovetni zakoni. Taj je princip učinio vrlo velike usluge u razvitku izvesnih grana fizike, i od mnogobrojnih primera navešću ovde samo najeklatantniji: analogiju koja postoji između matematičkih teorija kretanja elektriciteta, rasprostiranja toplote i kretanja tečnosti.[17]

Svojom konkretnom stranom pomenuta kretanja predstavljaju među sobom vrlo raznorodne pojave. Ali oslobodimo ih te fizičke, konkretne odeće, a obratimo pažnju samo na uloge pojedinih faktora u njima i na odnose između tih faktora. Račun tada pokazuje da temperatura jedne tačke u toplotnom problemu igra istu ulogu koju i potencijal u električnom, ili brzina tečnosti u datoj tački u hidrodinamičkom problemu; specifična indukciona moć igra u električnom problemu istu ulogu koju i koeficijenat sprovodljivosti toplote u toplotnom problemu itd. Uopšte, svaka, bilo čisto matematička, bilo fizička koncepcija u jednoj od te tri disparatne teorije ima svoj ekvivalent u ostale dve i to tako da je dovoljno razraditi jednu od tih matematičko-fizičkih teorija, pa su time u isti mah razrađene i ostale dve, smenivši prosto fizičke koncepcije u onoj prvoj njihovim ekvivalentima u ovim poslednjim teorijama. Iz toga je već razumljivo da će analitičke, računske teškoće biti istovetne u svakoj od njih, i da one sa računskog gledišta predstavljaju apsolutno jedan i isti problem, čije rezultate valja samo prevesti na tri razna načina, prema tome kako se kad budu primenjivali u analitičkoj teoriji toplote, ili elektriciteta, ili u hidrodinamici.

Tako, u prvoj polovini ovoga veka Fourier je postavio analitičku teoriju toplote, našavši i diskutujući diferencijalne jednačine, na koje se svodi problem rasprostiranja toplote. U tako gotovoj, razrađenoj teoriji valjalo je samo smeniti faktore, koji u njoj figurišu, njihovim električnim ekvivalentima: temperaturu električnim potencijalom, količinu toplote količinom elektriciteta itd., pa da se dobije moderna matematička teorija kretanja elektriciteta, bar u njenoj osnovi. Diferencijalne jednačine, na koje se svode pomenuti električni problemi, identične su sa onima kod toplotnih problema, i između fizičkih zakona, koji se iz tih jednačina izvode, vlada potpuna analogija. I ako u ma kojoj od tih teorija oslobodimo pomenute faktore (temperaturu, potencijal, količinu toplote ili elektriciteta itd.) njihovog konkretnog značenja, zadržavši im samo uloge koje oni imaju u problemima, kao što smo to ranije učinili sa koncepcijom mase, onda je mogućno razraditi jednu opštu, apstraktnu teoriju, sličnu maločas generalisanoj geometriji mase, koja bi u sebi sadržala u isti mah i teoriju toplote, i teoriju elektriciteta, i hidrodinamiku, i koja bi se svela na prvu, drugu ili treću od ovih teorija, prema tome kako se kad konkretno značenje bude davalo pojedinim faktorima i rezultatima.

Takva ista analogija postoji i između teorije oscilatornoga kretanja elektriciteta, teorije kretanja tečnosti u savijenim cevima i teorije kretanja šetalice, kad se vodi računa o otporu sredine kroz koju se ova kreće. *Tih analogija između disparatnih fenomena ima mnogo, i bile bi vrlo zanimljiv predmet za studiju. Verovatno je, da će i geometrija mase biti moćno sredstvo za njihovo iznalaženje i objašnjenje*«.[18]

I stvarno, koristeći principe mehanike Petrović postavlja jednu generalisanu mehaniku, gde pojmove mehanike zamenjuje opštim pojmovima. U diferencijalne jednačine racionalne mehanike uvodi: uzrok, težnju, aktivitet, aktivne i pasivne uloge sa analizom zajedničkog mehanizma pojava radi dobijanja sheme parametara sistema koji su u analogiji.

2.2. *Klasifikacija*. Pre svega, treba navesti samo Petrovićevo mišljenje. Radeći na fenomenologiji on je uvek govorio da se kreće u jednoj *novoj nauci*, čiji rezultati treba da je i potvrde kao samostalnu nauku. Na samom početku rada, kada je u *Nastavniku* (O1) nagovestio svoja istraživanja, Petrović je razmišljao o ovome: da li će pokušaj uopštavanja fenomena u prirodi i društvu u okviru jedne nove »geometrije mase« opravdati zvanje posebne grane nauke. Petrović kaže: »U takvom momentu stručnjaci zastaju za trentuka, bace pogled u nazad na sve što je dotle učinjeno, prikupe i izdvoje sva fakta što pripadaju takvoj jednoj razvijenoj grupi, ispituju verovatnoću njenog razvitka u budućnosti i stvara se nova disciplina ili nov ogranak kakve discipline koja već postoji. Takvo diferenciranje mora biti opravdano: 1. Stvarnom potrebom (nagomilanošću proučenoga materijala, kakvom važnom i osnovnom osobinom, koja fakta, što ulaze u tako stvorenu novu disciplinu, bitno razlikuje od ostalih); 2. Izvesnošću da će se takva nova disciplina na daleko razviti u svome pravcu, i praktičnim koristima koje bi se imale od toga diferenciranja za unapređenje te grane nauke«.[19] Istraživanja u fenomenologiji Petrović nije shvatao kao granu matematike, mehanike i filozofije. Razvijao je *novu disciplinu*, pri čemu je koristio više naziva za isti sadržaj. Govorio je o matematičkoj teoriji aktiviteta, matematičkim analogijama, matematičkoj fenomenologiji i materijalizaciji (modeliranju — prim. autora), da bi preko mehanike uzroka i pojava uveo i generalisanu mehaniku. U docnijim radovima preovladao je izraz fenomenološko preslikavanje, uopštena matematika i sl. U vezi s ovim, Miloš Radojčić je zapisao: »Matematička fenomenologija obuhvata, dakle sa svog stanovišta, sve moguće primene matematike. Ona ima filozofski značaj. Ali, mada se Mihailo Petrović *ograđivao od filozofije,* naglašavajući da se njome ne bavi, već da mu je svrha nauka koja po uzoru na matematiku ima praktičnu vrednost, on je bio po svojim osnovnim filozofskim pogledima mehanicista«.[20] Razmišljamo o sličnosti klasifikacije fenomenologije i današnje kibernetike. Kao što kibernetika nema strogu klasifikaciju u grupi nauka, pa ni tačnu definiciju, tako isto i Petrovićevoj opštoj fenomenologiji nije moguće dati strogu klasifikaciju. Ono što ostaje i što je tačno, to je egzistencija potpuno zasebne naučne discipline, koja se po svom sadržaju može da pridoda prirodnoj filozofiji, mehanici, matematici i estetici, modeliranju. Svejedno.

Svi referativni i drugi časopisi, koje smo pregledali, prikazali su Petrovićeve tekstove iz fenomenologije kao oblast mehanike.[21]

Ne samo što je Petrović stvorio u fenomenologiji, već i radovi drugih fenomenologa, kao Thomson-a, Sagnac-a, Lamé-a, Helmholtz-a, Neumann-a i dr., registrovani su u nauci kao oblast mehanike. Prema suštini rezultata, gde se htelo preko aksiomatike racionalne mehanike pružiti jednu vrstu generalisane mehanike pojava u prirodi i društvu — potpuno je i prihvatljiva ovakva klasifikacija fenomenologije.

Neosporan je značaj Petrovićevih rezultata za prirodnu filozofiju koja ima nove perspektive.[22] Međutim, filozofska javnost u vremenu stvaranja Petrovićeve fenomenologije bila je potpuno van događaja. Pregledali smo nekoliko poznatijih filozofskih rečnika, priručnika i časopisa tog perioda. Nije pronađen ni jedan prikaz ovog Petrovićevog stvaranja. Klasifikacija u smislu filozofskog sistema, priloga i značaja nije postojala. Ovde svakako treba isključiti rad Dušana Nedeljkovića iz 1934. godine, koji po prvi put skreće pažnju na filozofske koncepcije u delima Mihaila Petrovića.[23]

Ako upotrebimo vrlo čestu Petrovićevu reč »ruho«, tada je sigurno da je danas fenomenologija dobila novo *ruho*, što je dovelo do pojačanog interesovanja filozofske štampe.

2.3. *Bibliografska mera*. Radovi Petrovića u oblasti matematičke fenomenologije prikazuju se prema opštoj bibliografiji Petrovićevog stvaranja. Uvedene su tri jedinice: O_k — originalni radovi, B_i — bibliografske jedinice koje sadrže svu izdavačku delatnost radova O_k (preštampavanje i sl.) i R_j — jedinice referata, prikaza, beležaka, navoda i komentara o radovima O_k i B_i. Kod ovakve mere ispunjene su veze

$$B_i \leqslant O_k, \quad O_k < B_i < R_j, \quad (k, i, j,) \in n$$

pri čemu je $O_k = B_i$ samo za $k = i = 1$. Prema Price-u[24] i metodi makroskopskog praćenja jedne naučne oblasti, registrovana je sledeća količina informacija: $O_k = 20$, $B_i = 27$ i $R_j = 88$. U odnosu na ukupni broj *naučnih* radova $O_k = 276$ iz opšte bibliografije, Petrovićevo stvaranje u fenomenologiji je minimalno i iznosi svega 7,2% od celokupnog naučnog opusa, a u poređenju sa opštim stvaranjem $O_k'' = 393$ mera je $\varphi = 5{,}1\%$. Dobijena mera φ je znatno manja od mere, npr. diferencijalnih jednačina (31,5%) ili teorije funkcija (33%), što ukazuje da u pisanju svojih radova Petrović nije bio znatno okupiran problemima fenomenologije. Ovu osobinu potvrdiće i ritmičnost stvaranja. Neosporno da su ove mere samo statistički pokazatelji.

2.4. *Metoda publikovanja*. U objavljivanju radova Petrović je imao izvesnu orijentaciju. Pre svega treba pomenuti *Glas* Srpske kraljevske akademije, zatim *Comptes rendus* Pariske akademije nauka, *Bulletin de la Société mathématique de France*, te akademije u Zagrebu, Poljskoj, Češkoj i Rumuniji. Međutim, sa radovima iz fenomenologije Petrović je nešto izmenjen. Tako, u Pariskoj akademiji nauka *nije saopštio nijedan rezultat iz fenomenologije*, takođe i u Biltenu francuskih matematičara. Ovo isto važi i za naš ugledan časopis *Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*, kao i *Rad* Jugoslovenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu.

Pored ovoga, Petrović nije imao metod rasprave, kao što je to bio slučaj sa matematičkim radovima. O fenomenologiji pisao je opširno i preopširno (npr. O_2 na 65 strana, O_5 na 111 strana i dr.), tako da je potpuno logično što je od 20 registrovanih jedinica, Petrović imao i pet posebnih knjiga O_6, O_7, O_9, O_{16} i 20_{20}, sa ukupno 1580 strana.

2.5. *Ritmičnost stvaranja.* Ritmičnost Petrovićevog stvaranja u fenomenologiji karakterišu velike pauze. Posle pristupnog predavanja na Velikoj školi (O_1), Petrović je učinio prvu pauzu od pet godina, da bi početkom 1900. godine saopštio svoju pristupnu akademijsku raspravu (O_2). Petrović je ovu pauzu učinio kako bi što više prišao zakonima prirode i društva, s ciljem da obogati svoja znanja za potrebe fenomenologije i time u Akademiji istupi sa potpuno originalnom besedom. U ovom vremenu Petrović detaljno proučava probleme hidrodinamike, elektriciteta i mehanike uopšte.[25] »Današnji matematičar, koji sve više tone u uske specijalnosti, ne može se osloboditi utiska koji na njega ostavlja Petrovićevo poznavanje matematici srodnih nauka, naročito poznavanje literature iz mehanike, fizike i hemije (naravno prema stanju nauka tog doba).[26] Preko kondenzatora, magnetnog polja, biologije, hemijske analize, kinetike gasova i elektriciteta uopšte, Petrović razrešava osnovne zakonitosti onih prirodnih nauka koje će mu poslužiti kao polazni materijal u matematičkoj fenomenologiji. Ova pauza (1895—1900) bila je neophodna kako bi se Petrović na početku novog veka otisnuo u svet prirodne filozofije koju je sa dovoljno ambicija želeo da uopšti nalaženjem jedinstvene teorije za sve prirodne pojave — generalisane racionalne mehanike.

Ovom periodu pripada i Petrovićev rad na računskim mašinama kao prirodni produžetak njegovih fenomenoloških studija. Neposredno posle nagoveštaja o jedinstvu matematizma u disparatnim naukama, Petrović se bavi problemima »tehničke fenomenologije«. On menja dotadašnji sistem poluge (planimetar-integraf Prytz-a, Hoppikofer-a, Amsler-a, Jacob-a i dr.) i uvodi upravljačke računske mašine na dinamičkim sistemima.[27] Petrovićeva analogna računska mašina, koja radi na principu hidrodinamike sa sistemom za upravljanje, imponuje danas kao jedno vizionarstvo za savremeno modeliranje, kao i najnovijim rezultatima u pneumatskoj i hidrauličnoj računskoj tehnici.[28] On se ne zadovoljava hidrodinamikom i modelira takav hemijski proces preko kojeg rešava razne diferencijalne jednačine.[29] I danas svetska literatura navodi ovo kao potpuno novo i originalno rešenje. Ovim je Petrović ušao u istoriju instrumentalne matematike.

Petrovićeve računske mašine prihvataju se kao neposredna posledica matematičkih analogija. Mi ovog trenutka ne poznajemo tačno vreme saznanja o modeliranju, koje danas čini vrhove matematizma u raznim naukama, ali svesni smo značaja rezultata od pre sedamdeset godina. Uostalom, evo kako Petrović gleda na smisao računskih mašina: »... matematičke analogije mogu činiti još jednu vrstu usluga koje u pojedinim slučajevima imaju svoje naročite važnosti: one su jedno podesno pomoćno sredstvo za *materijalizaciju analitičkih problema*. Materijalizacija se sastoji u tome da se za jedan dati analitički problem nađe konkretna pojava, za koju će važiti iste relacije i isti zakoni što bi se dobili analitičkim rešenjem toga problema. Dešava se da, pri takvoj materijalizaciji, kakva relacija, ili kakva naročita pojedinost, koja je skrivena u jednačinama analitičkog problema i koju je teško istaći na vidik čisto analitičkim sredstvima, postaje očevidna u konkretnoj pojavi koja problem materijalizira«[30]

Ako se isključi prevod *Elemenata* iz 1921. (O_9), kao i Petrovićevo učešće u jubileju akademika Sime M. Lozanića (O_{10}), tada je vidno uočljiva druga pauza od 15 godina, i to od 1911, kada je izdao najobimnije delo *Elementi matematičke fenomenologije* (O_7), pa do 1925, kada je člankom *Jedna zajednička crta nauke i poezije* (O_{12}) učestvovao u jubileju Njegoša. Zadnju, veću pauzu Petrović je učinio u periodu 1925—1933. sve do pojave posebne knjige *Fenomenološko preslikavanje* (O_{16}).

Analiza pauza u Petrovićevom radu na fenomenologiji ukazuje na odsutnost neophodnog kontinuiteta u stvaranju tekstova iz fenomenologije. Ritmičnost u fenomenologiji je potpuno drugojačija od ritmičnosti u diferencijalnim jednačinama ili teoriji funkcija. Da li sve ovo nagoveštava potvrdu izjavama izvesnih savremenika o Petrovićevom pisanju na dohvat[31] ili je po sredi uslovni vremenski razmak za stvaranje krupnijih dela (1/4 opusa iz fenomenologije su posebne knjige)?

2.6. *Ponavljanje rezultata*. Ova osobina je ujedno i jedna od opštih karakteristika koja prati Petrovićevo stvaranje. Naime, Petrović je redovito imao dve verzije svojih naučnih radova: domaću i stranu. Za Petrovićevo vreme ovaj način publikacija naučnih rezultata bio je neophodan. Beograd je bio mala sredina sa svega dva matematičara na Velikoj školi. Atmosfera i usamljenost u istraživanju tražili su od

Petrovića posebnu energiju. Petrović je jednostavno bežao od naučnog lokaliteta. Dugo vremena imao je za čitaoce samo kolege van zemlje koje su pažljivo pratile njegove rezultate. Ponesen idejama francuske škole (Petrovićev pariski period 1889—1894), obično je svoje najbolje radove davao pariskim redakcijama. Da je Petrović svoje rezultate zadržao samo na području našeg jezika, kao što je to bio slučaj sa D. Nešićem, B. Gavrilovićem, P. Živkovićem i Lj. Klerićem, njegov ulazak u nauku ne bi imao današnje dimenzije.

Analizom svakog rada iz fenomenologije konstatovana je sledeća identičnost ($\equiv$) ili pripadnost ($\leq$) bibliografskih jedinica:

$$O_1 \subseteq O_2, \quad O_3 \subseteq O_2, \quad O_4 \subseteq O_3$$

$$O_5 \equiv O_6, \quad O_7 \equiv O_9 \subseteq O_8$$

$$O_{10} \subseteq O_7, \quad O_{19} \subset O_7, \quad O_{12} \subseteq O_{16}, \quad O_{14} \subseteq O_{16} \; (O_{14} \subseteq O_{20})$$

$$O_{17} \subseteq O_{16}, \quad O_{20} \subseteq O_{16}$$

Prema ovome Petrovićevo originalno stvaranje u fenomenologiji svedeno je na *pet jedinica:* akademijsku raspravu (O_2), Pokušaj jedne opšte mehanike uzroka (O_5), Elementi matematičke fenomenologije (O_7), Fenomenološko preslikavanje (O_{16}) i Matematička analiza i okeanografsko-biološki problemi (O_{18}).

2.7. *Matematička struktura.* Akademik Milutin Milanković imao je običaj da često pominje Petrovićevu grešku što je francusku verziju *Elemenata* iz 1921 (O_9) objavio bez matematičkog aparata i time umanjio kvalitet knjige.[32] Ovo nas je navelo da tačno utvrdimo korišćenje matematičkog aparata u fenomenologiji. Od dvadeset radova iz fenomenologije, Petrović je u sedam slučajeva (O_2, O_3, O_5, O_6, O_7, O_{18}, O_{19}) koristio matematički aparat. Kako se ovi radovi mogu da sažmu po svom sadržaju

$$O_3 \subseteq O_2, \quad O_6 \equiv O_5, \quad O_{19} \subseteq O_7,$$

to možemo zaključiti da je Petrović samo u tri maha koristio matematički aparat. Prema tome, da Petrović nije u svojoj akademijskoj besedi (O_2), mehanici pojava (O_5) i *Elementima* (O_7) upotrebio matematičku simboliku u onoj meri koja je već bila zastupljena u racionalnoj mehanici, moglo bi se slobodno reći da Petrović nije uopšte koristio matematičku simboliku i druge matematičke odredbe pri stvaranju u fenomenologiji. Ovo je, posve, jedan nov rezultat u proceni Petrovićeve fenomenologije, kome bi bilo potrebno posvetiti više pažnje. Svakako da suština Petrovićevog matematizma pojava na principu racionalne mehanike nije ni zahtevala obimniju matematiku, te je ovo minimalno korišćenje matematičkog aparata u prvim radovima i zadovoljilo Petrovićeve potrebe.

Matematički aparat i sama matematička struktura u matematičkoj fenomenologiji ima potpuno jedan drugi sadržaj, nego što je to slučaj, npr. sa matematičkom fizikom ili matematičkom statistikom. Matematičke strukture u fizici, statistici, relativitetu i sl., svedene su na određenu primenu, što je dovelo i do samog obogaćivanja strukture (npr. Kronekerovi simboli, Gibsova statistika i dr.). Međutim, ovakav slučaj nije sa matematičkom fenomenologijom. Petrović u fenomenologiji, iako je imao mogućnosti, nije hteo da primeni i razvije već postojeće matematičke istine. Šteta je velika što se ovaj voluminozni matematičar nije u fenomenologiji posvetio više čisto matematičkim strukturama pojava. Nakon uočene komparalogije, analogije ili uopštenja, Petrović je redovito stao. Npr., pri analizi simultane akcije dva uzroka (depresivnog i impulsivnog), Petrović dolazi do Riccati-eve jednačine

$$k\frac{dv}{dt} \pm \lambda v^2 = f(t)$$

i zadovoljava se rezultatom uopštavanja. Ovde Petrović ne ide dalje u smislu iznalaženja izvesnih uslova za integraciju dobijene jednačine, kao što je to, npr., kod analize jednog hemijskog procesa uradio i doveo svoje rezultate na visok stepen u oblasti modeliranja i analognih automata.

Ova konstatacija o istraživanjima u fenomenologiji bila je zapažena i od izvesnih stranih autora, koji su Petrovićevo stvaranje prihvatili (sa gledišta kreativnosti) *samo* kao jedno uopštenje poznatih stavova racionalne mehanike. Npr., P. Boutroux veli: »Učinimo jedan prigovor M. Petroviću. Njegova fenomenologija nije ništa drugo nego izmenjena racionalna mehanika, i nesumnjivo da je ta kritika (prigovor) zaslužena i opravdana«.[33] Međutim, Boutroux ne osporava Petrovićev matematizam društvenih pojava putem stavova i principa racionalne mehanike, već koristeći ovakva uopštenja, Boutroux razmišlja o mogućnosti stvaranja jedne metamehanike koja bi u komparalogiji imala isti smisao kao opšta prema metričkoj geometriji. »Ali ipak dugujemo profesoru Beogradskog univerziteta mnoge sugestije. Zapazićete naročito paragrafe knjige gde pokušava M. Petrović da studira fenomene na koje se kalup klasične mehanike ne može tačno primeniti (v. str. 82 i dalje). Čak i tada, kada priroda uzroka koji utiču na neki fenomen nije potpuno jasna, ipak se može (kad determiniramo smisao ovih uzroka, gledajući ako su oni praćeni razlozima koji ojačavaju ili su suprotni) formirati nekoliko predviđanja o rezultatima koji će ih slediti. Ovaj pokušaj mehanike otvara jedan put koji možda nije neplodan. Zašto ne bi bilo moguće, posle svega toga, sastaviti jednu mehaniku koja bi bila prema analitičkoj mehanici ono što je opšta geometrija prema metričkoj geometriji?«[34]

S druge strane, neosporni su Petrovićevi rezultati u iznalaženju generalisanih diferencijalnih jednačina pojava, zatim u uvođenju faznog prostora, kao i potpuno novom prilaženju osnovnom pojmu matematike — preslikavanju. O faznom prostoru Ernest Stipanić je pisao: »Zanimljivo je ovde podvući da je naš istaknuti matematičar Mihailo Petrović, pre više od šezdeset godina, koristio fazni prostor za kvantitativnu analizu u svojoj matematičkoj fenomenologiji. On uočava deskriptivni sistem od n elemenata, a uređen kompleks vrednosti od n korespodentnih parametara zove figurativnom tačkom deskriptivnog sistema. Na taj način deskripciju pojava svodi na opis kretanja figurativne tačke u prostoru od n dimenzije i ističe da se »Problem Matematičke fenomenologije ... svodi na problem kretanja u polidimenzionalnom prostoru i rešava se u svim najraznovrsnijim oblicima i varijantama generalizacijom metoda kojima se rešava problem kretanja u običnom prostoru«.[35] Ovakvo Stipanićevo objašnjenje o uvođenju Euklidovog prostora E^n u elemente matematičke fenomenologije potpuno je tačno. Međutim, fazni prostor, po našem mišljenju, u fenomenologiji ostaje na nivou racionalne mehanike. Petrović je E^n u uvodnom delu *Elemenata* (O_7) i u posebnom odeljku (O_7, str. 44—58) izložio sa ciljem dobijanja osnovnih izraza geometrije u generalisanim koordinatama (npr. metrička forma ds i dr.), što je sve sadržano u osnovama racionalne mehanike. Uostalom, Petrovićevo posmatranje uopštene pojave Φ sa n simultanih elementarnih fenomena φ_i

$$\Phi\ (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n)$$

neophodno je moralo da dovede do generalisanih koordinata mehanike — specijalno do E^n prostora.

2.8. *Kvantitativne analogije.* I pored toga što su Petrovićeve analogije najčešće kvalitativne, deskriptivne i intuitivne sa osnovama u metaforama (J. Haag, R_{52}), Petrovićevi rezultati u generalisanoj mehanici pojava imaju mogućnosti procene i korišćenja i za kvantitativnu analizu pojava. Naime, slično konkretnim istraživanjima fenomenologa XIX veka na primeru dva, najviše tri fenomena, ovde kao posebnu osobinu fenomenologije ističemo Petrovićev udeo u problemima *simulacije*, nalaženju mikromodela, a što je sve podređeno laboratorijskim istraživanjima — u ovom slučaju kvantitativnim analogijama.

U *Elementima* (O_7), pa i ranije, Petrović je na jedan uopšten način pokazao značaj shema parametara za laboratorijska istraživanja. Vrlo često je jednostavnije ispitati jedan dostupan model M_1, nego njemu odgovarajući aplikacioni model M_2. U ovom slučaju obično se kaže da model M_1 *simulira* realitet M_2. Npr., po Thomson-u i Petroviću, često je udobnije ispitivati električni model mehaničkog uređaja nego sam uređaj. Na analognom modelu koji *simulira* proces lako se mogu izvesti potrebna merenja i na taj način utvrditi uticaj pojedinih parametara na ponašanje mehaničkog sistema. Takav model se može smatrati za jedan oblik *analognog računara*. Štaviše, ovakva analogija nije samo kvalitativna ili deskriptivna: ona je i kvantitativna, jer se za bilo koji sistem iz široke klase jednog prirodnog procesa (fenomena) može konstruisati analogni proces u laboratorijskim uslovima, npr. električna kola. Pošto se, recimo, električna kola mogu lako sastaviti, a struje i naponi lako meriti, to je onda ovo i *praktičan metod* za ispitivanje npr. vibracija složenih mehaničkih sistema čija izrada je skupa i modifikacija teška, a čije je kretanje teško tačno meriti.

Problem simulacije, po Petroviću, dopušten je samo onda ako su modeli M_1 i M_2 u fenomenologiji (specijalno, matematičkoj analogiji), što ćemo pisati

$$M_2\ (\alpha_{2i}, \beta_{2j}) \xrightarrow{\text{fen}} M_1\ (\alpha_{1k}, \beta_{1l}).$$

Relacija je ispunjena, tj. simulacija obezbeđena, ako je zadovoljen osnovni uslov analogije

$$(\alpha_{1k}, \beta_{1l}\ \in M_1, \alpha_{1k} \xrightarrow{f} \beta_1 \quad (\alpha_{2i}, \beta_{2j}) \in M_2, \alpha_{2i} \xrightarrow{\varphi} \beta_{2j} \Longrightarrow f \equiv \varphi.$$

Za parametre λ_{1n} i λ_{2m} iz uspostavljene matematičke analogije

$$f \equiv \varphi, \quad \lambda_{1n} \in f, \quad \lambda_{2m} \in \varphi$$

Petrović formira odgovarajuće *sheme* koje pretpostavljaju fundamentalan rezultat analogija ove vrste. Prema koncepciji današnjeg modeliranja procesa i mnogih simulacija fizičkih sistema, ove Petrovićeve sheme čine preteču savremenim komunikacionim sredstvima u analognoj tehnici.

Sheme, kao finalni produkt modeliranja na principu matematičkih analogija, kod Petrovića nailazimo u nekoliko radova (O_5, str. 115—120; O_6, str. 85—86; O_7, str. 724—760). Ove sheme treba sistematizovati i tačno im odrediti praktični značaj.

Izložena osobina ukazuje na nov rezultat Petrovića koji otvara istraživanja u udelu Petrovićeve fenomenologije u danas dobro poznatoj tehničkoj disciplini — teorija simulacija i analognih automata.

2.9. *Aksiomatičnost i metod izlaganja rezultata.* I pored toga, što se oslonio na jednu deduktivnu nauku stroge aksiomatike — racionalnu mehaniku, Petrović u izlaganju tekstova iz fenomenologije nije zadržao metodologiju ove nauke. Prema analogiji sa racionalnom mehanikom i samoj koncepciji, fenomenologija je aksiomatična nauka. Petrović ovo nije iskoristio i prigovor ima svoju težinu ponajviše, što ne koristeći shemu aksiomatike nije fenomenologiji dao jedan mnogo egzaktniji naučni oblik. Da je ovo učinio, možda bi došlo i do stvaralačkog matematizma u čisto fenomenološkim pojavama.

Petrović uvodi deduktivnost, ali više se javlja u »priči« i dovodi sebe u nezgodan položaj da masu zaključaka i rezultata više puta ponavlja. Ovo je dovelo i do preopširnosti u tekstovima. Prema jednoj proceni, da se Petrović držao strogosti u izlaganju, tada poznati *Elementi* (O_7) ne bi bili napisani na 774 strana, već na svega 250—300 strana. Verovatno da je zbog ovakvog Petrovićevog načina izlaganja svoje mehanike pojava (O_6), Sagnac, pri pisanju prikaza o O_6, primetio: »Treba M. Petroviću čestitati što je odmah umeo da rezimira sebe na manje od sto strana« (R_{13}).

Načinu izlaganja fenomenologije stavili bismo prigovor zbog toga što je Petrović nedovoljno navodio rezultate drugih fenomenologa, čije je rezultate koristio. Ovakav način izlaganja prepušta samom čitaocu da iznađe čisto Petrovićeve primere analogija.

2.10. *Stalna prisutnost.* Analogije, nalaženje određenog fenomenološkog modela za skup disparatnih fenomena F_j posredstvom analoškog jezgra, mehanizma pojave i sheme — to je bila trajna konstanta Petrovićevog rada. Uvek prisutna i nikad nenapuštena, ona je Petrovićevom stvaranju pomogla kako u samoj fenomenologiji, tako i u drugim oblastima nauke. Shvatio je da je u hipotezama i zakonima prirode i društva fenomenološki princip jedan od odlučujućih za analizu i studiju. Ovaj princip je misaono »srastao« za Petrovića. To je bilo jedno veliko oruđe kojim se vrlo uspešno služio. Po kazivanju savremenika i nekih originalnih spisa, u govoru, na času, u svakidašnjici naučnika, analogije su bile prisutne. Nije slučajno što je svoj *Roman jegulje* (Beograd, 1940) počeo ovom rečenicom: »Ako nauka i poezija mogu imati čega zajedničkog, one će ga neosporno naći u romanu i misterijama života jegulje«.

Pri pisanju posebne monografije o algoritmu[36]

$$\Delta_n(y) = y^{(n)}/y$$

nije mimoišao i primenu u fenomenologiji. Npr., za pojave u linearnom fenomenološkom polju, gde je jačina uzroka proporcionalna divergenciji polja

$$X = \lambda \, div \, (\nu) = \lambda \frac{\partial^2 \nu}{\partial s^2}$$

(s je dužina luka linije na koju se svodi polje, npr. temperatura, a λ je koeficijenat uticaja uzroka), Petrović je prikazao da važi relacija

$$\Delta_{2,t}(\nu) - \frac{1}{\alpha} \Delta_{1,t}(\nu)$$

te se pojava svodi na parcijalnu jednačinu

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \nu}{\partial s^2} .$$

U radu *Osetljiva mesta običnih i diferencijalnih jednačina*[37] Petrović osetljiva mesta jedne jednačine povezuje sa fenomenologijom. Naime, ako u fenomenu F_k sa poznatim mehanizmom M učinimo određenu, dovoljno malu perturbaciju jednog elementa e_k, tada mehanizam može ostati isti M, ali alteracija F_k (transformisani fenomen) će se znatno izmeniti. Evo šta sam Petrović kaže: »Iz takvih se primera vidi da se može desiti ovo: obrazac koji izražava kakav analitički, mehanički, fizički itd. fakt, može imati kakvo svoje osetljivo mesto, u koje ako se samo *darne* fakt iz osnova menja svoj bitni karakter. To, sa matematičko-fenomenološkog gledišta daje interesantan primer slučajeva u kojima jedna, koliko se hoće neznatna izmena jednoga faktora u pojavi, izaziva nesrazmerno veliku promenu bitnoga karaktera ove. Tako se iz ovoga što prethodi vidi da na pr. oscilatoran tok pojave takvom, minimalnom izmenom faktora, odjednom i bez ikakvog kontinualnog prelaska iz osnove se izmenjuje i prelazi u monoton tok, bez ikakva traga od ma kakvih, pa i najslabijih oscilacija. I ta nesrazmernost efekta ostaje za sve vreme trajanja pojave, pa ma izmena faktora ostala za sve to vreme koliko se god hoće slaba«.[38]

Metod analogije doveo je i do potpuno novih i originalnih rezultata. Prateći određeno preslikavanje između skupa dekadnih brojeva D i skupa reči jednog jezika A.

$$A_\alpha \xrightarrow{f} D, \quad F \text{ — ključ (šifra)}$$

Petrović je postavljanjem analognog pitanja

$$\{F_i\} \xrightarrow{S} D, \qquad S \text{ — spektar}$$

nalaženja određene korespondencije između skupa brojeva D i skupa funkcija $F_i \varepsilon R$, došao do pronalaska numeričkih spektara, do jedne potpuno nove funkcionale u matematici.

Ovde ne želimo detaljno da izvršimo analizu uticaja fenomenološkog principa na jedan znatan deo Petrovićevih rezultata u matematici. U ovom trenutku dovoljno je ovu *osobinu* samo naznačiti i istaći potrebu njenog proučavanja.

2.11. *Kibernetika.* Poslednje dve decenije matematizam nauka dobija jednu potpuno novu dimenziju. Elektronika, računari i sredstva komunikacije pružile su nove mogućnosti ne samo za trenutak nauke, već i za preispitivanje rezultata u naučnom nasleđu. Nije mali broj sudova nauke prošlosti koji su potvrđeni tek u ovom vremenu nagle kompjuterizacije. I Petrovićeva fenomenologija dobija nov smisao u odnosu na period njenog stvaranja i prihvatanja (1895—1933). Petrović juče, sa matematičkom teorijom aktiviteta, mehanizmom pojava, potpuno je drugojačiji od Petrovića danas. Današnji rezultati nauke dovode Petrovićevo stvaralaštvo do novih vrednosti. Pokušaji Petrovića, da kvalitativnim analogijama iznađe korespondenciju između jedne društvene kategorije i jednog fizičkog procesa, navode nas na određenu anticipaciju matematike i estetike, poezije i teorije igara i sl.[39] A kada život jedne *fele* povezuje sa kretanjem tečnosti u savijenim sudovima, i time biološki proces svede na određenu diferencijalnu jednačinu, pruža nam posebno zadovoljstvo u ovom vremenu, kada je biometrika preko jednog matematičkog modela realnost mnogih laboratorija.

Okupiran idejama nalaženja univerzalnog naučnog jezika posredstvom svojih analogija, beleže današnji hroničari, Petrović je bio u mnogo čemu na granici kibernetike. Govori se o njegovoj anticipaciji kibernetike u širem smislu, o obogaćivanju prirodne filozofije novim sudovima.

Još 1948. godine, kada je kibernetika bila kao nauka tek u začetku, profesor Mirko Stojaković je ukazao »da Petrovića treba smatrati za *jednog* od preteča ideja iznetih u kibernetici«.[40] Šta je M. Stojakoviću pokazalo da Petroviću nisu bile strane ideje onoga što se danas naziva kibernetikom? »Ako je pojam povratne sprege osnovna stvar u teoriji upravljanja a ova, i pored sve kompleksnosti, osnovna stvar u kibernetici, — onda se kod Petrovića daleko pre nego kod Wiener-a mogu naći svi ti elementi. Jer, šta je drugo nego povratno dejstvo Petrovićeva *modifikatorska uloga* koja, kako sam Petrović kaže ima pored jačine i svoj smisao pozitivan ili negativan, u datom trenutku, prema tome da li *elemenat* pod njenim uticajem raste, ili opada u tom trenutku. U prvom slučaju težnja se smatra impulsivnom u drugom depresivnom.[41] U klasifikaciji uloga fenomenološkog tipa, Petrović navodi uloge impulsivnih i depresivnih faktora, uloge *nivelatorske, regulatorske, koordinatorske* ili *stabilizatorske*. Kao što je poznato, to su sve pojmovi iz moderne teorije automata, iz teorije regulacije i stabilizacije. I kao što je N. Wiener tvrdio da u kibernetici moraju da sarađuju matematičari, fizičari, biolozi, medicinari i ekonomisti, tako je i Petrović u svojoj fenomenologiji povezivao sve ove vrste stručnjaka preplićući njihove oblasti«.[42]

Stojakovićev nagoveštaj iz 1948. godine ostao je nezapažen od strane naše naučne javnosti. Tek krajem 1958, kada je strana naučna javnost pokazala otvoreno interesovanje za Petrovićevu fenomenologiju, počinje aktuelizacija Petrovićevih analogija. Danas možemo požaliti što grupa naučnika različitog profila okupljena oko Wiener-a, koja se sastajala od 1943. u Bostonu »sa ciljem da sagleda dodirne tačke« međusobno disparatnih nauka, nije imala Petrovićevo stvaranje u fenomenologiji. A da su Stojakovićeve ideje iz 1948. prihvaćene i razrađene, danas bismo znatno dalje stajali u analizi Petrovićeve fenomenologije i njene anticipacije savremene nauke.

Ono što sigurno treba tvrditi jeste da su problemi u Petrovićevoj fenomenologiji kibernetski (pojava, mehanizam, upravljanje, jezgro, shema, analogija bioloških procesa i dr.). Pre svega, ovde treba pomenuti rezultat dubokog Petrovićevog izučavanja analogije između procesa u tehničkim i biološkim sistemima i sintetičkog uzajamnog obogaćivanja odgovarajućih grana nauke. Neosporno da ovome treba pridodati i Petrovićeve rezultate u »tehničkoj fenomenologiji«, tj. analognim računskim mašinama i matematičkom modeliranju.

Sud o vizionarstvu takođe ne treba opovrgavati. Međutim, anticipacija nove nauke ne pripada samo Petroviću. Ona se nalazi i kod drugih fenomenologa XIX veka, pa čak i ranijih klasika.

Nalaženje dodirnih tačaka između Petrovićeve fenomenologije i današnjih koncepcija kibernetike u širem smislu, bio bi, svakako, jedan posebno interesantan rad.

2.12. *O fenomenologiji kod nas.* Petrovićevi radovi u nalaženju zajedničkog modela u svetu disparatnih pojava odmah su pobudili interesovanje beogradske naučne javnosti, tako da nije slučajno što su svaki nov rezultat beležili beogradski časopisi: *Nastavnik, Srpsko književni glasnik, Misao* i *Delo*. Ipak, treba navesti da u prvo vreme, osim Koste Stojanovića, u Srbiji dugi niz godina nije bilo čoveka nauke koji bi dao podrobniji prikaz, studiju ili esej o Petrovićevom radu na fenomenologiji. Sve je ovo trajalo do tridesetih godina (Dušan Nedeljković, 1934), sa izuzetkom tipičnog mehanističkog prikaza Koste Stojanovića (R_{35} ili R_{26}), pa donekle i V. Vujića (R_{31}).

Prema bibliografiji radova, koja obuhvata sva kazivanja o Petrovićevoj fenomenologiji, jasno se mogu uočiti dva perioda: 1^0 od 1896. do 1945. i 2^0 od 1945. do danas. U prvom periodu o Petrovićevoj fenomenologiji pisali su: Sima Lozanić, Jelenko Mihailović, Kosta Stojanović, Milutin Milanković, Nikola Krstić (lekar), Krsta Cicvarić, Sima Marković, Vladimir Vujić, Tadija Pejović, Dušan Nedeljković i Jovan Karamata. Od 1945. godine nastaje znatno obimnija i studioznija analiza fenomenologije koja i danas traje. U ovom periodu o fenomenologiji su pisali: Milutin Milanković, Mirko Stojaković, Anton Bilimović, Dragoljub Marković, Ernest Stipanić, Dušan Nedeljković, Đuro Kurepa, Zvonimir Damjanović, Dragan Jeremić, Andrija Stojković, Milorad Bertolino i Dragan Trifunović.

Bilo bi tehnički neizvodljivo ovde izložiti samo osnovne koncepcije navedenih autora, te ova osobina ostaje u granicama faktografije.

2.13. *Strana naučna javnost.* Tekstovi o Petrovićevom radu redovito su u obliku referata. Međutim, bibliografija je zabeležila i tri slučaja, gde se Petrovićevi rezultati i koriste. Tako je Niewenglowski u svojoj knjizi *Les mathématiques et médecine* (R_{14}) naveo Petrovićeve analogije i same mehanizme koji su u vezi sa biološkim pojavama i dijagnostikom o čemu je pisao i naš N. Krstić (R_{24}). Dupréel u *Théorie de la consolidation* (R_{53}) i E. Mayewski u *La science et la civilisation* (R_{55}) mahom navode one analogije koje karakterišu društvene pojave, pri čemu je posebno iskorišćen princip metafore.

Petrovićeve tekstove iz fenomenologije komentarisali su: G. Fehr, Lampe, E. Borel, G. Sagnac, G. Niewenglowski, R. Markolongo, M. D'Ocagne, P. Boutroux, R. Marchal, M. Boll, A. Buhl, J. Haag, E. Dupréel, E. De Mayewski i Reymond-Lalande.

Karakteristično je navesti da skoro svi prikazi navode da je ideja analogija u disparatnim pojavama poznata od ranije (R_{10}), da fenomenologija koju Petrović izlaže »nije potpuno nova« (R_{46}), da je to u osnovi racionalna mehanika (R_{18}), analogije moralnih i psihičkih pojava su samo metafore (R_{18}), itd. Pored ovoga, navodi se Petrovićev značaj u otvaranju novih oblasti prirodne filozofije, uvođenju društvenih pojava u zakone fenomenologije i dr.

Pored detaljnog opisa sadržaja knjige (O_6), Lampe (R_{10}) podseća da je ideja o analogijama u naukama bila poznata i ranije. »Knjižica iz zbirke Scientia obrađuje analogije na način pun podstreka, a koje su bile već često primećene i ponekad bliže proučene između pojava u različitim granama fizike i mehanike. Mi vas podsećamo na sledeću izreku J. Larmor-a u Lond. M. S. Proc. 15, 158—170 iz jedne interesantne rasprave (konsultovati FdM 16, 211—213, 1884): Predmet stalnog opažanja je taj, da su različita područja matematičke fizike međusobno usko povezana, tako da se može rešenje jednog pitanja u jednoj grani često preneti na jednu drugu granu i da tamo služi kao rešenje jednog odgovarajućeg problema. Korisno je tragati za unutrašnjim razlogom ovakve srodnosti problema u široko disparatnim granama nauke, kao i potražiti elemente na kojima baziraju skoro nesvesno učinjeni analogni zaključci«.

Pored ranije iznetog Boutroux-ovog mišljenja o originalnosti (2.7.), ovde navodimo i slučaj kada Boutroux (R_{18}) svodi analogije u sociološkim pojavama na metafore i ukazuje na originalne izvore pojedinih navedenih analogija kod Petrovića. »Čovek vrlo rado približava fenomene različitih vrsta jedne drugima. Upoređuje se jedan istorijski, sociološki fenomen sa kretanjem klatna; živahna i slabo određena kretanja velikih ljudskih masa upoređuju se sa fermentacijom«; itd. Uglavnom, ova približavanja nisu ništa drugo nego metafore. Međutim, ako ovakve fenomene korektno proanaliziramo, da li je moguće njima pridavati više važnosti i dati im naučnu vrednost? Ovo je hteo da uradi Mihailo Petrović. »Analogija, kaže Petrović, postoji u identičnosti uloga, koje igraju izvesni elementi u analognim fenomenima«. Iz ovoga proizašlo je sledeće pitanje: da li je moguće izvući ove uloge iz onoga što ih specijalno vezuje na izvesnu vrstu fenomenima«. Iz ovoga, proizašlo je sledeće pitanje: da li je moguće dovoljno generalan, kako bi se mogao prilagoditi svim fenomenima koje jedna ista analogija obuhvata? . . .

Mi ne možemo da sledimo M. Petrovića u detalje njegovog izlaganja. Uostalom, to je izvođenje potpuno jasno, i ilustrovano je brojnim primerima iz najrazličitijih nauka: mehanički, fizički, hemijski fenomeni, akcija sporednog uzroka na tok jedne bolesti po Bouchard-u, periodične promene jačine mirisa cveća prema Mesnard-u, itd., itd«.

Petrovićev školski drug Sagnac (R_{13}) pisao je povodom knjige iz 1906. godine (O_6). »U ovoj novoj knjizi zbirke *Scientia*, jedan matematičar, vrlo konkretnog duha, obraćajući se prvenstveno fizičarima, želeo je da pokaže istovremeno filozofski i praktični interes sledećeg problema. Istraživanje analogija fenomena, klasifikacija tih fenomena u grupe analognih fenomena, a zatim da se za svaku grupu analogija napravi shema u najkonciznijem obliku koji prikazuje jedinstveni karakteristični mehanizam grupe analogija. Skup opštih fenomena sklopljen na taj način obrazovaće generalnu mehaniku fenomena.

U ovoj knjižici autor želi jedino da dâ samo skicu opšteg rešenja tako širokog problema. Ne radi se o davanju mnogobrojnih primera, generalnih shema koje odgovaraju istom broju analoških grupa, raznih mehaničkih, električnih, hemijskih, čak bio-hemijskih problema. U većini slučajeva Mihailo Petrović sa matematičkom preciznošću trasira svaku shemu, polazeći od jedinstvene generalne diferencijalne jednačine koju nezavisno zadovoljavaju zakoni svih pojedinih fenomena koji pripadaju istoj analoškoj grupi. On naročito insistira na mehanizmima, tako važnim u primenama, gde se pojedine promene koje dolaze u obzir svode na eksponencijalni ili sinusoidalni prigušeni oblik. Neki od tih mehanizama omogućuju predstavljanje fenomena sposobnih za evoluciju, nasledstvo, oni su novi i pozajmljeni iz rada G. Sanjaka.

Ta veoma jasna knjiga, vrlo konkretna, a ipak ispunjena generalnim idejama, sigurno će pomoći studentima, onima koji eksperimentišu ili se bave teorijom, kao i filozofima. Svi će oni sa najvećim interesom očekivati objavljivanje jednog opširnijeg dela u kome isti autor ima nameru da razvije ista generalna pitanja dopunjena novim primenama. Treba mu čestitati što je odmah umeo da rezimira sebe na manje od sto strana«.

Očigledno da A. Buhl (R_{46}) ne prihvata originalnost Petrovića kao nešto potpuno novo u nauci. »U svakom slučaju, naučnici i filozofi su odavno obuzeti idejom o takvim generalizacijama. Kao prva teškoća javlja se potreba za dovoljnim brojem činjenica koje idu u prilog takvim generalizacijama, a knjiga M. Petrovića veoma je bogata u tom pogledu i svedoči o posmatračkom duhu kome se ne može staviti česta zamerka da je lokalizovan na suviše mali broj tačaka. *Ukoliko ne donosi novu nauku,* bar će pokazati da obična nauka ima daleko veću plastičnost nego što se to obično misli«.

Na kraju iznesimo u originalnom tekstu i deo Marchal-ovog referata (R_{21}). »On voit, par ce qui précède, que l'auteur nous élève à un assez haut degré d'abstraction; mais qui possède la dynamique classique suivra assez facilement ses développements, déduits par voie de généralisation et d'analogie, des principaux résultats de cette science. De plus, il y aura profit pour tous à le suivre dans le développement logique de son idée. Il n'introduit aucune notion nouvelle, n'énonce aucun résultat abstrait, sans éclairer la théorie de nombreux exemples; voilà qui rend la lecture de ce petit livre, pour tout homme instruit, abordable et intéressante; voilà qui fait ressortir la fécondité des résultats qu'il contient«.

Koliko je priređivaču ovih osobina poznato, do danas u našoj sredini nije bilo slučajeva analize i sudova o tekstovima strane naučne javnosti. Registrovani referati i navodi (R_j), kao i napred prikazano nekoliko tekstova, pružaju potrebne uslove za sagledavanje ocene ondašnje strane naučne javnosti o Petrovićevoj fenomenologiji.

Od 1928. godine pa do danas, nije registrovana nijedna beleška o Petrovićevoj fenomenologiji u stranim časopisima, monografijama, knjigama i sl.

2.14. *Nasleđe.* Na osnovu pregledanih prikaza i studija o Petrovićevoj fenomenologiji (R_j), možemo primetiti da se uopšte nije izvela analiza predrezultata, šta je bilo poznato u fenomenologiji do pojave Petrovića, šta je Petrović prihvatio, a šta čini nov prilog samog Petrovića. Kod osobine 2.9. mi smo već ukazali na pitanje originalnosti izvesnih konkretnih analogija koje preovladavaju Petrovićevim tekstovima. Ovo su pitanja koja u nama podstiču želju da po prvi put nešto više i smelije postavimo.

Pitanje originalnog priloga u matematičkim naukama potpuno je određen i definisan pojam. Još od Peana, koji je uveo danas prihvaćenu tehniku obeležavanja i navoda u matematičkoj raspravi, za jedan rezultat u matematičkim naukama obavezno prethodi: poznato je..., usvojeno je ili korišćeno... i dobijen je ovaj rezultat... koji dopunjava... itd. Ovakav egzaktan postupak u prikazivanju rezultata kod Petrovića ne nalazimo, te je vrlo teško konstatovati originalnost izvora za pojedine analogije.

Jednom površnom analizom utvrdili smo da analogija između vihorastog kretanja fluida i elektrodinamike pripada Helmholtz-u, hidrodinamike i elektrodinamike Heumann-u, toplote i ekonomije Kosti Stojanoviću, tedmodinamike i termoelektronike Bouty-u, pneumatike i elektriciteta Shaw-u, fotohemije i elektriciteta Sagnac-u, bolesti i mehanike Bouchard-u, toplote i elektriciteta Thomson-u i dr. Mehanizmi pojedinih hemijskih reakcija pripadaju Winte-u, mirisa Mesnard-u, fosforoscencije Becquerel-u itd. Pored ovoga, prikazane sheme parametara koji su u analogiji (O_6, O_7 i O_9) u potpunosti ne pripadaju Petroviću.

Ovom konstatacijom želeli smo da ukažemo na rezultate analogija koje su uočene i proučene pre Petrovića. Neosporno da ova osobina ostavlja kao zadatak tačno utvrditi pripadnost svih navedenih analogija u Petrovićevoj fenomenologiji.

2.15. *Beogradska matematička škola.* Kao poslednju osobinu ističemo činjenicu da u periodu Beogradske matematičke škole nije bilo predstavnika ove nauke koji bi obrađivao i posvetio se fenomenologiji i prirodno nastavio započeti Petrovićev rad. Oko 2200 strana iz Petrovićeve fenomenologije stajalo je netaknuto u našoj matematičkoj sredini. Čudno je, zaista, da Petrović prilježnim radom na stvaranju naučnog podmlatka nije našao prirodni oslonac. On je iza sebe ostavio naslednike iz oblasti teorije funkcija, diferencijalnih jednačina, algebre i matematičkih spektara, ali nije našao nijednog matematičara za matematičku fenomenologiju.

Koristimo ovu osobinu da bismo ukazali na jednu istinu o Beogradskoj matematičkoj školi.

Teško je složiti se sa izvesnim autorima da »Petrović iste 1894. godine kao profesor Velike škole u Beogradu, počinje izgradnju svoje matematičke škole koja je prve decenije našega veka već čvrsto zasnovana«. Petrović je po dolasku na Veliku školu prvo vreme predavao nižu matematičku analizu na Tehničkom i Filozofskom fakultetu, da bi tek od 1900. bio profesor matematike isključivo na Filozofskom fakultetu. Od 1894. pa sve do 1912, skoro dve decenije, Petrović i Bogdan Gavrilović bili su jedini predstavnici matematičkih nauka na Univerzitetu. Numerus clausus na Velikoj školi i Beogradskom univerzitetu vodio je bitku sa vrlo talentovanim mladim matematičarima (dr Petar Vukićević i dr Đorđe Petković), tako da se više godina zadržao matematički »tandem« Petrović—Gavrilović.

Međutim, da li je samo numerus clausus bio razlog da Petrović čitavih dvadeset godina bude sam na Filozofskom fakultetu? Da li je, možda, po sredi i nešto drugo, što je sadržano u samoj prirodi Mihaila Petrovića?

3. BIBLIOGRAFIJA

1 1 *Jedan pogled na geometriju mase.* Nastavnik, Beograd, 1896, T. VIII, 1, str. 1—10. [Pristupno predavanje na Velikoj školi održano 3. maja 1895.][43]

2 [*Abstract*].[44] Srpska kraljevska akademija, Godišnjak za 1897, Beograd, 1899, T. XI, str. 148.

1 *Vujić Vladimir:* Ideal nauke. Srpski književni glasnik, Beograd, 1923, T. VIII (nova serija), 7, str. 512—523.

2 *Trifunović, Dragan:* Beleška o Mihailu Petroviću. Braničevo, Požarevac, 1967, T. XIII, 1, str. 77—86.

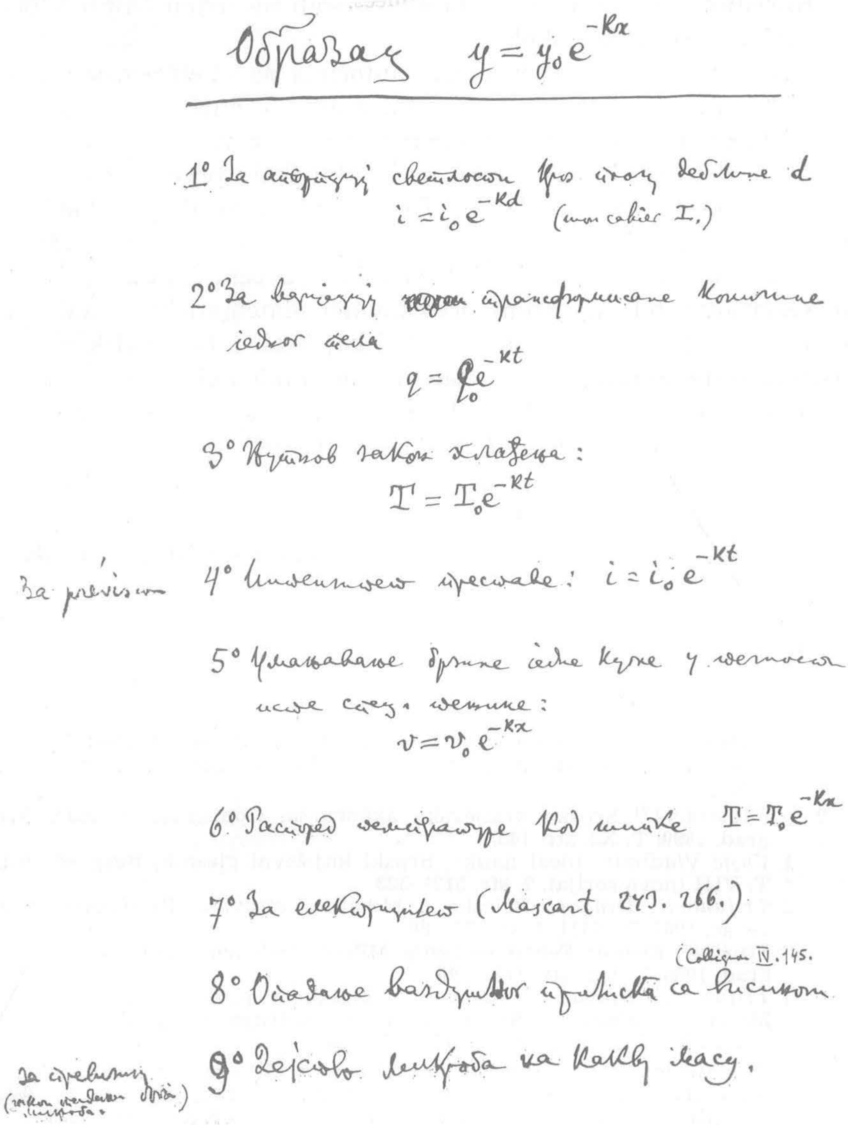
3 *Stipanić, Ernest:* Fenomenologija Mihaila Petrovića. Dijalektika, Beograd, 1966, T. I, 2, str. 117—129.

4 *Trifunović, Dragan:* Predgovor + beleška o piscu. Mihailo Petrović, Metafore i alegorije, Srpska književna zadruga, Beograd, 1967, Kolo LX, knj. 405, str. 196 (str. 1—18; 177—196).

2 3 *O matematičkoj teoriji aktivnosti uzroka.* Srpska kraljevska akademija, Glas, knj. LIX, Prvi razred, knj. 22, Beograd, 1900, str. 183—247 [Saopšteno u Akademiji prirodnih nauka 1. decembra 1899; pristupna akademijska rasprava čitana na Svečanom skupu Srpske kraljevske akademije 9. januara 1900, prilikom proglašenja Mihaila Petrovića za redovnog člana Akademije prirodnih nauka Srpske kraljevske akademije.][45]

4 *O matematičkoj teoriji aktiviteta.* Srpska kraljevska akademija, *Godišnjak* za 1899, Beograd, 1900, T. XIII, str. 160—161. [Izvod iz pristutne akademijske rasprave.]

5 *Lozanić Sima:* [Govor povodom proglašenja Mihaila Petrovića za akademika].[46] Srpska kraljevska akademija, Godišnjak za 1899, Beograd, 1900, T. XIII, str. 162.



Образац $y = y_0 e^{-kx}$

1° За апсорпцију светлости кроз слој дебљине d
$i = i_0 e^{-kd}$ (mon cahier I.)

2° За варијацију ~~[illegible]~~ трансформисане количине једног тела
$q = q_0 e^{-kt}$

3° Њутнов закон хлађења:
$T = T_0 e^{-kt}$

За prévision 4° [illegible] струје: $i = i_0 e^{-kt}$

5° Умањавање брзине једне кугле у течности услед сопств. тежине:
$v = v_0 e^{-kx}$

6° Распоред температуре код шипке $T = T_0 e^{-kx}$

7° За електролизу (Mascart 243. 266.)

(Colligan IV. 145.

8° Опадање ваздушног притиска са висином

За стрелицу [illegible] 9° [illegible] лемнискате на [illegible]

Imao je sistem beležaka, gde je evidentirao svaku zapaženu analogiju. — Autograf jedne strane »Atlasa matematičkih analogija« iz 1901. godine.

6 *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (FdM), B. 32, s. 246.
7 *Stipanić, Ernest:* R3

3 5 *Les analogies mathématiques et la philosophie naturelle.* Revue générale des Sciences pures et appliquées, Paris, 1901. T. XII, 13, p. 626—632 [dvostubne strane].

8 *Fehr, G.:* FdM, B. 32, s. 947.[47]

4 6 *Analogije među disparatnim pojavama.* Srpski književni glasnik, Beograd, 1902, T. VII, 8, str. 589—598.[48]

5 7 *Pokušaj jedne opšte mehanike uzroka.*[49] Srpska kraljevska akademija, Glas, knj. LXIX, Prvi razred, knj. 27, Beograd, 1905, str. 21—131. [Saopšteno u Akademiji prirodnih nauka 11. oktobra 1904.]

Sadržaj. —

UVOD.

Osnovni pojmovi i jednačine. Aktivitet, težnja uzroka. Promenljive količine pri akciji uzroka. Osnovne jednačine. Neposredni uzroci. Indirektni uzroci. Količine X_i. Definitivni oblici jednačina. Razne generalizacije dinamičkih teorema.

Opšte šeme za akciju uzroka dinamičke prirode. Akcije uzroka sa nezavisnim varijacijama. Akcija uzroka koja se menja proporcionalno veličini svoga efekta. Akcija antagonističkog uzroka koji se menja proporcionalno ekstenzitetu efekta. Simultana akcija dva uzroka. Simultana akcija dva promenljiva antagonistička uzroka. Simultana akcija tri uzroka.

Letimičan pogled na konkretne primene opšte teorije akcije uzroka.

9 *Marković, Sima:* Opšta Riccati-eva jednačina prvoga reda. Beograd, 1914, str. 88 [doktorska teza].

6 8 *La Mécanique des phénomènes fondée sur les analogies.* »Scientia«, Phys.-mathématique, No. 27 (Février 1906), Paris, 1906, p. 95; 12,5×19,5.

Contents. —

Introduction. Considérations préliminaires sur les analogies.

Esquisse d'une mécanique générale des causes et de leurs effets. Eléments du schéma. Équations régissant l'action des causes. Definition analitique des fonctions X. Quelques théorèmes généraux.

Schémas généraux représentant l'action des causes. Aperçu sur les applications de la mécanique générale.

10 *Lampe:* FdM, B. 37, s. 690—691.
11 *Borel, E.:* Revue du mois, Paris, 1906, T. VI.
12 *Mihajlović, Jelenko:* Delo, Beograd, 1906, T. XXXVIII, 3. str. 395—397.
13 *Sagnac, G.:* Revue scientifique, Paris, 1906, T. V, p. 808.
14 *Niewenglowski N. G.:* Les mathématiques et la médecine. H. Desfarges, [Paris, 1906], p. IV+198.
15 *Cosmos,* Paris, 1906, No. du 10. novembre, p. 136.
16 *Marcolongo, R.:* L'Enseignement mathématique, Genève, 1907, T. IX, p. 78—79.
17 *Maurice D'ocagne:* Revue des gestions scientifiques, Bruxelles, 1907, No du 30. janvier, p. 288—292.
18 *Pierre Boutroux:* Revista di scienza, Bologna, 1907, T. IV, 3, p. 188—190.
19 *Revista di scienza,* Bologna, 1907, T. IV, 3, p. 63.
20 *R. M.:* Revue des livres, Paris, 1907, p. 281—284.
21 *Marchal, R.:* Revue des livres, Paris, 1907, p. 862—865.

22 *Revue d'Artillerie*, Paris, 1907, No. du fév.[50]

23 *Revue d'Artillerie*, Paris, 1907, 7.

24 *Krstić, N[ikola]:* Arhiv za celokupno lekarstvo, Beograd, 1911, T. XVII, sv. 211, str. 417.

7 9 *Elementi matematičke fenomenologije*. Srpska kraljevska akademija, Posebna izdanja, knj. XXXIV, Prirodnjački i matematički spisi, knj. 8, Beograd, 1911, str. XIII+774; 16,5×24,5.
[Saopšteno u Akademiji prirodnih nauka 10. septembra 1910; delo sadrži 133 citirane literature, 126 napomena, 15 tabela i 39 slika].[51]

Sadržaj. —
Uvod. Nekoliki elementarni pojmovi iz polidimenzionalne geometrije.

I odeljak: Elementi za deskripciju pojava i njihovih mehanizama. Deskriptivni elementi pojava. Mehanizmi pojava.

II odeljak. Spona između mehanizma i manifestacije pojava. Diferencijalne jednačine pojava. Osnovne diferencijalne jednačine. Generalna transformacija osnovnih jednačina. Transformacija jednačina za pojave sa hololomnim sistemom. Transformacija osnovnih jednačina za potencijalne pojave. Kondenzovani oblici jednačina.

III odeljak. Neposredne posledice fenomenoloških diferencijalnih jednačina. Stacionarne faze pojava. Teorema živih sila i njene fenomenološke posledice. Akcija diskontinualnih uzroka.

IV odeljak. Manifestacija pojava kao posledica sastava njenoga mehanizma. Kvantitativna slika pojave. Kvalitativna slika pojave.

V odeljak. Sastav i šeme fenomenoloških mehanizama. Kombinacije i distribucija uloga u mehanizmima pojava. Varijacije aktiviteta u mehanizmima pojava.

VI odeljak. Fenomenološke analogije. Matematičke analogije. Kvalitativne analogije.

10 *Uvod u elemente matematičke fenomenologije*. Biblioteka Srpska književnost u sto knjiga — Filozofi; Matica srpska — Srpska književna zadruga, knj. 89, Novi Sad, 1966, str. 78—89 (priredio Dragan M. Jeremić).

25 *Stojanović, Kosta:* Delo, Beograd, 1911, T. LXI, str. 238—249; 344—360; 1912, T. LXII, str. 93—104, 264—271, 424—434.[52]

26 *Stojanović, Kosta:* Isto, Rasprave i članci iz nauke i filozofije, Beograd, 1922, str. 253—313.

27 *Milanković, Milutin:* Srpski književni glasnik, Beograd, 1911, T. XXVIII, 5, str. 376—382.

28 *Krstić, Nikola:* R24.

29 *Cicvarić, Krsta:* Mihailo Petrović i matematička fenomenologija. Kritički eseji, Beograd, 1912, str. 134—154.[53]

30 *Milankovitch, Milutin:* Préface, Notice sur les travaux scientifiques de M. M Pétrovitch (1894—1921). Académie royale de Serbie, Paris, 1922, p. V—IX.

31 *Vujić, Vladimir:* Ideal nauke. Srpski književni glasnik, Beograd, 1923, T. VIII (ser.), 7, str. 512—523.

32 *Srpska kraljevska akademija*, Godišnjak za 1941—1944, Beograd, 1945, T. LI, str. 179.

33 *Marković, Dragoljub:* Pedeset godina jednog značajnog dela dr Mihaila Petrovića. Vesnik Društva mat. i fiz. SR Srbije, Beograd, 1961, T. XIII, 1—2, str. 107—117.

34 *Nedeljković, Dušan:* Mihailo Petrović. Politika, Beograd, 1961, 11. jun, str. 18.

35 *Stipanić, Ernest:* Svečana akademija u spomen Mihaila Petrovića. Matematički vesnik, Beograd, 1964, T. 1 (16), str. 68—71.

36 *Stipanić, Ernest:* Mogućnost jedne aktuelizacije — Matelatička fenomenologija Mihaila Petrovića. Politika, Beograd, 1964, 19. jul, str. 18.

37 *Bilimović, Anton:* O jednom opštem fenomenološkom diferencijalnom principu. Srpska akademija nauka, Posebna izdanja, knj. CCCXIV, Odeljenje prirodno-matematičkih nauka, knj. 21, Beograd, 1958, str. VIII+128.

38 *Kurepa, Đuro:* Matematički modeli u prirodnim i društvenim naukama. Dijalektika, Beograd, 1966, T. I, 1, str. 17—29.

39 *Stipanić, Ernest:* R_5.

40 *Stipanić, Ernest:* Engels-ov sud o Descartes-ovoj ulozi u razvitku matematike (s osvrtom na razvitak matematike danas). Dijalektika, Beograd, 1966, T. I, 1, str. 34—39.

41 *Damjanović, Zvonimir:* Elektronski računari i razvoj naučno-istraživačkog metoda. Dijalektika, Beograd, 1966, T. I, 4, str. 5—12.

42 *Jeremić, Dragan:* O filozofiji kod Srba. Savremenik, Beograd, 1967, T. XIII, knj. XXVI, 8—9, str. 174—186.

43 *Trifunović, Dragan:* R_4.

44 *Stipanić, Ernest:* Veliki datumi jugoslovenske matematike. Politika, Beograd, 1968, 7. januar, str. 18.

8 11 *Le noyau d'analogie.*[54] Revue du Mois, Paris, 1919, No. 119, p. 475—486.

Contents. —

Analogies. Noyau d'analogie. Uniformisation du noyau d'analogie. Noyau d'analogie uniformisé en tant que notion mathématique.

9 12 *Mécanismes communs aux phénomènes disparates.*[55] Nouvelle Collection scientifique (Directeur: Emile Borel), Librairie Félix Alcan, Paris, 1921, p. 279; 12—18,7.

Contents. —

Introduction. Particularités communes aux allures des phénomènes. Particularités communes aux mécanismes des phénomènes. Lien entre les particularités d'allure et de mécanisme. Réparation de rôles et la manifestation extérieure de particularités d'alleures dans les phénomènes natureles. Formes spécifiques de mécanismes et de particularités d'allure dans quelques espèces de phénomènes concrets. Analogies phénomènologiques.

45 *Boll, Marcel:* Revue positiviste internationale, Paris, 1921, T. XXVI, p. 136.

46 *Buhl, A.:* L'Enseignement mathématique, Genève, 1921—22, T. XXII, 1—2, p. 91.

47 *Revue mondiale,* Paris, 1921, No. du 15. août.

48 *Isto,* No. du 31. août.

49 *Vlg:* Revue sémestrielle des publications mathématiques, Amsterdame, 1921, T. XXIX.

50 *L'Enseignement mathématique,* Genève, 1921, T. XXI, 5—6.

51 *Isto,* T. XXII, 7. p. 326.[56]

52 *Haag, J.:* Revue générale des Sciences pures et appliquées, Paris. 1922, T. XXXIII, 1, p. 20—21.

53 *Dupréel, E.:* Théorie de la consolidation. Bruxelles, 1922, p. 4.

54 *Vlg:* Revue sémestrielle des publications mathématiques, Amsterdame, 1923, T. XXX.

55 *Erasme de Mayewski:* La science et la civilisation. Libraire Félix Alcan, Paris, [1923], p. 32.

56 *Revue de métaphysique et de morale,* Paris, 1922, No. du jan.-mars, p. 8—9.

57 *Marković, Sima:* Iz nauke i filozofije. Geca Kon, Beograd, 1924, str. VIII+145.

58 *Misao,* Beograd, 1923, T. XI, 2, str. 150—151.

59 *Vujić, Vladilir:* R_1.

60 *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik,* Berlin, 1924, T. XLVIII, s. 885.

61 *Vlg:* Revue sémestrielle des publications mathématiques, Amsterdame, 1924, T. XXXI.
62 *Reymond—Lalande:* Revue générale des Sciences pures et appliquées, Paris, 1928, T. XXXIX, p. 30.
63 *Stipanić, Ernest:* R_3.
64 *Jeremić, Dragan:* R_{42}.
10 13 *Hemija i Matematika.*[57] Spomenica pedesetogodišnjice profesorskog rada Sime M. Lozanića, Beograd, 1922, str. 18—23.
14 *Isto. D. Trifunović:* Iz života i dela Mihaila Petrovića. Mlado pokolenje, Beograd, 1968, str. [92—98] (u štampi).
11 15 *Phénomènologie générale.*[58] Notice sur les travaux scientifiques de M. Michel Pétrovitch (1894—1921). Académie royale de Serbie, Éditions spéciales, T. XLIII, Sciences mathématiques et naturelles, 1.10, Paris, 1922, p. 98—107.
65 *Vujić, Vladimir:* Srpski književni glasnik, Beograd, 1922, T. VI (n. ser.), 5, str. 399—400.
66 *L'Enseignement mathématique,* Genève, 1923, T. XXII, p. 241.
12 16 *Jedna zajednička crta nauke i poezije.* Srpski književni glasnik, Beograd, 1925, T. XVI (n. ser.), 7, str. 482—488.
17 *Isto. D. Trifunović:* Iz života i dela Mihaila Petrovića. Mlado pokolenje, Beograd, 1968, str. 52—59 (u štampi).
67 *Stipanić, Ernest:* R_3.
13 18 *Brojni spektri pojava.*[59] Srpska kraljevska akademija, Glas, knj CXXVII, Prvi razred, knj. 58, Beograd, 1927, str. 45—66. [Saopšteno u Akademiji prirodnih nauka 20. decembra 1926, rezimeom (franc.)].

Sadržaj. —

Spektri prebrojljivih skupova sa proizvoljnim brojem indeksa. Spektri i numerisanje funkcija. Spektri pojava.

68 *Revue sémestrielle des publications mathématiques, Amsterdame,* 1932, T. XXXVI.
69 *Karamata, Jovan:* Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik B. 54, s. 62—63.
70 *Orlov, Konstantin:* Aritmetičke i analitičke primene matematičkih spektara. Beograd, 1935, str. 62 (doktorska teza).
71 *Trifunović, Dragan:* Život i rad Mihaila Petrovića (monografija). Srpska akademija nauka i umetnosti, Posebna izdanja, knj. CCCXLIII Odeljenje prirodno-matematičkih nauka, knj. [52], Beograd, 1968, str. [436—551] (u štampi).
14 19 *Vreme u Alegorijama, metaforama i aforizmima.* Letopis MS, Novi Sad, 1927, G. CI, knj. 313, 1—3, str. 185—192.
72 *Trifunović, Dragan:* R_4.
15 20 *Sur la possibilité d'une mécanique générale.*[60] Les Nouvelles Jougoslaves, Belgrade, 1929, T. I, 17. p. 3.
16 21 *Fenomenološko preslikavanje.* Srpska kraljevska akademija, Posebna izdanja, knj. XCVII, Prirodnjački i matematički spisi, knj. 26, Beograd, 1933, str. VII+236; 16×24. [Saopšteno u Akademiji prirodnih nauka 6. februara 1933].

Sadržaj. —

UVOD.

Preslikavanje fakata.

Preslikavanje uopšte. Opšti pojam preslikavanja. Konvencionalno preslikavanje. Prirodno preslikavanje.

Zajedničke pojedinosti fakata. Elementi i suštine fakata. Zajedničke pojedinosti u suštinama fakata. Primeri zajedničkih pojedinosti u suštinama disparatnih fakata.

Sličnost disparatnih fakata. Sličnost svedena na istovetnost. Ovlašne sličnosti iskazane preslikavanjem pomoću pore đe-

СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

ПОСЕБНА ИЗДАЊА

КЊИГА XCVII

ПРИРОДЊАЧКИ И МАТЕМАТИЧКИ СПИСИ

КЊИГА 26

ФЕНОМЕНОЛОШКО ПРЕСЛИКАВАЊЕ

ОД

МИХ. ПЕТРОВИЋА

2 Издање Задужбине Јелисавете и Милана Јанковића 2

БЕОГРАД

ШТАМПАРИЈА „ПЛАНЕТА" ДОБРАЧИНА 55

1 9 3 3

ЦЕНА 40 ДИН.

Jedna od najpoznatijih knjiga Mihaila Petroviča u oblasti matemat.čke fenomenologije. — Faksimil naslovne strane.

(Snimio ing. S. Radović)

nja, asimilacije, metafora, alegorija i aforizmi. Preslikavanje vremena. Jezgra sličnosti u nauci i poeziji.

Naučne analogije. Naučne analogije uopšte. Primeri naučnih analogija. Matematičke analogije u disparatnim faktima.

Fenomenološko preslikavanje po zajedničkim pojedinostima. Princip preslikavanja po zajedničkim pojedinostima. Preslikavanje analoških grupa u tipove. Fenomenološko preslikavanje toka vremenskih fakata. Fenomenološko preslikavanje mehanizama vremenskih fakata Fenomenološko preslikavanje uloga. Geometrijsko-fenomenološko preslikavanje.

Fenomenološki prototipovi. Bitni i promenljivi sastavci u fenomenolškim tipovima fakata. Fenomenološki prototipovi. Matematičke nianse sastavaka u fenomenološkim tipovima Ograničenost skupa fenomenoloških uloga.

Predviđanje preslikavanjem.

Predviđanje po zajedničkoj slici analoške grupe. Primarni i izvedeni fakti u jezgru sličnosti. Matematika u proširenom smislu. Precizne i ovlašne matematičke pojedinosti. Predviđanje ovlašnih pojedinosti. Predviđanje vremenskog toka fakata po tipu njihovog mehanizma.

Predviđanje po jednoj opštoj zajedničkoj crti u svetu fakata. Ekonomski faktori. Štednja vezana za ekonomske faktore. Ekonomski faktori sa konkretnim značenjem. Empirički ekonomski faktori.

Inversno fenomenološko preslikavanje.

Fenomenološke uloge i matematičke nianse u inversnoj fenomenološkoj slici. Raznolikost faktora sa istom fenomenološkom ulogom. Matematičke nianse u fenomenološkim ulogama. Matematičke nianse u posledicama sudelovanja fenomenoloških uloga.

Primeri fenomenološkog i inversnog preslikavanja u vremenskim faktorima. Raspodele u nekolikim vrstama konkretnih vremenskih fakata. Inversna slika fenomenološke uloge terena.

Mitologija fakata. Mitsko preslikavanje. Mehanistička mitologija. Fenomenološka mitologija. Relativistička mitologija.

22 *Matematika u proširenom smislu. D. Trifunović:* Iz života i dela Mihaila Petrovića, Mlado pokolenje, Beograd, 1968, str. 98—103 (u štampi).

73 *Pejović, Tadija:* Srpski književni glasnik, Beograd, 1933, T. XL (n. ser.), 1, str. 133—135.

74 *KK: Naš veliki matematičar — ribar.* Matematičko-fizički list, Zagreb, 1961/62, T. XII, 1, str. 24—26.

75 *Stipanić, Ernest:* R_{3}.

76 *Ivanović, Branislav:* Matematika za ekonomiste. Beograd, 1966.

77 *Stipanić, Ernest:* R_{36}.

78 *Jeremić, Dragan:* R_{42}.

79 *Jeremić, Dragan:* O filozofiji kod Srba (VIII). Savremenik, Beograd, 1968, T. XIV, knj. 27, 1, str. 58—74.

17 23 *Opšti pojam preslikavanja.* Srpski književni glasnik, Beograd, 1935, T. XLIV (n. ser.), 1, str. 34—47.

18 24 *Matematička analiza i oceanografsko-biološki problemi.* Godišnjak Oceanografskog instituta, Split, 1939—40, sv. II, str. 52—73.

80 *Pejović, Tadija:* Primena matematike u biologiji. Vesnik Društva mat. i fiz. SR Srbije, Beograd, 1954, T. VI, 3—4, str. 199—208.

19 25 *Električne analogije.* Nauka i tehnika, Beograd, 1941, T. I, 1, str. 25—36.

81 *Petrović, Vladimir:* Osnovi elektrotehnike II — Električno i magnetno kolo. Beograd, 1941, str. III+256.

20 26 *Metafore i alegorije*. Srpska književna zadruga, Beograd, 1967, Kolo LX, br. 405, str. 196; 12,6×18,4.
[Priredio, predgovor i belešku o piscu napisao Dragan Trifunović].

Sadržaj. —

Opšti pogled. Primeri metafora i alegorija u upotrebi u običnom životu i književnosti. Zajedničke pojedinosti činjenica. Sličnost svedena na istovetnost. Opšti princip preslikavanja. Preslikavanje u obliku metafora i alegorija. Vreme u metaforama i alegorijama. Metafore i alegorije u poeziji. Mitske metafore i alegorije. Naučno alegorično preslikavanje. Primeri električnih analogija. Primeri raznovrsnih naučnih sličnosti. Naučni značaj metafora i alegorija. Svođenje činjenica na tipove. Tipske uloge. Predviđanje činjenica zaključcima po sličnosti. Naučna predviđanja po jezgru sličnosti. Primeri tipskih uloga i posledice njihove saradnje. Metafore i alegorije kao ljudski izraz spone materijalnog i imponderabilnog sveta.

27 *Metafore i alegorije. D. Trifunović:* Iz života i dela Mihaila Petrovića, Mlado pokolenje, Beograd, 1968, str. 120—129 (u štampi). Odlomak.

82 *Trifunović, Dragan:* Prilog fenolenologiji — Beleške o Mihailu Petroviću, Braničevo, Požarevac, 1968, T. XIV, 1, str. 80—89.

83 *Politika*, Beograd, 1967, 24. decembar, str. 16.

84 *Gavrilović, Zoran:* Metafore i alegorije. Borba, Beograd, 25. februar 1968.

85 *Tijanić, M.:* Jezik ne pripada samo lingvistima. Politika, 21. april 1968.

86 *Hristić, Jovan:* Književnost, XLVI, 6, 567—568.

87 *Pavlović, Milivoje:* Politika, 4. avgust 1968.

88 *Jeremić, Dragan:* Književne novine, XX, 336, str. 3.

BELEŠKE

[1] Npr., Zvonimir Damjanović (R_{41}), Đuro Kurepa (R_{38}) i dr.

[2] *Srpska književna zadruga* objavila je zaostao rukopis Petrovića *Metafore i alegorije*, a *Mlado pokolenje* izdaće ove godine izbor Petrovićevih tekstova.

[3] Dušan Nedeljković: *Etape i perspektiva prirodne filozofije Mihaila Petrovića*, Simpozijum Mihailo Petrović — život i rad, Beograd, 1968. (u štampi).

[4] Oznake O_k, B_i i R_i odnose se na redni broj navedenog dela u bibliografiji (3. odeljak ovog rada).

[5] Dragan Trifunović: *Letopis života i rada akademika Mihaila Petrovića 1868—1943,* Srpska akademija nauka i umetnosti, Posebna izdanja, Odelenje prirodno-matematičkih nauka, Beograd, 1968, str. XVII+623 (u štalpi).

[6] Posle završenog Prirodno-matematičkog odseka Filozofskog fakulteta Velike škole 1889. godine, Petrović nastavlja specijalističko školovanje u Parizu od 1889. do 1894. i za to vreme polaže lisans iz matematičkih nauka (1892), lisans iz fizičkih nauka (1893), kao i doktorat iz matematičkih nauka (1894).

[7] Temat je glasio: *Da se izlože i kritički pretresu različne teorije o volji* (DAS, Sednice Saveta Velike škole u 1889. godini).

[8] O uticaju Thomson-ove mehanističke fenomenologije na Mihaila Petrovića, Sima M. Marković je primetio: »Po W. Thomson-u, koji je bio jedan od najizrazitijih i najdoslednijih pristalica mehaničkog shvatanja prirode, »razumeti jednu pojavu, znači moći konstruisati njen mehanički model«. Profesor M. Petrović je, međutim, sasvim tačno primetio« da bi onda većinu pojava trebalo smatrati kao *nerazumljive,* ako bi se čovek bukvalno držao gornjeg Thomson-ovog aforizma«. Ali je M. Petroviću pošlo za rukom da Thomson-ovim rečima da jednu široku, elastičnu interpretaciju koja mu je poslužila kao baza za jedan niz vrlo interesantnih zaključaka« (R_{57}, str. 81). O ovome videti i Dušana Nedeljkovića u R_{34}.

[9] Zaostavština akademika Mihaila Petrovića, Biblioteka SANU, svežanj br. 32.

[10] Videti npr. G. Sagnac: R_{13}.

[11] U *Association française pour l'avancement des sciences Petrović* je od 1926. godine bio stalni predsednik sekcije za matematiku.

[12] E. Cartan: *Uloga Francuske u razvoju matematike,* Jugoslovensko astronomsko društvo, Beograd, 1941, 2, str. 36 (preveo M. Protić).

[13] Kurziv je naš.

[14] Isto.

[15] Isto.

[16] Isto.

[17] Primer ove analogije potiče od W. Thomson-a, a nalazi se i u radovima Nikole Tesle. U Muzeju Nikole Tesle u Beogradu nalazi se i Teslin aparat koji demonstrira analogiju između kretanja tečnosti i elektriciteta.

[18] Isto kao pod 13.

[19] O_1, str. 2.

[20] Miloš Radojčić, Nauka i priroda, II, 2, Beograd, 1949.

[21] Npr., FdM, Zb1, Revue générale des Sciences pures et appliquées, Revue sénestrielle des publications mathématiques i dr.

[22] Dušan Nedeljković: navedeno delo pod 3.

[23] Dušan Nedeljković: Aperçu de la philosophie contemporaine en Yougoslavie, Beograd, 1934.

[24] Price: Nauka i račun, Centar za dokumentaciju, Pariz, 1959 (fotokopije Univerzitetske biblioteke u Beogradu).

[25] Videti npr. *Sur l'équation différentielle de Riccati et ses applications chimiques* (Praha, 1896), *Sur la décharge des conducteurs à capacité résistance et coefficient de self-induction variables* (CR, 124, Paris, 1897), *O električnim oscilacijama pri ispražnjavanju kondenzatora* (Glas LVI, Beograd, 1898), *Prilozi hemiskoj kinetici* (Glas LVII, Beograd, 1899) itd.

[26] Dragoljub Marković: R_{33}, str. 108.

[27] Videti sledeće radove M. Petrovića iz analognih računskih mašina: *Sur un procédé d'intégration graphique des équations différentielles,* CR, 124, Paris, 1897, 1801—1084; *Hidraulična integracija,* Tehnički list, Beograd, 1898; *Sur l'intégration hydraulique des équations différentielles,* American Journal of Mathematics, Baltimore, 1898, XX, 4, 293—300; *Appareil à liquide pour l'integration graphique de certains types d'équations différentielles,* American Journal of Mathematics, Baltimore, 1899, XXII- 1, 1—12.

[28] O Petrovićevoj analognoj računskoj mašini pisali su: *Hamburger:* FdM, XXVIII, s. 284; *Jacob: Le calcul mécanique,* Paris, 1911, 342—357; *Demolis: Revue générale des Sciences pures et appliquées,* Paris, 1912, XXIII, 3, p. 119; *H de Morih: Les appareils d'intégration,* Paris, 1913, p. 6 et 194—197; *Willers: Mathematische Instrumente,* Berlin, 1943 (ruski prevod iz 1949.); Brix: FdM, XXXI, s. 349; *Price· Petrovitch's Apparatus for integrating Differential Equation of the First Order,* Philosophical Magazine, 49 (1900), 487—490 itd.

[29] M. Petrovitch: *Sur l'équation différentielle de Riccati et ses applications chimiques,* Vestnik Král. češke společnosti nauk, Praha, 1896, XXXIX, p. 1—25. Videti: Revue sémestrielle des publications, mathématiques, Amsterdame, 1897, VI, 213—214, FdM, XXVII, s. 256 i Delo, Beograd, 1897, XIV, str. 182.

[30] O_7, str. 723. Videti: Dj. Kurepa: R_{38}, kao i E. Stipanić: R_3.

[31] Npr., Milutin Milanković.

[32] Milutin Milanković: *Ličnost Mihaila Petrovića,* Nauka i tehnika, Beograd, 1946, II, 6, 461—470; M. Milanković — J. Mihailović: *Mika Alas,* Beograd, 1946, str. 23—24.

[33] P. Boutroux: R_{18}, str. 188.

[34] Isto, str. 189.

[35] E. Stipanić: R_3, str. 121.

[36] *Jedan diferencijalni algoritam i njegove primene,* Srpska kraljevska akademija, Posebna izdanja, knj. CXI, Prirodnjački i matematički spisi, knj. 30, Beograd, 1936, str. V + 235.

[37] Matematički vesnik, Beograd, 1939, br. 5—6, str. 8—11. Udruženje studenata matematike Beogradskog univerziteta (osnovano 1927) posvetilo je ovaj dvobroj Matematičkog vesnika profesoru Mihailu Petroviću povodom sedamdesetogodišnjice života.

[38] Navedeno, str. 10.

[39] Videti npr. Savremenik, Beograd, 1966, 9—10.

[40] Mirko Stojaković: *Govor na petogodišnjici od smrti Mihaila Petrovića*, Vesnik Društva mat. i fiz., T. I, Beograd, 1949.

[41] O_{16}, str. 90.

[42] Mirko Stojaković: navedeno delo.

[43] DAS, Fond Velike škole, 1895, Del. protokol 1736.

[44] U Godišnjaku Akademije Petrović je u 1898. godini objavio sadržaj svojih naučnih radova objavljenih do 1897. godine.

[45] U Svečanoj sali Kapetan-Mišinog zdanja, 9. januara 1900, održan je Svečan skup Srpske kraljevske akademije za proglašenje Mihaila Petrovića za redovnog člana Akademije. Skupu su bili prisutni: predsednik Akademije Sima M. Lozanić, veći broj akademika: Dimitrije Nešić, Jovan Žujović, Ljubomir Klerić, Mihailo Valtrović, Stojan Novaković, Ljubomir Kovačević, Jovan Cvijić i dr., veći broj profesora Velike škole i srednjih škola, kao i velika grupa studenata. U 16 č 10 min Petrović je započeo jednočasovno izlaganje svoje akademijske rasprave *O matematičkoj teoriji aktivnosti uzroka*. Posle izložene besede, predsednik Akademije Sima M. Lozanić izvršio je proglašenje Mihaila Petrovića za redovnog člana Akademije (Godišnjak, T. XIII, str. 160—163).

[46] Donosimo u celosti govor Sime M. Lozanića: »Naš novi drug razvio je u svojoj originalnoj raspravi svoj novi pogled na prirodu pojava uopšte, zamišljajući ih kao proizvod uloga izvesnih faktora, određenoga matematičkog oblika, a svodeći raznovrsne, čak i heterogene pojave pod isto pravilo, dao je svojoj teoriji opšti značaj. I Akademija prirodnih nauka, kojoj je izabrani akademik prikazao ovu raspravu, na njenom skupu od 1. decembra pr. g. smatra: da matematička teorija aktiviteta iznosi odista novo gledište na prirodu pojava. Ovom raspravom ispunio je izabrani akademik pogodbe člana 14 osnovnog zakona Akademijina, i ja ga, po pravilu koje mi daje taj član, proglašujem za pravoga člana Srpske kraljevske akademije i uvodim u sva prava njena«.

[47] Ovo je verovatno prvi prikaz u stranoj naučnoj javnosti o Petrovićevoj fenomenologiji. Donosimo u celosti Fehr-ov tekst: »Petrović polazi od posmatranja događaja različite prirode koji poseduju često upadljivu sličnost među elementima i u matematičkim zakonima kojima su oni podvrgnuti. Naročito je istraživan slučaj eksponencijalnog zakona $y=y_0 exp(kx)$ sa konstrukcijom shema elemenata koji su zajednički pripadajućim događajima. — Putem opštih posmatranja pisac dolazi do sledećeg rezultata: »Ovakvim grupisanjem događaja po matematičkim sličnostima njihovih zakona i istraživanjem shema dobivenih grupa, verovatno će biti moguće osnovati novu granu filozofije koja će se razvijati i u kojoj će biti pokazani opšti odnosi između fenomena i njihovih posledica«.

[48] Pri sastavljanju svoje bibliografije za Notice (vidi O_{11}) Petrović je načinio grešku i stavio 1914. za godinu izdanja. Ovo srećemo i kod E. Stipanića u R_3, str. 118 i 128.

[49] Pre ove rasprave Petrović je na skupu APN od 7. juna 1904. prikazao studiju teorije aktivnosti uzroka pod nazivom *Opšte jednačine za matematičku teoriju akcije uzroka*. Verovatno da lično nije bio zadovoljan ovom raspravom i 11. oktobra podnosi Akademiji pismo u kome traži da povuče svoju raspravu od 7. juna i na njeno mesto podnosi *Pokušaj jedne opšte mehanike uzroka* (Godišnjak XVIII, Sednice APN).

[50] Prikaz u celosti glasi: »Razlog ovim analogijama nalazi se u identičnosti uloga koje igraju izvesni elementi u analognim fenomenima. Ako se stigne do toga, da se izvuku uloge onoga što ih vezuje za ovakav ili onakav specijalni fenomen, tada će biti moguće prezentirati ih pod opštom formom koja je dosta jednostavna i koja shematizira sve fenomene koje obuhvata jedna i ista analogija. — To je pitanje kome je prišao Mihailo Petrović, pitanje koje je u najvišem stepenu interesantno, pošto bi njegovo potpuno razvijeno rešenje konačno delovalo do uopštene mehanike prirodnih pojava«.

[51] Jedna od najobilnije napisanih knjiga naše nauke. Pri sastavljanju ovog dela Petrović je koristio 56 raznih monografija, konsultovao je 27 raznih časopisa i naveo 9 svojih rasprava. Od domaćih pisaca Petrović je naveo radove Koste Stojanovića, Milutina Milankovića i Đorđa Stanojevića.

[52] Jedan od najobimnijih prikaza *Elemenata* i opšte Petrovićeve fenomenologije (61 strana). I pored toga, što prikaz ima karakter »propovedi« mehanicizmu, Stojanović je pružio smisao Petrovićevih htenja u nauci. Inte-

resantno je primetiti da se ovaj Petrovićev školski drug i docnije kolega na Univerzitetu, kao istaknuti mehanicista nije više obraćao Petrovićevim tekstovima iako je za to imao prilike: slučaj sa Petrovićevim knjigama O_8 i O_9 kao i svojom fenomenološkom studijom *Osnovi teorije ekonomskih vrednosti* (Beograd, 1910, str. 193).

[53] Kako bibliografija radova obuhvata sve objavljeno o fenomenologiji, to je registrovan vrlo slobodan, nestručan i uvredljiv prikaz Krste Cicvarića.

[54] Na kraju ovog rada Petrović je zapisao: »L'idée exposée dans cet article est développée dans l'auvrage de l'auteur *Mécanismes communs aux phénomènes disparates* qui paraitra dans la *Nouvelle Encyclopédie scientifique* (Félix Alcam)«.

[55] Petrović je ovu knjigu posvetio Đorđu Karađorđeviću sledećim odštampanim tekstom: »Au Prince Georges de Serbie — En souvenir de nos entretiens sur les sujets, traités dans ce livre. Et en témoignage d'une amitié inaltérable et dévourée«.

[56] Doslovno stoji: »M. Petrovićeva knjiga u ediciji Nouvelle Collection scientifique predstavlja jedan interesantan pokušaj studije analogija koju pružaju mehanizmi zajednički disparatnim fenomenima. Fenomenologija koju ima autor u mislima ide za tim, da poveže međusobno i da dovede na istu osnovu jedan veliki broj eksplikacija i teorija koje izgledaju, najpre, da nemaju nikakve veze«.

[57] Petrovićev razvoj u nauci u mnogome je u vezi sa ličnošću akademika Sime M. Lozanića. Lozanićevu hemiju upoznaje još u gimnaziji; na Velikoj školi bio je zapažen Lozanićev student; kod predloga Petrovića za dopisnog i redovnog člana SKA Lozanić je dao svoj potpis; kao predsednik SKA (1900), Lozanić je proglasio Petrovića za redovnog člana; pri pretvaranju Velike škole u Univerzitet, Lozanić je bio prvi Rektor Beogradskog univerziteta, itd. Ovim radom učestvuje u jubileju znamenitog profesora. Spomenicu su priredili prijatelji i poštovaoci prof. Sime M. Lozanića. Pored Petrovića, čiji je članak (O_{10}) prvi po redu, u Spomenici su učestvovali I. Đaja, N. Saltikov, V. Varicak. M. Milanković, A. Bilimović, T. Đorđević i dr.

[58] Petrovićev retrospektivan prikaz rezultata u fenomenologiji od 1894. do 1921. godine. Mnogi autori navode Notice ... kao delo akademika Milutina Milankovića (npr. T. Pejović, Enc. Jugoslavije, 6, str. 486) što je potpuno pogrešno. U periodu pripremanja naučnog opusa Petrovića za potrebe kandidovanja Petrovića za člana Francuske akademije nauka, M. Milanković je na sednici APN (17. 10. 1921) predložio da se objavi Petrovićev Notice ... APN je ovo usvojila, a M. Milanković je za ovu knjigu napisao SAMO predgovor, pri čemu je bio obavezan da svoj predgovor prethodno izloži na sednici APM (30. 1. 1922). Petrović je sam sastavio Notice ..., pri čemu je o sebi pisao u trećem licu. Bibliografiju u Notice ... Petrović je takođe sam izradio.

[59] Matematički spektri u Petrovićevom opusu, koliko god da čine ingeniozno delo sa dubokim smislom za određenu korespondenciju između skupa decimalnih brojeva i skupa funkcija (vrsta funkcionala), toliko u izvesnom smislu pružaju i razočaranja pa donekle i vrstu »otrgnute praznine« u Petrovićevom stvaranju.

Nekom vrstom »igre« sa ciframa dekadnog sistema, u želji da stvori određeno preslikavanje između brojeva i reči (kriptografija) za potrebe diplomatske pošte, Petrović 1917. istim saznanjem povezuje brojeve dekadnog sistema sa osobinama funkcija. Već 1919. sa poznatim predgovorom Borel-a objavljuje posebnu knjigu o spektrima kod Gautheur-Villars-a. Na kongresima istupa sa raspravama iz spektara, a 1928. drži i jednosemestralni kurs na Sorboni. Četrdesetih godina, Petrović se sa spektrima »seli« na područje južnoameričke periodike; 1933. ima i jednog doktora nauka sa tezom iz spekatara, itd. Međutim ovakva aktivnost nije urodila plodom u nauci. Petrovićeve rezultate iz spekatara niko ne koristi i ne usvaja.

Danas, posle pedeset godina od Petrovićevog pronalaska, spektrima se bavi samo jedan isti matematičar sa svojim asistentom. Želja da spektri dobiju novi smisao u ovom vremenu kompjuterizacije (akcenat na skraćenju vremena u algoritmu) je neodrživa stvar kako u digitalnoj, tako i u analognoj tehnici. Mašine III generacije sa najsavremenijom tehnologijom materijala u memoriji, opremljene optimalnim jezikom (kôd), ne dozvoljavaju, a nije im ni potrebna primena spektara.

[60] Nepotpun bibliografski podatak (Leksikografski zavod — Zagreb).

DRAGAN TRIFOUNOVITCH

CONTRIBUTION À LA PHÉNOMÉNOLOGIE MATHÉMATIQUE

RÉSUMÉ

Pendant ces dernières années s'est ressenti une vive intensité dans l'interêt pour les textes sur la phénoménologie de célèbre savant Mihailo N. Petrovitch (1868—1943). Les résultats de Petrovitch sont importants en cet instant de la science moderne, surtout pour la cybernétique et la philosophie naturelle.

L'oeuvre est le résultat des recherches de l'auteur sur la vie et sur l'oeuvre de Petrovitch. L'aperçu possède tous les éléments de la factographie, avec le commentaire, avec le but principal: ramasser le matériel pour les besoins de l'étude successive de la phénoménologie mathématique.

On a exposé 15 particularités de la phénoménologie de Petrovitch, avec une complète bibliographie des travaux.

Les particularités comprennent le suivant: apparition de la phénoménologie, classificiation, mesure bibliographique, rythme de la création, répétition des résultats, structures mathématiques, analogies quantitatives, axiomatique et la méthode de présentation des résultats, présence continuelle, cybernétique, sur la phénoménologie chez nous, public étranger scientifique, succession et l'Ecole des mathématiques de Belgrade.

Caractéristique de chaque particularité est mise en vue et l'allusion de son existence qui doit être confirmée par une étude plus large.

Les particularités, par ses continus, ouvrent la phénoménologie de Mihailo Petrovitch aux résultats plus nouveaux. Ça se rapporte surtout à l'anticipation de la cybernétique, aux modelages, aux problèmes de simulacre, et aussi à l'analyse des commentaires du public étranger scientifique qu'on n'a pas fait jusqu'à présent.

La bibliographie des travaux contient 20 unités et 85 unités de commentaires, de notes, de rapports, d'usages, etc.

DUŠAN ADAMOVIĆ

MODERNE MATEMATIČKE DISCIPLINE, POSEBNO TEORIJA SKUPOVA, U RADOVIMA MIHAILA PETROVIĆA

Postoji i ima šta više izvesnu raširenost, među matematičarima i ostalima, u različitim stepenima i varijantama, mišljenje da matematički rad Mihaila Petrovića, njegov stil i metode pripadaju isključivo tzv. klasičnoj (ustvari, devetnaestovekovnoj) matematici. Ovome se pokatkad pridaje pozitivan, a češće suprotan smisao. Uprkos izvesnoj, delimičnoj osnovanosti — ovo mišljenje u suštini je pogrešno, nesaglasno sa nekim glavnim, najmarkantnijim i najprisnijim crtama Petrovićevog duha i stvaranja. Jedan od uzroka javljanja i prilične tvrdokornosti ovakvog shvatanja leži u nedovoljnom poznavanju celine Petrovićevog opusa, dobrim delom uslovljenom nepostojanjem, bilo u kom vidu, izdanja njegovih celokupnih ili sabranih dela. Ta praznina, kao što je na ovom Simpozijumu već istaknuto, i inače je umnogome odgovorna za činjenicu da Petrovićevo matematičko i ostalo duhovno nasleđe sve do danas nije ni približno onoliko proučeno i adekvatno procenjeno, pa usled toga u našoj nauci i kulturi nije ni približno onoliko živo i inspirativno koliko bi moglo i trebalo da bude. Drugi uzrok pomenutog mišljenja sastojao bi se, kako se autoru ovih redova čini, u tome što se obeležja moderne matematike i prisustvo modernih matematičkih disciplina u Petrovićevom delu često traže i vide samo u određenim detaljima, u eksplicitnim i bukvalnim vidovima, a ne, što bi u ovom slučaju bilo mnogo adekvatnije i pravednije, i u implicitnim, ali suštinskim momentima, u celini naučne orijentacije, u strukturi mišljenja, u glavnim, pokretačkim idejama i inspiracijama, u trajnim preokupacijama Petrovićevog stvaralaštva. Međutim, sa pravom istinom ne bi bilo saglasno ni tvrđenje da moderna matematika — naravno ona iz perioda pokrivenog Petrovićevim životom, tačnije, njegovom punom naučnom aktivnošću — nije u njegovim radovima zastupljena i direktno.

Ovo saopštenje nema ambiciju da iole iscrpno obradi odgovarajuću temu. Njegov cilj je samo da na nju ukaže i ujedno bar donekle obrazloži napred formulisane teze, navođenjem i analizom nekoliko mesta iz Petrovićevih radova i nekim opštim primedbama koje se na to mogu nadovezati.

Godine 1927, u Glasu Srpske akademije nauka, izašao je Petrovićev članak »Brojni spektri pojava«. Objavljen između dva opsežna i celovita dela o matematičkim spektrima »Les spectres numériques« (1919) u »Leçons sur les spectres mathématiques« (1928), ovaj rad bavi se onim što bi se moglo smatrati osnovnom idejom teorije spektara. U njemu autor, ne upuštajući se u razradu algoritama i specifičnih primena ove teorije, u zamenu za to podrobnije izlaže njenu principijelnu, skupovno-teoretsku podlogu i prelazi potom, preko razmatranja u vezi sa Baire-ovom klasifikacijom funkcija i drugim rezultatima o analitičkoj reprezentaciji, u širem smislu, realnih i kompleksnih funkcija, na izvlačenje dalekosežnih opštih, filozofskih zaključaka o principijelnoj mogućnosti, u granicama izvesnih pretpostavki, prikazivanja, određivanja svakog — i najkompleksnijeg — bića ili procesa, iz prirode ili sveta matematičkih konstrukcija, jednim jedinim brojem iz intervala (0, 1). Na kraju autor ukazuje na dugačak put, na sve stepene koje je ne samo matematika, nego i čitava prirodna nauka, morala u milenijumskom razvitku preći da bi se stiglo do tog preciznog saznanja, dovodeći u vezu i ujedno suočavajući ovo saznanje sa davnim idejama antičkih mislilaca o »broju kao suštini stvari«:

»Za Pitagorino se ime naročito vezuje težnja za izražavanjem stvari i fakata brojevima i jedna njegova famozna formula glasi »stvari (bića) su brojevi«. Dok je Platon stavljao brojeve, kao atribute, pored stvari koje se mogu čulno opažati, Pitagorejci su tvrdili da su brojevi same stvari. Uzajamnost između fakata i brojnih spektara daje pravi i tačan smisao takvim neodređenim, mističkim refleksijama. Niti stvari moraju biti brojevi, niti brojevi biti atributi stvari, pa da ipak važi tvrđenje da između fakata i brojeva postoji uzajamnost takve vrste, da se svet fakata može na jedan potpuno utvrđen način ilustrovati svetom brojeva«.

Završni pasus ovog članka karakterističan je za njegov opšti ton i smisao.

». . . Sve je to, međutim, bilo potpuno skriveno tamom u vreme grčkih filozofa. Njihove refleksije o uzajamnosti između fakata i brojeva, izražene u stavovima toliko puta ponavljanim u toku vekova, mogle su se samo svoditi na filozofske vizije i generalnosti. Platon je, ostajući u generalnostima, mogao tvrditi da »brojevi upravljaju svetom«, ali to je u njegovo vreme bilo nemoguće konkretno precizirati i dati mu naučni smisao. U to vreme bilo bi neshvatljivo tvrđenje da svakoj od pojava, što pripadaju jednoj klasi, odgovara jedan tačno određen decimalni broj što se nalazi između 0 i 1, ili, ako se hoće, jedna tačno određena nepomična tačka u kvadratu čije su strane jednake jedinici, i to tako da se posmatranjem tog broja, ili te nepomične tačke, mogu saznati sve pojedinosti pojave. Za takvu jednu tačku vezane su, na primer, sve pojedinosti kretanja jednog materijalnog sistema, na primer kretanje n nebeskih tela koja se među sobom privlače po Newton-ovom zakonu. Menjanjem konstanata problema (masa, početnih položaja i drugih) pomera se u kvadratu i ta tačka, ili se menja odgovarajući decimalni broj, ali kad su te konstante utvrđene, tj. kad se posmatra jedan određen konkretan slučaj, tačka ostaje nepomična i decimalni broj nepromenljiv, pa ipak oni u sebi sadrže sve što treba za večito predviđanje promena u kojima se pojava sastoji. Međutim, za razumevanje toga, danas elementarnog i potpuno shvatljivog fakta, mora se u mislima preći sva dosadašnja evolucija matematičke analize i prirodne filozofije, na čijim je rezultatima takvo tvrđenje osnovano. I tek tada je mogućno shvatiti tačan, naučni smisao filozofske vizije velikih grčkih matematičara i filozofa u pogledu uzajamnosti između fakata i brojeva.«

Ove reči, kao i čitav članak, pokazuju ne samo dobro, suštinsko poznavanje i razumevanje nekih bitnih rezultata Cantorove teorije skupova i kardinalnih brojeva, nego i izvesnu duboku impresioniranost njima, neku vrstu njima inspirisanog matematičkog i filozofskog entuzijazma.

Inače, ovde je, sumarno govoreći, reč o činjenici da su matematički objekti i sistemi prividno daleko većeg ekstenziteta i unutrašnje raznovrsnosti, kad se shvate kao skupovi, u pogledu kardinalnog broja jednaki, pa time u određenom smislu ekvivalentni, izvesnim, ponovo bar prividno, jednostavnijim, preglednijim, običnijim objektima i sistemima, kao što su konačni ili beskonačni skupovi celih brojeva, pojedinačni realni brojevi (u decimalnoj reprezentaciji) ili prebrojivi skupovi i skupovi moći kontinuuma realnih brojeva, do intervala (0,1) kao najopsežnijeg od tih entiteta. U članku se prvo izlažu sve etape redukcije, u tom smislu, skupa svih realnih ili kompleksnih nizova, sa bilo kojim konačnim brojem indeksa, ili jednog dela tog skupa, na interval (0,1), ili na jedan njegov deo. Po sredi su, naime, rezultati teorije kardinalnih brojeva koji se kratko mogu izraziti jednakostima

$$\aleph_0 = \aleph_0^m \ (m \in \mathrm{N}), \ \overline{\overline{R}} = \overline{\overline{(0,1)}} = c, \ c^{\aleph_0} = c = \overline{\overline{(0,1)}}\,.$$

Iz ovoga i iz konstatacije da su, na osnovu Baire-ovih i drugih rezultata, za matematičku analizu u pravom smislu i za njene primene od interesa samo tzv. Baire-ove realne i kompleksne funkcije i da se svaka od njih jednoznačno određuje višestrukim nizom realnih brojeva, izvodi se zaključak o postojanju biunivoke korespondencije između skupa svih takvih funkcija i dela intervala (0,1). Najzad, ukazivanjem na činjenicu da se bilo koji određeni prirodni proces ili kompleks procesa, može prikazati — u bitnom — jednom funkcijom pomenute vrste ili najviše prebrojivim skupom takvih funkcija (ovde interveniše i Petrovićeva fenomenološka ideja analoškog jezgra), dolazi se do već navedenih krajnjih konsekvenci članka.

Redukcija koja se u članku izlaže, kao što smo već rekli, osnovna je ideja, bar sa izvesnog stanovišta, Petrovićeve teorije matematičkih spektara. Mora se, međutim, konstatovati da dalji razvoj ove teorije do danas nije imao onaj zamah ni doneo one rezultate koje je Petrović, bar u početku, po svoj prilici očekivao. Ovo se može objašnjavati različitim, pa i spoljašnjim i slučajnim okolnostima. Biće ipak da je jedan od glavnih razloga ono što je E. Borel, u predgovoru prvoj Petrovićevoj knjizi o spektrima, 1919. godine primetio. Reč je, naime, o velikim teškoćama sa kojima se mora sukobiti nastojanje da se — posle početnog, teorijski ispravnog, uviđanja principijelne mogućnosti svođenja, na osnovu pomenutih ekvivalencija u pogledu kardinalnosti, računa i algoritama sa raznim, takoreći i najkompleksnijim matematičkim objektima na račune i algoritme sa realnim brojevima — i efektivno izgrade takvi postupci ove redukcije koji bi imali značajniji stepen opštosti i kojima bi se, u dovoljno širokoj klasi slučajeva, postizala veća efikasnost nego drugim metodama, koji, prema Borel-ovim rečima iz pomenutog predgovora, ne bi bili samo »le plus souvent, une complication inutile«. Borel, s druge strane, naglašava da bi stvarni uspeh ovakve redukcije bio dragocen. Po našem mišljenju, ima osnove za postavljanje pitanja da li je on u većoj meri uopšte moguć. Teškoće su, prema Borel-u, u vezi sa »samom suštinom našeg duha, sa njegovom nesposobnošću da jasno shvati beskonačnost«. Sem toga, može se izneti jedna opšta primedba, ne toliko samoj Petrovićevoj ideji o spektrima, koliko njegovoj nadi da će se, skoro isključivo na bazi te jedne ideje, izgraditi efikasna i takoreći univerzalna metoda rešavanja analitičkih problema. Ona bi se sastojala u ovome: principijelna osnova ideje o spektrima i spektralnoj metodi, tačnije o njihovom univerzalnom zahvatu, predstavlja samo jedan fragment, doduše značajan, teorije kardinalnih brojeva. Tu su, dakle, već u polaznoj ideji i metodološkoj orijentaciji ispuštene, odnosno bitno zanemarene, druge važne i fundamentalne komponente matematičkih struktura (algebarske i topološke strukture, njihove kombinacije i slično), čime je, možda, ispuštena prava mogućnost ne samo za realizaciju napred pomenute ambicije, nego i za postizanje skromnijeg cilja izgradnje jedne matematičke teorije, discipline u pravom smislu. Poznato je da matematičke strukture, ekvivalentne, tj. identične u pogledu kardinalnosti, mogu u drugom pogledu biti duboko, nepremostivo različite. Jasno je da je redukcija jedne strukture na drugu, kao i postupaka sa jednom na postupke sa drugom — u takvom slučaju bez šireg oslonca u strukturalnom paralelizmu i vezana samo za tanku, često iluzornu nit korespondencije jedan - jedan između elemenata — mada teorijski u izvesnom smislu moguća, po pravilu ili praktično sasvim neostvarljiva, ili veoma neadekvatna i necelishodna, »une complication inutile«.

Ovo je ujedno i opšta primedba koja bi se, uz priznavanje značaja uloženog truda i pokazane ingenioznosti, kao i izvesnih dosadašnjih rezultata, mogla uputiti nastavljačima rada Mihaila Petrovića na teoriji spektara. Nju zapravo treba shvatiti kao konstruktivnu sugestiju da se, u daljoj izgradnji, ova disciplina suočava i dovodi u vezu sa već uveliko sazrelim i iskristalisanim, provereno efikasnim tokovima sličnih nastojanja u savremenoj matematici i da joj se, pre svega, da bitno šira, kompletnija i eksplicitnija strukturalno - teorijska osnova. Ovaj posao neće biti lak, ali u svakom slučaju manja je opasnost da, usled proširenja novim elementima i aspektima, matematički spektri izgube svoju individualnost, nego opasnost da se oni, izolovani od svih tih širokih i plodnih tokova, definitivno svedu na usku matematičku veštinu, na ne naročito bogatu zbirku pojedinačnih rezultata i kurioziteta. Autentična, unutrašnja potencijalna vrednost specifične Petrovićeve koncepcije spektara i spektralne metode mogla bi, ustvari, u adekvatnoj kombinaciji sa drugim postignućima samo da dobije.

No, bez obzira na dosadašnju i buduću faktičku sudbinu discipline zasnovane na ovoj zamisli Mihaila Petrovića, treba istaći da ta zamisao u svakom slučaju zadržava, u osnovi, vrednost anticipacije i analogona dva značajna metodološka principa široko i presudno primenjivana u matematici perioda koji približno počinje u poslednjoj deceniji Petrovićevog života. Prvi od njih je linearizacija podataka (elemenata) jednog problema prilikom njegove obrade od strane računskih mašina, a drugi tzv. postupak Gödel-izacije, kojim se svi simboli, formule, teoreme i dokazi jedne formalizovane matematičke teorije izražavaju pomoću pogodno izabranih prirodnih brojeva. Ovaj drugi postupak primenjen je u dokazu Gödel-ovih i drugih teorema od esencijalne važnosti za savremene poglede na zasnivanje i suštinu matematike.

Isti ovaj smisao anticipacije, nagoveštavanja, i to ne samo pojedinih rezultata i disciplina, nego pre svega opšte orijentacije, opšteg duha i stila čitave savremene, pa i buduće matematike, šta više i jedne od savremene matematike još mnogo šire duhovne tendencije moderne epohe ka slobodnoj, spoljašnjim, predmetnim okvirima nesputanoj kombinatorici i sintezi svih oblasti iskustva i stvaranja pomoću apstraktnih, formalnih strukturalnih šema, a koja danas preliva sve domene, počev od matematike i filozofije, pa preko drugih nauka i operativnih tehnika do poezije i umetnosti, — ima i druga glavna Petrovićeva originalna kreacija u matematičko-filozofskoj sferi — njegova matematička fenomenologija. Napomenuto je već u prethodnom izlaganju da, pored skupovnosti i kardinalnosti, ostale komponente apstraktnih matematičkih struktura, posebno algebarske i topološke strukture, ne ulaze dovoljno, u eksplicitnoj i specifičnoj formi, u vidokrug Petrovićevih, inače moderno inspirisanih, generalnih metodoloških matematičkih koncepcija. Može se, međutim, reći da Petroviću izvesno, čak i dosta dobro, poznavanje principa ovih oblasti nije nedostajalo, recimo na osnovu pojedinih mesta iz »Fenomenološkog preslikavanja« (na primer, na 128. strani). S druge strane, ovaj nedostatak umnogome je kompenzovan pomenutim opštim smislom, kako filozofskim, tako i matematičkim, osnovnih ideja Petrovićeve fenomenologije i njihovih konsekvenci. Pored brojnih drugih momenata i mesta iz odgovarajućih Petrovićevih dela koja se pod ovo mogu podvesti, istaknimo pre svega da je u njima, naročito u »Fenomenološkom preslikavanju«, jasno i nedvosmisleno formulisana sasvim moderna koncepcija matematike kao najšireg, najuniverzalnijeg, najslobodnijeg bavljenja apstraktnim strukturama, uz jedine obaveze logičke konsekventnosti i izvesne racionalne organizovanosti — daleko preko granica »nauke o količinskim i prostornim odnosima«. Navodim sledeće karakteristično mesto:

»... Moderna se matematika sve više razvija baš u pravcu i smislu toga da, pored broja, veličine i poretka, obuhvati i druge apstraktne odlike u svetu fakata, u kojima ti pojmovi ne moraju igrati kakvu naročitu ulogu. Takve težnje i takvi pravci razvijanja daju povod i opravdanost naslućivanju da će se Matematika budućnosti rasprostrti na sve što ima gore navedenu odliku, tj. *mogućnost potpunog apstrahovanja od konkretnih nosilaca i sadržinu koja je, tako apstrahovana do krajnjih granica mogućnosti, ipak pristupačna pozitivnim logičkim dedukcijma.** Matematika brojeva, veličina i poretka bila bi tada samo jedna prostrana oblast tako proširene Matematike«.

Ova opšta vizija »Proširene matematike« (što je jedan od podnaslova »Fenomenološkog preslikavanja«) sadrži i viziju takvih novih disciplina neočekivanih teorijskih i praktičnih sinteza najudaljenijih,

* Petrovićev kurziv.

najdisparatnijih fenomena, mimo konvencionalnih podela naučnih domena i nadležnosti — kakve danas nose nazive kibernetike, teorije modela itd. i njihove zadivljujuće, spektakularne efikasnosti, a takođe i Petrovićevo čvrsto uverenje da uspon u pravcu apstrakcije i emancipacija od vezanosti za konkretne sadržaje ne samo da ne dovode do gubljenja kontakta između matematike i realnosti, nego baš uvećavaju područje i prodornost primena matematike.

Što se tiče čisto filozofske, principijelne strane matematičke fenomenologije, pada u oči frapantan paralelizam, ako ne identičnost, između njenih osnovnih koncepcija i preokupacija i najsavremenije, besumnje veoma značajne, filozofske škole strukturalizma (Lévy-Stross i ostali), između »analoškog jezgra« s jedne i »strukture« s druge strane. Više je nego upadljivo odlučno insistiranje i kod Petrovića i kod strukturalista na verovatnom postojanju ne samo konačnog, nego i ne suviše velikog broja »fenomenoloških reduktivnih elemenata«, odnosno »osnovnih struktura«. Interesantno bi bilo bliže poređenje argumentacija za ovo tvrđenje u jednom i u drugom slučaju.

Treba podsetiti da ovaj duh vizionarskog elana i kombinatorne smelosti ne prožima samo filozofsko-matematičke i filozofske radove Mihaila Petrovića, nego je prisutan u čitavoj njegovoj matematičkoj aktivnosti. Njime se na prvom mestu, naime obiljem ideja i nestrpljivom stvaralačkom hitrinom, mnogo pre nego nekom nesolidnošću, mogu objasniti mestimične Petrovićeve nemarnosti, nekorektnosti i greške.

Pomenimo da je još jedna značajna oblast savremene nauke, teorija relativnosti, koja skoro isto toliko pripada modernoj matematici koliko i modernoj teorijskoj fizici, bila predmet ne samo vrlo solidnog Petrovićevog poznavanja, nego i njegovog trajnog interesovanja. To pokazuju ne samo njegovi pojedini radovi iz ove oblasti, kao na primer članak »Fizičke konstante u teoriji relativiteta« (1927), koji je postavljenim problemom izazvao žive naučne diskusije na međunarodnom kongresu na kome je bio saopšten, nego i završno poglavlje Petrovićevog »Fenomenološkog preslikavanja«, u kome on upravo opštoj teoriji relativnosti, posle jednog izvanredno zaokrugljenog i plastičnog izlaganja njene suštine, daje počasno mesto vrha svoje skale takozvanih »mitologija fakata«, čak iznad svoje Fenomenologije, na ovom mestu nazvane »fenomenološka mitologija«.

Videli smo da je moderna matematika u mnogim svojim vidovima široko i, što je još važnije, bitno prisutna u stvaralaštvu i interesovanjima Mihaila Petrovića, ekplicitno na nekim mestima, pokatkad preko svojih određenih rezultata u prisnoj vezi sa genezom nekih

Petrovićevih najoriginalnijih ideja, kao što je slučaj sa teorijom skupova i njenom vezom sa matematičkim spektrima, ili sa teorijom relativnosti, — ali najčešće kao opšti podtekst, podloga, unutrašnja komponenta skoro svih Petrovićevih matematičkih, pa i ostalih intelektualnih aktivnosti, na prvom mestu njegovih poletnih, nadahnutih anticipacija budućnosti, budućih mogućnosti matematike i nauke uopšte, koje su danas uveliko u ostvarivanju. Možda bi se moglo reći, ponavljajući samog Petrovića, uz jedno značajno *mutatis mutandis* pozitivnog smisla, da se to umnogome svodilo »na filozofske vizije i generalnosti«. Ali treba odmah dodati da su to vizije krajnjih, čudesnih mogućnosti realnih i bitnih tokova razvitka čiji smo svi mi danas svedoci.

LITERATURA

1. Michel Petrović: *Les spectres numériques*, Paris, 1919.
2. Michel Petrović: *Leçons sur les spectres mathématiques*, Paris, 1928.
3. Mihailo Petrović: *Brojni spektri pojava*, Glas SAN, CXXVII, 1927, str. 47—66.
4. Mihailo Petrović: *Elementi matematičke fenomenologije*, izdanje Srpske kraljevske akademije nauka, Beograd, 1911.
5. Michel Petrović: *Mécanismes communs aux phénomènes disparates*, Nouvelle Collection scientifique, Paris, 1921.
6. Mihailo Petrović: *Fenomenološko preslikavanje*, Posebna izdanja Srpske kraljevske akademije nauka, knjiga XCVII, Beograd, 1933.
7. Mihailo Petrović: *Fizičke konstante u Teoriji relativnosti*, Glas SAN, CXXVII, 1927, str. 1—16.
8. Dragoljub Marković: *Pedeset godina jednog značajnog dela dr Mihaila Petrovića*, Beograd, Vesnik Društva matematičara i fizičara, XIII (1961), str. 107—120.
9. Claude Levy-Stross: *Divlja misao*, Beograd 1966.

DUŠAN ADAMOVIĆ

DISCIPLINES MATHÉMATIQUES MODERNES, EN PARTICULIER LA THEORIE DES ENSEMBLES, DANS LES TRAVAUX DE MICHEL PETROVIĆ

RÉSUMÉ

L'auteur s'oppose à l'opinion assez répandue, selon laquelle l'activité mathématique de Michel Petrović appartiendrait toute entière aux mathématiques classiques, c'est-à-dire aux mathématiques du dix-neuvième siécle. Il trouve que, tout au contraire, la création et la pensée mathématique et philosophique de Petrović, prises dans leur ensemble, sont profondément et intimement pénetrées de l'esprit et des tendences des mathématiques modernes, bien que souvent ce fait ne se présente pas d'une manière tout-à-fait explicite. Les anticipations du développement contemporain et futur des mathématiques et des autres sciences, contenues dans les oeuvres de Petrović, surtout dans celles consacrées aux *spectres mathématiques* et à la *phénomenologie mathématique* (noms donées par M. Petrović lui-même à deux disciplines mathématiques nouvelles, dont il proposa et initia l'édification); puis le rôle essentiel de quelques résultats et tendences des mathématiques et de la physique théorique modernes (théorie des ensembles, relativité) dans la génèse des idées et inventions philosophico-mathématiques les plus importantes et les plus originales de Petrović; enfin, une analogie intéressante entre les notions et les thèses de la *phénomenologie mathématique* et celles de l'école philosophique contemporaine du *structuralisme* — sont particulièrement soulignées.

M. PAVLOVIĆ

FORMULISANJE DVA PRINCIPA STILISTIKE NA OSNOVU STAVOVA MATEMATIČKE FENOMENOLOGIJE

U dva stava shvatanja matematičke fenomenologije Mih. Petrovića[1] našao sam dovoljno oslonca da 1960. g., u studiji *Problemi stila*[2], postavim na precizan način dva principa stilistike, princip adekvatnosti i princip poliritmičnosti. Prvi se odnosi na stvaralački proces utiska, a drugi na specifičnosti izražaja sa odstupanjem od uravnomerene izražajne ritmike.

Princip adekvatnosti (»odgovarajući«; »identičan«) obično je shvatan uopšteno, u smislu da umetničko delo treba da odgovara obrascu, da je »adekvatno uzoru«, bilo da se tiče slike — portreta ili pejzaža, likova ili situacija u književnim delima. Kod neformalnog, apstraktnog stvaralaštva problem se postavljao u odnosu na unutrašnji podstrek, zasnivan bilo na slikama, upravo na tragovima slika sećanja, bilo na dinamičnim efektima mašte. Široki obuhvat pojma »odgovara« dopušta i shvaćanje o identičnosti.

Međutim, analiza primera iz književnosti, a i iz slikarstva, pokazuje često neadekvatnost u smislu neidentiteta, mada je očigledno da postoji korekcija uzora i tvoračkog efekta.

Takvih kolebanja o izražajnoj vrednosti imamo i u običnom govoru, u formulama *Kako da Vam to kažem?; Kako bih mogao to reći, pa da poverujete?* — U jednom članku, sa izrazitom introspekcijom, Stanislav Vinaver govori o sukobu pesnika, tj. pesnikovog tvoraštva sa materijom. A Jovan Jovanović-Zmaj u iskrenoj neposrednosti, u bolnom nezadovoljstvu efektom izražajne forme kaže za svoja osećanja, u antitezi:

Dok su *u meni*, pesme su *divne;*
Kad ih *napišem* — stihovi samo.

Pesnikovo osećanje nesklada između emotivnog impulsa i realizacionog efekta — ipak nije nesklad. Pesnikovi stihovi su samo izraz težnje ka što potpunijem, ka apsolutnom izrazu adekvatnosti, — ali pesnik ne postiže tu meru apsolutnosti, meru identičnosti sa osećanjem koje prethodi ostvarenju pesme jezičkim sredstvima.

U etnopsihičkim shvatanjima srednjega veka *đavo,* diabolus, suprotan Principu životodavnom, »belome bogu«, — sam je crn, i ima poznate atribute. Takav je na fasadama crkava poznog srednjeg veka, tu simbolično prikazan kao izgnan iz Hrama. Ali već u Geteovom (Goethe) *Faustu* Mefistofeles je antropomorfiziran, — adekvatnost se zadržava na stav iskušitelja u odnosu prema Faustu. Stepen adekvatnosti je još širi kod lika pobunjenog anđela u Miltonovom (Milton) spevu *Izgubljeni raj (The Paradise last),* ili u Njegoševoj širokoj poemi *Luča Mikrokozma*. U Bodlerovim (Baudelaire) *Litanijama (Letanie au Satan)* Satana je duh kome je učinjena nepravda, koji je lišen obožavanja, a koji je blizak čovekovim jadima (»guerisseur familiier des angoisses humaines«). Najopštiju i najmanje konkretnu sliku osećanu u Geteovoj baladi *Bauk (Erlkönig:)*

Wer reitet so spät durch Nacht und Wind?
— Es ist der Vater, mit seinem Kind . . .

A Bauk vreba . . . hvata . . . otima ono što je nejako i najdraže . . . Simbol života u interferenciji sa stravom daleko je od svake realne slike. I vi ne osećate Bauka . . . vi prisustvujete drami Strave . . .

Umetnik ide za svojim tvoračkim impulsom, i svaki od umetnika se približava, neko manje neko više, dinamogenom obrascu koji uslovljava tvorački impuls, — ali niko n e d o s t i ž e cilj identiteta.

U svima slučajevima postoji adekvatnost, ali ona n e m a *apsolutnu vrednost,* ona je uvek samo težnja ka beskrajno dalekom cilju, ka nedostižnome.

Tu težnju ka nedostižnoj apsolutnoj adekvatnosti, to potencijalno približavanje apsolutnoj vrednosti[3] upućuje na fenomen odnosa asimptote prema hiperboli, kako ga prikazuje Mih. Petrović.[4]

Težnja ka nedostiživoj Nuli upućuje na princip relativnosti, koji će kasnije uspostaviti Ajnštajn. — Pisac, upravo njegov tvorački impuls i sam izražaj dobijaju potvrdu u jednom stavu matematičke formulacije.

Takav stav je 1962, Umberto Eko (U m b e r t o E c o) obrazlagao psihološkim efektom »otvorenog« dela[5]. Stvaralac umetnik ako rekne sve, da ne ostane ništa nedorečeno, ostavlja čitaoca, odnosno gledaoca potpuno u pasivnoj ulozi. Nedorečenost prepušta mašti čitaoca da *aktivno* pristupi delu. Interpretiranje Umberta Eko je formulacija usmerena na odnos uživaoca prema delu. Ali time se ne umanjuje značaj analogije prema formuli Matematičke fenomenologije. Po njoj se kao relativna vrednost karakteriše sam proces stvaranja, koji je relativan i s kojim je formula Umberta Eko u korelaciji.

Adekvatnost je u umetnosti jedna fina i dinamična iluzija završenosti; ona ima dinamogenu vrednost, suprotno fotografiji i slici u ogledalu, koje ipak, po zakonima optike, ne mogu imati vrednost nenumeričkog identiteta, a nemaju u sebi ni impuls tvoraštva.

Drugi princip se odnosi na poliritmičnost lirskih pesama muzički sinhronizirano izraženih, datih u pevanju. Odstupanja od uravnomerenih ritmova karakteriše istočnjačke motive, a naročito melodično doživljavanje lirske tematike balkanskih naroda. O takvim, poliritmičkim pojavama bavio se S. Džudov[6] i muzikolog i kompozitor Kosta Manojlović[7]. Na takvim pojavama sam se i ja zadržao analizirajući dve zbirke makedonskih pesama[8].

Nesumnjivo je da tematika uslovljava melodiju i da se melodija izražava ritamskom dinamikom. Stih se nekada tipično povija za melodijom; ali nekada emocionalni impulsi, psihofiziološki uslovljeni, probijaju ritamsku liniju, i time se i u strukturi stiha manifestuju, bilo kao »pripev«, bilo kao »upev«, ali kao anticipirani usklik (»Vortakt«). Ti su pojavi obični ili vokativske ili uzvične vrednosti. To se najčešće doživljuje u igračkim psihozama: kao intenzitetski izražajni impuls, često kao odjek, kao kompleks istorijski i sociološki uslovljen, ili kao impuls temperamenta (sevdah, merak). Emocionalna stanja, izražena amplitudama i longitudama (na kimografu) i reprodukovana (na magnetofonu), pokazuju naročita tonska padanja (seta, tuga, bol) i fortitetna povišavanja (eksplozije strasnosti, impulsi dinamizirane psihe). Sve ovo objašnjavaju zakoni fiziologije[9], kao i psihologija afekata[10]. »Pražnjenje« afektskih kulminacija u pevanju pomenutih pesama se realizuje, kao što je rečeno, uzvičnim vrednostima *(male!, lele!* i sl.). Takvi se izrazi afekata javljaju izvan osnovnih ritamskih izražaja, i uslovljavaju vid poliritmičnosti.

Razjašnjenje ovakvih pojava, a naročito post-ritamskih zakašnjavanja, obuhvata matematička interpretacija Mihaila Petrovića onih vibracionih svetlosnih pojava koje je proučavao Maskar (Mascart)[11]. »Kad oko vizira, kaže Mih. Petrović, u jednom stalnom pravcu, kakvu belu, uniformno osvetljenu površinu, i kad, pri tome, kakav tavan predmet brzo prolazi kroz vidno polje, konstatuje se ovakva optička pojava: površina, preko koje prelazi predmet, a neposredno po prolasku ovoga, izgleda tavna; na onome delu te površine, na kome je već povraćeno prvobitno osvetljenje, može se zapaziti intenzivna crvena boja, onakva, kakva se opaža na spoljnoj periferiji obojenoga prstena pri Newton-ovom eksperimentu«[12]. Prema Petroviću Mascart ovu pojavu »svodi na jedan mehanizam« pri čemu brzo nastaje utisak od površine osvetljene pri prelasku tamnoga predmeta, »ali se taj utisak ne pojavljuje opet trenutno čim predmet bude prešao; on se javlja sa izvesnim zadocnenjem, čiji je uzrok fiziološke prirode, i to zadocnenje nije jedno isto za sve boje u spektru: ono je u toliko manje u koliko je veća talaska dužina boje. Crvenoj boji odgovaraju najmanja zadocnenja, i to je uzrok intenzivnoj crvenoj boji koja karakteriše trag predmeta na osvetljenoj površini; za njom se ređaju ostale, manje žive boje, prema svojim talaskim dužinama, maskirane crvenom bojom, koja se i prva javlja, i najintenzivnija je među ostalima«[13]. U svom pomenutom članku ja dalje navodim i mišljenje Bikova, koje se odnosi na analizu fizioloških reagovanja kod nervnih vlakana i nervnih centara: po njemu je brzina rasprostiranja po celom vlaknu j e d n a k a, a kod centara je »sprovođenje impulsa vezano sa izvesnim zadržavanjem«[14]. Sasvim je razumljivo, dakle, da se kao posledica fizioloških procesa fizičko-matematičkim putem proverenih, izražava i u melodiji, utičući i na poliritamske pojave u strukturi stiha. — Pokreti oslobađanja nervne energije, o kojima govori i Vermejlen, vrše se odgovarajući različitim kvalitetima emocija i afekata i različitih dinamogenih osećanja, koji se po utrošku akumulirane energije svede na normalno stanje. Ovakva savremena fiziološka interpretiranja imaju obrazloženje u mnogo ranije formulisanim izlaganjima u Uvodu u studiju *Elementi matematičke fenomenologije,* gde se ističu izvesne opšte osobine disparatnih pojava, koje se zapažaju »u načinu na koji se uzastopna trenutna stanja nižu u toku pojave jedne za drugim: raznovrsne pojedinosti pri modifikacijama u kojima se sastoji suština pojave: oscilatoran, periodičan ili aperiodičan karakter modifikacijâ; nepromenljivost, odnosno simultano rašćenje ili opadanje pojedinih elemenata u pojavama; postupnost ili nagli skokovi pri tim modifikacijama; postupno i neprekidno približavanje jednome određenom asim(p)totnom stanju«[15]. — Na taj način vidimo da se matematički provereni princip adekvatnosti shvaćene relativno odnosi i na adekvatnosti ritmičkih fenomena uslovljenih fiziološkim procesima. Jedinstvo a ne samo analogija posmatranja u dva osnovna problema stilistike, dakle, počiva na interpretacijama matematičke fenomenologije.

NAPOMENE

1. Mihailo Petrović: *Elementi matematičke fenomenologije* SKA, Posebna izdanja XXIV, knj. 8. Beograd, 1911. Str. XIII + 774.

2. Dr Milivoj Pavlović, *Problemi stila,* Naučna knjiga, Beograd, 1960. Upor. str. 12, 46, 48, 79, 88, 93, 95.

3. Dr Milivoj Pavlović, op. cit. str. 46.

4. Mihailo Petrović, op. cit., str. 352—353.

5. Umberto Eco, *Opera aperta. Forma e indeterminazione nelle poetiche contemporanee.* Milano, 1962.

6. S. Džudov, *Rythme et mesure dans la musique populaire bulgare, Travaux publiés par l'Institut d'études slaves,* XII, Paris, 1908.

7. Kosta Manojlović, *Muzičke karakteristike Našega Juga. Skoplje i Južna Srbija* (jubilarna knjiga Glasnika Profesorskog društva). Beograd, 1925. Str. 88—95.

8. B. Koneski, *Zbirka na makedonski narodni pesni,* Skopje 1946; *Makedonski narodni pesni* (pesme pevane na festivalu u Bitolju i Štipu 1947). — Upor. Delo navedeno u nap. 2, str. 78—93.

9. K. M. Bikov, *Udžbenik fiziologije za medicinske institute,* Prevod, Beograd, 1947.

10. Albert Burloud, *Psychologie,* Paris, 1948; *Decroly et Vermeylin, La Sémiologie de l'Affectivité,* Bruxelles, 1930.

11. Mascart, *Sur la retard des impressions lumineuses.* — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* Paris, 1891, str. 120—121. (Navod po delu Mihaila Petrovića *Elementi matematičke fenomenologije,* str. 771).

12. Delo navedeno u nap. 1, str. 771.

13. *Ibid.,* str. 771—772. Ove odeljke, spojene, navodi Mihailo Petrović i u delu *Metafore i alegorije,* SKZ, knj. 405, Beograd, 1967, str. 22 (izmene su neznatne, umesto dve strane termina uzete su narodne reči, i sl.).

14. *Ibid., str.* 473.

15. *Ibid.,* str. 1.

MILORAD BERTOLINO

O NEKIM FILOZOFSKIM I DRUŠTVENIM POGLEDIMA MIHAILA PETROVIĆA

1.

Filozofski pogledi Mihaila Petrovića, izloženi prvenstveno u njegovim fenomenološkim radovima, ocenjuju se, sa pravom, kao pokušaj prevazilaženja mehanicizma ali na način blizak mehanicizmu, kroz izvesno njegovo uopštavanje. Uočeni su i dijalektički elementi Petrovićeve prirodne filozofije i prihvatljivost mnogih njegovih koncepcija sa gledišta dijalektike. O ovome su pisali dr Dušan Nedeljković i dr Ernest Stipanić (videti [6] i [7]).

Cilj prvog dela našeg članka je da ilustrativno pokaže kako su osnovni dijalektički zakoni i eksplicitno prisutni u Petrovićevim delima [1] i [2]. Međutim, Petrović ne daje uvek ovim zakonima centralni značaj, niti svud ispituje njihov odnos sa drugim zakonima u smislu veće ili manje opštosti ili u smislu izvođenja drugih zakona iz njih, odnosno njih iz drugih zakona. Dijalektički zakoni se kod Petrovića javljaju između mnogih ostalih koji mu služe za formiranje analoškog jezgra u raznim slučajevima.

Najmanje ćemo se zadržati na *principu uzajamne povezanosti* prirodnih pojava, koji je, u stvari, kod Petrovića svuda prisutan i na kome se, u izvesnom smislu, i zasniva opšta Petrovićeva težnja i namera da u izvanrednoj raznovrsnosti pojavnih oblika povezuje naizgled disparatne činjenice i pruži opštu zakonitost sveta kroz što je manje mogući broj fenomenoloških tipova. Ispitujući, na mnoštvu primera, uzroke, posledice i uzajamna dejstva, Petrović pruža bogat izvor potvrda jednog ovakvog, opštevažećeg dijalektičkog stava.

Posebnu pažnju Petrović je posvetio *kretanju,* neprekidnoj *promenljivosti* sveta. Na mnogim mestima ova pažnja dolazi do vidnog izražaja. Tako, na primer, govoreći o »uporedljivosti« stvari koje se na izgled ne mogu svesti na brojevna merenja, Petrović kaže: »Sve što se dešava u toku vremena sastoji se, u krajnjoj analizi, u promenama veličina dostupnih ili nedostupnih ljudskom saznanju. Priroda je okean tih promena, a matematička moć tog okeana je moć kontinuuma« ([1] str. 109). Na istoj strani Petrović navodi opsežniji citat iz Ljubomira P. Nenadovića, u kome je na pesnički način izraženo neprekidno preobražavanje prirode, kao i neponovljivost njenih oblika. Interesantno je napomenuti (videti [4]) da je Ljubomir P. Nenadović u toku svojih studija u Berlinu 1845. godine učio Hegelovu filozofiju i obožavao svog tamošnjeg profesora, strasnog hegelijanca Mišlea. Nenadovićeva »*Pisma iz Nemačke*« obiluju dijalektičkim razmišljanjima koja su ponekad naivna, često vrlo sugestivna pa i duboka, uvek iskazana na lak, penušav, Nenadovićev način, sa duhovitošću na više nivoa — od nategnute do hajneovski iskričave. Izborom Nenadovićevog citata, Petrović je i sam pokazao sklonost ka njegovoj dijalektičkoj viziji.

Zakon negacije negacije prisutan je kod Petrovića u jednom citiranju Getea (Goethe) u vezi sa spiralnom evolucijom društva. Petrović se u vezi sa ovim zakonom ne izjašnjava određeno, ali zaključak pokazuje da je ulagao trud da se u odnosu na njega odredi. Zbog njegovog interesa, navešćemo u celini citat o kome je reč: »Prema pogledima Vikoa (Vico), ljudsko društvo evolvira po zatvorenim krivim linijama u dvodimenzijalnom prostoru, hoteći time da se kaže da ono prolazi kroz iste faze u toku vekova. — *Goethe je preslikavao istu evoluciju na kretanje jedne tačke po izvitoperenoj, trodimenzijalnoj spirali, kombinujući kružno kretanje sa translatornim kretanjem naviše i htevši time da izrazi da društvo, na mesto da u toku vekova prolazi kroz jedne iste faze, prolazi periodički kroz faze slične, ali ne istovetne, tako da svaki takav prolaz obeležava jedan progres naviše, od koga proces iznova otpočinje.* (podvukao M. B.) — Turgot je, sa svoje strane, taj isti proces preslikavao u jednu vrstu sinusoidne krive linije u dvodimenzijalnom prostoru sa postupno slabljenim oscilacijama u toku vekova. Njome bi se imao ilustrovati fakt da se proces ne vrši monotonim kretanjem unapred, već oscilatorno-progresivnim kretanjem oko jednog određenog asimtotnog stanja kome se čovečanstvo, u toku vekova, u jednoj fazi svog razvitka, sve više približuje, a u drugoj fazi od njega sve više udaljava. Takve faze sleduju naizmence jedna za drugom, ali je približavanje asimtotnom stanju i udaljavanje od njega sve slabije u toku generacija i vekova, tako da će te oscilacije, u nedoglednom razmaku vremena, postati neosetne i da će se (pod pretpostavkom da će čovečanstvo dotle biti pošteđeno od katastrofe) ono što obeležava progres najposle stabilizirati. Obe slike, Goethe-ova i Turgot-ova mogle bi se i složiti, bar u svome krajnjem obliku, kad bi se uzelo da se Goethe-ova izvitoperena spirala asimtotno približava jednome krugu u ravni, van koga ne bi nikad izašla« (videti [1] str. 100).

Očigledna je neprihvatljivost Vico-ove interpretacije za dijalektiku a takođe, iako u manjoj meri, Turgot-ove (s njegovom verom u konačnu stabilizaciju). Petrovićevo spajanje Turgot-ove i dijalektičke (koju navodi po Goethe-u) ima, očigledno, više formalan karakter u kome se on, na kraju krajeva, ne izjašnjava, posmatrajući navedene koncepcije više kao izvor formiranja jednog matematičkog modela.

Zakon prelaska kvantiteta u kvalitet kod Petrovića je na više mesta jasno istaknut, uz očigledno usvajanje i isticanje njegovog značaja. U delu [2] str. 114, u jednom podužem spisku takozvanih tipskih uloga, Petrović navodi: »Ulogu kapi koja prepuni sud: kap koja prepuni sud sa tečnošću, nehotimična reč koja »prepuni čašu strpljenja«, ništavni događaj koji se samo pridoda već nagomilanim motivima i učini da ovi odmah stupe u akciju«. U delu [1] str. 26, Petrović preko primera iz nauke govori o promeni smisla rezultujućeg efekta kada »jačina faktora pređe određenu meru«. Na str. 84. istog dela navode se raznovrsni primeri iz običnog života.

Još je vidnije isticanje *borbe suprotnih faktora* kao prisutne i karakteristične za razvoj prirode i društva. U delu [2] str. 162. poseban je odeljak pod naslovom »Raznovrsne pojave alegorijski shvaćene kao borba faktora«. Ovde se govori o kontrabalansiranju mehaničkih sila, o borbi afiniteta hemijskih elemenata, o borbi dijastaza kao procesu varenja, o borbi mikroba i organizma, o psihološkom procesu produkcije voljnih akata kao borbi impulsivnih i depresivnih faktora, o razmnožavanju vrsta kao borbi čitavog skupa antagonističkih faktora, o ekonomskim oscilacijama sa fazama naprednosti, dekadencije, krize i oporavljenja itd. Ovde je i Paskalova misao: »Civilizacija je nemogućna bez borbe i bez stalnog trenja duhova i interesa«. Na str. 71 ([2]) kaže se: »Pesnička proniclјivost Njegoševa uočila je i široko shvatila borbu u svetu, i to ne samo kao usko shvaćenu borbu za život u organskoj prirodi ili u ljudskoj zajednici, već kao univerzalnu i večitu borbu faktora svih konkretnih priroda, u njenom najopštijem modernom smislu«.

Interesantno je da Petrović, slično Engelsu (asimtotsko približavanje čovečanstva apsolutnoj istini ([9]), rado upotrebljava termin »asimtotski« u metaforičnom smislu. Tako on piše ([2] str. 25) o »asimtotnoj« tački kojoj streme napori svih naroda«, kao i o »idealnom, asimtotnom cilju svih nauka« koji se svodi na svođenje pretpostavki i stavova na što je mogućno manju meru ([2], str. 105).

Iz izloženog se vidi jasno izraženo prisustvo dijalektike u Petrovićevim pogledima i njegovo uglavnom aktivno prihvatanje njenih osnovnih stavova. Ove stavove, međutim, Petrović nije komponovao u jedinstven filozofski sistem. Takvom sistemu težio je kroz svoju matematičku fenomenologiju o čijim smo najopštijim filozofskim implikacijama govorili u početku, ne govoreći o opšte poznatom velikom značaju ove fenomenologije sa gledišta povezivanja prirodnih nauka, izvesnih kibernetskih vizija, bogatstva rezultata u vezi sa modeliranjem i svuda prisutnog duha savremene matematike.

U »*Metaforama i alegorijama*« vidnije je nego u mnogim drugim njegovim nematematičkim radovima široko književno obrazovanje Mihaila Petrovića i njegov izrazit literarni talenat. Antologija metafora i alegorija, koju nam je pružio ovim delom, očigledno prikazuje njegovo uživanje u tome da ih skuplja, klasificira i izlaže javnosti i u većoj meri nego što bi bilo neophodno za njegova matematičko-filozofsko-fenomenološka istraživanja. Doista, u razmatranju čisto književnih primera za metafore i alegorije, on i ne ide dalje od njihovog navođenja i razvrstavanja — pokazuje se daleko dubljim u analizi alegorija koje su direktno relevantne za prirodne nauke. Ovo je nameran postupak, jer je Petrović potpuno svestan razlike u ciljevima umetnosti i nauke. U delu [1] str. 44, u poglavlju »*Jezgra sličnosti u nauci i poeziji*«, Petrović tu razliku obrazlaže dosta detaljno i, na kraju odeljka, piše: »Sve to pokazuje da prava poezija i istinska nauka moraju imati i da odista imaju dodirnih tačaka. Samo što se one odmah posle takvih sastanaka razilaze, svaka na svoju stranu, jedna za lepim, druga za istinitim.

U svakom slučaju navedena poređenja, asimilacije, metafore i alegorije pružaju jedan izvrsan način za kratko, a slikovito izražavanje fakata, za koje bi, bez takvih slika, trebalo mnoštvo reči da bi se izrazilo ono što se u njima ima u vidu, pored toga što je sve to, tako preslikano, izrazitije i jasnije«.

Jasna je stvar da umetnost ne teži samo za lepim, niti je u nauci težnja ka lepom sasvim isključena. Nešto uprošćeni Petrovićev zaključak ipak daje jasan uvid u osnovne razlike dvaju vidova čovekove težnje da što dublje i lepše shvati univerzum koji ga okružuje i čiji je deo. U svojim ličnim iskazima Petrović izbegava naročite stilske ukrase; ipak, on sa velikim zadovoljstvom navodi takva preslikavanja kao što je ono u kome »Lamartin pesnički preslikava san na lak veo koji jedan anđeo diže svako jutro, ali koji jednoga dana zaboravi dići« ([1] str. 35), iako je sasvim jasno da citirana alegorija ne spada u one koje će Petroviću naročito korisno poslužiti u njegovom dubokom povezivanju disparatnih prirodnih pojava.

3.

Poznato je da Petrović nije imao direktnih književnih i društveno-političkih, ideoloških ambicija. Možemo se, dakle, u osnovi složiti sa sledećim mišljenjem D. Trifunovića ([8]): »A od trenutka kada najrazličitije primere metafora i alegorija povezuje fenomenološkim fazama, u poglavlju gde se izlažu aktivne i pasivne uloge sa iznalaženjem odgovarajućih mehanizama, Petrović se pokazuje kao dobar poznavalac mnogih nauka. Ovom prilikom njegovi komentari mogu, ponekad, da otkriju i pritajenog Petrovića javnog radnika, ekonomistu, čak i političara. Međutim, ipak je Petrović u ovim slučajevima bio samo izuzetan posmatrač«.

U ovom i sledećem odeljku komentarisaćemo neke trenutke u kojima je Petrović, ipak, iz ove pritajenosti i izlazio, iz uloge posmatrača. Ovi su trenuci ređi, ali često veoma karakteristični, pa ćemo ih zato istaći.

Pre svega, u obadva dela [1], [2], koja prvenstveno uzimamo u obzir, Petrović dosta jasno izlaže stav o uzrocima ekonomskih kriza. Ovaj deo trebalo bi da ocene prvenstveno ekonomisti, pa ćemo se uzdržati od detaljnijeg komentara. Dalje, Petrović se, u odeljku ([1] str. 222), o mitskom preslikavanju sasvim otvoreno izjašnjava u vezi sa religijom kroz, recimo, sledeći citat: »Osnovica za *mitsko preslikavanje* leži u mističkom naslućivanju primitivne svesti da iza vidljivog, konkretnog sveta postoji drugi, njoj nepristupačan, ispunjen antitetima čija zakulisna igra određuje događaje što se odigravaju u vidljivom svetu. Grčki mit npr. pripisuje tim antitetima, vanprirodnim bićima, atribute i moći voljnih akcija čoveka, sa istim pobudama i afektima, ali sa vanprirodnim moćima akcije. To je *antropomorfno* mitsko preslikavanje konkretnog sveta koje se, sa svojim izrazitim alegoričkim slikama, od uvek provlačilo kroz poeziju svih naroda i svih vremena. Međutim, i taj drugi, fiktivni svet, slika prvoga, pored sve svoje natprirodnosti ipak ima svoju logiku. Izreka Sv. Tome da »božanstvo može sve što nije u suprotnosti sa logikom«, i tu ostaje u punoj važnosti. Ta logika, uostalom, nije ništa drugo do obična ljudska logika, van čijeg okvira ljudska svest nikad i ni u kome slučaju ne izlazi. Kad se već dopuste i prime moći i atributi pridati u slikama bićima i faktorima, ostali sastavci slike nisu ni po čemu u suprotnosti sa tom logikom«. Nešto dalje, Petrović povezuje »današnje naučne antitete« sa mitološkim, naglašavajući da naučni gube svaki karakter natprirodnosti i kaže: »Šta je antitet mehaničke ili fizičke sile koja vuče, gura, privlači, odbija, nego mitološki antitet Erosa ili Eola, koji ni danas, u čistoj nauci, po samoj svojoj koncepciji, ne gubi svoj prvobitni antropomorfni karakter?« Petrović energično odbija svaku natprirodnost i mistiku i posmatra mitsko preslikavanje u okviru istorijskih uslova u kojima je nastalo. Iz razumljivih razloga ne analizira druge religije sem grčkog mitosa, ali već kontekst u kome se citira Sv. Toma govori dovoljno o Petrovićevom ličnom stavu.

Takođe, Petrović ([1] str. 121) oštro osuđuje nekorektne primene biološke teorije o postanku vrsta na ljudsko društvo, za koje znamo da su bivale izvor veoma reakcionarnih doktrina.

Zanimljiva su i antropološko-etička Petrovićeva razmatranja ([1] str. 180) gde on tvrdi da »poredeći civilizaciju današnju sa grčkom ili rimskom, lako se konstatuje da se skala osnovnih osećaja nije mnogo izmenila: to su uvek iste nijanse ljubavi, mržnje, požude, lakomosti, ambicije, strasti i pobude kojima je ispunjen večiti roman života. Naprotiv, skup znanja je iz osnove izmenjen i proširen; ideje i metode saznavanja su iz osnove nove, i čitava provalija deli današnju nauku i njene primene od onoga što su bile pre nekoliko desetina vekova«. Petrović se slaže sa Buckle-om da se emotivni faktor menja mnogo sporije nego intelektualni.

Matematička analiza izbornih sistema ([3]), specijalno proporcionalnog predstavništva, dovela je Petrovića do, po našem mišljenju, dosta otvorenog političkog stava o nedemokratizmu društva u doba kada je članak objavljen (1936. g.). U početku on naglašava da će, po njegovom mišljenju, uskoro biti aktuelan problem izbornog sistema, pa zato daje jedan pregled postojećih sistema, uz njihovu matematičku analizu i isticanje dobrih i loših strana. S jedne je strane princip apsolutne ili relativne većine, a s druge princip proporcionalnosti. Mane prvog principa po Petroviću su suviše očigledne i sistem je pravičan jedino kad se glasa za samo jednog kandidata (ili listu). Zato Petrović daje detaljniju analizu sistema zasnovanih na principu proporcionalnosti (sistem najvećih ostataka, Strue-ov sistem, Mirman-ov sistem, Hondt-ov sistem, Cuški sistem). Zatim se analizira sistem koji je u tom trenutku važio u Jugoslaviji i daje se zaključak: »Nepotrebno je isticati nedostatke ovakvog izbornog sistema, koji su i suviše očevidni, pa se s toga sistem i uvodi u praksu samo u izuzetnim prilikama u kojima to iziskuju naročite političke potrebe, ili kad se moraju zadovoljiti naročiti politički zahtevi«. Vladajući sistem Petrović razvrstava kao »princip relativne većine, sa naročitim i obilnim favorizovanjem najjače zemaljske liste«. On, tvrdi Petrović, spada u onu grupu sistema koji su uvedeni s namerom da se u što jačoj meri favorizira grupa koja u taj mah faktički vlada zemljom. Zato se Petrović opredeljuje izbornom sistemu najvećih ostataka, koji je bio uveden Ustavom od 1888. god., a koji se pokazuje najpravičnijim i najracionalnijim i pored toga što ni on nije bez nedostataka. Petrović ovde teži sistemu pravednom u okviru buržoaskog parlamentarizma, sa ciljem da sve političke grupacije i mišljenja budu što adekvatnije zastupljene. On, istina, često stavlja rezervu da je to najpravedniji sistem ako se već hoće proporcionalno predstavništvo, ali oštrije izraze upotrebljava jedino onda kada govori o sistemima suprotnim proporcionalnosti. Najzad, očigledni cilj je čitavog članka da se sistem od 1888. god. istakne iznad svih ostalih u okviru proporcionalnih sistema, čije su prednosti istaknute već izborom naslova članka.

Ustav od 1888. god. je i pored svih svojih ograničenja važio kao najslobodoumniji ustav Kraljevine Srbije, a dao ga je kralj Milan Obrenović u cilju privremenog predaha i ustupka strankama. Ustav je ukinuo kralj Aleksandar Obrenović svojim udarom od 9. maja 1894. god., u okviru pojačane borbe protiv radikalne stranke, tada najbrojnije u zemlji. Kralj Milan je svojevremeno dao ovaj ustav i s ciljem da očigledno dokaže kako naš narod »nije dorastao za političke slobode«. U sprovođenju ovog Ustava, narodu, istina, nisu pružene nikakve naročite prednosti, pa su seljaci govorili »da nisu videli »mnogo vajde« od tog Ustava, »manj« to jedno što se narod ka nešto više pripitivao« ([5] str. 21).

U svakom slučaju, treba istaći Petrovićevu građansku hrabrost i odlučnost da izrazi svoje stanovište. Inače je Petrović, kao matematičar po struci, bio svestan činjenice da (videti [1] str. 31) »aritmetička sredina nije uvek najtačnija (istini najbliža) vrednost; slično je i sa javnim mišljenjem, ili sa rezultujućom odlukom kakve velike, glomazne komisije«. Ipak, opet kao matematičar, Petrović je znao i za značaj aproksimacija, pa se u članku o kome je reč potrudio da pronađe najbolju u okviru datih pretpostavki.

LITERATURA

[1] Mih. Petrović: *Fenomenološko preslikavanje*. Beograd, 1933, str. IX + 236.

[2] Mihailo Petrović: *Metafore i alegorije*, priredio Dragan Trifunović, Beograd, 1967, str. 1—196.

[3] Dr Mih. Petrović: *O proporcionalnom predstavništvu*. Glasnik jugoslovenskog profesorskog društva, April 1936, knj. XVI, 8, str. 719—733.

[4] Pavle Popović: *Ljubomir Nenadović putopisac*. Predgovor knjizi: Ljubomir P. Nenadović: Pisma iz Nemačke, SKZ 165, Beograd 1922, str. III—XLIII.

[5] Slobodan Jovanović: *Vlada Aleksandra Obrenovića II*, Beograd, 1935, str. XII + 524.

[6] Dušan Nedeljković: *Mihailo Petrović*. »Politika«, 11. jun 1961.

[7] Ernest Stipanić: *Fenomenologija Mihaila Petrovića*. Dijalektika, Beograd 1966, I, 2, str. 117—130.

[8] Dragan Trifunović: Predgovor knjizi [2] str. 7—18.

[9] Milorad Bertolino: *Jedna matematička metafora Fridriha Engelsa*. Dijalektika, Beograd 1967, II, 3, str. 51—62.

SUR CERTAINES OPINIONS PHILOSOPHIQUES ET SOCIALES DE MICHEL PETROVITCH

RÉSUMÉ

On considère la philosophie naturelle de Michel Petrovitch et son rapport avec les lois dialéctiques. On constate que les lois principales en question son présantes, même explicitement, dans les traités philosophiques de Petrovitch. Cependant, Petrovitch leur n'attribue pas un rôle central-elles figurent parmi les autres types d'analogies caractéristiques pour sa phénoménologie générale. Ainsi la philosophie de Petrovitch reste un essai de dépasser la mécanicisme conventionnel par un mécanicisme plus général, mais en présence d'une dialéctique bien visible et développée.

On analyse alors le talent littéraire de Petrovitch qui, dans son oeuvre »Metaphores et alégories« donne une belle anthologie de figures, évidemment d'une manière et dans une mesure dépassant les besoins de sa phénoménologie.

On souligne l'intérêt des considérations économiques de Petrovitch, ainsi que ces déclarations ouvertes concernant les question des réligions, du rapport entre les moeurs et la civilisation, de l'application incorrecte de la biologie dans le domaine de l'évolution sociale.

Dans son article sur les systèmes électoraux Petrovitch plaidoye, en 1936., pour un système proportionnel démocratique (provenant de celui de 1888) et critiquant d'une manière hardie le système électoral de 1936 en Yougoslavie.

ANDRIJA B. STOJKOVIĆ

MIHAILO PETROVIĆ I UROŠ MILANKOVIĆ

Naša filozofska istoriografija već je utvrdila niz analogija između filozofije prirode Mihaila Petrovića i njegovih stranih i naših prethodnika i savremenika. U kontinuitetu razvoja pozitivizma u Srba, od Uroša Milankovića preko Dimitrija Matića, Alimpija Vasiljevića, Milana Kujundžića, Vladimira Jovanovića i pokreta Ujedinjene omladine srpske, Svetozara Markovića i srpskog socijalističkog pokreta do pozitivizma Mite Rakića, Miloša Milovanovića, Stevana Radosavljevića-Bdina i drugih manje značajnih u opštefilozofskom planu, do estetičkog pozitivizma Bogdana Popovića, Jovana Skerlića itd., dolazimo do Petrovićevih savremenika pozitivista i mehanicista Koste Stojanovića, Bogdana Gavrilovića, Nikole Tesle, Bože Kneževića, Tome Živanovića, Krste Cicvarića i mnogih drugih. Ako se ne mogu utvrditi neposredni presudni uticaji ove široke struje srpskog pozitivizma na Petrovićevu filozofiju prirode, može se pouzdano tvrditi da je odgovarajuća misaona klima, da je tako nazovemo, pogodovala nastanku i razvoju Petrovićeve fenomenologije, i da su pojedinačni međusobni uticaji između Petrovićevih i ostalih naših pozitivističkih učenja nesumnjivi.

Ukazaćemo samo na izvesne nesumnjive analogije između Petrovićeve filozofije prirode i filozofije prirode jednog njegovog prethodnika za koga on (po svemu sudeći) uopšte nije znao — Uroša Milankovića (1800—1849).[1] Uticajni ideolog liberalizma u srpskoj kulturi sredine 19. veka, potekao iz Vukovog kulturnog kruga i tokova koji će prerasti u Ujedinjenu omladinu srpsku, autodidakt u filozofiji, po obrazovanju pravnik, i penzionisani austrijski oficir, Milanković je delovao u Trstu i Beču. Iako izgleda nikad nije bio u Srbiji (rođen je u Dalju, u Slavoniji),[2] Milanković je bio vrlo čitan i uticajan u Srbiji 40-tih godina kao ekonomist, filozof i književni kritičar. Svoje životno delo (koje po naslovu a u tragovima i po sadržaju asocira na Holbahovu knjigu Sistem prirode ili o zakonima fizičkog i duhovnog sveta, 1770) izdao je u celini na nemačkom jeziku 1845. u Beču, pod naslovom Svetski organizam i sistem celokupnog života, ili polarni sistem fizičke i duhovne prirode.[3] Zatim je njegov osnovni idejni fond preneo u našu kulturu 1847. godine u svojim dvema knjigama na maternjem jeziku, pod naslovima *Prosveta čoveka i obrazovanije esteztva* (Beč) i *Naše vreme* (Beograd).

U svoje doba uticajan u nemačkom jezičkom području i cenjen kao originalni mislilac, koji poput Hegela zaključuje razvoj filozofije rezultatima svoga sistema, Milanković je u stvari originalan izvesnim svojim vizijama i anticipacijama koje još nisu temeljno ispitane i ocenjene, ali on je uglavnom sintetičar koji teži da opštu sliku sveta nemačke klasične filozofije (pre svega Šelinga i Hegela) ispuni sadržajem modernog prirodnonaučnog pozitivizma svoga doba.

Milankovićev filozofski sistem zasnovan je kao objektivno-idealistički i dijalektičko-evolucionistički i panteistički organicizam; analogija s Petrovićevom filozofijom prirode u opštem planu jeste u tome što je i Petrović objektivni idealist, dijalektički evolucionist i sintetički mislilac, ali nije hilozoist (kao Milanković), niti hegelovac. *Svet* je kod Milankovića shvaćen hegelovski kao kretanje *»neograničenog, vselenu dvižućeg, i upravljajućeg razuma«*, dakle kao celina koja predstavlja dijalektičko *napredovanje, razvijanje, i obrazovanje:* ceo prvi deo njegovog sistema izlaže *»hemiju i fiziologiju kao sistem uzroka kretanja i zakona života«* (i u sadržaju izlaganja spaja Hegelove razvojne stupnje »hemizma« i »organizma« sa rezultatima prirodnonaučnog evolucionizma), da bi u drugom delu sistema bio izložen *»apsolutni organizam, matematika kao subjektivna nauka objektivisana u prirodi* i *apsolutni rezultati«* celog sistema — *otkrivanje boga, večne ideje* i *večnog zakona, apsolutne forme* i *apsolutnog saznanja* i drugih apsoluta, kojih kod Petrovića, naravno, nema. Ovakvu mešavinu hegelovstva kao opšte sheme slike sveta sa prirodnonaučnim evolucionizmom, koji mu daje materijal za ispunjavanje te opšte slike konkretnim sadržajem, nalazimo kod Milankovića u svim njegovim filozofskim spisima, a kasnije kod Dimitrija Matića, Alimpija Vasiljevića i Milana Kujundžića, ali ne i kod Petrovića, čija je filozofija prirode daleko jedinstvenija i logički konsekventnija.

Petrović je više ili manje eksplicitno formulisao dijalektičke zakone sveta shvaćene kao zakone univerzalnog kretanja i promenljivosti koji deluju u prirodi i društvu — od mehaničkih preko fizičkih i bioloških do društvenih i kulturnih pojava. To su zakon jedinstva i borbe polarnosti (za koji se Petrović poziva na Paskala i Njegoša), zakon prelaska kvantiteta u kvalitet (koji deluje kad *»jačina faktora pređe određenu meru«* itd.) i zakon negacije (koji on formuliše naročito ukazivanjem na apsolutnu neponovljivost svetskih pojava i relativnu ponovljivost njihovu u odnosima raznih slojeva disparatnih pojava), dakle tri zakona koja ističu Hegel i marksisti. Analogon ovim zakonima nalazimo i kod Milankovića.

Dijalektički razvitak sveta, po Milankoviću, određuju *zakoni (principi, osnove*, koji su *principi promene* ili *sveobšteg dviženija),* koji deluju od mehaničkih i fizičkih preko hemijskih i organskih do društvenih procesa. To su: (1) »*sveopšti zakon polariteta*«; (2) zakon prelaska kvantiteta u kvalitet, koji on naziva zakonom *umnoženija čisla i veličine, ili obrazovanija* (»*svaki se zametak napredujući dviženijem, ili umnoženijem svog čisla i svoje veličine, razvijati mora*«); i (3) zakon negacije, po kome »*pasivnost, negacija su određeni, aktivitet, pozicija su određujući, kretanje, život je njihov rezultat*«, tako da za razliku od Hegela a slično kasnijem Spenserovom mišljenju, Milanković iz dijalektičkog procesa izbacuje skokove i smatra da nije negacija već da je »*apsolutno pozitivni princip poslednji i najviši princip organizacije, reda i kretanja* te da *revolucije* predstavljaju *nenormalno kretanje*«. Ovim, u osnovi Hegelovim, zakonima Milanković dodaje druge, od kojih je najvažniji (4) zakon jedinstva opšteg i pojedinačnog i celine i dela. Kao i po drugim idealistima, kao što su Platon, Elejci, Hegel, Boža Knežević, Mihailo Petrović, Svetomir Ristić itd., i po Milankoviću opšte ide pre pojedinačnog i celina pre delova, i određuju njihovu evoluciju. Kao što je i Petrović polazio od opšte povezanosti i materijalnog jedinstva sveta, i Milanković je determinist (po kome su zakoni sveta *neotklonjivi)* i monist (sličan Šelingovoj *filozofiji identičnosti)* po kome »*postoji samo jedna stvarnost i jedna forma stvari*«, dakle apsolutno jedinstvo sveta, *jedinstvo prirode, identitet i jedinstvo svega u svemu*. U zasnivanju svoga monizma on smatra da je i *supstancija prosta*, iako je svetska celina strukturirana: Milanković je pre Spensera a donekle analogno Petroviću koncipirao zakon odnosa celine i dela i opšteg i pojedinačnog kao *zakon strukturalne evolucije*, koji (slično Spenseru) naziva: *zakon individualisiranja i organisiranja* (usložnjavanja) s jedne, i *razdelenija* (*deobe složenog na prosto*), s druge strane. *I ovaj zakon naš filozof teži da verifikuje na mnogim naučnim činjenicama, prethodeći relativističkoj fizici u tvrđenju da Njutnovog apsolutnog prostora i apsolutnih koordinata sveta nema, jer* »*se sve zvezde neba dvižu*«, i odatle izvodi relativističku »*revoluciju sviju nauka*«. I Petrović je, slično Milankoviću, znao za hijerarhičnost i povezanost pojava različitog nivoa i utvrđivao je analoške korespondencije ovih stupnjeva pojava, i dublje od Milankovića shvatao složenost determinizma i kauzaliteta, nužnosti i slučajnosti itd.

I što je kao anticipacija Petrovićevog postupka posebno interesantno, Milanković prvi kod nas kreće putevima matematicizma čiji su koreni u pitagorejaca, kod Dekarta, Lajbnica, Spinoze i Hobsa. Slično pitagorovcima, on uzima jedinicu kao »*osnov sviju čislâ*« koji sve kreće (»*jedan zakon otnošenija umnožene jedinice*«). On ističe pitagorejsku ideju analognu Plankovoj teoriji kvanta iz 1900, tvrdeći da se *»u umnoženiju jedinice, i u razdeleniju i sobraniju njenog bez konačno umnoženog čisla, sostoji bitije jedne samo bezkonačne naraı (prirode)«;* u tom pitagorovskom kvantovanju vlada zakon održanja koji Milanković preuzima iz klasične fizike svoga doba: *»Što se go u ovom sobraniju bezkonečno umnožene jedinice, u ovom složenij svenaravnom, na jednoj strani otuzme, to se na drugoj sabere«*, t *»nigda u glavnoj sumi suma pofaliti ne može«. »Dejstvije naravi jes dakle kalkuliranje, koje se osniva na matematičeskom temelju nelc žnom«*, hobsovski zaključuje Milanković.

Analogno Petrovićevom uverenju da se na osnovama analoški jezgara može zasnovati jedinstvena slika sveta i odgovarajuća jedin stvena filozofija prirode, Milanković je uveren da je prvi otkrio zako polarnosti i njegove manifestacije kao *»jedan osnov dejstvitelni, je dan zakon koji se zabadava toliko tražio«*, a on ga je *»ne samo mate matičeski dokazao, nego i praktičeski, na njega celi život naraı doveo«*.

Kao što vidimo, analogije između Milankovićeve i Petrovićev filozofije prirode su mnogobrojne: obojica su u osnovi objektivr idealisti i realisti-pozitivisti u modernom smislu reči, monisti i de terministi, sintetičari visokog nivoa generalizacije, i obojica istič slične dijalektičke zakone sveta i principe njegovog modelovanja svodeći te principe na jedan jedini (u čemu idu za vrhunskim sinte zama Franje Petrića, Ruđera Boškovića, Branislava Petronijevića Božidara Kneževića, Dragiše Đurića, Tome Živanovića i drugih jugo slovenskih sistematskih mislilaca). Slični su naročito u traženju jed nog jedinog modela sveta: Petrovićevom »analoškom jezgru« odgc vara Milankovićeva jedinica kao osnova jedinstva sveta.

Najvažnija razlika među njima je u tome što je Petrović kao vr hunski matematičar svoja izvođenja znatno dublje prirodnonaučn zasnovao, i što je njegov pozitivizam bez hegelovskih i drugih meta fizičkih konstrukcija, kojima obiluje Milankovićeva filozofija pric de. To je i razumljivo jer ovu dvojicu naših filozofa prirode deli vre menski period od pola stoleća u kome su razvoj nauke i društven prakse učinili naturfilozofska domišljanja nepotrebnim svuda tam gde su otkrivene stvarne veze između pojava.

PRIMEDBE

[1] Detaljnije videti u mojoj knjizi *Filozofija u Srba* (u štampi). O Milankoviću su pisali: Miodrag Popović: *Uroš Milanković, ime nepravično zaboravljeno* u knjizi »Jedna pesma i jedna epoha«, Beograd 1954, str. 127—161. — Dragiša Živković, u knjizi *Počeci srpske književne kritike* Beograd 1957, str. 243—250, 269—274. — Dragan M. Jeremić u *Savremeniku* 5/1967, str. 416—418.

[2] Iz ove iste porodice su i akademici Milutin (astronom) i Bogdan (muzikolog) Milanković.

[3] Pun naslov knjige, koji govori i o sadržaju njegovog sistema, glasi: *Organismus des Weltalls und System des gesammten Lebens oder Polarsystem der physischen und geistigen Natur:* dargestellt in einzigen Wirkungen, als allgemeine Thätigkeit der gesammten nichtsinnlichen, sinnlichen und geistigen Natur in ihrem Zusammenhange. Mit der Kritik der Einheit über das Unvereinbare. Von U. Milankowisch. [Wien], 1845.

РЕЗЮМЕ

В дискуссии на тему: *Михаил Петрович и Урош Миланкович,* Андрей Стойкович, говоря о феноменологии Михаила Петровича, указывает на ряд аналогий между философией природы Михаила Петровича (1868—1943) и философией природы сербского позитивиста, последователя Гегеля, первой половины XIX века Уроша Миланковича (1800—1849), автора философского система: *Organismus des Weltalls und System des gesammten Lebens oder Polarsystem der physischen und geistigen Natur* Wien 1845.

МИЛИВОЈ ПАВЛОВИЋ

НЕКЕ ОСОБЕНОСТИ СТИЛА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА И ЊЕГОВ ЗНАЧАЈ ЗА СТИЛИСТИКУ

О. Комплексне појаве у животу професора Михаила Петровића, ствараоца у науци, као и у животу Мике Аласа, рефлектоване у стилистичким остварењима, чудновато се усклађују у широко схваћено, хармонизирано јединство. И поред ограда самога аутора, путописи, а нарочито последње две књиге, показују квалитете литерарнога стила, мада се и ту осећа процес формулисања карактеристичан за изразито научну анализу и за синтетично закључивање у ауторовом научном излагању. Отуда се намеће задатак да се разјасни интерференција два типа стилистичке манифестације изражајних процеса. Пре свега одредићемо основну карактеристику стила Мике Петровића и његов значај за формирање и еволуцију научнога стилистичког типа; затим ћемо разгледати стилистичке квалитете који карактеришу индивидуалну боју у путописима; најзад ћемо истаћи схватања о основним стилистичким формулама, о метафорама и алергијама.

1. Не излазећи из круга стилистичких вредности и стилистичких метода, морамо уочити основни став у несумњиво и типично научним излагањима Михаила Петровића, као и његов посебни научни став према тематици и проблематици. Изнад факата и појава, аутора интересују узроци појава и ефекти факата у науци. То је, стилистички гледано, основни став, који можемо пратити у карактеристичном развоју, према библиографији Михаила Петровића, од његове приступне беседе у С. К. Академији о активности узрока[1], чију ће тему ускоро ставити у ширу, филозофску концепцију, и већ 1905. године формулисати поглед на општу механику узрока[2], с тим да ће његова широко обухватна концепција добити свој пуни изражај 1911. године у

[1] Михаило Петровић, *О математичкој теорији узрока,* Српска краљевска академија, Глас, Београд, 1900. Т. LIX, Први разред, књ. 23, стр. 183—247.

[2] Михаило Петровић, *Покушај једне опште механике узрока,* СКА, Глас, Београд, 1905. Т. LXIX, Први разред, књ., 27, стр. 21—131.

студији о математичкој феноменологији.[3] Први став научних излагања Михаила Петровића односи се на ширење основне концепције са базом у математичким постулатима. С обзиром на принципе стилистичке композиције, научни вид излагања одликује се логиком и свестраношћу расправљања. Најзад, у стилистичком формулисању мисли запажамо изразити рељеф и хијерархију аргумената, а нарочито опозитне односе (непосредни: директни узроци; антагонистичка условљеност), какав ће принцип у лингвистици бити успостављен знатно касније у виду бинарног система.[4] Ритмика реченица је адекватна нијансирању појмова, премиса и закључака, а речи имају прецизну вредност тематиком условљену.[5]

Оваква карактеристика стила у научним делима Михаила Петровића упућује на разјашњење питања о типовима стила и на значај стила овога научника у еволуцији нашега језика.

Остављајући по страни врло опште напомене о стилу у уџбеницима теорије књижевности, иако треба поменути веома интересантне естетске анализе на часовима проф. Богдана Поповића, ипак морамо констатовати да се интерес за стилистичка проучавања са језичке тачке гледишта јавио врло касно. О стилистичком одељку у Маретићевој *Граматици*[6] не треба ни говорити, јер се ту излаже само о јасности, чистоти и лепоти књижевног језика. Тек је А. Белић, 1934. године, обратио пажњу на „београдски стил"[7], и затим посветио један чланак односу језика и стила[8], а један питању о томе шта је нетачно у изразу „босански језик".[9] Међутим, у свима овим написима било је говора о стилу уопште, са тежиштем на појавама у књижевности. Таква је карактеристика била и о схватањима женевске школе, па томе одговарају и излагања А. Белића о новим погледима на стилистику[10] и о односу према граматици.[11] Ипак, мада без посебних проучавања,

---

[3] Михаило Петровић, *Елементи математичке феноменологије*, СКА, Посебна издања, XXIV, књ. 8, Београд, 1911, XIII + 774.

[4] Roman Jacobson, *Lingvistika i poetika*, Beograd, 1967.

[5] Тако су изразито диференцирани *активитет: акција*. Први је термин употребљен за значење „тежње узрока" (I одељак), а други у наслову поглавља *Акција антагонистичког узрока који се мења пропорционално екстензитету ефекта*. Прво је ознака потенцијалне, а друго — реализоване семантичке вредности.

[6] Dr. T. Maretić, *Gramatika i stilistika hrvatskoga ili srpskoga književnog jezika*, Zagreb, 1899, In. 8⁰ Str. VI + 704 (Одељак о стилистици, стр. 659—688).

[7] А. Белић, *Београдски стил*. НЈ II, св. 7, Београд, 1934, стр. 193—200.

[8] А. Белић, *Стил и језик*. НЈ III, св. 5, Београд, 1935, стр. 133—141.

[9] А. Белић, *Босански језик или стил*. НЈ V, св. 3, Београд, 1937, стр. 65—69.

[10] А. Белић, *Стилистика у светлости Женевске школе*. НЈ. VII, Београд, 1940, стр. 35—40, 97—101, 129—134.

[11] А. Белић, *Стилистика и граматика*. НЈ VII, Београд, 1940, стр. 1—5.

наглашаван је и интелектуални стил, опозитно поетском, — тако и у универзитетским предавањима Богдана Поповића, и у мојим проучавањима проблема стилистике.[12]

Али ако би се појаве стила мериле физиолошким условљеностима изражаја[13], било би оправданије формулисати опозитност стила емоционалног и интелектуалног и говорити о интерференцијама емоционалних и интелектуалних елемената, дакле, са карактеристиком релативних условљености, јер и у поезији може бити реалистичких оријентација, а интелектуална излагања често су прожета емоционалном бојом, што је уосталом најчешће у свакодневном комуникативном изражају. Ивак, може се рећи, постоји један домен изразитѐ, апсолутне интелектуалне вредности, а то је стил науке, научни стил.

У правом научном стилу не може бити емоционално-интелектуалних интеференција. Ту је емоционалност искључена, и уколико свака личност, па и личност научника доживљује вредности емотивног карактера, могли бисмо говорити о поларизацији два квалитета, ако не и о искључењу емотивног. У основном ставу човека од науке емотивни моменат се своди само на однос према науци и према научној тематици, на љубав и оданост у томе правцу; при томе тежња ка истини, тражење и доказивање истине, као доминантни регенс, условљава оријентацију према тематици: метод, аргументацију и закључивање. Сама машта није основна као фактор, мада је пожељна као импулс, као покретачка сила, као пут ка претпоставкама, ка научним хипотезама подвргнутим неумитном процесу трагања, проверавања, одмеравања, али искључена при закључивањима. Отуда су разумљиве тежње у појединим наукама нашега доба да се ослоне на постулате математике, науке несумњиво објективнога карактера.

Тако схватање науке претпоставља јасну општу концепцију, структурну усклађеност излагања и одређен хијерархијски тип стилистичког изражајног рељефа. То показују овде изнета запажања о стилу у научном делу Михаила Петровића, о тематици, о смислу за композицију, о убедљивости у излагању рељефном, са изразито складним адекватним реченицама и прецизно употребљеним семантичким вредностима. Без обзира иа то што нове чињенице и трагања за новим методама могу водити ка новим формулацијама, остаје несумњива истина да је Михаило Петровић један од оснивача, један од твораца научног стила у нас.

Изразито стварање и формулисање научног стила представља нужну еволутивну етапу у културном животу нашега народа.

---

[12] Др. Миливој ,Павловић, *Проблеми стила.* Научна књига, Београд, 1960, стр. 9, 17.

[13] Cf. К. М. Биков, *Уџбеник физиологије за медицинске институте.* Превод, Београд, 1947; F. Adler — Columbia, *Le comportement nerveux.* Paris, 1948; Albert Burloud, *Psychologie,* Paris, 1948. — Интерпретирање у делу наведеном у нап. 12.

У својој расправи о стилу Вука Караџића[14] показао сам да је Вукова борба, у другој фази, била у ствари борба аз стил изграђен на народноме језику, и да је Караџић успео изразити такве могућности на чистом народном језику одбацујући стилистичке калупе „славјаносербских" писаца. Такав, вуковски тип стила могао је непосредно бити унет у поетска остварења, као што већ показују песме Бранка Радичевића. Али за прилагођавање научном изражају била је потребна еволуција, и први основни степен показује начин излагања Милана Б. Милићевића: линеарно приповедачко и обавештачко развијање, са потребним разјашњењима, а без праве рељефности у излагању. Са овим је синхронизиран стил Панте Срећковића, стил у коме се огледала романтичарска „патриотска" тенденција историјског излагања. — Ипак, и тако рано, постављен је први камен темељац солидном научном стилу у делима Ђуре Даничића и Јосифа Панчића, а овоме треба додати и став и начин излагања Косте Руварца, критичара романтичарског става у историјској науци.

Са еволуцијом научног рада, у додиру са савременом европском науком, већ у последњој деценији живота београдске Велике школе, а затим са формирањем Универзитета, научни живот и интензиван научни рад развили су адекватне вредности у формирању изразитог научног излагања. Тако је и Михаило Петровић постао један од твораца правог научног стила. Тај веома велики значај за културни живот у Срба он дели са неколико врло истакнутих научника, са Стојаном Новаковићем, Богданом Поповићем, Јованом Цвијићем и Слободаном Јовановићем. У правцу налажења научног типа излагања имао је своју улогу С р п с к и к њ и ж е в н и г л а с н и к, у коме је сарађивао и Михаило Петровић. Синхронизација вишестручних праваца у научној делатности, а нарочито Богдана Поповића и Михаила Петровића, била је условљења и усклађена научним ставом стеченим у Паризу, великом центру европске културе, у коме су и литерарне и математичке науке имале истакнуто место, и где се формирао свестрано схваћен, у пуном смислу научни изражајни стил. Оваква синхронизација нимало не умањује значај Михаила Петровића; напротив, она му осигурава видно место, и то не само релативно у еволуцији, него и апсолутно — валоризацијом научног стила у култури нашега народа.

2. Михаило Петровић припада и књижевности, по својим путописима. Он је умео оживети и рељефним стилом реализовати сазнања о појавама које узбуђују машту читаоца. Дочарао му је непознати или само слућени свет: далеке пределе који крију у себи чари незнанога; природне појаве које су за психу прачовека и за примитивну етнопсихологију биле персонифициране непријатељске, стравичне силе; људе разних раса, који нас, експлоати-

[14] М. П а в л о в и ћ, *Стил Вука Караџића*, Исл. Ф, књ. XXVI, св. 1—2, стр. 1—70.

сани животом, својим несхватљиво мукотрпним напорима наводе на комплексна психолошка и социолошка размишљања. Сликао је простим речима сложене ситуације, гледане на живом екрану широких и ћудљивих океана, дубоких изворишта праживота. — Да би се схватиле појаве таквог стилистичког вида, треба уочити: импулсе творачке, тематску оријентацију, процесе стилистичког реализовања, а то је управо пут којим ћемо одредити место и значај аутора у развоју путописне књижевности.

У путописима Михаила Петровића распламсала се творачка искра из детињског доба, када је, како и сам каже, читао романе о гусарима. И заиста, први његов прави путопис има наслов *У царству гусара.*[15] То нам дело, у ствари, указује на процес подсвести, који ће Петровић назвати аналошким пресликавањем.[16] Из далеке временске перспективе, деценијама притајене, динамизиране слике сећања гоне писца да их идентификује и да их схвати и разјасни утисцима реалности и конкретним ситуацијама. Та је искра управо могла оживети у самој природи аутора, у већ рано испољеним интересовањима за лепу књижевност и у врло раним књижевним покушајима. Драган Трифуновић, у поговору уз Петровићеву књигу о метафорама и алегоријама, каже да је аутор био „занесен лепим текстовима" и да је писао „младалачке песме".[17] — Зашто је пробој ових притајених склоности добио вид путописа, и који је ауторов став према својим путописима? — Први опис путовања настао је из учешћа Михаила Петровића у једној научној експедицији (1931) за одређена испитивања у поларним областима.[18] Али већ у самом почетку те књиге аутор јој истиче једино информативан карактер: каже да ће изнети само што је од „општијег интереса", али да неће бити „субјективних утисака", — њена намена није литерарна. Па ипак, потенцијални смисао за књижевност изразио се и већ наредне године, у поменутој књизи *У царству гусара*[19], као и у књигама *Са океанским рибарима*[20] и *По забаченим острвима*[21], — мада он у претходним напоменама истиче само жељу да задовољи радозналост читалаца. Велику, пак, књижевну вредност, и по тематици и по изванредној стилистичкој изражајности, има *Роман*

---

[15] Михаило Петровић, *У царству гусара.* Друго издање, 1961. г. СКЗ, 1933, књ. 267, Поучник 7.

[16] Упор. овде одељак 3.

[17] Михаило Петровић, *Метафоре и алегорије.* СКЗ, књ 405, Поговор: *Михаило Петровић — Алас,* стр. 195.

[18] Михаило Петровић, *Кроз поларну област, СКЗ,* књ. 237, Београд, 1932.

[19] Михаило Петровић, в. нап. 15.

[20] Михаило Петровић, *Са океанским рибарима,* СКЗ, Савременик, Београд, 1935.

[21] Михаило Петровић, *По забаченим острвима.* СКЗ, Поучник 9, Београд, 1936.

јегуље.[22] Поводом ових дела поставља се основно стилистичко питање: о тематској оријентацији. То је импулсиван израз врло интензивне друге ауторове личности, личности Мике Аласа, разумевање рибарског позива и технике рибарења; схватање психе простосрдачних рибара и њиховога напорнога рада и мукотрпнога живота.[23]

Развојна линија је одмерено живахна, тако да су синхронични ситуациони пресеци усклађени дијахроном динамиком: било о трагедијама појединих ранијих поларних експедиција; било о Наполеону на острву Света Јелена; било о животу и навикама Ескима; било о лову на фоке... Ток излагања остаје суверено уравномерен, без формалних стилистичких ефеката. Али, то, у општој линији мирно излагање, стварно је динамогена сугестивност. Писац ће рећи све: склоп научно проверених односа; даће све у детаљима. Па ипак, читалац не остаје у пасивној улози. По принципу Умберта Еко[24] читалац ће осетити све оно што писац осећа, оно неречено, чиме зраче мајсторски списи и чиме одише један напоран, мукотрпан живот морнара и рибара. Најчешће сцена говори сама собом о себи, онако како нам је приказано ретко дељење поштанских вести из далекога завичаја:

Задовољство је посматрати радосна лица од света одвојених људи кад им капетан брода стане делити пошту примљену са болничког брода. Сваки, чим прими писмо или пошиљку, гледа одмах да се осами иза катарке, стуба од конопца, буради са сољу, па да се преда задовољству да то отвори. Једноме јавља жена да је добила деветог сина; другоме да је породицу посетио бродовласник и распитивао се да ли имају најнужније за живот; трећем да му је и пети син истеран из школе, јер школско време проводи у чамцу забацујући струкове. Староме рибару баба послала дувана за жвакање и топле вунене чарапе; мали је добио џемпер, који му је исплела мати, и у рукаву — пакетић чоколаде.[25] Детаљи хармонизирају у целовитости ситуације, а сваки детаљ је психолошко-сликарски потез, скривајући психолошки ефекат тренутка, као о неписменоме рибару:

---

[22] Михаило Петровић, *Роман јегуље.* СКЗ, Поучник 11, Београд, 1940.

[23] Драган Трифуновић цитира сажето и карактеристично мишљење о нашем аутору као човеку: „Петровић није био само професор и научник, већ је био и алас, стручњак за питања риболова, због чега је добио своје популарно име Мика — Алас. Постао је рибарски калфа 1888, а нешто касније положио је испит за рибарског мајстора (1895)". — Он затим додаје своја запажања: „Петровић као нематематичар био је у много чему интересантан. Као научник није био повучен у оквире своје науке. Напротив. Његово кретање у јавном животу у непосредној је вези са литерарним иступањима. Имао је особину да своје доживљаје, размишљања и путовања обликује у виду путописа, репортажа, есеја и етнолошких записа." — Дело наведено у нап. 17, стр. 194—195,

[24] Cf. Umberto Eco, *Opera aperta,* Forma e indeterminazione nelle poetiche contemporanee. Milano, 1962.

[25] Дело наведено у нап. 20, стр. 192.

Неписмени рибар (а увек их има на броду) обрће писмо у рукама, чекајући да који од другова доврши читање свога писма, па да му прочита и његово.[26]

Стилистичка реализација, и у реченичном току и у реченичким склоповима одаје покрете процеса мишљења, усклађених, уритмованих, могло би се рећи — научно изливених у процесу реализације.

За ситуационе описе у стилу Михаила Петровића јаче су везане неке језичке категорије, нарочито пасивне конструкције, уз које иду аблативске релације. Тако описујући животињски свет на Каргелаку[27] каже да је *састављен* (а не: да се састоји *готово искључиво* и з *морских птица и неколико врста фока.* Израз „састављен" уноси микродинамички ефекат хетерогеног формирања, а „састоји се" значило би констатовање синхроничног стања, индиферентно према ономе што је претходило таквоме стању и условило га. При томе формално пасивна конструкција прихвата медијалну семантичку вредност, а предлог *из* одговара албативској микродинамици, и у њему не треба гледати германизам („aus"). Паралелно, у објашњавању о псима и зечевима, реализационо се наметао пасивни облик: *и једни и други су на острво унесени* (али не хетерохроно: уношени) о д *рибара и морнара,* а према пасивном облику имамо перфекатску конструкцију придева *подивљаних,* као и у резултативном објашњавању: *па су се ту* а к л и м а т и з о в а л и и р а з м н о ж и л и; пасиву, пак, одговара инструментално-аблативско *од.* — Придевска синтаксичка конструкција Н е с п о с о б н и *за летење* наметнула се аутору због каузативно-допусне супротности према констатацији *изванредни су пливачи,* дакле у значењу „и а к о су неспособни за летење", јер такву нијансу не би условљавала обична реченичка антитеза („они су неспособни за летење, а л и су изванредни пливачи"). — И у ситуационом опису микродинамика је постигнута и с т и ц а њ е м помоћу инверзије у реду речи, уз диференцирање н а ч и н а и в р е м е н с к о г р а с п о н а, као у реченици... *треба им* д о с т а м у к а и в р е м е н а *па да са* з е м љ е *полете.* — Подесна прецизност стилистичког реалиозвања у именичкој конструкцији о морским птицама: у н е в е р о в а т н о м *изобиљу и у* в е л и к о ј *разноврсности* — јер би прилошко конструисање давало много слабији ефекат („невероватно много и веома разноврсних"). Обична збирност у именичком додатку прироку *(Врло су* м и р н и и п и т о м и) добија јачи степен у функционалној збирности, у функционалном обједињавању основних оријентационих категорија *(доста* м у к е и в р е м е н а). Речи се јављају у математички прецизним вредностима. Тако за воде Кангелана каже се да их п о с е ћ у ј у *китови и морски слонови,* где *посећују* није галицизам („visiter"), већ у свом семантичком језгру носи инволвирану волутивност, — чега

[26] Ibid. стр. 191—192.

нема у итеративном глаголу долазити; али је „долазити" динамичније у набрајању *(затим* д о л а з е *албатроси)*, уместо нединамичне констатације („има албатроса"). — Одредничка функција, било епитетска, било предикативна увек је веома сликовита и прецизна: птице живе *у густим* колонијама, а не у „великим", „многобројним"; у изразу *зазиру* о д к а к в о г *непријатеља* — „каквог" је адекватније него што би било „од неког": *какав* уноси нијансу појачане виртуелности.[27]

Динамични описи, иако врло ретки, могу бити у пуној мери карактеристични. Тако је опис урагана, управо зато што је изражен сажетије, јачи по ефекту него веома познати описи Виктора Иго *(Деведесет трећа)* и Чарлса Дикенса *(Давид Коперфилд)*. Троструком квалификацијом неочекиваности почиње узбудљива слика, са јако наглашеном супротношћу утиска:

Одједном, нагло, без икаквог прелаза од потпуног затишја, отпоче звиждање и фијукање ветра све јачег и бешњег.

Затим се тежиште преноси на сам брод, са карактеристичним опозитумом динамике (врхови таласа: стропоштавање у поноре):

Брод се почео љуљати и играти по развученим таласима, који су нас, праћени хуком ветра, дизали на своје в р х о в е *и стропоштавали у* п о н о р е, *са кљуном брода* с т р м о г л а в љ е н и м *право у* б е з д а н.

Тежиште затим прелази на људе. на морнаре у борби са стихијом. Док су путници с напорима успели да се ременима вежу за постеље, очекујући крах сваки пут кад се брод „готово усправно стрмоглави у понор" — дотле се чују „од вике већ промукли гласови морнара, везаних — и неки за конопац брода, неки за какву чврсту ограду", да их не би собом однео талас „који је препљускивао чак и димњак брода", — и писац нам каже да је то све ситница према ономе што ће доћи.

У оној хуци и тутњави одједном се зачуло нешто као потмула експлозија, и у тренутку после тога и нешто налик на рушење огромне водене бране која је дотле негде задржавала воду, па је сада са велике висине испусти у побеснело море, и то баш преко нашег брода.

Тај пролом водене стихије писац упоређује са дилувијалним потопом. А затим истиче каприциозност разбеснелог урагана, који је, све бешњи, крхао катарке брода, степенице, врата, прозоре:

И одједном, изненада, све то престаде. Ветар се скоро у тренутку потпуно утишао, море се почело брзо умиривати, док је брод још неко време играо на таласима.

Писцу речи намеће сам хаос раскинуте еуфоничне ритмике океана. Ипак је занимљиво да је писац прилогу „вертикално" претпоставио глаголски трпни придев: *са кљуном брода*

---

[27] Дело наведено у нап. 21, стр. 168.

стрмоглављеним *право у бездан,* — тај облик је не само семантички изразитији од индиферентног појма „вертикално", него он указује и на последичност, на ефекат силе урагана. Али уз глагол *стрмоглавити,* који већ има изразиту семантичку вредност — употребиће израз *готово усправно.* — Таласи (и велики ураган) осећају се анимистички: они су „дизали" брод и „стропоштавали" га (у поноре). — Компарација *као перце* има у себи сву конкретност нехиперболисане ситуације.[28]

Стил Михаила Петровића нарочито карактерише актуализирање, са временским релацијама, израженим усклађеним изверзијама:

Кад је капетан нашао место за које му, по температури и боји воде, по дубини мора и другим знацима изгледа вероватно да је збориште бакалара, — брод на томе месту спушта своје велике ленгере, укотви се, па се струкови почну „китити" спремљеним мамцима.

Не треба нарочито истицати да је кроз путописе Михаила Петровића унето у фонд књижевног језика веома много карактеристичних речи из рибарства и риболовства, много специфичних термина, као китити струкове; избацивати струк итд.[29]

Путописи Михаила Петровића, иако писани без литераторских амбиција, садрже изванредне стилистичке квалитете, нарочито ако се упореде у развојној линији са лаким, доста духовитим путним сликама Љубе Ненадовића и са самоувереним ставом путописа Јована Дучића, који је увек сâм у центру сликања.

3. Из неколико мањих расправа о Београду као центру рибарства, и о Ђердапским риболовима, које припадају тематици путописа Михаила Петровића, налазимо и чланак о једном великом муслиманском гусару, али и два књижевна есеја.[30] То је у вези са избором Михаила Петровића у чланство Књижевног одбора задужбине Николе Чупића. Он се помирио са тим да у њему живе притајене вредности књижевног изражаја, и он их уводи у систем својих научних схватања. Тематику научног обухвата у постулатима математичке феноменологије проширује на домен лингвистичке стилистике у већ наведеном делу *Метафоре и алергије.* То дело у пуној мери заслужује да се стави у перспективу других стилистичких проучавања и да се одреди његов значај за научно интерпретирање изучаване тематике.

Метафоре и алергије (Μεταφορὰ κατὰ τὸ ἀνάλογον) су опште појаве лингвистичке динамике, а у стилистици имају врло значајну функцију фигуративних естетских вредности. Отуда је разумљиво

---

[28] Ibid., стр. 150—151.
[29] Дело наведено у нап. 20, стр. 140—142.
[30] Дело наведено у нап. 17, стр. 195—196.

да је већ Аристотел говорио о метафори као о преношењу речи са једног предмета на други.[31] Гербер (Gustav Gerber)[32] наводи мишљење Макса Милера (Max Müller) да је метафора прелаз од чулнога ка духовноме у песничком стварању. А са лингвистичке тачке гледишта естетку вредност метафоре анализира Роман Јакобсон.[33]

У предговору својој књизи о пеотеском језику Винифред Новотни објашњава да у одељку о метафори расправља о метафори као свесно употребљеном начину лингвистичког механизма, који у исто време представља богаћење речника.[34] Примери из енглеског језика су занимљиви, као и примери раније навођени.

Међутим, у предговору књизи Михаила Петровића, коју је са много разумевања приредио за штампу, Драган Трифуновић приказује генезу схватања ауторових и разјашњава појаве у њеној структури као целини. Напомиње да је феноменолошки интерес изражен већ 1927. године, када је Петровић расправљао о времену у алегоријама[35], а затим у расправи о феноменолошком пресликавању.[36] — Даље он наводи најкарактеристичнију мисао самог аутора из књиге о метафорама и алегоријама: „*Метафора и алегорија*", каже се ту, „имају дубљи смисао и дубљи корен у људској свести; оне одговарају једној инстинктивној и неодољивој потреби духа, која се испољава у свима фазама развића свести. Наиме, оне су спољни израз духовне потребе да једне чињенице пресликава на друге, бар привидно схватљивије или изразитије, у циљу било да се учине разумљивијим, изразитијим или улепшаним. Пресликавање је засновано на сличности између разноразних чињеница које могу немати никакве међусобне везе, али имају нечега неоспорно сличнога у својој суштини, што чини да оне личе једна на другу и да по таквој сличности једна чињеница не само да подсећа на другу,већ да се и у обичном животу, и у поезији, и у науци једна замењује другом."[37]

Основним схватањима Михаила Петровића одговара композиција књиге. Карактеристично је да он не чини дедукције, полазећи од својих јасно изражених излагања о јединству појава математичких и природних појава математике феноменологије. — Он иде индуктивним путем, класификујући стилистичке по-

---

[31] Πολετικά, упор. превод чланака наведеног у нап. 34.

[32] Gustav Gerber, *Die Sprache und das Erkennen*. Berlin, 1884, стр. 144—145.

[33] Jacobson R., *The Metaphoric and Metonymic Poles.* Fundamentals of Language. Gravenhage 1956, стр. 76—82.

[34] Winifred Nowotny, *The Language Poets Use*, The Athlone Press Univ. of London, 1962. — Prevod odeljka o metafori. Mario Suško, *Metafora* — „Kolo" Matice Hrvatske, sv. 11—12, Studeni — Prosinac, 1967, str. 452—469.

[35] Михаило Петровић, *Време у алегоријама, метафорама и афоризмима.* — Летопис Матице српске, т. ЦИ, књ. 319, стр. 185—192.

[36] Михаило Петровић, *Феноменалошко пресликавање*. СКА, Посебна издања, Београд, 1933. Т. XCVII, Природњачки и математички списи, књ. 26, стр. VII + 236.

[37] Дело наведено у нап. 17, стр. 22, цитирано у Предговору с. 13.

јаве метафорског и алегоријског карактера; расправља о њима, тражећи им заједничке чињенице; разјашњава процес ка схватању истоветности, и на тако разгледаном материјалу успоставља принцип „пресликавања", а тек за овим доказним поступком прелази на аналогију пресликавања, на општији научни значај метафора и алегорија, на изражаје типова и на улогу типова. Закључак је у тумачењу метафоре као израза споне „материјалног и импондерабилног света".

У стилистици нашега језика, и у расправљањима о појавама других језика никад није узето у проучавање толико метафорских и алегоријских појава, колико је прикупио и средио Михаило Петровић. — Драган Трифуновић наглашава да је аутор дуго прикупљао свој материјал, можда и пре 1918. године. По моме мишљењу Михаило Петровић је вероватно добио подстрека од проф. Богдана Поповића, који је такође имао врло широке погледе, и чија су сугестивна предавања о стилистици и фигуративном стилу ишла у сусрет студији Михаила Петровића о феноменологији. Веома документовани и више него занимљиви разговори Богдана Поповића о појавама у књижевном стварању нашли су у себи творачку сугестивност. То не би ниуколико умањило оригиналност и значај дела Михаила Петровића, који је за своју теорију нашао обилату документацију и дао јој размере општенаучног значаја.

Изнад свега је важно да је Михаило Петровић обратио стварно велику пажњу на метафоре и алегорије у временској оријентацији, при чему је тежиште на компарирању, тако да се из његових излагања метафора може схватити као глобално синтетичко поређење.[38] Желим нарочито да истакнем веома тачно, а за стилистику ново схватање заједничкога у основној вредности метафоре са симболима и амблемима, а алегорије са параболама. Он је органски објединио појаве које традиционалне стилистичке класификације подвајају. Ту су укључене и народне загонетке, које бисмо могли назвати и стилистичким скривалицама, а које су, у ствари, алегоријске слике.

Михаило Петровић је схватио суштину метафорског сликања. Његова тумачења полазе од поредбе п о ј е д и н о с т и између појединих појава. Ова схватања имају у себи стварање психолошке подлоге, и остављају по страни теоријска објашњења о условљености прелаза са чулног ка ономе што је духовно (Müller), а исто тако и друга објашњења која цитира Винифред Новотни. Међутим, термин „пресликавање" се наметнуло Михаилу Петровићу, као најближа кованица. То је, у ствари, запажање утисака о сличности, то је запажање сличности код појава егзактних наука, а утисака и осећаја сличности код појава језиком формулисаних. Од велике је вредности ауторово запажање о процесу који води ка формулацији појма истоветности. Из тако обухват-

[38] Упор. дело наведено у нап. 12, стр. 73—74.

них схватања о два типа научне основе („материјалне" и „импондерабилне") треба учинити само један корак, да би се констатовала диференцираност овој целовитости подређена.

Код математичких појава, код појава егзактних наука уопште, процес идентификације или утисак идентификације врши се свесно и по ефекту. У стилистичким метафорама, било у говору, било у књижевном стилистичком изражају, процес уочавања еквивалентности врши се по инстинкту подсвесно и преко емоционалне обојености. С једне стране имамо за јачину парних машина одмеравање устаљеном вредношћу коњске снаге, дакле, типично по ефекту. Супротно томе ако се за жену каже да је *ружа,* или за дете, односно за девојку да је *цвет,* за јунака да је *сабља,* ми немамо основу идентификовања у деловима, него у извесној инволвраној особини, преко њене емотивне вредности: лепота боје и мирис руже као емотивни покретачи; нежност и свежина цвета као идентификовање карактеристике девојачке младости и љупкости; животодавна топлина сунца — као особеност животне радости; *сабља,* као саставни део јунакове функције, постају еквиваленције у слици. *Змија* је метафора *опасности,* или, с друге стране — подмуклости. Речи могу бити *мед,* а могу бити и *отров.* Интерференција симболике са метафорама је очигледна, управо симболи извиру из метафорске вредности. Михаило Петровић наводи идентификацију *љубави* и *магнетизма,* а *магнетизам* има поетирану вредност привлачности.

Карактеристичну обухватност ауторових схватања показују уочене вредности митолошког карактера *(Митске метафоре и алегорије).*

Драган Трифуновић с правом констатује да је књига дограђена целина, мада у њој има понављања, и мада су у њу уграђени неки ранији радови или одељци неких радова. „Суд о такозваној поновљености не треба схватити као да је цело дело *Метафоре и алергије* репрезног карактера". По њему оне „чине једну потпуно нову целину и нов прилог Петровића својој познатој феноменологији".[39]

Морамо констатовати да при уношењу раније објављених одељака аутора понекад имамо прегруписавање у закључцима, тако у делу о квалитативним аналогијама у овој књизи је под бројем 3^0 пример о закашњавању утисака, а под бројем 4^0 наведени су закључци о запажањима у вези са мирисом; у основном тексту пак били су: први као 2^0, а други као 1^0. — При томе су у одељку под 3^0 учињене неке језичке исправке: *једну* (м. какву) *белу површину; тренутно се запажа* (м. може се запазити); изостављено *ономе* (на ономе делу те површине); осим овога, томе параграфу додат је део наредног става, у коме се помиње

[39] Дело наведено у нап. 17, Предговор, с. 15.

Макарт (Mascart), чија је теорија о закашњавању, и о чијем делу Петровић у књизи о елементима математичке феноменологије наводи тачне библиографске податке (упор. стр. 771).[40]

Књига је, дакле, целина, иако Михаило Петровић није стигао да јој дâ последње редакционе потезе, нарочито с обзиром на референце. Можемо стога сматрати да је стилистика, новином основних схватања Михаила Петровића и диференцираном анализом, добила ослонац за даље студије и за дефинитивну синтезу проблема о метафори.

4. Троструки значај Михаила Петровића за стилистику показује изразито јединство његове научне личности, и личности са изразитим смислом за књижевност и стилистичке комплексне реализације. Он је један од најизразитијих твораца правог научног стила у нас. Он је оставио путописе који стилистичким вредностима надмашују путописе ранијих фаза у развоју књижевности. Он је, такође, проблематику стила увео у ширу научну феноменолошку концепцију, дајући врло солидне основе њеној најважнијој, основној грани. Иако са три диферецирана правца, у делу Михаила Петровића, процењиваном са стилистичке тачке гледишта, јасно је изражено јединство његове личности. То се види по научном тону и објективном ставу, који одликују стил путописа, а по обухватним, рељефним и нијансираним, живим стилистичким формулацијама у научним делима. То се нарочито осећа у схватањима јединства стилистичких појава усклађених са излагањима опште научне феноменологије.

Да ли у овој синхроизацији сазвучује и изразита музичка обдареност Михаила Петровића? Или је у њој нашао прибежишта један снажан литераторски, неизражени лирски таленат? То се питање мора оставити као отворен психолошки проблем, — али се оно овде морало поставити, с обзиром на сложену и комплексну линост Михаила Петровића.

LE CARACTÈRE ET L'IMPORTANCE DE L'OEUVRE DE MIH. PETROVIĆ POUR LA STYLISTIQUE

Résumé

Une analyse détaillée permet à l'auteur de formular trois conclusions concernant le style de M. Petrović. D'abord, l'effet de ses études mathématiques représente la contribution importante à la formation du style souvant chez les Serbes. Excellent styliste dans les descriptions des voyages sur les océans perdus, Petrović a enrichi l'expression stylistique de la langue littéraire. Enfin, d'après les principes d sa phénoidénologie générale embrassant les scmènces exactes et humaines, Petrović a étudié avec les idees originales les fonds du style figuré dans son livre sur les métaphores.

---

[40] **Упор.** нап. 38. Наведено место је према студији Михаила Петровића о математичној феноменологији, наведеној у нап. 3.

ДРАГОСЛАВ АНТОНИЈЕВИЋ

ЕТНОЛОШКО НАСЛЕЂЕ МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

0. Колико нам је познато, до сада се није посебно писало о значају етнографског дела знаменитог математичара Михаила Петровића; додуше, више је узгред указивано на ову страну његове делатности, која је често тумачена као лепа књижевност. Тако је ово научно наслеђе Михаила Петровића са становишта етнолошке науке остало необрађено и непознато. Стогодишњица његовог рођења намеће нам обавезе да се и ова, за етнологију значајна страна научног опуса Михаила Петровића, осветли и да јој се одреди право место у историји етнографског стварања код нас. Али ни овом приликом нећемо моћи у детаље проучити свеколики етнографски опус Михаила Петровића, па ћемо се зато морати задржати само на његовим најбитнијим етнографским списима.

1. Средина у којој се Михаило Петровић родио и одрастао утицала је са својим старим, патријархалним начином живота да заволи народну традицију, обичаје и фолклор у којима је, како сам вели, уживао, „мрзећи из дна душе све што је помодарно".[1] На дохвату родитељског дома, још као дете долази у додир са старим рибарима, преко којих се упознаје са лепотама риболова, коме ће већ 1888. приступити као професионалац и остати му веран до краја живота.[2] У Паризу се за време студија на самом извору упознао са ондашњим сасвим новим концепцијама у филозофији и етнологији и закључцима до којих је дошао Lèvi Brüle проучавајући менталитет примитивних народа. Тај ће се утицај, нема сумње, осетити нарочито у путописима Михаила Петровића, а особито у књизи *Кроз поларну област*.

Пре него што пређемо самој анализи етнолошког наслеђа Михаила Петровића, нужно нам се намеће питање саме научне методе којом се служио у обради етнолошких проблема. Оно што прво пада у очи, то је начин директног интервјуа и опсер-

[1] Милутин Миланковић и Јеленко Михаиловић, *Мика-Алас*, Београд 1946, стр. 19.
[2] Драган Трифуновић, *Белешке о Михаилу Петровићу-Аласу*, „Браничево", св. 2—3, март—јун 1967, стр. 107—121.

вације као доминантног методолошког поступка, којима се Петровић највише и најчешће служио. За њега се, како је то констатовао његов биограф Драган Трифуновић, може рећи да је „човек строге науке, окупиран пресликавањем оригинала, са посебним даром да запази приличан број детаља"[3]; отуда тако зналачка примена и коришћење методе опсервације, тако неопходне етнолошким проучавањем. Кад је, рецимо на прекоокеанским путовањима, поваздан се интересује и распитује код капетана брода о свему што је предмет његовог проучавања, не би ли употпунио своја ранија знања, а такође разговара и са океанским рибарима[4]; уз то и сам лично учествује у свим фазама лова и у преради ловине не би ли и лично стекао потребна уверења и искуства. Међутим, интервју и опсервација, иначе познати и признати методи у етнолошкој науци, нису једини у овим и оваквим проучавањима, пошто се њима не допире у далеку старину. Свестан тога, Петровић је морао поред грађе скупљене проматрањем и обавештењем на лицу места, проналазити још и грађу сигурну из прошлости, из времена старијег но што се може наћи. Ово ће се такође осетити у његовим етнографским радовима, нарочито кад је у питању историјска прошлост. На жалост, коришћени извори се не наводе, не цитирају, како је то уобичајено у радовима ове врсте, па се добија утисак да се ради о чисто интуитивном разматрању, и писању „из главе", без навођења извора. Међутим, кад се уђе у суштину самих дела види се да је посреди само специфичан манир великог научника.[5]

Да би што јаче истакао етнолошке феномене, служи се и својом филозофски разрађеном методом научне аналогије и компарације. Често ретрокпективни начин проматрања неких појава, било да се ради о оруђима за риболов, или начину самог привређивања, обичајима и фолклору, упућује на еволутивну методу, која је у етнологији са Морганом, Спенсером, Тејлором и другима била водећа метода тога доба. Држећи се овог методолошког поступка, Михаило Петровић указује на еволутивне промене кретања и развитка неких етнолошких појава. У томе склопу проналази везе између појава и факата који на први поглед изгледају сасвим диспаратни.[6]

2. Централно место у етнографском опусу Михаила Петровића заузима група радова која систематски обрађује проблематику рибарства, једне од најстаријих грана народног привређивања. Без сумње, најважније место у томе припада делу *Бер-*

---

[3] Драган Трифуновић, *Михаило Н. Петровић-Алас*, „Математичко-физички лист", Загреб, бр. 3 за 1967/68. год., стр. 101.

[4] Милутин Миланковић и Јеленко Михаиловић, *op. cit.*, стр. 43.

[5] Драган Трифуновић, *Белешке о Михаилу Петровићу-Аласу*, стр. 107—121.

[6] Милутин Миланковић и Јеленко Михаиловић, *op. cit.*, стр. 68.

дапски риболови у прошлости и садашњости, који су били једно од најважнијих занимања прибрежног становништва дуж Ђердапског Дунава, а за многе породице једини извор средстава за живот.

Педесет и више година Петровић се интересује за риболов у Ђердапу и детаљно га проучава, лично и непосредно на самом извору, међу некадашњим ђердапским рибарима. „Тако је успео да прибере врло многобројне и знатне податке из старијих времена, пре регулисања Ђердапа, када су ђердапски риболови били надалеко чувени и када су били сасвим добро одржани сви старински начини ове гране народне привреде, а који су после регулисања Ђердапа морали бити напуштени. Особиту вредност Петровићевом делу даје и његово одлично професионално познавање рибарског заната и његово живо интересовање за све врсте рибарских послова и назива, што су некада, у најстарије познато време постојали".[7] У предговору писац изричито наглашава да је „сматрао за потребу и за дужност да прикупи о томе све што није за вечита времена отишло у заборав, из кога га доцније нико и никад више не би могао извући".[8]

И заиста, од првог одељка у коме се говори о врстама риба на ђердапским рибљим ловиштима, преко излагања о хидрографским приликама при ђердапским риболовима, и најважнијег, централног дела који доноси изванредно педантну етнографско-технолошку анализу риболова, до последњег, у коме се даје савремени пресек ђердапског риболова и отварају перспективе, писац остаје и у методи и у садржају доследан савременим етнолошким научним принципима.

Навешћемо само неке најбитније ставове до којих је у своме, за етнологију важном делу, дошао Михаило Петровић.

Кад год за то има сигурних података, аутор истиче необичну старину појединих начина рибарења, а посебно технологију. Рецимо, „риболов на Госпођином Виру био је још од давнашњих времена", каже писац, „чувен са своје издашности у крупној риби. Он се помиње у једној повељи кнеза Лазара, из времена око 1379. године".[9] Познати метални струкови у облику пецарошке удице, једнокраке или двокраке, дугачке један педаљ, на којима се моруна хватала, идентични су оним најстаријим праисторијским удицама од кости са ових локалитета, што доказује да су и ондашњи становници ових крајева ловили у Дунаву моруну, кечигу и сома.[10] А тек кад је реч о тзв. „гардама" на којима је најинтересантнији и најпродуктивнији начин риболова, иначе вековима употребљаван на ђердапском Дунаву, аутор нам доноси не само музеолошки разрађену технологију, него и гене-

[7] Архив САНУ — деловодни протокол 127/1941. год., 9. фебруар.

[8] Михаило Петровић, *Ђердапски риболов у прошлости и у садашњости,* СЕЗб књ. LVII, Београд 1941.

тички развитак овог одиста веома архаичног начина риболова о коме говоре најстарији путописи као о особитом куриозитету и као великом моћном оруђу за хватање крупне рибе.

У делу налазимо обиље зналачки записаних термина који припадају старој словенској културној баштини, а на којима аутор нарочито инсистира и труди се да их објасни. То је случај, рецимо, са карактеристичном мрежом званом „сет", коју третира као посебну етнолошку занимљивост, доказујући њено словенско порекло, и несумњив импорт који је дошао са досељеницима из старе словенске постојбине.

Аутор се у посебном одељку осврће на узроке слабљења и ишчезавања некадашњих ђердапских риболова који су претрпели јак и судбоносни удар регулацијом старог Ђердапа.

Поред овог главног монографског дела о риболову у Ђердапу, вредно је поменути и студију *Риболови у Тимочкој Крајини* у којој је аутор истакао да се риболов у овој области знатно разликује од онога што се врши у осталим деловима нашега Дунава и другим нашим рибарским водама. Уз то, треба додати и серију чланака о риболову као што су: *Да ли рибе спавају, Један поглед на закон о рибарству, Подаци о риболову на Дрини. Како се одређује старост рибе* или *Садашња експлоатација Охридског језера* и др., које је објавио у часописима Ловац, Тежак, Економист, Српски књижевни гласник итд.

За етнологију су веома занимљиви и написи одштампани у Београдским општинским новинама, а касније сакупљени као посебна књига под насловом *Београд, некадашњи центар великог рибарства.* Ово дело у целини представља право богатство за разумевање развитка једне од најстаријих привредних грана људскога рода са свим етнографским, историјским и технолошким подацима.

„Ова серија чланака *Београд, некадашњи центар великог рибарства* и етнолошка студија *Ђердапски риболови у прошлости и садашњости,* на први моменат", каже Драган Трифуновић, „могу да пруже погрешну слику о садржају и да читаоца предодреде на технику риболова и на стање рибарства у Београду и Ђердапу. Има и тога. Али, Петровић поред риба и рибарског алата јако је присутан у људима и обичајима рибарских места Саве и Дунава. Ако је са посебном етнолошком жељом писао о Ескимима и њиховим обичајима, тада је Петровић још суптилније описао људе Саве и Дунава и њихове обичаје. А данас, када ће то подручје Ђердапа нестати и када етнолози прикупљају сваку

---

[9] Ibid., стр. 55.

[10] Милоје М. Васић, *Јонска колонија Винча,* посебан отисак из I књиге Зборника Филозофског факултета Универзитета у Београду, стр. 202—203.

истину тог подручја, Петровићев рад добија неоспорну актуелност, јер у њему су се пером успели заштитити обичаји рибара приобалних места доњег Дунава".[11]

Кад је реч о рибарству, аутор се не задржава само на терену наше земље и наших народа. Он иде даље, те у своме једном од најлепших путописа *Са океанским рибарима*, на скоро близу три стотине страница, пружа математички тачно и искрено живот, рад и борбу океанских рибара са ћудљивим елементом природе на коме они проводе свој век. Мало је ко могао непосредно видети и проучити оком правог научника овај значајан етнолошки феномен. Обраћајући се читаоцима аутор наглашава да „ ово што се излаже у овој књизи, излаже се за оне којима је стало до лога да себи створе тачну, реалну слику о океанским рибарима, онаквим каквим се једино и могу видети на великој светској позорници риболова".[12] Критички се осврће на песнике и писце који су идеализовали живот рибара, особито на Пјера Лотија чија је слика рибара далеко од реалности. „Тип сентименталног рибара је фикција", каже аутор, „коју је створила машта романописаца и његова тежња је једино да узбуди. Сваки би прави рибар са осмехом одбио ореолу мученишта и сажаљење које код необавештених мека срца изазива слика што је даје романописац".[13]

Од француског пристаништа Ла Рошел, одакле је Михаило Петровић са својим сапутницима запловио Атлантским океаном у правцу Њу Фундленда преко Сен-Пјера, Миклана и Магдаленских острва, аутор доноси обиље етнографских, географских и историјских података. На пример, кад је реч о острву Њу Фундленд, аутор говори о природним и историјским условима који су утицали на етничку слику острва. Урођеници Беотуце били су староседеоци острва које су колонизатори Европљани потпуно истребили гонећи их, како каже Петровић, „као дивље звери". Данашње становништво етнографски се делило на Ирце, Шкотланђане, праве Енглезе и Французе. Главни предмет излагања у овом путопису односи се на сам риболов. Аутор описује риболовна богатства са масом података о врстама риба, начинима и справама за њихов лов. Сасвим су стручно описане технике риболова на Океану, са подацима о великим мрежама и улози појединих њихових делова, броју и распореду удица на рибарским струковима и о самом начину маневрисања са појединим рибарским алатима. Посебно се говори о рибарским лађама, начину препарирања уловљене рибе, трговини и сл. Рецимо, лов на фоке приказан је у потпуној својој реалности. Нарочито је детаљно

---

[11] Драган Трифуновић, *Белешке о Михаилу Петровићу-Аласу*. стр. 121.

[12] Михаило Петровић, *Са океанским рибарима*, Београд 1935, стр. 9.

[13] Ibid.

разрађен риболов бакалара од оних најстаријих и најпримитивнијих облика, очигледно најинтересантнијих за етнолошку науку, до најсавременијих индустријских начина лова. Поред удичарског начина лова помоћу струкова и једрењака, у коме је аутор и сам учествовао и помагао рибарима у бацању и извлачењу струка, описан је и лов бакалара помоћу великих мрежа које се бацају са парних бродова.

Посебно интересантан и важан део ове књиге чини глава посвећена Баскима и њиховим смелим подухватима у лову на китове по Атлантском океану. Нарочито је занимљив закључак Михаила Петровића који је формулисан овим речима: „Идући за китовима и не водећи рачуна о даљинама, тешкоћама и опасностима, Баски су несумњиво преплављивали Атлантски океан и много пре Колумба сагледали обале америчких земаља".[14] У својим истраживањима Петровић иде даље и изналази и писане податке из ранијих векова не би ли доказао своју тезу да су Баски одиста долазили у америчке воде пре званичног проналаска Америке. Да би још дубље поткрепио ове своје претпоставке обилази музеје, проучава њихове инвентаре и запажа да у светским маринским музејима постоје и чувају се описи и модели старих примитивних инструмената којима су се китоловци Баски могли служити на својим бродовима да би одредили положај по звездама, и то много пре Колумбових путовања.

Чланком *С ловцима морских слонова*, Петровић нам је приказао занимљив лов на ове крупне морске сисаре у близини Каргеланских острва у Јужној поларној области.

3. Нарочито значајно место у етнографском опусу Михаила Петровића заузима дело *Кроз поларну област*, тачније речено пета глава *Међу Ескимима*. Скоро монографски, али сажето и егзактно, аутор обрађује живот, обичаје и културу Ескима употпуњујући тиме у оно време једну озбиљну празнину у нашој етнолошкој науци. „Велики, научни дух Михаила Петровића који је навикао да запази и изнесе оно што је у једној области битно, најцелисходније за извесну сврху, и за кога површна мудровања немају никакву вредност"[15], презентирао нам је овим делом све оно што је од битног интереса за разумевање Ескима, становника вечитог снега и леда.

Сасвим скромно, аутор се на почетку обраћа читаоцу речима. „Далеко је од мене помисао да олако за то непозван, правим овде какве етнографске студије о Ескимима, или да излажем оно што се о њима зна и што се, вероватно, може наћи у књигама. Али мислим да ми је допуштено писати оно што сам непосредно и лично видео и на лицу места разабрао за оно кратко

---

[14] **Ibid.**, стр. 207—208.

[15] Б., Михаило Петровић, *„Кроз поларну област"*, „Политика", 17. октобар 1932. године.

време које сам провео међу њима, не водећи рачуна о томе шта се од тога зна, а шта не зна".[16]

Већ на самом почетку диференцијалном методом ће одредити све етничке групе поларних области, а посебно утврдити распрострањење гренладских Ескима, њихов број, природне карактеристике средине у којој живе и кратак историјски преглед, а затим ће прећи на сама етнолошка разматрања, истичући да поред мноштва заједничких одлика и које постоје међу Ескимима из разних насеља, има међу њима и доста великих разлика. Михаило Петровић се нарочито задржава на најстаријим елементима материјалног и духовног живота Ескима који очигледно припадају палеоетнолошким културним слојевима. Палета је прилично богата, те полазећи од антрополошких карактеристика, преко материјалне културе, начина занимања, лова, исхране, становања, одевања, преко духовне културе, верских представа, обичаја и празноверица, аутор даје скоро потпуну целину гренландских Ескима. Рецимо, детаљно је обрађен начин лова са комплетном технологијом, чије приказивање иде у музеолошку прецизност. Ту је човек и пас, оруђе и плен. Истакнути су разни начини лова, што је у непосредној зависности од самих животиња које се лове, а према којима се мења и опрема са којом Еским полази у лов.

Начин исхране, становања у леденој земуници званој „игло" са целокупним унутрашњим инвентаром, а посебно начин одевања, приказани су с правом етнографском вештином. А тек колико је дивно обрађене грађе донео одељком о духовном животу Ескима, њиховим неодређеним и нејасним веровањима, празноверицама и њиховим чудним обичајима.

Аутор је успео да повеже ту непрекидну борбу за животна средства ради одржања у суровим поларним пределима, заједно са целокупном фауном и целокупним духовним, најпримитивнијим преокупацијама Ескима. У томе је пошао од њиховог језика, који, иако сиромашан, „ипак има израза и за нешто што премаша те потребе", а уз то је истакао њихова веровања, празноверице и наивна објашњења онога што се око њих дешава. Особито је подвукао њихов смисао и укус за цртање и декоративне вештине. У свему томе велика је улога врача, „то су", каже Петровић, „несумњиво људи паметнији, умешнији и лукавији од осталих своје врсте. Они својим саплеменицима тумаче догађаје, предсказују судбину, одржавају веровања, потенцирају празноверице и прописују, према овима, што се о датом случају ваља, а што не ваља, лече од свију могућих болести, дају магијске формуле за све случајеве, итд. Без врача се ништа не предузима, а најмање лов, који је оно што је најглавније и најважније у животу Ескима".[17] Једном речју, аутор је уочио ону натприродну снагу

---

[16] Михаило Петровић, *Кроз поларну област*, СКЗ, коло XXXV, књ. 237, Београд 1932, стр. 139.

[17] Ibid., стр. 163.

коју Ескими дају природним појавама и фауни, односно, оној невидљивој сили која чини основу тотемистичко-манистичко-анимистичке религије. У неколико махова даје и запажања о психичким карактеристикама Ескима. На крају закључује да су то људи најближи примитивном праисторијском човеку, сматрајући, као Lèvi Brüle, да је њихов менталитет у основи прелогичан.

Овој врсти радова треба додати и чланке *Једна северна оаза*, *У вечном леду и снегу*, *Како изгледа путовање на санти леда*, *Коме припадају земље европске поларне области* и др., у којима се настављају разматрања о етнографским, географским, историјским и привредним карактеристикама северних поларних области, а у којима аутор тражи човека и интересује се за његов живот, рад, обичаје и размишљања.

За етнолошку науку је такође од важности и чланак Михаила Петровића *На Мадагаскару*, у коме је пружио доста нових доказа познатој теорији да је Мадагаскар доиста некада био везан не за афрички континент од кога је удаљен свега 140 километара, већ за Аустралију.[18]

4. У фолклористичке радове Михаила Петровића улазе проучавања народног мелоса, циганског начина музицирања и свадбених обичаја.

Од детињства, слушајући народну музику и песму по аласким кафанама на Дунаву, заволео ју је и зажелео да и сам научи да свира. Нарочито му се допало свирање Циганина Арсе Јовановића код кога је и почео да учи свирање на виолини.[19] Необично је волео народне мелодије, онако како их свирају „емпиријски свирачи", без нота, како је то сам изјављивао. На питање „коју музику волите?" Михаило Петровић је одговарао: „Само народну, боље рећи циганску".[20] И као студент, „народним мелосом свога народа на својој виолини уносио је у интернат Нормалне школе у Паризу весео дух и забаву".[21]

Музички обдарен, желео је да састави и један оркестар који би неговао искључиво народну музику и чувао је од заборава и пропадања. Доласком са школовања из Париза, то му је пошло за руком и основао је познато свирачко друштво Суз. Са овом својом свирачком дружином одржавао је нарочите састанке у кућама појединих чланова ради увежбавања, како би сви схватили манир његовог свирања и његових скала, односно интонације. Основни тон Микиног свирања био је виши од основног тонаноталне музике. Микино свирање имало је пет интонација

---

[18] Мих. Н. Петровић, *На Мадагаскару*, „Политика" 6, 7, 8. и 9. јануар 1936, стр. 7.

[19] Милутин Миланковић и Јеленко Михаиловић, *op. cit.*, стр. 76—78.

[20] Ibid.

[21] Драган Трифуновић, *Белешке о Михаилу Петровићу-Аласу*, стр. 111.

са овим називима: „суз" (одговара интонациаи Ц-дур), „кркалеска" (Д-дур), „дур" (Г-дур), „реп" (Е-дур), и „реп од репа" (Е-дур). Очигледно је да је по првој интонацији друштво и добило своје име.[22] Оркестар је имао дванаест чланова. Прву виолину је увек држао Михаило Петровић.

Репертоар ове дружине био је врло обилан. Бројао је преко седам стотина мелодија народних игара, 240 мелодија народних песама и око 90 других народних мелодија са целе територије Југославије. Од тога броја преко 300 мелодија народних игара давно су биле већ изостављене из праксе и ниједна свирачка дружина није их више свирала. Да би ове мелодије сачувао од заборава, Михаило Петровић је негде 1940. године са својим члановима друштва неке од тих најстаријих мелодија снимио на радију, но приликом бомбардовања Београда ове су плоче пропале. Смрт га је претекла те није дочекао радостан тренутак да обнови своје друштво „Суз" и да први свечани сатанак одржи у Београду ослобођеном од немачке окупације.[23]

Михаило Петровић је своме друштву Суз поставио и један крупан и озбиљан задатак: сакупљање народног мелоса. Тако ће он неком врстом, назовимо то анкете, прикупити преко 400 народних игара од којих се већ онда није играло ни стотинак. Од каквог је фолклорног значаја ова грађа није потребно посебно наглашавати. Поменимо само неке од тих забележених игара: Чобанско коконеште, Вујчино коло, Карамановo коло, Мечке, Ракино коло, Трапађоз, Кривка, Преврталька, Свети Павле, а које су данас сасвим непознате у народу. Само друштво Суз знало је да одсвира 27 различитих Коконешта, или 12 Влаиња, и слично.[24] Сам Михаило Петровић је изванредно свирао на виолини народна кола која су се у његовом извођењу одликовала севдалинским мелодијама и бучним играњем.[25]

Михаило Петровић је писао и о циганском фолклору, посебно о циганским музичким дружинама. Нарочиту пажњу заслужује његов чланак *Музикант Мија Јагодинац*.

„Може мислити ко шта хоће о циганској музици", каже Михаило Петровић, „али, каква је да је, она је неоспорно један саставни део наше народне културе. Обдарени памћењем за музику, добром свирачком техником задобијеном дугим вежбањем, и мислећи само о свирању, а имајући за инструмент виалину која је много савршенија од простих народних музичких инструмената, Цигани су наше песме и игре изводили увек лакше и

---

[2] Милутин Миланковић и Јеленко Михаиловић, *op. cit.*, стр. 37.

[23] Ibid., стр. 78.

[24] Б. Николић, *Агонија Цигана свирача и њихова музика*, „Политика", 7, 8, 9. и 10. април 1934, стр. 21.

[25] Милутин Миланковић и Јеленко Михаиловић, *op. cit.*, стр. 100.

лепше од народних свирача-дилетаната и јаче погађали у народу осећајне жице но ма који други свирачи, било уметници, било музиканти".[26]

Михаило Петровић поставља питање: „Да ли су Цигани свирачи праву музику унапредили, и да ли су јој били од користи? Као одговор на постављено питање аутор даје овај коментар: „У овој правој, уметничкој музици, где треба да је све на своме месту, не сме се ни у шта дирати, нити се сме шта додавати и чиме украшавати, свако мењање, додавање или украшавање, или је ван замисли аутора, и тада то више није његово дело, или је и на саму штету дела. Међутим, у циганској музици то се све ради, било да је то народна, било уметничка музика; Циганин свирач не може а да је макар и местимице не „циганизира", да јој детаље на свој начин улепша, да јој он, што он хоће да је лепо, потенцира, да јој дода украсе за наш свет допадљиве и лепе. То је оно „циганско" у музици што наш свет воли и јаче осећа но ма какву праву и здраву вишу музику, то је оно што њега дира, у чему он ужива, чиме се одушевљава кашто и до екстазе и због чега ће то увек остати као музика широке масе".[27]

Петровићев поменути чланак *О музиканту Мији Јагодинцу* говори о најбољем свирачу у Србији онога доба, а можда и ван ње о коме је први писао Тихомир Ђорђевић и своја разматрања објавио у књизи *Наш народни живот бр. 7.*[28] Ако у циганском свирању још може бити виртуозитета, за Мију се без поговора може рећи да је био прави виртоуз, како је то констатовао Михаило Петровић. Пореклом је био Турчин, а његов отац Сефер био је чувени зурлаш. Нарочито подробно Петровић описује како је Мија научио да свира и како је стварао своју прослављену дружину састављену готово искључиво од својих рођака Цигана, добрих јагодинских музиканата. Познавајући га лично дуги низ година, Петровић је био у могућности да детаљно проучи његов начин свирања, репертоар, живот, једном речју све оно што је било везано за његову дружину.

За етнолошку науку је од посебног интереса и чланак Михаила Петровића *О једној турској свадби са острва Ада-Калеа,* на којој је и лично учествовао године 1906. Пре него што ће прећи на сам приказ свадбених обичаја аутор износи потпуну етничку слику острва Ада-Калеа, као и време и начин насељавања адакалских Турака. Већ на самом почетку Михаило Петровић је изванредно прецизно истакао проблем такозване етничке изолације која се иначе најчешће јавља у географски одвојеним сре-

---

[26] Мих. Петровић, *Музикант Мија Јагодинац*, „Политика", 8. 9. 10. и 11. април 1939.

[27] Ibid.

[28] Тих. Р. Ђорђевић, *Наш народни живот*, књ. 7, Београд 1933, стр. 39—51.

динама на какве наилазимо рецимо и у другим крајевима наше земље; примера ради поменимо острво Сусак на нашем Јадрану. Надаље је веома питорескно описао оријенталну адакалску чаршију, а посебно хронолошким редом свеколике свадбене обичаје адакалских Турака.[29]

5. Из свега до сада реченог можемо закључити да Михаило Петровић није остао у своме научном опусу само уски специјалиста, него је, напротив, наше научно наслеђе задужио и обогатио и значајним и занимљивим етнографским делима у која је унео на њему својствен начин посебну дражи, одушевљење и знање. С једне стране, то су радови који обрађују ваневропски материјал етничких група и народа егзотичних крајева, а с друге, то су радови о конкретно одређеним и за аутора посебно интересантним и личним наклоностима одабраним општим проблемима о којима доноси одређена мишљења и извлачи, колико је то њему било могуће, веома прецизне етногенетске профиле. Захваљујући јачини свог математичког ума, могао је сасвим на чистину да изнесе своја етнографска проматрања, и да им дâ печат оригиналности, уосталом као што је то чинио и у домену својих математичких и филозофских наука.

Тако ће Михаило Петровић, не само својим етнографским делом, него и увелико делом свога интересантног бића ући с правом и у домен етнолошке науке чије су научне темеље у Србији поставили његови савременици, другови и пријатељи, академици Тихомир Ђорђевић, Јован Цвијић, Јован Ердељановић и остали.

---

[29] Мих. Петровић, *На једној турској свадби 1906*, „Правда", 8. 9. 10. и 11. април 1939.

СЛОБОДАН Ж. МАРКОВИЋ

ЛИЧНОСТ И КЊИЖЕВНА РЕЧ МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

Ђачко друштво Нада Прве београдске гимназије имало је у својим редовима у току друге половине деветнаестога века један низ талентованих чланова који ће израсти у врсне интелектуалце Србије. Ипак, једна генерација која је прошла кроз Наду издваја се својим успесима које је постигла у развоју националне науке и културе. То су били Јован Цвијић, Јаша Продановић, Павле Поповић, Миливоје Башић, и други који су се у школи сустигли, иако су се по старосном узрасту разликовали за по неколико година. Михаило Петровић је припадао тој генерацији, са многима од њих дружио се и био врло близак пријатељ, учествовао је у раду Наде, али није био њен члан.

Нада је имала превасходно литерарни карактер. У њеном окриљу су се стицала, поред књижевних, и прва дубља сазнања о филозофији и савременим погледима у свету, о природним наукама и новим открићима, пробала се преводилачка пера испод којих су излазили зачуђујуће зрели и садржајно богати радови, учило се ту лепој речи и ораторској вештини. Младим људима који су били наклоњени хуманистичким наукама, на пример филолошким, нису била страна сазнања из других области, на пример из природних, и обратно — природњаци су често били књижевни сладокусци и пробали су да кажу своју реч о неком филозофском или литерарном раду и проблему. То је била клица која је, без обзира на касније стручно опредељење и животни позив, допринела да се пријатељевање из ђачких и студентских дана настављало и у старије животно доба. Често, уз младалачке љубави и природне предиспозиције, те „ђачке вежбе" су биле доживотни подстицај интересовањима за све области духовног и научног живота; не ретко, оне су биле и охрабрење за реализовање појединих мисли и инспирација. Овога рода је било пријатељевање и друговање Михаила Петровића са Павлом Поповићем, Јашом Продановићем, Јованом Цвијићем, Миливојем Башићем, Јеленком Михаиловићем, касније са Стеваном Сремцом и другима.

У оскудним приручницима и студијама из наше науке и културе, нарочито у малобројним лексиконима и енциклопедијама, углавном се говори о Михаилу Петровићу математичару, научнику који је у природним наукама стекао светски глас, а само се каткада, при крају стидљиво помиње да је писао и путописе. Таквим разврставањима чини се неправда овој снажној и свестраној личности. Он се са успехом огледао у неколико научних и културних области, постигао је запажене и трајне резултате, био је гласовит научник, али и уметник. О многостраном и интензивном интересовању и раду у разним областима може нешто да каже и податак да је однос броја његових библиографских јединица из математичких наука и из нематематичких области (етнографија, биологија, путописи, фељтони, књижевни есеји, полемике о културним питањима и други) приближно једнак.

Низ предуслова је омогућило да се испољи богата личност Михаила Петровића. Поред погодне средњошколске климе која се осећала у Нади и студије су помогле да се развија и задовољи његово свестрано интересовање. На Великој школи у Београду наставни планови су упућивали студенте на врло широку природњачку и хуманистичку наобразбу. Без обзира за коју ће се струку у своме животном позиву определити, један студент природословних наука равноправно је полагао математику, физику, хемију и биологију. Захваљујући таквој наставној оријентацији Михаило Петровић је као студент савладао основе доста разнородних области из природних наука. Уз то, слушао је психологију и филозофију код Љубомира Недића. Све је то било значајно за његов каснији научни и књижевни рад. Широко је изучавао природу и успостављао скале узрочности и вредности појединих уочених облика на материји коју је студирао. На томе почивају његова настојања и успеси да сагледа целине, његови доживљаји природе и виђења света које је дао првенствено у својим путописима.

Математичком феноменологијом и феноменолошким пресликавањем Михаило Петровић је поставио основ општој феноменологији према којој се у појавама из свих области, како природних тако и хуманистичких — самим тим и језичких и литерарних, — налазе заједничке функције и закономерности. На њој је грађена и најсавременија методологија књижевно-теоријских истраживања. Њега је занимао узајамни однос природних и духовних појава. Својом студијом *Метафоре и алегорије* показао је резултате истраживања тих узајамности који и четврт века после његове смрти имају своју вредност. Суштина Петровићевог метода огледа се у разврставању материје која својом структуром имплицира заједничке црте у друштвеним и природним појавама. Полазио је од чињеница, као првог фактора, и откривањем њихових међусобијх узрочности градио схватање и представу о природним и животним видовима који су многим нитима повезани у системске целине. Те целине нису често на први поглед уочљиве, али су увек присутне у подтексту као суштина појава. У ствари, у откривању и сагледавању тих узајамности између живе и неживе материје, између човека и природе, у успостављању њихових законитости и система Михаило Петровић је видео сврху науке и уметности и налазио им заједнички именитељ. Његов посебан дар за лак и леп израз у комуницирању омогућио му је да резултате својих сазнања јасно и прегледно саопшти, да им удахне живот. Природне појаве које је уочавао пратио је са свом драматиком њиховог трајања и успевао је да их приближи и лаику, а да оне од своје суштине и основних вредности ништа не изгубе (пример, *Роман јегуље*).

Након дипломирања на Великој школи Михаило Петровић је студирао у Паризу четири године. То време је максимално користио за своје математичке студије. Међутим, не сме се заборавити да су услови за приступање студијама захтевали широку општу културу и да ју је Михаило Петровић на испитима показао. Поред успешног студирања одређене научне дисциплине, он је имао отворене очи и за целокупни друштвени и културни живот у Паризу, Француској и Западној Европи. Извесни његови написи показују одлично познавање најзначајнијих музеја и збирки (нарочито поморских). Био је то у правом смислу млади вредни човек који је ангажовано упознавао и упијао у себе све видове живота. У Паризу је склапао познанства и пријатељевао са познатим математичарима, али и са истраживачима других области, путницима, радозналцима разног соја и са уметницима. Његов круг интересовања је широк, круг пријатеља такође. У том кругу књижевници, књижевни историчари и љубитељи лепога имали су видно место, што је, уз београдска пријатељевања, неоспорно допринело да Михаило Петровић развија свој став према књижевности, да продужи са неговањем свога израза на који је обраћао пажњу још у гимназијским данима.

По повратку из Париза Михаило Петровић се укључује у научни, школски и друштвени живот у Београду. То је последња деценија деветнаестога века, када покушаји и напори да Србија и Београд закораче у модерни живот и свет, достижу кулминацију, али и када се јављају супротности тога настојања и последице сукоба новога духа са традиционализмом и примитивизмом. У домену свога деловања на Великој школи Михаило Петровић ускоро постаје активни чинилац прогреса. Он је на подручју математике развио и створио атмосферу научног рада и изграђивања подмлатка. Тиме се уклопио у интензивни интелектуални живот Београда. Била је то ера научног стваралаштва у којој су се показали у пуној својој величини Јован Цвијић, Јован Скерлић, Богдан и Павле Поповић, Александар Белић, Јеленко Михајловић и Михаило Петровић. Било је то златно доба у успону наше науке, доба у коме су ударени темељи савремености.

Истовремено, у Београду је тада цветало уметничко и књижевно стваралаштво. Боемија је, нарочито међу уметницима, била узела маха. Од боемије и њеног утицаја нису остали имуни ни научници, а нарочито је то било видно код Михаила Петровића. Његово пријатељевање са Павлом Поповићем и Стеваном Сремцем било је мост ка књижевним круговима у којима се неговала лепа реч и досетка, у којима се сагоревало у брилљантном усменом говору. Осим тога, његово дружење са људима свих занимања и категорија, а нарочито са рибарима, по којима је добио надимак и био познат као „Мика Алас", проширивало је круг њеног кретања, али и говорило о својеврсном боемству. Михаило Петровић је волео друштво (није био чест кафански гост). Био је један од покретача и стубова друштва С у з, радо је учествовао на седељкама и у разговорима био запажен по врцавим, оштроумним досеткама и анегдотама, које су се одликовале сочношћу израза и духовитошћу. То усмено стваралаштво на седељкама, које је остало незабележено, чији корени сежу до далеке прошлости, било је одушка али и исцрпљивање снаге и оставило је своје трагове у Београду све до наших дана.

Све ово говори о личности Михаила Петровића, о околностима и видовима у којима се она развијала и испољавала, али и посебно говори о његовој блискости са књижевницима и књижевношћу. Паралелно са његовим стасањем у научника израстала је и ковала се његова литерарна реч од које из млађих дана није остало много писаних трагова. Тек у позније доба, двадесетак година пред крај живота, у књижевним часописима и културним рубрикама листова били су чешћи записи Михаила Петровића, а у четвртој деценији овога века Српска књижевна задруга издала је у својим едицијама пет књига његових путописа, којима се уврстио у наше најплодније путописце.

У овом опусу за који су многи рекли да је популарна наука, Михаило Петровић је остао на пољу својих интересовања за природу и природне науке, истина нешто више залазећи у географију, етнологију и биологију — нарочиту пажњу посвећујући води и рибама, својим љубавима и страстима. Своја запажања и виђења он је систематизовао и саопштио у форми која не само да побуђује интерес и доноси сазнања, већ изазива доживљај сусрета и упознавања са новим видовима живота. Тиме је премостио ону често видљиву границу између науке и уметности.

*

Специфични карактер путописног, приповедачког и есејистичког дела Михаила Петровића произилазио је, пре свега, из његовог схватања тог стваралаштва. Сматрао је и често, нарочито у уводној речи у своје путописе, истицао да рад овакве врсте „насигурно и ниуколико не припада лепој књижевности".

Природа, живот, мора и бескрајни океани својим чарима, али и дивљинама, одушевљавали су писце, инспирисали их и распаљивали њихову фантазију, налазили своје место у књижевним делима. Међутим, Михаило Петровић је тврдио да су представе које су дали песници о ономе што их је инспирисало, у ствари, конструкција у коју су уплетени детаљи за ефекте, а који заузимају централно место и искривљују праву слику о животу, о океанима, о риболову и нарочито о лику рибара. Уместо те деформисане представе он је желео да пружи у својим написима „тачну, реалну слику о океанским рибарима, онаквим какви се једино могу видети на великој светској позорници риболова. Ако читалац сам нађе у томе местимице и какве поезије, што се овде ни најмање није имало у виду, ова бар неће потицати од паразитских примесака који за реалну слику не значе ништа, већ само од онога што ствар сама собом носи." (*Са океанским рибарима*, стр. 9). Дакле, иако наглашава да његов путопис не припада лепој књижевности, он ипак дозвољава могућности да се у њему може наћи поезије, али поезије коју испреда сам живот. Другим речима, Михаило Петровић је сматрао да писање о човеку, животу и природи треба да буде егзактно, верно ономе што се сусреће, а богатство феномена који се могу видети, уколико се верно пренесу, сами собом су лепота и поезија.

Овако посматрајући своје „путописне забелешке", како их је често називао, Михаило Петровић се трудио да се не расприча, да не пусти машти на вољу, већ да остане „регистратор" онога што је видео и што је дознао, правећи екскурзије само утолико уколико је било потребно да их ризницом свога знања и своје информисаности објасни. Чак је избегавао да открије своје емоције које су се рађале из додира са необичним природним облицима и појавама или при сусрету са људима који се само у ретким приликама могу видети и упознати, као што су Ескими. Отуда су изостале егзалтације и усхићења; изневерене наде или незадовољства, дакле непосредни емотивни однос према појавама и чињеницама које је сазнао и изнео. Отуда, ако се не би имала у виду целина његовог дела, могло би се пасти у заблуду и погрешити па у детаљима и говору чињеница превидети пригушени доживљај, који је у подтексту, рекло би се у другом плану, а који је суштински присутан, стварни покретач нових виђења и израз односа човек-природа.

Спољни, игзактни вид литерарних записа Михаила Петровића резултат је доследно спровођеног ауторовог става према своме тексту, његовог страха да не изневери истину и његове економичности у излагању суштине ствари. Настојао је да са што мање написаних речи искаже срж истине. Његов писани текст разликује се и од његовог усменог излагања које је остало у живом сећању савременика, а које је увек било емотивно обојено. Управо та несагласност и указује да је у процесу настајања његов писани текст био подређен једном систему схватања изгледа и функције писане мисли, да је његова реч била условљена ставом аутора о њеној документарној улози у записима. Такво схватање је више опредељивало његове записе да буду популарна наука него књижевност.

Један одломак из путописа *По забаченим острвима* у коме говори о острву Кергелен могао би бити илустрација приповедања Михаила Петровића. „Данас, када су Кергеленска острва прилично добро проучена и када се на њима развила велика ловачка индустрија, она нису баш онаква како су оставила утисак капетану Куку који их је назвао „Острвима Очајања". Клима је острва доста умерена, без претеране и хладноће и топлоте. Најхладније је од маја до августа и тада се средња температура одржава у близини нуле, мада покашто има и јаких мразева. Од септембра температура се диже, достиже у фебруару свој летњи максимум, па од марта поново почиње опадати. (...) Али, пошто се острва налазе насред неизмерног јужног Индиског океана, незаштићена никаквом континенталном масом, изложеа су преко целе године сталним и јаким ветровима. Ти ветрови и чине да је бављење на њима веома мучно, тешко издржљиво. Због ветрова не може се на острвима одржати ни једно дрво, иако би то било могуће према температури и свим осталим приликама. Инсектима су закржљала крила јер их због ветрова не могу употребљавати. Стене на обали су истругане, местимице и углачане, од обалског песка који вековима дижу ветрови са плажа". (стр. 248).

Овај текст би могао репрезентовати стил Михаила Петровића. Подаци, чињенице, открића, последице и узроци систематизовани и прегледни, довољно јасни и занимљиви и етнографу, и биологу и географу. Речени су најкраће, без метафоре, без симбола, без поређења. Међутим, у свести остаје урезана представа, слика једног необичног поднебља, сурових животних услова. А у целом наведеном одломку субјективни однос писца према свему виђеном носи једна једина реченица „да је бављење на њима веома мучно, тешко издржљиво". Или још даље, емотивно у том субјективном односу интониране су само четири речи: „веома мучно, тешко издржљиво", које чине две синтагме и изражавају једну благу градацију. Током и односом чињеница припремљено је да у значењу и функцији ове синтагме буду носиоци ствараочевог става и истовремено кулминативни израз једне атмосфере, њена основна боја. Својом малобројношћу и сажетошћу — два синтагме, по две речи — оне су визуелно и формално подређене осталим сазнањима из текста, али су својим положајем и улогом неопажени носиоци суштине и повезаности једне егзактне представе, помажу да се она претвори у слику, да се може замислити и да остави утисак, то јест очовечују је, дају јој душу. А то је већ степен у коме се научни запис Михаила Петровића преображава у књижевни текст. Дакле, научност и уметност су се под његовим пером поистоветили.

У четвртој деценији овога века Михаило Петровић је написао и издао четири књиге путописа и спис *Роман јегуље*. Својим путописима *Кроз поларну област* 1932, *У царству гусара* 1933, *Са океанским рибарима* 1935. и *По забаченим острвима* 1936. уврстио се међу најплодније ствараоце свога доба. Његови путописи немају маршруте са устаљеним правцима којима се крећу пословни људи или туристи, нити се у њима описују предели о којима има речи у лексиконима и земљописним уџбеницима. Пре свега, реч је о пространим океанима и мало познатим пределима и свету. Путописац се отиснуо на пут као члан истраживачких експедиција које су се плански усмеравале у непознато и непредвиђено. Научници, радозналци путују у пределе који пружају чари откривања и сусрета, а који су у свести лаика под велом романтичарских описа. Било које путовање Михаила Петровића није имало у опису схему устаљености; и у случајевима када је било постављено планско кретање, интересовања нашега писца имала су толико широк и разноврстан спектар да се нису могла подредити никаквим унапред постављеним задацима. У његовим запажањима осећа се сједињено око природњака и душа животног сладокусца, резон позитивисте и визија која је по необичности блиска романтичарству.

Судећи по познавању и описима мора, живота у води и риба, по казивању о острвима, њиховој природи, историји и становницима, а имајући у виду страст пловљења и риболова, Мика Алас је зналачки продирао у један специфичан живот и свет, тражио их, борио са њима, откривао их и саживљавао се. У путописима Михаила Петровића човек, његов ум и достигнућа, који се често у прошлости налазио и застајао пред тајнама природе и био немоћан или савладан њеним феноменима, све више постаје надмоћнији над природом, продире у њене непознанице, савлађује је знањима, напретком и развојем својих оруђа. Михаило Петровић супротставља у написима прошлост и савременост, немоћи и моћи, почетке и достигнућа да би показао како је човек победник, како су знања основа његове победе. Примера ради, некада су људи отиснути у Сарагаско море, било због радозналости, случаја или несреће, постали заробљеници алги и на својим једрењацима лагано умирали немоћни да избегну злу судбину. За савременог човека у Сарагаском мору се више не крију зле силе, а опасности су сведене на минимум.

Познат као риболовац, Мика Алас, писао је о стручном хватању рибе, говорио зналачки о њеној припреми и сладокусном ручку са пријатељима. Међутим, та страст, савладани занат и отворени апетит, које је и у животу богато поседовао, у путопису подређени су разлагањима о сложености живога организма, његовој историји, занимљивости и извору нових сазнања чије је усвајање и савлађивање изазивало безмерно задовољство. Колико је трајна његова радозналост може се видети ако се упореди опис живота јегуље и скица мукотрпног пута којим се дошло до сазнања о њој које је записао *У царству гусара* 1933. и развијена студија у *Роману јегуље* којом је исцрпео, након девет година, не само појаве које се јављају у животном путу ове интересантне и дуго загонетне рибе, већ и историјат и метод како су истине о јегуљи откривене.

У записима Михаила Петровића при сваком представљању објекта ауторове пажње изразита је његова историјска димензија. Истичући разлике између прошлости и садашњости он имплиците говори о томе колико је порастао човек. У опису Саргаског мора, које је познато из Жил Вернових романа, прошлост је оличена у стравичним страдањима морепловаца са једрењака који су се нашли у загрљају алги, а савременост се огледа у тријумфу знања и технике којима се користи данашњи човек, и којима су природна чуда савладана, а људи ослобођени страха.

Лик човека у Петровићевим путописима није индивидуализиран. Он не гради јунаке појединце. Код њега људи са именима или безимени стапају се у заједнички лик, који је лоциран у прошлости или савремености, али који само тешкоћама или лепотом живљења изражава смисао постојања и тежњи за сазнањем. У ствари, његова присутност у путопису остварује ону хуманистичку основу рада. Опис пасата, поларних предела, океана и мора, јегуље, Бермудских острва, Ескима, ледених брегова и великих таласа — давање основе њихове природне и историјске појаве и показивање како изгледају у очима путника — уједно је показивање њихове повезаности са судбином човека и његовог положаја у односу на њих. Но, при том, нигде нема историје конкретног човека па био он гусар коме је име речено, рибар или безимени Еским. Претежна пажња је посвећена информацији о природним појавама и облицима и о њиховом утицају на људски живот. И када писац помене судбину појединаца, онда је то тако кратко и епизодично (као што је случај са затвореником на Бермудским острвима који прети да ће пробити дно затвора и потопити своје чуваре, или је то име којег гусара трговца, истраживача или војсковође који је доживео успех или пораз, али иза себе није оставио превише материјалних трагова, већ је остао као део легенде или као историјски помен.) Не говорећи о човеку директно, не изграђујући литерарног јунака, Михаило Петровић је у ствари писао само за човека, рекао бих чак онога обичног, коме су научне дубине познавања живота неприступачне, да би показао колико су свет и природа разноврсни и како се у односу на њих испољавају људска моћ и немоћ, како их је тешко упознати и савладати.

Обично се каже за људе који се баве двема различитим областима, да им је једна од њих поље одушке, пражњења и рекреације, да би могли да као прави ствараоци дођу до израза у другој. Сличне мисли су изречене и о Михаилу Петровићу. Међутим, резултати и његови домети у разним областима, страсност њиховог извођења и њихова научност, наводе да се о њему мора нешто друкчије судити. Пре свега, он је свестрана личност, која је залазила у више подручја из унутрашње побуде и нужности, да би испољила себе. Његов тако привидно разнородни рад био је у ствари допуњавање сазнања из разних области, до пуне комплементарности закључака на којима је могао да гради један целовит поглед на свет. Та ширина увида биће изражена касније у његовој феноменологији, којом је обухватио тоталитет животних испољавања и којом је поставио основу многим погледима и савременим методама прилажења разним научним областима и изучавању њиховом. Оне су значајне и у књижевним истраживањима. Његово до сада непознато дело *Метафоре и алегорије* изучава примену феноменологије на подручје израза — дакле, залази у естетику и теорију књижевности. Полазећи од појединачног у једној специфичној области као што је књижевност, он је сагледао законитости, уопштио их, повезао са другим областима и створио систем.

Сигурно је да књижевни рад Михаила Петровића нема у историји наше књижевности онај значај који има његов научни рад у области математичких наука, нити је пак његова књижевна реч одјекнула у своме времену оним ехом који су достигла његова открића у природним наукама. Ипак, његово бављење књижевношћу и естетска вредност његових записа занимљиви су не само као подаци за осветљење ове свестрано генијалне личности, већ као аутентичан израз једне стваралачке природе, једног времена и једне атмосфере у средини у којој је Петровић Михаило живео и деловао. Можда и бежање из те средине и уношење даха далеких мора и острва у њу нешто значе.

За књижевног историчара је исто толико значајно да сагледа уметничку вредност и особеност стваралаштва Михаила Петровића, првенствено путописног, о коме је, узгред буди речено, до данас било мало речи. Да види није ли оно у сенци његових достигнућа у природним наукама и у каквом односу стоји према њима. Закључак би био да књижевно дело Михаила Петровића има своје аутономно место у српској књижевности — посебно у путописној публистиги, и да не може бити подређено његовим открићима у природним наукама, већ тек заједно са њима говори о величини и појави једног изузетног лика.

DINKO MOROVIĆ

HISTORIJAT ISTRAŽIVANJA JEGULJE, ANGUILLA ANGUILLA L.

Malo je koja riba pobudila toliku znatiželju prirodoslovaca, kao što je to slučaj s jeguljom. Nije to bilo bez razloga budući da su način života i ustrojstvo te ribe zbilja interesantni. Dovoljno je samo spomenuti način njenog razmožavanja, otrovnost njene krvi, njenu lucifugnost, ili mogućnost široke adaptacije kako na život u moru tako i na život u slatkoj vodi, kao potvrdu da s zaista radi o organizmu izuzetne fiziološke sposobnosti adaptacije uslovima sredine.

Poznato je da je već Aristotel iznio nekoliko momenata iz života jegulje koji su ga frapirali, a naročito pojava da nije mogao uočiti u njenoj unutrašnjosti reproduktivne organe.

Historija znanstvenog proučavanja jegulje počinje u XVII st. kada je Redi (1684) opisao njenu migraciju iz vode u more. Kasnije je Leuwenhoek (1692) pogrešno opisao mokraćni mjehur kao da bi to bio jeguljin spolni organ, a nađene nametnike u njenom tijelu smatrao mladim jeguljicama. (Pojavu nematoda u trbušnim organima jegulje i danas ribari tumače na isti način!). Još je i Linné u XVIII st. podržavao pogrešno mišljenje o reprodukciji jegulje, budući da je napisao: Anguilla parit vivipara. (Ovo je zapravo iskazano mišljenje Artedia čiji je rukopis o ribabama Linné sredio radi prerane smrti autora).

Viviparitet jegulje zastupa i Lacépède (1800) u svom djelu: Histoire naturelle des poissons, gdje piše: L'anguille vient d'un véritable oeuf, comme tous les poissons, mais cet oeuf éclôt le plus souvent dans le ventre de la mère ... Une pression sur la partie intérieure de celle-ci facilite la sortie des petites anguilles.

Mišljenje o viviparitetu jegulje bilo je veoma rašireno, a pogodovalo mu je i to što su prirodoslovci utvrdili da ie riba *Zoarces viviparus* živorodna, a istu, kao što to piše Bertin (1942)[1] još

---

[1] Bertin, L. 1942. Les anguilles. Paris, Payot. Ovdje spominjemo da i kod nas u Jadranu ribari vjeruju na pr. da riba Motella vulgaris rađa ugora (Conger conger), pa istu zovu: ugorova mati.

i danas ribari na Baltiku nazivaju jeguljina majka (Aal mutter).

U XVIII st. Mondini (1777) objavljuje rad: *De anguille ovariis,* precizno djelo u kome detaljno opisuje i ilustrira ovarij jegulje. Mondini donosi uporedbu jajašca jegulje s onima ugora i murine. Radi tog preciznog rada i uspjelih crteža u starijoj literaturi se ovariji jegulje nazivaju: *organa mondini.*

I glasoviti Lazaro Spalanzani obraća pažnju na ovu ribu i u jednom svom putopisnom djelu opisuje jegulje iz jezera Comacchio u Italiji.[2]

Spalanzani opisuje njihovu migraciju (ulaz mladih jeguljica iz mora u slatku vodu i migraciju odraslih iz rijeka i potoka u more), dotiče se problema reprodukcije i viviparitete, te zastupa mišljenje da treba s jeguljom još eksperimentirati i proučavati da bi se riješila zagonetka njena života.

U XIX st. ima dosta radova o jegulji, najveći broj istih je fiziološke naravi. Radi svoje lake adaptacije, jegulja je predmetom mnogih akvarijskih istraživanja. Studira se njena krv i daju se precizni podaci o toksicitetu. Polovinom tog stoljeća Kaup (1856) opisuje *Leptocephalusa* i ne znajući da je to larva jegulje. Čim je Syrski (1874)[3] otkrio muške spolne organe, bilo je jasno da se i jegulja rasplođuje na isti način kao i većina teleostea, a to su još potvrdili Grassi & Calandruccio (1897)[4] budući da su kod Messine ulovili zrelog mužjaka i dokazali da *Leptocephalus brevirostris* nije ništa drugo nego larva jegulje.

Time je bio otkriven jedan dio tajne koja je obavijala ovu ribu.

Drugi dio otkrivanja tajne započinje klasičnim radovima J. Schmidta, početkom XX stoljeća.[5]

---

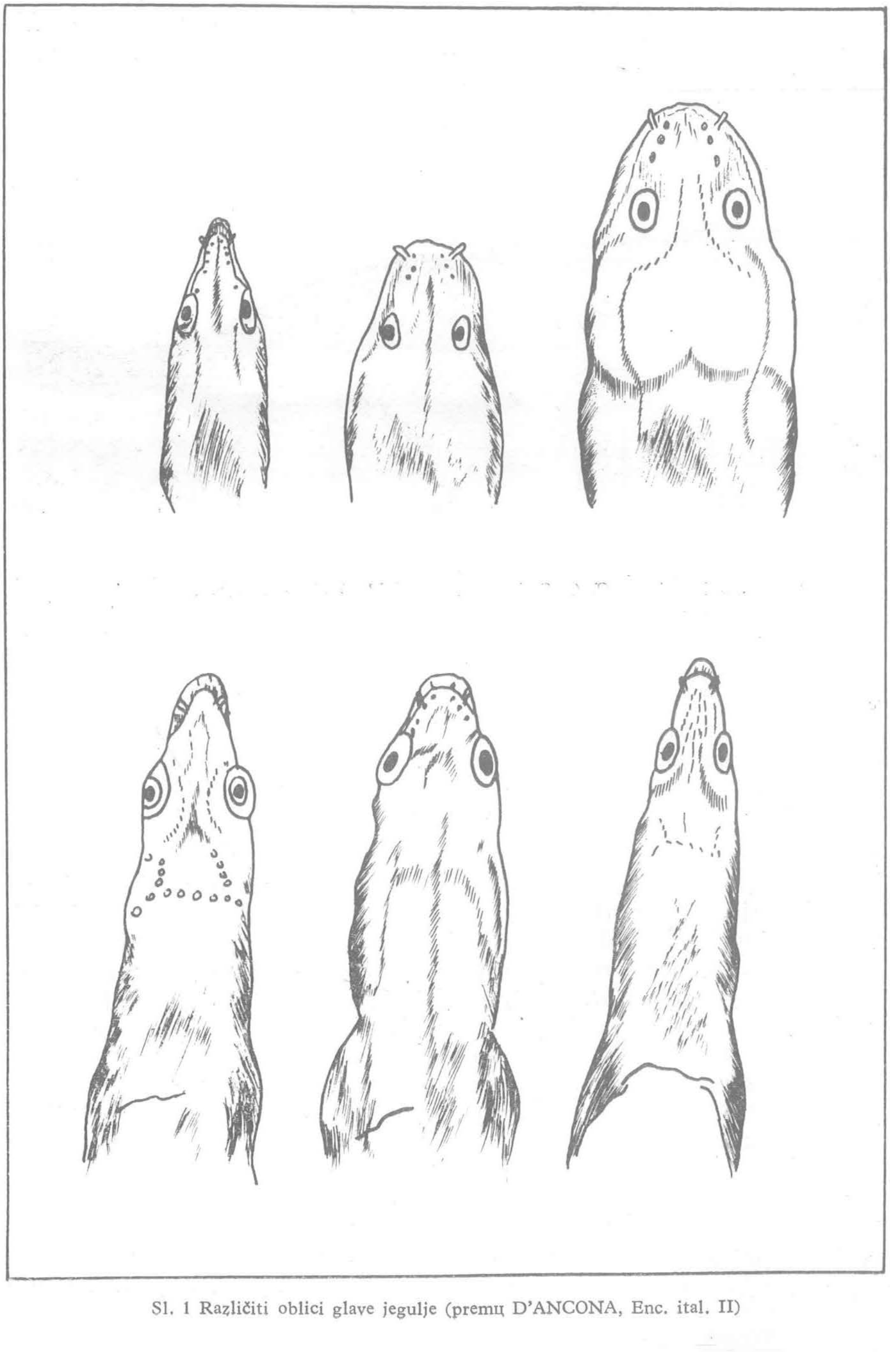
[2] *Naslov opisanog poglavlja Spalanzania glasi: Sulla storia naturale delle anguille di Comacchio. Ed. 1788.*

[3] *Syrski, S. Über die Reproductionsorgane der Aale. Sitzber. Akad. Wiss. Wien, 1874, 69, 1. Postoji niz radova koji u tom vremenu obrađuju reprodukciju i opisuju spolne organe jegulje, naročito ima mnogo radova koji opisuju pojavu hermafroditizma kod ove ribe.*

[4] *Grassi & Calandruccio, S. Descrizione d'un Leptocephalus brevirostris in via di transformarsi in Anguilla vulgaris. Atti Acad. Lincei, Roma, 1897, 5 ser. 6/1.*

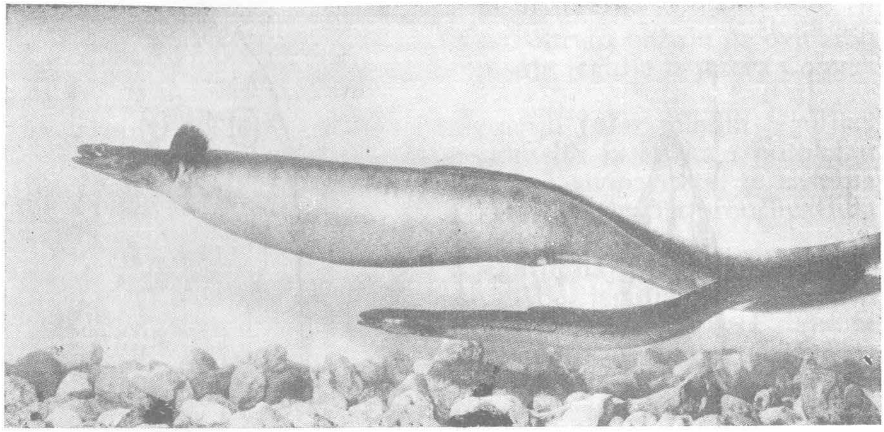
[5] *O J. Schmidtu i njegovu radu na istraživanju jegulje kod nas je najopširnije pisao prof. Mihailo Petrović u knjizi: ROMAN JEGULJE (1940). Napominjemo da ova knjiga zauzima u našoj ihtiološkoj literaturi posebnu pažnju. U vrijeme kad se knjiga pojavila u izdanju Srpske književne zadruge, nismo imali popularnih ihtioloških knjiga, osim knjige RIBE od Mihe Kišpatića u izdanju Matice hrvatske (1893), Babićeve knjige Život našeg Jadrana (1928) i knjige U. Giromete: Život našeg Jadrana, izdanje Jadr. straže, Pomorska biblioteka, kolo I, sv. 2. Petrovićev roman o Jegulji prva je naša popularna monografska obrada jedne ribe. Knjiga je plod velike erudicije pisca, satkana je na literaturnim podacima Schmitovih radova i neosporno pisana od iskusne ruke učenjaka kome je popularizacija nauke bila prirođena. M. Petrović imao je sreću da je aktivno sudjelovao na istraživačkom radu na moru u vezi daljih ispitivanja jegulje, pa je ta činjenica unijela u njegovu knjigu još jednu vrijednost, tj. obogatila je knjigu brojnim disgresijama o životu u moru i o historijatu raznih oceanografskih istraživanja.*

Schmidt je svoja istraživanja vršio od 1904—1920. Kroz te je godine bio izvršen niz zapažanja počam od obala Evrope preko



Sl. 1 Različiti oblici glave jegulje (premu D'ANCONA, Enc. ital. II)

čitavog Atlantika i Mediterana. Brodovima: THOR, MARGRETHE i DANA krstario je ovaj neumorni radnik skupljajući metodički svaki i najmanji podatak o jegulji, njenoj larvi i kretanju larve. Mjereći dužine ulovljenih leptocefalusa zaključio je da isti dolaze iz Atlantika u Mediteran, budući su u posljednjem znatno duži.



Sl. 2. Spolno zrela ženka jegulje (Pariz, 1964)

Grassi[6] se nije slagao s ovom tezom, tvrdeći da se jegulja mrijesti i u Mediteranu. Iz godine u godinu skupljao je Schmidt larve jegulje i pratio njenu metamorfozu dok nije konačno objavio svoju materijalima dokumentiranu tezu o mriještenju jegulje u blizini Bermuda, zapravo u Sargaskom moru od 20^0 do 30^0 sjeverne širine i 50 do 65 zapadne dužine. Time je dugogodišnji rad postigao cilj iako je radom iscrpljeni naučenjak umro u mladoj dobi od 56 g. (1933).

Rezime svojih istraživanja iznio je u raspravi: The breeding places of the eel. (Smithsonian Report, Wash. 1924, 25).*

Neosporna je činjenica da je Scmidt do sada najveći istraživač jegulje, da su njegovi rezultati temelj svakog daljnjeg ispitivanja biologije ove ribe. Riješivši tajnu mriještenja jegulje i putovanja larva iz Sargatskog mora prema evropskim rijekama, opisavši njihovu metamorfozu iz stadija leptocefalusa u stadij staklaste jeguljice, istraživač je postigao cilj svog života. Istraživanja jegulje idu sada u drugom pravcu i počinje razdoblje fizioloških i genetičkih studija koji se prvenstveno proučavaju u zavodu sa komparativnu anatomiju i zoologiju sveučilišta u Padovi iz materijala venecijanskih laguna.

---

[6] *Grassi, B. Nuove ricerche sulla storia naturale dell'anguilla. R. Comit. Talassogr. Ital. Memoria LXVII, Venezia, 1919.*

* *U bibliografskom popisu ne donosimo brojne radove Schmidta, budući su isti stručnjacima poznati, a mogu se naći u brojnim publikacijama o jegulji kod popisa literature.*

U ovom prikazu osvrnuti ćemo se samo na neke radove. Po broju svojih priloga o jegulji prvo mjesto zauzima Alfonso Gandolfi—Hornyold. Od 1916—1937. objavio je ovaj pisac 224 rada o jegulji. Njega posebno moramo spomenuti i radi toga što je njegov posljednji rad o jegulji tiskan u GODIŠNJAKU Instituta za oceanografiju i ribarstvo u Splitu (1938/sv. I.) pod naslovom: Observations sur l' anguille de la côte Yougoslave de l'Adriatique. Autor je obradio jegulje sa tri lokaliteta ito a) splitske luke, b) trogirskog i c) neretvanskog područja. Istraživao je spol, dužinski i težinski odnos te zone rasta ljusaka i otolita radi utvrđivanja starosti. Zanimljivo je naglasiti da je autor nakon boravka u Splitu, pri povratku u domovinu Švicarsku i umro iste godine (1937). Gandolfi—Horniold obradio je jegulje iz voda Španjolske, Portugala, Engleske, Francuske, Tunisa, Belgije, Švicarske, Italije i Jugoslavije. Radio je sam, svojim vlastitim troškom, pa je i shvatljivo da njegov materijal obrađuje uglavnom manje jegulje, najčešće staklaste. Većina radova odnosi se na proučavanje rasta pomoću ljusaka i otolita. Utvrdio je da postoje vrlo velike varijacije u obliku otolita čak i kod istog primjerka. Isto tako je utvrdio da se u akvariju ne stvaraju godišnje zone rasta na ljuskama. Radovi su mu objavljeni u španjolskim, francuskim, i engleskim znanstvenim časopisima, u časopisu tuniske stanice Salambò, a tri rada je objavio i u Notama instituta u Rovinju o jeguljama rovinjske luke i Bokanjačkog blata kod Zadra. (Note, no. 2, 7 i 8, sve 1933.)[7]

Problem determinacije spola kako ga je postavio Grassi, zanimao je od 1920. pa dalje sve do njegove smrti (1963) poznatog ihtiologa Umberta D'Anconu. U brojnim publikacijama ovaj je autor rasvijetlio problem ambienta i spola, nastavljajući tako i rad prerano umrlog Rodolica.

Grassi piše doslovno: che nelle anguille, o almeno in un certo numero di esse, il sesso viene determinato metagamicamente da condizioni ambientali; le cieche piccole sono in genere destinate a diventare maschi, mentre invece le medie e le grandi possono diventare maschi o femmine a secondo dell'ambiente in cui si sviluppano.

Ovaj podatak bio je inicijalna tačka D'Ancone za njegove pokuse. On determinira intermedijarne stadije kod mladih jeguljica i u prvom radu (1924) konstatira da t. zv. organ Syrskog može biti

[7] *Pregledajući popis radova od samog pisca (Vingt années de recherches sur l'anguille, 1916—1936, Lugano, 1936) može se dobiti slika onoga što je Gandolfi—Hornyold učinio kroz dvadeset godina. On je bio, kako je to kazao D'Ancona, opsjednut problemom jegulje, ali nije uspio dati nešto kapitalna, kao što je to slučaj sa Schmidtom ili Tuckerom na pr.*

tretiran kao *testiculum,* ali kod posebnih ambientalnih faktora može postati *ovarium.*[8]

U brojnim radovima ovaj autor proučava fenomen promjene spola kod jegulje, studira utjecaj temperature i saliniteta kao i trofičke faktore koji determiniraju koji će spol prevladati nakon larvalnog, interseksualnog stadija, u odrasloj jedinki.

Pokusi koje je vršio D'Ancona pokazali su da temperatura veoma utječe na razvitak spola. Ako je temperatura niska, od jegulja neodređenog spola razvija se ženski i obratno, ako je temperatura visoka više mužjaka. Na temelju svojih istraživanja autor je opazio da se od mladih staklastih jeguljica koje sa Tirenske obale ulaze na ušće Arna pretežno regrutiraju mužjaci, a od staklastih jeguljica koje napučuju venecijanske lagune regrutiraju se u mnogo većem postotku ženke. Svojim pokusima D'Ancona je dokazao i mogućnost direktne intervencije u promjeni spola kod jegulje, a ujedno je i zaključio da i u prirodi mužjaci, ako im je iz bilo kojim razloga zapriječena redovita migracjja u more (na pr. u lagunama) doživljava interziju spola i mogu se preorientirati u ženke.[9]

D. Tucker je postavio zanimljivu teoriju koja baca novo svjetlo na „roman jegulje" i popunjuje istraživanja o njenoj biologiji. Prema ovom autoru, evropske jegulje došavši iz rijeka u more ugibaju bez reprodukcije. Budući postoje dvije vrsti jegulja, evropska, *Anguilla anguilla* i američka, *Anguilla rostrata,* sa različitim brojem kralješnjaka, ovaj autor postavlja slijedeću teoriju: (citiramo prema Crnkoviču, kao i Tuckeru).[10]

Na području gdje su nađene larve jegulja ispod 10 mm, tj. između cca 20^0 do 30^0 sjeverne širine i oko 50^0 do 65^0 zapadne dužine, temperatura mora na dubini od 1000 m iznosi 6^0C i ista se penje jednoliko na čitavom području do 200 m ispod površine mora na 18^0C. Od 200 m pa do površine mora na južnom dijelu temperatura se mijenja od 18^0C do 25^0C sa izmjenom temperature na 100 m i do 4^0C Na sjevernom dijelu temperatura se penje u čntavih 200 m samo za 2^0C, tj. 18^0C do 20^0C.

Jaja jegulja, koja se polagano dižu iz dubina, putem se razvijaju. Nagle temperaturne izmjene u južnom dijelu Sargatskog mora šokiraju prve embrionalne stadije, a to uzrokuje da se razviju jeguljice s manjim brojem kralješnjaka od 103—111 (Med. 107 kra-

---

[8] *D'Ancona, U. Sulla determinazione del sesso nell' anguilla. R. Com. Talass. Ital. Memoria CXI, Venezia, 1924. Neko vrijeme nakon ovog rada autor napušta eksperimente na jegulji. Drugi autor, Rodolico, A. proučava ovo genesu i spermatogenezu jegulja raznih dužina i daje brojne mikroskopske slike ovocita u radu: Differenziamento dei sessi ed ovo-spermatogenesi nell'anguilla. Pubbl. Staz. zool. Napoli, vol. 13, 1933—1934. str. 180—278.*

[9] *D'Ancona, U. Nuove ricerche sperimentali sull'azzione di ormoni steroidi sulla gonade dell'anguilla. Pubbl. Staz. zoologica, Napoli, XXIX, 1957.*

[10] *Crnković, D. Nova otkrića o jegulji. Morsko ribarstvo, XI, 1959, Tucker, W. D. in: Freshwater fishes of the World, by Günther Sterba. London, 1962. str. 82.*

lješnjaka). Naprotiv, na sjevernom dijelu nema velikih i naglih temperaturnih izmjena, razvitak je larvi jednoličan i iz njih se razviju individue s većim brojem kralješnjaka od 110—119 (Med. 115 kralješnjaka).

Daljnju sudbinu određuje smjer struje. Struje na jugu Sargaskog mora imaju pravac kretanja prema američkoj obali i one prema toj obali nose one koje imaju manji broj kralješnjaka, iz njih se razvija *Anguilla rostrata*. Dok one iz sjevernog dijela s normalnim brojem kralješnjaka putuju spram evropskih obala i iz njih se razvija *Anguilla anguilla*. Prema Tuckeru nove generacije naših, evropskih jegulja regrutiraju se iz američkih.

U ovom prikazu, koji je napisan u čast uspomene Mihaila Petrovića, ne možemo se osvrnuti na rezultate brojnih radova, budući da bi to bila opsežna knjiga. Možemo još samo kao kuriozum dodati, da je potpuna spolna zrelost mužjaka u akvariju bila postignuta 1936. g. u fiziološkom laboratoriju Oceanografskog instituta u Parizu, a ženke i mužjaka 1964. g. u laboratoriji Prirodoslovnog muzeja u Parizu. U vrijeme spolne zrelosti (kako nas obavještava izvještaj C. R. Acad. Sci. 259, Paris) težina ovarija sa zrelim jajima, dijametra 1—1.4 mm, iznosila je polovinu ukupne težine tijela jegulje.

BIBLIOGRAFIJA HRVATSKOSRPSKIH RADOVA I ČLANAKA O JEGULJI[11]

ANONYMUS: Krv jegulje otrovna. Priroda X, 1920, str. 217.

ANOMYMUS: U koje svrhe služi koža jegulje, Priroda, XXI, 1931, str. 254.

ANOMYMUS: Jegulje na kopnu. Priroda, XXI, 1931, str. 255.

ANONYMUS: Lov jegulja u Neretvi modernom mrežom. Jadranski ribar, III, 1938, br. 5.

BUTIĆ, M. Tajna jegulje. Priroda, XXXIX, 1952. br. 3, str. 97—101.

CRNKOVIĆ, D. Nova otkrića o jegulji, Morsko ribarstvo, XI, 1959, br. 6.

DOJMI, L. Podzemne migracije jegulja. Priroda, XXIX, 1939, br. 9, str. 263——269, s 3 sl.

ERCEGOVIĆ, A. Putovanje jegulje. Ribarski kalendar, 1938, Split, str. 38—42, s 1 sl.

ERCEGOVIĆ, A. Evropska jegulja (Anguilla vulgaris). U knjizi: Život u moru, JAZU, Zagreb, 1949, str. 117—118.

FINK, N. Na putu u Atlantis (o biologiji jegulje). Priroda, X, 1920, str. 201—203.

GAMULIN, Ć. Tajna jednog svadbenog putovanja (život jegulje). Novo Doba, Split, 1938, br. 90, str. 35.

GIUNIO, P. Otrovne ribe. Jegulja. Higijena i tehnika, Zagreb, 1948, br. 1, 82.

GIUNIO, P. O jegulji i njenoj otrovnoj krvi. Morsko ribarstvo, I, 1949, str. 61.

GRUBIŠIĆ, F. Jegulja. U knjizi: Ribe, rakovi i školjke Jadrana. Izdanje: Jugoriba, Zagreb, 1967. str. 108—109, s 1 sl.

HIRTZ, M. Ima li u Dunavu i njegovim pritocima jegulja? Priroda, XVIII, 1928, br. 1, str. 30.

[11] *Nastojali smo kompletirati bibliografiju radova o jegulji na našem jeziku. Vjerojatno su nam neki članci izbjegli, ali napominjemo da se nismo osvrtali na neke novinske članke i bilješke.*

KALUĐEROVIĆ, I. Slatkovodna jegulja, Anguilla vulgaris. Jadranski ribar, II, 1937, br. 8. Split.

KARLOVAC, O. Tajanstveni život jegulje. Jugosl. mornar, Split, 1949, br. 8, str. 373—374, s 3 crteža.

KIŠPATIĆ, M. Ribe. Jegulja. Izdanje Matice hrvatske, Zagreb, 1893, str. 345—351, s 1 sl.

KNOP, F. Jegulje, osobito važne i odlične ribe za uzgoj. Morsko ribarstvo, XIII, 1961, str. 23—24.

MAYERHOFER, E. Jegulja. Leksikon prehrane, Zagreb, 1944. str. 137—140.

MIKASOVIĆ. D. Jegulja. U knjizi: Ribe i ribarstvo, Zadružna biblioteka, Split, 1923. knj. XXV.

MOROVIĆ, D. Lov jegulje u Neretvi. Ribarski kalendar, 1948, Zagreb, str. 106—108, s 1 sl.

MOROVIĆ, D. Godišnje kretanje ulova jegulje i cipla u donjoj Neretvi. Ribarstvo Jugoslavije, Zagreb, 1948, br. 9/10.

MOROVIĆ, D. Ubijanje jegulje kod naučnog rada. Ibid. 1949, br. 1/2.

MOROVIĆ, D. Nekoja opažanja o duljini i težini Neretvanske jegulje. Ibid. 1955, br. 2, s 2 sl.

MOROVIĆ, D. Dosadašnja istraživanja o spolu jegulje (Anguilla anguilla Linné). Ibid. 1957, br. 1. str. 14—17, s 3 sl.

MOROVIĆ, D. U morskim dubinama. O jegulji. Izdanje pododb. Matice hrvatske, Split, 1958, str. 45—56.

MOROVIĆ, D. Istraživanja o promjeni spola kod jegulje. Morsko ribarstvo, X, 1958, br. 7, str. 148—149.

MOROVIĆ, D. Bilješke o jegulji. Ribarstvo Jugoslavije, XXI, 1966, br. 5, str. 98—101, s 3 sl.

MOROVIĆ, D. Historijat istraživanja jegulje, Anguilla anguilla L. Simpozij stogodišnjice rođenja M. Petrovića, Beograd, 1968.

PAVLETIĆ, J. O životu jegulje. Priroda, XLI, 1954, br. 2. str. 65—67, s 1 sl.

PAVLETIĆ, J. Jegulja, Anguilla anguilla L. Pomorska enciklopedija, Zagreb, sv. 3, 1956, str. 687—688, s 1 sl.

PETI, V. Proučavanje selidbe jegulja. Priroda, XLIV, 1957, br. 8, str. 280.

PETROVIĆ, M. Roman jegulje. Poučnik Srpske knjiž. zadruge, 1940, Beograd, knjiga XI, str. 188 sa 75 slika.

PIETSCHMANN, V. Život jegulje. Sportski ribar, Sarajevo, 1927, br. 3—4, str. 29—33, sa 6 sl.

PLANČIĆ, J. Važnost jegulje za prehranu. Ribarski kalendar, Zagreb, 1949, str. 152—155, s 2 sl.

TADIĆ, A. Vraćaju li se jegulje evropskih i afričkih rijeka u Sargaško more. Priroda XLVI, 1959, br. 10, str. 392.

TADIĆ, A. Još o tajnama jeguljinog života. Priroda, LI, 1965, br. 1, str. 26.

SABIONCELLO, I. Jegulja — Anguilla anguilla L. — Sistematika slatkovodnih riba, Priručnik za slatkovod. rib. Zagreb, 1967, str. 72—73, s 1 sl.

SOBOL, I. Podzemna migracija jegulja. Priroda, XXX, 1940, br. 2, str. 57—58.

ŠOLJAN, T. Ima li u Dunavu i njegovim pritocima jegulja. Ribarski list, IV, 1929, br. 3—4, Sarajevo.

ŠOLJAN, T. Osebujan lov jegulja u Vranskom jezeru. Ribarski list, VI 1931, Sarajevo.

ŠOLJAN, T. Jegulja, Anguilla vulgaris, TURT. Ribe Jadrana, treće izdanje, Beograd, 1965, str. 125.

ŠRAJBER, G. Naša morska riba u riječi i slici. Jegulja, str. 21. Split, Trgovačka tiskara, 1938.

Z. Jegulje u Koruškoj. Priroda, XVII, 1927. br. 9, str. 193—194.

ДИВНА ЂУРИЋ-ЗАМОЛО

УЛИЦА МИКЕ АЛАСА У БЕГОРАДУ

0. Београдска општина је још за живота Михаила Петровића желела да једна улица у Београду носи његово име. Када је Петровић за то чуо изнео је своје мишљење да тако нешто не би требало чинити, пошто много људи не зна за њега као математичара, а када прођу године биће сасвим заборављен: „Ако општински одбор баш нешто тако хоће, ја сам најпознатији међу аласима на дунавском крају и моје ће се име дуже и радије помињати и памтити као аласа, него као професора и математичара."[1] Вероватно је други светски рат осујетио ову намеру Београдске општине. Своју улицу Михаило Петровић је добио тек после своје смрти 1943. г., када је ранија Израиљева улица у дунавском крају добила назив: *Улица Мике Аласа*[2], чиме је испуњена и жеља великог научника.

1. *Израиљева улица*, која данас практично не постоји у блоку нових грађевина између *Солунске*, *Тадеуша Кошћушког*, *Банатске* и *Јеврејске улице*, била је једна од најкраћих београдских улица. Ниједна је улица није пресецала. Почињала је од Солунске, а завршавала се у *Банатској улици*. Пролазила је кроз средину блока између улица *Јеврејске* и *Тадеуша Кошћушког*.[3]

Иако *Израиљева улица* није била ни велика ни значајна, она је врло стара београдска улица. Налазила се у старој јеврејској четврти која је заузимала простор између данашњих улица: *Тадеуша Кошћушког*, *Високог Стевана*, *Браће Барух* и *Дунавске*, са проширењем између улица *Браће Барух*, *Банатске*, *Солунске* и једнога сокака који је на томе делу некада постојао између улица *Браће Барух* и *Цара Уроша*.[4] Јеврејска четврт је у овоме

---

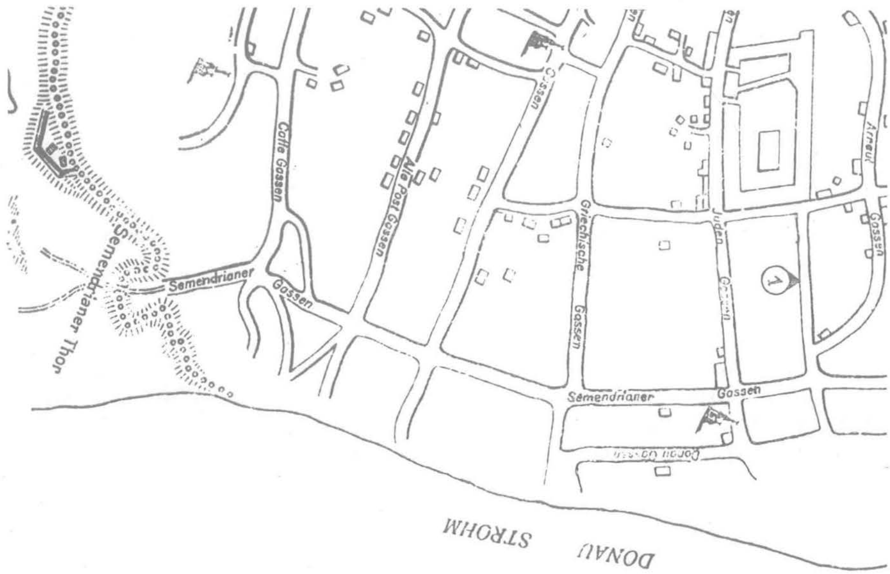
[1] Ј. Михаиловић, *Анегдоте из живота Мих. Петровића, Београд, Космос, 1946, Улица Мике Аласа, 102.*

[2] Д. Радојевић, *Београд и његове улице, Београд, Туристичка штампа, 1966.*

[3] *Разни планови Београда између два светска рата.*

[4] *Турски план Београда из 1863. г. објављен уз чланак: Елезовић и Поповић, Два турска плана Београда, Београдске општинске новине, 1—3, 1937, 65; Р. Перовић, Око боравка Доситеја Обрадовића у Београду (1807—1811), Ковчежић VII, Вуков и Доситејев музеј, 1966, 57—104.*

крају основана у XVI веку после доласка шпанских Јевреја у Београд.[5] Први помен о јеврејској четврти у Београду потиче међутим из 1663. г.[6], а она се у току векова развила и оформила у овоме крају Дорћола у близини Дунава. Јеврејска четврт је за све време турске владавине живела својим посебним животом, али је заједно са свим осталим становништвом Београда преживљавала сва зла и ратове који су преко Београда прешли у току XVI, XVII и XVIII века. Деветнаести век јеврејска четврт је дочекала у истоме овом крају и отада је почела делити судбину новостворене српске државе. Она је 1862. г. претстављала границу у овоме делу Дорћола до које су морале бити порушене све куће према тврђави, да би се добио празан простор између тврђаве и вароши, како је гласила једна од одлука Конференције у Канлици после бомбардовања Београда 1862. г. Део ове граничне линије додиривао је *Израиљеву улицу* у њеном доњем делу. У



Сл. 1 — Исечак плана Београда Ф. Бруша из 1789. на коме се виде улице: Израиљева (1) и Банатска (Semendrianer Gassen)

слободној српској држави Јевреји су се почели селити и у друге делове Београда, а сама четврт се почела губити убрзо после првог светског рата, када је настала инфилтрација српског живља у овај део Београда.

Најстарији план Београда на коме се види уцртана Израиљева улица онако како је постојала до пре десетак година, јесте

[5] Д. Ђурић-Замоло, *Стара јеврејска четврт и Јеврејска улица у Београду, Јеврејски алманах, 1965—1967, 41—76.*

[6] Otendorf, *Опис Београда из 1663, Политика, 26 март 1933. г.*

план Франца фон Бруша, Аустријанца, из 1789. г.[7] Ма да су на овоме плану први пут уписана имена београдских улица, *Израиљева улица* га није имала, што је случај и са другим мање важним улицама. У Турски план Београда из 1863. г., који није цртан прецизно, али који је драгоцен за одређивање граница јеврејске четврти, *Израиљева улица*, вероватно као мала, није уцртана.[8] На плану Емилијана Јосимовића из 1867. г., који је рађен на основу тачних геодетских премеравања, налазимо *Израиљеву улицу* са свима парцелама које на њу излазе. Тада у овој улици није било ниједне зграде од тврдог материјала, које је Јосимовић на специјалан начин обележавао.[8] Први план на коме се наилази име ове улице потиче из 1878.[9] Тада је улица носила назив *Крушедолска*, који је добила 1872. приликом првог „наименовања" свих београдских улица. Ово име улица је носила до 1896, када је добила назив *Израиљева*.[2]

За XIX век немамо других ближих података о самој Израиљевој улици, али су нам поједини писци оставили описе јеврејске четврти, који се односе на Израиљеву улицу. М. С. Петровић каже да је тридесетих година овај крај био запуштен и често плављен.[10] Б. Барбанти-Бродано, који је у Београду био 1876. г., пише да у најлепшим, жуто обојеним кућама на Дорћолу живе Јевреји, да су им куће окружене баштама, а да су опрема кућа и намештај чисти, пријатни и модерни.[11]

Све до XX века крај у коме се налазила *Израиљева улица* био је углавном стамбени, где је живело сиромашније становништво. У XX веку овде се почињу изграђивати и магацини мањих димензија.[12] Убрзо после првог светског рата почиње изградња и вишеспратних магацина, код којих се први пут у Београду примењује армирано-бетонска конструкција. Тако је саграђен магацин са приземљем и два спрата, на углу *Солунске* и *Јеврејске улице*. Он је у *Солунској* ишао до *Израиљеве улице*, којој је био окренут калканом.[13] Године 1922. поднео је молбу Д. Антоновић за подизање већег магацина, такође са армирано-бетонском међуспратном конструкцијом, од приземља и два спрата на углу *Израиљеве* и *Банатске улице*. Магацин је оштећен за време

---

[7] *Fr. v. Brusch, План вароши Београда са краја XVIII века, објављен уз књигу Д. Пантелића, Београдски пашалук пред Први српски устанак, САН, Посебна издања, CXLVI, Београд, 1949.*

[8] *Е. Јосимовић, План Београда из 1867. г., прилог књиге Е. Јосимовића, Објаснење предлога за регулацију оногa дела вароши Београда што лежи у шанцу, Београд, 1867.*

[9] *С. Зарић, План Београда, Београд, Државна штампарија. 1878.*

[10] *М. С. Петровић, Београд пре сто година, Београд, 1930, 31.*

[11] *Б. Барбанти-Бродано, Гарибалдинци на Дрини 1876, Београд, СКЗ, 1958, 124.*

[12] *Збирка планова зграда у Музеју града Београда.*

[13] *Овај магацин, веома солидно саграђен свакако после првог светског рата, порушен је уз велике напоре у току 1967. г.*

бомбардовања 1941, што доказује одобрење молбе власнику за поправку оштећене зграде.[14]

На сачуваном катастарском плану из 1921. налазимо тачну ситуацију парцела и зграда у *Израиљевој улици*.[15] Неколико сопственика стамбених зграда у *Израиљевој улици* помиње се у једноме адресару из 1922. г. То су: М. Русо, Д. Каталан, О. Леви и Б. Трпковић.[16] Један староседелац овога краја[17] сећа се *Израиљеве улице* из времена између два светска рата. Каже да је улица мало кривудала, да је имала турску калдрму без тротоара и са олуком по средини, а да су куће биле ниске, окружене баштама и двориштима.

Као и за време првог светског рата, када је доста порушен за време борби 1915, овај крај је страдао и за време бомбардовања Београда 1941. којом приликом је и гореo.[14] Тако је О. Кокановић јула 1941. поднео молбу да му се одобри поправка двеју зграда у *Израиљевој улици* бр. 6, које су страдале и гореле за време бомбардовања 6. априла 1941.

Ираиљева улица је после смрти Михаила Петровића 1943. названа *Улицом Мике Аласа*, која није била дугога века. Петнаестак година после промене назива ова стара београдска улица почела је нестајати. Из њенога пепела никао је велики савремени блок нових вишеспратних стамбених зграда и солитера.

1.1 Пошто *Улица Мике Аласа* више не постоји Математички институт и Музеј града Београда упутили су почетком 1968. предлог Комисији за споменике и одређивање назива тргова и улица, да једној другој улици у Београду одреди име Мике Аласа. Комисија је усвојила предлог Института и Музеја и са њим у вези донела следећи закључак, на својој седници од 5. априла:

„Предлаже се Скупштини града Београда да, на основу чл. 3 Уредбе о обележавању насељених места, улица и тргова (Сл. гласни НРС бр. 25/52) и чл. 146 ал. 5 Статута града Београда (Сл. лист града Београда бр. 10/64), донесе следеће РЕШЕЊЕ О ДАВАЊУ НАЗИВА УЛИЦИ ПО ИМЕНУ МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА — МИКЕ АЛАСА ДОСАДАШЊОЈ БАНАТСКОЈ УЛИЦИ, која се налази између улица Тадеуша Кошћушког и Дубровачке, општина Стари град, у којој се завршавала бивша Ул. Мике Аласа, — даје се назив МИКЕ АЛАСА.

2. На Зојгеровом плану Београда из тридесетих година XVIII века[18] први пут видимо *Банатску улицу* приближно онако како изгледа и на данашњим плановима. Одавде уочавамо да је

[14] *Архива планова Градског секретаријата за комуналну и грађевинску делатност, Београд.*

[15] *План града Београда. Израдило Катастарско одељење Општине београдске за своје потребе 1921.*

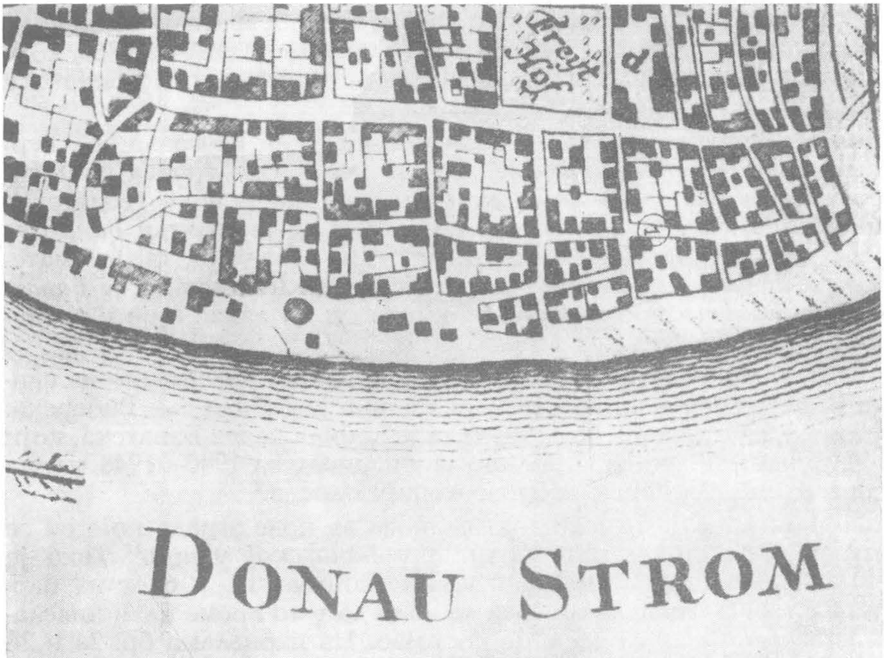
[16] *Адресар „Цео Београд", Руска мисао, 1922.*

[17] *Драгољуб Јовановић, обућар, који живи и ради у Јеврејској улици бр. 1 од 1924. г.*

[18] *M. Seutter, План тврђаве, вароши и изглед Београда око 1735.*

Банатска улица тада била стамбени крај вароши, са више ситнијих парцела и кућица.

За *Банатску улицу* и њену историју много је значајнији међутим већ поменути Брушов план из 1789.[7] На овоме плану налазимо и њено за сада најстарије име: Semendrianer Gassen — *Смедеревска улица* (сл. 1). Ова улица водила је до Смедеревске капије на „шанцу" (Semendrianer Thor), која је такође уцртана у план. Ова капија била је једна од пет капија на утврђењу око вароши Београда, које се састојало од дубоког шанца дуж кога је ишао бедем са палисадама. Ова капија се налазила на правцу друма за Смедерево, тако да је и *Смедеревска улица* била једна од важних варошких саобраћајница. Почињала је на месту приближно данашњем, код *Тадеуша Кошћушког улице*, а завршавала се такође приближно као и данас, код *Дубровачке улице*, само што је имала још један мали крак, који је водио до саме Смедеревске капије. *Смедеревску улицу* пресецало је шест попречних улица, које су према плану све ишле до Дунава: 1⁰ Безимена ул. *(Израиљева)*, 2⁰ Juden Gassen *(Јеврејска)*, 3⁰ Griechische Gassen *(Браће Барух*, која не одговара у потпуности данашњем положају), 4⁰ Apotheker Gassen (данас само у доњем делу: *Сибињанин Јанка)*, 5⁰ Alte Post Gassen (Цара Уроша, која не



Сл. 2 — Исечак плана Београда М. Зојтера из око 1735. на коме се види Банатска улица (1) одговара такође у потпуности данашњем положају), 6⁰ Мала безимена улица *(Драчка)*. Од значајнијих грађевина у овој улици постојала је једна џамија, чије име данас није познато и која није уцртана ни на једном другом плану Београда. Налазила се на страни улице према Дунаву, на углу Јеврејске, на месту где је данас велики магацин из 1921.

Део *Банатске улице* око *Јеврејске* обухватала је некада Јеврејска мала, што се лепо види на Турскоме плану из 1863, који смо раније поменули и у коме налазимо уцртану целу *Банатску улицу*.

Банатска улица, као и цео улични систем Београда под Турцима, била је узана и кривудава, што се добро уочава на Јосимовићевом плану из 1867[3], направљеном на основу геодетског премера. На овоме плану видимо такође да је на углу *Банатске* и *Јеврејске улице* бр. 23 постојала једна зграда од тврдог материјала. У своме плану регулације Београда Јосимовића је *Банатску улицу* исправио и проширио, што ни до данас није у потпуности изведено.

Приликом првог успелог званичног додељивања имена свима београдским улицама 1872, ова улица је добила име Рибарска. Ово име је задржала до 1896, када је добила назив Банатска, који се одржао све до данас. Једино је у периоду од 1940—1948. улица носила име Сремских добровољачких одреда.[2]

Сачувано је и неколико планова за нове зграде које су се пре првог светског рата подигле у *Банатској улици.*[12] Тако је 1911. А. Мошић подигао приземни магацин 19,₀ × 6,₀ м на парцели бр. 6. Из овог документа се види да у то време план нивелације за *Банатску улицу* није постојао. На парцелама бр. 24 и 26 саграђене су приземне стамбене зграде, а на углу непарних страна *Банатске* и *Јеврејске улице* подигнута је јавна кућа према одобреном плану једнога инжењера.

Дунавски крај је веома много страдао за време београдске операције октобра 1915[19], када су порушене многе куће у *Банатској улици* о чему нам најречитије сведоче фотографије у новинама онога времена и на разгледницама. Тако је само у једној згради у *Банатској улици* бр. 40 страдало 40 српских војника од топовског зрна великог калибра.

На већ поменутом плану из 1921.[15] налазимо тачно стање *Банатске улице,* њених парцела и кућа после завршеног првог светског рата. Из истога времена имамо и попис власника зграда *Банатске улице* у такође поменутом адресару.[16] У периоду до другог светског рата у овој улици се није много градило, изузимајући два већа магацина, једну мању радионицу и неколико вишеспратних стамбених зграда[14], које су се до данас очувале. Године 1921. на углу *Банатске* и *Јеврејске улице* бр. 32 подигнут је магацин са приземљем и четири спрата Банке Бошковић А. Д., први велики магацин са армирано-бетонском међуспратном конструкцијом у Београду. Пројектант грађевине био је познати струкцијом и професор Универзитета Никола Несторовић. На углу Израиљеве улице налазио се други већи магацин, о коме смо већ раније говорили. Поменута радионица, названа фабрика трикотаже *Голуб*, саграђена је 1927. на парцели бр. 13, а имала је две просторије 15,0 × 10,0 м и два мања стана. Веће стамбене зграде налазиле су се на углу Јеврејске улице бр. 30 (саграђена 1925. г., пројектант арх. Н. Несторовић) и на углу Дубровачке улице. Из остале сачуване документације уочава се да су између два светска рата у *Банатској улици* грађене и мање стамбене зграде и привремени магацини.

Према Генералном урбанистичком плану Београда *Банатска улица* треба да буде последња градска улица према Дунаву. Између ове улице и Дунава предвиђено је подизање зеленог појаса са спортским објектима. Због тога је данас уочљива изградња великих стамбених зграда само на парној страни улице. Када се план буде у потпуности остварио *Банатска улица*, која ће ускоро добити име *Улице Мике Аласа*, биће једна од најлепших улица Београда, у коме је цео живот провео радећи велики научник теоретске математике и велики мајстор рибарског заната Михаило Петровић

---

[19] *Енциклопедија Југославије, I, Лексикографски завод ФНРЈ, Загреб, 1955, 466.*

ДИВНА ЂУРИЋ-ЗАМОЛО

ВИНОГРАД МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

0. Цео живот Михаила Петровића везан је за Београд, лепи град на двема великим рекама које је популарни Мика Алас необично волео. У Београду се Михаило Петровић родио, у њему је радећи провео цео живот и у њему је најзад и умро. Београд је напустио једино за време својих студија у Паризу, а остављао га је повремено и за време својих путовања по свету.[1] Зато је и његова личност веома тесно везана за неколико београдских зграда, које су дале оквир његовоме научном раду и пружиле пријатну атмосферу у којој је Петровић могао несметано радити: *кућа на Косанчићевом венцу бр. 22, Капетан-Мишино здање* и *дом у винограду на Топчидерском брду.*

1. У прекрасном зеленилу и свежини Топчидерског брда налази се пространа, приближно квадратна парцела[2] величине око 8.500 м^2, коју је некада покривао виноград Михаила Петровића, познат по квалитетном грожђу које се ту неговало и добром вину, којим је домаћин иештедимице гостио своје многобројне пријатеље. Овај виноград добио је Петровић као дар од свога деде Новице Лазаревића после успешно положеног испита зрелости у Првој београдској гимназији 1885. г. Исте године подигнута је и приземна кућа са тремом[3], која дограђена и данас постоји у дну великог дворишта засађеног травом и дрвећем (сл. 1). Изгледа да је из истог времена и очувана конструкција од гвоздених шипки уз коју се некада пузала лоза и тако покривала вероватно главну стазу винограда.

Зграда подигнута 1885. г. представља типичан пример куће Поморавља тога времена. То је редак случај до данас очуване овакве грађевине на ужем подручју Београда, па би се могло десити да је и једини.

Посматрајући данас зграду и технички снимљену њену основу (сл. 1 и 2), може се уочити неколико чињеница.[4] Стара

---

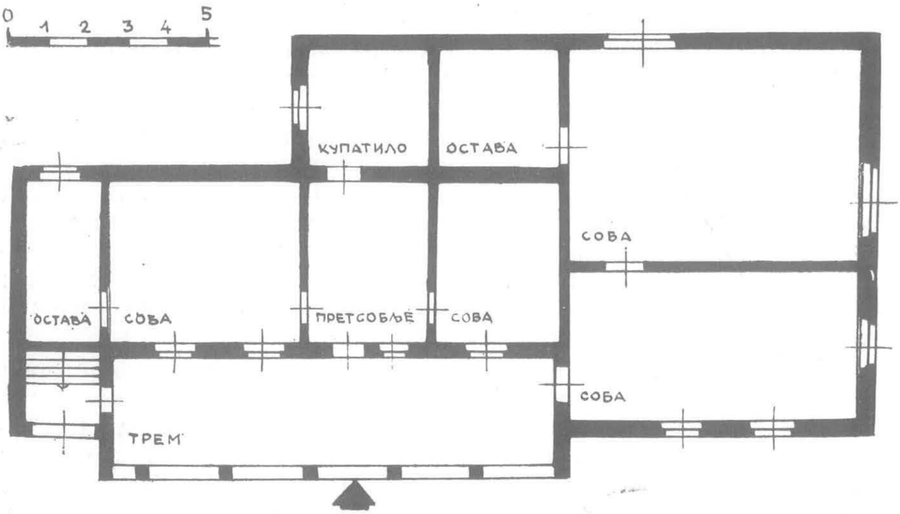
[1] *Енциклопедија Југославије, VI, Загреб, 1965, 486.*

[2] *Савремени катастарски план Београда.*

[3] *Д. Трифуновић, Летопис живота и рада Михаила Петровића. САНУ, Београд, 1969 (у штампи).*

[4] *Снимајући технички основу зграде нисмо имали прилике да уђемо у све њене просторије.*

зграда заузима доњи леви део основе, а касније дограђене су две велике собе на десном крају и две мале просторије позади. Ово се осећа и у самим просторијама зграде, које су у старој кући високе око 2,5 м, док је висина дограђених соба 3,5 м. Ако искључимо ове доградње и десни преградни зид преосталог дела грађевине, који је вероватно тако исто накнадно подигнут, добићемо и у основи и у изгледу кућу моравског типа[5], која је по општем правилу имала 3 просторије: трем, „кућу" и собу. Овај тип се развио из много једноставнијег, који се састојао само из „куће",



Сл. 1 — Основа куће у винограду М. Петровића (Технички снимак Д. Бурић-Замоло, 1968)

једне просторије са огњиштем, где је непрекидно горела ватра и где се и кувало и спавало. У развијенијем, моравском типу, „кућа" је у ствари била кујна.

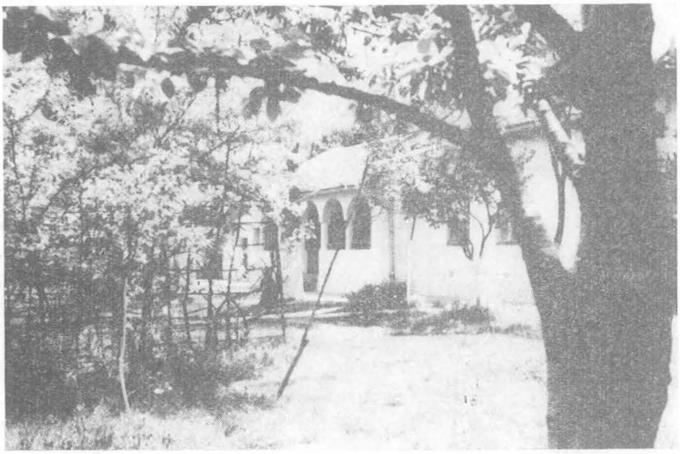
Стара кућа Михаила Петровића имала је трем целом дужином фасаде, осим испред подрумских врата, чији је зид мало увучен према линији оградне стране трема, Трем има окречене дрвене стубове, пуну ограду и сегментасте луке. Има укупно пет лукова, од којих је средњи изнад улаза. Али на страни према подруму постоји још један мањи отвор без лука, тако да фасада трема ипак није симетрична. На трем се ступа преко четири сте-

---

[5] *Ј. Цвијић, Балканско полуострво, I, Београд, 1922.*

пеника, а главна улазна врата куће налазе се насупрот улаза на трем. Просторија са вратима према трему била је „кућа", а она друга соба.

Иако је зграда и у основи и у изгледу била решена као моравски тип куће, кров не одговара кући из Поморавља. Док је



Сл. 2 — Кућа у винограду М. Петровића (снимила Д. Ђурић-Замоло, 1968)

кров моравске куће увек четвороводни, са дубоком стрејом и покривен ћерамидом[6], кров ове старе куће у винограду је једноводни, са малим испадом стреје и покривен црепом. Ово се може протумачити на два начина: или се при самом зидању куће отступило од моравског типа при изради крова, или је кров измењен приликом доградњи. Лукови на трему нису такође у потпуности типични за Поморавље, пошто су сегментасти, док су код моравског типа обично полукружни.

Према арх. Б. Којићу[7] зграда припада временски четвртој фази развоја сеоске архитектуре у Србији, која почиње средином XIX века и траје до његовог краја. У четвртој фази настаје развој типа створеног у трећој фафзи, која почиње после 1820. године. Тада се у Поморављу први пут јавља тип куће са Косова, т. зв. *косовска приземљуша,* која се гради од дрвета у виду бондручаре, дрвене конструкције са зидним испунама од земље. Најважнија карактеристика спољњег изгледа ове куће је трем поред дуже фасаде.

Са развојем живота у винограду Михаила Петровића вршиле су се и доградње на старој кући. Данас није тачно утврђено када је изведена главна доградња, али се може претпоста-

---

[6] А. Дероко, *Фолклорна архитектура у Југоставији, Београд, Научна књига, 1964, 23.*

[7] Б. Којић, *Стара градска и сеоска архитектура у Србији, Београд, Просвета, 1949, 126, 164.*

вити да је то урађено почетком XX века. Познато је да је још у то време Петровић често доводио у виноград мањи или већи број својих пријатеља, нарочито за време берби[8], па је и кућу вероватно морао већ тада прилагодити новим приликама. Тако су дограђена нова одељења. У већој дограђеној соби, 7,0 × 5,0 м, налазила се трпезарија са великим столом и дрвеним клупама. На зидовима су биле велике уметничке слике, које су нестале за време окупације у току другог светског рата, јер су у кући становали Немци.[9] На зид ове собе поставио је Мика Алас и Меркаторову карту земље када је почео путовати по свету. На карти је из године у годину на нарочити начин обележавао линије којима је путовао. Та карта је служила „као помоћно средство за наше разговоре о Микиним путовањима и за његове планове за нова путовања", пише његов пријатељ Миланковић.[10] Спаваћа соба Петровићева била је соба у старој кући, чији прозори гледају на трем. Постеља му је била обичан гвоздени кревет умотан мрежама против комараца. Исти такав кревет имао је и у својој соби у кући на Косанчићевом венцу.[9] Од целокупног намештаја ове куће данас је остао само један стилски трпезаријски орман. Пре неколико година у кући су извршена још нека преграђивања, тако да се данас на месту две велике дограђене собе налазе четири мале.

Испод старе куће и данас постоји подрум у који се улази кроз врата на главној фасади, лево од трема. Подрум је покривен сводовима, а у њему је М. Петровић држао бурад са вином, које је увек сам претакао. Ово му је причињавало задовољство, па је са тим у вези сачувана и једна анегдота коју је испричао Јеленко Михаиловић. Мика Алас је овде у подруму на бачви држао једну стару капу коју је увек стављао на главу приликом претакања вина. Никада није хтео да објасни узрок овоме, али се дало наслутити да је то била његова „прва капа под којом је у подруму почео сам лично цедити грожђе о берби и претакати вино."[11]

Када је био у могућности да најми виноградара Петровић је саградио и малу, скромну кућицу за њега и његову породицу, у продужетку своје куће, на страни према улазу у подрум. Кућица и данас постоји, па се у њој и даље станује. Уз виноградареву кућицу дограђено је још неколико кућица и шупа у којима станују три породице. У винограду је некада постојала пећ за печење хлеба, а Катица Мајдак је сачувала и неколико чокота старе винове лозе.[9] Сада је имање ограђено живицом која се не одржава добро, а широка улазна капија налази се уз имање на бр. 2.

---

[8] *Миланковић—Михаиловић, Мика Алас, Београд, 1946, 77, 91.*

[9] *Усмена обавештења Катице Мајдак 1968. г., која је некада радила у кући на Косанчићевом венцу.*

[10] *Миланковић—Михаиловић, 55.*

Између два светска рата о винограду и кући старао се виноградар Милорад Давидовић, коме је Петровић писао са својих путовања и потсећао га на различите послове које је требало обавити. Два од ових писама сачувала су се до наших дана.[12] Карактеристичне су две ставке из писма које је Михаило Петровић писао из Поатијеа у Француској пред свој одлазак преко Атлантика у працу Њу-Фуидлеида: „... 1⁰ *Преточити вино у винограду и код куће. Допунити буре оним вином из флаша, а код куће купити. ... 4⁰ Пази да Бека не излази ни сокак. ...*".[2] Овде морамо рећи да је Бека било псето у винограду. На сачуваној фотографији (сл. 3) видимо Беку са својим господарем Миком Аласом у виноградарском руху пред кућом у винограду.

Миланковић се сећа да се М. Петровић после завршеног Балканског рата настанио у своме винограду. „Ту се одувек осећао врло добро; онде је још све изгледало и стајало онако као у старо добро доба, оданде је Мика видео и своју Саву, уживао у самоћи и радио неуморно. Онде сам га с времена на време посећивао и ту смо, седећи у хладу старих стабала, проводили угодне часове."[13] Још на неколико места у својим успоменама и Миланковић и Михаиловић изнели су да је Михаило Петровић волео да ради у тишини свога винограда, тако да се с правом може тврдити како су овај виноград и амбијент Топчидерског брда утицали у великој мери на плодан рад научника.

Занимљиво је такође да је наш математичар у винограду имао и малу дрвену кућицу у којој је држао прочитане књиге, које се нису односиле на његову математичку струку. У шупи величине 3,0 × 2,0 м сви зидови до крова били су у полицама пуним књига. Једноме пријатељу је објаснио, када се повела реч о томе како су математичари једнострани: „Ето, видите, ја кад читам математичку књигу прибележим то и стављам своје примедбе. Кад читам ове друге књиге немам времена за белешке, па да бих знао шта сам читао ја их прочитане стављам на ове полице ... Видите, све сам то прочитао!"[14]

Михаило Петровић, као друштвен човек, често је позивао у виноград на вечеру своје пријатеље. Миланковић се сећа једне такве, нарочито весело проведене вечере, на којој је изрецитовао једно своје *успут срочено стихотворение* у част *мајстор Мике*, математичара и рибара, а које се необично допало „мајстору".[15] У виноград је позивао своје пријатеље и на неколико дана. Јеленко Михаиловић је запамтио један такав пријатно проведени боравак у винограду по томе, што за ручак „ниједан није

---

[11] *Ибид, 94.*

[12] *Музеј града Београда, Фонд Михаила Петровића.*

[13] *Миланковић—Михаиловић, 25.*

[14] *М. С. Недић, Троструки мајстор Мика, Политика, 19. 1. — 27. 1. 1968, Фељтон, 26. 1.*

[15] *Миланковић—Михаиловић, 28.*

могао узети ни залогаја", иако су се спремали да дан проведу на салатама, које су правили целога јутра, али су се од пробања и заситили.[16]

Сл. 3 — М. Петровић као виноградар са псом по имену Бека пред кућом у винограду (документ из збирке Д. Трифуновића)

И најзад, у винограду је основано и чувено музичко друштво Мике Аласа *Суз*, које је годинама свирало по кафанама, на разним свечаностима својим и туђим и у великој мери конкурисало тада уобичајеним циганским оркестрима који су свирали народну музику. Мика Алас је необично волео народну музику, тако да је напослетку решио да научи свирање на виолини, али онако како то раде Цигани, без нота. Узео је себи за наставника једног познатог Циганина, примаша, од кога је и научио да добро свира. За време берби у винограду, које је Петровић обављао сам са својим најближим пријатељима, свако је морао донети инструмент на коме је свирао. Једном таквом приликом, у јесен 1893. г., Мика је предложио да оснују оркестар и да се повремено састају и свирају, што су остали са одушевљењем прихватили. У овоме оркестру Мика је свирао прву виолину, а Јеленко Михаиловић је ударао у бубањ. Тако је настало прво *свирачко друштво Микино*, које је касније узело назив *Суз*.[17]

[16] *Ибид*, 91.
[17] *Ибид*, 77.

МЛАДЕН СТ. ЂУРИЧИЋ

УСПОМЕНЕ НА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

Под немачком окупацијом, 8. јуна 1943. из живота старог Београда отишао је велики математичар Михаило Н. Петровић, професор универзитета. С великим научником ишчезао је и велики човек свога времена, јединствен друштвени револуционар који је имао смелости, и дара, да усред мале и врло конзервативне српске престонице, на узбудљивом прелому векова, изгради један весео живот, а да у њему нико не види боема; да сачува лични престиж научника, и са огромним симпатијама и свеопштим признањем, још жив — пређе у легенду. — Оснивач и председник чудесног музичког оркестра од највиспренијих интелектуалаца који су, без нота, „на слух", односно јаким музичким меморијама, изводили на виолинама, басу и клавиру највиртуозније многе музичке комаде, све народне севдалинке, песме и игре, кола, све до *Мељачке Марсељезе,* дивље „Мајстор-Микине" композиције; чаролије: звука, смеха и џумбуса! С њом је друштво Суз (и самим називом бацајући у неодољиви смех!) постало најзаводљивија приватна капела старог Београда која је својом несрављивом свирком пленила домове само изузетних пријатеља. Каткад и јавне локале, али само с племенитом наменом. С *примашом* др Миком, проф. универзитета, др Костом Јовановићем, чувеним специјалистом-лекаром, Вучковићем, великим жупаном, Јеленком Михаиловићем, проф. и директором „земљотреса" и његовим „озбиљним шалама", и осталим, та је музичка група достигла висок степен савршенства. Да се не угаси, побринуо сам се с др-ом Геземаном, некадашњим београдским зетом, професором Карловог универзитета да донесе из Прага — тада нам још непознате — инструменте, скривене испод столова, с вечером на коју смо позвали већу групу пријатеља, и цео Суз. Друштво се састало, али је остало погружено. И јавни и тајни инструменти били су у Трнској 11, али ниједан нису пуштани у покрет: у току састанка стигла је вест да је Хитлер напао Француску.

О свом покушају нисам ништа рекао професору Мики, али знам да ме је проказао пријатељ коме сам био поверио тајну... Чуо сам да је слично прошао још један покушај да се тајно сними музика и песма друштва С у з. Да ли је, и преко недостижне „Мајсторове" скромности, некоме нешто успело, није ми познато.*

1.

После великих напора при решавању математичких проблема, наш славни научник се предавао другом животу: музици. Најстваралачкијем одмору. На племенитим звуцима узносио се у највише сфере инспирација. А кад осети замор и од свирке и песме, математичар Михаило Петровић окретао се трећем свету, који живи на Сави и Дунаву: рибарима. Мало доцније и бродарима, све док и сâм није постао и бродар и бродовласник. Од ране младости, у корист свог здравља, виши гимназист, потом студент, Михаило Петровић, одавао се често лову и риболову. Са студијама на Великој школи напоредо је изучавао рибарење на великим, тада граничним рекама Србије. Сасвим прописно одслужио је шегртски и, ако ме не вара сећање, 1896. калфенски стаж, и пред законском комисијом положио прописан испит за рибарског мајстора. И постао — *Мика Алас!* На Косанчићевом венцу 22, на спрату, позади балкона, у његовом радном кабинету, а према писаћем столу с неколиким великим пепељарама, препуним — не дуванског пухора већ — ситно исечених црвено-плавих писаљки, тако ситно да се парчићи, као „пикавци" од цигарете, једва могли држати међу прстима, (тако њему потребни!) — на источном зиду висиле су цигло две дипломе. Ни у једној није било речи о каквом почасном докторату, или академији, већ — *калфенско* и *мајсторско писмо* пуноправног рибара Михаила Н. Петровића, професора Велике школе у Београду. Обе је с неприкривеним задовољством приказивао ретким гостима које изузетно прими у радној соби.

Трећа страна живота Мике Аласа била је истински на Сави, делом и на Дунаву. И у риболову је брзо избио напред, и наше учмале стручњаке окренуо савременијим путевима. Набавио је најсавршеније справе и мреже, и српски риболов подигао на европски ниво. О њему је написао неколика дела: *Рибари у Тимочкој Крајини*, Београд, 1933; *Београд, негдашњи центар великог рибарства*, Београд, 1940, и *Ђердапски риболови*, издање СКА, Београд, 1941.

Сваку нову књигу доносио ми је, видно расположен, с топлом али увек озбиљном посветом, изванредно читким и сигурним, увек истим рукописом. Слова јасна — алгебарски знаци! Скоро сваку смо нову књигу „залили", и узевши је за повод „већем одмору", приредили смо веће весеље с музиком и песмом... Као и многе наше приватне и „приватно-универзитет-

* На првим плочама Радио-Београда снимљена је музика оркестра С у з. (Примедба Уредништва.)

ске", у сјају сећања остала је и једна омирска *рибља вечера* коју је Мика Алас приредио ПЕН-клубу... У свечано уређеној дворани гостионице на углу Душанове улице, у обавезној *вечерњој тоалети,* безмало шездесет чланова и чланица с председником, песником Миланом Ракићем, очекивали су појаву порцулана и кристала, кад се измакоше средишна врата и у средину дворане спустише огроман казан, пун мирисне — рибље чорбе. Иза њега, сав увијен у белу прегачу, у високој и пребелој куварској капи, с големом кутлачом — знаком куварског достојанства, — стаде Мика Алас, у пратњи „вечног" Јеленка и моје скромности. Бивши пдедседник ПЕН-а и министар Милан Грол скочи и развезе предвиђени поздравни говор:

— Голему част смо, господо, дочекали вечерас...

Кутлача искочи високо и прекиде му реч:

— Уф, уф! Остав'те то, молим вас... па овамо сваки са својим тањиром... Лично, него?... Бог срећу дели, а ми, ашчије, чорбу.

Проломно клицање поздрави кутлачу која једним покретом обори, па и нехотице исмеја, и нама већ досадне спољне одлике нашег међународног друштва. Одмах је потекло бучно весеље: са славним песником на челу сви су „пеновци", у свечаним оделима прилазили казану и пружали тањире. Научник у белој куварској одећи сасвим пословно сагињао се, мешао чорбу, захватао кутлачом и износио, сипао. Потом и својим друговима, па себи. Засео је на своје место одређено за музиканте, и кад је појео чорбу, повратио се; за то време унети су големи блехови са шаранима печеним у сосу од старог белог вина: *пијаним шаранима* — специјалитет Мике Аласа. С првим залогајима са свију страна стизали су похвални поклици, да *пијани шаран* превазилази све ђаконије и старе и нове Византије.

Као и увек, вече је отворио професор Јеленко, сладећи шарана гласом врачаре која „прориче" будућност, — прекидан скоро непрекидном бујицом смеха. С трећом чашом и наздравицом на њему се створио, сав изгужван, као да стиже с буњишта, — цилиндер! И ужасном снагом стао је исмевати формалну страну наше међународности. Наша уздржавања даме-чланице проказивале су врјском! Тад се у Јеленковим рукама створи позната дебела књига људских глупости и шкакљивих двосмислености из новинских огласа, звана *Цјеломудреније*... Смех је потекао реком и поздрављао сваку славну глупост. Једва да је ико приметио кад је, и како се на глави председника Суза, Мике Аласа, појавила, добога смешна, црвена дечја капица од подвезане — женске чарапе! Истовремено и на осталим „свирачким главама" — црне женске чарапе! Подвезане, а опуштене, изазивале су помаму од смеха. Кроз њу су писнуле виолине и — испратиле једну божанску ноћ.

2.

У свој риболов Мика је унео најсавременије пређе, зване *лапташи*, дугачке 60, па и 80 метара! *Момци* које је и тада Мика узимао да с њим раде на тâл, (раван део), знатним делом заграђивали су велику реку разапетом мрежом, вукли је подуже, заносили са страна, потом завијали и све што мрежа захвати, — извлачили су њом напоље и преносили у чамац, доцније у бродић, најзад у пароброд. По свршеном задатку улов је изношен на најповољније тржиште.

Ловио је преко целог дана. С вечера се повуче за Царску аду, Циганлију или ма коју другу, веже бродић па изиђе на острво. Момци накупе суварака, зачас плане ватра. Чим се разгори жар, на њему се праћакне: сабљар, деверика, шаран или сом. Хлеб и со, у пратњи војничке чутуре од алуминијума. Мика је био и официр, с највишим чином у резерви: потпуковник. И у миру је понекад водио прост војнички живот, у ком су га пратиле и ратничке потребе: револвер, нож и чутурица, увек пуна рујевине. Риба може и без хлеба, али — „мртва неће у воду". Мика Алас је често живео на реци, али водом се само — умивао. Још је чудније било што се онако смело загонио за рибом, по вировима и големим дубинама, а није знао да плива! Није се ни женио.

Пламен са разбуктале ватре пр́сне изнад острва и често измами из шуме једног другог, потпуног друштвеног одметника, који деценијама није излазио из свога чуна, сем кад га истера — лед! Тада извуче чамац на обалу, дно му окрене небу, киши и снегу, а сам се настани под њим. У таквим приликама виђали су га и у механама: набави што намирница које му више није давала река, и одмах, као мечка, у дупљу свога чамца. Кад загуди лед, пробуди га из зимског сна, преврне свој чун и врати на реку ... на којој га се никакви закони, ни прописи нису дотицали. .. Мика му се увек обрадује као драгом сабрату, смелијем и чистијем срцу, које није упрљало никакво људско славољубље. Призове га ватри, подели с њим вечеру — ако није вечерао, — и чутуру. У бунди је увек носио који паклић дувана и шибице за Зврнкапу. И на летњој вечерњој свежини пȁре се око ватре и ћаскају о свему и свачему. До зевања. Па Зврнкапа утоне у ноћ и шуму, а Мика се завије у бунду до чизама, шубару набије преко ушију, па — главом на пањић, поред ватре. Једни момци с друге стране, а други на бродић са ловом. Ако киши, сви под кровић од шаторског платна. Око њега тамним аријама певуши Сава. Сан потура крила ... У висинама се дреше и неразмрсиве загонетке и ребуси.

Са зором Мика је опет на успаваној њиви речног пространства: испитује, слути. Пада команда, шире се мреже и поклапају тек прогледало големо речно огледало. Роне људи и свуда траже по њему слатке становнике ...

Данима тако, докле га и рибарење не замори. Или док се пред њим не дочарају нове скице и замисли. Тада све предаје заменику и освежен, и још црњи и опаљенији, радосно похита уз Јалију — капетан-Мишином зданију.

3.

У потрази за рибом Алас је запазио да му водене крилатице ројевима измичу ушћем у Колубару, и пропадају по вировима и врбацима. Пребибајући воде Колубаре, риболовац је запазио немогуће могућности пловидбе расплинутом реком, с многим острвцима и спрудовима које већа вода брише и односи, мања искупља и ниже коритом. Тога је морало бити одувек, а зна се да је још у првим српским устанцима новог времена та река била пловна до Обреновца. Чак и за ратне бродове! Савремени се пароброди искључили сами: с повећањем терета морали су „газити" дубље. Нико није мислио на огромну привредну штету и губитак времена у претовару путника и робе у Забрежју.

Из рибара се јавио бродар, а из пловца — научник који се не мири с математичко-физичким проблемима. Кад се водени ниво не може подићи ни регулацијом, ни кишом, остајало је само да се некако смањи гажење савременог парoброда. Чим је правилно постављена, једначина је већ била и решена. За Микино рибарско предузеће могао је послужити и пароброд мањи од *Шарана* Рибарске заједнице, узиманог у најам.

Отказа закуп и одмах огласи да би купио такав и такав паробродић. Нађе се и понуђач: Ловрековић из Новог Сада. Од њега Мика купи парни бродић, карличастог облика, низак. С посадом од пет лица и потпуним „наоружањем" (угљем и мазивом) газио је само 0,70 м. Дакле: погодан за намењене му испитивачке авантуре.

И једног, можда познојесењег дана 1923. или ранопролећњег 1924, никад се неће утврдити, као да је било пре хиљаду година, а још је живих савременика, па и очевидаца, — као заповедник на своме *Карашу*, Мика Алас уплови у Колубару! Па све лагано напред, с *лецом* (мотком за мерење дубине, с дречећим ознакама) пипајући лево и десно, испитивао је спрудове, меандре и кладе, памтећи сваку и уносећи је у бележник, појави се у Обреновцу, и без прангије начини праву узбуну.

У повратку навигатор је проверио сва стања, израдио пловидбену карту, смислио и поручио дрвени шлеп — равног корита. с поткровљем. Доби допуст и објави да, почев од тог и тог датума, још истог пролећа 1924. *отвара нову паробродску пловидбу и врши превоз путника, пртљага и робе на линији Београд — Обреновац и натраг, без — претовара у Забрежју!*

Објаве је излепио на туђе агенције, извео свога *Караша* с новим шлепом у затон Мале Венеције (испод стуба данашњег

Зеленог моста), стао и чекао. Пред огласе азстајати су пролазници, читали и смејали се. Смејао се и нови пловидбар, и себи и њима. Први се одваживали ђаци, потом излетници, па пословни људи. Редовни путници најпосле. И путници и терет примани су на дрвени шлеп; терет на средину, путнике на клупе, около. *Караш* се доста лако и без кубуре пробијао напред, и прве путничке ласте истовари у Обреновцу. У повратку га испунише радозналци. С обеју страна новом линијом ишло се као у шетњу... Кишно лето те године подржавало је нову пловидбу. И напор се показао уносним.

Али Мику Аласа није занимало „златно руно". Њега је мамио научни пробој. Примена умних открића. Мада је у целом животу био штедљив, зарада га није много привлачила. Нађе двојицу младих људи, вољних за рад, и предаде им своје, тек разрађено бродарство: и паробродић, и шлеп, са свим искуством и могућностима у изгледу. Тако постаде ново *Бродарство Јездића и Бакарића.*

Три године развијала се једна мала, али занимљива грана комбиноване пловидбе Савом и Колубаром, и проказивала даљи, савременији пут. Али држава не притече нимало упомоћ, а дођоше и сушна лета и често нагонише младе бродовласнике да прекидају пловидбу за Обреновац. Мало помало, па се и они окретоше кориснијим линијама, и крајем лета, 1926. сасвим напустише паробродство Колубаром. За њим је путнички свет искрено жалио.

4.

На једном састанку „Мајстор Мика" ме јако збуни чудном жељом: да напишем причу о Зврнкапи. Да му на неки начин оживим чудног пријатеља, истинског Диогена али не оног из Синопе, већ дивљег Србина који није живео у замишљеном бурету, нити у стварном питосу (огромном ћупу за вино, уље, жито или воће), већ — у чамцу, на Сави. „Изврн-капу" знао је сав бродарско-рибарски свет, и свако га је звао упрошћено: *Зврнкапа.* Живео је сасвим одметнички на реци, одметнички је, и чудно, умро у часу највећег поготка, можда у целом животу! Ругао се судбини, која га је ипак свирепо изиграла. А без њега Мики Аласу — пуста Сава! Где год се задржи, недостаје му настрани пријатељ, једино људско биће коме је често и сâм позавидео, и можда помислио: „Да нисам Мика Алас, највише бих волео бити — Зврнкапа!"... А сад ниоткуд стреластог чунића да сиво севне испред његових лапташа, између ада. Да испадне из једног, и упадне у друго зеленило и за собом остави утисак препотопског гуштера... Где год заноћи, увек се Мики причињало да ће се опет наћи и распричати до дубоко у ноћ... Све више је жалио за њим, и све више желео да га некако оживи; макар причом.

Двапут више времена утрошио сам у израду приповетке, али Мика је био разочаран што ја, речни капетан, баш нимало не познајем живот рибâ и рибара. Поново ми је одржао цело предавање... Тек после друге прераде насмешио се и у неприлици слегао раменима: познао је себе у причи, а на то није ни помишљао!... Новела је објављена у књижевном часопису *Мисао* за јул — август 1932. Убрзо је унета у збирку *Девети вал*, с јако истакнутом посветом преко целе насловне стране: *Великом пријатељу малих људи рибара и бродара*......." Упао сам у тренутак грозничавог посла и предао књигу коју је он погледао мртво и спустио на полицу до писаћег стола, препуну књига и часописа. Одатле је некако нестало. Ни скоро признање Академије није га подсетило на њу!... Тек после пуних десет година, у повратку из ропства, кад ју је угледао код нашег заједничког пријатеља др-а Миленковића, дочепао је и развио. — „А кад је ово..." У половини реченице све му је било јасно, и све је преживео као и многу подмуклост удеса, с којим се увек умео јуначки носити. А који нам се, и раније, обојици двапут, заједнички, свирепо наругао: први пут на води, други пут на земљи...

5.

У сећању ми је још само лепо време и драг улични сусрет с Мајстором. Хитао је некуд, приметио узбуђен. И сасвим преко навике пожали ми се: „Ових дана одлазим у *старо гвожђе!*" — „Честитам. Сад ћете моћи још више радити." — „А, не, не! С одласком у пензију и *ја свршавам!* И ту се баш ништа не да изменити." — Још не верујући да и такав човек може имати какву Ахилову пету, уверавао сам га да сам у младости само прижељкивао дан кад ћу стећи право и на најмању пензију, само да имам основ за живот, да бих се могао сав предати..." И био сам срећан кад сам то постигао... Да, да: први пут у 34. години!" — „Наопако! Ја бих пресвиснуо! ... И сад се не мирим лако с том првом својом смрћу!"

Враћао сам се канцеларији у министарству просвете, и прво сврати у кабинет. Министар је био наш ратни друг, „солунац". Испричах му тако мало вероватну ствар, и скоро јаукнух: „Зар држава и друштво целог људског века спремају генија у научнику или војнику за то да га, чим напуни 35 година службе, здравог и у најразвијенијим способностима шаљу у — старо гвожђе?!" — „А шта ми можемо; закон је..." — „А зар та, *највиша воља*, не може мало помаћи пропис?" — „Може, може, господин-министре!" — упаде помоћник: „уместо да шаљемо у двор указ о пензији, ми да у финансијски закон убацимо продужење службе изузетно даровитим научницима... а потом у Измене и допуне закона — нов пропис; уместо 65 да цензус буде 70 година."

Министар радосно прихвати предлог и нареди хитно извршење.

На првом састанку Мика похита да ме обрадује новошћу, да се у министарству родила срећна идеја о продужењу службеног стажа ... Загледа се у ме, испусти реч и нагло помодри. (На њему се тако изражавало јаче узбуђење). Прасну у смех и овлаш ме загрли с леђа, (никад се није много подавао нежностима), и остаде подуже мрко насмешен.

О томе међу нама никад више не паде реч.

Пензионисан је тек 21. октобра 1938. у 71. години живота.

6.

Караш је једно време био у Рибарској заједници, потом је предат управи двора. Пре него што је (око 1930) продат и однесен на неко језеро у Босни, где му се сасвим замео траг, чуо сам да је познати паробродић прекрштен, и да ради под новим именом: МИКА АЛАС.

Да ли је то учинила управа двора, по жељи принца Ђорђа, великог пријатеља и рибарског друга Мике Петровића, или неки трећи власник — није ми познато ... У сваком случају то је био први и једини споменик нашем заслужнику, још живом човеку, подигнут на превртљивим речним таласима.

7.

Пре шесдесет година, у почетку познанства и пријатељства, у путу и на пароброду Српског бродарског друштва у ком је био члан управе, а ја службеник, замолио сам га да ми каже — шта га је задобило за студије математике ... „Мој друг, а ваш ученик, Станислав Винавер, рекао ми је — тражење истине?" Мика се насмешио мркосветло, и одмерио кратко:

— *„Математика је највиша поезија!"*

Музичка весеља са „сузовцима" имала су карактер почасног и пријатељског гостовања, иза ког се није смело осетити да је домаћин почаствован присуством тако крупних имена и положајâ у друштву. „Пословна дисциплина" тих високих интелектуалаца била је врло висока. Био је довољан само један „Мајсторов" поглед или миг, па да се сви баце на посао, или да га прекину и да се предаду одмору. Или да пођу. Нико није смео без правог оправдања изостати; свако се позиву одазивао тачно на време, и остајао „на служби" доклегод Мајстор не оцени да је било довољно. Да се и то вече лако не заборави.

Из низа Микиних племенитих шала и духовитих угурсузлука често је издвајан случај с неким гостионичарем на крају старог Београда, који се због слабе посете нашао пред пропашћу.

А имао је повећу породицу, па још био и ратник. Дочује то Мика и незван бане му пред пивницу и стане свирати. Свет нагрне. За једну ноћ се рашчује старим и малим Београдом да у тој и тој гостионици свира С у з. Наредне ноћи није било места ни пред пивницом. Чудесни оркестар који је примао само јело и пиће, није хтео да чује ни за какву било награду. После пет или шест џумбус-ноћи, кад је Мика „дао отказ", гостионичар је јаукнуо за њим и понудио му пола целог прихода! И остао запрепашћен што још има људи који не раде за паре! . . . Једини он није знао ко га је извукао из банкротства, — док се Мика није удаљио . . .

Кад оконча какав већи математички напор, ето га у посету, непријављен. Драге пријатеље волео је да обрадује. Или се јавне телефоном:

— Хоћемо ли, капетане, да се мало *пролудирамо?* . . . Код мене, код Вас, или на неком трећем месту?

И — речено, учињено! . . . Низао је за собом успомене, заробљавао људе. Весеље са „сузовцима": свирка, песма, игра и шала — нису се завршавали пре навршеног четвртог часа новог дана. Свуноћ се пије — никад нико не препије. Као Симу Пандуровића и Милана Ракића, ни Мику Аласа никад нико није видео пијаног. . . Пио је само вино и захтевао је да буде старо, укусно, а било му је свеједно да ли је бело, румено или црно. У току целе ноћи водио је свој оркестар као *примаш,* и немилице се трошио да задовољи каткад и непознате. И ако је шала кипела, весеље је увек остајало на некој академској висини. И у највећој раздраганости Мика Алас, врло близак свакоме, ипак је остајао на извесном удаљењу од свакога, сем Јеленка и школских другова. . . на граници коју нико није прекорачивао. Срдачан, мио и освојан, ни у највећем весељу никад се није заборављао, никад ни с ким није се *тикао,* или братимио, а сваког је запајао братском присношћу.

8.

Са својих честих путовања на конгресе и изложбе, скоро увек нам се јављао, као рођеним. Макар и с неколико речи на лепој дописници, или посетници, ако друге није при руци. С далеких путовања слао је и писма. Чим стигне кући и одмори се, ето га с целим материјалом, обично с вечера, и прво предавање одржи у нашој кући, нама двома. Био је увек готов да га понови и нашим пријатељима песницима Пандуровићу, Милосаву Јелићу, и другим. С Миланом Богдановићем је био разговоран, али никад раздраган. Мика Алас је умео певати и речју, не само гудалом. Оно што је он причао, било је често као и доживљено. Кад год нас је забављао, имао сам врло јак утисак, да тај чудни човек брзе и јаке, кремен-речи, светле као варница, више живи за нас, неголи за себе . . .

Често ми је долазио у Клуб независних књижевника који сам основао с Пандуровићем, Јелићем и Милом Крпом крајем 1930. Био је очаран Јелићевим уметничким снимањем војничких ликова, и долазио је скоро на сваки недељни састанак. Кад сам ја изабран у ПЕН-клуб, он је и тамо долазио, мада видно уздржљивије. Свечано одело и укоченост међународних прописа нису му се свиђали. Кад је приметио да сам с председником Ракићем, сашаптао се, одмах је погодио да ћемо га акламацијом изабрати за члана — што је тада била велика част — дигао се, захвалио и одбио. Винавер је дрско изјавио, да његов бивши професор — није књижевник. Ја сам се оштро окосио на млађег друга, као и многи други, а Мика је устао, и јако потамнелог лица изјавио: „Винавер је на жалост у праву, ја нисам књижевник!" Винавер се повлачио и детињасто смешио, као на промашену шалу из „пантологије" и мораде изјавити да је, због др Микиног одступања много више изгубио ПЕН-клуб, него Мика Алас . . . Ипак нам је Мика приредио рибљу вечеру и открио големе могућности праве духовне забаве, које смо изгубили с његовим одбијањем чланства . . .

9.

Једног преподнева упаде ми у канцеларију министарства просвете и још с врата пружи нову књигу. Уверен да је опет нешто о рибарству расклопих је и преко посвете загледах: цифра до цифре! Језик који је за мене удаљенији од Нептуна!

— Није ово за ме, Господине Професоре!

— Не мари, капетане; нек стоји у вашој књижници поред осталих мојих књига.

— Зашто да у штампану хартију сахраним дело, у које никад нећу моћи ни загледати, а ова би књига, не љутите се, *могла некога усрећити*. Колико је ваших ученика који би уздрхтали и на саму помисао . . .

Мика се мало замисли па диже главу и ћутом прими књигу натраг.

Сви пријатељи и тадашњи носиоци министарства просвете: Никола Половина, Столе Стојановић, др Никола Константиновић, Лазовић, напали су ме безобзирно, Вишеслава можда најоштрије. Она која није могла гледати потковане ципеле на паркету, грцала је од јада што је њен супруг могао одбити најплеменитији дар . . . Зачудо, ја сам остао миран, и свог поступка не стидим се ни данас.

10

Једном у разговору запањи ме Мика одлучном изјавом, да су наши Цигани-свирачи недаровити музиканти . . . „Сви, сви! Чак и ваши шабачки Цицварићи! . . . Свирао сам са свима и уверио се да је све само занатисање! . . . Изузетак је „Мија из

Јагодину", (Сеферовић). Свирао сам и с њим, па сам му после ишао и у госте. Његово гудало чара и открива чудесне светове. Неколико јутара проводио је у јагодинском лугу, вребајући славује кад се стану натпевати; да сними њихову песму. Дуго се мучио, али је бар успео. После је одлазио у луг да вара славује; да их изазива и да се натпева с њима, до малаксалости!"

Славуј Мије Јагодинца први пут је свиран у *Дарданелима* у Београду и начинио је русвај. За врло кратко време освојио је целу Србију и владао је њом, деценијама.

11.

Мика Алас имао је врло драгог пријатеља у очном лекару др-у Милу Миленковићу, рођеном Београђанину, тада са службом у Ваљеву. Забављао се с њим и раније, и одлучио да му собом донесе пријатност уочи једног Божића. И по снегу и вејавици с виолином кренуо најдосаднијим возом у Србији — с бесконачним задржавањем у Лајковцу, — за Ваљево. Кад тамо — домаћин са женом отпутовао у тазбину, чак у Прокупље. Сваки би добар Србин такав промашај испратио псовком, и покушао би да се читав врати кући, а Мика Алас се замислио за тренутак, па замолио адресу др-Милове таште и шурака, и даноноћним возом и мучним везама, са спавањем на голим клупама, на Бадње вече закуцао је на врата те и те породице у Прокупљу... У тренутку благданског расположења упао је из вејавице човек у шубари с ћеманетом и огласио се — гостом њиховог госта. После првог и схватљивог запрепашћења, настала је неописива божићна радост, весеље и лумперајка која је трајала неколико дана и ноћи, с нешто предаха за најнужнији одмор.

ĐURO KUREPA

POZDRAVNI GOVOR PRI OTKRIĆU SPOMEN-PLOČE MIHAJLU PETROVIĆU

Blago onom ko dovijek živi
Imao se rašta i roditi.

Te reči našeg velikog pesnika Petrovića Njegoša padaju mi na pamet pri ovoj svečanoj prilici kad evo u ovaj četvrtak otkrivamo spomen-ploču našem velikom matematičaru Mihajlu Petroviću, na njegovoj kući u Beogradu, Kosančićev venac, broj 22. Ja vas sve pozdravljam i zahvaljujem vam što ste se odazvali našem pozivu da prisustvujete na ovom svečanom skupu. Osobita mi je čast da pozdravim druga Živana Berisavljevića, sekretara za obrazovanje i kulturu SRS, akademika Velibora Gligorića, predsednika SAN, akademika Vukić-Mićovića, glavnog tajnika SAN, profesora Dragišu Ivanovića, rektora Univerziteta u Beogradu, druga Milana Vukosa, potpredsednika Skupštine grada Beograda, drugaricu Jelicu Stamenković, upravnika Muzeja grada i druga Jovana Sekulića, direktora Zavoda za zaštitu spomenika.

Drugovi i drugarice,

Na ovoj uzvišici rođen je Mihajlo Petrović 6. maja 1868. nekoliko meseci pre no što će turske vojne zastave prestati da se lepršaju na kalemegdanskoj tvrđavi; u ovoj svojoj kući ugasio se njegov život 8. VI 1943. u još proboljenom Beogradu, oko 15 meseci pre no što će se hitlerovska zastava prestati vijoriti u ponosnom savsko-dunavskom gradu.

Uz kraće prekide izbivanja proveo je naš slavljenik svoj vek na ovih ovde nekoliko četvornih metara radeći umno, izmišljajući razne matematičke pronalaske, tražeći veze između matematike i raznih drugih ljudskih delatnosti i svesno gledajući historijsku nepravdu kako sa druge strane ovih reka živi deo našeg naroda pod tuđinskim jarmom. Preko trideset godina gledao je taj čovek tu našu porobljenu niziju evo odavde i toliko puta posmatrajući to veliko Sunce kako zalazi u panonsko more zamišljao je da će tako zaći i austrougarska vlast nad našim neslobodnim delom naroda a roditi se plodonosna naša sloboda. Kao učitelju i prijatelju prestolonaslednika takve misli su se sigurno rađale i živele u njegovoj glavi.

Doživeo je da je Kosovo osvećeno i da su dve sestrinske slobodoljubive i pravdoljubive srpske države: Srbija i Crna Gora zajedno sa svojom subraćom i saveznicima oterale Turke i srušile mnogovekovnu Austrougarsku. Ploveći i ribareći po ovim dvema velikim rekama koje oplakuju Beograd bio je Petrović u mogućnosti da oslobođenje i ujedinjenje naših zemalja doživljava vrlo intenzivno.

Porobljenje Jugoslavije nije preživeo! Ali je bio svestan da do izvršenja smrtne presude nad našim narodom neće doći jer su neprijateljske ofanzive kod nas bile minule i bezuspešne, narod se organizovano borio a Staljingradska katastrofa neprijatelja već je bila poznata činjenica. Rađanje nove Jugoslavije bilo je izvojevano!

U ovom zdanju Petrović je i umro 1943. u započetoj svojoj 76. godini života. Ova kuća Mihajla Petrovića sagrađena je 1910. godine; projektovao ju je arh. Petar Bajalović; sam projekt je Bajaloviću poslužio za habilitaciju i docenturu na Tehničkom fakultetu. Na predlog Matematičkog instituta Zavod za zaštitu spomenika kulture Beograda zaštitio je ovaj dom Mihajla Petrovića kao spomenik kulture i prešao na prvu fazu poslova: preduzeo je mere da se vanjski deo zdanja a posebno fasada uredi i da poprimi onakav izgled kakav je bio i prvobitno. Za tu delatnost treba odati priznanje: Zavodu za zaštitu spomenika kulture a ponaosob inženjerima arhitekture Isakovićevoj i Mađarevićevoj koje su izvodile radove.

Spomen-ploča je delo umetnika — kipara Nebojše Mitrića, ovogodišnjeg dobitnika oktobarskog salona; njemu čestitamo na uspelom likovnom rešenju i ostvarenju te spomen-ploče. Posebnu zahvalnost dugujemo sekretaru za obrazovanje i kulturu Socijalističke Republike Srbije za novčanu pomoć.

Drugi korak pri uređenju ovoga doma Mihajla Petrovića sastojat će se u uređivanju unutrašnjeg dela zdanja, posebno da se urede muzej-sobe u kojima će biti izloženi pokojnikovi rukopisi, knjige, predmeti, uspomene i dr.

Preostali deo ovog doma trebalo bi urediti kao matematičku biblioteku.

Dodajmo također da vajar Aleksandar Zarin izrađuje spomenik Mihajla Petrovića i taj će spomenik biti verovatno postavljen ovde ili u kojem drugom prikladnom mestu u Beogradu.

Naš današnji sastanak je jedan od niza delatnosti u proslavljanju stogodišnjice rođenja Mihaila Petrovića. Današnji četvrtak 24. X 1968. ujedno je i dan Ujedinjenih naroda. Pa izrazimo pri tom naše želje da toliko puta razarani Beograd ne bude više poprište ratnih strahota a današnja obletnica potpisivanja Westfalskog mira 1648. o rascepkanosti Nemačke 1648. dakle pre 320 godina neka nas stalno podseća da nam je preka potreba gajiti i čuvati naše stečeno bratstvo, slogu i jedinstvo.

Neka nas današnja obletnica čudesnog Leeuwenhoekova otkrića dotad nevidljivih i nepoznatih i nepristupačnih predmeta nadahnjuje na sve dalja pregnuća i stvaranja u nauci, umetnosti, tehnici i proizvodnji.

Otkrijmo ovu spomen-ploču matematičara Mihajla Petrovića i neka se i na tom primeru provere reči našeg velikana pesnika:

> Blago onom ko dovijek živi
> Imao se rašta i roditi.

Дом Михаила Петровића после рестаурације

Проф. Буро Курепа чита свој говор при откривању спомен-плоче на Дому Михаила Петровића

МИРКО СТОЈАКОВИЋ

РЕЧ ПРИ ОТКРИВАЊУ СПОМЕН-ПЛОЧЕ НА ДОМУ МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

Говорећи у име Српске академије наука и уметности свестан сам чињенице да позванији од мене, стицајем околности, нису били у могућности да у овом тренутку узму овде реч. Срећан сам што ми је указана част да поводом откривања спомен-плоче моме великом учитељу Михаилу Петровићу овде кажем неколико речи о његовом делу.

Пре неколико дана ја сам имао велико задовољство да присуствујем једном сличном догађају: у Дубровнику, на дому Марина Иеталдића, такође је откривена спомен-плоча. Геталдић, тај највећи југословенски и европски математичар онога доба, рођен је, да тако кажем „исте" године које и Михаило Петровић. Марин Геталдић 1568., пре четири стотине година, Михаило Петровић, пре сто година, 1868. Оба ова математичара таквог су значаја да морају ући у сваку историју развитка математике која објективно приказује чињенице. Откривање спомен плоче на дому Петровића само је први од корака који се предузима да би се његово име и за ширу јавност учинило познатим и окружило дужним поштовањем.

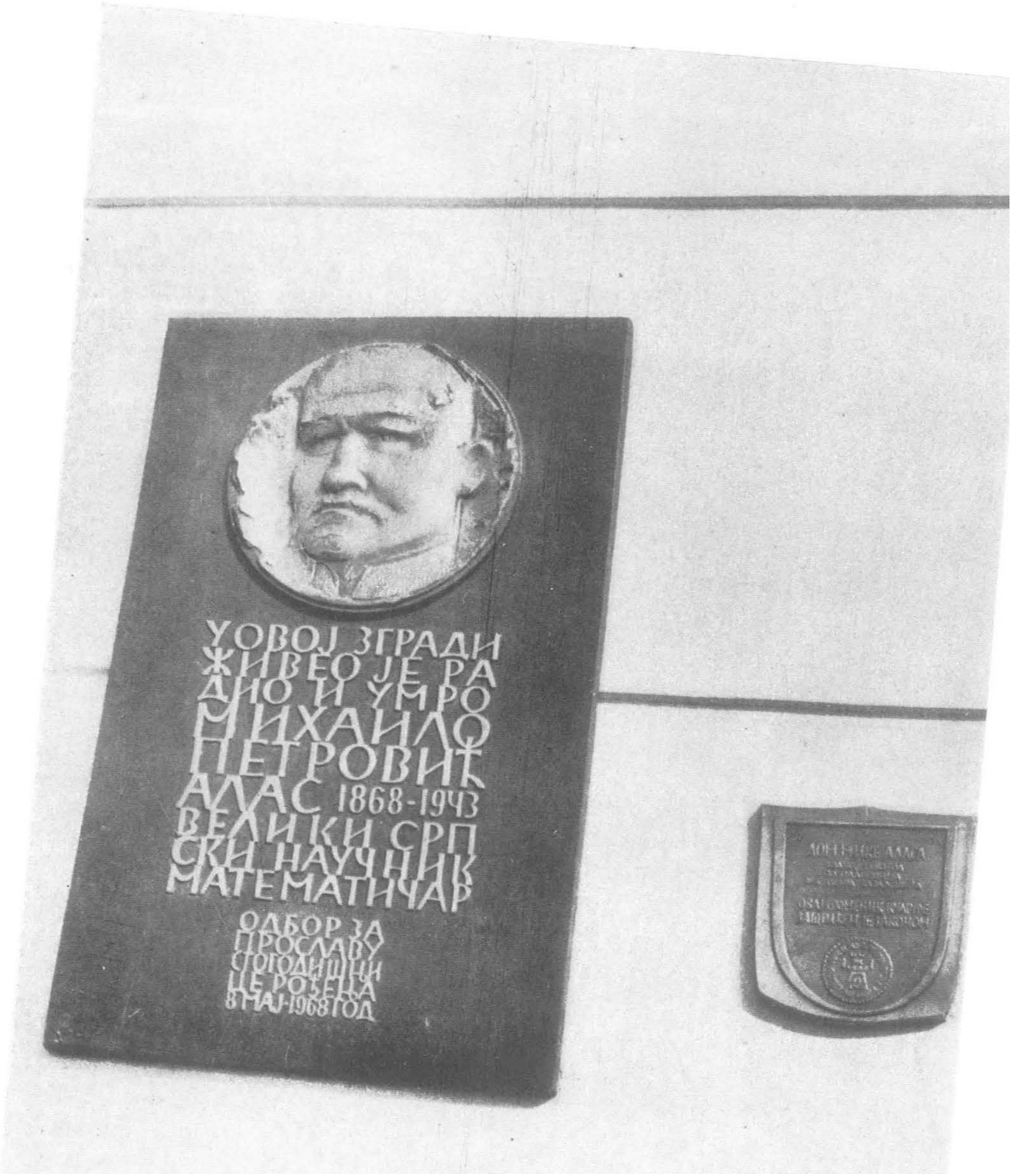
Рођен пре сто година на овом месту, завршио је средњу школу 1885, дипломирао на Великој школи у Београду 1889, стекао лисанс матемтаичких и физичких наука 1892, односно 1893. у Паризу, где је и докторирао из математичких наука 1894. Од тада, па за даљих педесет година, дакле укупно пола века, био је професор Велике школе и Универзитета у Београду. За то време пубиликовао је око четири стотине (тачно 393) радова међу којима има чланака на српском и француском језику, у домаћим и страним научним часописима. Писао је монографије, путописе, есеје, расправе и уџбенике, има чланака до дестак страница и књига од по неколико стотина страница. Обим и обиље радова карактеришу Михаила Петровића као најплоднијег српског научника прве половине двадесетог века не само у области математике, него и у поређењу са другим струкама.

Ово обиље радова праћено је ванредном *разноврсношћу* Петровић је и иначе *универзалан.* Сем математике његово интересовање привлачиле су филологија, књижевност, техника, економија, право, професионални риболов, па и музика у којој ј био добар репродуктор. Међутим, не мислимо да инсистирам на универзалности те врсте. Петровић је био универзалан и области саме математике. Теорија функција реалне променљиве теорија функција комплексне променљиве, диференцијалне једначине, теорија бројева, алгебарска анализа, диференцијална геометрија, теорија релативитета, динамика, небеска механика, математички инструменти, теорија радова — све су то области у којима има запажених прилога Петровићевих. Петровић је имао способност да проникне у срж сваке методе другог аутора, да схват опште разлоге због којих та метода успева као и услове под којима успева и да одмах изнесе идеју за стварање сличних генералн поступака. У елементима математичких феноменологија управ ова црта његовог стварања је и доминантна. Обухватити диспаратне феномене једним аналошким језгром у коме је концентрисано оно што је тим феноменима ипак заједничко, а изражен је обично математичким изразима у којима поједине компонент на сличан начин делују, то је основна идеја на којој се доцниј изградила строга теорија математичких модела. Аналогне рачунске машине раде на принципу електронског модела аналошко језгра на која се своде сви други модели.

Петровић је умео да нађе и интересантне специјалне случајеве који су промакли пажњи других аутора, а ти су специјалн случајеви или за праксу важни, или битно карактеришу нек општу методу или згодно истичу на видик разлоге због којих с нека метода не може увек применити.

Но пре свега ваља истаћи оригиналност идеја у Петровићевим радовима. Уз способност да види генерално у посебном и д нађе занимљиве облике специјалног у општем, Петровић је просто опседнут оригиналним идејама од који је многе сам до крај обрадио, а могло би се рећи још већи број у радовима изнео, ал их није сам проверавао. Он није могао да одоли чарима новог оригиналног, па је идеје износио слободно, може се рећи, претрпевао радове идејама чак и кад сам није стизао да их обради. Бил да су то оригиналне идеје намењене само тренутку, посебно проблему, или оригиналне идеје намењене стварању посебни области науке. Такав му је покушај са стварањем математичк теорије спектара, таква му је математичка феноменологија, така му је покушај стварање посебне теорије размака или разрад једног посебног диференцијалног алгоритма.

За слушаоце неспецијалисте могло би се рећи да је Петровићева квалитативна метода у теорији диференцијалних једначи на предмет истраживања и у данашњој модерној математици Постоји и савремена совјетска монографија посвећена овој тео



Спомен-плоча на Дому Михаила Петровића
(рад Небојше Митрића)

рији. Неспецијалистима ће вероватно бити од користи ако се нагласи да квалитативна метода у теорији диференцијалних једначина одговара методи којом лекар по квалитативним подацима о болести предвиђа врсту болести, њен даљи ток, њен претходни стадијум и узроке, њено понашање на примену терапије и слично. Да не употребљавамо техничке термине, рећи ћемо да је Петровић у оваквом послу у математици био истински мајстор и да је највећи и најзначајнији број радова написао управо на ову тему. То је онај исти метод којим аутомобилиста по променама у звуку мотора закључује о неправилностима и евентуалном квару мотора и утврђује који је део и која функција мотора и у којем степену неправилна.

За Петровићев поступак карактеристичан је његов покушај стварања нове математичке дисциплине коју је сам и крстио. То је теорија математичких спектара. Око четрдесет година прошло је од објављивања његове монографије на француском о том предмету. Време сасвим довољно да се теорија прихвати или одбаци. Може ли се сад рећи да та теорија није прихваћена у свету? Сем домаћих, мени није познат ни један страни аутор који се одазвао или даље развијао теорију спектара. И док се код математичке феноменологије може жалити што је објављена само на српском, датле се код теорије спектара то не може узети за разлог, јер је књига објављена у познатој издавачкој кући у Паризу на језику у оно време најчитанијем на свету.

Док је у теорији математичких спектара аналогија помогла Петровића само у формирању полазне поставке, дотле је у теорији математичких машина аналошко језгро чинило суштину самих радова. Идеја да се две појаве, које се одвијају по истим законима аналитички формулисаним, искористе тако, да се једном од њих проучавају оне друге, није у основи Петровићева. Међутим, у том правцу Петровић је ипак дао неколико оригиналних радова за интеграцију диференцијалних једначина помоћу апарата са течношћу и помоћу хемијских процеса што данас представља најмодернију ствар у области конструкција рачунских машина.

Дуго година усамљен, али универзалан у науци, Петровић је снагом своје изузетне научне енергије успео да нашој математици отвори границе, да себе и своје ученике прриближи светској науци. И ова спомен-плоча коју дана, 24 октобра 1968. откривамо, знак је пуне захвалности нових генерација великом научном ствараоцу Михаилу Петровићу који је истовремено и симбол почетног периода наше науке.

DRAGAN TRIFUNOVIĆ

PROSLAVA MIHAILA PETROVIĆA

I

Stogodišnjica rođenja znamenitog srpskog naučnika Mihaila N. Petrovića (1868—1943) obeležena je nizom raznovrsnih i prigodnih manifestacija u okviru proslave održane u Beogradu od 8. do 11. maja ove godine. Ovu proslavu, za koju su pripreme trajale dve godine, organizovali su Srpska akademija nauka i umetnosti, Univerzitet u Beogradu, Matematički institut u Beogradu, Društvo matematičara i fizičara SR Srbije, Srpska književna zadruga i Muzej grada Beograda, kao i Počasni i Izvršni odbor za proslavu. Članovi Počasnog odbora bili su: Velibor Gligorić, predsednik Srpske akademije nauka i umetnosti, Dragiša Ivanović, rektor Univerziteta u Beogradu, Miladin Radulović, predsednik Saveta za koordinaciju naučnih delatnosti i Živan Berisavljević, sekretar za obrazovanje i kulturu SR Srbije, a Izvršnog: Vukić Mićović, sekretar Srpske akademije nauka i umetnosti, Tadija Pejović, direktor Matematičkog instituta, Đuro Kurepa, profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu, Đorđe Karapandžić, profesor Šumarskog fakulteta u Beogradu, Dragan Trifunović, vodeći istraživač Vojno-tehničkog instituta, Milan Đoković, predsednik Srpske književne zadruge i Nadežda Andrić, kustos Muzeja grada Beograda.

Bogat program proslave započet je polaganjem venaca na grob Mihaila Petrovića, 8. maja 1968. godine, u 9 časova. Vence su položili: Srpska akademija nauka i umetnosti, Univerzitet u Beogradu, Matematički institut, Prirodno-matematički fakultet, Katedra matematike Prirodno-matematičkog fakulteta, Društvo matematičara i fizičara SR Srbije, Srpska književna zadruga i Ribarska zajednica »Mika Alas«.

Istog dana u 11 časova, u svečanoj sali Srpske akademije nauka i umetnosti, održana je *Svečana akademija*. Otvarajući akademiju, u svojoj uvodnoj reči akademik Velibor Gligorić izložio je značaj i smisao proslave stogodišnjice rođenja Mihaila Petrovića. On je, između ostalog, naglasio da je Petrović, svojim plodnim stvaralaštvom i afirmacijom naše nauke u svetu, bio najistaknutiji akademik u dosadašnjoj istoriji Srpske akademije nauka i umetnosti.

Posle ove uvodne reči, Velibor Gligorić pozdravio je prisutne goste, javne i kulturne radnike, predstavnike društveno-političkih organizacija, Skupštine grada Beograda i SR Srbije, zatim predstavnike Jugoslavenske akademije znanosti i umetnosti (profesore Danila Blanuša i Zlatka Jankovića), Društva matematičara i fizičara Bosne i Hercegovine (profesora Mahmuta Barjaktarevića), Društva matematičara i fizičara Makedonije (profesora Popova), kao i ostale prisutne učesnike proslave i simpozijuma. Na Svečanoj akademiji primećen je veći broj starih Beograđana, studenata i ribara Ribarske zajednice koja nosi ime »Mika Alas«.

Predsednik Izvršnog odbora Tadija Pejović pročitao je zatim, pozdravno pismo sestre Mihaila Petrovića, Marije Petrović-Perić koja, u dubokoj starosti, živi u Švajcarskoj.

Posle ovog uvodnog dela, prešlo se na radni deo svečane akademije. U prvom pročitanom referatu *Lik Mihaila Petrovića,* profesor Tadija Pejović sažeto je prikazao Petrovićev životni put, ukazao na značajnija mesta njegovog stvaralaštva i osvetlio njegov lik. Dopisni član SANU, profesor Mirko Stojaković u svom izlaganju *Naučni postupak Mihaila Petrovića* izneo je izvesne karakteristike Petrovićevog naučnog rada i postupka, kao što su obimnost, raznovrsnost, generalizacija, zasnivanje novih naučnih disciplina itd. Stojaković je posebno skrenuo pažnju na Petrovićevu anticipaciju današnjih analognih računskih mašina. Stojaković kaže: »Ako se Petroviću u ovoj oblasti ne može dati apsolutni prioritet, a ono se sigurno može izdejstvovati za njega mesto među osnivačima ove naučne discipline ... Zadatak njegovih sledbenika i učenika, naslednika njegove naučne baštine bio bi da se njemu izbori mesto u istoriji ove oblasti, mesto koje je svakako jedno od vodećih«. U govoru profesora Konstantina Orlova *Mihailo Petrović na Beogradskom univerzitetu* evocirane su uspomene na Petrovića kao dugogodišnjeg profesora Velike škole, odnosno Univerziteta, a u referatu profesora Đorđa Karapandžića *Mihailo Petrović i njegovi učenici* osvetljen je Petrovićev lik pedagoga, koji je oformio čitav niz značajnih imena naše nauke. U Karapandžićevoj reči interesantan je i istorijski prikaz naučne atmosfere oko časopisa *Vesnik pre i posle rata.* I na kraju, u referatu *Književni rad Mihaila Petrovića,* Milan Đoković se osvrnuo na Petrovićevo bavljenje književnošću koje nije bilo slučajno, već nerazdvojno od njegovog naučnog rada jer je Petrović »čvrsto verovao da između nauke i poezije ima zajedničkog imenioca«. Đoković je istakao i Petrovićev pesnički talenat — pronicljivost zapažanja i lepotu i jasnost izraza, kao i Petrovićev doprinos filozofsko-teorijskim i istorijsko-metodološkim problemima književnosti.

II

Centralni deo proslave, sa svečanom akademijom, predstavljao je simpozijum posvećen životu i radu Mihaila Petrovića. On je održan od 9. do 11. maja u prostorijama Matematičkog instituta u Beogradu.

Simpozijum je počeo plenarnom sednicom koju je otvorio predsednik Naučnog odbora simpozijuma profesor Đuro Kurepa. U opširnijem izlaganju, profesor Kurepa je najpre pozdravio učesnike simpozijuma, a zatim, davši istorijski pregled razvoja matematičkih nauka, posebno se osvrnuo na ulogu i mesto Mihaila Petdovića u tom razvoju. U toku svog izlaganja profesor Kurepa bio je prekinut dolaskom nastavnika i svih učenika Matematičke gimnazije koji su, kao najmlađi poklonici i, nema sumnje, budući graditelji nove matematike, takođe prisustvovali ovoj sednici.

Posle otvaranja simpozijuma, na plenarnoj sednici govorili su prof. Dragiša Mitrović *(Generalizacija nekih formula Mihaila Petro-*

vića), prof. Dušan Nedeljković *(Etape i perspektiva prirodne filozofije Mihaila Petrovića)* i prof. Đuro Kurepa *(Princip spektra)*. Simpozijum je nastavio sa radom u sekcijama — usled velikog broja i raznovrsnosti referata. Saopštenja pročitana na simpozijumu ovde se ne komentarišu pojedinačno jer su ona u celosti objavljena u ovom Zborniku.

U grupi istorijsko-filozofskih radova, pored plenarnog izlaganja Dušana Nedeljkovića, pročitani su sledeći referati: *Elementi matematičke fenomenologije kao oslonac za formulisanje stilističkih principa adekvatnosti i poliritmije* (Milivoje Pavlović), *Fenomenološko preslikavanje u teoriji verovatnoće* (Stevan Stojaković), *Prilog matematičkoj fenomenologiji — osobine* (Dragan Trifunović), *O nekim filozofskim i društvenim pogledima Mihaila Petrovića* (Milorad Bertolino), *Petrovićev prilog rasvetljavanju Getaldić-ovog učešća u genezi analitičke geometrije* (Ernest Stipanić) i *Stjepan Gradić o problemima gibanja* (Žarko Dadić). U grupi radova iz oblasti matematičkih spektara, oblasti koju je Mihailo Petrović osnovao pre ravno pedeset godina, pored saopštenja profesora Kurepe na plenumu, pročitani su sledeći referati: *Nove računske operacije inspirisane Teorijom matematičkih spektara* (Konstantin Orlov), *O prvim radovima Mihaila Petrovića koji se odnose na primenu spektarne metode u algebri i aritmetici* (Borivoj Mihajlović) i *Moderne matematičke discipline, specijalno teorije skupova u nekim radovima Mihaila Petrovića* (Dušan Adamović). Iz teorije funkcija i diferencijalnih jednačina, koje su i osnovne oblasti Petrovićevog stvaranja, saopšteni su i ovi radovi: *Petrovićevo direktno proučavanje rešenja diferencijalnih jednačina* (Milorad Bertolino), *Članak Mihaila Petrovića »Osetljiva mesta običnih diferencijalnih jednačina«, posmatran u svetlu savremene fizike* (Živojin Ćulim), *Jedan Petrovićev problem o ekstremima i programiranje* (Đuro Kurepa), *Najznačajniji radovi Mihaila Petrovića iz teorije funkcija kompleksne promenljive i razvitak te teorije* (Vojin Dajović), *Neke primedbe o pojmu izložioca konvergencije kod Mihaila Petrovića* (Dušan Adamović), *O nekim nejednakostima za konveksne funkcije* (Petar Vasić) i *O jednom problemu koji je u vezi sa diferencijalnim operatorom Mihaila Petrovića* (Radosav Đorđević). Iz oblasti računskih mašina bila su dva referata: *Računske mašine Mihaila Petrovića* (Dragan Trifunović) i *Analiza uticaja vetra na balističke putanje primenom analognog modela* (Jovan Petrić i Borislav Ristić), dok su Mirko Stojaković i Dragan Trifunović u radu *Modifikacija Graeffe-ove metode Mihaila Petrovića* prikazali prvi Petrovićev matematički tekst napisan još za vreme Petrovićevih studija 1886. godine.

Mada je osnovni razlog održavanja simpozijuma bila savremenost i aktuelnost rezultata Petrovićevog stvaralaštva, simpozijum nije ograničio učesnike samo na saopštenja koja su u direktnoj vezi sa tim rezultatima. U posebnoj sekciji izloženo je sedam opštih rasprava iz različitih disciplina: *Jedan Turan-ov niz eliptičkih integrala treće vrste* (Stanimir Fempl), *Nekoliko primedaba o jednoj funkcionalnoj jednačini sa više nepoznatih funkcija* (Mahmut Barjaktarević), *Nekoliko zapažanja o homogenim linearnim diferencijalnim jednačinama drugog reda čija rešenja mogu biti sadržana u zatvorenoj formi*

(Ilija Šapkarov), *Fundamentalna svojstva jedne klase kompleksnih funkcija* (Simon Ćetković), *Algebarsko rešavanje jednačina troznačne logike* (Lazar Đorđević), *O nekim parcijalnim jednačinama II reda* (Đorđe Karapandžić) i *O generalizaciji nekih klasa polinoma* (Ljubomir Ćirić).

U pedagoškoj sekciji saopšteni su ovi radovi: *O nekim člancima Mihaila Petrovića, posvećenim metodici nastave matematike* (Milutin Jorgović), *Aritmetička, geometrijska i harmonijska sredina* (Stanko Prvanović), *Radosni časovi matematike* (Katarina Kostić), *Prilog integraciji racionalno razlomljenih funkcija* (Nikola Rosić) i *Generalizacija teorema Gauss-Ostrogratskog i Stokes-a* (Zoran Vrcelj). Sledeća saopštenja pročitana su u takozvanoj sekciji nematematičkih radova: *Historijat istraživanja jegulje* (Dinko Marović), *Mihailo Petrović kao etnolog* (Dragoslav Antonijević), *Putopisac Mihailo Petrović — Alas* (Slobodan Marković), *Karakteristika i značaj stila u delima Mihaila Petrovića* (Milivoje Pavlović). *Kuće u Beogradu u kojima je živeo i radio Mihailo Petrović* (Divna Đurić). *Istorijat ulice Mike Alasa* (Divna Đurić) i *Treći život Mike Alasa* (Mladen Đuričić).

Može se reći da je opšta karakteristika rada ovog simpozijuma bilo naglašavanje Petrovićevog vizionarstva, anticipacije značajnih dostignuća savremene nauke, kao što su kibernetika, analogne računske mašine (hidroitegratori), zatim isticanje Petrovićevih novih teza u prirodnoj filozofiji, kao i uopštavanje i pojednostavljenje nekih Petrovićevih radova iz teorije funkcija, matematičkih sredina i diferencijalnih jednačina.

Simpozijumu je prisustvovalo 76 stalnih i još nekoliko desetina povremenih učesnika iz raznih krajeva naše zemlje. U toku rada simpozijuma stigao je i telegram makedonskih matematičara koji su simpozijumu poželeli uspešan rad. Saopšteno je ukupno 42 referata domaćih autora, a pročitana su i dva priloga Petrovićevih savremenika — Francuza, prilog poznatog matematičara i člana naše Akademije Paul Montel-a i prilog Petrovićevog druga iz iste generacije sa Ecole Normale Supérieure (1890—1894), profesora Charles Maurain-a. U njima su Montel i Maurain evocirali svoje uspomene na Mihaila Petrovića.

Svi referati i prilozi sa simpozijuma, kao i govori na svečanoj akademiji, objavljeni su u ovoj Spomenici.

III

Sama proslava, a posebno održavanje simpozijuma, bili su obogaćeni sa nekoliko uspelih propratnih manifestacija.

Koristeći najviše fondove Arhive Srpske akademije nauka i umetnosti i zaostavštinu kojom raspolaže skeretar Odbora za proslavu, Muzej grada Beograda priredio je vrlo uspelu izložbu fotografija, dokumenata, rukopisa i predmeta Mihaila Petrovića kojima je ilustrovan njegov život i rad. Izložbom je dominirala fotografija generacije Ecole Normale Supérieure iz 1891. godine na kojoj su, pored našeg Mihaila Petrovića, i nekoliko »normalaca«, docnije istaknutih imena francuske nauke (Sagnac, Mathien, Paris, Gotton, Maurain i

Детаљ са изложбе *Живот и рад Михаила Петровића*
(САНУ, Београд 8—15. мај 1968)

dr.). Posebno zanimljiv eksponat izložbe bila je violina Mihaila Petrovića koja je i pronađena uoči proslave. Posle stručnog pregleda utvrđeno je da ona potiče iz 1670. godine, i rad je majstora Žaka Gvinoa iz Pariza. Izložba je bila priređena u predvorju svečane sale Akademije i velika je šteta što je trajala samo za vreme održavanja svečane akademije i simpozijuma.

Na predlog Odbora za proslavu, Državni arhiv Srbije je organizovao izložbu povodom stogodišnjice rođenja Mihaila Petrovića pod nazivom *Beogradska matematička škola*. Organizatori ove izložbe pokušali su da od Atanasija Nikolića (profesora matematike na Kneževom liceju) pa do Mihaila Petrovića prikažu razvoj matematičkih nauka u nas. I pored prijatnih utisaka koje je svaki posetilac, besumnje, poneo sa ove izložbe, organizatorima bi se moglo staviti nekoliko primedaba koje se tiču koncepcije i realizacije izložbe. Pre svega, osetilo se da izložbu nije postavio matematičar u saradnji sa arhivistom, što je uslovilo da izložba ne odgovori potpuno svom nazivu *Beogradska matematička škola*. Pojam *Beogradska matematička škola* vezan je, pre svega, za razvoj naših matematičkih nauka između dva rata, a o tom periodu na izložbi je bilo manje materijala. Zatim, i izložena građa iz perioda Liceja i Velike škole bila je nepotpuna i ne najbolje odabrana. Značajnija građa za razvoj matematike od Liceja pa sve do 40-ih godina ovog veka ostala je u kutijama depoa Državnog arhiva Srbije. Ipak, izloženi materijal o Mihailu Petroviću, kao i lepo opremljen i koristan katalog, doprineli su da sa svoje strane upotpune proslavu. Beogradska matematička škola je vrlo ozbiljna tema za istoriju nauka i velika je šteta što Arhiv Srbije nije ozbiljnije prišao sadržini ove izložbe.

Učesnike proslave i simpozijuma, i posetioce zgrade Akademije, prijatno je iznenadila i izložba Petrovićevih knjiga priređena u Biblioteci SANU. Ona je, umešnošću priređivača izložbe, još jednom podsetila na bitnu dimenziju Petrovićeve ličnosti — široko interesovanje za razne oblasti duhovnog života koje je našlo odraz i u ovoj bogatoj i raznovrsnoj zbirci knjiga.

Sličnu izložbu Petrovićevih knjiga i separata, organizovala je, u vreme proslave, i Univerzitetska biblioteka »Svetozar Marković« u Beogradu.

U prostorijama SANU za učesnike simpozijuma bila je izložena stona računska mašina (na principu impulsne tehnike) proizvodnje Elektronske industrije — Niš, koja je dobila naziv po Mihailu Petroviću — »Alas-2«.

U pauzama predavanja, za učesnike simpozijuma organizovane su posete Institutu nuklearne fizike »Boris Kidrič« u Vinči i Muzeju savremene umetnosti, a jedna manja grupa učesnika bila je na jednodnevnom izletu, brodom, u Đerdapu. Ove posete i izlet znatno su doprineli da se učesnici simpozijuma iz raznih krajeva naše zemlje bolje upoznaju i razmenjaju mišljenja iz oblasti svojih naučnih preokupacija. Po završetku simpozijuma. 10. maja održan je banket u ribarskom ambijentu desne obale Dunava, u Zemunu. Na banketu, koji je bio evokacija tradicionalnih ribljih večera koje je priređivao Mihailo Petrović, okupljene učesnike simpozijuma, kao i sekretara za obrazovanje i kulturu SR Srbije, druga Žiku Berisavljevića, pozdravio je prigodnim govorom predsednik Naučnog odbora simpozijuma profesor dr Đuro Kurepa.

Istoga dana u 12 časova u Domu štampe drug Berisavljević priredio je prijem za učesnike simpozijuma. Prijemu su prisustvovali i predsednik i potpredsednik SANU Velibor Gligorić, odnosno Milan Bartoš, članovi za proslavu, kao i veći broj kulturnih i javnih radnika Beograda.

IV

U toku priprema za samu proslavu preduzete su neke mere da se uspomena na Mihaila Petrovića sačuva materijalnim spomenicima kulture i postupcima kojima se odaje priznanje ovom naučniku. Pre svega, treba pomenuti da je, na predlog sekretara Odbora za proslavu, dom Mihaila Petrovića u Beogradu stavljen pod zaštitu države od strane Zavoda za zaštitu spomenika kulture Beograda. Ovo je uslovilo i odgovarajuće konzervatorske radove na samoj kući Mihaila Petrovića. Tako, danas dom Mihaila Petrovića ima isti izgled kao u vreme kad je Petrović u njemu živeo.

Pored oznake da je dom Mihaila Petrovića, kao spomenik kulture, pod zaštitom države, fasadu zgrade ukrašava i spomen-ploča sa likom Mihaila Petrovića, rad Nebojše Mitrića.

Kako je ulica koja je donedavno nosila ime Mihaila Petrovića iščezla usled novogradnje, to je na predlog Odbora, današnja Banatska ulica na Dorćolu dobila ime Mike Alasa. Pored ovoga, Skupštini grada Beograda predloženo je da i jedna škola dobije ime Mihaila Petrovića. Po našem mišljenju, to ime najviše bi odgovaralo Matematičkoj gimnaziji u Beogradu. Kada je već reč o nazivima, bilo bi, svakako, na svom mestu da i Matematički institut u Beogradu nosi ime Mihaila Petrovića (kao što je to slučaj sa odgovarajućim institutima koji nose ime Cvijića, Pančića, Farmakovskog, Tesle i dr.).

V

S obzirom da nije bilo dovoljno materijalnih sredstava kao ni vremena, u okviru proslave nije moglo biti ostvareno nekoliko akcija značajnih kako za samu ličnost Mihaila Petrovića tako i za naučnu atmosferu našeg grada, odnosno naše zemlje. Ovde, pre svega, treba napomenuti da se izdavanju celokupnih dela Mihaila Petrovića nije ni prišlo. Izuzetak čini objavljena knjiga *Metafore i alegorije* u Srpskoj književnoj zadruzi (LX Kolo, Beograd, 1967) koja, sa Petrovićevim *Člancima* (priredio V. Dajović, Beograd, 1948), knjigom koju je objavilo Društvo matematičara i fizičara SR Srbije, čini ujedno i jedino objavljivanje Petrovićevih radova za poslednjih 25 godina. Nameće se potreba da ovom prilikom konstatujemo da je naša naučna izdavačka delatnost u pogledu izdavanja celokupnih dela prilično nezainteresovana i nepotpuna. Nije samo Mihailo Petrović bez objavljenih celokupnih dela (ili izbora). Izgleda da smo mi jedna od retkih nacija koja tolikim svojim velikanima nauke nije izdala celokupna dela. Istina, na pomolu je izdavanje celokupnih dela Vuka Karadžića, Jovana Cvijića i Marina Getaldića, dok za dela Mihaila Petrovića, Stojana Novakovića i mnogih drugih tek treba naći snage i sredstava za njihovo izdavanje.

Petrovićeva delatnost, puna aktuelnosti i anticipacija savremene nauke, traži da se ovom poslu pristupi što sistematskije. Na primer, izdavanje celokupne Petrovićeve pisane reči iz fenomenologije i analognih računskih mašina bio bi potez jednak zaštiti najznačajnijeg spomenika naše kulture. Celokupna dela Mihaila Petrovića imaju višestruki značaj i bez njih je nemoguće negovati u nas naučni tradicionalizam i otkriti Petrovićevo stvaralaštvo mladoj generaciji i nauci uopšte.

Materijalni momenti, pre svega, učinili su da se u toku proslave ne otvori memorijalna muzej-soba Mihaila Petrovića u njegovoj rodnoj kući. Pored ovoga, a iz istih, materijalnih, razloga, nije se postiglo da dom Mihaila Petrovića na Kosančićevom vencu u celosti bude uređen kao jedan matematički centar, na primer, centralna matematička biblioteka. Ova specijalistička biblioteka, koja bi bila jedinstvena u Evropi, u domu Mihaila Petrovića nalazila bi se u potpuno autentičnom enterijeru jer je Mihailo Petrović sa Bogdanom Gavrilovićem i osnivač biblioteke Matematičkog seminara Velike škole, odnosno Univerziteta, koja je osnovana 1895. godine, i bila prva matematička biblioteka u Srba. I kada jednoga dana (u toku naredne tri godine) u domu Mihaila Petrovića bude smeštena matematička biblioteka naše zemlje, a Petrovićeva radna soba bude pretvorena u memorijalni muzej, naučni i kulturni život našeg grada biće besumnje znatno obogaćen.

Proslava stogodišnjice podstakla je da se pristupi izradi spomenika — poprsja Mihaila Petrovića, što je povereno akademskom vajaru Aleksandru Zarinu. Postavljanjem ovog spomenika u atrijumu Kapetan-Mišinog zdanja (u kome je Petrović, najpre kao đak, a zatim kao profesor, proveo više od pola veka), ili ispred doma Mihaila Petrovića, biće još jednom odata zahvalnost ovom neimaru naše nauke i sačuvana trajna uspomena na njega.

Ova proslava, koja je okupila matematičare iz cele naše zemlje, kao i predstojeća proslava Marina Getaldića, poruka je svim ljudima nauke i ljudima koji vode računa o nauci, da je nužno, sa jednim osećanjem poštovanja prošlosti, prilaziti neimarima naše nauke kako istorijsko-istraživački tako i aktivno-stvaralački, kako bi se naša savremena nauka u kontinuitetu sa prošlošću dalje potpunije razvijala.

Za nama je ostao još jedan jubilej, ali i obaveza koju je on doneo sa sobom.

БИОГРАФСКА БЕЛЕШКА

ИЗВОД ИЗ ЛЕТОПИСА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

1868. 24. априла рођен у Београду од оца Никодима, проф. Богословије у Београду и мајке Милице.

1878. Основна школа у Београду.

1884. Демонстратор из хемије код професора Марка Лека у Вишој војној академији.

1885. Испит зрелости у Првој београдској гимназији са одличним успехом.

1886. Први математички рад у облику семинарскод рада *О једној модификацији Грефеова метода за решавање виших бројних једначина.*

1888. Диплома рибарског калфе.

1889. Друга Светосавска награда за урађен темат из рачунских машина на Техничком факултету Велике школе у Београду.
Диплома Велике школе у Београду о завршеном Филозофском факултету (Природно-математички одсек).
Одлазак у Париз и припремање пријемног испита све до јуна 1890. године.

1890. Друга Светосавска награда за урађен темат из аналитичке геометрије на Филозофском факултету Велике школе у Београду.
Положен пријемни испит у Парискоj академији наука за упис у Ecole Normale Supérieure као elève interne (Section des Sciences).

1892. Државни питомац Краљевине Србије.
Диплома о степену наука Licence es sciences mathématiques на Париском универзитету.

1893. Диплома о степену наука Licence ès sciences physiques на Париском универзитету.

1894. Са професором Lippmann-ом одлази у Лондон ради демонстрирања професоровог проналаска — филма у боји.
Диплома о степену наука Doctorat ès sciences mathématiqus.
Објављује прву научну расправу. У часопису Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences (Paris) излаже

белешку о резултатима из докторске тезе. У овом часопису Петровић је објавио укупно 30 расправа у виду Note de Petrovitch.
Диплома о завршеној Ecole Normale Supérieure (Sectoion des Sciences).
Редован професор Филизофског факултета Велике школе у Београду.

1895. Члан Друштва француских математичара у Паризу.
Од ове године је стални члан комисије за полагање професорског испита.
Објављује први рад у Гласу Српске краљевске академије *О асимптотним вредностима интеграла диференцијалних једначина првога реда* (Глас L). До краја живота, објавио је укупно 60 расправа у Гласу Српске краљевске академије.

1896. Члан Друштва италијанских математичара у Палерму. Почетак рада на математичкој феноменологији.

1897. Дописни члан Српске краљевске академије.
Диплома рибарског мајстора.
Дописни члан Југославенске академије знаности и умјетности у Загребу.
Проналазак аналогне рачунске машине на принципу хидро динамике.

1898. Почетак рада на криптонрафији. До 1941. године у нашој земљи су биле у употреби шифре Михаила Петровића. Одлази на полугодишње научно путовање у Француску. Члан Главног просветног савета Министарства просвете. Полаже испит за резервног инжењеријског потпоручника.

1899. Редовни члан Српске краљевске академије.
Члан Управног одбора Савеза ловачких удружења.

1900. Чита приступну академијску беседу у Српској краљевској академији.
Участвује на Међународном конгресу математичара у Паризу-
Састављач Закона о слатководном рибарству.
Стални члан међународне делегације за риболовне конвенције са Румунијом и Аустро-Угарском.
Учествује на Светској изложби у Паризу; добија гранд прих Светске изложбе за изложен хидроинтенратор.

1901. Учешће у протоколу поводом смрти француског математичара Charles Hermit-a.
Учешће у протоколу поводом смрти краља Милана Обреновића.

1902. Стручни секретар Академије природних наука Српске краљевске академије до 1905. године.
Смрт деде Новице Лазаревића.
Члан комисије за претварање Велике школе у Универзитет.

1903. Члан Управног одбора бродарских друштава Србије.
Члан Саветодавног одбора Министарства народне привреде. На овој дужности остаће више година.

1904. Одликован је орденом Светог Саве II реда.
У Југославенској академији знаности и умјетности приказује некролог о професору Димитрију Нешићу.

1905. Постављење за редовног професора новоотвореног Универзитета у Београду.
Учествује у избору професора Богдана Гавриловића за редовног члана Српске краљевске академије.

1906. Члан Друштва француских физичара.
Члан научног друштва у Букурешту.

1907. Учествује на Балканској изложби у Лондону.
Почасна диплома Друштва лондонских математичара за конструкцију хидроинтегратора.

1908. Члан Друштва немачких математичара у Лајпцигу.
Декан Филозофског факултета у Београду.
Учешће на V интернационалном конгресу математичара у Риму.
Потписник риболовне конвекције о риболову између Србије и Румуније.

1909. Продекан Филозофског факултета у Београду (све до 1913. године).
Ради на проблемима балистике у смислу интеграције одговарајућег система диференцијалних једначина.
На предлог Михаила Петровића и Јована и Цвијића позван је Милутин Миланковић за професора примењене математике Београдског универзитета.

1910. Ради на проблему даљиномера заједно са генералом Милорадом Терзићем; решење заштићено у Француској као патент.

1911. Учествује на међународној изложби у Турину, где буде награђен златном медаљом за изложене експонате из рибарства.
Приказује у Српској краљевској академији познат проблем теорије функција који потиче од Poincore-а: о броју коначних асимтотских вредности целе функције.
Излази из штампе једна од најобимнијих књига Српске науке Петровићеви *Елементи математичке феноменологије.*

1912. Члан Заједнице доктора наука у Паризу.
Учествује на међународном конгресу математичара у Кембрицу.
Обогаћује наше рибарство технологијом вештачког гајења риба.
Код Петровића полаже докторски испит Младен Берић. Учесник Балканских ратова.
Председник Просветног савета министарства просвете.
Стални члан Међународне комисије за терминологију математичке физике у Берлину.

1913. Стални члан Међународне комисије за математичку наставу у Женеви.
Учествује на VI интернационалном конгресу рибарства у Оштранду.
Код Петровића полаже докторски испит Сима М. Марковић.
Ради на проблему аутоматског мењача код аутомибила, а што је патентирао у Француској.
Проналази посредством курвиметра релацију између квадратуре и ректификације.

1914. Учествује на конференцији Међународне комисије за математичку наставу у Женеви.
Учесник I светског рата.

1916. Проналази методу за израду „вечитог календара".
Саставља свој систем *Три картона* за шифровање дипломатске поште.

1918. Делегат Српске краљевске академије на међународном скупу савезничких академија у Паризу.
Почетак рада на математичким спектрима.

1919. Делегат Српске краљевске академије на међунардом скупу савезничких академија у Бриселу.
Један од оснивача Океанографског института у Сплиту.

1920. Основано је паробродство Михаила Петровића под називом „Караш".
Ради на проблемима минског поља (војни патент).

1921. Хонорарни инспектор Министарства пољопривреде и вода.
Оснива акционарско друштво „Охрид".
Интензивно ради на проблемима теорије релативитета.
У Паризу објављује скраћени превод *Елемената математичке феноменологије.*
Произведен у резервног инжињерског мајора.
Ради на организацији националне секције Међународне математичке заједнице при Српској краљевској академији и Професорском друштву.

1922. Дописни члан Академије наука у Прагу.
Члан Француске заједнице за унапређење наука (AFAS) у Паризу.
Учествује у прослави педесетогодишњице рада професора Симе М. Лозанића.

1923. Почасни члан Друштва математичара и физичара у Прагу.
Код Петровића полаже докторски испит Тадија Пејовић.

1924. У Цириху објављује посебну књигу из теорије релативитета.
Учествује на V Међународном конкресу математичара у Торонту (Канада).
Учествује у избору професора Милутина Миланковића за редовног члана Српске краљевске академије.
Код Петровића полаже докторски испит Радивоје Кашанин.
Један је од предлагача да Београд добије нову астрономску опсерваторију.
Посредством Петровића и професора Гавриловића Српска краљевска академија постаје члан Union internationale mathématique са седиштем у Гану.

1925. Произведен у резервног инжињериског потпуковника.
Члан научног Друштва имена Шевченко у Лавову.
Учествује на Конгресу AFAS у Греноблу.

1926. Код Петровића полаже докторски испит Јован Карамата.
Учествује на конгресу AFAS у Лиону.
Стални почасни председник Секције за математику AFAS.
Учествује у избору професора Антона Билимовића за дописног члана Српске краљевске академије.

1927. Учествује на конгресу AFAS у Константину.
После смрти Јована Цвијића за председника Српске краљевске академије предложен је Михаило Петровић.
Један од састављача закона Српске краљевске академије.
Почасни председник Савеза југословенских студената математике.

1928. Ванредни професор париског Универзитета.
Члан Ротари клуба у Београду.
Учествује на интернационалном конгресу математичара у Болоњи.
Учествује на конгресу AFAS у Ла Рошеју.
Држи једносеместрално предавање на Сорбони у Паризу из математичких спекатара.
Код Петровића полаже докторски испит Милош Радојчић.
Српска краљевска академија наука обележила је шесдесетогодишњицу живота Михаила Петровића свечаном седницом Академије природних наука.
Члан Удружења универзитетских наставника у Београду.

1929. Члан Академије наука у Варшави.
Члан Академије наука у Букурешту.
Учествује на конгресу AFAS у Хавру.
Учествује на I конгресу математиачра словенских земаља у Варшави.
Објављује познату монографију *Intégrales premieres a restictions.*

1930. Учествује на конгресу AFAS у Алжиру.
Учествује на међународном конгресу опште механике у Лијежу.

1931. Учествује на конгресу математичара у Турну — Северину.
Учествује на прослави Collège de France у Паризу.
Учествује на конгресу AFAS у Нансиу.
Члан је међународне научне екпедиције за освајање Северне поларне области.
По други пут целокупна Српска краљевска академија предлаже Михаила Петровића за свог председника.
У едицији Mémorial des Sciences mathématiques објављује познату монографију из квалитативне интеграције *Intégration qualitative des équations differentielles.*

1932. Учесник је прославе 500-годишњице Универзитета у Кану.
Учесник на интернационалном конгресу математичара у Цириху.
Оснивач познатог часописа Publications.
Један од оснивача *Билтена* Српске краљевске академије.
Објављује свој први уџбеник *Рачунање са бројним размацима.*
Објављује своју прву књигу путописа *Кроз поларну област.*

1933. Члан међународне научне експедиције за испитивање Северне поларне области.
Код Петровића полаже докторски испит Драгослав Митриновић
Учествује на конгресу AFAS у Шамбериу.
Објављује књигу *У царству гусара.*

1934. Код Петровића полаже докторски испит Константин Орлов.
Ванредни професор Универзитета у Бриселу.
Учествује на II конгресу математичара словенских земаља у Прагу.
Држи једносеместрално предавање у Математичком институту у Бриселу.
Члан је уредништва математичког часописа Интербалканске уније.
Код професора Николе Салтикова, Данило Михњевић полаже докторски испит.

1935. Члан међународне научне експедиције за испитивање Јужне поларне области.
Са Јованом Караматом објављује заједничку расправу *Изражавање дво-периодичних функција помоћу одређених интеграла* у Гласу Академије.

1937. Учествује на конгресу балканских математичара у Букурешту.
Заступа Српску краљевску акдемију на прослави 300-годишњице Декарта у Паризу.
Члан Академије наука у Кракову.

1938. Пензија. Хонорарни редовни професор Универзитета у Београду.

1939. Почасни доктор филозофије Универзитета у Београду.
Носилац ордена Светог Саве I реда.

1941. Заробљен и одведен у Немачки логор. Крајем године враћа се из заробљеништва.

1943. 8. јуна у ноћи умро је Михаило Петровић.

Издавање ове Споменице потпомогли су редакциони одбори часописа *Математички весник, Дијалектика* и *Математичко-физички лист*, као и *Српска академија наука и уметности* и *Секретаријат за образовање и културу Социјалистичке Републике Србије*

РЕГИСТАР ЛИЧНИХ ИМЕНА

К

Л

М

Н

Њ

О

П

Р

Đ

F

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

NJ

O

P

R

S

Š

T

V

W

Ž

Уредништво Споменице

Вукић М. Мићовић
секретар Српске академије наука и уметности
(I део Споменице — говори на Свечаној академији)

Редакциони одбор часописа„ Математички весник“
(II део Споменице — математички радови са Симпозијума)

Ђуро Курепа
професор универзитета
(III део Споменице — филозофски радови са Симпозијума)

Драган Трифуновић
научни сарадник Математичког института
(IV део Споменице — остали радови са Симпозијума)

Михаило Петровић
1868—1943

Лектор: Ивана Миливојев / Нацрт за корице: Милан Чавчић / Коректура: Ивана Миливојев / Издаје: Одбор за прославу стогодишњице рођења Михаила Петровића / Штампа: „Научно дело“, Београд, Вука Караџића 5 (стр. 1—45, 319—424); Београдски графички завод (стр. 45—206); Графичко предузеће „Радиша Тимотић“, Београд, Обилићев венац 5 (стр. 207—318) / Тираж: 370 / Штампање завршено: априла 1969.

0-1X-69