СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

ГЛАС

L

О АСИМТОТНИМ ВРЕДНОСТИМА ИНТЕГРАЛА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПРВОГА РЕДА

Од

Д-ра Михаила Петровића

проф. Вел. Школе

У БЕОГРАДУ

ШТАМПАНО У ШТАМПАРИЈИ КРАЉЕВИНЕ СРБИЈЕ

1895.

Више пута у применама диференцијалних једначина од важности је знати не сам интеграл једначине, већ *асимтотне вредности* његове, т. ј. границу, којој тај интеграл тежи кад прапроменљива бесконачно расте. Често пута у механичким или физичким проблемима, који се своде на решавање диференцијалних једначина, усљед каквих нарочитих услова, исказаних у проблему, овај се може сматрати као решен кад се знају асимтоте интегралних кривих, које престављају механички или физички феномен, ма да се исте криве и не могу наћи. Па баш и у случајевима кад се једначина може интегралити, посао интеграције обично је врло тегобан, и било би од интереса имати једну методу, која би допуштала директно израчунавање поменутих граница, а да се не мора проћи кроз теретне интеграционе операције.

У једноме своме ранијем раду (Sur les zèros et les infinis des intégrales des équations différentielles algébriques, Paris 1894.) ја сам се бавио о сличним питањима, али која се односе на вредности које поништавају интеграле дате диференцијалне једначине, или их чине бесконачним, или за које ови постају максимум или минимум и т. д. Теореме на које сам том приликом наишао, могу се применити на решење неколиких питања из теорије асимтотних вредности интеграла, и која су предмет овога рада.

Општи интеграл *y* једне диференцијалне једначине првога реда

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = o$$

је извесна функција прапромењиве x и једне интеграционе константе, која функција, стављена на место *y*-а у диференцијалној једначини, своди ову на идентитет ма какве биле вредности x-а и интеграционе константе. Асимтотне вредности интеграла *y* варирају у опште са варијацијом интеграционе константе, и закон те варијације у опште не може бити познат док се једначина потпуно не интеграли. Али има значајних случајева, у којима те асимтотне вредности не зависе од интеграционе константе; тада те вредности остају једне и исте за све посебне интеграле, добијене спецификовањем те константе у општем интегралу.

Тако н. пр. за диференцијалну једначину

$$[ax^2 (y + \alpha) - x] \frac{dy}{dx} - y - \alpha = o,$$

(где су *a* и α стални бројеви), чији је општи интеграл престављен обрасцем

$$\alpha (y + \alpha) [C - a \log (y + \alpha)] - 1 = o$$

(C означује интеграциону константу), границе којима тежи *y* при бесконачном рашћењу x — a, очевидно су

$$y = -\alpha \qquad \text{и} \qquad y = e^{\frac{C}{a}} - \alpha,$$

па дакле варирају са варијацијом константе C.

На против, за једначину

$$[a (y + \alpha) - x] \frac{dy}{dx} - y - \alpha = o$$

чији је општи интеграл

$$a(y + \alpha) - a \log (y + \alpha) + C = o$$

y може тежити само граници $-\alpha$, која је независна од C.

Намеран сам показати у овоме раду, како се у опште та околност, независност асимтотних вредности општега интеграла од интеграционе константе, може распознати на самој датој диференцијалној једначини, кад је ова *алгебарска* у односу на x, y, $\frac{dy}{dx}$, и како се у томе случају могу израчунати те вредности. За тим ћу применити исту методу на решавање сличних питања, која се односе на асимтоте опште интегралне криве.

Нека је дата алгебарска диференцијална једначина првога реда

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = o, \tag{1}$$

где је F дата алгебарска функција x — a, y — a и извода $\frac{dy}{dx}$. Таква једначина може се увек написати у облику

$$f_0(x, y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^m + f_1(x, y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{m-1} + \cdot \cdot \cdot + f_{m-1}(x, y)\frac{dy}{dx} + f_m(x, y) = o \tag{2}$$

где су $f_0, f_1 \cdot \cdot \cdot f_m$ полиноми по y са сачиниоцима који су алгебарске функције x-a, и које не постају бесконачне ни за коју коначну вредност x-a.

У поменутоме своме раду ја сам доказао, између осталих, ове две теореме (које важе и у општијем случају кад је F ма какве трансцедентна функција x-a) :

Прва теорема: *Да би вредности x-a, које поништавају општи интеграл диференцијалне једначине (1), биле независне од интеграционе константе, потребно је и довољно: да свака од функција* $f_k (x, y)$ $(k = 1, 2 \cdot \cdot \cdot m)$ *осим* $f_0 (x, y)$ *садржи као чиниоца y подигнут на степен раван индексу k или већи од овога.*

Друга теорема: *Кад год поменуте вредности не зависе од интеграционе константе, оне морају бити: или* $x = \infty$, *или корени једначине*

$$f_0 (x, o) = o \tag{3}$$

решене по x.

Пошто су те две теореме основа свију резултата овога рада, то наводим у кратко њихов доказ, основан на извесним теоремама из теорије алгебарских функција и диференцијалних једначина првога реда.

Замислимо једначину (2) решену по изводу $\frac{dy}{dx}$; према познатој Puiseux-овој теореми, свако од тих решења може се написати у облику

$$\frac{dy}{dx} = A(x)\, y^{\frac{\lambda}{\mu}} + B(x)\, y^{\frac{\lambda+1}{\mu}} + C(x)\, y^{\frac{\lambda+2}{\mu}} + \cdot \cdot \tag{a}$$

где су $A(x), \quad B(x), \quad C(x) \cdot \cdot \cdot$

функције x-a, које алгебарски зависе од сачинилаца десне стране једначине (2), и $A(x)$ није идентички равна нули; λ и μ су цели и положни бројеви, од којих λ може бити раван и нули. Ставимо

$$z = \sqrt[\mu]{y}\,;$$

једначина (а) постаје

$$\text{(b)} \qquad \mu \frac{dz}{dx} = A(x)\, z^{\lambda - \mu + 1} + B(x)\, z^{\lambda - \mu + 2}$$

$$+ C(x)\, z^{\lambda - \mu + 3} + \cdots$$

Означимо са (P) скуп свију вредности x-a, у близини којих функције A, B, C $\cdots$ не могу се развити у бесконачан ред по Taylor-овом обрасцу; такве вредности x-a очевидно не зависе од интеграционе константе. Разликујмо ова два случаја.

Први случај: $\lambda - \mu + 1 = 0$. Једначина (b) тада постаје

$$\text{(c)} \qquad \mu \frac{dz}{dz} = A(x) + B(x)\, z + C(x)\, z^2 + \cdots$$

Десна страна једначине (c) може се развити у бесконачан ред, уређен по степенима x-a и z-a, и збирљив у близини вредности $z = 0$, $x = \alpha$, где је α ма каква повољна вредност x-a, али која не припада скупу (P). Према томе и према познатој основној теореми из теорије диференцијалних једначина првога реда, једначину (c) извесно задовољава један, и само један посебни интеграл (добијен спецификовањем интеграционе константе у општем интегралу), који тежи нули кад x тежи граници α. Тај интеграл не може бити идентички раван нули, пошто функција A (x) није идентички равна нули. Дакле, ма каквој, повољно узетој, вредности x-a одговара по један посебни интеграл, који није идентички раван нули, и који постаје раван нули за $x = \alpha$. А то показује да вредности x-a које поништавају општи интеграл једначине (c), и према томе такође и општи интеграл једначине (2), извесно варирају са варијацијом интеграционе константе.

Други случај: $\lambda - \mu + 1 < 0$. Тада извод $\frac{dz}{dx}$ постаје бесконачан за $z = 0$ и не може се развити у бесконачан ред у близини вредности $z = 0$; али његова изврнута вредност $\frac{dz}{dy}$ извесно се може развити у такав ред, збирљив у близини вредности $z = 0$ и $x = \alpha$, где је α као и мало час, ма каква вредност x-а, али која не припада скупу (P). Према томе, и према једној познатој теореми Briot-Bouquet-а, извесно постоји један интеграл (но који има више грана), који тежи нули кад x тежи граници α. Из тога се изводи, као и у првоме случају, да вредности x-а које поништавају општи интеграл једначине (2) зависе од интеграционе константе.

Према томе, да би те вредности биле независне од константе, *потребно* је да буде $\lambda - \mu + 1 > 0$ или $\frac{\lambda}{\mu} \geqq 1$. Но лако је доказати да је то у исти мах и *довољан* услов. Јер кад је он испуњен, једначина (b) може се написати у облику

$$\mu \frac{1}{z} \frac{dz}{dx} = A(x)\, z^{\lambda-\mu} + B(x)\, z^{\lambda-\mu+1} + C(x)\, z^{\lambda-\mu+2} + \ldots$$

где су сви изложиоци z-а на десној страни положни. Замислимо да је на десној страни једначине z замењено општим интегралом саме те једначине, и означимо са $x = \alpha$ једну од вредности које поништавају тај интеграл; тада ће бити

$$\text{(e)} \qquad z^{\mu} = e^{\int_{\alpha}^{x} \left[A(x)\, z^{\lambda-\mu} + B(x)\, z^{\lambda-\mu+1} + \ldots \right] dz}.$$

Пустимо да x тежи граници α; лева страна једначине (e) тежи нули, а да би тако исто могло бити и са десном страном, потребно је, пошто су сви изложиоци z-а положни, да бар један од услова

$$\text{(f)} \quad A(\alpha) = \infty, \quad B(\alpha) = \infty, \quad C(\alpha) = \infty \cdots$$

буде испуњен. А пошто су корени ма које од једначине (f) независни од интеграционе константе, тако ће исто бити и са вредностима $x = \alpha$. Услов је дакле довољан. Према томе:

Да би вредности x-а које поништавају општи интеграл једначине (2) биле независне од константе, потребно је и довољно да за сва решења те једначине по $\frac{dy}{dx}$ буде испуњен услов $\frac{\lambda}{\mu} \geqq 1$.

Из чега сљедује непосредно теорема I.

Теорема II такође постаје очевидна, јер сви коначни корени α ма које од једначина (f) извесно задовољавају једначину

$$f_0(x, o) = o$$

према особини корена алгебарских једначина са промењивим сачиниоцима, да остају коначни све дотле, док сачинилац највишега степена у једначини не постане раван нули.

Претходне теореме чине могућим потпуно решење проблема:

Наћи потребне и довољне услове, да би асимтотне вредности општега интеграла једначине (1) биле независне од интеграционе константе, и у томе случају израчунати те вредности без претходнога познавања општега интеграла те једначине.

Јер ако се стави

$$x = \frac{1}{\xi}, \qquad \frac{dy}{dx} = -\xi^2 \frac{dy}{d\xi}$$

и ако се, после те смене, једначина (1) напише у облику

$$(4)\quad \varphi_0(y,\xi)\left(\frac{d\xi}{dy}\right)^m + \varphi_1(y,\xi)\left(\frac{d\xi}{dy}\right)^{m-1} + \cdots + \varphi_{m-1}(y,\xi)\frac{d\xi}{dy} + \varphi_m(y,\xi) = o$$

где су $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_m$ полиноми по ξ са сачиниоцима који су алгебарске функције у-а, и које не постају бесконачне ни за коју коначну вредност у-а, границе којима тежи y кад x расте бесконачно, јесу вредности у-а које поништавају општи интеграл једначине (4), кад се у истој сматра y као прапромевљива, а ξ као његова функција.

Применом теорема I и II долази се тада до ових резултата:

Теорема III: *Да би границе, којима тежи општи интеграл у једначини (1), кад x бесконачно расте, биле независне од интеграционе константе, потребно је и довољно да свака од функција* φ_k *осим* φ_0 *садржи као чиниоца* ξ^h, *где је* $h \geq k$ $(k = 1, 2, 3 \cdots m)$.

Теорема IV: *Кад год су поменуте границе независне од интеграционе константе, одређене и коначне, оне су корени алгебарске једначине* $\varphi_0(y, o) = o$ *решене по y.*[1]

Потврдимо те две теореме н. пр. на диференцијалној једначини

---

[1] *Примедба.* Наглашујем да ове теореме важе само онда, ако интеграл одиста има одређену границу, коначну или бесконачну, јер се може десити да је он у близини вредности $x = \infty$ потпуно неодређен, као што је н. пр. случај са тригонометријским функцијама. У томе је случају вредност $x = \infty$ есенцијални сингуларитет интеграла и познате методе у аналитичкој теорији диференцијалних једначина првога реда дају начина да се та околност још унапред распозна на датој диференцијалаој једначини.

$$(h) \qquad \left[x f(y) \frac{dy}{dx} - \varphi(y)\right]^m - x^p \left[\varphi(y) \frac{dy}{dx}\right]^m = o$$

где су f (y) и φ (y) полиноми по y. Ако се стави

$$x = \frac{1}{\xi}, \qquad \frac{dy}{dz} = -\xi^2 \frac{dy}{d\xi}$$

једначина се претвара у

$$(i) \qquad \left[\varphi(y) \frac{d\xi}{dy} + f(y)\, \xi\right]^m - \left[\varphi(y)\right]^m \xi^{2m-p} = o.$$

Да би асимтотне вредности y — а биле независне од интеграционе константе, према теореми III потребно је и довољно да буде $p \geqq m$, и кад год су те вредности независне од константе, оне морају бити корени алгебарске једначине $\varphi(y) = o$. А то се може потврдити и непосредно на изразу општега интеграла једначине (h), који се добија на овај начин: једначина (i) написана у облику

$$\frac{d\xi}{dy} + \frac{f(y)}{\varphi(y)} \xi = \varphi(y)\, \xi^{\frac{2m-p}{m}}$$

припада типу Bernoulli-еве диференцијалне једначине

$$z' + P(x)\, z = Q(x)\, z^n$$

чији је општи интеграл

$$z = e^{-\int P dx} \left[C - (n-1) \int dx \cdot Q e^{(1-n)\int P dx}\right]^{\frac{1}{1-n}}$$

Општи интеграл једначине (i) биће дакле

$$\xi = e^{-\int \frac{f(y)}{\varphi(y)} dy} \left[C + \frac{p-m}{m} \int \varphi(y)\, e^{\frac{p-m}{m} \int \frac{f(y)}{\varphi(y)} dy} dy\right]^{\frac{m-p}{m}}$$

а интеграл једначине (h)

$$x = e^{\int \frac{f(y)}{\varphi(y)} dy} \left[C + \frac{p-m}{m} \int dy \cdot e^{\frac{p-m}{m} \int \frac{f(y)}{\varphi(y)} dy} \right]^{\frac{m}{p-m}}$$

За $p < m$ границе којима тежи y при бесконачном рашћењу x-а корени су алгебарске једначине $\varphi(y) = o$ и трансцеденичне једначине

$$C + \frac{p-m}{m} \int dy \cdot \varphi(y) \, e^{\frac{p-m}{m} \int \frac{f(y)}{\varphi(y)} dy} = o$$

решених по y; оне дакле варирају са варијацијом константе C. На против ако је $p \geqq m$, те границе могу бити само корени алгебарске једначине $\varphi(y) = o$; оне су дакле независне од C.

Претходне теореме дају потпун одговор на постављено питање. Но у појединим случајевима могуће је ићи још даље и решити проблем и у случају кад су сачиниоци од y и $\frac{dy}{dx}$ у датој једначини ма какве трансцедентне функције x-а. Као један од многобројних таквих случајева навешћу чувену Riccati-еву једначину, на коју се тако често наилази како у аналитичкој теорији диференцијалних једначина, тако и у њиховим геометријским, механичким и физичким применама. Та је једначина

$$(7) \qquad \frac{dy}{dx} + \varphi_1(x) y^2 + \varphi_2(x) y + \varphi_3(x) = o$$

где су φ_1, φ_2, φ_3 функције x-а, за које ћу претпоставити, да би докази били простији, да су униформне функције.

Сменом функције

$$y = \frac{u}{\varphi_1(x)}$$

једначина (7) прелази у

$$(8) \qquad \frac{du}{dx} + u^2 + f_1(x)\, u + f_2(x) = o$$

где је
$$\begin{cases} f_1(x) = \varphi_2(x) - \dfrac{\varphi'_1(x)}{\varphi_1(x)} \\ f_2(x) = \varphi_1(x)\, \varphi_3(x) \end{cases}$$

Ограничимо се на реалне вредности x-а, пустимо да x расте бесконачно и разликујмо ова два случаја:

Први случај: *$f_1(x)$ и $f_2(x)$ теже коначним и од нуле различним границама.* Нека су

$$\begin{cases} \lim f_1(x) = a_1 \\ \lim f_2(x) = a_2 \end{cases}$$

те границе; ја велим да, *кад x бесконачно расте, граница којој тежи општи интеграл једначине (8) не зависи од интеграционе константе: она је или потпуно неодређена, па ма какву вредност дали константи, или је равна једној од вредности*

$$(9) \quad -\frac{1}{2}\left(a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}\right), \quad -\frac{1}{2}\left(a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}\right)$$

Јер, кад се у једначини (8) стави $x = \frac{1}{\xi}$ и кад се узме за прапроменљиву *u* а за нову функцију ξ, иста се једначина може написати у облику

$$(10) \qquad \frac{d\xi}{du} = \frac{\xi^2}{u^2 + f_1\left(\frac{1}{\xi}\right) u + f_2\left(\frac{1}{\xi}\right)}$$

Нека је $\xi = \psi (u)$ општи интеграл ове последње једначине. Асимтотне вредности функције u за $x = +\infty$ нису ништа друго, до вредности које та функција добија за $\xi = o$, и према томе могућна су ова два случаја:

I. Функција u, дефинисана диференцијалном једначином (10) нема никакву одређену вредност за $\xi = o$, т. ј. вредност $\xi = o$ преставља есенцијални сингуларитет функције $u (\xi)$ дефинисане једнач. (10). У томе случају и асимтотна вредност те функције потпуно је неодређена: интеграл не тежи никаквој одређеној граници.

Такав је н. пр. случај са Riccati-евом једначином

$$\frac{du}{dx} + u^2 + 1 = o; \tag{a}$$

једначина (10) овде је $\frac{d\xi}{du} = \frac{\xi^2}{u^2 + 1}$

чији је општи интеграл

$$u = - \operatorname{tang} \left(\frac{1}{\xi} + C \right)$$

где је C интеграциона константа. Вредност $\xi = o$ есенцијални је сингуларитет функције u, и вредност $\operatorname{tang} (+\infty)$, т. ј. асимтотна вредност општега интеграла једначине (a), потпуно је неодређена.

Наводим узгред, да се, по познатим методама из аналитичке теорије диференцијалних једначина првога реда, може увек на самој датој једначини и без претходне интеграције распознати, да ли је вредност $\xi = o$ есенцијални сингуларитет општега интеграла, или не, па према томе и то, да ли дата једначина потпада под случај I или под идући случај.

II. Вредност $\xi = o$ није есенцијални сингуларитет функције $u(\xi)$ дефинисане једначином (10). Асимтотне вредности интеграла u тада нису ништа друго до корени r_i једначине $\psi(r) = o$ решене по r; нека је r такав један корен.

Напишимо једначину (10) у облику

$$(11) \qquad \psi(u) = e^{\int_r^u \frac{\psi(u)\,du}{u^2 + f_1\left(\frac{1}{\psi}\right)u + f_2\left(\frac{1}{\psi}\right)}}$$

и пустимо да u тежи граници r. Тада ће лева страна једначине (11) тежити нули, па да би тако исто било и са десном страном, потребно је да буде

$$(12) \quad \lim \left[u^2 + f_1\left(\frac{1}{\psi}\right)u + f_2\left(\frac{1}{\psi}\right)\right] = o \quad \text{За} \begin{cases} \psi = o \\ u = r \end{cases}$$

Услов (12) захтева да r буде корен алгебарске једначине другога степена

$$(E) \qquad r^2 + a_1 r + a_2 = o$$

и став је тиме доказан: u извесно тежи једној од граница (9). И према томе: асимтотне вредности интеграла y дате једначине (7) не зависе од интеграционе константе и добијају се, кад се једна од вредности (9) подели границом, којој тежи $\varphi_1(x)$ при бесконачном рашћењу x-а.

Али се може ићи још даље.

Кад је $a_1^2 - 4a_2 = o$ две вредности (9) једнаке су и интеграл u тежи њиховој заједничкој вредности. Но ако је $a_1^2 - 4a_2 \gtrless o$, те су две вредности различне међу собом и у томе случају могу се доказати неколике значајне теореме, од којих је на неке први наишао г. Poincaré (Sur les équations linéaires aux différenielles ordinaires et aux differences finies, штампано у American Journal of Mathematics, vol. VII № 3), и за које ћу овде, допунивши у исти мах саме теореме, изнети нове и простије доказе, али претпоставивши да су вредности сачинилаца $f_1(x)$ и $f_2(x)$ реалне за довољно велике и положне вредности x-a, и ограничивши се на реалне интеграле, који су, у осталом, од највећега интереса у применама.

Разликујмо ова два под-случаја.

Први под-случај: $a^2_1 - 4a_2 > o.$

Тада су корени квадратне једначине (E) реални; означимо их са α_1 и α_2, претпоставивши да је $\alpha_1 > \alpha_2$. Уочимо за тим квадратну једначину

$$u^2 + f_1(x)\,u + f_2(x) = o$$

решену по u, и нека су

$$u = \Theta_1(x) \qquad u = \Theta_2(x)$$

њени корени, који ће бити функције прапромењљиве x. Тада, претпостављајући да је почевши од једне извесне, довољно велике вредности x-a непрестано

$$\Theta_1(x) > \Theta_2(x),$$

биће

$$\left.\begin{aligned} \lim \Theta_1(x) &= \alpha_1 \\ \lim \Theta_2(x) &= \alpha_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{За } x = +\infty$$

Али ове две функције Θ_1 и Θ_2, тежећи при рашћењу x-a границама α_1 и α_2, могу то чинити на два начина: растући или опадајући. Испитајмо засебно сваки од ових случајева.

Претпоставимо најпре да је за велике положне вредности x-a

$$\Theta_1(x) > \alpha_1$$

дакле да Θ_1 тежи граници α_1 опадајући. Уочимо један посебан интеграл $u(x)$ једначине (8), који за једну, довољно велику, вредност $x = x_0$ задовољава услове

$$u(x_0) > \Theta_1(x_0)$$

$$u(x_0) > \Theta_2(x_0)$$

и пустимо да x расте од $x = x_0$ до $x = +\infty$. Из једначине (8), написане у облику

$$(13) \quad \frac{du}{dx} = -[u(x) - \Theta_1(x)][u(x) - \Theta_2(x)]$$

види се, да ће за то време први извод $\frac{du}{dx}$ бити негативан, т. ј. да функција $u(x)$ опада. Но у томе опадању њене вредности непрестано остају веће од одговарајућих вредности функција Θ_1 и Θ_2, јер чим би наступио моменат у коме би било

$$\Theta_2(x) < u(x) < \Theta_1(x)$$

извод $\frac{du}{dx}$ постао би позитиван, т. ј. функција $u(x)$ отпочела би да расте, што би било апсурдно, пошто би она одмах, чим почне да расте, наново достигла вредност функције $\Theta_1(x)$, престигла је и од тога тренутка наново опадала (јер извод наново постаје негативан): функција би, дакле, наизменце и за бесконачно блиске вредности x-а опадала и расла.

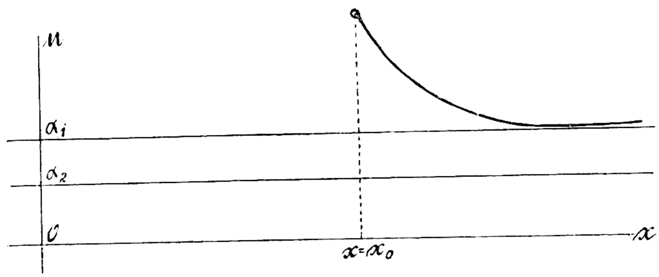
Функција $u(x)$ дакле непрестано опада, али остајући непрестано по вредности већа од $\Theta_1(x)$, па дакле не прелазећи границу α_1. То већ показује да $u(x)$, при бесконачном рашћењу x-а, тежи извесној граници која не може бити мања од α_1. Али, пошто према теореми, коју смо мало час доказали, а и према једначини (8) написаној у облику

$$(14) \qquad x - x_0 = \int_{u_0}^{u} \frac{du}{u^2 + f_1(x)\,u + f_2(x)}$$

та граница мора бити или α_1 или α_2 (без чега би лева страна једначине (14) била бесконачна а десна не), и пошто је према претпоставци $\alpha_1 > \alpha_2$, то је

$$\lim u(x) = \alpha_1$$

Интеграл дакле тежи већем корену квадратне једначине (Е), и то на начин показан сликом (1).



(Сл. 1)

Тако ће исто бити и ако је за довољно велике позитивне вредности x-а $\Theta_1(x) < \alpha_1$, дакле ако Θ_1 тежи граници α_1 растући. Јер, ако као и мало час, уочимо један посебни интеграл u (x), који за једну довољно велику вредност $x = x_0$ задовољава услове

$$u(x_0) > \Theta_1(x_0)$$

$$u(x_0) > \Theta_2(x_0)$$

из једначине (13) види се да, док x расте од x_0 до $+\infty$, извод $\frac{du}{dx}$ остаје негативан, т. ј. функција u (x) опада. Но у томе опадању њена вредност не може постати мања од одговарајуће вредности функције $\Theta_1(x)$, јер би у томе случају извод постао позитиван, т. ј. функција u почела би да расте, што би било немогуће из истих разлога као и мало-час. Ова функција дакле непрестано опада, али остајући при томе непрестано већа од одговарајуће вредности функције $\Theta_1(x)$, која је опет и сама, по претпоставци, већа од α_1. Из тога се већ увиђа, као и мало час, да $u(x)$ тежи граници α_1.

Дакле сви интеграли, који су, почевши од једне извесне вредности x_0 па до $x = +\infty$ већи од одговарајућих вредности функције $\Theta_1(x)$, извесно теже граници α_1 кад x тежи граници $+\infty$.

Ја велим, да ће исти резултат важити и за оне интеграле, који не задовољавају поменути услов, али који су такви, да њихова вредност, за довољно велике вредности x-а, лежи између $\Theta_1(x)$ и $\Theta_2(x)$, само што ће тада такви интеграли тежити граници α_1 растући. Јер, према једначини (13), за такве вредности x-а извод $\frac{du}{dx}$ биће позитиван, дакле функција u расте. Па пошто је њена првобитна вредност $u(x_0)$ већа од одговарајуће вредности функције $\Theta_2(x)$, то она при своме рашћењу не може тежити граници α_2, а пошто, према ранијој теореми, граница функције u, која у овоме случају извесно постоји, мора бити или α_1 или α_2, то је очевидно

$$\lim u(x) = \alpha_1$$

као што је и требало доказати, а ток функције за велике вредности x-а биће претпостављен сликом (2).

Остају нам, на послетку, они интеграли $u(x)$, за које је, почевши од једне извесне, довољно велике, вредности x-а непрестано

$$u(x) < \Theta_1(x)$$

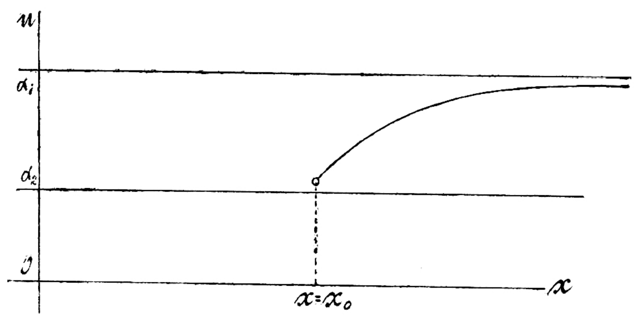
$$u(x) \leqq \Theta_2(x).$$

Тада има само један изузетан случај, у коме $u(x)$ може опадати док x варира од x_0 до $+\infty$: то је онда, кад је у исти мах

$$\Theta_2(x) \geqq \alpha_2$$

т. ј. кад Θ_2 тежи својој граници α_2 опадајући, и кад је

$$\alpha_2 \leqq u(x_0) \leqq \Theta_2(x_0)$$



(Сл. 2)

Тада је, пошто је већ по претпоставци

$$u(x_0) < \Theta_1(x_0),$$

на основу једначине (13), извод $\frac{du}{dx}$ негативан, дакле $u(x)$ опада. У томе опадању могућна су два случаја: или $u(x)$ опадајући непрестано тежи граници α_2, или прелази ту границу, и у томе случају мора опадати до $-\infty$, пошто, због знака извода, не може никако отпочети да расте, а међу тим, по ономе што претходи, не може имати друге границе између α_2 и $-\infty$. У овоме последњем случају, кад функција $u(x)$ опадајући пређе границу α_2, она опада дакле до $-\infty$, а образац (13) показује да ће она добити ту вредност за извесну коначну вредност x-а. Но из истога се обрасца види, да ће за ту исту коначну вредност x-а функција u (x) у исти мах имати и вредност $+\infty$. Претпоставка $u(x) < \Theta_1(x)$ и $u(x) < \Theta_2(x)$ захтева тада да и функције Θ_1 и Θ_2 постану бесконачне за ту вредност x-а.

Пошто је, почевши од те вредности, извод $\frac{du}{dx}$ опет негативан, то u (x) опада од $+\infty$ до извесне границе, али у томе опадању не може прећи границу α_1, пошто би у томе моменту извод постао позитиван и функција би наново расла до извесне границе; ако би ова граница била $+\infty$ (за $x = \infty$), то би било у супротности са једначином (14), чија би лева страна била бесконачна, а десна не; тако би исто било и кад би та граница била коначна, јер би она тада очевидно била различна од α_1 и α_2, које су једине вредности, за које десна страна може бити бесконачна.

Функције u (x) не може, дакле, у своме опадању прећи границу α_1. Из тога се, као и мало час, закључује да u (x) тежи граници α_1 и то на начин означен сликом (3)

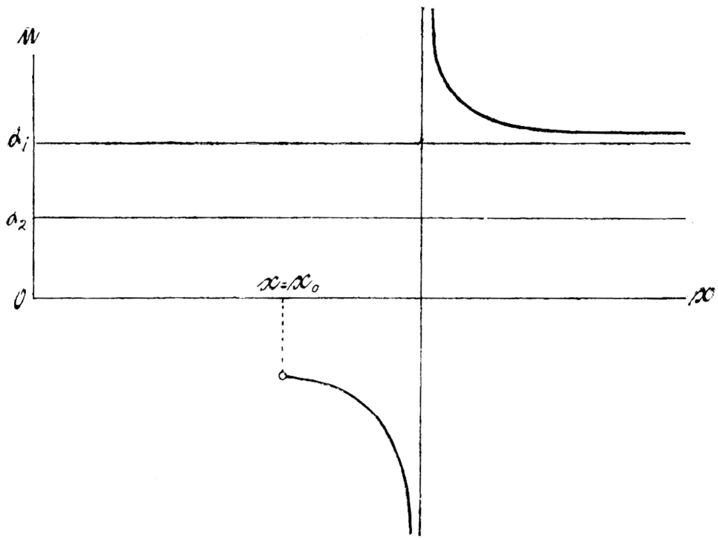
За интеграле, пак, који расту док x варира од x_0 до $+\infty$, лако се доказује, као и до сад, да у томе рашћењу не могу прећи границу α_1 и да теже самој тој граници.

Из свега овога изводи се ова теорема:

Кад год је $a^2_1 - 4a_2 > o$, асимтотна вредност општега интеграла и једначине (8) равна је, у опште, већем корену квадратне једначине (E); изузетно, и за извесне специјалне интеграле, та асимтотна вредност може бити равна мањем корену исте једначине. За које пак интеграле, и под којим условима може наступити овај последњи случај, види се из овога што претходи.

Други под-случај: $a_1^2 - 4a_2 < 0$.

Тада су корени квадратне једначине (E) имагинарни, и према томе за ма какву реалну вредност x-a, позитивну и довољно велику, полином



(Сл. 3)

$$u^2 + f_1(x)\, u + f_2(x)$$

мора имати позитиван знак, што показује, према једначини (8), да функција u (x), почевши од извесне довољно велике вредности x-a непрестано опада. Но у томе своме опадању она не може имати никакву одређену и коначну границу. Јер, пошто имамо посла са реалним интегралима, та би граница морала бити стварна и ако је ϱ таква граница, према једначини (14) морало би бити

$$\varrho^2 + a_1 \varrho + a_2 = o$$

што је немогуће, пошто иста квадратна једначина нема реалних корена. Та граница не може бити ни $u = -\infty$ за $x = \infty$, јер би то било у супротности са обрасцем (14), који се за врло велике вредности x-а своди на

$$x - x_0 = - \int_{z_0}^{z} \frac{du}{u^2 + a_1 u + a_2}$$

или на
$$x + C = \frac{1}{q} \operatorname{arctang} \frac{p - u}{q}$$

где су p и q реални и имагинарни део имагинарних корена квадратне једначине (E), а C интеграциона константа. За $x = \infty$, $u = -\infty$ лева страна једначине постала би бесконачно велика, док би десна остала коначна.

Та је граница дакле потпуно неодређена, што може доћи само отуда, ако је вредност $x = \infty$ есенцијални сингуларитет функције $u(x)$, дефинисане једначином (8), и тада, пошто та функција, као што је горе примећено, непрестано опада за велике вредности прапроменљиве, то ће варијација њена за велике вредности x-а бити преставл.ена сликом (4).

Но о томе се можемо уверити још на један интересантан начин, помоћу извесних особина линеарних диференцијалних једначина другога реда, помоћу којих се могу у неколико прецизирати и саме вредности x-а за које функција $u(x)$ има скокове од $-\infty$ на $+\infty$

Ако се у једначини (8) стави

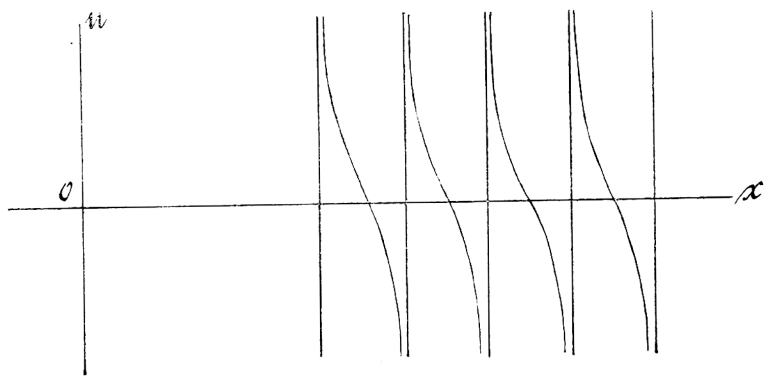
$$u = \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{2} f_1(x) \tag{15}$$

ова се претвара у линеарну једначину

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \varpi(x)\, v = o$$

где је $\qquad \varpi(x) = f_2(x) - \frac{1}{2}\frac{df_1}{dx} - \frac{1}{4} f^2_1(x).$

Почевши од једне извесне, позитивне и довољно велике вредности $x = x_0$, функција $\varpi(x)$ биће коначна



(Сл. 4)

и имаће константно један и исти знак, и то знак константе $a_2 - \frac{a^2_1}{4}$, пошто је

$$\lim f_1(x) = a_1 \quad \lim f_2(x) = a_2 \quad \lim f'_1(x) = o$$

и тај знак биће позитиван, пошто је $a^2_1 - 4a_2 < o$.

У исто време, пошто за те вредности x-a, функција $\varpi(x)$ остаје коначна, према особинама линеарних једначина и сам интеграл v остаје у томе интервалу коначан.

Послужимо се сад једном познатом Sturm-овом теоремом, односно линеарних једначина другога реда, која се састоји у овоме:

Нека су дате две једначине

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2v}{dx^2} + \varpi(x)\, v = o$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^2w}{dx^2} + \chi(x)\, w = o$$

где су функције $\varpi(x)$ и $\chi(x)$ холоморфне за све вредности x-а у једноме датом интервалу од $x = a$ до $x = b$, и такве, да је за све те вредности x-а непрестано

$$\varpi(x) \geqq \chi(x)$$

Тада између две вредности x-а, које поништавају интеграл једначине (B) мора лежати бар једна вредност x-а, која поништава интеграл једначине (A). [Sturm: Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre, Journal de Liouville t. I. 1836].

Пошто функција $\varpi(x)$, при бесконачном рашћењу x-а, тежи позитивној и од нуле различној граници $a_2 - \frac{a_1^2}{4}$, то се увек може изабрати вредност x_0 тако, да је у интервалу од $x = x_0$ до $x = \infty$ најмања вредност те функције различна од нуле и позитивна. Означимо са N ту њену најмању вредност и применимо горњу Sturm-ову теорему на једначине (A) и

$$\text{(D)} \qquad \frac{d^2w}{dx^2} + Nw = o$$

Пошто је у интервалу $(x_0\ \infty)$ непрестано

$$\varpi(x) \geqq N$$

то између две узастопне вредности x-а, које поништавају функцију w, мора лежати бар једна вредност која поништава функцију v. Али општи је интеграл једначине (D), пошто је $N > o$,

$$w = C_1 \sin (x \sqrt{N} + C_2)$$

(где су C_1 и C_2 интеграционе константе) и тај интеграл постаје у интервалу $(x = x_0,\ x = \infty)$ бесконачно много пута раван нули, за вредности x-а, чија је узастопна разлика стална и равна броју $\frac{\pi}{\sqrt{N}}$. Према томе и функција v мора постати бесконачно много пута бити равна нули у истоме интервалу, и узастопна разлика између две такве вредности које је поништавају очевидно мора бити мања од $\frac{2\pi}{\sqrt{N}}$. А из тога, према обрасцу (15) излази да функција u (x) постаје бесконачно много пута бесконачна у интегралу $(x_0\ \infty)$, и то за вредности x-а, чија је узастопна разлика мања од $\frac{2\pi}{\sqrt{N}}$.

У исти мах очевидно је и то, да, пошто логаритамски извод $\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$ за $x = x_1 - \varepsilon$ (где x_1 означава једну, ма коју, од вредности која поништава v_1 а ε бесконачно мали позитиван број) има вредност $-\infty$, а за $x = x_1 + \varepsilon$ има вредност $+\infty$, функција u осцилује бесконачно много пута од $-\infty$ до $+\infty$ са скоковима од $-\infty$ на ∞.

Из свега тога изводи се ова теорема:

Кад год је $a^2_2 - 4a_2 < o$, асимтотна вредност интеграла u потпуно је неодређена; интеграл осцилује бесконачно много пута од $-\infty$ до ∞ са скоковима од $-\infty$ на $+\infty$.

Као прост пример, у коме се може видети, како се кад све напред поменуте околности јављају, наводим једначину

$$\frac{du}{dx} + u^2 + au + b = o$$

где су a и b реалне константе. Квадратна једначина (E) овде је

$$u^2 + au + b = o$$

чији корени нека су α_1 и α_2, са претпоставком да је $\alpha_1 > \alpha_2$.

Према горе изведеним теоремама, ако је $a^2 - 4b > o$, интеграл $u(x)$ тежи граници α_1, а само извесни интеграли могу изузетно тежити граници α_2. Ако је, на против, $a^2 - 4b < o$, интеграл не тежи никаквој одређеној граници, већ осцилује бесконачно много пута од $-\infty$ ка $+\infty$.

А све се то потврђује на општем интегралу једначине, који је

$$u = \frac{\alpha_1 + C\alpha_2 e^{(\alpha_2 - \alpha_1)x}}{1 + Ce^{(\alpha_2 - \alpha_1)x}}$$

(где је C интеграциона константа).

Ако је $a^2 - 4b > o$, корени α_1 и α_2 су реални, разлика $\alpha_2 - \alpha_1$ негативна и интеграл очевидно тежи граници α_1. Граници α_2 тежи само један једини посебни интеграл, који одговара вредности интеграционе константе $C = \infty$ и који се идентички своди на $u = \alpha_2$.

На против, ако је $a^2 - 4b < o$, т. ј. корени α_1 и α_2 имагинарни и равни $p \pm q\sqrt{-1}$, општи интеграл једначине може се написати у облику

$$u = p - q \tang (qx + C)$$

који израз очевидно не тежи никаквој одређеној граници, имајући вредност $x = \infty$ као есенцијални сингуларитет. У исти мах се види да интеграл осцилује бесконачно много пута од $-\infty$ ка $+\infty$ и то за вредности x-a чији је узастопни размак раван броју

$$\frac{\pi}{q} \quad \text{или} \quad \frac{\pi}{\sqrt{a^2-4b}}$$

што све потврђује горње теореме.

Најзад, навешћу једну доста општу, интересантну класу Riccati-евих диференцијалних једначина, у којима се поменуте теореме могу такође непосредно потврдити: то је случај кад су $f_1(x)$ и $f_2(x)$ рационалне функције x-a и кад је општи интеграл једначине раван логаритамском изводу какве униформне функције.

Ако се та униформна функција означи са U, онда је

$$u = \frac{1}{U}\frac{dU}{dx}$$

и функција U биће интеграл линеарне диференцијалне једначине другога реда

$$\frac{d^2U}{dx^2} + f_1(x)\frac{dU}{dx} + f_2(x) = o \tag{16}$$

Послужимо се сад једном теоремом, коју је доказао Halphen 1886 г. (Comptes Rendus de l'Academie des Sciences t. 101. p. 1238) и која се састоји у овоме:

Нека је дата линеарна диференцијална једначина n-тог реда

$$\frac{d^ny}{dx^n} + S_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + S_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + S_n(x)\,y = o$$

где су S_1, S_2, $S_3 \cdot \cdot \cdot$ рационалне функције x-a, од којих ни једна не расте бесконачно при бесконачном рашћењу x-a. Кад год је општи интеграл такве једне једначине униформна функција, он мора бити оваквог облика

$$y = R_1 (x) e^{\alpha x} + R_2 (x) e^{\beta x} + \cdots R_n (x) e^{\delta x}$$

где су R_1, $R_2 \cdots R_n$ рационалне функције x-a, а α, β, $\gamma \cdots$ корени алгебарске једначине n-тог степена

$$(F) \quad x^n + A_1 x^{n-1} - A_2 x^{n-2} + \cdots + A_n = o$$

у којој је у опште

$$A_k = \lim S_k (x) \qquad \text{за } x = + \infty.$$

Применимо ову теорему на нашу функцију U. Пошто су f_1 и f_2 по претпоставци рационалне функције x-a, које теже коначним границама a_1 и a_2, и пошто се Halphen-ова алгебарска једначина (F) у томе случају своди на нашу ранију квадратну једначину (E), чији су корени α_1 и α_2, то мора бити

$$U = R_1 (x) e^{\alpha_1 x} + R_2 (x) e^{\alpha_2 x}$$

где су R_1 и R_2 извесне рационалне функције x-a.

Општи интеграл Riccati-еве једначине (8) може се тада написати у облику

$$u = \frac{1}{U}\frac{dU}{dx} = \frac{\alpha_1 R_1 + \frac{dR_1}{dx} + \left(\alpha_2 R_2 + \frac{dR_2}{dx}\right) e^{(\alpha_2 - \alpha_1) x}}{R_1 + R_2 e^{(\alpha_2 - \alpha_1) x}}$$

Пустимо да x бесконачно расте. Ако су корени α_1 и α_2 реални, разлика $\alpha_2 - \alpha_1$ је одречна и према томе је

$$\lim \left(\alpha_2 R_2 + \frac{dR_2}{dx}\right) e^{(\alpha_2 - \alpha_1) x} = o$$

$$\lim R_2 e^{(\alpha_2 - \alpha_1) x} = o$$

Тако исто логаритамски извод $\frac{1}{R_1} \frac{dR_1}{dx}$, који се увек може преставити као збир извеснога коначног броја израза

$$\frac{B_k}{x - a_k}$$

тежи нули, па дакле *u* тежи граници α_1. Међу тим може се десити да се за једну извесну, специјалну, вредност интеграционе константе рационална функција R_1 (x) сведе идентички на нулу; за такве специјалне интеграле асимтотна ће вредност бити α_2.

Ако су корени α_1 и α_2 имагинарни, експоненцијална функција $e^{(\alpha_2 - \alpha_1) x}$ своди се на синус и косинус реалних количина и функција u (x) нема никакву одређену вредност за $x = \infty$.

Претходним теоремама одређена је граница којој тежи *u* (у случају кад та граница постоји). Граница функције *y*, дефинисане диференцијалном једначином (7) биће

$$\lim y = \frac{\lim u\,(x)}{\lim \varphi_1\,(x)}.$$

У случају кад *u* тежи граници α_1, ако φ_1 тежи извесној коначној граници *b*, *y* тежи граници $\frac{\alpha_1}{b}$; ако то није случај, општа интегрална крива (7) има као своју асимтотну криву

$$\varphi_1\,(x)\, y - \alpha_1 = o$$

Слични резултати вреде и за оне специјалне интеграле који теже граници α_2.

Ако, пак u нема одређене границе, тако ће исто бити, у опште, и са интегралом y.

Други случај: $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *не теже обе коначним границама, или ако теже, те су обе границе равне нули.* Кад је једна од тих граница бесконачна, граница интеграла u извесно је бесконачна. Кад су обе границе равне нули, у општем случају не може се наћи граница интеграла u, али у специјалним случајевима то је често пута могућно.

Тако, кад су $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ алгебарске функције x-а, ваља једначину (7) написати у облику

$$\sum_{k=o}^{k=m} \psi_k (y_1 x) \left(\frac{dx}{dy}\right)^{m-k} = o$$

где су $\psi_1, \psi_2 \cdot \cdot \cdot \psi_m$ полиноми по x и y, са сачиниоцима, који не постају бесконачни ни за коју коначну вредност y-а, и на тако уређену једначину применити теореме I и II.

Теоремама III и IV решен је проблем о сталности асимтота паралелних x-ној оси за једначину

$$\text{(A)} \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = o\,;$$

исти принцип очевидно важи и за асимтоте паралелне y-ској оси: довољно је учинити у једначини смену $y = \frac{1}{z}$ и применити теореме I и II на тако добијену једначину

$$\Psi\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right) = o.$$

Остаје нам још да решимо овај проблем:

Распознати на датој диференцијалној једначини (A) да ли асимтоте опште интегралне криве, које нису паралелне координатним осама x и y, варирају са варијацијом интеграционе константе или не, и наћи те асимтоте у случају кад су оне сталне.[1]

Ради тога, ставимо

$$\lambda = \frac{y}{x}$$

и учинимо у датој једначини (A) ову смену променљивих: сматрајмо λ као нову прапроменљиву а x као функцију од λ. Ако се у (A) стави

$$y = \lambda x, \qquad \frac{dy}{dx} = \lambda + \frac{x}{\frac{dx}{d\lambda}}$$

добија се нова једначина

$$\Psi\left(\lambda, x, \frac{dx}{d\lambda}\right) = o. \tag{16}$$

Угаони сачиниоци асимтота опште интегралне криве у (једначине A), које нису паралелне координатним осама, нису ништа друго до коначне вредности λ за које општи интеграл x диференцијалне једначине (16) постаје бесконачан. Означимо са λ_i те угаоне сачиниоце; ако се у једначини (16) стави

$$x = \frac{1}{z} \qquad dx = -\frac{dz}{z^2}$$

и ако је

$$\Phi\left(\lambda, z, \frac{dz}{d\lambda}\right) = o \tag{17}$$

[1] Примедба о есенцијалним сингуларитетима, учињена раније, код теорема о асимтотним вредностима интеграла, очевидно важи и овде, као и свуда при сличним истраживањима.

нова једначина тако добијена, вредности λ_i нису ништа друго до вредности λ које поништавају општи интеграл z диференцијалне једначине (17), и ако се иста једначина напише у облику (што је увек могуће)

$$\varphi_0(\lambda, z)\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^m + \varphi_1(\lambda, z)\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^{m-1} + \cdot \cdot \cdot$$

$$+ \varphi_{m-1}(\lambda, z)\frac{dz}{d\lambda} + \varphi_m(\lambda, z) = o$$

где су $\varphi_0, \varphi_1 \cdot \cdot \cdot \varphi_m$ полиноми по z са сачиниоцима који не постају бесконачни ни за какву коначну вредност x-a, примена теорема I и II доводи до овога резултата:

Теорема V. *Да би угаони сачиниоци* λ_i *били независни од интеграционе константе, потребно је и довољно да свака од функција* $\varphi_k(\lambda, z)$, *осим* $\varphi_0(\lambda, z)$, *садржи као чиниоца* z_h *где је* $h \geqq k$ $(k = 1, 2 \ldots m)$.

Теорема VI. *Кад год су угаони сачиниоци* λ_i *независни од интеграционе константе, они су корени алгебарске једначине*

$$\varphi_0(\lambda, o) = o$$

решене по λ.

Потврдимо ове теореме на једноме простом примеру: нека је дата диференцијална једначина

$$x^2\frac{dy}{dx} - xy - (ay + bx)^2 = o. \tag{p}$$

Ставивши узастопце

$$y = \lambda x, \qquad \frac{dy}{dx} = \lambda + \frac{x}{\frac{dx}{d\lambda}}$$

$$x = \frac{1}{z}, \qquad dx = -\frac{dz}{z^2}$$

једначина (17) је у овоме случају

$$(a\lambda + b)\frac{dz}{d\lambda} + z = o.$$

Услови теореме V испуњени су, што значи да угаони сачиниоци асимтота не зависе од интеграционе константе, а према теореми VI ти су угаони сачиниоци равни једноме и истоме броју

$$\lambda = -\frac{b}{a}$$

што значи да су асимтоте свију посебних интегралних кривих паралелне међу собом. А све се то потврђује непосредно на општем интегралу једначине (p) који је

$$y = \left(\frac{1}{a\log x + C} - b\right)\frac{x}{a}.$$

Теореме V и VI тичу се угаоних сачинилаца асимтота; но да асимтоте не би зависиле од интеграционе константе, потребно је да и ординате од почетка тих асимтота буду независне од C. Проблем да се распозна на датој диференцијалној једначини, да ли је тако или не, решава се лако применом теорема I, II, V и VI.

Нека је λ ма који од корена мало-пређашње једначине $\varphi_0(\lambda, o) = o$; ордината од почетка асимтоте, чији је угаони сачинилац λ, равна је граници којој тежи израз

$$\eta = y - \lambda x$$

кад се у њему y замени општим интегралом дате једначине (15) и кад се за тим пусти да x бесконачно расте.

Ако се дакле у једначини (15) стави узастопце

$$y = \eta + \lambda x \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{dx} + \lambda$$

$$x = \frac{1}{z} \qquad dx = -\frac{dz}{z^2}$$

и ако је

$$(19) \qquad \triangle\left(\eta, z, \frac{dz}{d\eta}\right) = o$$

— где су η сматра као прапроменљива а z као његова функција — тако добијена једначина, ординате η нису ништа друго до вредности η које поништавају општи интеграл z једначине (19). Примена теорема I и II решиће тада потпуно проблем.

Интеграли оних једначина (15) чије трансформисане једначине (19) задовољавају услове теорема I и II, имају врло интересантне геометријске особине, које заслужују дубљега испитивања и које мислим извести у другоме једном раду. Тако, за те једначине, баш и кад су вредности λ променљиве, а вредности η које поништавају z не зависе од λ, што се све може распознати непосредно на једначини, асимтоте свију посебних интеграла пролазе кроз извесне сталне тачке (које се увек могу наћи) на y-ској оси, и кад се пусти да интеграциона константа варира, *асимтоте се обрћу око тих сталних тачака.* А из тога се факта може извести више интересантних особина.

Наводим једну важну примену, коју претходни резултати налазе у аналитичкој теорији алгебарских диференцијалних једначина другога реда

$$(20) \qquad F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = o$$

у којима x не фигурише експлицитно.

Уочимо случајеве кад је општи интеграл једначине (20) *алгебарска, просто-периодичка* или *двогубо-периодичка* функција x-а, али са *коначним* бројем вредности за сваку дату вредност x-а. Пошто таква једна функција, као што је познато, има ту особину, да између ње и њенога првог извода мора постојати алгебарска релација, то ће се у тим случајевима, ако се у једначини (20) узме y као прапромењива а $\frac{dy}{dx}$ као функција те прапромењиве

$$\frac{dy}{dx} = p\,(y)$$

једначина (20) претворити у

$$F\left(y, p, p\,\frac{dp}{dy}\right) = o, \tag{21}$$

једначину првога реда, чији општи интеграл

$$p = \chi\,(y, C) \tag{22}$$

мора дефинисати p као алгебарску функцију y-а. Тада ће се општи интеграл y једначине (20) добити као инверсија Абеловог интеграла

$$x = \int \frac{dy}{\chi\,(y, C)}\,. \tag{23}$$

Замислимо конструјисану алгебарску криву (22), сматрајући p као апсцису а y као ординату једне тачке; та крива ће се деформисати варијацијом интеграционе константе C.

У теорији Абелових интеграла познати су ови ставови[1]

---

[1] в. н. пр. Raffy: Recherches algébriques sur les intégrales abeliennes (Annales de l'Ecole Normale Superiéure, 2me série, t. XII.).

I. Ако се означе са

$$\alpha_1,\ \alpha_2 \cdot \cdot \cdot \alpha_i \tag{24}$$

угаони сачиниоци асимтота криве (22), које нису паралелне координатним осама; са

$$\beta_1,\ \beta_2 \cdot \cdot \cdot \beta_k \tag{25}$$

угаони сачиниоци тангената (такође непаралелних осама) на исту криву у оним тачкама (реалним или имагинарним), у којима она сече ординатну y-ску, осу, онда вредности

$$2\pi\alpha_1 \sqrt{-1}, \qquad 2\pi\alpha_2 \sqrt{-1} \cdot \cdot \cdot 2\pi\alpha_i \sqrt{-1}$$

$$2\pi\beta_1 \sqrt{-1}, \qquad 2\pi\beta_2 \sqrt{-1} \cdot \cdot \cdot 2\pi\beta_k \sqrt{-1}$$

помножене каквим целим бројем, преставља̂ју поларне периоде Абеловог интеграла (23).

II. Ако је инверсија y истога Абеловог интеграла, алгебарска или двогубо-периодичка функција x-а, вредности (24) и (25) не постоје; ако је y просто-периодичка функција са коначним бројем вредности, вредности (24) и (25) постоје и имају једнога и истог заједничког делиоца, тако да ако се овај означи са ϱ, мора бити

$$\alpha_1 = m_1 \varrho, \qquad \alpha_2 = m_2 \varrho, \cdot \cdot \cdot \alpha_i = m_i \varrho$$

$$\beta_1 = n_1 \varrho, \qquad \beta_2 = n_2 \varrho, \cdot \cdot \cdot \beta_k = n_k \varrho$$

где $m_1 \cdot \cdot \cdot m_i$ и $n_1 \cdot \cdot \cdot n_k$ означују целе бројеве. Периода просто-периодичке функције y мора тада бити

$$2M\pi\varrho \sqrt{-1}$$

где M означава какав цео број.

Послужимо се тим ставовима и теоремама V и VI. Ставимо у једначини (21) узастопце: прво

$$p = \lambda y, \qquad \frac{dp}{dy} = \lambda + \frac{y}{\frac{dy}{d\lambda}}$$

а за тим $\qquad y = \frac{1}{z} \qquad dy = -\frac{dz}{z^2}$

и нека је

$$(26) \qquad \varphi_0(\lambda, z)\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^m + \varphi_1(\lambda, z)\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^{m-1} + \cdot \cdot \cdot$$

$$+ \varphi_{m-1}(\lambda, z)\frac{dz}{d\lambda} + \varphi_m(\lambda, z) = o$$

нова тако добијена једначина, у којој се z сматра као функција прапромењиве λ. Ако се означе са

$$\lambda_1, \lambda_2 \cdot \cdot \cdot \lambda_i$$

вредности, коначне и различне од нуле, које поништавају општи интеграл $z(\lambda)$ једначине (26), онда је у опште

$\lambda_j = \lim \lambda \quad (j = 1, 2 \cdot \cdot \cdot i) \quad$ за $z = o$ т. ј. за $y = \infty$,

или, из релације $p = \lambda y$

$$\lambda_j = \lim \frac{p}{y} \quad \text{за} \quad y = \infty.$$

Са друге стране, угаони сачиниоци $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_i$ могу се дефинисати општим обрасцем

$$\alpha j = \lim \frac{y}{p} \quad (j = 1, 2 \cdot \cdot \cdot i) \quad \text{за} \quad y = \infty$$

па дакле је

$$\alpha_j = \frac{1}{\lambda_i} \qquad (j = 1, 2 \cdot \cdot \cdot i).$$

Према теоремама V и VI закључује се онда ово: да вредности α_j не би зависиле од интеграционе константе, потребно је и довољно да сваки од полинома $\varphi_h(\lambda, z)$ осим $\varphi_0(\lambda, z)$ садржи као чиниоца z^n, где је $n \geq h$ $(h = 1, 2 \cdot \cdot \cdot m)$, и кад год је тај услов испуњен, вредности α_j биће корени алгебарске једначине

$$\varphi_0\left(\frac{1}{\alpha}, o\right) \tag{27}$$

решене по α.

На основу тога, и узевши у обзир мало час поменута два става о Абеловим интегралима, може се извести ова теорема:

Да би општи интеграл једначине (20) могао бити алгебарска или двогубо-периодична функција x-a, потребно је да се функција $\varphi_0(\lambda, o)$ своди на једну константу, различну од нуле и независну од λ, и да свака од функција $\varphi_h(\lambda, z)$ $(h = 1, 2 \cdot \cdot \cdot m)$ садржи као чиниоца z^n, где је $n \geq h$.

Претпоставимо да је овај последњи услов испуњен, али да се функција $\varphi_0(\lambda, o)$ не своди на константу независну од λ. Тада општи интеграл y не може бити алгебарска или двогубо-периодичка функција, али може бити просто-периодичка функција x-a. Тада једначина $\varphi_0(\lambda, o) = o$ решена по λ има извесан број корена, и према овоме што претходи, може се за тај случај извести ова теорема:

Да би y могао бити просто-периодичка функција x-a са коначним бројем вредности, потребно је да корени α_j једначине (27), решене по α имају заједничког делиоца.

До сличних се теорема долази и посматрањем вредности угаоних сачинилаца β_j. Те се вредности могу дефинисати општим обрасцем

$$\beta_j = \lim \frac{dy}{dp} \quad (j = 1, 2 \cdot \cdot \cdot k) \quad \text{за} \quad p = o.$$

Према томе, ако се једначина (21) напише у облику

$$\sum_{h=o}^{h=\mu} f_h \left(y, \frac{dp}{dy} \right) p^{\mu-h} = o$$

тако да лева страна буде уређена по степенима p-a, угаони сачиниоци корени су алгебарске једначине

$$(28) \qquad f_\mu \left(\Theta, \frac{1}{\beta} \right) = o$$

решене по β, где Θ преставља ма коју од вредности y-a које поништавају општи интеграл p (y) једначине (24). Дакле

Да би y могло бити алгебарска или двогубо-периодичка функција, једначина (28), решена по β, не може имати ни један корен коначан и различан од нуле.

Ако једначина (28) има корена β_j који не зависе од Θ, али су коначни и различни од нуле, општи интеграл y не може бити алгебарски или двогубо-периодичка функција. А

Да би y могло бити просто-периодичка функција x-a, са коначним бројем вредности, потребно је да такви корени β_j једначине (28) имају једнога заједничког делиоца ϱ који би y исто време био и заједнички делилац корена α_j једначине (27); периода фунције y биће тада

$$2N\pi\varrho \sqrt{-1}$$

где N означава какав цео број.

Услови, исказани у овим теоремама, такве су природе, да се увек на датој диференцијалној једначини може распознати да ли су они испуњени или не. Исте теореме могу бити од велике користи при решавању питања о аналитичкој природи општега интеграла, као и за тражење интегралних периода. Потврдимо их бар на једноме простом примеру.

Нека је дата диференцијална једначина

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + by\frac{dy}{dx} = o \tag{29}$$

где a и b означују две константе. Једначина (21) постаје овде

$$y\frac{dp}{dy} + ap + by = o$$

а једначина (26)

$$[\lambda(1+a) + b]\frac{dz}{d\lambda} - z = o.$$

Једначина (27) овде је

$$\frac{1+a}{\alpha} + b = o$$

чији је једини корен

$$\alpha = -\frac{1+a}{b},$$

а једначина (28)

$$\left(\frac{1}{\beta} + b\right)\Theta = o$$

чији је једини корен

$$\beta = -\frac{1}{b}\cdot$$

Према претходним теоремама, да би y било алгебарска функција х-а, мора бити $b = o$; да би било просто-периодичка функција са коначним бројем вредности, мора бити или $a = o$ или

$$-\frac{1+a}{b} = mp \qquad \frac{1}{b} = np$$

(где су m и n цели бројеви) одакле

$$a = -\frac{m+n}{n}$$

т. ј. a мора бити рационалан број; периода тада мора бити

$$\frac{2M\pi\sqrt{-1}}{nb}$$

где M означава такође какав цео број

А све се то потврђује непосредно на изразу општега интеграла једначине (29) који је

или $$y = C\left(1 + C'e^{bx}\right)^{\frac{1}{1+a}}$$

или $$y = C\,(1 + C'x)^{\frac{1}{1+a}}$$

према томе да ли је $b \lessgtr o$ или $b = o$; C и C' означују интеграционе константе.

Претходне теореме могу наћи интересантних примена и у рационалној механици.

Уочимо н. пр. право-линијско кретање једне тачке под утицајем какве силе која је алгебарска функција брзине и времена. Брзина, коју ће тачка имати у једноме даноме тренутку, зависи у опште од њене почетне брзине, и мењаће се са варијацијом ове последње. Али има значајних случајева у којима, ма са којом се почетном брзином покренула тáчка, она ће по истеку једнога извесног интервала времена задобити увек једну и исту брзину, факт аналог ономе, са којим се има посла у класичком проблему таутохронизма. Исто тако има случајева у којима брзина, кад време бесконачно расте, тежи једној извесној и сталној граници, која ће увек бити једна и иста, ма са каквом се почетном брзином тачка покренула.

Претходне теореме дају начина да се те значајне околности у датоме проблему предвиде још пре његовога потпуног решења, па и онда кад је то решење немогуће због несавладљивих интеграционих тешкоћа. Јер ако се брзина покретне тачке означи са v, њена маса са m, а сила која је креће са F, и ако је та сила дата алгебарска функција $\boldsymbol{\Phi}$ (t, v) времена и брзине, решење проблема своди се на интеграцију алгебарске диференцијалне једначине првога реда

$$F = m\frac{d^2s}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = \boldsymbol{\Phi}(t, v)$$

која се увек може написати у облику

$$f\left(t,\ v,\ \frac{dv}{dt}\right) = o$$

где је f полином у односу на v и $\frac{dv}{dt}$ · Лако се увиђа да у проблему улогу интеграционе константе игра сама почетна брзина покретне тачке, и да према томе наше теореме дају начина да се изнађу они елементи кретања, који остају стални, независни од почетне брзине.