МАТЕМАТИЧКИ СПЕКТРИ

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

САБРАНА ДЕЛА

САБРАНА ДЕЛА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

1. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ – Први део
2. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ – Други део
3. МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА
4. АЛГЕБРА
5. МАТЕМАТИЧКИ СПЕКТРИ
6. МАТЕМАТИЧКА ФЕНОМЕНОЛОГИЈА
7. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧКЕ ФЕНОМЕНОЛОГИЈЕ
8. ИНТЕРВАЛНА МАТЕМАТИКА – ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ АЛГОРИТАМ
9. ЕЛИПТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ – ИНТЕГРАЦИЈА ПОМОЋУ РЕДОВА
10. ЧЛАНЦИ – СТУДИЈЕ
11. ПУТОПИСИ – Први део
12. ПУТОПИСИ – Други део
13. МЕТАФОРЕ И АЛЕГОРИЈЕ
14. РИБАРСТВО
15. МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ – ПИСМА, БИБЛИОГРАФИЈА И ЛЕТОПИС

Завод за уџбенике и наставна средства у Београду објављује *Сабрана дела Михаила Петровића* у сарадњи са Математичким факултетом Универзитета у Београду и Друштвом математичара Србије.

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

САБРАНА ДЕЛА

КЊИГА 5

Уредник

ЖАРКО ЈОВИЋ

Главни и одговорни уредник

др ПЕТАР ПИЈАНОВИЋ

За издавача

проф. др ДОБРОСАВ БЈЕЛЕТИЋ, директор

ISBN 86-17-06516-8

Мих. Петровић

ISBN 86-17-06516-8

Професор

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

Београд, 24. април 1868 – Београд, 8. јун 1943.

*Поред рада на Универзитету у Београду и Српској краљевској академији, професор Петровић је имао уредну и успешну војну каријеру као резервни официр. Темељно је радио на војним и дипломатским шифрама још од 1898. године, имао свој систем криптографије који је у Петровићу побудио појаву нумеричких спектара. Петровићу су математички спектри велика успомена на стварање нове отаџбине (**Крфска декларација** и др.) у Првом светском рату, када су његова пресликавања коначног скупа речи природног језика на коначан скуп природних бројева имала значајну улогу. Уочи Другог светског рата Петровић је често у војничком оделу као што је то овај случај у униформи генералштабног резервног потпуковника.*

(Снимак је из 1940. године; аутор фотографије непознат)

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

МАТЕМАТИЧКИ СПЕКТРИ

Приредили

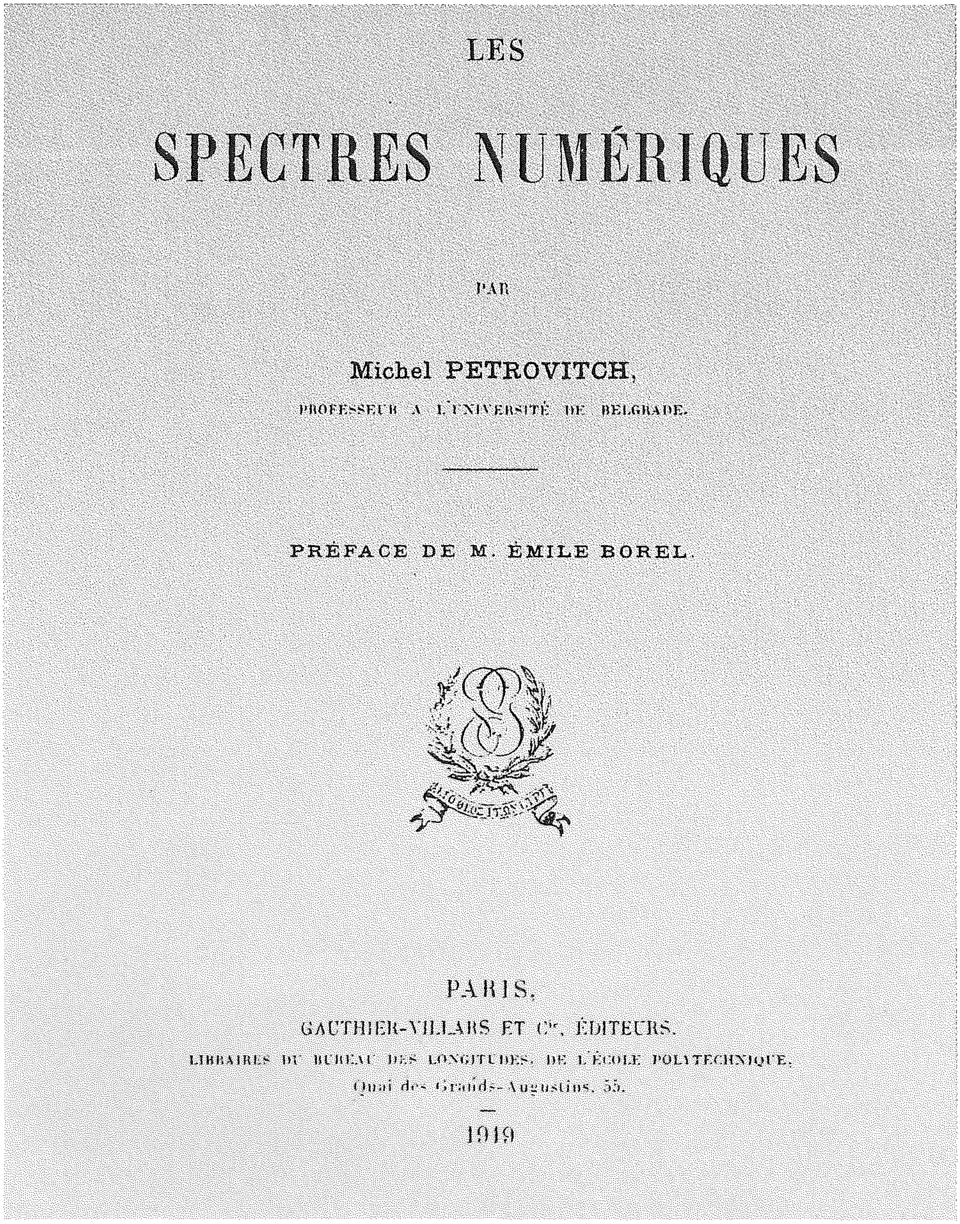
др Душан Адамовић, проф. унив.

др Драган Трифуновић, проф. унив.

ЗАВОД ЗА УЏБЕНИКЕ
И НАСТАВНА СРЕДСТВА
БЕОГРАД
1998

*Осим расправе **Бројни спектри појава**, у овој књизи је изложен превод Петровићевих радова из математичких спектара, те се они по први пут појављују на српском језику. Превод са француског језика учинио је*
др **ДУШАН АДАМОВИЋ,** проф. унив.

БРОЈНИ СПЕКТРИ



LES

SPECTRES NUMÉRIQUES

PAR

Michel PETROVITCH,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE BELGRADE.

PRÉFACE DE M. ÉMILE BOREL.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1919

За време рата, радећи у Берну (Швајцарска) на државним шифрама (1917. г), професор је дошао до појма спектра у математици. По завршетку рата Петровић је пожурио да објави своје резултате у облику посебне монографије. Овоме је највише допринео Петровићев школски друг Емил Борел који је за књигу написао предговор.

Насловна страна Петровићеве прве књиге из математичких спектара.

ПРЕДГОВОР

Децимални бројеви су, после целих бројева, аритметичка бића која најбоље познајемо; ширење метарског мерног система све више доводи до замене у рачунању обичних разломака децималним разломцима; за практичара, сви бројеви су децимални бројеви. Овај појам децималног броја постао нам је толико близак и чини нам се толико једноставним да имамо природну склоност да исто тако сматрамо бесконачан децималан разломак најједноставнијим од оних математичких бића у чију дефиницију улази појам бесконачности или, прецизније, пребројиве бесконачности. У тој склоности има удела извесна илузија; заиста, чим зажелимо да дубље проучимо било коју дефиницију у којој се појављује бесконачност, сусрећемо се са крајње великим тешкоћама, од којих ће већина, како изгледа, остати задуго, ако не и заувек, непремостива, јер оне потичу од саме суштине нашег духа, од његове неспособности да јасно схвати трансфинитно; ниједна трансфинитна класификација никад не може бити завршена. Сви проблеми који се могу поставити у испитивању функција дефинисаних помоћу пребројивих услова (на пример, непрекидних функција више променљивих) могу се, у принципу, пренети на проблеме који се односе на дефинисање само једног децималног разломка; али овај теоријски увид није од велике помоћи уколико се на конкретан начин не дефинише кореспонденција која се може успоставити између функције и децималног разломка; била би то, најчешће, некорисна компликација која би се добила уместо траженог поједностављења.

Али, уз ове резерве, не може се сумњати да су наше навике бесконачан децимални разломак учиниле обликом бесконачности који је најмање тешко схватити и којим се најлакше може руковати; ако, дакле, буде могуће свести испитивање неких питања математичке анализе на прецизно проучавање извесних децималних разломака, тиме ће се добити, у најмању руку, форма излагања или рачунски пос-

тупак који би могли бити драгоцени; понекад ће, чак, извесне аналогије које ће ово учинити очигледним моћи да сугеришу нове идеје и изведу на путеве открића. Постоји овде једно неограничено поље истраживања, у којима се главна тешкоћа, као и у многим другим математичким питањима, састоји у избору интересантних и плодних логичких форми међу бесконачно много њих које нам се нуде.

Књига чије је представљање научној публици љубазно од мене затражио г. Михаило Петровић занимљив је допринос проучавању односа између децималних бројева и целих степених редова једне променљиве. Г. Петровић је много размишљао о аналогијама између разних наука и њихових разноврсних метода. Његов довитљив и плодан дух често је уочавао неочекиване блискости и долазио до занимљивих закључака и нових теорија. Он изврсно уме да учини интуитивним ове аналогије – језиком изражајним и сликовитим. Његова теорија спектара, која у математичку анализу преноси терминологију коришћену у спектралној анализи, веома је примамљива; немам намеру да дајем њен резиме, јер бих могао само да поновим објашњења г. Петровића: његови читаоци, за које бих желео да буду многобројни, наћи ће у овој књизи, у онолико јасном и једноставном облику колико је могуће, потпуно излагање његове теорије, коју су добро одабрани примери учинили веома схватљивом.

Види се да је овај рад посвећен једној од најтежих грана математике: везама између теорије функција и трансцендентне аритметике; ова грана анализе још је, ако се тако може рећи, у колевци, и могуће је да њен напредак неће бити лак, јер су ту тешкоће огромне: читаоци који ће продубљивати проблеме које ова књига покреће разумеће боље природу неких од тих тешкоћа; то неће бити најмање од користи које ће извући из овог читања, чијој пријатности, с друге стране, доприноси срећан избор разноврсних примена.

Париз, Јули 1919. Емил Борел

УВОД

Данас је добро позната чињеница да низ цифара који образује неки реалан позитиван број може пружити онолико разноврсности и сажимати онолико сложености колико и функција са било којим бројем променљивих. Прецизним језиком теорије скупова, ово се изражава кад се каже да, с једне стране, скуп функција једне променљиве има моћ највише једнаку моћи скупа скупова позитивних реалних бројева (штавише, ако се хоће, бројева који се налазе између 0 и 1) и да, с друге стране, уколико се апстрахује непрекидност кореспонденције између два непрекидна скупа, нема битне разлике између непрекидних скупова са једном димензијом и непрекидних скупова са n димензија, тј. између функција једне променљиве и функција n променљивих[1] .

Одатле до постављања питања да ли је могуће *ефективно приказивање функције бројем*, уз дефинисање кореспонденције између елемената који одређују функцију и низа цифара који образује број – само је један корак.

Управо на овај ред идеја надовезује се теорија нумеричких спектара, чију прву скицу у овој невеликој књизи представљамо и којој питање које смо управо поставили пружа једно поље занимљивих примена.

На самом почетку алгебре учи се да је, за добијање *нумеричких* решења неког проблема са више непознатих, потребно онолико различитих *нумеричких* једначина колико има непознатих. Али већ неки најелементарнији проблеми као да противрече овом тврђењу. Познати су, на пример, они проблеми – загонетке који се у друштвима постављају забаве ради, а у којима онај који рачуна (одгонета) показује своју супериорност тиме што скоро тренутно погађа *неколико* замишљених

[1] E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Gauthier - Villars, Paris 1914.

бројева на основу *само једнот* нумеричког податка који му се саопштава, а представља завршни резултат рачуна коме он не присуствује. Противречност, као што се зна, само је привидна: у ствари, ономе који одгонета даје се неколико нумеричких података под привидом само једног чији му *сегменти*, групе цифара на погодан начин раздвојене, непосредно откривају те податке.

Ове мале аритметичке игре наводе на помисао да се уопшти у њима садржана досетка како би се она могла проширити на значајније и мање једноставне проблеме. И увиђа се онда, заиста, да су ти елементарни проблеми само веома партикуларни случајеви једног по својој природи општег проблема, решивог истом овом досетком, а који се састоји у *нумеричком израчунавању некот отраниченот или нетраниченот* низа непознатих, а самим тим и непознате функције, помоћу подесне поделе на сегменте нумеричке вредности само једнот податка С, при чему услови проблема показују начин на који ту поделу на сегменте треба извршити.*

У теорији коју излажемо, нумерички податак S је вредност коју узима одређени аналитички израз Ф, на погодан начин доведен у везу са низом непознатих из проблема у питању, за једну посебну вредност променљиве коју тај израз садржи. *Спектром* називамо низ непознатих, првобитних или помоћних, из проблема о коме је реч. Начин на који се непознате одређују помоћу податка S, а који је само погодно прилагођавање досетке одгонетача у поменутим малим аритметичким играма, подсећа, заиста, на начин на који спектар светлости, у хемијској спектралној анализи, открива елементе који су ушли у састав тела које се подвргава анализи. Тако се испоставља да је нумерички спектар састављен од група N_k значајних цифара раздвојених већим или мањим бројем уметнутих нула, као што се спектар неке светлости састоји из светлих пруга и линија раздвојених тамним деловима. Број уметнутих нула (који одређује дисперзију нумеричког спектра) мења се са варирањем једног параметра, који онај ко рачуна може, почев од извесне величине, мењати по вољи, као што се ширина тамних делова (која одређује дисперзију спектра светлости) мења са варирањем температуре или притиска, које експериментатор може по вољи модификовати. Нумеричка група N_k (k-та пруга спектра) одређује једним погледом цео број који игра улогу основне или помоћне непознате

---

* Оно што је М. Петровић у овом и неким другим својим текстовима називао *ограниченим*, односно *неограниченим* низовима, данас се (заправо већ поодавно) назива *коначним*, односно *бесконачним* низовима; такође, Петровићеви *коначни*, односно *бесконачни* низови, у данашњој терминологији су *ограничени*, односно *неограничени* низови. После извесног двоумљења, Редакција је одлучила да, уз ову напомену, задржи Петровићеве називе. (*Примедба преводиоца*)

проблема, а цифра ранга и групе N_k (i-та линија k-те спектралне пруге) одређује i-ту цифру непознате. Ово је поступак аналоган поступку коришћеном у хемијској спектралној анализи.

Имамо тако један рачунски поступак, који смо побуђени да назовемо *спектрални поступак нумеричког рачунања,* а који се састоји у расипању у нумерички спектар вредности непознатих, као што призма расипа сноп светлосних зрака у спектар одређене светлости, при чему аналитички израз Ф, *спектрална генератриса* проблема, у томе игра улогу сличну оној анализујуће призме. Ту се онда установљава да је овај поступак погодан да пружи у исти мах, довољним настављањем истог нумеричког рачуна, вредности онолико колико се хоће непознатих проблема на који се он примењује, као и индивидуално сваку цифру и сваку децималу било које од тих непознатих. Штавише, он допушта одређивање *тачке вредности* жељеног броја непознатих помоћу вредности која је *довољно блиска* само једном броју S.

Спектрални поступак, у облику у коме је у овој књизи изложен, примењује се на све проблеме *између чијих се непознатих и неког степеног реда са целим коефицијентима може успоставити одређена кореспонденција.* Благодарећи произвољности коју дозвољава појам такве кореспонденције, на проблеме ове врсте наилази се у свим гранама рачуна, од најелементарнијих проблема аритметике, алгебре, теорије вероватноће све до различитих проблема инфинитезималног рачуна и теорије функција.

Тако, извесна рационална функција доводи до спектра разлагања бројева, који показује, једноставним бацањем погледа, на колико се начина променљиви цео број може изразити као линеарна хомогена комбинација датог низа целих бројева.

Ламбертов ред доводи до спектра бројева делилаца променљивог целог броја, као и до спектара чији елементи приказују једноставне односе са простим бројевима.

Спектрални поступак развијања у редове у потпуности се разликује од досада познатих поступака. Он се састоји у образовању спектра повезаног са функцијом коју треба развити у ред, који, својим пругама и линијама, даје или директно или путем познатог рачуна било све коефицијенте развитка истовремено, било тражени скуп тих коефицијената, било одвојено сваки коефицијент који се жели, или чак ону цифру одређеног ранга неког коефицијента која се жели. Сам спектар се израчунава помоћу посматране функције као нумеричка вредност неког израза у коначном облику, извесног једноструког или вишеструког интеграла, итд.

Једноструки или вишеструки интеграли, у одређеној вези са степеним редовима чији су коефицијенти цели бројеви, израчунавају се било у форми неког спектра, било уз помоћ неког спектралног елемента (пруге, линије).

Али, како верујемо, управо у теорији функција спектрална метода може довести до најзанимљивијих резултата. Нарочито, *она пружа успешна средства представљања аналитичке функције помоћу низа цифара.* Представљање се врши помоћу једног спектра ове функције, уз прикључење извесног скупа информација и његовим односима са функцијом, информација које се тичу знакова, начина поделе на сегменте спектра који одговара проблему и релација спектралних сегмената са функцијом.

Ове последње релације не мењају се за функције које припадају истој *спектралној категорији* функција, при чему је за такву једну категорију карактеристичан скуп особености *аритметичке природе* у вези са коефицијентима развитка произвољне функције из те категорије и односи се на начин којим се ови коефицијенти, сви заједно, претварају у *целе* бројеве низом операција изведеним на функцији. Тако се долази до потпуног одређивања функција дефинисаних веома широким условима и зависних, у једном другом начину класификовања, од *бесконачно много* параметара – помоћу коначног броја нумеричких података, при чему се тај број мења од једне до друге категорије функција, а остаје непроменљив за функције из исте категорије. Тако, на пример, скуп функција $f(z)$ које се могу развити у ред степена променљиве z са целим коефицијентима представља категорију функција са *два* параметра; скуп функција код којих је a_n рационалан број са имениоцем чији број цифара у непериодичном делу или у периоду не расте неограничено са n – образује категорију функција са *четири* параметра, при чему се тај број своди на *три* за функције код којих је a_n децимални разломак са коначним бројем цифара или просто периодичан; скуп алгебарских функција са рационалним a_n такође образује категорију са *четири* параметра.

Међутим, спектрална метода није нарочито ограничена на одређене категорије функција. *Свака аналитичка функција* f(z) *у било ком кругу* z *равни у коме је холоморфна може бити представљена, са оном приближношћу која се тражи, једним бројем и једним скупом података о односима између сегмената тог броја и функције.*

Различити карактеристични елементи аналитичких функција могу се сажети, кондензовати, у само један број и један скуп таквих података. Такав је, на пример, случај *сингуларитета* функције садржаних у неком кругу чији је центар обична тачка функције, или случај *нула* мероморфне функције обухваћених неким кругом, итд.

По себи се разуме да је у овој малој књизи питање које смо поставили на почетку Увода само додирнуто и разматрано са посебног становишта теорије нумеричких спектара. Дубља истраживања о односима између функција и низова цифара водиће ка резултатима који ће на други начин бити занимљиви.

Остаје нам да кажемо коју реч о терминима употребљеним у излагању ове теорије.

Термини: *спектар, континуирани спектар, дисконтинуирани спектар, сегментирани спектар* већ су били употребљени у областима сасвим различитим од теорије коју излажемо. У својим добро познатим истраживањима на подручју теорије ортогоналних трансформација, г. Хилберт уводи спектар квадратне форме, дефинишући га као скуп афикса извесних реалних тачака, нула дискримината таквих форми [2]. Овако дефинисан спектар чине тачке на реалној оси. Те тачке могу образовати пребројив скуп изолованих тачака: то је дисконтинуирани спектар. Оне такође могу бити распоређене по сегментима реалне праве тако да на њима буду свуда густе: то је сегментарни или континуирани спектар. Ови термини и овај језик појављују се у теорији интегралних једначина, где су уведене управо преко квадратних форми са бесконачно много променљивих у овој новој грани анализе.

Међутим, ови термини, на које упућују нејасне и далеке аналогије, из којих се у овој последњој теорији не би могла извући никаква нарочита корист, у њој нису нимало неопходни, нити се баш намећу. Проблеми у које су они тако уведени могу се третирати без њихове употребе а да то не буде ни од најмање штете за теорију за лакоћу њеног излагања. Насупрот томе, они се намећу у проблемима којима се ми бавимо, с једне стране реалним и упадљивим аналогијама које постоје између спектралне методе и поступака коришћених у хемијској спектралној анализи, а с друге стране поједностављењима која им доносе, а која ће се видети и проценити у поглављима која следе [3].

---

[2] D. Hilbert, *Grundzüge uner allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Vieste Mitteilung Götting. Nachrichten, 1906.

[3] Више резултата садржаних у овој књизи било је саопштено у Париској академији наука (седнице од 7. и 14. маја 1917, 17. септембра 1917. и 25. новембра 1918).

ПРВИ ДЕО

НУМЕРИЧКИ СПЕКТРИ

ГЛАВА ПРВА

НУМЕРИЧКИ СПЕКТРИ И ЊИХОВИ ЕЛЕМЕНТИ

I. – Низови позитивних реалних целих бројева

1. Нека је

(1) $$N_0, N_1, N_2, \ldots$$

низ позитивних целих реалних бројева, x_k цео позитиван број који није мањи од броја цифара броја N_k и λ_k^i i-та цифра броја N_k, при чему се ранг i цифре броји, као што се то ради у аритметици, здесна налево.

Образујмо нумеричку групу

(2) $$G_k = 00\ldots 0N_k,$$

коју чини број N_k коме претходи онолико нула колико је потребно да укупан број цифара групе буде h_k.

Образујмо, затим, број

(3) $$G_0 G_1 G_2 \ldots G_m,$$

добијен писањем, без међусобних размака, редом једне за другом нумеричких група $G_0, G_1, G_2, \ldots$, при чему групе значајних цифара два узастопна цела броја N_{k-1} и N_k, а да никад не наступи преклапање једних и других, могу бити раздвојене нулама у већем или мањем броју, према томе да ли је разлика између x_k и ефективног броја λ_k цифара у N_k већи или мањи број.

Тако формиран низ (3) подсећа на спектре светлости зажарених тела; групе

(4) $$\lambda_k^{ik}\,\lambda_k^{ik-1}\ldots\lambda_k^1$$

значајних цифара ту би одговарале пругама спектра; нуле које их раздвајају одговарале би тамним деловима овог, а саме значајне цифре спектралним линијама које све заједно карактеришу елемент N_k својом вредношћу и својим релативним положајем у спектру.

Прихватајући такво изражавање, које омогућује да се језик учини концизнијим а излагање јаснијим, назовимо:

1. низ цифара који чине број (3), пошто се претходно G_0 и G_1 раздвоје децималном запетом, *спектром* нумеричког низа (1);

2. део низа цифара (3) који чине значајне цифре целог броја G_1 – *k-тим светлим делом* или *k-том пругом* спектра;

3. део низа (3) који чине нуле између значајних цифара бројева N_{k-1} и N_k – *k-тим тамним делом* спектра;

4. целину коју образују ова два дела спектра ранга k – *k-тим одсечком* спектра;

5. цифру λ_k^i у (3) – *i-том линијом k-те спектралне пруге* (или k-тог спектралног одсечка);

затим, нека:

6. *ширину* k-тог одсечка мери број h_k, ширину његовог светлог дела λ_k, а његовог тамног дела $h_k - l_k$;

7. цео број m означава укупан број спектралних одсечака, при чему је спектар *ограничен* или *неограничен*, према томе да ли је број m коначан или бесконачан;

8. закон мењања целог броја h_k са његовим рангом k представља *спектрални ритам*; он је *униформан* када је

$$h_1 = h_2 = \ldots = h_m,$$

тј. када сви спектрални одсечци имају исту ширину; он је *униформно убрзан* кад ширина одсечка расте сразмерно његовом рангу, односно када је $h_k = h + ck$, где су h и c два позитивна цела броја који се не мењају са k; ритам ће бити *са растућим убрзањем* кад цео број c расте са k; ритам ће бити *осцилаторан* ако h_k варира на осцилаторан начин кад k прогресивно расте; он је *периодичан* ако је варирање низа h_k периодично, итд.;

9. разлика $h_k - l_k$ мери *дисперзију* спектра, константу или променљиву са k; спектар је у највећој могућој мери *збијен*, тј. *са нултом дисперзијом,* када у њему нема тамних делова и пруге се додирују.

Када су дати низ (1) и ритам h_k његовог спектра, спектар се формира образовањем одговарајућих нумеричких група $G_0, G_1, G_2, \ldots$ и њиховим исписивањем једне уз другу у једном реду и следећи природан поредак њихових редних бројева.

Обрнуто, уколико је дат спектар (3) и његов ритам h_k, члан N_k одговарајућег низа (1) даје k-та пруга спектра.

На пример, спектар низа двоцифрених природних бројева

$$11, 12, 12, ..., 98, 99,$$

са униформним ритмом $h_k = 3$, био би

$$011012013 \ldots 098099;$$

његова дисперзија је константна и једнака 1.

Спектар низа бинарних коефицијената

$$\binom{7}{0}, \binom{7}{1}, \ldots, \binom{7}{7},$$

са униформно убрзаним ритмом је

$$1070210035000350000210000007000000 1,$$

а његова дисперзија је растућа.

Спектар неограниченог низа коефицијената целобројних, функције $f(z) = \dfrac{2+37x}{1-x^2}$ са осцилаторним ритмом

$$h_k = \frac{1}{2}(3 - \cos k\pi)$$

је 237237...; он је периодичан и са нултом дисперзијом.

2. Треба сматрати да је ритам h_k *сагласан са датим низом* (1) ако је $h_k - l \geq 0$ за све вредности $k = 1, 2, ..., m$ (h_0 може при том бити било који цео број, будући да његово повећање не доводи до преклапања групе G_0 и неке друге групе).

С овим у вези, имамо следећа правила.

ПРВО ПРАВИЛО. – *Ограничен низ (1) увек има сагласан униформни ритам* $\mathrm{h_k} = \mathrm{h}$, где је h *било који цео број који није мањи од логаритма највећег члана низа* (не узимајући у обзир први члан).

Заиста, имамо $N_k \leq 10^h$, и стога $l_k \leq h$.

ДРУГО ПРАВИЛО. – *Ограничен или неограничен низ* (1), *чији чланови (уз изузетак првог) нису већи од фиксираног броја* B, *има сагласан униформни ритам* $\mathrm{h_k} = \mathrm{h}$, *где* h *означава било који цео број који није мањи од* log B.

(Као у случају претходног правила).

ТРЕЋЕ ПРАВИЛО. – *Неограничен низ* (1), *такав да* $\sqrt[n]{N_n}$ *не расте неограничено са* n, *има сагласан униформно убрзан ритам.*

Наиме, тада N_n, за сваку вредност n, остаје мањи од извесног израза облика AB^n, где су A и B бројеви који не зависе од n и за које се може узети да нису мањи од 1; имамо, дакле,

$$N_n \leq 10^{h+cn},$$

где је h неки цео број који није мањи од $\log A$, а c број који није мањи од $\log B$: низ (1) онда има униформно убрзани ритам $h_k = h + ck$.

Тако, на пример, низ (1) чији се општи члан N_n изражава одређеним интегралом облика

$$N_n = \int_a^b ur^n dt,$$

где је u функција од t која је позитивна и ограничена између граница a и b по претпоставци коначних, а r функција од t такође ограничена између ових граница, има униформно убрзан ритам. Заиста, ако се са A означи вредност N_0 а са B највећа вредност функције r између граница интеграције, биће

$$N_n = AB^n.$$

Један такав низ био би неограничени низ

$$\binom{2}{1}, \binom{4}{2}, \binom{6}{3}, \ldots;$$

у овом случају

$$N_n = \frac{2^{2n+1}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t dt,$$

тако да је $A = 1$, $B = 4$, па низ има ритам $h_k = k$.

ЧЕТВРТО ПРАВИЛО. – *Неограничен низ* (1) *такав да* $\sqrt[n]{N}$ *остаје мање од* AB^n, *где су* A *и* B *две фиксиране коначне константе, има сагласан ритам са растућим убрзањем* $\mathrm{h_k} = \mathrm{h} + \mathrm{ck} + \mathrm{gk}^2$, *где су* h, c *и* g *погодне целобројне константе.*

Тада, наиме, за сваку вредност n, N_n остаје мање од извесног израза

$$CA^nB^{n^2} \leq 10^{h+cn+gn^2},$$

где су h, c и g позитивни цели бројеви који редом нису мањи од вредности $\log C$, $\log A$ и $\log B$.

ПЕТО ПРАВИЛО. – *Ограничен или неограничен низ* (1) *који има ритам* $\mathrm{h_k}$, *допушта такође сваки ритам* $\mathrm{h'_k}$, *такав је да је* $\mathrm{h'_k} \geq \mathrm{h_k}$ *за* $\mathrm{k} = 1, 2, 3, \ldots$

Низ који, на пример, има униформни ритам $h_k = h$, допушта истовремено униформно убрзани ритам $h_k = h + ck$, као и сваки ритам са растућим убрзањем $h_k = h + ck + gh^2 + \dots$ за било какве целе позитивне бројеве c, g,...

II. – Низови било каквих целих бројева

3. Ако је дат неки низ

$$(5) \qquad M_0, M_1, M_2, \dots$$

било каквих целих бројева, реалних или имагинарних, позитивних или негативних, и ако је θ_k једна од четири вредности

$$(6) \qquad 1, -1, i, -i \quad (i = \sqrt{-1}),$$

овом низу може се увек прикључити низ

$$(7) \qquad \theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots$$

такав да је реални део и коефицијент уз i *имагинарног дела** *сваког члана низа*

$$(8) \qquad \theta_0 M_0, \theta_1 M_1, \theta_2 M_2, \dots$$

буду позитивни.

Заиста, ако су ти бројеви истог знака, довољно је ставити $\theta_k = \sigma_k$, где σ_k означава јединицу снабдевену знаком реалног дела броја M_k; ако су они имају супротне знаке, ставиће се $\theta_k = i\sigma_k$.

У случају кад је M_k реално, ставиће се $\theta_k = \sigma_k$, а када је M_k чисто имагинарно за θ_k ће бити стављена јединица помножена са $-i$.

Када су сви бројеви M_k реални (позитивни или негативни), или сви чисто имагинарни (са позитивним или негативним коефицијентима уз i), спектром низа (5) сматраће се спектар низа целих позитивних бројева (8).

У случају кад су бројеви M_k комплексни цели бројеви, спектром низа (5) сматраће се комплексан број $S + iS'$ који образују два спектра, од којих је први спектар позитивних целих бројева $p_0, p_1, p_2, \dots$ а други S' спектар позитивних целих бројèва $q_0, q_1, q_2, \dots$, где су p_k и q_k реални део и коефицијент уз i имагинарног дела целог комплексног броја

$$(9) \qquad \theta_k M_k = p_k + iq_k.$$

---

* Термин „коефицијент уз i имагинарног дела" – данас се скоро увек замењује краћим изразом „имагинарни део". То, у ствари, аутор на више места касније и сам чини. (*Примедба преводиоца*)

Неки спектрални ритам сагласан је са низом (5) ако је истовремено сагласан са сваким од низова p_k и q_k. То ће, на пример, бити случај са сваким ритмом који је сагласан са низом $E_0, E_1, E_2, \ldots$, где E_k означава цео позитиван број који није мањи од модула броја M_k.

Образовање спектра низа било каквих целих бројева своди се тако на образовање једног или два спектра позитивних целих бројева.

ГЛАВА II

СПЕКТРАЛНА ГЕНЕРАТРИСА

I. – Дефиниције и основна својства

4. Следећа чињеница је фундаментална за формирање нумеричких спектара.

Кад је дат неки низ, ограничен или неограничен, било каквих целих бројева, са њим се може довести у везу функција $\Phi(\mathrm{x})$ *чија нумеричка вредност за неку партикуларну вредност* $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$ *даје спектар тог низа са ритмом који је са њим сагласан.*

Да бисмо се у ово уверили, разликујемо следећа два случаја.

Први случај. – Низ чине позитивни реални цели бројеви

$$N_0, N_1, N_2, \ldots \tag{10}$$

Нека је: l_k број цифара целог броја N_k; h_k цео број који није мањи од l_k; G_k у претходном излагању дефинисана нумеричка група прикључена броју N_k, и претпоставимо најпре да низ (10) чини *ограничен* број чланова.

Формирајмо низ позитивних бројева

$$P_1, P_2, P_3, \ldots \tag{11}$$

дефинисан рекурентном релацијом

$$\begin{cases} P_{k+1} = P_k + h_k \\ P_1 = h_1 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{12}$$

тј. низ

$$\begin{cases} P_1 = h_1, \\ P_2 = h_1 + h_2, \\ P_3 = h_1 + h_2 + h_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{13}$$

Образујмо потом позитивне рационалне бројеве

(14) $$g_1, g_2, \ldots, g_m,$$

такве да је

(15) $$g_k = 10^{-P_k},$$

и помоћу њих полиноме по x m-тог степена

(16) $$\Phi_m(x) = N_0 + g_1N_1x + g_2N_2x^2 + \ldots + g_mN_mx^m.$$

Важи следећа теорема:

Нумеричка вредност $\Phi_m(1)$ *представља спектар низа* (10) *са ритмом* h_k.

Заиста, вредност g_kN_k је децимални разломак чији је цео део нула а децимални део састоји се од $P_k - l_k$ узастопних нула и од значајних цифара броја N_k који се ређају иза њих. Одатле излази да је

(17) $$\begin{aligned} &g_1N_1 + g_2N_2 + \ldots + g_mN_m = \\ &= 0,\underbrace{0\ldots0}_{h_1-l_1\text{нула}}N_1\underbrace{0\ldots0}_{h_2-l_2\text{нула}}N_2\underbrace{0\ldots0}_{h_3-l_3\text{нула}}N_3\,0\ldots = 0,G_1G_2\ldots G_m,\end{aligned}$$

а како је $h_k - l_k \geq 0$, тврђење је доказано.

Претпоставимо сада да је низ *неограничен.* Тада полином $\Phi_m(x)$ постаје ред у коме се ређају степени променљиве x са растућим експонентима:

(18) $$\Phi_m(x) = N_0 + g_1N_1x + g_2N_2x^2 + \ldots$$

Претходна теорема остаје тачна под условом да је низ позитивних бројева $h_1, h_2, h_3, \ldots$, који карактерише спектрални ритам, изабран тако да је ред (18), чији је општи коефицијент

$$g_kN_k = N_k \cdot 10^{-P_k} = N_k \cdot 10^{-h_1-h_2-\ldots-h_k},$$

конвергира за $x = 1$, што је очигледно увек могуће.

Тако добијену функцију $\Phi(x)$, која се своди на полином по x за ограничен низ (10), а представља потенцијални ред по x кад је низ (10) неограничен, назваћемо *спектралном генератрисом* овог низа, која одговара спектралном ритму h_k помоћу кога је формирана. Нумеричка вредност $S = \Phi(1)$ подудара се са посматраним спектром.

Други случај. – Низ се састоји од било каквих целих бројева

(19) $$M_0, M_1, M_2, \ldots$$

реалних или имагинарних, позитивних или негативних. Помоћу фактора (7) образујмо ред целих бројева

(20) $$\theta_0 M_0, \theta_1 M_1, \theta_2 M_2, \ldots$$

чије је карактеристично својство да им ни реални део ни коефицијент уз i имагинарног дела није негативан. Нека је h_k неки ритам који је сагласан са низом (20) и формирајмо одговарајући низ целих бројева P_k дефинисаних са (13), као и низ g_k дефинисан са (15).

Спектрална генератриса низа (19) *тада је функција*

(21) $$\Phi(x) = \theta_0 M_0 + \theta_1 M_1 x + \theta_2 M_2 x^2 + \ldots,$$

а нумеричка вредност $S = \Phi(1)$ *даје спектар или два спектра низа* (19), *према томе да ли су сви његови чланови реални или то није случај.*

Дешава се, као што ће се видети из онога што следи, да се генератриса посматраног низа изражава неким другим аналитичким облицима, на пример у коначном облику, помоћу одређене комбинације познатих функција, у облику једноструког или вишеструког интеграла у коме x фигурише као параметар, итд. Исто тако, спектар S често се изражава једноставним нумеричким комбинацијама, одређеним интегралима познатих функција, итд.

Примедба I. – Могле би се формирати друге спектралне генератрисе, на пример помоћу експоненцијалних редова или помоћу потенцијалних редова са више променљивих. У овој књизи ограничићемо се на генератрисе које имају претходну форму.

Примедба II. – Могу се образовати, на начин сличан претходном, спектри и њихове генератрисе, за неки систем нумерације различит од децималног система, а посебно за систем нумерације са основом 2, за који би се спектар састојао само од цифара 0 и 1.

II. – Начини формирања спектралних генератриса

5. Треба разликовати следећа два случаја.

Први случај. – Низ целих бројева M_k је дат. Ако су сви његови чланови реални и позитивни, израчунава се низ множилаца g_k који одговара жељеном спектралном ритму h_k и пише се директно

(22) $$\Phi(x) = M_0 + g_1 M_1 x + g_2 M_2 x^2 + \ldots$$

Ако сви бројеви M_k нису реални и позитивни, образује се још одговарајући низ θ_k и пише се директно

(23) $$\Phi(x) = \theta_0 M_0 + \theta_1 g_1 M_1 x + \theta_2 g_2 M_2 x^2 + \ldots$$

У случају, на пример, униформно убрзаног ритма $h_k = h + ck$ имаће се

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \theta_n M_n q^{n^2} (\beta x)^n, \quad q = 10^{-\frac{c}{2}}, \quad \beta = 10^{-\left(h+\frac{c}{2}\right)},$$

и спектар ће бити,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n M_n q^{n^2} \beta^n.$$

Затим треба настојати, уколико је потребно, да се један такав непосредно добијени израз за $\Phi(x)$ трансформише у извесну експлицитну комбинацију познатих функција, у неки одређени интеграл, итд.

Други случај. – Позната је, у било ком аналитичком облику, функција $f(x)$, чији непознати развитак у ред

(24) $$f(x) = M_0 + M_1 x + M_2 x^2 + \dots$$

има чланове низа M_k за коефицијенте и полупречник r холоморфности око тачке $x = 0$ већи од нуле.

1. Размотримо најпре случај целих бројева M_k који допуштају *униформни спектрални ритам* $h_k = h$ (случај ограничених низова M_k, или неограничених низова M_k чији чланови не расту бесконачно), па помоћу фактора θ_k који се односе на ове бројеве M_k формирајмо (уколико је могуће) функцију

(25) $$\Phi(x) = \theta_0 M_0 + \theta_1 M_1 x + \theta_2 M_2 x^2 + \dots$$

Спектралну генератрису чиниће тада израз

(26) $$\Phi(x) = \Psi(10^{-h} x),$$

а спектар ће бити

(27) $$S = \Psi(10^{-h} x).$$

Када су бројеви M_k реални и истог знака, или комплексни и са реалним и имагинарним делом истог знака, функција ... своди се [до на један фактор $\Psi(x)$] на $f(x)$; ако су они реални и наизменично позитивни и негативни, биће $\Psi(x) = f(-x)$; ако су имагинарни, са позитивним реалним и негативним имагинарним делом, имаће се $\Psi(x) = if(x)$, а у супротном случају $\Psi(x) = -if(x)$; ако су реални, као и имагинарни делови наизменично позитивни и негативни, тада је $f(x) = -if(x)$, итд.

Функција $\Psi(x)$ изражава се, уосталом, и то на различите начине, и одређеним интегралом примењеним на функцију $f(x)$ и на функцију

(29) $$\lambda(x) = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \dots,$$

(која зависи само од знакова реалних и имагинарних делова бројева, а ниуколико од њихових нумеричких вредности) холоморфну у кругу полупречника 1 и са центром у почетку. Ова последња функција своди се на

$$\lambda(x) = \frac{1}{1-x},$$

или на

$$\lambda(x) = \frac{1}{1+x},$$

када су бројеви M_k реални и позитивни, односно наизменично позитивни и негативни.

2. Позабавимо се сада случајем *таквог низа* $\mathrm{M_k}$ *да* $\sqrt[k]{|\mathrm{M_k}|}$ *не расте бесконачно са* k (такав је случај сваког низа целих реалних или имагинарних бројева који фигуришу као коефицијенти развитка по степенима променљиве x неке функције $f(x)$ холоморфне у околини тачке $x = 0$). Низ тада допушта известан униформно убрзан ритам $h_k = h + ck$, где су h и c цели позитивни бројеви, и за такав један ритам биће

$$g_k = 10^{-(h_1+h_2+\ldots+h_k)} = 10^{-hk-\frac{k(k+1)}{2}c}. \tag{30}$$

Образујмо помоћну функцију

$$\chi(x) = \sum \theta_n q^{n^2+\lambda n} x^n, \tag{31}$$

где је

$$\lambda = 1 + \frac{2h}{c}, \quad q = 10^{-\frac{c}{2}}; \tag{32}$$

она је *цела* трансцендентна функција од x која зависи само од константи h и c из израза за ритам и од знакова реалних и имагинарних делова бројева M_k са којима се заједно мењају бројеви θ_k. Важи следећа теорема:

Спектрална генератриса низа $\mathrm{M_k}$, *за ритам* $\mathrm{h_k = h + ck}$, *дата је изразом*

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{ti})\chi\left(\frac{xe^{-ti}}{\rho}\right)dt, \tag{33}$$

где ρ *означава произвољну константу чији је модуо мањи од полупречника р холоморфности функције око тачке* $\mathrm{x = 0}$.

Да бисмо то показали, сетићемо се једне познате теореме о потенцијалним редовима. Нека су редови

$$(34)\qquad \begin{cases} f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots, \\ \varphi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots, \end{cases}$$

конвергентни у круговима са центром у почетку чији су полупречници респективно r и r_1; ред

$$(35)\qquad a_0 b_0 + a_1 b_1 x + a_2 b_2 x^2 + \dots$$

тада има полупречник конвергенције најмање једнак rr_1 и суму једнаку вредности одређеног интеграла

$$(36)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_1 e^{ti})\varphi(x_2 e^{-ti})\,dt,$$

где су x_1 и x_2 било које две вредности које не зависе од t, имају модуле респективно мање од r и r_1 задовољавају релацију $x_1 x_2 = x$.

Ставимо

$$a_k = M_k, \quad b_k = \theta_k \cdot 10^{-h_k + \frac{k(k+1)}{2}c},$$

тако да се $f(x)$ подудари са функцијом (24) а $\varphi(x)$ са (31). Узимајући за x_1 било коју константну вредност ρ чији је модуо мањи од r а за x_2 вредност $\frac{x}{\rho}$, како је $r_1 = \infty$, услови последње теореме су испуњени, па ће спектрална генератриса заиста бити дата изразом (33). Одатле, такође, излази следеће:

Спектар низа $\mathrm{M_k}$ *са ритмом* $\mathrm{h_k = h + ck}$ *подудара се са нумеричком вредношћу одређеног интеграла*

$$(37)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{ti})\chi\left(\frac{e^{-ti}}{\rho}\right)dt,$$

независном од константе ρ уколико је модуо ове мањи од r.

Изрази (33) и (37), у неким општим случајевима, могу бити замењени другим изразима који су са њима еквивалентни.

Тако се, уколико су сви бројеви M_k реални, стављајући

$$(38)\qquad \begin{cases} a = \frac{1}{2}\log \operatorname{nat} 10 = 1{,}151292\dots \\ b = (2c + h)a, \end{cases}$$

што даје

$$g_k = e^{-ak^2-bk},$$

с обзиром на познату формулу

$$e^{-ak^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}\cos 2kt\sqrt{a}dt \qquad (k>0, a>0),$$

установљава да се спектрална генератриса за ритам $h_k = h + ck$ изражава формулом

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2} R(\alpha x, \beta t)dt, \tag{39}$$

где константама α и β треба приписати вредности

$$\alpha = e^{-b}, \beta = 2\sqrt{a}, \tag{40}$$

и где $R(r, \varphi)$ означава реалан део функције $f(re^{\varphi i})$.

Приметимо такође да се, у случају позитивних и реалних бројева M_k, који се могу изразити одређеним интегралом облика

$$M_k = \int_a^b uv^k dt \qquad (k = 0,1,2,\ldots), \tag{41}$$

где су u и v функције од t, спектрална генератриса изражава одређеним интегралом

$$\Phi(x) = \int_a^b u\theta(vx)dt, \tag{42}$$

где је ... позната цела трансцендента

$$\theta(x) = \sum_{n=0}^\infty q^{n^2+\lambda n}x^n, \tag{43}$$

при чему су константе λ и q дефинисане са (32).

3. Узмимо у разматрање случај *било каквог ритма са константним убрзањем.*

Формирајмо помоћну функцију

$$\xi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty}\theta_n g_n x^n + \theta_0 M_0, \tag{44}$$

где је

$$g_n = 10^{-P_n} = 10^{-(h_1+h_2+\ldots+h_n)}. \tag{45}$$

Спектралну генератрису и сада представља израз (33) *а спектар формулом* (37), *под условом да се у њима функција* χ(x) *замени функцијом* ξ(x).

Претходне формуле примењују се на исти начин на ограничене и неограничене низове M_k.

6. Приказаћемо неколико једноставних примера спектралне генератрисе и спектра.

Први пример. – Образовати спектралну генератрису ограниченог низа

$$1, 2, 3, \ldots, m,$$

са униформним ритмом $h_k = h$ сагласним са низом. Имамо

$$f(x) = x + 2x^2 + 3x^2 + \ldots + mx^m = \frac{mx^{m+2} - (m+1)x^{m+1} + x}{(1-x)^2},$$

па ће генератриса бити

$$\Phi(x) = \frac{m \cdot 10^{-(m+2)h} x^{m+2} - (m+1) \cdot 10^{-(m+1)h} x^{m+1} + 10^{-h} x}{(1-10^{-h}x)^2}.$$

Спектар се добија као нумеричка вредност S израза

$$\Phi(1) = \frac{10^{(m+1)h} - (m+1)10^h + m}{10^{mh}(10^h - 1)^2},$$

па имамо, на пример, за $m = 9$, $h = 1$,

$$S = \frac{10^{10} - 10^2 + 9}{10^9 \cdot 9^2} = 0{,}123456789.$$

Други пример. – Образовати спектралну генератрису низа биномних коефицијената

$$\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \binom{m}{2}, \ldots, \binom{m}{m},$$

са униформним ритмом $h_k = h$ сагласним са низом. Имамо

$$f(x) = (1+x)^m,$$

а генератриса ће бити

$$\Phi(x) = (1 + 10^{-h} x)^m.$$

Спектар се добија као нумеричка вредност израза

$$\Phi(1) = \frac{(10^h + 1)^m}{10^{mh}},$$

па имамо, на пример, за $m = 6$, $h = 2$,

$$S = \frac{101^6}{100^6} = 1,061520150601.$$

Трећи пример. – Посматрајмо неограничени низ

$$\binom{2}{1}, \binom{4}{2}, \binom{6}{3}, \ldots$$

средњих биномних коефицијената, које се могу изразити познатом формулом

$$\binom{2n}{n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} uv^n dt,$$

где је

$$u = \frac{2}{\pi}, \quad v = 4\cos^2 t.$$

Одавде се закључује да је

$$\binom{2n}{n} < 4^n,$$

и да је стога са овим низом сагласан униформно убрзани ритам $h_k = k$. Спектрална генератриса за тај ритам је

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta(4x\cos^2 t) dt,$$

где је

$$\theta(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} q^{n^2+n} x^n,$$

а нумеричка вредност $\Phi(1)$ подудара се са спектром S овог низа и износи

$$S = 0,102006002000070000252000092 4.....$$

Четврти пример. – Посматрајмо неограничени низ M_n чланова независних од x полинома $\left(1+x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ за $n = 1, 2, 3,...$; ове бројеве изражава позната формула

$$M_n = \int_0^\pi uv^n dt,$$

где је

$$u = \frac{1}{\pi}, \quad v = (1+2\cos t)^2.$$

Одатле се закључује да је $M_n < 9^n$ и да је, према томе, са овим низом сагласан ритам $h_k = k$. Спектрална генератриса са таквим ритмом биће

$$\Phi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \theta\left[(1+2\cos t)^2 x\right] dt,$$

где је $\theta(x)$ цела трансцендента из претходног примера, а нумеричка вредност $\Phi(1)$ подудариће се са спектром S низа, чија је вредност

$$S = 0{,}1030070019000510001 41...$$

III. – Генератрисе спектра са степенастим ритмом

7. Дешава се да су, за посматрани низ позитивних целих бројева $M_1, M_2, M_3, \ldots$, познате горње границе бројева њихових цифара, тако да:

$$(46)\quad \begin{cases} \text{од } k = 1 \text{ до } k = m_1 - 1 \text{ цео број има највише } p_1 \text{ цифара,} \\ \text{од } k = m_1 \text{ до } k = m_2 - 1 \text{ цео број има највише } p_2 \text{ цифара,} \\ \text{од } k = m_2 \text{ до } k = m_2 - 1 \text{ цео број има највише } p_3 \text{ цифара,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Сви чланови првог интервала допуштају као заједнички сагласан ритам униформни ритам

$$(47)\qquad h_1 = h_2 = \ldots = h_{m_1-1} = p_1.$$

Чланови другог интервала допуштају униформни ритам

$$(48)\qquad h_{m_1} = h_{m_1+2} = \ldots = h_{m_2-1} = p_2, \ldots$$

Посматрајмо спектар S_i првих i чланова

(49) $$M_1, M_2, \ldots, M_i$$

низа M_k и означимо са q ранг интервала (46) у коме је садржан број i, тако да је

(50) $$m_{q-1} < i \leq m_q - 1,$$

што значи да крајњи цео број M_i има највише p_q цифара. Низ (49) имаће онда спектрални ритам дат једнакостима (47), (48),..., при чему првих $m_1 - 1$ спектралних одсечака има исти ритам $h_k = p_1$, следећих $m_2 - m_1$ одсечака има исти ритам $h_k = p_2, \ldots$ Овакав спектар S_i је *сйекшар са сшейенасшим риїшмом*.

Цео број

$$P_k = h_1 + h_2 + \ldots + h_k,$$

који за сваку вредност индекса k представља укупан број цифара у низу цифара

(51) $$G_1 G_2 \ldots G_k,$$

где је G_j нумеричка група (z) која се односи на цео број M_j и има ритам h_k једнак одговарајућем броју p, одређује се на следећи начин:

1. Како за први интервал (46) важе једнакости (47), цео број

$$Q_1 = G_1 G_2 \ldots G_{m_1 - 1}$$

има укупан број цифара једнак $(m_1 - 1)p_1$.

2. Будући да за други интервал (46) важе једнакости (48), број

$$Q_2 = G_{m_1} G_{m_1+1} \ldots G_{m_2 - 1}$$

има укупан број цифара једнак $(m_2 - m_1)p_2$.

3. Цео број

$$Q_3 = G_{m_2} G_{m_2+1} \ldots G_{m_3 - 1}$$

има укупно $(m_3 - m_2)p_3$ цифара, итд.

Најзад, цео број

$$Q_q = G_{m_{q-1}} G_{m_{q-1}+1} \ldots G_i$$

имаће укупно $(i - m_{q-1} + 1)$ цифара.

А како се цео број (51) записује кад се напишу један за другим q целих бројева $Q_1, Q_2, \ldots, Q_q$, укупан број његових цифара биће једнак

$$(m_1-1)p_1+(m_2-m_1)p_2+\ldots+(m_{q-1}-m_{q-2})p_{q-1}+(i-m_{q-1}+1)p_q,$$

односно

$$i_{p_q}-L_q, \tag{52}$$

где је

$$L_q=(p_2-p_1)m_1+(p_3-p_2)m_2+\ldots+(p_q-p_{q-1})m_{q-1}+p_1-p_q. \tag{53}$$

Рекурентна формула

$$L_{q+1}=L_q+(p_{q+1}-p_q)(m_q-1) \tag{54}$$

олакшава узастопно нумеричко израчунавање бројева L_i.

Тако се долази до следећег правила.

Изложилац $P_k(k=1,2,\ldots,i)$, *који фигурише у изразу за спектралну генератрису*

$$\Phi(x)=10^{-P_1}M_1x+10^{-P_2}M_2x^2+\ldots+10^{-P_i}M_ix^i \tag{55}$$

низа $\mathrm{M_k}$, *са степенастим низом* $\mathrm{h_k}=\mathrm{p_1},\mathrm{p_1},\mathrm{p_1},\ldots$, *дат је формулом*

$$P_k=kp_q-L_q, \tag{56}$$

где се p_q *и* L_q *не мењају за све чланове* $\mathrm{M_k}$ *чији индекс припада* q-*том интервалу* (46).

Како, према претходном,

$$\begin{array}{llll} \text{од } k=1 & \text{до } k=m_1-1 & \text{имамо } P_k=kp_1-L_1, \\ \text{од } k=m_1 & \text{до } k=m_2-1 & \text{имамо } P_k=kp_2-L_2, \\ \text{од } k=m_2 & \text{до } k=m_3-1 & \text{имамо } P_k=kp_3-L_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

то, ако се стави

$$\begin{aligned} \varphi_1(x)&=M_1x+M_2x^2+\ldots+M_{m_1-1}x^{m_1-1}, \\ \varphi_2(x)&=M_{m_1}x+M_{m_1+1}x^2+\ldots+M_{m_2-1}x^{m_2-1}, \\ \varphi_3(x)&=M_{m_2}x+M_{m_2+2}x^2+\ldots+M_{m_3-1}x^{m_3-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{57}$$

генератриса (55) *биће дата изразом*

$$\Phi(x)=10^{-L_1}\varphi_1(10^{-p_1}x)+10^{-L_2}\varphi_2(10^{-p_2}x)+\ldots \tag{58}$$

Први члан десне стране даје, за $x = 1$, спектар низа $(M_1,\ldots,M_{m_1-1})$ са униформним ритмом $h_k = p_1$; збир прва два члана даје спектар низа $(M_1, M_2,\ldots,M_{m_2-1})$ са степенастим ритмом $h_1 = p_1$ и $h_2 = p_2,\ldots$

8. Спектар има *нулту дисперзију* кад нема тамних делова, тако да се спектралне групе додирују без узајамног преклапања. Такав би био, на пример, спектар

123456789 10 11 12 13...

низа природних бројева; или спектар

1 2 4 6 24 120 720 5040 4320 362880

првих девет факторијела, итд.

Генератриса спектра са нултом дисперзијом добија се применом правила из претходног параграфа, под условом да се бројевима $p_1, p_2, p_3,\ldots$ *сматрају тачни бројеви цифара целих бројева* M_k.

Тако, на пример, за спектар са нултом дисперзијом низа 1, 2, 3, 4,... имамо $M_k = k$ и

$$m_1 = 10,\ \ m_2 = 10^2,\ \ m_3 = 10^3,\ldots,$$
$$p_1 = 1,\ \ \ p_2 = 2,\ \ \ p_3 = 3,\ldots,$$

што даје

$$P_k = k_q - L_q,$$

са

$$L_q = 10^{q-1} + 10^{q-2} + \ldots + 10 + 1 - q = 111\ldots1 - q,$$

где q означава број цифара целог броја M_k на коме се низ завршава, при чему је број јединица у цифарском запису 111 ... 1 једнак q. Тако се добија:

$$L_1 = 0,\ L_2 = 9,\ L_3 = 108,\ L_4 = 1107,\ L_5 = 11106\ldots$$

Важи, уосталом, рекурентна релација

$$L_{q+1} = L_q + 10^q - 1,$$

а једна вредност L_q не мења се за све чланове низа M_k са q цифара.

Полиноми (57) сада су дати општом формулом

$$\varphi_n(x) = \frac{(10^n - 1)x^{10^n+1} - 10^n x^{10^n} - (10^{n-1} - 1)x^{10^{n-1}+1} + 10^{n-1}x^{10^{n-1}}}{(x-1)^2},$$

која излази из онога што претходи и из познате формуле која изражава полиноме чији су коефицијенти чланови аритметичке прогресије.

ГЛАВА III

ГЛАВНА СПЕКТРАЛНА КАРАКТЕРИСТИКА

I. – Дефиниција

9. Оно што претходи чини очигледним улоге које играју следеће две функције

$$(59) \qquad f(x) = M_0 + M_1 x + M_2 x^2 + \ldots,$$

$$(60) \qquad \xi(x) = \theta_0 + \theta_1 g_1 x + \theta_2 g_2 x^2 + \ldots,$$

у формирању генератрисе спектра датог низа целих бројева M_k.

Функција (59) зависи само од вредности низа, а ниуколико од ритма посматраног спектра. Друкчије речено: она зависи од састава спектралних пруга и независна је од начина на који су пруге распоређене у спектру. Ова функција, за посматрани низ M_k, не мења се од једног до другог спектра; она ће стога бити названа *главном спектралном карактеристиком* спектра.

Томе насупрот, функција (60) зависи од распореда пруга спектра бројева M_k, као и од знакова реалних и имагинарних делова тих бројева, али не зависи од бројних вредности ових делова. То је разлог што ћемо је назвати *квалитативном карактеристиком* спектра.

У овој глави, бавићемо се главном спектралном карактеристиком. Ова функција своди се на полином чији су коефицијенти цели бројеви за ограничене спектре; она представља степени ред са целим бројевима за неограничене спектре.

У великом броју случајева ова функција се изражава у коначном облику помоћу познатих функција. Тако, на пример:

1. за низ међусобно једнаких целих бројева M, она је дата изразом

$$f(x) = M \frac{x^{m+1} - 1}{x - 1} \quad \text{или} \quad f(x) = \frac{Mx}{1 - x},$$

према томе да ли је низ ограничен или неограничен;

2. за низ целих бројева који се почев од неког ранга периодично репродукују, карактеристика је *рационална* функција од x са целим *коефицијентима*: ако се са n означи број чланова M_k непериодичног дела а са m број чланова периода посматраног низа, карактеристика ће бити

$$f(x) = P(x) + \frac{Q(x)}{1 - x^m},$$

где су P и Q полиноми

$$P(x) = M_1x + M_2x^2 + M_nx^n,$$
$$Q(x) = M_{n+1}x^{n+1} + M_{n+2}x^{n+2} + M_{n+m}x^{n+m};$$

3. за неки низ целих бројева који представља аритметичку прогресију

$$A+B, A+2B, A+3B, \ldots,$$

имамо

$$f(x) = \frac{Ax}{1-x} + \frac{Bx}{(1-x)^2};$$

4. за низ целих бројева који представља геометријску прогресију

$$AB, AB^2, AB^3, \ldots,$$

имамо

$$f(x) = \frac{ABx}{1-Bx};$$

5. за низ M_k, где је

$$M_k = p_1^k + p_2^k + \ldots + p_m^k,$$

при чему су p_i дати цели бројеви, биће

$$f(x) = R(x) - m,$$

где $R(x)$ означава резултат замене променљиве x са $\frac{1}{x}$ у изразу $x\frac{P'(x)}{P(x)}$, у коме је $P(x)$ полином степена m

$$(x-p_1)(x-p_2)\ldots(x-p_m);$$

6. за низ

$$\binom{p}{0}, \binom{p}{1}, \binom{p}{2}, \ldots, \binom{p}{p},$$

имамо

$$f(x) = (1+x)^p;$$

7. за низ

$$\binom{1}{0}, \binom{2}{1}, \binom{4}{2}, \binom{6}{3}, \ldots,$$

добија се

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$$

У неким другим случајевима, карактеристика се изражава одређеним интегралом у коме фигуришу познате функције.

Тако се за низ факторијела

$$1!, 2!, 3!, \ldots, m!$$

добија

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-t} \frac{(xt)^{m+1} - xt}{xt - 1} dt;$$

а за неограничен низ

$$M_k = \binom{2k}{k}^2 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

имамо

$$f(x) = -1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-16xt^2)}} dt.$$

Правила која излажемо у следећем параграфу знатно проширују област случајева у којима се карактеристика добија у експлицитном облику.

II. – Правила за образовање главне спектралне карактеристике

10. Нека су

$$f(x) = M_0 + M_1 x + M_2 x^2 + \ldots,$$
$$f_1(x) = M_0' + M_1' x + M_2' x^2 + \ldots,$$

спектралне карактеристике редом два низа M_k и M_k' са реалним или имагинарним, позитивним или негативним члановима, и нека је λ било који фиксиран цео број.

ПРАВИЛО I. – Низ

$$M_0' \pm \lambda, M_1 \pm \lambda, M_2 \pm \lambda, \ldots$$

има за карактеристику функцију

$$f(x) \pm \lambda \frac{x^m - 1}{x - 1} \quad \text{или} \quad f(x) \pm \frac{\lambda}{1 - x},$$

према томе да ли је низ ограничен и са m чланова или је неограничен.

Тако се, у случају када су сви бројеви M_k реални и позитивни и налазе се између фиксираних целих позитивних бројева A и B, ограничен или неограничен ред

$$\mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \ldots,$$

где је $\mu_k = M_k - A$, и стога

$$0 \leq \mu_k \leq B - A,$$

изражава помоћу функције $f(x)$ на начин који прописује ово правило. Заиста, како низ μ_k има униформни спектрални ритам $h_k = h$, где је h било који цео број који није мањи од $\log(B–A)$, главна карактеристика низа μ_k може се написати у облику

$$f(x) - A\frac{x^m - 1}{x - 1} \quad \text{или} \quad f(x) - \frac{A}{1 - x}.$$

и даје, кад се у њој x замени са $10^{-h}x$, спектралну генератрису овог низа за ритам $h_k = h$.

ПРАВИЛО II. – Низу $\lambda M_0, \lambda M_1, \lambda M_2$, одговара карактеристика $\lambda f(x)$.

ПРАВИЛО III. – Низу $M_0, M_1\lambda, M_2\lambda^2, M_3\lambda^3, \ldots$ одговара карактеристика $f(\lambda x)$.

ПРАВИЛО IV. – Низу $M_0, M_1, 2M_2, 3M_3, 4M_4, \ldots$, одговара карактеристика $xf'(x)$; низу $M_0, M_1, 2^2M_2, 3^2M_3, 4^2M_4, \ldots$ одговара

$$x^2 f''(x) + x^3 f'(x);$$

низу $M_0, M_1, 2^3M_2, 3^3M_3, 4^3M_4, \ldots$ одговара

$$x^3 f'''(x) + (2x + x^3) f''(x) + 3x^2 f'(x), \ldots$$

ПРАВИЛО V. – Низу

$$M_0, M_0 + M_1, M_0 + M_1 + M_2, \ldots$$

одговара $\dfrac{f(x)}{1-x}$.

ПРАВИЛО VI. – Низу $N_0, N_1, N_2, \ldots$, где је

$$N_n = (n+1)M_0 + nM_1 + (n-1)M_2 + \ldots + 2M_{n-1} + M_0,$$

одговара $\dfrac{f(x)}{(1-x)^2}$.

ПРАВИЛО VII. – Низу $M_1 - M_0, M_2 - M_1, M_3 - M_2, \ldots$ одговара

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}-f(x).$$

ПРАВИЛО VIII. – Низу $L_0, L_1, L_2, \ldots$, где је

$$L_n = \alpha_0 M_n + \alpha_1 M_{n-1} + \ldots + \alpha_p M_{n-p},$$

а $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ су било какви фиксирани бројеви, одговара

$$\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \ldots + \frac{\alpha_p}{x^p}\right) f(x).$$

ПРАВИЛО IX. – Низу $M_0 \pm M_0', M_1 \pm M_1', \ldots$ одговара

$$f(x) \pm f_1(x).$$

ПРАВИЛО X. – Низу $M_0 M_0', M_1 M_1', M_2 M_2', \ldots$ одговара, као карактеристика, један или други од одређених интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{ti}) f_1\left(\frac{xe^{-ti}}{\rho}\right) dt,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{xe^{-ti}}{\rho}\right) f_1(\rho e^{ti})\, dt,$$

где је ρ произвољна константа модула мањег од полупречника холоморфности функција f и f_1 око тачке $x = 0$ (видети § 5).

ПРАВИЛО XI. – Низу $M_0^2, M_1^2, M_2^2, \ldots$ одговара, као карактеристика, интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{ti}) f_1\left(\frac{xe^{-ti}}{\rho}\right) dt,$$

који се може написати у реалном облику

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\sqrt{x}, t)\, dt,$$

где $\psi(r, \varphi)$ означава модуо од $f(\rho e^{\varphi i})$.

ПРАВИЛО XII. – Ограниченом низу $M_0^p, M_1^p, \ldots, M_m^p$ (где је p дати позитиван цео број) одговара, као карактеристика, полином $J_p(x)$ степена p дефинисан рекурентном формулом

$$(61) \qquad \begin{cases} J_k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} J_1(c_{k-1}e^{it_{k-1}})J_{k-1}\left(\dfrac{xe^{-it_{k-1}}}{c_{k-1}}\right)dt_{k-1} \\ (k = 2, 3, \ldots, p; c_i = const.) \end{cases}$$

са

$$J_0(x) = \frac{x^{m+1} - 1}{x - 1}, \qquad J_1(x) = f(x).$$

Заиста, корак по корак, налази се, с обзиром на теорему наведену у параграфу **5**,

$$J_2(x) = M_0^2 + M_1^2 x + \ldots + M_m^2 x^m,$$
$$J_3(x) = M_0^3 + M_1^3 x + \ldots + M_m^3 x^m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$$

Полином $J_p(x)$, уосталом, експлицитно се изражава у облику једног вишеструког интеграла реда p–1:

$$J_p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p-1}} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} F_{p-1} dt_1 dt_2 \ldots dt_{p-1},$$

где је

$$F_{p-1} = f(c_1 e^{it_1}) f(c_2 e^{it_2}) \ldots f(c_{k-1} e^{it_{k-1}}) f\left(\frac{xe^{-i(t_1+t_2+\ldots+t_{k-1})}}{C_1 C_2 \ldots C_{k-1}}\right).$$

ГЛАВА IV

КВАЛИТАТИВНА СПЕКТРАЛНА КАРАКТЕРИСТИКА

11. Функција

$$(73) \qquad \xi(x) = \theta_0 + \theta_1 g_1 x + \theta_2 g_2 x^2 + \ldots,$$

где је θ_k један од четири броја 1, –1, i, –i, названа *квалитативном карактеристиком* посматраног спектра, зависи само од знакова реалних и имагинарних делова елемената спектра и од ритма према коме је спектар образован. То је степени ред чији су коефицијенти *рационални бројеви* са модусима једнаким степенима броја 10 са негативним целим изложиоцима.

За ограничен низ M_k ова функција се своди на полином чији коефицијенти имају за модуле степене броја 10 са негативним целим изложиоцима. За случај неограничених низова може се доказати следећа теорема:

Квалитативна спектрална карактеристика која одговара неком непрекидно убрзаном ритму, по било ком закону, представља хипертрансцендентну целу функцију независно променљиве x, *тј. целу функцију која не задовољава ниједну диференцијалну једначину коначног реда*

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right) = 0, \tag{74}$$

алгебарску по x, y *и изводима функције* y *по* x.

Заиста, у случају таквог ритма имамо

$$h_1 < h_2 < h_3 < \ldots,$$

и стога

$$h_k = h_{k-1} + l_k,$$

где је l_k позитиван цео број, који се мења или не мења са k, али, што је битно, свакако је различит од нуле. Дакле,

$$h_k = h_1 + (l_1 + l_2 + \ldots + l_{k-1}),$$

и стога

$$P_k = h_1 + h_2 + \ldots + h_k = kh_1 + \left[(k-1)l_1 + (k-2)l_2 + \ldots + 2l_{k-2} + l_{k-1}\right].$$

Функција $\xi(x)$ је, дакле, дефинисана редом

$$\xi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots$$

чији је општи коефицијент α_n рационалан број облика

$$\alpha_n = \theta_n 10^{-nh_1 - \left[(n-1)l_1 + (n-2)l_2 + \ldots + l_{n-1}\right]}. \tag{75}$$

Како су сви бројеви l_n различити од нуле, то, ако се са l означи цео позитиван број који није већи од најмањег од бројева l_k, имаће се

$$nh_1 + (n-1)l_1 + (n-2)l_2 + \ldots + l_{n-1} \geq nh_1 + \frac{n(n-1)}{2} = l, \tag{76}$$

што значи да је $\xi(x)$ заиста цела функција.

Међутим, г. Поља[4] је доказао да цела функција дефинисана редом

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

[4] G. Polya, *Über das Anwachsen von ganzen Funktionen die einer Differentialgleichung genügen*, Vierteqahrschrift der Naturforseh. Geselschaft in Zürich, Jahrg. 51, 1916, pp. 531–545.

чији су коефицијенти рационални бројеви и за коју израз

$$\text{(77)} \qquad \frac{\log|a_n|}{n(\log n)^2}$$

не остаје ограничен кад n бесконачно расте – не може бити решење једначине (74).

Због неједнакости

$$\text{(78)} \qquad |a_n| \leq 10^{-nh_1 - \frac{n(n-1)}{2}l}$$

имамо

$$\log|a_n| \leq -\left[nh_1 - \frac{n(n-1)}{2}l\right],$$

тако да је израз (77) г. Поље за функцију $\xi(x)$ по апсолутној вредности већи од

$$\frac{h_1 + \frac{n-1}{2}l}{(\log n)^2},$$

па стога тежи ка $-\infty$ кад n бесконачно расте, што доказује теорему.

Очигледно је да теорема остаје у важности ако је убрзање ритма h_k, уместо да буде непрекидно већ од првог члана h_1, такво тек почев од неког ранга $k > 1$.

Благодарећи неједнакости (78), уобичајени поступци опште теорије целих функција, а посебно метода г. Адамара, могу се лако применити на проучавање различитих својстава функције $\xi(x)$ (начин рашћења, густина нула, границе варирања за дате интервале, итд.).

У случају *униформно убрзаног* ритма $h_k = h + ck$ квалитативна спектрална карактеристика је цела функција

$$\xi(x) = \chi(\beta x),$$

где је $\chi(x)$ трансцендента

$$\chi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \theta_n q^{n^2} x^n, \quad q = 10^{-\frac{c}{2}},$$

а β је константа $10^{-h-\frac{c}{2}}$. Ова последња функција, у случају када су знаци реалних и имагинарних делова исти за све чланове низа M_k, своди се на добро познату трансценденту из теорије елиптичких функција

$$\theta(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty} q^{n^2}x^n.$$

Као што је познато[5], то је функција *нултог рода*, а такве су и њене линеарне комбинације са полиномима. Нуле функција $\theta(x)$ расту са њиховим рангом бар истом брзином као $10^{\frac{cn}{2}}$, а исти је случај са коренима једначине $\theta(x)=R(x)$, где је R било која рационална функција. Модуо функције $\theta(x)$ расте, за позитивно x које бесконачно расте, бескрајно спорије него функција

$$e^{\frac{(\log x)^2}{c}};$$

теорија елиптичких функција доводи чак до прецизније неједнакости

$$|\theta(x)|< Ae^{\frac{(\log x)^2}{2c}},$$

где је A позитивна константа[6].

Но, како је униформно убрзани ритам сагласан са низом коефицијената сваког реда са целим коефицијентима и са полупречником конвергенције који није нула, види се да се трансцендента $\theta(x)$ појављује као квалитативна спектрална карактеристика у образовању спектара коефицијената сваког конвергентног Тејлоровог реда чији су коефицијенти позитивни реални цели бројеви, или цели негативни, или наизменично позитивни и негативни цели бројеви, као и у неким другим случајевима у којима постоји извесна правилност у погледу знакова коефицијената. Трансцендента $\chi(x)$ интервенише, уосталом, какви год да су цели коефицијенти, реални или имагинарни, и ма какви били знаци њихових реалних и имагинарних делова.

Како су коефицијенти уз степене променљиве x у $\chi(qx)$ и $\theta(qx)$ рационални бројеви, ове две функције свакако испуњавају услове теореме г. Поље, па су стога хипертрансцендентне функције.

У случају ритма са *растућим убрзањем*, квалитативна спектрална карактеристика $\xi(x)$, иначе увек цела хипертрансцендентна функција, представља степени ред са коефицијентима који опадају бар истом брзином као коефицијенти функције $\theta(x)$. За ритам са *константним убрзањем реда р*, ред $\xi(x)$ има општи коефицијент

$$\alpha_n=10^{-P(n)}\theta_n,$$

[5] J. Hadamard, *Etudes sur les proprietés des fonctions entières eten particulier d'une fonction consielérée par Biemann*, p. 210.

[6] J. Hadamard, *loc. cit.*, pp. 179 et 202.

где је $P(n)$ полином степена $p + 1$ по n који узима позитивне вредности за све позитивне целе вредности n.

Познато је да је трансцендента $\theta(x)$ која одговара случају $p = 1$ у тесној вези са θ функцијама теорије елиптичких функција: θ функције у правом смислу речи су експоненцијални редови чији је експонент полином *другог степена* у односу на ранг члана, што је околност која успоставља, на пример, познати однос између теорије ових функција и аритметичке теорије квадратних форми.

Слично томе, трансценденте $\xi(x)$ које одговарају вредностима $p = 2, 3, 4, ...$ у вези су са θ функцијама вишег реда, дефинисаним експоненцијалним редовима чији је експонент *степена вишег од* 2 у односу на ранг члана. Ове функције биле су предмет значајних истраживања г. Апела[7].

ГЛАВА V

ВЕЗА ИЗМЕЂУ НИЗА ЦЕЛИХ БРОЈЕВА И ЕЛЕМЕНАТА ЊЕГОВИХ СПЕКТАРА

12. У ономе што следи подразумеваће се да се, као што је уобичајено, ранг цифара које образују цео део неког броја броји здесна налево, а ранг децимала, као и ранг чланова низа, слева надесно.

Ако је спектрални ритам h_k дат, веза између низа целих бројева и елемената спектра, као и веза између главне спектралне карактеристике и самог спектра, могу се сажети у следећа правила.

ПРАВИЛО I. – Кад је позната главна карактеристика у облику

$$f(x) = M_0 + M_1 x + M_2 x^2 + \dots,$$

са коефицијентима чије су бројне вредности познате, за сваки цео број M_k образоваће се његова нумеричка група G_k, а помоћу ових група написаће се број

$$S = G_0, G_1, G_2, G_3 \dots, \quad \text{и}$$

овај број ће представљати спектар бројева M_k са ритмом h_k према коме су формиране групе G_k.

Тако ће се, на пример, за карактеристику

[7] P. Appell, *Sur les fonctions θ de degres superieures*, Comptes rendus Acad. sc., t. 153, 1911, pp. 584–587; 617–618.

$$f(x)=\binom{12}{0}+\binom{12}{1}x+\binom{12}{2}x^2+\ldots+\binom{12}{6}x^6$$

и за униформно растући ритам $h_k=1+k$, добити

$$G_0=1,\quad G_1=12,\quad G_2=066,\quad G_3=0220,$$

$$G_4=00495,\quad G_5=000792,\quad G_6=0000924,$$

па ће спектар бити

$$\mathrm{S}=1,\,120660\;220\;004950\;007920\;000\;924.$$

ПРАВИЛО II. – Кад је позната главна спектрална карактеристика у било ком облику који не претпоставља познавање бројних вредности коефицијената M_k, спектар бројева M_k образоваће се помоћу спектралне генератрисе $\Phi(x)$: спектар ће се тада подударити са вредношћу $S=\Phi(1)$; а ограничен низ њених децимала даће одређени одсечак спектра.

Тако ће се, за карактеристику

$$f(x)=(1+x)^9$$

10 биномних коефицијената $\binom{9}{k}$ и за униформни ритам $h=3$, имати

$$\Phi(x)=\frac{(1000+x)^9}{10^{27}},$$

а спектар ових коефицијената биће

$$S=\frac{1001^9}{10^{27}}=1{,}009\,036\,084126\,126084\,036009001.$$

ПРАВИЛО III. – Спектрална група која одговара члану M_0 подудара се целим делом нумеричке вредности $\Phi(1)$; пруга која одговара члану M_k подудара се са групом значајних цифара броја $\Phi(1)$, која почиње

$$(h_1+h_2+\ldots+h_{k-1}+1)\text{-том}$$

и завршава се $(h_1+h_2+\ldots+h_k)$-том децималом броја $\Phi(1)$; n-та линија (бројећи здесна налево) пруге која одговара члану M_k подудара се са

$$(h_1+h_2+\ldots+h_k-n+1)\text{- вом децималом}$$

броја $\Phi(1)$.

У случају униформног ритма $h_k - h$, пруга која одговара члану M_k подудара се са групом значајних цифара броја $\Phi(1)$ која почиње $[(k-1)h+1]$-вом и завршава се kh-том децималом броја $\Phi(1)$; n-ту линију ове пруге представља $(kh - n + 1)$-ва децимала.

У случају униформно убрзаног ритма $h_k = h + ck$, ова пруга почиње $\left[\frac{k(k-1)}{2}c+(k-1)h+1\right]$-вом и завршава се $\left[\frac{k(k+1)}{2}c+kh\right]$-том де-цималом броја $\Phi(1)$; његова n-та линија подудара се са $\left[\frac{k(k+1)}{2}c+kh-n+1\right]$ децималом.

На пример, у примеру у вези са правилом II, четврту пругу чини група значајних цифара броја C која почиње десетом а завршава се дванаестом децималом: то је, према томе, 126. Другу линију шесте пруге чини седамнаеста децимала броја S: то је, дакле, 8.

ПРАВИЛО IV. – Посматрајмо у низу позитивних целих бројева нумеричке интервале $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$, где је Y_k интервал који почиње целим бројем $h_1 + h_2 + \ldots + h_{k-1} + 1$ а завршава се бројем $h_1 + h_2 + \ldots + h_k$; n-та децимала броја $S = \Phi(1)$ једнака је $(h_1 + h_2 + \ldots + h_k - n + 1)$ цифри нумеричке групе G_k чији индекс k је индекс интервала Y који садржи n.

У случају униформног ритма $h_k - h$, интервал Y_k почиње целим бројем $(k-1)h + 1$ а завршава се бројем kh; n-та децимала броја S подудара се са $(kh - n + 1)$-вом цифром групе G чији индекс је индекс интервала који садржи n.

У случају униформно убрзаног ритма, интервал Y_k почиње целим бројем $\left[\frac{k(k+1)}{2}c+(k-1)h+1\right]$ а завршава се целим бројем $\left[\frac{k(k+1)}{2}c+\right.$ $\left.+kh\right]$; n-та децимала броја S подудара се са $\left[\frac{k(k+1)}{2}c+k-n+1\right]$ цифром одговарајуће групе G_k. На пример, за ритам $h_k = ck$, интервал Y_1 почиње бројем 1 и завршава се бројем c; Y_2 почиње бројем $c + 1$ а завршава се бројем $3c$; Y_3 почиње са $3c + 1$ а завршава се са $6c$; Y_4 почиње са $6c + 1$ и завршава се са $10\,c$, итд.

ПРАВИЛО V. – Првих $k + 1$ коефицијената главне спектралне карактеристике $f(x)$ одређује у потпуности цео део и низ $P_k = h_1 + h_2 + \ldots + h_k$ првих децимала броја S: овај главни део добија се кад се испишу једна уз другу одговарајућих k нумеричких група $G_1 G_2 \ldots G_k$.

У случају униформног ритма $h_k = h$, првих k + 1 коефицијената функције $f(x)$ одређује цео део и првих kh децимала.

У случају униформно убрзаног ритма $h_k = h + ck$, ови коефицијенти одређују цео део и првих $\frac{k(k+1)}{2}c + hk$ децимала.

ПРАВИЛО VI. – Цео део и низ првих P_k децимала броја S одређују у потпуности k + 1 првих коефицијената карактеристике $f(x)$.

Ако се низ s_k ових децимала подели у узастопне одсечке образоване, прва од h_1 првих децимала, друга од h_2 следећих децимала, итд., коефицијент M_p функције $f(x)$ (уколико се апстрахују знаци његовог реалног и имагинарног дела) подудара се са групом значајних цифара p-тог одсечка. Друкчије речено, овај коефицијент представља пруга спектралног одсечка која почиње $(h_1 + h_2 + \ldots + h_{p-1} + 1)$ и завршава се $(h_1 + h_2 + \ldots + h_p)$ децималом броја S.

13. Да би се могао, на основу броја S датог у својству спектра неког непознатог низа целих бројева $M_0, M_1, M_2, \ldots$, реконструисати сам тај низ – потребно је и довољно да је још познат један скуп (D) *квалитативних података* који се прикључују претходном а који допуштају да се прецизира:

1. закон спектралног ритма;

2. скуп σ_k знакова реалних делова целих бројева M_k.

Закон ритма h_k омогућује познавање, уз помоћ правила III из претходног параграфа, узастопних пруга спектра S, па самим тим и целих бројева $N_0, N_1, N_2, \ldots$ везаних за бројеве M_k релацијом

$$N_k = \theta_k M_k,$$

где је θ_k онај од четири броја 1, –1, i, $-i$ који, с обзиром на одговарајуће знаке σ_k, одговара броју M_k; бројеви M_k биће онда потпуно дефинисани овом последњом релацијом.

ГЛАВА VI

СПЕКТАР СХВАЋЕН КАО ДЕЦИМАЛНИ БРОЈ

14. Очигледно је да спектар који производи нека карактеристика $f(x)$ не може бити цео број, сем кад се $f(x)$ своди на константу; он не може имати *ограничен број децимала* уколико се $f(x)$ не своди на полином по x.

Исто тако је очигледно да, кад је карактеристика $f(x)$ *рационална* функција од x, а спектар има било какав *униформни ритам* сагласан са његовим елементима, тада је тај спектар *рационалан* број и представља, према томе, периодички децималан разломак, прост или мешовит. Кад год је $f(x)$ алгебарска функција од x, спектар са таквим ритмом је *алгебарски* број.

Али, ово није обавезно случај кад спектрални ритам није униформан: *спектар који има довољно убрзан ритам да његова дисперзија расте доста брзо са рангом спектралних одсечака – трансцендентан је број.*

Заиста, сетимо се једне познате теореме г. Мајеа из теорије трансцедентних бројева[8].

Нека је b било који фиксиран цео број; $m_1, m_2, m_3, \ldots$ реални позитивни или негативни цели бројеви који су по апсолутној вредности мањи од b и међу којима је бесконачно много различитих од нуле; $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ позитивни цели бројеви, такви да је

$$\psi_1 \leq \psi_2 \leq \psi_3 \leq \ldots$$

и да ψ_n бесконачно расте са n. Функција

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

где је

$$A_n = \frac{m_n}{b\psi_1\psi_2 \ldots \psi_n},$$

цела функција која за рационално (чак и за алгебарско) и од нуле различито x узима само трансцендентне бројне вредности.

Посматрајмо онда неки бесконачан низ $M_0, M_1, M_2, \ldots$ целих бројева *од којих ниједан нема више од* l *цифре*, и узмимо да је у претходној теореми

$$m_k = \theta_k M_k, \quad b = 10^l.$$

Функција $\varphi(x)$ подудариће се са спектралном генератрисом низа M_k која одговара ритму (са њом сагласним)

$$h_k = u_k - u_{k-1}, \quad \text{где је} \quad u_k = \psi_1\psi_2 = \psi_k l,$$

са $h_1 = \psi_1$, јер је тада

[8] E. Maillet: *Intraduction à la théorie des nombres transcedants* Paris, Gauthier-Villars, 1906, pp. 20–22.

$$A_n = \frac{\theta_n M_n}{10^{lu_n}} = \frac{\theta_n M_n}{10^{h_1+h_2+\ldots+h_n}} = \theta_n g_n M_n.$$

Спектар бројева M_k са ритмом h_k подудара се, дакле, са вредношћу $\varphi(1)$, па стога *представља трансцендентан број.* Према теорији трансцендентних бројева, ова трансцендентност проистиче из присуства бесконачно много низова нула које раздвајају значајне децимале спектра и чија ширина бесконачно расте са рангом низа. Друкчије речено: *трансцендентност спектра потиче од брзог рашћења његове дисперзије са рангом спектралних одсечака.*

За низ M_k који чине цели бројеви са само једном цифром, спектар који, на пример, има ритам $h_k = (k-1)(k-1)!$ трансцендентан је број.

Али трансцендентан карактер није повезан искључиво са спектрима низова целих бројева са ограниченим бројем цифара. То се може показати помоћу једне друге теореме о трансцендентним бројевима, која такође потиче од г. Мајеа[9] и која гласи:

Нека је b било који фиксиран цео број и нека је стављено

$$b_{k,n} = b^{b^n_{k-1,n}}, \text{ са } b_{1,n} = b^n,$$

тако да је

$$b_{2,n} = b^{b^n}, b_{3,n} = b^{b^{b^n}}, \ldots$$

Нека су затим ρ и σ два фиксирана позитивна реална цела броја и $A_0, A_1, A_2, \ldots$ низ целих бројева (реалних или имагинарних, позитивних или негативних) таквих да, за одређену вредност ρ већу од 2, за сваки индекс n важи

$$|A_n| \leq b^{\sigma}_{\rho,n}.$$

Према теореми коју имамо у виду, ред

$$\varphi(x) = A_0 w_0 + A_1 w_1 x + A_2 w_2 x^2 + \ldots,$$

где је

$$w_n = b^{-\rho n}_{p,n},$$

представља целу функцију која за рационално и од нуле различито x узима само трансцендентне вредности.

Посматрајмо онда бесконачан низ реалних или имагинарних целих бројева $M_0, M_1, M_2, \ldots$ чији број цифара са рангом може расти онолико брзо колико се хоће, и одредимо два цела позитивна броја $p > 2$ и

[9] *Loc. cit.*, стр. 105.

σ тако да број $10_{p-1,n}$ расте бар истом брзином као број цифара броја M_n и да је за сваки индекс n

$$|M_n| \leq 10^{\sigma}_{p,n}.$$

Кад се стави у претходној теореми

$$A_n = \theta_n M_n, \quad b = 10,$$

функција $f(x)$ ће се подударити са спектралном генератрисом низа која одговара ритму

$$h_k = u_k - u_{k-1} \text{ где је } u_n = 10^{\rho n}_{p,n},$$

са $h_1 = 10_{p,1}$, јер је тада

$$A_n w_n = \frac{\theta_n M_n}{10^{h_1+h_2+\ldots+h_n}} = \theta_n g_n M_n.$$

Како вредност $\varphi(1)$ представља спектар бројева са ритмом h_k, тај спектар је *трансцендентан број.*

Трансцендентност тако образованих спектара у суштини потиче од дисперзије спектра, што је ефект великог убрзања спектралног ритма; она није ни у каквој вези са бројним вредностима целих бројева који формирају пруге спектра, ни са начином њиховог рашћења са рангом.

Али поред таквих спектара, који припадају класи Лиувилових трансцендентних бројева, има бесконачно много других који такође представљају трансцендентне бројеве, а да при том имају слабу или чак нулту дисперзију и спор или штавише униформан ритам. Довољно је подсетити на спектар, са било којим униформним ритмом, низа целих једноцифрених бројева који се подударају са узастопним децималама броја e или броја π; овај спектар не припада Лиувиловој класи.

Трансцендентност спектра може, дакле, потицати: 1. само од његове дисперзије; 2. од састава спектралних пруга; 3. истовремено од његове дисперзије и од састава његових пруга.

ДРУГИ ДЕО

ЈЕДАН НАЧИН ДОВОЂЕЊА У ВЕЗУ ФУНКЦИЈА ЈЕДНЕ ПРОМЕНЉИВЕ И НИЗОВА ЦЕЛИХ БРОЈЕВА

I. – Трансформације $\Delta\left[f\right]$ и функције (E)

15. Међу различитим могућим начинима успостављања везе између неке функције $f(z)$ једне променљиве и неког низа целих бројева, један би се састојао у успостављању извесне кореспонденције између функције $f(x)$ и једног степеног реда

$$F(z) = M_0 + M_1 z + M_2 z^2 + \ldots,$$

чији су коефицијенти *цели бројеви*, тако да је од два члана ове кореспонденције, функција $f(z)$ и низа M_k, један одређен кад је други дат.

Да бисмо скратили изражавање, потенцијалне редове са целим коефицијентима чији полупречник конвергенције није нула назваћемо *редовима* (E). Функције једне променљиве које се могу приказати таквим редовима биће назване *функцијама* (E). А за полиноме са целим коефицијентима рећи ћемо да су *полиноми* (E).

Међу различитим начинима *ефективне* реализације кореспонденције између функција $f(z)$ и редова (E), један се састоји у *трансформисању*, познатим скупом операција, функције $f(z)$ у ред (E), при чему извршена трансформација успоставља одређену узајамну кореспонденцију између елемената који одређују функцију $f(z)$ и низа коефицијената реда (E).

Назваћемо онда *трансформацијом* $\Delta\left[f\right]$ *сагласном са посматраном функцијом* $f(z)$ сваку трансформацију која се изводи помоћу ограниченог или неограниченог скупа операција и која, примењена на $f(z)$, испуњава поменуте услове.

На пример, трансформација

$$\Delta\left[f\right] = f(-i\log z)$$

сагласна је са функцијом

$$f(z) = \frac{e^{zi}}{(1-e^{zi})^2},$$

која ову претвара у ред (E)

$$z - 2z^2 - 3iz^3 + 4z^2 + \ldots;$$

трансформација

$$\Delta\left[f\right] = \int_0^\infty e^{-t} f(zt)dt$$

сагласна је са функцијом $f(z) = e^{mz}$ (где је m цео број), коју она трансформише у ред (E)

$$1 + mz + m^2z^2 + m^3z^3 + \ldots;$$

трансформација

$$\Delta\left[f\right] = z^2 f''(z) + 2zf'(z)$$

у сагласности је са функцијом $f(z)$ дефинисаном потенцијалним редом облика

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{M_n}{n(n+1)} z^n,$$

(при чему су M_n цели бројеви, константни или промењиви са n), коју она претвара у ред

$$M_0 + M_1 z + M_2 z^2 + \ldots;$$

трансформација

$$\Delta\left[f\right] = \gamma_1 f(\gamma_2 z),$$

где су γ_1 и γ_2 два погодно одређена цела броја, сагласна су са сваком *алгебарском* функцијом која се може развити у степени ред чији су коефицијенти рационални бројеви, итд.

II. – Трансформације $\Delta\left[f\right]$ повезане са одређеним категоријама функција

16. Операције којима се изводи нека трансформација $\Delta\left[f\right]$ бесконачно су разноврсне, чак и за једну посебну функцију $f(z)$. При свем том, одређена трансформација не везује се искључиво за једну посебну функцију: уопште, *једна трансформација* $\Delta\left[f\right]$ *сагласна је са једном више или мање пространом категоријом функција.*

Тако, на пример, ако је функција дефинисана у делу свог домена егзистенције развитком

(81) $$f(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots,$$

(где се може, сменом независно промењљивих која чини део трансформације $\Delta[f]$, заменити u са z), имамо следећа правила:

ПРАВИЛО I. – Трансформација облика

$$\Delta[f] = Af(Bz) \quad (A = \text{const};\ B = \text{const})$$

сагласна је са $f(z)$ кад год је испуњен *један* од следећих услова:

1. a_n има коначан број децимала; тада се може узети да је $B = 1$, $A = 10^g$, где је g позитиван цео број који представља горњу границу броја децимала бројева a_n;

2. a_n је количник два узајамно проста цела броја, при чему именилац β_n садржи само просте факторе који не расту бесконачно са n, и испуњавају услов да $\sqrt[n]{|\beta_n|}$ остаје коначно кад n бесконачно расте. Разлагање броја β_n на просте факторе има само ограничен број фактора $p_1, p_2, \ldots, p_h$, па, уколико се са N означи фиксирани број такав да је $\sqrt[n]{|\beta_n|} < N$, може се за сваки фактор p_i одредити такав цео број λ_i да буде $p_i^{\lambda_i} > N$, и потом ставити

$$B = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_h^{\lambda_h};$$

3. a_n је *рационалан* број, а $f(x)$ *алгебарска* функција (специјалан случај резултата 2, према теореми Ајзенштајна);

4. a_n је *периодични* децимални разломак чији се број α цифара непериодичног дела и број β цифара периода не мењају са n; тада се може ставити

$$B = 1, \quad A = 10^\beta 9_\alpha, \quad 9_\alpha = \overbrace{99\ldots9}^{\alpha},$$

(последица елементарног става о периодичним децималним разломцима претвореним у обичне разломке).

ПРАВИЛО II. – Кад год је a_n p-ти корен неког целог броја (p цео позитиван број), функција $f(x)$ допушта трансформацију

(84) $$\Delta[f] = \partial_p(z),$$

где је $\partial_k(z)$ функција од z дефинисана рекурентном формулом (61) са

$$\partial_0(z) = \frac{1}{1-z}, \quad \partial_1(z) = f(z),$$

(уз очигледна ограничења која обухвата формула (61) за неограничене низове M_k).

ПРАВИЛО III. – У више партикуларном случају када је a_n квадратни корен неког целог броја, функција $f(z)$ допушта трансформацију

$$(85) \qquad \Delta[f] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{ti}) f\left(\frac{ze^{-ti}}{\rho}\right) dt \qquad (\rho = \text{const.})$$

(видети § 5).

ПРАВИЛО IV. – Сваки полином $f(z)$ чији су коефицијенти алгебарски бројеви допушта трансформацију $\Delta[f]$ која се изводи коначним бројем алгебарских операција и смена.

ПРАВИЛО V. – Кад је a_n облика $M_n\varphi_n$, где је M_n константан или са n променљиви цео број, а φ_n је фактор који није цео, мења се са n и такав је да ред

$$\varphi(z) = \frac{1}{\varphi_0} + \frac{z}{\varphi_1} + \frac{z^2}{\varphi_2} + \dots$$

има позитиван полупречник конвергенције, функција $f(z)$ допушта трансформацију

$$(87) \qquad \Delta[f] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(ce^{ti})\, \varphi\left(\frac{ze^{-ti}}{c}\right) dt \qquad (c = \text{const.}),$$

као и ону која се добија кад се у g пермутују симболи f и φ (последица теореме наведене у параграфу 5).

Уосталом, у мноштву случајева ове врсте функција $f(z)$ допушта такође друге трансформације $\Delta[f]$ које могу узимати веома разноврсне облике. Тако, на пример:

1. за $a_n = M^{\frac{n^2}{2}}$ (са фиксираним целим бројем M), где се може написати

$$a_n = M_n\varphi_n, \text{ са } M_n = M^{\frac{n(n\pm1)}{2}}, \varphi_n = M^{\mp\frac{n}{2}},$$

имамо, у случају кад је $f(z)$ полином,

(88) $$\Delta[f] = f(z\sqrt{M}) \text{ и } \Delta[f] = f\left(\frac{z}{\sqrt{M}}\right);$$

2. за $\varphi_n = \dfrac{1}{\alpha + \beta n}$ (где су α и β константе), једна трансформација $\Delta[f]$ врши се помоћу израза

$$z^{1-\beta}\frac{d}{dz}\left[z^{\beta} f(z^{\alpha})\right],$$

пошто се у њему z замени са $z^{\frac{1}{\alpha}}$;

3. за $\varphi_n = n^{-p}$ (где је p фиксиран позитиван број), добијамо

(90) $$\Delta[f] = \lambda_p(z),$$

где су функције $f_k(z)$ дефинисане рекурентном формулом

$$\lambda_k(z) = z\frac{d\lambda_{k-1}(z)}{dz}, \quad \lambda_1(z) = z f'(z);$$

4. за

$$\varphi_n = \frac{1}{n(n+1)\ldots(n+p)},$$

добија се

(91) $$\Delta[f] = \frac{1}{z^{p-1}}\frac{d}{dz}\mu_p'(z),$$

где су функције $\mu_k(z)$ дефинисане рекурентном формулом

$$\mu_k(z) = z^2\frac{d\mu_{k-1}(z)}{dz}, \quad \mu_1(z) = z^2 f'(z).$$

ПРАВИЛО VI. – Када је, за фактор φ_n из правила V, његова реципрочна вредност дефинисана интегралом облика

$$\int_a^b uv^n dt,$$

(где су u и v функције од t), тада функција $f(z)$ допушта трансформацију

$$(92)\qquad \Delta\left[f\right]=\int_a^b uf(vz)\,dt.$$

Тако, за $\varphi_n=(\alpha+\beta n)^{\lambda}(\alpha>0,\beta>0,|\lambda|>1)$ формула

$$\frac{1}{n^{\lambda}}=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_a^{\infty}t^{\lambda-1}f(ze^{-\beta t})\,dt$$

даје

$$(93)\qquad \Delta\left[f\right]=\frac{e^{-\alpha}}{\Gamma(\lambda)}\int_a^{\infty}t^{\lambda-1}f(ze^{-\beta t})\,dt;$$

за $\varphi_n=\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}$, формула

$$(94)\qquad 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n=\int_a^{\infty}t^n fe^{-t}dt$$

даје

$$(95)\qquad \Delta\left[f\right]=\int_a^{\infty}e^{-t}f(zt)\,dt.$$

Ова последња трансформација сагласна је, на пример, са сваком функцијом $f(z)$ облика

$$e^{\varphi(z)},\quad \sin^m\varphi(z),\quad \cos^m\varphi(z),\quad e^{mz}\varphi(z),$$

где је $\varphi(z)$ нека функција (E) а m цео позитиван број.

ПРАВИЛО VII. – Када је чинилац φ_n из правила V облика

$$\varphi_n=\frac{1}{(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n)^p},\qquad (p \text{ позитиван цео број})$$

функција $f(z)$ допушта трансформацију (са ограничењем у погледу конвергенције)

$$(96)\qquad \Delta\left[f\right]=\int_0^{\infty}\ldots\int_a^{\infty}e^{-(t_1+t_2+\ldots+t_p)}f(zt_1t_2\ldots t_p)\,dt_1dt_2\ldots dt_p$$

[последица формуле (94)]. Такав је, на пример, случај Беселове трансценденте

$$f(z)=\frac{x}{(1)^2}+\frac{2x^2}{(1\cdot 2)^2}+\frac{3x^2}{(1\cdot 2\cdot 3)^2}+\dots$$

која одговара вредности $p=2$.

17. Следећа правила олакшавају тражење једне овакве трансформације $\Delta[f]$ у великом броју случајева.

ПРАВИЛО VIII. – Нека је функција $w(z)$ дефинисана помоћу $p+1$ релација

$$(97)\qquad w(z)=w_1(u_1), u_1=w_2(u_2),\dots,u_{p-1}=w_p(u_p),\quad u_p=z,$$

где су функције w_k дате; нека је $\delta_k[f]$ било каква операција која, примењена на *произвољан* потенцијални ред из неке категорије (*f*) редова

$$(98)\qquad f(z)=\lambda_0+\lambda_1 z+\lambda_2 z^2+\dots$$

претвара ову формално у ред

$$w_k(\lambda_0)+w_k(\lambda_1)z+w_k(\lambda_2)z^2+\dots$$

Кад год је могуће да се изабере функција $w(z)$ тако да

$$w(a_0)+w(a_1)z+w(a_2)z^2+\dots$$

буде ред (*E*), функција $f(z)$ која припада категорији (*f*) допушта трансформацију која се добија суперпозицијом операција $\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_p$ изведених над $f(z)$ у поретку

$$(99)\qquad \Delta[f]=\delta_p\delta_{p-1}\dots\delta_1[f].$$

ПРАВИЛО IX. – Нека је $\rho_0,\rho_1,\rho_2,\dots$ низ чији чланови варирају са *n* и од којих сваки представља производ *p* фактора

$$\rho_n=\rho_{n_1}\rho_{n_2}\dots\rho_{n_p}$$

(где се *p* не мења са *n*); нека је $\delta_k[f]$ било каква операција која, кад се изведе над произвољним редом (98) из категорије (*f*), овај формално трансформише у ред

$$\rho_{0k}\lambda_0+\rho_{1k}\lambda_1 z+\rho_{2k}\lambda_2 z^2+\dots$$

Кад год је могуће изабрати низ ρ_k тако да

$$\rho_0 a_0+\rho_1 a_1 z+\rho_2 a_2 z^2+\dots$$

буде ред (E), функција $f(z)$ допушта трансформацију $\Delta[f]$ која се добија суперпозицијом операција $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$ изведених над $f(z)$ произвољним редом.

На пример, за полином чији је општи коефицијент облика

$$a_n = \frac{M^{\frac{n^2}{2}}}{n} \qquad (M \text{ фиксирани цео број}),$$

имамо

$$\rho_n = \rho_{n_1}\rho_{n_2}, \quad \rho_{n_1} = M^{\frac{n^2}{2}}, \quad \rho_n = n.$$

Првом фактору одговара

$$\delta_1[f] = f(z\sqrt{M}),$$

а другом

$$\delta_2[f] = zf'(z);$$

полином $f(z)$, према томе, допушта трансформацију

$$\Delta[f] = zf'(z\sqrt{M})\sqrt{M}.$$

Очигледно је, уосталом, да се помоћу неке трансформације $\Delta[f]$ сагласне са датом функцијом може образовати *бесконачно мнōго* других које, изведене над резултатом трансформације $\Delta[f]$, претварају овај у неки нов ред (E) (додавање произвољног реда (E); множење јединим таквим редом; поновљено диференцирање произвољан број пута; операција $\psi(\Delta[f])$, где је ψ произвољан ред (E), итд.)

III. – Неколико општих начина успостављања везе између функција једне променљиве и низова целих бројева

18. Кад је дата нека функција $f(z)$ могуће је да се са њом доведе у везу једна функција (E) која садржи све елементе за потпуно одређивање извесних специфичних особина функција $f(x)$ (сингуларитета, нула, итд.) у датом кругу у z-равни. На тај начин реализује се извесна кореспонденција између таквих особености (које су често оно најважније што треба знати о датој функцији) и неког низа целих бројева.

Нека је, тако, $z = \alpha$ обична тачка функције $f(z)$ и нека је

$$(100) \qquad f(z) = a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \ldots,$$

њен развој у околини те тачке. Нека је λ произвољан позитиван реалан број; формирајмо функцију

$$(101)\qquad f_1(z) = M_0 + M_1 z + M_2 z^2 + \dots,$$

где M_n цео део броја $a_n\lambda^n$ (реалног или имагинарног). Разлика

$$(102)\qquad f(\alpha + \lambda z) - f_1(z)$$

је функција

$$V(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots,$$

где је α_n број који има за цео део нулу и децимални део исти као $a_n\lambda^n$. Функција $V(z)$ је холоморфна у кругу који има центар у почетку и полупречник који *није мањи* од 1. Одатле излази да функције $f(\alpha + \lambda z)$ и $f_1(z)$ имају исте сингуларитете у било ком кругу C_0 који има центар у почетку и полупречник ρ мањи од 1.

С друге стране, сингуларитети $z = x_i$ функције $f(\alpha + \lambda z)$ у унутрашњости круга C_0 су вредности $\dfrac{z_i - \alpha}{\lambda}$, где су z_i афикси сингуларитета функција $f(z)$ у унутрашњости круга C_α који има центар у тачки $z = \alpha$ и полупречник $r = \lambda\rho$. Ово повлачи следећу чињеницу, на коју је већ скренуо пажњу г. Борел[10]:

За одређивање сингуларитета функције $f(z)$ у унутрашњости било ког круга описаног око неке обичне тачке те функције као центра, може се функција $f(z)$ заменити функцијом (E) дефинисаном са (101).

Тако се добија кореспонденција између функције f(z) *и једног низа целих бројева који садржи све елементе за потпуно одређивање сингуларитета функције* f(z) *у датом кругу чији је центар нека обична тачка те функције.*

Нуле функције $f(z)$ у унутрашњости круга C_α смештеног у унутрашњости неке области D z-равни у којој је функција мероморфна подударају се са половима садржаним у C_α функције

$$\frac{1}{f(z)} = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots,$$

где је, према познатој формули,

[10] E. Borel, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, 1903, pp. 35–36.

$$A_n = A_1 \frac{(-1)^n}{a_0^{n+1}} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \dots & \dots & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & \dots & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Према томе: *функција* (100), *пошто се у њој коефицијенти* a_n *замене коефицијентима* A_n, *успоставља кореспонденцију између* f(z) *и једног низа целих бројева која садржи све елементе за потпуно одређивање нула функције* f(z) *у кругу* C_α.

Исти поступак, примењен на неке друге комбинације функције $f(z)$, успоставио би овакву једну кореспонденцију између $f(z)$ и низова целих бројева који одређују оне вредности z за које $f(z)$ узима дату вредност, достиже своје максимуме или минимуме, итд.

19. Могуће је, и то на различите начине, заменити $f(z)$ функцијом $f_1(z)$ која се, у неком кругу C_α разликује онолико мало колико се хоће од $f(z)$ и за коју се може успоставити извесна кореспонденција између функције и неког низа целих бројева.

Наиме, ако се са $f_1(z)$ означи функција која је у околини тачке $z = 0$ дефинисана редом

$$b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots,$$

чији је коефицијент b_n једнак броју $a_n \lambda^n$ из претходног параграфа, пошто су претходно у том броју занемарене све децимале иза g-те, тада је разлика $f(\alpha + \lambda z) - f_1(z)$ функција, чији модуо за све вредности z садржане у кругу C_0 остаје стално мања од

$$\frac{10^{-g}}{|1-2|}.$$

За вредности z садржане у унутрашњости круга ... чији је центар у тачки C_α а полупречник мањи од полупречника круга холоморфности функције $f(z)$ око тачке $z = \alpha$, ова функција се од $f_1(z)$ разликује за количину чији је модуо мањи од броја

$$\frac{10^{-g} \lambda}{|\alpha + \lambda - z|},$$

који се може, са погодно изабраним λ, учинити мањим од унапред датог броја ε.

Но, функција $f_1(z)$ дозвољава трансформацију

$$\Delta\left[f_1\right] = 10^g f_1(z),$$

која, тако, успоставља кореспонденцију између низа целих бројева (образованих од цифара које чине цео део и g првих децимала бројева $a_n\lambda^n$*) и једне функције која се, у датом кругу* C_α, *од* f(z) *разликује онолико мало колико се хоће.*

Постоји, уосталом, мноштво других функција $f_1(z)$ које, придружене функцији $f(z)$, имају овакво својство. Међу тим функцијама налазе се и неки *полиноми*, што омогућује да се низ целих бројева који се доводи у везу са $f(z)$ *сведе на ограничен низ.*

Да бисмо то показали, посматрајмо функцију

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

са полупречником холоморфности r, и нека је $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ низ *рационалних* бројева такав да модул броја $\lambda_n a_n$ униформно тежи ка нули кад се n бесконачно увећава и да ред

$$H(z) = \frac{1}{|\lambda_0|} + \frac{z}{|\lambda_1|} + \frac{z^2}{|\lambda_2|} + \ldots$$

има позитиван полупречник конвергенције ρ.

Нека је c било који позитиван *рационалан* реалан број већи од највећег модула функције $H(z)$ за z садржано у кругу C, чији је центар у почетку а полупречник му није већи ни од r ни од ρ.

Означимо са T_n цео део броја

$$t_n = 10^q c\lambda_n a_n,$$

(где је q дати позитивни број) и ставимо потом

$$\frac{T_n}{10^q c\lambda_n} = B_n, \quad a_n - B_n = \delta_n;$$

имаће се

$$|10^q c\lambda_n \delta_n| = |t_n - T_n| < 1,$$

што значи да функција

$$\delta_0 + \delta_1 z + \delta_2 z^2 + \ldots,$$

очигледно холоморфна у кругу C, узима за сваку вредност из C модуо који није већи од

$$\frac{1}{10^q c}\sum_0^\infty \frac{R^n}{|\lambda_n|} < \frac{1}{10^q} \, (R = |z|).$$

Према томе, стављајући

$$B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots = L(z),$$

имаћемо за сваку вредност z у кругу C

(103) $$|f(z) - L(z)| < 10^{-q}.$$

Како, међутим, модуо низа $\lambda_n a_n$ униформно тежи ка нули, број t_n ће бити мањи од 1 почев од неког коначног ранга $n = p$, тако да ће се имати

$$T_{p+1} = 0, T_{p+2} = 0, T_{p+3} = 0, \ldots$$

и одатле

$$B_{p+1} = 0, B_{p+2} = 0, B_{p+3} = 0, \ldots$$

Функција $L(z)$своди се, дакле, на полином $L_p(z)$ степена $p = q + h$, где h варира у зависности од изабраног низа λ_n, али се не мења са q. Како су коефицијенти B_k полинома рационални, може се написати

$$L_p(z) = \frac{P_p(z)}{N},$$

где је $P_p(z)$ полином са целим коефицијентима а N је позитиван цео број, па ће се за сваку вредност z садржану у C имати

(104) $$\left| f(z) - \frac{P_p(z)}{N} \right| < 10^{-q}.$$

Премештајући почетак у произвољну обичну тачку функције $f(z)$, долази се тако до следећег резултата:

Свака функција f(z) *може се у околини било које од својих обичних тачака приказати са оноликом приближношћу која се жели, количником неког полинома* (E) *и неког целог броја.*

Такво приказивање може се, уосталом, постићи на бесконачно много различитих начина, у зависности од избора низа λ_n. Оно успоставља извесну кореспонденцију између једног *ограниченог* низа целих бројева и једне функције која се од $f(z)$ разликује онолико мало колико се хоће.

Кад је $f(z)$ *цела* функција од z, полупречник круга C може се бесконачно увећавати: довољно је са λ_n узети низ рационалних бројева, такав да оба израза

(105) $$\frac{1}{\sqrt[n]{|\lambda_n a_n|}} \quad \text{и} \quad |\lambda_n a_n|$$

теже униформно нули кад се n бесконачно увећава.

Тако ће се, у случају функције $f(z)$ *коначно̄г рода* γ, узети са λ_n било који позитиван рационалан број који није већи од $(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n)^{\frac{1}{\gamma+1}}$, стога што производ једног таквог броја и модула броја $|a_n|$ униформно тежи нули са $\frac{1}{n}$, према познатој Поенкареовој теореми.

За функције *нул̄то̄г рода* може се узети

$$\lambda_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n,$$

при чему је c било који рационалан позитиван број који није мањи од e^R, где R означава полупречник круга C.

IV. – Узгредно разматрање редова (E)

20. Потенцијални редови са целим коефицијентима, у претходном излагању названи *редовима* (E), користе се у великом броју питања математичке анализе и теорије бројева. Они су такође били предмет значајних радова; на неколико општих резултата из тих радова биће указано у ономе што следи.

Г. Борел је показао да, ако један ред (E) представља неку функцију униформну и регуларну у кругу $|z|\leq 1$, уз изузетак ограниченог броја полова, функција $f(z)$ је *рационална*. Ред (E), дакле, не може представљати *т̄рансценден̄тну мероморфну* функцију[11].

Г. Поља је, уопштавајући теорему г. Борела, показао да, ако неки ред (E) представља функцију која је у кругу $|z|\leq R>1$ униформна и регуларна, уз изузетак ограниченог броја сингуларитета било какве природе, та функција мора бити *рационална*. Ова теорема г. Поље не претпоставља, дакле, ништа о природи ових сингуларитета[12].

Полупречник конвергенције реда (E) очигледно *није већи од* 1. С тим у вези, г. Фату је дошао до следећег резултата[13]:

---

[11] E. Borel, *Sur une application d'un théorème de M. Hadamard*, Bull. des Sciences math, 2e série, *t*. XVIII, pp. 22–27; *Leçons sur les fonctions méromorphes*, 1903, pp. 32–35

[12] G. Pólya, *Neber Potenzreichen mit gauzzahligen Koefficienten*, Math. Annalen, Band LXXVII, 4.H., pp. 497–523.

[13] Fatou, *Sur les séries entières à coefficients entières*, C.R. Acad. sc., t. CXXXVIII, pp. 342–344.

Кад год је полупречник конвергенције реда (E) *једнак* 1, *ред не може представљати мероморфну функцију од* z, *сем уколико је она рационална функција облика*

$$(106) \qquad \frac{P(x)}{(1-x^n)^m},$$

где је P(x) *полином са целим коефицијентима, а* m *и* n *су позитивни цели бројеви.*

Г. Фату је исто тако показао да, уколико се ставе на страну функције облика (106), *ред* (*E*) *са полупречником конвергенције једнаким* 1 *не може бити регуларан интеграл ниједне линеарне диференцијалне једначине*. Од ових редова, они чија је аналитичка природа сада позната (а на такве се наилази у теорији елиптичких функција и у применама анализе на теорију бројева) имају, уосталом, круг конвергенције као засек (loc. cit.).

Најзад, према једној теореми г. Фатуа, *алгебарска функција која није рационална а представљена је редом* (E) *има бар једну тачку грањања у унутрашњости круга чији је полупречник* 1 (loc. cit.).

Додајмо још да су на редове (*E*) проширени елементарни закони који важе за целе бројеве и који су били примењени у другим областима и на више начина уопштени: рачунање целим бројевима по модулу; рачунање полиномима са целим коефицијентима; рачунање оваквим полиномима по модулу; рачунање по два модула, од којих је један број а други полином; рачунање имагинарним целим бројевима, кватернионима, Кронекеровим таблицама; рачунање у домену рационалности; рачунање алгебарским целим бројевима, целим бројевима из домена, итд.[14]

V. – Различити облици односа између функције $f(z)$ и њеног трансформата (E)

21. Трансформација $\Delta[f]$, изведена над функцијом $f(z)$, успоставља, уопште, извесну релацију између $f(z)$ и реда (E)

$$(107) \qquad F(z) = M_0 + M_1 z + M_2 z^2 + \dots,$$

[14] E. Cahen, *Sur les séries integro-entières*, C. R. Acad. sc., t. CLII, 1911, pp. 124–127.

њеног трансформата преко $\Delta[f]$. Ова релација, у зависности од скупа операција којима се изводи трансформација $\Delta[f]$, може добити различите облике, као што је, на пример:

1. *релација у коначном облику*, каква је релација

$$Af(Mz) = F(z) \qquad (A \text{ и } M \text{ фиксирани цели бројеви}),$$

која важи за сваку алгебарску функцију чији су коефицијенти a_n рационални бројеви;

2. *диференцијална једначина*, каква је једначина

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + Af = F(z) \qquad (A = \text{const.}),$$

која важи за сваку функцију $f(z)$ чији су коефицијенти a_n везани рекурентним законом

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + Aa_n - M_n = 0,$$

где је цео M_n број фиксиран или се мења са n;

3. *интегрална релација*, каква је

$$\int_0^\infty e^{-t} f(zt)dt = F(z),$$

која важи за сваку функцију чији су коефицијенти a_n облика $\frac{M_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}$, или релација

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t_1+t_2)} f(zt_1 t_2)dt_1 dt_2 = F(z),$$

која важи за функције $f(z)$ са коефицијентима a_n облика $\frac{M_n}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)^2}$;

4. *мешовита релација*, каква је релација

$$z\sqrt{M} f'(z\sqrt{M}) = F(z),$$

која важи за полиноме $f(z)$ са коефицијентом $\frac{M^{\frac{n^2}{2}}}{n}$, где је M фиксиран цео број, или релације до којих доводе правила из параграфа **17**, итд.

Исто тако, трансформација $\Delta\left[f\right]$ изведена над

(108) $$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

успоставља у општем случају једну релацију између коефицијената a_n и коефицијената M_n трансформата (107). Ова релација, коју ћемо симболички означити са

(109) $$\Omega\left[a_n, M_n\right] = 0,$$

може бити изражена у коначном облику, који a_n даје експлицитно или имплицитно у функцији од n и од M_n, или једном рекурентном релацијом, која одређује a_n помоћу n, M_n и низа неких од претходних коефицијената $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots$. Тако, трансформација

$$\Delta\left[f\right] = Af(Bz), \ (A \text{ и } B \text{ константе}),$$

успоставља линеарну релацију

$$AB^n a_n - M_n = 0;$$

трансформација

$$\Delta[f] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\operatorname{mod} f(ze^{ti})]^2 \, dt$$

изражава се квадратном релацијом;

$$a_n^2 - M_n = 0;$$

трансформација

$$\Delta[f] = f''(z) + f(z)$$

повлачи рекурентну релацију

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n - M_n = 0.$$

Има, уосталом, и *изузетних* трансформација $\Delta[f]$, које, примењене на произвољну функцију, *не повлаче никакву релацију између* f *и* F, у том смислу да је трансформат $F(z)$ независан од функције $f(z)$ на коју се трансформација $f(z)$ примењује. Зна се, на пример, да постоје одређени интеграли облика

(110) $$\int_a^b uv^n dt,$$

(где су u и v одређене функције од t) који се анулирају за позитивне целе вредности u. Такви би били интеграли на које је скренуо пажњу Коши[15]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{cti}}{(a-ti)^n}\, dt \qquad (a>0,\ c>0),$$

који се анулирају за $n = 1, 2, 3,\ldots$, као и интеграли ове врсте на које је указао Стилтјес[16], а од којих је један интеграл

$$\int_0^{\infty} t^{n+1} e^{-t} \cos t\, dt.$$

Трансформација

$$\Delta[f] = \int_a^b \left[\frac{u_1 v_1 z}{1 - c_1 z} - uf(vz) \right] dz, \tag{111}$$

где су u, v, a и b елементи неког интеграла (110), а u_1, v_1, a, b елементи интеграла облика (110) чија је вредност цео број λ_n, производи функцију дефинисану редом $\Sigma \lambda_n z^n$ који није ни у каквом односу са функцијом $f(z)$, која, дакле, не оставља никакав специфичан траг у трансформацији (E).

[15] *Ouvrage*, 2ᵉ série, t. VII, p. 182.

[16] *Correspondances avec Hermite*, lettres 328 et 385, Paris, Gauthier - Villars.

ТРЕЋИ ДЕО

СПЕКТРИ ФУНКЦИЈА ЈЕДНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

I. – СПЕКТРИ ФУНКЦИЈЕ

22. Могућност успостављања одређене кореспонденције између неке функције $f(z)$ и неког низа целих бројева доводи врло природно до *спектара функција.*

Кад су дате функције $f(z)$ и са њом сагласна трансформација $\Delta[f]$, *спектром функције* f(z) *везаним за ову трансформацију* назваћемо било који спектар низа целих бројева M_n са којима се $f(z)$ налази у кореспонденцији успостављеној посматраном трансформацијом $\Delta[f]$.

Из ове дефиниције непосредно излази следеће правило.

ПРАВИЛО. – *Генератриса* F(z) *спектра и сам спектар* S = F(1) *дате функције* f *за дату трансформацију образују се према правилима из параграфа* **5**, *под условом да се у њима главна спектрална карактеристика замени редом* (E)

$$F(z) = M_0 + M_1 z + M_2 z^2 + \dots,$$

у који Δ[f] *трансформише функцију* f(z).

Нумеричка вредност S која даје спектар добија се, уопште, као вредност једног одређеног интеграла, једноструког или вишеструког, а у извесним случајевима чак експлицитно у коначном облику, као што је било показано у параграфима 5 и 7.

Подсетимо на улогу, показану у тим параграфима, коју играју целе хипертрансцендентне функције

$$\chi(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \theta_n q^{n^2+\lambda n} z^n \quad (|q|<1;\ \lambda>0), \tag{112}$$

а посебно помоћна елиптична функција

$$(113)\qquad \theta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n q^{n^2} z^n,$$

у формирању спектралних генератриса и спектара за *било који убрзани спектрални* ритам. Подсетимо такође на чињеницу да, према оном што претходи, свака функција $f(z)$ има спектре са униформно убрзаним ритмом, као и спектре са растућим убрзањем.

Први пример. – Генератриса спектра функције

$$f(z) = \frac{5z}{1+z},$$

која одговара трансформацији

$$\Delta[f] = f(-z),$$

и има униформни ритам $h_k = 1$ је

$$\Phi(z) = f\left(-\frac{z}{10}\right) = \frac{5}{10+z},$$

а спектар је

$$S = \frac{5}{11} = 0,45555\ldots$$

Други пример. – Генератриса спектра функције e^z која одговара трансформацији

$$\Delta[f] = \int_0^{\infty} e^{-t} f(zt)\, dt$$

и има униформан ритам $h_k = 1$ је

$$\Phi(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} f\left(\frac{zt}{10}\right) dt = \int_0^{\infty} e^{\left(\frac{z}{10}-1\right)} dt,$$

а сам спектар ће бити

$$S = \int_0^{\infty} e^{-0,9t} dt = 1,11111\ldots$$

Трећи пример. – За функцију

$$f(z) = 17\log(1-zi)$$

и за

$$\Delta[f] = zif'(-zi)$$

спектар са униформним ритмом $h_k = 2$ има за генератрису

$$\Phi(z) = \frac{17z}{100 - z},$$

а за нумеричку вредност

$$S = \frac{17}{99} = 0{,}17070707\ldots$$

Четврти пример. – Функција

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

са коефицијентима a_n дефинисанима рекурентном релацијом

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + \lambda a_n - M_n = 0,$$

($\lambda = \text{const.}$, M_n = цео број, константан или промењлив са n) допушта трансформацију

$$\Delta[f] = f'(z) + \lambda f(z). \tag{114}$$

Одговарајући спектар функција $f(z)$ даје једна од следећих бројних вредности:

a. спектар униформног ритма $h_k = h$, са

$$S = F(10^{-h}),$$

где $F(z)$ означава десну страну једнакости (114);

b. спектар који има униформно убрзани ритам $h_k = h + ck$, са

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(ce^{ct})\chi\left(\frac{e^{-ti}}{\rho}\right)dt,$$

где $\chi(z)$ означва неку трансценденту (112) а ρ произвољну константу чији је модуо мањи од полупречника холоморфности функције $f(z)$, око тачке $z = 0$. У случају реалних и позитивних M_n, трансценденту χ треба заменити са (113).

Пети пример. – За функције дефинисане експоненцијалним редовима

$$f(z) = A_0 + A_1 e^{\alpha z} + A_2 e^{2\alpha z} + \ldots,$$

где су A_n цели позитивни бројеви, а за трансформацију (очигледно сагласну са низом A_n)

$$\Delta[f] = f\left(\frac{\log z}{\lambda}\right), \text{ где је } \lambda = \alpha \log e,$$

(при чему је основа логаритма 10), спектар са униформно убрзаним ритмом $h_k = h + ck$ је нумеричка вредност

$$S = \varphi\left(-\frac{h+\frac{c}{2}}{\lambda}\right), \tag{115}$$

где $\varphi(z)$ означава функцију

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n q^{n^2} e^{n\alpha z}, \quad q = 10^{-\frac{c}{2}}. \tag{116}$$

Када број цифара броја A_n не прелази један фиксиран цео број λ, функција $f(z)$ има спектре са униформним ритмом $h_k = h \geq l$ и такав један спектар даје нумеричка вредност

$$S = f\left(-\frac{h}{\lambda}\right). \tag{117}$$

Могуће је, уосталом, такође изразити спектар (115) помоћу функције $f(z)$, у облику одређеног интеграла, као у случају степених редова.

23. Као што је у параграфу **19** показано, увек је могуће да се (и то на различите начине) аналитичка функција $f(z)$ у близини неке своје обичне тачке прикаже са оном приближношћу која се жели једном функцијом (E).

Приближним спектром функције $f(z)$ у кругу C у коме функција остаје холоморфнаназваћемо спектар било које од функција (E) које приближно представљају $f(z)$ у C. *Таквом једном приближном спектру додељује се број* ε *који показује степен приближности*, тј. такав је да је разлика између $f(z)$ и (E) по модулу мања од ε у кругу C.

Ако је, тако, функција $f(z)$ дефинисана у околини своје обичне тачке $z = \alpha$ развојем

$$f(z) = a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \dots \tag{118}$$

а λ дати позитиван број, узмимо за M_n цео број који образују цео део и g првих децимала броја $a_n\lambda^n$. Приближним спектром функције $f(z)$ у кругу C_α (чији је центар $z = \alpha$ а полупречник мањи од полупречника холоморфности функција f око тачки $z = \alpha$) сматраћемо спектар низа целих бројева M_n, а његов степен приближности биће број ε, једнак највећој вредности коју узима вредност

$$\frac{10^{-g}\lambda}{|\alpha + \lambda - z|}$$

за тачке z у унутрашњости круга C_α (видети § **19**). Бирајући погодно g, може се ε учинити онолико малим колико се хоће.

У истом параграфу показали смо да се аналитичка функција $f(z)$ може у околини своје обичне тачке $z = \alpha$, са жељеном приближношћу (и то на бесконачно много начина), приказати количником једног полинома (E) и једног целог броја N, тако да, у датом кругу C_α на који је ова апроксимација примењена, имамо

$$\left| f(z) - \frac{(E)}{N} \right| < \varepsilon,$$

где је број ε унапред дат.

Спектар коефицијената полинома (E) са било каквим ритмом такође треба сматрати приближним спектром функције $f(z)$ у кругу C_α, под условом да му се прикључи цео број N који га употпуњује одређивањем одговарајућег полинома $\dfrac{(E)}{N}$.

Свакој аналитичкој функцији f(z), *за дати круг* C_α, *може се тако придружити скуп који образују један ограничен спектар и један цео број, а који садржи све елементе за одређивање те функције у* C_α *са унапред датом тачношћу.*

24. Према оном што је у параграфу **18** показано, узимајући за M_n цео део броја $a_n\lambda^n$, функција (E) чији су коефицијенти M_n потпуно одређује сингуларитете функције $f(z)$ садржане у неком кругу C_α: ови нису ништа друго него управо сингуларитети функције (E) садржани у C_α. А како се ова функција (E) може дефинисати једним спектром употпуњеним скупом (D) квалитативних података (начином поделе спектра на сегменте и знацима који се додељују сегментима), имамо следећи резултат:

Свакој аналитичкој функцији, за дати круг C_α, *може се придружити спектар који, уз додавање једног скупа* (D) *квалитативних података, садржи све елементе за одређивање сингуларитета функције* f(z) *у* C_α.

Сингуларитети су тако сажети, кондензовани (уз додавање података D) у само један број, који се стога може сматрати спектром сингуларитета функције $f(z)$ у кругу C_α.

На сличан начин би се добио *спектар нула функције* $f(z)$ садржаних у кругу C_α у коме је функција $f(z)$ мероморфна, замењујући у ономе што претходи коефицијенте a_n коефицијентима A_n функције $\frac{1}{f(z)}$, који се изражавају помоћу коефицијената a_n према формули из параграфа **18**.

Исто тако би се добили спектри корена једначине $f(z)-a=0$ (a дата константа), као и корена једначине $f'(z)=0$, или једначине $f''(z)=0$ итд., замењујући у ономе што претходи коефицијенте a_n одговарајућим комбинацијама бројева a_n у n.

II. – Функције које одговарају датом спектру

25. Функција $f(z)$ допушта бесконачно мноштво спектара, који варирају с једне стране са трансформацијом $\Delta[f]$ којом је успостављена кореспонденција између $f(z)$ и низа M_k целих бројева, а с друге стране са ритмом према коме се формира спектар бројева M_k, који представља и спектар функције $f(z)$.

Али за одређену трансформацију $\Delta[\mathrm{f}]$ *и за одређени спектрални ритам функција има само један спектар.*

Обрнуто, дати број S може се подударити са спектром бесконачно много функција $f(z)$, у зависности од: 1. спектралног ритма који му се додељује; 2. начина на који се успоставља веза између целих бројева M_k који образују линије таквог једног спектра и функције f, при чему тај начин бесконачно варира заједно са трансформацијом $T[f]$ која ту везу остварује; 3. знакова σ_n који ће бити приписани реалним деловима и коефицијентима уз i имагинарних делова бројева M_n пре него што се учини да они формирају ред (E), који ће, уз трансформацију $\Delta[f]$, одредити функцију $f(z)$.

Али, кад су одређени спектрални ритам h_k, *трансформације* $\Delta[\mathrm{f}]$ *и скуп знакова* σ_n, *број* S *као спектар у општем случају одређује само једну функцију* f(x). Ту може бити двосмислености или делимичне неодређености само у случајевима кад релација између $f(z)$ и бројева M_k до које доводи примена трансформације $\Delta[f]$ (*видети* § **21**) не одређује потпуно $f(z)$ помоћу бројева M_k (на пример, када се коефицијенти a_n добијају као корени нелинеарне једначине, или преко неке рекурентне релације која оставља неодређен известан број првих коефицијената a_n).

Одредница 2 садржана је у облику трансформације $\Delta[f]$; одреднице 1 и 3 дају скуп (D) квалитативних података који служе образовању квалитативне карактеристике спектра низа M_k који производи $\Delta[f]$.

Правило за ефективно одређивање функције $f(z)$ која одговара датом броју S као спектру и датом скупу (D) излази из правила формулисаног у параграфу **12** и састоји се у следећем.

Број S дели се на узастопне одсечке, према спектралном ритму h_k који садржи (D), а ти одсечци чине очигледним узастопне спектралне пруге које одговарају проблему. Сваком од целих бројева N_k који представљају те пруге додељује се онај од чинилаца $\theta_k = 1, -1, i, -i$ који му одговара према подацима из (D), па се онда образује функција

$$F(z) = \theta_0 N_0 + \theta_1 N_1 z + \theta_2 N_2 z^2 + \dots \tag{119}$$

Тражена функција f(z) *одређује се као функција чији је трансформат преко* $\Delta[\mathrm{f}]$ *ред* $F(z)$. У параграфу **21** указано је на различите облике које могу узети релације између f и F на које се своди проблем таквог одређивања функције f.

Први пример. – Која функција $f(z)$ са реалним и позитивним коефицијентима има спектар са униформним ритмом $h_k = 2$, добијен помоћу трансформације

$$\Delta[f] = \int_0^\infty e^{-t} f(zt)\,dt \tag{120}$$

и једнак броју $\frac{7}{11}$?

Спектрални одсечци броја $S = \frac{7}{11} = 0{,}636363\dots$ (уз изузетак првог) дају све исте пруге 63, а имамо и $\theta_k = 1$; према томе,

$$F(z) = \frac{63}{1-z}.$$

А како трансформација (120) примењена на функцију $f(z)$ успоставља релацију

$$n!\,a_n - M_n = 0,$$

једина функција $f(z)$ која задовољава захтеве проблема је

$$f(z)=63e^{z}-1.$$

Други пример. – За коју је функцију $f(z)$ са реалним и наизменично позитивним и негативним коефицијентима a_n спектар са униформним ритмом $h_k=1$ и добијен трансформацијом

$$\Delta[f]=z^3\int_0^\infty e^{-t}t^3 f(zt)dt$$

једнак броју $\frac{1}{3}$?

Спектрални одсечци броја $S=\frac{1}{3}=0,333\ldots$ (уз изузетак првог) имају сви исту спектралну пругу 3, па како је $\theta_k=1$, $\theta_{2k+1}=-1$, добија се

$$F(z)=\frac{3}{1+z};$$

из истог разлога као у претходном случају, сада се функција $f(z)$ не може разликовати од

$$f(z)=\frac{3(e^{z}-1)}{z^3}.$$

Трећи пример. – Одредити функцију $f(z)$ чији спектар има униформни ритам $h_k=3$ и добијен је трансформацијом

$$\Delta[f]=f''(z)+\lambda f(z)\qquad(\lambda=\text{const.}),$$

која претвара f у ред (E) са реалним позитивним коефицијентима, једнак броју $\frac{9097}{333000}$.

Први спектрални одсечак броја

$$S=\frac{9097}{333000}=0,027\,318\,318\,318\ldots$$

има пругу 27, а сви остали пругу 318, и при том је $\theta_k=1$. Функција је, дакле, општи интеграл линеарне диференцијалне једначине другог реда

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\lambda y=\frac{27z+291z^2}{1-z}.$$

26. Будући да је $F(z)$, трансформат функције $f(z)$ преко $\Delta[f]$, једна функција (E), следеће примедбе могу бити од интереса.

1. Функција (E) чији је спектар, са било каквим ритмом, цео број, своди се на константу; кад спектар има само коначан број децимала, функција је полином по z.

Такав је, на пример, случај сваке функције (E) чији се неки спектар изражава несводљивим обичним разломком саимениоцем који нема других простих фактора осим бројева 2 и 5. У случају униформног ритма $h_k = h$, уколико је са m означен већи од експонената степена бројева који представљају факторе именица разломка, степен полинома биће $\frac{m}{h}$ или цео део од $1+\frac{m}{h}$, према томе да ли је m дељиво са h или није.

2. Функција (E) са реалним позитивним коефицијентима чији спектар има униформни ритам и изражава се несводљивим разломком са имениоцем који има просте факторе различите од 2 и 5, представља количник два полинома $P(z)$ и $Q(z)$, од којих је први са целим коефицијентима а други има за нуле корене јединице, при чему је $Q(0) = 1$.

Ова чињеница је последица става г. Фатуа наведеног у параграфу **20**.

3. Функција (E) са реалним позитивним коефицијентима, чији спектар има униформни ритам и уједно је ирационалан број, представља функцију која у кругу полупречника 1 (са центром у тачки $z = 0$) или на том кругу има и друге сингуларитете сем полова.

Ово је последица теореме г. Борела наведене у параграфу **20**.

Најзад, с обзиром на оно што је било речено у параграфима **23** и **24**, додаћемо следеће примедбе.

1. *Приближни спектар*, у смислу из параграфа **23**, одређује функцију $f(z)$ само до на неку функцију $\delta(z)$ чији модуо у кругу C_α не прелази извесну унапред дату количину ε повезану са спектром и са C_α.

2. *Спектар сингуларитета*, у смислу из параграфа **24**, одређује функцију $f(z)$ само до на неку функцију $\delta(z)$ која нема сингуларитета у C_α.

3. *Спектар нула*, придружен некој целој функцији датог рода, одређује ту функцију до на фактор облика $e^{G(z)}$, где је $G(z)$ цела функција од z.

ЧЕТВРТИ ДЕО

СПЕКТРАЛНА МЕТОДА

I. – Принцип методе

27. Нумерички спектри могу играти корисну улогу као инструменти рачуна. Они доводе до једног нарочитог поступка у нумеричком рачуну који се може назвати *спектрални поступак*, због његових упадљивих аналогија са поступком спектралне анализе у хемији.

Израчунати неку нумеричку вредност, или неки ограничен или неограничен низ нумеричких вредности $a_0, a_1, a_2, \ldots$, или пак одређени део цифара које образују једну од тих вредности, спектралним поступком, то значи *одредити непознате помоћу нумеричког спектра* S *који је на погодан начин доведен у везу са низом* a_k.

Ово се може учинити на два различита начина.

1. Може се израчунати непозната, или одређени део цифара које образују нумеричку вредност непознате, као спектар S познате функције (коју даје трансформација $\Delta[f]$, са познатим спектралним ритмом), или помоћу одређеног одсечка спектра S, или напред као позната комбинација елемената спектра S.

Тако се, на пример, нумеричка вредност $1{,}01^6$ добија као спектар функције $(1+z)^6$ са униформним ритмом $h_k = 2$ и износи

$$S = 1{,}061520150601;$$

вредност одређеног интеграла

$$(121) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta(4\cos^2 t)dt,$$

где је $\theta(z)$ трансцендента

$$(122) \qquad \theta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2+n} z^n, \quad q = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

добија се као производ броја $\frac{\pi}{2}$ и спектра S са униформно убрзаним ритмом $h_k = k$ функције

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^2 z^n \tag{123}$$

и једнак је

$$S = 0,10200\,600\,200007000025200000924\ldots^{17}$$

2. Може се израчунати ограничен или неограничен низ непознатих $a_0, a_1, a_2, \ldots$, или једна непозната a_k, која припада низу, или пак једна или више цифара које образују број a_k, помоћу пруга или линија неког спектра S.

Тако би се број делилаца променљивог целог броја k могао израчунати као k-та пруга неког спектра Ламбертовог реда[18]; другу цифру броја $\binom{9}{4}$ даје друга линија четврте пруге спектра S функције $(1+z)^6$ са униформним ритмом $h_k = 3$, тј. спектра

$$S = 1,00903608412612608403600 9\ldots 1;$$

вероватноћа да се, у 10 покушаја, од два догађаја A и B чије су вероватноће редом $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$, A оствари $10-k$ а B k пута, добија се делећи бројем 3^{10} k-ту пругу спектра функције $(2+z)^{10} - 2^{10}$ са униформним ритмом $h_k = 5$.

Овај последњи начин одређивања непознатих примењује се сваки пут кад се оне налазе у одређеној кореспонденцији са неком функцијом (E) *и сажето се исказује следећим правилом:*

Ако се спектар S функције (E) са ритмом h_k подели на узастопне одсечке, при чему је први од њих образован од h_1, првих децимала броја S, други од h_2 наредних децимала, итд., цео број $M_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ који припада низу $M_0, M_1, M_2, \ldots$ помоћних целобројних непознатих добиће се као група значајних цифара n-тог одсечка, а M_0 ће се подударити са целим делом броја S (уколико се не узму у обзир знаци реалних и имагинарних делова бројева M_n). Друкчије речено: број M_n ће се подударити са n-том пругом спектра S а његова k-та цифра са одговарајућом

[17] Видети трећи пример у параграфу **6**.

[18] Видети параграф **30**.

линијом те пруге. Кад су бројеви M_n тако одређени, непознате a_n биће одређене помоћу релације $\Omega(a_n, M_n) = 0$ (експлицитне или рекурентне), која успоставља кореспонденцију између бројева a_n и бројева M_n које даје спектар, пошто се сваки од бројева M_n снабде знаком σ_n који му додељују услови проблема.

Вредност која је *довољно блиска* броју S даје, према правилу из параграфа **12**, *тачне вредности* онолико непознатих a_n колико се хоће: одређивање $n + 1$ првих целих бројева $M_0, M_1, M_2, \ldots$ захтева само познавање приближне вредности броја S са $h_1 + h_2 + \ldots + h_n$ тачних децимала, а онда ће се добити одговарајуће a_n помоћу релације

$$\Omega(a_n, M_n) = 0.$$

Тако је за тачно одређивање непознатих $a_0, a_1, \ldots, a_p$ довољно знати приближну вредност броја S са ph првих тачних децимала у случају кад је спектрални ритам униформан $h_k = h$ а са $ph + \frac{p(p-1)}{2}c$ првих тачних децимала у случају униформно убрзаног ритма $h_k = h + ck$.

28. *Спектрална метода*, као што се види, састоји се у расипању у неки *нумерички спектар* главних или помоћних непознатих неког проблема, као што анализаторска призма расипа, у спектралној анализи, сноп светлосних зракова у спектар светлости. Непознате се у нумеричком спектру повезаном са проблемом налазе расуте, одвојене и одређене као спектралне пруге и линије, на начин сличан ономе којим се непознати елементи неке хемијске супстанце одређују у спектралној анализи. Главна спектрална карактеристика из параграфа **9** у овоме игра сличну улогу као сноп светлости који испушта супстанца коју треба анализирати, а спектрална генератриса игра улогу сличну оној призме анализатора.

Када су првобитне непознате *цели бројеви*, анализу њиховог комплекса *непосредно* врши спектрална генератриса: оне су расуте у спектру као што призма расипа спектралне индексе карактеристичне за елементе, иначе међусобно измешане у усијаном телу.

Кад су непознате бројеви који *нису цели*, потребно је да се подвргну *претходној припреми* пре него што се укључе у спектралну генератрису, као што се, у извесним случајевима, одређеној претходној модификацији подвргава сноп светлости који испушта супстанца коју треба анализирати, пре него што се он пропусти кроз призму која расипа светлост (постављање, на пример, на пут светлости коју треба анализирати, стакленог балона испуњеног одређеним парама). Та припрема одговарала би, код нас, некој трансформацији $\Delta[f]$ сагласној са низом непознатих.

Са овом сличношћу иде се и даље ако се уочи да дисперзија неког нумеричког спектра варира са квалитативном спектралном карактеристиком коју онај који рачуна може мењати за једну исту главну карактеристику подвргнуту анализи, као што се расипање (дисперзија) извесног спектра светлости мења са условима експеримента које експериментатор може модификовати за једну исту супстанцу која се испитује (то су, на пример, промене температуре, притиска, разређености). Униформна дисперзија нумеричког спектра аналогна је великом броју случајева који се јављају у хемијској спектралној анализи (такав је, на пример, случај неких делова спектра сумпора произведеног помоћу обложене цеви); то исто важи за униформно растућу дисперзију (у случају, на пример, обичног спектра сумпора, код кога растојања између максимума расту према подручју љубичастог).

Начини мењања дисперзије нумеричких спектара нису својствени само појединачном низу са којим се спектар доводи у везу, у том смислу да, ако се мењају елементи који утичу на квалитативну спектралну карактеристику, тада се мења дисперзија спектра било ког низа, и то у истом смеру. Исто тако, промена температуре или притиска мења дисперзију (расипање) спектра светлости у истом смеру за различите светлосне зраке подвргнуте анализи.

Трансформација $\Delta[f]$, према оном на шта је било указано у параграфу **21**, кад се примени на посматрану функцију $f(z)$, може довести до *континуираног спектра*, образованог од самих нула (без линија), мада нека друга трансформација доводи до дисконтинуираног спектра, са линијама. Ова чињеница такође има аналогон у спектралној анализи (кад, на пример, водоник, оксид угљеника и сумпор-водоник горе у кисеонику, спектар пламена подвргнутог анализи нема ниједну линију, иако је, под другим условима, спектар истих гасова дисконтинуиран).

Такве аналогије, као и велики број других које пружају нумерички спектри и спектри светлости, оправдавају, уверени смо, име које дајемо рачунском поступку изложеном у оном што претходи.

Подсетимо још једном на предност коју има спектрална метода са становишта праксе нумеричког рачуна: она даје начин:

1. за истовремено одређивање, *довољним продужавањем једног истог нумеричког рачуна*, вредности онолико непознатих колико се хоће, а такође, одвојено, *тражене цифре или децимале* неке од непознатих;

2. за одређивање *тачних вредности* жељеног броја непознатих помоћу вредности која *довољно добро апроксимира* неки податак из проблема.

II. – Неке аритметичке примене

A. – *Спектри разлагања бројева*

29. Нека су:

(124) $$a, b, c, \ldots, g;$$

(125) $$m, n, p, \ldots, s,$$

два дата низа позитивних целих бројева, при чему су бројеви (124) узајамно прости. Означимо са $P(k)$ позитиван цео број који показује на колико се начина цео број k може написати у облику

(126) $$k = ax + by + \ldots gt,$$

где $x, y, \ldots, t$ узимају вредности

(127) $$\begin{cases} x = 0, 1, 2, \ldots, m \\ y = 0, 1, 2, \ldots, n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t = 0, 1, 2, \ldots, s. \end{cases}$$

Ако је стављено

$$V(x, \alpha, \mu) = \frac{x^{(\mu+1)} - 1}{x^{\alpha} - 1} = 1 + x^{\alpha} + x^{2\alpha} + \ldots + x^{\mu\alpha},$$

(где су α и μ два произвољна позитивна цела броја), коефицијент уз x^k у полиному

$$W(x) = V(x, a, m) V(x, b, n) \ldots V(x, g, s)$$

степена $\lambda = ma + nb + \ldots + sg$ управо је број $P(k)$. Ако се, дакле, са h означи нека горња граница броја цифара броја $P(k)$, број

$$S = W(10^{-h})$$

представљаће спектар за $P(k)$ са униформним ритмом $h_k = h$.

С друге стране, ако се са g_k означи цео број који се добија кад се број 9 напише k пута узастопце ($g_1 = 9, g_2 = 99, g_3 = 999, \ldots$), имаће се

(128) $$V(10^{-h}, \alpha, \mu) = 10^{-p\alpha h} \frac{9_{(\mu+1)}\alpha h}{9\alpha h},$$

и одатле

(129) $$S = 10^{-\lambda h} N,$$

где N означава цео број који образују искључиво цифре 9:

(130) $$N = \frac{9_{(m+1)}ah \cdot 9_{(n+1)}bh \ldots 9_{(s+1)}gh}{9_{ah} \cdot 9_{bh} \ldots 9_{gh}}.$$

Ово чини очигледним следеће аритметичко својство целих бројева N:

Цео број образован од групе значајних цифара броја N *која почиње* (kh + 1)*-вом а завршава се* (k + 1)*-вом цифром тог броја подудара се са бројем* P(k), *и то за сваку вредност* k *која није већа од* λh.

Лагер[19] је добио једну општу формулу која даје приближну вредност за $P(k)$ за дати систем бројева $(k, a, b, \ldots, g)$ и за све могуће системе $(x, y, \ldots, t)$ са учињеном грешком која има горњу границу *независну* од k. На пример, у случају једначине са две непознате

$$k = ax + by,$$

Лагерова формула даје

$$P(k) = \frac{k}{ab} + \delta,$$

где је апсолутна вредност броја δ мања од 1; за једначину

$$k = ax + by + cz$$

она даје

$$P(k) = \frac{k^2}{2abc} + \frac{k(a+b+c)}{2abc} + \delta,$$

при чему је додатни члан δ, по апсолутној вредности, мањи од извесне фиксиране количине за све вредности k. *Ове формуле омогућују да се броју* h *доделе вредности које претпоставља претходни став.*

Приметимо такође да број (128) представља спектар S_α низа 111...1 (μ јединица) са униформним ритмом $h_k = \alpha h$, тако да је спектар S, који даје формула (129), једнак производу делимичних спектара $S_a, S_b, \ldots, S_g$. А како је (уколико се не узме у обзир децимална запета)

$$S_\alpha = 1\underbrace{00\ldots0}_{\substack{\alpha h - 1\\ \text{нула}}}1\underbrace{00\ldots0}_{\substack{\alpha h - 1\\ \text{нула}}}1\underbrace{00\ldots0}_{\substack{\alpha h - 1\\ \text{нула}}}10\ldots,$$

[19] E. Laguerre, *Sur la partition des nombres*, Bull de la Soc. math. de France, t. V 1877; Ouvrage t. I pp. 218–220.

где се група цифара $00\ldots01$ понавља μ пута, број N може се израчунати сабирањем погодно распоређених јединица (и замислити, штавише, једноставан апарат који би тај рачун брзо изводио).

На пример, за једначину

$$3x+2y=k, \quad 0\le x\le 10, \quad 0\le y\le 9,$$

будући да је број

$$\log\left(1+\frac{\lambda}{ab}\right)=\log\left(1+\frac{48}{6}\right)=\log 9$$

мањи од 1, може се узети $h=1$, што ће дати

$$N=1011112122223233334343343343334\ldots,$$

а број $P(k)$ се подудара са $(k+1)$-вом цифром броја N. Тако, једначина

$$3x+2y=19$$

има тачно три решења за $x\le 10$ и $y\le 9$: овај број заиста даје двадесета цифра броја N.

Исти поступак примењен на различите друге рационалне функције као спектралне карактеристике доводи до неких других ставова ове врсте. Зна се, на пример[20], да је број $Q_{p,q}$ разлагања свих бројева на (највише) q делова, од којих ниједан није већи од датог броја p, једнак коефицијенту уз ax^{pq} развитка функције

$$F(x)=\frac{1}{(1-a)(1-x)(1-ax)(1-ax^2)\ldots(1-axp)}.$$

Исто тако, зна се да је број $R_{k,k'}$ решења у целим позитивним бројевима две симултане линеарне једначине

$$ax+by+\ldots+gt=k,$$
$$a'x+b'y+\ldots+g't=k',$$

за променљиве k и k' једнак коефицијенту уз $u^k v^{k'}$ у развоју функције

$$\Phi(u,v)=\frac{1}{(1-u^a v^{a'})(1-u^b v^{b'})\ldots(1-u^g vv^{g'})}.$$

Изрази $F(10^{-h})$ и $\Phi(10^{-h},10^{-h'})$, где су h и h' довољно велики цели бројеви, јесу извесни рационални бројеви чији се низ одређеног броја првих децимала изражава кад се напишу, једни иза других, узастопни

[20] Mac-Mahon, Philos. Trans, London 187/A, 1896, p. 619.

цели бројеви $Q_{p,q}$ или $R_{k,k'}$ и потом између њих уметне известан број нула, утолико већи уколико су бројеви h и h' већи.

Б. – *Спектри бројева делилаца променљивог целог броја*

30. Према добро познатој особини Ламбертовог реда, ако се стави

$$(131)\qquad f(z)=\frac{z}{1-z}+\frac{z^2}{1-z^2}+\ldots+\frac{z^m}{1-z^m}=a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots,$$

$$(132)\qquad \varphi(z)=\frac{z(z+1)}{1-z}=z+2(z^2+z^3+z^4+\ldots),$$

коефицијент $N(k)$ развоја

$$F(z)=f(z)-\varphi(z)=N(1)z+N(2)z^2+N(3)z^3+\ldots$$

подудариће се, за $k<m$, са бројем делилаца броја k различитих од 1 и од k.

Ако се, дакле, за h узме једна горња граница броја $\log N(k)$ $(k=1,2,\ldots)$, израз

$$S=F(10^{-h})$$

представљаће спектар делилаца броја k са униформним ритмом $h_k=h$.

С друге стране, имамо (са ознакама из параграфа **29**)

$$f(10^{-h})=\frac{1}{9_h}+\frac{1}{9_{2h}}+\ldots+\frac{1}{9_{mh}},$$

$$\varphi(10^{-h})=10^{-h}\frac{9_{2h}}{9\cdot 9_h}.$$

Претворен у децимални разломак, број $f(10^{-h})$ је *прост* периодични разломак који има период са mh цифара, а $\varphi(10^{-h})$ је *мешовити* периодички разломак чији непериодички део и период имају сваки h цифара. Сам спектар ће стога бити мешовити периодички разломак чији непериодички део има h цифара, период mh цифара, а оно што претходи јасно показује следеће аритметичко својство тих рационалних бројева:

$$(133)\qquad S=\frac{1}{9_h}+\frac{1}{9_{2h}}+\ldots+\frac{1}{9_{mh}}-10^{-h}\frac{9_{2h}}{9\cdot 9_h}.$$

Поделимо низ првих децимала броја S који образује његов непериодички део заједно са првим периодом – у узастопне одсечке $T_1, T_2, \ldots, T_{m+1}$ са h цифара, тако да одсечак $T_k (k=1,2,\ldots,m+1)$ почиње

$$\left[(k-1)h+1\right]\text{-том}$$

а завршава се hk-том децималом броја S, и посматрајмо одсечке $T_1, T_2, \ldots, T_m$.

Цео број који образује група значајних цифара одсечка T_k *подудара се са бројем делилаца броја* k *различитих од* 1 *и од* k.

Ако назовемо *лакуном* (празнином) сваки одсечак T_k који се састоји искључиво од нуле, одатле се изводи следећи закључак:

Број лакуна које има скуп првих k *одсечака* $T_1, T_2, \ldots, T_k$ *тачно је једнак броју простих бројева мањих од* k, *и то за свако* $k \leq m$.

Ако се примети да је

$$\frac{1}{9_{kh}} = 0,\underbrace{0\ldots0}_{kh-1}1\underbrace{0\ldots0}_{kh-1}1\underbrace{0\ldots0}_{kh-1}10\ldots;$$

$$10^{-h}\frac{1}{9\cdot 9_h} = 0,\underbrace{0\ldots0}_{k-1}1\underbrace{0\ldots0}_{h-1}2\underbrace{0\ldots0}_{h-1}2\underbrace{0\ldots0}_{h-1}20\ldots,$$

уочава се да би се скуп одсечака $T_1, \ldots, T_m$ могао израчунати, за свако дато m и h, само сабирањем јединица (на пример, помоћу апарата који је лако замислити).

Једна вредност h која ће бити у сагласности са претходним добиће се кад се узме неко $h \geq \log m$ (*видети* други пример из параграфа **32**).

Сетимо се такође неједнакости г. Вигерта

$$N(k) < 2^{(1+\varepsilon)\frac{\log k}{\log\log k}},$$

која важи за произвољно $\varepsilon > 0$, уколико је k довољно велико.

На пример, за $m = 100$ (што даје $h \geq 2$) и за $h = 2$, налази се

$$S = 0,$$

Двадесет првих одсечака са две цифре садржи девет лакуна, сто првих одсечака их садржи двадесет шест, што показује да има девет простих бројева мањих од 20, да их има двадесет шест мањих од 100, итд.

B. – *Спектри збирова сличних степена узастопних целих бројева*

31. Ако се са $P_{m,k}(z)$ означи полином степена m дефинисан рекурентном формулом

(134) $$P_{m,k} - zP'_{m,k-1} = 0, \qquad P_{m,k} = \frac{z^{m+1} - z}{z-1},$$

тада је

(135) $$P_{m,h} = 1^k z + 2^k z^2 + \ldots + m^k z^k.$$

Позната формула

$$\frac{\sum a_n z^n}{1-z} = a_0 + (a_0 + a_1)z + (a_0 + a_1 + a_2)z^2 + \ldots$$

онда даје

(136) $$\frac{P_{m,p}}{1-z} = s_{1p}z + s_{2p}z^2 + \ldots + s_{mp}(z^m + z^{m+1} + \ldots),$$

где је

(137) $$s_{np} = 1^p + 2^p + \ldots + n^p.$$

Неједнакост

$$k^p < m^p \qquad (k = 1, 2, \ldots, m-1)$$

повлачи

(138) $$s_{np} = m^{p+1};$$

одатле, узимајући за h неки цео број који није мањи од

$$(p+1)\log m,$$

закључујемо да је *спектар низа*

(139) $$s_{1p}, s_{2p}, \ldots, s_{mp},$$

са униформним ритмом $\mathrm{h_k} = \mathrm{h}$, *дат са* mh *првих децимала броја* (ознака из параграфа **29**)

(140) $$S = \frac{10^{mh}}{9_{mh}} P_{mp}(10^{-mh});$$

преостали децимали дају периодични спектар са ритмом h, при чему је период број s_{mp} коме претходи онолико нула колико је потребно да се употпуни број цифара до h.

У овом случају, на пример, помоћу низа (139) који одговара бројевима $m = 16$ и $p = 2$ налази се

$$P_{16,2} = \frac{288z^{18} - 289z^{17} + z}{z-1} - \frac{32z^{18} - 34z^{17} + 2z}{(z-1)^2},$$

а како је $(p+1)\log m < 4$, може се ставити $h = 4$; спектар низа (139) дат је са шездесет првих децимала броја

$$S = \frac{10^{64} P_{16,2}(10^{-64})}{9_{64}},$$

$$S = 0{,}0001.$$

Нумеричка вредност броја $s_{k2}(k = 1, 2, \ldots, 16)$ подудара се са к-том пругом овог спектра, тј. са групом значајних цифара која почиње $[4(k-1)+1]$-вом и завршава се 4к-том децималом броја S. Тако се збир $s_{9,2}$ подудара са деветом спектралном пругом: он, дакле, износи 285; друга цифра броја $s_{13,2}$ је педесет и прва децимала броја S. Једнака је 1.

III. – Спектрални поступак развијања у ред

32. Нумеричко израчунавање коефицијената неког реда $\Sigma a_n z^n$ врши се, кад су уобичајени поступци у питању, било *индивидуалним* израчунавањем сваког коефицијента a_n помоћу извесне експлицитне формуле

$$a_n = \varphi(n) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

било израчунавајући a_n на основу већ познатог низа коефицијената $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$ *и помоћу неке рекурентне формуле*

$$\varphi(n, a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots) = 0.$$

Спектрални поступак доводи до *израчунавања свих коефицијената* a_n *истовремено, или пак групе коефицијената чије се израчунавање жели, помоћу групе децимала само једног броја* S *на погодан начин доведеног у везу са функцијом* f(z) *чији се развој у ред тражи.*

Из правила у параграфу **12** изводе се у том погледу следећа правила.

I. – Када су коефицијенти a_n *позитивни цели реални* бројеви, коефицијент a_0 једнак је целом делу броја S који представља спектар функције $f(z)$ са познатим ритмом h_k; коефицијент a_n тада ће се поклопити са групом значајних цифара броја S која почиње његовом $(P_{n-1}+1)$-вом а завршава се његовом P_n-том децималом, где је $P_n = h_1 + h_2 + \ldots + h_n$. У случају униформног ритма, то је група која почиње

$[(n-1)h+1]$-вом а завршава се nh-том децималом броја S. У случају униформно убрзаног ритма $h_k = h+ck$, она почиње

$$\left[(n-1)h+\frac{n(n+1)}{2}c+1\right]\text{-вом,}$$

а завршава се $\left[nh+\frac{n(n+1)}{2}c\right]$ децималом броја S.

По реду k-та цифра броја a_n подудара се са (P_n-k+1)-вом децималом броја S (са k-том линијом n-те спектралне пруге). За $h_k = h$ то је $(nh-k+1)$-ва, а за $h_k = h+ck$ ово је

$$\left[nh+\frac{n(n+1)}{2}c-k+1\right]\text{-ва децимала}$$

броја S.

II. – Када су коефицијенти a_n *било какви цели бројеви*, реални или имагинарни, образоваће се придружени низ $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots$ и спектар функције

$$\varphi(z) = \theta_0 a_0 + \theta_1 a_1 z + \theta_2 a_2 z^2 + \ldots \tag{141}$$

написаће се у облику $S = S_1 + iS_2$; правила из I примењена на S_1 одредиће низ α_n реалних делова бројева $\theta_n a_n$, а иста правила примењена на S_2 одредиће низ β_n коефицијената уз i бројева $\theta_n a_n$. Онда ће се имати

$$a_n = \frac{1}{\theta_n}(\alpha_n + i\beta_n).$$

III. – Када бројеви a_n нису цели, познавање неке трансформације $\Delta[f]$ сагласне са функцијом $f(z)$ коју треба развити довешће до трансформата (E) функције $f(z)$; познавање једног спектралног ритма сагласног са низом коефицијената M_n трансформата (E), као и знакова α_n реалних и имагинарних делова тих коефицијената, омогућиће формирање спектра S низа M_n са овим ритмом. Правила I и II примењена на S одредиће онда M_n, а релација $\Omega(a_n, M_n) = 0$, коју намеће трансформација $\Delta[f] = 0$, одредиће најзад непознате коефицијенте a_n.

Ритам h_k и знаке σ_n при том ће дати скуп (D) квалитативних података проблема.

IV. – Одређивање *тачних* вредности првих n + 1 коефицијената (не узимајући у обзир знаке σ_n) захтева само познавање *приближне* вредности броја S са тачних првих P_n децимала. Овај број децимала једнак је nh у случају униформног спектралног ритма $h_k = h$, а износи $nh + \frac{n(n+1)}{2}c$ у случају униформно убрзаног ритма $h_k = h + ck$.

Први пример. – Одредити низ $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{mp}$ коефицијената p-тог степена датог полинома $P(x)$ степена m са целим позитивним коефицијентима ако је позната једна горња граница A тих коефицијената.

Уколико је са h означен цео број који није мањи од $\log A$, низ бројева A_k дозвољава униформни спектрални ритам $h_k = h$ и његов спектар биће дат бројем

$$S = \left[P(10^{-h})\right]^p,$$

који се лако може израчунати у сваком разматраном случају. Коефицијент A_k, као и жељена одређена цифра броја A_k, биће дати пругом, односно линијом спектра S одређеном претходним правилима.

Да би се, на пример, спектралним поступком развио израз

$$f(x) = (1 + x + x^2)^6,$$

знајући при том да коефицијенти развоја не премашују број 1000, довољно је израчунати број

$$\begin{aligned} S &= f(10^{-3}) = 10^{-36}1001001^6 \\ &= 1{,}006021050090126141126090050021006001 \end{aligned}$$

и поделити његов децимални део на одсечке са по три цифре: сваки од тих одсечака даје по један коефицијент A_k, па се тако добија

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + 6x + 21x^2 + 50x^3 + 90x^4 + 126x^5 + 141x^6 \\ &\quad + 126x^7 + 90x^8 + 50x^9 + 21x^{10} + 6x^{11} + x^{12}. \end{aligned}$$

Довољно је чак израчунати осамнаест првих децимала да би се добио поступни развој функције.

Други пример. – Развити у степени ред рационалну функцију

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \tag{142}$$

чије су све нуле имениоца просте и имају јединични модул, знајући да су сви непознати коефицијенти развитка цели бројеви.

Означивши са $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ нуле полинома $Q(x)$, а са $A_1, A_2, \ldots, A_m$ коефицијенте простих разломака који им одговарају, имаће се

$$f(z) = p(z) + \frac{A_1}{z - \alpha_1} + \ldots + \frac{A_m}{z - \alpha_m}, \tag{143}$$

где $p(z)$ означава цео део количника $f(z)$.

Ако се десна страна једнакости (143) развије у ред

(144) $$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

добија се

(145) $$a_n = p + A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n + \dots + A_m\alpha_m^n,$$

где p означава, кад то долази у обзир, коефицијент уз x^n у полиному $p(x)$. На основу (145) закључује се да је

$$|a_n| = |p| + |A_1\alpha_1^n| + \dots + |A_m\alpha_m^n|,$$

и одатле, како је модуо броја α_n једнак јединици,

(146) $$|a_n| < |p| + |A_1| + \dots + |A_m|.$$

Ако се, дакле, са h означи било који цео број који није мањи од

$$\log\left[|p| + |A_1| + \dots + |A_m|\right],$$

имаће се

$$|a_n| < 10^h,$$

где се h *не мења са* n, што значи да низ коефицијената a_n може имати униформни спектрални ритам $h_k = h$, па се онда третирање овог проблема лако окончава.

На пример, у случају када су бројеви a_n позитивни и цели, њихов спектар ће бити рационални број $S = f(10^{-h})$. Коефицијент a_n подудариће се са целим бројем образованим од групе децимала броја S која почиње $[(n-1)h+1]$-вом а завршава се nh-том од тих децимала; k-ту цифру коефицијента a_n представља $(nh-k+1)$-ва децимала броја S.

Такав је случај ограниченог Ламбертовог реда

$$f(z) = \frac{z}{1-z} + \frac{z^2}{1-z^2} + \dots + \frac{z^m}{1-z^m},$$

који свакако испуњава претходне услове. Из оног што претходи, излази,

$$|a_n| < n < m,$$

(што је, уосталом, очигледно), а бројеви a_n, будући да су позитивни и цели, имају униформни спектрални ритам

$$h_k = h \geq \log m;$$

њихов спектар са таквим једним ритмом биће, према параграфу **30**, рационални број

$$S = \frac{1}{9_h} + \frac{1}{9_{2h}} + \ldots + \frac{1}{9_{mh}} \qquad \Bigl(9_\alpha = \underbrace{99\ldots9}_{\alpha \text{ пута}}\Bigr).$$

На пример, ако је $m < 100$, може се узети $h = 2$, што даје

$$S = 0{,}010202030204020403040206020404050206 0206\ldots;$$

одатле,

$$f(z) = z + 2z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 2z^5 + 4z^6 + 2z^7 + 4z^8 + 3z^9 + \ldots .$$

Трећи пример. – Развити $f(z)$ кад се зна да је коефицијент a_n рационалан број $\frac{M_n}{n}$, где су бројеви M_n цели, са ограниченим бројем цифара и наизменично позитивни и негативни.

Трансформација

$$\Delta[f] = f'(z),$$

сагласна са $f(z)$, доводи то трансформата (E)

$$(147) \qquad F(z) = M_0 + M_1 z + M_2 z^2 + \ldots$$

и повлачи релацију

$$(148) \qquad na_n - M_{n-1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Цео број M_{n-1} биће онда одређен као n-ти одсечак са h цифара броја

$$S = f'(-10^{-h}),$$

који игра улогу спектра функције $F(z)$ са униформним ритмом $h_k = h$, који није мањи од максималног броја цифара броја M_n. Бројеви a_n биће онда дати релацијом (148), при чему a_0 остаје неодређено.

На пример, за

$$f(z) = \int \frac{23 - 19z - 2z^2 + 2z^3}{1 - z^2}\, dz$$

и $h = 2$, налази се

$$S = f'(-1{,}01) = 23{,}19211721172117\ldots;$$

коефицијенти M_n репродукују се по апсолутној вредности, почев од трећег, при чему је период 2117, па ће се тако добити

$$f(z) = a_0 - 23z + \frac{19}{2}z^2 - \frac{21}{3}z^3 + \frac{17}{4}z^4 - \frac{21}{5}z^5 + \frac{17}{6}z^6 + \ldots$$

Четврти пример. – Развити $f(z)$ кад се зна да су коефицијенти a_n квадратни корени позитивних целих бројева са ограниченим бројем цифара.

Ако се стави

$$|f(re^{\varphi i})|^2 = \psi(r,\varphi), \tag{149}$$

трансформација

$$\Delta[f] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sqrt{z}, e^{ti})dt, \tag{150}$$

сагласна са $f(z)$ (§ **16**, правило III), претвара ову функцију у ред (E) помоћу релације

$$a_n^2 - M_n = 0.$$

Ако се за h узме неки цео број који није мањи од максималног броја цифара коефицијената a_n, спектар бројева M_n са ритмом $h_k = h$ биће реалан број

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(10^{-\frac{k}{2}}, e^{ti})dt, \tag{151}$$

чији n-ти одсечак са h цифара даје M_n, па ће се имати

$$a_n = \sqrt{M_n}.$$

Пети пример. – Развити $f(z)$ знајући само да су коефицијенти a_n позитивни цели бројеви и да је $z = 0$ обична тачка функције.

Конвергенција степеног реда који представља функцију $f(z)$ у околини тачке $z = 0$ повлачи постојање фиксног позитивног броја A, таквог да за сваку вредност n важи $\sqrt[n]{a_n} < A$. Означивши са c неки позитиван број који није мањи од $\log A$, униформно убрзани спектрални ритам $h_k = ck$ биће компатибилан са низом бројева a_n и спектар тог низа биће реалан број

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho, e^{ti})\,\theta\left(\frac{qe^{-ti}}{\rho}\right)dt, \tag{152}$$

где је

$$\theta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^n, \quad q = 10^{-\frac{c}{2}}, \quad \rho = \text{const} < \frac{1}{A}. \tag{153}$$

Број S може се исто тако изразити интегралом (39) из параграфа **5**,

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-t^2} R(\alpha, \beta t)\, dt, \tag{154}$$

где $R(r,\varphi)$ означава реални део од $f(r, e^{\varphi i})$ и где константама α и β треба приписати вредности

$$\alpha = 10^{-c}, \quad \beta = \sqrt{2 \log \mathrm{nat} 10}. \tag{155}$$

Ако се низ децимала броја S подели на узастопне одсечке са c, $2c$, $3c$,... децимала, коефицијент a_n ће се подударити са целим бројем образованим од цифара n-тог од тих одсечака.

IV. – Спектрални поступак израчунавања одређених интеграла

33. Спектрални поступак примењује се на два различита начина на израчунавање одређених интеграла.

ПРВИ НАЧИН. – У случају неког низа одређених интеграла $J_1, J_2, J_3, \ldots$ (једноструких или вишеструких, реалних или комплексних) таквих да се y_n поклапа са коефицијентом a_n извесне функције $f(z)$, *израчунавање бројева* J_n *вршило би се, према правилима из параграфа* **32**, *помоћу пруга неког спектра повезаног са функцијом* f(z) *и уз помоћ релације која постоји између целих бројева који образују пруге коефицијената* a_n.

Тако се Кошијев интеграл

$$J_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

узет дуж круга C чији је центар $z = a$ и у коме је функција $f(z)$ холоморфна, изражава, кад год је његова вредност неки *цео број*, непосредно као цео број који образује одређену пругу неког спектра функције $f(z+a) - f(a)$ (при чему се не узима у обзир знак интеграла J_n).

Кад бројеви J_n нису цели, $f(z)$ ће се заменити својим трансформатом који одговара некој трансформацији $\Delta[f]$ сагласној са $f(z)$.

Исто тако, интеграл облика

$$J_n = \int_a^b u v^n dt, \tag{156}$$

(где су u и v функције од t) добиће се помоћу пруга извесног спектра, кад се уочи да се интеграли y_n подударају са коефицијентима развоја функције

(157) $$f(z) = \int_a^b \varphi(vz) u dt$$

по степенима променљиве z, где је $\varphi(z)$ једна од функција

(158) $$\varphi(z) = \frac{z(z^m - 1)}{z - 1}, \quad \varphi(z) = \frac{1}{1 - z},$$

према томе да ли је низ J_n ограничен или неограничен.

ДРУГИ НАЧИН. – У случају кад неки интеграл J сам по себи представља спектар, са познатим ритмом h_k, извесног познатог низа целих бројева $M_0, M_1, M_2, \ldots$, *он ће имати као нумеричку вредност број* M_0 *коме, као целом делу, следи низ децимала који се образује ређајући, једну уз другу, нумеричке групе* $\mathrm{G}_0, \mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \ldots$ *које одговарају низу* M_k *и ритму* h_k, *пошто је претходно реалним и имагинарним деловима бројева* M_k *додељен позитиван знак.*

Такав је, на пример, случај интеграла

$$J = \int_a^b \varphi(10^{-h} v) u dt,$$

када су интеграли J_k, дефинисани са (156), цели бројеви чији број цифара не прелази h; интеграл, посматран као спектар бројева J_k са ритмом $h_k = h$, имаће као цео део вредност J_0, а за децимални део $G_1 G_2 G_3 \ldots$ где је G_k цео број J_k испред кога је стављено онолико нула колико је потребно да број цифара нумеричке групе буде једнак h.

Такав је, такође, случај интеграла

(159) $$J = \int_a^b \xi(v) u dt,$$

где, са произвољним неограниченим низом h_k целих позитивних бројева, $\xi(z)$ означава целу функцију

(160) $$\xi(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} g_n z^n, \quad g_n = 10^{-h_1 - h_2 - \ldots - h_n}.$$

Када је J_n рационалан број облика $\frac{M_n}{n}$ (M_n = фиксиран или променљив са n цео број), $\xi(z)$ ће бити замењено са $z\xi'(z)$ (видети такође *четврти пример* у параграфу 6).

Узимајући за бројеве h_k један низ целих бројева који довољно брзо расте са рангом, имаће се тако бесконачно много интеграла (159) који се изражавају помоћу *трансцендентних Лиувилових бројева* (параграф **14**).

Интеграли облика

$$J = \int_0^\infty e^{-t^2} \psi(\alpha, \beta t)\, dt, \tag{161}$$

где је $\psi(r, \varphi)$ реални део функције $f(r, e^{\varphi i})$, при чему се функција $f(z)$ може развити у ред по степенима промењиве z чији су коефицијенти цели бројеви, за извесне вредности константи α и β израчунавају се као спектри коефицијената функције $f(z)$ са извесним униформно убрзаним ритмом (§ **5**). У случају, на пример, када је $f(z)$ рационална функција која представља скуп $m < 100$ првих чланова Ламбертовог реда (§ **32**), уколико се стави

$$\alpha = 0{,}01, \quad \beta = \sqrt{2}\log nat 10,$$

интеграл J ће имати вредност $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ помножену бројем

0,01620200302040204030402004004050206020б...

чији је децимални део написан ређањем једне уз другу група $G_1, \ldots, G_m$, где је G_k једнако броју делилаца броја k, испред кога је стављено онолико нула колико је потребно да укупан број цифара у групи G_k буде $2k$.

V. – Спектрално одређивање функција

34. Уобичајени поступци одређивања неке аналитичке функције помоћу *дискретних услова* изискују, уопште узев, *бесконачно много* нумеричких података, какви су, на пример, коефицијенти Тејлоровог реда, тригонометријског, експоненцијалног реда итд., који одговара функцији.

Г. Борел је указао на различите друге начине одређивања *целе* функције $f(z)$ помоћу дискретних услова, на пример коришћењем вредности које узима $f(z)$ за један дискретан низ вредности промењиве z, уз додавање једног скупа (C) допунских услова квалитативне природе који се односе на начин рашћења функције са z[21].

[21] E. Borel, *Sur l'interpolation*, C. R. Acad. se. 1897, 1er sem.. p. 6–3–676.

У досада познатим начинима одређивања функција помоћу сличних услова, број нумеричких података само је изузетно *ограничен,* у сасвим посебним случајевима кад се унапред зна аналитички облик функције до на ограничен број константи (на пример, у случају кад се функција своди на алгебарски, експоненцијални, тригонометријски полином, итд.).

Но, спектрална метода открива бесконачно много категорија функција чије се одређивање своди *на проблем који зависи од ограниченог броја параметара*, под условом да се овоме дода известан скуп (*D*) услова који се односе само на *знаке.*

Ово ћемо прецизирати у оном што следи.

Сматраћемо функцију $f(z)$ једне променљиве z *нумерички одређеном* ако, кад се у њој прецизира скуп знакова који остају неодређени, свакој *нумеричкој* вредности променљиве z одговара једна *нумеричка* вредност функције $f(z)$.

Сматраћемо неку категорију (*f*) функција *категоријом са* m *параметара* ако се, додељујући одређене нумеричке вредности свакој од m међусобно независних променљивих, које оставља *произвољним* дефиниција категорије (*f*), производи нумерички одређена функција која припада категорији, и то тако да свака функција из категорије може на тај начин бити произведена.

Спектрална метода тада доводи до резултата који ће бити изложени у ономе што следи.

Најпре, *категорија* (*E*) аналитичких функција $f(z)$ које се могу развити у ред степена променљиве z, чији су коефицијенти M_n *цели бројеви*, може се сматрати као категорија *са два параметра*. Ти параметри су:

1. цео број β који није мањи од броја M (чије је постојање обезбеђено чињеницом да полупречник конвергенције реда није једнак нули), таквог да $|M_n|$, или $\sqrt[n]{|M_n|}$, не прелази 10^M ни за једну вредност n;

2. вредност S коју за $z = 10^{-\beta}$ узима једна функција на погодан начин доведена у везу са $f(z)$; број S није ништа друго него спектар функције $f(z)$ са униформним ритмом $h_k = \beta$, или са униформно убрзаним ритмом $h_k = \beta k$.

Од два броја S и β, први се може мењати *непрекидно* од нуле до бесконачности, а други на *прекидан* начин од једне позитивне вредности до бесконачности. Кад је дат пар нумеричких вредности (S, β), функција $f(z)$ је нумерички одређена правилима из параграфа **32**.

Било која друга категорија функција (*f*) допушта трансформације $\Delta[f]$ које успостављају извесну кореспонденцију између функција ове категорије и категорије (*E*) (§ **16–19**). Трансформација $\Delta[f]$ сагласна са $f(z)$ повлачи извесну релацију (*f, E*) између функције $f(z)$ и њеног трансформата (E), преко изведене трансформације $\Delta[f]$. Ова релација може увести известан број промењљивих параметара γ_i у функцију $f(z)$ коју она одређује, а ти параметри могу потицати: 1. од параметара укључених у саму трансформацију $\Delta[f]$; 2. од нових неодређених константи које уводи релација (f, E) = 0, на пример интеграцијом, знаковима неког реда које је одговарајућа рекурентна релација оставила неодређене, итд.

Број q параметара γ_i је више или мање велики, за једну исту категорију (f), према томе која је трансформација $\Delta[f]$ примењена, и може варирати од нуле до бесконачности. *Спектралним индексом* категорије (f) назваћемо, и означити са δ, најмањи од бројева $q + 2$ који на овај начин одговарају категорији (f) при различитим трансформацијама $\Delta[f]$ сагласним са (f).

Спектрални потупак одређивања функција доводи онда до следећег правила:

Категорију функција (f) *треба сматрати категоријом чији је број параметара једнак њеном спектралном индексу.*

Параметрима се могу сматрати: 1. параметри γ_i које уводи трансформација $\Delta[f]$ компатибилна са (f) којој одговара најмањи број q; 2. два параметра S и β категорије (E).

Спектрални индекс δ *категорије* (f) *показује, дакле, број услова који су неопходни за потпуно нумеричко одређивање неке партикуларне функције, која припада категорији* (f), *спектралним поступком.*

Условом треба сматрати сваки услов који одређује:

1. неку нумеричку вредност β_0 параметра ритма β сагласног са коефицијентима функције (E) у кореспонденцији са $f(z)$;

2. неку нумеричку вредност броја S која представља спектар од (E) са ритмом $h_k = \beta_0$ или $h_k = \beta_0 k$;

3. нумеричку вредност једног од параметара γ_i.

35. Вредност спектралног индекса битно зависи од *особености аритметичке природе* које су карактеристичне за развој опште функције посматране категорије (f) у ред одређеног реда, у околини једне тачке $z = x$ z – равни. *Ове особености су оне које се односе на начин заједничког одређивања коефицијената реда који су цели бројеви*; тај начин сажето се исказује обликом трансформације $\Delta[f]$ сагласне са f.

Тачка x, ако друго није прецизирано дефикцијом категорије, и сама игра улогу параметра за (f), а индекс δ се овом чињеницом увећава за један.

Из онога што претходи и из правила у параграфима **16** и **21** излазе као последице следеће чињенице.

I. – Нека спектрални индекс *категорије* (E) износи $\delta = 2$: партикуларна функција из ове категорије одређена је са два услова. На пример, лук неке равне криве потпуно је одређен као функција апсцисе x условом да се може развити у ред по степенима променљиве x са целим коефицијентима наизменично позитивним и негативним и мањим од 100 и да је његова дужина између тачака $x = -0.01$ и $x = 0$ једнака обиму круга чији је полупречник 1.

II. – Спектрални индекс категорије функција које се могу развити у ред по степенима променљиве z са коефицијентима a_n који имају ограничен број децимала износи $\delta = 3$. Параметри су: β, S и цео број g који означава неку горњу границу броја децимала коефицијената a_n.

III. – Спектрални индекс категорије (f) образоване од *алгебарских* функција чији су коефицијенти a_n *рационални* износи $\delta = 4$. Параметри су: β, S и два параметра γ_1 и γ_2 трансформације

$$\Delta[f] = \gamma_1 f(\gamma_2 z),$$

сагласне са овом категоријом функција.

IV. – За категорију функција са коефицијентом a_n једнаким децималном разломку чији се број γ_1 цифара непериодичног дела и број γ_2 цифара у периоду *не мењају са* n, имамо

$$\delta = 4.$$

Параметри су: $\beta, S_1, \gamma_1, \gamma_2$ (правило I, § **16**).

V. – Када су коефицијенти a_n p-ти корени целих бројева (при чему је p фиксиран цео број), тада је

$$\delta = 4 \quad \text{(са параметрима } \beta \text{ и } S).$$

VI. – Када су коефицијенти a_n облика $M_n \varphi_n$, где су M_n цели бројеви а φ_n разломљени бројеви са q параметара, имамо

$$\delta = q - 2.$$

Тако је за $a_n = \dfrac{M_n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}$,

$$\delta = 2;$$

за $a_n = (\gamma_1 + \gamma_2 n)^{\gamma_3} M_n$

$$\delta = 5.$$

VII. – Спектрални индекс функција y које задовољавају *дату нумеричку релацију*

$$F(z, u, y) = \sigma, \tag{162}$$

где u означава *произвољну* функцију из неке категорије (u) са спектралним индексом δ_1 и сам је једнак $\delta = \delta_1$.

Тако су две функције u и y нумерички одређене једном неодређеном једначином (162) и са следећа два услова:

1. да се једна од њих може развити у ред по степенима променљиве z са целим коефицијентима који немају више од m цифара; 2. да једна од њих узима дату нумеричку вредност за $z = 10^{-m}$.

VIII. – Спектрални индекс функције y које задовољавају *неодређену диференцијалну једначину*

$$(163) \qquad F(z,u,y,y',\ldots,y^{(p)}) = 0, \quad y^{(k)} = \frac{d^k y}{d_x k},$$

где је F *дата* функција са *нумеричким* коефицијентима а u је произвољна функција из неке категорије (u) са m параметара, једнак је

$$\delta = m + p.$$

На тај начин, функција y нумерички је одређена једначином (163) и следећим условима:

1. да се u може развити у ред по степенима променљиве z са целим коефицијентима који немају више од l цифара; 2. да, било u и $p-1$ од променљивих $y, y', \ldots, y^{(p)}$ које фигуришу у (163), било p променљивих $y, y', \ldots, y^{(p)}$, узимају за $z = 10^{-e}$ унапред дате нумеричке вредности.

На пример, проблем одређивања равне криве $y = f(x)$ чија се субтангента може развити у ред по степенима променљиве x са коефицијентима који су позитивни цели бројеви са не више од l цифара, и која у тачки $x = 10^{-e}, y = y_0$ има дужину једнаку обиму круга чији је полупречник 1 – потпуно је одређен проблем. Та крива дефинисана је једначином

$$(164) \qquad y = \frac{y_0}{\varphi(10^{-h})} \varphi(x),$$

где су коефицијенти функције

$$(165) \qquad \varphi(x) = 1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \ldots$$

одређени рекурентном формулом

$$(166) \quad (n+1)M_0\lambda_{n+1} + nM_1\lambda_n + (n-1)M_2\lambda_{n-1} + \ldots + M_n\lambda_1 = \lambda_n,$$

са $M_0 = 6$ и са M_n које је једнако n-тој групи са l децимала броја 2π. У случају кад је $l = 1$, имамо

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x}{6} - \frac{x^2}{72} - \frac{31}{432} x^3 + \ldots,$$

при чему је коефицијент λ_n уз x^n одређен помоћу рекурентне релације (166), у којој је $M_0 = 6$ а M_n једнако је n-тој децимали броја 2π.

IX. – Претходна правила не мења чињеница да је $z = 0$ алгебарска критична тачка функције $f(z)$ око које се пермутује дати број μ грана функције f, при чему се развој у ред по степенима променљиве z замењује развојем по степенима од $z^{\frac{1}{n}}$.

X. – Када је, код ових правила, $z = 0$ пол датог реда p функције $f(z)$, спектрални индекс δ категорије (f) увећава се за број p (због p параметара b_k који фигуришу као коефицијенти уз p чланова $b_k z^{-k}$).

XI. – Свака аналитичка функција $f(z)$ може бити представљена у датом кругу C_α чији је центар обична тачка $z = \alpha$ функције f и у коме је функција холоморфна, са унапред датом тачношћу, једном посебном функцијом из извесне категорије функција са спектралним индексом $\delta = 2$, или једним полиномом по z са спектралним индексом $\delta = 3$ (§ 19–23).

XII. – Сингуларитети било какве аналитичке функције, садржани у датом кругу C_α чији је центар обична тачка $z = \alpha$ функције f, исти су као сингуларитети једне одређене функције из категорије са спектралним индексом $\delta = 2$ (§ 18).

XIII. – Нуле функције $f(z)$ која је мероморфна у кругу C_α подударају се са половима једне одређене функције из категорије чији је спектрални индекс $\delta = 2$ (§ 18).

36. Претходна разматрања уводе параметре који наизглед противрече уобичајеном појму *променљивих параметара*. Категорија (E) функција које се могу развити у степени ред чији су коефицијенти цели бројеви појављује се, према уобичајеним схватањима, као категорија математичких бића која зависе од *бесконачно много* параметара који су управо сами коефицијенти овог развоја, једино подвргнути услову да буду цели бројеви M_k такви да се $\sqrt[k]{|M_k|}$ не увећава бесконачно са k. Томе насупрот, у спектралној методи одређивања функција, ови исти параметри појављују се као *сегменти једног истог децималног броја* S, при чему се сваки сегмент састоји из одређене групе узастопних децимала броја S. Тај број није ништа друго него један *спектар* посматране функције: начин његове *поделе на сегменте*, којом S даје, до на знак, низ коефицијената функција, варира на дисконтинуирани начин заједно са другим параметром β – једним позитивним бројем који карактерише број S.

Два броја S и β заиста играју улогу два променљива параметра категорије (E) функција: њихова промена доводи до прелаза са једне посебне функције (E) на другу, а свака функција ове категорије може бити добијена на тај начин. Постоји чак (до на знак коефицијената) *реципрочна и унивока кореспонденција* између функција (E) и бројева S и β: двема различитим функцијама (E) одговарају два различита пара вредности (S, β), и обрнуто.

Параметар S *тако кондензује један ограничен или неограничен број параметара у само један низ цифара*, а његово континуирано варирање, произведено *дисконтинуираним* варирањем његових цифара, заједно са дисконтинуираним варирањем параметра β, производи бескрајну разноврсност функција (E) (не испуштајући ниједну од њих), па самим тим и бескрајну разноврсност других категорија функција доведених у везу са функцијама (E).

Противречност са уобичајеним схватањем променљивих параметара очигледно је само привидна: у ствари, управо је *бесконачно много* нумеричких података које садржи спектар S под видом *само једног податка,* чији сегменти, погодно разграничени, откривају вредности које се имају приписати бесконачном броју параметара (они су коефицијенти реда) потребних да се задовоље услови проблема. Ова чињеница мало се разликује од оне која се појављује у вештини проблема – загонетки и којом онај који га решава у тренутку одређује *неколико* замишљених бројева на основу само једног нумеричког податка који му се казује и чији му различити одсечци откривају онолико података колико има непознатих.

37. Као што се види, *нумерички спектри* бацају неку светлост на *улогу коју играју низови цифара у одређивању функција*. На ову улогу већ је указао г. Борел у својим дубоким разматрањима која се односе на појам функције уопште. Сматрамо корисним да, на овом месту, репродукујемо нека од његових разматрања због веза које са њима имају идеје развијене у овом последњем делу нашег рада, који се односи на приказивање функција помоћу низа цифара.

Функција f од n променљивих $x, y, z, t, \ldots$, *која никаквом ограничењу није подвргнута*, може бити дефинисана само условом да сваком систему вредности у променљивих $x, y, z, t, \ldots$ одговара једна добро дефинисана вредност функције f. (Могли би се, уосталом, посматрати само системи вредности који припадају извесном домену; за остале функција не би била дефинисана. Могло би се такође претпоставити да, општије, f узима више вредности, или, штавише, пребројиву бесконачност ових, за дате вредности променљивих). Број променљивих од мале је важности у таквој концепцији функције; познато је, заиста, да скуп тачака простора има исту моћ као скуп тачака неког ограниченог сегмента праве, за који се увек може претпоставити да је садржан између вредности 0 и 1. Ако, тако, систему вредности $x, y, z, t, \ldots$ одговара вредност X садржана између 0 и 1, довољно је ставити

$$f(x, y, z, t, \ldots) = \varphi(x)$$

да би се дефинисала функција $\varphi(x)$ *само једне променљиве* X, која има добро одређен начин одговара функцији

$$f(x, y, z, t, \ldots).$$

Ова кореспонденција је узајамна и једнозначна: будући да се две функције сматрају различитим кад узимају различите вредности бар *у једној* тачки у којој су дефинисане, двема различитим функцијама $f(x, y, z, t, \ldots)$ одговарају две различите функције $\varphi(x)$, и обрнуто.

С друге стране, *може се моћ скупа* $\varphi(x)$ *свести на моћ само једног бесконачног низа цифара*. Према томе, не уводе се озбиљна ограничења кад се претпостави да функција $\varphi(x)$ стално узима вредности између 0 и 1. Ако се, на пример, та вредност напише у систему нумерације са основом 2, она ће имати облик

$$\varphi(x) = 0{,}10100111\ldots,$$

тј. све цифре ће бити једнаке 0 или 1. А како су, будући да је X било који број између 0 и 1, сви позитивни бројеви облика $n + X$, где је n цео број, могуће је помоћу $\varphi(x)$ дефинисати један скуп тачака, на следећи начин: *тачка* $\mathrm{n} + \mathrm{X}$ *припада скупу ако је, у вредности* $\varphi(\mathrm{x})$, n-*та цифра иза запете једнака* 1, *а не припада му кад је ова* n-*та цифра једнака* 0.

Свакој функцији $\varphi(x)$ одговара један такав скуп, који је, уосталом, јединствен; обрнуто, сваком таквом скупу одговара јединствена функција $\varphi(X)$. Ово се може изразити кад се каже да *скуп функција* $\varphi(\mathrm{x})$ *има моћ која је највише једнака моћи скупа свих скупова реалних бројева*, или чак, ако се тако хоће рећи, моћи скупа свих скупова тачака између 0 и 1.

Докле год остајемо код општег случаја, проблем установљавања, овим поступком, да ли су две функције $\varphi(X)$ и $\varphi_1(X)$ идентичне или различите, скопчан је са несавладљивим практичним тешкоћама. Није, заиста, могуће доћи до методе којом би се, уколико су оне различите, то са сигурношћу могло утврдити после *коначног* броја операција; разлог за ово је чињеница да континуум није пребројив.

Али кад су функције $\varphi(X)$ и $\varphi_1(X)$ непрекидне, ситуација је што се овог тиче сасвим другачија. Заиста, ако се две такве функције подударају за све *рационалне* вредности променљиве X, оне се подударају за све вредности ове променљиве; дакле, ако оне нису идентичне, то ће сигурно бити примећено разматрањем само рационалних вредности независно промењиве X: *постоји* свакако рационалан број $\frac{p}{q}$ такав да се бројеви $\varphi\left(\frac{p}{q}\right)$ и $\varphi_1\left(\frac{p}{q}\right)$ разликују, што ће рећи да им се подудара само првих m децимала, где је m одређен број.

Отуда, ако се сви рационални бројеви поређају у један низ $u_1, u_2, u_3, \ldots$, што се може учинити, и ако се израчунају вредности

$$\begin{cases} \varphi(u_1), \varphi(u_2), \varphi(u_3), \ldots, \\ \varphi_1(u_1), \varphi_2(u_2), \varphi_3(u_3), \ldots, \end{cases} \tag{167}$$

са n тачних децимала, догодиће се нужно, кад се та операција изведе за $n = 1, 2, 3, \ldots$, да ће, за неку *коначну* вредност n, тј. после *коначног* броја операција, бити сигурно да ове две функције нису идентичне. Уосталом, очигледно је да тај број неће бити унапред познат и да се, стога, рачунима, ма колико они били дуги, неће установити идентичност ових функција. Али ако се оне разликују, сигурно је да ће се то приметити уз довољно истрајности[22].

Но, спектрална метода управо даје један *ефикасан* начин одлучивања, самим разматрањем *спектара*, тј. једног скупа чија је моћ највише једнака моћи скупа свих скупова позитивних реалних бројева, да ли су две функције φ и φ_1 које припадају једној истој *спектралној категорији* (§ **39**) идентичне или различите. Штавише, спектри омогућују не само *разликовање* функција из једне категорије, него и образовање партикуларних функција из категорије са којом су они у вези.

38. Оно што претходи истиче могућност и корисност класификације функција $f(z)$ према начину на који се коефицијенти a_n могу сви заједно трансформисати у *целе бројеве*, тј. према начину на који се функција може учинити *доступном анализи* спектралном методом (реч је о спектралној класификацији функција). Како се тај начин може резимирати у облику трансформације $\Delta[f]$ сагласне са f, две функције $f_1(z)$ и $f_2(z)$ би припадале истој спектралној *категорији* (f) ако за сваку од њих постоји најмање једна тачка у z-равни таква да у њеној околини обе функције допуштају исту трансформацију $\Delta[f]$, која се од једне до друге разликује само нумеричким вредностима извесног броја параметара које садржи.

Додавање једне произвољне функције (E) произвољној функцији из категорије (E), као и множење произвољном функцијом (E), даје

[22] E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonetions*, Paris 1914; Note III: *La notion de fonction en géneral*, pp. 123–126.

функцију из исте категорије. Исто то важи и за диференцирање произвољан број пута, као и за замене независно променљиве којима се постиже множење коефицијената a_n целим бројевима. *Скуп функција категорије* (E) *образује, дакле, групу у односу на ове операције.* Поље таквих операција шири се, уосталом, и за друге спектралне категорије функција.

У претходним параграфима разматрани примери јасно указују на известан број спектралних категорија функција. Такве би биле, на пример, следеће категорије: функције које се могу развити у степене редове чији су коефицијенти a_n цели бројеви или бројеви са коначним бројем децимала; функције код којих су коефицијенти a_n p-ти корени целих бројева; функције чији су коефицијенти a_n рационални бројеви чији се именилац не увећава брже од $10^{n\alpha}$ (α = позитивна константа) и има само ограничен број простих чинилаца (категорија која садржи све алгебарске функције са рационалним коефицијентима a_n); функције са рационалним коефицијентима a_n чији бројеви цифара у непериодичном делу и у периоду остају коначни, или пак поседују неку унапред дату правилност, или се не увећавају брже од дате функције $\varphi(n)$, итд.

Метода г. Гомеза Теиксеира и г. Хурвица, у циљу прецизирања облика коефицијената a_n карактеристичних за функције које задовољавају неку диференцијалну једначину

$$f(x,y,y',\ldots,y^{(p)}) = 0$$ [23]

алгебарску по $x,y,y',\ldots,y^{(p)}$, доводи до тога да се за све аналитичке функције које *нису хипертрансцендентне* и имају *рационалне* коефицијенте a_n – сматра да припадају једној истој категорији (y) функција са коначним индексом, итд.

Значај једне такве класификације, и поред њеног вештачког карактера, састојао би се у могућности коју пружа за одређивање функција помоћу *веома општих* услова који, у једном другом начину класификовања, зависе од *бесконачног броја параметара помоћу коначног броја нумеричких података.* А може се претпоставити да ће продубљена истраживања довести до занимљивих резултата који ће се односити на релације између *аритметичких* својстава коефицијената a_n, која карактеришу категорију, и *величине индекса* δ *категорије*, који представља минимални број ових података.

Као што се види, спектрални поступак одређивања функција своди се, углавном, на то да се функција посматра у кореспонденцији са

[23] Annales de l'Ecole Normale supérieure, 1885 et 1889.

неком тачком *функционалног простора*, у коме би једна спектрална категорија функција представљала једно *функционално поље* и где би једна одређена *трансформација* $\Delta[f]$, примењена на f, *ефективно* успостављала кореспонденцију између функције и тачке. Трансформација $\Delta[f]$ би тако играла за тачке функционалног простора улогу аналогну оној коју за тачке простора игра нека пунктуална трансформација. Могуће је да $\Delta[f]$ има смисла и дефинисано је само у једном функционалном пољу, као што у обичној геометрији нека пунктуална трансформација може бити дефинисана само за тачке једне области простора, површине, линије[24] .

[24] Што се тиче опште теорије трансформација, погледати VIII главу књиге *La série de Taylor et son prolongement analytique* par M. J. Hadamard, *Scientia* n° 12, Gauthier-Villars, Paris, 1901.

Од балканских ратова, па до почетка 1919. године, Михаило Петровић (у средини) није скидао официрску униформу инжењеријског капетана у резерви. И поред тога, успевао је да разрађује своје идеје, долази до нових решења у рачунарству, а пре свега, до проналаска нумеричког спектра.
(Аутор фотографије непознат)

RÉPUBLIQU

UNIVERSITÉ DE PARIS

Année sco

M. MICHEL PETROVI

de Belgrade, agréé à l'Univers

sur le sujet suivant :

LES SPECTRES

I. — SPECTRE DES NOMBRES

Notion générale du spectre.
Spectre d'un ensemble dénombrable d'éléments.
Cas particulier où les éléments sont des nombres entiers positifs.

II. — SPECTRE DES FONCTIONS

Fonctions classées d'après la forme de leur élément analytique.
Spectre de la fonction considérée comme individu d'une classe :

a) Fonctions quelconques d'une variable representables analytiquement;

Les Lundis et Mardis, à 10

PREMIERE CONFERE

Vu et approuvé : *Le Recteur, Président du Conseil de l'Universit*

S. CHARLÉTY.

Paris. Imprimerie CHAIX (Succurs

FRANÇAISE

FACULTE DES SCIENCES

e 1927-1928

CH, Professeur à l'Université
de Paris, fera des conférences

MATHÉMATIQUES

b) Fonctions d'une variable dont l'élément analytique ne contient, en fait de paramètres, que les nombres entiers;

c) Fonctions d'une variable, transmutables en fonctions *b*;

d) Fonctions de plusieurs variables

III. — LA MÉTHODE SPECTRALE

Problèmes arithmétiques.
Détermination spectrale des fonctions.
Analogies Spectrales.

1/2, Amphithéâtre Le Verrier

E, LE 5 MARS 1928

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

A. MAURAIN.

, 11, boulevard Saint-Michel. — 839-28.

ПРЕДАВАЊА О МАТЕМАТИЧКИМ СПЕКТРИМА

LEÇONS

SUR LES

SPECTRES MATHÉMATIQUES

PROFESSÉES A LA SORBONNE EN 1928

PAR

Michel PETROVITCH

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE BELGRADE

PROFESSEUR AGRÉÉ A L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C^ie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1928

Између два рата математичари филозофског факултета у Београду позивани су на стране универзитете да држе предавања из научних области којима се баве. Овим маниром страни свет је испољавао велико признање научним резултатима који су настали у Београду. Тако су позната семестрална предавања Јована Карамате (Гетинген, Париз, Женева), Николе Салтикова (Брисел), Милутина Миланковића и, дакако, Михаила Петровића (Париз, Единбург, Брисел, Женева). Насловна страна Петровићевих штампаних ***Предавања*** *на Сорбони школске 1927/28. године..*

ПРЕДГОВОР

Ова књига садржи материју предавања која сам одржао на Сорбони у току другог семестра 1927–1928. школске године. Она је посвећена једној грани математике која, ако се тако може рећи, тек чини своје прве кораке: односима између два главна математичка бића, функције и броја.

Данас представља добро познату чињеницу да је све проблеме који се могу поставити у проучавању функција дефинисаних помоћу пребројивог скупа услова, у ***принципу****, могуће пренети на проблеме који се односе на дефинисање само једног децималног броја. Али овај теоријски увид стиче свој пуни значај тек кад се* ***на конкретан начин*** *дефинише кореспонденција која се може успоставити између функције и децималног разломка. „Ту постоји једно неограничено поље истраживања, у коме се главна тешкоћа састоји у избору занимљивих и плодних логичких форми међу бесконачно много њих које нам се нуде“ (Е. Борел).*

У овим ***Предавањима*** *изложио сам, у онолико једноставном облику колико је то било могуће, прве елементе теорије* ***математичких спектара****, који се управо надовезују на претходне идеје.*

Нека ми буде допуштено да овај свој рад предам јавности уз одавање поштовања и захвалности господи професорима париског Факултета наука, од којих су неки моји некадашњи и уважени учитељи.

Париз, маја 1928. Михаило Петровић

ПРВИ ДЕО

СПЕКТРИ СКУПОВА БРОЈЕВА

СПЕКТРИ ПРЕБРОЈИВИХ СКУПОВА

1. ***Општи појам спектра.*** – По аналогији са терминима који се користе у физици, назваћемо, уопште, *спектром* неке колекције (O) конкретних или апстрактивних објеката $O_1, O_2, O_3, \ldots$ линеарни низ, ограничен или неограничен, знакова $m_1, m_2, m_3, \ldots$, у извесној кореспонденцији са објектима O_k, кореспонденцији која се састоји у томе што један објект O_k одређује једнозначно једну групу знакова m_k и обрнуто, ова група знакова m_k одређује објект O_k, уз услов да сви објекти O_k и сви знаци m_k могу тако бити одређени.

Као пример спектра колекције (O) конкретних објеката, подсетићемо на *оптички спектар* неке мешавине супстанци, на пример на емисиони спектар карактеристичан за изворе светлости, или на апсорпциони спектар карактеристичан за средине кроз које светлост пролази. Ту улогу групе знакова m_k играју спектралне линије, пруге и зоне, светли и тамни делови, итд. Тако је свака светла линија сведок постојања, у зрачењу светлости, треперења одређене учесталости, као што нам свака жица клавира која трепери под дејством неког спољашњег звука открива присуство, у комплексном трепераном кретању које производи тај звук, једног специјалног треперења клатна. Светлост обојена неком супстанцом даје, после проласка кроз известан дисперзиони апарат (кроз призму, на пример), спектар који образују обојене линије чији број, положај, ширина, боја и интензитет зависе од супстанце којом је светлост обојена. Један исти хемијски елемент даје, у истим физичким околностима, увек исти спектар, тако да особености спектра омогућују распознавање елемената који чине неку мешавину. Тако, на пример, Фраунхоферове линије у Сунчевој светлости карактеришу извесне елементе који образују атмосферу Сунца; тако су спектри ретких земаља довели до проналаска неколико елемената, које су откриле извесне линије са одређеним положајем и физичким карактеристикама.

Као пример спектра колекције (O) апстрактних објеката, навешћемо *спектар неког скупа бројева*. Познате су, на пример, они проблеми – загонетке који се, забаве ради, постављају у друштвима, а у којима онај ко рачуна (решава проблем) успева да погоди више замишљених бројева на основу само једног бројног податка који му се саопштава и који представља завршни резултат рачунања коме није присуствовао. Јасно је да су ти елементарни проблеми само веома специјални случајеви једног општег проблема, који се може решити коришћењем исте досетке – на погодан начин уопштене, а која се састоји у нумеричком израчунавању једног ограниченог или неограниченог низа непознатих, а самим тим и неке непознате функције, помоћу низа цифара једног истог броја S, *спектра непознатих.*

На тај начин, број

$$S = \left(\frac{101}{100}\right)^6 = 1{,}061520150601$$

представља спектар низа коефицијената бинома $\binom{6}{k}$ група значајних цифара броја S која почиње $(2k-1)$-вом а завршава се $(2k)$-том цифром – представља вредност $\binom{6}{k}$.

Број

$$\begin{aligned} S &= 10^{-36}1001001^6 \\ &= 1{,}006021050090126141126090050021006001 \end{aligned}$$

представља спектар коефицијената развоја по степенима променљиве x функције

$$(1 + x + x^2)^2;$$

ако се његов децимални део подели на одсечке са по три цифре, k-ти одсечак даје коефицијент уз x^k.

Ако се са 9_k означи цео број добијен кад се цифра 9 напише k пута узастопно $(9_1 = 9, 9_2 = 99, \ldots)$, број

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{9_2} + \frac{1}{9_4} + \ldots + \frac{1}{9_{200}} - \frac{1}{100} \cdot \frac{9_4}{9 \cdot 9_2} \\ &= 0{,}00000001002000201020004000202030004000402020006 01\ldots \end{aligned}$$

представља спектар повезан са простим бројевима: ако се децимални део броја S подели на одсечке са по две узастопне цифре и ако се лакуном (празнином) назове сваки одсечак који образују искључиво нуле, тада је број лакуна у скупу првих k одсечака тачно једнак броју простих бројева који нису већи од k, и то за сваку вредност $k \leq 100$.

Кад су вероватноће два супротна догађаја A и B редом $p = \frac{2}{3}$ и $q = \frac{1}{3}$, број

$$\begin{aligned} S &= (2+10^{-5})^{10} - 2^{10} \\ &= 0{,}051201152015360134400806403360009600\ldots \end{aligned}$$

представља спектар вероватноћа повезаних са та два догађаја. Вероватноћа да се, у 10 проба, догађај A деси $(10-k)$ пута (а B k пута) добија се кад се фиксираним бројем $M = 59049$ подели група децимала броја S која почиње $(5k+1)$-вом а завршава се $5(k+1)$-том децималом.

Сваки пут кад се Кошијев интеграл

$$I_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz$$

(узет дуж неке контуре C која обухвата тачку $z = \alpha$ и унутар које је функција f холоморфна) изражава за $n = 0, 1, 2, \ldots$ целим позитивним бројевима са једном или две цифре, вредност

$$S = f\left(\alpha + \frac{1}{100}\right)$$

игра улогу спектра низа $I_0, I_1, I_2, \ldots$ Број I_0 ту се подудара са целим делом броја S, а I_n је број MN, где је M $(2n-1)$-ва и N $(2n)$-та децимала броја S.

Број π укључује се у својству спектра непознате функције у следећи привидно неодређен проблем: одредити равну криву $y = f(x)$ чија се субнормала може развити у ред по степенима променљиве x са целим позитивним и од броја 10 мањим коефицијентима, и има у тачки $x = \frac{1}{10}$, $y = y_0$ дужину једнаку полуобиму круга чији је полупречник 1. Та крива дефинисана је једнакошћу

$$y = \sqrt{2}\sqrt{C + \varphi(x)},$$

$$\varphi(x) = M_0 + \frac{M_1}{2}x + \frac{M_2}{3}x^3 + \ldots,$$

где је M_k k-та децимала броја π, а константа C има вредност

$$C = \frac{y_0^2}{2} - \varphi(0,1).$$

Назваћемо, уопште, *математичким спектром* неког скупа елемената e_k број S који је у таквој кореспонденцији са елементима e_k да елемент e_k одређује неку групу узастопних децимала, и обрнуто, та група децимала одређује елемент e_k, уз услов да сви елементи e_k и сви децимали броја S могу тако бити одређени.

У току ових *Предавања* показаћемо неке опште поступке формирања математичких спектара скупова бројева и функција, као и начин на који се тако образовани спектри могу користити у решавању проблема аритметике и анализе.

2. ***Један општи поступак формирања спектара.*** – Посматрајмо неки скуп (U) чији сваки елемент u има ограничен број индекса, при чему сваки индекс узима све позитивне целе вредности. Увек се могу, на познати начин[1], елементи у поређати u линеарни (једноструки) низ (V), у коме би сваком елементу v био додељен само један индекс, уз биуинвоку кореспонденцију између елемената у (U) и (V). Поступак се састоји у посматрању скупа свих елемента

$$u_{m_1, m_2, \ldots, m_p},$$

где индекси $m_1, m_2, \ldots, m_p$ узимају све позитивне целе вредности. У том скупу постоји ограничен број елемената, таквих да је

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n,$$

где је n одређен позитиван цео број. Ако се редом узима да је

$$n = p, p+1, p+2, \ldots,$$

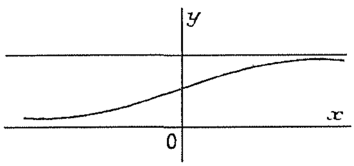
сваки пут ће се имати ограничен број елемената који ће моћи бити поређани у истом реду, једни у продужетку других. Прво ће се написати елемент $u_{1,1,\ldots,1}$, који одговара вредности $n = p$, затим елементи који одговарају вредности $n = p + 1$ (ређајући их у било ком поретку), затим они који одговарају вредностима $n = p + 2$, итд. Како се, за сваку вредност n, исписује само коначан број елемената, сваки елемент скупа заузеће у овом низу одређено место, тј. добиће одређени коначан ранг, будући да је тај низ добијен за неку коначну вредност за n. Тада, дакле, елементе $u_{m_1, m_2, \ldots, m_p}$ за елементе v_m везује биунивока кореспонденција.

[1] E. Borel, *Leçons sur la Théorie des fonctions*, 2. ed. pp 8–9.

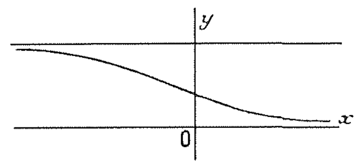
Но, добро је позната чињеница да, уколико је (V) неки пребројиви скуп елемената v_m, скуп (C) таквих скупова има моћ континуума, што значи да је могуће успоставити биунивоку кореспонденцију између елемената скупа (C) и реалних бројева који се налазе између 0 и 1: свакомскупу (V) одговараће један такав број, и обрнуто.

Таква кореспонденција може бити ефективно успостављена на више начина. Приказаћемо једну од њих, која је у исти мах интуитивна и општа.

Нека су P_k и Q_k реалан део и коефицијент уз i елемента v_k и посматрајмо скуп (P) елемената P_k. Постоји бесконачно много функција $\Phi(x)$ таквих да крива $y = \Phi(x)$ има облик као на слици 1 или на слици 2, тако да свакој реалној вредности променљиве x одговара само једна реална вредност y између 0 и 1, и обрнуто: да свакој вредности y у овом интервалу одговара само једна реална вредност x. Такве би, на пример, биле функције



Сл. 1.



Сл. 2

$$\frac{1}{1+e^{-x}}, \qquad e^{-e^{-x}}, \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x,$$

(посреди је грана функције arctang са вредностима између $-\dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{\pi}{2}$).
Сваки од бројева $\Phi(P_k)$ биће реалан и налазиће се између 0 и 1.

Нека су a_k^h децимале броја $\Phi(P_k)$, тако да имамо

$$\begin{aligned}
\Phi(P_1) &= 0{,}a_1^1\, a_1^2\, a_1^3 \ldots \\
\Phi(P_2) &= 0{,}a_2^1\, a_2^2\, a_2^3 \ldots \\
\Phi(P_3) &= 0{,}a_3^1\, a_3^2\, a_3^3 \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Помоћу ових бројева образујмо, дијагоналним поступком, следећи децимални број

$$S = 0{,}a_1^1\, a_2^1\, a_1^2\, a_3^1\, a_2^2\, a_1^3\, a_4^1\, a_3^2 \ldots,$$

где је поредак по коме се ређају горњи и доњи индекси показан табелом

$$\begin{array}{c|cc|ccc|cccc|l} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & \cdots \end{array}$$

Очигледно је да се:

1. h-та децимала броја $\Phi(P_k)$ подудара са децималом чији је ранг

$$h+\frac{1}{2}(k+h-1)(k+h-2)$$

броја S;

2. децимала по реду α-та броја S подудара са h-том децималом броја $\Phi(P_k)$, где h и k имају вредности

$$h=\alpha-\frac{n(n-1)}{2}, \quad k=\frac{n(n+1)}{2}-\alpha+1,$$

при чему је n цео део броја

$$\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{8\alpha-7}\right).$$

Постоји тако биунивока кореспонденција између броја S и низа бројева $\Phi(P_k)$: низ децимала бројева P_k одређује једнозначно низ децимала броја S, и обрнуто. Број S био би онда спектар скупа (P).

Формирајмо на исти начин реалан број T који лежи између 0 и 1 и представља спектар скупа (Q) чији су елементи бројеви Q_k. Ови бројеви S и T одређују, у имагинарној равни, тачку M чији је a – фикс $S+iT$ и која се налази у или на квадрату са странама датим једначинама

$$x=0, \quad x=1, \quad y=0, \quad y=1.$$

Кореспонденција између скупа елемената v_k и тачке M очигледно је биунивока: сваком скупу (V) одговара само једна тачка M и свакој тачки M одговара само један скуп (V).

С друге стране, према Канторовој теореми, скуп тачака M има исту моћ као скуп тачака које се на реалној оси налазе између 0 и 1. Могуће је, дакле, успоставити између тачака P интервала од 0 до 1, с једне стране, и скупа скупова (V), с друге стране, кореспонденцију такву да сваки од скупова (V) одређује једнозначно тачку P, и обрнуто. Таква кореспонденција могла би се ефективно успоставити на безброј начина, на пример образујући реалан број P чији је цео део нула и чије се децимале наизменично подударају са децималама бројева S и T.

Број P је *спектар скупа* (U) који он једнозначно одређује и такође њиме потпуно одређен. И тако се долази до следећег закључка:

Кад је дат неки скуп (C) (*који има моћ континуума*) *пребројивих скупова* (U) *чији су елементи реални или комплексни бројеви, увек је могуће образовати спектре који се налазе у обострано једнозначној кореспонденцији са скуповима* (U) *као конститутивним елементима скупа* (C).

Поступак образовања спектра који смо описали у оном што претходи може се применити на сваки пребројив скуп. У више партикуларним случајевима, спектри се могу образовати на више других начина. Један од њих, који ће бити изложен у следећем поглављу и који се примењује на скупове чији су елементи цели бројеви или бројеви који се неким поступком сви заједно могу претворити у целе бројеве, нарочито је занимљив због његових сличности са поступцима хемијске спектралне анализе и због могућих примена тако образованих спектара.

ПРУГАСТИ СПЕКТРИ НИЗОВА ЦЕЛИХ БРОЈЕВА

3. *Појам пругастог спектра*. – Нека је

(1) $$N_0, N_1, N_2, \ldots, N_m$$

низ *позитивних целих реалних* бројева, h_k позитиван цео број који није мањи од броја цифара броја N_k и λ_k^i i-та цифра броја N_k, при чему се ранг i цифре броји са десна на лево.

Образујмо нумеричку групу

(2) $$G_k = 00\ldots0N_k,$$

коју чини број N_k и испред њега онолико нула колико је потребно да би укупан број цифара у групи (2) био једнак h_k.

Формирајмо потом број

(3) $$G_0G_1G_2\ldots G_m,$$

добијен писањем једне иза друге и једне уз другу нумеричких група $G_0, G_1, G_2, \ldots$ Групе значајних цифара броја (3) које потичу од два узастопна цела броја N_{k-1} и N_k могу, а да се никад ни делимично не преклапају, бити раздвојене већим или мањим бројем нула, према томе да ли је разлика између h_k и ефективног броја l_k цифара целог броја N_k већа или мања.

Тако формиран број (3) подсећа на светле спектре усијаних тела; групе

(4) $$N_0, N_1, \ldots, N_m$$

значајних цифара ту би одговарале спектралним пругама; нуле које их раздвајају одговарале би тамним деловима, а саме значајне цифре λ^i_k спектралним линијама чији скуп карактерише елемент N_k њиховим вредностима и релативним положајима у спектру.

Користећи ово поређење, које омогућује да се сажме изражавање и излагање учини јаснијим, назваћемо:

1. низ цифара који образује број (3), пошто се у њему претходно G_0 децималном запетом одвоји од G_1, *пругастим спектром* нумеричког низа (1);

2. део низа цифара (3) који чине значајне цифре које потичу од броја N_k *k-тим светлим делом* или *k-том пругом спектра*;

3. део низа цифара (3) који чине нуле уметнуте између N_{k-1} и N_k *k-тим тамним делом спектра*;

4. целину G_k коју образују ова два дела ранга *k-тим одсечком спектра*;

5. цифру λ^i_k у низу (3) *i-том линијом k-те пруге спектра*; затим:

6. *ширина* k-тог спектралног одсечка биће мерена целим бројем h_k, ширина светлог дела бројем l_k, а ширина тамног дела бројем $h_k - l_k$;

7. ако m представља укупан број спектралних одсечака, спектар је *ограничен* или *неограничен* према томе да ли је број m коначан или бесконачан;

8. уколико је закон варирања целог броја h_k са његовим рангом k назван *спектралним ритмом*, овај је *униформан* када је

$$h_1 = h_2 = \ldots = h_m,$$

тј. када сви спектрални одсечци имају исту ширину; он је *униформно убрзан* када ширина одсечка расте сразмерно његовом рангу, тј. када је $h_k = h + ck$, где су h и c два позитивна цела броја који се не мењају са k; ритам ће бити *са растућим убрзањем* кад c расте са k; он ће бити *осцилаторан* ако h_k има осцилујуће варијације кад k непрекидно расте; биће *периодичан* ако су варијације низа h_k периодичне, итд.;

9. разлика $h_k - l_k$ мериће *дисперзију* спектра, константну или промењиву са k; спектар је са највећом могућом *густином*, тј. са *нултом дисперзијом*, када у њему нема тамних делова, па се пруге додирују.

Кад су дати низ (1) и ритам h_k његовог спектра, тај спектар ће се образовати формирањем одговарајућих нумеричких група G_0, G_1, $G_2, \ldots$ и њиховим исписивањем једних уз друге у једном реду и у природном поретку њиховог рангирања.

Обрнуто, кад су дати спектар (3) и његов ритам, члан N_k одговарајућег низа (1) добија се као k-та пруга овог спектра.

На пример, спектар низа двоцифрених природних бројева

$$11, 12, 13, \ldots, 98, 99,$$

са униформним ритмом $h = 3$ био би

$$011012013 \ldots 098099;$$

његова дисперзија је константна и једнака 1.

Спектар низа биномних коефицијената

$$\binom{7}{0}, \binom{7}{1}, \ldots, \binom{7}{7}$$

са униформно убрзаним ритмом $h_k = 1 + k$ је

$$107021003500035000021000000700000000001,$$

а његова дисперзија је растућа.

Спектар неограниченог низа коефицијената, који су цели бројеви, развоја функције $f(z) = \dfrac{2+37x}{1-x^2}$ са осцилаторним ритмом

$$h_k = \frac{1}{2}(3 - \cos k\pi),$$

једнак је

$$237237237 \ldots ;$$

он је периодичан и са нултом дисперзијом.

Ритам h_k треба сматрати *компатибилним са датим низом* (1) ако је $h_k - l_k \geq 0$ за све вредности $k = 1, 2, \ldots, m$.

С тим у вези, имамо следећа правила.

ПРВО ПРАВИЛО. – *Ограничен низ* (1) *увек допушта униформан ритам* $\mathrm{h_k - h}$, *где је* h *било који цео број који није мањи од највећег члана низа* (не узима се у обзир први члан).

Јер, важи $N_k \leq 10^h$, тако да је $l_k \leq h$.

ДРУГО ПРАВИЛО. – *Неограничен низ* (1), *чији чланови нису већи од фиксираног броја* N, *допушта униформан ритам* $\mathrm{h_k - h}$, *где* h *означава било који цео број који није мањи од* log B.

(Као у случају претходног правила.)

ТРЕЋЕ ПРАВИЛО. – *Неограничен низ* (1) *такав да се* $\sqrt[n]{\mathrm{N_n}}$ *не увећава бесконачно са* n *допушта униформно убрзан ритам.*

Јер N_n за сваку вредност индекса n остаје мање од 10^{h+cn}, где су h и c извесни позитивни цели бројеви, при чему x може бити једнако нули; низ (1) стога има униформно убрзани ритам $h_k = h + ck$.

Такав је, на пример, случај неограниченог низа, чији су чланови

$$\binom{2}{1},\binom{4}{2},\binom{6}{3},\dots$$

и који има ритам $h_k = k$.

ЧЕТВРТО ПРАВИЛО. – *Неограничен низ* (1) *такав да се* $\sqrt[n^2]{\mathrm{N_n}}$ *не увећава бесконачно са* n *допушта ритам са растућим убрзањем* $h_k = h + ck + gk^2$, *где су* h, c *и* g *извесни позитивни цели бројеви.*

Јер N_n за сваку вредност индекса n остаје мање од $10^{h+cn+gn^2}$

ПЕТО ПРАВИЛО. – *Ограничен или неограничен низ* (1) *који допушта ритам* $\mathrm{h_k}$ *допушта такође сваки ритам* $\mathrm{h'_k}$ *такав да је* $\mathrm{h_k} \le \mathrm{h'_k}$ *за свако* k = 1, 2, 3,...

Низ који, на пример, допушта униформни ритам $h_k = h$ допустиће истовремено сваки униформно убрзани ритам $h_k = h + ck$, као и сваки ритам са растућим убрзањем $h_k = h + ck + gk^2 + \dots$ са било каквим позитивним целим бројевима *c, g*,...

4. ***Спектрална генератриса***. – Следећа чињеница је фундаментална за образовање пругастих спектара:

Ма какав био, ограничен или неограничен, низ позитивних целих бројева $(\mathrm{N_n})$, *са њиме се може довести у везу једна функција* $\Phi(\mathrm{x})$ *чија нумеричка вредност* S *за извесну партикуларну вредност, погодно изабрану, променљиве* x *представља један пругасти спектар овог низа.*

Нека је: l_k број цифара броја N_k; h_k цео број који није мањи од l_k; G_k нумеричка група која се, према претходном, придружује броју N_k; претпоставимо најпре да посматрани низ N_k има ограничен број m чланова.

Образујмо низ позитивних целих бројева

(5) $$P_1, P_2, \dots, P_m,$$

такав да је

(6) $$P_k = h_1 + h_2 + \dots + h_k \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Формирајмо потом низ позитивних рационалних бројева

(7) $$g_1, g_2, \dots, g_m,$$

таквих да је

(8) $$g_k = 10^{-P_k},$$

па затим уз помоћ тих бројева полином по x степена m

(9) $$\Phi_m(x) = N_0 + g_1 N_1 x + g_2 N_2 x^2 + \ldots + g_m N_m x^m.$$

Важи следеће тврђење:

Нумеричка вредност Φ_{m} *представља пругасти спектар низа* $\mathrm{N_k}$ *са ритмом* $\mathrm{h_k}$.

Заиста, вредност $g_k N_k$ је децимални број који има као цео део нулу, а као децималан део $P_k - l_k$ узастопних нула и иза њих значајне цифре које потичу од броја N_k. Одатле излази да је

(10) $$\begin{aligned} &g_1 N_1 + g_2 N_2 + \ldots + g_m N_m \\ &= 0,\underbrace{0\ldots0}_{\substack{h_1 - l_1 \\ \text{нула}}} N_1\, 0,\underbrace{0\ldots0}_{\substack{h_2 - l_2 \\ \text{нула}}} N_2 0 \ldots = 0, G_1 G_2 \ldots G_m, \end{aligned}$$

па, како је $h_k - l_k \geq 0$, доказ је тиме завршен.

Претпоставимо сада да је низ бројева N_k *неограничен*. Тада полином $\Phi_m(x)$ постаје ред уређен по растућим степенима променљиве x

(11) $$\Phi(x) = N_0 + g_1 N_1 x + g_2 N_2 x^2 + \ldots$$

Претходни исказ остаје у важности под условом да се изабере низ позитивних целих бројева $h_1, h_2, h_3, \ldots$ који карактерише спектрални ритам, тако да низ (11) чији је општи коефицијент

(12) $$g_k N_k = N_k \cdot 10^{-h_1 - h_2 - \ldots - h_k},$$

конвергира за $x = 1$, што је очигледно увек могуће.

Тако образовану функцију $\Phi(x)$, која се своди на полином по x кад је низ N_k ограничен, а на степени ред кад је низ (N_k) неограничен, назваћемо *спектралном генератрисом* посматраног низа која одговара спектралном ритму помоћу кога је била формирана. Нумеричка вредност $S = \Phi(1)$ тада се подудара са пругастим спектром о коме је реч.

Примедба I. – Могле би се образовати друге спектралне генератрисе, које би, на пример, дали експоненцијални редови или потенцијални редови са више променљивих. У овим *Предавањима* остаћемо код генератриса претходног облика.

Примедба II. – Могли би се формирати, на начин сличан претходном, спектри и њихове генератрисе за неки систем нумерације различит од децималног система, посебно за систем са основом 2, у ком случају би спектар образовале само цифре 0 и 1.

5. *Начини образовања спектралних генератриса.* – Треба разликовати следећа два случаја.

Први случај. – Дат је низ целих бројева N_k. Под претпоставком да су његови чланови реални и позитивни, треба израчунати низ фактора g_k који одговара жељеном спектралном ритму h_k, па затим непосредно написати

$$(13) \qquad \Phi(x) = N_0 + g_1 N_1 x + g_2 N_2 x^2 + \dots .$$

У случају, на пример, униформно убрзаног ритма $h_k = h + ck$, имаће се

$$(14) \qquad \Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} N_n q^{n^2} (\beta x)^n, \; q = \frac{1}{\sqrt{10}}, \; \beta = 10^{-\left(h+\frac{c}{2}\right)},$$

па ће спектар бити

$$(15) \qquad S = \sum_{n=0}^{\infty} N_n q^{n^2} \beta^n .$$

Затим ће се потражити, уколико то долази у обзир, могућност да се такав један непосредно добијен израз са $\Phi(x)$ претвори у извесну експлицитну комбинацију познатих функција, у неки одређен интеграл, итд.

Други случај. – Позната је, у било ком аналитичком облику, функција $f(x)$ чији развој, који није дат,

$$(16) \qquad f(x) = N_0 + N_1 x + N_2 x^2 + \dots$$

има чланове низа (N_k) за коефицијенте и полупречник холоморфности r око тачке $x = 0$ различит од нуле.

1. Ако бројеви N_k *допуштају неки униформан спектрални ритам* $h_k = h$ (случај ограничених низова N_k, или пак неограничених низова чији чланови не расту бесконачно), *спектрална генератриса ће бити*

$$(17) \qquad \Phi(x) = f(10^{-h} x),$$

а спектар ће бити

$$(18) \qquad S = f(10^{-h}).$$

2. Посматрајмо случај неограниченог низа N_k *таквог да* $\sqrt[n]{N_n}$ *не расте бесконачно са* n (такав је случај сваког низа бројева N_k који фигуришу као коефицијенти у неком Тајлоровом реду са полупречником

конвергенције различитим од нуле). Низ тада допушта неки униформно убрзан ритам $h_k = h + ck$ и за такав ритам биће

$$(19) \qquad g_k = 10^{-h_k - \frac{k(k+1)}{2}c}.$$

Формирајмо помоћну функцију

$$(20) \qquad \chi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} q^{n^2+\lambda n} x^n,$$

где је

$$(21) \qquad \lambda = 1 + \frac{2h}{c}, \quad q = 10^{-\frac{c}{2}}.$$

Спектрална генератриса ће бити

$$(22) \qquad \Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{ti})\chi\left(\frac{xe^{-ti}}{\rho}\right)dt,$$

где ρ *означава произвољну константу чији је модуо мањи од полупречника конвергенције* r *реда* (16); *сам спектар ће онда бити нумеричка вредност интеграла*

$$(23) \qquad S = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{ti})\chi\left(\frac{xe^{-ti}}{\rho}\right)dt.$$

Да би се ово доказало, довољно је подсетити на једну познату теорему о потенцијалним редовима. Нека су

$$(24) \qquad \begin{cases} f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \\ \varphi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots \end{cases}$$

два реда који конвергирају у круговима чији је центар у почетку а полупречници су им r и r_1; ред

$$(25) \qquad a_0 b_0 + a_1 b_1 z + a_2 b_2 z^2 + \dots$$

има тада полупречник конвергенције који није мањи од rr_1 а његова сума једнака је

$$(26) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_1 e^{ti})\varphi(x_2 e^{-ti})\,dt,$$

где су x_1 и x_2 било какве две вредности које не зависе од t са модулима респективно мањим од r и r_1 и међусобно везане релацијом $x_1 x_2 = z$.

Стављајући

$$a_k = N_k, \quad b_k = 10^{-h_k + \frac{k(k+1)}{2}c}$$

и узимајући за x_1 било коју константну вредност ρ чији је модуо мањи од r, а за x_2 вредност $\frac{z}{\rho}$, услови последње теореме биће испуњени, будући да је $r_1 = \infty$, па ће спектрална генератриса заиста бити дата са (22).

Изрази (22) и (23) могу се заменити неким другим изразима који су са њима еквивалентни. Тако се, стављајући

$$\text{(27)} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \operatorname{log\,nat} 10 = 1{,}151292\ldots \\ b = (2c + h)a, \end{cases}$$

што даје

$$g_k = e^{-ak^2 - bk},$$

с обзиром на познату формулу

$$e^{-ak^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} \cos 2kt\sqrt{a}\, dt \qquad (k > 0, a > 0),$$

спектрална генератриса за ритам $h_k = h + ck$ изражава у облику

$$\text{(28)} \qquad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} R(\alpha x, \beta t)\, dt,$$

где $R(r, \varphi)$ означава реални део од $f(re^{i\varphi})$ и где константама α и β треба приписати вредности

$$\alpha = e^{-b}, \quad \beta = 2\sqrt{a}.$$

Приметимо такође да се у случају када се бројеви N_k изражавају интегралом облика

$$\text{(29)} \qquad N_k = \int_0^b u\, v^k\, dt \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

где су u и v функције од t, спектрална генератриса изражава одређеним интегралом

$$(30) \qquad \Phi(x) = \int_0^b k\,\theta(vx)\,dt,$$

где је $\theta(x)$ цела трансцента

$$(31) \qquad \theta(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} q^{n^2+\lambda n} x^n,$$

при чему су константе λ и q дефинисане са (21).

3. *У случају било каквоḡ риūма са расūућим убрзањем,* кад се формира помоћна функција

$$(32) \qquad \xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n x^n,$$

где је

$$(33) \qquad g_n = 10^{-(h_1+h_2+\ldots+h_n)},$$

сūекūралну ḡенераūрису даваће још увек израз (22), *а сūекūар израз* (23), *ūод условом да се у њему функција* $\chi(x)$ *замени функцијом* $\xi(x)$.

Претходне формуле примењују се на све низове N_k без разлике, ограничене и неограничене.

Указаћемо на неколико једноставних примера спектралних генератриса и спектара.

Први ūример. – Образовати генератрису ограниченог низа

$$1, 2, 3, \ldots, m$$

са униформним ритмом $h_k = h$ сагласним са низом. Имамо

$$f(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + mx^m = \frac{mx^{m+2} - (m+1)x^{m+1} + x}{(1-x)^2},$$

а генератриса ће бити

$$\Phi(x) = \frac{m10^{-(m+2)h} x^{m+2} - (m+1)10^{-(m+1)h} x^{m+1} + 10^{-h} x}{(1-10^{-h} x)^2}.$$

Спектар се добија као нумеричка вредност S у-израза

$$\Phi(1) = \frac{10^{(m+1)h} - (m+1)10^h x^{m+1} + m}{(10^h - 1)^2},$$

па ће, на пример, за $m = 9$, $h = 1$ бити

$$S = \frac{10^{10} - 10^2 + 9}{10^9 9^2} = 0,123456789.$$

Други пример. – Образовати генератрису низа биномних коефицијената

$$\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \ldots, \binom{m}{m},$$

са униформним ритмом $h_k = h$ сагласним са низом. Имамо

$$f(x) = (1 + x)^m,$$

а генератриса ће бити:

$$\Phi(x) = (1 + 10^{-h} x)^m.$$

Спектар се добија као нумеричка вредност израза

$$\Phi(1) = \frac{(10^h + 1)^m}{10^{mh}},$$

па, на пример, за $m = 6$, $h = 2$ имамо

$$S = \frac{101^6}{100^6} = 1,061520150601.$$

Трећи пример. – Посматрајмо неограничен низ

$$\binom{2}{1}, \binom{4}{2}, \binom{6}{3}, \ldots$$

средњих биномних коефицијената, који се могу изразити познатом формулом

$$\binom{2n}{n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u v^n dt,$$

где је

$$u = \frac{2}{\pi}, \qquad v = 4\cos^2 t.$$

Види се (теорема о средњој вредности) да $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$ остаје мања од неког коначног броја за сваку вредност n и да је униформно убрзани ритам $h_k = k$ сагласан са овим низом. Спектрална генератриса са таквим ритмом је

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta(4x\cos^2 t)dt,$$

где је

$$\theta(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} q^{n^2+n}x^n, \qquad q = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

а нумеричка вредност $\Phi(1)$ подудара се са спектром S низа и једнака је

$$S = 0{,}10200600200007000252000092 4\ldots$$

6. ***Главна спектрална карактеристика***. – Оно што претходи чини очигледним улоге које играју две функције

$$f(x) = N_0 + N_1x + N_2x^2 + \ldots \tag{34}$$

$$\xi(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2 + \ldots \tag{35}$$

у формирању генератрисе спектра датог низа N_k.

Функција (34) зависи само од вредности чланова низа, а ни у ком од ритма спектра. Друкчије речено, она зависи од састава спектралних пруга, а независна је од расподела пруга у спектру. Ова функција се, дакле, за дати (N_k), не мења од једног спектра до другог; њу ћемо назвати *главном спектралном карактеристиком* овог низа.

Томе насупрот, функција (35) зависи од начина расподеле пруга спектра бројева N_k, тј. од спектралног ритма, али не зависи од самих нумеричких вредности чланова низа N_k. Због тога ћемо је назвати *карактеристиком спектралног ритма.*

У овом параграфу бавићемо се главном карактеристиком. Она се своди на полином са целим коефицијентима за ограничене спектре; за неограничене, дата је степеним редом чији су коефицијенти цели бројеви.

У великом броју случајева, ова карактеристика изражава се у коначном облику или у облику одређеног интеграла. Тако, на пример:

1. За низ N међусобно једнаких бројева, она је дата изразом

$$f(x) = N\frac{x^{m+1} - x}{x-1} \quad \text{или} \quad f(x) = \frac{Nx}{1-x},$$

према томе да ли је низ ограничен или неограничен.

2. За низ целих бројева који се периодично репродукују почев од извесног ранга, карактеристика је *рационална* функција од x са *целим* коефицијентима: ако се са n означи број чланова N_k непериодичног дела а са m број чланова периода низа, карактеристика ће бити

$$f(x) = P(x) + \frac{Q(x)}{1 - x^m},$$

где су P и Q два полинома

$$P(x) = N_1 x + N_2 x^2 + \ldots + N_n x^n,$$
$$Q(x) = N_{n+1} x^{n+2} + N_{n+2} x^{n+2} + \ldots + N_{n+m} x^{n+m}.$$

3. У случају низа целих бројева који образују аритметичку прогресију

$$A + B, A + 2B, A + 3B, \ldots,$$

имамо

$$f(x) = \frac{Ax}{1 - x} + \frac{Bx}{(1 - x)^2}.$$

4. За низ целих бројева који образују геометријску прогресију

$$AB, AB^2, AB^3, \ldots$$

добијамо

$$f(x) = \frac{ABx}{1 - Bx}.$$

5. За низ N_k, где је

$$N_k = p_1^k + p_2^k + \ldots + p_m^k,$$

где су p_i дати цели бројеви, биће,

$$f(x) = R(x) - m,$$

при чему $R(x)$ означава резултат замене промењиве x са $\frac{1}{x}$ у изразу $\frac{xp'(x)}{p(x)}$, где је $P(x)$ полином степена m

$$(x - p_1)(x - p_2)\ldots(x - p_m).$$

6. За низ $\binom{p}{k}$ биномних коефицијената, имамо

$$f(x) = (1 + x)^p.$$

7. За низ бројева $\binom{2n}{n}$, добија се

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$$

8. У случају низа факторијела 1!, 2!, 3!, ..., $m!$, добијамо

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-t} \frac{(xt)^{m+1} - xt}{xt-1} dt.$$

9. У случају неограниченог низа $\binom{2n}{n}^2$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, биће

$$f(x) = -1 + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-16t^2)}}.$$

Следећим правилима постиже се значајно проширење подручја случајева у којима се карактеристика може добити у експлицитној форми.

Нека су

$$f(x) = N_0 + N_1 x + N_2 x^2 + \ldots, \tag{36}$$

$$f_1(x) = N_0' + N_1' x + N_2' x^2 + \ldots \tag{37}$$

редом карактеристике два низа (N_k) и (N_k') а λ фиксиран позитиван цео број.

Правило I. – Низ

$$N_0 \pm \lambda, N_1 \pm \lambda, N_2 \pm \lambda, \ldots$$

имаће за карактеристику функцију

$$f(x) \pm \lambda \frac{x^m - 1}{x-1} \quad \text{или} \quad f(x) \pm \frac{\lambda}{1-x},$$

према томе да ли је низ ограничен или неограничен.

Правило II. – Низу $\lambda N_0, \lambda N_1, \lambda N_2, \ldots$ одговара карактеристика $\lambda f(x)$.

Правило III. – Низу $N_0, N_1\lambda, N_2\lambda^2, N_3\lambda^3, \ldots$ одговара карактеристика $f(\lambda x)$.

Правило IV. – Низу $N_0, N_1, 2N_2, 3N_3, 4N_4, \ldots$ одговара карактеристика $x f'(x)$; низу $N_0, N_1, 2^2 N_2, 3^2 N_3, \ldots$ одговара

$$x^2 f'' + x f'(x) + N_0 \quad \text{и}$$

низу $N_0, N_1, 2^3 N_2, 3^3 N_3, \ldots$, одговара

$$x^3 f''' + (2x + x^3) f'' + 3x^2 f'.$$

Правило V. – Низу

$$N_0, N_0 + N_1, N_0 + N_1 + N_2, \ldots$$

одговара $\dfrac{f(x)}{1-x}$.

Правило VI. – Низу $N_1 - N_0, N_2 - N_1, N_3 - N_2, \ldots$ одговара

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} - f(x).$$

Правило VII. – Низу $N_0 \pm N'_0, N_1 \pm N'_1, \ldots$ одговара

$$f(x) \pm f_1(x).$$

Правило VIII. – Низу $N_0 N'_0, N_1 N'_1, N_2 N'_2, \ldots$ одговара један или други ред одређених интеграла

$$(38) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{ti}) f_1\left(\frac{x e^{-ti}}{\rho}\right) dt,$$

$$(39) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{x e^{-ti}}{\rho}\right) f_1(\rho e^{ti})\, dt,$$

где је ρ произвољна константа чији је модуо мањи од полупречника конвергенције одговарајућих редова (36) и (37).

Правило IX. – Низу $N_0^2, N_1^2, N_2^2, \ldots$ одговара интеграл

$$(40) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{ti}) f_1\left(\frac{x e^{-ti}}{\rho}\right) dt,$$

који се може написати у реалном облику

$$(41) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi\left(\sqrt{x}, t\right)^2 dt,$$

где $\psi(r, \varphi)$ означава модуо израза $f(re^{\varphi i})$.

7. ***Карактеристика спектралног ритма.*** – Функција

$$\xi(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \dots,$$

названа *карактеристиком спектралног ритма*, зависи само од ритма по коме је спектар формиран. То је известан потенцијални ред са *рационалним* коефицијентима једнаким степенима броја 10 са негативним целим коефицијентима.

За ограничен низ (N_k) ова функција се своди на полином.

У случају неограничених низова и са *униформним* ритмом $h_k = h$, она је рационална функција

$$\xi(x) = \frac{1}{1 - 10^{-h} x}.$$

Када је, у случају неограничених низова, спектар са *стално убрзаним ритмом*, $\xi(x)$ је *цела хипертрансцендентна функција*, тј. функција која не задовољава ниједну диференцијалну једначину коначног реда

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right) = 0,$$

алгебарску по *x, y* и по изводима.

Заиста, у случају таквог ритма имамо

$$h_1 < h_2 < h_3 < \dots,$$

и одатле

$$h_k = h_{k-1} + m_k \qquad (k = 2, 3, \dots),$$

где је m_k цео позитиван број, који се мења са индексом k али је различит од нуле.

Имамо, дакле,

$$h_k = h_1 + (m_2 + m_3 + \dots + m_k),$$

и одатле,

$$\begin{aligned} P_k &= h_1 + h_2 + \dots + h_k \\ &= kh_1 + \left[(k-1)m_2 + (k-2)m_3 + \dots + 2m_{k-1} + m_k\right]. \end{aligned}$$

Функција $\xi(x)$ је, према томе, дефинисана помоћу извесног реда

(42) $$\xi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots,$$

чији је коефицијент a_n рационалан број

(43) $$\alpha_n = 10^{-nh_1 - (n-1)m_2 - (n-2)m_3 - \dots - 2m_{n-1} - m_n}.$$

Будући да су сви бројеви m_k различити од нуле, уколико се са l означи фиксиран цео број који се налази између нуле и најмањег од бројева m_k (може овоме бити и једнак), установљава се да је

$$\alpha_n < 10^{-nh_1 - \frac{n(n-1)}{2}}, \tag{44}$$

што значи да је $\xi(x)$ цела функција од x.

Но, г. Пољa[2] је доказао да *цела* функција дефинисана редом

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots$$

са *рационалним* коефицијентима и за коју израз

$$\frac{\log |a_n|}{n(\log n)^2} \tag{45}$$

не остаје ограничен кад n бесконачно расте – представља хипертрансцендентну функцију.

Како је израз (34) који се односи на $\xi(x)$ негативан и по апсолутној вредности већи од

$$\frac{h_1 + \frac{n-1}{2} l}{(\log n)^2},$$

па стога тежи ка $-\infty$ кад n бесконачно расте, $\xi(x)$ је свакако хипертрансцендентна функција. Притом је очигледно да ова чињеница остаје у важности кад је убрзање ритма h_k, уместо да расте већ од првог члана h_1, рашће тек почев од извесног ранга $k > 1$.

Захваљујући неједнакости (44), уобичајени поступци опште теорије целих функција, а посебно методе г. Адамара, лако се могу применити на проучавање различитих особина функције $\xi(x)$ (начин рашћења, густина нуле, границе варирања за дате интервале, итд.)

У случају униформно убрзаног ритма $h_k = h + ck$, карактеристика ритма је цела функција

$$\xi(x) = \theta(\beta x),$$

где је $\theta(x)$ из теорије елиптичких функција добро позната трансцедента

---

[2] G. Pólya, *Ueber das truvachsen von ganzen Funktionen die einer Differentialgleichung genügen*, Vierteqahrschrift der Naturforsch. gesellschaft in Zurich, Jahrg, 61, 1916, pp. 531–545.

(46) $$\theta(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} q^{n^2} x^n,$$

са

(47) $$q = 10^{-\frac{c}{2}}, \beta = 10^{-h-\frac{c}{2}}.$$

Како је униформно убрзан ритам сагласан са низом коефицијената, целобројних, сваког степеног реда са таквим коефицијентима и са полупречником конвергенције већим од нуле, то се *елиптичка трансцендента* $\theta(x)$ *појављује као карактеристика ритма у формирању спектара коефицијената сваког реда ове врсте.*

У случају ритма *са растућим убрзањем,* карактеристика ритма $\xi(x)$, која је увек цела хипертрансцендентна функција, представља неки степени ред чији коефицијенти опадају брже него коефицијенти функције $\theta(x)$. За ритам са *константним убрзањем реда* p, овај ред има за општи коефицијент

$$\alpha_n = 10^{-P(n)},$$

где је $P(n)$ полином од n степена $p + 1$.

Познато је да је трансцендента $\theta(x)$ која одговара случају $p = 1$ уско повезана са функцијама Θ теорије елиптичких функција: функција Θ у правом смислу речи су експоненцијални редови чији је експонент полином *другог степена* у односу на ранг члана. На сличан начин, трансценденте $\xi(x)$ које одговарају вредностима $p = 2, 3, 4,...$ везане су за функције Θ вишег степена, дефинисане експоненцијалним редовима чији је експонент *степена вишег од 2* у односу на ранг члана. Ове функције биле су предмет значајних истраживања г. Апела[3].

8. *Кореспонденција између низа целих бројева и елемената његовог спектра.* – Уколико је спектрални ритам h_k дат, кореспонденција између низа целих бројева (N_k) и елемената спектра, као и кореспонденција између главне спектралне карактеристике и самог спектра, могу се резимирати следећим правилима.

Правило I. – Спектрална пруга која одговара члану N_0 подудара се са целим делом броја $\Phi(1)$; пруга која одговара члану N_k поклапа се са групом значајних цифара броја $\Phi(1)$ која почиње

$$(h_1 + h_2 + \ldots + h_{k-1} + 1) - \text{вом},$$

---

[3] P. Apell, *Sur les functions* θ *de degrés supérieurs*, Comples rendus de l'Academie des Sciences, t. 153, 19, 11, pp. 584–587; 617–618.

а завршава се $(h_1+h_2+\ldots+h_k)$-том децималом тог броја; n-та линија (бројана здесна налево) пруге која одговара броју подудара се са

$$(h_1+h_2+\ldots+h_k-n+1)-\text{вом}$$

децималом броја $\Phi(1)$.

У случају униформног ритма $h_k=h$, пруга која одговара члану N_k поклапа се са групом значајних цифара броја $\Phi(1)$ која почиње $[(k-1)h+1]$-вом а завршава се (kh)-том децималом броја $\Phi(1)$; n-та линија те пруге дата је $(kh-n+1)$-вом децималом.

У случају униформно убрзаног ритма $h_k=h+ck$, ова пруга почиње $\left[\frac{k(k-1)}{2}c+(k-1)h+1\right]$-вом а завршава се $\left[\frac{k(k+1)}{2}c+kh\right]$-том децималом броја $\Phi(1)$; његова n-та линије подудара се са $\left[\frac{k(k+1)}{2}c+\right.$ $\left.+kh-n+1\right]$-вом децималом.

Правило II. – Првих k+1 коефицијената главне спектралне карактеристике $f(x)$ одређују цео део и низ $P_k=h_1+h_2+\ldots+h_k$ првих децимала броја S; овај децимални део добија се кад се напишу једна уз другу, једна у продужетку других, k одговарајућих нумеричких група $G_1, G_2, \ldots, G_k$.

У случају униформног ритма $h_k=h$, првих k+1 коефицијената реда за $f(x)$ одређују цео део и kh првих децимала броја S.

У случају униформно убрзаног ритма $h_k=h+ck$, њих одређују цео део и $\frac{k(k+1)}{2}c+kh$ првих децимала.

Правило III. – Цео део и низ P_k првих децимала броја S одређују $k+1$ првих коефицијената главне карактеристике $f(x)$.

Ако се низ s_k ових децимала подели на узастопне одсечке, образоване, први од h_1 првих децимала, други од следећих h_2 децимала, итд., коефицијент N_p карактеристике $f(x)$ подудара се са групом значајних цифара p-тог одсечка.

ПРУГАСТИ СПЕКТРИ БРОЈНИХ НИЗОВА КОЈИ СЕ МОГУ ПРЕТВОРИТИ У НИЗОВЕ ПОЗИТИВНИХ ЦЕЛИХ БРОЈЕВА

9. ***Трансмутације*** $\Delta(M_k)$. – Оно што претходи односи се на случајеве у којима је низ бројева са којим се спектар доводи у везу образован од *позитивних целих реалних бројева*.

Посматрајмо сада неки низ

(48) $$M_0, M_1, M_2, \ldots$$

било каквих бројева, реалних или имагинарних, позитивних или негативних.

Најпре, ако су M_k имагинарни бројеви, разложићемо њихов низ на два низа, образована, први од реалних делова p_k, други од коефицијената q_k уз i у бројевима M_k. Тада ће се спектром низа (48) сматрати комплексан број $S + S'$, где је S неки спектар низа бројева p_k, а S' неки спектар низа бројева q_k. Могу се, уосталом, спојити та два спектра у само један реалан број.

Образовање спектара низа (48) *било каквих бројева своди се тако на образовање спектара реалних бројева.*

Претпоставимо, дакле, да су бројеви M_k увек реални. У том случају, назваћемо *трансмутацијом* $\Delta(M_k)$ *сагласном са* ограниченим или неограниченим *низом* (M) бројева $M_0, M_1, M_2, \ldots$ неки скуп операција, исти за све чланове низа, који, кад се примени на сваки од чланова M_k:

1. претвара M_k у позитиван цео број N_k;

2. успоставља биунивоку кореспонденцију између бројева M_k и N_k, уз коришћење извесног *помоћног скупа* (A) *квалитативних података.*

Квалитативни подаци (A) могу се односити на знаке; на горње и доње границе вредности у вези са проблемом; на избор једне вредности када се, с обзиром на услове проблема, тај избор врши између више могућих вредности, итд.

Уколико је са M'_k означена апсолутна вредност броја M_k а са σ_k јединица којој је додељен знак броја M_k, тада ће, ако је нека трансмутација $\Delta(M'_k)$ сагласна са низом (M'_k), трансмутација $\Delta(\sigma_k M_k)$ бити сагласна са низом (M_k). *Довољно ће нам, према томе, бити да посматрамо низове* (M_k) *са позитивним члановима.* На пример, у случају кад су бројеви M_k наизменично позитивни и негативни, имаће се

$$\sigma_k = (-1)^{k+1} \quad \text{или} \quad \sigma_k = \cos(k+1)\pi.$$

Под претпоставком да су бројеви M_k позитивни, трансмутације Δ могу бесконачно варирати. Тако је, на пример:

Трансмутација

$$\Delta(M_k) = 10^g M_k$$

(где је g позитиван цео број) сагласна са сваким низом (M) чији чланови имају ограничен број децимала.

Трансмутација

$$\Delta(M_k) = AB^k M_k \qquad (A = const., B = const., k = 1, 2, 3, \ldots)$$

сагласна је са сваким низом (M) са рационалним члановима који представљају коефицијенте развоја алгебарске функције у потенцијални ред (Ајзенштајнова теорема). Општије, она је сагласна са сваким низом (M) где је M_k количник два узајамно проста цела броја, чији именилац β_k садржи само просте факторе који се не увећавају бесконачно са k, и испуњава услов да $\sqrt[k]{\beta_k}$ остаје коначно док k бесконачно расте. Она је такође сагласна са сваким низом (M), где је M_k периодични децимални разломак чији се број цифара у непериодичном делу и број цифара периода не мењају са k.

Низ (M), чији су чланови p-ти корени целих позитивних бројева, дозвољава трансмутацију

$$\Delta(M_k) = M_k^p.$$

Општије, низ (M) чији су чланови корени једначине

$$\varphi(x) - N_k = 0,$$

где су N_k позитивни цели бројеви, допушта трансмутацију

$$\Delta(M_k) = \varphi(M_k).$$

Очигледно је, уосталом, да се помоћу неке трансмутације $\Delta(M_k)$, сагласне са датим низом (M), може образовати бесконачно много других, операцијама које, изведене над резултатом почетне трансмутације, претварају овај у неки нов низ позитивних целих бројева (додавање једног другог резултата трансмутације, множење овом, дизање на неки позитиван цео степен, итерација, итд.).

10. ***Пругасти спектар повезан са трансмутацијом*** Δ. – Ако је низ (M) претворен у низ (N) позитивних целих бројева помоћу трансмутације $\Delta(M_k)$, са тим низом сагласне, сматраћемо *пругастим спектром низа* (M) *повезаним са том трансмутацијом* Δ било који пругасти спектар низа (N).

Један низ (M) допушта тако бесконачно мноштво пругастих спектара, који варирају, с једне стране, са примењеном трансмутацијом, а с друге стране, са ритмом помоћу кога је образован спектар низа (N). *Али за примењену дату трансмутацију* Δ *и за одређен и спектрални ритам, низ* (M) *дозвољава само један спектар.*

Обрнуто, дати број S може се подударити са пругастим спектром бесконачног мноштва низова (M), у зависности од трансмутације Δ која се примењује и од ритма који се спектру додељује. *Али, за уочену* *трансмутацију* Δ *и за утврђени спектрални ритам, дати број* S *карактерише, као пругасти спектар, уопште узев само један низ* (M). Ту може бити вишесмислености само у случајевима кад релација између бројева M_k и N_k до које доводи примена трансмутације Δ не одређује у потпуности бројеве M_k помоћу бројева N_k (на пример, када је M_k корен једначине која има више од једног реалног корена, или је у питању рекурентна релација која оставља известан број првих чланова $M_0, M_1, M_2, \ldots$ неодређене). Ова неодређеност ишчезава када се претходном додају допунски услови које даје скуп података (A).

ДРУГИ ДЕО

СПЕКТРИ ФУНКЦИЈА

ОПШТИ ПОСТУПАК ФОРМИРАЊА СПЕКТАРА ФУНКЦИЈА

11. ***Класификација функција према облику њиховог аналитичког елемента.*** – Могуће је користити неку функцију у рачунима само кад се она може дефинисати помоћу пребројиве бесконачности елемената. То су једине функције које се могу стварно узимати у разматрање, а њихов скуп има моћ континуума. Познато је исто тако да са становишта теорије скупова нема битне разлике између непрекидних једнодимензионалних скупова, тј. између функција једне променљиве и функција n променљивих.

Функције које припадају овом подручју могу, и то на бесконачно много начина, бити разврстане у *категорије* или *класе* које образују скупове од којих сваки има моћ највише једнаку моћи континуума. Такве би биле, на пример, класе које образују аналитичке, непрекидне, периодичне функције, функције прекидне само за пребројиво много вредности независно променљиве, итд. Функција која се посматра као индивидуа неке класе одговарала би тачки функционалног простора, у коме би одређена класа функција представљала извесно функционално поље.

Међу различитим начинима класификовања функција, онај који одговара циљу који имамо у виду је *класификовање према облику аналитичког елемента функције.*

У скупу функција које се могу дефинисати помоћу пребројиво много елемената, теорија функција разликује класе дефинисане обликом њиховог *аналитичког елемента*

$$A_{m_1, m_2, \ldots, m_p} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_p^{m_p},$$

где коефицијенти A са p индекса не зависе од променљивих x_k. На пример, елемент

$$\frac{x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3}}{(m_1 + m_2 + m_3)!},$$

дефинише једну индивидуу ове класе, која се добија као збир ових елемената. У случају само једне променљиве x, елемент класе има облик

$$A_m x^m,$$

а елемент mx^m, на пример, дефинише једну индивидуу класе. Класа се даље може делити на *категорије,* на пример на категорију оних функција код којих су бројеви $A_{m_1, m_2, \dots}$ цели, или рационални, итд.

Периодичне функције ограничене варијације образују класу која има за аналитички елемент

$$A_m \cos max^m + B_m \sin mx,$$

где бројеви $A, B,$ а не зависе од x.

Периодичне функције две променљиве x и y карактерише аналитички елемент

$$A_{m,n} \cos mx \cos ny + B_{m,n} \cos mx \sin ny + C_{m,n} \sin mx \cos ny + D_{m,n} \sin mx \sin ny.$$

Функције једне реалне променљиве x које имају непрекидне изводе свих редова између $x = -1$ и $x = +1$ имају за аналитички елемент[4]

$$A_m x^m + B_m \cos m\pi x + C_m \sin m\pi x.$$

Општије, функције више реалних променљивих $x_1, x_2, \dots, x_p$, непрекидне на неком подручју и са парцијалним изводима свих редова, имају аналитички елемент облика[5]

$$P_n(x_1, \dots, x_p;\ \sin x_1, \cos x_1, \dots,\ \sin x_p, \cos x_p),$$

где P_n означава полином по $x_1, \dots, x_p;\ \sin x_1, \cos x_1, \dots,\ \sin x_p, \cos x_p$.

Што се тиче функција једне реалне променљиве x, г. Бер је, у току својих дубоких истраживања, издвојио једно функционално подручје које одговара свим потребама Анализе и изван кога су све генерализације, како изгледа, осуђене на то да буду празне и стерилне[6]. Ово подручје, које има моћ континуума, је подручје *функција које се могу аналитички приказати*; оно је подељено на класе (Берове класе) на следећи начин.

---

[4] E. Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles,* 1905, p. 68.

[5] E. Borel, Annales de l'Ecóle Normale, 1895, p. 35, – Pringsheim, Math. Ann., t. 44; Chicago Congress Papers, p. 294.

[6] De la Vallée Poussin, *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensembles, classes de Baire* Collection Borel, 1916, p. VII.

У прву класу, названу *нулӣом класом*, укључене су непрекидне функције. Свака функција те класе може се у интервалу где је непрекидна приказати униформно конвергентним редом полинома

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n(x).$$

Ред функција из нулте класе, уколико не одређује функцију нулте класе, дефинише функцију *ӣрве класе;* ову класу чине све функције које имају пребројиво много прекида. Свака функција ове класе може се приказати редом

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} f_n(x),$$

где су $f_n(x)$ функције прве класе, па чак и неким редом полинома.

Исто тако, кад неки ред функција прве класе не одређује функцију из прве класе, функција коју она дефинише припадаће *друīој класи.* Настављајући тако, назваћемо функцијом *класе p* сваку функцију која се може приказати помоћу реда чији су чланови функције класе реда $p-1$, и која не припада ниједној од класа редова 0, 1, 2,..., $p-1$.

Функције нулте и прве класе једине су функције које се могу приказати једноструким редовима полинома. Али, према самој дефиницији функција друге класе, те функције се могу приказати двоструким редовима полинома

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} P_{m,n}(x),$$

где се сумирање изводи најпре у односу на n, па потом у односу на m, а да се тај двоструки ред не може свести на један једноструки. Општије, функција p-те класе може се приказати p-тоструким редом чији су чланови полиноми. Свака функција p-те класе има, дакле, за аналитички елемент полином $P(x)$ са p индекса; *њеīови коефицијенӣи образују ӣребројив скуӣ са p* + 1 *индекса.*

Познато је да ефективно постоје функције свих класа, а претходна класификација може се продужити и дефинисати функције класа $\omega, \omega+1, \ldots, \omega^2, \omega^\omega, \ldots$, где ови симболи означавају Канторове трансфинитивне редне бројеве. Ова класификација завршава се функцијама *које се не моīу аналиӣички ӣриказаӣи*, а чије је постојање такође доказано.

12. ***Сӣекӣри функција које се моīу ӣриказаӣи аналиӣички.*** – Посматрајмо скуп функција класе коју карактерише аналитички елемент $U_{m_1,m_2,\ldots,m_p}$. Моћ овог скупа највише ће бити једнака моћи континуума. Поједина функција из ове класе одређује се као збир елемената V добијених давањем индексима $m_1, m_2, \ldots, m_p$ позитивних целих вредности. С друге стране, скуп полинома U одређен је скупом (C) коефицијената свих ових елемената у вези са функцијом, а ти коефицијенти образују пребројив скуп са коначним бројем индекса. Увек је, дакле, могуће образовати њихов спектар S у биунивокој кореспонденцији са елементима скупа (C). Начин те кореспонденције одређен је начином формирања спектра и показан је у Првом делу ових *Предавања*.

Но, кореспонденција између скупа функција које образују и скупова (C) повезаних са појединим функцијама класе таква је да једна функција одређује само један скуп (C) и да, уколико неки скуп (C) одговара некој стварној функцији, он тада одређује само једну функцију. Услов да ред који је образован од аналитичких елемената класе, у посматраном посебном случају, не дивергира за све вредности независно промењиве – уводи ограничења услед којих сваком спектру S не одговара нужно нека права функција, али у сваком случају две различите функције из класе имају два различита спектра, а свака функција има само један спектар за један исти начин образовања спектра!

Одатле излази следећи закључак:

Свакој функцији одређеној помоћу пребројивог скупа елемената може се доделити један број S, њен спектар, који је, помоћу извесног скупа (A) квалитативних података и израза за аналитички елемент функције, у кореспонденцији са њом. *Једној функцији из класе са којом се доводи у везу посматрани аналитички елемент одговара само један спектар, а спектар, уколико одговара некој правој функцији, одређује само једну функцију.*

Образовање спектара функција, које се тако своди на формирање спектара бројева, може се извести на више начина, на пример општим поступком показаним у поглављу I. Један од тих начина, изложен у поглављу II, применљив је на сваку функцију коју је могуће развити у Тејлоров ред *са целим коефицијентима*, као и на све категорије функција које се могу довести у биунивоку кореспонденцију са функцијама те врсте. Он је нарочито занимљив због примена које могу имати тако добијени спектри.

Спектар функције из извесне класе тако варира не само са самом функцијом, него и са математичким посредником који успоставља кореспонденцију између функције и спектра. Ово је слично ономе што се користи у уобичајеним поступцима шифровања и дешифровања тајних порука. Образујући спектар неке функције, овој се на неки начин додељује улога чистог текста; улогу кључа игра тада поступак који је примењен у образовању спектра, а улогу криптограма сам спектар. *Свака функција коју је могуће приказати аналитички може се тако шифровати неким позитивним реалним бројем*, што се такође своди на нумерисање функција које припадају једној класи.

Како пребројив скуп (C) функција које припадају различитим класама чија моћ није већа од моћи континуума има и сам највише моћ континуума, може се такође формирати *заједнички спектар* тих функција, којим се шифрује скуп (C) једним позитивним реалним бројем. Тако се, на пример, свака појава, каква било да је њена природа, врста и сложеност, коју је могуће изразити пребројивим скупом једначина може шифровати само једним позитивним реалним бројем, њеним спектром.

ПРУГАСТИ СПЕКТРИ ФУНКЦИЈА

13. (E) – *редови и њихови пругасти спектри.* – Назваћемо, да бисмо упростили изражавање, (E) – *редовима* потенцијалне редове са *целим* коефицијентима чији полупречник конвергенције није једнак нули. Функције једне променљиве које се могу приказати (E)-редовима биће назване (E)-*функцијама*. Полиноме са целим коефицијентима назваћемо (E) – *полиномима*.

Међу аналитичким функцијама $f(x)$ које могу бити приказане (E)-редовима, налазе се:

1. рационалне функције, као, на пример

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \frac{1}{(1-x)^p}=\sum_{0}^{\infty}\frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^n;$$

2. алгебарске функције, на пример

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}}=\sum_{0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n;$$

3. униформне трансцендентне функције које се не могу продужити изван неког круга, као што је, на пример, функција

$$\sum_{0}^{\infty}x^{n!};$$

или функција

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}x^{p_n},$$

(где p_n означава n-ти прост број), која има за сингуларне тачке[7] на кругу $|z|=1$ све корене једначине чији су редови $p_n (n=1,2,3\ldots)$;

4. функција

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}[n\theta]x^n,$$

где $[n\theta]$ означава цео део броја $n\theta$; функција је рационална кад је θ рационалан број, и у том случају она је облика

$$\frac{p(x)}{(1-x^2)^2},$$

где је q именилац броја θ, а $p(x)$ је полином од x са целим коефицијентима; у случају кад је број θ ирационалан функција је трансцендентна и има круг $|x|=1$ као засек;

5. трансцендентне функције које имају сингуларне линије друкчијег облика, као, на пример, функција[8]

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\frac{m_1x+m_2x^2+\ldots+m_rx^r}{1+q_1x+q_2x^2+\ldots+q_sx^s}\right]^{n!},$$

где су сви бројеви m_k и g_k цели;

6. мултиформне трансцедентне функције без сингуларних линија, као што је функција

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-16x^2t^2)}}=\sum_0^{\infty}\binom{2n}{n}^2x^{2n},$$

која има као једине сингуларне тачке $0,\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\infty$.

(E) – редови се уводе у велики број питања анализе и теорије бројева; оне су такође биле предмет важних радова.

Г. Борел је показао да, ако неки (E)-ред представља у кругу $|z|\leq 1$ униформну и регуларну функцију $f(x)$, изузимајући ограничен број полова, тада је функција $f(x)$ *рационална*. (E)-ред, дакле, не може представљати *трансцедентну мероморфну функцију*[9].

[7] Fatou, *Sur bes séries entières à coefficients entiers*, C. R. Acad. Sc., t. 138, 1904, pp. 342–343.

[8] G. Polya, *Ueber Potenzreihen mit gauzzahlingen Koeffizienten,* Math. Ann., t. 77, 1916, p. 510.

[9] E. Borel, *Sur une application du théorème de M. Hadamard*, Bull. des Sciences math, 2[e] série, t. XVIII, str. 22-25; *Leçons sur les fonctions méromorphes,* 1903, pp. 32–35.

Г. Поља (loc. cit.) уопштавајући Борелову теорему, показао је, да, ако (Е)-ред представља у кругу $|z| \leq R > 1$ униформну и регуларну функцију, уз изузетак ограниченог броја сингуларитета било какве природе, та функција мора бити *рационална*. Теорема г. Поље ништа не претпоставља о природи тих сингуларитета.

Полупречник конвергенције r (E)-реда очигледно *није већи од један*. Г. Поља је формулисао а г. Карлсон[10] доказао следећу теорему:

Кад год је $r = 1$, (E)*-ред представља или рационалну функцију или функцију чији је засек круг* $|z| \leq 1$.

У првом случају, тај ред, као што је, показао г. Фату (loc. cit.), представља функцију облика

$$\frac{P(x)}{(1-x^n)^m}, \tag{49}$$

где је $P(x)$ полином, а m и n су позитивни цели бројеви.

Према једном другом исказу г. Фатуа (loc. cit.), *алгебарска функција која није рационална а представљена је* (E)*-редом има најмање једну тачку грањања у унутрашњости круга* $|z| = 1$.

Додајмо још да су на (E)-редове проширени елементарни закони којима се подвргавају цели бројеви и који су били примењени у другим областима и на више начина; те области су: рачунање целим бројевима по неком модулу; рачунање полиномима са целим коефицијентима; рачунање по два модула, од којих је један број а други полином; рачунање имагинарним целим бројевима, кватерионима, Кронекеровим таблицама; рачун у неком домену рационалности; рачунање целим алгебарским бројевима, целим бројевима у неком домену, итд.[11]

Кад је дата нека (E)-функција, образујмо скуп (E) целих бројева који фигуришу као коефицијенти у одговарајућем (E)-реду. Спектар који је на било који начин образован од скупа (E) биће у исти мах и спектар функције. Посебно, *пругасти спектар скупа* (E) *са било каквим ритмом сагласним са елементима тог скупа представља пругасти спектар и саме функције.*

Спектар се добија као вредност коју узима одређена функција једне променљиве, *спектрална генератриса* $\Phi(x)$ додељена посматраној функцији, за неку погодно изабрану вредност те променљиве.

У случају кад се коефицијенти (E)-реда не увећавају бесконачно са њиховим рангом, имаћемо

---

[10] F. Carlson, *Ueber Potenzreihen mit genzzahligen Koeffizienten*, Mathem. Zeitschr., t. 9, 1921, pp. 1–13.

[11] E. Cahen, *Sur les series intégro-entières*, C. R. Acad. Sc., t. 152, 1911, pp. 124–127.

(50) $$\Phi(x) = \varphi(10^{-h}x),$$

где је $\varphi(x)$ функција коју представља ред (E') чији су коефицијенти апсолутне вредности датог (E)-реда, а h је неки позитиван цео број који није мањи од логаритма највећег од тих коефицијената. *Функција допушта спектар са униформним ритмом* $\mathrm{h_k} = \mathrm{h}$ *и он ће бити дат нумеричком вредношћу*

$$S = \varphi(10^{-h}),$$

израженом децималним разломком.

На пример, за функцију

$$f(x) = \frac{x}{1-x},$$

генератриса са униформним ритмом $h_k = 1$ ће бити

$$\Phi(x) = \frac{x}{10-x},$$

тако да се добија

$$S = \frac{1}{9} = 0{,}111\ldots.$$

За полином

$$f(x) = (1+x+x^2)^6,$$

генератриса са униформним ритмом $h_k = 3$ је

$$\Phi(x) = f\left(\frac{x}{1000}\right),$$

па добијамо

$$S = f(0{,}001).$$

У случају *било каквог* (E)-реда, конвергенција у околини тачке $x = 0$ обезбеђује постојање фиксираног позитивног броја B, таквог да, уколико су са $N_0, N_1, N_2, \ldots$ означене апсолутне вредности коефицијената реда, за сваку вредност индекса n имамо $\sqrt[n]{N_n} < B$. Нека је онда C неки позитиван цео број који није мањи од $\log B$, па формирајмо функцију

(51) $$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\rho e^{ti})\,\theta\left(\frac{xqe^{-ti}}{\rho}\right)dt,$$

где је

(52) $$\theta(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} q^{n^2}x^n, \quad q = 10^{-\frac{c}{2}}, \quad \rho = const. < \frac{1}{B}.$$

Функција тада има спектар са униформно убрзаним ритмом $h_k = h + ck$ (*где је* h *произвољан цео број*), *чија је генератриса функција (51) и који је сам дат као нумеричка вредност* $\Phi(1)$ *изражена децималним разломком.*

14. *Пругасти спектар (Е)-функције посматран као децимални број*. – Очигледно је да пругасти спектар неке (Е)-функције не може бити *цео* број уколико се функција не своди на константу; он не може имати ограничен број децимала сем кад се функција своди на полином. Исто тако, очигледно је да је, за рационалну (E)-функцију, спектар са било каквим униформним ритмом *рационалан* број. У случају кад је он *ирационалан* број, (E)-функција има сигурно у и на кругу $|z|=1$ сингуларитета који нису полови. Такав случај наступа када су коефицијенти (E)-реда ограничени и не репродукују се периодично.

Пругасти спектар са униформним ритмом алгебарске функције увек је *алгебарски број*. Али он није обавезно такав кад спектрални ритам није униформан: *пругасти спектар чији је ритам довољно убрзан трансцедентан је број каква год да је* (E)-*функција са којом се он повезује*.

Подсетимо, заиста, на једну познату теорему, која потиче од г. Е. Мајеа[12] а припада теорији трансцедентних бројева:

Нека је b било који фиксиран цео број, нека су даље $m_1, m_2, m_3, \ldots$ позитивни или негативни цели бројеви који су по апсолутној вредности мањи од b, при чему је њих бесконачно много различитих од нуле, а $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ реални позитивни бројеви такви да је

$$1 \leq \psi_1 \leq \psi_2 \leq \psi_3 \geq \ldots$$

и да ψ_n бесконачно расте са n. Тада је

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 x + A_1 x^2 + \ldots,$$

са

$$A_n = \frac{m_n}{b^{\psi_1 \psi_2 \ldots \psi_n}},$$

цела функција и она за x једнако рационалном (и чак алгебарском) броју различитом од нуле узима као вредности само трансцендентне бројеве.

---

[12] E. Maillet, *Introduction à la théorie des nombres transcedants*, Paris, Ganthier – Villars, 1906, pp. 20–22.

Посматрајмо, дакле, бесконачан низ $M_0, M_1, M_2, \ldots$ целих бројева *од којих сваки има највише* l *цифара*, и ставимо у претходној теореми

$$m_k = M_k, \quad b = 10^l.$$

Функција $\varphi(x)$ ће се подударити са спектралном генератрисом низа M_k која одговара ритму (сагласном са низом)

$$h_k = u_k - u_{k-1}, \quad \text{где је} \quad u_k = \psi_1\psi_2\ldots\psi_k l,$$

са $h_1 = \psi_1$, јер је тада

$$A_n = \frac{M_n}{b^{\psi_1\psi_2\ldots\psi_n}} = \frac{M_n}{10^{u_n}} = \frac{M_n}{10^{h_1+h_2+\ldots+h_n}} = g_n M_n.$$

Пругасти спектар бројева M_k са ритмом h_k подудариће се, дакле, са вредношћу $\varphi(1)$ и стога представља трансцендентан број. Према теорији трансцендентних бројева, ова трансцендентност потиче од бесконачно много низова нула које раздвајају значајне децимале спектра и чија дужина бесконачно расте са рангом низа. Друкчије речено: *трансцендентност спектра потиче од брзог рашћења његове дисперзије са рангом спектралних одсечака.*

За низ M_k који се састоји из једноцифрених бројева, спектар који има, на пример, ритам $h_k = (k-1)(k-1)!$ трансцендентан је број.

Али трансцендентна природа није искључиво везана за спектре низова целих бројева са ограниченим бројем цифара. Ово се може показати помоћу једне друге теореме о трансцендентним бројевима, која исто тако потиче од г. Мајеа[13] и која гласи овако:

Нека је b било који фиксиран цео број; ставимо

$$b_{k,n} = b^{b^n_{k-1}} \quad \text{са} \quad b_{1,n} = b^n,$$

тако да се добија

$$b_{2,n} = b^{b^n}, \quad b_{3,n} = b^{b^{b^n}}, \ldots$$

Нека су затим ρ и $\mathscr{C}$ два фиксирана позитивна цела броја, и нека је $A_0, A_1, A_2, \ldots$ низ целих бројева (реалних или имагинарних, позитивних или негативних) таквих да, за неку одређену вредност ρ већу од 2, имамо за сваки индекс n

$$\left| A_n \right| \leq b^{\mathscr{C}}_{p,n}.$$

Према теореми г. Мајеа коју имамо у виду, ред

[13] Loc. cit., p. 105.

$$\varphi(x) = A_0\omega_0 + A_1\omega_1 x + A_2\omega_2 x^2 + \dots,$$

где је

$$\omega_n = b_{p,n}^{-\rho n},$$

представља једну целу функцију од x која за x рационално узима само трансцедентне вредности.

Посматрајмо онда бесконачан низ позитивних реалних целих бројева $M_0, M_1, M_2, \dots$ чији број цифара може расти са рангом онолико брзо колико се хоће и одредимо два позитивна цела броја $p > 2$ и $\mathscr{C}$ тако да број $10_{p-1,n}$ расте бар исто толико брзо као број цифара броја M_n и да за сваки индекс n буде

$$\left| M_n \right| \leq 10_{p,n}^{\mathscr{C}}.$$

Ако се у претходној теореми узме да је

$$A_n = M_n, \quad b = 10,$$

функција $\varphi(x)$ подудариће се са спектралном генератрисом низа M_k, која одговара ритму

$$h_k = M_k - M_{k-1}, \quad \text{где је} \quad u_n = 10_{p,n}^{-\rho n},$$

са $h_1 = 10_{p,1}$, јер је тада

$$A_n\omega_n = \frac{M_n}{10^{h_1 + h_2 + \dots + h_n}} = g_n M_n.$$

Вредност $\varphi(1)$ представља пругасти спектар бројева M_k са ритмом h_k; тај спектар ће бити трансцендентан број.

Трансценденшносш шако образованих сйекшара у сушшини йошиче од дисйерзије сйекшра и ефекаш је величине убрзања сйекшралноī ришма; она није ни у каквој вези са самим нумеричким вредностима целих бројева који представљају пруге спектра или са начином њиховог рашћења са рангом.

Али поред таквих спектара, који припадају класи *Лиувилових шрансценденшних бројева*, има их бесконачно много другачијих, који такође представљају трансцендентне бројеве како имају слабу или чак нулту дисперзију, и спор или штавише униформан ритам. Довољно је сетити се спектра, са било којим униформним ритмом, низа једноцифрених целих бројева који се подударају са узастопним децималама броја e или броја π, а који не припада Лиувиловој класи.

Трансцендентност пругастог спектра може, дакле, потицати: 1. само од његове дисперзије; 2. од састава његових спектралних пруга; 3. истовремено од његове дисперзије и од састава његових пруга.

15. ***Трансмутације*** $\Delta[f]$. – Једна *функционална трансмутација* дефинисана је кад је дат закон који омогућује да се из сваке функције f изведе једна друга функција F чији облик зависи од облика функције f; тада се каже да ова трансмутација, *примењена* на функцију f, даје као *трансмутат* функцију F.

Појам трансмутације представља, за функције, тачан еквивалент појма пунктуалне трансформације за тачке простора. Између ове две концепције успоставља се онолико потпуна аналогија колико је могуће кад се узме да свака функција одговара једној тачки *функционалног простора*, у коме нека, било која категорија функција представља извесно *функционално поље*. Нека трансмутација може имати смисла и бити дефинисана само у одређеном функционалном пољу, као што у обичној геометрији извесна пунктуална трансформација може бити дефинисана само за тачке одређене области у простору, тачке неке површине или линије[14] .

Трансмутацијом $\Delta(\mathrm{f})$ *сагласном са функцијом ф назваћемо сваку трансмутацију која, примењена на функцију* f, *ову претвара у* (E)-*функцију.*

На пример, трансмутација

$$\Delta[f] = f'(x)$$

сагласна је са неодређеним интегралом сваке (E)-функције.

Трансмутација

$$\Delta[f] = \int_0^\infty e^{-t} f(zt)\, dt$$

сагласна је са функцијом

$$f(z) = e^{mz} \quad (m \text{ цео број}),$$

коју она трансмутује у ред $\Sigma\, m^n z^n$.

Трансмутација

$$\Delta[f] = z^2 f''(z) + 2z\, f'(z)$$

сагласна је са сваком функцијом $f(z)$ која је дефинисана степеним редом облика

$$f(z) = \frac{M_1 z}{1\cdot 2} + \frac{M_2 z^2}{2\cdot 3} + \frac{M_3 z^3}{3\cdot 4} + \ldots$$

(где су M_n фиксирани или са n променљиви цели бројеви), коју она трансмутује у ред $\Sigma\, M_n z^n$.

[14] J. Hadamard, *La série de Taylor et son prolongement analytique*, Scientia, Par. III.

Операције којима се изводе трансмутације $\Delta[f]$ бескрајно су разноврсне. Ипак, поједина трансмутација $\Delta[f]$ не доводи се искључиво у везу са једном одређеном функцијом: уопште узев, *нека трансмутација* $\Delta[f]$ *сагласна је са извесном, више или мање пространом, категоријом функција.*

Тако је трансмутација

$$(53) \qquad \Delta[f]=10^g f(z) \quad (g \text{ позитиван цео број})$$

сагласна са сваком функцијом

$$(54) \qquad f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots,$$

чији коефицијенти a_n имају *ограничен број децимала.*

Трансмутација

$$(55) \qquad \Delta[f]=Af(Bz), \quad A, B \text{ фиксирани цели бројеви}$$

сагласна је са сваком *алгебарском* функцијом са *рационалним* коефицијентима a_n ($n = 1, 2, 3,...$). Она је такође сагласна са функцијама $f(z)$ за које су коефицијенти a_n периодични децимални разломци чији број цифара у периодичном делу и број цифара периода не варирају са n.

Трансмутација

$$(56) \qquad \Delta[f]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{ti}) f\left(\frac{ze^{-ti}}{\rho}\right)dt \qquad (\rho = const.)$$

сагласна је са свим функцијама $f(z)$ чији су коефицијенти a_k квадратни корени целих бројева.

Функције $f(z)$ чији су коефицијенти a_n облика M_nQ_n, где је M_n цео број а чинилац Q_n број који није цео и мења се са n, допуштају трансмутације $\Delta[f]$ које могу узети веома различите облике.

1. За $Q_n=\dfrac{1}{\alpha+\beta n}$ $(\alpha = const., \beta = const.)$, имамо

$$\Delta[f]=z^{1-\beta}\frac{d}{dz}\left[z^{\beta}f(z^{\alpha})\right].$$

пошто се овде z замени са $z^{\frac{1}{\alpha}}$.

2. За $Q_n = n^{-p}$ (p позитиван цео број), имамо

$$\Delta[f]=\varphi_p(z),$$

где су функције $\varphi_k(z)$ дефинисане рекурентном формулом

$$\varphi_0 = f, \varphi_k(z) = z\frac{d}{dz}\varphi_{k-1}(z) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

3. За

$$Q_n = \frac{1}{n(n+1)\ldots(n+p)},$$

имаћемо

$$\Delta[f] = \frac{1}{z^{p-1}}\frac{d}{dz}\varphi_p(z),$$

где је

$$\varphi_0 = f, \varphi_k(z) = z^2\frac{d}{dz}\varphi_{k-1}(z) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

4. За

$$Q_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n},$$

имамо

$$\Delta[f] = \int_0^\infty e^{-t} f(zt)\,dt.$$

Ова последња трансмутација сагласна је, на пример, са било каквим полиномом са целим коефицијентима по $e^{\varphi(z)}$, $\sin\varphi(z)$, $\cos\varphi(z)$, где је $\varphi(z)$ нека (E)-функција.

5. За

$$Q_n = \frac{1}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n)^p} \qquad \left(\begin{array}{l} p \text{ фиксирани пози-} \\ \text{тиван цео број} \end{array}\right),$$

функција $f(z)$ допушта трансмутацију (са ограничењима која се тичу конвергенције)

$$\Delta[f] = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty e^{-(t_1+t_2+\ldots+t_p)} f(zt_1t_2\ldots t_p)\,dt_1\ldots dt_p.$$

Нека општа правила олакшавају тражење трансмутације $\Delta[f]$ у великом броју случајева. Очигледно је, уосталом, да се уз помоћ једне трансмутације $\Delta[f]$, сагласне са датом функцијом, операцијама може образовати бесконачно много других које, изведене на трансмутатима те трансмутације $\Delta[f]$, трансмутују овај у неки нови (E)-ред [додавање неког произвољног (E)-реда; множење једним таквим редом; поновљено диференцирање произвољан број пута; итерација, итд.].

16. ***Спектри функције на коју се примењује трансмутација*** $\Delta[f]$. – Кад је дата нека функција $f(z)$ и извесна са њом сагласна трансмутација $\Delta[f]$, *пругастим спектром функције* $f(z)$ *повезаним са том трансмутацијом* сматраћемо било који пругасти спектар (E)-функције која представља трансмутат функције $f(z)$ преко скупа операција којима се постиже $\Delta[f]$.

Спектри се обично добијају као вредност неког одређеног интеграла, а у извесним случајевима чак у коначном облику, као што је показано у претходним параграфима.

Тако је спектар функције e^x са униформним ритмом $h_k = 1$ дат спектралном генератрисом

$$\Phi(x) = \int_0^\infty e^{-t} f\left(\frac{xt}{10}\right) dt = \int_0^\infty e^{\left(\frac{x}{10}-1\right)} dt,$$

која одговара трансмутату

$$(57) \qquad \Delta[f] = \int_0^\infty e^{-t} f(xt)\, dt,$$

а сам спектар је

$$S = \int_0^\infty e^{-0,9t} dt = 1{,}111\ldots$$

Функције

$$(58) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

са коефицијентима ... дефинисаним рекурентним правилом

$$(59) \qquad (n+1)(n+2)a_{n+2} + \lambda a_n - M_n = 0,$$

($\lambda = cons.$, M_n позитиван цео број, фиксиран или променљив са n) допуштају трансмутацију

$$(60) \qquad \Delta[f] = f''(x) + \lambda f(x).$$

Спектар са униформним ритмом $h_k = h$ дат је вредношћу

$$(61) \qquad S = F(10^{-h}),$$

где $F(x)$ означава десну страну једнакости (60).

Спектар исте ове функције са униформно убрзаним ритмом $h_k = h + ck$ дат је вредношћу

$$(62) \qquad S = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty F(e^{ti})\, \theta\left(\frac{e^{-ti}}{\rho}\right) dt,$$

где $\theta(x)$ означава трансценденту (52) и где је ρ произвољна константа чији је модуо мањи од полупречника конвергенције реда (58).

За функције дефинисане експоненцијалним редовима

$$f(x) = A_0 + A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{2\alpha x} + \dots,$$

где су коефицијенти A_n позитивни цели бројеви, и за трансмутацију

$$\Delta[f] = f\left(\frac{\log x}{\lambda}\right) \qquad (\lambda = \alpha \log e)$$

(при чему је база логаритма 10), сагласну са низом A_n, спектар са униформно убрзаним ритмом $h_k = h + ck$ биће вредност

$$S = \chi\left(-\frac{h + \frac{c}{2}}{\lambda}\right),$$

где је $\chi(x)$ функција

$$\chi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n q^{n^2} e^{n\alpha x} \qquad (q = 10^{-\frac{c}{2}}).$$

Ако A_n не расте бесконачно са n, функција допушта спектре са униформним ритмом $h_k \geq l$, где је l позитиван цео број који није мањи од логаритма највеће од вредности A_n.

17. ***Веза између функције и њеног пругастог спектра.*** – Уопште узев, трансмутација $\Delta[f]$, изведена на функцији $f(x)$, успоставља извесну релацију између f и њеног трансмутата $F(x)$. Ова релација, у зависности од скупа операција којима се реализује $\Delta[f]$, може добити различите облике, као што су, на пример:

1. релација у коначном облику, каква је релација

$$Af(Bx) = F(x), \quad \left(\begin{array}{r} A, B \text{ фиксирани} \\ \text{цели бројеви} \end{array}\right),$$

која се примењује на алгебарске функције са рационалним коефицијентима a_n;

2. диференцијална једначина, као што је релација

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \lambda f = F(x) \qquad (\lambda = const.),$$

применљива на функције чији су коефицијенти везани рекурентним законом (59);

3. нека интегрална релација, каква је

$$\int_0^\infty e^{-t} f(xt)\,dt = F(x),$$

која долази у обзир за функције са коефицијентима a_n облика

$$\frac{M_n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} \quad (M_n \text{ цео број}).$$

Исто тако, транслација $\Delta[f]$ изведена на функцији

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

успоставља, уопште, извесну релацију између коефицијената a_n и коефицијената A_n функције $F(x)$. Ова релација може бити изражена у коначном облику или представљати рекурентну релацију.

Постоје, уосталом, *сингуларне* трансмутације $\Delta[f]$, које, примењене на произвољну функцију $f(x)$, не повлаче никакву релацију између f и F, у том смислу да је *трансмутат* F *независан од функције* f на коју се $\Delta[f]$ примењује. Такве би се трансмутације $\Delta[f]$, на пример, образовале кад се примети да има одређених интеграла облика

$$\int_a^b u(x)\left[v/t\right]^n dt,$$

који се анулирају за сваку позитивну вредност n. Такав би био Кошијев интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{cti}}{(a-ti)^n}\,dt \qquad (a>0, c>0),$$

или Стилтјесов интеграл

$$\int_0^\infty t^{un+1} e^{-t} \cos t\,dt.$$

Једна функција $f(z)$ допушта бесконачно много пругастих спектара, који варирају, с једне стране са примењеном трансмутацијом $\Delta[f]$, а с друге стране са ритмом помоћу кога се спектар формира. *Али за једну одређену трансмутацију* Δ *и за одређени спектрални ритам функција може имати само један спектар.*

Обрнуто, дати број S може се поклопити са пругастим спектрима бесконачно много функција, у зависности од примењене трансмутације и ритма који ће се приписати спектру. *Али, за једно разматрано* $\Delta[f]$ *и за дати спектрални ритам, неки број* S *карактерише, као пругасти спектар, уопште узев само једну функцију.* Вишезначности ту може бити само у случају кад релација до које доводи примена трансмутације $\Delta[f]$ не одређује потпуно f помоћу F, као што је, на пример, случај кад се коефицијенти a_n функције добијају као корени неке једначине која има више од једног реалног корена, или помоћу рекурентне релације која оставља неодређен известан број првих чланова $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Ова неодређеност ишчезава кад се води рачуна о допунским условима које даје помоћни скуп (A) података.

18. ***Приближни пругасти спектри.*** – Приближним спектром функције, повезаним са неким доменом (D) њене егзистенције, назваћемо позитиван реални број S који, посматран као спектар неке функције, а преко извесног скупа (A) квалитативних података, омогућује реконструисање функције $f(z)$ у домену (D) са жељеном приближношћу (тачношћу).

Показаћемо да:

Са сваком аналитичком функцијом f(z), *у околини било које њене обичне тачке, може се довести у везу један приближан спектар, са унапред задатом тачношћу.*

Приметимо најпре да свака аналитичка функција $f(z)$може бити представљена, у околини сваке своје обичне тачке $z = \alpha$ и са жељеном тачношћу, *извесним потенцијалним редом* $\varphi(z)$ *са целим коефицијентима, подељеним неким погодно изабраним степеном броја* 10.

У случају кад су сви коефицијенти A_n реда (63)

$$(63) \qquad f(z) = A_0 + A_1(z-\alpha) + A_2(z-\alpha)^2 + \ldots$$

реални, за $\varphi(z)$ може се узети ред

$$(64) \qquad \varphi(z) = N_0 + N_1(z-\alpha) + N_2(z-\alpha)^2 + \ldots,$$

где N_k означава апсолутну вредност целог дела коефицијента A_n пошто је у њој децимална запета померена за q места удесно. Тада би се имало

$$(65) \qquad \text{апс. вред. } A_k = 10^{-q} N_k + \alpha_k,$$

при чему је

$$(66) \qquad 0 \le \alpha_k < 10^{-q},$$

а модуо разлике

$$f(x)-10^{-q}\varphi(x) \tag{67}$$

био би мањи од

$$\frac{10^{-q}}{1-\lambda} \tag{68}$$

за сваку тачку у унутрашњости круга D, чији је центар тачка $z=\alpha$ а полупречник једна вредност λ, која је истовремено мања од 1 и од полупречника конвергенције R реда (63). Ако се, према томе, за q узме цео позитиван број већи од апсолутне вредности броја

$$\log\varepsilon+\log(1-\varepsilon), \tag{69}$$

(где је позитиван број ε унапред дат), имаће се за сваку тачку z у унутрашњости круга D

$$\left|f(z)-10^{-q}\varphi(z)\right|<\varepsilon, \tag{70}$$

што је и требало доказати. Број q зависи од тражене приближности и од посматране области око тачке $z=\alpha$.

При том се, погодним избором броја β, *може постићи да се функција* $f(\alpha+\beta z)$ *сведе на полином по* z. Заиста, конвергенција реда (63) у околини тачке $z=\alpha$ обезбеђује постојање броја B коначног, различитог од нуле и таквог да је за сваку вредност n

$$\sqrt[n]{|A_n|}<B.$$

Ако се за β узме неки позитиван број мањи од $\frac{1}{B}$, коефицијент $b_n=A_n\beta^n$ реда

$$f(\alpha+\beta z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\dots$$

по апсолутној вредности ће бити мањи од 1. Коефицијенти N_k реда $\varphi(z)$ који се односи на $f(\alpha+\beta z)$ постају, почев од извесног ранга k, сви једнаки нули, па се $\varphi(z)$ своди на полином. Штавише, кад су коефицијенти A_n, почев од извесног ранга, мањи од 1, може се узети да је $\beta=1$.

Ако су један или више првих коефицијената A_n цели бројеви, *апроксимација коју даје полином* $\varphi(z)$ *биће увећана*. Јер, уколико су, на пример, бројеви $A_0, A_1, \dots, A_m$ цели, имаће се $\alpha_0=\alpha_1=\dots=\alpha_m=0$; за тачке z у унутрашњости круга полупречника λ модуо разлике (67) мањи је од

$$\frac{10^{-q}\lambda^{m+1}}{1-\lambda}.$$

На пример, за функцију $f(z) = e^z$, уколико се узме да је

$$\lambda = \frac{1}{2}, q = 7, \beta = 1,$$

$\varphi(z)$ ће бити полином десетог степена

$$\begin{aligned}\varphi(z) = {} & 10000000 + 10000000z + 5000000z^2 \\ & +1666\,666z^3 + 416666z^4 + 83333z^5 + 13888z^5 + \\ & +13888z^6 + 1984z^7 + 248z^8 + 27z^9 + 2z^{10};\end{aligned}$$

полином $10^{-7}\varphi(z)$ представљаће, за сваку вредност $|z| < \frac{1}{2}$, функцију e^z са најмање 7 тачних децимала.

Било који пругасти спектар полинома $\varphi(\mathrm{z})$ у *исти мах је приближан спектар функције* $\mathrm{f(z)}$ *за све тачке* z *у унутрашњости круга* D.

Полином $\varphi(z)$ допушта ограничене спектре са униформним ритмом, добијене као нумеричке вредности од $\varphi(\alpha + 10^{-h})$, где l означава позитиван цео број који није већи од логаритма апсолутне вредности највећег од коефицијената N_k. Према томе: *функција* $f(z)$ *допушта у околини сваке своје обичне тачке ограничене спектре који је одређују, у тој околини, са унапред задатом тачношћу.*

Ако h означава неки број који није мањи од логаритма апсолутне вредности највећег од коефицијената A_k, може се ставити $l = h + q$. Приближни спектар функције $f(z)$ са униформним ритмом l биће неки рационалан број са $p(h+q)$ децимала, где p означава степен полинома $\varphi(z)$. Он ће одређивати функцију $f(z)$, у унутрашњости круга D, са приближношћу ε која зависи од броја q и од полупречника круга D.

Завршићемо овај параграф примедбом да се претходни закључци лако проширују на случајеве имагинарних коефицијената A_k, па стога на сваку аналитичку функцију.

ТРЕЋИ ДЕО

СПЕКТРАЛНА МЕТОДА

19. ***Принциū меτоде.*** – Појам спектра, упркос својим привидима површног и не нарочито консеквенцама богатог појма, може се ипак довести у близак однос са непознатама у различитим проблемима аритметике и анализе. Разноврсност начина успостављања кореспонденције између спектра и елемената неког низа бројева, или елемената који одређују функцију, често омогућује образовање спектара у којима се експлицитно појављују вредности непознатих.

Специјално, *пруīасτи сūекτри* могу играти корисну улогу као инструменти рачуна. Они доводе до једног интересантног поступка у нумеричком рачуну који се може назвати *сūекτралним ūосτуūком*, због запањујуће његове сличности са спектралном анализом у физици и хемији.

Израчунати једну нумеричку вредност, или један ограничен или неограничен низ нумеричких вредности $a_0, a_1, a_2, \ldots$, или пак један одређен део цифара које образују неку од тих непознатих, спектралним поступком, то значи одредити ове непознате помоћу неког спектра S који је на погодан начин доведен у везу са низом бројева a_k. Ово је могуће учинити на два различита начина:

1. може се израчунати једна непозната или одређени део цифара које чине нумеричку вредност једне непознате, било као спектар S неке познате функције, добијен познатом трансмутацијом $\Delta[f]$ и са познатим спектралним ритмом, било као одређени сегмент спектра S, или као позната комбинација из спектра S;

2. може се израчунати коначан или бесконачан низ непознатих $a_0, a_1, a_2, \ldots$, или можда само једна непозната a_k која је члан овог низа, или пак једна или више од цифара које образују a_k, помоћу пруга или линија неког спектра S.

Овај ūоследњи начин одређивања неūознаτих ūримењује се кад īод су ове у ūознаτој кореспонденцији са једном (E)*-функцијом* и може се резимирати следећим правилом:

Ако се спектар S (E)-функције са ритмом h_k подели на узастопне одсечке, од којих се први састоји од првих h_1 децимала у S, други од h_2

следећих децимала, итд., при чему цео број N_n ($n = 1, 2, 3, ...$), члан низа $N_0, N_1, N_2, \ldots$ помоћних непознатих (помоћу којих се израчунавају непознате $a_0, a_1, a_2, \ldots$), добиће се као група значајних цифара n-тог одсечка, а N_0 ће се подударити са целим делом спектра S. Друкчије речено: N_n ће се поклопити са n-том пругом спектра S, а k-та децимала овог броја подудариће се са одговарајућом линијом те пруге. Пошто су бројеви N_n овако одређени, биће одређене и непознате a_n помоћу релација (експлицитних или рекурентних) које успостављају везу између бројева a_n и N_n.

Приближна вредност спектра S која је овом спектру *довољно блиска* даје тако *тачне вредности* онолико непознатих a_n колико се жели: одређивање првих $n + 1$ целих бројева $N_0, N_1, N_2, \ldots$ захтева само једну приближну вредност броја S са $h_1 + h_2 + \ldots + h_n$ тачних децимала, па ће се онда добити одговарајући бројеви помоћу релације између бројева a_n и N_n.

Предност коју са становишта праксе нумеричког рачуна пружа спектрална метода састоји се у томе што она даје начине:

1. да се одреде истовремено, *довољним продужавањем једног истог нумеричког рачуна*, вредности онолико непознатих колико се хоће;

2. да се одреде *тачне вредности* оног броја непознатих чије се одређивање жели, помоћу вредности која је *довољно блиска* извесном податку из проблема.

20. ***Неке аритметичке примене.*** – Означимо са 9_k цео број који се добија писањем k пута узастопно броја 9; на пример,

$$9_1 = 9, \quad 9_2 = 99, \quad 9_3 = 999, \ldots$$

У елементарној аритметици уче се занимљиве особине овако образованих бројева и њихових комбинација. Њима ћемо додати неколико, верујемо, нових особина.

1. Нека су

$$a, b, c, \ldots, g, \tag{71}$$

$$m, n, p, \ldots, s \tag{72}$$

два дата низа позитивних целих бројева, при чему су бројеви (71) сви узајамно прости, и нека је h променљив позитиван цео број. Израз

$$S = \frac{9_{(m+1)ah}}{9_{ak}} \times \frac{9_{(n+1)bh}}{9_{bk}} \cdots \frac{9_{(n+1)gh}}{9_{gk}}$$

представља цео број са λh цифара, где је

$$\lambda = ma + nb + \ldots + sg,$$

и он има следећу особину.

Означимо са $P(k)$ позитиван цео број који показује на колико начина се цео број k може написати у облику

$$k = ax + by + \ldots + gt,$$

кад симболи $x, y, \ldots, t$ узимају све вредности из следећих низова

$$\begin{aligned} x &= 0, 1, 2, \ldots, m \\ y &= 0, 1, 2, \ldots, n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t &= 0, 1, 2, \ldots, s \end{aligned}$$

Чим h *премаши извесну границу, одређену низом* (71), *цео број који образује група значајних цифара броја* S *која почиње* (k h + 1)-*вом а завршава се* (u + 1) h-*том цифром тог броја поклапа се са бројем* P(k), *и то за сваку вредност броја* k *која није већа од* λh.

Да бисмо то доказали, посматрајмо полином

$$V(x, \alpha, \mu) = \frac{x^{(\mu+1)\alpha} - 1}{x^{\alpha} - 1} = 1 + x^{\alpha} + x^{2\alpha} + \ldots + x^{\mu\alpha},$$

где су α и μ два произвољна позитивна цела броја. Имаће се

$$V(10^{-h}, \alpha, \mu) = 10^{-\mu\alpha h} \frac{9_{(\mu+1)\alpha h}}{9_{\alpha h}},$$

и одатле

$$S = 10^{\lambda h} W(10^{-h}),$$

где $W(x)$ означава полином степена λ

$$W(x) = V(x, a, m) \times (x, b, n) \ldots V(x, g, s).$$

Но, коефицијент уз x^k у полиному $W(x)$ управо је број означен са $p(k)$. Ако се са l_k означи број цифара целог броја $p(k)$и узме за h неки број који није мањи од $\log p(k)$, добија се

$$W(10^{-h}) = 0,\underbrace{00\ldots0}_{h-l_1 \text{ нула}}\ p(0)\underbrace{00\ldots0}_{h-l_2 \text{ нула}}\ p(1)\underbrace{00\ldots0}_{h-l_3 \text{ нула}}\ p(2)0\ldots0\ p(\lambda h),$$

а како је $h - l_k \geq 0$, овим је завршен доказ формулисаног резултата. Број S је, дакле, *спектар партиције бројева.*

Лагер[15] је добио једну општу формулу која даје приближну вредност броја $p(k)$ за дати систем $(k, a, b, c, \ldots, g)$ и за све могуће системе $(x, y, \ldots, t)$, при чему учињена грешка има горњу границу која *не зависи og* k.

У случају, на пример, једначине са две непознате

$$k = ax + by,$$

Лагерова формула даје

$$p(k) = \frac{k}{ab} + \delta,$$

где је апсолутна вредност броја δ мања од 1; за једначину са три непознате

$$k = ax + by + cz,$$

она даје

$$p(k) = \frac{k^2}{2abc} + \frac{k(a+b+c)}{2abc} + \delta,$$

при чему је допунски члан δ по апсолутној вредности мањи од извесне фиксиране количине за све вредности броја k.

Ове формуле омогућују да се броју h додели једна од вредности које претпоставља претходни исказ.

Приметимо да је

$$\frac{9_{(\mu+1)\alpha h}}{9_{\alpha h}}$$

цео број са $\mu\alpha h$ цифара, чија је вредност

$$1\underbrace{00\ldots01}_{\alpha h-1\,\text{нула}}\;\underbrace{00\ldots01}_{\alpha h-1\,\text{нула}}\;\underbrace{00\ldots01}_{\alpha h-1\,\text{нула}}\ldots,$$

где се група цифара $00\ldots01$ понавља μ пута. Ово дозвољава да се број S израчуна сабирањем погодно распоређених јединица и да се чак замисли једноставан апарат који би брзо изводио овај рачун.

На пример, за једначину

$$3x + 2y = k, \quad 0 \le x \le 10, \quad 0 \le y \le 10,$$

будући да је број

$$\log\left(1 + \frac{\lambda}{ab}\right) = \log\left(1 + \frac{48}{6}\right) = \log 9$$

---

[15] *Sur la partition des nombres*, Bulletin de la Soc. mat. de France, t. V, 1877; Oeuvres, t. I, pp. 218–220.

мањи од 1, може се узети да је $h = 1$, што ће дати

$$S = 0{,}10111121222232333434334334334\ldots$$

па ће се број $p(k)$ подударити са $(k+1)$-вом цифром броја S. Тако, једначина

$$3x + 2y = 19$$

има тачно три решења по $x \leq 10$ и $y \leq 9$: тај број заиста показује двадесета цифра броја S.

2. Посматрајмо рационалан број

$$S_{m,h} = M_{m,h}\,Q_h,$$

где је

$$M_{m,h} = \frac{1}{9_h} + \frac{1}{9_{2h}} + \ldots + \frac{1}{9_{mh}},$$

$$Q_h = 10^{-h}\,\frac{9_{2h}}{9 \cdot 9_h}$$

и где су m и h произвољна два цела позитивна броја. Кад се ови бројеви претворе у децималне разломке, $M_{m,h}$ постаје *прост* периодични разломак чији период има mh цифара, а Q_h *мешовит* периодични разломак чији непериодични део и период имају сваки по h цифара. Сам број $S_{m,h}$, претворен у периодични разломак, биће, дакле, *мешовити* периодични разломак чији непериодични део има h, а период mh цифара.

Поделимо низ S децимала броја $S_{m,h}$ који образује скуп који се састоји из његовог непериодичног дела и из првог периода – у узастопне одсечке $T_1, T_2, \ldots, T_{m+1}$ са по h цифара, тако да одсечак

$$T_k \quad (k = 1, 2, \ldots, m+1)$$

почиње $[(k-1)h+1]$-вом а завршава се kh-том децималом, и посматрајмо одсечке $T_1, T_2, \ldots, T_m$.

Чим h *премаши извесну вредност, цео број који образује група значајних цифара одсечка* $\mathrm{T_k}$ *подудара се са бројем делилаца броја* k *различитих од* 1 *и од* k, *и то за сваку вредност* $\mathrm{k} \leq \mathrm{m}$.

Да бисмо се у то уверили, приметимо да $S_{m,h}$ представља нумеричку вредност коју за $x = 10^{-h}$ узима рационална функција

$$F(x) = f(x) - \varphi(x),$$

где је $f(x)$ ограничен Ламбертов ред

$$f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \ldots + \frac{x^m}{1-x^m},$$

а

$$\varphi(x) = \frac{x(x+1)}{1-x} = x + 2(x^2 + x^3 + x^4 + \ldots).$$

Према добро познатој особини Ламбертовог реда, коефицијент $N(k)$ развитка

$$F(x) = N(1)x + N(2)x^2 + N(3)x^3 + \ldots$$

подудариће се са бројем делилаца броја k различитим од 1 и од k.

Узмимо за h било који цео број такав да 10^h не буде мање од броја делилаца било ког целог броја $k < m$. Производ $10^{-hk} N(k)$ онда ће бити број $0{,}00\ldots0N(k)$, где значајном делу $N(k)$, који образује l_k цифара, претходи $h - l_k$ нула. Одатле излази да је

$$F(10^{-h}) = 0{,}\underbrace{00\ldots0}_{h-l_1\text{ нула}}\ N(1)\underbrace{00\ldots0}_{h-l_2\text{ нула}}\ N(2)\underbrace{00\ldots0}_{h-l_3\text{ нула}}\ N(3)0\ldots,$$

што доказује гореформулисани резултат. Број S је, дакле, један *спектар броја делилаца променљивог целог броја*.

Ако се *лакуном* назове сваки одсечак T_k који чине искључиво нуле, из претходног излази следећа последица:

Број лакуна које се налазе међу првих k *одсечака* $T_1, T_2, \ldots$ *једнак је броју простих бројева који нису већи од* k, *и то за сваку вредност* k *која није већа од* m.

Кад се примети да је

$$\frac{1}{9_{kh}} = 0{,}\underbrace{0\ldots0}_{kh-1}\ 1\underbrace{0\ldots0}_{kh-1}\ 1\underbrace{0\ldots0}_{kh-1}\ 1\ldots,$$

$$10^{-h} \times \frac{9_{2h}}{9 \times 9_h} = 0{,}\underbrace{0\ldots0}_{h-1}\ 1\underbrace{0\ldots0}_{h-1}\ 2\underbrace{0\ldots0}_{h-1}\ 2\underbrace{0\ldots0}_{h-1}\ 2\ldots,$$

види се да би се број S могао израчунати за све дате бројеве m и h само сабирањем јединица, на пример помоћу апарата који би се једноставно могао конструисати.

Број h који испуњава претходне услове могуће је одредити на различите начине. Како је

$$N(k) = k < m,$$

може се за h *узети било који цео број који није мањи од* log m.

Он се такође може изабрати на следећи начин: узимајући за m неки факторијел,

$$m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \lambda,$$

са сигурношћу се утврђује да број делилаца (различитих од 1 и k) целог броја $k \leq m$ не премашује никад $2^{\lambda-1}$, а како је

$$2^{\lambda-1} < 10^{\frac{\lambda-1}{3}},$$

за h *се може узети било који цео број који није мањи од* $\dfrac{\lambda-1}{3}$.

Подсетимо такође на неједнакост г. Вигерта

$$N(k) < 2^{(1+\varepsilon)\frac{\log k}{\log\log k}},$$

која важи за $\varepsilon > 0$ и произвољно, уколико је k довољно велико.

На пример, за $m = 100$ (што даје $h \leq 2$) добија се:

$$S_{100,2} = 0{,}000000100020002012000400020203000400040202000601\ldots$$

Првих двадесет одсечака са по две цифре садржи 9 лакуна, првих 100 одсечака их садржи 26, ово показује да има 9 простих бројева мањих од 20, да их има 26 мањих од 100, итд.

Исти поступак, примењен на различите рационалне функције аналогне претходним, доводи до других целих или рационалних бројева образованих од цифара 9 и са занимљивим аритметичким својствима.

Зна се, на пример[16], да је број $Q_{p,q}$ разлагања свих бројева у (највише) q делова, од којих ниједан није већи од датог броја p, једнак коефицијенту уз αx^{pq} у развоју функције

$$F(x) = \frac{1}{(1-\alpha)(1-x)(1-\alpha x)(1-\alpha x^2)\ldots(1-\alpha x^p)}.$$

Исто тако, познато је да је број $R_{k,k'}$ решење у целим позитивним бројевима две симултане једначине

$$ax + by + \ldots + gt = k,$$
$$a'x + b'y + \ldots + g't = k',$$

за променљиве k и k', коефицијент уз $u^k v^{k'}$ у развоју функције

$$\Phi(u,v) = \frac{1}{(1-u^{\alpha}v^{\alpha'})(-u^b v^{b'})\ldots(1-u^g v^{g'})}.$$

Изрази

[16] Mac-Mahon, Philos. Trans., t. 187, A, 1896, p. 619.

$$(73) \qquad F(10^{-h}) \quad \text{и} \quad \Phi(10^{-h}, 10^{-h'}),$$

(где су h и h' довољно велики цели бројеви) представљају извесне рационалне бројеве чији се низ децимала изражава кад се напишу једни у продужетку других, узастопни цели бројеви $Q_{p,q}$ или $R_{k,k'}$ и између њих уметне известан број нула, који је утолико већи уколико су бројеви h и h' већи. Бројеви (73) играју тако улогу спектара у овом проблему.

Још ћемо показати, у својству примера, начин формирања *спектара истих степена узастопних целих бројева.*

Ако се са $P_{m,k}$ означи полином степена m, дефинисан рекурентном формулом

$$P_{m,k} = zP_{m,k-1} = 0, \quad P_{m,0} = \frac{z^{m+1} - z}{z-1}, \quad P' = \frac{dP}{dz},$$

имаће се

$$P_{m,k} = 1^k z + 2^k z^2 + \ldots + m^k z^k.$$

Позната формула

$$\frac{\Sigma a_n z^n}{1-z} = a_0 + (a_0 + a_1)z + (a_0 + a_1 + a_2)z^2 + \ldots$$

даје онда

$$\frac{P_{m,p}}{1-z} = s_{1p}z + s_{2p}z^2 + \ldots + s_{mp}(z^m + z^{m+1} + \ldots),$$

где је

$$s_{np} = 1^p + 2^p + \ldots + n^p.$$

Неједнакост

$$k^p < m^p \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

повлачи

$$s_{np} < m^{p+1},$$

и стога је, са извесним позитивним целим бројем h који није мањи од $(p+1)\log m$, *спектар низа* $S_{1p}, S_{2p}, \ldots, S_{mp}$, чији је униформни ритам $h_k = h$ дат са mh првих децимала броја (где је 9_n ознака из претходних примера)

$$S = \frac{10^{mh}}{9_{mh}} P_{mp}(10^{-mh});$$

преостале децимале образују периодични спектар са униформним ритмом h, при чему је период број s_{mp}, заједно са онолико нула испред њега колико је потребно за употпуњавање броја h цифара периода.

На пример, у случају бројева $s_{1p}, \ldots, s_{mp}$ са $m = 16, p = 2$ налази се

$$S = \frac{10^{64} P_{16,2}(10^{-64})}{9_{64}}$$
$$= 0,000100050014003000550091014002040285050606500819101\,5\ldots$$

Нумеричка вредност збира s_{k2} $(k = 1, 2, \ldots, 16)$ поклапа се са k-том пругом спектра, што ће рећи са групом значајних цифара која почиње $(4k\text{–}3)$-вом и завршава се $4k$-том децималом спектра S; при том се n-та цифра збира s_{k2} подудара са $(2k - n + 1)$-вом децималом у S. Тако се збир $s_{9,2}$ поклапа са деветом спектралном пругом: то је, дакле, број 285; друга цифра броја $s_{13,2}$ је педесет и прва децимала броја S, а то је 1.

21. ***Спектрални поступак развијања у ред.*** – Нумеричко израчунавање коефицијената реда

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

изводи се уобичајеним поступцима, било израчунавањем сваког коефицијента a_n *индивидуално* експлицитном формулом

$$a_n = \varphi(n) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

било израчунавајући a_n помоћу већ познатог низа коефицијената a_{n-1}, $a_{n-2}, \ldots$ *на основу неке рекурентне формуле*

$$\varphi(n, a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots) = 0.$$

Спектрални поступак састоји се у израчунавању свих коефицијената a_n *истовремено, или пак групе тих коефицијената чије се одређивање жели, помоћу група децимала једног јединог броја* S, *на погодан начин доведеног у везу са функцијом* f(z) *чији се развој у ред тражи.*

Правила из параграфа **8** што се овог тиче доводе до следећих правила.

I. Када су бројеви a_n позитивни и цели, коефицијент a_0 једнак је целом делу броја S који представља спектар функције $f(z)$ са познатим ритмом h_k; коефицијент a_n подудариће се са групом значајних цифара броја S која почиње $(P_{n-1} + 1)$-вом а завршава се P_n-том децималом, где је $P_n = h_1 + h_2 + \ldots + h_n$. У случају униформног ритма $h_k = h$, то је група која почиње $[(n-1)h + 1]$-вом а завршава се nh-том децималом спектра S. У случају униформно убрзаног ритма $h_k = h + ck$, она почиње

$$\left[(n-1)h + \frac{n(n-1)}{2}c + 1\right]\text{-вом,}$$

а завршава се $\left[nh+\frac{n(n+1)}{2}c+1\right]$-том децималом спектра S.

По реду k-та цифра броја a_n поклапа се са (P_n-k+1)-том децималом спектра S (са k-том линијом n-те спектралне пруге). За $h_k=h$ то је $(n-k+1)$-ва, а за $h_k=h+ck$

$$\left[nh+\frac{n(n+1)}{2}c-k+1\right]\text{-ва децимала спектра } S.$$

II. Када коефицијенти a_n нису цели бројеви, познавање неке трансмутације $\Delta[f]$ сагласне са функцијом $f(z)$ коју треба развити доводи до (E)-функције која представља трансмутат функције $f(z)$; познавање неког спектралног ритма сагласног са низом коефицијената N_n функције (E) и знакова σ_n реалних и имагинарних делова ових коефицијената омогућиће формирање једног спектра S низа N_n са таквим ритмом. Правило I примењено на S одредиће онда бројеве N_n, а релација између бројева a_n и N_n коју намеће $\Delta[f]$ одредиће онда непознате бројеве a_n.

Могући ритам h_k и знаци σ_n биће садржани у скупу (A) квалитативних података проблема.

III. Одређивање тачних вредности $n+1$ првих коефицијената (уз апстраховање знакова σ_n) захтева само познавање извесне *приближне* вредности броја S са P_n тачних првих децимала. Овај број децимала је nh у случају униформног спектралног ритма, а $nh+\frac{n(n+1)}{2}c$ у случају униформно убрзаног ритма $h_k=h+ck$.

Први пример. – Одредити низ $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{mp}$ коефицијената p-тог степена датог полинома $P(x)$ m-тог степена чији су коефицијенти позитивни цели бројеви, знајући при том једну горњу границу A коефицијената A_k.

Ако је са h означен неки позитиван цео број који није мањи од $\log A$, низ бројева A_k допушта униформни спектрални ритам $h_k=h$, па ће спектар бити дат бројем

$$S=\left[P(10^{-h})\right]^p.$$

Коефицијент A_k, као и жељена цифра овог броја, биће дати prугом и линијом спектра S које се одређују на основу претходних правила.

Да би се, на пример, спектралним потупком развио израз

$$f(x)=(1+x+x^2)^4,$$

знајући да коефицијенти тог развитка нису већи од 1000, довољно је израчунати број

$$\begin{aligned} S &= f(10^{-3}) = 10^{-36}1001001^6 \\ &= 1,006021050090126141126090050210060001 \end{aligned}$$

и поделити његов децимални део на одсечке са по три цифре: сваки од тих одсечака даје по један коефицијент A_k, па се тако добија

$$\begin{aligned} f(x) = 1 + 6x + 21x^2 + 50x^3 + 90x^4 + 126x^5 + 141x^6 \\ +126x^7 + 90x^8 + 50x^9 + 21x^{10} + 6x^{11} + x^{12}. \end{aligned}$$

Довољно је, штавише, израчунати само првих осамнаест децимала броја S да би се имао потпуни развој функције.

Други пример. – Развити у степени ред рационалну функцију

$$f(x) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

чије су све нуле имениоца просте и имају модуле једнаке јединици, знајући да су сви непознати коефицијенти овог развитка цели позитивни бројеви или цели бројеви, наизменично позитивни и негативни.

Ако се са $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ означе нуле полинома $Q(x)$, а са $A_1, A_2, \ldots, A_m$ коефицијенти простих разломака који им одговарају, имаће се

$$(\beta) \qquad f(z) = p(z) + \frac{A_1}{z - \alpha_1} + \ldots + \frac{A_m}{z - \alpha_m},$$

где $p(z)$ означава цео део разломка $f(z)$.

Ако се десна страна једнакости (β) развије у ред

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots,$$

имаћемо

$$a_n = p + A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n + \ldots + A_m\alpha_m^n,$$

где p означава, уколико то долази у обзир, коефицијент уз x^n у полиному $P(x)$. Одавде се закључује да је

$$|a_n| \leq |p| + |A_1\alpha_1^n| + |A_2\alpha_2^n| + \ldots + |A_m\alpha_m^n|,$$

а како је модуо од ... једнак јединици, добија се

$$|a_n| \leq |p| + |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_m|.$$

Ако се, према томе, са h означи било који цео број који није већи од

$$\log\left[|p|+|A_1|+\ldots+|A_m|\right],$$

биће

$$|a_n|<10^h,$$

где се h *не мења са* n, што значи да низ коефицијената a_n има униформан спектрални ритам $h_k = h$; решавање проблема се онда лако завршава.

У случају кад су, на пример, бројеви a_n позитивни, њихов спектар ће бити рационалан број $S = f(10^{-h})$. Коефицијент a_n тада ће се подударити са целим бројем образованим од групе децимала броја S која почиње $[(n-1)h+1]$-вом и завршава се nh-том од тих децимала; k-та цифра коефицијента a_n дата је $(nh - \mathrm{k} + 1)$-вом децималом спектра S.

Такав је случај ограниченог Ламбертовог реда

$$f(z)=\frac{z}{1-z}+\frac{z^2}{1-z^2}+\ldots+\frac{z^m}{1-z^m},$$

који свакако испуњава претходне услове. С обзиром на неједнакост

$$|a_n|<n<m,$$

која важи за овај ред, и на чињеницу да коефицијенти a_n, као позитивни цели бројеви, имају за спектрални ритам неки униформни ритам

$$h_k = h \geq \log m,$$

њихов спектар са таквим ритмом биће рационални број

$$S=\frac{1}{9_h}+\frac{1}{9_{2h}}+\ldots+\frac{1}{9_{mh}}\quad\left(9_\alpha=\underbrace{99\ldots9}_{\alpha\text{ пута}}\right).$$

На пример, за $m < 100$ може се узети $h = 2$, што даје

$$S = 0{,}010202020204020304020602040405020602 06\ldots,$$

тако да је

$$f(z)=z+2z^2+2z^3+3z^4+2z^5+4z^6+2z^7+4z^8+3z^9+\ldots$$

Трећи пример. – Развити $f(z)$ знајући да је коефицијент a_n рационалан број $\frac{M_n}{n}$, где су бројеви M_n цели и са ограниченим бројем цифара, и при том наизменично позитивни и негативни.

Трансмутација

$$\Delta[f] = f'(z),$$

сагласна са $f(z)$, даје трансмутат (E)

$$F(z) = M_0 + M_1 z + M_2 z^2 + \ldots$$

и повлачи релацију

$$(\alpha) \qquad na_n - M_{n-1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Број M_{n-1} биће одређен као n-ти одсечак са h цифара броја

$$S = f'(-10^{-h}),$$

који игра улогу спектра функције $F(z)$ са униформним ритмом $h_k = h \geq$ од максималног броја цифара броја M_n. Коефицијенти a_n ће онда бити дати релацијом (α), која оставља a_0 неодређено.

На пример, за

$$f(z) = \int \frac{23 - 19z - 2z^2 + 2z^3}{1 - z^2} dz$$

и $h = 2$, налази се

$$S = f'(-0{,}01) = 23{,}19211721172117\ldots;$$

овде се, дакле, коефицијенти M_n репродукују, почев од трећег, при чему је период 21 и 17, па тако имамо

$$f(z) = a_0 - 23z + \frac{19}{2} z^2 - \frac{21}{3} z^3 + \frac{17}{4} z^4 - \frac{21}{5} z^5 + \frac{17}{6} z^6$$

Четврти пример. – Развити $f(z)$ знајући да су коефицијенти a_n сви позитивни и квадратни корени позитивних целих бројева са ограниченим бројем децимала.

Ако је стављено

$$\left| f(re^{\varphi i}) \right|^2 = \psi(r, \varphi),$$

трансмутација

$$\Delta[f] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi\left(\sqrt{z}, \varphi\right) d\varphi,$$

сагласна иначе са $f(z)$ (§ **15**), претвара ту функцију у један (E)-ред релацијом

$$a_n^2 - M_n = 0.$$

Узимајући за h неки цео број који није мањи од максималног броја цифара у броју a_n, спектар бројева M_n са ритмом $h_n = h$ биће реални број

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi\left(10^{-\frac{h}{2}},\varphi\right)d\varphi,$$

чији ће n-ти одсечак са h цифара дати M_n, па ће се имати

$$a_n = \sqrt{M_n}.$$

Пети пример. – Развити $f(z)$ кад је познато само да су коефицијенти a_n позитивни цели бројеви и да је $z = 0$ обична тачка функције.

Конвергенција степеног реда који представља функцију $f(z)$ у близини тачке $z = 0$ повлачи постојање фиксираног позитивног броја A таквог да је, за сваку вредност n, $\sqrt[n]{a_n} < A$. Ако је са C означен било који цео број који није мањи од $\log A$, униформно убрзан спектрални ритам $h + ck$ биће сагласан са низом коефицијената a_n и његов спектар ће бити реални број

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{ti})\,\theta\left(\frac{qe^{-ti}}{\rho}\right)dt,$$

где је

$$\theta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^n, \quad q = 10^{-\frac{c}{2}}, \quad \rho = const. < \frac{1}{A}.$$

Може се, такође, број S изразити помоћу одређеног интеграла (29) из параграфа **5**

$$S = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-t} R(\alpha,\beta t)\,dt,$$

где $R(r,\varphi)$ означава реални део од $f(r,e^{\varphi i})$ и где константама α и β треба приписати вредности

$$\alpha = 10^{-c}, \quad \beta = \sqrt{2\,\mathrm{lognat}10}.$$

Ако се низ децимала броја S подели на узастопне одсечке са c, $2c$, $3c$,... децимала, коефицијент a_0 подудариће се са целим делом броја S, а коефицијент a_n са целим бројем образованим од значајних цифара n-тог одсечка.

22. ***Спектрални поступак израчунавања одређених интеграла***. – Спектрални поступак се на два различита начина примењује на израчунавање одређених интеграла.

Први начин. – У случају неког низа одређених интеграла J_1, J_2, J_3,… (једноструких или вишеструких, реалних или имагинарних), таквих да се J_n подудара са коефицијентом a_n неке функције $f(z)$, *израчунавање интеграла* J_n *може се вршити према правилима из параграфа* **21** *помоћу пруга извесног спектра доведеног у везу са* f(z) *и релације која постоји између целих бројева које образују те пруге и коефицијената* a_n.

На тај начин се Кошијев интеграл

$$J_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \qquad (n = 0,1,2,\ldots),$$

узет дуж неког круга C чији је центар у тачки $z = a$ и у коме је функција $f(z)$ холоморфна, изражава, кад год је његова нумеричка вредност цео број, непосредно као *цео број* који образује одређену пругу извесног спектра функције $f(a+z) - f(a)$(уз апстраховање знакова σ_n).

Кад интеграли J_n нису цели бројеви, $f(z)$ ће бити замењено трансмутатом који одговара некој трансмутацији сагласној са $f(z)$.

Исто тако, интеграл облика

$$J_n = \int_a^b uv^n dt,$$

(где су u и v функције од t) добиће се помоћу пруга једног спектра кад се примети да се интеграли J_n поклапају са коефицијентима развитка функције

$$f(z) = \int_a^b \varphi(vz)\,u\,dt$$

по степенима од z, где је $\varphi(z)$ једна или друга од функција

$$\varphi(z) = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}, \qquad \varphi(z) = \frac{1}{1-z},$$

према томе да ли је низ J_n ограничен или неограничен.

Други начин. – У случају кад неки интеграл J и сам представља спектар, са познатим ритмом h_k, познатог низа целих бројева $N_0, N_1, N_2, \ldots$, *он ће имати за нумеричку вредност број* N_0 *праћен, као цео део, низом децимала који се образује ређањем, једне уз другу, нумеричких група* $\mathrm{G}_0, \mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \ldots$ *које одговарају низу* N_k *и ритму* h_k, *пошто су реални и имагинарни делови бројева* N_k *снабдевени позитивним знаком.*

Такав је, на пример, случај интеграла

$$J = \int_a^b \varphi(10^{-h} v)\, u\, dt,$$

када су интеграли J_n, дефинисани претходном формулом цели бројеви, чији број цифара не пролази h; интеграл, посматран као спектар бројева J_n са ритмом $h_k = h$, имаће као цео део вредност J_0, а као децимални део $G_1, G_2, G_3, \ldots$, где је G_k цео број J_k коме претходи онолико нула колико је потребно да број цифара нумеричке групе G_k буде једнак h.

Такав је, такође, случај интеграла

$$J = \int_a^b \xi(v)\, u\, dt,$$

где, са члановима h_k било каквог неограниченог низа позитивних целих бројева, $\xi(z)$ означава *целу* функцију

$$\xi(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} q_n z^n, \qquad g_n = 10^{-(h_1 + h_2 + \ldots + h_n)}.$$

Када је J_n рационалан број облика $\frac{M_n}{n}$ (M_n = цео број, фиксиран или са n променљив), треба $\xi(z)$ заменити са $z\xi'(z)$.

Узимајући за h_k неки низ целих бројева који са својим рангом расту довољно брзо, имаће се тако бесконачно много интеграла који се изражавају помоћу Лиувилових трансцендентних бројева[17].

Интеграли облика

$$J = \int_0^\infty e^{-t^2} \psi(\alpha, \beta t)\, dt,$$

где је $\psi(r, \varphi)$ реалан део функције $f(re^{\varphi i})$, при чему се функција $f(z)$ може развити у ред по степенима променљиве z чији су коефицијенти цели бројеви – израчунавају се, за извесне вредности константи α и β, као спектри коефицијената функције $f(z)$ са неким униформно убрзаним ритмом (§ **5**). У случају када је, на пример, рационална функција која представља скуп $m < 100$ првих чланова Ламбертовог реда (§ **21**) и стављано је

---

[17] Видети стр. 46.

$$\alpha = 0{,}01, \quad \beta = \sqrt{2}\,\mathrm{log\,nat}10,$$

интеграл J ће имати вредност $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ помножену бројем S чији је цео део нула а њен децимални део се може написати ређајући једне уз другу групе $G_1, \ldots, G_m$, где је G_k једнако броју делилаца броја k (рачунајући у њих и бројеве 1 и k) испред кога је стављено онолико нула колико је потребно да укупан број цифара групе G_k буде једнак $2k$.

23. ***Спектрално одређивање функција.*** – Уобичајени поступци одређивања неке аналитичке функције помоћу *дискретних услова* захтевају, уопште узев, *бесконачно много* нумеричких података, какви су, на пример, коефицијенти Тајлоровог реда, тригонометријског, експоненцијалног реда, итд..., који одговара функцији.

Познати су разни други начини одређивања неке целе функције $f(z)$ помоћу дискретних услова; на пример, помоћу вредности које узима $f(z)$ за известан низ вредности променљиве z, којима је прикључен неки скуп (C) допунских квалитативних услова који се односе на начин рашћења функције са z[18].

У сада познатим начинима одређивања таквих услова, број нумеричких података само је изузетно *ограничен,* у веома специјалним случајевима у којима је унапред познат аналитички облик функције до на ограничен број константи (на пример, у случају кад се функција своди на алгебарски, експоненцијални, тригонометријски полином, итд.).

Међутим, спектрална метода открива бесконачно много категорија функција чије се одређивање своди *на проблем који зависи од ограниченог броја параметара*, под условом да им се прикључи неки скуп (A) *квалитативних* услова.

Ово ћемо прецизирати у оном што следи.

Функцију $f(z)$ једне променљиве z сматраћемо *нумерички одређеном* ако свакој *нумеричкој* вредности променљиве z одговара једна *нумеричка* вредност од $f(z)$.

Рећи ћемо да неке аналитичке функције $f_1, f_2, f_3, \ldots$ променљиве z *припадају истој спектралној категорији* ако за сваку од њих постоји област z-равни у којој те функције допуштају једну исту трансмутацију $\Delta[f]$, која се од једне функције до друге разликује само нумеричким вредностима извесног броја параметара које она садржи. Једна спектрална категорија функција тако је одређена обликом са њом сагласне

[18] E. Borel, *Sur l'interpolation*,C.R. Acad. Sciences, 1^{er} sémestre 1897, pp. 673–676.

трансмутације $\Delta[f]$, као што је нека категорија површина одређена обликом свог ds^2.

Спектралну категорију (f) треба сматрати *категоријом са* m *параметара* ако, кад m међусобно независних параметара, које оставља произвољне дефиниција категорије (f), узима одређене нумеричке вредности, тиме се производи једна нумерички одређена функција која припада категорији, и то тако да свака функција категорије може на тај начин бити произведена.

Спектрална метода онда доводи до закључака који следе.

Најпре, (E)-категорију функција $f(z)$, које се могу у околини бар једне $z = \alpha$ развити у ред по степенима од $z - \alpha$ чији су коефицијенти *цели бројеви*, треба сматрати *категоријом са два параметра*; то су: вредност α и спектар S функције.

Посматрајмо било какву категорију (f) функција које допуштају извесну трансмутацију $\Delta[f]$. Релација између функције $f(z)$ и њеног трансмутата може увести известан број параметара γ_i који могу потицати: 1. од параметара садржаних у самој трансмутацији $\Delta[f]$; 2. од неодређених константи које уводи сама та релација, на пример, интеграцијом, члановима реда које оставља неодређене нека рекурентна релација, итд.

Број q параметара γ_i варира, за једну исту категорију (f), у зависности од примењене трансмутације $\Delta[f]$. *Спектралним индексом* δ неке спектралне категорије (f) функција назваћемо *најмањи од бројева* $q + 2$ доведених тако у везу са том категоријом од стране различитих трансмутација сагласних са функцијама ове категорије.

Спектрални индекс неке категорије (f) показује, дакле, број нумеричких података који су стриктно неопходни за потпуно нумеричко одређивање поједине функције из категорије (f) помоћу спектралног поступка. Ови подаци су: 1. q параметара γ_i; 2. два параметра α и S (E)-категорије, која одређује трансмутат од f применом поступка $\Delta[f]$. Дакле:

Спектрална категорија (f) *функција може се сматрати као категорија са онолико параметара колико има јединица у њеном спектралном индексу.*

Спектрални индекс категорије функција које се могу развити у околини тачке $z = \alpha$ у ред по степенима од $z - \alpha$ са коефицијентима који су цели бројеви или имају само ограничен број децимала – износи $\delta = 2$. На пример, лук равне криве потпуно је одређен као функција апсцисе условом да се он може развити у ред по степенима променљиве x, са целим, наизменично позитивним и негативним и од броја 100 мањим коефицијентима и да је његова дужина између тачака $x = -0{,}01$

и $x = 0$ једнака обиму круга чији је полупречник 1. Подаци су $\alpha = 0$ и $S = 2\pi$.

Алгебарске функције чији су коефицијенти уз $(x-\alpha)^n$ рационални бројеви образују једну спектралну категорију са индексом $\delta = 4$. Подаци су два параметра γ_1 и γ_2 из трансмутације

$$\Delta[f] = \gamma_1 f(\gamma_2 z),$$

сагласне са том категоријом функција, као и вредност α и спектар S трансмутата са познатим ритмом. Сличан је случај категорије (f) образоване од Абелових интеграла који се могу развити у степени ред са рационалним коефицијентима.

Функције које имају за коефицијенте производе облика $M_n Q_n$, где су M_n цели бројеви а Q_n разломљени бројеви са p параметара, образују категорију са индексом $\delta = p + 2$.

Величина спектралног индекса δ битно зависи од *специфичности аритметичке природе* које карактеришу коефицијент A_n развитка опште функције категорије у ред одређеног облика у околини неке тачке $z = \alpha$. Ове специфичности тичу се начина на који се заједно сви коефицијенти реда претварају у целе бројеве; тај начин сажима се у облику трансмутације $\Delta[f]$ сагласне са функцијом категорије.

Треба претпоставити да ће продубљена истраживања довести до занимљивих резултата о односима између својстава коефицијента A_m карактеристичних за категорију и величине спектралног индекса. Тако, на пример, метода Гомеса Теиксера и Хурвица[19], која доводи до извесне аритметичке особине коефицијента A_m функција које задовољавају неку алгебарску диференцијалну једначину коначног реда, омогућује да се све *аналитичке функције које нису хипертрансцендентне* и могу се у околини неке тачке развити у потенцијални ред са рационалним коефицијентима – схвате као елементи извесне категорије (f) са *коначним* спектралним индексом.

Подсетимо још да свака аналитичка функција може у околини сваке своје обичне тачке бити представљена, са унапред датом тачношћу, неком функцијом са спектралним индексом $\delta = 2$ (§ **18**).

Ова разматрања уводе извесне параметре који, како изгледа, противрече уобичајеном појму променљивих параметара. Категорија (E) функција које се могу развити у степени ред са целим коефицијентима приказује се, према уобичајеним схватањима, као категорија функција које зависе од *бесконачног броја* параметара (то су сами коефицијенти тог развитка), подвргнутих једино услову да буду цели

[19] *Annales de l'Ecole Normale supérieure*, 1885 и 1889.

бројеви M_k такви да се $\sqrt[k]{|M_k|}$ не увећава бесконачно са k. Супротно томе, у спектралној методи одређивања функција, исти ови параметри појављују се као *одсечци једног истог децималног броја* S, при чему сваки одсечак образује одређена група узастопних децимала. Тај број није ништа друго него *спектар* посматране функције; начин његове *сегментације*, којом S даје, до на знак само, низ коефицијената функције, варира заједно са ритмом спектра S.

Број S онда заиста игра улогу параметра спектралне категорије (E): његова промена доводи до прелаза са једне партикуларне (E)-функције на неку другу такву функцију, и свака функција ове категорије може бити добијена на тај начин. Постоји чак (до на знак) кореспонденција између (E)-функција и броја S таква да двема различитим (E)-функцијама одговарају две различите вредности спектра S и да, ако свакој од две вредности спектра S одговара функција у правом смислу речи, тада су те две функције различите.

Контрадикција са уобичајеним схватањем параметра само је привидна: у ствари, управо је *бесконачно много* нумеричких података дато спектром S под привидом *само једног* броја чији *одсечци*, на погодан начин раздвојени, откривају вредности које треба приписати бесконачном броју параметара (коефицијената реда) да би били испуњени услови проблема. Ова чињеница не разликује се много од оне коју представља досетка у проблему – загонеци којом онај који је одгонета погађа *више* замишљених бројева на основу *само једног* броја који му се саопштава, а чији му различити одсечци откривају онолико података колико има непознатих.

Параметар S кондензује, заиста, ограничен или неограничен број параметара у само један низ цифара, а његове *непрекидне* варијације, које производе *прекидне* варијације његових цифара, рађају бескрајну разноврсност (E)-функција (не изостављајући ниједну од њих), а самим тим и бескрајну разноврсност других категорија функција које се доводе у везу са (E)-функцијама.

Спектри тако бацају извесну светлост на *улогу коју играју низови цифара у одређивању функција*. На ову улогу већ је указао г. Борел у својим дубоким размишљањима о појму функције уопште[20].

24. ***Примери проблема који се своде на спектрално одређивање функција.*** – Нека је $F(x, y, y', \ldots, y^{(p)})$ дата реална функција променљиве x, функције y од x, извесног броја извода $y', y'', \ldots, y^{(p)}$ функције у по

[20] E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Note III; 2^e^ édition 1914; *La notion de fonction en général*, pp. 123–126.

x, при чему су сви коефицијенти у F дати својим нумеричким вредностима. Поставићемо себи следећи проблем:

Кад је дата нумеричка вредност a, *одредити функцију у тако да се*: 1. F *може у околини тачке* x = a *развити у степени ред*

$$N_0 + N_1(x-a) + N_2(x-a)^2 + \ldots, \tag{74}$$

чији су коефицијенти $\mathrm{N_n}$ *позитивни цели бројеви (који нису дати) и не прелазе неки фиксирани број* H; 2. *да функције* $\mathrm{y, y', \ldots, y^{(p)}}$ *узимају редом дате вредности* $\mathrm{A, A', A'', \ldots, A^{(p)}}$ *за неку погодно изабрану вредност независно променљиве* x.

Тако постављен проблем изгледа неодређен. Лако је, међутим, видети да, уопште, он допушта решења која зависе од $p + 1$ произвољних константи $A, A', A'', \ldots, A^{(p)}$, у смислу да, уколико су те константе *нумерички прецизиране*, проблем има нумерички одређено решење или добро одређен систем таквих решења и при том нема других решења.

Означимо са h неки позитиван цео број који није већи од $\log H$ и нека су $A, A', \ldots, A^{(p)}$ реалне нумеричке вредности које треба редом да узму функције $y, y', \ldots, y^{(p)}$ за $x = a + 10^{-h}$. Одговарајућа вредност

$$S = F(a + 10^{-h}, A, A', \ldots, A^{(p)}) \tag{75}$$

биће изражена извесним реалним бројем S. Ако је $S \leq 0$, проблем нема решења, јер је вредност

$$\Sigma N_n 10^{-nh}, \tag{76}$$

са којом број S треба да се подудари, битно позитивна. Ако је $S > 0$, проблем има решења, која се добијају на следећи начин.

Како је S спектар функције F са униформним ритмом $h_k = h$, сагласним са низом бројева N_k, он ће исто тако бити спектар функције (74) са овим ритмом. Коефицијент N_0 подудариће се онда са целим делом броја S, а коефицијент N_k (k = 1, 2, 3,...) са групом значајних цифара броја S која почиње $[(k-1)h+1]$-вом и завршава се kh-том децималом тог броја.

Тако је функција (74) одређена бројем S, а функција y ће бити интеграл диференцијалне једначине

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) = \sum N_k (x-a)^k, \tag{77}$$

који за $x = a + 10^{-h}$ узима вредности A, док изводи $y', y'', \ldots, y^{(p-1)}$ узимају редом вредности $A', A'', \ldots, A^{(p-1)}$; вредност $A^{(p)}$ извода $y^{(p)}$ ће онда бити сагласна са једначином (77) с обзиром на једнакост (75).

Решење проблема за изабрану вредност целог броја h садржи тако $p + 1$ произвољну константу $A, A', \dots, A^{(p)}$. Будући да су ове константе фиксиране, сваком од позитивних целих бројева $h = 1, 2, 3, \dots$ који није већи од $\log H$ одговара једно решење. *Број решења је, дакле, једнак целом делу броја* $\log H$.

Може се очигледно било која од констаnти A *заменити оном која представља број* S.

Размотримо, у својству примера, проблем одређивања равне криве $y = f(x)$, чија се субнормала може развити у ред по степенима променљиве x са целим позитивним коефицијентима који не премашују дати сталан број H, при чему та субнормала у некој погодно изабраној тачки има дату вредност.

Кад се са h означи било који од позитивних целих бројева h_k који нису већи од вредности $\log H$ а са L дужина субнормале у тачки $x = 10^{-h}$, једначина криве биће

$$y = \sqrt{2}\sqrt{C + \varphi(x)},$$

при чему је функција $\varphi(x)$ дефинисана редом

$$\varphi(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \dots,$$

где је број λ_1 цео део броја L, а λ_n $(n = 2, 3, 4, \dots)$ је једнако разломку чији је бројилац $(n - 1)$-та група са h децимала броја L и именилац је n. Константа C има вредност

$$C = \frac{y_0^2}{2} - \varphi(10^{-h}).$$

Сваком од целих бројева h_k одговара такво једно решење; број решења је, дакле, једнак целом делу броја $\log H$.

У случају кад, на пример, коефицијенти субнормале треба да буду цели бројеви мањи од 10, а њена дужина једнака половини обима круга чији је полупречник јединица, имаће се $\lambda_1 = 3, \lambda_n = (n-1)$-ва децимала броја π подељена са n, тако да ће се добити

$$\varphi(x) = 3x + \frac{x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + x^5 + \frac{3x^6}{2} + \dots$$

Услови проблема, мада одржавају исту природу са становишта спектралне методе, могу варирати до бесконачности.

Тако, знаци бројева N_k могу варирати по неком датом закону. У случају када су, на пример, бројеви N_k наизменично позитивни и негативни, улогу спектра би играо број

$$S = F(a + 10^{-h}, A, A', \dots, A^{(p)}).$$

Функција (74) може бити замењена функцијом која допушта неку дату трансмутацију $\Delta[f]$. На пример, ако се тражи да та функција буде неодређени интеграл функције која се може развити у ред по степенима разлике $x-a$, чији су коефицијенти позитивни цели бројеви који не премашују дати број H, проблем ће се свести на проблем налажења функције y, такве да се израз

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'+\ldots+\frac{\partial F}{\partial y^{(p)}}y^{(p+1)}$$

може развити у ред такве врсте. Проблем би тада садржао један параметар више, наиме, вредност извода $y^{(p+1)}$ за $x=a+10^{-h}$.

Исти поступак примењује се на случај када је функција F замењена интегралом

$$J(x)=\int_{x_0}^{x}F(x,y,y',\ldots)\,dx,$$

или неким вишеструким интегралом примењеним на F.

Размотримо, на пример, проблем одређивања равне криве $y=f(x)$, чија се површина, ограничена x-осом, луком криве и ординатама две крајње тачке $x=0$ и $x=x$, може развити у ред

$$N_0+N_1x+N_2x^2+\ldots,$$

у коме су коефицијенти позитивни цели бројеви (који нису дати) и не премашују број H, знајући величину L-те површине која одговара некој погодно изабраној вредности x.

Проблем има толико решења колико целих јединица у $\log H$. Кад се са h означи било који од целих бројева који не премашује $\log H$, а са L површина која одговара вредности $x=10^{-h}$, једначина криве ће бити

$$y=\lambda_1+2\lambda_2x+3\lambda_3x^3+4\lambda_4x^4+\ldots,$$

где λ_n означава n-ту групу са h децимала броја L. У случају кад је, на пример, површина L једнака површини четвртине круга чији је полупречник јединица а коефицијенти су мањи од 10, λ_n ће бити n-та децимала броја

$$\frac{\pi}{4}=0,78539826339769830961\ldots,$$

а крива ће имати за једначину

$$y=7+16x+15x^2+12x^3+45x^4+\ldots$$

На исти начин може се третирати велики број других проблема ове врсте, као што је, на пример, следећи проблем:

Одредити функцију f(x) *која је холоморфна у околини дате реалне вредности* x = a, *са особином да она сама и сви њени изводи за* x = a *узимају целе вредности (које нису дате), не веће од датог фиксираног целог броја* H, *уз услов да одређени интеграл*

$$J(x) = \int_0^\infty e^{-t} f(xt)\, dt$$

узима, за неку погодно изабрану вредност променљиве x, *дату вредност* L.

Ако се са h означи позитиван цео број из претходног проблема, добиће се као решење овог проблема

$$f(x) = N_0 + \frac{N_1}{1}(x-a) + \frac{N_2}{1\cdot 2}(x-a)^2 + \frac{N_3}{1\cdot 2\cdot 3}(x-a)^3 + \ldots,$$

где је N_0 цео део броја L, а N_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ значајан део n-те групе са x децимала истог броја.

У следећем примеру указаћемо на једно аритметичко својство једне класе *целих* функција једне променљиве, коју генерише парцијална једначина

(78) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Једначина

(79) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4t^2 \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

која се може свести на једначину (78) сменом $t = -\dfrac{1}{4y}$, има за интеграл функцију $u(x,t)$, која се може развити у ред облика

(80) $$u(x,t) = \sum a_n e^{-(x-\alpha_m)^2 t},$$

који садржи два бесконачна низа произвољних константи

(81) $$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

(82) $$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

За реалне и позитивне вредности промењиве t и за реалне бројеве α_n који бесконачно расту са n, ред (80) конвергира за сваку реалну или имагинарну вредност промењиве x и представља целу функцију од x. Међу целим функцијама уочимо оне код којих оба низа, (81) и (82), образују *позитивни цели бројеви*, при чему бројеви a_n не расту брже од n-тог степена било ког позитивног броја.

Тада се коефицијенти a_n *јављају као групе децимала само једног броја повезаног са функцијом, броја који се може израчунати помоћу вредности коју функција узима за неку погодно изабрану вредност промењиве* x.

Заиста, нека је A реалан позитиван број такав да је, за сваки позитиван цео број n, $a_n < A^n$, и нека је N цео део броја $\log A$. Означимо са S нумеричку вредност коју функција $e^{tx^2} u(x,t)$ узима за

$$x = -\frac{1}{2}, \quad t = \frac{N}{2\log e},$$

(при чему је база логаритма 10). Може се, очигледно, ставити $\alpha_n = n$, па се добија

$$\sum a_n 10^{\frac{n(n+1)}{2}N}. \tag{83}$$

Ово показује да је S пругасти спектар низа (81) са униформно убрзаним ритмом $h_k = kN$. Поделимо низ децимала броја S на узастопне одсечке $T_1, T_2, T_3, \ldots$ тако да одсечак T_n почиње

$$\left[\frac{n(n-1)}{2}N + 1\right]\text{-вом}$$

а завршава се

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}N\right]\text{- том децималом броја } S.$$

Коефицијент a_n *једнак је целом броју који образује пругу* T_n.

Напоменимо такође да теорема г. Поље[21] о степеним редовима са рационалним коефицијентима јасно показује *хипертрансцендентну природу* бескрајног мноштва целих функција које припадају овде разматраној категорији.

Подсетићемо још на значај који имају функције $u(x,t)$ за статистичке студије, а нарочито за савремена биометричка истраживања.

[21] Loc. cit.

25. ***Пругасти спектри сингуларитета аналитичких функција.*** – Кад је дата нека функција $f(z)$, могуће је доделити извесну (E)-функцију која садржи потребне и довољне елементе за одређивање неких особености функције $f(z)$, које често представљају оно што је најважније знати о једној функцији (сингуларитети, нуле, максимуми и минимуми, итд.).

Тако је г. Борел[22] приметио да се, уколико је дата функција која има сингуларитете у кругу чији је полупречник мањи од 1, она може заменити другом функцијом чији развитак у ред има целобројне коефицијенте и која има исте сингуларитете у унутрашњости овог круга као прва функција.

Нека је, заиста, дата функција

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

и посматрајмо функцију

$$\varphi(z) = N_0 + N_1 z + N_2 z^2 + \ldots,$$

где N_k означава цео део од a_k. Разлика $f(z) - \varphi(z)$ је степени ред чији су модули коефицијената мањи од 1. Одатле излази да полупречник круга овог реда није мањи од 1. Функције $f(z)$ и $\varphi(z)$ имају, дакле, исте сингуларитете у било ком кругу чији је полупречник мањи од 1.

Замена променљиве z са $\alpha + \beta z$, где су α и β погодно изабране константе, онда ће се одређивање сингуларитета функције $f(z)$ у унутрашњости *било ког* круга чији је центар обична тачка те функције *свести на одређивање сингуларитета извесне* (E)*-функције у неком кругу чији је полупречник мањи од* 1 *а центар је у координатном почетку.*

Али, (Е)-функција има пругасте спектре S са униформно убрзаним ритмом (штавише, у неким случајевима, и са униформним ритмом), од којих је сваки, уз помоћ једног скупа (A) квалитативних података, у потпуности одређује. *Такав један спектар садржи, дакле, елементе који су потребни и довољни за потпуно одређивање сингуларитета функције* f(z) *у датом кругу са полупречником мањим од јединице и центром у некој обичној тачки функције.* Он стога представља *спектар сингуларитета ове функције* и изражава се једним одређеним интегралом који се односи на (E)-функцију додељену функцији $f(z)$ на претходни начин; у неким доста општим случајевима он се може изразити у коначном облику помоћу (E)-функције.

---

[22] *Leçons sur les fonctions méromorphes*, 1903, pp. 35–36.

Кад је спектар дат, сингуларитети би се одредили као сингуларитети (E)-функције чији су коефицијенти N_k дати узастопним пругама спектра.

Нуле функције $f(z)$ у унутрашњости неког круга C могу се добити као полови функције $\frac{1}{f}$; коефицијенти b_n развоја те функције су

$$(84) \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{a_0^{n+1}} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Било који сӣекӣар (E)*-функције који има за коефицијенӣ* $\mathrm{N_n}$ *цео део броја* $\mathrm{b_n}$ *ӣредсӣавља исӣовремено сӣекӣар нула функције* f(z) *садржаних у кругу* C.

Исти поступак примењен на друге функције повезане са $f(z)$, на пример на функције

$$\frac{1}{f(z)-a}, \frac{1}{f'(z)}, \dots,$$

дао би спектре вредности промењиве z за које $f(z)$ узима дату вредност a, достиже свој максимум или минимум, итд.

Могли би се, такође, формирати спектри сингуларитета полазећи од следеће чињенице, на коју је такође указао г. Борел[23]:

Кад је дат *било какав* развој

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

он се може, у циљу одређивања сингуларитета функције $f(z)$, заменити развојем

$$F(z) \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{M_n}{10^{n^2}} z^n,$$

где је M_n цео део броја $0^{n^2} a_n$, који представља функцију која *у чиӣавој равни* има исте сингуларитете као $f(z)$.

26. ***Сӣекӣралне аналоīије.*** – *Сӣекӣрална меӣода*, као што се види, састоји се у *расиӣању* у *нумерички* спектар непознатих, првобитних или помоћних, као што анализатор, у спектралној анализи, расипа

[23] Loc. cit., pp. 36–37.

сноп зракова светлости у светлосни спектар. Непознате се у нумеричком спектру, повезаном са проблемом, налазе као спектралне пруге и линије на начин аналоган оном на који се одређују непознати елементи у некој супстанци у спектралној анализи. Главна карактеристика неког пругастог спектра у томе игра улогу аналогну оној коју игра сноп светлости који испушта супстанца на коју се примењује спектрална анализа; улога спектралне генератрисе при том је аналогна оној призми којом се анализа изводи.

Када су првобитне непознате *цели бројеви*, анализу њиховог комплекса директно врши спектрална генератриса: оне су расуте у спектру, као што су то, од стране дисперзивне призме, спектрални индекси карактеристични за елементе измешане у усијаном телу.

Када непознате *нису цели бројеви*, потребно је подвргнути их *йретходној йрийреми* пре него што се оне унесу у спектралну генератрису, као што се подвргава, у неким случајевима, одређеној претходној модификацији светао сноп који емитује супстанцу коју треба анализирати пре него што се он пропусти кроз дисперзивну призму (стављањем, на пример, на пут светлости која се анализира стакленог балона напуњеног одређеним парама). Овде би се та припрема састојала у некој трансмутацији $\Delta[f]$, сагласној са низом непознатих.

Аналогија се наставља још много даље кад се запази да се дисперзија пругастог спектра мења заједно са карактеристиком спектралног ритма, коју онај који рачуна може по вољи модификовати за једну исту главну спектралну карактеристику. На сличан начин се дисперзија спектра светлости мења са условима експеримента које експериментатор може да модификује за једну исту супстанцу подвргнуту анализи (мењајући, на пример, температуру, притисак, разређеност). Униформна дисперзија нумеричких спектара налази свој аналоган у маси случајева које пружа хемијска спектрална анализа (такав је, на пример, случај извесних делова спектра сумпора произведеног помоћу обложене цеви); то исто важи за униформно растућу дисперзију (на пример, у случају обичног спектра сумпора, код кога растојања између максимума стално униформно расту у смеру љубичасте боје).

Начини мењања дисперзије нумеричких спектара нису специфични за поједини низ са којим се спектар доводи у везу. Кад се мењају елементи који утичу на карактеристику ритма, модификује се дисперзија спектра било ког низа, и то у истом смеру. Исто тако, промена температуре или притиска модификује дисперзију спектра неке светлости у истом смислу за различите зраке који се подвргавају анализи.

Као што је било показано у параграфу **17**, постоје трансмутације $\Delta[f]$ које, примењене на произвољну функцију $f(z)$ ову претварају у функцију $F(z)$ која не зависи од функције $f(z)$ и која, штавише, на функцији $F(z)$ не оставља никакав траг, а та трансмутација може се састојати и у свођењу сваке функције на нулу. Спектар који би одговарао таквој једној трансмутацији $\Delta[f]$ може бити и *континуиран*, тј. спектар који чине само нуле (а нема линија), мада ће нека друга трансмутација $\Delta[f]$ произвести *дисконтинуирани* спектар, са линијама. Ова чињеница има свој аналоган у спектралној анализи када, на пример, водоник, угљеников оксид, сумпорисани водоник, горе у кисеонику, спектар племена при анализи помоћу призме нема ниједну линију, мада је, у другим околностима, спектар истих гасова дисконтинуиран.

Такве аналогије, као и велики број других које постоје између математичких и светлосних спектара, оправдавају, верујемо, назив који смо дали рачунском поступку изложеном у овим *Предавањима*.

НАУЧНЕ РАСПРАВЕ

Успомена са предавања на Сорбони из математичких спектара. – У друштву пријатеља у Паризу, април 1928.
(Аутор фотографије непознат)

О НЕКИМ ЗНАЧАЈНИМ НУМЕРИЧКИМ ИЗРАЗИМА*

Нека је $f(x)$ функција која се може развити у степени ред

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots \tag{1}$$

чији су коефицијенти λ_n *цели реални* бројеви и нека је R полупречник конвергенције овог реда. Помоћу целе трансцеденте

$$\chi(x) = \sum_0^\infty \varepsilon_n q^{\alpha n^2 + \beta n} x^n \tag{2}$$

[где ε_n означава јединицу снабдевену знаком коефицијента λ_n, q константу чији је модуо мањи од 1, а α и β произвољне две константе од којих прва има позитиван реални део] образујмо одређени интеграл

$$N(r,q,\alpha,\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [f(re^{ti}) f(0)]\chi(e^{-ti})\,dt, \tag{3}$$

где је r константа чији је модуо мањи од R.

Уколико су вредности констанаша r, q, α и β *на погодан начин изабране, постоји једноставна веза између децимале произвољног ранга броја* $\mathrm{V}(\mathrm{r},\mathrm{q},\alpha,\beta)$ *и цифара које образују низ коефицијенаша* λ_n.

Да бисмо то показали, приметимо да, према општој Парсеваловој (Parseval) формули, имамо

$$V(r,q,\alpha,\beta) = \sum_1 \varepsilon_n \lambda_n q^{\alpha n^2 + \beta n} r^n. \tag{4}$$

---

* Наслов оригинала *Sur quelques expressions numériques remarquables*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Siences, Paris 1917, t. CLXIV, 19, pp. 716–718.

Будући да је полупречник конвергенције реда (1) позитиван, израз $|\sqrt[n]{\lambda_n}|$ остаје, за сваку вредност индекса n, мањи од извесног позитивног, целог и коначног степена броја 10, на пример од 10^h, имаће се

$$(5) \qquad \varepsilon_n\lambda_n < 10^{hn}.$$

Број цифара које образују број λ_n тад није већи од hn, па ће се, кад се таква цифра, k-та по реду идући с десна на лево, означи са $\lambda_n^{(k)}$, имати

$$(6) \qquad \varepsilon_n\lambda_n = \lambda_n^{(hn)}\lambda_n^{(hn-1)}\ldots\lambda_n^{(2)}\lambda_n^{(1)},$$

где значајне цифре највиших рангова могу бити замењене нулама. Израз (6) назваћемо *комплетираном аритметичком вредношћу броја* λ_n.

Узмимо за r неки степен са негативним целим експонентом 10^{-p} мањи од R, за q нумеричку вредност 0,1 и за α и β две вредности такве да је

$$\alpha n^2 + \beta n = \frac{n(n+1)}{2}h,$$

одакле излази

$$\alpha = \frac{h}{2}, \quad \beta = \frac{h}{2} - p.$$

Са тим вредностима, имаће се

$$\varepsilon_n\lambda_n q^{\alpha n^2+\beta n} r^{n} = \frac{\varepsilon_n\lambda_n}{10^{P_n}} = 0,\underbrace{00\ldots0}_{P_{n-1}\text{ нула}}\lambda_n^{(hn)}\lambda_n^{(hn-1)}\ldots\lambda_n^{(2)}\lambda_n^{(1)},$$

где је

$$P_n = \frac{n(n+1)}{2}h,$$

и одатле

$$V(r,q,\alpha,\beta) = 0,\underbrace{\lambda_1^{(h)}\lambda_1^{(h-1)}\ldots\lambda_1^{(2)}\lambda_1^{(1)}}_{\varepsilon_1\lambda_1}\underbrace{\lambda_2^{(2h)}\lambda_2^{(2h-1)}\ldots\lambda_2^{(1)}}_{\varepsilon_2\lambda_2}\lambda_3^{(3h)}\lambda_3^{(3h-1)}\ldots\lambda_3^{(1)}\lambda_4^{(4h)}\ldots,$$

одакле излази следећи резултат.

Интеграл $\mathrm{V}(\mathrm{r},\mathrm{q},\alpha,\beta)$ *има за нумеричку вредност нулу којој, као целобројном делу, следи децимални део који се једноставно добија ређањем једне уз другу комплетираних аритметичких вредности узастопних коефицијената* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$.

Посматрјамо, у природном низу целих бројева, нумеричке интервале $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$, где интервал Δ_k почиње целим бројем $\frac{k(k-1)}{2}h$ а завршава се бројем $\frac{k(k+1)}{2}h$.

По реду m-*ша* (m = 1, 2, 3, ...) *децимала броја* V *једнака је*

$$\left(\frac{k(k+1)}{2}h - m + 1\right)\text{-}\mathit{вој}$$

цифри комплетиране аритметичке вредности коефицијента λ_n који има индекс интервале Δ_k који *садржи број* m.

Кад се, дакле, зна m првих коефицијената $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ функције $f(x)$, имаће се тако, *без икаквог додатног рачуна*, нумеричка вредност интеграла V са $\frac{m(m+1)(2m+1)+3m(m+1)}{12}$ тачних интеграла.

Интеграл V може се, уосталом, заменити разним другим интегралима који су му еквивалентни и *чија ће свака децимала моћи да буде одређена индивидуално*. Такав би, на пример, био следећи реалан интеграл, у коме интеграција делује само на извесну комбинацију функција $f(x)$ и e^x:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2} F(rq^\beta \cos\mu t, rq^\beta \sin\mu t)\, dt,$$

где $F(x, y)$ означава реални део функције $f(x+iy)$ и где је μ константа

$$\mu = 2\sqrt{\log \operatorname{nat} 10}\sqrt{\alpha},$$

при чему константе r, q α и β имају претходне вредности.

Шта више, претходна разматрања могу се пренети и на интеграле (3) у којима би цела функција $\chi(x)$ била замењена другим целим функцијама од x дефинисаним равојем

$$\sum_0^\infty \varepsilon_n q^{M_n} x^n,$$

где је $q = 0{,}1$ и где су цели позитивни бројеви M_n већи од $\frac{n(n+1)}{2}h$.

СПЕКТРАЛНО ОДРЕЂИВАЊЕ ФУНКЦИЈА*

Уобичајени поступци одређивања неке аналитичке функције $f(z)$ помоћу *дискретних услова* захтевају, уопште узев, *бесконачно много* нумеричких података, као што су, на пример, коефицијент редова који одговарају функцији, вредности које функција узима за дате вредности променљиве z, итд[1]. Број потребних и довољних услова ограничен је само изузетно, у веома партикуларним случајевима, кад је унапред познат аналитички облик функције до на ограничен број константи [на пример, у случају кад се $f(z)$ своди на алгебарски, експоненцијални, тригонометријски полином, итд.].

Може се, међутим, показати, једноставним примерима, *да функција* f(z) *може бити потпуно одређена у некој области* z*-равни само једним нумеричким податком* E *са њом на погодан начин повезаним, уз додатак неких допунских услова квалитативне природе.*

Тако је функција $f(z)$ дефинисана без икакве неодређености у околини своје обичне тачке $z = 0$ условом да коефицијенти њеног развоја у ред по степенима променљиве z буду сви цели бројеви такви да су познати знаци њихових реалних и имагинарних делова, и нумеричком вредношћу коју узима извесна комбинација у коју улази $f(z)$, за извесну погодно изабрану партикуларну вредност независно променљиве z. У случају, на пример, када су сви коефицијенти реални позитивни цели бројеви мањи од 10, и кад је

$$f(0{,}1) = \frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots,$$

функција мора бити $\dfrac{3z}{1-z}$.

---

* Наслов оригинала *Détermination spectrale de fonctions*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris 167 (1918), 22, pp. 774–776. – Ову Петровићеву расправу саопштио је у Париској академији наука професор Адамар 25. новембра 1918.

[1] E. Borel, *Sur l'interpolation*, Comptes rendus, t. 124, 1897, pp. 673–676.

Функција $f(z)$ такође је без двосмислености одређена за сваку вредност z условом да се интеграл

$$\int_0^\infty e^{-t} f(zt)\, dt$$

може у околини тачке $z = 0$ развити у степени ред чији су коефицијенти цели бројеви са модулима који не расту неограничено са рангом, и само једном тачном нумеричком вредношћу повезаном са функцијом $f(z)$. Кад су, на пример, коефицијенти наизменично позитивни и негативни и по апсолутној вредности мањи од 100, и уз то је

$$\int_0^\infty e^{-t} f\left(\frac{t}{100}\right) dt = \frac{7}{11} = 0{,}636363\ldots,$$

функција $f(z)$ обавезно се подудара са $63e^{-z} - 1$.

Функција $f(z)$, чија се комбинација $zif'(-zi)$ може развити у потенцијални ред са једноцифреним позитивним целим коефицијентима и таква је да имамо

$$\frac{i}{10} f'\left(-\frac{i}{10}\right) = \frac{2}{3} = 0{,}6666\ldots$$

не може се разликовати од $6\log(-zi)$.

Доказује се (уз помоћ Ајзенштајнове теореме) да је *алгебарска* функција $f(z)$ потпуно одређена у околини своје обичне тачке $z = a$ помоћу три цела броја и једног разломка у вези са том функцијом, знајући да су коефицијенти развитка функције $f(z)$ по степенима израза $z = a$ *рационални* бројеви чији су знаци реалних и имагинарних делова познати.

Могуће је одредити равну криву $y = f(x)$ чија је субтангента холоморфна функција независно променљиве x у околини тачке $x = 0$ и може се развити у ред по степенима променљиве x са непознатим позитивним целим коефицијентима који се не увећавају бесконачно са рангом, уколико је позната само дужина субтангенте за погодно изабрану вредност променљиве x. На пример, у случају када су коефицијенти позитивни цели бројеви мањи од 10 и када субтангента у тачки $x = 0{,}1$ има дужину једнаку обиму круга чији је полупречник 1, тражене криве поклапају се са фамилијом израза

$$y = C\left(1 + \frac{x}{6} - \frac{x^2}{72} - \frac{31}{432}x^3 + \ldots\right), \quad C = \text{const.}$$

где је коефицијент λ_n уз x^n одређен рекурентном релацијом

$$6(n+1)\lambda_{n+1} + 2n\lambda_n + 8(n-1)\lambda_{n-1} + 3(n-2)\lambda_{n-2} + \ldots = \lambda_n \quad (\lambda_0 = 1),$$

у којој је нумерички коефицијент k-тог члана леве стране (k – 1)-ва децимала броја 2π.

Ови примери не представљају усамљене и изузетне случајеве. Они откривају једну општу чињеницу која би могла играти корисну улогу у различитим гранама рачуна, а која се може резимирати на следећи начин.

Многи проблеми са *ограниченим* или *неограниченим* бројем непознатих (па стога и са *непознатом функцијом*), о којима располажемо извесним *квалитативним* подацима, могу бити решени *помоћу погодног груписања децимала у неким нумеричким изразима* Е *повезним са разматраним проблемом* (*спектрални поступак* нумеричког рачунања).

СПЕКТРИ ВЕРОВАТНОЋА*

Спектром неког ограниченог или неограниченог низа бројева

$$(1) \qquad M_1, M_2, M_3, \ldots$$

називам известан децимални број S повезан са низом (1), на тај начин што је сваки број M_k, непосредно или посредно, одређен једном групом узастопних децимала броја S.

Као што сам то показао[1], спектар неког низа (1), може се израчунати кад год је тај низ могуће довести у кореспонденцију са извесним потенцијалним редом чији су коефицијенти или позитивни цели реални бројеви N_k, или се могу свести на такве бројеве неком трансформацијом

$$(2) \qquad \Omega(M_k, N_k, k) = 0.$$

Даље, у великом броју проблема у вези са вероватноћама, посматрана вероватноћа појављује се као коефицијент извесног степена x^k у развоју одређене функције $f(x)$ повезане са проблемом о коме је реч, или, општије, као коефицијент уз $x^k y^h z^m \ldots$ у развоју одређене функције $F(x, y, z, \ldots)$.

Наводећи само један од основних и најелементарнијих проблема ове врсте, посматрајмо два супротна догађаја A и B, респективно са вероватноћама p и q, у α догађаја у којима се нужно дешава један или други од догађаја A и B. Вероватноћа α_k да се, после μ проба, A реализује $\mu - k$ пута (а B k пута) подудариће се са коефицијентом уз степен x^k полинома

$$(3) \qquad f(x) = (p + qx)^\mu = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_\mu x^\mu,$$

где су p и q редом вероватноће догађаја A и B.

Највероватнија комбинација, тј. она у којој број наступања догађаја A износи μp, а онај наступања догађаја B μq, има вероватноћу једнаку коефицијенту уз $x^{(1-p)}\mu$ у развоју (1).

---

* Наслов оригинала *Spectres des probabilités,* L'Enseignement mathématique, Genève 24 (1925), 4–5–6, pp. 205–209.

[1] *Les spectres numériques* Gaulhier-Villars, Paris 1919.

Вероватноћа да се у Е проба догађај A реализује најмање $\mu - k$ пута (тј. догађај B највише k пута) подудара се коефицијентом уз $x^k (k = 1, 2, 3, \dots, \mu)$ у развоју

$$(4) \qquad f_1(x) = \frac{(p+qx)^\mu}{1-x} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots$$

Када догађаји A и B у μ проба имају редом вероватноће

$$(p_1 q_1), (p_2 q_2), \dots, (p_\mu q_\mu),$$

вероватноћа да се у току ових проба догађај A деси m пута а догађај B n пута подудара се са коефицијентом уз $x^m y^n$ у развоју функције

$$(5) \qquad F(x, y) = (xp_1 + yq_1)(xp_2 + yq_2)\dots(xp_\mu + yq_\mu).$$

У сличним случајевима, вероватноћа P_k о којој је реч мења се са извесним целим бројем k који означава, на пример, колико пута се претпоставља да ће се одређени догађај десити под одређеним условима у току фиксираног броја μ проба.

Образујмо полином степена μ

$$(6) \qquad f(x) = P_1 x + P_2 x^2 + \dots + P_\mu x^\mu,$$

и нека је

$$(7) \qquad \Omega(u, v) = 0$$

таква релација да свакој вредности $u = P_k$ одговара, као решење једначине (7), позитиван цео број $v = N_k$. Најзад, нека је

$$(8) \qquad \varphi(x) = N_1 x + N_2 x^2 + \dots + N_\mu x^\mu,$$

полином степена μ који има за коефицијенте бројеве N_k.

Један спектар S низа вероватноћа P_k даје вредност коју узима $\varphi(x)$ за $x = 10^{-h}$, где је h неки погодно изабран позитиван цео број. Посебно, h је било који позитиван цео број који није мањи од логаритма највећег члана низа N_k.

Вероватноћу P_k *да се догађај реализује* k *пута у* μ *проба даје решене по* u *једначине* (7), *пошто се у њој* v *замени групом децимала броја* S *која почиње* (hk + 1)-*вом и завршава* (k + 1)h-*том децималом.*

У великом броју проблема могу се лако добити полиноми $f(x)$ и $\varphi(x)$ повезани са проблемом, као што показују једноставни претходно наведени примери. Како су одговарајуће вероватноће два догађаја A и B два рационална броја

$$(9) \qquad p = \frac{A}{M}, \quad q = 1 - \frac{A}{M},$$

имаће се

$$(10) \qquad \Omega(u, v) = M^{\mu} u - v,$$

$$(11) \qquad \varphi(x) = M^{\mu}\left[(p + qx)^{\mu} - p^{\mu}\right].$$

У случају кад је

$$(12) \qquad p = \frac{2}{3}, \quad q = \frac{1}{3},$$

спектар вероватноће да се, у 10 проба, догађај A реализује $10 - k$ пута (а B k пута) ($k = 1, 2, 3, \ldots, 10$) дат је вредношћу коју узима израз

$$(13) \qquad \varphi(x) = 3^{10}\left[\left(\frac{2}{3} + \frac{x}{3}\right)^{10} - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right] = (2 + x)^{10} - 2^{10},$$

за $x = 10^{-h}$. Знајући да ниједан цео број N_k нема више од пет цифара, може се ставити $h = 5$, што даје као спектар вероватноће

$$(14) \qquad \begin{aligned} S &= (2 + 10^{-5})^{10} - 2^{10} = \\ &= 0,0512\ldots \end{aligned}$$

Вероватноћа да се, у 10 проба, догађај A деси $(10 - k)$ пута (а B k пута) добија се кад се са

$$M^{\mu} = 30^{10} = 59049$$

подели група децимала броја S, која почиње $(hk + 1)$-вом а завршава се $(k + 1)$ h-том децималом. Према томе, да се A деси шест пута а B четири пута постоји вероватноћа

$$P_4 = \frac{8064}{59049} = 0,136545.$$

Највероватнија комбинација је она која има за вероватноћу групу децимала 15360 подељену са 59049, тј. вероватноћу 0,260123; то је комбинација у којој би се A догодило седам пута а B три пута у десет проба.

Проверавање: вероватноћа да се, у десет проба, догађај B реализује највише μ пута, наиме известност, свакако је једнака збиру свих узастопних група по пет децимала броја S, увећаном за $2^{10} = 1024$, па потом подељеном са 59049, што даје

$$\frac{1024+5120+11520+15360+13440+8064+3360+960+180+20+1}{59049}=1.$$

Како су вероватноће за A и B дате са (9), одређивање вероватноће Q_k да се, у μ проба A догоди најмање k пута (а B најмање μ–k пута) (k = 1, 2,. ..., μ) своди се на образовање следећег спектра.

Будући да је број Q_k збир првих k коефицијената функције $Q_k(p+qx)^{\mu}$, он допушта трансформацију (10), па ће спектар бројева Q_k бити дат вредношћу коју узима израз

$$f_1(x)=M^{\mu}\,\frac{(p+qx)^{\mu}}{1-x} \tag{15}$$

за $x=10^{-h}$, где h означава било који цео број који није мањи од логаритма највећег члана одговарајућег низа N_k. Спектар ће, дакле, бити број

$$S=M^{\mu}\,\frac{(10^{h}p+qx)^{\mu}}{10^{\mu h}-10^{(\mu-1)h}}. \tag{16}$$

Вероватноћа Q_k *биће*

$$Q_k=S_k=M^{-\mu}, \tag{17}$$

где S_k *представља групу децимала броја* S *која почиње* (hk + 1)-*вом а завршава се* (k + 1) h-*том децималом.*

У наведеном примеру, у коме p и q имају вредности (12), може се ставити $h=5$, па ће се имати

$$S=\frac{(2\cdot 10^{5}+1)^{10}}{10^{50}-10^{45}}= \\ =0,061\ldots$$

Вероватноћа да се, у десет проба, догађај A деси најмање (10 – k) пута (а B највише k пута) добија се кад се подели са 59049 група децимала броја S која почиње (hk + 1)-вом а завршава се (k + 1) h-том децималом. Тако, да се A догоди најмање шест пута (а B највише четири пута) постоји вероватноћа

$$Q_4=\frac{46464}{59049}=0,786872,$$

а вероватноћа да се B највише десет пута догоди (извесност) износи

$$Q_{10}=\frac{59049}{59049}=1.$$

БРОЈНИ СПЕКТРИ ПОЈАВА*

1. СПЕКТРИ ПРЕБРОЈИВИХ СКУПОВА СА ПРОИЗВОЉНИМ БРОЈЕМ ИНДЕКСА

Нека је дат скуп реалних или имагинарних елемената са p индекса

$$(u_{m_1, m_2, \ldots, m_p}), \tag{1}$$

где су индекси $m_1, m_2, \ldots, m_p$ позитивни цели бројеви. Ако се у простору од p димензија замисли p међу собом управних координатних осовина и изабере једна одређена мера за дужине, свакоме елементу u скупа (1) може се учинити да одговара у томе координатном систему тачка M, чије су координате индекси $m_1, m_2, \ldots, m_p$ елемента u. Скуп је, дакле, пребројљив, а тачка M може служити, у неку руку, за *нумерисање* елемената u тога скупа, представљајући *нумеру* одговарајућег елемента.

У теорији скупова познато је како се један пребројљив скуп са ма коликим бројем индекса може пресликати на један линеаран низ са само једним индексом[1]

$$u_1, u_2, u_3, \ldots \tag{2}$$

тако да се има узајамност (1, 1) између елемената скупова (1) и (2). Претпоставимо да је то учињено и означимо са p_k и q_k реалне бројеве, од којих први представља реалан део, а други коефицијенат од i у елементу u_k.

Постоји бескрајно много реалних функција $\Phi(x)$ таквих да крива линија

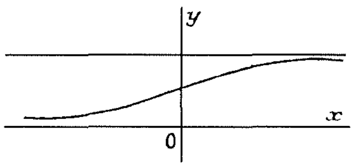
$$y = \Phi(x)$$

---

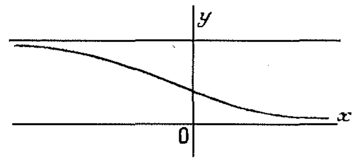
* Српска краљевска академија, Глас, књ. CXXVII, Први разред, књ. 58, Београд 1927, стр. 45–66. – М. Петровић је ову расправу саопштио у Академији природних наука 20. децембра 1926.

[1] В. нпр. E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, 2me ed. 1914. pp. 8–9.

има облик сл. 1. или сл. 2. тако да свакој реалној вредности x одговара само једна реална вредност y која се налази у размаку 0 и 1 и обрнуто: свакој реалној вредности y, што се налази у томе размаку, одговара само једна реална вредност x.



Сл. 1.



Сл. 2.

Такве би нпр. биле функције $\Phi(x)$ и њихове инверзне функције $\theta(x)$:

$$
(3) \qquad \begin{array}{ll}
y = \dfrac{1}{1+e^{-x}} & x = \log\dfrac{y}{1-y} \\
y = e^{-e^{x}} & x = \log\log\dfrac{1}{y} \\
y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}x & x = \mathrm{tg}\pi\left(y - \dfrac{1}{2}\right).
\end{array}
$$

где за arctg треба узети ону грану те функције што се налази између 0 и 1.

Нека је $\Phi(x)$ једна функција те врсте, па ће сваки број

$$M_k = \Phi(p_k) \quad \text{и} \quad N_k = \Phi(q_k)$$

бити реалан и налазиће се између 0 и 1, а поред тога постојаће узајамност (1, 1) између

$$
\begin{array}{l}
p_k \quad \text{и} \quad M_k, \\
q_k \quad \text{и} \quad N_k.
\end{array}
$$

Нека су a_k^h узастопне децимале броја M_k, тако да је

$$
(4) \qquad \begin{array}{l}
M_1 = 0,a_1^1 a_1^2 a_1^3 a_1^4 \ldots \\
M_2 = 0,a_2^1 a_2^2 a_2^3 a_2^4 \ldots \\
M_3 = 0,a_3^1 a_3^2 a_3^3 a_3^4 \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Нека су, тако исто, b_k^h узастопне децимале броја N_k, тако да је

$$(5)\qquad \begin{aligned} N_1 &= 0,b_1^1 b_1^2 b_1^3 b_1^4 \ldots \\ N_2 &= 0,b_2^1 b_2^2 b_2^3 b_2^4 \ldots \\ N_3 &= 0,b_3^1 b_3^2 b_3^3 b_3^4 \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Помоћу тих децимала формирајмо следећа два реална децимална броја

$$(6)\qquad \begin{aligned} S_1 &= 0,a_1^1 a_2^1 a_1^2 a_3^1 a_2^2 a_1^3 a_4^1 a_3^2 \ldots \\ S_2 &= 0,b_1^1 b_2^1 b_1^2 b_3^1 b_2^2 b_1^3 b_4^1 b_3^2 \ldots \end{aligned}$$

где је ред по коме се нижу горњи и доњи индекси дат овом таблицом

$$(7)\qquad \begin{array}{c|cc|ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}\ldots$$

Лако се увиђа да постоји узајамност (1, 1) између децимала бројева (4) и (5) са једне, и бројева S_1 и S_2, са друге стране, тако да ако се знају бројеви (4) и (5), могу се одредити и бројеви S_1 и S_2, и обрнуто. Рачунска веза између једних и других бројева налази се овако.

Поделимо у таблици (7) горње и доње цифре на групе, онакве какве су означене у тој таблици. Ако је горњи број једне групе h а доњи k, ранг n групе (рачунајући га слева надесно) везан је са њима релацијом

$$(8)\qquad k+h=n+1.$$

Са друге стране, ранг α једне децимале бројева S_1 или S_2 (рачунат такође слева надесно) дат је обрасцем

$$(9)\qquad \alpha = h+\frac{n(n-1)}{2}.$$

Пошто је

$$1 \le h \le n,$$

образац (9) показује да је

$$(10)\qquad 1+\frac{n(n-1)}{2} \le \alpha \le \frac{n(n+1)}{2},$$

према чему је у једно исто време

$$(11)\qquad n^2-n+2 \le 2\alpha,$$

(12) $$n^2 + n \geq 2\alpha .$$

Ове неједначине помножене са 4 дају

(13) $$2(n-1)^2 \leq 8\alpha - 7 ,$$

(14) $$2(n+1)^2 \geq 8\alpha + 1 ,$$

а то доводи до двоструке неједначине

(15) $$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{8\alpha+1}) \leq n \leq \frac{1}{2}(1+\sqrt{8\alpha-1}) .$$

Разлика између првог и последњег члана неједначине (15) има за вредност

$$1 - \frac{4}{\sqrt{8\alpha-7}+\sqrt{8\alpha+1}} ,$$

и пошто α расте од 1 до ∞, вредност те разлике увек лежи између 0 и 1. Према томе је

(16) $$n = \mathrm{E}\left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{8\alpha-7})\right],$$

где $\mathrm{E}(x)$ означује највећи цео број садржан у x. Једначина (9) тада постаје

(17) $$\alpha = h + \frac{1}{2}(k+h-1)(k+h-2)$$

и показује *да је* h-*ша децимала броја* M_k *једнака децимали ранга (17) броја* S_1, *а* k-*ша децимала броја* N_k *једнака децимали ранга (17) броја* S_2.

А пошто је из (8) и (9)

(18) $$h = \alpha - \frac{n(n-1)}{2} ,$$

(19) $$k = \frac{n(n+1)}{2} - \alpha + 1 ,$$

где за n треба узети вредност (16), то се види *да је* α-*ша децимала броја* S_1 *једнака* h-*шој децимали броја* M_k, *где* h *и* k *имају вредносши* (18) и (19). Исто се добија и за децимале броја S_2.

Тако одређена два броја S_1 и S_2 одређују у равни имагинарних количина једну тачку P, чији је афикс

$$P = S_1 + iS_2$$

и која увек лежи у квадрату D, чија су темена

$$(0, 0), (0, 1), (1, 0) \text{ и } (1, 1).$$

Према ономе што је напред казано, постоји узајамност (1, 1) између скупа низова (1) и тачака у квадрату D, тако да свакоме низу (1) одговара у квадрату једна одређена тачка P, и да, обрнуто, свакој тачки P у квадрату одговара један тачно одређен низ (1).

Међутим, по Канторовој теореми, скуп тачака P има исту моћ коју има и непребројљив скуп реалних тачака што леже на реалној осовини између 0 и 1. То значи да се може између тачака P у квадрату D и тачака Q на правој (0, 1) успоставити таква узајамност да свакој тачки P одговара једна тачка Q, и обрнуто. Практички би се то нпр. извршило на тај начин што би се помоћу бројева S_1 и S_2 формирао један нов број S чији би цео део био нула, а децимале би му се поклапале наизменце са децималама бројева S_1 и S_2.

На тај начин долазимо *аритметички* до овога закључка до кога се у теорији скупова лако долази и *геометријски*:

Кад је дат један скуп низова (1) *са реалним или имагинарним елементима, а са ма коликим коначним бројем индекса, може се између њега и реалних тачака што леже између* 0 *и* 1 *успоставити таква узајамност да свакоме низу скупа* (1) *одговара по једна тачка Q на правој* (0, 1), *и обрнуто: да свакој тачки Q одговара један одређен низ саставни део посматранога скупа* (1).

Број S којим се одређује положај тачке Q на правој (0, 1) је *спектар* скупа (1). Ово што је напред казано садржи и практичан начин за формирање спектра, као и начин на који се, помоћу датога спектра, може реконструисати сам низ коме он одговара.

Уосталом, спектар се може, из истих бројева M_k и N_k, формирати и на разне друге начине. А за специјални случај кад су елементи скупа *цели бројеви*, он се може формирати и непосредно из тих елемената на начин који је у појединостима проучен у моме делу *Les spectres numériques*[2] и који је од нарочитог интереса због аритметичких примена на тај начин формираних спектара.

2. СПЕКТРИ И НУМЕРИСАЊЕ ФУНКЦИЈА

Зна се из теорије скупова да низ цифара, које састављају један децималан позитиван број, пружа исто толико разноврсности колико и

[2] Gauthier-Villars et Cie, Paris 1919.

скуп функција са ма коликим бројем независно промењивих количина које се могу аналитички изразити. Тачније речено, скуп таквих функција са произвољним бројем променљивих има исту моћ као и скуп реалних позитивних бројева, па чак, ако се хоће, и као скуп бројева што леже између 0 и 1.

Према томе, оправдано је очекивати могућност да се успостави обострано једнозначна узајамност између једне опште класе функција и скупа бројева између 0 и 1. И ова се одиста може успоставити помоћу напред изложене особине пребројљивих скупова и помоћу модерних метода за аналитичко изражавање најопштијих класа функција.

Пре свега, зна се да никаква класа функција, чији скуп има моћ вишу од моћи континуума, не може бити предмет математичке анализе, а још мање инструмент за њене примене. Јер у рачунима се, уопште, може имати посла само са функцијама од којих је свака одређена помоћу једног пребројљивог скупа елемената. А за такве функције Baire-овим испитивањима је јасно ограничена реална функционална област која је довољна за све потребе математичке анализе и изван које свака генерализација изгледа да ће остати занавек бесплодна и узалудна[3].

Са друге стране, свака функција такве врсте (ма колики био број промењивих од које она зависи) може се, и то на разне начине, сматрати као да одговара једној тачки у *функционалноме простору* у коме би једна *класа* или једна *категорија* функција представљала једно *функционално поље*. Увек је могућно свести функционални простор на једну раван у којој ће једна класа функција представљати једну *функционалну област* и где ће једна одређена функција, што припада посматраној класи, бити представљена једном тачком. Штавише, према општој теорији скупова, функционални простор може се свести и на елеменат реалне праве ограничен тачкама 0 и 1. То значи да се функције, што припадају једној ма којој посматраној класи, могу *нумерисати* помоћу децималних разломака што се налазе између 0 и 1, и то тако да две различне функције имају две различне нумере и да свака функција има само једну нумеру.

По таквим се нумерама разликује једна функција од друге исте класе. Свака од њих је *спектар* функције на коју се односи.

На који се начин такви спектри могу ефективно формирати за једну посматрану класу функција?

Модерна теорија функција разликује међу функцијама *класе*, од којих је свака дефинисана обликом свога *аналитичког елемента*, тако

---

[3] В. нпр. G. de la Vallée-Poussin, *Intégrales de Lebesque, fonctions d'ensembles, classes de Baire*, Gauth, Vill. et C[ie], Paris 1916.

да се ма која функција што припада класи изражава као збир реда чији су чланови ти елементи.

Општи облик таквог једног елемента је

$$(20) \qquad P_{m_1, m_2, \ldots, m_p}(x, y, z, \ldots),$$

где су $x, y, z, \ldots$ независно промењиве количине од којих функција зависи, а P представља једну одређену функцију тих промењивих која се мења од једнога елемента функције до другог, при чему се мењају индекси $m_1, m_2, \ldots, m_p$ који су цели бројеви.

Свакој групи индекса

$$(m_1, m_2, \ldots, m_p)$$

одговара по један елеменат (20), тако да скуп тих елемената за једну дату функцију, што припада класи, представља један пребројљив скуп са p индекса.

Облик аналитичког елемента (20) дефинише *класу*; кад се у њему све, осим независно промењивих количина $x, y, z, \ldots$ и бројева $m_1, m_2, m_3, \ldots$, смени одређеним бројним вредностима, облик елемента (20) дефинише једну одређену *индивидуу* што припада класи.

Тако, све *аналитичке функције* ма коликог броја независно промењивих количина $x, y, z, \ldots$ припадају класи дефинисаној аналитичким елементом облика

$$A_{k,h,i,\ldots} x^k y^h z^i \ldots,$$

где су $a, b, c, \ldots$ и коефицијенти A независни од $x, y, z, \ldots$ Елеменат, нпр.,

$$\frac{x^k y^h z^i}{(k+h+i)^3}$$

дефинише једну индивидуу те класе.

Све континуалне *периодичке функције* једне независно промењиве количине x припадају класи коју дефинише аналитички елеменат облика

$$A_m \sin ax + B_m \cos ax,$$

где су a, A_m, B_m независни од x.

Задржимо се на најопштијем случају функција једне реалне независно промењиве количине, одређене једним пребројљивим скупом елемената, тј. коју је уопште могућно аналитички изразити. Baire је такве функције поделио на класе на следећи начин.

Као функције *нулте класе* сматрају се све континуалне функције.

Један ред чији су чланови нулте класе, ако му збир не представља једну функцију нулте класе, представљаће једну функцију *прве класе*: прва класа обухвата, дакле, све дисконтинуалне функције $F(x)$ које се могу представити у облику реда

$$F(x) = \Sigma f_n(x), \tag{21}$$

где су $f_1, f_2, f_3, \ldots$ функције нулте класе.

Тако исто ред чији су чланови функције прве класе, ако му збир не представља једну функцију нулте или прве класе, представљаће једну функцију *друге класе*: та класа обухвата, дакле, све дисконтинуалне функције представљене двоструким редом

$$\Phi(x) = \Sigma F(x) = \Sigma\Sigma f_{mn}(x), \tag{22}$$

где су f_{mn} функције нулте класе и где се двоструко сумирање има вршити најпре по индексу n, па после по m.

Продужујући тако, дефинишу се функције *треће, четврте итд. класе* које су представљене троструким, четвороструким итд. редом чији су чланови функције нулте класе.

Ми ћемо овде сматрати као функције нулте класе полиноме, или аналитичке функције (а ове се могу представити Taylor-овим редом), тј. функције чији су аналитички елементи са једним индексом.

Према Weierstrass-овој теореми и према дефиницији функција прве класе, излази да се ове могу представити у облику једнога реда полинома, и према томе оне имају аналитичке елементе са два индекса; према једначини (22), функције друге класе имају елементе са три индекса, и уопште: *функције* n-*те класе имају аналитичке елементе са* n + 1 *индекса.*

Као што се види, једна функција једне независно промењљиве количине, која се може *изразити аналитички* помоћу једнога пребројљивог скупа елемената, представља и сама један пребројљив скуп са ограниченим бројем индекса. *Она се, дакле, увек може представити једним спектром.*

Уколико ће то важити и за функције са више независно промењљивих количина?

Очевидно је да то важи за скуп (који има моћ континуума) свих аналитичких функција са ма коликим коначним бројем промењљивих. Али, уколико ће се то моћи распрострти и на функције што не припадају тој пространој класи, није могућно знати према данашњем познавању дисконтинуалних функција са више промењљивих и њиховом аналитичком представљању. Weierstrass, Borel, Lebesgue и др. су многе резултате из теорије реалних функција са једном промењљивом проширили на функције са више променљивих, али ствар је ту много компликованија. За данас не постоји никаква класификација таквих функција, слична Baire-овој класификацији функција са једном променљивом количином. Општи облици аналитичких елемената за функције са више променљивих нису ни издалека познати у онаквој генералности као што су познати за функције са једном променљивом. Али несумњиво је да су и ти елементи са ограниченим бројем индекса за све функције које се могу аналитички изразити и које уопште могу бити предмет математичке анализе. А кад они, напрецима анализе, буду онако познати као за случај једне променљиве, биће могућно, на напред наведен начин, *формирати спектре функција који им одговарају.*

Навешћемо за сада овај општи резултат који пружа могућност да се формирају спектри функција од ма коликог броја реалних независно променљивих количина $x_1, x_2, \ldots, x_p$, које су континуалне у једној одређеној области и имају одређене делимичне изводе свих редова. Доказано је да се свака функција такве врсте може развити у ред чији су чланови полиноми по променљивим

$$x_1, x_2, \ldots, x_p$$
$$\sin x_1, \sin x_2, \ldots, \sin x_p$$
$$\cos x_1, \cos x_2, \ldots, \cos x_p,$$

као и то да је такав ред униформно конвергентан и има делимичне изводе свих редова. Аналитички елементи те простране класе функција састављају, дакле, један пребројљив скуп са ограниченим бројем индекса и обухваћени су овим што претходи.[4]

Уосталом, са гледишта са кога се овде посматра, могле би се и функције са произвољним бројем променљивих класификовати на начин аналоган ономе у Baire-овој класификацији, тако да би им се спектри могли формирати на показани начин.

Уколико се тиче функција са једном независно променљивом количином, навешћемо још и овај посредан начин за формирање њихових спектара.

Очевидно је да се функције могу разврстати на класе и са разних других гледишта, а не само по облику својих аналитичких елемената. Таква би једна општа подела била нпр. она по којој би функције што имају изводе биле разврстане према облику диференцијалне једначине коју посматрана класа задовољава. Штавише, *могу се, према њиховом властитом аналитичком елементу, класирати саме диференцијалне*

[4] Borel, Annales de l'Ec. Norm. Sup. 1895. p. 35; 1896. p. 79.; *Fonctions de variables réelles*, p. 68.

једначине, па онда сматрати да припадају једној истој класи све функције које задовољавају једну посматрану класу диференцијалних једначина.

Свака диференцијална једначина има за своју леву страну једну одређену функцију са више променљивих количина

$$y, x, y', y'', \ldots,$$

тако да једна одређена *класа диференцијалних једначина* може бити дефинисана обликом аналитичког елемента

$$P_{m_1, m_2, \ldots, m_p}(x, y, y', \ldots) \tag{23}$$

те функције са ограниченим бројем индекса. Једна одређена једначина посматране класе (*индивидуа* те класе) добија се прецизирајући бројно у елементу (23) све осим индекса $m_1, m_2, m_3, \ldots$ и променљивих $x, y, y', y'', \ldots$

Према ономе што је напред речено, може се увек успоставити узајамност (1, 1) између једне диференцијалне једначине (њене леве стране) и реалних тачака што се налазе на сегменту бројне линије између тачака 0 и 1. Другим речима, може се узети да свакој диференцијалној једначини посматране класе одговара по један реалан број што лежи између 0 и 1, као њен *спектар*, и обрнуто: да сваком таквоме броју одговара по једна диференцијална једначина посматране класе, тако, да између тога двога постоји узајамност (1, 1).

Спектар диференцијалне једначине у исто је време и спектар њеног интеграла, у коме спектар оставља као бројно неодређене само интеграционе константе.

Тако, све функције које задовољавају скуп алгебарских диференцијалних једначина првога реда представљају и саме један скуп са три индекса, пошто се аналитички елеменат ма које од таквих једначина може написати у облику

$$A_{m,n,p} x^m y^n y'^p,$$

где су A бројни коефицијенти једначине.

Кад спектар S таквога скупа прелази редом бројеве од 0 до 1, одговарајућа диференцијална једначина пролази кроз све облике обухваћене посматраном класом; одговарајућа функција пролази кроз све облике који се уопште могу добити интеграцијом алгебарских диференцијалних једначина првога реда.

Очевидно је да се на исти начин могу дефинисати и формирати спектри и функција више независно променљивих количина, које се добијају интеграцијом парцијалних диференцијалних једначина. Спектар ових, па, дакле, и спектар таквих функција, своди се такође на спектар једнога ограниченог или неограниченог скупа са више индекса.

Исти је случај и са групама функција које се добијају интеграцијом једнога система симултаних диференцијалних једначина.

3. СПЕКТРИ ПОЈАВА

Једна одређена појава, ма какве врсте, конкретне природе и компликованости она била, може се схватити као низ одређених модификација у току времена. Слика која се о њој ствара у свести састоји се у низу деформација једне исте слике, тј. у сукцесији тренутних слика које се континуално или дисконтинуално нижу једна за другом у току времена и од којих свака представља по једно тренутно стање у појави.

Оно што се мења у току једне такве деформације јесте један одређен скуп дескриптивних елемената појаве. Опис појаве своди се на скуп описа низа узастопних тренутних стања свакога од тих елемената и резултујуће слике формиране таквим скупом описа.

Узастопна стања кроз која пролази један дескриптивни елеменат у току појаве представљају се вредностима једнога параметра, који се у мислима придаје уоченоме елементу и чије варијације илуструју начин промена самога елемента.

Варијације параметара представљају се обрасцима облика

(24) $$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \ldots,$$

где су $x_1, x_2, x_3, \ldots$ параметри, а t време. Функције $f_k(t)$ могу, поред времена t, садржати и друге независно променљиве количине или параметре.

Претпостављајући да је свака од функција

(25) $$f_1, f_2, f_3, \ldots$$

аналитичка, или бар да јој је аналитички елеменат са ограниченим бројем индекса (без чега се функција не би могла *аналитички изразити*), свака се од тих функција може представити својим спектром, формираним на раније показани начин. *Спектар функције* f_k *у исто време је и спектар варијације параметра* x_k.

Кад је број параметара ограничен, може се формирати колективни спектар функција (25). *Такав колективни спектар је у исто време и спектар посматране појаве.* По њему се понаособ може реконструисати сваки од спектара функција (25); из тих појединачних спектара могу се одредити саме те функције, а група тако добијених функција саставља слику саме појаве.

Свака од једначина појаве

$$x_k = f_k(t),$$

преко аналитичких елемената функције f_k или диференцијалне једначине коју ова задовољава, представља по један пребројљив скуп са ограниченим бројем индекса. Тако је исто и са групом једначина (24) кад је број параметара ограничен. Према томе: *свака појава која се може дефинисати варијацијама ограниченог броја параметара представља један пребројљив скуп са ограниченим бројем индекса.*

Уочимо сад један бескрајан скуп (E) појава једне *исте врсте*, тј. дефинисаних истим параметрима $x_1, x_2, x_3, \ldots$, чије су варијације представљене једначинама истога облика

$$x_1 = F_1(t, \alpha, \beta, \gamma, \ldots),$$
$$x_2 = F_2(t, \alpha, \beta, \gamma, \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

где су α, β, γ, ... такође променљиви параметри у ограниченом броју, чије се вредности мењају од једне појаве до друге, као и бројни коефицијенти у функцијама F_k, или у одговарајућим диференцијалним једначинама. Скуп (Е) има моћ континуума, а свака од појава што га састављају, преко аналитичких елемената функција $F_1, F_2, F_3, \ldots$ или њима одговарајућих диференцијалних једначина, представља по један пребројљив скуп. Сматрајући функцију F_k, истом за све појаве скупа (Е), као функцију коначнога броја променљивих $t, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$, она се може представити својим спектром, који остаје исти за све те појаве. Према томе:

Бескрајан скуп појава једне исте врсте може се представити једним спектром, истим за све појаве тога скупа, а по коме се ипак појединце може реконструисати свака од тих појава.

Геометријски речено, бескрајноме скупу појава једне исте врсте одговара на бројној линији једна *непомична тачка* P, која лежи између 0 и 1, а чије познавање повлачи за собом, преко математичких факата која везују ту тачку са скупом појава, познавање свих појединачних појава тога скупа.

Приметимо још да се, са гледишта са кога се овде посматра, под појавама једне *исте врсте* не разумеју само појаве једне исте конкретне природе. Појам *аналошких група појава* даје могућност да се појам врсте распростре и на међу собом диспаратне појаве, при чему конкретна природа појава не игра никакву улогу. Истоветност математичких релација, које карактеришу једну аналошку групу, односи се и на број једначина (експлицитних или диференцијалних), и на њихов аналитички облик у погледу на независно промењиве количине, на параметре, њихове изводе и константе што фигуришу у једначинама појава. Појаве обухваћене једном аналошком групом припадају, дакле, једној истој врсти појава, у смислу који се овде има у виду, и према томе *једна аналошка група може се представити спектром који ће бити исти за све њоме обухваћене појаве.*

*

Као што се види из овога што је изложено, узајамност између факата и бројних спектара доводи до једнога нарочитог *система за шифровање* факата помоћу бројева. Сваки систем шифровања има свој *кључ* који је посредник између факата што се шифрују и самих *шифара*. Кључ за овакво шифровање, о каквом је овде реч, састоји се у посредничком математичком инструменту, који везује факта са спектрима и који извршује ове шифарске радње:

1. своди уочени факт на скуп аналитичких елемената што му одговарају;

2. пресликава пребројљиви скуп, састављен од тих елемената, у један пребројљив линеарни низ бројева;

3. помоћу једне од функција $\Phi(x)$, као шифарског трансформатора, претвара те бројеве у друге који сви леже између 0 и 1;

4. слаже (нпр. методом дијагонала) поједине децимале тако добијенога низа бројева у један број C (или $S_1 + iS_2$, према томе да ли се има посла са реалним или са имагинарним количинама), који такође лежи између 0 и 1, и у којима ће сваки децимал бројева, из којих се он слаже, имати своје тачно одређено место. Број S (односно $S_1 + iS_2$) представља шифру уоченог факта у таквоме систему шифровања.

Мењајући кључ система, мењају се, очевидно, и саме резултујуће шифре. Тако нпр. кад се првобитни скуп састоји из самих реалних и позитивних целих бројева, наведени општи кључ за шифровање може се сменити и другим, специјалнијим, који би се састојао у томе да се цели бројеви, елементи за шифровање, онакви какви су, поређају у један линеаран низ, да се раставе један од другога уметањем подесно изабраног броја нула и да се на једноме одређеном месту уметне децимална запета.

Констатујући овакву узајамност између појава и бројних спектара, немогућно је отети се од размишљања о мистичним слутњама старих филозофа који су у свему што постоји или се дешава налазили бројеве и привиђали игру бројева. За Питагорино се име нарочито везује тежња за изражавањем ствари и факата бројевима и једна фамозна његова формула гласи „ствари (бића) су бројеви“. Док је Платон стављао бројеве, као атрибуте, поред ствари које се могу чулно опажати, питагорејци су тврдили да су бројеви саме ствари.

Узајамност између факата и бројних спектара даје прави и тачан смисао таквим неодређеним, мистичним рефлексијама. Нити ствари морају бити бројеви, нити бројеви морају бити атрибути ствари, па да ипак важи тврђење да између факата и бројева постоји узајамност такве врсте да се свет факата може на један потпуно утврђен начин илустровати светом бројева.

Али то није могло у таквоме облику бити јасно старим философима, јер могућност постављања такве узајамности претпоставља позитивна знања која су у то време потпуно недостајала. Тако, постављање ове узајамности претпоставља познавање:

1. начина да се оно што је карактеристично у фактима представи математичким обрасцима, чији коефицијенти, за један одређен случај, предстаљају један пребројљив скуп, а за све случајеве исте врсте, мењајући се од једног случаја до другог, представљају један скуп који има моћ континуума;

2. начина да се између једнога, ма каквог, скупа пребројљивих колекција (који скуп има моћ континуума) и скупа бројева што се налазе између 0 и 1, успостави узајамност (1, 1).

Познавање онога што је наведено под 1. постало је бар делимично могућно тек после појаве аналитичке геометрије, аналитичке механике, математичке физике и других огранака примењене математике. Оно још није могућно за непрегледну масу природних појава чије се познавање још налази у својој прематематичкој фази, у којој ће још за дуго време и остати.

Познавање, пак, оног што је наведено под 2. постало је могућно тек

а) развитком модерне математичке анализе, која је, после вековних истраживања о основном математичком бићу, функцији, дошла до начина за најопштију класификацију функција, како континуалних, тако и дисконтинуалних, са скоковима, неправилностима и дисконтинуитетима ма које врсте. А тек таква класификација доводи до могућности да се скуп свих функција, које уопште могу бити предмет математичке анализе и њених примена, сматра као скуп колекција, од којих свака понаособ представља по један пребројљив скуп, а чији скуп има моћ континуума;

б) после појаве модерне теорије скупова а увођења појма бројних спектара који чине могућним успостављање узајамности (1, 1) између бројева и таквих колекција.

Све је то, међутим, било потпуно скривено тамом у време грчких философа. Њихове рефлексије о узајамности између факата и бројева, изражене у ставовима толико пута понављаним у току векова, могле су се сводити само на философске визије и генералности. Платон је, остајући у генералностима, могао тврдити да „бројеви управљају светом", али је то у његово време било немогуће конкретно прецизирати и дати му научни смисао. У то време било би несхватљиво тврђење да свакој од појава, што припадају једној класи, одговара један тачно одређен децимални број што се налази између 0 и 1, или, ако се хоће, једна тачно одређена непомична тачка у квадрату чије су стране једнаке јединици, и то тако да се посматрањем тога броја, или те непомичне тачке, могу сазнати све појединости појаве. За такву једну тачку везане су нпр. све појединости кретања једнога материјалног система, нпр. кретање *n* небеских тела која се међу собом привлаче по Њутновом закону. Мењањем константи проблема (маса, почетних положаја и др.) помера се у квадрату и та тачка, или се мења одговарајући децимални број, али кад су те константе утврђене, тј. кад се посматра један одређен конкретан случај, тачка остаје непомична и децимални број непроменљив, па ипак они у себи садрже све што треба за вечито предвиђање промена у којима се појава састоји. Међутим, за разумевање тога, данас елементарног и потпуно схватљивог факта, мора се у мислима прећи сва досадашња еволуција математичке анализе и природне философије, на чијим је резултатима такво тврђење основано. И тек тада је могућно схватити тачан, научни смисао философске визије великих грчких математичара и философа у погледу узајамности између факата и бројева.

СПЕКТРАЛНИ ПОСТУПАК НУМЕРИЧКОГ РАЧУНА У АСТРОНОМИЈИ*

1. Спектрални поступак нумеричког рачуна састоји се у израчунавању неког пребројивог скупа нумеричких вредности

$$a, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

помоћу само једног броја S на погодан начин доведеног у везу са проблемом, или помоћу једног сегмента S_k овог броја, образованог од његових k узастопних цифара.

Број S назива се спектром бројева a_k; спектрална метода састоји се у расипању вредности a_k у неки спектар, као што анализаторска призма расипа, у хемијској спектралној анализи, сноп зракова светлости у светлосни спектар.

Тако је, на пример, број

$$S = (1{,}01)^6 = 1{,}061520150601$$

спектар низа биномних коефицијената $\binom{6}{k}$; наиме, група значајних цифара броја S, која почиње $(2k-1)$-вом а завршава са $(2k)$-том децималом тог броја, даје непосредно коефицијент $\binom{6}{k}$.

Кад су вероватноће два супротна догађаја A и B редом једнаке

$$p = \frac{2}{3} \quad \text{и} \quad q = \frac{1}{3},$$

* Наслов оригинала *Le procédé spectral de calcul numérique en astronomie*, Annuaire pour l'an 1931, Publication de l'Observatoire astronomique de l'Université de Belgrade, 3 (1930), pp. 127–132.

број

$$S = (2+10^{-5})^{10} - 2^{10} =$$
$$= 0{,}05120115201536013430080640333600096\ldots$$

је спектар вероватноћа повезан са ова два догађаја.

Вероватноћа да, у десет проба, догађај A наступи $(10 - k)$ пута (а догађај B k пута) добија се дељењем фиксираним бројем

$$M = 3^{10} = 59049$$

групе децимала броја S која почиње $(5k + 1)$-вом а завршава се $5\,(k + 1)$-том децималом. Тако, за наступање догађаја A шест пута а догађаја B четири пута постоји вероватноћа

$$P = \frac{8064}{59049} = 0{,}136545\ldots$$

Највероватнија комбинација је она која има за вероватноћу групу децимала 15360 (трећи децимални одсечак са пет цифара броја S) подељену бројем M, тј. вероватноћу 0,2601123; то је комбинација у којој A наступа седам а B три пута у 10 проба.

Спектрални поступак примењује се на све проблеме чије се непознате

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

могу довести у одређену кореспонденцију са неким низом целих бројева

$$N_1, N_2, N_3, \ldots$$

чије одређивање повлачи одређивање бројева x_i. Са низом N_k доводи се онда у везу извесна функција $\Phi(x)$, којој се даје назив *спектрална генератриса*, а чија нумеричка вредност се извесну, погодно изабрану партикуларну вредност θ независно променљиве x, даје спектар бројева N_k, а самим тим и спектар бројева x_i.

Специјално, кад је низ x_i ограничен, спектарална генератриса је полином од x; тада се може узети да је

$$\theta = 10^{-N},$$

где је N позитиван цео број, који није мањи од броја цифара бројева N_k; спектар ће тада бити дат нумеричком вредношћу броја

(1) $$\Phi(10^{-N}).$$

Број N_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ тада ће се подударити са групом значајних цифара броја (1) која почиње $[(k-1)N+1]$-вом а завршава се $[kN]$-том децималом. Бројеви x_i добијају се тада помоћу успостављања везе између њих и бројева N_k.

Благодарећи произвољности коју садржи појам кореспонденције, проблеми који се могу решити спектралним поступком срећу се у свим областима нумеричког рачуна, почев од најелементарнијих проблема аритметике, алгебре, рачуна вероватноће, па све до различитих проблема инфинитезималног рачуна и теорије функција.[1]

2. Неки проблеми небеске механике решавају се помоћу непознатих x_i које се могу ефективно довести у везу са неким низом целих бројева. Такав је, поред осталих, случај који се јавља у проблему развоја разних функција радијус-вектора p, у елиптичком кретању планета, у конвергентне редове по синусима и косинусима средње аномалије ξ.

Тако, функција

$$F(r)=\left(\frac{r}{a}-1\right)^m, \tag{2}$$

(где је a велика полуоса елиптичке путање планете, а m позитиван цео број) може се приказати конвергентним редом

$$F(r)=\frac{1}{2}C_0^{(m)}+\sum_{k=1}^{k=\infty}C_k^{(m)}\cos k\xi. \tag{3}$$

Општи коефицијент овог развитка дат је Буржеовом формулом

$$C_k^{(m)}=(-1)^m\frac{2m}{k}\left(\frac{e}{2}\right)^m\sum_{q=0}^{q=\infty}\frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^q}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot q}N_{p,(m-1),(q+1)}, \tag{4}$$

(овде је e ексцентричност путање), где су $N_{p,j,q}$ цели бројеви (позитивни или негативни) који су у небеској механици познати под именом *Кошијеви бројеви.*

Број $N_{p,j,q}$ је коефицијент уз x^k у развоју функције

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^q,$$

или, што се своди на исто, коефицијент уз x^{p+j+q} у развоју функције

[1] Ова метода изложена је у књизи Michel Petrovitch, *Leçons sur les spectres mathématiques – professéers à la Sorbonne en 1928*, Paris, Gautier–Villars et C[ie] éditeurs, Paris 1928.

$$(5) \qquad (x^2+1)^j(x^2-1)^q.$$

Исти број дат је интегралом

$$(6) \qquad N_{p,j,q} = \frac{i^q \cdot 2^{j+q}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \cos^j \theta e^{(j+q-p)\theta i} d\theta \quad (i=\sqrt{-1}).$$

Број $N_{p,j,q}$ једнак је нули кад год је збир индекса $j+q-p$ негативан или непаран број; он је једнак јединици кад је тај збир једнак нули.

Ако се знају сви бројеви N који се односе на извесну вредност индекса j, из тога се могу извести они који се односе на за један већу вредност истог индекса j, помоћу рекурентне формуле

$$N_{p,j+1,q} = N_{p,j,q} + N_{p-1,j,q}.$$

На основу формуле (6) закључује се да је по апсолутној вредности

$$N_{p,j,q} < 2^{j+q},$$

а ово показује да број цифара целог броја $N_{p,j,q}$ није већи од

$$N = 1+\lambda,$$

где λ означава целобројни део децималног броја

$$(j+q)\log 2 = 0{,}301030(j+q).$$

Наводећи други пример, указаћемо на функцију

$$(7) \qquad F_1(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^{-m},$$

која се може развити у конвергентан ред

$$(8) \qquad F_1(r) = \frac{1}{2}G_0^{(m)} + \sum_{k=0}^{k=\infty} G_k^{(m)} \cos k\xi,$$

где се општи коефицијент изражава Кошијевим бројевима помоћу формуле

$$(9) \qquad G_k^{(m)} = 2\sum_j \sum_q \frac{k^q}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot q} m_j \left(\frac{e}{2}\right)^{j+q} N_{k,j,q},$$

$$m_j = \frac{(m-1)\cdot m \ldots (m+j-2)}{1\cdot 2 \ldots j}.$$

Ако се са E означи израз у средини, он се развија у ред по синусима умножака средње аномалије, по формули

$$E = \sum_k H_k \sin k\xi, \tag{10}$$

где се општи коефицијент изражава формулом

$$H_k = \frac{\sqrt{1-e^2}}{k} \sum_j \sum_q \frac{k^q}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot q} \left(\frac{e}{2}\right)^{j+k} N_{k,j,q} \tag{11}$$

и тако се своди на израчунавање Кошијевих бројева.

Познат је, уосталом, начин на који ове формуле учествују у уобичајеном развоју функције пертурбације. Проблеми ове природе своде се тако на један низ непознатих који стоји у одређеној вези са извесним низом целих бројева $N_{p,j,q}$. Може се онда образовати спектрална генератриса проблема и, помоћу ње, сам спектар непознатих које учествују у траженим развојима. Спектар ће непосредно дати бројеве $N_{p,j,q}$ као сегменте свог децималног дела, а помоћу тих целих бројева израчунаће се сами коефицијенти развоја.

3. У својству примера, обрадићемо један једноставан проблем ове врсте, наиме, проблем развијања израза $\frac{r}{a}$ по косинусима умножака средње аномалије.

Према формулама (3) и (4), имаће се

$$\frac{r}{a} = A_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \cos k\xi, \tag{12}$$

где је

$$A_k = -\frac{e}{k} \sum_{q=0}^{q=\infty} B_{k,q} N_{k,0,q+1}, \tag{13}$$

са

$$B_{k,q} = \frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^q}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q}, \tag{14}$$

што проблем своди на израчунавање целих бројева $N_{k,j,q}$ за $j = 0$. Ставимо, ради краћег писања,

$$N_{p,0,p} = M_{p,q};$$

овај цео број подудара се са коефицијентом уз x^{p+q} у развоју функције

$$\varphi(x) = (x^2 - 1)^q = \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \binom{2q}{2k} x^{2q-2k}. \tag{15}$$

Имамо, међутим,

$$\varphi(x_i) = i^{2q} \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{2q}{2k} x^{2q-2k} = (-1)^q (1 + x^2)^q;$$

па како је i^{2q} реално, ово показује да се коефицијенти уз степене промењиве x не мењају по апсолутној вредности кад се у $\varphi(x)$ x замени са x_i.

Апсолутна вредност броја $M_{p,q}$ подудара се са коефицијентом уз x^{p+q} у развоју функције

$$\Phi(x) = (x^2 + 1)^q, \tag{16}$$

а знак броја $M_{p,q}$ је исти као знак броја

$$(-1)^k = (-1)^{\frac{1}{2}(q-p)}, \tag{17}$$

С друге стране, ако се са N означи број

$$N = 1 + \mu, \tag{18}$$

где је μ целобројни део логаритма (са основом 10) највећег од биномних коефицијената $\binom{q}{k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, q)$, број цифара бројева $M_{p,q}$ $(p = 0, 1, 2, \ldots, q)$ највише је једнак N.

Функција $\Phi(x)$, која игра улогу спектралне генератрисе, производи спектар S_α бројева $M_{p,q}$ за дату вредност $q = \alpha$ индекса q и за све вредности индекса p које нису веће од q (остале су једнаке нули), према следећем исказу.

Спектар свих целих бројева $M_{p,q}$ *који одговара вредностима*

$$q = \alpha, \ \ p \le \alpha$$

добија се као нумеричка вредност израза

(19) $$(1{,}00\ldots01)^{\alpha},$$

где је број у загради уметнутих нула једнак 2N – 1, при чему *N означава јединицу увећану за целобројни део логаритма највећег од биномних коефицијената* $\binom{\alpha}{k}$.

Јер, будући да је број цифара ових бројева највише једнак N, њихов спектар биће дат нумеричком вредношћу израза

(20) $$\Phi(10^{-N}) = (1+10^{-2N})^{\alpha}.$$

Тако, за дату вредност α образован спектар даће нам одједном, самим прегледањем његовог децималног дела, све бројеве $M_{p,\alpha}$, уз помоћ следећег правила:

Број $M_{p,\alpha}$ ($p = 0, 1, 2, \ldots, \alpha$) *подудариће се, до на знак, са групом значајних цифара спектра која почиње* $[(p+\alpha-1)N+1]$*-вом, а завршава се* $[(p+\alpha-1)N]$*-том децималом спектра.*

Друкчије речено:

Ако се децимални део спектра S_{α} *подели на узастопне сегменте са по* N *цифара, број* $M_{p,\alpha}$ *биће, до на знак, једнак броју образованом од скупа значајних цифара* $(p+\alpha)$*-тог сегмента.*

Кад се сваки од бројева $M_{p,q}$ снабде знаком $(-1)^{\frac{1}{2}\alpha-p}$, одатле ће се извести одговарајући коефицијент A_k развоја (12) помоћу формуле (13).

Стављајући на страну бројеве

(21) $$M_{\alpha-k,\alpha} \quad \text{за} \quad k = 1,3,5,\ldots$$

(који су сви једнаки нули), спектар бројева

(22) $$M_{\alpha-k,\alpha} \quad \text{за} \quad k = 0,2,4,6,\ldots$$

(који су сви различити од нуле) *може бити кондензован и представљен као нумеричка вредност израза (19), у коме број уметнутих нула у загради износи* N – 1.

Да бисмо дали извесну представу једноставности поступка, израчунајмо неколико спектара S_{α}.

За $\alpha \leq 4$, имамо $N = 1$, па ће спектар бити број

$$S_{\alpha} = (1{,}1)^{\alpha};$$

број $M_{p,q}$ који није нула подудариће се са $\frac{1}{2}(p+\alpha)$-том децималом спектра. Тако се налази

1. $S_1 = 1{,}1$, и одатле $M_{01} = 0$, $M_{11} = +1$,

2. $S_2 = (1{,}1)^2 = 1{,}21$ и одатле $M_{02} = -2$, $M_{12} = 0$, $M_{22} = +1$,

3. $S_3 = (1{,}1)^3 = 1{,}331$, и одатле $M_{03} = 0$, $M_{13} = -3$, $M_{23} = 0$, $M_{33} = +1$,

4. $S_4 = (1{,}1)^4 = 1{,}4641$, и одатле $M_{04} = +6$, $M_{14} = 0$, $M_{24} = -4$, $M_{34} = 0$, $M_{44} = +1$.

За $5 \le \alpha \le 8$, имамо $N = 1$, а спектар ће бити

$$S_4 = (1{,}1)^\alpha;$$

број $M_{p,q}$ различит од нуле подудариће се, до на знак, са $\frac{1}{2}(p+\alpha)$-тим сегментом са по две цифре децималног дела броја S_α. Тако се налази

5. $S_5 = (1{,}01)^5 = 1{,}0510100501$, и одатле

$$\begin{array}{lll} M_{05} = 0 & M_{15} = +10 & M_{25} = 0 \\ M_{35} = -5 & M_{45} = 0 & M_{55} = +1, \end{array}$$

6. $S_6 = (1{,}01)^6 = 1{,}061520150601$, и одатле

$$\begin{array}{llll} M_{06} = -20 & M_{16} = 0 & M_{26} = +15 & M_{36} = 0 \\ M_{46} = -6 & M_{56} = 0 & M_{66} = +1, & \end{array}$$

7. $S_7 = (1{,}01)^7 = 1{,}07213535210701$,

$$\begin{array}{llll} M_{07} = 0 & M_{17} = -35 & M_{27} = 0 & M_{37} = +21 \\ M_{47} = 0 & M_{57} = -7 & M_{67} = 0 & M_{77} = +1, \end{array}$$

8. $S_8 = (1{,}01)^8 = 1{,}0828567056280801$,

$$\begin{array}{lll} M_{08} = +70 & M_{18} = 0 & M_{28} = -56 \\ M_{38} = 0 & M_{48} = +28 & M_{58} = 0 \\ M_{68} = -8 & M_{78} = 0 & M_{88} = +1. \end{array}$$

За $9 \le \alpha \le 12$, имамо $N = 3$, па ће спектар бити

$$S_\alpha = (1{,}001)^\alpha;$$

број $M_{p,\alpha}$ подудариће се, до на знак, са $\frac{1}{2}(p+\alpha)$-тим сегментом са три цифре децималног дела броја S_α. Тако се налази

$$
\begin{aligned}
S_9 &= 1,00903608412612608403600900 1\\
S_{10} &= 1,0100451202102522101204501000 1\\
S_{11} &= 1,011055165330462462330165055011001\\
S_{12} &= 1,01206622049579292479249522006601200 1.
\end{aligned}
$$

На овај начин би се могло наставити израчунавање спектара S_{13}, S_{14}, S_{15}, па одатле извести, самим њиховим прегледањем, бројеви $M_{p,q}$, помоћу којих би се најзад израчунали коефицијенти претходног развоја.

При узвишењу Велике школе у Универзитет у Београду (27. фебруар 1905) краљевим указом постављено је првих осам редовних професора универзитета. Велико признање математичким наукама у Београду, а посебно Михаилу Петровићу.

Седе:

Јован. М. Жујовић, државни саветник; Сима М. Лозанић, министар у пензији; др Јован Цвијић, професор Велике школе на расположењу; др Михаило Петровић, професор Велике школе на расположењу

Стоје:

Милић Радовановић, професор Велике школе на расположењу; Драгољуб М. Павловић, професор Велике школе на расположењу; Андра Стевановић, професор Велике школе на расположењу и Љубомир Јовановић, професор Велике школе на расположењу.

ПРИЛОЗИ

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ О СВОЈИМ РЕЗУЛТАТИМА*

На самом почетку алгебре учи се да је за *нумеричко* решавање неког проблема са више непознатих потребно онолико различитих *нумеричких* једначина колико има непознатих. Али неки од најелементарнијих проблема изгледа да противрече овом тврђењу. Познати су, на пример, они проблеми – загонетке који се, забаве ради, постављају у друштвима, а у којима лице које рачуна (решава проблем) јамчи да ће скоро тренутно одгонетнути *неколико* замишљених бројева на основу *само једноī* нумеричког податакa који му се саопштава, а који представља крајњи резултат рачуна коме он не присуствује. Противречност је овде, очигледно, само привидна: у ствари, ономе који проблем решава даје се више нумеричких података под привидом давања само једног броја чији му *сеīменūи*, погодно раздвојене групе цифара, непосредно откривају те податке.

Ове мале аритметичке игре сугерисале су г. Петровићу да уопшти у њима садржану досетку како би се она могла пренети на важније и мање једноставне проблеме. Онда му није много требало да уочи да су ови елементарни проблеми само веома специјални случајеви једног проблема општег карактера који се може решити истом досетком; *она се сасūоји у нумеричком израчунавању једноī оīраниченоī или неоīраниченоī низа неūознаūих ūоīодном ūоделом на сеīменūе само једноī броја* S *ūовезаноī са ūроблемом, ūри чему услови ūроблема ūоказују каковм начину ūоделе на сеīменūе ūреба ūрибећи.*

У теорији г. Петровића, број *S* је вредност коју узима одређен аналитички израз Ф, на погодан начин доведен у везу са низом непознатих у проблему, за извесну партикуларну вредност промењиве коју

---

* У књизи *Notice sur les travaux scientifiques de M. Michel Petrovitch*, Paris 1922 М. Петровић је описао своје резултате до 1922. године, те је у посебном поглављу изложио свој рад и на нумеричким спектрима. Професор је, дакако, писао у трећем лицу.

тај израз садржи. Г. Петровић назива број S *спектром* додељеним низу непознатих, првобитних или помоћних, у проблему о коме је реч. Начин на који се непознате одређују помоћу броја S, а који је само оригинално прилагођавање досетке погађача у поменутим математичким играма, подсећа, заиста, на начин на који спектар светлости, у хемијској спектралној анализи, открива елементе који улазе у састав тела подвргнутог анализи. Тако се неки нумерички спектар састоји из група N_k значајних цифара раздвојених већим или мањим бројем уметнутих нула, као што се спектар светлости састоји из пруга и линија раздвојених тамним деловима. Број уметнутих нула (који одређује *дисперзију* нумеричког спектра) мења се са променама једног параметра, променама које је особа која рачуна у могућности да по вољи производи, почев од извесне величине, као што се ширина тамних делова (која одређује дисперзију спектра светлости) мења са променама температуре или притиска, које експериментатор може модификовати како жели. Нумеричка група N_k (k-та пруга спектра) одређује, при једноставном бацању погледа, цео број који игра улогу неке првобитне или помоћне непознате у проблему, а цифра i-тог ранга групе N_k (i-та линија k-те спектралне пруге) одређује i-ту цифру непознате.

Да би се, на пример, израчунали биномни коефицијенти $\binom{6}{0}, \binom{6}{1}, \ldots, \binom{6}{6}$, довољно је израчунати број

$$S = \frac{101^6}{100^6} = 1{,}061520150601;$$

коефицијент $\binom{6}{k}$ одређен је k-том пругом спектра који представља тај број, тј. групом значајних цифара броја S која почиње $(2k-1)$-вом а завршава се $2k$-том децималом овог броја.

Да би се израчунао бесконачан низ вредности $\binom{2}{1}, \binom{4}{2}, \binom{6}{3}, \ldots$, довољно је израчунати број

$$S = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta(4\cos^2 t)\, dt,$$

где је

$$\theta(x) = \sum_0^{\infty} q^{n^2+n} x^n, \qquad q = \frac{1}{\sqrt{10}};$$

његова вредност је

$$S = 0{,}10200600200007000025200092 4\ldots,$$

а вредност $\binom{2n}{n}$ дата је n-том пругом овог спектра, тј. групом значајних цифара броја S, која почиње $\left[\frac{n(n+1)}{2}+1\right]$-вом а завршава се $\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]$-гом његовом децималом.

Тако имамо један општи поступак рачунања, који је г. Петровић изумео и назвао га *спектралним поступком нумеричког рачуна*. Он се састоји у *расипању* у нумерички спектар вредности непознатих, као што призма расипа сноп зракова светлости, при чему аналитички израз Ф, *спектрална генератриса* проблема, игра у томе улогу сличну улози призме у спектралној анализи. Установљава се да овај поступак може истовремено дати, уколико се довољно продужи један исти нумерички рачун, онолико колико се хоће вредности непознатих у проблему на који се овај примењује, као и индивидуално сваку цифру и сваку децималу било које од тих непознатих. Штавише, он омогућује да се одреде *тачне вредности* жељеног броја непознатих помоћу извесне вредности која је *довољно блиска* само једном броју S.

Спектрални поступак г. Петровића примењује се на све проблеме чије се непознате могу *довести у одређену кореспонденцију са неким степеним редом чији су коефицијенти цели бројеви.* Захваљујући произвољности коју дозвољава таква једна кореспонденција, проблеми те врсте срећу се у свим областима рачуна, почев од елементарних проблема аритметике, алгебре, рачуна вероватноће, па све до различитих проблема инфинитезималног рачуна и теорије функција.

Многобројни и разноврсни примери третирани у теорији г. Петровића (разлагање бројева; број делилаца променљивог целог броја, број простих бројева мањих од датог броја; развијање у ред функција једне променљиве; израчаунавање одређених интеграла; одређивање функција помоћу најмањег броја нумеричких података; приказивање, тачно или приближно, функције децималним бројем, његовим спектром, чији је низ цифара у одређеној вези са одређујућим елементима функције, итд.) – чине очигледним ефикасност и корисност инструмента рачуна који представљају нумерички спектри.

Ако се, на пример, са $P(k)$ означи позитиван цео број који показује на колико се начина цео број k може написати у облику

$$k = ax + by + \ldots + gt,$$

при чему су $a, b, \ldots, g$ дати позитивни цели бројеви, а симболи $x, y, \ldots, t$ узимају вредности из низова

$$
\begin{aligned}
x &= 0,1,2,\ldots,m,\\
y &= 0,1,2,\ldots,n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
t &= 0,1,2,\ldots,s,
\end{aligned}
$$

спектрална метода доводи до следеће аритметичке тореме.

Формирајмо цео број (спектар проблема)

$$N = \frac{9_{(m+1)ah} \cdot 9_{(n+1)bh} \cdot \ldots \cdot 9_{(s+1)gh}}{9_{ah} \cdot 9_{bh} \cdot \ldots \cdot 9_{gh}},$$

где 9_k означава цео број добијен писањем цифре 9 k пута узастопно ($9_1 = 9$, $9_2 = 99$; $9_3 = 999$, итд.), а h је известан позитиван цео број повезан са проблемом.

Број P(k) *подудара се са целим бројем који образује група значајних цифара броја* N *која почиње* (hk + 1)-*вом а завршава се* (k + 1) h-*том цифром тог броја.*

Тако ћемо за

$$k = 3x + 2y,\ \ 0 \leq x \leq 10,\ \ 0 \leq y \leq 10,$$

имати $h = 1$ и

$$N = 1041112122223233334343343334334...,$$

а број $P(k)$ подудариће се са (k + 1)-вом цифром броја N. На пример, једначина

$$3x + 2y = 19$$

има тачно три решења по $x \leq 10$ и $y \leq 9$; овај број заиста представља двадесету цифру броја N.

Као други пример, образујмо рационалан број

$$S = \frac{1}{9_k} + \frac{1}{9_{2k}} + \ldots + \frac{1}{9_{mh}} 10^{-h} \frac{9_{2h}}{9 \cdot 9_h},$$

где су m и h два дата цела броја. Поделимо низ првих децимала броја S који образује скуп који се састоји из његовог непериодичког дела и од првог периода на узастопне сегменте $T_1, T_2, \ldots, T_{m+1}$ са по h цифара, тако да сегмент T_k $(k = 1,2,\ldots,m+1)$ почиње $[(k-1)h+1]$-вом а завршава се kh-том децималом броја S.

Спектралном методом добија се следећа теорема.

Број делилаца неког целог броја k *различитих од* 1 *и од* k *подудара се са целим бројем који образује група значајних цифара сегмента* $\mathrm{T_k}$.

Ако се сваки сегмент T_k који чине само нуле назове *лакуном*, дошли смо до следеће теореме:

Број лакуна које садржи скуп k *првих сегмената* $T_1, T_2, \ldots, T_k$ *тачно је једнак броју простих бројева који нису већи од* k, *и то за сваку вредност* $k \leq m$.

На пример, за $m = 100$, $h = 2$ налази се

$$S = 0{,}00000001000200020102000400020203000400020006\ldots$$

Првих двадесет сегмената са по две цифре садржи девет лакуна, првих сто сегмената садржи их двадесет шест; то значи да има девет простих бројева мањих од 20, да их има двадесет шест мањих од 100, итд.

Спектрални поступак развијања у ред који је изумео г. Петровић сасвим је различит од до данас познатих поступака. Он се састоји у формирању спектра који се додељује функцији коју треба развити у ред; овај спектар, својим пругама и линијама, даје, непосредно или извесним познатим рачуном, било све коефицијенте развоја истовремено, било онај скуп коефицијената чије се добијање жели, било одвојено сваки коефицијент који се тражи, или чак само цифру траженог ранга неког коефицијента. Ово смо изложили у трећем делу књиге.

На интерес који спектрална метода представља за општу теорију функција такође је бачена светлост у трећем делу.

Сам поступак којим г. Петровић ефективно одређује спектар за неки проблем доста је занимљив. Као што је речено, спектар је нумеричка вредност коју има известан израз, на погодан начин доведен у везу са проблемом о коме је реч, за извесну нумеричку вредност променљиве x. У ошштем случају, израз $\Phi(x)$ образује се помоћу две функције

$$f(x) = M_0 + M_1 x + M_2 x^2 + \ldots,$$
$$\xi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots,$$

од којих прва има за коефицијенте M *целе* бројеве (реалне или имагинарне), а коефицијенти друге α су *рационални* бројеви (са модулима једнаким степенима броја 10 са негативним целим експонентима). Функција $f(x)$, главна *карактеристика* спектра, одређује саме *цифре* које фигуришу у нумеричкој вредности спектра. Функција $\xi(x)$, *квалитативна карактеристика* спектра, уопште не утиче на вредности тих цифара, али од ње зависи *распоред* ових у спектру, па стога и *дисперзија* спектра. Ова последња функција остаје *иста за све спектре са датом дисперзијом.*

Функција $\xi(x)$ која одговара стално растућој дисперзији (према било ком закону) трансцендентна је, а г. Петровић је доказао да *ове трансценденте не задовољавају ниједну диференцијалну једначину коначног реда и алгебарску по* x, y *и изводима функције* y. Оне су, уосталом, у тесној вези са тета-функцијама из теорије елиптичких функција, као и са тета-функцијама виших степена, које су биле предмет значајних истраживања г. Апела[1]

Г. Петровић ближе испитује спектар, образован помоћу ове две карактеристике, уколико је схваћен као децималан број. Он не може бити цео број (реалан или имагинаран) ако се његова главна спектрална карактеристика $f(x)$ не сведе на константу, а не може имати ограничен број децимала уколико се $f(x)$ не сведе на полином по x. Када је спектрална дисперзија униформна, за сваку главну карактеристику $f(x)$ одговарајући спектар је *алгебарски број*. Али то није случај код дисперзија раста довољно брзог са рангом спектралних пруга обавезно је *Лиувилов трансцендентан број*, било каква да је главна спектрална карактеристика $f(x)$. Трансцендентност спектра може, уосталом, потицати: 1. само од дисперзије; 2. од састава спектралних пруга; 3. истовремено од дисперзије и од састава спектралних пруга[2].

---

[1] P. Appell, *Sur les fonctions Θ de degrés supérieurs*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 153, 1911. pp. 584–589 et 617–618.

[2] Анализе спектралне методе г. Петровића изашле су у:

1. *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 15. nov. 1919. (Maurice d'Ocagne);
2. *Enseignement mathématique*, 1920, n° 1 (M. A. Buhl);
3. *Bulletin of the Americ. math. Soc.*, 2^e série, vol. XXVII, 1920, pp. 28–29;
4. *Wiskundig tijdschrift*, t. XVI, p. 254;
5. Предговор г. Борела за *Spectres numériques* г. Петровића.

АРИТМЕТИЧКЕ И АНАЛИТИЧКЕ ПРИМЕНЕ МАТЕМАТИЧКИХ СПЕКТАРА

ТЕЗА

КОНСТАНТИНА ОРЛОВА

примљена за докторски испит
на седници Философског Факултета у Београду 27 новембра 1934

према реферату чланова испитног одбора г. г.

Д-ра МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА, ред. проф. универзитета,
Д-ра НИКОЛЕ САЛТИКОВА, ред. проф. универзитета и
Д-ра ТАДИЈЕ ПЕЈОВИЋА, ванр. проф. универзитета.

БЕОГРАД
1935

Одјек *о резултатима које су донели Петровићеви математички спектри није био завидан, скоро никакав. Иако су све расправе и монографије о спектрима објављене на страном језику, заинтересованост света науке није постојала. Једино су поједини математичари писали приказе у реферативним часописима. Такав је случај био са следећим математичарима: Окањ, Борел, Поља, Бул, Фер, Фројдентал, ... Прикази су били коректни, затим уздржани, а један непозитиван од професора Поље.*

У домену наших математичара први се за Петровићеве спектре заинтересовао Константин Орлов. Било му је 27 година када је из области спектара докторирао. Све до краја радног века овај се математичар бавио спектрима знатно их усавршио у применама. Развој нумеричке анализе и рачунарства успоравао је актуелност спектара, како би на крају потпуно исчезнули из домена науке. Нажалост, остали су само у домену историје науке као Петровићев оригиналан покушај у анализи без примена и даљег развоја.

Поред професора К. Орлова спектрима се у новије време бавио и Боривоје Михајловић, као и један страни стипендиста Универзитета у Београду Франтишек Пецка.

МАТЕМАТИЧКИ СПЕКТРИ МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

Међу бројним и веома разноврсним математичким (теоријским и примењеним), па и различитим другим значајним активностима и достигнућима Михаила Петровића, два подручја – његова *математичка феноменологија* и његови *математички спектри* (друкчије речено, његова *теорија спектара*) – имала су специфично место и статус, може се рећи и посебну судбину. Та „судбина" им је у многоме била заједничка, уз извесне разлике, наравно. Оно што обе ове области одликује није само намера да се иницирају и утемеље нове дисциплине, јер је и Петровићева *интервална математика*, како нам се чини, била тако замишљена, – него је то амбиција, у оба случаја, да се креирају дисциплине и методе које би значиле суштинске иновације и свету математике и њених примена, најшире схваћеном, донеле драгоцени импулс. Ту њихову заједничку одлику и судбину чини такође, и пре свега, то што оне обе – иако су њихове основне идеје и мисаоне визије, као и сликовита речитост којом их је Петровић излагао и развијао, деловале заиста импресивно, – нису добиле, ни у радовима самог Петровића ни у списима малог броја његових настављача, ону разраду и конкретизацију и нису донеле оне суштинске и, да тако кажемо, универзалне резултате које је Петровић очекивао и најављивао.

Разлика између судбина феноменологије и спектара састоји се у томе што је феноменологија, од самог почетка, од првог текста (објављеног 1896. године) који се на њу односио па скоро све до данашњег времена, привлачила извесну пажњу научне и филозофске јавности у свету и добијала доста озбиљне приказе и оцене, од којих су неке биле и прилично похвалне, док се за спектре то баш не може рећи. Не би било без сваког интереса налажење правог објашњења ове разлике.

Опште је познато и много пута било је речено да природни бројеви (односно њихов систем) представљају основна, првобитна математичка бића, од којих, на један или други начин, сва остала потичу, или после којих долазе (*Кронекер*: „Природне бројеве створио је Бог, а све остало створили су људи".) И заиста, природни бројеви (и систем, целина коју они чине) на неки начин су нам првобитно дати, од Бога, или од Природе, а ако се ипак схвате као људска креација, представљају ону основну, почетну, свакако колективну и анонимну креацију. Природни бројеви и све што они садрже нису, међутим, једноставни ентитети. Није реч само о могућностима конструисања осталих бројева и бројних система помоћу природних бројева, са чиме се може ићи у недоглед, ни о самој бесконачности скупа свих природних бројева, него и о неизмерном богатству унутрашњег света овог скупа, његових релација, операција, теорема, хипотеза, проблема с њим у вези, свега онога што чини садржај теорије бројева, те прастаре математичке дисциплине, која је можда тек у наше време достигла своју пуну виталност. Није, међутим, од „проналаска" самих природних бројева много мање постигнуће проналазак њиховог означавања (заправо и одређивања) помоћу коначног, и то малобројног, скупа симбола – позиционом методом, на пример у данас опште прихваћеном арапском систему писања бројева. И римски систем је, заправо, унеколико позициони (није, на пример, IX исто што и XI), али мање једноставан и много мање савршен од арапског децималног, који заиста на савршено једноставан и једнообразан начин омогућује не само писање сваког жељеног природног броја, него и ефективно извођење разних операција овим бројевима. Шта више, исти арапски, децимални систем такорећи непосредно доводи до свог проширења такозваним *децималним разломцима*, односно *децималним бројевима*, којима се, такође једнообразно, и бар наизглед на сасвим сличан начин, одређују сви остали позитивни бројеви, разломљени и ирационални. Ту се, међутим, већ код неких рационалних, наравно и у случају свих ирационалних бројева, појављује бесконачност, наиме, бесконачни децимални разломци. Ти бесконачни децимални разломци, иако бесконачни, изгледају нам ипак још најсхватљивија и „најпитомија" врста бесконачности, нешто на шта смо навикли и са чиме сразмерно лако можемо да радимо. Од овог утиска, међутим, суштински одудара чињеница да такви децимални бројеви, нарочито они непериодични, ирационални, у ствари нису ни једноставни ни непроблематични математички објекти, јер крију у себи неисцрпну сложеност и недогледну обухватност, могућност да појединачан такав децимални разломак обухвати не само сву дубину и комплексност неког трансцедентног броја, него и још далеко екстензивиније аритметичке и аналитичке математичке ентитете, а о свету свих оваквих „разломака" као целини да се и не говори. У овом смислу, истакнути француски математичар *Емил Борел* (Emile Borel) у предговору Петровићевој књизи *Бројни сӣекӣри* (*Les spectres numériques*) каже: „Децимални бројеви су, после целих бројева, аритметичка бића која најбоље познајемо... За практичара, сви бројеви су децимални бројеви. Овај појам децималног броја постао нам је толико близак и чини нам се толико једноставним да имамо природну склоност да исто тако сматрамо бесконачан децимални разломак најједноставнијим од оних математичких бића у чију дефиницију улази појам бесконачности, или, прецизиније, пребројиве бесконачности. У тој склоности има удела извесна илузија..."

Управо из ових могућности – и моћи, да тако кажемо – децималних разломака изведена је основна и почетна Петровићева идеја спектара и спектралне методе. У више прилика, сам Петровић (а и неки његови приказивачи и коментатори) се на самом почетку својих излагања позива на неку врсту друштвене игре која се састоји у томе што се ономе ко поставља и уједно решава проблем од стране оних који су претходно замислили неколико бројева, па потом, без присуства поменуте особе, извршили одређени рачун, саопштава крајњи нумерички резултат тог рачуна, после чега он одмах погађа све вредности тих замишљених и њему до тада непознатих бројева. Као екстремно једноставан пример овакве забаве одгонетања, наведимо постављање следећег задатка (пример није Петровићев него наш): треба замислити три једноцифрена броја, па онда првом од њих додати удесетостручену вредност другог и устостручену вредност трећег. У овом садржани поступак Петровић је, заправо, генерализовао поступком одређивања коначног или бесконачног низа непознатих величина погодном поделом на узастопне одсечке само једног броја S повезаног са проблемом и написаног у облику децималног разломка, при чему је поменута подела на одсечке – групе узастопних цифара такође прилагођена проблему. У овоме је веома важан моменат то што се тај број S, коме се даје назив *спектар*, обично добија као нумеричка вредност извесног израза (функције) за погодно изабрану вредност независно променљиве. Најједноставнији случај, на који се у извесном смислу своде сви остали, наступа кад су сви чланови низа непознатих бројева N_k ненегативни цели бројеви. Одговарајући спектар тада се формира уз помоћ једног низа h_k природних бројева таквог да је, за свако k, број цифара броја N_k највише једнак броју h_k. Низ h_k назива се *ритмом спектра*, а узастопни одсечци који треба да чине део спектра иза децималне запете образују се од децималних записа редом бројева N_1, N_2, ... испред сваког од којих је стављено толико нула да број цифара у k-том одсечку буде h_k; притом је још испред запете написан број N_0. Овакво „формирање“ спектра, у овом моменту, заправо је само замишљено образовање тог броја, јер су бројеви N_k, по претпоставци, непознати. Наравно, неопходно је, да би се имао одговарајући ритам, знати бар један низ горњих граница бројева цифара бројева N_k. Најпростији у овом погледу је случај кад је ритам $h_k = h$ ($k \in N$) константан, односно *униформан*, према Петровићевом термину. У овом случају, уколико је $\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} N_k x^k$ (или $\Phi(x) = \sum_{k=0}^{m} N_k x^k$ у коначном случају)ред са позитивним радијусом конвергенције, тада је $S = \Phi(10^{-h})$ (са довољно великим h). И у многим случајевима неуниформног ритма поступак је аналоган, на одговарајући начин прилагођен. Функција Φ названа је *спектрална генератриса*. Сам термин *спектар* у овом смислу нема никакве везе са значењем истог термина који се користи у математичкој теорији линеарних оператора. Избор овог термина заправо је условљен од Петровића уоченом аналогијом између спектра светлости (емисионог и апсорпционог) неког елемента или мешавине елемената у хемијској спектралној анализи, и претходно описаних ситуација. Због те аналогије Петровић у своја разматрања уводи још неке термине из спектране анализе, као што су *спектрална пруга, спектрална линија, дисперзија* итд. Ова аналогија, на којој Петровић доста инсистира, ипак има само илустративну, а донекле и инспиративну вредност, и не може бити прави ослонац и аргумент у расуђивањима.

На напред скицирана полазна расуђивања Петровић је, нарочито у две књиге посвећена спектрима, надовезао даља разматрања и разраде самог спектралног поступка, као и већи број илустративних примера и разноврсних примена. Један од једноставних примера, који се на самом почетку излагања наводи, је спектрални поступак израчунавања (коначног) низа биномних коефицијената $\binom{6}{k}$ $(k = 0,1,\ldots,6)$ применом управо горе описаног поступка коришћења спектралне генератрисе, која је у овом случају, очигледно, $\Phi(x) = (1 + x)^6$, пошто се претходно установи да се у истом случају за ритам може узети $h_k = 2$ $(k = 0, \ldots, 6)$. Одговарајући спектар је, дакле

$$S = \Phi(10^{-2}) = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^6 = (1{,}01)^6 = 1{,}061520150601,$$

тако да је $\binom{6}{0} = 1$, $\binom{6}{1} = 6$, $\binom{6}{2} = 15$, $\binom{6}{3} = 20$, $\binom{6}{4} = 15$, $\binom{6}{5} = 6$, $\binom{6}{6} = 1$.. Овде би се могло приметити да нема потребе за оваквим, обилазним и индиректним, израчунавањем биномних коефицијената када се то може учинити за сваки од њих непосредно, помоћу познате формуле којом је тај коефицијент дат. На ту примедбу одговор би гласио: горњим спектралним поступком добијају се сви коефицијенти истовремено и то једнообразном и у суштини једноставном операцијом степеновања, односно поновљеног множења, који је лако аутоматизовати, нарочито кад се користе рачунари, док је директно израчунавање биномних коефицијената помоћу дефиниционих формула у ствари компликованије и мање погодно за аутоматизацију, због вишестурког множења и дељења које те формуле садрже. Све ово важи у још већој мери за од 6 веће природне бројеве на месту тог броја, и утолико више уколико су ти бројеви већи.

Не упуштајући се у даље појединости, констатоваћемо овде да се главни моменти Петровићеве спектралне методе и његових спектралних расуђивања, они чија елаборација чини највећи део садржаја како поменуте две Петровићеве књиге, тако и осталих његових радова посвећених спектрима, поред већ описаног представљају: *поступак претходне припреме, одговарајућим трансформацијама, елемената датог проблема за примену спектралне методе, односно за формирање одговарајуће спектралне генератрисе, као и неких других помоћних функција; затим, саме операције образовања тих функција и израчунавања спектра – у бесконачном случају само делимичног, у мери потребној за ону потпуност решења која се има у виду; могућност замене спектралне генератрисе и осталих функција оним њиховим апроксимацијама које су једноставније од тих функција а једнако добро као оне служе добијању тражених решења; разне операције и трансформације које се примењују на поменуте функције, као и њихова различита испитивања, уз коришћење апарата и постојећих резултата математичке реалне и комплексне анализе – у циљу тумачења смисла добијених спектралних решења и, евентуално, неких* *даљих закључка; најзад, указивања на сву екстензивност и комплексност објеката и проблема, математичких, физичких и осталих, чије се проучавање, у принципу, може свести на проучавање реалних бројева или њихових скупова, па се стога може битно доводити у везу са спектрима.*

Ово последње разматрање излагано је на одговарајућим местима у обе књиге о спектрима, *Бројни спектри* (1919) и *Предавања о математичким спектрима* (1928), али најопширније и са нарочитом изражајношћу у чланку *Бројни спектри појава*, објављеном у Академијином „Гласу" 1927. године. У њему је, сумарно говорећи, реч о чињеници да су математички објекти и системи привидно далеко већег екстензитета и унутрашње разноврстности, кад се схвате као скупови, у погледу кардиналности једнаки, па тиме у извесном смислу еквивалентни, извесним, поново бар привидно, једноставнијим, прегледнијим, обичнијим објектима и системима, као што су коначни или бесконачни скупови целих бројева, појединачни реални бројеви (у децималној репрезентацији), или пребројиви скупови и скупови моћи континуума реалних бројева, до интервала (0, 1) као најопсежнијег од тих ентитета. У чланку се, наиме излажу све етапе редукције, у том смислу, скупа свих реалних или комплексних низова, са било којим коначним бројем индекса, или једног дела тог скупа, на интервал (0, 1), или на један његов део. Ту су по среди добро познати резултати теорије кардиналних бројева. Из овога и из констатације да су, на основу *Берових* (René Baire) и неких других резултата, за математичку анализу у правом смислу речи и за неке примене од интереса само такозване Берове реалне и комплексне функције и да се свака од њих једнозначно одређује вишеструким низом реалних бројева, – изводи се закључак о постојању биунивоке кореспондеције између скупа свих таквих функција и дела интервала (0, 1). Затим се, указивањем на чињеницу да се било који одређени природни процес или комплекс процеса може приказати – у битном – једном функцијом поменуте врсте или највише пребројивим скупом таквих функција (овде интервенише и Петровићева феноменолошка идеја *аналошког језгра*) долази до већ поменутих крајњих консеквенци. Свему овоме даје се и философско-историјски коментар, доводећи у везу и уједно суочавајући претходне закључке са давним идејама античких мислилаца, на првом месту питагорејаца, о „броју као суштини ствари": „За Питагорино се име нарочито везује тежња за изражавањем ствари и факата бројевима и једна његова фамозна формула гласи ствари (бића) су бројеви. Узајамност између факата и бројних спектара даје прави и тачан смисао таквим неодређеним, мистичким рефлексијама. Нити ствари морају бити бројеви, нити бројеви бити атрибути ствари, па да ипак важи тврђење да између факата и бројева постоји узајамност такве врсте да се свет факата може на један потпуно утврђени начин илустровати светом бројева... Све је то, међутим, било потпуно скривено тамом у време грчких философа. Њихове рефлексије о узајамности између факата и бројева, изражене у ставовима толико пута понављаним у току векова, могле су се само сводити на философске визије и генералности... У то време било би несхватљиво тврђење да свакој од појава што припадају једној класи одговара један тачно одређен децимални број што се налази између 0 и 1, или, ако се хоће, једна тачно одређена непокретна тачка у квадрату чије су стране једнаке јединици, и то тако да се посматрањем тог броја, или те непокретне тачке, могу сазнати све појединости појаве. За такву једну тачку везане су, на пример, све појединости кретања једног материјалног система, на пример кретања *n* небеских тела која се међу собом привлаче по Њутновом закону. Мењањем констаната проблема (масе, почетних положаја и других) помера се у квадрату и та тачка, или се мења одговарајући децимални број, али кад су те константе утврђене, тј. кад се посматра један одређен конкретан случај, тачка остаје непомична и децимални број непроменљив, па ипак они у себи садрже све што треба за вечито предвиђање промена у којима се појава састоји."

Математичким спектрима, поред поменуте две књиге и поменутог чланка, Михаило Петровић је посветио неколико саопштења и краћих чланака, у којима је углавном најављен и делимично скициран садржај изложен у књигама, као и један рад у којим се спектри примењују на теорију вероватноће и један у коме се они користе у астрономији. Овим подручјем касније, и у дужем периоду, бавио се Константин Орлов, и заједно са њим у послератном периоду Боривоје Михаиловић, Франтишек Пецка (из Чехословачке) и Макс Арије Вотуло (из Индонезије).

Изгледа заиста „заводљиво" идеја да се неки проблем, који је на неки начин, више или мање директно, у вези са низом бројева које треба одредити, сведе на одређивање само једног броја, у облику коначног или бесконачног децималног разломка, у који су, да тако кажемо, „упаковани" сви ти непознати бројеви, па да се затим тај број као јединствени објект на различите начине третира, а заједно са њиме и одговарајуће помоћне функције и низови, да би се тиме најзад тај број звани спектар у целини одредио и његовим одговарајућим „распакивањем" добиле тражене непознате, све или њихов тражени део. Међутим, после експозиције те основне идеје и разних више мање партикуларних примера и илустрација, оправдано је поставити питање праве систематизације ове методе и њене ефикасности у довољно широкој класи случајева. У већ поменутом предговору Петровићевој књизи *Бројни спектри*, Емил Борел, унеколико с овим питањем у вези, примећује следеће: „Чим зажелимо да дубље проучимо било коју дефиницију у којој се појављује бесконачност, сусрећемо се са крајње великим тешкоћама, од којих ће већина, као изгледа, остати задуго, ако не и заувек, непремостива, јер оне потичу од саме суштине нашег духа, од његове неспособности да јасно схвати трансфинитно... Сви проблеми који се могу поставити у испитивању функција дефинисаних помоћу пребројивих услова (на пример, непрекидних фунција више променљивих) могу се, у принципу, пренети на проблеме који се односе на дефинисање само једног децималног разломка; али овај теоријски увид није од велике помоћи уколико се на конкретан начин не дефинише коресподенција која се може успоставити између функције и децималног разломка; била би то, најчешће, некорисна компликација (une complication inutile) која би се добила уместо траженог поједностављења."

У наставку овог текста, Борел донекле ублажава своје претходно изречене резерве и сумње: „Али, уз ове резерве, не може се сумњати да су наше навике бесконачан децимални разломак учиниле обликом бесконачности који је најмање тешко схватљив и којим се најлакше може руковати; ако, дакле, буде могуће свести проучавање неких питања математичке анализе на прецизно испитивање извесних децималних разломака, тиме ће се добити, у најмању руку, форма излагања или рачунски поступак који би могли бити драгоцени; понекад ће, чак, извесне аналогије које ће ово учинити очигледним моћи да сугеришу нове идеје и изведу на путеве открића. Постоји овде једно неграничено поље истраживања, у којима се главна потешкоћа, као и у многим другим математичким питањима, састоји у избору интересантних и плодних логичких форми међу бесконачно много њих које нам се нуде."

У једном чланку из 1968. године посвећеном неким аспектима математичког стваралаштва Михаила Петровића[1], бавећи се овим питањем, написали смо својевремено следеће: „Мора се, међутим, констатовати да даљи развој ове теорије до данас није имао онај замах нити је донео оне резултате које је Петровић, бар у почетку, по својој прилици очекивао. Ово се може објашњавати различитим, па и спољашњим и случајним околностима. Биће ипак да је један од главних разлога оно што је Борел, у предговору првој Петровићевој књизи о спектрима, 1919. године приметио. Реч је, наиме, о великим тешкоћама са којима се мора сукобити настојање да се – после почетног, теоријски исправног, увиђања принципијелне могућности свођења, на основу поменутих еквиваленција у погледу кардиналности, рачуна и алгоритама са разним, такорећи и најкомплекснијим математичким објектима, на рачуне и алгоритме са реалним бројевима – и ефективно изграде такви поступци ове редукције који би имали значајнији степен општости и којима би се, у довољно пространој класи случајева, постизала већа ефикасност него другим методама, који, према Бореловим речима из поменутог предговора, не би били „le plus souvent, une complication inutile". Борел, с друге стране, наглашава да би стварни успех овакве редукције био драгоцен. По нашем мишљењу, има основе за постављање питања да ли је он у већој мери уопште могућ. Тешкоће су, према Борелу, у вези са „самом суштином нашег духа, са његовом неспособношћу да јасно схвати бесконачност". Сем тога, може се изнети једна општа примедба, не толико самој Петровићевој идеји о спектрима, колико његовој нади да ће се, скоро искључиво на бази те његове идеје, изградити ефикасна и такорећи универзална метода решавања аналитчких проблема. Она би се састојала у овоме: принципијелна основа идеје о спектрима и спектралној методи, тачније о њиховом универзалном захвату, представља само један фрагмент, додуше значајан, теорије кардиналних бројева. Ту су, дакле, већ у полазној идеји и методолошкој оријентацији испуштене, односно битно занемарене друге важне и фундаменталне компоненте математичких структура (алгебарске и тополошке структуре, њихове комбинације и слично), чиме је, можда, испуштена права могућност не само реализације напред поменуте амбиције, него и постизања скромнијег циља изградње једне математичке теорије, дисциплине у правом смислу речи. Познато је да математичке структуре, еквивалентне, тј.

---

[1] Душан Адамовић, *Модерне математичке дисциплине, посебно теорија скупова, у радовима Михаила Петровића*, Дијалектика бр. 2, Београд 1968, стр. 95–103.

идентичне у погледу кардиналности, могу у другом погледу бити дубоко, непремостиво различите. Јасно је да је редукција једне структуре на другу, као и поступака са једном на поступке са другом – у таквом случају без ширег ослонца у структуралном паралелизму и везана само за танку, често илузорну нит кореспонденције један–један између елемената – мада теоријски у извесном смислу могућа, по правилу или практично неостварљива, или веома неадекватна и нецелисходна, „une complication inutile“. Ово је уједно и општа примедба која би се, уз признавање уложеног труда и показане ингениозности, као и извесних досадашњих резултата, могла упутити настављачима рада Михаила Петровића на теорији спектара. Њу заправо треба схватити као конструктиву сугестију да се, у даљој изградњи, ова дисциплина суочава и доводи у везу са већ увелико сазрелим и искристалисаним, проверено ефикасним токовима сличних настојања у савременој математици и да јој се, пре свега, да битно шира, комплетнија и експлицитнија структурално-теоријска основа. Овај посао неће бити лак, али у сваком случају мања је опасност да, услед проширења новим елементима и аспектима, математички спектри изгубе своју индивидуалност, него опасност да се они, изоловани од свих тих широких и плодних токова, дефинитивно сведу на уску математичку вештину, на не нарочито богату збирку појединачних резултата и куриозитета... Но без обзира на досадашњу и будућу фактичку судбину дисциплине засноване на овој замисли Михаила Петровића, треба истаћи да та замисао у сваком случају задржава, у основи, вредност антиципације два значајна методолошка принципа широко и пресудно примењивана у математици периода који приближно почиње у последњој деценији Петровићевог живота. Први од њих је линеаризација података (елемената) једног проблема приликом његове обраде од стране рачунских машина, а други такозвани поступак „геделизације“, којим се сви симболи, формуле, теореме и докази једне формализоване математичке теорије изражавају помоћу погодно изабраних природних бројева. Овај други поступак примењен је у доказу *Геделових* (Gödel) и других теорема од есенцијалне важности за савремене погледе на заснивање и суштину математике.“

Ово своје мишљење, у основи, задржали смо до данас. У међувремену није, заиста, дошло до предлагане (додуше, без велике наде у успех)синтезе спектралне теорије и методе са одговарајућим токовима и резултатима савремене математике и до ширег и адекватнијег теоријског утемељења и систематизације ове области на тој основи. Овај подухват можда (као што смо у претходном излагању наговестили) није, из суштинских разлога, ни било могуће остварити, а ако је и било могуће , по свој прилици било је потребно укључити у игру извесне дубље и новије погледе и резултате модерне математичке анализе, а такође, вероватно, и неких нових математичких дисциплина, које су се у време пуне Петровићеве научне активности тек рађале или је био у току њихов почетни развој. Треба имати у виду да главно, ако не и укупно, математичко образовање и формирање Михаила Петровића пада у последње две деценије деветнаестог века (докторат је одбранио 1894. године) и да стога ипак, и поред све његове широке научне ерудиције и принципијелне отворености за модерну математику (његовог доба) нарочито за теорију скупова и теорију релативности (о томе смо опширније писали у поменутом чланску из 1968. године), – није био у могућности да стално, у стопу прати све те релевантне саремене развоје, поготову на нивоу њиховог активног усвајања и адекватног коришћења у сопственој научној делатности. Али, и независно од тога, биће да Петровић, после објављивања својих главних радова посвећених спектрима, сам више није био вољан ни расположен за тежак подухват битно дубљег утемељења и осмишљавања овог подручја, како због већ зрелих година у које је био ушао, тако и због бројних преосталих послова на другим пољима математичких, научних и педагошких, па и осталих активности којима је у то време био окупиран. Сем тога, најзанимљивија и најперспективнија, по свој прилици, била би комбинација спектралне методе са рачунарима, са компјутерском техником, али оном данашњом, дигиталном и још савршенијом и разгранатијом, а не оном Петровићевог времена, углавном аналогном. Петровић је, наиме, и сам својевремено радио на конструисању рачунских и других математичких машина, углавном аналогних (његов „хемијски интегратор", и др.), а прави развитак тог савременог рачунарства (заснованог добрим делом на резултатима математичке логике, теорије алгоритама , конструктивне математике итд.) почео је тек после Петровићеве смрти. Што се тиче његових ученика и настављача, и у њиховим радовима проевлађују третирање ужих и партикуларних проблема и техничке преокупације, најчешће уз коришћење само коначних спектара, у чему се понекад иде до минуциозности. У већем броју њих главна пажња посвећена је питању економичности поступка израчунавања детерминаната, елемената матрица итд., наиме, питању за колико је број операција у спектралном поступку мањи од њиховог броја при неком другом поступку. Ту је добијен већи број занимљивих резултата, али читава ова проблематика „економичности" данас је у многоме изгубила значај – због огромних, фантастичних могућности савремених рачунара да неизмерно брзо изведу велики број операција, а међу њима и оне најсложеније.[1]

Све у свему, може се скоро са сигурношћу рећи да је коначно пропуштена могућност да Петровићева теорија и метода спектара добије оно утемељење и продубљење које би је укључило у реалан развитак савремене математике, које би је учинило реалним беочугом у ланцу тог развитка. И тако су „широки и плодни" (такође и врло снажни) токови математике нашег века заобишли и иза себе оставили математичке спектре Михаила Петровића, пре него што су они успели да добију свој прави облик и стекну своју праву делотворност. (Сличну судбину доживела је и Петровићева *математичка феноменологија*). Оно што овој Петровићевој замисли и настојањима, његовим и његових следбеника, ипак даје одређену, не баш малу, вредност – инспиративну, документарну и историјску – поред већег броја више или мање успелих и инвентивно добијених специјалних и партикуларних резултата, чини то што они садрже

[1] Напомињемо да се млађи математичари *Јован Мадић* и *Предраг Станимировић* у неким својим радовима баве оваквим применама математичких спектара, коришћењем „спектралне методе К. Орлова". Како нисмо могли да се непосредно упознамо са изворним и потпуним верзијама тих текстова, о овоме не можемо ништа више рећи.

својеврсну (истина, у рудиментарном облику) антиципацију неких важних подручја данашње математичке теорије и њених примена.

Овај том Сабраних дела Михаила Петровића обухвата практично све његове радове посвећене математичким спектрима. То студиозном читаоцу пружа могућност да, уз евентуални осврт на понешто из других томова исте колекције, формира сопствено мишљење о овом подручју Петровићевих математичких активности, које ће можда бити у сагласности са претходним нашим оценама, а можда ће се од њих и разликовати.

Душан Адамовић

ОБЈАВЉЕНИ РАДОВИ МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА – МАТЕМАТИЧКИ СПЕКТРИ* –

1 DÉTERMINATION SPECTRALE DE FONCTIONS,[Δ] Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris 1918, t. CLXVII, 22, pp. 774–776.

2 LES SPECTRES NUMÉRIQUES, [Δ] Gauthier-Villars, Paris 1919, p. VII+110; 16,5 × 25,3.

3 SPECTRES DES PROBABILITÉS[Δ], L'Enseignement mathématique, Genève 1925, t. XXIV, 4–5–6, pp. 205–209.

4 SPECTRES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE REPRÉSENTABLES ANALITIQUEMENT, Comptes rendus du Congrès de l'Association francaise pour l'avancement des sciences, S. Mathématiques, Lyon 1926, pp. 75–76.

5 БРОЈНИ СПЕКТРИ ПОЈАВА[Δ], Српска краљевска академија, Глас, књ. CXXVII, Први разред, књ. 58, Београд 1927, стр. 45–66.

6 LEÇONS SUR LES SPECTRES MATHÉMATIQUES–PROFESSÉES À LA SORBONNE EN 1928[Δ], Gauthier-Villars, Paris 1928, p. II+90; 16,5×25,3.

7 LE PROCÉDÉ SPECTRAL DE CALCUL NUMÉRIQUE EN ASTRONOMIE[Δ], Annuaire pour l'an 1931, Publication de l'Observatoire astronomique de l'Université de Belgrade, Belgrade 1930, t. III, pp. 127–132.

8 SPECTRES DES INTÉRÊTS SIMPLES ET COMPOSÉS, Sphinx, Bruxelles 1935, t. V, p. 93.

*

У више својих расправа и монографија Михаило Петровић се користио ставовима математичких спектара. Овде наводимо неколико случајева у којима се нешто шире примењиване одредбе о математичким спектрима. Дакако, да је овде на првом месту рад (**9**) настао 1917. године у ратним временима, у јеку

---

* Шира библиографска обрада наведених наслова изложена је у 15. књизи *Сабраних дела Михаила Петровића*

[Δ] Овим знаком обележен је наслов рада који је објављен у овој 5. књизи *Сабраних дела Михаила Петровића.*

Петровићевог рада на војним и дипломатским шифрама. Овај рад има ***значење првенца у математичким спектрима*** који је саопштен у Парискоі академији наука 30. априла 1917.

9 SUR QUELQUES EXPRESSIONS NUMÉRIQUES REMARQUABLES$^{\Delta}$, Comptes rendus, séances de l'Académie des Sciences, Paris 1917, t. CLXIV, 19, pp. 716–718.

10 THÉORÉMES ARITHMÉTIQUES SUR LÉINTÉGRALE DE CAUCHY, Comptes rendus séances de l'Academie des Sciences, Paris 1917, t. CLXIV, 20, pp. 780–782.

11 UN NOUVEAU PROCÉDÉ D'ÉVOLUATION NUMÉRIQUE DES COEFFICIENTS DES SÉRIES, Comptes rendus séances de l'Academie des Sciences, Paris 1917, t. CLXV, 12, pp. 388–391.

12 FONCTIONS ENTIÈRES SE RATTACHANT AUX NOMBRES PREMIERS, Comptes rendus, séances de l'Académie des Sciences, Paris 1919, t. CLXVIII, 11, pp. 542–544.

13 PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES D'UNE CLASSE DE NOMBRES RATIONNELS, Bulletin de la Société mathématique de France, Paris 1920, t. XLVIII, 1–4, pp. 27–32.

14 CORRESPONDANCE ENTRE LA FONCTION ET LA FRACTION DÉCIMALE, Proceedings of the V International Congress of Mathematicians, Toronto 1924, pp. 449–455.

15 PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, Bulletin de la Société mathématique de France, Paris 1924, t. LII, pp. 514–519.

16 ЈЕДАН НАЧИН ПРИБЛИЖНОГ ПРЕДСТАВЉАЊА АНАЛИТИЧКИХ ФУНКЦИЈА ПОМОЋУ ПОЛИНОМА, Српска краљевска академија, Глас, књ. CXXVIII, Први разред, књ. 59, Београд 1927, стр. 139–149.

17 ФЕНОМЕНОЛОШКО ПРЕСЛИКАВАЊЕ°, Српска краљевска академија, Посебна издања, књ. XCVII, Природњачки и математички списи, књ. 26, Београд 1933, стр. VII+236; 16 × 24.

18 SÉRIES DE PUISSANCES À COEFFICIENTS NOMBRES ENTIERS COMME INVERSIONS DES INTÉGRALES ABÉLIENNES, La Revista de Ciencias, Lima (Peru) 1937, t. XXXIX, 421, pp. 51–56.

° Објављено у 6. књизи *Сабрних дела Михаила Петровића.*

ЛИТЕРАТУРА

Извори којима се служио Михаило Петровић у стварању својих математичких спектара, завређује посебну пажњу. Они су овде изложени у следу њиховог појављивања у овој књизи, те пружају читаоцу скупну и прегледну слику о коришћеној литератури. Она сигурно није из спектара, јер су спектри оригинално изворно Петровићево дело. То су, махом, научне расправе из анализе које су Петровићу затребале у исказивању моћи математичких спектара.

Петровићеви извори су савремени што показује професоров трајан ход у науци. То потврђују радови Борела, Лебега, Поља и других.

Као што смо напоменули, овде литературу доносимо скупно са назнаком странице на којој је наведена у овој књизи.

1 E. BOREL, *Leçons sur la theorie des fonctions*, Paris 1914; str. **13**, **84**, **93**, **142**, **159**.

2 D. HILBERT, *Grundzüge uner allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Vieste Mitteilung Götting. Nachtrichten, 1906; str. **16**.

3 G. PÓLYA, *Über das Amvachsen von gauzen Funktionen die einer Differentialgleichung genügen*, Viertegahrschfift der naturforsch. Geselschaft in Zürich, Jahr. 51, 1916, S. 531–545; str. **36**, **107**.

4 J. HADAMARD, *Etudes sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann*, p. 210; str. **37**.

5 P. APPELL, *Sur les foncions q de degres superieures*, Comptes rendus, séances de l'Academie des Sciences, Paris 1911, t. CLIII, pp. 584–587; 617–618; str. **38**, **108**, **184**.

6 E. MAILLET, *Introduction à la théorie des nombres transcendants*, Paris 1906, pp. 20–22; str. **41**, **42**, **117**, **118**.

7 E. BOREL, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, Paris 1903, pp. 35–36; str. **50**, **53**, **115**, **146**, **147**.

8 E. BOREL, *Sur une application d'un théorème de M. Hadamard*, Bulletin des Sciences math., 2e série, t. XVIII, pp. 22–27; str. **53**, **115**.

9 G. PÓLYA, *Ueber Potenzreichen mit gauzzahligen Koefficienten*, Math. Annalen, B. LXXVII, 4. H, pp. 497–523; str. **53**, **115**, **146**.

10 P. FATOU, *Sur les séries à coefficients entiers*, Comptes rendus, séances de l'Académie des Sciences, Paris 1902, t. CXXXVIII, pp. 342–344; str. **53, 115**.
11 E. CAHEN, *Sur les séries integro-entières*, Comptes rendus séances de l'Académie des Sciences, Paris 1911, t. CLII, pp. 124–127; str. **54, 116**.
12 A. L. CAUCHY, *Ouvrages*, 2e série, t. VII, p. 182; str. **56**.
13 T. I. STIELTJES, *Correspondances avec Hermite*, lettres 328 et 385, Paris; str. **56**.
14 E. LAGUERRE, *Sur la partition des nombres*, Bulletin de la Soc. math. de France, Paris 1877, t. V; Ouvrage, t. I, pp. 218–220; str. **67, 129**.
15 MAC-MAHON, *Philos. Trnas.*, London 1896, 187/A, p. 619; str. **68, 132**.
16 E. BOREL, *Sur l'interpolation*, Comptes rendus, séances de l'Académie des Sciences, Paris 1897; str. **78, 139, 151**.
17 E. BOREL, *La notion de fonction en général*, pp. 123–126; str. **84, 142**.
18 Annales de l'École Normale Supérieure, 1885. et 1889; str. **85, 141**.
19 J. HADAMARD, *La Série de Taylor et son prolongement analytique*, Scientia, №12, Paris 1901; str. **85, 119**.
20 E. BOREL, *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, Paris 1905, p. 68; str. **112, 166**.
21 E. BOREL, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 1895, p. 35; Pringsheim, Math. Ann., t. 44; Chicago Congress Papers, p. 294; str. **112, 166**.
22 DE LA VALLÉE POUSSIN, *Intégrales de Lebesque, fonctins d'ensembles, classes de Baire*, Collection Borel, 1916, p. VII; str. **112, 164**.
23 F. CARLSON, *Üeber Potenzreihen mit genzzahligen Koeffizienten*, Math. Zeitschr., t. 9, 1921, pp. 1–13; str. **115**.

О ОВОМ ИЗДАЊУ

Петровићеви спектри изложени су у овој 5. књизи *Сабраних дела Михаила Петровића*. Књига је насловљена ***Математички спектри*** и поред чињенице да се у књизи не наилази често на овај наслов. Одлучили смо се за поменути наслов, како би дошли до природног и неопходног јединства међу објављеним монографијама и расправама.

Математички спектри у овој прилици подељени су у три целине. У првом делу изложена је у целости и преводу Петровићева књига *Les spectres numeriques* објављена у Паризу 1919. године. После проналаска спектра у 1917. години (9) као функционала који повезује једну реалну функцију $f : [a, b] \to (0, 1)$ са децималним бројем $0 < m < 1$, Петровић релативно брзо хита да објави читаву монографију (2) и тако упозна страну научну јавност са својим „ратним проналаском“. Математичар великог ауторитета Емил Борел написао је предговор за ову књигу, а она је била и предметом расправљања Поље, Окања, Фера и других угледних математичара.

Други део књиге садржи Петровићева предавања из математичких спектара на Сорбони (Париз) у летњем семестру школске 1927/28. године (6). Иако ова књига садржи приличан поновљен материјал из прве монографије из 1919. године (2), сматрали смо потребним да књигу *Leçons sur les spectres mathématiques* (Paris 1928) задржимо у целости као споменик националне историје наука који потврђује, да су математичари из Београда између два рата били радо виђени предавачи на страним универзитетима.

Трећи део књиге доноси пет Петровићеве расправе из спектара. У избору радова жеља је била очигледна, да се изложи примена спектара у анализи (1), вероватноћи (3) и астрономији (7). Уједно, објављивањем Петровићеве студије *Бројни спектри појава* из Гласа Српске краљевске академије (5) присутна је намера да се покажу извесни професорови ставови о савременим кретањима у математичким наукама.

У свим деловима ове књиге изложено је Петровићево учење о спектрима у оригиналном и веродостојном преводу који се овде по први пут објављује. Приређивач, уједно и преводилац, строго је поштовао ауторову стилску особеност, методичност и саму методологију израза. Било је више могућности да се Петровићево излагање измени и прилагоди данашњем уобичајеном математичком језику. И у терминологији је све задржано. Није ништа мењано иако је за то било више прилика.

При преводу и редиговању текста учињене су исправке очигледних штампарских грешака. Отклоњено је и више несмотрених Петровићевих омашки.

Наглашавања у тексту задржана су у изворном облику, као и навођење стране литературе у спуштеницама. У неколико случајева учињено је и наше наглашавање или извлачење теореме као посебне целине. При свему овом, имена страних научника писана су у преведеном облику, при чему је у регистру личних имена изнето оригинално име аутора.

У прилогу ове књиге *Сабраних дела Михаила Петровића* изложено је неколико целина које треба да олакшају рад при коришћењу исте. Најпре је изложена једна синтеза о спектрима које је лично саставио Михаило Петровић за познату књигу *Notice sur les travaux scientifiques de M. Michel Petrovitch* (Paris 1922). Ово је штиво веома битно за оцену Петровићевих настојања у овој области анализе у којој на крају свог постојања, није постигнута трајна афирмативна позитивна оцена науке. Скупно је, затим, изложена литература којом се Петровић служио. Указано је на неколико својстава ове литературе, као што је њихова савремености и друго.

Корисник књиге има пред собом и тачан обим Петровићевог рада на спектрима који је преузет из опште научникове библиографије која је објављена у последњој 15. књизи *Сабраних дела Михаила Петровића*. Овде су изложени наслови Петровићевих текстова који експлицитно садрже реч *спектар*, као и они у којима се посредно расправља о спектрима.

Уобичајено, књигу прати регистар личних имена са неопходним подацима.

Уређивачки одбор *Сабраних дела Михаила Петровића* дугује велику захвалност др Душану Адамовићу, професору универзитета на веома успелом и стручном преводу са француског језика свих текстова у овој 5. књизи. Захвалност припада и др Драгану Трифуновићу, професору универзитета који је учествовао у стварању ове књиге. У опремању ове књиге пуну пажњу заслужује професор Жарко Јовић из Завода за уџбенике и наставна средства, као и Александар Савић, асистент Математичког факултета у Београду.

РЕГИСТАР ЛИЧНИХ ИМЕНА

САДРЖАЈ

БРОЈНИ СПЕКТРИ

ГЛАВА ШЕСТА

Други део
ЈЕДАН НАЧИН ДОВОЂЕЊА У ВЕЗУ ФУНКЦИЈА ЈЕДНЕ ПРОМЕНЉИВЕ И НИЗОВА ЦЕЛИХ БРОЈЕВА

Трећи део
СПЕКТРИ ФУНКЦИЈА ЈЕДНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

Четврти део
СПЕКТРАЛНА МЕТОДА

ПРЕДАВАЊА О МАТЕМАТИЧКИМ СПЕКТРИМА

Први део
СПЕКТРИ СКУПОВА БРОЈЕВА

СПЕКТРИ ПРЕБРОЈИВИХ СКУПОВА

НАУЧНЕ РАСПРАВЕ

ПРИЛОЗИ

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ
САБРАНА ДЕЛА
Књига 5

МАТЕМАТИЧКИ СПЕКТРИ

Прво издање, 1998. година

Издавач
Завод за уџбенике и наставна средства
Београд, Обилићев венац 5

Ликовни уредник
АИДА СПАСИЋ

Лектор
МИРЈАНА ВАСИЉЕВИЋ

Корице
АИДА СПАСИЋ

Графички уредник
ДУШАН МИЛОСАВЉЕВИЋ

Коректор
ДУШАН МАТИЋ

Обим: 16 1/2 штампарских табака
Формат: 17 × 24 cm
Тираж: 500 примерака

Рукопис предат у штампу августа 1998. године.
Штампање завршено августа 1998. године.

Штампа
БИГЗ, Београд

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

517

ПЕТРОВИЋ, Михаило
Математички спектри / Михаило Петровић ; приредили Душан Адамовић, Драган Трифуновић. – [1. изд.]. – Београд : Завод за уџбенике и наставна средства, 1998 (Београд : БИГЗ). – 260 стр. : илустр. ; 24 cm. – (Сабрана дела / Михаило Петровић ; књ. 5)

Тираж 500. – Стр. 11–12: Предговор / Емил Борел. – Стр. 239–248: Математички спектри Михаила Петровића / Душан Адамовић. Објављени радови Михаила Петровића – математички спектри: стр. 249–250. Библиографија: стр. 251–252. – Регистар.

ISBN 86-17-06516-8

511

а) Математичка анализа б) Теорија бројева
ИД=66729996

9 788617 346742

ISBN 86-17-06516-8

К. Б. 34674