PUBLICATIONS DE L'OBSERVATOIRE ASTRONOMIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE BELGRADE

Quelques contributions élémentaires récentes au problème des trois corps

PAR
MICHEL PETROVITCH,
Professeur à l'Université de Beograd

EXTRAIT DES **MÉMOIRES** III 1936

IMPRIMERIE NATIONALE
DU ROYAUME DE YOUGOSLAVIE
BEOGRAD 1936

Господину колези
проф. Антону Билимовићу
Писац

Quelques contributions élémentaires récentes au problème des trois corps

par
Michel Petrovitch,
professeur à l'Université de Beograd

1. Au cours de cette année les professeurs de l'Université de Beograd ont apporté quelques contributions au problème des trois corps, guidés par l'idée qu'au moins dans des cas particuliers celui-ci doit comporter des solutions *n'exigeant que des considérations élémentaires, purement géométriques ou algébriques.*

On sait intégrer rigoureusement les équations différentielles du problème des trois corps dans le cas où leurs distances mutuelles conservent des rapports constants. Ce cas comprend les deux cas suivants: les trois masses forment un triangle équilatéral, ou bien elles restent constamment en ligne droite. Ce sont, comme l'on sait, les seuls cas connus où le problème des trois corps soit résoluble.

La première solution du problème ainsi simplifié, par des méthodes de la Géométrie élémentaire, est celle de *Tcherny* (1906), mais cet auteur traite le problème comme celui du mouvement relatif de deux masses autour de la troisième. M. *M. Milankovitch*, de l'Université de Beograd, dans sa „Mécanique Céléste" (1935) en a donné la solution par la méthode vectorielle.

M. M. *A. Bilimovitch* et *B. Petronievitch*, de l'Université de Beograd, ont traité le problème du mouvement des trois masses autour de leur centre commun des masses, et cela par des procédés intuitifs purement géométriques, n'exigeant aucune espèce d'équations différentielles.[1])

Par des considérations de similitude les plus élémentaires, ou démontre d'abord les deux faits cinématiques suivants, relatifs au mouvement d'une des trois masses attirées par deux autres.

---

[1]) *A. Bilimovitch* et *B. Petronievitch*: *Contribution à la solution du problème des trois corps.* (Glasnik Jugoslovenskog profesorskog društva, kn. XV. sv. 10. juin 1935).

Si les segments a et b, par leurs longueurs et leurs directions, représentent les accélérations de la masse m, et si h_1 et h_2 sont les longueurs des droites issues d'un point arbitraire P (fig. 1) de la direction de l'accélération résultante, perpendiculaires aux directions des accélérations a et b, on aura

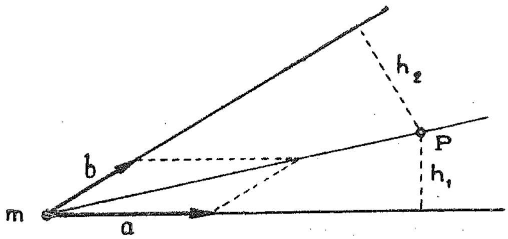

Fig. 1

$$ah_1 = bh_2.$$

Inversement, h_1 et h_2 étant les longueurs des droites issues d'un point arbitraire P, compris dans l'angle formé par les deux accélérations a et b, perpendiculaires à a et b, si les deux produits ah_1 et bh_2 sont égaux, le point P se trouve sur la droite marquant la direction de l'accélération résultante.

Ceci conduit directement à la proposition suivante, relative au

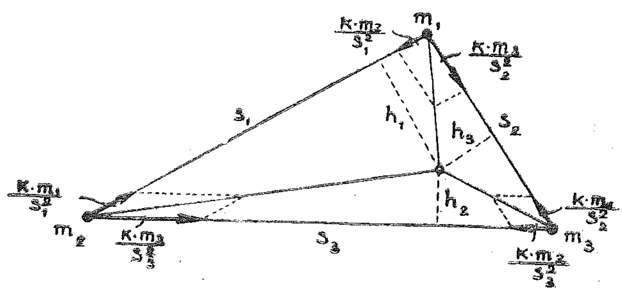

Fig. 2

mouvement des trois masses m_1, m_2, m_3 qui s'attirent mutuellement selon la loi de la gravitation newtonienne:

I. *Les directions des accélérations résultantes des trois masses, situées aux trois sommets d'un triangle, se coupent en un point situé à l'intérieur du triangle des masses.*

II. *Toutes les fois que, les masses étant situées aux sommets d'un triangle, les directions des accélérations résultantes se coupent au centre de ces masses, le triangle est équilatéral.*

III. *Toutes les fois que les trois masses se trouvent aux sommets d'un triangle équilatéral, les directions résultantes passent par le centre des masses.*

M. B. *Petronievitch*[1]) a étendu ces propositions au cas où les trois masses s'attirent suivant une loi quelconque de la forme

$$F = kr^n,$$

où F désigne la force d'attraction, r la distance et n un entier positif ou négatif autre que l'unité. Dans le cas de $n = 1$ le point d'intersection des directions des accélérations résultantes coïncide nécessairement avec le centre des masses.

M. *W. Jardetzky*,[2]) de l'Université de Beograd, a montré que la proposition I subsiste dans le cas général de forces attractives ou répulsives quelconques, en concordance avec le principe de l'égalité de l'action et de la réaction. Dans le cas où toutes les forces sont attractives ou toutes répulsives, le point d'intersection des accélérations résultantes se trouve à l'intérieur du triangle; lorsqu'il y en a en même temps des attractives et des répulsives, ce point est intérieur au triangle.

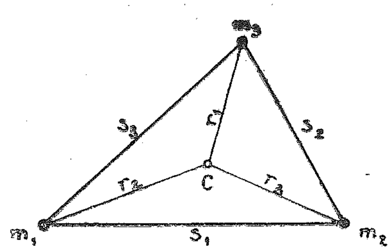

Fig. 3

Soient:

1° $s = s_1 = s_2 = s_3$ les longueurs des côtés du triangle équilatéral des masses m_1, m_2, m_3;

2° $r = r_1 = r_2 = r_3$ les distances des masses au centre commun C des masses;

3° γ_1, γ_2, γ_3 les accélérations résultantes des trois masses dans les directions respectives r_1, r_2, r_3;

4° k le facteur de proportionnalité des accélérations aux masses;

5° λ_1, λ_2, λ_3 les trois fonctions homogènes des masses

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2 \\ \lambda_2 &= m_1^2 + m_1 m_3 + m_3^2 \\ \lambda_3 &= m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2 ; \end{aligned} \tag{1}$$

6° μ la masse totale du système

$$\mu = m_1 + m_2 + m_3.$$

---

1) *B. Petronievitch*: *Quelques théorèmes relatifs au problème des trois corps* (Glasnik jugosl. prof. društva, kn. XVI. sv. 3. 1935).

2) *W. Jardetzky*: *A propos d'un théorème du problème des trois corps* (Glasnik jugosl. prof. društva, kn. XVI. sv. 1. 1935).

M. M. *A. Bilimovitch* et *B. Petronievitch*[1]) ont déduit, toujours par des considérations élémentaires purement géométriques, les six formules

$$(2) \qquad s_1 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda_1}} r_1 \qquad s_2 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda_2}} r_2 \qquad s_3 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda_3}} r_3$$

$$(3) \qquad \gamma_1 = \frac{k\lambda_1^{\frac{3}{2}}}{\mu^2} \cdot r_1^{\frac{1}{2}} \qquad \gamma_2 = \frac{k\lambda^{\frac{3}{2}}}{\mu^2} \cdot r_2^{\frac{1}{2}} \qquad \gamma_3 = \frac{k\lambda^{\frac{2}{3}}}{\mu^2} \cdot r_3^{\frac{1}{2}},$$

valables dans le cas où les trois masses, réparties aux sommets du triangle équilatéral, s'attirent mutuellement selon la loi newtonienne.

Des formules pour les accélérations γ_1, γ_2, γ_3 on déduit facilement que les trois masses se déplacent autour du centre commun des masses suivant les sections coniques. Si les coniques sont des ellipses, celles-ci sont semblables sans être nécéssairement congruentes. Le triangle des masses ne cessera pas d'être équilatéral au cours du mouvement du système; ces côtés augmenteront ou diminueront périodiquement, et les trois masses passeront simultanément sur leurs ellipses respectives, par les périhélies et aphélies.

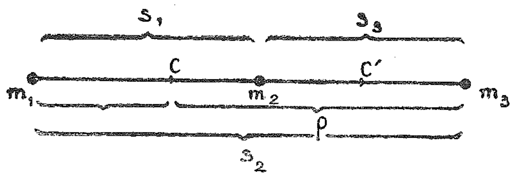

Fig. 4

Dans le cas où les trois masses, s'attirant selon la loi newtonienne, se trouvent sur une droite, et en supposant que le centre des masses se trouve entre les masses m_1 et m_2, les auteurs expriment l'accélération résultante γ_1 de la masse m_1 par la formule

$$r_1 = \frac{[m_2+m_3(1+a)]^2\ [m_3+m_2(1+a)^2]}{(m_1+m_2+m_3)^2\ (1+a)^2} \cdot \frac{1}{r_1^2},$$

où : r_1, r_2, r_3 désignent les distances respectives des masses m_1, m_2, m_3 au cente C des trois masses;

ρ est la distance du centre C' des deux masses m_2 et m_3 au centre C;

s_1, s_2, s_3 sont les distances respectives $m_1 m_2$, $m_1 m_3$, $m_2 m_3$;

[1]) loc. cit.

p et q sont les distances des masses m_2 et m_3 au centre C';

a est la valeur, constante ou variable, du rapport $\frac{s_3}{s_1}$.

Les formules pour les accélérations résultantes γ_2 et γ_3 des masses m_2 et m_3 seraient

$$\gamma_2 = \kappa \frac{(m_1 a^2 - m_3)(m_1 - a m_3)^2}{(m_1+m_2+m_3)^2 a^2} \cdot \frac{1}{r_2^2}$$

$$\gamma_3 = \kappa \frac{[m_1 (1+a)^2 + m a^2]\,[m_1(1+a) + m_2 a]^2}{(m_1+m_2+m_3)^2 a^2 (1+a)^2} \cdot \frac{1}{r_3^2}$$

On déduit facilement de ces formules que les trajectoires des trois masses autour de leur centre C seront des sections coniques; les masses ne resteront constamment sur une ligne droite que si $a = \text{const.}$, c'est-à-dire si les rapports de leurs distances au centre C ne varient pas au cours du mouvement. Lorsque les trajectoires sont des ellipses, celles-ci seront semblables et les masses passeront simultanément par leurs périhélies et aphélies.

2. Supposons maintenant que les trois masses satisfont à une relation numérique donnée

$$F(m_1, m_2, m_3) = 0. \tag{4}$$

La fonction F doit être homogène, pour que la relation soit indépendante du choix de l'unité de mesure. Dans ce cas *il est possible de déterminer des intervalles des variations des accélérations* γ *et des rapports* $\frac{r}{s}$ *au cours du mouvement, ces intervalles restant les mêmes pour toutes les masses satisfaisant à* (4).[1])

A cet effet, posons

$$\frac{m_2}{m_1} = x \qquad \frac{m_3}{m_1} = y$$

$$\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\mu} = z_1 \qquad \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\mu} = z_2 \qquad \frac{\sqrt{\mu_3}}{\mu} = z_3\ ;$$

z_1, z_2, z_3 seront des nombres absolus, indépendants de l'unité de mesure, et l'on aura

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{1+x+y} \\ z_2 &= \frac{\sqrt{1+y+y^2}}{1+x+y} \\ z_3 &= \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+y}. \end{aligned} \tag{5}$$

1) *Michel Petrovitch: Remarque sur le problème des trois corps* (Glasnik jugosl. prof. društva, kn. XVI. sv. 3. 1935).

En vertu de la relation (4), qui s'écrit

$$F(1,\ x,\ y) = 0,$$

z_1, z_2, z_3 s'expriment comme fonctions d'une seule variable, par exemple x. Chacune de ces trois fonctions a une limite inférieure et une limite supérieure de ses variations pour les valeurs positives de x; ces limites détermineront celles des variations des valeurs

$$(6)\qquad \begin{aligned} u_1 &= \frac{\lambda_1^{\frac{3}{2}}}{\mu^{3}} = \mu z_1^{3} \\ u_2 &= \frac{\lambda_2^{\frac{3}{2}}}{\mu_2} = \mu z_2^{2} \\ u_3 &= \frac{\lambda_3^{\frac{3}{2}}}{\mu_2} = \mu z_3^{2}. \end{aligned}$$

Considérons, à titre d'exemple, le cas où l'une des trois masses est la moyenne géométrique des deux autres, par exemple:

$$m_1^2 = m_2 m_3.$$

Le nombre z_1 sera

$$z_1 = \frac{\sqrt{l_1 + x^2 + \frac{1}{x_2}}}{1 + x + \frac{1}{x}}$$

et pour toutes les valeurs positives de z elle est constamment comprise entre

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}5774\ldots \quad \text{et} \quad 1\,;$$

on aura donc

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\theta.$$

où θ est un nombre compris entre 0 et 1. D'après la relation

$$s_1 = \frac{r_1}{z_1}$$

on conclut alors que:

I. *Les trois masses étant situées aux sommets d'un triangle équilatéral, si l'une d'elles est la moyenne géométrique des deux autres, on aura au cours du mouvement constamment*

$$\frac{r}{s} = 0{,}5774 + 0{,}4226\,\theta$$

(s'arrêtant aux quatre premières décimales).

Les formules (6) montrent alors que la valeur correspondante u_1 est comprise entre

$$\frac{\mu}{3^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu}{\sqrt{28}} = 0{,}1924\mu \qquad \text{et} \qquad \mu,$$

d'où l'on conclut, en vertu de la relation

$$\gamma_1 = \frac{\kappa\,\mu}{r^2_1}:$$

II. *Les conditions de la proposition I étant remplies, on aura au cours du mouvement constamment*

$$\gamma = (0{,}1924 + 0{,}8076\,\theta')\,\frac{\kappa\mu}{r_2}.$$

Enfin, en vertu de la relation

$$r_1 = z_1 s_1,$$

exprimant l'accélération résultante γ au moyen du côté s du triangle équilatéral de la répartition des masses, on aura

$$\gamma_1 = \frac{\kappa\,\mu\,z_1}{s^2}$$

ce qui fait voir que:

III. *Les conditions de la proposition I étant remplies, on aura au cours du mouvement constamment*

$$\gamma = (0{,}5774 + 0{,}4226\,\theta'')\frac{\kappa\mu}{s_2} \qquad\qquad 0 < \theta'' < 1.$$

Envisageons, comme second exemple, le cas où, le triangle de la répartition des trois masses étant équilatéral, les trois longueurs proportionnelles aux grandeurs des trois masses forment un triangle Γ dont l'un des côtés est la moyenne géométrique des deux autres.

On démontre aisément que, si les trois masses sont

$$m_1 = m, \qquad m_2 = m + p, \qquad m_3 = m + q \qquad 0 < p < q,$$

pour qu'elles forment un triangle (Γ), il faut et il suffit que la valeur numérique $\frac{q}{p}$ soit comprise entre

$$2 \quad \text{et} \quad \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2{,}61180\ldots,$$

c'est-à-dire que

$$\frac{q}{p} = 2 + 0{,}6180\,\theta \qquad 0 < \theta < 1,$$

$$m = \frac{p^2}{q - 2p}$$

et il en sera, par exemple, ainsi lorsque les grandeurs de masses sont

$$m_1 = 4\alpha, \qquad m_2 = 6\alpha, \qquad m_3 = 9\alpha,$$

on bien lorsque

$$m_1 = 9\alpha, \qquad m_2 = 12\alpha, \qquad m_3 = 16\alpha, \quad \text{etc.}$$

(α étant une valeur arbitraire).

Une telle condition étant supposée remplie, on aura

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{r}{s} = 0{,}5774 + 0{,}1296\,\theta & 0 < \theta < 1 \\ \gamma = (0{,}1924 + 0{,}1611\,\theta')\,\frac{\kappa\mu}{r^2} & 0 < \theta' < 1 \\ \gamma = (0{,}5774 + 0{,}1296\,\theta'')\,\frac{\kappa\mu}{s^2} & 0 < \theta'' < 1 \end{array}\right\} 1$$

C'est une conséquence immédiate de la proposition géomé trique d'après laquelle, a, b, c étant les côtés d'un triangle quelconque, la valeur du rapport

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{a+b+c}$$

est toujours comprise entre $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$, d'après quoi on a

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\theta,$$

et par suite la valeur numérique de u_1 se trouve entre les nombres $\frac{1}{\sqrt{27}}$ et $\frac{1}{\sqrt{8}}$, de sorte que

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{27}} + \left(\frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{27}}\right)\theta.$$

Considérons maintenant le cas général où la masse m_1 diffère de la moyenne géométrique des masses m_2 et m_3, de sorte que

$$m_2 m_3 = m_1^2 + \delta,$$

δ étant l'écart de la moyenne géométrique. Si l'on pose

$$\overset{2}{m_1} + \overset{2}{m_2} + \overset{2}{m_3} = M,$$

on aura

$$\lambda_1 = M + \delta$$
$$z_1 = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\mu} = \frac{\sqrt{M}}{\mu}\sqrt{1 + \frac{\delta}{M}}.$$

Pour les masses m_1, m_2, m_3 quelcoques la valeur M est toujours comprise entre $\frac{\mu^2}{3}$ et μ^2; il s'ensuit que le nombre absolu

$$\omega = \sqrt{1 + \frac{\delta}{M}}$$

se trouve entre les deux nombres

$$\omega_1 = \sqrt{1 + \frac{\delta}{\mu_2}} \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = \sqrt{1 + \frac{3\delta}{\mu^2}}$$

et l'on en tire facilement que

$$z_1 = \frac{\omega_1}{\sqrt{3}} + \left(\omega_2 = \frac{\omega_1}{\sqrt{3}}\right)\theta \qquad 0 < \theta < 1$$

et, à l'aide de cette formule, il est prossible de préciser les intervalles des variations du rapport $\frac{r}{s}$ et de l'accélération γ dans le cas général. *Ces intervalles s'expriment au moyen de la masse totale μ du système et de l'écart δ, sans éxiger la connaissance des masses m_1, m_2, m_3 elles-mêmes.*

* * *

L'impression de la présente Note ayant été terminée, M. *Dragoljub Markovitch* professeur au lycée de Petrovgrad m'a fait remarquer que, tout en restant dans le cas général, c'est-à-dire sans supposer aucune relation entre les trois masses, on peut améliorer les doubles inégalités précédentes. M. *Markovitch* y parvient en utilisant la proposition élémentaire d'après laquelle, les b_i et λ_i étant positifs, la valeur du rapport

$$\frac{a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2}{b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2}$$

est comprire entre $\frac{a_1}{b_1}$ et $\frac{a_2}{b_2}$.

Des équations (2) écrites sous la forme

$$\left(\frac{r_1}{s_1}\right)^2 = \frac{\lambda_1}{\mu^2} \qquad \left(\frac{r_2}{s_2}\right)^2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} \qquad \left(\frac{r_3}{s_3}\right)^2 = \frac{\lambda_3}{\mu_3},$$

on tire, en les additionant

(7) $$3\left(\frac{r}{s}\right)^2=\frac{2p+\ q}{p+2q},$$

où

(8) $$\begin{aligned}p&=m_1^2+m_2^2+m_3^2\\ q&=m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3.\end{aligned}$$

Comme $p \geq q$, si dans (7) l'on pose

$$p=q+\varepsilon \qquad\qquad \varepsilon \geq 0$$

on obtient

(9) $$3\left(\frac{r}{s}\right)^2=\frac{3q+2\varepsilon}{3q+\ \varepsilon},$$

La valeur du second membre de (9) est comprise entre *1* et *2*, ce qui conduit à la double inégalité

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\leq\frac{r}{s}\leq\sqrt{\frac{2}{3}},$$

c'est-à-dire

(10) $$0{,}5774+\leq\frac{r}{s}\leq 0{,}8165$$

de sorte qu'on peut écrire

(11) $$\frac{r}{s}0{,}5774+\theta\cdot 0{,}2391 \qquad\qquad 0\leq\theta\leq 1.$$

L'intervalle ainsi assigné au rapport $\frac{r}{s}$ est le plus resserré possible, car ses limites peuvent être effectivement atteintes. En effet, sa borne inférieure $\frac{1}{\sqrt{3}}$ est atteinte dans le cas où les trois masses sont égales entre elles, et la borne supérieure l'est lorsque deux masses sont négligeables par rapport à la troisième.

Utilisant ce résultat, on trouve que l'accélération correspondente γ satisfait à l'une et l'autre des doubles inégalités

$$0{,}1924\frac{\kappa}{r^2}\leq\gamma\leq 0{,}5443\frac{\kappa\mu}{r^2}$$

$$0{,}5774\frac{\kappa\mu}{s^2}\leq\gamma\leq 0{,}8165\frac{\kappa\mu}{s^2},$$

l'intervalle ainsi assigné étant le plus resserré possible.

Ces inégalités fournisseut

$$\gamma=(0{,}1924+\theta\cdot 0{,}3519)\frac{\kappa\mu}{r^2}$$

$$\gamma=(0{,}5774+\theta\cdot 0{,}2391)\frac{\kappa\mu}{s^2}.$$