RAČUNANJE SA BROJNIM RAZMACIMA

UNIVERZITET U BEOGRADU

DR MIHAILO PETROVIĆ

RAČUNANJE SA BROJNIM RAZMACIMA

DRUGO IZDANJE
U REDAKCIJI
DR PETRA M. VASIĆA I DR MILORADA BERTOLINA

IZDAVAČKO PREDUZEĆE
GRAĐEVINSKA KNJIGA
BEOGRAD, 1969.

416

Za preduzeće odgovara:
LJUBICA JURELA, glavni urednik
DRAGOMIR LAZIN, urednik
JOVANKA PRŠENDIĆ, tehnički urednik
VUKA IVANOVIĆ, korektor
ALEKSANDAR PAJVANČIĆ, naslovna strana

ŠTAMPA: Beogradski grafički zavod, Beograd, Bulevar vojvode Mišića 17

Max. Neuburger.

MIHAILO PETROVIĆ

Ako bi se postavilo pitanje koja je bila najistaknutija ličnost među srpskim matematičarima, bez dvoumljenja bi se moglo reći: Mihailo Petrović. On je znatno uticao na razvoj naše nauke i kulture kao naučnik i profesor Univerziteta u Beogradu, kao učesnik u polarnim ekspedicijama i plodni putopisac iz egzotičnih krajeva Zemljine kugle. Petrović nije samo nacionalni velikan koji je ponikao iz srpskog naroda, već on uživa veliki ugled i u celom svetu.

Po nepodeljenom priznanju Petrović je najveći srpski matematičar i njegovo stvaralačko delo zaslužuje da se svestrano i kritički prouči.

Rođen je 6. maja 1868. godine u Beogradu, gde je svršio osnovnu i srednju školu. Prirodno-matematički odsek Velike škole u Beogradu završio je 1889. godine. Iste godine otišao je u Pariz i tamo je, posle pripremanja od godinu dana, položio prijemni ispit na École Normale Supérieure, u kojoj je ostao sve do 1894. godine. Za to vreme završio je na Faculté des sciences u Parizu: lisans matematičkih nauka (1892), lisans fizičkih nauka (1893) i doktorat matematičkih nauka (juna 1894).

Period studija Mihaila Petrovića u Parizu pada u vreme kada je francuska matematička nauka dostigla jednu od svojih kulminacionih tačaka. Njegovi profesori su bili: Poincaré, Darboux, Picard, Hermite, Painlevé, Appell, Tannery, Boussinesq, Koenigs, Lippmann — sve slavna imena ne samo francuske već i svetske nauke.

Svoju doktorsku tezu: *Sur les zéros et les infinis des intégrales des équations différentielles algebriques* (Pariz 1894, 109 p.) odbranio je pred komisijom koju su sačinjavali: Hermite (predsednik komisije), Picard i Painlevé (ispitivači). Rezultati do kojih je Petrović došao u tezi odmah su zapaženi i neke od ovih Picard je uneo u svoj udžbenik: *Traité d' Analyse*, t. III, deuxième édition, Paris, 1908, p. 378—381.

Odmah po položenom doktorskom ispitu Mihailo Petrović je izabran za redovnog profesora Velike škole u Beogradu. Početkom 1905. godine donet je Zakon o univerzitetu, po kome je Velika škola ukinuta a svi profesori stavljeni na raspolaganje. Po propisima toga Zakona, ministar prosvete postavio je prvih osam redovnih profesora Univerziteta u Beogradu, među kojima je bio i Mihailo Petrović.

Polovinu stoleća, od 1894. do 1943. godine, Mihailo Petrović neumorno i predano spremao je nastavne i naučne kadrove za matematiku.

Kao profesor Velike škole i Univerziteta u Beogradu održao je šesnaest raznih kurseva, od kojih je neke ponavljao gotovo iz godine u godinu. Bilo je školskih godina kada je sam držao sve kurseve iz matematike.

Mihailo Petrović voleo je svoj nastavnički poziv. Njegova predavanja odlikovala su se jednostavnošću i ona su privlačila studente.

Petrović je imao strogo merilo koje je preneo i na svoje učenike i time je u znatnoj meri doprineo da nastava matematike u našoj srednjoj školi zauzme lepo mesto.

Za svaki kurs Petrović je izdao skripta ili udžbenik. Pri kraju svoje karijere održao je i neke specijalne kurseve kojima je hteo uputiti slušaoce u problematiku iz analitičke teorije diferencijalnih jednačina.

Pod uticajem Mihaila Petrovića formiran je čitav niz naučnih radnika na matematičkom polju. Iz teorijske matematike kod Mihaila Petrovića doktorirali su: Mladen Berić, Sima Marković, Tadija Pejović, Radivoje Kašanin, Jovan Karamata, Miloš Radojčić, Dragoslav Mitrinović, Danilo Mihnjević, Konstantin Orlov, Petar Muzen i Dragoljub Marković.

Petrović se radovao naučnom uspehu svojih učenika i nije im nametao oblast u kojoj će oni vršiti istraživanja. U periodu Petrovićevog delanja zapaženi su, u drugim oblastima nauke, mnogobrojni slučajevi sputavanja naučnog rada pa je utoliko značajnije što je on davao podstreka za naučni rad.

Godine 1932. Matematički institut Univerziteta u Beogradu, na inicijativu Mihaila Petrovića i Milutina Milankovića, pokreće časopis na inostranim jezicima *Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*. Do 1941. godine izišlo je sedam knjiga.

Navedeni časopis bio je kruna uspeha Mihaila Petrovića. To je u stvari bio časopis njegove škole. Preko tog časopisa naši matematičari mogli su se kao kolektiv predstaviti svetskoj javnosti.

Kao mlad čovek, 1900. godine Petrović je postao redovan član Srpske akademije nauka. U odeljenju prirodnih nauka ove Akademije on je živo učestvovao u radu. Na sednicama Odeljenja prikazao je veliki broj rasprava svojih ili svojih učenika. Ovi radovi štampani su u Glasu Srpske akademije nauka.

Petrović je jedan od inicijatora publikacije *Bulletin de l' Académie des sciences mathématiques et naturelles de Belgrade*. U ovoj publikaciji štampani su na inostranim jezicima izvodi iz radova koji su objavljeni u Glasu. U seriji matematičko-fizičkih nauka navedene publikacije, u periodu od 1933. do 1941. objavljeno je sedam knjiga koje većim delom sadrže rasprave pripadnika škole Mihaila Petrovića.

Petrović je bio član više inostranih akademija nauka i član mnogobrojnih naučnih društava. Učestvovao je na više međunarodnih matematičkih kongresa i držao predavanja na inostranim fakultetima.

17. novembra 1939. promovisan je za počasnog doktora filozofije Beogradskog univerziteta.

Petrović je bio plodan naučni radnik. Prva njegova rasprava objavljena je 1894. godine u izdanju Akademije nauka u Parizu. Od tada pa sve do smrti, 1943. godine, on je stalno i sistematski radio i objavio blizu 250 radova od kojih su 12 posebna naučna dela. Rasprave je štampao u zemlji i inostranstvu, na srpskom i francuskom jeziku.

Petrovićeve rasprave mogu se razvrstati u sledeće oblasti: aritmetika, nejednakosti, polinomi, funkcije kompleksne promenljive, diferencijalne jednačine, integralni račun i opšta fenomenologija.

Mihailo Petrović imao je intuicije, pronalazio je interesantne probleme za proučavanje i često im davao elegantna rešenja. On je imao mnogo ideja, pa nije stizao da ih do tančina obradi. Stoga se proučavanjem njegovih rasprava, naročito iz oblasti diferencijalnih jednačina, mogu naći ideje za nova istraživanja. Zato nove generacije naših matematičara treba da proučavaju Petrovićeve rasprave jer će se ovim ne samo usavršavati, već se mogu inspirisati za nova sopstvena istraživanja.

Treba primetiti da se u radovima M. Petrovića nailazi, ne tako retko, na štamparske i računske greške. Na neke od njih biće ukazano u Predgovoru.

Nemački matematičar H. Schwarz na jednom internacionalnom kongresu matematičara izjavio je da u njegovim radovima nema nikakvih grešaka. Na to mu je M. Petrović odgovorio »Kod mene, naprotiv, u svakom redu ima grešaka.«

Petrović nije bio samo profesor i naučnik, već je bio i alas i stručnjak za pitanja ribolova, zbog čega je dobio svoje popularno ime Mika-Alas. Postao je stvarno ribarski kalfa 1888. godine, a nešto kasnije položio je ispit za ribarskog majstora. Imao je svoju ribarsku družinu i kada je odlazio u ribolov potpuno se ponašao kao profesionalni alas.

Petrović je takođe bio strastan putnik u egzotične krajeve sveta i putopisac. Godine 1931. i 1933. boravio je kao član jedne naučne ekspedicije u Severnoj polarnoj oblasti, a 1935. godine u Južnoj polarnoj oblasti.

Srpska književna zadruga objavila mu je knjige; *Kroz polarnu oblast* (1932), *U carstvu gusara* (1935), *Sa okeanskim ribarima* (1935), *Po zabačenim ostrvima* (1936), *Roman jegulje* (1940).

M. Petrović je u toku svoje nastavničke karijere držao sledeće kurseve:

* Analitička geometrija u ravni i prostoru.
* Viša algebra.
* Diferencijalni i integralni račun.
* Geometrijske primene teorije diferencijalnih jednačina.
Računanje s brojnim razmacima.
Teorija beskrajnih redova.
Eliptičke funkcije.
* Parcijalne diferencijalne jednačine matematičke fizike.
Linearna diferencijalna jednačina drugog reda i njene primene.
Kvalitativna integracija diferencijalnih jednačina.
Integracija diferencijalnih jednačina pomoću redova.
Analitički problemi za obradu.
* Teorija grešaka (Beograd, 1930).
* Teorija analitičkih funkcija.
Elementi matematičke fenomenologije.

Za kurseve označene zvezdicom M. Petrović je objavio tabake.

Pored toga, on je objavio i sledeće udžbenike:

Elementi matematičke fenomenologije (Beograd, 1911, 774 str.).

Računanje sa brojnim razmacima (Beograd, 1932, 193 str.).

Eliptičke funkcije (Beograd, 1937, 128 str.).

Integracija diferencijalnih jednačina pomoću redova (Beograd, 1938, 221 str.).

Povodom stogodišnjice rođenja Mihaila Petrovića mnogo je napisano i još više usmeno kazano. Međutim, samo izuzetno date su kritične ocene na Petrovićeve naučne doprinose pojedinim oblastima matematike. Suviše se insistira, ali ne potkrepljuje dokazima, da je Petrović posebno originalan u fenomenologiji i u numeričkim spektrima. Međutim, potvrđuje se sve više da su njegovi rezultati iz teorije polinoma, specijalnih funkcija, diferencijalnih jednačina i nejednakosti (brojnih razmaka) ne samo i danas aktuelni već da oni služe kao polazna tačka za razne generalizacije.

D. S. Mitrinović

PREDGOVOR

Posle dužeg vremena došlo je do ponovnog izdavanja knjiga Mihaila Petrovića: *Računanje sa brojnim razmacima* (prvo izdanje 1932. godine), *Eliptičke funkcije* (1937) *i Integracija diferencijalnih jednačina pomoću redova* (1938). Mihailo Petrović je ove knjige pisao kao udžbenike za redovne kurseve koje je držao na Beogradskom univerzitetu. Međutim, svaka od njih je više nego običan udžbenik, jer sadrži u sebi mnogo onoga što jednu knjigu karakteriše kao monografiju. Da je zaista tako, vidi se i iz toga, što se i danas jedna grupa beogradskih matematičara inspiriše rezultatima koji se nalaze u njima i daje nove naučne priloge u oblastima koje su ovde tretirane. Ono što smeta da bismo mogli slobodno da tvrdimo da se zaista radi o monografijama u pravom smislu reči je činjenica da ni u jednoj od njih nema bibliografskih podataka, tako da nije uvek mogućno utvrditi o čijem se rezultatu radi, kao ni iz kog perioda je taj rezultat. Ovo je štetilo i samom Mihailu Petroviću kao naučniku. Naime, u ovim knjigama ima dosta njegovih rezultata koji su kasnije u svetskoj literaturi pripisivani drugim matematičarima, mada su ovi došli do njih često puta znatno posle M. Petrovića. Tek danas za neke od tih rezultata utvrđen je Petrovićev prioritet.

Prilikom čitanja ovih knjiga mora se biti obazriv u odnosu na terminologiju. Često će se naići na neadekvatnosti kao i na nesavremeno shvatanje nekih matematičkih pojmova i to ne samo sa današnjeg stanovišta već i, donekle, sa stanovišta koje su zauzimali pojedini matematičari iz vremena u kome je živeo i stvarao Mihailo Petrović. Redaktori, ma da su, prirodno, ovoga svesni, nisu želeli da vrše izmene u tom pravcu, radi istorijske autentičnosti teksta.

Čitalac će naići na pojedine arhaične izraze koji će pri prvom sretanju smetati, ali se za neke, posle razmišljanja, čini da su čak i prikladniji od onih koji se danas upotrebljavaju.

Prilikom redakcije novog—drugog—izdanja, ponegde su ispravljena suviše gruba gramatička odstupanja. Jezik je, u osnovi, zadržan, mada je prilikom nedoslednosti autora, izabrana ona varijanta koja je bliža današnjim shvatanjima. Pravopisne greške su, uglavnom, ispravljene, osim u slučajevima kada bi ove ispravke davale bitno drukčiji utisak o tekstu.

Terminologija i simbolika najčešće nije menjana, mada su izvršena neka skraćivanja u simbolici. Na primer, pisano je $\equiv$ umesto „identički $=0$".

U novom izdanju ispravljene su ranije štamparske greške. Takođe su ispravljeni neki pogrešni rezultati, kojih je najviše bilo u knjizi *Računanje sa brojnim razmacima*. Valja naglasiti da su ove greške uglavnom računske prirode. Ponajmanje ovakvih grešaka, koliko su redaktori uspeli da utvrde, bilo je u knjizi *Eliptičke funkcije*.

Ubeđeni smo da će ponovno izdavanje Petrovićevih knjiga značiti značajan podsticaj i u nastavi i u naučnom radu u oblastima o kojima je reč. Pitanja porekla pojedinih rezultata predstavljaju poseban interes i za istoričare matematike. I pored nedostataka koje smo podvukli, Petrovićeve knjige imaju niz visokih kvaliteta, koji u potpunosti opravdavaju ponovno izdavanje. Petrović piše lako, živo, zanimljivo, uvek sa ukazivanjem na otvorena pitanja. Ove knjige su primer kako matematičko izlaganje ne mora da bude suvoparno i odbojno: u nizu razmatranja jasno se vidi ruka velikog majstora, mnoge specifičnosti naučnog postupka našeg velikog matematičara Mihaila Petrovića.

Beograd
30. VI 1969.

Milorad Bertolino
Petar M. Vasić

SADRŽAJ

PRVI ODELJAK

Brojni razmaci u elementarrim računima

DRUGI ODELJAK

Brojni razmaci u infinitezimalnom računu

TREĆI ODELJAK

Brojni razmaci za integrale diferencijalnih jednačina

PRVI ODELJAK

BROJNI RAZMACI U ELEMENTARNIM RAČUNIMA

1. BROJNI RAZMACI KAO MATEMATIČKI ELEMENTI

U čistoj, apstraktnoj matematici jedna realna količina je jedan tačno određen realan broj, jedna apstraktna matematička tačka na apstraktnoj matematičkoj realnoj brojnoj liniji.

Matematička tačka u ravni je jedno u toj ravni mesto tačno određeno pomoću dva tačno određena realna broja. Kontinualni niz matematičkih tačaka sastavlja matematičku liniju koja se proteže samo svojom dužinom.

Matematička tačka u trodimenzionalnom prostoru je u tome prostoru mesto tačno određeno pomoću tri tačno određena broja, a kontinualni niz matematičkih tačaka sačinjava ravnu, ili u prostoru izvitoperenu matematičku liniju koja se proteže samo svojom dužinom. Kontinualni niz takvih linija sastavlja jednu matematičku površinu, koja se proteže i svojom dužinom i svojom širinom.

To su osnovni elementi čiste, apstraktne matematike, ali na kakve se u stvarnosti, u praktičnoj matematici, vrlo retko kad nailazi. Istina, ima slučajeva kad je i u stvarnosti jedna uočena realna količina jedan tačno određen broj, koji se poklapa sa jednom matematičkom tačkom na apstraktnoj realnoj brojnoj liniji. To su slučajevi kada se zna da je uočena količina ceo ili periodičan desetni razlomak kome se mogu saznati sve decimale (tj. kad su te decimale sve nule, ili su one što su različne od nule, u konačnom broju, ili se uopšte zna zakon po kome se one nižu jedna za drugom, kao što je to slučaj kod racionalnih razlomaka itd.). Takav je npr. slučaj sa totalnim brojem među sobom jednakih predmeta raspoređenih u konačan broj gomila; ili slučaj kad se traži broj realnih korena jedne jednačine koji se nalaze između dva data broja; ili slučaj kad se traže celi koreni jedne algebarske jednačine itd.

Svaku drugu količinu koja ima beskrajno mnogo decimala, a ovima se ne zna zakon, nemogućno je praktički, u stvarnosti, odrediti kao apstraktnu matematičku tačku na matematičkoj brojnoj liniji. Za takvu se količinu u najboljem slučaju može samo fiksirati jedan *brojni razmak*, tj. jedan razmak na brojnoj liniji za koji se može tvrditi da se ta količina sigurno u njemu nalazi (primer: $\sqrt{2}$ ili π). Tako je čak i onda kad bi na prvi pogled izgledalo da je količina određena kao matematička tačka u preseku dveju tačno konstruisanih linija (npr. dveju pravih, ili prave i kruga, ili dva kruga), jer se praktički nikad ne može nacrtati tačna, apstraktna, matematička linija (to će praktički uvek biti jedna više ili manje široka pruga, ili više-manje debela šipka), pa i preseci tako nacrtanih linija nisu tačke, već imaju konačno protezanje (primer: konstrukcija broja $\sqrt{2}$ pomoću prave i kruga; konstrukcija broja π ili e pomoću traktoriografa).

Prema samoj prirodi ljudskog saznanja, jedna se realna količina (osim pomenutih izuzetnih slučajeva) određuje praktički, uopšte ne kao tačno određen broj ili matematička tačka, već kao *brojni razmak*; jedna tačka kao *segment* jedne prave ili krive linije, ili kao isečak jedne površine, ili čak i kao telo u trodimenzionalnom prostoru; linija u ravni kao *pruga* konačne širine; linija u prostoru kao *šipka* konačne debljine, itd. Faktički elementi, sa kojima ima posla matematika stvarnosti nisu, dakle, oni isti sa kojima ima posla čista, apstraktna matematika.

Međutim, na ovakve iste elemente, sa kojima se ima posla u matematici stvarnosti, nailazi se u problemima apstraktne matematike, pored onih sa kojima ona isključivo računa. To su problemi određene vrste u kojima se npr. nepoznate količine, po samoj svojoj prirodi, javljaju kao brojni razmaci; ili kad same pogodbe zadataka ne zahtevaju tačnu odredbu nepoznatih količina; ili kad je nepoznatu, zbog nesavladljivih teškoća, nemogućno tačno odrediti; ili kad je ona takve prirode da je dovoljno naći dovoljno suženi razmak u kome se ona nalazi, pa da se odmah, ili bar jednim nizom praktički izvršljivih računskih radnja, dobije i njena tačna ili dovoljno približna vrednost. Tako:

1° Tačno rešenje izvesnih problema sastoji se, ne u tome da se nađu tačne vrednosti nepoznatih količina, već u tome da se nađe između kojih granica one treba da se menjaju pa da uslovi problema budu zadovoljeni.

Tako npr. zadatak odredbe vrednosti x za koje će kvadratna jednačina

$$x^2 - 2x + y^2 - 3y + 3 = 0$$

imati svoje korene x realne, ima kao svoje rešenje ovo: potrebno je i dovoljno da y leži u brojnom razmaku između 1 i 2.

Pitanje o konvergenciji jednoga reda čiji članovi sadrže jednu promenljivu x, potpuno je rešeno kad se nađe brojni razmak u kome treba da se nalazi x, pa da bude osigurana konvergencija i divergencija reda. Npr. red sa pozitivnim koeficijentima

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

biće konvergentan ako se x nalazi u brojnom razmaku od $-R$ do $+R$ gde je

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}};$$

on će biti divergentan ako se x nalazi van tog razmaka.

2° Za potrebe praktičnih računa (npr. u fizici, hemiji, tehnici) ne samo da nisu ni malo potrebne apsolutno tačne vrednosti nepoznatih količina, nego čak nije potrebna ni suviše velika približnost. Često je dovoljno znati samo to da svaka od njih nije ni manja od jednog utvrđenog broja, ni veća od drugog utvrđenog broja, a ti su brojevi, međutim, toliki da je razmak između njih dovoljan za potrebu za koju se traži. Tako npr. pri kvantitativnim hemijskim analizama, u mnogim slučajevima, dovoljno je znati da se tražena količina nalazi između dva nađena broja koji se među sobom razlikuju tek od treće ili četvrte decimale.

Tako isto, za potrebe praktičnih računa, dešava se da je nepoznatu količinu vrlo teško i zametno izračunati po datoj formuli, a međutim je za te potrebe dovoljno znati kolikog je otprilike reda ta količina, tj. da li ona iznosi nekoliko desetina, nekoliko hiljada, ili nekoliko miliona, itd.; tada je dovoljno poznavati izvestan brojni razmak u kome se ona nalazi, pa da se ima ono što se traži.

Primer: za velike vrednosti n vrlo je teško izračunati $n!$ koje tada ima vrlo veliki broj cifara. Ali, kao što je poznato iz teorije faktorijela, $n!$ uvek leži između dveju vrednosti

$$\sqrt{2\pi}\, e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}} \quad \text{i} \quad \sqrt{2\pi}\, e^{-n+\frac{1}{12n}}\, n^{n+\frac{1}{2}}$$

koje se mnogo lakše izračunavaju nego $n!$ i tako izračunate daju pojam o veličini faktorijela $n!$.

3° U izvesnim problemima dešava se da je ne samo nemoguće naći u definitivnom obliku sam broj, koji predstavlja tačku ili dovoljno približnu vrednost nepoznate količine, već je nemoguće i doći do tačnog matematičkog obrasca koji bi imao dati tu vrednost kad se u njemu smeni sve što je opšte odgovarajućim brojnim vrednostima kao podacima. Takva nemogućnost može proizilaziti npr.

a) od apsolutne nemogućnosti da se formira matematički obrazac koji bi dao traženu nepoznatu vrednost pomoću današnjih računskih operacija. Primeri: određivanje korena kakve algebarske jednačine višeg stepena od 4, koja ima jedan ili više opštih koeficijenata; izračunavanje određenog integrala $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$; određivanje integrala Ricattieve diferencijalne jednačine sa opštim koeficijentima, itd.

b) od toga što su sami podaci za tačnu odredbu nepoznate količine nedovoljni. Primeri: odrediti nepoznatu

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

kada se zna vrednost zbira $a+b$; odrediti treću stranu s jednog trougla kad se zna zbir $a+b$ ostalih dveju strana i ugao između njih.

Međutim, i u takvim slučajevima je uvek moguće odrediti za nepoznate po jedan brojni razmak u kome se svaka od tih nepoznatih sigurno nalazi.

Naposletku, treba napomenuti i to, da i u samoj čistoj, apstraktnoj matematici ima interesantnih slučajeva u kojima, kad se sazna da jedan određeni brojni razmak nasigurno sadrži nepoznatu količinu, ova se odmah, bez ikakvog daljeg računanja, može odrediti sa apsolutnom matematičkom tačnošću.

I primer: merenjem po težini jedne gomile olovnih zrnaca od kojih svako teži po jedan miligram, nađe se velikim brojem merenja, da se ta težina nalazi između 151,954 mgr i 152,037 mgr; tačan broj zrnaca je tada 152 (pretpostavljajući npr. da ni jedno zrnce ne odstupa od miligrama više od 0,5% i da se pri kolektivnom merenju ne greši za više od 0,5%).

II primer: kad se zna da su dve nepoznate x i y celi brojevi, da se x nalazi u razmaku između 2 i 14, a y u razmaku 8 i 24, i da pri tome zadovoljavaju neodređenu jednačinu

$$9x+7y=184,$$

može se tvrditi da su tačne vrednosti nepoznatih $x=8$, $y=16$.

III primer: postoji jedna algebarska teorema koja daje broj korena N što ih ima jedna data brojna algebarska jednačina u jednoj datoj prstenastoj površini opisanoj oko početka. Po toj teoremi, da bi se odredio broj N, treba izračunati brojnu vrednost P koju dobija izvesna, istom teoremom potpuno određena funkcija koeficijenata jednačine, kad se u toj funkciji smene koeficijenti svojim brojnim vrednostima koje imaju u datoj jednačini; broj N je po toj teoremi jednak najvećem celom broju sadržanom u brojnoj vrednosti P. Ako se, dakle, nađe da broj P leži u jednome brojnom razmaku koji u sebi sadrži samo jedan ceo broj, može se zaključiti da će broj N biti tačno jednak tome celom broju.

IV primer: za linearne diferencijalne jednačine drugog reda

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\,y=0$$

postoji ova teorema: ako se za sve vrednosti x koje se nalaze u jednom datom razmaku $(a,\ b)$, vrednost funkcije $f(x)$ ostaje neprestano u razmaku od $\frac{p}{x^2}$ do $\frac{p'}{x^2}$ (gde su p i p' dva stalna pozitivna broja i $p'>p>1/4$), broj N realnih nula jednoga takvoga integrala diferencijalne jednačine uvek se nalazi između dveju vrednosti

$$\alpha=\frac{\sqrt{4p-1}}{2\pi}\log\frac{b}{a} \quad \text{i} \quad \beta=\frac{\sqrt{4p'-1}}{2\pi}\log\frac{b}{a}+1.$$

Kad, dakle, razmak (α, β) sadrži samo jedan ceo broj M, broj N tačno je jednak tome broju M. Dovoljno je, dakle, poznavati takav jedan razmak (α, β), pa da se nađe tačna vrednost nepoznate količine.

Iz svega se toga vidi *da se na brojne razmake, kao računske elemente, nailazi ne samo u praktičnoj matematici, već i u određenim problemima same čiste apstraktne matematike.*

2. RAČUNSKI PREDSTAVNICI BROJNIH RAZMAKA

Kad je dat razmak (a, b), gde je a njegov *prednji* a b njegov *zadnji* kraj, može se, i to na razne načine, formirati jedna funkcija $f(\lambda)$ jednoga parametra λ takva:

1° da se za jednu datu vrednost $\lambda = \lambda_1$, vrednost funkcije poklapa sa a, za drugu jednu datu vrednost $\lambda = \lambda_2$ vrednost funkcije poklapa sa b;

2° da, dok λ prelazi redom između λ_1 i λ_2, vrednost funkcije prolazi kroz sve brojeve koji se nalaze u razmaku (a, b).

Takvu jednu funkciju $f(\lambda)$ nazvaćemo *računskim predstavnikom* razmaka (a, b); razmak (λ_1, λ_2) nazvaćemo *parametarskim razmakom.* Računski predstavnik jednoga razmaka obuhvata u obliku jednog računskog izraza, sve brojeve sadržane u tome razmaku.

Stavivši, kratkoće radi

$$\alpha = \frac{\lambda - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad \beta = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

za računski predstavnik razmaka (a, b) može se uzeti koja bilo od funkcija

$$f(\lambda) = \alpha a + \beta b, \qquad f(\lambda) = (\alpha a^m + \beta b^m)^{\frac{1}{m}}, \qquad f(\lambda) = a^\alpha b^\beta.$$

Svaki računski predstavnik razmaka (a, b) ima tu osobinu da se po svojoj brojnoj vrednosti poklapa sa jednim kojim se god hoće brojem u tome razmaku, kad se parametru λ da jedna podesno izabrana brojna vrednost koja se nalazi između λ_1 i λ_2, Tako npr. razmak (2,5) imaće kao jedan svoj računski predstavnik, sa parametarskim razmakom (1,3) funkciju

$$f(\lambda) = 2\alpha + 5\beta,$$

gde je

$$\alpha = \frac{3 - \lambda}{2}, \qquad \beta = \frac{\lambda - 1}{2},$$

tj. funkciju

$$f(\lambda) = \frac{1 + 3\lambda}{2}.$$

Vrednost npr. 2,75 u razmaku (2,5) dobija se kad parametru λ da vrednost 1,5 sadržana u njegovom razmaku (1,3).

3. LINEARNI RAČUNSKI PREDSTAVNICI BROJNIH RAZMAKA

Između svih mogućih oblika funkcije $f(\lambda)$ najprostije su i za račune najpodesnije linearne funkcije parametra λ, tj. funkcije oblika

$$f(\lambda)=u+\lambda v, \tag{1}$$

gde su i u i v vrednosti nezavisne od λ, određene tako da za dati razmak (a, b) bude

$$u+\lambda_1 v=a, \qquad u+\lambda_2 v=b$$

što će biti kad se za u i v uzmu vrednosti

$$u=\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}a-\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}b, \qquad v=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}b-\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}a. \tag{2}$$

Dva su slučaja od naročitog interesa po svojoj prostoti i po lakoći da se sa odgovarajućim obrascima računa. To su:

Prvi slučaj: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=+1$; računski predstavnik brojnog razmaka (a, b) je tada

$$f(\lambda)=u+\lambda v, \tag{3}$$

gde je

$$u=\frac{b+a}{2}, \qquad v=\frac{b-a}{2}, \tag{4}$$

a parametarski razmak je razmak $(-1, +1)$. Tada je

$$a=u-v, \qquad b=u+v$$

što pokazuje da su krajevi razmaka (a, b) simetrični naspram vrednosti u koja se, dakle, nalazi u sredini toga razmaka. Jedan ma koji broj sadržan u razmaku dobija se kad se sredini razmaka doda ili od nje oduzme jedan deo poludužine razmaka.

Kad se od funkcije $f(\lambda)$ traži da se svede na prednji kraj a razmaka (a, b) za $\lambda=-1$, a na zadnji kraj b za $\lambda=+1$, treba da je

$$u-v=a, \qquad u+v=b,$$

pa pošto je $a<b$, treba da bude $v>0$.

Kad se traži da se $f(\lambda)$ svede na prednji kraj a za $\lambda = +1$, a zadnji kraj b za $\lambda = -1$, treba da je

$$u + v = a, \qquad u - v = b,$$

pa se iz $a < b$ dobija da treba da je $v < 0$.

Drugi slučaj: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$; računski predstavnik razmaka (a, b) je

$$f(\lambda) = u + \lambda v \tag{5}$$

gde je

$$u = a, \qquad v = b - a,$$

a parametarska amplituda je razmak $(0, 1)$. Tada je

$$a = u, \qquad b = v + u$$

što pokazuje da su krajevi razmaka (a, b) nesimetrični naspram vrednosti u i to tako da se ta vrednost poklapa sa jednim krajem toga razmaka. Jedan ma koji broj sadržan u razmaku (a, b) dobija se kad se prednjem kraju razmaka doda ili od njega oduzme jedan deo dužine razmaka.

Kad se traži da se $f(\lambda)$ svede na prednji kraj a razmaka (a, b) za $\lambda = 0$, a na zadnji kraj b za $\lambda = 1$, treba da je

$$u = a, \qquad u + v = b$$

iz čega se, prema $a < b$, dobija da je $v > 0$.

Kad se traži da se $f(\lambda)$ svede na prednji kraj a za $\lambda = 1$, a na zadnji kraj b za $\lambda = 0$, treba da je

$$u + v = a, \qquad u = b$$

iz čega se prema $a < b$, dobija da je $v < 0$.

Oblike funkcije $f(\lambda)$ iz gornja dva slučaja, zbog njihove prostote i lakoće da se sa njima računa, smatraćemo za *normalne računske predstavnike* razmaka (a, b) i to:

1° funkciju

$$f(\lambda) = u + \lambda v \quad \left(u = \frac{b+a}{2}, \quad v = \frac{b-a}{2}\right)$$

sa parametarskim razmakom $(-1, +1)$ nazvaćemo *simetričnim*, a

2° funkciju

$$f(\lambda) = u + \lambda v \qquad (u = a, \; v = b - a)$$

sa parametarskim razmakom $(0, +1)$ nazvaćemo *asimetričnim* normalnim predstavnikom razmaka (a, b).

U ovome što sleduje biće uvek sa ω simbolički označen jedan broj koji leži između -1 i $+1$, a sa ϑ jedan broj koji leži između 0 i 1. Simetrični normalni predstavnik razmaka (a, b) biće tada

$$\frac{b+a}{2}+\omega\frac{b-a}{2}, \tag{6}$$

a nesimetrični

$$a+\vartheta(b-a). \tag{7}$$

U slučaju simetričnog predstavnika $u+\omega v$, član u predstavlja *sredinu* razmaka (a, b), a član v njegovu *poludužinu.*

U slučaju asimetričnog predstavnika $u+\vartheta v$, član u predstavlja prednji kraj razmaka (a, b), a član v njegovu *dužinu.*

Kad se bude imalo posla sa više raznih brojeva ω koji leže između -1 i $+1$, ili više raznih brojeva ϑ koji leže između 0 i 1, mi ćemo ih razlikovati zapetama ili skazaljkama, npr. $\omega', \omega'', \omega''', \ldots, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots; \vartheta', \vartheta'', \vartheta''', \ldots, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \ldots$.

Primetimo i to da kad je a prednji, a b zadnji kraj razmaka (a, b) uvek je $a<b$ i razlika $b-a$ uvek je pozitivna. Prema tome u oba normalna oblika računskog predstavnika razmaka (a, b), koji su

$$u+\omega v \text{ i } u'+\vartheta v',$$

količine v i v' uvek su pozitivne.

Primetimo takođe i to da je asimetrični normalni predstavnik razmaka $(0, b)$ oblika ϑb, a simetrični normalni predstavnik oblika $\frac{1+\omega}{2}b$.

Tako isto asimetrični normalni predstavnik razmaka $(-a, +a)$ je $a(2\vartheta-1)$, a simetrični ωa.

Kad je jedan broj x poznat sa p tačnih decimala, tako da je

$$x=m, a_1\, a_2 \ldots a_p,$$

gde je m najveći u njemu sadržan ceo broj, a a_k negova k-ta decimala, broj x je sadržan u razmaku između brojeva

$$m, a_1\, a_2 \ldots a_p\, 0 \text{ i } m, a_1\, a_2 \ldots a_p\, 999\ldots$$

normalni predstavnici tog razmaka su:

$$\text{asimetrični} \qquad m, a_1\, a_2 \ldots a_p\, 0+\frac{\vartheta}{10^p},$$

$$\text{simetrični} \qquad m, a_1\, a_2 \ldots a_p\, 0+\frac{5}{10^{p+1}}(1+\omega).$$

Tako npr. kazati da broj 3,141 predstavlja broj π sa tri tačne decimale, znači kazati da se broj π nalazi u razmaku između brojeva 3,141 i 3,142; normalni predstavnici tog razmaka su:

asimetrični $\quad 3{,}1410+\vartheta\,.\,0{,}001,$

simetrični $\quad 3{,}1415+\omega\,.\,0{,}0005.$

4. TRANSFORMACIJE RAČUNSKIH PREDSTAVNIKA BROJNIH RAZMAKA

Pod transformacijom računskog predstavnika datog brojnog razmaka $(a,\ b)$ razume se ovaj problem:

Neka su λ i μ dva promenljiva parametra, $f(\lambda)$ i $\varphi(\mu)$ dva računska predstavnika jednog istog brojnog razmaka $(a,\ b)$, a $(\lambda_1,\ \lambda_2)$ i $(\mu_1,\ \mu_2)$ razmaci parametara λ i μ; kakva veza postoji između tih elemenata?

Pošto je

$$f(\lambda_1)=a, \qquad \varphi(\mu_1)=a,$$

$$f(\lambda_2)=b, \qquad \varphi(\mu_2)=b,$$

to je ta veza izražena dvema jednačinama

$$f(\lambda_1)=\varphi(\mu_1), \qquad f(\lambda_2)=\varphi(\mu_2). \tag{8}$$

Kad su, dakle, utvrđeni i dati oblici obeju funkcija f i φ, onda se iz jednačina (8), kad je poznat razmak jednoga od parametara λ i μ, može odrediti razmak drugoga, jer se iz (8) pomoću poznatih λ_1 i λ_2 mogu odrediti μ_1 i μ_2 i obrnuto.

Ako su utvrđene i date jedna od funkcija f i φ i razmak te funkcije npr. funkcija $f(\lambda)$ i razmak $(\lambda_1,\ \lambda_2)$, druga je funkcija $\varphi(\mu)$ određena uslovom da za $\mu=\mu_1$ dobije vrednost $f(\lambda_1)$, za $\mu=\mu_2$ vrednost $f(\lambda_2)$ i da monotono raste dok μ varira od μ_1 do μ_2. U tome slučaju zadatak, kao što se vidi, nije potpuno određen; za funkciju φ može se uzeti koja se hoće od beskrajno mnogih funkcija koje zadovoljavaju pomenute uslove.

Pomoću veza (8) može se, na taj način, jedan računski predstavnik datog razmaka $(a,\ b)$ preobratiti u drugi, drugog oblika, što je od važnosti za mnoge račune. Ovde će biti rešeno nekoliko primera te vrste.

I primer: dat je računski predstavnik razmaka $(a,\ b)$ u obliku poznate funkcije $f(\lambda)$, sa parametarskim razmakom $(\lambda_1,\ \lambda_2)$; preobratiti ga u normalni simetrični oblik.

Ovaj će predstavnik biti oblika

$$\varphi(\omega)=u+\omega v \qquad (-1\leqslant\omega\leqslant+1),$$

a treba da bude

$$f(\lambda_1)=\varphi(-1)=u-v \qquad f(\lambda_2)=\varphi(+1)=u+v,$$

dakle

$$u=\frac{f(\lambda_1)+f(\lambda_2)}{2}, \qquad v=\frac{f(\lambda_2)-f(\lambda_1)}{2}$$

prema čemu će traženi predstavnik biti

$$\frac{f(\lambda_2)+f(\lambda_1)}{2}+\omega\frac{f(\lambda_2)-f(\lambda_1)}{2} \qquad (-1\leqslant\omega\leqslant+1).$$

II primer: dat je računski predstavnik razmaka (a, b) u obliku poznate funkcije $f(\lambda)$ sa parametarskim razmakom (λ_1, λ_2); preobratiti ga u normalni asimetrični oblik. Ovaj će biti

$$\varphi(\vartheta)=u+\vartheta v \qquad (0\leqslant\vartheta\leqslant1),$$

a pošto treba da bude

$$f(\lambda_1)=\varphi(0)=u$$

$$f(\lambda_2)=\varphi(1)=u+v$$

odakle je

$$u=f(\lambda_1), \qquad v=f(\lambda_2)-f(\lambda_1),$$

to će traženi predstavnik biti

$$f(\lambda_1)+\vartheta\,[f(\lambda_2)-f(\lambda_1)] \qquad (0\leqslant\vartheta\leqslant1).$$

III primer: preobratiti simetrični normalni oblik

$$f(\omega)=u+\omega v \qquad (-1\leqslant\omega\leqslant+1)$$

u asimetrični normalni oblik

$$\varphi(\vartheta)=u'+\vartheta v' \qquad (0\leqslant\vartheta\leqslant1)$$

za jedan isti brojni razmak (a, b).

Pošto treba da bude

$$f(-1)=\varphi(0) \text{ tj. } u-v=u',$$

$$f(+1)=\varphi(1) \text{ tj. } u+v=u'+v',$$

to je

$$u'=u-v, \qquad v'=2v,$$

pa će, dakle, traženi predstavnik biti

$$u-v+2\vartheta v \qquad (0\leqslant\vartheta\leqslant1).$$

IV primer: preobratiti asimetrični normalni oblik

$$f(\vartheta) = u + \vartheta v \qquad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1)$$

u simetrični

$$\varphi(\omega) = u' + \omega v' \qquad (-1 \leqslant \omega \leqslant +1).$$

Pošto treba da bude

$$f(0) = \varphi(-1) \text{ tj. } u = u' - v',$$

$$f(1) = \varphi(+1) \text{ tj. } u + v = u' + v',$$

odakle je

$$u' = u + \frac{v}{2}, \qquad v' = \frac{v}{2},$$

to će traženi predstavnik biti

$$u + \frac{v}{2} + \omega \frac{v}{2} \qquad (-1 \leqslant \omega \leqslant +1).$$

V primer: zna se iz teorije faktorijela da je

$$n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{\vartheta'}{12n}},$$

gde je ϑ' jedan broj koji, ma kakvo bilo pozitivno n, leži između 0 i 1; naći asimetrični normalni predstavnik za $n!$.

Ako se, kratkoće radi, stavi da je

$$\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} = N$$

biće

$$n! = N e^{\frac{\vartheta'}{12n'}},$$

Uzevši da je

$$f(\lambda) = N e^{\frac{\lambda}{12n}} \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1),$$

$$\varphi(\vartheta) = u + \vartheta v \qquad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1),$$

treba da je

$$f(0) = \varphi(0) \text{ tj. } N = u$$

$$f(1) = \varphi(1) \text{ tj. } N e^{\frac{1}{12n}} = u + v,$$

odakle je

$$u = N, \quad v = (e^{\frac{1}{12n}} - 1) N,$$

pa će, dakle, traženi predstavnik biti

$$N[1 + \vartheta(e^{\frac{1}{12n}} - 1)] \qquad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1).$$

VI primer: zna se da ako zbir kateta jednog pravouglog trougla iznosi s, dužina hipotenuze uvek leži između $\frac{s}{\sqrt{2}}$ i s. Simetrični normalni predstavnik intervala hipotenuze biće, dakle

$$c=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)s+\frac{\omega}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)s, \text{ tj.}$$

$$c=0{,}8534\cdot s+0{,}1435\cdot\omega\cdot s,$$

a asimetrični će biti

$$c=\frac{s}{\sqrt{2}}+\vartheta\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)s, \text{ tj.}$$

$$c=0{,}7071\cdot s+0{,}2929\cdot\vartheta\cdot s.$$

5. FUNKCIJA BROJNOG RAZMAKA

Važnost i interes računskih predstavnika brojnih razmaka leže u tome *što se pomoću njih može sa razmacima računati kao i sa običnim brojevima.*

Ako se npr. razmak (x, y) označi sa z, tako da je simbolički

$$z=(x, y)$$

može se formirati kvadrat, kub, logaritam, sinus i uopšte jedna ma kakva funkcija toga razmaka. Ona će biti jedan izvestan razmak

$$Z=f(z)=(X, Y)$$

koji će takođe imati svoj računski predstavnik. Veza između razmaka z i $f(z)$, tj. Z sastoji se u tome što će krajevi X, Y, razmaka Z zavisiti na jedan naročiti način od krajeva x i y razmaka z. Ta je veza ovakve vrste:

Neka je $z=(x, y)$ jedan dati brojni razmak, a $f(z)$ data funkcija. Označimo sa M najveću, a sa N najmanju vrednost koju dobija funkcija $f(z)$ dok z varira od x do y. Očevidno je da će $f(z)$ biti jedan brojni razmak čiji je prednji kraj N, a zadnji kraj M.

Taj će razmak imati, kao simetrični normalni predstavnik izraz

$$Z=f(z)=\frac{M+N}{2}+\omega\frac{M-N}{2}$$

a kao asimetrični normalni predstavnik izraz

$$Z=f(z)=N+\vartheta(M-N).$$

Isti je razmak ceo sadržan u jednome prostranijem razmaku Z' čiji je prednji kraj jedna ma koja donja granica N' vrednosti $f(z)$ kad z varira od x do y, a M' jedna ma koja gornja granica za te vrednosti. Razmak Z je, dakle, ceo sadržan u jednom razmaku Z', čiji su normalni predstavnici

$$Z' = \frac{M'+N'}{2} + \omega' \cdot \frac{M'-N'}{2} \qquad Z' = N' + \vartheta' (M'-N').$$

Tako određen razmak Z' zvaćemo jednom *gornjom granicom* razmaka Z: to je jedan razmak širi od razmaka Z i koji obuhvata ovaj, tj. sadrži ga kao jedan svoj deo.

U mnogim problemima, ako se ne može naći tačan razmak Z, od interesa i od koristi je imati bar jednu njegovu gornju granicu Z', pošto se i za razmak Z' može tvrditi da obuhvata uočenu vrednost $f(z)$ koju obuhvata i razmak Z.

U slučajevima kad je $f(z)$ kakva monotono rastuća funkcija promenljive z u razmaku (x, y) biće

$$N = f(x), \quad M = f(y).$$

Kad je to monotono opadajuća funkcija u razmaku (x, y) biće

$$N = f(y), \quad M = f(x).$$

Kad ni jedno ni drugo nije slučaj, i ako $f(z)$ ima za vrednost z u razmaku (x, y) maksimume koji su veći od obeju vrednosti $f(x)$ i $f(y)$ onda za M treba uzeti najveći od tih maksimuma; ako $f(z)$ ima u razmaku (x, y) minimume koji su manji od obeju vrednosti $f(x)$ i $f(y)$, onda za N treba uzet najmanji od tih minimuma.

I primer: kvadrat jednog razmaka.

Neka je normalni asimetrični predstavnik jednog razmaka

$$z = u + \vartheta v;$$

traži se

$$z^2 = (u + \vartheta v)^2.$$

Pošto je v uvek pozitivno, to je

$$N = u^2 \quad M = (u+v)^2, \quad M - N = v^2 + 2uv$$

pa dakle

$$z^2 = u^2 + \vartheta' (v^2 + 2uv).$$

Kad bi razmak z bio dat svojim simetričnim predstavnikom

$$z = u + \omega v$$

pošto je v pozitivno, bilo bi

$$z^2 = (u + \omega v)^2 \quad N = (u - v)^2 \quad M = (u + v)^2$$

$$M - N = 4\,uv \quad M + N = 2\,(u^2 + v^2)$$

i prema tome bi bilo

$$z^2 = (u^2 + v^2) + 2\,\omega\, uv.$$

II primer: kub jednog razmaka. Neka je

$$z = u + \vartheta\, v$$

pa se traži

$$z^3 = (u + \vartheta\, v)^3.$$

Biće

$$N = u^3 \quad M = (u + v)^3 \quad M - N = 3\,u^2 v + 3\,uv^2 + v^3$$

i prema tome

$$z^3 = u^3 + \vartheta'\,(3\,u^2 v + 3\,uv^2 + v^3).$$

Kad je razmak z dat svojim predstavnikom

$$z = u + \omega\, v, \text{ tako da je } z^3 = (u + \omega\, v)^3$$

biće

$$N = (u - v)^3, \quad M = (u + v)^3$$

$$M - N = 6\,u^2 v + 2\,v^3 \quad M + N = 2\,u^3 + 6\,uv^2$$

i prema tome

$$z^3 = (u^3 + 3\,uv^2) + \omega'\,(v^3 + 3\,u^2 v).$$

III primer: logaritam jednog razmaka.

Neka je

$$z = u + \vartheta\, v, \text{ gde je } u > 0,\ v > 0,$$

pa se traži

$$\log z = \log\,(u + \vartheta\, v).$$

Biće

$$N = \log u, \quad M = \log\,(u + v), \quad M - N = \log\left(1 + \frac{v}{u}\right)$$

i prema tome

$$\log z = \log u + \vartheta' \log\left(1 + \frac{v}{u}\right).$$

IV primer: neka je

$$z = u + \vartheta\, v, \text{ pa se traži } e^z = e^{u + \vartheta v}.$$

Biće

$$N = e^u, \quad M = e^{u+v}, \quad M - N = e^u\,(e^v - 1)$$

pa dakle

$$e^z = e^u + \vartheta'\, e^u\,(e^v - 1).$$

V primer: uopšte, neka je $f(z)$ jedna funkcija koja monotono raste kad z raste u posmatranom razmaku, i neka je

$$z = u + \vartheta\, v, \text{ pa se traži } f(z) = f(u + \vartheta\, v).$$

Biće

$$N=f(u), \quad M=f(u+v), \quad M-N=f(u+v)-f(u)$$

pa dakle

$$f(z)=f(u)+\vartheta' [f(u+v)-f(u)].$$

Na isti bi se način imale $f(u+\vartheta v)$ i u slučajevima ako je $f(z)$ funkcija koja monotono opada kad z raste u posmatranom razmaku.

6. FUNKCIJA VIŠEBROJNIH RAZMAKA

Neka su

$$z_1=(x_1, y_1) \text{ i } z_2=(x_2, y_2)$$

dva data razmaka, a $f(z_1, z_2)$ data funkcija dveju promenljivih količina. Označimo sa N i M najmanju i najveću vrednost koju dobija funkcija $f(z_1, z_2)$ kad z_1 varira od x_1 do y_1, a z_2 od x_2 do y_2. Funkcija

$$Z=f(z_1, z_2)$$

dvaju razmaka z_1 i z_2 biće jedan razmak koji će imati, kao s, oj asimetrični normalni predstavnik, izraz

$$Z=f(z_1, z_2)=N+\vartheta (M-N).$$

Kad su razmaci z_1 i z_2 i sami dati svojim asimetričnim normalnim predstavnicima

$$z_1=u_1+\vartheta_1 v_1 \quad z_2=u_2+\vartheta_2 v_2$$

biće

$$x_1=u_1, \quad y_1=u_1+v_1, \quad x_2=u_2, \quad y_2=u_2+v_2.$$

U slučajevima, dakle, kad je $f(z_1, z_2)$ monotono rastuća funkcija promenljivih z_1 i z_2 u razmacima (x_1, y_1) i (x_2, y_2), biće

$$N=f(x_1, x_2)=f(u_1, u_2), \quad M=f(x_1+y_1, x_2+y_2)=f(u_1+v_1, u_2+v_2)$$

i prema tome će asimetrični predstavnik razmaka Z biti

$$Z=f(z_1, z_2)=f(u_1, u_2)+\vartheta [f(u_1+v_1, u_2+v_2)-f(u_1, u_2)].$$

U slučajevima kad je f monotono opadajuća funkcija promenljivih z_1 i z_2 u istim razmacima, biće

$$N=f(y_1, y_2)=f(u_1+v_1, u_2+v_2), \quad M=f(x_1, x_2)=f(u_1, u_2)$$

i prema tome je asimetrični predstavnik razmaka Z

$$Z=f(z_1, z_2)=f(u_1+v_1, u_2+v_2)+\vartheta [f(u_1, u_2)-f(u_1+v_1, u_2+v_2)].$$

Isti je razmak ceo sadržan u jednom prostranijem razmaku

$$Z' = f(N', M'),$$

gde su N' i M' jedna donja i jedna gornja granica vrednosti $f(z_1, z_2)$ kad se z_1 i z_2 menjaju u granicama svojih odgovarajućih razmaka (x_1, y_1) i (x_2, y_2). Razmak Z ima za asimetrični normalni predstavnik izraz

$$Z' = N' + \vartheta' (M' - N')$$

i biće jedna gornja granica razmaka Z, tj. jedan razmak širi od Z, a za koji se takođe može tvrditi da obuhvata vrednost $f(z_1, z_2)$ koju obuhvata i razmak Z.

I primer: neka je

$$z_1 = u_1 + \vartheta_1 v_1. \qquad z_2 = u_2 + \vartheta_2 v_2,$$

pa se traži razmak

$$Z = z_1 + z_2.$$

Biće

$$N = u_1 + u_2, \qquad M = u_1 + u_2 + v_1 + v_2,$$

pa dakle

$$Z = (u_1 + u_2) + \vartheta' (v_1 + v_2).$$

II primer: traži se razmak

$$Z = z_1 \, z_2;$$

pošto je

$$N = u_1 \, u_2, \qquad M = (u_1 + v_1)(u_2 + v_2),$$

biće

$$Z = u_1 u_2 + \vartheta' (u_1 v_2 + u_2 v_1 + v_1 v_2),$$

III primer: traži se razmak

$$Z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2};$$

nalazi se da je

$$Z = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} + \vartheta' \left[\sqrt{(u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2} - \sqrt{u_1^2 + v_1^2} \right].$$

Isto se tako određuje i data funkcija n brojnih razmaka

$$\begin{gathered} z_1 = u_1 + \vartheta_1 v_1, \\ z_2 = u_2 + \vartheta_2 v_2, \\ \vdots \\ z_n = u_n + \vartheta_n v_n. \end{gathered}$$

Brojevi N i M su tada najmanja i najveća vrednost koju dobija funkcija f kad se tačka $(z_1, z_2, \dots z_n)$ u hiperprostoru od n dimenzija kreće tako da svaka promenljiva z_k ostaje u svome razmaku određenom odgovarajućim svojim računskim predstavnikom.

Pojam *gornje granice* za razmak Z isti je kao i onaj za funkcije dveju promenljivih.

7. SISTEM FUNKCIJA BROJNIH RAZMAKA

Neka su

$$z_1=(x_1,\ y_1),\ldots,\ z_n=(x_n,\ y_n)$$

n datih razmaka, a

$$f_1(z_1,\ldots,\ z_n),\ldots,\ f_p(z_1,\ldots,\ z_n)$$

sistem od p datih funkcija tih razmaka. Svaka od ovih funkcija f_k imaće svoj razmak Z_k u kome će varirati za vreme dok svaka promenljiva z_i varira u svome razmaku $(x_i,\ y_i)$.

Označimo sa N_k i M_k najmanju i najveću vrednost koju dobija funkcija f_k kad sve promenljive $z_1,\ldots,\ z_n$ variraju u svojim razmacima. Asimetrični normalni predstavnici sistema $f_1,\ldots,\ f_p$ biće izrazi:

$$Z_1=f_1(z_1,\ldots,\ z_n)=N_1+\vartheta_1(M_1-N_1),$$

$$Z_2=f_2(z_1,\ldots,\ z_n)=N_2+\vartheta_2(M_2-N_2),$$

$$\vdots$$

$$Z_p=f_p(z_1,\ldots,\ z_n)=N_p+\vartheta_p(M_p-N_p).$$

Kad se znaju krajevi $x_i,\ y_i$ razmaka z_i, biće

$$z_1=u_1+\vartheta_1'\,v_1, \qquad z_2=u_2+\vartheta_2'\,v_2,\ldots,$$

gde su $u_i,\ v_i$ određeni pomoću $x_i,\ y_i$ jednačinama

$$x_i=u_i, \qquad y_i=u_i+v_i.$$

Kad je koja od funkcija f_k monotono rastuća ili opadajuća funkcija, odgovarajuće vrednosti N_k i M_k određuju se na napred pokazani način.

Na mesto tačnih razmaka $Z_1,\ Z_2,\ldots,\ Z_p$ u mnogim slučajevima dovoljno je poznavati po jednu njihovu gornju granicu, tj. po jedan razmak u kome je sadržan odgovarajući tačan razmak Z_k. Takva je jedna gornja granica za razmak Z_k razmak

$$Z'_k=N'_k+\vartheta''_k(M'_k-N'_k),$$

gde N'_k i M'_k označuju jednu donju i jednu gornju granicu funkcije f_k za vreme dok svaka promenljiva z_i varira u svome razmaku (x_i, y_i) tj. dok ϑ_i' u izrazu

$$z_i = u_i + \vartheta'_i v_i$$

varira od 0 do 1.

8. STALNI I PROMENLJIVI BROJNI RAZMACI

Kao što se vidi iz ovoga što prethodi, elementarne računske radnje, koje se vrše sa *tačno određenim vrednostima*, mogu se vršiti i sa *brojnim razmacima.* Drugim rečima, računske radnje koje se mogu vršiti sa *tačkama* na realnoj brojnoj liniji, mogu se vršiti i sa *segmentima* te linije. Razlika je ta što će izvršene sa tačkama one dati opet brojne tačke, a vršene sa segmentima one će dati kao rezultat brojne segmente. *Računski predstavnici brojnih razmaka preobraćaju dvostruke nejednačine u jednačine*; sa takvim se nejednačinama, preko njihovih računskih predstavnika, *mogu vršiti sve elementarne računske radnje koje se vrše sa jednačinama.*

Kad je razmak, sa kojim se radi *stalan,* tj. kad su mu krajevi nepromenljivi i rezultat izvršenih računskih radnji biće jedan razmak sa nepromenljivim krajevima. A kad je prvobitni razmak *promenljiv* (promenljivi krajevi) i rezultat će dati jedan promenljiv razmak. Tako npr. kvadrat stalnog razmaka

$$z = 2 + 3\vartheta$$

takođe je stalan razmak

$$z^2 = 4 + 21\vartheta';$$

kvadrat promenljivog razmaka

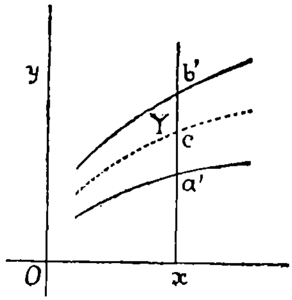
$$z = x + \vartheta(1 + x)$$

je promenljiv razmak

$$z^2 = x^2 + \vartheta'(3x^2 + 4x + 1).$$

Neka su x i y dve promenljive količine vezane među sobom tako, da kad se jedna od njih bude menjala, i druga se menja na način određen promenama prve. Kad se npr. promenljiva x bude menjala tako da joj vrednosti neprestano ostaju u jednome brojnom razmaku X, vrednosti y ostaće u jednome takođe određenom razmaku Y. Iz date veze između promenljivih x i y dobićemo, na napred navedeni način, i vezu između razmaka X i Y tj. vezu između njihovih prednjih i zadnjih krajeva.

U primenama računa sa brojnim razmacima često se nailazi na slučajeve ovakve vrste: veza između promenljivih x i y nije određena u tolikoj meri da se svakoj vrednosti x može odrediti odgovarajuća vrednost y, ali se za svaku vrednost x može odrediti po jedan razmak Y, za koji se pouzdano može tvrditi da će odgovarajuća vrednost y biti u njemu sadržana. Menjanjem promenljive x menjaće se i odgovarajući razmak Y. Ako se na osovini Ox obeleži vrednost x, a na upravnoj u tački x se prenesu krajevi a' i b' razmaka Y, pa se pusti da se x menja, ti će krajevi opisati svaki po jednu liniju u ravni, a sam razmak Y opisaće jednu *oblast* ograničenu tim dvema linijama, koje su joj njena *donja i gornja granična linija*. Geometrijsko mesto sredina c razmaka Y, *srednja linija oblasti*, daće ovlašnu sliku o vezi između promenljivih x i y. Slika će biti utoliko manje ovlašna, ukoliko je oblast uža, tj. ukoliko je manje odstojanje graničnih linija od srednje linije, ili, što je isto, ukoliko su manje amplitude mogućih oscilacija promenljive y oko srednje linije; pod *oscilacijom* oko srednje linije (iznad i ispod ove) ima se razumeti rastojanje $cb' = a'c$.



Na taj način, u slučajevima kad ne postoji ili se ne može naći *tačna* veza između promenljivih x i y, dešava se da je moguće odrediti jednu *oblast varijacija* promenljive y koja čini mogućom odredbu brojnog razmaka u kome će nasigurno biti sadržana neodređena vrednost y za jednu ma koju tačno datu vrednost x. Drugim rečima, moguće je odrediti za x jednu srednju liniju i oscilacije te promenljive oko ove srednje linije.

Tako npr. između koordinata

$$x = \alpha + \beta \quad \text{i} \quad y = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

jedne promenljive tačke P, gde su α i β dva promenljiva pozitivna parametra, ne postoji nikakva tačna veza, tj. tačka P ne opisuje nikakvu određenu liniju, mada se pri menjanju količine x uopšte menja i količina y. Ali pošto je za pozitivne α i β uvek

$$\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}} \leqslant \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \leqslant \alpha+\beta,$$

to se tačka, čije su koordinate x i y, uvek nalazi u oblasti između dveju pravih

$$y = \frac{x}{\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad y = x.$$

Srednja linija je prava

$$y = 0{,}8534 \cdot x,$$

a oscilacija oko ove je $0{,}1464 \cdot x$.

Kad je jedna nepoznata količina, zadovoljavajući dati skup (D) pogodaba, kao stalna, određena u obliku jednoga brojnog razmaka koji je sadrži, ili kao promenljiva, određena u obliku njene oblasti varijacija, mogu se desiti ovakvi slučajevi:

1° Dobiveni brojni razmak je *prostraniji* no što zahteva sama priroda stvari, tj. njegov prednji ili zadnji kraj nisu stvarno dostignuti ni u kome pojedinačnom slučaju, koji je u skladu sa pogodbama (D). Drugim rečima, nađeni razmak je samo jedna gornja granica onoga razmaka čiji je jedan ili drugi kraj odista dostignut u kakvom specijalnom slučaju koji nije u suprotnosti sa pogodbama (D).

Tako npr. kad se skup (D) sastoji u pogodbi da su a i b pozitivni, vrednost $\sqrt{a^2+b^2}$ uvek leži između $\frac{1}{2}(a+b)$ i $\frac{3}{2}(a+b)$, ali nijedna od ovih granica nije ni u kome slučaju dostignuta. Ista vrednost leži takođe i u razmaku između brojeva $\frac{1}{2}(a+b)$ i $(a+b)$, a ova druga granica je dostignuta u specijalnom slučaju kad je $b=0$, ali prva nije nikad. Tako isto, ista vrednost leži i između granica $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ i $\frac{3}{2}(a+b)$; prednji kraj toga razmaka dostignut je u specijalnom slučaju kad je $a=b$, ali zadnji nije nikad. Razmak od $\frac{1}{2}(a+b)$ do $\frac{3}{2}(a+b)$ je, dakle, samo jedna gornja granica užih razmaka

$$\left(\frac{a+b}{2},\quad a+b\right) \quad \text{i} \quad \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}},\quad \frac{3}{2}(a+b)\right)$$

koji takođe odgovaraju pogodbi (D), ali su im prednji ili zadnji kraj stvarno dostignuti u pojedinim specijalnim slučajevima.

2° Dobiveni razmak je *najuži* između sviju onih koji su u skladu sa pogodbama (D); tj. oba njegova kraja su stvarno dostignuta u pojedinim specijalnim slučajevima.

Tako se npr. nalazi da vrednost $\sqrt{a^2+b^2}$, kad su a i b pozitivni brojevi, uvek leži u razmaku $\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}},\quad a+b\right)$; i jedan i drugi kraj toga razmaka stvarno su dostignuti, prednji kraj kad je $a=b$, a zadnji kad je $b=0$. Taj je razmak odista najuži među onima koji odgovaraju pogodbama; kad bi se još više suzio, on ne bi više obuhvatio ova dva specijalna slučaja, tj. ne bi odgovarao opštem slučaju.

3° Dobivena oblast varijacije jedne nepoznate y, zavisne od druge promenljive x, je *šira* no što zahteva priroda zadatka, tj. njena donja ni gornja granična linija nisu stvarno dostignute ni u kome slučaju koji je u skladu sa pogodbama (D). Nađena oblast tada je samo jedna gornja granica jedne uže oblasti čija je jedna od graničnih linija stvarno dostignuta u jednom određenom specijalnom slučaju.

Tako npr. tačka P, čije su koordinate pozitivni brojevi x i $\sqrt{1+x^2}$, uvek se nalazi između dveju pravih linija

$$y=\frac{1}{2}(1+x) \quad \text{i} \quad y=\frac{3}{2}(1+x),$$

ali nijedna od tih pravih nije nikada dostignuta. Ista tačka se nalazi i između pravih

$$y=\frac{1}{2}(1+x) \quad \text{i} \quad y=1+x;$$

gornja granična prava dostignuta je u tački $x=0$, $y=1$. Tako isto tačka P leži i između dveju pravih

$$y=\frac{1+x}{\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad y=1+x;$$

i donja granična prava dostignuta je u tački $x=1$, $y=\sqrt{2}$.

4° Dobivena oblast varijacija je *najuža* između sviju koje su u skladu sa pogodbama (D), tj. obe njene granične linije mogu stvarno biti dostignute u pojedinim slučajevima.

Tako se npr. nalazi da se tačka P uvek nalazi između dveju pravih

$$y=\frac{1+x}{\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad y=1+x;$$

obe granične linije su stvarno dostignute u pojedinim tačkama P; donja tačkom $x=1$, $y=\sqrt{2}$ a gornja tačkom $x=0$, $y=1$. Oblast između tih pravih, sa desne strane osovine Oy, najuža je među svima drugima; kad bi je ma i najmanje suzili, ona ne bi više obuhvatila gore pomenute dve specijalne tačke, a koje ipak zadovoljavaju pogodbe zadatka.

Po sebi se razume da je uvek probitačno poznavati što uže granice između kojih ostaje nepoznata količina, jer ukoliko su ove uže, utoliko su manje neodređenosti u poznavanju te količine. Najprobitačniji, najpovoljniji je *najuži* mogući razmak za tu količinu, koji je do te mere sužen da se više ne može sužavati a da se ne izgubi njegova generalnost, tj. da on time ne prestane obuhvatati sve moguće slučajeve koji su u skladu sa datim pogodbama (D).

Takav najuži mogući razmak predstavlja *najoštrije granice* za varijacije te količine; on, među ostalim širim razmacima, ima tu karakternu odliku da se nepoznata, zadovoljavajući pogodbe (D), ne samo neprestano nalazi u tome razmaku, već ona, u određenim specijalnim slučajevima, i dostiže granice tog razmaka.

Isto tako najuža moguća oblast varijacija za nepoznatu količinu predstavlja najoštrije granice za te varijacije; takav razmak daje minimum neodređenosti za nepoznatu promenljivu količinu.

Iz dosadašnjeg izlaganja vidi se da računanje sa brojnim razmacima ima jednu odliku koja mu u izvesnom pogledu daje i neku prevagu nad običnim računanjem sa brojevima: to je *apsolutna istinitost rezultata do kojih ono dovodi.* Ma koliko na prvi pogled to izgledalo paradoksalno, rezultati računanja sa razmacima izražavaju jedan apsolutno istinit fakt, dok su rezultati računanja sa brojevima samo više ili manje tačni, i samo u izuzetnim slučajevima apsolutno tačni. Kazati npr. da je $\sqrt{2}=1{,}4142$ nije tačno; kazati da vrednost $\sqrt{2}$ leži između brojeva 1,4141 i 1,4143 tačno je. I može se šta više tvrditi da, dok se pri računanju sa brojevima, iz potpuno određenih i tačnih odnosa dolazi do netačnih rezultata, dotle se u računu sa razmacima iz nepotpuno određenih odnosa dolazi do rezultata kojima se ne može poricati apsolutna istinitost.

9. BROJNI RAZMACI U ARITMETICI I ALGEBRI

Aritmetika i algebra su oblasti matematike u kojima se radi sa posebnim brojevima, preciziranim ili opštim. I u jednoj i u drugoj oblasti dešava se da:

1° ili su i sami podaci dati u obliku brojnih razmaka ili brojnih oblasti, pa se i rezultat računa dobija u takvom istom obliku;

2° ili su podaci dati u obliku tačnih (preciziranih ili opštih) brojeva, ali se rezultat, zbog tehničkih računskih teškoća, ili zbog toga što se ne traži velika tačnost, već samo približna vrednost ili ovlašan pojam o veličini nepoznate, rezultat dobija u obliku razmaka ili oblasti;

3° ili, po samoj svojoj prirodi, zadatak ima kao svoje tačno rešenje, ne jedan određen (preciziran ili opšti) broj, već jedan brojni razmak ili jednu brojnu oblast;

4° ili je zbog nedovoljnosti podataka, zadatak nepotpuno određen, ali se može utvrditi jedan razmak u kome se nepoznata, pored sve svoje neodređenosti, ipak mora nalaziti.

Tako npr. kad se izračunava kvadratni koren iz jednoga broja koji nije dat tačno, već jednim razmakom u kome se on nalazi, dobiće se i jedan razmak u kome se koren mora nalaziti.

Kad se pomoću logaritamskih tablica izračunava vrednost jednoga izraza u kome figurišu tačno dati brojevi, rezultat neće uopšte biti tačan broj, već će biti izračunat samo sa izvesnim brojem prvih decimala tačnih, tj. biće određen samo jedan razmak u kome se ta vrednost mora nalaziti.

Kad se pita za koje će vrednosti y kvadratna jednačina

$$x^2-2x+y^2=0,$$

rešena po x, imati svoje korene realne, tačno rešenje zadatka sastoji se u ovome: za ma koju vrednost y sadržanu u razmaku $(-1, +1)$.

Nepotpuno određeni zadatak da se izračuna logaritam dijagonale c, kad se zna logaritam zbira s kateta, rešen je time što se zna da se $\log c$ uvek nalazi u razmaku

$$\left(\log s-\frac{1}{2}\log 2,\ \log s\right).$$

Ovde će biti navedeno nekoliko zadataka takve vrste, koji imaju čestu upotrebu i u kojima se nepoznata aritmetička ili algebarska količina dobija u obliku brojnog razmaka.

A) Trinom drugog stepena. Na razmake, kao rešenja zadatka, nailazi se uopšte u zadacima u kojima se traže uslovi za realnost, pozitivnost ili negativnost nula datog polinoma; ili uslovi da bi se njegova vrednost, za vrednosti nezavisno promenljive sadržane u datom razmaku, i sama nalazila u jednome, tako isto, datom razmaku; ili uslovi da bi realne nule polinoma bile sadržane u istom razmaku, itd. Tako, kad koeficijenti polinoma sadrže kakav promenljiv parametar a, poznate teoreme iz teorije algebarskih jednačina, kao što su Rolleova, Sturmova, Descartesova, Fourierova i druge daju, kao rešenja zadataka takve vrste, razmake u kojima treba da se nalazi vrednost parametra.

Za najprostiji slučaj, za polinom drugog stepena, elementarna teorija kvadratne jednačine neposredno daje rešenja takvih zadataka. Zna se npr. da će trinom

$$ax^2+2bx+c \tag{9}$$

gde su a, b, c realni brojevi, imati obe svoje nule realne i suprotno označene, kad je

$$b^2-ac\geqslant 0 \qquad ac<0;$$

da bi npr. to bio slučaj sa trinomom

$$(a-5)x^2-4ax+a-2$$

potrebno je i dovoljno da se vrednost a nalazi u razmaku $(2,5)$, tj. da je

$$a=2+3\vartheta \qquad (0\leqslant\vartheta\leqslant 1).$$

Da bi trinom bio pozitivan sa sve vrednosti x, potrebno je i dovoljno da bude

$$b^2-ac<0 \qquad a>0;$$

da bi to npr. bio slučaj sa trinomom

$$(4-\alpha)x^2-3x+\alpha+4$$

potrebno je i dovoljno da se α nalazi u razmaku $\left(-\frac{\sqrt{55}}{2}, +\frac{\sqrt{55}}{2}\right)$, tj. da je

$$\alpha=\omega\frac{\sqrt{55}}{2} \qquad (-1\leqslant\omega\leqslant 1).$$

Na takav se zadatak svodi i ovaj: odrediti maksimum i minimum linearne funkcije

$$f(x,y)=ax+by+c \tag{10}$$

kad su promenljive x i y vezane kvadratnom relacijom

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0. \tag{11}$$

Ako se stavi da je

$$f(x,y)=\alpha$$

eliminacijom jedne promenljive, npr. y, dobija se jedna kvadratna jednačina po x

$$Mx^2+2Nx+P=0, \tag{12}$$

gde je koeficijenat P polinom drugog stepena po parametru α, koeficijenat N linearna funkcija od α, a koeficijenat M nezavisan od α. Zadatak se tada svodi na odredbu razmaka, u kome treba da se nalazi α da bi vrednosti promenljive x, određene jednačinom (12) bile realne; prednji kraj toga razmaka predstavljaće minimum a zadnji kraj maksimum funkcije $f(x,y)$. Uslov za to je da bude

$$N^2-MP>0, \qquad M>0, \tag{13}$$

pa pošto je N^2-MP polinom drugoga stepena po parametru α, to je zadatak sveden na malopređašnji.

Tako npr. kad se traži maksimum i minimum funkcije

$$f(x,y)=y-2x,$$

pri čemu su promenljive x i y vezane relacijom

$$36x^2+16y^2-9=0,$$

eliminacija promenljive y dovodi do kvadratne jednačine

$$100x^2+64\alpha x+16\alpha^2-9=0.$$

Uslovi (13) svode se na

$$(5+4\alpha)(5-4\alpha)>0$$

što znači da α treba da se nalazi u razmaku $\left(-\frac{5}{4}, +\frac{5}{4}\right)$. Minimum funkcije $f(x, y)$ je, dakle, $-\frac{5}{4}$, a njen maksimum $\frac{5}{4}$; za ma kakvu realnu vrednost x biće

$$f(x, y)=\frac{5}{4}\omega \qquad (-1 \leqslant \omega \leqslant 1).$$

Ovakav način određivanja maksimuma i minimuma funkcija, koji ne zahteva upotrebu izvoda kao uobičajenog načina za to određivanje, nije vezan samo za polinome prvog i drugog stepena. Kadgcd ima da se odredi maksimum ili minimum jedne funkcije

$$f(x, y, z, \ldots)$$

u kojoj su promenljive $x, y, z, \ldots$ vezane datim relacijama čiji je broj za jedinicu manji od broja tih promenljivih, treba funkciju f označiti sa α, pa iz skupa jednačina eliminisati sve promenljive osim α i još jedne od njih, npr. x. Ako je

$$\varphi(x, \alpha)=0 \tag{14}$$

rezultat eliminacije, zadatak maksimuma i minimuma svodi se na određivanje tačnih razmaka u kojima treba da se nalazi vrednost α da bi koreni jednačine (14) bili realni. Ako je (α_1, α_2) takav jedan razmak broj α_1 je jedan minimum, a broj α_2 jedan maksimum funkcije f sa datim vezama. Svaki takav razmak daće po jedan minimum i po jedan maksimum funkcije.

Na sličan se način rešava i zadatak: za koje će vrednosti x trinom (9) neprestano imati vrednosti sadržane u datome razmaku (A, B)?

Traži se da bude

$$A<ax^2+2bx+c<B,$$

tj. da je u isto vreme

$$ax^2+2bx+c-A>0 \qquad ax^2+2bx+c-B<0. \tag{15}$$

Prema znacima količina

$$a, \quad b^2-a(c-A), \quad b^2-a(c-B)$$

jedna od nejednačina (15) biće zadovoljena za vrednosti x koje se nalaze u jednom izvesnom razmaku (p, q) koji može biti sastavljen i iz dva razmaka, a druga za vrednosti x koje se nalaze u jednom izvesnom razmaku (p', q'). Uslove (15) zadovoljavaće samo vrednosti x sadržane u zajedničkom delu razmaka (p, q) i (p', q'); tražene vrednosti x jesu one koje se nalaze u tome zajedničkom razmaku.

Tako npr. da bi se vrednost trinoma

$$x^2-14x+50$$

nalazila u razmaku $(5, 26)$, potrebno je i dovoljno da bude u isti mah

$$x^2-14x+45>0, \qquad x^2-14x+24<0.$$

Prva se nejednačina može napisati u obliku

$$(x-5)(x-9)>0$$

i zadovoljena je za vrednosti x koje su sadržane bilo u razmaku $(-\infty, 5)$, bilo u razmaku $(9, +\infty)$.

Druga nejednačina može se napisati u obliku

$$(x-2)(x-12)<0$$

i zadovoljena je za sve vrednosti x sadržane u razmaku $(2,12)$. Zajednički deo razmaka (p, q) i (p', q') su dva razmaka $(2,5)$ i $(9,12)$, tražene vrednosti x su one sadržane bilo u prvom, bilo u drugom od ta dva razmaka.

Kad je dat trinom trećeg stepena, uvek svodljiv na oblik

$$x^3+px+q, \tag{16}$$

potreban i dovoljan uslov za realnost njegovih nula je iskazan nejednačinom

$$4p^3+27q^2<0. \tag{17}$$

Kad god je leva strana nejednačine (17) kakav trinom drugog stepena po jednom parametru α, uslov realnosti se svodi na zadatak gornje vrste i rešenje mu se sastoji u odredbi razmaka za taj parametar.

Slično se rešenje dobiva i u slučaju polinoma četvrtog stepena.

B) Koren realnog broja. Neka je x takav jedan broj da je $1+x>0$. Prema binomnom obrascu očevidno je

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx,$$

gde je jednakost postignuta ili za $x=0$, ili za $n=0$, ili za $n=1$. Stavivši da je $x=\frac{h}{n}$, dobija se da je

$$\left(1+\frac{h}{n}\right)^n \geqslant 1+h,$$

pa, dakle,

$$1 \leqslant \sqrt[n]{1+h} \leqslant 1+\frac{h}{n} \tag{18}$$

za ma kakav pozitivan broj h.

Neka je sad z jedan ma koji broj veći od jedinice, pa se iz (18), stavivši da je $1+h=z$ dobija da je

$$1 \leqslant \sqrt[n]{z} \leqslant 1+\frac{z-1}{n},$$

pa, dakle,

$$\sqrt[n]{z}=1+\frac{\vartheta}{n}(z-1). \tag{19}$$

Ako je, pak, z kakav pozitivan broj manji od jedinice, uzevši u nejednačini (18) recipročne vrednosti (čime nejednačina menja smisao), dobija se

$$\frac{1}{1+\frac{h}{n}} \leqslant \sqrt[n]{\frac{1}{1+h}} \leqslant 1,$$

pa ako se stavi da je

$$\frac{1}{1+h}=z<1, \quad \text{odakle je } h=\frac{1-z}{z},$$

dobija se da je

$$\frac{1}{1+\frac{1-z}{nz}} \leqslant \sqrt[n]{z} \leqslant 1$$

prema čemu je

$$\sqrt[n]{z}=1-\frac{1-z}{1+(n-1)z}\vartheta. \tag{20}$$

Iz obrasca (19) i (20) se npr. jasno vidi da $\sqrt[n]{z}$ teži jedinici, kad n beskrajno raste. Obrasci su od koristi za približnu odredbu n-tog korena datog broja.

C) Zbir naizmeničnog opadajućeg reda. To je red

$$S=u_0-u_1+u_2-u_3+\cdots \tag{21}$$

u kome su članovi u_k svi pozitivni ili svi negativni i $|u_k|<|u_{k-1}|$, težeći nuli kad k beskrajno raste.

Ako se stavi da je

$$S_n=u_0-u_1+u_2-u_3+\cdots+(-1)^n u_n,$$

zna se da je

$$S_{2k+1}<S<S_{2k}$$

za svaku vrednost $k=0, 1, 2, \ldots$ indeksa k. Prema tome je

$$S=S_{2k+1}+\vartheta(S_{2k}-S_{2k+1}),$$

a pošto je

$$S_{2k} - S_{2k+1} = u_{2k+1},$$

to je

$$S = S_{2k+1} + \vartheta \cdot u_{2k+1}, \tag{22}$$

pa ma koju vrednost imao indeks k. Pošto članovi reda u_k neprestano i beskrajno opadaju kad indeks raste, to će amplituda varijacije zbira S neprestano i beskrajno opadati sa indeksom k.

Iz (22) se dobija obrazac

$$S_{2k+1} = S - \vartheta \cdot u_{2k+1},$$

koji daje, u obliku brojnog razmaka, zbir S_{2k+1} izražen pomoću zbira S i člana u_{2k+1}.

I primer: iz obrasca

$$\frac{1}{e} = 0{,}36787 \cdots = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots$$

dobija se, na gornji način da je

$$\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{8!} - \frac{1}{9!} + \frac{\vartheta}{9!}$$

$$= 0{,}367879 + \vartheta \cdot 0{,}000002,$$

što daje broj $\frac{1}{e}$ sa 5 decimala tačno.

D) Količnik dva zbira. Neka je $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jedan niz realnih brojeva ma kakvog znaka; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ i $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ dva niza realnih pozitivnih brojeva. Označimo sa N i M najmanji i najveći od brojeva

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n} \tag{23}$$

vodeći računa i o njihovim znacima. Može se dokazati da je uvek

$$\frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_n b_n} = N + \vartheta (M - N). \tag{24}$$

Jer, ma kakvi bili znaci brojeva a_k, uvek je

$$N \leqslant \frac{a_k}{b_k} \leqslant M,$$

pa, dakle, i

$$N\lambda_k \leqslant \frac{\lambda_k a_k}{b_k} \leqslant M\lambda_k,$$

prema čemu je

$$N\lambda_k b_k \leqslant \lambda_k a_k \leqslant M\lambda_k b_k.$$

Stavljajući uzastopce da je $k=1, 2, \ldots n$, sabirajući tako dobivene nejednačine i podelivši rezultat zbirom

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_n b_n$$

nalazi se da se vrednost razlomka na levoj strani jednačine (24) nalazi između N i M, što dokazuje gornje tvrđenje.

Uzevši da je

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1,$$

vidi se da je

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = N + \vartheta (M - N). \tag{25}$$

U slučaju dva para brojeva a_1, a_2, i b_1, b_2, od kojih je prvi ma koga znaka, vidi se da je

$$\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = n + \vartheta (m - n),$$

gde je n manji, a m veći broj $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$.

Izraz na levoj strani jednačine (25) naziva se *medijana* razlomka (23); kao što se vidi, njena se vrednost izračunava u obliku jednog brojnog razmaka pomoću najveće i najmanje vrednosti tih razlomaka.

Od interesa je npr. navesti da se medijana dvaju razlomaka

$$n = \frac{333}{106} \text{ i } m = \frac{22}{7},$$

a to je broj

$$\frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots,$$

tek u sedmom decimalu razlikuje od broja

$$\pi = 3{,}1415926\ldots,$$

tako, da se može uzeti da je

$$\pi = \frac{355}{113}$$

sa šest decimala tačno. Tačna vrednost broja π može se predstaviti u obliku

$$\pi = n + \vartheta(m - n) = \frac{333}{106} + \frac{\vartheta}{1142}.$$

Kao drugu primenu uzmimo da je

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = x, \ \lambda_3 = x^2, \ldots, \ \lambda_n = x^{n-1} \quad (x > 0)$$

gde izložilac n može i beskrajno rasti. Ako se stavi da je

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1} &= f(x), \\ b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^{n-1} &= \varphi(x), \end{aligned} \tag{26}$$

gde su koeficijenti a_k realni i ma kakvog znaka, a b_k realni i pozitivni, obrazac (24) pokazuje da je

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = N + \vartheta(M - N), \tag{27}$$

gde N označuje najmanji, a M najveći od brojeva

$$\frac{a_0}{b_0}, \ \frac{a_1}{b_1}, \ldots, \ \frac{a_n}{b_n}.$$

Tako npr. ma kolika bila pozitivna vrednost x, vrednost racionalne funkcije

$$\frac{2 + 5x + 3x^2 + x^3}{4 + 7x + 4x^2 + 8x^3}$$

uvek leži između $\frac{1}{8}$ i $\frac{3}{4}$.

E) Odnos između zbira i proizvoda. Neka je

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

jedan niz pozitivnih brojeva, pa označimo da je

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

$$P = (1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \cdots (1 + a_n).$$

Pošto je

$$(1 + a_1)(1 + a_2) = 1 + a_1 + a_2 + a_1 a_2,$$

to je

$$(1 + a_1)(1 + a_2) > 1 + a_1 + a_2.$$

Množeći ovu nejednačinu sa $1 + a_3$, dobija se

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) > (1 + a_1 + a_2)(1 + a_3) > 1 + a_1 + a_2 + a_3.$$

Produžujući i dalje tako dolazi se do nejednačine

$$P > 1 + S. \tag{28}$$

Sa druge strane, iz obrasca

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

vidi se da je za pozitivne vrednosti x uvek

$$e^x > 1 + x, \tag{29}$$

pa ako se na mesto x stavljaju uzastopce vrednosti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i dobivene nejednačine izmnože među sobom, dobija se

$$P < e^S, \tag{30}$$

pa je, dakle,

$$1 + S < P < e^S,$$

što znači da je

$$P = (1 + S) + \vartheta (e^S - S - 1). \tag{31}$$

Stavimo sada da je

$$1 + a_k = b_k,$$

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = T,$$

$$b_1 \cdot b_2 \cdots b_n = Q,$$

pa se iz (31) dobija jednačina

$$Q = (T - n + 1) + \vartheta (e^{-n} e^T - T + n - 1), \tag{32}$$

koja vezuje zbir i proizvod ma kolikoga broja pozitivnih brojeva.

Primetimo da nejednačina (29) važi i za ma kakav realan broj x; to se vidi iz toga što funkcija

$$e^x - x - 1$$

ima svoj minimum za $x = 0$, i taj je minimum jednak nuli, što znači da je za sve realne vrednosti x

$$e^x - x - 1 \geqslant 0.$$

U slučaju kad su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni brojevi manji od jedinice, može se na sledeći način dobiti jedan odnos zbira i proizvoda

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

$$Q = (1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n).$$

Pošto je

$$(1 - a_1)(1 - a_2) = 1 - (a_1 + a_2) + a_1 a_2,$$

to je

$$(1 - a_1)(1 - a_2) > 1 - (a_1 + a_2).$$

Množenjem sa pozitivnim brojem $1-a_3$, dobija se

$$(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)>[1-(a_1+a_2)](1-a_3)>1-(a_1+a_2+a_3).$$

Produžujući tako i dalje, dolazi se do nejednačine

$$Q>1-S, \tag{33}$$

a pošto je $Q<1$, to se dobija da je

$$1-S<Q<1, \tag{34}$$

prema čemu je

$$Q=(1-S)+\vartheta S, \tag{35}$$

što se može napisati i u obliku

$$Q=1+\lambda S, \tag{36}$$

gde je λ jedan broj koji uvek leži između -1 i 0.

Naposletku, za vrednosti x sadržane u razmaku $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, važi i sledeći rezultat.

Lako se je uveriti da je u tome razmaku neprestano

$$1-2x\leqslant e^{-2x}\leqslant 1-x;$$

ako je, dakle $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jedan niz brojeva sadržanih u razmaku $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ i ako se označi da je

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n,$$

zbir

$$T=e^{-2a_1}+e^{-2a_2}+\cdots+e^{-2a_n}$$

nalaziće se u razmaku

$$(n-2S_n, \quad n-S_n),$$

tj. biće

$$T=n-\lambda S_n \qquad (1\leqslant\lambda\leqslant 2).$$

Tako, neka je

$$f(x)=0$$

jedna algebarska jednačina n-tog stepena čiji su koreni $a_1, a_2, \ldots, a_n$ svi realni; ona se podesnom smenom

$$x=pz+q$$

uvek može svesti na jednu jednačinu

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n=0$$

čiji će koreni $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ biti svi pozitivni i manji od $\frac{1}{2}$. Gornji rezultat pokazuje da je

$$e^{-2\beta_1}+e^{-2\beta_2}+\cdots+e^{-2\beta_n}=n-\frac{\lambda a_{n-1}}{a_n} \qquad (1\leqslant\lambda\leqslant 2),$$

a iz toga obrasca lako je preći na obrazac koji će važiti za korene prvobitne jednačine.

F) Zbir proizvoda. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i $b_1\, b_2, \ldots, b_n$ dva niza realnih brojeva ma koga znaka, pa označimo da je

$$P=a_1 b_1+a_2 b_2+\cdots+a_n b_n.$$

Iz obrazaca

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}b_i^2+2P,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}b_i^2-2P,$$

dobija se da je

$$P=\frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2-\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2\right].$$

Označimo:

1° sa N i M najmanju i najveću apsolutnu vrednost zbirova

$$a_1+b_1, \quad a_2+b_2, \ldots, \quad a_n+b_n,$$

2° sa N' i M' najmanju i najveću apsolutnu vrednost razlika

$$a_1-b_1, \quad a_2-b_2, \ldots, \quad a_n-b_n,$$

pa će biti očevidno

(37) $$P\leqslant\frac{n}{4}(M^2-N'^2), \qquad P\geqslant\frac{n}{4}(N^2-M'^2).$$

Zbir produkata P uvek se, dakle, nalazi u razmaku označenom nejednačinama (37) prema čemu je

$$P=\frac{n}{4}[N^2-M'^2+\vartheta(M^2+M'^2-N^2-N'^2].$$

Znak jednakosti u (37) imaće se kad je za sve indekse i i j

$$a_i+b_i=a_j+b_j \quad \text{i} \quad a_i-b_i=a_j-b_j,$$

tj. kada su svi brojevi a_k među sobom jednaki, a tako isto i svi brojevi b_k.

Međutim se za P može imati jedna gornja granica i na sledeći način. Primetimo da izraz

$$(a_1+b_1\lambda)^2+(a_2+b_2\lambda)^2+\cdots+(a_n+b_n\lambda)^2$$

ne može biti jednak nuli ni za kakvu realnu vrednost λ, pošto su mu svi članovi pozitivni. To znači da i kvadratna jednačina

$$A\lambda^2+2B\lambda+C=0,$$

gde je

$$A=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2,$$

$$C=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2,$$

$$B=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=P,$$

nema realnih korena. To pokazuje da je

$$B^2-AC<0, \quad \text{tj.}$$

$$P^2<(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$$

što se naziva Cauchyeva nejednačina.

Prema tome i prvoj od nejednačina (37) nalazi se da se zbir P uvek nalazi u razmaku

$$\left(\frac{n}{4}(M^2-N'^2),\quad \sqrt{AC}\right).$$

Pomenućemo samo da je dokazan i ovaj rezultat u pogledu odnosa između zbirova A, C, P: neka su α, β, G, H četiri takva pozitivna broja,

1° da je $\alpha<G$, $\beta<H$,

2° da svi posmatrani brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ leže u razmaku (α, G),

3° da svi posmatrani brojevi $b_1, b_2 \ldots, b_n$ leže u razmaku (β, H). Tada se vrednost proizvoda AC uvek nalazi u razmaku $(P^2, \lambda P^2)$, gde je λ

$$\lambda=\frac{(\alpha\beta+GH)^2}{4\alpha\beta GH},$$

tako da je

$$AC=\left[1+\vartheta\frac{(\alpha\beta-GH)^2}{4\alpha\beta GH}\right]P^2.$$

G) Aritmetička sredina. Ako se u obrascu (24) uzme da je

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1, \quad b_1=b_2=\cdots=b_n=1,$$

dobija se da je

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=N+\vartheta(M-N),$$

gde je N i M najmanji i najveći među brojevima $a_1, a_2, \ldots, a_n$, što znači da se aritmetička sredina jednoga niza brojeva uvek nalazi u razmaku između najmanjeg i najvećeg od tih brojeva. Granice toga razmaka su dostignute u slučaju kad su svi brojevi a_k među sobom jednaki, tada je $M=N$ i obe se granice slivaju u jednu.

Ali se ista aritmetička sredina može izraziti kao razmak još na jedan način; razmak ima tu dobru stranu što je uži od malopređašnjeg, pa dakle i probitačniji.

Primetimo da je za ma kakve realne brojeve a i b izraz

$$\frac{(a+b)+|a-b|}{2}$$

jednak većem od ta dva broja a i b (jer kad je $a>b$, on je jednak broju a, a kad je $a<b$ on je jednak broju b, poklapajući se sa oba ta broja u slučaju kad su oni među sobom jednaki).

Kad je M najveći među brojevima $a_1, a_2, \ldots, a_n$, onda je prema tome za sve indekse i i j

$$\frac{(a_i+a_j)+|a_i-a_j|}{2} \leqslant M,$$

jer je leva strana jednaka većem od brojeva a_i i a_j, a nijedan od ovih nije veći od M. Ako se u toj nejednačini indeks j ostavi nepromenjen, a stavlja se uzastopce da je $i=1, 2, \ldots, n$, pa se dobijene nejednačine među sobom saberu, dobija se da je

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i+a_j)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|a_i-a_j| \leqslant nM$$

ili

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i+\frac{n}{2}a_j+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|a_i-a_j| \leqslant nM.$$

Stavljajmo sad u ovoj poslednjoj nejednačini uzastopce $j=1, 2, \ldots, n$, i saberimo dobivene nejednačine među sobom, pa se dobija da je

$$\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i+\frac{n}{2}\sum_{j=1}^{n}a_j+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_i-a_j| \leqslant n^2M.$$

Kad se zbir od prva dva zbira u ovoj nejednačini podeli sa n^2, dobija se aritmetička sredina

$$A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

brojeva a_k; ako se, dakle, kratkoće radi, stavi da je

$$\frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_i-a_j|=R, \tag{38}$$

dobija se da je

$$A+R\leqslant M,$$

tj.

$$A\leqslant M-R \tag{39}$$

što daje jednu gornju granicu za A.

Da bismo dobili i jednu donju granicu, primetimo da je za ma kakve realne brojeve a i b izraz

$$\frac{(a+b)-|a-b|}{2}$$

jednak manjem od ta dva broja a i b. Kad je N najmanji među brojevima $a_1, a_2, \ldots, a_n$, onda je, dakle, za sve indekse i i j

$$\frac{(a_i+a_j)-|a_i-a_j|}{2}\geqslant N,$$

jer je leva strana jednaka manjem od brojeva a_i i a_j, a nijedan od njih nije manji od N. Iz te se nejednačine, na isti način kao maločas, dolazi do nejednačine

$$A-R\geqslant N,$$

tj.

$$A\geqslant N+R, \tag{40}$$

što daje jednu donju granicu za A.

Nejednačine (39) i (40) dovode tada do ovog rezultata.

Ako se sa S označi zbir apsolutnih vrednosti svih razlika a_i-a_j (računajući razlike a_i-a_j i a_j-a_i kao različne jedna od druge), *sa N i M najmanji i najveći među brojevima a_k, aritmetička sredina A brojeva a_k uvek leži u razmaku*

$$\left(N+\frac{S}{2n^2},\quad M-\frac{S}{2n^2}\right).$$

Aritmetička sredina biće, dakle, izražena obrascem

$$A=\left(N+\frac{S}{2n^2}\right)+\vartheta\left(M-N-\frac{S}{n^2}\right).$$

Kad su vrednosti a_k jednake među sobom, biće

$$S=0,\quad M=N$$

i razmak A svodi se na zajedničku vrednost brojeva a_k.

H) Odnos između aritmetičke, geometrijske i harmonijske sredine dva broja. Neka su a i b dva pozitivna broja, i označimo sa A, G, H njihovu aritmetičku sredinu

$$A=\frac{a+b}{2},$$

njihovu geometrijsku sredinu

$$G=\sqrt{ab}$$

i njihovu harmonijsku sredinu

$$H=\frac{2\,ab}{a+b}.$$

Identičnost

(41)
$$ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

pokazuje da je

(42)
$$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

tj.

$$G\leqslant A,$$

gde je jednakost dostignuta samo kad je $a=b$.

Sa druge strane, pošto je identički

(43)
$$G^2=AH,$$

to se iz nejednačine $G\leqslant A$, dobija da je

$$G^2=AH\geqslant GH$$

prema čemu je

$$G\geqslant H.$$

Otuda nejednačina

(44)
$$H\leqslant G\leqslant A,$$

a odatle je

(45)
$$G=H+\vartheta(A-H)$$

ili

(46)
$$\sqrt{ab}=\frac{2\,ab}{a+b}+\frac{\vartheta}{2}\,\frac{(a-b)^2}{a+b}.$$

Taj obrazac daje $\sqrt{ab}$ u obliku jednoga razmaka čije su granice racionalne funkcije od a i b.

Obrazac (45) je praktički upotrebljiv za izračunavanje kvadratnog korena jednog datog broja sa kakvom se hoće približnošću. Ako se stavi da je

$$(47)\qquad \begin{aligned} A&=\frac{a+b}{2}, & H&=\frac{2ab}{a+b}, \\ A_1&=\frac{A+H}{2}, & H_1&=\frac{2AH}{A+H}, \\ A_2&=\frac{A_1+H_1}{2}, & H_2&=\frac{2A_1H_1}{A_1+H_1}, \end{aligned}$$

nalazi se da se u $\sqrt{ab}$, na mesto a i b, mogu uzeti A_{k-1} i H_{k-1}, čime obrazac (43) postaje

$$(48)\qquad ab=G^2=AH=A_1H_1=A_2H_2=\cdots$$

tako, da se prema obrascu (45) dobija da je

$$(49)\qquad G=H_k+\vartheta(A_k-H_k)$$

pa ma koliki bio indeks k. Međutim, iz identičnosti

$$A_k-H_k=(A_{k-1}-H_{k-1})\frac{A_{k-1}-H_{k-1}}{2(A_{k-1}+H_{k-1})}$$

vidi se da je

$$A_k-H_k<A_{k-1}-H_{k-1},$$

što znači da član $\vartheta(A_k-H_k)$ u obrascu (49) postaje sve manji ukoliko je indeks k veći, tj. ukoliko se više produže računske radnje označene u obrascima (47). Produživši ih dovoljno, taj se član može smanjiti koliko se hoće, tako da se za k dovoljno veliko može uzeti da je

$$\sqrt{ab}=H_k$$

sa približnošću koja se traži.

Tako npr. ako se uzme $a=1$, $b=2$, dobija se uzastopce

$$\begin{aligned} A&=\frac{3}{2}=1{,}5, & H&=\frac{4}{3}=1{,}3\ldots, \\ A_1&=\frac{17}{12}=1{,}416\ldots, & H_1&=\frac{24}{17}=1{,}411\ldots, \\ A_2&=\frac{577}{408}=1{,}414215\ldots, & H_2&=\frac{816}{577}=1{,}414211\ldots; \end{aligned}$$

tako se dobija

$$\sqrt{2} = A_2 + \vartheta (A_2 - H_2) = 1{,}414211 + \vartheta \cdot 0{,}000004,$$

sa pet prvih decimala tačno.

I) Odnos između zbira brojeva i zbira njihovih kvadrata. Neka je $a_1, a_2 \ldots, a_n$ jedan niz realnih pozitivnih brojeva, pa označimo da je

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

$$R = a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2.$$

Poznata algebarska identičnost, koja važi za sve realne brojeve a_k,

$$nR - S^2 = \sum (a_i - a_j)^2, \tag{50}$$

pokazuje da je

$$nR - S^2 \geqslant 0, \tag{51}$$

odakle je

$$R \geqslant \frac{S^2}{n},$$

gde je jednakost dostignuta samo kad je

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a.$$

A pošto je u isto vreme, ali samo za pozitivne vrednosti a_n, očevidno

$$R \leqslant S^2,$$

(gde je jednakost postignuta onda kad su svi a_k, osim jednoga od njih, jednaki nuli), to se dobija da je

$$\frac{S}{\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{R} \leqslant S, \tag{52}$$

odakle je

$$\sqrt{R} = \frac{1 + \vartheta (\sqrt{n} - 1)}{\sqrt{n}} S \tag{53}$$

što se može napisati u obliku

$$\sqrt{R} = \lambda S, \tag{54}$$

gde je λ jedan broj koji uvek leži između $\frac{1}{\sqrt{n}}$ i 1.

U slučaju kad je $n = 2$, nejednačina (51) svodi se na

$$2(a^2 + b^2) - (a + b)^2 \geqslant 0$$

što rezultira iz identičnosti

$$2(a^2+b^2)-(a+b)^2=(a-b)^2;$$

jednačina (54) svodi se na

$$\sqrt{a^2+b^2}=\lambda(a+b), \tag{55}$$

gde je λ jedan broj koji leži između 0,7071 i 1. Donja granica je dostignuta kad je $a=b$, a gornja kad je jedan od brojeva a i b jednak nuli.

U slučaju $n=3$ dobija se da je

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\lambda(a+b+c), \tag{56}$$

gde je λ jedan broj koji leži između 0,5774 i 1.

Tako npr. razlika između logaritama brojeva $\sqrt{a^2+b^2}$ i $a+b$ ne iznosi nikad više od $\frac{1}{2}\log 2$; za logaritme po osnovici 10 ona ne iznosi više od 0,15052. Razlika između logaritama brojeva $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ i $a+b+c$ ne iznosi nikad više od 0,23856. Te su maksimalne razlike dostignute, u prvom slučaju kad je $a=b$, a drugom kad je $a=b=c$.

J) Odnos između zbira brojeva i zbira njihovih k-tih stepena. Neka je a_1, $a_2, \ldots, a_n$ jedan niz pozitivnih brojeva, pa označimo da je

$$S=a_1+a_2+\ldots+a_n,$$

$$U=a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k.$$

Uočimo funkciju od n pozitivnih promenljivih količina x_i

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=n^{k-1}(x_1^k+\ldots+x_n^k)-(x_1+\ldots+x_n)^k,$$

gde je k jedan ma kakav realan broj. Pomoću teorije maksimuma i minimuma funkcija koje zavise od više promenljivih količina, nalazi se da

1° kad je $k>1$, funkcija F postaje minimum za

$$x_1=x_2=\ldots=x_n \tag{57}$$

i vrednost tog minimuma je nula; funkcija ima, dakle, pozitivnu vrednost za svaki drugi skup vrednosti x_i;

2° kad je $k<1$, funkcija F postaje maksimum za (57) i vrednost toga maksimuma je nula; funkcija ima, dakle, negativnu vrednost za svaki drugi skup vrednosti x_i,

3° kad je $k=1$, funkcija F se identički svodi na nulu.

Prema tome, ako se stavi da je

$$\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^k}{x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k}=\varrho,$$

biće

$$\varrho \leqslant n^{k-1} \quad \text{za } k>1,$$

$$\varrho \geqslant n^{k-1} \quad \text{za } k<1,$$

$$\varrho = 1 \quad \text{za } k=1.$$

Pored toga očevidno je da je

$$\varrho \geqslant 1 \text{ za } k>1 \text{ i } \varrho \leqslant 1 \text{ za } k<1,$$

gde je jednakost dostignuta kad su svi x_i, osim jednoga od njih, jednaki nuli.

Iz toga izlazi da vrednost ϱ uvek leži između 1 i n^{k-1}; prva je granica dostignuta (za ma kakvu vrednost k) kad su svi x_i, osim jednoga, jednaki nuli, ili (za ma kakve vrednosti x_i) kad je $k=1$; druga je granica dostignuta kad su svi x_i među sobom jednaki.

Za pozitivne vrednosti k je, dakle,

(58) $$\frac{S^k}{n^{k-1}} \leqslant U \leqslant S^k$$

prema čemu je

(59) $$U = S^k\left[\frac{1}{n^{k-1}} + \vartheta\left(1-\frac{1}{n^{k-1}}\right)\right]$$

ili još

(60) $$U = \lambda S^k,$$

gde je λ jedan broj koji uvek leži između $\frac{1}{n^{k-1}}$ i 1.

Prema tome je npr.

(61) $$\log\sqrt[k]{n} = \log S + \frac{k-1}{k}\vartheta \log n.$$

K) Odnos između aritmetičke sredine brojeva i aritmetičke sredine njihovih funkcija. Neka je

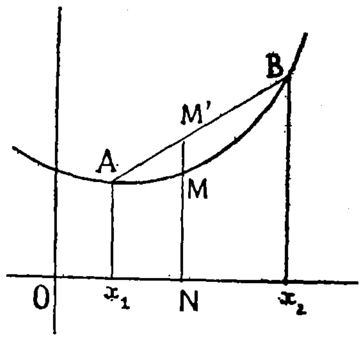
$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

jedan niz pozitivnih brojeva sadržanih u datome razmaku (a, b), a $f(x)$ jedna pozitivna *konveksna* funkcija u razmaku (a, b), tj. funkcija čiji je drugi izvod pozitivan za vrednosti x u tome razmaku. Označimo sa

(62) $$\mu_n = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}, \qquad M_n = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}$$

aritmetičku sredinu brojeva x_i i aritmetičku sredinu njihovih funkccija $f(x_i)$.

Na slici koja predstavlja krivu $y=f(x)$ konveksnu prema osi Ox vidi se da, ako se uoči jedna tačka M na konveksnome luku krive, čija se apscisa ON



nalazi između apscisa x_1 i x_2, mora biti

$$MN < NM'. \tag{63}$$

Kao što je poznato iz analitičke geometrije, jedna ma koja tačka M' koja se nalazi na tetivi AB između tačaka A i B, ima za koordinate

$$ON=\frac{\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2}{\lambda_1+\lambda_2}, \qquad M'N=\frac{\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)}{\lambda_1+\lambda_2},$$

gde su λ_1 i λ_2 dva pozitivna broja, i ma kakva bila ta dva pozitivna broja, tačka M' uvek leži između tačaka A i B.

Nejednačina (63) izražava tada da je

$$f\left(\frac{\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)\leqslant\frac{\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)}{\lambda_1+\lambda_2} \tag{64}$$

za sve tačke x_1 i x_2 u razmaku konveksnosti funkcije $f(x)$ i za sve pozitivne brojeve λ_1 i λ_2.

Uzmimo sad za λ_1 i λ_2 brojeve

$$\lambda_1=1, \qquad \lambda_2=n-1,$$

za x_2 vrednost

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1},$$

a za x_1 vrednost x_n, pa će gornja nejednačina postati

$$f(\mu_n)\leqslant\frac{f(x_n)+(n-1)f(\mu_{n-1})}{n},$$

odakle je

$$nf(\mu_n)\leqslant f(x_1)+(n-1)f(\mu_{n-1}).$$

Smenjujući u toj nejednačini uzastopce n sa $n-1$, $n-2, \ldots$ dobija se niz nejednačina

$$nf(\mu_n) \leqslant f(x_n) + (n-1) f(\mu_{n-1}),$$

$$(n-1) f(\mu_{n-1}) \leqslant f(x_{n-1}) + (n-2) f(\mu_{n-2}),$$

$$(n-2) f(\mu_{n-2}) \leqslant f(x_{n-2}) + (n-3) f(\mu_{n-3}),$$

$$\vdots$$

čijim se sabiranjem dobija da je

$$nf(\mu_n) \leqslant f(x_n) + f(x_{n-1}) + \cdots + f(x_1),$$

što pokazuje da je

(65) $$f(\mu_n) \leqslant M_n.$$

Na taj način je nađena jedna donja granica za aritmetičku sredinu M_n. Da bismo joj odredili i jednu gornju granicu, stavimo u (64) da je

$$x_1 = x + y, \quad x_2 = 0, \quad \frac{x}{x+y} = \frac{\lambda}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

pretpostavljajući da su x i y pozitivni. Nejednačina (64) svodi se tada na

(66) $$f(x) \leqslant \frac{x f(x+y)}{x+y} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} f(0).$$

Ako bismo sad opet u (64) stavili da je

$$x_2 = x + y, \quad x_1 = 0, \quad \frac{y}{x+y} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

dobili bismo da je

(67) $$f(y) \leqslant \frac{y f(x+y)}{x+y} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} f(0).$$

Sabiranjem nejednačina (66) i (67) dobija se da je

(68) $$f(x) + f(y) \leqslant f(x+y) + f(0).$$

Posmatrajmo sada izraz

(69) $$\begin{aligned} P &= f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \\ &= [f(x_1) + \cdots + f(x_{n-2})] + [f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \end{aligned}$$

Prema (68) biće

$$[f(x_{n-1}) + f(x_n)] \leqslant f(x_{n-1} + x_n) + f(0),$$

pa, dakle, prema (69)

$$P \leqslant [f(x_1) + \cdots + f(x_{n-3})] + [f(x_{n-2}) + f(x_{n-1} + x_n)] + f(0).$$

Prema (68) biće opet

$$[f(x_{n-2}) + f(x_{n-1} + x_n)] \leqslant f(x_{n-2} + x_{n-1} + x_n) + f(0),$$

što čini da će biti

$$P \leqslant [f(x_1) + \cdots + f(x_{n-4})] + [f(x_{n-3}) + f(x_{n-2} + x_{n-1} + x_n)] + 2f(0).$$

Produživši tako i dalje dok se ne iscrpe svi indeksi n, dobija se da je

$$P \leqslant f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (n-1)f(0),$$

odakle je posle deobe sa n

$$M_n \leqslant \frac{f(n\mu_n) + (n-1)f(0)}{n},$$

što daje jednu gornju granicu za aritmetičku sredinu M_n.

Time se dolazi do ovog opšteg odnosa između aritmetičkih sredina M_n *i* μ_n: *uvek je*

(70) $$f(\mu_n) \leqslant M_n \leqslant \frac{f(n\mu_n) + (n-1)f(0)}{n}.$$

Odnos pretpostavlja da su vrednosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivne, a funkcija $f(x)$ pozitivna i konveksna za sve vrednosti x u razmaku između najmanje i najveće među vrednostima x_i.

Razmak ima, kao asimetrični normalni računski predstavnik, izraz

(71) $$M = f(\mu_n) + \vartheta\varphi(\mu_n),$$

gde je

(72) $$\varphi(\mu_n) = \frac{f(n\mu_n) + (n-1)f(0) - nf(\mu_n)}{n}.$$

Iz (70) se vidi da se vrednost

$$f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

uvek nalazi u razmaku između dveju vrednosti

(73) $$[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] - (n-1)f(0) = A$$

i $$\frac{f(nx_1) + f(nx_2) + \cdots + f(nx_n)}{n} = B$$

i za ma koju funkciju pomenute vrste ove granice razmaka mogu stvarno biti dostignute. Kad se ovaj razmak izrazi u obliku

(74) $$f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = A + \vartheta(B - A),$$

dobija se jedna vrsta adicione teoreme za funkciju $f(x)$; teorema izražava, u obliku brojnog razmaka, funkciju zbira pomoću funkcije sabiraka umnoženih jednim istim stalnim brojem n.

Tako se isto iz (70) vidi i to, da vrednost simetrične funkcije

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$$

od n pozitivnih brojeva čiji je zbir s, leži uvek u razmaku između dveju vrednosti

(75) $$nf\left(\frac{s}{n}\right)=C$$

i $$f(s)+(n-1)f(0)=D,$$

tako da je

(76) $$f(x_1)+\cdots+f(x_n)=C+\vartheta(D-C);$$

granice razmaka su takođe dostignute u pomenutim slučajevima, pa ma kakva bila funkcija $f(x)$ posmatrane vrste.

Nejednačine (70) određuju razmak, u kome će se nalaziti sredina M_n, izražen pomoću sredine μ_n. Granice toga razmaka su odista dostignute za ma kakvu konveksnu funkciju $f(x)$, i to, donja granica kad su sve vrednosti x_i među sobom jednake, a gornja granica kad su sve one jednake nuli osim jedne od njih.

Primetimo i to da te nejednačine važe i za funkcije $f(x)$ pozitivne i *konkavne* u posmatranom razmaku, tj. funkcije čiji je drugi izvod negativan za vrednosti x u tome razmaku, samo što se tada menja smisao nejednačina.

I primer: neka je

$$f(x)=x^k$$

koja je funkcija konveksna za $k>1$, a za x pozitivno. Tada je

$$f(\mu_n)=\mu_n{}^k=\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^k}{n^k},$$

$$M_n=\frac{x_1{}^k+\cdots+x_n{}^k}{n}$$

pa nejednačine (70) daju

$$\frac{(x_1+\cdots+x_n)^k}{n^k}\leqslant\frac{x_1{}^k+\cdots+x_n{}^k}{n}\leqslant\frac{(x_1+\cdots+x_n)^k}{n},$$

što znači da se vrednost količnika

$$\frac{(x_1+\cdots+x_n)^k}{x_2{}^k+\cdots+x_n{}^k}=\varrho$$

uvek nalazi u razmaku $(1, n^{k-1})$. Granice tog razmaka stvarno su dostignute kad su svi x_i među sobom jednaki, ili kad su svi oni jednaki nuli osim jednoga od njih.

U specijalnom slučaju kad je $k=2$ dobija se ranije navedena nejednačina

$$1 \leqslant \frac{(x_1 + \cdots + x_n)^2}{x_1{}^2 + \cdots + x_n{}^2} \leqslant n,$$

čiji je specijalan slučaj nejednačina

$$\frac{a+b}{\sqrt{2}} \leqslant \sqrt{a^2+b^2} \leqslant a+b$$

ili nejednačina

$$\frac{a+b+c}{\sqrt{3}} \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2} \leqslant a+b+c.$$

U slučaju kad je $k<1$, funkcija x^k je konkavna i gornje nejednačine menjaju smisao.

Ti isti rezultati su nađeni, u ranijem odeljku, na drugi način.

II primer: uzevši $f(x)=e^x$ nalazi se da je

$$e^{x_1}+e^{x_2}+\cdots+e^{x_n}=C+\vartheta H,$$

gde je

$$C=ne^{\frac{S}{n}}, \quad H=e^S-ne^{\frac{S}{n}}+n-1, \quad S=x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

III primer: uzevši

$$x_1=\sin^2 x, \quad x_2=\cos^2 x$$

nalazi se da je

$$f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)=C+\vartheta H,$$

gde su C i H brojevi nezavisni od promenljive x

$$C=2f\left(\frac{1}{2}\right), \quad H=f(1)+f(0)-2f\left(\frac{1}{2}\right).$$

IV primer: uzevši

$$x_1=\alpha, \quad x_2=\beta, \quad x_3=\gamma,$$

gde su α, β, γ uglovi jednog trougla (izraženi u delovima od π), zbir $x_1+x_2+x_3$ ima za vrednost π i nalazi se da je

$$f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)=C+\vartheta H,$$

gde su C i H brojevi nezavisni od uglova

$$C=3f\left(\frac{\pi}{3}\right), \quad H=f(\pi)+2f(0)-3f\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Tako npr. za sve trougle biće

$$e^{\alpha}+e^{\beta}+e^{\gamma}=3e^{\frac{\pi}{3}}+\vartheta\left(2+e^{\pi}-3e^{\frac{\pi}{3}}\right),$$

tj.

$$e^{\alpha}+e^{\beta}+e^{\gamma}=8{,}5489+16{,}5914\,\vartheta.$$

V primer: uzevši

$$x_1=a_1,\quad x_2=a_2,\ldots,\ x_n=a_n,$$

gde su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ koreni algebarske jednačine

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0 \tag{77}$$

koja ima sve svoje korene realne i pozitivne, biće

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=-a_1,$$

pa se nalazi da vrednost simetrične funkcije korena

$$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)$$

uvek leži u razmaku između vrednosti

$$C=nf\left(-\frac{a_1}{n}\right)$$

i

$$D=f(-a_1)+(n-1)f(0)-nf\left(-\frac{a_1}{n}\right),$$

tako da je

$$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)=C+\vartheta\,(D-C).$$

Ma kakva bila funkcija $f(x)$ pomenute vrste, granica C razmaka je dostignuta kad su a_i koreni algebarske jednačine

$$\left(x+\frac{a_1}{n}\right)^n=0,$$

a granica D kad su a_i koreni jednačine

$$x^{n-1}(x+a_1)=0.$$

Tako je npr.

$$e^{ra_1}+e^{ra_2}+\cdots+e^{ra_n}=C+\vartheta\,(D-C),\qquad r=\text{const.},$$

gde je

$$C=ne^{-\frac{ra_1}{n}},\quad D=e^{-ra_1}-ne^{-\frac{ra_1}{n}}+n-1.$$

U slučajevima kad su koreni a_i jednačine (77) realni, a ma koga znaka, uzevši da je

$$x_1=a_1^2,\quad x_2=a_2^2,\ldots,\ x_n=a_n^2,$$

biće svi x_i pozitivni i

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=a_1^2-2a_2$$

i prema tome

$$f(a_1^2)+f(a_2^2)+\cdots+f(a_n^2)=C+\vartheta H,$$

gde je

$$C=nf\left(\frac{a_1^2-2a_2}{n}\right),$$

$$H=f(a_1^2-a_2)+(n-1)f(0)-nf\left(\frac{a_1^2-2a_2}{n}\right).$$

Tako je npr.

$$e^{a_1^2}+e^{a_2^2}+\cdots e^{a_n^2}=C+\vartheta H,$$

gde je

$$C=ne^{\frac{a_1^2-2a_2}{n}},\qquad H=e^{a_1^2-2a_2}-ne^{\frac{a_1^2-2a_2}{n}}+n-1.$$

Isto se tako nalazi da je za $k>1$

$$a_1^{2k}+a_2^{2k}+\cdots+a_n^{2k}=\lambda(a_1^2-2a_2)^k,$$

gde je λ jedan broj koji uvek leži između $\frac{1}{n^{2k-1}}$ i 1.

L) Realni koreni algebarskih jednačina kao brojni razmaci. Neka je data algebarska jednačina

(78) $$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0,$$

čiji su koeficijenti svi pozitivni; tada će svi njeni realni koreni $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ biti negativni i može se dokazati ova teorema (teorema *Kakeya*).

Svi koreni $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ nalaze se u razmaku između $-M$ i $-N$, gde je N najmanja, a M najveća od vrednosti

(79) $$\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Da bismo to dokazali, uočimo najpre algebarsku jednačinu

(80) $$p_0+p_1z+p_2z^2+\cdots+p_nz^n=0$$

čiji su koeficijenti $p_0, p_1, \ldots, p_n$ svi pozitivni i sve manji ukoliko im je rang veći, tj.

(81) $$p_n<p_{n-1}<\cdots<p_1<p_0.$$

Ako se pođe od identičnosti

$$(1-z)(p_0+p_1z+\cdots+p_nz^n)$$
$$=p_0-(p_0-p_1)z-(p_1-p_2)z^2-\cdots-(p_{n-1}-p_n)z^n-p_nz^{n+1}$$
$$=p_0-\{(p_0-p_1)z+(p_1-p_2)z^2+\cdots+(p_{n-1}-p_n)z^n+p_nz^{n+1}\},$$

to pošto su sve razlike p_0-p_1, $p_1-p_2, \ldots p_{n-1}-p_n$, kao i p_n, pozitivni brojevi, velika zagrada na desnoj strani imaće za $-1<z<0$ vrednost manju od one, koju bi imala za $z=+1$, tj. manju od

$$(p_0-p_1)+(p_1-p_2)+\cdots+(p_{n-1}-p_n)+p_n=p_0,$$

što znači da je za $-1<z<0$ vrednost izraza

$$(1-z)(p_0+p_1 z+\cdots+p_n z^n)$$

uvek pozitivna i različita od nule. Pa pošto je za takve vrednosti z vrednost $1-z$ različita od nule, tako da će biti i sa polinomom

$$p_0+p_1 z+\cdots+p_n z^n.$$

Jednačina (80) nema dakle korena između -1 i 0.

Uočimo sada jednu ma koju jednačinu

$$a_0+a_1 x+a_2 x^2+\cdots+a_n x^n=0 \tag{82}$$

sa pozitivnim koeficijentima (od kojih ni jedan ne sme biti jednak nuli).

Stavimo najpre

$$x=zN,$$

gde je N najmanji od brojeva

$$\frac{a_0}{a_1},\ \frac{a_1}{a_2},\ldots,\ \frac{a_{n-1}}{a_n}, \tag{83}$$

pa se iz nejednačine

$$N<\frac{a_k}{a_{k+1}}$$

dobija da je

$$a_{k+1} N^{k+1}<a_k N^k. \tag{84}$$

Jednačina (82) tom smenom postaje

$$a_0+a_1 Nz+a_2 N^2 z^2+\cdots+a_n N^n z^n=0$$

tako da koeficijenat p_k od z^k ima za vrednost $p_k=a_k N^k$, a koeficijenat p_{k+1} od z^{k+1} vrednost $p_{k+1}=a_{k+1} N^{k+1}$.

Prema nejednačini (84) njeni koeficijenti p_k opadaju kad im rang raste. Ta jednačina nema, dakle, korena između -1 i 0, tj. nije zadovoljena ni za kakvu vrednost $-1<z<0$ ili $-1<\frac{x}{N}<0$; to znači da jednačina (82) nema nijedan koren x takav da je

$$\frac{x}{N}=-\vartheta \text{ tj. } x=-N\vartheta \qquad (0\leqslant\vartheta\leqslant 1);$$

ona, dakle, nema nikakav koren u razmaku $(0, -N)$.

Stavimo sad

$$x = \frac{M}{z},$$

gde je M najveći od brojeva (83) pa se iz nejednačine

(85) $$M > \frac{a_k}{a_{k+1}}$$

dobija da je

(86) $$a_{k+1} M^{k+1} > a_k M^k.$$

Jednačina (82) tom smenom postaje

(87) $$a_n M^n + a_{n-1} M^{n-1} z + \cdots + a_2 M^2 z^{n-2} + a_1 M z^{n-1} + a_0 z^n = 0$$

tako da koeficijenat p_k od z^k ima za vrednost

$$p = a_{n-k} M^{n-k},$$

a koeficijenat p_{k+1} od z^{k+1} vrednost

$$p_{k+1} = a_{n-k-1} M^{n-k-1}.$$

Prema nejednačini (86), iz koje je

$$a_{n-k} M^{n-k} > a_{n-k-1} M^{n-k-1},$$

vidi se da je $p_k > p_{k+1}$, tj. da koeficijenti jednačine (87) opadaju kad im rang raste. Ta jednačina nije zadovoljena ni za kakvu vrednost $-1 < z < 0$ ili $-1 < \frac{M}{x} < 0$; jednačina (82) ne može imati nijedan koren x takav da je

$$\frac{M}{x} = -\vartheta, \quad \text{tj.} \quad x = -\frac{M}{\vartheta}, \quad \text{gde je} \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$$

što znači da ona nema nikakav koren u razmaku između $-\infty$ i $-M$.

Kao što se vidi iz svega ovoga, jednačina (82) ne može imati nikakav koren u razmaku $-\infty$ i $-M$ ni u razmaku od $-N$ do 0; kad god, dakle, ona ima realnih korena, svi se ovi moraju nalaziti u razmaku $(-M, -N)$, čime je teorema dokazana.

Teoremi se može dati ovaj oblik:

Ako se sa N i M označe najmanji i najveći među brojevima

$$\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

svi realni koreni $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *jednačine* (82) *mogu se izraziti u obliku*

$$\begin{aligned} -a_1 &= N+\vartheta_1 (M-N) \qquad (0 \leqslant \vartheta_1 \leqslant 1), \\ -a_2 &= N+\vartheta_2 (M-N) \qquad (0 \leqslant \vartheta_2 \leqslant 1), \\ -a_3 &= N+\vartheta_3 (M-N) \qquad (0 \leqslant \vartheta_3 \leqslant 1), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Primenimo teoremu, primera radi, na kvadratnu jednačinu

$$x^2+px+q=0$$

sa pozitivnim koeficijentima p i q. Za nju je

$$\frac{a_0}{a_1}=\frac{q}{p}, \qquad \frac{a_1}{a_2}=p,$$

pa pošto je iz uslova za realnost korena

$$\frac{q}{p} \leqslant \frac{p}{4},$$

pa dakle u toliko pre i $\frac{q}{p} \leqslant p$, biće

$$N=\frac{q}{p}, \qquad M=p,$$

i koreni se nalaze u razmaku između $\left(-p \text{ i } -\frac{q}{p}\right)$ što pokazuje da se oni mogu izraziti u obliku

$$-a_1=\frac{q}{p}+\vartheta_1\left(p-\frac{q}{p}\right), \qquad -a_2=\frac{q}{p}+\vartheta_2\left(p-\frac{q}{p}\right).$$

Kad su oba korena jednaka biće $p^2=4q$ prema čemu je

$$N=\frac{q}{p}=\frac{p}{4}, \qquad M=p;$$

oba korena imaju zajedničku vrednost koja se može izraziti u obliku

$$a_{1,2}=-\frac{p}{4}(1+3\vartheta),$$

pa pošto taj koren treba da bude $-\frac{p}{2}$, to broj ϑ što odgovara dvostrukom korenu jeste $\vartheta=\frac{1}{3}$.

M) Razmak vrednosti polinoma. Neka je

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

ma kakav polinom po x, pa označimo sa (A, B) jedan razmak u kome će se nalaziti vrednosti toga polinoma za sve vrednosti x koje se nalaze u jednom datom razmaku (a, b).

U slučaju kad su a i b pozitivni brojevi, postoji Cauchyevo pravilo koje glasi: ako se u polinomu razdvoje skup članova $f_1(x)$ sa pozitivnim koeficijentima, i skup članova $f_2(x)$ sa negativnim koeficijentima, tako da je

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

za razmak (A, B) *može se uzeti razmak između vrednosti*

$$f_1(a) + f_1(b) \quad \text{i} \quad f_2(a) + f_2(b).$$

Ali postoji jedno pravilo koje i ne pretpostavlja ništa o znacima brojeva a i b, i uopšte daje uži, pa dakle i probitačniji razmak (A, B). To je Laguerreovo pravilo koje se sastoji u ovome:

Neka su

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$$

$$\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$$

dva niza vrednosti definisanih rekursivnim obrascima

$$\alpha_0 = a_n, \qquad \alpha_1 = a\,\alpha_0 + a_{n-1}$$

$$\alpha_2 = a\,\alpha_1 + a_{n-2}, \ldots, \alpha_n = a\,\alpha_{n-1} + a_0$$

$$\beta_n = \alpha_n, \qquad \beta_{n-1} = \beta_n + (b-a)\,\alpha_{n-1}$$

$$\beta_{n-2} = \beta_{n-1} + (b-a)\,b\,\alpha_{n-2}, \quad \beta_{n-3} = \beta_{n-2} + (b-a)\,b^2\,\alpha_{n-3},$$

$$\beta_1 = \beta_2 + (b-a)\,b^{n-2}\,\alpha_1 \qquad \beta_0 = \beta_1 + (b-a)\,b^{n-1}\,\alpha_0.$$

Označimo sa N i M najmanju i najveću među vrednostima $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$, *pa se za razmak* (A, B) *može uzeti razmak* (N, M).

Pravilo se može iskazati i u ovome obliku: *za sve vrednosti*

$$x = a + \vartheta\,(b-a),$$

biće

$$f(x) = N + \vartheta'\,(M-N).$$

Tako npr. kad je

$$f(x) = x^5 - 2\,x^4 + x^3 - 3\,x^2 + 4\,x - 2$$

i kada je $a=1$, $b=2$ dobija se

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0=1 & \alpha_1=-1 & \alpha_2=0 \\ \alpha_3=-3 & \alpha_4=1 & \alpha_5=-1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \beta_5=-1 & \beta_4=0 & \beta_3=-6 \\ \beta_2=-6 & \beta_1=-14 & \beta_0=-2 \end{Bmatrix}$$

što pokazuje da se za razmak (A, B) može uzeti razmak $(-14, 2)$, tj. da će se za $x=1+\vartheta$ imati

$$f(x)=-14+16\vartheta'.$$

Međutim, po Cauchyevom pravilu za (A, B) bi se dobio širi razmak $(-40, 41)$.

Kad je $a=2$, $b=3$ dobija se

$$\alpha_0=1 \quad \alpha_1=0 \quad \alpha_2=1 \quad \alpha_3=-1 \quad \alpha_4=2 \quad \alpha_5=2$$

$$\beta_5=2 \qquad \beta_4=4 \qquad \beta_3=1$$

$$\beta_2=10 \qquad \beta_1=10 \qquad \beta_0=91$$

što pokazuje da se za (A, B) može uzeti razmak $(1, 91)$, tj. da će se za $x=2+\vartheta$ imati

$$f(x)=1+90\vartheta'$$

dok bi se po Cauchyevom pravilu dobio širi razmak $(-143, 236)$.

Navešćemo ovde i jedno pravilo za logaritamski izvod ma kakvog polinoma $f(x)$ koji ima sve svoje nule realne, tj. za racionalnu funkciju

$$\varphi(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Pravilo glasi: ako je x ma koja vrednost veća od svih nula polinoma $f(x)$, odgovarajuća vrednost izvoda $\varphi'(x)$ uvek se nalazi u razmaku između

$$-\varphi^2(x) \quad \text{i} \quad -\frac{\varphi^2(x)}{\sqrt{n}}.$$

Jer ako su nule polinoma $f(x)$ označene sa $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, gde je n njegov stepen, biće

$$\varphi(x)=\frac{1}{x-\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{x-\alpha_n}$$

i prema tome

$$-\varphi'(x)=\frac{1}{(x-\alpha_1)^2}+\cdots+\frac{1}{(x-\alpha_n)^2},$$

Pošto su sve razlike $x-a_k$ pozitivne, vrednost desne strane poslednje jednačine nalaziće se u razmaku

$$\frac{\varphi^2(x)}{\sqrt{n}} \quad \text{i} \quad \varphi^2(x),$$

što dokazuje gornje pravilo. *Prema tome je*

$$-\varphi'(x)=\frac{1-\vartheta(n-1)}{n}\varphi(x)$$

za sve pomenute vrednosti x.

N) **Razni drugi brojni razmaci.** U raznim oblastima aritmetike i algebre postoji nepregledan broj slučajeva u kojima se za jednu posmatranu količinu, ma se i ne znala njena tačna vrednost, zna određen razmak u kome se ona nasigurno nalazi. Pored onih koji su dovde navedeni, navešćemo još neke od njih koji su od koristi bilo sa teorijskog gledišta, bilo sa gledišta praktičnih primena.

α) Laguerre je našao da je, za vrednosti x što se nalaze između 0 i $\frac{\pi}{2}$, razlika između dveju funkcija

$$f(x)=\cos x$$

$$\varphi(x)=1-\frac{z^2}{z+(z-1)\sqrt{\frac{2-z}{3}}}, \qquad z=\frac{2x}{\pi}$$

uvek negativna i po apsolutnoj vrednosti ne prelazi vrednost 0,0003. *Prema tome je za te vrednosti* x

$$\cos x=\varphi(x)-\vartheta\cdot 0{,}0003,$$

a iz toga se izvode slični obrasci za izražavanje drugih trigonometrijskih funkcija pomoću algebarskih funkcija, u obliku brojnih razmaka.

β) Zna se da se za

$$a\geqslant 20\,b>0$$

i za logaritme sa osnovicom 10, vrednosti

$$\log(a+b) \quad \text{i} \quad \log a+\frac{2\,Mb}{2a+b},$$

gde je

$$M=\log e=0{,}434295\ldots$$

razlikuju tek u šestoj decimali. Prema tome je za takve vrednosti a i b

$$\log(a+b)=\log a+\frac{2\,Mb}{2\,a+b}+\frac{\vartheta}{10^5}$$

što olakšava praktično izračunavanje logaritama.

γ) Uočimo algebarsku jednačinu neparnog $(2n+1)$-og stepena

$$\varphi(x)+\lambda=0, \tag{88}$$

gde je $\varphi(x)$ polinom po x koji sadrži samo neparne stepene promenljive, a λ ma kakav realan broj. Ako se sa α označi apsolutna vrednost broja λ, Čebišev je dokazao da jednačina (88) ima bar jedan realan koren u razmaku između

$$-2\sqrt[2n+1]{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{i} \quad +2\sqrt[2n+1]{\frac{\alpha}{2}}.$$

To znači da jednačina ima bar jedan koren koji se može izraziti u obliku

$$x=2\,\omega\sqrt[2n+1]{\frac{\alpha}{2}} \qquad (-1\leqslant\omega\leqslant 1).$$

Primenivši to npr. na jednačinu trećeg stepena

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \tag{89}$$

pošto se ova smenom

$$x=z-\frac{a}{3}$$

svede na jednačinu

$$z^3+pz+q=0,$$

gde je

$$p=b-\frac{a^3}{3}, \qquad q=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c$$

dobija se ovaj rezultat: jednačina (89) ima bar jedan koren koji se može izraziti u obliku

$$x=-\frac{a}{3}+\frac{2\omega}{3}\sqrt[3]{\left|a^3-\frac{9}{2}ab+\frac{27}{2}c\right|}$$

što olakšava praktično rešavanje jednačine trećeg stepena.

δ) Neka je $f(x)$ konačna i neprekidna funkcija za vrednosti x sadržane u razmaku (a, b), kao i njen izvod $f'(x)$. Prema teoremi za konačne priraštaje, postoji u razmaku (a, b) bar jedna vrednost c za koju je

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c).$$

Ako se, dakle, označi sa N najmanja, a sa M najveća vrednost koju ima izvod $f'(x)$ za vrednosti x u razmaku (a, b) biće

(90) $$f(b)-f(a)=(b-a)[N+\vartheta(M-N)] \qquad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1).$$

Tako se npr. nalazi da je

$$\operatorname{arctg}(x+1)=\operatorname{arctg} x+\delta,$$

gde se δ uvek nalazi u razmaku

$$\frac{1}{1+(x+1)^2} \quad \text{i} \quad \frac{1}{1+x^2}.$$

ε) Potražimo razmak u kome će se nalaziti vrednost

(91) $$f(a)-2f(a+h)+f(a+2h)$$

za vrednosti h sadržane u razmaku $(0, a)$. Toga radi potražimo vrednost λ za koju će biti

(92) $$f(a)-2f(a+h)+f(a+2h)-\lambda h^2=0.$$

Posmatranjem funkcije

$$g(z)=f(a)-2f(a+z)+f(a+2z)-\lambda z^2$$

vidi se da je ona jednaka nuli za $z=0$ i $z=h$; prema Rolleovoj teoremi njen izvod

$$g'(z)=-2f'(a+z)+2f'(a+2z)-2\lambda z$$

mora postati jednak nuli za jednu vrednost $z=c$ sadržanu u razmaku $(0, h)$. Za tu će vrednost c biti

$$\lambda c=f'(a+2c)-f'(a+c),$$

a primenom obrasca (90) nalazi se da se desna strana ove jednačine može napisati u obliku

$$[P+\vartheta(Q-P)]c,$$

gde su P i Q najmanja i najveća vrednost koju ima drugi izvod $f''(z)$ za vrednosti z sadržane u razmaku $(0, h)$. Otuda

$$\lambda=P+\vartheta(Q-P),$$

što prema obrascu (92) pokazuje da se vrednost

$$f(a)-2f(a+h)+f(a+2h)$$

uvek nalazi u razmaku između

$$Ph^2 \quad \text{i} \quad Qh^2.$$

10. BROJNI RAZMACI U TEORIJI GREŠAKA

Za svaki nedovoljno određen podatak x može se utvrditi jedan razmak (α, β) u kome će se on nasigurno nalaziti, tj. x se može napisati u obliku

(93) $$x=\alpha+\vartheta(\beta-\alpha).$$

Kad se takvim podatkom budu vršile kakve bilo računske radnje, rezultat računa takođe će biti jedan nedovoljno određen broj X. Ali i za taj broj uvek se može odrediti jedan razmak (A, B) izvan koga se on nasigurno neće nalaziti, tako da će biti

$$X = A + \vartheta (B - A). \tag{94}$$

Tako isto, kad nepoznata količina X zavisi od više nedovoljno određenih podataka $x_1, x_2, \ldots, x_n$, može se za svaki od ovih utvrditi po jedan razmak (α_k, β_k) u kome će se x_k nasigurno nalaziti, tj. ti se podaci mogu izraziti u obliku

$$x_1 = \alpha_1 + \vartheta_1 (\beta_1 - \alpha_1), \quad x_2 = \alpha_2 + \vartheta_2 (\beta_2 - \alpha_2), \ldots \tag{95}$$

Kad se, pomoću veze koja bude data između X i x_i, bude izračunala vrednost X, ona neće biti dovoljno određena, ali se i za nju može odrediti jedan razmak (A, B), tako da se ona može izraziti u obliku (94).

Tako isto, kad više nepoznatih količina $X_1, X_2, \ldots, X_p$ istovremeno zavise od više podataka $x_1, x_2, \ldots, x_n$, od kojih je svaki nedovoljno određen, pa se te nepoznate izračunaju pomoću veze koja bude postojala između X_k i x_i, za svaku nepoznatu X_k može se utvrditi po jedan razmak (A_k, B_k) u kome će se ona nalaziti, tj. tako da bude

$$X_1 = A_1 + \vartheta_1 (B_1 - A_1), \quad X_2 = A_2 + \vartheta_2 (B_2 - A_2), \tag{96}$$

Očevidno je da određivanje grešaka kojima se izlaže izračunavanje nepoznate količine iz netačnih podataka nije ništa drugo do određivanje razmaka u kojima se mogu kretati tako izračunate nepoznate, a koji bi se razmaci sveli na tačne vrednosti ovih, kad bi sami podaci bili apsolutno tačni.

Na taj način, *računanje sa nedovoljno određenim podacima i izračunavanje rezultujućih grešaka što proizilaze od njih, svodi se na računanje sa brojnim razmacima.* Zadatak se svodi na jedan od tri osnovna zadatka ove vrste, koji su bili predmet ranijeg izlaganja:

1° odrediti razmak za vrednosti date funkcije $f(x)$ kad je x dato u obliku jednog razmaka;

2° odrediti razmak za vrednosti funkcije $f(x_1, \ldots, x_n)$ kad je svaka od vrednosti x_i data u obliku jednog razmaka;

3° odrediti razmake za vrednosti datog skupa funkcija $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_p$ koje sve istovremeno zavise od skupa podataka $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Uopšte, kad se zna da jedna količina x leži u razmaku (α, β), ako se za x uzme jedna vrednost p sadržana u tom razmaku, time učinjena greška δx, tj. razlika $p-x$, ne može po apsolutnoj vrednosti biti veća od dužine razmaka (α, β), tj. po apsolutnoj vrednosti biće

$$\delta x < \beta - \alpha$$

i ta greška može biti pozitivna ili negativna.

Učinjena *relativna greška* Δx, tj. odstupanje uzete vrednosti p od tačne vrednosti x, upoređeno sa samom vrednošću x, bila bi

$$\Delta x = \left| \frac{\delta x}{x} \right| .$$

Međutim, pošto nam je tačna vrednost x nepoznata, a poznaje se samo vrednost p po kojoj se ceni i sama veličina x, to se za relativnu grešku učinjenu na vrednosti x obično uzima

$$\Delta x = \left| \frac{\delta p}{p} \right| = \left| \frac{\delta x}{p} \right| .$$

Uostalom, kad je učinjena greška δx dovoljno mala naspram p tako da je kvadrat količnika $\frac{\delta x}{p}$ zanemarljiv, razlika između takve dve relativne greške

$$\frac{\delta x}{x} - \frac{\delta x}{p} = \frac{\delta x}{p - \delta x} - \frac{\delta x}{p} = \frac{(\delta x)^2}{p(p - \delta x)}$$

biće praktički zanemarljiva.

Učinjena *procentualna greška* je $100 \cdot \Delta x$.

Pošto je uvek $x \geqslant \alpha$, to je

$$\Delta x \leqslant \frac{\delta x}{\alpha}$$

i prema tome je, ako se vodi računa i o znaku grešaka,

$$\delta x = \omega(\beta - \alpha), \quad \Delta x = \omega \frac{\beta - \alpha}{\alpha} \quad (-1 \leqslant \omega \leqslant 1),$$

a ako se vodi računa samo o apsolutnoj vrednosti grešaka

$$\delta x = \vartheta(\beta - \alpha), \quad \Delta x = \vartheta \frac{\beta - \alpha}{\alpha} .$$

Ovi izrazi za Δx su iluzorni u slučajevima kad je $\alpha = 0$, jer se tada mogu poklopiti sa ma kojom vrednošću od $-\infty$ do $+\infty$ (odnosno od nule do $+\infty$).

Ako se za broj p uzme sredina $\frac{\alpha+\beta}{2}$ razmaka (α, β) učinjena greška δx nije nikad veća od poludužine $\frac{\beta-\alpha}{2}$ toga razmaka, a može biti pozitivna ili negativna. Tada je, dakle

$$\delta x=\omega \frac{\beta-\alpha}{2}, \quad \Delta x=\omega \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}.$$

Naposletku, ako se za p uzme prednji kraj razmaka (α, β), greška δx ne premaša dužinu $\beta-\alpha$ razmaka i uvek je pozitivna; tada je

$$\delta x=\vartheta(\beta-\alpha), \quad \Delta x=\vartheta \frac{\beta-\alpha}{\alpha} \quad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1).$$

Kad je razmak (α, β) dovoljno uzak da su stepeni njegove dužine $(\beta-\alpha)$ vrlo mali brojevi, zanemarljivi naspram same te dužine, greška δx može se smatrati kao diferencijal količine x, pošto su tada i stepeni od δx zanemarljivi naspram δx.

Odgovarajuća greška δf, učinjena na datoj funkciji f, koja zavisi od x, kao razmak između izračunate i tačne vrednosti f (koja bi se imala kad bi x bilo tačan broj) ima se smatrati kao diferencijal te funkcije. Ako ova zavisi od više podataka $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sa dovoljno uskim razmakom varijacija (tj. dovoljno malim mogućim greškama), greška δf ima se smatrati kao totalni diferencijal funkcije po promenljivima x_i. Naposletku, ako jedan dati skup funkcija f_1, $f_2, \ldots, f_p$ istovremeno zavisi od podataka $x_1, x_2, \ldots, x_n$, greška δf_k ima se smatrati kao totalni diferencijal funkcije f_k po promenljivima x_i.

Na toj je primedbi osnovana teorija uticaja netačnih podataka sa dovoljno malim mogućim greškama, na rezultate računa sa takvim podacima. Ali kad su mogućne greške na podacima tolike da im viši stepeni i međusobni proizvodi nisu zanemarljivi naspram njih samih, tako da se ne mogu smatrati kao diferencijalni, uticaj takvih podataka, izražen u *rezultujućoj grešci*, mora se rešavati metodama računanja sa brojnim razmacima, koje su predmet ovih izlaganja.

I primer: u kome će se razmaku nalaziti iznos P površine kvadrata čija je strana $x=2{,}3\,m$ data sa jednom decimalom tačno?

Ovde je $2{,}3<x<2{,}4$, pa dakle u metrima

$$x=2{,}3+\vartheta \cdot 0{,}1,$$

prema čemu je

$$P=x^2=(2{,}3+\vartheta \cdot 0{,}1)^2,$$

pa dakle

$$P=5{,}29+\vartheta \cdot 0{,}47.$$

Ako se za P uzme sredina toga razmaka, tj. vrednost $5{,}525\,\mathrm{m}^2$ učinjena greška je

$$\delta x = \omega \cdot 0{,}235\,\mathrm{m}^2,$$

a relativna greška

$$\Delta x = \omega \cdot 0{,}104.$$

II primer: izračunati vrednost

$$x = \sqrt{p},$$

gde je p dat ceo pozitivan broj, tako da razlika između tačne i nađene vrednosti ne premaša vrednost $\frac{1}{q}$, gde je q opet dat ceo pozitivan broj.

Označimo sa m najveći ceo broj sadržan u vrednosti

$$x' = \sqrt{pq^2},$$

pa će biti

$$m \leqslant x' \leqslant m+1,$$

pa dakle i

$$\frac{m}{q} \leqslant x \leqslant \frac{m+1}{q},$$

prema čemu je

$$x = \frac{m}{q} + \frac{\vartheta}{q} \quad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1).$$

Racionalan broj $\frac{m}{q}$ predstavlja dakle $\sqrt{p}$ sa negativnom greškom koja ne premaša $\frac{1}{q}$.

Tako npr. ako se traži $\sqrt{4368}$ tako da greška bude negativna, a ne premaša $\frac{1}{7}$, biće

$$m = 462, \quad \frac{m}{7} = 66,$$

tako da je

$$\sqrt{4368} = 66 + \frac{\vartheta}{7}.$$

III primer: sa koliko tačnih decimala treba uzeti broj π da bi se iz tako uzete vrednosti mogao izračunati

$$x = \sqrt{\pi}$$

sa pozitivnom greškom koja ne premaša $\frac{1}{10^4}$?

Ako se sa m označi najveći ceo broj sadržan u vrednosti

$$x' = \sqrt{10^8 \pi},$$

biće

$$m \leqslant x' \leqslant m + 1,$$

pa dakle i

$$\frac{m}{10^4} \leqslant x \leqslant \frac{m+1}{10^4},$$

prema čemu je

$$x = \frac{m}{10^4} + \frac{\vartheta}{10^4}.$$

Racionalan broj $\frac{m}{10^4}$ predstavlja $\sqrt{\pi}$ sa pozitivnom greškom koja ne premaša $\frac{1}{10^4}$, a za to je potrebno i dovoljno da je broj π dat sa 8 tačnih decimala.

IV primer: u kome će se razmaku nalaziti iznos zapremine V lopte poluprečnika $x = 1{,}23$ m datog sa dve decimale tačno, a kad se broj π uzme sa 4 decimale tačno?

Ovde je

$$1{,}23 < x < 1{,}24,$$

$$3{,}141 < \pi < 3{,}142,$$

pa dakle u metrima

$$x = 1{,}23 + \vartheta \cdot 0{,}01,$$

$$\pi = 3{,}141 + \vartheta' \cdot 0{,}001,$$

prema čemu je

$$V = 7{,}794 + \vartheta'' \cdot 0{,}1850.$$

Ako se za V uzme sredina toga razmaka, tj. vrednost

$$p = 7{,}886,$$

učinjena greška je

$$\delta x = \omega \cdot 0{,}0975,$$

a relativna greška

$$\Delta x = \omega \cdot 0{,}123.$$

V primer: pretpostavimo da su u jednoj smeši koja sadrži kalijum i natrijum u obliku soli, ove soli najpre pretvorene u karbonate i u tome obliku izmerene, pa da je tako nađena kolektivna težina q_1, sa greškom koja ni u pozitivnom, ni u negativnom smislu ne prelazi pozitivan broj δ_1; zatim da su karbonati pretvoreni u hloride i u tome obliku izmereni, pa da je nađena težina q_2, sa greškom koja ni u pozitivnom, ni u negativnom smislu ne prelazi pozitivan broj δ_2.

Pretpostavljajući da se ne uzima u obzir netačnost atomskih težina *K*, *Na*, *C*, *O*, *Cl*, težina Z_1 kalijuma i težina Z_2 natrijuma u prvobitnoj smeši izračunavaju se iz odgovarajućih hemijskih jednačina

$$Z_1 = 25{,}875\, x_1 - 23{,}444\, x_2, \quad Z_2 = 17{,}989\, x_2 - 19{,}421\, x_1,$$

gde bi x_1 i x_2 imale biti tačne težine karbonata i hlorida u smeši.

U kojim će se razmacima nasigurno nalaziti težine Z_1 i Z_2 kad se na mesto x_1 i x_2 uzmu q_1 i q_2?

Simetrični normalni predstavnici razmaka u kojima će se nalaziti x_1 i x_2 su

$$x_1 = q_1 + \omega_1 \delta_1 \quad (-1 \leqslant \omega_1 \leqslant 1),$$

$$x_2 = q_2 + \omega_2 \delta_2 \quad (-1 \leqslant \omega_2 \leqslant 1),$$

i prema tome će njihov asimetrični normalni predstavnik biti

$$x_1 = q_1 - \delta_1 + 2\vartheta_1 \delta_1 \quad (0 \leqslant \vartheta_1 \leqslant 1),$$

$$x_2 = q_2 - \delta_2 + 2\vartheta_2 \delta_2 \quad (0 \leqslant \vartheta_2 \leqslant 1).$$

Krajevi razmaka Z_1 biće dakle

$$N_1 = 25{,}875\,(q_1 - \delta_1) - 23{,}444\,(q_2 + \delta_2),$$

$$M_1 = 25{,}875\,(q_1 + \delta_1) - 23{,}444\,(q_2 - \delta_2),$$

a krajevi razmaka Z_2 biće

$$N_2 = 17{,}989\,(q_2 - \delta_2) - 19{,}421\,(q_1 + \delta_1),$$

$$M_2 = 17{,}989\,(q_2 + \delta_2) - 19{,}421\,(q_1 - \delta_1).$$

Traženi razmaci su, dakle

$$Z_1 = 25{,}875\,(q_1 - \delta_1) + \vartheta'_1 \cdot 46{,}888\,\delta_2 \quad (0 \leqslant \vartheta'_1 \leqslant 1),$$

$$Z_2 = 17{,}989\,(q_2 - \delta_2) + \vartheta'_2 \cdot 38{,}842\,\delta_2 \quad (0 \leqslant \vartheta'_2 \leqslant 1).$$

VI primer: ako je z jedan broj veći od jedinice ili jednak jedinici napred je pokazano da je

$$1 \leqslant \sqrt[n]{z} < 1 + \frac{z-1}{n}.$$

Ako se za x uzme sredina tog razmaka

$$p=\sqrt[n]{z}=\frac{z+2n-1}{2n}$$

učinjena greška δx će biti

$$\delta x=\omega\frac{z-1}{2n} \qquad (-1\leqslant\omega\leqslant 1).$$

Ako je, pak, z broj manji od jedinice, pokazano je da je

$$\frac{1}{1+\frac{1-z}{nz}}<\sqrt[n]{z}<1,$$

tako, da ako se uzme sredina tog razmaka

$$p=\sqrt[n]{z}=\frac{(2n-1)z+1}{2(n-1)z+2}.$$

učinjena greška će biti

$$\delta x=\omega\frac{1-z}{2(n-1)z+2}.$$

U oba slučaja greška će biti utoliko manja, ukoliko je z bliže jedinici i ukoliko je n veće.

VII primer: napred je pokazano da je za pozitivne vrednosti a i b

$$x=\sqrt{a^2+b^2}=\lambda(a+b) \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\lambda\leqslant 1\right),$$

gde je donja granica razmaka dostignuta kad je $a=b$, a gornja kad je jedna od vrednosti a i b jednaka nuli. Pošto je

$$\alpha=\frac{a+b}{\sqrt{2}}, \qquad \beta=a+b,$$

to ako se za x uzme sredina razmaka

$$p=\frac{\alpha+\beta}{2}=0{,}8535\,(a+b),$$

učinjena greška će biti

$$\delta x=\omega\cdot\frac{\beta-\alpha}{2}=\omega\cdot 0{,}1465\,(a+b), \qquad -1\leqslant\omega\leqslant 1$$

i ona je jednaka nuli kad je $a=b$, a dobija svoju najveću mogućnu vrednost $0{,}1465\,b$ kad je $a=0$.

Relativna greška je

$$\Delta x < \frac{\delta x}{p} = \frac{\beta - \alpha}{2} \cdot \frac{2}{\alpha + \beta} = \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha},$$

prema čemu je

$$\Delta x = \omega \cdot 0{,}1716.$$

Navešćemo da postoji više načina za izražavanje izraza $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ u linearnom homogenom obliku

$$x = \xi a + \eta b.$$

Način Ponceleta, u slučaju kad se o pozitivnim brojevima a, b ništa ne pretpostavlja, dovodi do rezultata koji se podudaraju sa napred navedenim, tj.

$$\xi = \eta = 0{,}85,$$

sa relativnom greškom koja ne premaša 0,172, tj. otprilike $^1/_6$. Međutim taj način daje mogućnosti da se odrede koeficijenti ξ, η tako da relativna greška Δx bude znatno manja, u slučajevima kad se bar ovlašno zna koliko je puta jedan od brojeva a, b veći od drugoga.

Tako se nalazi da je

za $b > a$,	$x = 0{,}40\,a + 0{,}96\,b$,	$\Delta x < \frac{1}{25}$;
za $b > 2\,a$,	$x = 0{,}23\,a + 0{,}99\,b$,	$\Delta x < \frac{1}{71}$;
za $b > 3\,a$,	$x = 0{,}16\,a + 0{,}99\,b$	$\Delta x < \frac{1}{154}$;
za $b > 4\,a$,	$x = 0{,}12\,a + 0{,}99\,b$	$\Delta x < \frac{1}{266}$;
za $b > 5\,a$,	$x = 0{,}10\,a + b$	$\Delta x < \frac{1}{417}$;
za $b > 6\,a$,	$x = 0{,}08\,a + b$,	$\Delta x < \frac{1}{589}$;
za $b > 7\,a$,	$x = 0{,}07\,a + b$,	$\Delta x < \frac{1}{800}$;
za $b > 8\,a$,	$x = 0{,}06\,a + b$,	$\Delta x < \frac{1}{1049}$;
za $b > 9\,a$,	$x = 0{,}05\,a + b$,	$\Delta x < \frac{1}{1428}$;
za $b > 10\,a$,	$x = 0{,}05\,a + b$,	$\Delta x < \frac{1}{1538}$;

Navešćemo, primera radi, jedan prost način koji dovodi do obrasca

$$\sqrt{a^2+b^2}=0{,}40\,a+0{,}96\,b \tag{97}$$

u slučaju kad se zna da je $b>a$.

Lako se uveriti da je

$$\frac{24}{25}\sqrt{a^2+b^2}<0{,}40\,a+0{,}96\,b<\frac{26}{25}\sqrt{a^2+b^2}, \tag{98}$$

jer ako se primeti da je

$$0{,}40=\frac{10}{25}, \qquad 0{,}96=\frac{24}{25},$$

nejednačine postaju

$$12\sqrt{a^2+b^2}<5\,a+12\,b<13\sqrt{a^2+b^2}$$

ili kvadriranjem

$$144\,(a^2+b^2)<25\,a^2+120\,ab+144\,b^2<169\,(a^2+b^2).$$

Leva se nejednačina svodi na

$$119\,a^2<120\,ab$$

i ona očevidno postoji pošto je $b>a$.

Desna nejednačina postaje

$$120\,ab<25\,b^2+144\,a^2$$

pa i ona postoji prema identičnosti

$$144\,a^2-120\,ab+25\,b^2=(12\,a-5\,b)^2>0.$$

Dvostruka nejednačina (98) postoji dakle za $b>a$, a iz nje se dobija da je

$$0{,}40\,a+0{,}96\,b=\frac{24+2\vartheta}{25}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Vrednost razlomka pred kvadratnim korenom uvek se nalazi u razmaku između

$$1-\frac{1}{25} \quad \text{i} \quad 1+\frac{1}{25}$$

što znači da obrazac (97) odista daje vrednost $\sqrt{a^2+b^2}$ u linearnom obliku sa greškom čija apsolutna vrednost ne prelazi $\frac{1}{25}=0{,}04$, tj. 4%.

11. BROJNI RAZMACI U GEOMETRIJI

Kao u aritmetici i u algebri, i geometrijske veličine mogu se javljati kao razmaci, tj. jedna veličina x može biti određena razmakom između dveju veličina iste vrste u kome se x nalazi. Tada će i sve geometrijske veličine, koje se računom ili geometrijskom konstrukcijom izvode iz takvih podataka x, biti i same određene u obliku razmaka. To se npr. dešava:

a) kad podaci nisu tačno dati;

b) kad računske ili konstruktivne teškoće ne dopuštaju tačnu odredbu nepoznate veličine iz datih podataka baš kad bi ovi i bili tačni;

v) kad se odredba nepoznate, po samoj prirodi zadatka, ne sastoji u tačnoj odredbi njene vrednosti, već u odredbi razmaka u kome ona treba da se nalazi da bi bili zadovoljeni uslovi zadatka;

g) kada su podaci nedovoljni za tačnu odredbu nepoznate, ali su dovoljni za odredbu jednoga razmaka u kome se nepoznata neprestano nalazi.

Slučaj ove poslednje vrste javlja se npr. kad je jedan podatak x zbir od nekoliko geometrijskih veličina $x_1, x_2, x_3, \ldots,$ a tražena nepoznata geometrijska veličina y zavisi od zbira kvadrata ili trećih stepena itd. veličina x_k. Tada se ima posla sa *nedovoljno određenim zadacima*, kao što su npr. ovi:

1° odrediti hipotenuzu pravouglog trougla iz datog zbira njegovih kateta;

2° odrediti uglove pravouglog trougla, kad se zna da ovaj ima kao katete zbir kateta i hipotenuzu jednoga drugog, nepoznatog, pravouglog trougla;

3° odrediti dijagonalu paralelepipeda iz datog zbira njegovih strana;

4° odrediti obim i površinu jednog trougla iz datog zbira dveju njegovih strana i ugla koji one zahvataju;

5° odrediti zbir odstojanja jedne proizvoljne tačke opisanog kruga oko pravilnog poligona, od sviju temena, poligona znajući samo broj strana i obim ovoga.

A) Zadaci koji se svode na proučavanje aritmetičke sredine konveksnih ili konkavnih funkcija. U velikome broju zadataka takve vrste služi kao osnovica ranije dokazani rezultat da, ako se sa μ_n označi aritmetička sredina pozitivnih brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a sa M_n aritmetička sredina

$$M_n = \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n},$$

gde je $f(x)$ ma kakva funkcija promenljive x, pozitivna i konveksna u razmaku koji sadrži sve brojeve x_i, vrednost M_n uvek se nalazi u razmaku između vrednosti

$$f(\mu_n) \text{ i } \frac{f(n\mu_n) + (n-1) f(0)}{n}, \tag{99}$$

gde su granice razmaka stvarno dostignute kad su svi x_i među sobom jednaki; ili kad su svi jednaki nuli, osim jednoga od njih.

Međutim, *taj se razmak može još suziti u slučaju kad su* x_1, x_2, x_3 *strane* a, b, c *jednog istog trougla.*

Pođimo od nejednačine koja prema opštem stavu važi za tri ma koja pozitivna broja x, y, z

$$3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leqslant f(x)+f(y)+f(z) \leqslant f(x+y+z)+2f(0). \tag{100}$$

Kad su a, b, c strane jednoga istog trougla, mora biti

$$a+b>c, \quad b+c>a, \quad c+a>b,$$

tako da ako se poluzbir strana označi sa

$$p=\frac{a+b+c}{2},$$

mora biti

$$p>a, \quad p>b, \quad p>c,$$

tj. vrednosti

$$x=p-a, \quad y=p-b, \quad z=p-c \tag{101}$$

uvek su pozitivne.

Stavimo u (100) da je

$$f(t)=F(p-t),$$

pa će, pošto je

$$\frac{d^2f}{dt^2}=\frac{d^2F}{dt^2},$$

funkcija F biti konveksna za svaki razmak promenljive x za koji je i sama funkcija f konveksna. Nejednačina (100) tada postaje

$$3F\left(p-\frac{x+y+z}{3}\right) \leqslant F(p-x)+F(p-y)+F(p-z)$$

$$\leqslant F(p-x-y-z)+2F(p),$$

a ova će, kad se u njoj x, y, z smene svojim vrednostima (101), postati

$$3F\left(\frac{2p}{3}\right) \leqslant F(a)+F(b)+F(c) \leqslant F(0)+2F(p). \tag{102}$$

Vrednost simetrične funkcije strana trougla

$$F(a)+F(b)+F(c), \tag{103}$$

gde je F ma kakva konveksna funkcija tih strana, uvek leži u razmaku između vrednosti

$$(104) \qquad 3F\left(\frac{2p}{3}\right) \quad \text{i} \quad F(0)+2F(p),$$

gde je p poluzbir strana.

Ove granice razmaka stvarno su dostignute u slučaju ravnostranog trougla, ili ravnokrakog trougla sa uglom između jednakih strana koji je jednak nuli.

Da je razmak (104) odista uži od razmaka između vrednosti

$$(105) \qquad 3F\left(\frac{2p}{3}\right) \quad \text{i} \quad F(2p)+2F(0)$$

koje određuje nejednačina (100) za ma kakve pozitivne brojeve a, b, c, vidi se npr. iz specijalnog slučaja kada se uzme da je

$$F(x)=x^2.$$

Razmak (105) u kome će se nalaziti zbir $a^2+b^2+c^2$ bio bi onaj između vrednosti $\frac{4}{3}p^2$ i $4p^2$, tj. između vrednosti

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \quad \text{i} \quad (a+b+c)^2,$$

dok bi razmak (104) bio onaj između vrednosti $\frac{4}{3}p^2$ i $2p^2$, tj. između

$$(106) \qquad \frac{(a+b+c)^2}{3} \quad \text{i} \quad \frac{(a+b+c)^2}{2},$$

a taj je razmak očevidno uži od razmaka (105).

Zbir kvadrata strana jednog trougla uvek se, dakle, nalazi u razmaku između vrednosti (106), i to je u isto vreme i najuži razmak, koji se može utvrditi za opšti slučaj. Njegove su granice stvarno dostignute kad je trougao ravnostran, ili ravnokrak sa trećom stranom jednakom nuli.

Gornjem rezultatu o razmaku u kome se nalazi funkcija (103) strana trougla može se dati i ovaj oblik od interesa za raznovrsne primene:

Stavimo u nejednačini (102) da je

$$F(t)=\Phi(p-t),$$

pa će $\Phi(t)$ opet biti konveksna funkcija promenljive t pošto je

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2}=\frac{d^2F}{dt^2}=\frac{d^2f}{dt^2}.$$

Obrazac (102) tada postaje

$$3\,\Phi\left(\frac{p}{3}\right)\leqslant \Phi(p-a)+\Phi(p-b)+\Phi(p-c)\leqslant \Phi(p)+2\,\Phi(0).$$

Kad se npr. uzme da je

$$\Phi(t)=t^k \quad (k>1)$$

dobija se

$$\frac{p^k}{3^{k-1}}\leqslant (p-a)^k+(p-b)^k+(p-c)^k\leqslant p^k.$$

Kad se u obrascu (102) uzme da je

$$F(t)=\frac{t}{2\,p-t},$$

$F(t)$ će opet biti konveksna funkcija promenljive t za $t=a$, $t=b$, $t=c$, pošto je

$$\frac{d^2 F}{dt^2}=\frac{4\,p}{(2\,p-t)^2},$$

a svaka je od razlika $2\,p-a$, $2\,p-b$, $2\,p-c$ pozitivna.

Obrazac (102) tada postaje

$$\frac{3}{2}\leqslant\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\leqslant 2$$

što znači *da je za sve trougle*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1{,}5+\vartheta\cdot 0{,}5 \qquad (0\leqslant\vartheta\leqslant 1).$$

Uostalom, kadgod je $F(t)$ takva homogena funkcija po promenljivima p i t, onda, ako je to homogena funkcija nultog reda, donja i gornja granica razmaka, u kome će se nalaziti zbir

$$F(a)+F(b)+F(c),$$

imaće se u obliku apsolutnog broja. *Kad je stepen homogenosti te funkcije jednak kakvom broju h, granice razmaka dobiće se u obliku vrednosti p^h pomnožene jednim apsolutnim brojem.*

I primer: hipotenuza c pravouglog trougla, za koji je poznat samo zbir $a+b$ dveju kateta, je

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\lambda\,(a+b) \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}<\lambda<1\right),$$

prema čemu je

$$c=(0{,}7071+\vartheta\cdot 0{,}2929)\,(a+b).$$

II primer: hipotenuza h pravouglog trougla, čije su katete dijagonale paralelograma obima s, uvek leži u razmaku između $\frac{s}{2}$ i s, tako da je

$$h = s\frac{1+\vartheta}{2}.$$

To izlazi neposredno iz osobine paralelograma da je zbir kvadrata njegove četiri strane jednak zbiru kvadrata njegovih dijagonala.

III primer: koji pravougli trougli mogu imati kao svoje dve katete zbir kateta i hipotenuzu drugog jednog pravouglog trougla?

Ako se katete prvog trougla označe sa a i b, a katete drugoga sa a' i b', treba da je

$$a = a' + b'$$

$$b = \sqrt{a'^2 + b'^2} = \lambda\,[a' + b'] \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \lambda \leqslant 1\right),$$

prema tome jedan ugao α prvog trougla treba da je takav da je

$$tg\,\alpha = \frac{b}{a} = \lambda,$$

tj. treba da leži u razmaku između $35^\circ\,16'$ i 45° (a drugi ugao između 45° i $54^\circ\,44'$).

IV primer: znajući zbir strana $a+b+c$ jednog paralelepipeda, odrediti mu dužinu dijagonale d. Pošto je

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \mu\,(a+b+c) \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{3}} < \mu \leqslant 1\right),$$

to je

$$d = (0{,}5774 + \vartheta \cdot 0{,}4226)\,(a+b+c).$$

V primer: znajući zbir strana $a+b+c=s$ jednog paralelepipeda, kao i to da se od strana a, b, c može sastaviti jedan trougao, odrediti dužinu dijagonale d paralelepipeda.

Kao što je napred pokazano, kad su a, b, c, tri strane jednog trougla, količnik

$$s = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{a+b+c}$$

leži u razmaku između $\frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}5774$ i $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071$.

Prema tome dužina d dijagonale leži u razmaku između

$$0{,}5774\,s \quad \text{i} \quad 0{,}7071\,s.$$

Ako se, dakle, za d uzme sredina tog razmaka, tako da je

$$d = 0{,}6422\, s,$$

učinjena greška ne premaša vrednost $0{,}0649\, s$, tj. $6^1/_2\, ^0/_0$.

VI primer: iz poznatog obrasca

$$m^2 + n^2 + p^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

za dužine m, n, p medijana jednog trougla čije su strane a, b, c, dobija se da je

$$\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda(a + b + c) \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{3}} < \lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

Prema tome dijagonala d paralelepipeda, koji ima za strane medijane jednog trougla čiji je obim s, određena je razmakom

$$d = (0{,}5 + \vartheta \cdot 0{,}1124)\, s.$$

Iz toga se npr. vidi da se pravougli trougli, koji imaju kao jednu katetu obim jednoga trougla, a kao drugu katetu dijagonalu paralelepipeda sastavljenog iz medijana istog trougla kao strana, nalaze samo među onim pravouglim trouglima čiji jedan ugao ima za tangens kakvu vrednost, koja se nalazi u razmaku između

$$0{,}5 \quad \text{i} \quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = 0{,}6124,$$

tj. čiji se jedan ugao nalazi u razmaku između

$$26^\circ\, 33' \quad \text{i} \quad 31^\circ\, 28'.$$

VII primer: u geometriji je poznata ova teorema za pravilne poligone od n strana: zbir kvadrata odstojanja jedne proizvoljne tačke na opisanom krugu, od svih temena poligona, ima za vrednost $2\, nR^2$, gde je R poluprečnik toga kruga. Ako se, dakle, ta rastojanja označe sa $a_1, a_2, \ldots, a_n$, biće

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = R\sqrt{2\, n}.$$

Prema napred dokazanom rezultatu je

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \lambda(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \lambda \leqslant 1\right);$$

međutim, ni jedna ni druga od tih dveju granica nije nikad dostignuta, jer na opisanom krugu ne postoji ni jedna tačka, za koju će sva rastojanja a_k biti među sobom jednaka, ili sva jednaka nuli osim jednoga od njih.

Iz toga se vidi da se zbir rastojanja

$$s=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

uvek nalazi u razmaku između

$$R\sqrt{2n} \quad \text{i} \quad nR\sqrt{2},$$

tako da je

$$s=[\sqrt{2n}+\vartheta\sqrt{2}\,(n-\sqrt{n})]\,R.$$

Za trougao će npr. biti

$$s=(2{,}4495+\vartheta\cdot 1{,}7931)\,R;$$

za kvadrat

$$s=2{,}8284\,(1+\vartheta)\,R;$$

za pentagon

$$s=(3{,}1623+\vartheta\cdot 3{,}9088)\,R \text{ itd.}$$

Kad je, na mesto poluprečnika R opisanog kruga, data dužina a strane poligona, treba u gornjim obrascima zameniti

za trougao $$R=\frac{\sqrt{3}}{3}\,a=0{,}5773\,a,$$

dakle

$$s=(1{,}4140+\vartheta\cdot 1{,}0351)\,a;$$

za kvadrat $$R=\frac{a}{\sqrt{2}}=0{,}7071\,a,$$

dakle

$$s=2\,(1+\vartheta)\,a;$$

za pentagon $R=\dfrac{a}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}}=0{,}8506\,a,$

dakle

$$s=(2{,}6897+\vartheta\cdot 3{,}3248)\,a.$$

Kad je, na mesto R, data površina P poligona, treba smeniti: za trougao

$R=\dfrac{2}{\sqrt[4]{27}}\sqrt{P}=0{,}8774\ \sqrt{P},$

dakle

$$s=(2{,}1491+\vartheta\cdot 1{,}5732)\sqrt{P};$$

za kvadrat $$R=\sqrt{\frac{P}{2}}=0{,}7071\sqrt{P},$$

dakle

$$s=2\,(1+\vartheta)\sqrt{P};$$

za pentagon $$R=\sqrt{\frac{8}{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}\sqrt{P}=0{,}3856\sqrt{P},$$

dakle

$$s=(1{,}2193+\vartheta\cdot 1{,}5072)\sqrt{P}.$$

VIII primer: u geometriji je poznata i ova teorema za pravilne poligone od n strana ($n>3$): neka su $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ projekcije temena $A_1, A_2, \ldots, A_n$ poligona na jednu proizvoljnu pravu, O' projekcija središta poligona na istu pravu; ako se stavi da je

$$S=\overline{O'A'_1}^4+\overline{O'A'_2}^4+\cdots+\overline{O'A'_n}^4,$$

uvek je

$$S=\frac{3n}{8}R^4.$$

Prema tome je

$$\sqrt[4]{S}=R\sqrt[4]{\frac{3n}{8}},$$

a pošto je, prema napred pokazanom

$$\sqrt[4]{S}=\lambda s, \qquad \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\leqslant\lambda\leqslant 1$$

gde je

$$s=\overline{O'A'_1}+\overline{O'A'_2}+\cdots+\overline{O'A'_n},$$

to se vrednost $s=\frac{1}{\lambda}\sqrt[4]{S}$ uvek nalazi u razmaku između

$$R\sqrt[4]{\frac{3n}{8}} \quad \text{i} \quad nR\sqrt[4]{\frac{3}{8}}.$$

Prema tome: zbir rastojanja $\overline{O'A'_k}$ predstavljen je razmakom

$$\sqrt[4]{\frac{3n}{8}}[1+\vartheta(\sqrt[4]{n}-1)]R,$$

koji se npr. za trougao svodi na

$$\sqrt[4]{\frac{9}{8}}(1+\vartheta\cdot 0{,}7320)R=(1{,}0299+\vartheta\cdot 0{,}7539)R,$$

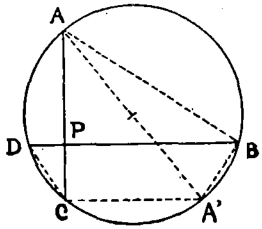
za kvadrat na

$$\sqrt[4]{\frac{3}{2}}(1+2\vartheta)R=(1{,}1067+\vartheta\cdot 2{,}2134)R,$$

za pentagon na

$$\sqrt[4]{\frac{15}{8}}(1+\vartheta\cdot 1{,}2360)R=(1{,}1702+\vartheta\cdot 1{,}4463)R.$$

IX primer: ako se iz jedne tačke na krugu poluprečnika r povuku dve, jedna na drugu upravne sečice $\overline{AC}$ i $\overline{DB}$, zbir odsečaka $\overline{AC}+\overline{DB}$ ima dužinu koja se uvek nalazi u razmaku između $2r$ i $2r\sqrt{2}$.



Jer je

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=\overline{AB}^2, \qquad \overline{PC}^2+\overline{PD}^2=\overline{DC}^2=\overline{A'B}^2,$$

pa dakle

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=\overline{AB}^2+\overline{A'B}^2=4r^2.$$

Vrednost zbira kvadrata na levoj strani nalazi se u razmaku između vrednosti

$$\frac{(\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD})^2}{4}=\frac{(\overline{DB}+\overline{AC})^2}{4}$$

i vrednosti

$$(\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD})^2=(DB+AC)^2$$

i prema tome je

$$\frac{(\overline{DB}+\overline{AC})^2}{2}\leqslant 4r^2\leqslant(\overline{DB}+\overline{AC})^2.$$

Odatle je

$$2r\leqslant\overline{DB}+\overline{AC}\leqslant 4r,$$

čime je gornje tvrđenje dokazano.

Iz toga se, u isto vreme, vidi i ovo: ako se zbir odsečaka dveju međusobno upravnih sečica kruga označi sa l, prečnik kruga uvek se nalazi u razmaku između $\frac{1}{2}\,l$ i l.

Ako se kroz jednu stalnu, proizvoljno izabranu tačku P u krugu povuče jedan ma koji par među sobom upravnih sečica, može se dokazati da se zbir odsečaka $\overline{DB}+\overline{AC}$ uvek nalazi u razmaku između

$$2\sqrt{2r^2-d^2} \quad \text{i} \quad 2\sqrt{2}\sqrt{2r^2-d^2}.$$

Jer je

$$\overline{AC}=\overline{PA}+\overline{PC}, \qquad \overline{DB}=\overline{PB}+\overline{PD},$$

a odatle kvadriranjem i sabiranjem

$$\overline{AC}^2+\overline{DB}^2=\overline{PA}^2+\overline{PC}^2+\overline{PB}^2+\overline{PD}^2+2\,\overline{PA}\cdot\overline{PC}+2\,\overline{PB}\cdot\overline{PD}.$$

Sa druge strane, ako se sa d označi stalno rastojanje $\overline{OP}$, biće

$$\overline{PA}\cdot\overline{PC}=\overline{PB}\cdot\overline{PD}=r^2-d^2,$$

pa će, vodeći računa o gore nađenoj jednačini, biti

$$\overline{AC}^2+\overline{DB}^2=8\,r^2-4\,d^2,$$

pa pošto se vrednost zbira kvadrata na levoj strani nalazi u razmaku između

$$\frac{(\overline{AC}+\overline{DB})^2}{2} \quad \text{i} \quad (\overline{AC}+\overline{DB})^2,$$

tako da je

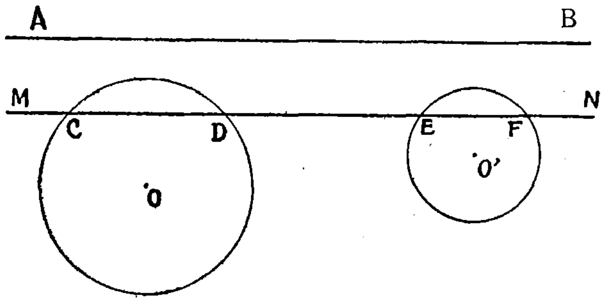
$$\frac{(\overline{AC}+\overline{DB})^2}{2}\leqslant 8\,r^2-4\,d^2\leqslant(\overline{AC}+\overline{DB})^2,$$

biće

$$2\sqrt{2\,r^2-d^2}\leqslant\overline{AC}+\overline{DB}\leqslant 2\sqrt{2}\sqrt{2\,r^2-d^2},$$

što dokazuje gornje tvrđenje.

Slični se rezultati dobijaju i za odsečke koje u jednoj kugli čini jedan sistem od tri među sobom upravne sečice.



X Primer: data su dva kruga sa središtima O i O' i jedna prava $\overline{AB}$; povući jednu zajedničku sečicu $\overline{MN}$ za oba kruga, paralelnu pravoj $\overline{AB}$ i takvu da zbir $\overline{CD}+\overline{EF}$ njenih odsečaka ima datu dužinu λ.

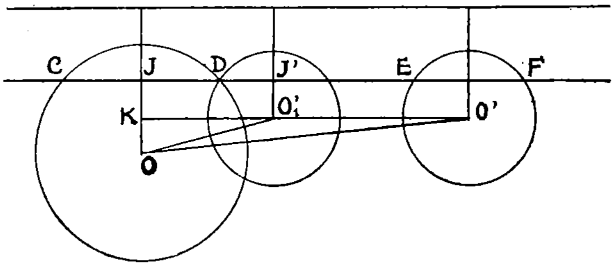
Povucimo na pravu $\overline{AB}$ dve upravne i iz O' pravu $\overline{O'K}$ paralelnu pravoj $\overline{AB}$. Pomerimo krug O' paralelno pravoj AB dotle dok se tačka E ne poklopi se tačkom D i neka je O'_1 nov položaj središta O', pa će biti

$$\overline{KO'}_1=\overline{JD}+\overline{DJ'}=\frac{\overline{CD}}{2}+\frac{\overline{EF}}{2}=\frac{\lambda}{2}.$$

Ako se oko O'_1, sa poluprečnikom $\overline{O'E}$, opiše krug, presek ovoga sa krugom O pašće tačno u tačku D.

Označimo sa *d*, *r*, *r' nepromenljivu* dužinu $\overline{OK}$ i poluprečnike krugova O i O'. Izrazivši da se krugovi O i O' seku ili dodiruju, dobija se za mogućnost rešenja zadatka ovaj uslov: potrebno je i dovoljno da bude

$$r-r' \leqslant \overline{OO_1'} \leqslant r+r',$$



a pošto je

$$\overline{OO'_1}^2 = \overline{OK}^2 + \overline{KO'_1}^2 = d^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2,$$

to se kvadriranjem gornjih nejednačina dobija kao uslov

$$(r-r')^2 - d^2 \leqslant \frac{\lambda^2}{4} \leqslant (r+r')^2 - d^2,$$

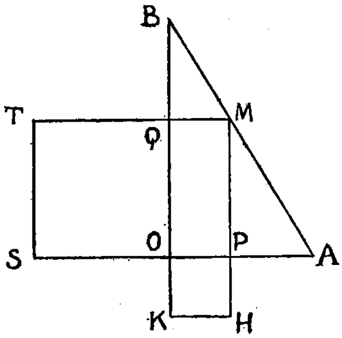
što znači da je potrebno i dovoljno da se dužina λ nalazi u razmaku između dužina

$$2\sqrt{(r-r')^2-d^2} \quad \text{i} \quad 2\sqrt{(r+r')^2-d^2}.$$

B) Zadaci koji se svode na proučavanje trinoma drugog stepena. Veliki broj geometrijskih zadataka svodi se na određivanje brojnih razmaka u vezi sa trinomom drugog stepena

$$f(x) = ax^2 + 2bx + c$$

to tako da se rešenje zadatka sastoji ne u odredbi vrednosti x za koje taj trinom postaje jednak nuli, već u odredbi razmaka u kome treba da se nalazi bilo sama vrednost x, bilo kakav promenljiv parametar λ, koji figuriše u koeficijentima a, b, c trinoma. Takve su vrste zadaci navedeni u sledećim primerima:



I primer: iz proizvoljne tačke M na hipotenuzi AB pravouglog trougla AOB povuku se dve upravne MP i MQ na katete trougla, pa se na odsečcima OP i OQ ovih konstruišu dva kvadrata $OPHK$ i $OSTQ$. Za koji će položaj tačke M površina ograničena isprelamanom linijom $MPHKOSTQM$ imati datu vrednost λ^2?

Označimo da je

$$\overline{OA} = a, \quad \overline{OB} = b, \quad \overline{OP} = x \qquad (a<b)$$

pa se dobija jednačina

$$\lambda^2 = x^2 + \frac{b^2(a-x)^2}{a^2} + \frac{bx(a-x)}{a},$$

ili

$$f(x) = (a^2 - ab + b^2)\,x^2 - ab\,(2\,b - a)\,x + a^2(b^2 - \lambda^2) = 0.$$

Da bi rešenje postojalo, potrebno je i dovoljno da su koreni jednačine realni i da se bar jedan od njih nalazi u razmaku između 0 i a. Prvi uslov traži da je

$$\lambda^2 \geqslant \frac{3\,a^2 b^2}{4\,(a^2 - ab + b^2)}, \tag{107}$$

a da bi se proučio drugi uslov, treba ispitati znake izraza

$$f(0) = a^2(b^2 - \lambda^2),$$

$$f(a) = a^2(a^2 - \lambda^2),$$

i razlikovati ove slučajeve:

1° kad se λ^2 nalazi u razmaku između a^2 i b^2, vrednosti $f(0)$ i $f(a)$ imaju suprotne znake, što znači da postoji jedna vrednost x koja zadovoljava uslov zadatka;

2° kad je $\lambda^2 < a^2$, onda je i $\lambda^2 < b^2$; obe su vrednosti $f(0)$ i $f(a)$ pozitivne; tada, ako je ispunjen uslov realnosti (107), ili će oba korena zadovoljiti uslov zadatka, ili ga neće zadovoljiti ni jedan od njih. Da bi se imao prvi slučaj, potrebno je i dovoljno da se vrednost poluzbira tih korena nalazi u razmaku između nule i a, tj. da bude

$$0 < \frac{ab\,(2\,b - a)}{2\,(a^2 - ab + b^2)} < a,$$

što će biti ako je u jedno isto vreme

$$2\,b - a > 0 \quad \text{i} \quad 2\,a - b > 0.$$

Prva nejednačina postoji pošto je $a < b$; druga traži da je

$$a > \frac{b}{2}.$$

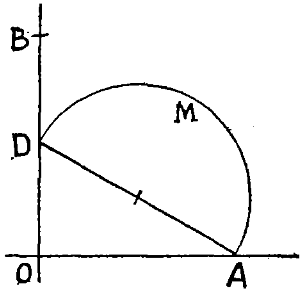
Prema tome, da bi oba korena jednačine $f(x) = 0$ zadovoljila uslov zadatka, potrebno je i dovoljno:

α) da se a nalazi u razmaku između $\dfrac{b}{2}$ i b;

β) da se λ^2 nalazi u razmaku između

$$\frac{3\,a^2 b^2}{4\,(a^2 - ab + b^2)} \quad \text{i} \quad a^2.$$

II primer: na kracima pravog ugla obeleže se tačke A i B na odstojanjima $OA=a$, $OB=b$ od temena; odrediti na OB takvu jednu tačku D, da zbir poluobima kruga DMA i odsečka DB bude jednak datoj dužini λ.



Ako se za nepoznatu uzme dužina $BD=x$, zadatak se svodi na jednačinu

$$\frac{1}{2}\pi\sqrt{a^2+(b-x)^2}+x=\lambda,$$

tj. na jednačinu

$$(108) \qquad (\pi^2-4)x^2-2(\pi^2 b-4\lambda)x+ \\ +\pi^2(a^2+b^2)-4\lambda^2=0.$$

Da bi vrednost x, dobijena rešenjem te jednačine, dala rešenje zadatka, potrebno je i dovoljno da ona bude realna, pozitivna i manja od λ.

Uslov realnosti se može dovesti na oblik

$$(2\lambda-2b+a\sqrt{\pi^2-4})(2\lambda-2b-a\sqrt{\pi^2-4})\geqslant 0,$$

Ovaj uslov biće zadovoljen ili kad je

$$(109) \qquad \lambda\leqslant b-\frac{a}{2}\sqrt{\pi^2-4},$$

ili kad je

$$(110) \qquad \lambda\geqslant b+\frac{a}{2}\sqrt{\pi^2-4}.$$

Lako se vidi da je uvek $\lambda>b$ i da prema tome nejednačina (109) ne može biti zadovoljena tako da dolazi u obzir samo nejednačina (110).

Proizvod korena kvadratne jednačine (108) ima za vrednost

$$(111) \qquad \frac{\pi^2(a^2+b^2)-4\lambda^2}{\pi^2-4},$$

pa pošto je imenilac pozitivan broj, taj će proizvod imati znak svoga brojioca. I onda se imaju razlikovati ovi slučajevi:

α) neka se λ nalazi u razmaku između

$$b+\frac{a}{2}\sqrt{\pi^2-4} \quad \text{i} \quad \frac{\pi}{2}\sqrt{a+b^2}.$$

Tada je proizvod (111) pozitivan, pa su dakle koreni x istog znaka, a to je znak njihovog zbira

$$(112) \qquad \frac{2(\pi^2 b-4\lambda)}{\pi^2-4};$$

oni će biti pozitivni, tj. moći predstavljati rešenja zadatka samo kad je

$$\lambda < \frac{\pi^2 b}{4}.$$

β) neka je

$$\lambda = \frac{\pi}{2}\sqrt{a^2+b^2};$$

pošto je proizvod (111) jednak nuli, jedan je od korena x jednak nuli; da bi drugi koren dao rešenje zadatka, on treba da je pozitivan, tj. treba da je pozitivan brojilac izraza (112), što zahteva da je

$$a < \frac{b}{2}\sqrt{\pi^2-4};$$

γ) neka je

$$\lambda > \frac{\pi}{2}\sqrt{a^2+b^2};$$

tada je izraz (111) negativan i koreni x su suprotno označeni; u tome slučaju postoji jedan pozitivan koren x i on daje rešenje zadatka.

C) Brojni razmaci u trigonometrijskim zadacima. Na određivanje brojnih razmaka u trigonometrijskim zadacima nailazi se ili pri ispitivanju realnosti rešenja, ili po samim osobinama trigonometrijskih funkcija realnih količina da ne mogu izići van jednog određenog razmaka, kao što je npr. slučaj sa sinusom, kosinusom i raznovrsnim njihovim kombinacijama.

I primer: podeliti dati ugao α na dva takva dela da zbir tangensa tih delova ima datu vrednost 2λ.

Ako se ti delovi označe sa x i y, imaće se dve jednačine

$$x+y=\alpha, \quad \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2\lambda.$$

Drugoj se jednačini može dati oblik

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} = 2\lambda,$$

pa pošto je

$$\sin(x+y) = \sin\alpha,$$

$$2\cos x \cdot \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y) = \cos\alpha + \cos(x-y)$$

ta ista jednačina postaje

(113) $$\cos(x-y) = \frac{\sin\alpha}{\lambda} - \cos\alpha.$$

Ako je, dakle, β najmanji ugao čiji kosinus ima za vrednost desnu stranu jednačine (113), za odredbu nepoznatih x i y imaće se dve jednačine

$$x+y=\alpha, \quad x-y=2\lambda\pi\pm\beta,$$

koje daju rešenja x i y.

Ali da bi rešenje imalo smisla, treba da je

$$-1<\frac{\sin\alpha}{\lambda}-\cos\alpha<+1,$$

što se može napisati i u obliku

$$-(1-\cos\alpha)<\frac{\sin\alpha}{\lambda}<1+\cos\alpha.$$

Kad je npr. $\sin\alpha>0$, te nejednačine pokazuju da se vrednost $\frac{1}{\lambda}$ mora nalaziti u razmaku između

$$-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \quad \text{i} \quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

II primer: kad je α dat oštar ugao, za koje će vrednosti x izraz

$$(x-1)[x^4-2(1+\cos^2\alpha)x^2+\sin^4\alpha]$$

biti pozitivan?

Izraz se može napisati u obliku

$$(x-1)[x+(1+\cos\alpha)][x+(1-\cos\alpha)][x-(1-\cos\alpha)][x-(1+\cos\alpha)].$$

Pošto je $\cos\alpha>0$, izraz će biti pozitivan ako se x nalazi u jednome, ma kome, od ova tri razmaka

$$\begin{array}{llll} \text{ili između} & -(1-\cos\alpha) & \text{i} & -(1+\cos\alpha) \\ \text{ili između} & 1-\cos\alpha & \text{i} & 1 \\ \text{ili između} & 1+\cos\alpha & \text{i} & +\infty. \end{array}$$

III primer: za kakve se pozitivne vrednosti x, y, z može napisati da je

$$x^2=y^2+z^2-2yz\cos\alpha,$$

gde je α kakav realan ugao?

Pošto se vrednost

$$\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}=\cos\alpha$$

mora nalaziti u razmaku između -1 i $+1$, to se dobijaju dve nejednačine iz kojih se nalazi da x treba da se nalazi u razmaku između

$$|y-z| \quad \text{i} \quad (y+z).$$

IV primer: odrediti elemente jednog trougla znajući mu dužinu a jedne strane, suprotni ugao A i zbir k^2 kvadrata ostalih dveju strana b i c.

Za odredbu strana b i c ima se sistem od dve jednačine

$$b^2+c^2=k^2, \quad a^2=b^2+c^2-2\,bc\cos A, \tag{114}$$

odakle je

$$2\,bc=\frac{k^2-a^2}{\cos A}.$$

Dodavanjem te vrednosti i oduzimanjem prvoj od jednačina (114), dobijaju se dve jednačine

$$(b+c)^2=\frac{k^2(1+\cos A)-a^2}{\cos A}, \qquad (b-c)^2=\frac{a^2-k^2(1-\cos A)}{\cos A}, \tag{115}$$

iz kojih se mogu izračunati b i c. Da bi rešenje imalo smisla, potrebno je i dovoljno:

α) da desne strane jednačina (115) budu pozitivne;

β) da se a nalazi u razmaku $(b-c,\ b+c)$.

Razlikujmo ova dva slučaja prema tome da li je ugao A oštar ili tup:

1° ugao A je oštar; uslov α) svodi se na dvostruku nejednačinu

$$k^2(1-\cos A)<a^2<k^2(1+\cos A),$$

a uslov β) na

$$\frac{a^2-k^2(1-\cos A)}{\cos A}<a^2<\frac{k^2(1+\cos A)-a^2}{\cos A}$$

iz koje izlazi da treba da bude

$$k^2>a^2.$$

Ti se uslovi tada svode na

$$2\,k^2\sin^2\frac{A}{2}<a^2<k^2$$

što znači da zbir k^2 treba da se nalazi u razmaku između

$$a^2 \quad \text{i} \quad \frac{a^2}{2\sin^2\dfrac{A}{2}};$$

2° ugao A je tup; uslov α) svodi se na dvostruku nejednačinu

$$k^2(1+\cos A)<a^2<k^2(1-\cos A),$$

a uslov β) na

$$k^2<a^2.$$

Ti se uslovi tada svode na

$$k^2 < a^2 < k^2(1 - \cos A)$$

što znači da k^2 treba da se nalazi u razmaku između

$$\frac{a^2}{2\sin^2\frac{A}{2}} \quad \text{i} \quad a^2.$$

V primer: neka su a, b, c strane trougla ABC; kad su date dve strane a i b ($b > a$), a nije dat i njima zahvaćen ugao C, treća strana c određena je razmakom

$$c = (b - a) + 2\vartheta a,$$

pošto je uvek

$$b - a \leqslant c \leqslant b + a.$$

Kad je, pak, dat i ugao C, biće

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C}.$$

Iz odnosa

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b},$$

dobija se

$$a = \frac{\sin A}{\sin A + \sin B}(a + b), \quad b = \frac{\sin B}{\sin A + \sin B}(a + b),$$

tako da je

$$c = (a + b)\varphi(A, B, C),$$

gde je

$$\psi(A, B, C) = \frac{\sqrt{\sin^2 A + \sin^2 B - 2\sin A \cdot \sin B \cdot \cos C}}{\sin A + \sin B}.$$

Identičnost

$$2pq = (p + q)^2 - (p^2 + q^2),$$

uzevši da je

$$p = \sin A, \quad p = \sin B,$$

pretvara izraz φ u

$$\varphi(A, B, C) = \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{(p + q)^2}(1 + \cos C) - \cos C},$$

a pošto su p i q uvek pozitivni, biće

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{p^2 + q^2}{(p + q)^2} \leqslant 1.$$

To pokazuje da je

$$\sqrt{\frac{1+\cos C}{2}-\cos C} \leqslant \varphi\,(A, B, C) \leqslant 1,$$

što prema obrascu

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

daje

$$\sin\frac{C}{2} \leqslant \varphi\,(A, B, C) \leqslant 1,$$

čime se dolazi do ovoga rezultata: strana c trougla ABC uvek se nalazi u razmaku između

$$(a+b)\sin\frac{C}{2} \quad \text{i} \quad (a+b).$$

Prema obrascu

$$1-\sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right),$$

to pokazuje da je

$$c = \left(\sin\frac{C}{2}+2\vartheta\cdot\cos^2\frac{\pi+C}{2}\right)(a+b),$$

a taj obrazac daje mogućnost da se iz zbira dveju strana i zahvaćenog ugla jednoga trougla izračuna treća strana u obliku razmaka.

Ako se za c uzme sredina toga razmaka, tako da je

$$c = (a+b)\cos^2\frac{\pi-C}{4}$$

učinjena greška po apsolutnoj vrednosti neće premašiti vrednost

$$(a+b)\cos^2\frac{\pi+C}{4},$$

a relativna greška neće premašiti vrednost

$$\varDelta c = \left(\frac{\cos\dfrac{\pi+C}{4}}{\cos\dfrac{\pi-C}{4}}\right)^2 = \operatorname{tg}^2\frac{\pi-C}{4}.$$

Ova je greška utoliko manja, ukoliko se ugao C manje razlikuje od 180°; za taj ugao ona je jednaka nuli.

Uopšte, gornji je rezultat od naročitog interesa za trougle ABC sa tupim uglom C. Za takve trougle, ako se uzme da je

$$c=(a+b)\cos^2\frac{\pi-C}{4},$$

učinjena relativna greška nikad ne premaša vrednost

$$\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{8}=0{,}171\ldots$$

a ona brzo opada kad se C približuje uglu od 180°. Tako je

$$\begin{array}{lll} \text{za} & C>120^\circ & \Delta C<0{,}070, \\ & C>140^\circ & \Delta C<0{,}040, \\ & C>150^\circ & \Delta C<0{,}018, \\ & C>160^\circ & \Delta C<0{,}007, \\ & C>170^\circ & \Delta C<0{,}002, \\ & C>175^\circ & \Delta C<0{,}0003. \end{array}$$

Trouglovi za koje je relativna greška ΔC manja, po apsolutnoj vrednosti, od jednog datog broja ε, jesu oni za koje je tup ugao C, izražen u delovima od π, veći od razlike

$$\pi-4\,\mathrm{arctg}\sqrt{\varepsilon},$$

ili, za dovoljne male vrednosti ε

$$C>\pi-4\sqrt{\varepsilon}.$$

Obim s trougla ABC izražen pomoću zbira $a+b$ i ugla C, je

$$s=\left(1+\sin\frac{C}{2}+2\vartheta\cdot\cos^2\frac{\pi+C}{4}\right)(a+b).$$

Ako se, dakle, za obim uzme sredina toga razmaka, tako da je

$$s=\left(1+\sin\frac{C}{2}+\cos^2\frac{\pi+C}{4}\right)(a+b)$$

učinjena greška neće, po apsolutnoj vrednosti, premašiti vrednost

$$(a+b)\cdot\cos^2\frac{\pi+C}{4}.$$

12. POTPUNA I NEPOTPUNA FUNKCIONALNA ZAVISNOST

Kad dve promenljive količine x i y stoje u takvoj međusobnoj vezi, da datoj vrednosti jedne od njih odgovara, ne ma kakva, već jedna ili više potpuno određenih vrednosti druge, za te se količine kaže da su u *funkcionalnoj vezi* jedna sa drugom, da su *funkcije* jedna od druge. Taj je pojam uveden još pri osnivanju i prvoj obradi opštega računa sa funkcijama, kad se pojavio problem uspostavljanja veze između postupnih promena jedne količine i odgovarajućih promena drugih količina koje se sa njome uporedo menjaju.

Međutim, pored takve *potpuno određene*, postoji još i *nepotpuno određena funkcionalna zavisnost* između promenljivih količina, na koju smo već nailazili u ranijem izlaganju. Pojam o njoj dobićemo najlakše i najbrže iz ovih nekolikih prostih primera.

Na prvi pogled izgledalo bi npr. da ne postoji nikakva funkcionalna zavisnost između dužine hipotenuze c i zbira s kateta a i b jednog pravouglog trougla. Tako, mogućno je postupno menjati zbir s, a da hipotenuza c ostane ista, i obrnuto. Dovoljno je npr. da se davši zbiru s jednu proizvoljno izbranu vrednost, za katetu a uzme jedan koren kvadratne jednačine

$$a^2+(s-a)^2=A^2$$

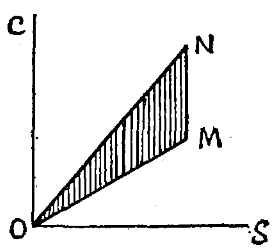
a za drugu katetu razlika $s-a$, pa da pored sve proizvoljnosti zbira s hipotenuza c ima vrednost A koja se ne menja kad se menja s. Tako isto se može učiniti da se hipotenuza c menja sa zbirom s po proizvoljnom zakonu $c=\varphi(s)$; dovoljno je uzeti za katetu a jedan koren kvadratne jednačine

$$a^2+(s-a)^2=[\varphi(s)]^2,$$

a za drugu katetu razliku $s-a$. Međutim, ipak između c i s postoji jedna vrsta zavisnosti: napred nađena dvostruka nejednačina

$$(a+b)^2 \leqslant a^2+b^2 \leqslant 2(a+b)^2$$

pokazuje da c nikad ne izlazi iz razmaka koji se nalazi između vrednosti s i $s\sqrt{2}=s\cdot 1{,}4142\ldots$ Ako se u ravni xOy povuku dve prave OM i ON, od kojih prva zaklapa sa osom Ox ugao od $45°$, a druga ugao od $54°\,44'$, tačka P čije su koordinate $x=s$, $y=c$ nikad nije izvan oblasti između tih pravih. Ona se može u specijalnim slučajevima i poklopiti sa jednom ili drugom od tih dveju pravih: i to sa pravom ON kad je trougao ravnokrak, a sa pravom OM kad se jedna kateta trougla smanji do nule.



Između s i c postoji, dakle, jedna naročita vrsta zavisnosti: jednoj datoj vrednosti s ne odgovara ni potpuno određena, ni sasvim proizvoljna vrednost c, već jedna vrednost koja se može proizvoljno menjati samo u jednome određenom razmaku, van koga ona nikad ne može izići. Zavisnost koja bi postojala kad bi datoj vrednosti s odgovarala jedna potpuno određena vrednost c, bila bi geometrijski predstavljena jednom *linijom* u ravni; u gornjem slučaju ona je predstavljena jednom *prugom* čija je širina sve veća ukoliko je dužina s veća, a dužina joj je neograničena. Pruga je ograničena dvema pravama koje se seku u početku i te granične prave mogu biti stvarno dostignute u pojedinim specijalnim slučajevima.

Uzmimo, kao drugi primer, jednačinu trećeg stepena

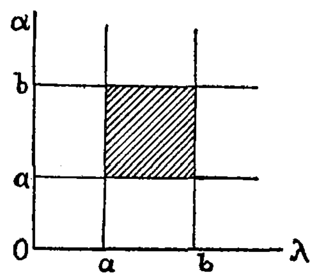
$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0, \tag{116}$$

čiji su koeficijenti realni i pozitivni. Označimo sa λ vrednost jednoga, koga bilo, od tri količnika

$$\frac{a_0}{a_1}, \quad \frac{a_1}{a_2}, \quad \frac{a_2}{a_3}. \tag{117}$$

Na prvi mah bi izgledao da ne postoji nikakva funkcionalna zavisnost između korena jednačine i vrednosti λ, jer se podesnim menjanjem koeficijenata a_0, a_1, a_2, a_3, može učiniti da se npr. λ postupno menja, a da se pri tome ne promeni ni jedan od tri korena. Međutim, ako se pusti da se λ menja u razmaku (a, b) između vrednosti ostala dva količnika (117), napred je pokazano da apsolutne vrednosti sva tri korena jednačine, menjajući se, nikako neće izaći van razmaka (a, b).

Jednoj, dakle, datoj vrednosti λ u razmaku (a, b) opet ne odgovara ni potpuno određena, ni sasvim proizvoljna vrednost korena, već svakome korenu odgovara po jedna vrednost, koja se može proizvoljno menjati samo u jednome određenom razmaku. Takva zavisnost, na mesto toga da bude grafički predstavljena jednom *linijom*, biće predstavljena jednom *prugom* nepromenljive širine, jednake njenoj dužini; zavisnost je iste vrste kao i u prvome primeru. Pruga je ograničena dvema pravama paralelnim osi x i dvema pravama paralelnim osi y.



Uzmimo, kao treći primer, aritmetičku sredinu

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

jednoga niza pozitivnih brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sadržanih u jednom datom razmaku (a, b) i aritmetičku sredinu

$$M = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

vrednosti $f(x_k)$, gde je $f(x)$ jedna data realna, pozitivna i konveksna funkcija promenljive x u razmaku (a, b), tj. takva da je za sve vrednosti x u tome razmaku proizvod

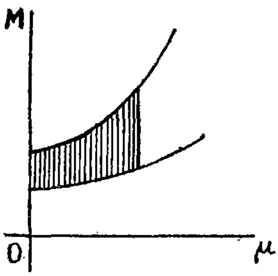
$$f(x) \cdot f''(x)$$

pozitivan.

Izgledao bi, opet, da ne postoji nikakva funkcionalna veza između aritmetičkih sredina μ i M, jer se podesnim menjanjem brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$ može učiniti da se μ potpuno menja, a da se pri tome ne promeni M, ili da se menja po proizvoljno datom zakonu. Međutim, kao što je napred pokazano, ma kako se menjala vrednost μ, vrednost M, menjajući se, nikad neće izaći van razmaka koji se nalazi između vrednosti

$$f(\mu) \quad \text{i} \quad \frac{f(n\mu)+(n-1)f(0)}{n}.$$

Slučaj je iste vrste kao onaj u gornja dva primera; grafički predstavnik zavisnosti između μ i M biće jedna *pruga* čija se širina menja sa veličinom μ, a dužina je neograničena. Pruga je ograničena dvema krivim linijama



$$y = f(x) \quad \text{i} \quad y = \frac{f(nx)+(n-1)f(0)}{n}$$

koje su obe konveksne prema osovini ox.

Ovakvu vrstu *nepotpuno određene funkcionalne zavisnosti*, na kakvu se nailazi u gornjim primerima, a koja je *apsolutno objektivna* i proizlazi od same prirode stvari, ne treba mešati sa jednom *čisto subjektivnom* činjenicom slične vrste, na koju se često nailazi pri rešavanju matematičkih zadataka. Dešava se, naime, da je, ma da zadatak ima svoje matematički tačno rešenje u obliku *jednoga tačnoga broja*, do toga rešenja praktično nemoguće doći, ali se ipak može utvrditi jedan brojni razmak u kome će se to rešenje tačno nalaziti.

Tako npr. mada je količnik obima jednoga kruga i njegovog prečnika tačan broj $\pi = 3{,}141592\ldots$, ovaj se ne može odrediti tačno sa svima njegovim beskrajno mnogim decimalama, ali se npr. lako saznaje da se on nalazi u razmaku između $\frac{333}{106}$ i $\frac{22}{7}$.

Tako isto, kad je data jednačina petoga stepena

$$x^5 - 80x + a = 0,$$

gde je a promenljiv parametar, nemoguće je odrediti tačno njene korene ma da ovi postoje; međutim se lako saznaje primenom Rolleove teoreme da ona ima:

1° tri realna korena kad se a nalazi u razmaku $(-128, +128)$ i ta tri korena leže u sledećim razmacima:

α) $a>0$, u razmacima $(-\infty, -2)$, $(0, +2)$, $(+2, +\infty)$,

β) $a<0$, u razmacima $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(+2, +\infty)$;

2° jedan realan koren kad se a nalazi van razmaka $(-128, +128)$ i taj se jedini realan koren nalazi u razmaku:

α) $a>128$, u razmaku $(-\infty, -2)$,

β) $a<-128$, u razmaku $(+2, +\infty)$.

Ali takva je nepotpuno određena zavisnost između korena i koeficijenta čisto subjektivna i proizlazi samo od nesposobnosti onoga koji računa da nađe tačnu funkcionalnu vezu između jedne i druge promenljive količine, ili između decimala jedne i druge, mada takva veza nasigurno postoji. Međutim za zavisnost o kojoj je reč u napred navedenim primerima, postoji *apsolutna nemogućnost* da se ona geometrijski predstavi *linijom*, jer u stvari i ne postoji linija koja bi je predstavljala; ona je po svojoj prirodi izražljiva samo *prugom* stalne ili promenljive širine. Grubo rečeno, takva je zavisnost apsolutno neizražljiva tragom koji u ravni za sobom ostavlja idealno zaoštreni vrh igle; ona se može izraziti samo tragom koji ostavlja jedan segment prave konačne i od nule različne dužine, koji se translatorno kreće u ravni ostajući npr. neprestano paralelan jednom određenom pravcu, ili neprestano upravan na jednu datu krivu itd.

O toj se vrsti zavisnosti mora voditi računa pri sklapanju zadataka, da se ne bi izložilo slučajnosti da zadatak bude besmislen, apsurdan. Zadatak npr. da se odrede uglovi trougla čije su strane $a=6$, $b=2$, $c=3$, besmislen je, jer se strana a mora nalaziti u razmaku između $c-b$ i $c+b$. Zadatak da se odrede elementi pravouglog trougla čija hipotenuza c ima dužinu 7 m a zbir kateta s iznosi 10 m, iako je algebarski potpuno rešiv, jer se za odredbu kateta imaju dve jednačine sa dve nepoznate, besmislen je geometrijski: dužina c mora se se nalaziti u razmaku između s i s 0,7071.

U tako prostim zadacima ovakvu besmislenost nije teško uočiti i na prvi pogled. Ali u masi zadataka to je već teže. Takav bi npr. jedan zadatak bio ovakve vrste: znajući obim s i površinu jednog trougla, dijagonalu d pravouglog paralelepipeda koji ima za strane medijane tog trougla, odrediti elemente istog trougla. Zadatak je algebarski potpuno rešiv. Ali ako se unapred ne vodi računa o tome da se dužina d uvek nalazi u razmaku između

$$\frac{s}{2} \quad \text{i} \quad \frac{s}{2}\sqrt{\frac{3}{2}},$$

može se sklopiti zadatak gornje vrste koji je geometrijski besmislen.

Isti bi slučaj bio npr. sa algebarskim zadatkom da se formira jednačina trećeg stepena

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0,$$

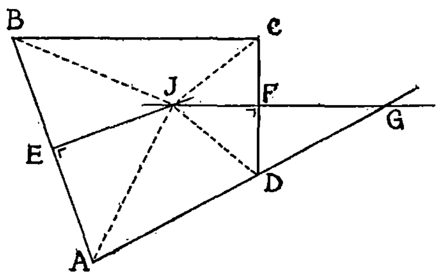
koja će imati kao jedan koren $x=3$, a za koju će sva tri količnika

$$\frac{a_0}{a_1},\ \frac{a_1}{a_2},\ \frac{a_2}{a_3}$$

imati date vrednosti veće od 4. Koren 3, prema onome što je napred rečeno, mora se nalaziti u razmaku između najmanjeg i najvećeg od ta tri količnika; kad su ovi svi veći od 4, koren ne može biti 3.

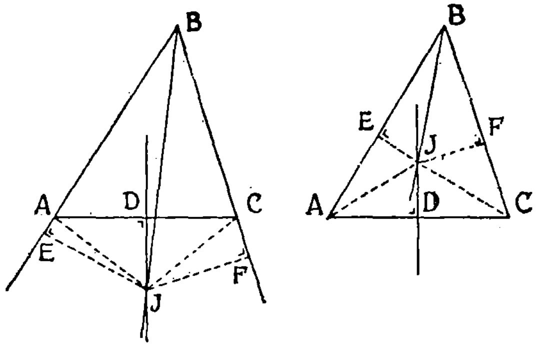
Navešćemo i jedan o poznatih geometrijskih dokaza, koji su netačni ako se pri konstrukciji ne vodi računa o tome, da se izvesna tačka pri toj konstrukciji uvek nalazi, ili nikad ne nalazi, u jednom određenom razmaku.

Neka je dat četvorougao $ABCD$ čiji je jedan ugao C prav, jedan ugao D tup, a strane BC i AD među sobom jednake. Iz sredina E i F strana AB



i CD podignimo dve upravne na te strane. Te upravne ne mogu biti paralelne, jer bi u tom slučaju bile paralelne i strane AB i CD, što se pretpostavlja da nije slučaj. Upravne u E i F seku se, dakle, u jednoj tački J. Bilo da je ta tačka u unutrašnjosti četvorougaonika, bilo da je van ovoga ili na samome njemu, lako se dokazuje da su trougli AJD i BJC među sobom jednaki i da je prema tome ugao ADJ jednak uglu BCJ, tj. da je ugao ADF prav, što po pretpostavci nije. Greška proizilazi otuda što se pri gornjoj konstrukciji nije vodilo računa o tome da se presečna tačka J uvek nalazi, ne samo van četvorougla, već i dalje od presečne tačke G strane AD sa upravnom u F u kome je slučaju gornji dokaz nemoguć.

U tome se primeru ima posla sa slučajem gde jedna karakteristična tačka pri konstrukciji treba da se nalazi *van jednog određenog razmaka.* U sledećem primeru ona treba da se nalazi *u jednom određenom razmaku.* Neka je ABC ma kakav trougao, koji ima sve tri strane nejednake. Povucimo bisektrisu BJ ugla B i upravnu na stranu AC u njenoj sredini D. Te dve prave nisu paralelne, jer bi u tome slučaju trougao bio ravnokrak. One se dakle seku u jednoj tački J. Bilo da je ova tačka u unutrašnjosti trougla, bilo da je van ovoga, lako se dokazuje da su pravougli trougli BJE i BJF, gde su prave EJ i FJ upravne na AB i BC, među sobom podudarni, pa je, dakle, $BE=BF$. Tako su isto pravougli trougli AJE i CJF među sobom podudarni, pa je, dakle, $AE=CF$. Dodajući odnosno oduzimajući jednakim dužinama BE i BF jednake dužine AE i CF dobija se da je $BA=BC$, što nije slučaj i što bi značilo da je svaki



trougao ravnokrak. Greška proizilazi otuda što pri konstrukciji nije vođeno računa o tome da se presečna tačka J nikad ne nalazi u unutrašnjosti trougla; kad je ona već van trougla, presečna tačka E upravne spuštene iz J na veću stranu AB sa samom tom stranom uvek se nalazi u razmaku između tačaka A i B, u kome slučaju je gornji dokaz nemoguć.

Takvi primeri dovoljno pokazuju koliko se pri sklapanju zadataka, ili pri dokazima algebarskih ili geometrijskih rezultata, mora unapred voditi računa o *razmacima* u kojima se, ili van kojih se, određeni elementi moraju nalaziti. A do tih se razmaka dolazi proučavanjem funkcionalnih zavisnosti između algebarskih ili geometrijskih elemenata *i to zavisnosti baš onakve vrste, o kakvoj je reč u ovim predavanjima.*

DRUGI ODELJAK

BROJNI RAZMACI U INFINITEZIMALNOM RAČUNU

13. DIFERENCIJALJENJE I INTEGRALJENJE BROJNIH RAZMAKA

Kad je jedna promenljiva y u nedovoljno određenoj zavisnosti od druge promenljive x, tako, da jednoj određenoj vrednosti x odgovara ne jedna određena vrednost y, već jedan razmak u kome će se ova nalaziti, menjanjem vrednosti x pomeraće se i menjaće se i deformisaće se i taj razmak; krajevi razmaka opisivaće donju i gornju graničnu liniju oblasti u kojoj će se nalaziti vrednost y.

Ako se pusti da promenljiva x priraste, u pozitivnom ili negativnom smislu, za dx, ordinate i jedne i druge granične linije takođe će prirasti za jednu određenu količinu koja se određuje iz jednačina tih linija kao diferencijal njihovih ordinata. Ali sam priraštaj dy promenljive y ostaje neodređen; sve što se može znati je to da se nova vrednost $y+dy$ te promenljive nalazi između graničnih linija, ali se ništa ne može znati za sam priraštaj dy.

To se, uostalom, vidi i posmatranjem računskog predstavnika

$$y=f(u, v, \lambda) \qquad (\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2)$$

gde su u i v dve tačno određene funkcije promenljive x, a λ_1 i λ_2 dva određena broja. Pošto se λ, i ako uvek leži između ta dva broja, menja od jedne vrednosti x do druge, to će i taj parametar λ biti izvesna funkcija promenljive x, za koju ćemo poznavati samo granice njenih varijacija, ali ni ukoliko ne i njen tok ili analitički oblik. Prema tome, neće se poznavati ni njen izvod po x koji, i ako λ neprestano leži u razmaku (λ_1, λ_2), može imati ma koju, nama nepoznatu, vrednost između $-\infty$ i $+\infty$. Pa pošto je

$$dy=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}+\frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dx}\right)dx,$$

gde ćemo tačno poznavati vrednosti svih izvoda što figurišu u tome izrazu, osim izvoda $\frac{d\lambda}{dx}$ koji ostaje potpuno neodređen, to nećemo ni ukoliko poznavati veličinu dy.

Prema tome; *obično diferencijaljenje brojnih razmaka uopšte nema smisla i ono se uopšte i ne vrši.*

Pa ipak, u pojedinim specijalnijim slučajevima, *postoji određena veza između razmaka u kome se kreće izvod funkcije i razmaka u kome se kreće vrednost same funkcije.* Taj slučaj nastupa npr. svaki put kad se zna da je posmatrana funkcija y integral kakve diferencijalne jednačine prvoga reda

$$y' = f(x, y).$$

Kad se y kreće u razmaku između $A(x)$ i $B(x)$ pri kretanju promenljive x u razmaku (a, b), može se odrediti razmak u kome će se nalaziti vrednost izvoda y'. Ako se sa $N(x)$ i $M(x)$ označe krajevi jednog promenljivog razmaka u kome će se kretati funkcija dveju promenljivih $f(x, y)$, kad se x kreće u razmaku (a, b), a y u razmaku (A, B), očevidno je *da će se vrednost izvoda y' neprestano nalaziti u tome promenljivom razmaku* (N, M).

Takav je slučaj npr. sa ma kakvom racionalnom funkcijom $y = R(x)$ promenljive x; eliminacijom x iz dveju jednačina

$$y = R(x) \quad \text{i} \quad y' = R'(x)$$

dobija se jednačina oblika

$$y' = T(y)$$

i označivši sa N i M najmanju i najveću vrednost koju ima posmatrana grana funkcije $T(y)$ kad se y kreće u razmaku između vrednosti $A(x)$ i $B(x)$, vrednost y' će se neprestano nalaziti u razmaku (N, M).

Isti je slučaj i sa ma kakvim polinomom $y = P(x)$, kao specijalnim slučajem racionalnih funkcija. Dokazan je, šta više, i jedan opšti, a prost rezultat prema kome, ako se vrednosti jednog polinoma n-tog stepena, za vrednosti x sadržane u jednom datom razmaku (a, b), nalaze u jednome razmaku $(-M, +M)$, vrednosti njegovog izvoda $P'(x)$ nalaziće se, za iste vrednosti x, neprestano u razmaku između vrednosti $-n^2 M$ i $+n^2 M$.

Tako isto, pokazano je da, ako se vrednost jednog trigonometrijskog polinoma

$$S(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx$$

za ma koje vrednosti x, neprestano nalazi u jednome razmaku $(-M, +M)$, vrednost njegovog izvoda $S'(x)$ neprestano će se nalaziti u razmaku $(-nM, +nM)$.

Isto tako, a kao što je napred pokazano, ako je $\varphi(x)$ logaritamski izvod jednoga polinoma n-tog stepena čije su nule sve realne, biće

$$\varphi'(x) = \frac{1 + \vartheta(n-1)}{n} \cdot \varphi(x)$$

za svaku vrednost x veću od sviju nula polinoma. Kad se, dakle, vrednost $\varphi(x)$ kreće u jednome razmaku (N, M), vrednost $\varphi'(x)$ kretaće se u razmaku $\left(\frac{N^2}{n}, M^2\right)$.

Sličan će se slučaj imati uvek kad se iz diferencijalne jednačine jedne funkcije y može izvesti zaključak da se, za vrednosti x i y sadržane u odgovarajućim razmacima, izvod y' mora neprestano nalaziti u određenom razmaku.

Ali, takvi su slučaji izuzetni i *u opštem slučaju ne postoji određena veza između razmaka funkcije i njenog izvoda.* Pa i u tim izuzetnim slučajevima do te se veze ne dolazi običnim diferencijaljenjem razmaka, jer ovo uopšte nema smisla, već neposrednim zaključivanjem iz specijalnih uslova koje zadovoljava posmatrana funkcija.

Međutim, lako je se uveriti da *integraljenje brojnih razmaka u određenim granicama, ima smisla i da se ono uopšte može vršiti sa razmacima, kao i sa tačno određenim funkcijama.*

Tako, pretpostavimo da je računski predstavnik razmaka y sveden na asimetrični normalni oblik

$$y = u + \vartheta v,$$

gde su u i v određene funkcije promenljive x, i v pozitivna funkcija u jednome posmatranom razmaku (a, b) promenljive x; uočimo tada određeni integral

$$J = \int_a^b y\,dx = \int_a^b u\,dx + \int_a^b \vartheta\, v\,dx.$$

Prvi integral na desnoj strani ima tačno određenu vrednost. Drugi integral, prema teoremi srednjih vrednosti, ima za vrednost

$$\vartheta_1 \int_a^b v dx \qquad (0 \leqslant \vartheta_1 \leqslant 1)$$

i prema tome je vrednost integrala J određena razmakom čiji je računski predstavnik, u svome asimetričnom normalnom obliku

$$J = \int_a^b u\,dx + \vartheta_1 \int_a^b v\,dx,$$

što dokazuje gornje tvrđenje.

Da integral jedne funkcije y, date samo razmakom u kome se ona nalazi, odista ima smisla utoliko što se ona može izraziti u obliku određenog razmaka, vidi se iz ovoga: ma kakav tok imala kriva

$$y = f(x)$$

koja se nalazi između dveju utvrđenih krivih

$$y_1 = f_1(x) \quad \text{i} \quad y_2 = f_2(x),$$

površina te linije, ograničena lukom krive y, dvema krajnjim ordinatama i x-osovinom, uvek se nalazi u jednom razmaku koji je određen odgovarajućim površinama krivih y_1 i y_2, Međutim, fakt da se iznos površine krive y nalazi između dva poznata iznosa površina, niukoliko ne daje mogućnosti da se pozna sam tok krive y; krive y sa beskrajno raznovrsnim tokom, a koje ipak neprestano ostaju u utvrđenom i poznatom razmaku, mogu imati iznos površine sadržane u jednome istom razmaku. Drugim rečima: integral jednoga razmaka, kao i sam razmak, uvek ima smisla, dok ga izvod ne mora imati.

14. ODREĐENI INTEGRALI KAO BROJNI RAZMACI

U nepreglednom broju slučajeva, za jedan određeni integral

1° ili nije mogućno tačno izračunati mu vrednost, ili je takvo izračunavanje zametno i teško;

2° ili za ono što se ima u vidu nije ni potrebno znati mu tačnu, pa čak ni vrlo približnu vrednost, već samo njegovu ovlašnu veličinu ili njegov infinitezimalani red naspram druge koje količine sa kojom se upoređuje.

U takvim slučajevima integral se određuje u obliku jednog brojnog razmaka u kome se on nalazi, što je uvek izvršljivo i što je vrlo često dovoljno za ono što se ima u vidu.

Tako se npr. integral

$$J=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}$$

za proizvoljnu vrednost n ne može tačno izračunati; međutim se lako nalazi da njegova vrednost uvek leži između 0,50 i 0,52 za ma koju vrednost $n>2$.

Tako isto, integral

$$J=\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

se ne može izračunati dok ne bude tačno data funkcija $f(x)$ pa i tada je to uopšte nemogućno, sem u izuzetnim i retkim slučajevima; međutim se nalazi da njegova vrednost uvek leži u jednom određenom razmaku $\left(\frac{A}{n},\ \frac{B}{n}\right)$, gde A i B zavise samo od oblika funkcije $f(x)$, a niukoliko ne od n. Taj rezultat igra dosta važnu ulogu pri ispitivanju konvergencije trigonometrijskih redova i dovoljan je za mnoga druga ispitivanja i izračunavanja.

Integral

$$J=\int_0^{+\infty} x^n\,e^{-x}\,dx$$

se može, za datu vrednost celoga broja n, izračunati sa apsolutnom tačnošću, jer je njegova vrednost ceo broj $n!$ Ali za velike vrednosti n takvo je izračunavanje praktički teško i zametno, jer se imaju izvršiti množenja brojeva sa velikim brojem cifara. Međutim se nalazi da vrednost integrala leži u razmaku između

$$e^{-n}\, u^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} \quad \text{i} \quad e^{-n+\frac{1}{12n}}\, n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}$$

i ako se npr. za $n=20$ uzme za tu vrednost donji kraj ovog razmaka, dobija se na dosta brz način

$$J = 2422786385510400000$$

na mesto tačne vrednosti

$$J = 2432902008176640000;$$

razlika između dveju vrednosti je velika, ali se ipak iz tih vrednosti dobija ovlašna, za mnoga pitanja dovoljno određena predstava o veličini integrala J, koja je npr. za dokazivanje pojedinih teorema dovoljna.

Postoji prostrana oblast slučajeva, u kojima se jedan određeni integral može lako odrediti u obliku brojnog razmaka, šireg ili užeg prema prirodi slučaja. Za obrazac koji izražava jednu prostraniju klasu određenih integrala u obliku razmaka kaže se da predstavlja jednu *teoremu srednje vrednosti* za tu klasu integrala; razlog se nazivu nalazi u tome što se integral takvim obrascem određuje kao neka srednja, i kao nedovoljno određena, vrednost između krajeva razmaka.

Takvih teorema srednjih vrednosti ima dosta veliki broj, i ovde će biti navedene neke od njih koje imaju prostrane oblasti svoje primenljivosti.

15. OBIČNA TEOREMA INTEGRALA SREDNJIH VREDNOSTI

Ona glasi:

Ako su f_1, f, f_2 tri funkcije promenljive x konačne u razmaku (a, b) te promenljive i takve da je za sve vrednosti x u tome razmaku

$$f_1 \leqslant f \leqslant f_2,$$

biće

(118) $$\int_a^b f(x)\, dx = u + \vartheta v.$$

gde je

$$u = \int_a^b f_1(x)\, dx, \quad v = \int_a^b f_2(x)\, dx - \int_a^b f_1(x)\, dx.$$

Dokaz je u tome što oba integrala

$$\int_a^b (f-f_1)\,dx \quad \text{i} \quad \int_a^b (f_2-f)\,dx$$

nemaju ni jedan negativan integralni element, pa oba imaju pozitivnu vrednost.

Kad je dat integral

$$J=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^a}},$$

gde je a jedan ma koliki broj veći od 2, pošto je između integralnih granica $x^a<x^2$, biće za sve vrednosti x u razmaku $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

$$1<f<\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

tako da se može uzeti

$$f_1=1, \quad f_2=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

i onda je

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f_1\,dx=\frac{1}{2}=0,5, \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} f_2\,dx=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}=0,523\ldots$$

i prema tome

$$J=0,5+\vartheta\cdot 0,023\ldots$$

Neposredna posledica gornje teoreme je ova:

Neka su f i φ dve funkcije promenljive x, konačne u razmaku (a, b) *promenljive x, u kome φ neprestano zadržava jedan isti znak* (npr. $+$) *i za koje vrednosti funkcije f neprestano ostaju u oblasti ograničenoj dvema funkcijama f_1 i f_2, tako da je*

$$f_1\leqslant f\leqslant f_2;$$

tada će biti

$$\int_a^b f\varphi\,dx=u+\vartheta v,$$

gde je

$$u=\int_a^b f_1\varphi\,dx, \quad v=\int_a^b f_2\varphi\,dx-\int_a^b f_1\varphi\,dx.$$

Dovoljno je u prvoj teoremi uzeti $f\varphi$ za f, $f_1\varphi$ za f_1 i $f_2\varphi$ za f_2.

U slučaju kad, za sve vrednosti x u razmaku (a, b), vrednosti funkcije f ostaju u razmaku između dva stalna broja N i M, biće

$$\int_a^b f\varphi\,dx = [N + \vartheta(M-N)]\int_a^b \varphi\,dx.$$

Uzmimo, kao primer, odredbu zbira s reda

(119) $$\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} - \dots$$

koji je konvergentan za $b>0$; ta odredba je veoma duga i zametna (naročito kad je vrednost b mala naspram vrednosti a), a međutim se pomoću obrasca (118) s brzo i dosta tačno određuje u obliku razmaka.

Toga radi primetimo da je

(120) $$\frac{1}{a+pb} = \frac{1}{b}\int_0^1 x^{p+\frac{a}{b}-1}\,dx \qquad (p = 1, 2, 3 \dots)$$

pa dakle naš red

$$s = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} - \dots$$

imaće za zbir

(121) $$s = \frac{1}{b}\int_0^1 \frac{x^{\frac{a}{b}}}{1+x}\,dx.$$

Ako se sad stavi da je

$$\frac{1}{1+x} = \left(1 - x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3\right) + U,$$

nalazi se da je

$$u = \frac{1}{4}\,\frac{x^2(1-x)^2}{1+x}.$$

Funkcija U ostaje neprestano pozitivna u razmaku $(0,1)$ promenljive x i dostiže svoj maksimum za

$$x = \frac{\sqrt{33}-3}{6} = 0{,}457427\dots,$$

a vrednost tog maksimuma je $0{,}0106\dots$ Prema tome je u razmaku $(0,1)$

$$0 < U < 0{,}0106,$$

što znači ako se stavi

$$\psi(x) = 1 - x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3,$$

biće, za vrednosti x u razmaku (0,1),

$$\psi(x) \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant \psi(x) + 0{,}0106\ldots,$$

tj.

$$\frac{1}{1+x} = \psi(x) + \vartheta \cdot 0{,}0106\ldots \qquad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1).$$

Obrazac (121) dobija tada oblik

$$s = \frac{1}{b} \int_0^1 x^{\frac{a}{b}} \psi(x)\, dx + \frac{\vartheta'}{b} \int_0^1 x^{\frac{a}{b}} dx \,.\, 0{,}0106\ldots$$

što, kad se izvrše označene integracije dovodi do obrasca

$$s = \left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+2b} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{a+3b} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{a+4b}\right) + \vartheta' \frac{0{,}0106\ldots}{a+b}.$$

Taj obrazac daje zbir s sa greškom uvek pozitivnom, a koja nikad ne premaša $\frac{0{,}0106\ldots}{a+b}$. Da bi se tolika tačnost imala neposrednim sumiranjem reda, trebalo bi sabrati najmanje 94 člana.

Kao drugu posledicu gornje teoreme navešćemo to, da kad je f konačna i neprekidna funkcija u razmaku (a, b) promenljive x, i kad njene vrednosti za taj razmak neprestano leže u razmaku između dva broja N i M, uvek je

$$\int_a^b f(x)\, dx = [N + \vartheta (M - N)]\,(b - a). \tag{122}$$

Dovoljno je uzeti da je u poslednjoj teoremi $\varphi = 1$. Ako se, pak, sa $\varphi(x)$ označi jedna funkcija koja ima za izvod funkciju $f(x)$, biće

$$\int_a^b f(x)\, dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

i obrazac (122) postaje

$$\varphi(b) - \varphi(a) = [N + \vartheta (M - N)]\;(b - a), \tag{123}$$

gde su N i M takve dve vrednosti, da se za sve vrednosti promenljive x u razmaku (a, b) vrednosti izvoda $\varphi'(x)$ nalaze u razmaku (N, M).

Obrazac (123) zove se *obrazac za konačne priraštaje* proizvoljne funkcije $\varphi(x)$, tj. on daje konačni priraštaj $\varphi(b) - \varphi(a)$ te funkcije u obliku jednog razmaka. Taj će razmak biti najuži ako se za N i M uzme najmanja i najveća među vrednostima koje dobija $\varphi'(x)$ za vreme dok se x menja od a do b; on se obično izražava u obliku (videti str. 63 i 64)

$$\varphi(b)-\varphi(a)=(b-a)\,\varphi'(c),$$

gde je c jedna vrednost što se nalazi između a i b.

Obrazac (122) ne pretpostavlja ništa drugo za funkciju f, osim njenu konačnost i neprekidnost u razmaku (a, b), Ako su, međutim, poznate još i neke druge osobine posmatrane funkcije, razmak određen desnom stranom jednačine (122) može biti zamenjen nekim užim razmacima.

Tako npr. kad je funkcija $f(x)$ pozitivna i konveksna u razmaku (a, b), tj. takva da je za ma koji par vrednosti x' x'' u tome razmaku neprestano

$$\frac{f(x')+f(x'')}{2}\leqslant f\left(\frac{x'+x''}{2}\right),$$

dokazuje se da je

$$\int_a^b f(x)\,dx=[M+N+\vartheta(M-N)]\cdot\frac{b-a}{2}; \tag{124}$$

razmak (124) očevidno je uži od razmaka (122).

Kad je $f(x)$ kakav trigonometrijski polinom n-tog reda, tj. oblika

$$f(x)=(a_0+a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx)$$
$$+(b_1\cos x+b_2\cos 2x+\cdots+b_n\cos nx),$$

dokazuje se (teorema Fejéra) da je

$$\int_a^b f(x)\,dx=\left[\left(N+\frac{M-N}{n+1}\right)+\vartheta\left(1-\frac{2}{n+1}\right)(M-N)\right]\frac{b-a}{2}; \tag{125}$$

razmak (125) je najuži mogući razmak dok se ostaje u generalnosti, jer su njegove obe granice stvarno dostignute za pojedine specijalne trigonometrijske polinome $f(x)$.

Na sličan je način određen i najuži mogući razmak za integral (122) kad je $f(x)$ kakav polinom n-tog stepena po x.

16. DRUGA TEOREMA SREDNJIH VREDNOSTI INTEGRALA

Dokazaćemo najpre jedan pomoćni Abelov stav za dva konačna ili beskrajna niza realnih brojeva

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\ \alpha_p, \tag{126}$$

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ldots,\ u_p, \tag{127}$$

od kojih se za prve pretpostavlja da su pozitivni i da opadaju sa svojim rangom. Stav glasi:

Ako se svi zbirovi

$$S_0=u_0, \quad S_1=u_0+u_1, \quad S_2=u_0+u_1+u_2, \ldots, \quad S_p=u_0+u_1+\cdots+u_p,$$

nalaze u jednom brojnom razmaku $(A,\ B)$, zbir

$$V=a_0 u_0+a_1 u_1+\cdots+a_p u_p \tag{128}$$

naleziće se u razmaku $(A a_0,\ B a_0)$.

Jer, pošto se može napisati da je

$$u_0=S_0, \quad u_1=S_1-S_0, \quad u_2=S_2-S_1, \ldots, \quad u_p=S_p=S_{p-1},$$

biće

$$V=(a_0-a_1) S_0+(a_1-a_2) S_1+(a_2-a_3) S_2+\cdots$$
$$+(a_{p-1}-a_p) S_{p-1}+a_p S_p. \tag{129}$$

Po pretpostavci, svaka od razlika $a_{k-1}-a_k$ je pozitivna; prema tome, ako se na desnoj strani izraza (121) svaki zbir S_k smeni najpre svojom donjom granicom A, pa zatim svojom gornjom granicom B, biće očevidno

$$A a_0<V<B a_0,$$

čime je stav dokazan.

Neka je sad dat integral

$$J=\int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx \qquad (a<b)$$

gde je $\varphi(x)$ kakva neprekidna, pozitivna i neprestano opadajuća funkcija za vrednost x u razmaku $(a,\ b)$, a $f(x)$ je ma kakva funkcija za koju integral $\int_a^x f(x)\, dx$ ima smisla za vrednosti x u razmaku $(a,\ b)$.

Ako se razmak $(a,\ b)$ podeli na n razmaka

$$x_1-a, \quad x_2-x_1, \quad x_3-x_2, \ldots, \quad b-x_{n-1},$$

integral će biti granična vrednost zbira

$$f(a)\, \varphi(a)(x_1-a)+f(x_1)\, \varphi(x_1)(x_2-x_1)+\cdots+f(x_{n-1})\, \varphi(x_{n-1})(b-x_{n-1})$$

kad n beskrajno raste i kad svaki od razmaka x_k-x_{k-1} teži nuli.

Ako se u gornjem stavu uzme da je

$$a_0=\varphi(a), \quad a_1=\varphi(x_1), \quad a_2=\varphi(x_2), \ldots$$

i

$$u_0=f(a)(x_1-a), \quad u_1=f(x_1)(x_2-x_1), \quad u_2=f(x_2)(x_3-x_2), \ldots$$

biće

$$S_0=f(a)(x_1-a),$$

$$S_1=f(a)(x_1-a)+f(x_1)(x_2-x_1),$$

$$S_2=f(a)(x_1-a)+f(x_1)(x_2-x_1)+f(x_2)(x_3-x_2),$$

$$S_{n-1}=f(a)(x_1-a)+f(x_1)(x_2-x_1)+\cdots+f(x_{n-1})(b-x_{n-1}),$$

i prema tome biće

$$V=f(a)\varphi(a)(x_1-a)+f(x_1)\varphi(x_1)(x_2-x_1)$$

$$+f(x_2)\varphi(x_2)(x_3-x_2)+\cdots+f(x_{n-1})\varphi(x_{n-1})(b-x_{n-1}).$$

Prema gornjem stavu, ako se svi zbirovi S_k nalaze u jednom razmaku (A, B), zbir V će se nalaziti u razmaku između $A\varphi(a)$ i $B\varphi(a)$.

To važi za ma koliki broj n umetnutih razmaka x_k-x_{k-1}, pa i kad se pusti da n beskrajno raste. Zbir V postaje tada integral J, a zbir S_k, uzevši da je uvek $x_{k+1}\leqslant x$, teži integralu,

$$S=\int_a^x f(x)\,dx.$$

Ako se sa N' i M' označe jednja donja i jedna gornja granica integrala

$$\int_a^x f(x)\,dx, \tag{130}$$

zbir V će se nalaziti u razmaku između

$$N'\varphi(a) \text{ i } M'\varphi(a),$$

tj. biće

$$J=[N'+\vartheta(M'-N')]\varphi(a). \tag{131}$$

Tome se rezultatu može dati još i ovaj oblik: ako se sa N i M označe najmanja i najveća vrednost koju dobija integral (130) za vrednost x u razmaku (a, b), vrednost $\dfrac{J}{\varphi(a)}$ nalaziće se u razmaku (N, M), tj. ona će biti jednaka vrednosti koju dobija integral (130) za jednu izvesnu vrednost $x=\xi$ što se nalazi u razmaku (a, b), tj. jednaka vrednosti

$$\int_a^\xi f(x)\,dx \qquad (a<\xi<b).$$

Prema tome je

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx \qquad (a<\xi<b) \tag{132}$$

i u tome se sastoji *prvi deo teoreme Ossian-Bonneta*, poznate pod imenom *druge teoreme srednjih vrednosti integrala*.

U slučaju kad je $\varphi(x)$ pozitivna i rastuća funkcija promenljive x u razmaku (a, b), na isti se način dokazuje obrazac

$$J=[P'+\vartheta(Q'-P')]\,\varphi(b), \tag{133}$$

gde su P' i Q' jedna donja i jedna gornja granica integrala

$$\int_x^b f(x)\,dx, \tag{134}$$

dok x varira od a do b.

Tome se rezultatu, na isti način kao i u prvom slučaju, može dati i oblik:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx \qquad (a<\xi<b); \tag{135}$$

to je drugi deo teoreme Ossian-Bonneta.

Lako se uviđa da znak funkcije $\varphi(x)$ u razmaku (a, b) ne utiče na dokazivanje obrazaca (132) i (135); on može samo povući za sobom međusobnu permutaciju vrednosti M', N' odnosno P', Q', što ne menja obrasce (132) i (135).

Pretpostavimo sad da funkcija φ menja, u razmaku (a, b) promenljive x, svoj smisao varijacija, tako da naizmenično raste i opada. Podelimo tada razmak (a, b) na uzastopne razmake

$$(a,\ x_1),\ (x_1,\ x_2), \ldots,\ (x_{n-1},\ b) \tag{136}$$

takve da se u svakom od njih φ menja u istom smislu, neprestano rastući ili neprestano opadajući. Integral J će biti zbir od integrala

$$\int_a^{x_1},\ \int_{x_1}^{x_2}, \ldots,\ \int_{x_{n-1}}^{b}$$

i za svaki od ovih gornja će teorema dati po jedan razmak u kome će se integral nalaziti. Iz toga se, prema onome što je ranije pokazano, može izvesti razmak u kome će se nalaziti i sam integral J.

Tako npr. kad je dat integral

$$J=\int_a^b \psi(x)\cos nx\,dx, \tag{137}$$

ako se uzme

$$\varphi(x)=\psi(x) \ \text{ i } \ f(x)=\cos nx,$$

pa se razmak (a, b) podeli na razmake (136) takve da se u svakom od njih funkcija $\psi(x)$ menja neprestano u jednom smislu, prema gornjoj teoremi imaćemo za jedan od razmaka (x_k, x_{k+1}) u kome ona neprestano *opada*

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \psi(x) \cos nx \, dx = \psi(x_k) \int_{x_k}^{\xi_1} \cos nx \, dx = \psi(x_k) \frac{\sin n\xi_1 - \sin nx_k}{2},$$

a za jedan od razmaka (x_i, x_{i+1}) u kome ona neprestano *raste*

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(x) \cos nx \, dx = \psi(x_{i+1}) \int_{\xi_2}^{x_{i+1}} \cos nx \, dx = \psi(x_{i+1}) \frac{\sin nx_{i+1} - \sin n\,\xi_2}{n}.$$

Integral J, kao zbir svih tih integrala, dobiće se u obliku

$$J = \frac{A + \vartheta B}{n},$$

gde su A i B vrednosti koje, kao linearne kombinacije sinusa sa koeficijentima što ne zavise od n, ostaju konačne kad n beskrajno raste. Prema tome *za velike vrednosti n integral J se ponaša kao $\frac{H}{n}$, gde je H jedna konačna količina.*

Isti se rezultat dobija i na isti način, za integral

(138) $$J = \int_a^b \psi(x) \sin nx \, dx.$$

Ti su rezultati od važnosti pri ispitivanju konvergencije trigonometrijskih redova, tj. redova uređenih po $\sin nx$ i $\cos nx$, jer su koeficijenti tih redova integrali oblika (137) i (138).

17. LUČNI INTEGRALI KAO BROJNI RAZMACI

A) Luci krivih u ravni. Kad su date dve realne količine u i v označivši sa u i v njihove apsolutne vrednosti, biće

$$\sqrt{u^2 + v^2} = \lambda (u + v) \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \lambda \leq 1\right).$$

Ako su u i v dve funkcije promenljve x, množeći ih sa dx i integraleći u jednom razmaku (a, b) te promenljive, za koji oba integrala

$$J_1 = \int_a^b u\,dx \quad \text{i} \quad J_2 = \int_a^b v\,dx$$

imaju smisla, biće prema tome

$$J = \int_a^b \sqrt{u^2 + v^2}\,dx = \lambda (J_1 + J_2),$$

tako, da ako se npr. uzme za λ sredina razmaka u kome se ta vrednost nalazi, biće

$$J = (J_1 + J_2)\,0{,}8535\ldots,$$

sa učinjenom greškom koja ne premaša $(J_1 + J_2)\,0{,}1464$; procentna greška ne dostiže, dakle, nikad $15\,\%$.

Tako se dobija da se, npr. vrednost eliptičkog integrala

$$J = \int_a^b \sqrt{h + kx^4}\,dx,$$

(gde su h i k pozitivni brojevi) uvek nalaze u razmaku između vrednosti

$$0{,}7071 \left[(b-a)\sqrt{h} + \frac{\sqrt{k}}{3}(b^3 - a^3) \right] \quad \text{i} \quad (b-a)\sqrt{h} + \frac{\sqrt{k}}{3}(b^3 - a^3).$$

Gornji obrazac daje mogućnost da se odredi razmak, u kome će se nalaziti dužina luka date krive linije u ravni, između dveju njegovih tačaka, *pomoću integrala prostijih od lučnog integrala.*

Tako, kad kriva $y = f(x)$ nikako ne opada u razmaku (a, b), dužina njenog luka s u tome razmaku biće

$$s = \int_a^b dx \sqrt{1 + f'(x)^2} = \lambda \left[(b-a) + f(b) - f(a) \right] \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \lambda \leq 1 \right),$$

a kad kriva nikako ne raste u tom razmaku biće

$$s = \lambda \left[(b-a) + f(a) - f(b) \right].$$

Granična vrednost $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ dostignuta je u slučaju prave $y = x + c$, a granična vrednost $\lambda = 1$ u slučaju prave $y = c$.

Tako bi se, npr. dužina luka parabole trećeg stepena

$$y = \alpha x^3 \qquad (\alpha > 0)$$

između tačaka $x = a$ i $x = b$, nalazila u razmaku između

$$0{,}7071 \left[(b-a) + \alpha (b^3 - a^3) \right] \quad \text{i} \quad (b-a) + \alpha (b^3 - a^3).$$

Ako, pak, kriva naizmenično raste i opada duž luka s, može se podeliti na luke $s_1, s_2, s_3, \ldots$ duž kojih kriva ima jedan isti smisao, pa na svaki od ovih lukova primeniti gornji obrazac i rezultate sabrati u luk s.

Tako se može rešiti u obliku razmaka i ovaj, u opštem slučaju tačno nerešljiv, zadatak:

Odrediti krive u ravni čiji je luk s data funkcija $f(x, y)$ koordinatama njegove krajnje tačke (x, y).

Neka su x_0, y_0 koordinate početne tačke luka; smenivši u jednačini zadatka $s=f(x, y)$ luk s sa

$$\lambda[(x-x_0)+(y-y_0)],$$

ili sa

$$\lambda[(x-x_0)-(y-y_0)] \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \lambda \leqslant 1\right),$$

(prema tome da li se kriva duž luka s penje ili silazi), tražene krive biće određene jednom ili drugom od oblasti u ravni (x, y):

$$f(x,y)-\lambda[(x-x_0)+(y-y_0)]=0,$$

$$f(x,y)-\lambda[(x-x_0)-(y-y_0)]=0.$$

Tako npr. jednačine rastuće grane krivih što prolaze kroz koordinatn početak, a čiji je luk oblika

$$s=(mx+n)y-(hx+k),$$

(gde su m, n, h, k pozitivne konstante) uvek se mogu dovesti na oblik

$$y=\frac{(h+\lambda)x+k}{mx+(n-\lambda)},$$

tako, da se za pozitivne vrednosti x te grane uvek nalaze između dveju hiperbola:

$$y=\frac{(h+0{,}7071)x+k}{mx+(n-0{,}7071)} \quad \text{i} \quad y=\frac{(h+1)x+k}{mx+n-1};$$

i opadajuće grane će se takođe nalaziti između dveju hiperbola koje je lako odrediti.

B) Luci krivih u prostoru. Ako su u, v, w tri realne funkcije, biće

$$\sqrt{u^2+v^2+w^2}=\lambda(\dot{u}+\dot{v}+\dot{w}) \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant \lambda \leqslant 1\right).$$

Označivši sa

$$J_1=\int_a^b \dot{u}\,dx, \qquad J_2=\int_a^b \dot{v}\,dx, \qquad J_3=\int_a^b \dot{w}\,dx,$$

biće

$$J=\int_a^b \sqrt{u^2+v^2+w^2}\,dx=\lambda(J_1+J_2+J_3),$$

tako, da ako se za λ uzme sredina razmaka u kome se ta vrednost nalazi, biće

$$J=0{,}7887\,(J_1+J_2+J_3)$$

sa učinjenom greškom koja ne prelazi $0{,}2113\;(J_1+J_2+J_3)$.

Kada je npr. kriva u prostoru definisana jednačinama $y=f(x)$, $z=\varphi(x)$, gde su f i φ rastuće funkcije promenljive x u razmaku $(a,\ b)$ te promenljive, dužina s luka krive u tome razmaku biće

$$s=\int_a^b dx\sqrt{1+f'^2+\varphi'^2}=\lambda\,[\,(b-a)+f(b)+\varphi(b)-f(a)-\varphi(a)\,],$$

a sličan se rezultat ima i za ma koji način varijacije funkcija f i φ u razmaku $(a,\ b)$.

C) Luci krivih u hiperprostoru. Za luk jedne krive u hiperprostoru od n dimenzija kazaćemo da *ima monotoni tok* prema jednome uzetom pravolinijskom i pravouglom koordinatnom sistemu $Ox_1,\dots Ox_n$, ako duž toga luka, idući sa jednog kraja na drugi, ni jedna od koordinata x_i ne menja svoj smisao varijacija, tako da svaka od njih pri tom ili neprestano raste, ili neprestano opada.

Ako se sa α_k označi jedinica, kad joj se prida nepromenljiv znak diferencijala dx_k duž luka s, biće

$$ds^2=(\alpha_1\,dx_1)^2+\cdots+(\alpha_n\,ds_n)^2,\qquad s=\int_{P_0}^{P_1} ds,$$

gde P_0 i P_1 označuju krajnje tačke luka s. Prema tome je

$$ds=\lambda\,(\alpha_1\,dx_1+\cdots+\alpha_n\,dx_n)\qquad\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant\lambda\leqslant 1\right).$$

Ako se sa X_k označi konačni priraštaj koordinate x_k pri prelasku od jednoga kraja luka na drugi, iz gornjih se obrazaca izvodi ovaj rezultat:

Dužina luka s nalazi se u razmaku između

$$N=\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}\quad\text{i}\quad M=X_1+\cdots+X_n, \tag{139}$$

tj.

$$s=\lambda\,(X_1+\cdots+X_n)\qquad\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant 1\leqslant 1\right).$$

U slučajevima kad pojedine koordinate x_i prestaju imati monoton tok duž luka s, ovaj se može podeliti na više lukova s_1, s_2, $s_3 \ldots$ takvih da duž svakog od njih sve koordinate imaju monoton tok. Primenivši tada na svaki od lukova s_k gornji rezultat, sumiranjem dobijenih razmaka dobio bi se razmak u kome će se nalaziti dužina samog luka s.

Sve se to neposredno primenjuje i na integrale

$$J=\int_a^b \sqrt{f_1^2+f_2^2+\cdots+f_n^2}\, dx,$$

gde su f_i funkcije promenljive x. Ako koja od ovih menja znak u razmaku (a, b), taj će se razmak podeliti na druge, u kojima svaka od funkcija ima monoton tok; na takve razmake integracije primenio bi se gornji rezultat i sabiranjem dobijenih razmaka za pojedine integrale dobio bi se razmak varijacije integrala J.

D) Istegljivost lukova sa monotonim tokom. Neka je dat luk s u hiperprostoru od n dimenzija, koji ima monoton tok prema uzetom koordinatnom sistemu $Ox_1 \ldots Ox_n$. Do koje se mere može taj luk istegnuti a da se ne promene njegove krajnje tačke i da ne izgubi monotoniju svoga toka?

Pošto je svaki priraštaj X_k koordinata pri prelasku od jednog kraja luka do drugog, pri takvoj deformaciji, ostao nepromenjen, novi, deformisani luk s' nalaziće se opet u razmaku (N, M) datom obrascem (139). A pošto se i prvobitni luk s nalazi u tome istom razmaku, luk s' može biti najviše $\sqrt{n}$ puta duži od luka s, iz čega izlazi ovaj zaključak:

Jedan luk u prostoru od n dimenzija, sa utvrđenim krajnjim tačkama, ne može se istegnuti više od $\sqrt{n}$ puta, a da pri tom istezanju ne izgubi monotoniju svoga toka.

Ta krajnja granica istegljivosti postignuta je u specijalnom slučaju kad se luk s sastavljen iz segmenta prave

$$\alpha_1 x_1 + a_1 = \alpha_2 x_2 + a_2 = \cdots = \alpha_n x_n + a_n \qquad (a_i = \text{const})$$

deformiše tako, da se pretvori u isprelamanu liniju sastavljenu iz n pravolinijskih segmenata paralelnih koordinatnim osovinama, a koja linija prolazi kroz krajeve segmenta s.

Tako, luk u ravni ne može se istegnuti više od 1,4142... *puta, a luk krivih u običnom prostoru više od* 1,7320... *puta bez gubitka monotonije svog toka.* Te su krajnje granice dostignute kad se luk s svodi na segmenat prave koja gradi isti ugao sa svakom od koordinatnih osa, a deformisani luk s' poklopi sa isprelamanom linijom, što prolazi kroz krajeve luka s, sastavljenom iz pravolinijskih komada paralelnih koordinatnim osama.

E) Odnos između dužine luka i pravaca diraka za krive u ravni. Neka je s dužina luka jedne neprekidne krive između krajnjih tačaka A i B luka, a l dužina tetive AB. Može se dokazati da:

Sinus polovine ugla koji grade među sobom dva proizvoljna pravca u ravni krive, a koja nisu paralelna ni jednoj dirci na krivoj duž luka s, nikad ne premaša vrednost $\frac{l}{s}$.

Jer ako se za koordinatne ose uzmu dve prave paralelne takvim dvama pravcima što prolaze kroz tačke A i B i ako se sa α_1 i α_2 označi jedinica, pošto joj se prida znak diferencijala dx i dy, obe su vrednosti $\alpha_1 dx$ i $\alpha_2 dy$ pozitivne duž luka s. To izlazi iz toga, što, po pretpostavci, duž luka s nijedna dirka nije paralelna ni jednoj ni drugoj od koordinatnih osa, pa prema tome svaki od diferencijala dx i dy zadržava nepromenjen znak duž celog tog luka.

Ako se sa ϑ označi ugao između dve prave uzete za koordinatne ose, luk s se može izraziti obrascem

$$s=\int_A^B \sqrt{(\alpha_1\,dx)^2+(\alpha_2\,dy)^2-2\,(\alpha_1\,dx)\,(\alpha_2\,dy)\cos\vartheta}.$$

A pošto je strana ds elementarnog trougla manja od zbira ostalih dveju strana, to je kvadratni koren pod znakom integrala manji od vrednosti $\alpha_1 dx+$ $+\alpha_2 dy$. Ako su, dakle, $(a, 0)$ i $(0, b)$ koordinate krajnjih tačaka A i B, a h dužina

$$h=\alpha_1 a+\alpha_2 b,$$

biće

$$s<h. \tag{140}$$

Sa druge strane, dužina tetive AB ima za izraz

$$l=\sqrt{(\alpha_1\,a)^2+(\alpha_2\,b)^2-2\,(\alpha_1\,a)\,(\alpha_2\,b)\cos\vartheta},$$

a kao što je napred pokazano (str. 85), izraz na desnoj strani nikad nema manju vrednost od

$$(\alpha_1\,a+\alpha_2\,b)\sin\frac{\vartheta}{2},$$

prema čemu je

$$l>h\sin\frac{\vartheta}{2}. \tag{141}$$

Upoređivanjem nejednačina (140) i (141) dobija se da je

$$\sin\frac{\vartheta}{2}<\frac{l}{s}, \quad \text{tj.} \quad \sin\frac{\vartheta}{2}=\frac{\lambda\,l}{s} \qquad (0\leqslant\lambda<1), \tag{142}$$

što dokazuje gornje tvrđenje. A tome rezultatu se može dati i ovaj oblik:

Kad dužina luka nije manja od k puta dužine tetive, ugao između ma koja dva pravca, koji nisu paralelni nijednoj dirci na krivoj duž toga luka, ima za sinus svoje polovine jednu vrednost koja ne premaša $\frac{1}{k}$.

Kao što se vidi, sama činjenica da postoje dva pravca koji nisu paralelni ni jednoj dirci na krivoj duž luka s, povlači sobom nejednakost

$$s < \frac{l}{\sin\frac{\vartheta}{2}}, \quad \text{tj.} \quad s = \frac{\lambda l}{\sin\frac{\vartheta}{2}} \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1), \tag{143}$$

gde ϑ označuje ugao između ta dva pravca.

Tako npr. kad god postoje dva, jedan na drugom upravna pravca, koji nisu paralelni ni jednoj dirci duž luka s, dužina luka nikad ne prelazi $l\sqrt{2}$.

Primetimo da se gornjoj granici za luk s, predstavljenoj desnom stranom nejednačine (143), luk s može u specijalnom slučaju približiti koliko se god hoće: to će biti za krive koje se vrlo malo razlikuju od dveju strana ravnokrakog trougla čija je osnovica dužina l a ϑ ugao između tih dveju strana.

18. POVRŠINE U PROSTORU KAO BROJNI RAZMACI

Kao primer za odredbu iznosa površine u prostoru u obliku brojnog razmaka, navešćemo takvu odredbu za *obrtne površine.*

Neka je P obrtna površina opisana obrtanjem luka s jedne krive u ravni oko jedne osovine koju ćemo uzeti za osu Ox. Označimo

1° sa A apsolutnu vrednost iznosa ravne površine ograničene lukom s, obrtnom osom Ox koordinatama krajnjih tačaka luka s;

2° sa B ravnu površinu koja ima za iznos: *a*) ili apsolutnu vrednost polurazlike kvadrata ordinata krajnjih tačaka luka s (to u slučaju kad kriva ima monoton tok duž celog luka s); *b*) ili zbir apsolutnih vrednosti polurazlika kvadrata ordinata krajnjih tačaka lukova na koje se može podeliti luk s tako, da u svakom od tih kriva zadržava monotoniju toka;

3° sa R stranu kvadrata čija je površina $A+B$.

Tada se može dokazati ovaj rezultat:

Iznos površine P jednak je iznosu površine kruga poluprečnika $r=\lambda R$, *gde je* λ *jedan apsolutan broj koji se za sve obrtne površine nalazi u razmaku između*

$$\sqrt[4]{2}=1{,}1892\ldots \quad \text{i} \quad \sqrt{2}=1{,}4142\ldots$$

Da bismo to dokazali, pretpostavimo najpre da kriva ima monoton tok duž celog luka s, i neka su (x_0, y_0) i (x_1, y_1) koordinate krajnjih tačaka M_0 i M_1 luka. Tada je

$$P = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\, ds = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{(\alpha_1\, dx)^2 + (\alpha_2\, dy)^2},$$

gde α_1 i α_2 označuju jedinicu, pošto joj se prida nepromenljiv znak diferencijala dx i dy. Pa pošto je

$$\sqrt{(\alpha_1\, dx)^2 + (\alpha^2\, dy)^2} = \lambda' (\alpha_1\, dx + \alpha_2\, dy) \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \lambda' \leqslant 1\right),$$

to je

$$P = \lambda' 2\pi \left[\alpha_1 \int_{x_0}^{x_1} y\, dx + \alpha_2 \frac{y_1^2 - y_0^2}{2}\right].$$

Prema tome, pošto je

$$\alpha_1 \int_{x_0}^{x_1} y\, dx = A \quad \text{i} \quad \alpha_2 \frac{y_1^2 - y_0^2}{2} = B,$$

dobija se da je

$$P = \lambda^2\, 2\pi (A + B) = \pi (R \sqrt{2\lambda'})^2 = \pi r^2,$$

gde je

$$r = \lambda R, \quad \text{sa} \quad \lambda = \sqrt{2\lambda'},$$

i prema tome

$$\sqrt[4]{2} \leqslant \lambda \leqslant \sqrt{2},$$

čime je gornji rezultat dokazan.

Pretpostavimo sad da kriva ma koliko puta menja monotoniju svoga toka duž luka s; takav se luk može razdeliti na lukove (kontinualne ili isprelamane)

$$M_0 M', \quad M'M'', \quad M''M''', \ldots \tag{144}$$

takve da kriva u svakome od njih ima monoton tok. Označimo tada:

1° sa $A', A'', A''', \ldots$ iznose površina A što odgovaraju lucima (144);

2° sa $B', B'', B''', \ldots$ iznose ravnih površina B što odgovaraju istim lucima;

3° sa $P', P'', P''', \ldots$ iznose površina opisanih obrtanjem istih lukova oko ose Ox.

Tada će, prema ovome što prethodi, biti

$$2\pi\frac{A'+B'}{\sqrt{2}}\leqslant P'\leqslant 2\pi(A'+B'),$$

$$2\pi\frac{A''+B''}{\sqrt{2}}\leqslant P''\leqslant 2\pi(A''+B''),$$

$$\vdots$$

a iz tog se sabiranjem dobija

$$\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\left[\sum A^{(i)}+\sum B^{(i)}\right]\leqslant\sum P^{(i)}\leqslant 2\pi\left[\sum A^{(i)}+\sum B^{(i)}\right].$$

Zbir $\Sigma A^{(i)}$ jednak je iznosu celokupne površine A ograničene lukom s, osom Ox i ordinatama krajnjih tačaka luka s; zbir $\Sigma B^{(i)}$ jednak je iznosu površine B, koji je jednak zbiru apsolutnih vrednosti polurazlika kvadrata uzastopnih ordinata na krajevima lukova (144).

Iznos celokupne površine

$$P=\Sigma P^{(i)}$$

opisane obrtanjem luka s oko Ox, ima, dakle, opet za vrednost $P=\pi r^2$, tako da gore dokazani rezultat važi i onda kad kriva menja monotoniju svoga toka duž luka s ma koliko puta.

Otuda opšti zaključak:

Poluprečnik r kruga, čija je površina jednaka iznosu P obrtne površine, uvek se nalazi u razmaku između

$$1{,}1892\,R \text{ i } 1{,}4142\,R.$$

Ako se za P uzme sredina toga razmaka, tako da bude

$$r=1{,}3017\,R,$$

učinjena relativna greška biće, po apsolutnoj vrednosti, manja od 0,0864, tj. procentualna greška ne dostiže 9% ni za koju obrtnu površinu.

Granice tako određenih razmaka su u isto vreme i *najuže granice* dok se ostaje u pretpostavljenoj generalnosti, jer se njima određen razmak ne može suziti, a da se ta generalnost ne izgubi. To se vidi iz toga, što su obe granice odista dostignute u pojedinim slučajevima.

Tako granica $\lambda'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, tj. granica $\lambda=\sqrt[4]{2}$, dostignuta je u slučaju kad je obrtna površina jedan obrtni konus čije generatrise zaklapaju sa obrtnom osovinom ugao od 45°. Jer tada je (pomerivši za koliko je potrebno teme konusa duž ose Ox) $y=x$ i prema tome je

$$A=\frac{x_1{}^2-x_0{}^2}{1}=\frac{y_1{}^2-y_0{}^2}{2}=B,$$

tako da je

$$P=\lambda' \, 4\pi B=\lambda' \cdot 4\pi (y_1-y_0)\frac{y_1+y_0}{2}=\lambda' \cdot 4\pi (x_1-x_0)\frac{y_1+y_0}{2};$$

ako se, dakle, sa h osnači visina, a sa d srednji prečnik posmatranog zarubljenog konusa, biće

$$P=\lambda' \, 4\pi hd,$$

a prema čemu bi poluprečnik r imao za vrednost

(145) $$r=2\sqrt{\lambda'}\ \sqrt{hd}.$$

Međutim tačna je vrednost

$$P=2\pi s\frac{y_1+y_0}{2}=2\pi\cdot\sqrt{2}\,(y_1-y_0)\frac{y_1+y_0}{2}=2\pi\cdot\sqrt{2}\,hd,$$

prema čemu je tačna vrednost poluprečnika r

(146) $$r=\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt{hd}.$$

Upoređenjem vrednosti (145) i (146) dobija se da je

$$2\sqrt{\lambda'}=\sqrt[4]{8},$$

iz čega se vidi da je

$$\lambda'=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \text{tj.}\quad \lambda=\sqrt[4]{2}.$$

Tako je isto dostignuta i granica $\lambda'=1$, tj. $\lambda=\sqrt{2}$, i to u slučaju kad je obrtna površina jedna obrtna cilindarska površina. Označivši tada sa ϱ poluprečnik osnovice cilindra, a sa h njegovu visinu, biće

$$A=\varrho\,(x_1-x_0)=\varrho\, h,\quad B=0,$$

tako da je

(147) $$r=\sqrt{2\lambda'}\ \sqrt{\varrho\, h}.$$

Međutim tačna je vrednost

$$P=2\pi\varrho\, h,$$

prema čemu je

(148) $$r=\sqrt{2}\,\sqrt{\varrho\, h}.$$

Upoređenjem vrednosti (147) i (148) dobija se da je

$$\sqrt{2\lambda'}=\sqrt{2},$$

prema čemu je

$$\lambda'=1 \text{ tj. } \lambda=\sqrt{2}.$$

I primer: Obrtna površina opisana obrtanjem kružnog kvadranta poluprečnika ϱ oko njegovog poluprečnika (uzetog za osu Ox). Tada je

$$A=\frac{\pi\varrho^2}{4}, \quad B=\frac{\varrho^2}{2},$$

tako da je

$$R=\sqrt{A+B}=a\varrho,$$

gde je a apsolutni broj

$$a=\sqrt{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}}=1{,}1337\ldots$$

Prema tome je

$$r=\lambda R=\mu\varrho,$$

gde je μ jedan apsolutan broj koji se nalazi u razmaku između

$$a\sqrt[4]{2}=1{,}3482\ldots \text{ i } a\sqrt{2}=1{,}6033\ldots$$

Ako se, dakle, za μ uzme sredina toga razmaka, tako da bude

(149) $$r=1{,}4758\,\varrho,$$

učinjena greška, prema gornjem opštem rezultatu, neće premašati 9%. I odista, pošto je tačna vrednost

(150) $$r=\varrho\sqrt{2}=1{,}4142\,\varrho,$$

greška koja se čini kad se uzme vrednost (149) za (150) iznosi 4,1%.

II primer: Obrtna površina opisana obrtanjem kvadranta elipse, čije su poluose a i b, oko a (uzeta za osu Ox). Tada je

$$A=\frac{\pi ab}{4}, \quad B=\frac{b^2}{2},$$

tako da je

$$R=\sqrt{A+B}=b\sqrt{\frac{\pi a}{4b}+\frac{1}{2}}.$$

Prema tome je

$$r=\lambda R=\lambda b\sqrt{\frac{\pi a}{4b}+\frac{1}{2}},$$

tako da poluprečnik kruga koji ima istu površinu kao i posmatrani poluelipsoid, leži u razmaku između

$$1{,}1892\,R \text{ i } 1{,}4142\,R.$$

Kad je $a=b$, ovi se obrasci svode na one što važe za polukuglu.

19. RAZNE KLASE ODREĐENIH INTEGRALA KAO BROJNI RAZMACI

A) Integral proizvoda. Pored napred navedenog obrasca, koji daje integral produkta u obliku brojnog razmaka (obična teorema srednjih vrednosti) i koji pretpostavlja da jedan od činilaca produkta ne menja znak u razmaku integracije, dokazaćemo još jedan obrazac za isti zadatak, ali koji ne pretpostavlja da je zadovoljen pomenuti uslov.

Neka su u i v ma kakve funkcije promenljive x, realne u razmaku (a, b) te promenljive. Iz identičnosti

$$uv=\frac{1}{2}(u^2+v^2)-\frac{1}{2}(u-v)^2$$

dobija se da je

$$J=\int_a^b uv\,dx=V=\delta_1 \qquad (b>a),$$

gde je

$$V=\frac{1}{2}\int_a^b u^2\,dx+\frac{1}{2}\int_a^b v^2\,dx,$$

(151) $$\delta=\frac{1}{2}\int_a^b (u-v)^2\,dx.$$

Ako se sa N i M označi jedna gornja granica pozitivne vrednosti $(u-v)^2$, vrednost δ će se nalaziti u razmaku između

$$\frac{b-a}{2}N^2 \text{ i } \frac{b-a}{2}M^2$$

i prema tome *vrednost integrala J će se nalaziti u razmaku između*

$$V-\frac{b-a}{2}M^2 \text{ i } V-\frac{b-a}{2}N^2.$$

tako da je

(152) $$J=V-\frac{b-a}{2}M^2+\vartheta\frac{b-a}{2}(M^2-N^2).$$

Interes ovog obrasca leži u tome, što se pomoću njega integral J razlaže na dva, od kojih jedan zavisi samo od u, a drugi samo od v, sa jednim korektivnim članom koji je utoliko manji, ukoliko je manja razlika između u i v u razmaku integracije. Osim toga, obrazac ne pretpostavlja o funkcijama u i v ništa drugo osim realnost u razmaku integracije i uslov da gornji integrali imaju konačne i određene vrednosti.

Tako isto, iz identičnosti

$$uv = \frac{1}{4}(u+v)^2 = \frac{1}{4}(u-v)^2$$

dobija se da je

$$J = \int_a^b uv\,dx = W - \frac{\delta}{2},$$

gde je

$$W = \frac{1}{4}\int_a^b (u+v)^2\,dx,$$

a δ je dato obrascem (151). *Vrednost integrala J nalazi se, dakle, u razmaku između*

$$W - \frac{b-a}{4} M^2 \text{ i } W - \frac{b-a}{4} N^2,$$

tako da je

$$J = W - \frac{b-a}{4} M^2 + \vartheta \cdot \frac{b-a}{4}(M^2 - N^2). \tag{153}$$

Interes obrasca je u tome što se pomoću njega integral J izražava pomoću integrala kvadrata zbira funkcija u i v, sa jednim korektivnim članom koji je dva puta manji od onoga u obrascu (152), a utoliko je manji ukoliko se u i v manje razlikuje u razmaku integracije. Obrazac (153) ne pretpostavlja po funkcijama u i v ništa drugo do ono što pretpostavlja i obrazac (152).

Ma kakve bile funkcije u i v, integrabilne u razmaku integracije (a, b), može se za integral produkta imati jedna gornja granica koja dovodi do zaključka od interesa, kako pri izračunavanju raznovrsnih određenih integrala, tako i za dokazivanje raznih rezultata u matematičkoj analizi. Uočimo određeni integral

$$J = \int_a^b (u + \lambda v)^2\,dx,$$

(gde je λ promenljiv parametar) koji ima sve svoje elemente pozitivne i prema tome ne može biti jednak nuli ni za kakvu realnu vrednost λ. Pošto se on može napisati u obliku

$$J=\int_a^b u^2\,dx+2\lambda\int_a^b uv\,dx+\lambda^2\int_a^b v^2\,dx,$$

ta je činjenica izražena nejednačinom

$$\Big(\int_a^b u^2\,dx\Big)\Big(\int_a^b v^2\,dx\Big)-\Big(\int_a^b uv\,dx\Big)^2>0,$$

prema čemu je

$$\Big(\int_a^b uv\,dx\Big)^2<\Big(\int_a^b u^2\,dx\Big)\Big(\int_a^b v^2\,dx\Big),$$

što se naziva *Schwarzovom integralnom nejednačinom.*

Kad su u i v još i pozitivne funkcije u razmaku (a, b), može se, dakle, napisati da je

$$\int_a^b uv\,dx=\vartheta\sqrt{\Big(\int_a^b u^2\,dx\Big)\Big(\int_a^b v^2\,dx\Big)}.$$

B) Integral uopštenog binomnog diferencijala. Neka su u, v, w tri funkcije pozitivne u razmaku integracije (a, b), pa uočimo određeni integral

$$J=\int_a^b w\,(u^m+v^m)^p\,dx,$$

gde su m, p proizvoljni pozitivni stalni brojevi. Prema ranije dokazanome rezultatu, vrednost količnika

(154) $$\varrho=\frac{(u^m+v^m)^p}{u^{mp}+v^{mp}}$$

uvek se nalazi u razmaku Δ između vrednosti 1 i 2^{p-1}; granice toga razmaka su dostignute u slučaju kad je $u=v$, ili kad je jedna od količina u i v jednaka nuli.

Prema tome je

(155) $$J=\lambda\Big[\int_a^b wu^{mp}\,dx+\int_a^b wv^{mp}\,dx\Big],$$

gde je λ jedan broj koji se nalazi u razmaku Δ.

Uzevši da je $p=\dfrac{1}{m}$, dobija se obrazac

(156) $$\int_a^b w\sqrt[m]{u^m+v^m}\,dx=\lambda\Big(\int_a^b uw\,dx+\int_a^b vw\,dx\Big)\ \Big(2^{\frac{1-m}{m}}\leqslant\lambda\leqslant 1\Big).$$

C) Integral kvadrata zbira ili razlike. Iz identičnosti

$$(u \pm v)^2 = u^2 + v^2 \pm 2\,uv$$

dobija se da je

$$\int_a^b (u+v)^2\,dx = U^2 + V^2 \pm 2\int_a^b uv\,dx, \tag{157}$$

gde je

$$U^2 = \int_a^b u^2\,dx, \qquad V^2 = \int_a^b v^2\,dx.$$

Kad su u i v integrabilne i pozitivne funkcije u razmaku (a, b), biće kao što je maločas pokazano

$$\int_a^b uv\,dx = \vartheta\, UV \qquad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1)$$

što dovodi do obrasca

$$\int_a^b (O+v)^2 dx = U^2 + V^2 + 2\,\vartheta\, U\, V,$$

$$\int_a^b (u-v)^2\,dx = U^2 + V^2 - 2\,\vartheta\, U\, V.$$

Ti obrasci pretpostavljaju samo integrabilnost posmatranih funkcija i uslov da su obe funkcije u i v pozitivne u razmaku integracije (a, b). Nađeni razmaci za integrale kvadrata zbira ili kvadrata razlike, izraženi istim obrascima, su *najuži* mogući razmaci za te integrale dok se ostaje u pretpostavljenoj generalnosti, jer oscilacija $2\,\vartheta\, UV$ odista dostiže svoju najveću moguću vrednost $2\,UV$ u slučaju kad je $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$

Obrasci su od interesa stoga što daju za posmatrani integral jedan razmak čije granice pojedini integrali iste vrste stvarno i dostižu a te se granice izračunavaju pomoću dva integrala U i V od kojih jedan zavisi samo od u, a drugi samo od v.

U slučaju $m = 2$ broj λ u obrascu (156) nalazi se u razmaku između $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071$ i 1.

U slučaju eliptičkih i *hipereliptičkih* integrala, ti obrasci izražavaju vrednost integrala u obliku razmaka čije se granice dobijaju kao integrali *racionalnih* funkcija.

Isti način određivanja integralnog razmaka primenjuje se i na integrale oblika

$$J_m = \int_a^b w \log (u^m + v^m)\, dx \tag{158}$$

za funkciju u, v, w pozitivne u razmaku (a, b). Iz toga što se vrednost količnika (154) uvek nalazi u razmaku između 1 i 2^{p-1}, zaključuje se da je za ma koju vrednost broja p

$$\log (u^m + v^m) = \frac{1}{p} \log (u^{mp} + v^{mp}) + \vartheta \frac{p-1}{p} \log 2, \tag{159}$$

$$\log (u^{mp} + v^{mp}) = p \log (u^m + v^m) - (p-1) \log 2.$$

Prema tome je

$$J_m = \frac{1}{p} J_{mp} + \vartheta \frac{p-1}{p} \log 2 \int_a^b w\, dx, \tag{160}$$

$$J_{mp} = p\, J_m - \vartheta\, (p-1) \log 2 \int_a^b w\, dx. \tag{161}$$

Kad se u jednačini (160) uzme $p = \frac{1}{m}$, dobija se

$$\int_a^b w \log (u^m + v^m)\, dx = m \int_a^b w \log (u + v)\, dx + \vartheta\, (1-m) \log 2 \int_a^b w\, dx,$$

a primenom toga na Jensenov integral

$$\int_0^{2\pi} \log_{(e)} \sqrt{u^2 + v^2}\, dx$$

koji igra važnu ulogu u teoriji funkcija kompleksne promenljive količine, dobija se taj rezultat, *da se razlika između njega i integrala* $\int_0^{2\pi} \log (u + v)\, dx$ *uvek nalazi u razmaku između*

$$-\frac{1}{2} \log 2 = -0{,}3465\ldots \quad \text{i nule.}$$

D) Integral monotono opadajuće funkcije. Neka je $f(x)$ jedna funkcija koja monotono opada do nule kad x raste od 0 do $+\infty$, pa uočimo integral

$$J_n = \int_0^n f(x)\, dx,$$

gde je n ceo pozitivan broj. Pošto je

(162) $$J_n = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx + \cdots + \int_{n-1}^n f(x)\,dx,$$

a funkcija $f(x)$ monotono opada, biće za svaki broj k u razmaku $(1, n)$ i za svaku vrednost x u razmaku $(k-1, k)$

$$f(x) < f(k-1),$$

pa, dakle, takođe i

$$\int_{k-1}^k f(x)\,dx < f(k-1),$$

prema čemu je

(163) $$J_n < f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1).$$

Sa druge strane, pošto je u isto vreme u razmaku $(k-1, k)$ i

$$f(x) > f(k),$$

biće takođe i

$$\int_{k-1}^k f(x)\,dx > f(k),$$

prema čemu je

(164) $$J_n > f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + f(n).$$

Ako se, dakle, stavi da je

$$f(0) + f(1) + \cdots + f(n) = F(n),$$

nejednačine (163) i (164) pokazuju da *se vrednost integrala J_n nalazi u razmaku između*

$$F(n) - f(0) \quad \text{i} \quad F(n) - f(n)$$

tako da je

(165) $$J_n = \int_0^n f(x)\,dx = F(n) - f(0) + \vartheta\,[f(0) - f(n)].$$

Granice razmaka u kome će se nalaziti integral J_n mogu se, dakle, odrediti sumiranjem konačnog reda čiji je opšti član $f(k)$. Kad se pusti da n beskrajno raste, $f(n)$ teži nuli, a $F(n)$ postaje zbir S beskrajnog reda

(166) $$S = f(0) + f(1) + f(2) + \ldots;$$

obrazac (165) postaje

(167) $$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = S - f(0) + \vartheta f(0) = S - \vartheta' f(0) \qquad (0 \leqslant \vartheta' \leqslant 1)$$

i vrednost integrala nalaziće se u razmaku između $S - f(0)$ i S.

Obrazac (167) daje neposredan dokaz Cauchyeve teoreme: *integral (167) i zbir reda (166) ili su oboje konačni, ili su oboje beskrajni*; jedan od njih ne može biti konačan a da i drugi to ne bude.

U slučaju kad je $f(0)=\infty$, treba na mesto integrala J posmatrati integral u kome je na mesto donje integralne granice 0 uzeta granica 1; ako je $f(1)=\infty$, treba za donju granicu uzeti 2 itd. Tako npr. vrednost integrala

$$J_n=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^k}=\frac{1}{k-1}$$

nalazi se u razmaku $(S-1, S)$, gde je

$$S=\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots$$

Integral J i zbir S su oboje konačni za $k>1$.

Integral

$$J=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\log x}=\log\log\infty-\log\log 2$$

i zbir reda

$$S=\frac{1}{2\cdot\log 2}+\frac{1}{3\cdot\log 3}+\frac{1}{4\cdot\log 4}+\cdots$$

su oboje beskrajni.

E) Integral algebarske funkcije drugog reda. Uočimo integral

$$J=\int_a^b |y|\,dx,$$

gde je y funkcija promenljive x određena kvadratnom jednačinom

$$y^2+f(x)\,y+\varphi(x)=0$$

i gde je razmak integrala (a, b) takav, da su u njemu obe funkcije

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} \quad \text{i} \quad f(x)-\frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

konačne, određene i pozitivne. Prema onome što je napred pokazano za korene kvadratne jednačine, apsolutna vrednost funkcije y može se napisati u obliku

$$|y|=\frac{\varphi}{f}+\vartheta\left(f-\frac{\varphi}{f}\right) \qquad (0\leqslant\vartheta\leqslant 1),$$

prema čemu će biti

$$J = \int_a^b \frac{\varphi}{f}\, dx + \vartheta \left(\int_a^b f\, dx - \int_a^b \frac{\varphi}{f}\, dx \right)$$

tako *da će se integral* J *nalaziti između*

$$\int_a^b f\, dx \quad \text{i} \quad \int_a^b \frac{\varphi}{f}\, dx.$$

Interes rezultata leži u tome što se granice integrala, u kome funkcije pod integralnim znakom *stoje pod kvadratnim korenom*, određuju kao razmaci čiji su krajevi integrali bez *tih kvadratnih korena.*

Sličan se rezultat dobija i za integrale algebarskih funkcija m-tog reda, pomoću napred navedene teoreme o razmaku koji sadrži apsolutne vrednosti svih realnih korena date algebarske jednačine m-tog stepena.

F) Jedna klasa određenih integrala. Na određene integrale oblika

$$J(x) = \int_a^b u e^{vx}\, dt,$$

gde su u i v date funkcije integracione promenljive t, nailazi se, kao na računske elemente, u raznovrsnim problemima matematičke analize.

Kad je razmak integracije (a, b) konačan, a u i v konačne i neprekidne funkcije u tome razmaku, svaki takav integral $J(x)$ predstavlja po jednu funkciju promenljive x holomorfnu u celoj ravni te promenljive. Ta se funkcija može razviti u red

$$J(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

konvergentan u celoj ravni x, a gde će biti

$$a_n = \frac{1}{n!} \int_a^b u v^n\, dt.$$

Konvergencija se lako dokazuje podelivši razmak integracije (a, b) na podrazmake takve da u svakome od njih funkcija u zadržava jedan isti znak. Ako je (α, β) takav jedan podrazmak, biće po apsolutnoj vrednosti, a prema običnoj teoremi za srednje vrednosti određenih integrala,

$$\int_\alpha^\beta u v^n\, dt = R^n \int_\alpha^\beta u\, dt,$$

gde je R jedna vrednost koja se nalazi između najmanje i najveće vrednosti funkcije v u tome razmaku. Grupišući takve integrale za sve podrazmake (a, b), u razmaku (a, b) dobija se za a_n jedan izraz koji pokazuje da je po apsolutnoj vrednosti

$$a_n < \frac{AM^n}{n!},$$

gde su A i M nezavisni od n, a što dokazuje konvergenciju reda.

Ma kakav bio znak funkcije u u razmaku (a, b), pošto e^{vx} zadržava nepromenljiv znak u tome razmaku, teorema srednjih vrednosti pokazuje *da se za ma koju realnu vrednost* x, *vrednost integrala nalazi u razmaku između*

$$N \int_a^b e^{v_1 x}\, dt \quad \text{i} \quad M \int_a^b e^{v_2 x}\, dt, \tag{168}$$

gde su v_1 i v_2 dve ma kakve funkcije između kojih se za t u (a, b) nalazi vrednost funkcije v; N i M su prednji i zadnji kraj jednoga, ma koga, razmaka u kome se nalazi vrednost funkcije u za vrednosti t u razmaku (a, b). Mogu se npr. za N i M uzeti najmanja i najveća vrednost koju dobija funkcija u za vrednosti t u razmaku (a, b). Tako se isto za v_1 i v_2 može uzeti najmanja i najveća vrednost Q i P koju dobija funkcija v za t u razmaku (a, b); *razmak funkcije* $J(x)$ *je tada onaj između vrednosti*

$$Pe^{Nx} \quad \text{i} \quad Qe^{Mx}$$

ili između

$$Pe^{Mx} \quad \text{i} \quad Qe^{Nx}$$

prema znaku posmatranih vrednosti.

Jedan, pokadšto uži, pa dakle i probitačniji, razmak za vrednost funkcije $J(x)$, dobija se primenom Schwarzove integralne nejednačine

$$\left(\int \varphi\psi\, dt\right)^2 < \left(\int \varphi^2\, dt\right)\left(\int \psi^2\, dt\right)$$

koja, kao što je kazano, važi za ma kakve integrabilne funkcije φ i ψ promenljive t. Ako se stavi da je

$$\varphi = u, \quad \psi = e^{vx}$$

dobija se

$$J^2(x) < H \int_a^b e^{2vx}\, dt,$$

gde je H konstanta

$$H = \int_a^b u^2\, dt.$$

Ako je , dakle, $\lambda(x)$ tačna vrednost, ili jedna gornja granica integrala

$$\int_a^b e^{2vx}\,dx,$$

zadnji se kraj razmaka (168) za funkciju $J(x)$ može smeniti vrednošću $\sqrt{H\lambda(x)}$ što je od interesa kad je ta vrednost manja od vrednosti

$$M\int_a^b e^{v_2 x}\,dx,$$

jer je tada razmak funkcije $J(x)$ uži od razmaka (168).

Iz obrasca

$$\frac{d^k y}{dx^k}=\int_a^b uv^k e^{vx}\,dx$$

u kome su izvodi funkcije J izraženi integralima istoga tipa kao i sama funkcija J, dobijaju se na isti način i razmaci u kojima će se nalaziti vrednosti tih izvoda za posmatrane vrednosti x.

Kao primer, odredićemo takve razmake za vrednosti funkcije

$$J(x)=\int_0^1 e^{vx}\,dx,$$

gde je $v=t\log\frac{1}{t}$. Ta se funkcija poklapa sa jednom transcendentom na koju se nailazi u mnogobrojnim opštijim analitičkim problemima i koja je predstavljena redom

$$\Delta(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)^{n+1}}=1+\frac{x}{4}+\frac{x^2}{27}+\frac{x^2}{256}+\cdots$$

Pošto funkcija v, za vreme dok t raste od 0 do 1, i sama počinje rasti od nule, dostiže svoj maksimum čija je vrednost

$$\frac{1}{e}=0{,}367879\cdots$$

pa zatim opada do nule, biće prema teoremi srednjih vrednosti

$$J(x)<e^{\frac{x}{e}} \quad \text{za} \quad x>0,$$

$$J(x)>e^{\frac{x}{e}} \quad \text{za} \quad x<0.$$

Vrednost $J(x)$ nalazi se, dakle, uvek u razmaku između 1 i $e^{\frac{x}{e}}$, tako da je

$$J(x)=1+\vartheta\left(e^{\frac{x}{e}}-1\right) \quad \text{za} \quad x>0,$$

$$J(x)=e^{\frac{x}{e}}+\vartheta\left(1-e^{\frac{x}{e}}\right) \quad \text{za} \quad x<0.$$

Međutim za pozitivne vrednosti x mogu se za $J(x)$ odrediti i uži razmaci na ovaj način:

Iz dvostruke nejednačine

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n,$$

koja vredi za sve cele brojeve $n \geqslant 5$, nalazi se da je za takve vrednosti

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} < \frac{1}{(n+1)^{n+1}} < \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}. \tag{169}$$

Ako se stavi da je

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2^2} + \cdots + \frac{x^n}{n^n},$$

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)^{n+2}} + \cdots$$

tako da je

$$1 + xJ(x) = P_n(x) + R_n(x) \tag{170}$$

prema nejednačini (169) biće za $n \geqslant 5$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{e}\right)^k < R_n(x) < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k. \tag{171}$$

Međutim, beskrajni zbirovi, koji figurišu na levoj i desnoj strani nejednačine (171), nisu ništa drugo do ostaci redova

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{e}\right)^k = e^{\frac{x}{e}}, \tag{172}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k = e^{\frac{x}{2}}. \tag{173}$$

Primenom poznatog pravila da ostatak jednog reda

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

ima za vrednost

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\vartheta x) \qquad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1)$$

nalazi se da će ostatak reda (172) biti

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{e^{\frac{\vartheta x}{e}}}{e^{2(n+1)}},$$

a ostatak reda (173)

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{e^{\frac{\vartheta' x}{2}}}{2^{2(n+1)}},$$

gde su ϑ i ϑ' dva broja koji se nalaze u razmaku (0, 1).

Nejednačina (171) tada dovodi do ovog rezultata:

Za sve pozitivne vrednosti x i ma koliki bio ceo broj $n > 5$, biće

$$1 + xJ(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

gde se $R_n(x)$ uvek nalazi u razmaku između vrednosti

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{1}{e^{2(n+1)}} \quad \text{i} \quad \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{e^{\frac{x}{2}}}{4^{n+1}}.$$

Ako se uzme $n = 5$, dobija se na taj način da je

$$J(x) = 1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{27} + \frac{x^3}{256} + \frac{x^4}{3125} + R_4(x),$$

gde se $R_n(x)$ uvek nalazi u razmaku između vrednosti

$$Ax^5 \quad \text{i} \quad Bx^5 e^{\frac{x}{2}},$$

gde su A i B konstante

$$A = \frac{1}{6!\,e^{12}} = 8534 \cdot 10^{-12}, \qquad B = \frac{1}{6!\,2^{12}} = 339084 \cdot 10^{-12}.$$

Na sličan se način, pomoću obrasca

$$\frac{d^k J(x)}{dx^k} = \int_0^1 v^k e^{vx}\, dx$$

mogu odrediti i razmaci između kojih će se nalaziti vrednosti izvoda funkcije $J(x)$.

Iz obrasca

$$J(x) = \int_0^1 e^{vx}\, dt \qquad \left(v = t \log \frac{1}{t}\right),$$

pošto funkcija v ostaje neprestano pozitivna između integralnih granica 0 i 1, vidi se u isto vreme da:

1° kad x beskrajno raste u pravcu $+\infty$, funkcija $J(x)$ beskrajno raste;

2° kad x beskrajno raste u pravcu $-\infty$, funkcija $J(x)$ teži nuli.

Prema gornjem integralnom obrascu za n-ti izvod funkcije $J(x)$, to isto važi i za sve izvode te funkcije.

Kriva linija $y=J(x)$ ima, kvalitativno, isti oblik kao eksponencijalna kriva linija $y=e^x$. Ona ima osu Ox kao asimptotu za $x=-\infty$: dok x raste od $-\infty$ do $+\infty$, ona neprestano raste od nule do $+\infty$, nemajući pri tome ni maksimuma, ni minimuma, ni prevojnih tačaka i sekući osu Oy u tački $y=1$.

Na funkcije oblika $J(x)$ nailazi se npr. pri odredbi iznosa površine od $x=0$ do $x=1$, ograničene osom Ox i lukom ma koje integralne krive linearne diferencijalne jednačine ma koga reda, koja se transformacijom

$$t \log t = z$$

integracione promenljive t svodi na linearnu jednačinu sa stalnim koeficijentima.

Iste se funkcije upotrebljavaju u raznovrsnim problemima matematičke analize, kao *komparativni elementi* za razne druge klase funkcija, koje se sa njima upoređuju, pa se iz tih upoređenja saznaju pojedine osobine tih klasa funkcija.

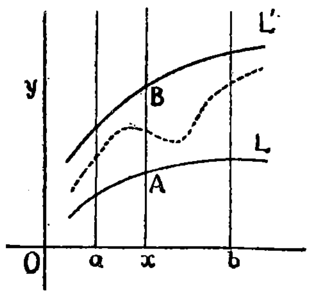
TREĆI ODELJAK

BROJNI RAZMACI ZA INTEGRALE DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

20. MEĐUSOBNO UPOREĐIVANJE DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Pored dosta velikog broja diferencijalnih jednačina koje se mogu integraliti pomoću kvadratura, ili pomoću poznatih kombinacija njihovih koeficijenata, postoji nepregledan i od prvoga beskrajno veći broj jednačina koje se ne mogu integraliti u takvome obliku. Ta nemogućnost ili je *apsolutna,* tj. integral je uopšte neizražljiv na pomenuti način, ili je *privremena,* tj. dolazi od toga što se za danas nema metoda za takvu integraciju. Međutim i u jednom, i u drugom slučaju postoje metode za integraciju pomoću beskrajnih redova, konvergentnih u određenim razmacima nezavisno promenljive količine; takve metode daju mogućnost da se integral $y(x)$, koji za jednu datu početnu vrednost $x=x_0$ ima datu vrednost $y=y_0$, izračuna i za svaku drugu vrednost x sadržanu u razmaku konvergencije dobijenog reda.

Ali bilo da je tačna integracija mogućna ili nemogućna, postoje metode za *određivanje integrala u obliku razmaka,* tako da se za svaku vrednost x sadržanu u jednome razmaku (a, b) može odrediti odgovarajući razmak (A, B) u kome će se nasigurno nalaziti vrednost uočenog integrala date diferencijalne jednačine. Takav je razmak, kao što se vidi, promenljiv, jer se on menja od jedne vrednosti x do druge. Kad se x postupno menja u razmaku (a, b), krajevi A i B *integralnog razmaka* (A, B) opisuju po jednu liniju u ravni xOy: to su *granične linije* integrala u tome razmaku promenljive x, i to *donja* i *gornja* granična linija L i L'.



Određivanje integrala u obliku razmaka sastoji se u određivanju gornje i donje granične linije integrala. Kad su ove određene, integralni razmak (A, B) za jednu datu vrednost x, imaće se kao odsečak (segment) prave koja prolazi kroz tačku $(x, 0)$ i koja je paralelna osovini Oy.

Za određivanje graničnih linija integrala postoje razne metode. Većina je od njih osnovana na *međusobnom upoređivanju diferencijalnih jednačina* u ovome smislu: kad je data jednačina

$$f(x, y, y', y'', \ldots)=0 \tag{174}$$

i kad su date početne vrednosti x_0, y_0, gde je vrednost x sadržana u datome razmaku (a, b) promenljive x, nađu se dve jednačine

$$f_1(x, u, u', u'', \ldots)=0, \qquad f_2(x, v, v', v'', \ldots)=0, \tag{175}$$

koje zadovoljavaju ove zahteve:

1° da se mogu odrediti njihovi integrali u i v koji za $x=x_0$ dobijaju vrednosti $u=y_0$, $v=y_0$;

2° da se za sve vrednosti x u razmaku (a, b) može dokazati dvostruka nejednakost

$$u \leqslant y \leqslant v.$$

Krive u ravni xOy, koje predstavljaju takve integrale u i v, biće granične linije integrala y; jednačine (175) igraju tada ulogu *komparativnih jednačina* za datu diferencijalnu jednačinu (174). Kad su nađene takve dve jednačine i njihovi integrali u i v, integral y jednačine (174) biće dat u obliku razmaka obrascem

$$y=u+\vartheta(v-u) \qquad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1).$$

U ovome što sada dolazi biće izloženo nekoliko metoda za određivanje komparativnih jednačina i graničnih linija za integrale date diferencijalne jednačine. Te su metode od naročite koristi u slučajevima kad se diferencijalna jednačina ne može ni tačno, ni približno integraliti, pa je korisno saznati bar to u kome se razmaku nalazi vrednost njenog integrala za datu vrednost promenljive x.

21. PRVA METODA

Neka su

$$y'=F(x, y), \tag{176}$$

$$u'=F_1(x, u), \tag{177}$$

$$v'=F_2(x, v) \tag{178}$$

tri diferencijalne jednačine prvoga reda. Funkcije dveju promenljivih x i y

$$F(x, y)-F_1(x, y), \tag{179}$$

$$F(x, y)-F_2(x, y), \tag{180}$$

imaće, u ravni xOy, svaka svoju pozitivnu i negativnu oblast. Označimo sa:

Δ_1 i Δ_2 pozitivnu i negativnu oblast funkcije (179);

Ω_1 i Ω_2 pozitivnu i negativnu oblast funkcije (180);

D_1 i $D_2, \ldots$ linije koje ograničavaju te oblasti;

E_1 i $E_2, \ldots$ linije koje predstavljaju geometrijska mesta singulariteta funkcija F, F_1 F_2;

Π deo ravni koji je zajednički za jedan par oblasti Δ i Ω suprotno označenih, npr. za oblasti Δ_1 i Ω_2.

Neka je $M_0(x_0, y_0)$ jedna tačka koja ne pripada ni jednoj od linija D ni E, a koja se nalazi u oblasti Π.

Naposletku, neka su y, u, v integrali jednačina (176), (177), (178), koji za $x=x_0$ imaju zajedničku vrednost

$$y=y_0, \quad u=y_0, \quad v=y_0.$$

Tada će sa jedne i druge strane tačke $(x_0, 0)$, postojati na osi Ox jedan razmak čije prostranstvo nije nula, npr. razmak

$$\text{od } x_0-h_1 \text{ do } x_0+h_2, \tag{181}$$

(gde su h_1 i h_2 dva pozitivna broja) koji će ispunjavati ove uslove:

α) dok se x menja u razmaku (181), integrali u i v jednačina (177) i (178), kao i njihovi prvi izvodi, su određeni, konačni i neprekidni;

β) kontura Γ sastavljena od krivih u, v i dveju pravih

$$x=x_0-h_1 \text{ i } x=x_0+h_2$$

sadržana je u oblasti Π i ona ne obuhvata ni jedan deo krivih D ni E, niti se sa kojom od ovih seče.

Tada se može dokazati ovaj rezultat:

Kad se x menja u razmaku (181), *integral y jednačine* (176) *biće konačan i neprekidan, a nalaziće se neprestano u razmaku između odgovarajućih vrednosti integrala u i v jednačina* (177) *i* (178), tj. integrala koji za $x=x_0$ dobijaju vrednost y_0.

Jer pošto se tačka M_0 nalazi u oblasti Π, biće za tu tačku

$$F(x, y)-F_1(x, y)>0, \quad F(x, y)-F_2(x, y)<0 \tag{182}$$

i prema tome

$$\frac{d}{dx}(y-u)>0, \quad \frac{d}{dx}(y-v)<0. \tag{183}$$

Sa druge strane je za $x=x_0$

$$y-u=0, \quad y-v=0, \tag{184}$$

pa dakle

$$\begin{aligned} v<y<u \quad &\text{za} \quad x=x_0-\varepsilon, \\ u<y<v \quad &\text{za} \quad x=x_0+\varepsilon, \end{aligned} \tag{185}$$

gde je ε dovoljno mali pozitivan broj.

Gornje tvrđenje, dakle, nasigurno važi za jedan dovoljno uzak razmak sa jedne i druge strane vrednosti x_0; mi ćemo sad dokazati da ono važi i za sve vrednosti x u razmaku (181). Toga radi primetimo da bi ono tek onda moglo da prestane važiti kad bi nastupio jedan ili drugi od ova dva slučaja:

a) ili da kriva y preseče jednu od krivih u ili v u jednoj tački čija se apscisa nalazi u razmaku (181);

b) ili da za jednu vrednost $x=\alpha$, sadržanu u razmaku (181), i za jednu vrednost $y=\beta$ sadržanu u razmaku između $u(\alpha)$ i $u(\beta)$, izvod $\frac{dy}{dx}$, pa dakle i funkcija $F(x, y)$, postane bilo beskrajna, bilo neodređena, ili da promeni determinaciju.

Slučaj *a*) ne može nastupiti, jer kad bi $x=\gamma$, $y=\delta$ bile koordinate jedne zajedničke tačke M, npr. krivih y i u koja je, među ostalim zajedničkim tačkama (ako ih ima) najbliža tački M_0, to, pošto se tačka M nalazi na samoj konturi Γ, a ova je sadržana u oblasti Π, moralo bi za tu tačku M biti

$$F(x, y)-F_1(x, y)>0$$

i prema tome

$$\frac{d}{dx}(y-u)>0,$$

a uz to i

$$y-u=0.$$

Prema tome bi moralo biti

$$\text{(186)} \qquad \begin{aligned} &y<u \quad \text{za} \quad x=\gamma-\varepsilon, \\ &y>u \quad \text{za} \quad x=\gamma+\varepsilon, \end{aligned}$$

a to je u suprotnosti sa nejednačinama (185), jer uporedivši među sobom nejednačine (185) i (186) vidi se da bi razlika $y-u$ pri prelasku od tačke M_0 na tačku M morala promeniti znak, što je nemoguće pošto, između tih dveju tačaka, ta razlika ne postaje jednaka nuli.

Slučaj *b*) takođe ne može nastupiti, jer se ni jedna tačka krivih E ne nalazi ni u konturi Γ ni na njoj samoj; izvod $\frac{dy}{dx}$ je, dakle, određen, konačan i neprekidan za sve vrednosti α sadržane u razmaku (181) i za sve vrednosti β sadržane u razmaku između $u(\alpha)$ i $u(\beta)$; on za njih ne menja ni determinaciju.

Gornje tvrđenje je time dokazano i ono važi za ceo razmak (181), i to tako da je

$$v<y<u \quad \text{u razmaku} \quad \text{od } x_0-h_1 \text{ do } x_0,$$

$$u<y<v \quad \text{u razmaku} \quad \text{od } x_0 \text{ do } x_0+h_2.$$

Kad bi se tačka M_0 nalazila u zajedničkom delu oblasti Δ_2 i Ω_1, sve dosadašnje nejednačine promenile bi smisao, a rezultat bi ostao isti, tako da se može smatrati kao dokazan ovaj opšti rezultat:

Kad god se tačka (x_0, y_0) *nalazi u zajedničkom delu dveju oblasti* Δ_i, Ω_k, *gde je jedan od indeksa i ili k paran, a drugi neparan, integral* y, *koji za* $x=x_0$ *ima vrednost* $y=y_0$, *biće konačan, neprekidan i sadržan u razmaku između u i v za sve vrednosti x u razmaku* (181).

Primetimo da za svaku diferencijalnu jednačinu (176)

$$y' = F(x, y)$$

i za svaki par (x_0, y_0) početnih vrednosti (ostavljajući na stranu izuzetne napred pomenute parove) postoji takav razmak (181) čije prostranstvo nije nula. *Za svaku, dakle, jednačinu* (176) *i za svaki par vrednosti* (x_0, y_0) *može se odrediti jedan razmak koji će nasigurno sadržati integral y za sve vrednosti x sadržane u jednome razmaku* (181) *oko vrednosti* x_0. U pojedinim slučajevima razmak (181), koji se nikad ne svodi na nulu, može obuhvatiti i sve vrednosti x od 0 do $+\infty$, ili od $-\infty$ do $+\infty$.

Jednačine (177) i (178) igraju ulogu komparativnih jednačina za jednačinu (176), a u i v daju granične linije za integral y.

Primer: primenimo to na Riccatievu jednačinu

$$y' = y^2 + f(x), \tag{187}$$

gde se pretpostavlja da funkcija $f(x)$ nema nikakav realan singularitet (npr. da je ona kakav polinom po x).

Uočimo najpre slučaj kad je vrednost $f(x_0)$ pozitivna; tada postoji jedan razmak (α_1, α_2) vrednosti x, koji obuhvata vrednost x_0 i u kome će funkcija $f(x)$ biti neprestano pozitivna.

Označimo sa N i M prednji i zadnji kraj jednoga razmaka koji obuhvata vrednosti $f(x)$, dok se x menja u razmaku (α_1, α_2), pa uzmimo za komparativne jednačine (177) i (178), jednačine

$$u' = u^2 + N, \quad v' = v^2 + M. \tag{188}$$

Funkcije (179) i (180) će biti

$$f(x) - N, \quad f(x) - M, \tag{189}$$

a oblasti se Δ_1 i Ω_2 poklapaju se delom ravni xOy između pravih $x = \alpha_1$ i $x = \alpha_2$; taj deo ravni predstavlja u isto vreme i zajedničku im oblast Π.

Integrali u i v komparativnih jednačina, koji za $x=x_0$ imaju zajedničku vrednost y_0, ovde su

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{y_0\sqrt{N} + N\operatorname{tg}[(x-x_0)\sqrt{N}]}{\sqrt{N}+y_0\operatorname{tg}[(x-x_0)\sqrt{N}]}, \\
v &= \frac{y_0\sqrt{M} + M\operatorname{tg}[(x-x_0)\sqrt{M}]}{\sqrt{M}+y_0\operatorname{tg}[(x-x_0)\sqrt{M}]},
\end{aligned}
\tag{190}
$$

i oni su određeni, konačni i neprekidni u izvesnom razmaku

$$\text{od}\quad \beta_1=x_0-k_1 \quad \text{do} \quad \beta_2=x_0+k_2,$$

gde su k_1 i k_2 pozitivne konstante koje je lako odrediti.

Krive E ovde ne postoje, pošto funkcije (189) nemaju realnih singulariteta. Sa druge strane, pošto se oblast Π proteže na celokupan deo ravni xOy što se nalazi između pravih $x=\alpha_1$ i $x=\alpha_2$, to je i kontura Γ sadržana u toj oblasti.

Prema svemu tome, kao razmak (181) ima se smatrati zajednički deo razmaka (α_1, α_2) i (β_1, β_2); *za sve vrednosti x u tome razmaku integral y će biti konačna i neprekidna funkcija promenljive x, sadržana u razmaku između funkcija u i v izraženih obrascima* (190).

Uočimo sad slučaj kad je vrednost $f(x_0)$ negativna; funkcija $f(x)$ će tada biti neprestano negativna u jednome razmaku (α_1, α_2) koji obuhvata vrednost x_0.

Označimo sa $-M$ i $-N$ prednji i zadnji kraj jednoga razmaka koji obuhvata vrednosti $f(x)$, dok se x menja u razmaku (α_1, α_2), pa uzmimo za komparativne jednačine

$$u'=u^2-M, \qquad v'=v^2-N. \tag{191}$$

Njihovi integrali u i v koji za $x=x_0$ imaju zajedničku vrednost y_0 tada su

$$
\begin{aligned}
u &= \sqrt{M}\,\frac{(y_0+\sqrt{M})+(y_0-\sqrt{M})\,e^{2(x-x_0)\sqrt{M}}}{y_0+\sqrt{M}-(y_0-\sqrt{M})\,e^{2(x-x_0)\sqrt{M}}}, \\
v &= \sqrt{N}\,\frac{(y_0+\sqrt{N})+(y_0-\sqrt{N})\,e^{2(x-x_0)\sqrt{N}}}{y_0+\sqrt{N}-(y_0-\sqrt{N})\,e^{2(x-x_0)\sqrt{N}}}
\end{aligned}
\tag{192}
$$

i oni su određeni, konačni i neprekidni za sve vrednosti x u izvesnom razmaku (β_1, β_2), koji obuhvata vrednost x_0 i koji je lako odrediti.

Na isti način kao u prvome slučaju, lako se vidi da se kao razmak (181) ima smatrati zajednički deo razmaka (α_1, α_2) i (β_1, β_2) *i da će za sve vrednosti x u tome razmaku integral y biti konačna i neprekidna funkcija promenljive x, sadržana u razmaku između funkcija u i v izraženih obrascima* (192).

22. DRUGA METODA

Navedena prva metoda je opšta i *primenljiva na sve diferencijalne jednačine prvoga reda, kako algebarske, tako i trancsendentne i za sve parove početnih vrednosti* x_0, y_0 osim onih izuzetnih parova koji se mogu unapred saznati neposredno na samoj diferencijalnoj jednačini.

Međutim, u specijalnim slučajevima, kad jednačina zadovoljava izvesne, više ili manje prostrane uslove, može se integralni razmak odrediti na razne druge načine, vezane za takve slučajeve i za takve uslove. Jedna od mnogobrojnih metoda za to određivanje bila bi ova što će se ovde navesti.

Neka je data diferencijalna jednačina prvoga reda

$$y' = F(x, \varphi), \tag{193}$$

gde je φ data funkcija promenljive y, pa uočimo slučaj kad su ispunjeni ovi uslovi:

1° da su funkcija $\varphi(y)$ i njen prvi izvod funkcije realne, neprekidne i konačne za sve vrednosti y od $-\infty$ do $+\infty$;

2° da su funkcija F i njen parcijalni izvod $\dfrac{\partial F}{\partial \varphi}$ realni, konačni, neprekidni i nepromenljivog znaka za sve vrednosti x sadržane u jednom razmaku (α_1, α_2) i za sve vrednosti y sadržane u istom razmaku (N, M) koji sadrži i vrednost funkcije $\varphi(y)$ za vrednosti y od $-\infty$ do $+\infty$;

3° da, označivši sa k jedan ma koji stalan broj sadržan u razmaku (N, M), a sa x_1 i x_2 dva ma koja stalna broja sadržana u razmaku (α_1, α_2), određen integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, k)\, dx$$

ima samo jednu realnu vrednost, i to određenu i konačnu (a može imati i koliko se hoće drugih, ali imaginarnih vrednosti koje npr. proizlaze od integralnih perioda).

Uzmimo za početne vrednosti x_0, y_0 jednu ma koju vrednost x_0 sadržanu u razmaku (α_1, α_2) i jednu ma koju vrednost y_0 od $-\infty$ do $+\infty$, pa formirajmo dve funkcije

$$\lambda(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, N)\, dx, \qquad \mu(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, M)\, dx.$$

Tada se može dokazati ovaj rezultat:

Integral y jednačine (193), *koji za $x = x_0$ ima vrednost $y = y_0$, biće konačan neprekidan za sve vrednosti x sadržane u razmaku (α_1, α_2), menjaće se priomet i* *u jednom istom smislu, monotono rastući ili opadajući, i biće neprestano sadržan u razmaku između odgovarajućih vrednosti funkcija λ i μ.*

Da bismo to dokazali, primetimo da kad su ispunjeni uslovi 1° i 2°, apsolutna vrednost funkcije F ostaje manja od jednog konačnog pozitivnog broja za sve vrednosti x sadržane u razmaku (α_1, α_2) i za sve vrednosti y od $-\infty$ do $+\infty$. To će isto biti i sa njenim parcijalnim izvodom

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial \varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dy}.$$

Prema jednoj poznatoj teoremi iz analitičke teorije diferencijalnih jednačina prvoga reda, integral y jednačine (193) koji za $x=x_0$ ima vrednost $y=y_0$, biće konačan i neprekidan za sve vrednosti x sadržane u razmaku (α_1, α_2).

Prema uslovu 2° funkcija F i njen parcijalni izvod $\frac{\partial F}{\partial y}$ imaju u razmacima (α_1, α_2) i (N, M) nepromenljiv znak; uočimo slučaj kad je ovaj pozitivan. Prema jednačini (193) integral y neprestano raste, a prema dvostrukoj nejednačini

$$F(x, N) \leqslant F(x, \varphi) \leqslant F(x, M)$$

i prema jednačini (193), integral

$$\int_{x_0}^{x} F(x, \varphi)\, dx,$$

koji nije ništa drugo do razlika $y-y_0$ nalaziće se uvek u razmaku između odgovarajućih vrednosti integrala

$$J_1(x)=\int_{x_0}^{x} F(x, N)\, dx, \qquad J_2(x)=\int_{x_0}^{x} F(x, M)\, dx,$$

čime je gornje tvrđenje dokazano.

Isti bi se rezultat i isti dokaz, samo sa permutovanim krajevima razmaka, imao i u slučaju kad bi znak funkcija F i $\frac{\partial F}{\partial y}$ bio negativan.

U slučaju kad razmak (α_1, α_2) obuhvata sve realne brojeve, *gornji rezultat važi za ma koje početne vrednosti x_0, y_0.*

I primer: neka je data jednačina

$$y' = mx^2 + ne^{-ky^2},$$

gde su k, m, n pozitivne konstante. Uzevši da je

$$\varphi(y) = e^{-ky^2},$$

uslovi 1° i 2° ispunjeni su npr. za sve pozitivne vrednosti x, y; vrednosti N i M su: $N=0$, $M=1$; funkcije λ i μ su

$$\lambda(x, x_0, y_0) = y_0 + \frac{m}{3}(x^3 - x^3_0),$$

$$\mu(x, x_0, y_0) = y_0 + \frac{m}{3}(x^3 - x^3_0) + n(x - x_0)$$

i za sve pozitivne vrednosti x_0 i x integral y biće konačna, neprekidna i pozitivna, monotono rastuća funkcija, sadržana u razmaku (λ, μ).

II primer: neka je data jednačina

$$y' = \frac{e^{-rx^2}}{1 - me^{-kx^2} - ne^{-kx^2 - py^2}},$$

gde su m, n, k, p, r pozitivne konstante, a uz to je još i

$$m + n < 1.$$

Uzevši da je

$$\varphi(y) = e^{-py^2},$$

uslovi 1° i 2° su ispunjeni za sve realne vrednosti x, y; tada je $N=0$, $M=1$; funkcije λ i μ su:

$$\lambda(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-rx^2}}{1 - me^{-kx^2}}\, dx,$$

$$\mu(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-rx^2}}{1 - (m+n)\, e^{-kx^2}}\, dx$$

i one ograničavaju integral J, koji za $x = x_0$ dobija vrednost $y = y_0$ i ostaje konačan, neprekidan, pozitivan za sve realne vrednosti x, rastući pri tome monotono.

III primer: neka je data jednačina

$$y' = \frac{a + y^2}{ab + x + by^2},$$

gde su a i b pozitivne konstante. Uzevši da je

$$\varphi(y) = \frac{1}{a + y^2},$$

čime jednačina dobija oblik

$$y' = \frac{1}{b + x\,\varphi(y)},$$

uslovi 1° i 2° ispunjeni su npr. za sve pozitivne vrednosti x, y; tada je $N=0$, $M=\frac{1}{a}$; funkcije λ i μ su

$$\lambda(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{b} = C_1 + \frac{x}{b},$$

$$\mu(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{b + \frac{x}{a}} = C_2 + a\log(x + ab),$$

gde su C_1 i C_2 konstante

$$C_1 = y_0 - \frac{x_0}{b}, \quad C_2 = y_0 - a\log(x_0 + ab)$$

i za sve pozitivne vrednosti x_0 i x integral će biti sadržan u razmaku (λ, μ).

Asimptotna vrednost integrala. Kazano je da, kad razmak (a_1, a_2) obuhvata sve realne brojeve, gornji rezultati važe za ma koje početne vrednosti x_0, y_0. U tome slučaju *asimptotna vrednost* integrala y, tj. njegova vrednost za $x = +\infty$ ili za $x = -\infty$, biće konačna ili beskrajna prema tome da li odgovarajuće vrednosti integrala J_1 i J_2 teže konačnim ili beskrajno velikim granicama. *Kad god su te granice konačne, asimptotna vrednost y nalazi se u razmaku između vrednosti*

$$y_0 + \lim J_1(x) \quad \text{i} \quad y_0 + \lim J_2(x)$$

tako da, ako se stavi da je

$$\text{asimpt. vrednost } y = Y,$$

$$\text{asimpt. vrednost } J_1 = A_1,$$

$$\text{asimpt. vrednost } J_2 = A_2,$$

biće

$$Y = A_1 + \vartheta(A_2 - A_1).$$

Tako u prvom primeru, kad je data jednačina

$$\frac{dy}{dx} = mx^2 + ne^{-ky^2},$$

(m, n, k pozitivne konstante) asimptotna vrednost integrala y, koji za $x=x_0$ ima vrednost y_0, beskrajno je velika, jer integrali J_1 i J_2 teže beskrajno velikim granicama.

Naprotiv, u drugome primeru, kad je data jednačina

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{-rx^2}}{1-\alpha\, e^{-kx^2}-\beta\, e^{-kx^2-py^2}},$$

(α, β, k, p pozitivne konstante i $\alpha+\beta<1$) lako se uveravamo da je asimptotna vrednost integrala konačna i da joj se može odrediti brojni razmak u kome će se ona nasigurno nalaziti.

Jer u tome je slučaju

$$J_1(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{e^{-rx^2}}{1-\alpha\, e^{-kx^2}}\,dx$$

$$J_2(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{e^{-rx^2}}{1-(\alpha+\beta)\, e^{-kx^2}}\,dx.$$

A pošto je za vrednosti z, po apsolutnoj vrednosti manje od 1,

$$\frac{1}{1-ze^{-kx^2}}=1+ze^{-kx^2}+z^2e^{-2kx^2}+z^3e^{-3kx^2}+\cdots,$$

to je

$$\frac{e^{-rx^2}}{1-ze^{-kx^2}}=e^{-rx^2}+ze^{-(r+k)x^2}+z^2e^{-(r+2k)x^2}+$$
$$+z^3e^{-(r+3k)x^2}+\cdots$$

i prema tome je

$$\int_0^\infty\frac{e^{-rx^2}}{1-ze^{-kx^2}}\,dx=u_0+u_1z+u_2z^2+u_3z^3+\cdots,$$

gde je

$$u_n=\int_0^\infty e^{-(r+nk)x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{r+nk}},$$

tako, da se može napisati

$$\int_0^\infty\frac{e^{-rx^2}}{1-ze^{-kx^2}}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\Phi(z), \tag{194}$$

gde je

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{z^n}{\sqrt{r+nk}}, \tag{195}$$

koji obrazac važi za vrednosti z po apsolutnoj vrednosti manje od 1.

Međutim, prema obrascu

$$\int_{x_0}^{\infty} = \int_{x_0}^{0} + \int_{0}^{\infty}$$

i obrascima (194) i (195) može se napisati da je

$$A_1 = J_1(0) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Phi(\alpha), \quad A_2 = J_2(0) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Phi(\alpha+\beta),$$

pa pošto su vrednosti α i $\alpha+\beta$ manje od jedinice, obe su vrednosti A_1 i A_2 konačne i određene; *asimptotna vrednost integrala y konačna je i nalazi se u razmaku između A_1 i A_2*.

Od interesa je skrenuti pažnju na ulogu koju igra funkcija $\Phi(z)$ pri odredbi razmaka u kome se nalazi asimptotna vrednost integrala y gornje jednačine. Ta je funkcija definisana redom (195) u kome rang n njegovih članova figuriše pod kvadratnim korenom, a na takve se redove nikad ne nailazi pri integraciji algebarskih diferencijalnih jednačina.

23. KVALITATIVNI PRVI INTEGRALI DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Napred izložene dve metode odnose se na diferencijalne jednačine *prvoga reda*; metoda koja će ovde biti izložena primenljiva je na jednačine *ma koga reda*. Ona se sastoji u upotrebi jedne naročite vrste prvih integrala diferencijalnih jednačina.

U opštoj teoriji diferencijalnih jednačina smatra se kao *prvi integral* date jednačine

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{196}$$

takav jedan izraz

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(m)}), \tag{197}$$

koji se prema samoj jednačini (196) svodi na jednu konstantu kad se u njemu y smeni *kojim bilo* integralom (196). Egzistencija takvog integrala izražava se jednačinom

$$\Phi = \text{const.} \tag{198}$$

Tako npr. jednačina

$$yy'' + y'^2 = 0$$

ima kao svoj prvi integral

$$yy' = \text{const};$$

za jednačinu

$$(y + 2\,xy')\,y'' + 2\,y'^2 = 0$$

postoji prvi integral

$$xy'^2 + yy' = \text{const}.$$

Međutim, pored takve vrste prvih integrala, koji izražavaju da se jedan određen izraz Φ *ne menja* sa promenljivom x kad se u njemu y smeni integralom jednačine (196), u velikom broju slučajeva postoji za istu jednačinu i takav jedan izraz Φ, koji se *menja samo u određenom brojnom razmaku*, kad se u njemu y smeni integralom jednačine (196); to se izražava jednačinom

(199) $$\Phi = \lambda$$

sa pridodatom joj dvostrukom nejednačinom

(200) $$\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$$

(gde λ_1 i λ_2 označavaju prednji i zadnji kraj razmaka u kome se menja izraz Φ) ili jednačinom

(201) $$\Phi = \lambda_1 + \vartheta\,(\lambda_2 - \lambda_1) \quad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1).$$

Ali, dok jednačina (198) važi *za koji bilo* integral jednačine (196), jednačina (199) važi *samo za pojedine vrste* integrala iste jednačine (196), npr. samo za integrale realne, ili pozitivne, ili monotono rastuće, ili konveksne itd.

Tako npr. pošto je za realne vrednosti y i y'

$$\frac{1}{2}\,(y'^2 + y^2)^2 \leqslant y'^4 + y^4 \leqslant (y'^2 + y^2)^2,$$

to se za diferencijalnu jednačinu

(202) $$y'^4 + y^4 = f(x)$$

dobija da je

$$\frac{y'^2 + y^2}{\sqrt{f(x)}} = 1 + \vartheta\,(\sqrt{2} - 1) \quad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1),$$

tako da je, za ma koji realni integral jednačine (202)

(203) $$\frac{y'^2 + y^2}{\sqrt{f(x)}} = 1 + \vartheta \cdot 0{,}4142.$$

Tako isto, pošto je za realne i pozitivne vrednosti y i y'

$$\frac{1}{2}(y'+y)^2 \leqslant y'^2+y^2 \leqslant (y'+y)^2,$$

to će, za ma koji pozitivan i monotono rastući integral jednačine

$$y'^2+y^2=\varphi(x) \tag{204}$$

biti

$$\frac{y'+y}{\sqrt{\varphi(x)}}=1+\vartheta\cdot 0{,}4142. \tag{205}$$

Tako se isto nalazi, da će za ma koji pozitivan i konveksan integral jednačine

$$y''^2+y^2=\psi(x) \tag{206}$$

biti

$$\frac{y''+y}{\sqrt{\psi(x)}}=1+\vartheta\cdot 0{,}4142. \tag{207}$$

Tako isto, dok jednačina (198) važi za *sve vrednosti* x, kako realne tako i imaginarne, jednačina (199) važi samo za *realne* vrednosti x, *obično sadržane u jednome određenom razmaku*(a, b). Tako npr. u slučaju jednačine (202), jednačina (203) će važiti samo za one razmake (a, b) vrednosti x u kome je uočeni integral realan; u slučaju jednačine (204), jednačina (205) važi samo za razmak (a, b) u kome je integral pozitivan i monotono raste itd..

Skup od sviju tih činjenica označuje se jednačinom

$$\Phi=\lambda \tag{208}$$

i nejednačinama

$$a<x<b \qquad \lambda_1<\lambda<\lambda_2.$$

gde ćemo, kao i do sada, označavati λ sa ϑ kad je $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, a sa ω kad je $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=+1$.

Pri tome treba imati na umu da su λ, ϑ, ω ipak funkcije promenljive x, čije vrednosti neprestano ostaju u odgovarajućem razmaku (λ_1, λ_2), odnosno $(0, 1)$ ili $(-1, +1)$, ali su različne za razne vrednosti x sadržane u razmaku (a, b).

Dok prvi integral u običnom smislu, tj. jednačina $\Phi=\text{const}$, izražava jednu potpuno određenu matematičko-*kvantitativnu* činjenicu, dotle jednačina (208) izražava jednu nepotpuno određenu činjenicu, koja je matematičko-*kvalitativne* prirode, jer samo označuje razmak u kome se nalazi izraz Φ, ne precizirajući njegovu pravu vrednost. Stoga će se za jednačinu (208), ili za sam izraz Φ, kazati da predstavljaju jedan *kvalitativni prvi integral* date jednačine (196).

Takva vrsta prvih integrala, mada ne izražava nikakvu preciznu matematičku činjenicu, može ipak korisno poslužiti za proučavanje integrala na koje se odnosi. Naime, takvi prvi integrali daju mogućnosti da se odredi razmak u kome će biti sadržane vrednosti uočenog integrala y date jednačine (196), broj nula integrala y u datome razmaku (a, b) promenljive x, razmaci koji se odnose na maksimume i minimume integrala y u razmaku (a, b) promenljive x itd. A sve je to od naročitog interesa u slučajevima kad se diferencijalna jednačina ne može ni tačno, ni približno integraliti. Takav način određivanja integralnih razmaka videće se iz ovoga što sleduje.

24. INTEGRALNI RAZMACI ODREĐENI POMOĆU KVALITATIVNIH PRVIH INTEGRALA

U velikom broju slučajeva, iskoristivši obrasce za integralne razmake, izložene u ranijim odeljcima ove knjige, mogućno je integraliti diferencijalnu jednačinu $\Phi=\lambda$ koja predstavlja kvalitativni prvi integral date jednačine $F=0$, a da se pri tome ne mora znati tačna vrednost broja λ koja odgovara datoj vrednosti x, tj. da se ne mora znati funkcija $\lambda(x)$. Tada se integral y, koji za $x=x_0$ ima vrednost $y=y_0$ dobija u obliku

$$y=f(x, x_0, y_0, \mu), \tag{209}$$

gde je μ jedan broj kome se ne zna tačna vrednost, ali se zna razmak u kome će se on nasigurno nalaziti pa ma kakva bila vrednost x u razmaku (a, b).

Pomoću jednačine (209) *može se tada odrediti promenljiv razmak (A, B) u kome će se nalaziti integral y kad se promenljiva x bude menjala u svome razmaku* (a, b). Razmak (A, B) može se tada izračunati i u obliku svoga asimetričnog ili simetričnog normalnog predstavnika

$$y=u_1+\vartheta v_1 \qquad (0\leqslant\vartheta\leqslant 1),$$

$$y=u_2+\omega v_2 \qquad (-1\leqslant\omega\leqslant 1),$$

tako, da se integralom y, kao brojnim razmakom, mogu vršiti sve vrste računa, na napred pokazani način za brojne razmake.

Način na koji se, iz jednog poznatog kvalitativnog prvog integrala $\Phi=\lambda$ dolazi do brojnog razmaka za integral y, zavisi u prvome redu od analitičkog oblika izraza Φ. Za određene tipove takvih izraza vezane su pojedine osobine integrala y, koje se svode na odredbu pojedinih brojnih razmaka. Ovde će biti pokazano kako to biva za nekoliko prostih tipova izraza Φ.

I tip oblika

$$\Phi = \frac{y'}{y} = \lambda, \quad (a<x<b, \quad \lambda_1<\lambda<\lambda_2).$$

Odatle je integracijom

$$\log y - \log y_0 = \int_{x_0}^{x} \lambda \, dx = \lambda' \int_{x_0}^{x} dx = \lambda' (x-x_0)$$

(gde je λ' jedan broj koji leži između λ_1 i λ_2) i prema tome se integral date jednačine $F=0$, koji za $x-x_0$ ima vrednost $y=y_0$ može napisati u obliku

$$y = y_0 \, e^{\lambda'(x-x_0)}).$$

Iz toga se oblika vidi da *integral y ne postaje jednak nuli ni za koju vrednost x sadržanu u razmaku (a, b) i da je za sve vrednosti x u tome razmaku i sam sadržan u razmaku između funkcija*

$$y_0 \, e^{\lambda_1(x-x_0)} \quad \text{i} \quad y_0 \, e^{\lambda_2(x-x_0)},$$

tako da je

$$y = C_1 \, e^{\lambda_1 x} + \vartheta \, (C_2 \, e^{\lambda_2 x} - C_1 \, e^{\lambda_1 x}) \quad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1),$$

gde su C_1 i C_2 konstante

$$C_1 = y_0 \, e^{-\lambda_1 x_0}, \quad C_2 = y_0 \, e^{-\lambda_2 x_0}.$$

U slučaju kad se razmak (a, b) rasprostire od 0 do ∞, *integral asimptotno teži nuli ili beskrajno raste kao eksponencijalna funkcija $e^{\alpha x}$* (gde je α jedna vrednost sadržana u razmaku između λ_1 i λ_2) prema znaku λ_1 i λ_2. Sličan rezultat važi i za slučaj kad se (a, b) pruža od $-\infty$ do 0, ili od $-\infty$ do $+\infty$.

I primer: neka je data diferencijalna jednačina

$$(\varphi + \psi \, y^2)^2 \, y'^2 - (\varphi^2 + \psi^2 \, y^4) \, y^2 = 0,$$

gde su φ, ψ funkcije promenljive x, pozitivne i konačne u razmaku (a, b). Pošto je, za ma kakvu realnu vrednost y

$$\frac{1}{2} (\varphi + \psi \, y^2)^2 \leqslant \varphi^2 + \psi^2 \, y^4 \leqslant (\varphi + \psi \, y^2)^2,$$

to će se, za sve vrednosti x u razmaku (a, b) i za sve realne integrale y, imati kao kvalitativni prvi integral:

$$\frac{y'}{y} = \lambda \quad \left(a<x<b \quad \frac{1}{\sqrt{2}}<\lambda<1\right) \quad \text{ili} \quad \left(a<x<b \quad -1<\lambda<-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

prema jednoj ili drugoj determinaciji kvadratnog korena

$$\sqrt{\varphi^2 + \psi^2 \, y^4}.$$

II primer: diferencijalna jednačina

$$y' = (a + be^{-x^2-y^2})\, y,$$

gde su a i b pozitivne konstante, ima za sve realne vrednosti x i za sve svoje integrale, kao prvi integral

$$\frac{y'}{y} = \lambda \; (-\infty < x < \infty, \quad a < \lambda < a+b).$$

II tip oblika

$$(y'+y)\,\varphi = \lambda \qquad (a < x < b, \quad \lambda_1 < \lambda < \lambda_2)$$

gde je φ funkcija promenljive x. Integracijom i primenom obične teoreme srednjih vrednosti nalazi se da se integral y, koji za $x = x_0$ ima vrednost $y = y_0$, može napisati u obliku

$$y = e^{-(x-x_0)} \left[y_0 + \lambda' \, e^{-x_0} \int_{x_0}^{x} \frac{e^x}{\varphi}\, dx \right],$$

gde je λ' jedan broj koji leži u razmaku (λ_1, λ_2). Iz toga se vidi da je, za vrednosti x sadržane u razmaku (a, b), integral y sadržan u razmaku između funkcija

$$e^{-x}\left(C + \lambda_1 \int_{x_0}^{x} \frac{e^x}{\varphi}\, dx \right) \quad \text{i} \quad e^{-x}\left(C + \lambda_2 \int_{x_0}^{x} \frac{e^x}{\varphi}\, dx \right),$$

gde je C konstanta

$$C = y_0\, e^{x_0}.$$

Sličan se rezultat dobija i za slučaj kad postoji jedan kvalitativni prvi integral oblika

$$(y' - y)\,\varphi = \lambda.$$

III primer: neka je data diferencijalna jednačina

$$y'^2 + y^2 = f(x),$$

gde je funkcija $f(x)$ realna, pozitivna, konačna i neprekidna u uočenom razmaku (a, b) promenljive x.

Uočimo, najpre, pozitivnu determinaciju kvadratnog korena $\sqrt{f(x)}$ i integral y koji za $x = x_0$ ima vrednost $y = y_0$. Početna tačka M_0 (x_0, y_0) može se nalaziti iznad ili ispod ose Ox, ili na njoj samoj; mi ćemo uzeti da se ona nalazi iznad te ose. Ta se tačka tada mora nalaziti u oblasti ravni xOy, ograničenoj osom Ox i krivom

$$y = \sqrt{f(x)}, \tag{210}$$

jer bi inače uočena grana integrala y bila imaginarna.

Kroz tačku M_0 prolaze dve pozitivne grane integrala, jedna monotono rastuća Y_1, koja za koeficijenat pravca dirke u M_0 ima vrednost

$$+\sqrt{f(x_0)-y_0^2},$$

druga monotono opadajuća Y_2, koja za taj koeficijenat ima vrednost

$$-\sqrt{f(x_0)-y_0^2};$$

obe se dirke među sobom poklapaju kad se tačka M_0 nalazi na krivoj (210).

Grani Y_1 odgovara kvalitativni prvi integral

$$\frac{y'+y}{\sqrt{f(x)}}=\lambda \quad (a<x<b, \quad 1\leqslant\lambda\leqslant\sqrt{2}),$$

što, prema gore rečenom, pokazuje da se ona, za vrednosti x sadržane u razmaku (a, b), neprestano nalazi u razmaku između funkcija

$$e^{-x}\left[C+\int_{x_0}^{x} e^x\sqrt{f(x)}\,dx\right] \quad \text{i} \quad e^{-x}\left[C+\sqrt{2}\int_{x_0}^{x} e^x\sqrt{f(x)}\,dx\right],$$

gde je C konstanta

$$C=y_0\,e^{x_0}.$$

Grani Y_2 odgovara kvalitativni prvi integral

$$\frac{-y'+y}{\sqrt{f(x)}}=\lambda \quad (a<x<b \quad 1\leqslant\lambda\leqslant\sqrt{2}),$$

što pokazuje da se ona, za vrednosti x sadržane u razmaku (a, b), neprestano nalazi u razmaku između funkcija

$$y=e^x\left[D-\sqrt{2}\int_{x_0}^{x} e^{-x}\sqrt{f(x)}\,dx\right]$$

i

$$y=e^x\left[D-\int_{x_0}^{x} e^{-x}\sqrt{f(x)}\,dx\right].$$

Kroz tačku $M'_0\ (x_0, -y_0)$, simetričnu tački M_0 prema osi Ox, prolaze takođe dve, i to negativne grane integrala y, jedna monotono opadajuća U_1, druga monotono rastuća U_2; one su simetrične granama Y_1 i Y_2 prema osi Ox, i lako im je na gornji način odrediti razmake u kojima će se one nalaziti.

III tip oblika

(211) $$\Phi=\frac{y''}{y}=\lambda \quad (a<x<b, \quad \lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2).$$

Iz takvog se oblika izraza Φ može odmah zaključiti, da *svaki konačan i neprekidan integral y jednačine $F=0$ menja znak pri svakome svome prolasku kroz nulu.* Jer, ako se u jednačini

$$y''-\lambda y=0 \tag{212}$$

stavi

$$y=(x-a)^k\cdot\varphi,$$

gde je a proizvoljan broj, dobija se

$$(x-a)^2(\varphi\lambda-\varphi'')=k(k-1)\varphi+2k(x-a)\varphi'. \tag{213}$$

Kad je $x=a$ jedan koren k-tog reda jednačine $y=0$, funkcija φ ostaje konačna, određena i od nule različna za $x=a$, kao i njeni uzastopni izvodi. Jednačina (213) tada pokazuje da njena desna strana za $x=a$ teži granici $k(k-1)\varphi$, pa pošto ta granica mora biti nula, treba da je ili $k=0$ (u kome slučaju a nije koren jednačine $y=0$) ili $k=1$ (u kome je slučaju a prost koren iste jednačine) čime je gornje tvrđenje dokazano.

Razlikujemo sada ova dva slučaja:

Prvi slučaj: $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$. Neka je $x=x_0$ jedan prost koren jednačine $y'=0$ sadržan u razmaku (a, b). Pošto su tada, prema jednačini (211), y i y'' istoga znaka za sve vrednosti x sadržane u razmaku (a, b), to integral y ne može u tome razmaku imati ni pozitivnih maksimuma, ni negativnih minimuma. Prema tome, ako se sa y_0 označi vrednost koju ima y za $x=x_0$ onda

1° ako je $y_0>0$, integral će y za $x=x_0$ dostići jedan pozitivan minimum, a u razmaku vrednosti x od a do x_0 biće pozitivan i opadaće monotono; za vrednosti x u razmaku od x_0 do b on će biti pozitivan i monotono će rasti;

2° ako je $y_0<0$, integral će y za $x=x_0$ dostići jedan negativan maksimum, a za vrednost x u razmaku od a do x_0 biće negativan i monotono će rasti; za x u razmaku od x_0 do b on će biti negativan i monotono će opadati.

U svakom slučaju, promena znaka izvoda y' nastupa samo za $x=x_0$.

Množeći jednačinu (211) sa $y'\,dx$, integraleći između granica x i x_0, gde je x jedna proizvoljna vrednost sadržana u razmaku (a, x_0) i vodeći računa o tome da je $y'=0$ za $x=x_0$, dobija se da je

$$-\frac{y'^2}{2}=\int_x^{x_0}\lambda yy'\,dx. \tag{214}$$

Pošto proizvod yy' ne menja znak u razmaku integracije, obična teorema srednjih vrednosti, primenjena na integral (214), daje

$$-y'^2=\lambda'(y_0{}^2-y^2)\quad(\lambda_1\leqslant\lambda'\leqslant\lambda_2),$$

odakle se opet integracijom i primenom iste teoreme dobija da je

$$y = y_0 \frac{e^X + e^{-X}}{2} = y_0 \, ch \, X, \tag{215}$$

gde je

$$X = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\lambda'} \, dx = \lambda'' (x - x_0) \quad (\sqrt{\lambda_1} \leq \lambda'' \leq \sqrt{\lambda_2}). \tag{216}$$

Da smo, pak, na mesto integracije između granica x i x_0, izvršili integraciju između granica x_0 i x, gde je x jedna proizvoljna vrednost sadržana u razmaku (x_0, b), dobila bi se jednačina

$$\frac{y'^2}{2} = \int_{x_0}^{x} \lambda y y' \, dx,$$

koja dovodi do istih obrazaca (215) i (216).

Na taj se način dolazi do ovoga rezultata:

Kad data diferencijalna jednačina $F = 0$ ima za svoje realne, konačne i neprekidne integnale y, a za vrednosti x sadržane u razmaku (a, b), jedan kvalitativni prvi integral (211), gde su a i b pozitivni brojevi, svaki se od tih integrala, a za takve vrednosti x, može napisati u obliku

$$y = y_0 \frac{e^{\lambda''(x - x_0)} + e^{-\lambda''(x - x_0)}}{2} = y_0 \, \mathrm{ch} \, [\lambda'' (x - x_0)],$$

gde je y_0 prost koren jednačine $y' = 0$ koji se nalazi u razmaku (a, b), a λ'' jedan broj koji se nalazi u razmaku između vrednosti $\sqrt{\lambda_1}$ i $\sqrt{\lambda_2}$.

Stav, kao što se vidi, važi za one, među integralima y jednačine $F = 0$, čiji prvi izvod postaje jednak nuli za jednu vrednost $x = x_0$ sadržanu u razmaku (a, b), a takvih integrala ima beskrajno mnogo. *Svi takvi integrali leže u razmaku između vrednosti*

$$y_0 \, \mathrm{ch} \, (x - x_0) \sqrt{\lambda_1} \quad \text{i} \quad y_0 \, \mathrm{ch} \, (x - x_0) \sqrt{\lambda_2}, \tag{217}$$

za sve vrednosti x sadržane u razmaku (a, b).

Za sve vrednosti x dovoljno bliske vrednosti x_0, integrali se nalaze u oblasti između dveju parabola

$$y = y_0 \left[1 + \frac{\lambda_1}{2} (x - x_0)^2 \right], \quad y = y_0 \left[1 + \frac{\lambda_2}{2} (x - x_0)^2 \right],$$

koje prolaze kroz tačku (x_0, y_0). To se vidi iz oblika reda uređenog po stepenima razlike $x - x_0$, u koji se mogu razviti izrazi (217).

I primer: homogena linearna diferencijalna jednačina drugoga reda

$$y''-f(x)\,y=0 \tag{218}$$

obuhvaćena je gornjim stavom za svaki razmak vrednosti x u kome je funkcija $f(x)$ *pozitivna*; vrednosti λ_1 i λ_2 su najmanja i najveća vrednost koje ima $f(x)$ u tome razmaku. Za integral y te jednačine važi sve ono što je maločas nađeno za III tip kvalitativnih prvih integrala.

II primer: diferencijalna jednačina

$$y''+\varphi y'+\psi y=0$$

smenom

$$y=ze^{-\frac{1}{2}\int\varphi\,dx}$$

pretvara se u jednačinu

$$z''-f(x)\,z=0,$$

gde je

$$f(x)=\psi-\frac{\varphi^2}{4}-\frac{\varphi'}{2}, \tag{219}$$

iz čega se izvodi ovaj rezultat:

Svaki realan integral, konačan i neprekidan u jednome razmaku (a, b) promenljive x, u kome je funkcija (219) pozitivna, i koji je takav da prvi izvod funkcije

$$z=ye^{\frac{1}{2}\int\varphi\,dx}$$

postaje jednak nuli za jednu vrednost $x=x_0$ sadržanu u razmaku (a, b), nalazi se u razmaku između vrednosti

$$\frac{y_0}{2}e^{-\frac{1}{2}\int\varphi\,dx}\operatorname{ch}[(x-x_0)\,\mu_1],$$

i

$$\frac{y_0}{2}e^{-\frac{1}{2}\int\varphi\,dx}\operatorname{ch}[(x-x_0)\,\mu_2],$$

gde su μ_1 i μ_2 najmanja i najveća vrednost, koje ima kvadratni koren funkcije (219) u razmaku (a, b).

III primer: neka je data diferencijalna jednačina n-toga reda

$$\begin{aligned}[x^{2k}+y^{2k}+y'^{2k}+\cdots+y^{(n)2k}]\,y''&\\ -[x^2+y^2+y'^2+\cdots+y^{(n)2}]^k\,y&=0,\end{aligned} \tag{220}$$

gde je k ceo broj veći od jedinice; prema ranijem stavu da je za pozitivne vrednosti a_k

$$1 \leqslant \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_p)^k}{a_1^k+a_2^k+\cdots+a_p^k} \leqslant p^{k-1}$$

vidi se da jednačina (220) ima, za sve svoje integrale y, realne, konačne i neprekidne u razmaku (a, b) promenljive x, jedan kvalitativni prvi integral oblika (211), gde je

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = (n+2)^{k-1}.$$

Uočeni integrali, za x u razmaku (a, b), nalaze se, dakle, u razmaku između funkcija

$$\frac{y_0}{2}\left[e^{(x-x_0)}+e^{-(x-x_0)}\right],$$

$$\frac{y_0}{2}\left[e^{(x-x_0)(n+2)^{\frac{k-1}{2}}}+e^{-(x-x_0)(n+2)^{\frac{k-1}{2}}}\right].$$

Drugi slučaj: $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Diferencijalna jednačina

$$y'' + hy = 0, \tag{221}$$

gde je h pozitivna konstanta, ima za opšti integral izraz

$$y = C_1 \cos (C_2 + x\sqrt{h}), \tag{222}$$

gde su C_1 i C_2 integracione konstante. Integral je, dakle, oscilatoran i sastavljen iz polutalasa naizmence pozitivnih i negativnih.

U teoriji linearnih diferencijalnih jednačina drugoga reda dokazuje se da to isto važi i za opšti integral jednačine (221) kad god je h kakva funkcija promenljive x, *pozitivna* za vrednosti x sadržane u jednom dovoljno prostranom razmaku (a, b). (Sturmova teorema za homogene linearne jednačine drugoga reda).

Uočimo dakle, jednačinu

$$y'' + \lambda y = 0, \tag{223}$$

gde vrednost λ, pošto se kreće u pozitivnom razmaku

$$(-\lambda_1, \ -\lambda_2),$$

ostaje pozitivna za vrednosti x sadržane u razmaku (a, b).

Posmatrajmo najpre jedan *pozitivan* polutalas integrala y. Prema samoj jednačini (223), drugi izvod y'' je negativan duž celoga toga polutalasa, što znači da ovaj na njemu može imati samo jedan maksimum. Neka je $x = x_0$

vrednost za koju je taj maksimum dostignut, a neka su $x=x_1$ i $x=x_2$ vrednosti x koje odgovaraju dvama krajevima polutalasa.

Dok se x menja od x_1 do x_0, integral y je neprestano pozitivan i raste; dok se x menja od x_0 do x_2, on je neprestano negativan i opada. U svakome od dva razmaka (x_1, x_0) i (x_0, x_2) proizvod yy' ima, dakle, nepromenljiv znak.

Uočimo najpre deo polutalasa y u razmaku (x_1, x_0). Množeći jednačinu (223) sa $y'dx$, integraleći između granica x i x_0, gde je x jedna proizvoljna vrednost sadržana u tome razmaku i vodeći računa o tome da je $y'=0$ za $x=x_0$, dobija se jednačina (214), pa pošto proizvod yy' ne menja znak u razmaku (x, x_1), obična teorema srednjih vrednosti daje tada

(224) $$y'^2 = \lambda'(y_0^2 - y^2) \quad (-\lambda_1 \leqslant \lambda' \leqslant -\lambda_2),$$

gde je y_0 vrednost y za $x=x_0$; ova vrednost predstavlja, dakle, *amplitudu polutalasa*. Iz toga se nalazi

(225) $$y = y_0 \cos[(x-x_0)\mu], \quad (x_1 < x < x_0, \ \sqrt{\mu_1} \leqslant \mu \leqslant \sqrt{\mu_2}),$$

gde je

$$\mu_1 = -\lambda_1, \ \mu_2 = -\lambda_2.$$

Za deo polutalasa y u razmaku (x_0, x) dobili bismo na isti način istu jednačinu (224), iz čega se zaključuje da se ceo polutalas može izraziti jednačinom (225) sa nejednačinama

(226) $$x_1 < x < x_2, \ \sqrt{\mu_1} \leqslant \mu \leqslant \sqrt{\mu_2}.$$

Posmatrajmo sad jedan negativan polutalas čiji krajevi neka su $x=x_1$ i $x=x_2$. Prema jednačini (223), drugi izvod y'' tada je pozitivan duž celoga toga polutalasa, što znači da ovaj na njemu može imati samo jedan minimum, dostignut npr. za $x=x_0$. Dok se x menja od x_1 do x_0, integral y je neprestano negativan i opada; dok se x menja od x_0 do x_2, on je neprestano pozitivan i raste. U svakome od ta dva razmaka proizvod yy' ima, dakle, nepromenljiv znak. I tada se nalazi, kao maločas za pozitivan polutalas, da se ceo polutalas može izraziti jednačinom (225) sa nejednačinama (226).

Iz toga se izvodi ovaj opšti zaključak:

Kad data diferencijalna jednačina (196) *ima za svoje realne, konačne i neprekidne integrale y, za vrednosti x sadržane u razmaku (a, b), jedan kvalitativni prvi integral oblika* (211), *gde su λ_1 i λ_2 negativni brojevi, integral y sastavljen je iz pozitivnih i negativnih polutalasa; svaki od ovih može se izraziti u obliku*

(227) $$y = y_0 \cos[(x-x_0)\mu] \quad (x_1 < x < x_2 \ \sqrt{\mu_1} \leqslant \mu \leqslant \sqrt{\mu_2}),$$

gde su: $x=x_1$ i $x=x_2$ krajevi polutalasa, y_0 njegova amplituda, a μ_1 i μ_2 apsolutne vrednosti brojeva λ_1 i λ_2.

Pošto duž posmatranog polutalasa, tj. za vrednosti x sadržane u razmaku (x_1, x_2), izraz

$$\cos[(x-x_0)\mu]$$

ne menja znak, to je za sve te vrednosti

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant (x-x_0)\mu \leqslant +\frac{\pi}{2},$$

pa, dakle,

$$x_1 = x_0 - \frac{\pi}{2\mu}, \quad x_2 = x_0 + \frac{\pi}{2\mu},$$

a pošto se μ nalazi u razmaku između $\sqrt{\mu_1}$ i $\sqrt{\mu_2}$, to se x_1 nalazi u razmaku između vrednosti

$$x_0 - \frac{\pi}{2\sqrt{\mu_1}} \text{ i } x_0 - \frac{\pi}{2\sqrt{\mu_2}},$$

a x_2 u razmaku između vrednosti

$$x_0 + \frac{\pi}{2\sqrt{\mu_2}} \text{ i } x_0 + \frac{\pi}{2\sqrt{\mu_1}}.$$

To pokazuje *da se razlika* $x_2 - x_1$, *tj. dužina polutalasa, uvek nalazi u razmaku između*

$$\frac{\pi}{\sqrt{\mu_2}} \text{ i } \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1}},$$

iz čega se npr. lako izvodi zaključak o broju polutalasa u jednome datome razmaku (a, b) vrednosti x. Dužina l polutalasa može se napisati u obliku

$$l = \frac{\pi}{\sqrt{\mu_2}} + \vartheta\pi\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_1}} - \frac{1}{\sqrt{\mu_2}}\right) \quad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1);$$

ako se sa p označi ceo broj koji pokazuje koliko je puta vrednost $\frac{\pi}{\sqrt{\mu_1}}$ sadržana u vrednosti $b-a$, a sa q ceo broj koji pokazuje koliko je puta $\frac{\pi}{\sqrt{\mu_2}}$ sadržana u istoj vrednosti $b-a$, *broj celih polutalasa, sadržanih u razmaku* (a, b), *uvek se nalazi u razmaku* (p, q), *tj. on je*

$$p + \vartheta'(q-p) \quad (0 \leqslant \vartheta' \leqslant 1).$$

25. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG I DRUGOG REDA SA OSCILATORNIM INTEGRALIMA

Najvažniji tip diferencijalnih jednačina sa *oscilatornim integralima*, tj. čiji je integral sastavljen iz naizmeničnih polutalasa, je homogena linearna jednačina drugoga reda. Kad je takva jednačina svedena na tip

$$y'' + f(x)\,y = 0, \tag{228}$$

kad god je funkcija $f(x)$ u jednom datom, dovoljno prostranom, razmaku (a, b) promenljive x, konačna, neprekidna i pozitivna, iz ovoga što prethodi vidi se da su njeni integrali uopšte *oscilatorne funkcije* te promenljive u razmaku (a, b). Čestina oscilacija, tj. broj polutalasa u tome razmaku određuje se na napred navedeni način. Kad funkcija $f(x)$ sadrži kakav promenljiv parametar, ovaj će očevidno uticati i na čestinu oscilacija. Taj se uticaj može ispitivati proučavajući način promena brojeva λ_1 i λ_2 (iz ranijeg odeljka) kad se bude menjao taj parametar. Interes i važnost takvih ispitivanja dolazi otuda, što se na linearne diferencijalne jednačine drugoga reda nailazi u velikome broju problema mehanike i matematičke fizike, u teorijama oscilatornih pojava, kao što su: kretanje klatna, svetlosne i električne oscilacije, pojave elastičnosti itd.

Primetimo da integral može biti oscilatoran i onda kad funkcija $f(x)$ naizmence prelazi od jednoga znaka na drugi, postajući naizmence pozitivna i negativna. Jer tada izraz

$$yy'' = -f(x)\,y^2,$$

koji uvek ima znak funkcije $-f(x)$, i sam postaje naizmence pozitivan i negativan, što znači da integralna kriva naizmence prelazi od konveksnosti na konkavnost (prema osi Ox), a što može biti i jednim nizom oscilacija. Samo što, pri takvim oscilacijama, prelaz iz jednog polutalasa u drugi (tj. mesta promene konveksnosti i konkavnosti) biva za stalne vrednosti x, koje ne zavise od integracicnih konstanata i koje se nalaze među korenima jednačine $f(x) = 0$, pa se, dakle, ne menjaju od jednog partikularnog integrala do drugog. Naprotiv, u slučajevima kad $f(x)$ zadržava stalno pozitivan znak, ti prelazi bivaju za vrednosti x koje zavise od tih konstanata i menjaju se od jednog integrala do drugog.

Međutim, *jednačine oblika* (228) *zadovoljavaju i integrali pojedinih diferencijalnih jednačina prvoga reda*

$$y' = F(x, y) \tag{229}$$

tako, da kad god funkcija $f(x)$, što im odgovara posle izvršenog diferencijaljenja jednačine (229), zadovoljava napred izložene pogodbe za oscilatorni karakter integrala jednačine (228), i *integrali jednačine* (229) *će biti oscilatorni.*

Koje su to jednačine (229) čiji opšti integral zadovoljava jednu jednačinu oblika (228)?

Iz (229) dobija se diferencijaljenjem

$$y''=\frac{\partial F}{\partial x}+y'\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial x}+F\frac{\partial F}{\partial y}.$$

Integral y *zadovoljavaće, dakle, jednu jednačinu* (228) *kad god se izraz* $\frac{y''}{y}$, *tj. izraz*

$$\frac{1}{y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+F\frac{\partial F}{\partial y}\right) \tag{230}$$

svodi na jednu funkciju samo promenljive x; *ta će funkcija tada biti* $f(x)$ *iz jednačine* (228), *pošto joj se promeni znak.*

I primer: za jednačinu prvoga reda

$$y'^2+y^2=\varphi(x) \tag{231}$$

izraz (230) ima oblik

$$\pm\frac{\varphi'}{2y\sqrt{\varphi-y^2}}-1;$$

da bi on bio nezavisan od y potrebno je i dovoljno da bude $\varphi=\text{const}$, čemu odgovara

$$f(x)=\text{const}.$$

Jednačina (231), čiji opšti integral zadovoljava jednu jednačinu oblika (228), jeste, dakle,

$$y'^2+y^2=a^2 \tag{232}$$

(gde je a konstanta koja se uvek može svesti na jedinicu), a njoj odgovara jednačina (228) oblika

$$y''+y=0. \tag{233}$$

Opšti integral jednačine (233)

$$y=C_1\sin x+C_2\cos x$$

je oscilatoran, pa će to biti slučaj i sa opštim integralom jednačine (232), koji je (za $a=1$)

$$y=C\sin x+\sqrt{1-C^2}\cos x.$$

II primer: za linearnu jednačinu prvoga reda

$$y' = uy + v$$

(gde su u i v date funkcije promenljive x) izraz (230) je oblika

$$(u' + u^2) + \frac{1}{y}(v' + uv);$$

da bi on bio nezavisan od y, potrebno je i dovoljno da bude

$$u = -\frac{v'}{v} \tag{234}$$

i da odgovarajuća funkcija

$$f(x) = -(u' + u^2)$$

bude pozitivna. Pošto se tada nalazi da je

$$u' + u^2 = \frac{2\,v'^2 - vv''}{v^2},$$

to pored uslova (234), treba još da je u posmatranom razmaku (a, b) i izraz

$$vv'' - 2\,v'^2$$

pozitivan, ili da funkcija

$$\frac{v''}{v} - 2\left(\frac{v'}{v}\right)^2$$

naizmence prelazi od jednog znaka na drugi.

Ali jednačina (228) *nije jedina diferencijalna jednačina drugoga reda koja ima oscilatorne integrale*. Tako postoji beskrajno mnogo, kako algebarskih, tako i transcendentnih funkcija $F(x, y)$ koje, kad se promenljiva x bude menjala u jednome datome razmaku (a, b), ostaju neprestano *pozitivne i veće od jednoga stalnog pozitivnog broja* N, pa ma kakvom realnom vrednošću (konačnom ili beskrajnom) smenili u F promenljivu y.

Takva bi npr. jedna funkcija, među algebarskim funkcijama, bio polinom $P(x, y)$ po promenljivoj y, koji sadrži samo *parne* stepene te promenljive, sa koeficijentima koji su, kao i $P(x, 0)$ ili sta'ne *pozitivne* količine, ili ma kakve funkcije promenljive x pozitivne u razmaku (a, b). Takva bi, takođe među transcendentnim funkcijama, bila funkci a

$$F(x, y) = f(x) + \varphi(x)\, e^{-P(x, y)}, \tag{235}$$

gde je P ma kakav polinom, a f i φ ma kakve funkcije promenljive x, konačne, neprekidne i pozitivne u razmaku (a, b).

U isto vreme, postoji beskrajno mnogo, kako algebarskih, tako i transcendentnih funkcija $\Phi(x, y)$ takvih da, dok se x menja u jednom datom razmaku (a, b), vrednost je funkcije neprestano pozitivna i nalazi se između dva stalna broja N i M $(N < M)$ pa ma kakvom realnom vrednošću (konačnom ili beskrajnom) smenili u njoj y.

Takva bi npr. bila funkcija

$$\Phi(x, y) = \frac{u + vy^2}{w + sy^2},$$

gde su u, v, w, s ili stalne pozitivne količine, ili konačne, neprekidne i pozitivne funkcije promenljive x u razmaku (a, b). Takva bi bila i funkcija

$$\Phi(x, y) = \frac{u^2 + v^2 y^4}{(u + vy^2)^2}.$$

Sa tako definisanim funkcijama F i Φ ima se, dakle, rezultat:

Diferencijalna jednačina

$$y'' + yF(x, y) = 0 \tag{236}$$

ima kao kvalitativni prvi integral

$$\frac{y''}{y} = \lambda \quad (a < x < b, \quad N < \lambda < +\infty), \tag{237}$$

a diferencijalna jednačina

$$y'' + y\Phi(x, y) = 0 \tag{238}$$

ima kao takav integral

$$\frac{y''}{y} = \mu \quad (a < x < b, \quad N < \mu < M). \tag{239}$$

Iz ovoga se neposredno izvode zaključci vezani za takve prve integrale, a koji su napred navedeni, tj.:

1° svaki integral y, kad god su on i njegov prvi i drugi izvod konačne i neprekidne funkcije promenljive x u razmaku (a, b) dovoljno prostranom da bi se u njemu mogao ispoljiti oscilatorni karakter, biće *oscilatoran*: imaće u tome razmaku samo prostih nula, menjajući znak svaki put pri polasku kroz svaku od ovih;

2° integral y jednačine (236) ima u razmaku (a, b) *najmanje* onoliko polutalasa, koliko je puta vrednost $\frac{\pi}{\sqrt{N}}$ sadržana u vrednosti $b-a$;

3° integral y jednačine (238) ima u razmaku (a, b) *najmanje* onoliko polutalasa, koliko se puta vrednost $\frac{\pi}{\sqrt{N}}$ sadrži u vrednosti $b-a$, *a najviše* onoliko koliko je puta vrednost $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$ sadržana u $b-a$.

Tako npr. jednačini

$$y''+\alpha y+\beta y^3=0$$

(α, β pozitivne konstante), a koja se integrali pomoću eliptičkih funkcija, odgovara funkcija

$$F(x, y)=\alpha+\beta y^2,$$

čija je vrednost uvek veća od α: njen će integral, dakle, imati u razmaku (a, b) *najmanje* onoliko polutalasa koliko se puta broj $\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$ sadrži u razlici $b-a$.

Jednačini

$$(u+vy^2)\,y''+y\sqrt{v^2y^4+u^2}=0 \tag{240}$$

[u i v su ili stalne pozitivne količine, ili funkcije promenljive x, koje su konačne, neprekidne i pozitivne u razmaku (a, b)] odgovara funkcija

$$\Phi(x, y)=\frac{\sqrt{u^2+v^2y^4}}{u+vy^2},$$

čija vrednost, za sve vrednosti x u razmaku (a, b) i za sve realne vrednosti y, leži u razmaku između $\frac{1}{\sqrt{2}}$ i 1. Prema tome je

$$N=\frac{1}{\sqrt{2}}=0{,}7071\ldots, \qquad M=1$$

i integral y jednačine (240) ima u razmaku (a, b) *najmanje* onoliko polutalasa, koliko se puta broj $\pi\sqrt[4]{2}$ sadrži u razlici $b-a$, a *najviše* onoliko polutalasa koliko se puta broj π sadrži u toj razlici.

Uslov da bi opšti integral jedne diferencijalne jednačine prvoga reda

$$y'=f(x, y)$$

zadovoljavao jednu jednačinu oblika (236) ili (238), sastoji se u ovome: *treba da se izraz*

$$\frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+f\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

svodi na jednu funkciju $F(x, y)$ *ili* $\Phi(x, y)$.

26. RAZMACI ZA INTEGRALE SISTEMA SIMULTANIH JEDNAČINA

Sistem simultanih jednačina

$$(241)\qquad \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ &\;\;\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n), \end{aligned}$$

može takođe imati, za svoje realne, konačne i neprekidne integrale $y_1, y_2, \ldots, y_n$ kvalitativnih prvih integrala

$$(242)\qquad \Phi = \lambda \quad (a < x < b, \quad M_1 < \lambda < M_2),$$

gde je Φ jedna određena funkcija jedne ili više nepoznatih $y_1, y_2, \ldots, y_n$, promenljive x i izvoda nepoznatih funkcija y_k po x; Φ može, uostalom, zavisiti i od početnih vrednosti funkcija y_k.

Tako, kad god se, među jednačinama (241), nalazi jedna ili više jednačina oblika

$$(243)\qquad \frac{dy_k}{dx} = y_k f_k$$

gde je f_k kakva funkcija promenljive x i nepoznatih y_k, po vrednosti neprestano veća od jednog stalnog pozitivnog broja N za sve realne (konačne ili beskrajne) vrednosti promenljivih što u njoj figurišu, *svakoj takvoj jednačini* (241) *odgovaraće po jedan kvalitativni prvi integral oblika*

$$\frac{1}{y_k}\frac{dy_k}{dx} = \lambda \quad (-\infty < x < +\infty, \quad N < \lambda < +\infty).$$

Iz takvog se prvog integrala mogu izvesti napred navedeni zaključci za integral y_k, vezani za egzistenciju prvih integrala takvih oblika. Tako, *integral* y_k *sistema* (241), *koji za* $x = x_0$ *ima vrednost* $y = y_{k,\,0}$ *biće, za svaku realnu vrednost* x, *po apsolutnoj vrednosti veći od*

$$y_{k,\,0}\, e^{N(x-x_0)};$$

on neće imati realnih nula itd.

Diferencijaljenjem jedne, ma koje, od jednačina (241) dobija se jednačina oblika

$$\frac{d^2 y_k}{dx^2} = \frac{\partial f_k}{\partial x} + \frac{\partial f_k}{\partial y_1}\cdot\frac{dy_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial f_k}{\partial y_n}\cdot\frac{dy_n}{dx},$$

koja, prema samim jednačinama (241) postaje

$$\frac{d^2 y_k}{dx^2} = \frac{\partial f_k}{\partial x} + f_1 \frac{\partial f_k}{\partial y_1} + f_2 \frac{\partial f_k}{\partial y_2} + \cdots + f_k \frac{\partial f_k}{\partial y_n},$$

prema čemu je

$$\frac{1}{y_k} \frac{d^2 y_k}{dx^2} = \frac{1}{y_k} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial f_k}{\partial y_i} \right) \qquad (k = 1, 2, \ldots n).$$

I tada, kad god jedan ili više izraza

$$\frac{1}{y_k} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x} + \sum f_i \frac{\partial f_k}{\partial y_i} \right)$$

za vrednosti x u razmaku (a, b) ostaje po vrednosti neprestano manji od jednog negativnog stalnog broja $-N$, a veći od jednoga negativnog stalnog broja $-M$, pa ma kakve realne vrednosti imali $y_1, y_2, \ldots, y_k$, *k-toj jednačini* (241) *odgovaraće po jedan kvalitativan prvi integral oblika*

$$\frac{1}{y_k} \frac{d^2 y_k}{dx^2} = \lambda \qquad (a < x < b, \quad -M < \lambda < -N).$$

A iz egzistencije takvog prvog integrala, zaključuje se na napred pokazani način:

1° *da je integral* y_k, *koji za* $x = x_0$ *ima vrednost* $y = y_{k,0}$ *sastavljen iz pozitivnih i negativnih polutalasa* od kojih se svaki može izraziti u obliku

$$y = y_{k,0} \cos [(x - x_0) \mu] \qquad (x_1 < x < x_2, \quad \sqrt{N} < \mu < \sqrt{M}),$$

gde su x_1 i x_2 krajevi polutalasa;

2° *da se dužina* l *polutalasa može izraziti u obliku*

$$l = \frac{\pi}{\sqrt{M}} + \vartheta\pi \left(\frac{1}{\sqrt{N}} - \frac{1}{\sqrt{M}} \right);$$

3° ako se sa p i q označe celi brojevi, koji pokazuju koliko je puta vrednost $\frac{\pi}{\sqrt{N}}$ i $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$ sadržana u razlici $b - a$, *broj* h *polutalasa u razmaku* (a, b) *biće*

$$h = p + \vartheta' (q - p).$$

Primer: neka je dat sistem

$$\frac{dy_1}{dx} = \alpha y_2 y_3, \qquad \frac{dy_2}{dx} = \beta y_1 y_3, \qquad \frac{dy_3}{dx} = \gamma y_1 y_2, \tag{244}$$

(α, β, γ konstante), na koji se nailazi u problemu kretanja čvrstog tela i čiji se integrali izražavaju pomoću eliptičkih funkcija.

Diferencijaljenjem prve jednačine dobija se

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \alpha \left(y_2 \frac{dy_3}{dx} + y_3 \frac{dy_2}{dx} \right)$$

što, prema drugoj i trećoj jednačini, daje

$$\frac{1}{y_1} \frac{d^2 y_1}{dx^2} = \alpha (\gamma y_2^2 + \beta y_3^2), \tag{245}$$

a slične se jednačine dobijaju i za izraze

$$\frac{1}{y_2} \frac{d^2 y_2}{dx^2} \quad \text{i} \quad \frac{1}{y_3} \frac{d^2 y_3}{dx^2}.$$

Kad su β i γ *istoga znaka*, izraz (245) može biti jednak nuli samo za takvu jednu realnu vrednost $x = x'$, za koju bi bilo u isti mah $y_2 = 0$ i $y_3 = 0$. Ali, te dve funkcije ne mogu biti jednake nuli za jednu istu vrednost $x = x'$. Jer, uzastopnim diferencijaljenjem jednačina (244) dobio bi se za ma koji izvod integrala y_1 jedan izraz koji i sam postaje jednak nuli kad je $y_2 = 0$ i $y_3 = 0$, tj. za $x = x'$. A pošto vrednost n-tog izvoda funkcije y_1 za $x = x'$, podeljen sa $n!$, predstavlja koeficijenat od $(x - x')^n$ u razvitku integrala y_1 u Taylorov red (koji, prema osnovnoj teoremi o egzistenciji integrala simultanih jednačina, mora biti konvergentan u blizini vrednosti $x = x'$), to bi svi ti koeficijenti, izuzevši prvi, bili jednaki nuli, tj. integral y_1 bi se identički sveo na konstantu. Prema tome bi se, na osnovu prve jednačine (244) jedan od dva integrala y_2 i y_3 sveo identički na nulu, a prema (245) i drugi. Kad god su, dakle y_1 i y_2 prave funkcije promenljive x, one ne mogu biti jednake nuli za jednu istu vrednost $x = x'$.

Iz toga se zaključuje da kad su β i γ *istoga znaka*, apsolutna vrednost izraza (245) za sve realne vrednosti x ostaje neprestano *veća* od jednoga stalnog pozitivnog broja M, što znači *da sistem* (244) *ima jedan kvalitativan prvi integral oblika*

$$\frac{1}{y_1} \frac{d^2 y_1}{dx^2} = \lambda,$$

$$(-\infty < x < +\infty, \quad M < \lambda < +\infty) \text{ ili } (-\infty < x < +\infty, \quad -\infty < \lambda < -M),$$

(prema tome da li je zajednički znak konstanata $\alpha\beta$ i $\alpha\gamma$ pozitivan ili negativan) tako da se mogu primeniti napred navedena posmatranja.

27. RAZMACI ZA INTEGRALE PARCIJALNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Kao i obične diferencijalne jednačine i sistem simultanih jednačina, tako i parcijalne jednačine

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; V, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}; \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}, \ldots) = 0 \tag{246}$$

mogu imati kvalitativnih prvih integrala oblika

$$\Phi = \lambda \quad (\lambda_1 < \lambda < \lambda_2), \tag{247}$$

za određene oblasti nezavisno promenljivih količina $x_1, \ldots x_n$, i za svoje realne integrale V koji, pri tome, zadovoljavaju još i kakve date uslove.

Takve je prve integrale mogućno formirati npr. koristeći se ranije izvedenim algebarskim ili integralnim nejednačinama, koje bi, primenjene na izraz F, dale mogućnosti da se iz njegovog oblika zaključi o egzistenciji jednoga izraza Φ koji bi

1° zavisno od promenljivih $x_1, \ldots, x_n$, nepoznate funkcije V i njenih parcijalnih izvoda po tim promenljivim;

2° ostao, za posmatranu klasu integrala V, neprestano u jednome određenom razmaku (λ_1, λ_2), a za sve vrednosti $x_1, \ldots, x_n$ što se nalaze u jednoj opet određenoj oblasti Δ.

Tako dobivena jednačina (247) predstavlja jednu novu parcijalnu jednačinu; ako se ova može integraliti za proizvoljnu vrednost λ, *traženi integral* V *nalaziće se između dveju funkcija* V_1 *i* V_2 *koje se dobijaju kad se u integralu jednačine* (247) *smeni* λ *jedan put sa najmanjom, a drugi put sa najvećom vrednošću koju dobija ovaj integral dok se* λ *menja od* λ_1 *do* λ_2.

Tako će se dobiti integral V u *obliku jednoga razmaka.*

To će ovde biti objašnjeno na jednome važnom tipu parcijalnih jednačina prvoga reda, na koje se nailazi i u opštijim problemima geometrije, mehanike i matematičke fizike. To je jednačina

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2 = f(x_1, x_1, \ldots, x_n) \tag{248}$$

gde je f data funkcija nezavisno promenljivih količina $x_1, \ldots, x_n$.

Neka je Δ jedna posmatrana oblast promenljivih $x_1, \ldots, x_n$, pa uočimo one integrale V jednačine (248), koji su u toj oblasti realni i takvi da im svaki od parcijalnih izvoda

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}$$

u toj oblasti zadržava nepromenljiv znak. Označimo sa s_k jedinicu uzetu sa nepromenljivim znakom izvoda $\frac{\partial V}{\partial x_k}$, pa se jednačina (248) može napisati u obliku

$$\sqrt{\left(s_1 \frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(s_n \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2} = \varphi(x_1, \ldots, x_n), \tag{249}$$

gde je

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{f(x_1, \ldots, x_n)}. \tag{250}$$

Pošto se, kao što je napred pokazano, vrednost na levoj strani jednačine (249) u kojoj su svi članovi

$$s_1 \frac{\partial V}{\partial x_1},\ s_2 \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots,\ s_n \frac{\partial V}{\partial x_n}$$

očevidno pozitivni, nalazi u razmaku između

$$\frac{P}{\sqrt{n}} \text{ i } P,$$

gde je

$$P = s_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \cdots + s_n \frac{\partial V}{\partial x_n},$$

to se jednačina (250) može napisati u obliku

$$s_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \cdots + s_n \frac{\partial V}{\partial x_n} = \lambda \varphi(x_1, \ldots, x_n) \quad (1 \leqslant \lambda \leqslant \sqrt{n}) \tag{251}$$

(gde za φ treba uzeti pozitivnu determinaciju kvadratnog korena na levoj strani jednačine 250).

Jednačina (251) *predstavlja jedan kvalitativni prvi integral date jednačine* (248).

Jednačina (251) se može integraliti za proizvoljnu vrednost λ, i to po običnom uputstvu za integraciju linearnih parcijalnih jednačina prvoga reda. Po tome uputstvu treba obrazovati sistem

$$s_1 \frac{dx_1}{1} = s_2 \frac{dx_2}{1} = \cdots = s_n \frac{dx_n}{1} = \frac{dV}{\lambda\varphi},$$

iz koga se dobija

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{s_1}{s_2} x_1 + C_1, \\ x_3 &= \frac{s_1}{s_3} x_1 + C_2, \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{s_1}{s_n} x_1 + C_{n-1} \end{aligned} \tag{252}$$

kao i jednačina

$$\frac{dV}{dx_1} = s_1 \lambda \varphi. \tag{253}$$

Ako se, prema opštem uputstvu za tu integraciju, na desnoj strani jednačine (253) smene $x_2, x_3, \dots x_n$ njihovim vrednostima (252), ta jednačina postaje

$$\frac{dV}{dx_1} = s_1 \lambda \psi (x_1, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}), \tag{254}$$

gde je ψ određena funkcija promenljive x_1, koja sadrži $n-1$ proizvoljnih konstanata $C_1, \dots, C_{n-1}$; ta će funkcija biti određena neposredno pomenutom smenom.

Iz (254) se dobija integracijom

$$V = s_1 \int \lambda \psi \, dx_1 + C_n, \tag{255}$$

gde je C_n jedna nova integraciona konstanta.

Prema datoj jednačini (248), funkcija f kao zbir kvadrata realnih količina uvek je pozitivna; prema tome je funkcija φ, pa dakle i funkcija ψ, uvek realna i od nule različna u oblasti Δ. Funkcija ψ zadržava, dakle nepromenljiv znak u toj oblasti i onda, primenom obične teoreme za srednje vrednosti integrala, nalazi se da je

$$\int \lambda \psi \, dx_1 = \mu \int \psi \, dx_1 \quad (1 < \mu < \sqrt{n}),$$

tako, da jednačina (255) postaje

$$V = s_1 \mu \int \psi \, dx_1 + C_n. \tag{256}$$

Međutim, iz (252) i (256) je

$$C_k = x_{k+1} - \frac{s_1}{s_{k+1}} x_1 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$C_n = V - s_1 \mu F(x_1, C_1, \dots, C_{n-1}),$$

gde je

$$F(x_1, C_1, \dots, C_{n-1}) = \int \psi (x_1, C_1, \dots, C_{n-1}) \, dx_1.$$

Prema uputstvu za integraciju linearnih parcijalnih jednačina ako se označi da je

$$\begin{aligned} u_k &= s_{k+1} x_{k+1} - s_1 x_1, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \\ u_n &= V - s_1 \mu F(x_1, u_1, \dots, u_{n-1}), \end{aligned} \tag{257}$$

svaki integral V posmatrane vrste mora zadovoljavati po jednu jednačinu oblika

$$H(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0 \tag{258}$$

gde je H funkcija samo promenljivih $u_1, \ldots, u_n$; obrnuto, svakoj proizvoljno uzetoj funkciji H odgovara jedan integral V.

Rešenjem jednačine (258) po u_n, a s obzirom na poslednju od jednačina (257), dobija se integral V u obliku

$$V = s_1 \mu F(x_1, u_1, \ldots, u_{n-1}) + \Phi(u_1, \ldots, u_{n-1}), \tag{259}$$

gde je Φ proizvoljna funkcija promenljivih $u_1, \ldots, u_{n-1}$.

Svakome partikularnom integralu V posmatrane vrste odgovara u izrazu (259) *po jedna specijalna funkcija Φ, i svakoj proizvoljno uzetoj funkciji Φ odgovara po jedan partikularni integral V.* Taj će integral, a za vrednosti $x_1, \ldots, x_n$ sadržane u oblasti Δ, ležati u razmaku između

$$s_1 F + \Phi \quad \text{i} \quad s_1 \sqrt{n} F + \Phi.$$

Funkcija F, kao šta se vidi iz gore navedenog, dobija se iz date funkcije f pomoću jedne proste kvadrature. Na taj način, *svi integrali V posmatrane vrste dobijaju se u obliku razmaka, pomoću jedne proste kvadrature.* Proizvoljna funkcija Φ određuje se, kao i uvek kod parcijalnih jednačina, pomoću početnih uslova koje ima da zadovolji integral V što se ima u vidu.

Primer: neka je data jednačina

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2 = (x_2 - x_1)^4,$$

pa potražimo njene realne integrale čiji je izvod $\dfrac{\partial V}{\partial x_1}$ neprestano negativan, a izvod $\dfrac{\partial V}{\partial x_2}$ neprestano pozitivan u datoj oblasti Δ ravni (x_1, x_2). Tada je

$$s_1 = -1, \quad s_2 = +1$$

i

$$\varphi(x_1, x_2) = (x_2 - x_1)^2,$$

tako da se ima formirati sistem

$$-\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{1} = \frac{dV}{\lambda(x_2 - x_1)^2} \quad (1 \leqslant \lambda \leqslant \sqrt{2}).$$

Odatle je

$$x_2 = -x_1 + C_1,$$

$$u_1 = x_2 + x_1.$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = -\lambda(x_2 - x_1)^2 = -\lambda(C_1 - 2x_1)^2,$$

i prema tome

$$V = \mu \frac{(C_1 - 2\,x_1)^3}{6} + C_2 \quad (1 \leqslant \lambda \leqslant \sqrt{2}),$$

$$F(x_1, C_1) = -\frac{(C_1 - 2\,x_1)^3}{6},$$

$$F(x_1, u_1) = -\frac{(x_2 - x_1)^3}{6}.$$

Svaki od traženih integrala V biće, dakle, oblika

$$V = \mu \frac{(x_2 - x_1)^3}{6} + \Phi\,(x_1 + x_2),$$

gde je Φ funkcija jedne promenljive. Broj μ zavisi od x_1 i x_2, ali za sve vrednosti tih promenljivih, što se nalaze u oblasti $\varDelta$, ostaje neprestano u razmaku između 1 i $\sqrt{2}$. On dostiže svoju graničnu vrednost $\mu = 1$ za one parove vrednosti x_1, x_2, za koje jedan ili drugi od izvoda $\frac{\partial V}{\partial x_1}$ i $\frac{\partial V}{\partial x_2}$ postaje jednak nuli; on takođe dostiže svoju graničnu vrednost $\sqrt{2}$ za one parove vrednosti x_1, x_2 za koje je

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = -\frac{\partial V}{\partial x_2} \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0.$$

Svakoj funkciji Φ (koja se može proizvoljno birati) odgovara po jedan razmak gornje vrste u kome se nalazi jedan partikularni integral V. Uzevši npr. $\Phi = \text{const}$ dobijaju se integrali oblika

$$V = \mu \frac{(x_2 - x_1)^3}{6} + \text{const},$$

koji se svi mogu izraziti u obliku

$$V = (1 + 0{,}4142\,\vartheta) \frac{(x_2 - x_1)^3}{6} + \text{const} \quad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1).$$

Integral V te vrste koji npr. postaje jednak nuli za $x_1 = x_2$ ležaće u oblasti između funkcija

$$\frac{(x_2 - x_1)^3}{6} \quad \text{i} \quad \frac{\sqrt{2}}{6}(x_2 - x_1)^3,$$

tj. između funkcija

$$0{,}1667\,(x_2 - x_1)^3 \quad \text{i} \quad 0{,}2357\,(x_2 - x_1)^3.$$