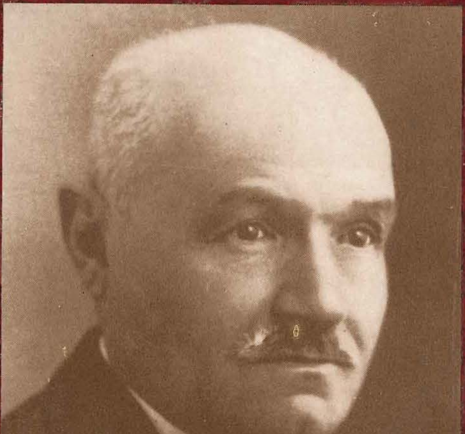
ИНТЕРВАЛНА МАТЕМАТИКА

△

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ АЛГОРИТАМ



МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

САБРАНА ДЕЛА

САБРАНА ДЕЛА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

1. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ – Први део
2. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ – Други део
3. МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА
4. АЛГЕБРА
5. МАТЕМАТИЧКИ СПЕКТРИ
6. МАТЕМАТИЧКА ФЕНОМЕНОЛОГИЈА
7. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧКЕ ФЕНОМЕНОЛОГИЈЕ
8. ИНТЕРВАЛНА МАТЕМАТИКА – ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ АЛГОРИТАМ
9. ЕЛИПТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ – ИНТЕГРАЦИЈА ПОМОЋУ РЕДОВА
10. ЧЛАНЦИ – СТУДИЈЕ
11. ПУТОПИСИ – Први део
12. ПУТОПИСИ – Други део
13. МЕТАФОРЕ И АЛЕГОРИЈЕ
14. РИБАРСТВО
15. МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ – ПИСМА, БИБЛИОГРАФИЈА И ЛЕТОПИС

Завод за уџбенике и наставна средства у Београду објављује *Сабрана дела Михаила Петровића* у сарадњи са Математичким факултетом Универзитета у Београду и Друштвом математичара Србије.

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

САБРАНА ДЕЛА

КЊИГА 8

Уредник

ЖАРКО ЈОВИЋ

Главни и одговорни уредник

др ПЕТАР ПИЈАНОВИЋ

За издавача

проф. др ДОБРОСАВ БЈЕЛЕТИЋ, директор

ISBN 86-17-05888-9

Мих. Петровић

Професор

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

Београд, 24. април 1868 – Београд, 8. јун 1943.

Ово је лик Михаила Пeтровића из времена његовог обимног рада на неколико научних монографија; снимак начињен око 1930. године од непознатог аутора.

МИХАИЛО
ПЕТРОВИЋ

ИНТЕРВАЛНА МАТЕМАТИКА

△

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ АЛГОРИТАМ

Приредио
др Драган Трифуновић, проф. унив.

ЗАВОД ЗА УЏБЕНИКЕ
И НАСТАВНА СРЕДСТВА
БЕОГРАД
1997

РАЧУНАЊЕ СА БРОЈНИМ РАЗМАЦИМА

ПРВИ ОДЕЉАК

БРОЈНИ РАЗМАЦИ У ЕЛЕМЕНТАРНИМ РАЧУНИМА

1. БРОЈНИ РАЗМАЦИ КАО МАТЕМАТИЧКИ ЕЛЕМЕНТИ

У чистој, апстрактној математици једна реална количина је један тачно одређен реалан број, једна апстрактна математичка тачка на апстрактној математичкој реалној бројној линији.

Математичка тачка у равни је једно у тој равни место тачно одређено помоћу два тачно одређена реална броја. Континуални низ математичких тачака саставља математичку линију која се протеже само својом дужином.

Математичка тачка у тродимензионалном простору је у томе простору место тачно одређено помоћу три тачно одређена броја, а континуални низ математичких тачака сачињава равну, или у простору извитоперену математичку линију која се протеже само својом дужином. Континуални низ таквих линија саставља једну математичку површину, која се протеже својом дужином и својом ширином.

То су основни елементи чисте, апстрактне математике, али на какве се у стварности, у практичној математици, врло ретко кад наилази. Истина, има случајева кад је и у стварности једна уочена реална количина један тачно одређен број, који се поклапа са једном математичком тачком на апстрактној реалној бројној линији. То су случајеви када се зна, да је уочена количина цео или периодичан десетни разломак коме се могу сазнати све децимале (тј. кад су те децимале све нуле, или су оне што су различне од нуле, у коначном броју, или се уопште зна закон по коме се оне нижу једна за другом, као што је то случај код рационалних разломака итд.). Такав је нпр. случај са тоталним бројем међу собом једнаких предмета распоређених у коначан број гомила; или случај кад се тражи број реалних корена једне једначине који се налазе између два дата броја; или случај кад се траже цели корени једне алгебарске једначине итд.

Сваку другу количину која има бескрајно много децимала, а овима се не зна закон, немогућно је практички, у стварности, одредити као апстрактну математичку тачку на математичкој бројној линији. За такву се количину у најбољем случају може само фиксирати један *бројни размак*, тј. један размак на бројној линији за који се може тврдити да се та количина сигурно у њему налази (пример: $\sqrt{2}$ или π). Тако је чак и онда кад би на први поглед изгледало да је количина одређена као математичка тачка у пресеку двеју тачно конструисаних линија (нпр. двеју правих, или праве и круга, или два круга), јер се практички никад не може нацртати тачна, апстрактна, математичка линија (то ће практички увек бити једна више или мање широка пруга, или више-мање дебела шипка), па и пресеци тако нацртаних линија нису тачке, већ имају коначно протезање (пример: конструкција броја $\sqrt{2}$ помоћу праве и круга; конструкција броја π или e помоћу трактoриографа).

Према самој природи људског сазнавања, једна се реална количина (осим поменутих изузетних случајева) одређује практички, уопште не као тачно одређен број или математичка тачка, већа као *бројни размак*; једна тачка као *сегмент* једне праве или криве линије, или као исечак једне површине, или чак и као тело у тродимензионалном простору; линија у равни као *пруга* коначне ширине; линија у простору као *шипка* коначне дебљине, итд. Фактички елементи, са којима има посла математика стварности нису, дакле, они исти са којима има посла чиста, апстрактна математика.

Међутим, на овакве исте елементе, са којима се има посла у математици стварности, наилази се и у проблемима апстрактне математике, поред оних са којима она искључиво рачуна. То су проблеми одређене врсте у којима се нпр. непознате количине, по самој својој природи, јављају као бројни размаци; или кад саме погодбе задатка не захтевају тачну одредбу непознатих количина; или кад је непознату, због несавладљивих тешкоћа, немогућно тачно одредити; или кад је она такве природе да је довољно наћи довољно сужен размак у коме се она налази, па да се одмах, или бар једним низом практички извршљивих рачунских радњи, добије и њена тачна или довољно приближна вредност. Тако:

1° Тачно решење извесних проблема састоји се, не у томе да се нађу тачне вредности непознатих количина, већ у томе да се нађе између којих граница оне треба да се мењају па да услови проблема буду задовољени.

Тако нпр. задатак одредбе вредности x за које ће квадратна једначина

$$x^2 - 2x + y^2 - 3y + 3 = 0$$

имати своје корене x реалне, има као своје решење ово: потребно је и довољно да y лежи у бројном размаку између 1 и 2.

Питање о конвергенцији једнога реда, чији чланови садрже једну промењљиву x, потпуно је решено кад се нађе бројни размак у коме треба да се налази x, па да буде осигурана конвергенција или дивергенција реда. На пример, ред са позитивним коефицијентима

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

биће конвергентан ако се x налази у бројном размаку од $-R$ до $+R$, где је

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}};$$

он ће бити дивергентан ако се x налази ван тог размака.

2° За потребе практичких рачуна (нпр. за физичаре, хемичаре, техничаре) не само да нису ни мало потребне апсолутно тачне вредности непознатих количина, него чак није потребна ни сувише велика приближност. Често је довољно знати само то да свака од њих није ни мања од једног утврђеног броја, ни већа од другог утврђеног броја, а ти су бројеви, међутим, толики да је размак између њих довољан за потребу за коју се тражи. Тако нпр. при квантитативним хемијским анализама, у многим случајевима, довољно је знати да се тражена количина налази између два нађена броја који се међу собом разликују тек од треће или четврте децимале.

Тако исто, за потребе практичких рачуна, дешава се да је непознату количину врло тешко и заметно израчунати по датој формули, а међутим је за те потребе довољно знати колико је отприлике реда та количина, тј. да ли она износи неколико десетина, или неколико хиљада, или неколико милиона, итд.; тада је довољно познавати известан бројни размак у коме се она налази, па да се има оно што се тражи.

Пример. – За велике вредности n врло је тешко израчунати $n!$ које тада има врло велики број цифара. Али, као што је познато из теорије факторијела, $n!$ увек лежи између двеју вредности

$$\sqrt{2\pi}\cdot e^{-n}\cdot n^{n+\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad \sqrt{2\pi}\cdot e^{-n+\frac{1}{12n}}\cdot n^{n+\frac{1}{2}},$$

који се много лакше израчунавају него $n!$ и тако израчунате дају појам о величини факторијела $n!$.

3° У извесним проблемима дешава се да је не само немогуће наћи у дефинитивном облику сам број, који представља тачку или довољно приближну вредност непознате количине, већ је немогуће и доћи до тачног математичког обрасца који би имао дати ту вредност кад се у њему смени све што је опште одговарајућим бројним вредностима као подацима. Таква немогућност може произлазити:

а) од апсолутне немогућности да се и формира математички образац који би дао тражену непознату вредност помоћу данашњих рачунских операција. Примери: одређивање корена какве алгебарске једначине вишег степена од 4, која има један или више општих коефицијената; израчунавање одређеног интеграла $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$; одређивање интеграла Ricatti-еве диференцијалне једначине са општим коефицијентима, итд.

b) од тога што су сами подаци за тачну одредбу непознате количине недовољни. Примери: одредити непознату

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

када се зна вредност збира $a + b$; одредити трећу страну с једног троугла, кад се зна збир $a + b$ осталих двеју страна и угао између њих.

Међутим, и у таквим случајевима је увек могуће одредити за непознате по један бројни размак у коме се свака од тих непознатих сигурно налази.

Напослетку, треба напоменути и то, да и у само чистој, апстрактној математици има интересантних случајева у којима, кад се сазна да један одређен бројни размак насигурно садржи непознату количину, ова се одмах, без икаквог даљег рачунања, може одредити са апсолутном, математичком тачношћу.

1. *пример.* – Мерењем по тежини једне гомиле оловних зрнаца од којих свако тежи по један милиграм, нађе се великим бројем мерења, да се та тежина налази између 151,954 mgr и 152,037 mgr; тачан број зрнаца је тада 152 (претпостављајући нпр. да ни једно зрнце не одступа од милиграма више од 0,5% и да се при колективном мерењу не греши за више од 0,5%).

2. *пример.* – Кад се зна да су две непознате x и y цели бројеви, да се x налази у размаку између 2 и 14, а y у размаку 8 и 24, и да при томе задовољавају неодређену једначину $9x + 7y = 184$, може се тврдити да су тачне вредности непознатих $x = 8$, $y = 16$.

3. *пример.* – Постоји једна алгебарска теорема која даје број корена N што их има једна дата бројна алгебарска једначина у једној датој прстенастој површини описаној око почетка. По тој теореми, да би се одредио број N, треба израчунати бројну вредност P коју добија

извесна, истом теоремом потпуно одређена функција коефицијената једначине, кад се у тој функцији смене коефицијенти својим бројним вредностима које имају у датој једначини; број N је по тој теореми једнак највећем целом броју садржаном у бројној вредности P. Ако се, дакле, нађе да број P лежи у једноме бројном размаку који у себи садржи само један цео број, може се закључити да ће број N бити тачно једнак томе целом броју.

4. *пример*. – За линеарне диференцијалне једначине другог реда

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)y = 0,$$

постоји ова теорема: ако за све вредности x које се налазе у једном датом размаку (a, b), вредност функције $f(x)$ остаје непрестано у размаку од $\frac{p}{x^2}$ до $\frac{p'}{x^2}$ (где су p и p' два стална позитивна броја и $p' > p > \frac{1}{4}$), број N реалних нула једнога таквога интеграла диференцијалне једначине увек се налази између двеју вредности

$$\alpha = \frac{\sqrt{4p-1}}{2\pi}\log\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{\sqrt{4p'-1}}{2\pi}\log\frac{b}{a} + 1.$$

Кад, дакле, размак (α, β) садржи само један цео број M, број N тачно је једнак томе броју M. Довољно је, дакле, познавати такав један размак (α, β), па да се нађе тачна вредност непознате количине.

Из свега се тога види: *да се на бројне размаке, као рачунске елементе, наилази не само у практичној математици, већ и у одређеним проблемима саме чисте апстрактне математике.*

2. РАЧУНСКИ ПРЕДСТАВНИЦИ БРОЈНИХ РАЗМАКА

Кад је дат размак (a, b), где је a његов *предњи* а b његов *задњи* крај, може се, и то на разне начине, формирати једна функција $f(\lambda)$ једнога параметра λ таква:

1° да се за једну дату вредност $\lambda = \lambda_1$, вредност функције поклапа са a, а за другу једну дату вредност $\lambda = \lambda_2$ вредност функције поклапа са b;

2° да, док λ прелази редом вредности између λ_1 и λ_2, вредност функције пролази кроз све бројеве који се налазе у размаку (a, b).

Такву једну функцију $f(\lambda)$ називаћемо *рачунским представником* размака (a, b); размак (λ_1, λ_2) називаћемо *параметарским размаком.*

Рачунски представник једнога размака обухвата, у облику једног рачунског израза, све бројеве садржане у томе размаку.

Ставивши, краткоће ради

$$\alpha = \frac{\lambda - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \beta = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

за рачунски представник размака (a, b) може се узети која било нпр. од функција

$$f(\lambda) = \alpha a + \beta b,$$

$$f(\lambda) = (\alpha a^m + \beta b^m)^{\frac{1}{m}},$$

$$f(\lambda) = a^\alpha b^\beta.$$

Сваки рачунски представник размака (a, b) има ту особину да се по својој бројној вредности поклапа са једним којим се год хоће бројем у томе размаку, кад се параметру λ да једна подесно изабрана бројна вредност која се налази између λ_1 и λ_2. Тако нпр. размак (2, 5) имаће као један свој рачунски представник, са параметарским размаком (1, 3) функцију

$$f(\lambda) = 2\alpha + 5\beta,$$

где је

$$\alpha = \frac{3 - \lambda}{2}, \quad \beta = \frac{\lambda - 1}{2},$$

тј. функцију

$$f(\lambda) = \frac{1 + 3\lambda}{2}.$$

Вредност нпр. 2,75 у размаку (2, 5) добија се кад параметру λ да вредност 1,5 садржана у његовом размаку (1, 3).

3. ЛИНЕАРНИ РАЧУНСКИ ПРЕДСТАВНИЦИ БРОЈНИХ РАЗМАКА

Између свих могућих облика функције $f(\lambda)$ најпростије су и за рачуне најподесније линеарне функције параметра λ, тј. функције облика

$$f(\lambda) = u + \lambda v, \tag{1}$$

где су u и v вредности независне од λ, одређене тако да за дати размак (a, b) буде

$$u + \lambda_1 v = a, \quad u + \lambda_2 v = b,$$

што ће бити кад се за u и v узму вредности

$$(2) \qquad u = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} a - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} b, \quad v = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} b - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} a.$$

Два су случаја од нарочитог интереса по својој простоти и по лакоћи да се са одговарајућим обрасцима рачуна. То су:

Први случај: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = +1$; рачунски представник бројног размака (a, b) је тада

$$(3) \qquad f(\lambda) = u + \lambda v,$$

где је

$$(4) \qquad u = \frac{b+a}{2}, \quad v = \frac{b-a}{2},$$

а параметарски размак је размак $(-1, +1)$. Тада је

$$a = u - v, \quad b = u + v,$$

што показује да су крајеви размака (a, b) симетрични наспрам вредности u која се, дакле, налази у средини тога размака. Један ма који број садржан у размаку добија се кад се средини размака дода или од ње одузме један део полудужине размака.

Кад се од функције $f(\lambda)$ тражи да се сведе на предњи крај a размака (a, b) за $\lambda = -1$, а на задњи крај b за $\lambda = +1$, треба да је

$$u - v = a, \quad u + v = b,$$

па пошто је $a < b$, треба да буде $v > 0$.

Кад се тражи да се $f(\lambda)$ сведе на предњи крај a за $\lambda = +1$, а задњи крај b за $\lambda = -1$, треба да је

$$u + v = a, \quad u - v = b,$$

па се из $a < b$ добија да треба да је $v < 0$.

Други случај: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$; рачунски представник размака (a, b) је

$$(5) \qquad f(\lambda) = u + \lambda v,$$

где је

$$u = a, \quad v = b - a,$$

а параметарска амплитуда је размак $(0, 1)$. Тада је

$$a = u, \quad b = v + u,$$

што показује да су крајеви размака (a, b) несиметрични наспрам вредности u и то тако да се та вредност поклапа са једним крајем тога размака. Један ма који број садржан у размаку (a, b) добија се кад се предњем крају размака дода или од њега одузме један део дужине размака.

Кад се тражи да се $f(\lambda)$ сведе на предњи крај a размака (a, b) за $\lambda = 0$, а на задњи крај b за $\lambda = 1$, треба да је

$$u = a, \quad u + v = b,$$

из чега се, према $a < b$, добија да је $v > 0$.

Кад се тражи да се $f(\lambda)$ сведе на предњи крај a за $\lambda = 1$, а на задњу крај b за $\lambda = 0$, треба да је

$$u + v = a, \quad u = b$$

из чега се, према $a < b$, добија да је $v < 0$.

Облике функције $f(\lambda)$ из горња два случаја, због њихове простоте и лакоће да се са њима рачуна, сматраћемо за *нормалне рачунске представнике* размака (a, b) и то:

1° функцију

$$f(\lambda) = u + \lambda v \qquad \left(u = \frac{b+a}{2}, \quad v = \frac{b-a}{2}\right),$$

са параметарским размаком $(-1, +1)$ назваћемо ***симетричким***, а

2° функцију

$$f(\lambda) = u + \lambda v, \quad (u = a, \quad v = b - a),$$

са параметарским размаком $(0, +1)$ назваћемо ***асиметричким*** нормалним представником размака (a, b).

У овоме што следује биће увек са ω симболички означен један број који лежи између -1 и $+1$, а са ϑ један број који лежи између 0 и 1. Симетрички нормални представник размака (a, b) биће тада

$$\frac{b+a}{2} + \omega \frac{b-a}{2}, \tag{6}$$

а несиметрички

$$a + \vartheta(b - a). \tag{7}$$

У случају симетричког представника $u + \omega v$, члан u представља *средину* размака (a, b), а члан v његову *полудужину*.

У случају асиметричког представника $u + \vartheta v$, члан u представља предњи крај размака (a, b), а члан v његову *дужину*.

Кад се буде имало посла са више разних бројева ω који леже између -1 и $+1$, или више разних бројева ϑ који леже између 0 и 1, ми ћемо их разликовати запетама или сказаљкама, нпр. $\omega', \omega'', \omega''', \ldots,$ $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots;$ $\vartheta', \vartheta'', \vartheta''', \ldots,$ $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \ldots.$

Приметимо и то: да кад је a предњи, а b задњи крај размака (a, b) увек је $a < b$ и разлика $b - a$ увек је позитивна. Према томе у оба нормална облика рачунског представника размака (a, b), који су

$$u + \omega v \quad \text{и} \quad u' + \vartheta v',$$

количине v и v' увек су позитивне.

Приметимо такође и то: да је асиметрички нормални представник размака $(0, b)$ облика ϑb, а симетрички нормални представник облика $\frac{1+\omega}{2}b$.

Тако исто асиметрички нормални представник размака $(-a, +a)$ је $a(2\vartheta - 1)$, а симетрички ωa.

Кад је један број x познат са p тачних децимала, тако да је

$$x = m, a_1 a_2 \ldots a_p,$$

где је m највећи у њему садржан цео број, а a_k његова k-та децимала, број x је садржан у размаку између бројева

$$m, a_1 a_2 \ldots a_p 0 \quad \text{и} \quad m, a_1 a_2 \ldots a_p 999\ldots$$

нормални представници тог размака су:

асиметрички $\quad m, a_1 a_2 \ldots a_p 0 + \frac{\theta}{10^p},$

симетрички $\quad m, a_1 a_2 \ldots a_p 0 + \frac{5}{10^{p+1}}(1 + \omega).$

Тако нпр. казати да број 3,141 представља број π са три децимале тачне, значи казати да се број π налази у размаку између бројева 3,141 и 3,142; нормални представници тог размака су:

асиметрички $\quad 3,1410 + \vartheta \cdot 0,001,$

симетрички $\quad 3,1415 + \omega \cdot 0,0005.$

4. ТРАНСФОРМАЦИЈЕ РАЧУНСКИХ ПРЕДСТАВНИКА БРОЈНИХ РАЗМАКА

Под трансформацијом рачунског представника датог бројног размака (a, b) разуме се овај проблем:

Нека су λ и μ два промењљива параметра, $f(\lambda)$ и $\varphi(\mu)$ два рачунска представника једног истог бројног размака (a, b), а (λ_1, λ_2) и (μ_1, μ_2) размаци параметара λ и μ; каква веза постоји између тих елемената?

Пошто је

$$f(\lambda_1) = a, \quad \varphi(\mu_1) = a,$$

$$f(\lambda_2) = b, \quad \varphi(\mu_2) = b,$$

то је та веза изражена двема једначинама

$$(8) \qquad f(\lambda_1) = \varphi(\mu_1), \quad f(\lambda_2) = \varphi(\mu_2).$$

Кад су, дакле, утврђени и дати облици обеју функција f и φ, онда се из једначина (8), кад је познат размак једнога од параметара λ и μ, може одредити размак другога, јер се из (8) помоћу познатих λ_1 и λ_2 могу одредити μ_1 и μ_2 и обрнуто.

Ако су утврђене и дате једна од функција f и φ и размак те функције, нпр. функција $f(\lambda)$ и размак (λ_1, λ_2), друга је функција $\varphi(\mu)$ одређена условом да за $\mu = \mu_1$ добије вредност $f(\lambda_1)$, за $\mu = \mu_2$ вредност $f(\lambda_2)$ и да монотоно расте док μ варира од μ_1 до μ_2. У томе случају задатак, као што се види, није потпуно одређен; за функцију φ може се узети која се хоће од бескрајно многих функција које задовољавају поменуте услове.

Помоћу веза (8) може се, на тај начин, један рачунски представник датог размака (a, b) преобратити у други, другог облика, што је од важности за многе рачуне. Овде ће бити решено неколико примера те врсте.

1. *пример.* – Дат је рачунски представник размака (a, b) у облику познате функције $f(\lambda)$, са параметарским размаком (λ_1, λ_2); преобратити га у нормални симетрички облик.

Овај ће представник бити облика

$$\varphi(\omega) = u + \omega v, \quad -1 \leq \omega \leq +1,$$

а треба да буде

$$f(\lambda_1) = \varphi(-1) = u - v,$$

$$f(\lambda_2) = \varphi(+1) = u + v,$$

дакле

$$u = \frac{f(\lambda_1) + f(\lambda_2)}{2}, \quad v = \frac{f(\lambda_2) - f(\lambda_1)}{2},$$

према чему ће тражени представник бити

$$\frac{f(\lambda_2) + f(\lambda_1)}{2} + \omega \frac{f(\lambda_2) - f(\lambda_1)}{2}, \quad -1 \leq \omega \leq +1.$$

2. *пример*. – Дат је рачунски представник размака (a, b) у облику познате функције $f(\lambda)$ са параметарским размаком (λ_1, λ_2); преобратити га у нормални асиметрички облик. Овај ће бити

$$\varphi(\vartheta) = u + \vartheta v, \quad 0 \leq \vartheta \leq 1,$$

а пошто треба да буде

$$f(\lambda_1) = \varphi(0) = u,$$

$$f(\lambda_2) = \varphi(1) = u + v,$$

одакле је

$$u = f(\lambda_1) \quad v = f(\lambda_2) - f(\lambda_1),$$

то ће тражени представник бити

$$f(\lambda_1) + \vartheta[f(\lambda_2) - f(\lambda_1)], \quad 0 \leq \vartheta \leq 1.$$

3. *пример*. Преобратити симетрички нормални облик

$$f(\omega) = u + \omega v, \quad (-1 \leq \omega \leq +1)$$

у асиметрички нормални облик

$$\varphi(\vartheta) = u' + \vartheta v', \quad 0 \leq \vartheta \leq 1,$$

за један исти бројни размак (a, b).

Пошто треба да буде

$$f(-1) = \varphi(0), \quad \text{тј.} \quad u - v = u',$$

$$f(+1) = \varphi(1), \quad \text{тј.} \quad u + v = u' + v',$$

то је

$$u' = u - v, \quad v' = 2v,$$

па ће, дакле, тражени представник бити

$$u - v + 2\vartheta v, \quad (0 \leq \vartheta \leq 1).$$

4. *пример*. – Преобратити асиметрички нормални облик

$$f(\vartheta) = u + \vartheta v, \quad (0 \leq \vartheta \leq 1)$$

у симетрички

$$\varphi(\omega) = u' + \omega v', \quad (-1 \leq \omega \leq +1).$$

Пошто треба да буде

$$f(0) = \varphi(-1) \quad \text{тј.} \quad u = u' - v',$$

$$f(1) = \varphi(+1) \quad \text{тј.} \quad u + v = u' + v',$$

одакле је

$$u' = u + \frac{v}{2}, \quad v' = \frac{v}{2},$$

то ће тражени представник бити

$$u + \frac{v}{2} + \omega\frac{v}{2}, \quad (-1 \leq \omega \leq +1).$$

5. *пример*. – Зна се из теорије факторијела да је

$$n! = \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n+\frac{\vartheta'}{12n}},$$

где је ϑ' један број који, ма какво било позитивно n, лежи између 0 и 1; наћи асиметрички нормални представник за $n!$.

Ако се, краткоће ради, стави да је

$$\sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} = N,$$

биће

$$n! = Ne^{\frac{\vartheta'}{12n}}.$$

Узевши да је

$$f(\lambda) = Ne^{\frac{\lambda}{12n}}, \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

$$\varphi(\vartheta) = u + \vartheta v, \quad (0 \leq \vartheta \leq 1),$$

треба да је

$$f(0) = \varphi(0) \quad \text{тј.} \quad N = u,$$

$$f(1) = \varphi(1) \quad \text{тј.} \quad Ne^{\frac{1}{12n}} = u + v,$$

одакле је

$$u = N, \quad v = (e^{\frac{1}{12n}} - 1)N,$$

па ће, дакле, тражени представник бити

$$N[1 + \vartheta(e^{\frac{1}{12n}} - 1)], \quad (0 \leq \vartheta \leq 1).$$

6. *пример*. – Зна се да ако збир катета једног правоуглог троугла износи s, дужина хипотенузе увек лежи између $\frac{s}{\sqrt{2}}$ и s. Симетрички нормални представник интервала хипотенузе биће, дакле

$$c = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)s + \frac{\omega}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)s, \quad \text{тј.}$$

$$c = 0{,}8534 \cdot s + 0{,}1435 \cdot \omega \cdot s,$$

а асиметрички ће бити

$$c = \frac{s}{\sqrt{2}} + \vartheta\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)s, \quad \text{тј.}$$

$$c = 0{,}7071 \cdot s + 0{,}2929 \cdot \vartheta \cdot s.$$

5. ФУНКЦИЈА БРОЈНОГ РАЗМАКА

Важност и интерес рачунских представника бројних размака леже у томе *што се помоћу њих може са размацима рачунати као и са обичним бројевима.*

Ако се нпр. размак (x, y) означи са z, тако да је симболички

$$z = (x, y),$$

може се формирати квадрат, куб, логаритам, синус и уопште једна ма каква функција тога размака. Она ће бити један известан размак

$$Z = f(z) = (X, Y),$$

који ће такође имати свој рачунски представник. Веза између размака z и $f(z)$, тј. Z састоји се у томе што ће крајеви X, Y, размака Z зависити на један нарочити начин од крајева x и y размака z. Та је веза овакве врсте:

Нека је $z = (x, y)$ један дати бројни размак, а $f(z)$ дата функција. Означимо са M највећу, а са N најмању вредност коју добија функција $f(z)$ док z варира од x до y. Очевидно је да ће $f(z)$ бити један бројни размак чији је предњи крај N, а задњи крај M.

Тај ће размак имати, као симетрички нормални представник, израз

$$Z = f(z) = \frac{M + N}{2} + \omega\frac{M - N}{2},$$

а као асиметрички нормални представник, израз

$$Z = f(z) = N + \vartheta(M - N).$$

Исти је размак цео садржан у једноме пространијем размаку Z' чији је предњи крај једна ма која доња граница N' вредности $f(z)$ кад

z варира од x до y, а M' једна ма која горња граница за те вредности. Размак Z је, дакле, цео садржан у једном размаку Z', чији су нормални представници

$$Z' = \frac{M'+N'}{2} + \omega' \frac{M'-N'}{2},$$

$$Z' = N' + \vartheta'(M'-N').$$

Тако одређен размак Z' зваћемо једном *горњом границом* размака Z: то је један размак шири од размака Z и који обухвата овај, тј. садржи га као један свој део.

У многим проблемима, ако се не може наћи тачан размак Z, од интереса и од користи је имати бар једну његову горњу границу Z', пошто се и за размак Z' може тврдити да обухвата уочену вредност $f(z)$ коју обухвата и размак Z.

У случајевима кад је $f(z)$ каква монотоно растућа функција променљиве z у размаку (x, y) биће

$$N = f(x), \quad M = f(y).$$

Кад је то монотоно опадајућа функција у размаку (x, y) биће

$$N = f(y), \quad M = f(x).$$

Кад ни једно ни друго није случај, и ако $f(z)$ има за вредности z у размаку (x, y) максимума који су већи од обеју вредности $f(x)$ и $f(y)$ онда за M треба узети највећи од тих максимума; ако $f(z)$ има у размаку (x, y) минимума који су мањи од обеју вредности $f(x)$ и $f(y)$, онда за N треба узети најмањи од тих минимума.

1. *пример. – Квадрат једног размака.*

Нека је нормални асиметрички представник једног размака

$$z = u + \vartheta v;$$

тражи се

$$z^2 = (u + \vartheta v)^2.$$

Пошто је v увек позитивно, то је

$$N = u^2 \quad M = (u+v)^2, \quad M - N = v^2 + 2uv$$

па дакле

$$z^2 = u^2 + \vartheta'(v^2 + 2uv).$$

Кад би размак z био дат својим симетричким представником

$$z = u + \omega v,$$

пошто је v позитивно, било би

$$z^2 = (u + \omega v)^2, \quad N = (u - v)^2, \quad M = (u + v)^2,$$

$$M - N = 4uv, \quad M + N = 2(u^2 + v^2),$$

и према томе би било

$$z^2 = (u^2 + v^2) + 2\omega uv.$$

2. *пример. Куб једног размака.*

Нека је

$$z = u + \vartheta v,$$

па се тражи

$$z^3 = (u + \vartheta v)^3.$$

Биће

$$N = u^3, \quad M = (u + v)^3, \quad M - N = 3u^2 v + 3uv^2 + v^3$$

и према томе

$$z^3 = u^3 + \vartheta'(3u^2 v + 3uv^2 + v^3).$$

Кад је размак z дат својим представником

$$z = u + \omega v, \text{ тако да је } z^3 = (u + \omega v)^3,$$

биће

$$N = (u - v)^3, \quad M = (u + v)^3,$$

$$M - N = 6u^2 v + 2v^3, \quad M + N = 2u^3 + 6uv^2,$$

и према томе

$$z^3 = (u^3 + 3uv^2) + \omega'(v^3 + 3u^2 v).$$

3. *пример. – Логаритам једног размака.*

Нека је

$$z = u + \vartheta v, \quad \text{где је} \quad u > 0, \quad v > 0,$$

па се тражи

$$\log z = \log(u + \vartheta v).$$

Биће

$$N = \log u, \quad M = \log(u + v), \quad M - N = \log\left(1 + \frac{v}{u}\right)$$

и према томе

$$\log z = \log u + \vartheta' \log\left(1 + \frac{v}{u}\right).$$

4. *пример.* – Нека је

$$z = u + \vartheta v, \quad \text{па се тражи} \quad e^{z} = e^{u+\vartheta v}.$$

Биће

$$N = e^{u}, \quad M = e^{u+v}, \quad M - N = e^{u}(e^{v} - 1),$$

па дакле

$$e^{z} = e^{u} + \vartheta' e^{u}(e^{v} - 1).$$

5. *пример.* – Уопште, нека је $f(z)$ једна функција која монотоно расте кад z расте у посматраном размаку, и нека је

$$z = u + \vartheta v, \quad \text{па се тражи} \quad f(z) = f(u + \vartheta v).$$

Биће

$$N = f(u), \quad M = f(u+v), \quad M - N = f(u+v) - f(u),$$

па дакле

$$f(z) = f(u) + \vartheta'[f(u+v) - f(u)].$$

На исти би се начин имало $f(u + \vartheta v)$ и у случајевима ако је $f(z)$ функција која монотоно опада кад z расте у посматраном размаку.

6. ФУНКЦИЈА ВИШЕ БРОЈНИХ РАЗМАКА

Нека су

$$z_1 = (x_1, y_1) \quad \text{и} \quad z_2 = (x_2, y_2)$$

два дата размака, а $f(z_1, z_2)$ дата функција двеју променљивих количина. Означимо са N и M најмању и највећу вредност коју добија функција $f(z_1, z_2)$ кад z_1 варира од x_1 до y_1, а z_2 од x_2 до y_2. Функција

$$Z = f(z_1, z_2)$$

двају размака z_1 и z_2 биће један размак који ће имати, као свој асиметрички нормални представник, израз

$$Z = f(z_1, z_2) = N + \vartheta(M - N).$$

Кад су размаци z_1 и z_2 и сами дати својим асиметричким нормалним представницима

$$z_1 = u_1 + \vartheta_1 v_1, \quad z_2 = u_2 + \vartheta_2 v_2$$

биће

$$x_1 = u_1, \quad y_1 = u_1 + v_1, \quad x_2 = u_2, \quad y_2 = u_2 + v_2.$$

У случајевима, дакле, кад је $f(z_1, z_2)$ монотоно растућа функција променљивих z_1 и z_2 у размацима (x_1, y_1) и (x_2, y_2), биће

$$N = f(x_1, x_2) = f(u_1, u_2), \quad M = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = f(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

и према томе ће асиметрички представник размака Z бити

$$Z = f(z_1, z_2) = f(u_1, u_2) + \vartheta[f(u_1 + v_1, u_2 + v_2) - f(u_1, u_2)].$$

У случајевима кад је f монотоно опадајућа функција променљивих z_1 и z_2 у истим размацима, биће

$$N = f(y_1, y_2) = f(u_1 + v_1, u_2 + v_2), \quad M = f(x_1, x_2) = f(u_1, u_2)$$

и према томе је асиметрички представник размака Z

$$Z = f(z_1, z_2) = f(u_1 + v_1, u_2 + v_2) + \vartheta[f(u_1, u_2) - f(u_1 + v_1, u_2 + v_2)].$$

Исти је размак цео садржан у једном пространијем размаку

$$Z' = f(N', M'),$$

где су N' и M' једна доња и једна горња граница вредности $f(z_1, z_2)$ кад се z_1 и z_2 мењају у границама својих одговарајућих размака (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Размак Z има за асиметрички нормални представник израз

$$Z' = N' + \vartheta'(M' - N'),$$

и биће једна горња граница размака Z, тј. један размак шири од Z, а за који се такође може тврдити да обухвата вредност $f(z_1, z_2)$ коју обухвата и размак Z.

1. *пример.* – Нека је

$$z_1 = u_1 + \vartheta_1 v_1, \quad z_2 = u_2 + \vartheta_2 v_2,$$

па се тражи размак

$$Z = z_1 + z_2.$$

Биће

$$N = u_1 + u_2, \quad M = u_1 + u_2 + v_1 + v_2,$$

па дакле

$$Z = (u_1 + u_2) + \vartheta'(v_1 + v_2).$$

2. *пример.* – Тражи се размак

$$Z = z_1 z_2;$$

пошто је

$$N = u_1 u_2, \qquad M = (u_1 + v_1)(u_2 + v_2),$$

биће

$$Z = u_1 u_2 + \vartheta'(u_1 v_2 + u_2 v_1 + v_1 v_2).$$

3. *пример*. – Тражи се размак

$$Z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2};$$

налази се да је

$$Z = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} + \vartheta'\left[\sqrt{(u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2} - \sqrt{u_1^2 + v_1^2}\right].$$

Исто се тако одређује и дата функција n бројних размака

$$\begin{aligned} z_1 &= u_1 + \vartheta_1 v_1, \\ z_2 &= u_2 + \vartheta_2 v_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ z_n &= u_n + \vartheta_n v_n. \end{aligned}$$

Бројеви N и M су тада најмања и највећа вредност коју добија функција f кад се тачка $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ у хиперпростору од n димензија креће тако да свака променљива z_k остаје у своме размаку одређеном одговарајућим својим рачунским представником.

Појам *горње границе* за размак Z исти је као и онај за функције двеју променљивих.

7. СИСТЕМ ФУНКЦИЈА БРОЈНИХ РАЗМАКА

Нека су

$$z_1 = (x_1, y_1), \dots, z_n = (x_n, y_n)$$

n датих размака, а

$$f_1(z_1, \dots, z_n), \dots, f_p(z_1, \dots, z_n)$$

систем од p датих функција тих размака. Свака од ових функција f_k имаће свој размак Z_k у коме ће варирати за време док свака променљива z_i варира у своме размаку (x_i, y_i).

Означимо са N_k и M_k најмању и највећу вредност коју добија функција f_k кад све променљиве $z_1, \dots, z_n$ варирају у својим размацима. Асиметрички нормални представници система $f_1, \dots, f_p$ биће изрази:

$$\begin{aligned} Z_1 &= f_1(z_1,\ldots,z_n) = N_1 + \vartheta_1(M_1 - N_1), \\ Z_2 &= f_2(z_1,\ldots,z_n) = N_2 + \vartheta_2(M_2 - N_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_p &= f_p(z_1,\ldots,z_n) = N_p + \vartheta_p(M_p - N_p). \end{aligned}$$

Кад се знају крајеви x_i, y_i размака z_i, биће

$$z_1 = u_1 + \vartheta_1' v_1, \quad z_2 = u_2 + \vartheta_2' v_2, \ldots,$$

где су u_i, v_i одређени помоћу x_i, y_i једначинама

$$x_i = u_i, \quad y_i = u_i + v_i.$$

Кад је која од функција f_k монотоно растућа или опадајућа функција, одговарајуће вредности N_k и M_k одређују се на напред показани начин.

На место тачних размака $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$ у многим случајевима довољно је познавати по једну њихову горњу границу, тј. по један размак у коме је садржан одговарајући тачан размак Z_k. Таква је једна горња граница за размак Z_k размак

$$Z_k' = N_k' + \vartheta_k''(M_k' - N_k'),$$

где N_k' и M_k' означују једну доњу и једну горњу границу функције f_k за време док свака промењљива z_i варира у своме размаку (x_i, y_i), тј. док ϑ_i' у изразу

$$z_i = u_i + \vartheta_i' v_i$$

варира од 0 до 1.

8. СТАЛНИ И ПРОМЕНЉИВИ БРОЈНИ РАЗМАЦИ

Као што се види из овога што претходи, елементарне рачунске радње, које се врше са *тачно одређеним вредностима*, могу се вршити и са *бројним размацима*. Другим речима, рачунске радње које се могу вршити са *тачкама* на реалној бројној линији, могу се вршити и са *сегментима* те линије. Разлика је та што ће, извршене са тачкама, оне дати опет бројне тачке, а вршене са сегментима оне ће дати као резултат бројне сегменте. *Рачунски представници бројних размака преображају двоструке неједначине у једначине*; са таквим се неједначинама, преко њихових рачунских представника, *могу вршити све елементарне рачунске радње које се врше са једначинама.*

Кад је размак, са којим се ради *сталан*, тј. кад су му крајеви непромењљиви и резултат извршених рачунских радња биће један размак са непромењивим крајевима. А кад је првобитни размак *промењив* (промењиви крајеви) и резултат ће дати један промењив размак. Тако нпр. квадрат сталног размака

$$z = 2 + 3\vartheta,$$

такође је сталан размак

$$z^2 = 4 + 21\vartheta';$$

квадрат промењивог размака

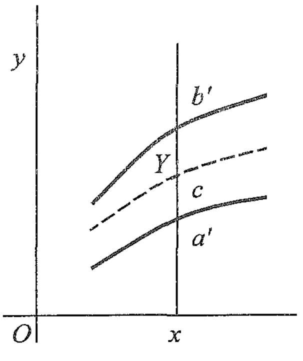
$$z = x + \vartheta(1 + x)$$

је промењив размак

$$z^2 = x^2 + \vartheta'(3x^2 + 4x + 1).$$

Нека су x и y две промењиве количине везане међу собом тако, да кад се једна од њих буде мењала, и друга се мења на начин одређен променама прве. Кад се нпр. промењива x буде мењала тако да јој вредности непрестано остају у једноме бројном размаку X, вредности y остаће у једноме такође одређеном размаку Y. Из дате везе између промењивих x и y добићемо, на напред наведени начин, и везу између размака X и Y тј. везу између њихових предњих и задњих крајева.

У применама рачуна са бројним размацима често се наилази на случајеве овакве врсте: веза између промењивих x и y није одређена у толикој мери да се свакој вредности x може одредити одговарајућа вредност y, али се за сваку вредност x може одредити по један размак Y, за који се поуздано може тврдити да ће одговарајућа вредност y бити у њему садржана. Мењањем промењиве x мењаће се и одговарајући размак Y. Ако се на осовини Ox обележи вредност x, а на управној у тачки x се пренесу крајеви a' и b' размака Y, па се пусти да се x мења, ти ће крајеви описати сваки по једну линију у равни, а сам размак Y описаће једну *област* ограничену тим двема линијама, које су јој њена *доња и горња гранична линија.* Геометријско место средина c размака Y, *средња линија области*, даће овлашну слику о вези између промењивих x и y. Слика ће бити утолико мање овлашна, уколико је област ужа, тј. уколико је мање одстојање граничних линија од средње линије, или, што је исто, уколико су мање амплитуде могућих осцилација промењиве y око средње линије; под *осцилацијом* око средње линије (изнад и испод ове) има се разумети растојање $cb' = a'c$.



На тај начин, у случајевима кад не постоји или се не може наћи *тачна* веза између промењљивих x и y, дешава се да је могуће одредити једну *област варијација* промењљиве y која чини могућом одредбу бројног размака у коме ће насигурно бити садржана неодређена вредност y за једну ма коју тачно дату вредност x. Другим речима, могуће је одредити за x једну средњу линију и осцилације те промењљиве око ове средње линије.

Тако нпр. између координата

$$x = \alpha + \beta \quad \text{и} \quad y = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

једне промењљиве тачке P, где су α и β два промењљива позитивна параметра, не постоји никаква тачна веза, тј. тачка P не описује никакву одређену линију, мада се при мењању количине x уопште мења и количина y. Али пошто је за позитивне α и β увек

$$\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leq \alpha + \beta,$$

то се тачка, чије су координате x и y, увек налази у области између двеју правих

$$y = \frac{x}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad y = x.$$

Средња линија је права

$$y = 0{,}8534x,$$

а осцилација око ове је $0{,}1464x$.

Кад је једна непозната количина, задовољавајући дати скуп (D) погодаба, као стална, одређена у облику једнога бројног размака који је садржи, или као промењљива, одређена у облику њене области варијација, могу се десити овакви случајеви:

1° Добивени бројни размак је *пространији* но што захтева сама природа ствари, тј. његов предњи или задњи крај нису стварно достигнути ни у коме појединачном случају, који је у складу са погодбама (D). Другим речима, нађени размак је само једна горња граница онога размака чији је један или други крај одиста достигнут у каквом специјалном случају који није у супротности са погодбама (D).

Тако нпр. кад се скуп (D) састоји у погодби да су a и b позитивни, вредност $\sqrt{a^2 + b^2}$ увек лежи између $\frac{1}{2}(a+b)$ и $\frac{3}{2}(a+b)$, али ниједна од ових граница није ни у ком случају достигнута. Иста вредност лежи такође и у размаку између бројева $\frac{1}{2}(a+b)$ и $(a+b)$, а ова друга граница је достигнута у специјалном случају кад је $b=0$, али прва није никад. Тако исто, иста вредност лежи и између граница $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ и $\frac{3}{2}(a+b)$; предњи крај тога размака достигнут је у специјалном случају кад је $a=b$, али задњи није никад. Размак од $\frac{1}{2}(a+b)$ до $\frac{3}{2}(a+b)$ је, дакле, само једна горња граница ужих размака

$$\left(\frac{a+b}{2}, \quad a+b\right) \text{ и } \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}, \quad \frac{3}{2}(a+b)\right),$$

који такође одговарају погодби (D), али су им предњи или задњи крај стварно достигнути у појединим специјалним случајевима.

2° Добивени размак је *најужи* између свију оних који су у складу са погодбама (D); тј. оба његова краја су стварно достигнута у појединим специјалним случајевима.

Тако се нпр. налази да вредност $\sqrt{a^2+b^2}$, кад су a и b позитивни бројеви, увек лежи у размаку $\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}, a+b\right)$; и један и други крај тога размака стварно су достигнути, предњи крај кад је $a=b$, а задњи кад је $b=0$. Тај је размак одиста најужи међу онима који одговарају погодбама; кад би се још више сузио, он не би више обухватао ова два специјална случаја, тј. не би одговарао општем случају.

3° Добивена област варијације једне непознате y, зависне од друге променљиве x, је *шира* но што захтева природа задатка, тј. њена доња ни горња гранична линија нису стварно достигнуте ни у ком случају који је у складу са погодбама (D). Нађена област тада је само једна горња граница једне уже области чија је једна од граничних линија стварно достигнута у једном одређеном специјалном случају.

Тако нпр. тачка P, чије су координате позитивни бројеви x и $\sqrt{1+x^2}$, увек се налази између двеју правих линија

$$y=\frac{1}{2}(1+x) \quad \text{и} \quad y=\frac{3}{2}(1+x),$$

али ниједна од тих правих није никад достигнута. Иста тачка се налази и између правих

$$y=\frac{1}{2}(1+x) \quad \text{и} \quad y=1+x;$$

горња гранична права достигнута је у тачки $x = 0$, $y = 1$. Тако исто тачка P лежи и између двеју правих

$$y = \frac{1+x}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad y = 1+x;$$

и доња гранична права достигнута је у тачки $x = 1$, $y = \sqrt{2}$.

4° Добивена област варијација је *најужа* између свију које су у складу са погодбама (D), тј. обе њене граничне линије могу стварно бити достигнуте у појединим случајевима.

Тако се нпр. налази да се тачка P увек налази између двеју правих

$$y = \frac{1+x}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad y = 1+x;$$

обе граничне линије су стварно достигнуте у појединим тачкама P: доња тачком $x = 1$, $y = \sqrt{2}$, а горња тачком $x = 0$, $y = 1$. Област између тих правих, са десне стране осовине Oy, најужа је међу свима другима; кад би је ма и најмање сузили, она не би више обухватала горе поменуте две специјалне тачке, а које ипак задовољавају погодбе задатка.

По себи се разуме да је увек пробитачно познавати што уже границе између којих остаје непозната количина, јер уколико су ове уже, утолико је мање неодређености у познавању те количине. Најпробитачнији, најповољнији је *најужи* могући размак за ту количину, који је до те мере сужен да се више не може сужавати а да се не изгуби његова генералност, тј. да он тиме не престане обухватати све могуће случајеве који су у складу са датим погодбама (D).

Такав најужи могући размак представља *најоштрије границе* за варијације те количине; он, међу осталим ширим размацима, има ту карактерну одлику да се непозната, задовољавајући погодбе (D), не само непрестано налази у томе размаку, већ она, у одређеним специјалним случајевима, и достиже границе тог размака.

Исто тако најужа могућа област варијација за непознату количину представља најоштрије границе за те варијације; такав размак даје минимум неодређености за непознату променљиву количину.

Из досадашњег излагања види се да рачунање са бројним размацима има једну одлику која му у извесном погледу даје и неку превагу над обичним рачунањем са бројевима: то је *апсолутна истинитост резултата до којих оно доводи.* Ма колико то на први поглед изгледало парадоксално, резултати рачунања са размацима изражавају један апсолутно истинит факт, док су резултати рачунања са бројевима само више или мање тачни, и само у изузетним случајевима апсолутно тачни. Казати нпр. да је $\sqrt{2} = 1,4142$ није тачно; казати да вредност $\sqrt{2}$ лежи између бројева 1,4141 и 1,4143 тачно је. И може се, шта више, тврдити да, док се при рачунању са бројевима, из потпуно одређених и тачних односа долази до нетачних резултата, дотле се у рачуну са размацима из непотпуно одређених односа долази до разултата којима се не може порицати апсолутна истинитост.

9. БРОЈНИ РАЗМАЦИ У АРИТМЕТИЦИ И АЛГЕБРИ

Аритметика и алгебра су области матеметике у којима се ради са посебним бројевима, прецизираним или општим. И у једној и у другој области дешава се да:

1° или су и сами подаци дати у облику бројних размака или бројних области, па се и резултат рачуна добија у таквом истом облику;

2° или су подаци дати у облику тачних (прецизираних или општих) бројева, али се резултат, због техничких рачунских тешкоћа, или због тога што се не тражи велика тачност, већ само приближна вредност или овлашан појам о величини непознате, резултат добија у облику размака или области;

3° или, по самој својој природи, задатак има као своје тачно решење, не један одређен (прецизиран или општи) број, већ један бројни размак или једну бројну област;

4° или је, због недовољности података, задатак непотпуно одређен, али се може утврдити један размак у коме се непозната, поред све своје неодређености, ипак мора налазити.

Тако на пример, кад се израчунава квадратни корен из једнога броја који није дат тачно, већ једним размаком у коме се он налази, добиће се и један размак у коме се корен мора налазити.

Када се помоћу логаритамских таблица израчунава вредност једнога израза у коме фигуришу дати бројеви, резултат неће уопште бити тачан број, већ ће бити израчунат само са извесним бројем првих децимала тачних, тј. биће одређен само један размак у коме се та вредност мора налазити.

Кад се пита за које ће вредности y квадратна једначина

$$x^2 - 2x + y^2 = 0,$$

решена по x, имати своје корене реалне, тачно решење задатка састоји се у овоме: за ма коју вредност y садржану у размаку $(-1, +1)$.

Непотпуно одређени задатак да се израчуна логаритам дијагонале *c*, кад се зна логаритам збира *s* катета, решен је тиме што се зна да се $\log c$ увек налази у размаку

$$\left(\log s - \frac{1}{2}\log 2, \log s\right).$$

Овде ће бити наведено неколико задатака такве врсте, који имају честу употребу и у којима се непозната аритметичка или алгебарска количина добија у облику бројног размака.

Трином другог степена

На размаке, као решења задатка, наилази се уопште у задацима у којима се траже услови за реалност, позитивност или негативност нула датог полинома; или услови да би се његова вредност, за вредности независно промењиве садржане у датом размаку, и сама налазила у једноме, тако исто, датом размаку; или услови да би реалне нуле полинома биле садржане у истом размаку, итд. Тако, кад коефицијенти полинома садрже какав промењив параметар α, познате теореме из теорије алгебарских једначина, као што су Rolle-ова, Sturm-ова, Descartes-ова, Fourier-ова и друге дају као решења задатака такве врсте, размаке у којима треба да се налази вредност параметра.

За најпростији случај, за полином другог степена, елементарна теорија квадратне једначине непосредно даје решења таквих задатака. Зна се нпр. да ће трином

$$ax^2 + 2bx + c \tag{9}$$

имати обе своје нуле реалне и супротно означене, кад је

$$ac < 0;$$

да би то био случај са триномом

$$(\alpha - 5)x^2 - 4\alpha x + \alpha - 2,$$

потребно је и довољно да се вредност α налази у размаку (2,5), тј. да је

$$\alpha = 2 + 3\vartheta, \qquad 0 \leq \vartheta \leq 1.$$

Да би трином био позитиван за све вредности *x*, потребно је и довољно да буде

$$b^2 - ac < 0 \qquad a > 0;$$

да би то био случај са триномом

$$(4-\alpha)x^2-3x+\alpha+4$$

потребно је и довољно да се α налази у размаку $\left(-\frac{\sqrt{55}}{2},+\frac{\sqrt{55}}{2}\right)$, тј. да је

$$\alpha=\omega\frac{\sqrt{55}}{2}, \qquad -1\leq\omega\leq 1.$$

На такав се задатак своди и овај: одредити максимум и минимум линеарне функције

$$f(x,y)=ax+by+c, \tag{10}$$

када су променљиве x и y везане квадратном релацијом

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0. \tag{11}$$

Ако се стави да је

$$f(x,y)=\alpha,$$

елиминацијом једне променљиве, нпр. y, добија се једна квадратна једначина по x

$$Mx^2+2Nx+P=0, \tag{12}$$

где је коефицијент P полином другог степена по параметру α, коефицијенат N линеарна функција од α, а коефицијенат M независан од α. Задатак се тада своди на одредбу размака, у коме треба да се налази α да би вредности променљиве x, одређене једначином (12) биле реалне; предњи крај тога размака представљаће минимум, а задњи крај максимум функције $f(x, y)$. Услов за то је да буде

$$N^2-MP>0, \quad M>0, \tag{13}$$

па пошто је N^2-MP полином другог степена по параметру α, то је задатак сведен на малопређашњи.

Тако нпр. кад се тражи максимум и минимум функције

$$f(x,y)=y-2x,$$

при чему су променљиве x и y везане релацијом

$$36x^2+16y^2-9=0,$$

елиминација променљиве y доводи до квадратне једначине

$$100x^2 + 64\alpha x + 16\alpha^2 - 9 = 0.$$

Услови (13) своде се на

$$(5 + 4\alpha)(5 - 4\alpha) > 0,$$

што значи да α треба да се налази у размаку $\left(-\frac{5}{4}, +\frac{5}{4}\right)$. Минимум функције $f(x, y)$ је, дакле $-\frac{5}{4}$, а њен максимум $\frac{5}{4}$; за ма какву реалну вредност x биће

$$f(x, y) = \frac{5}{4}\omega, \qquad -1 \leq \omega \leq 1.$$

Овакав начин одређивања максимума и минимума функција, који не захтева употребу извода као обичан начин за то одређивање, није везан само за полиноме првог и другог степена. Кад год има да се одреди максимум или минимум једне функције

$$f(x, y, z, ...)$$

у којој су променљиве $x, y, z, ...$ везане датим релацијама чији је број за јединицу мањи од броја тих променљивих, треба функцију f означити са α, па из скупа једначина елиминисати све променљиве осим α и још једне од њих, нпр. x. Ако је

$$\text{(14)} \qquad \varphi(x, \alpha) = 0$$

резултат елиминације, задатак максимума и минимума своди се на одређивање тачних размака у којима треба да се налази вредност α да би корени једначине (14) били реални. Ако је (α_1, α_2) такав један размак, број α_1 је један минимум, а број α_2 један максимум функције f са датим везама. Сваки такав размак даће по један минимум и по један максимум функције.

На сличан се начин решава и задатак: за које ће вредности x трином (9) непрестано имати вредности садржане у датом размаку (A, B)?

Тражи се да буде

$$A \leq ax^2 + 2bx + c \leq B,$$

тј. да је у исто време

$$\text{(15)} \qquad \begin{aligned} ax^2 + 2bx + c - A &> 0 \\ ax^2 + 2bx + c - B &< 0. \end{aligned}$$

Према знацима количина

$$a, \quad b^2 - a(c-A), \quad b^2 - a(c-B)$$

једна од неједначина (15) биће задовољена за вредности x које се налазе у једном извесном размаку (p, q) који може бити састављен и из два размака, а друга за вредности x које се налазе у једном извесном размаку (p', q'). Услове (15) задовољаваће само вредности x садржане у заједничком делу размака (p, q) и (p', q'); тражене вредности x јесу оне које се налазе у томе заједничком размаку.

Тако нпр. да би се вредност тринома

$$x^2 - 14x + 50$$

налазила у размаку (5, 26), потребно је и довољно да буде у исти мах

$$x^2 - 14x + 45 > 0,$$
$$x^2 - 14x + 24 < 0.$$

Прва се неједначина може написати у облику

$$(x-5)(x-9) > 0$$

и задовољена је за вредности x које су садржане било у размаку $(-\infty, 5)$, било у размаку $(9, +\infty)$.

Друга неједначина може се написати у облику

$$(x-2)(x-12) < 0$$

и задовољена је за све вредности x садржане у размаку (2,12). Заједнички део размака (p, q) и (p', q') су два размака (2,5) и (9,12); тражене вредности x су оне садржане било у првом, било у другом од та два размака.

Кад је дат трином трећег степена, увек сводљив на облик

$$x^3 + px + q, \tag{16}$$

потребан и довољан услов за реалност његових нула је исказан неједначином

$$4p^3 + 27q^2 < 0. \tag{17}$$

Кад год је лева страна неједначине (17) какав трином другог степена по једном параметру α, услов реалности се своди на задатак горње врсте и решење му се састоји у одредби размака за тај параметар.

Слично се решење добива и у случају полинома четвртог степена.

Корен реалног броја

Нека је x такав један број да је $1+x > 0$. Према биномном обрасцу очевидно је

$$(1+x)^n \geq 1+nx,$$

где је једнакост постигнута или за $x = 0$, или за $n = 0$, или за $n = 1$. Ставивши да је $x = \frac{h}{n}$, добија се да је

$$\left(1+\frac{h}{n}\right)^n \geq 1+h,$$

па, дакле,

$$1 \leq \sqrt[n]{1+h} \leq 1+\frac{h}{n} \tag{18}$$

за ма какав број $h > 0$.

Нека је сад z један ма који број већи од јединице, па се из (18), ставивши да је $1 + h = z$ добија да је

$$1 \leq \sqrt[n]{z} \leq 1+\frac{z-1}{n},$$

па, дакле,

$$\sqrt[n]{z} \leq 1+\frac{\vartheta}{n}(z-1). \tag{19}$$

Ако је, пак, z какав позитиван број мањи од јединице, узевши у неједначини (18) реципрочне вредности (чиме неједначина мења смисао), добија се

$$\frac{1}{1+\frac{h}{n}} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{1+h}} \leq 1,$$

па ако се стави да је

$$\frac{1}{1+h} = z < 1, \quad \text{одакле је} \quad h = \frac{1-z}{z},$$

добија се да је

$$\frac{1}{1+\frac{1-z}{nz}} \leq \sqrt[n]{z} \leq 1$$

према чему је

(20) $$\sqrt[n]{z} = 1 - \frac{1-z}{1+(n-1)z}\vartheta.$$

Из обрасца (19) и (20) се нпр. јасно види да $\sqrt[n]{z}$ тежи јединици, кад n бескрајно расте. Обрасци су од користи за приближну одредбу n-тог корена датог броја.

Збир наизменичног опадајућег реда

То је ред

(21) $$S = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots$$

у коме су чланови u_k наизменце позитивни и негативни, а по апсолутној вредности је $u_k < u_{k-1}$, тежећи нули кад k бескрајно расте.

Ако се стави да је

$$S_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots \pm u_n,$$

зна се да је

$$S_{2k+1} < S < S_{2k}$$

за сваку вредност $k = 0, 1, 2, \dots$ индекса k. Према томе је

$$S = S_{2k+1} + \vartheta(S_{2k} - S_{2k+1}),$$

а пошто је

$$S_{2k} - S_{2k+1} = u_{2k+1},$$

то је

(22) $$S = S_{2k+1} + \vartheta \cdot u_{2k+1}$$

па ма коју вредност имао индекс k. Пошто чланови реда u_k непрестано и бескрајно опадају кад индекс расте, то ће амплитуда варијација збира S непрестано и бескрајно опадати са индексом k.

Из (22) се добија образац

$$S_{2k+1} = S - \vartheta \cdot u_{2k+1},$$

који даје, у облику бројног размака, збир S_{2k+1} изражен помоћу збира S и члана u_{2k+1}.

1. *пример*. – Из обрасца

$$\frac{1}{e} = 0,36787\dots = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots$$

добија се, на горњи начин да је

$$\frac{1}{e}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{8!}-\frac{1}{9!}+\frac{\vartheta}{9!}=0,367879+\vartheta\cdot 0,000002,$$

што даје број $\frac{1}{e}$ са 5 децимала тачно.

2. *пример.* – Ако се низ простих бројева, који почиње са 5, означи са $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots,$ постоји познат образац

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_3}+\ldots=0,9069\ldots$$

Према томе, вредност збира

$$S_{2k+1}=1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_3}+\ldots-\frac{1}{p_{2k+1}}$$

налази се у размаку

$$\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{p_{2k+1}},\ \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)$$

тако да је

$$S_{2k+1}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\frac{\vartheta}{p_{2k+1}}.$$

Тако нпр. пошто је 421 прост број чији је ранг 41 у низу p_k, вредност збира

$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\ldots-\frac{1}{421}$$

износи

$$0,9046+\vartheta\cdot 0,0023.$$

Количник два збира

Нека је $a_1, a_2, \ldots, a_n$ један низ реалних бројева ма каквог знака; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ два низа реалних позитивних бројева. Означимо са N и M најмањи и највећи од бројева

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ldots,\frac{a_n}{b_n} \tag{23}$$

водећи рачуна и о њиховим знацима. Може се доказати да је увек

$$(24) \qquad \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n} = N + \vartheta(M - N).$$

Јер, ма какви били знаци бројева a_k, увек је

$$N \leq \frac{a_k}{b_k} \leq M,$$

па, дакле, и

$$N\lambda_k \leq \frac{\lambda_k a_k}{b_k} \leq M\lambda_k,$$

према чему је

$$N\lambda_k b_k \leq \lambda_k a_k \leq M\lambda_k b_k.$$

Стављајући узастопце $k = 1, 2, \ldots, n$, сабирајући тако добивене неједначине и поделивши резултат збиром

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n$$

налази се да се вредност разломка на левој страни једначине (24) налази између N и M, што доказује горње тврђење.

Узевши да је

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 1,$$

види се да је

$$(25) \qquad \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = N + \vartheta(M - N).$$

У случају два пара бројева a_1, a_2, и b_1, b_2, од којих је први ма кога знака, види се да је

$$\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = n + \vartheta(m - n),$$

где је n мањи, а m већи број $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$.

Израз на левој страни једначина (25) назива се *медијана* разломка (23); као што се види, њена се вредност израчунава у облику једног бројног размака помоћу највеће и најмање вредности тих разломака.

Од интереса је нпр. навести да се медијана двају разломака

$$n = \frac{333}{106} \quad \text{и} \quad m = \frac{22}{7},$$

а то је број

$$\frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots$$

тек у седмом децималу разликује од броја

$$\pi = 3{,}1415926...$$

тако, да се може узети да је

$$\pi = \frac{355}{113}$$

са шест децимала тачно. Тачна вредност броја π може се представити у облику

$$\pi = n + \vartheta(m - n) = \frac{333}{106} + \frac{\vartheta}{1142}.$$

Као другу примену узмимо да је

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = x, \quad \lambda_3 = x^2, ..., \quad \lambda_n = x^{n-1},$$

где изложилац n може и бескрајно расти. Ако се стави да је

$$(26) \qquad \begin{aligned} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^{n-1} &= f(x), \\ b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^{n-1} &= \varphi(x), \end{aligned}$$

где су коефицијенти a_k реални и ма каквог знака, а b_k реални и позитивни, образац (24) показује да је

$$(27) \qquad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = N + \vartheta(M - N),$$

где N означује најмањи, M највећи од бројева

$$\frac{a_0}{b_0}, \frac{a_1}{b_1}, ..., \frac{a_n}{b_n}.$$

Тако нпр. ма колика била позитивна вредност x, вредност рационалне функције

$$\frac{2 + 5x + 3x^2 + x^3}{4 + 7x + 4x^2 + 8x^3}$$

увек лежи између $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{2}$.

Однос између збира и производа

Нека је

$$a_1, a_2, ..., a_n$$

један низ позитивних бројева, па означимо да је

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n,$$

$$P = (1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)...(1 + a_n).$$

Пошто је

$$(1 + a_1)(1 + a_2) = 1 + a_1 + a_2 + a_1 a_2,$$

то је

$$(1 + a_1)(1 + a_2) > 1 + a_1 + a_2.$$

Множећи ову неједначину са $1 + a_3$, добија се

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) > (1 + a_1 + a_2)(1 + a_3) > 1 + a_1 + a_2 + a_3.$$

Продужујући и даље тако, долази се до неједначине

(28) $$P > 1 + S.$$

Са друге стране, из обрасца

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...,$$

види се да је за позитивне вредности x увек

(29) $$e^x > 1 + x,$$

па ако се на место x стављају узастопце вредности $a_1, a_2, ..., a_n$ и добивене неједначине измноже међу собом, добија се

(30) $$P < e^S,$$

па је, дакле,

$$1 + S < P < e^S,$$

што значи да је

(31) $$P = (1 + S) + \vartheta(e^S - S - 1).$$

Ставимо сада да је

$$1 + a_k = b_k,$$

$$b_1 + b_2 + ... + b_n = T,$$

$$b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_n = Q,$$

па се из (31) добија једначина

$$(32) \qquad Q = (T - n + 1) + \vartheta(e^{-n}e^T - T + n - 1),$$

која везује збир и производ ма коликога броја позитивних бројева.

Приметимо да неједначина (29) важи и за ма какав реалан број x; то се види из тога што функција

$$e^x - x - 1$$

има свој минимум за $x = 0$, и тај минимум је једнак нули, што значи да је за све реалне вредности x

$$e^x - x - 1 \geq 0.$$

У случају кад су $a_1, a_2, ..., a_n$ позитивни бројеви мањи од јединице, може се на следећи начин добити један однос збира и производа

$$S = a_1 + a_2 + ... + a_n,$$

$$Q = (1 - a_1)(1 - a_2)...(1 - a_n).$$

Пошто је

$$(1 - a_1)(1 - a_2) = 1 - (a_1 + a_2) + a_1 a_2,$$

то је

$$(1 - a_1)(1 - a_2) > 1 - (a_1 + a_2).$$

Множењем са позитивним бројем $1 - a_3$, добија се

$$(1 - a_1)(1 - a_2)(1 - a_3) > \left[1 - (a_1 + a_2)\right](1 - a_3) > 1 - (a_1 + a_2 + a_3).$$

Продужујући тако и даље, долази се до неједначине

$$(33) \qquad Q > 1 - S,$$

а пошто је $Q < 1$, то се добија да је

$$(34) \qquad 1 - S < Q < 1,$$

при чему је

$$(35) \qquad Q = (1 - S) + \vartheta S,$$

што се може написати и у облику

$$(36) \qquad Q = 1 + \lambda S,$$

где λ један број који увек лежи између -1 и 0.

Напослетку, за вредности x садржане у размаку $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, важи и следећи резултат.

Лако се уверити да је у томе размаку непрестано

$$1-2x \le e^{-2x} \le 1-x;$$

ако је, дакле, $a_1, a_2, ..., a_n$ један низ бројева садржаних у размаку $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ и ако се означи да је

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = S_n,$$

збир

$$T = e^{-2a_1} + e^{-2a_2} + ... + e^{-2a_n}$$

налазиће се у размаку

$$(n-2S_n,\ n-S_n),$$

тј. биће

$$T = n - \lambda S_n, \qquad 1 \le \lambda \le 2.$$

Тако, нека је

$$f(x) = 0$$

једна алгебарска једначина n-тог степена чији су корени $a_1, a_2, ..., a_n$ сви реални; она се подесном сменом

$$x = pz + q$$

увек може свести на једну једначину

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n = 0$$

чији ће корени $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ бити сви позитивни и мањи од $\frac{1}{2}$. Горњи резултат показује да је

$$e^{-2\beta_1} + e^{-2\beta_2} + ... + e^{-2\beta_n} = n - \frac{\lambda a_{n-1}}{a_n}, \qquad 1 \le \lambda \le 2,$$

а из тога обрасца лако је прећи на образац који ће важити за корене првобитне једначине.

Збир производа

Нека су $a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_1, b_2, ..., b_n$ два низа реалних бројева ма кога знака, па означимо да је

$$P = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n.$$

Из образаца

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}b_i^2+2P,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}b_i^2-2P,$$

добија се да је

$$P=\frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2-\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2\right].$$

Означимо

1° са N и M најмању и највећу апсолутну вредност збирова

$$a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n,$$

2° са N' и M' најмању и највећу апсолутну вредност разлика

$$a_1-b_1, a_2-b_2, \ldots, a_n-b_n,$$

па ће бити очевидно

$$\begin{aligned} &P\le\frac{n}{4}(M^2-N'^2),\\ (37)\qquad &P\ge\frac{n}{4}(N^2-M'^2). \end{aligned}$$

Збир продуката P увек се, дакле, налази у размаку означеном неједначинама (37) према чему је

$$P=\frac{n}{4}\left[N^2-M'^2+\vartheta(M^2+M'^2-N^2-N'^2)\right].$$

Знак једнакости у (37) имаће се кад је за све индексе i и j

$$a_i+b_i=a_j+b_j \quad \text{и} \quad a_i-b_i=a_j-b_j,$$

тј. кад су сви бројеви a_k међу собом једнаки, а тако исто и сви бројеви b_k.

Међутим се за P може имати једна горња граница и на следећи начин. Приметимо да израз

$$(a_1+b_1\lambda)^2+(a_2+b_2\lambda)^2+\ldots+(a_n+b_n\lambda)^2,$$

не може бити једнак нули ни за какву реалну вредност λ, пошто су му сви чланови позитивни. То значи да и квадратна једначина

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0,$$

где је

$$A = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2,$$
$$C = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2,$$
$$B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = P,$$

нема реалних корена. То показује да је

$$B^2 - AC < 0,$$

односно

$$P^2 < (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

што се назива Cauchy-ева неједначина.

Према томе и првој од неједначина (37) налази се, да се збир P увек налази у размаку

$$\left(\frac{n}{4}(M^2 - N'^2), \quad \sqrt{AC}\right).$$

Поменућемо само да је доказан и овај резултат у погледу односа између збирова A, C, P, нека су α, β, G, H четири таква позитивна броја:

1° да је $\alpha < G$, $\beta < H$,

2° да сви посматрани бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$ леже у размаку (α, G),

3° да сви посматрани бројеви $b_1, b_2, \ldots, b_n$ леже у размаку (β, H). Тада се вредност производа AC увек налазе у размаку$(P^2, \lambda P^2)$, где је

$$\lambda = \frac{(\alpha\beta + GH)^2}{4\alpha\beta GH},$$

тако да је

$$AC = \left[1 + \vartheta \frac{(\alpha\beta - GH)^2}{4\alpha\beta GH}\right] P^2.$$

Аритметичка средина

Ако се у обрасцу (24) узме да је

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 1, \quad b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1,$$

добија се да је

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = N + \vartheta(M - N),$$

где је N и M најмањи и највећи међу бројевима $a_1, a_2, ..., a_n$, што значи да се аритметичка средина једнога низа бројева увек налази у размаку између најмањег и највећег од тих бројева. Границе тога размака су достигнуте у случају кад су сви бројеви a_k међу собом једнаки, тада је $M = N$ и обе се границе сливају у једну.

Али се иста аритметичка средина може изразити као размак још на један начин; размак има ту добру страну што је ужи од малопређашњег, па дакле и пробитачнији.

Приметимо да је за ма какве реалне бројеве a и b израз

$$\frac{(a+b)+|a-b|}{2}$$

једнак већем од та два броја a и b (јер кад је $a > b$, он је једнак броју a, а кад је $a < b$ он је једнак броју b, поклапајући се са оба та броја у случају кад су они међу собом једнаки).

Кад је M највећи међу бројевима $a_1, a_2, ..., a_n$, онда је према томе за све индексе i и j

$$\frac{(a_i+a_j)+|a_i-a_j|}{2} \leq M,$$

јер је лева страна једнака већем од бројева a_i и a_j, а ниједан од њих није већи од M. Ако се у тој неједначини индекс j остави непромењен, а ставља се узастопце да је $i = 1, 2, ..., n$, па се добијене неједначине међу собом саберу, добија се да је

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i+a_j)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|a_i-a_j| \leq nM,$$

или

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i+\frac{n}{2}a_j+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|a_i-a_j| \leq nM.$$

Стављајмо сад у овој последњој неједначини узастопце $j = 1, 2, ..., n$, и саберимо добивене неједначине међу собом, па се добија да је

$$\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i+\frac{n}{2}\sum_{j=1}^{n}a_j+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_i-a_j| \leq n^2M.$$

Кад се збир од прва два збира у овиј неједначини подели са n^2, добија се аритметичка средина

$$A=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$$

бројева a_k; ако се дакле, краткоће ради, стави да је

$$(38)\qquad \frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\left|a_i-a_j\right|=R,$$

добија се да је

$$A+R\leq M,$$

тј.

$$(39)\qquad A\leq M-R$$

што даје једну горњу границу за A.

Да бисмо добили и једну доњу границу, приметимо да је за ма какве реалне бројеве a и b израз

$$\frac{(a+b)-\left|a-b\right|}{2}$$

једнак мањем од та два броја a и b. Кад је N најмањи међу бројевима $a_1, a_2, ..., a_n$, онда је, дакле, за све индексе i и j

$$\frac{(a_i+a_j)-\left|a_i-a_j\right|}{2}\geq N,$$

јер је лева страна једнака мањем од бројева a_i и a_j, а ниједан од њих није мањи од N. Из те се неједначине, на исти начин као малочас, долази до неједначине

$$A-R\geq N,$$

тј.

$$(40)\qquad A\geq N+R,$$

што даје једну доњу границу за A.

Неједначине (39) и (40) доводе тада до овог резултата.

Ако се са S *означи збир апсолутних вредности свију разлика* $a_i - a_j$ (рачунајући разлике $a_i - a_j$ и $a_j - a_i$ као различне једна од друге), *са* N *и* M *најмањи и највећи међу бројевима* a_k, *аритметичка средина* A *бројева* a_k *увек лежи у размаку*

$$\left(N+\frac{S}{2n^2},\ M-\frac{S}{2n^2}\right).$$

Аритметичка средина биће, дакле, изражена обрасцем

$$A = \left(N + \frac{S}{2n^2}\right) + \vartheta\left(M - N - \frac{S}{n^2}\right).$$

Кад су вредности a_k једнаке међу собом, биће

$$S = 0, \quad M = N$$

и размак A своди се на заједничку вредност бројева a_k.

Однос између аритметичке, геометријске и хармонијске средине два броја

Нека су a и b два позитивна броја, и означимо са A, G, H њихову аритметичку средину

$$A = \frac{a+b}{2},$$

њихову геометријску средину

$$G = \sqrt{ab}$$

и њихову хармонијску средину

$$H = \frac{2ab}{a+b}.$$

Идентичност

(41) $$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

показује да је

(42) $$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

тј.

$$G \leq A,$$

где је једнакост достигнута само кад је $a = b$.

Са друге стране, пошто је идентички

(43) $$G^2 = AH,$$

то се из неједначине $G \leq A$, добија да је

$$G^2 = AH \geq GH$$

према чему је

$$G \geq H.$$

Отуда неједначина

$$H \leq G \leq A, \tag{44}$$

а одатле је

$$G = H + \vartheta(A - H), \tag{45}$$

или

$$\sqrt{ab} = \frac{2ab}{a+b} + \frac{\vartheta}{2}\frac{(a-b)^2}{a+b}. \tag{46}$$

Тај образац даје $\sqrt{ab}$ у облику једнога размака чији су границе рационалне функције од a и b.

Образац (45) је практички употребљив за израчунавање квадратног корена једног датог броја са каквом се хоће приближношћу. Ако се стави да је

$$\begin{aligned} A &= \frac{a+b}{2}, & H &= \frac{2ab}{a+b}, \\ A_1 &= \frac{A+H}{2}, & H_1 &= \frac{2AH}{A+H}, \\ A_2 &= \frac{A_1+H_1}{2}, & H_2 &= \frac{2A_1H_1}{A_1+H_1}, \\ &\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{47}$$

налази се да у $\sqrt{ab}$, на место a и b, могу узети A_{k-1} и H_{k-1}, чиме образац (43) постаје

$$ab = G^2 = AH = A_1H_1 = A_2H_2 = \ldots \tag{48}$$

тако, да се према обрасцу (45) добија да је

$$G = H_k + \vartheta(A_k - H_k), \tag{49}$$

па ма колики био индекс k. Међутим, из идентичности

$$A_k - H_k = (A_{k-1} - H_{k-1})\frac{A_{k-1} - H_{k-1}}{2(A_{k-1} + H_{k-1})}$$

види се да је

$$A_k - H_k < A_{k-1} - H_{k-1},$$

што значи да члан $\vartheta(A_k - H_k)$ у обрасцу (49) постаје све мањи уколико је индекс k већи, тј. уколико се више продуже рачунске радње означене у обрасцима (47). Продуживши их довољно, тај се члан може смањити колико се хоће, тако да се за k довољно велико може узети да је

$$\sqrt{ab} = H_k$$

са приближношћу која се тражи.

Тако нпр. ако се узме $a = 1$, $b = 2$, добија се узастопце

$$A = \frac{3}{2} = 1{,}5, \qquad H = \frac{4}{3} = 1{,}3,$$
$$A_1 = \frac{17}{12} = 1{,}416, \qquad H_1 = \frac{24}{17} = 1{,}411,$$
$$A_2 = \frac{577}{408} = 1{,}414215, \quad H_2 = 1{,}414211;$$

тако се добија

$$\sqrt{2} = H_2 + \vartheta(A_2 - H_2) = 1{,}414211 + \vartheta \cdot 0{,}000004$$

са пет првих децимала тачно.

Однос између збира бројева и збира њихових квадрата

Нека је $a_1, a_2, ..., a_n$ један низ реалних позитивних бројева, па означимо да је

$$S = a_1 + a_2 + ... + a_n,$$
$$R = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2.$$

Позната алгебарска идентичност, која важи за све реалне бројеве a_k

$$nR - S^2 = \sum (a_i - a_j)^2, \tag{50}$$

показује да је

$$nR - S^2 \geq 0, \tag{51}$$

одакле је

$$R \geq \frac{S^2}{n},$$

где је једнакост достигнута само кад је

$$a_1 = a_2 = ... = a_n = a.$$

А пошто је у исто време, али само за позитивне вредности a_k, очевидно

$$R \leq S^2,$$

(где је једнакост постигнута онда кад су сви a_k, осим једнога од њих, једнаки нули), то се добија да је

$$\frac{S}{\sqrt{n}} \le \sqrt{R} \le S, \tag{52}$$

одакле је

$$\sqrt{R} = \frac{1 + \vartheta(\sqrt{n} - 1)}{\sqrt{n}} S \tag{53}$$

што се може написати у облику

$$\sqrt{R} = \lambda S, \tag{54}$$

где је λ један број који увек лежи између $\frac{1}{\sqrt{n}}$ и 1.

У случају кад је $n = 2$, неједначина (51) своди се на

$$2(a^2 + b^2) - (a + b)^2 \ge 0$$

што резултира из идентичности

$$2(a^2 + b^2) - (a + b)^2 = (a - b)^2;$$

једначина (54) своди се на

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \lambda(a + b), \tag{55}$$

где је λ један број који лежи између 0,7071 и 1. Доња граница је достигнута кад је $a = b$, а горња кад је један од бројева a и b једнак нули.

У случају $n = 3$ добија се да је

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \lambda(a + b + c), \tag{56}$$

где је λ један број који лежи између 0,5774 и 1.

Тако нпр. разлика између логаритама бројева $\sqrt{a^2 + b^2}$ и $a + b$ не износи никад више од $\frac{1}{2}\log 2$; за логаритме по основици 10 она не износи више од 0,15052. Разлика између логаритама бројева $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ и $a + b + c$ не износи никад више од 0,23856. Те су максималне разлике достигнуте, у првом случају кад је $a = b$, а у другом кад је $a = b = c$.

Однос између збира бројева и збира њихових k-тих степена

Нека је $a_1, a_2, ..., a_n$ један низ позитивних бројева, па означимо да је

$$S = a_1 + a_2 + ... + a_n,$$
$$U = a_1^k + a_2^k + ... + a_n^k.$$

Уочимо функцију од n позитивних промењљивих количина x_i

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = n^{k-1}(x_1^k + ... + x_n^k) - (x_1 + ... + x_n)^k,$$

где је k један ма какав реалан број. Помоћу теорије максимума и минимума функција које зависе од више промењљивих количина, налази се да

1° кад је $k > 1$, функција F постаје минимум за

(57) $$x_1 = x_2 = ... = x_n$$

и вредност тог минимума је нула; функција има, дакле, позитивну вредност за сваки други скуп вредности x_i;

2° кад је $k < 1$, функција F постаје максимум за (57) и вредност тога максимума је нула; функција има, дакле, негативну вредност за сваки други скуп вредности x_i;

3° кад је $k = 1$, функција F се идентички своди на нулу.

Према томе, ако се стави да је

$$\frac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)^k}{x_1^k + x_2^k + ... + x_n^k} = \rho,$$

биће

$$\rho \leq n^{k-1} \quad \text{за} \quad k > 1,$$
$$\rho \geq n^{k-1} \quad \text{за} \quad k < 1,$$
$$\rho = 1 \quad \text{за} \quad k = 1.$$

Поред тога очевидно је да је

$$\rho \geq 1 \quad \text{за} \quad k > 1 \quad \text{и} \quad \rho \leq 1 \quad \text{за} \quad k < 1,$$

где је једнакост достигнута кад су сви x_i, осим једног од њих, једнаки нули.

Из тога излази да вредност ρ увек лежи између 1 и n^{k-1}; прва је граница достигнута (за ма какву вредност k) кад су сви x_i, осим једнога, једнаки нули, или (за ма какве вредности x_i) кад је $k = 1$; друга је граница достигнута кад су сви x_i међу собом једнаки.

За позитивне вредности k је, дакле,

$$\frac{S^k}{n^{k-1}} \leq U \leq S^k, \tag{58}$$

према чему је

$$U = S^k\left[\frac{1}{n^{k-1}} + \vartheta\left(1 - \frac{1}{n^{k-1}}\right)\right] \tag{59}$$

или још

$$U = \lambda S^k, \tag{60}$$

где је λ један број који увек лежи између $\frac{1}{n^{k-1}}$ и 1.

Према томе је нпр.

$$\log \sqrt[k]{u} = \log S + \frac{k-1}{k} \vartheta \log n. \tag{61}$$

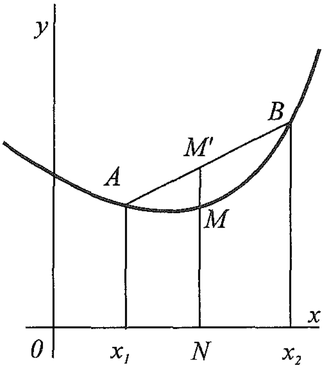
Однос између аритметичке средине бројева и аритметичке средине њихових функција

Нека је

$$x_1, x_2, ..., x_n$$

један низ позитивних бројева садржаних у датом размаку (a, b), а $f(x)$ једна позитивна *конвексна* функција у размаку (a, b) тј. функција чији је други извод позитиван за вредности x у томе размаку. Означимо са

$$\begin{aligned} \mu_n &= \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}, \\ M_n &= \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n} \end{aligned} \tag{62}$$



аритметичку средину бројева x_i и аритметичку средину њихових функција $f(x_i)$.

На слици која представља криву $y = f(x)$ конвексну према оси Ox види се да, ако се уочи једна тачка M на конвексноме луку криве, чија се апсциса ON налази између апсциса x_1 и x_2, мора бити

$$MN < NM'. \tag{63}$$

Као што је познато из аналитичке геометрије, једна ма која тачка M' која се налази на тетиви AB између тачака A и B, има за координате

$$ON = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad M'N = \frac{\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

где су λ_1 и λ_2 два позитивна броја, и ма каква била та два позитивна броја, тачка M' увек лежи измађу тачака A и B.

Неједначина (63) изражава тада да је

$$f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) \leq \frac{\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)}{\lambda_1 + \lambda_2}, \tag{64}$$

за све тачке x_1 и x_2 у размаку конвексности функције $f(x)$ и за све позитивне бројеве λ_1 и λ_2.

Узмимо сад за λ_1 и λ_2 бројеве

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = n - 1,$$

за x_2 вредност

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1},$$

а за x_1 вредност x_n, па ће горња неједначина постати

$$f(\mu_n) \leq \frac{f(x_n) + (n-1) f(\mu_{n-1})}{n},$$

одакле је

$$nf(\mu_n) \leq f(x_1) + (n-1) f(\mu_{n-1}).$$

Смењујући у тој неједначини узастопце n са $n-1$, $n-2$, ... добија се низ неједначина

$$\begin{aligned} nf(\mu_n) &\leq f(x_n) + (n-1) f(\mu_{n-1}), \\ (n-1) f(\mu_{n-1}) &\leq f(x_{n-1}) + (n-2) f(\mu_{n-2}), \\ (n-2) f(\mu_{n-2}) &\leq f(x_{n-2}) + (n-3) f(\mu_{n-3}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

чијим се сабирањем добија да је

$$nf(\mu_n) \leq f(x_n) + f(x_{n-1}) + \ldots + f(x_1),$$

што показује да је

$$f(\mu_n) \leq M_n. \tag{65}$$

На тај начин је нађена једна доња граница за аритметичку средину M_n. Да бисмо јој одредили и једну горњу границу, ставимо у (64) да је

$$x_1 = x + y, \quad x_2 = 0, \quad \frac{x}{x+y} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

претпостављајући да су x и y позитивни. Неједначина (64) своди се тада на

$$\text{(66)} \qquad f(x) \leq \frac{x\, f(x+y)}{x+y} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} f(0).$$

Ако бисмо сад опет у (64) ставили да је

$$x_2 = x + y, \quad x_1 = 0, \quad \frac{x}{x+y} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

добили бисмо да је

$$\text{(67)} \qquad f(y) \leq \frac{yf(x+y)}{x+y} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} f(0).$$

Сабирањем неједначина (66) и (67) добија се да је

$$\text{(68)} \qquad f(x) + f(y) \leq f(x+y) + f(0).$$

Посматрајмо сада израз

$$\text{(69)} \qquad P = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) =$$

$$= \left[f(x_1) + \ldots + f(x_{n-2})\right] + \left[f(x_{n-1}) + f(x_n)\right].$$

Према (68) биће

$$\left[f(x_{n-1}) + f(x_n)\right] \leq f(x_{n-1} + x_n) + f(0),$$

па, дакле, према (69)

$$P \leq \left[f(x_1) + \ldots + f(x_{n-3})\right] + \left[f(x_{n-2}) + f(x_{n-1} + x_n)\right] + f(0).$$

Према (68) биће опет

$$\left[f(x_{n-2}) + f(x_{n-1} + x_n)\right] \leq f(x_{n-2} + x_{n-1} + x_n) + f(0),$$

што чини да ће бити

$$P \leq \left[f(x_1) + \ldots + f(x_{n-4})\right] + \left[f(x_{n-3}) + f(x_{n-2} + x_{n-1} + x_n)\right] + 2\, f(0).$$

Продуживши тако и даље док се не исцрпе сви индекси n, добија се да је

$$P \leq f(x_1+x_2+\ldots+x_n)+(n-1)f(0),$$

одакле је после деобе са n

$$M_n \leq \frac{f(n\mu_n)+(n-1)f(0)}{n},$$

што даје једну горњу границу за аритметичку средину M_n.

Тиме се долази до овог општег односа између аритметичких средина $\mathrm{M_n}$ *и* μ_n: *увек је*

$$(70) \qquad f(\mu_n) \leq M_n \leq \frac{f(n\mu_n)+(n-1)f(0)}{n}.$$

Однос претпоставља да су вредности $x_1, x_2, \ldots, x_n$ позитивне, а функција $f(x)$ позитивна и конвексна за све вредности x у размаку између најмање и највеће међу вредностима x_i.

Размак има, као асиметрички нормални рачунски представник, израз

$$(71) \qquad M = f(\mu_n)+\vartheta\varphi(\mu_n),$$

где је

$$(72) \qquad \varphi(\mu) = \frac{f(n\mu_n)+(n-1)f(0)-nf(\mu_n)}{n}.$$

Из (70) се види да се вредност

$$f(x_1+x_2+\ldots+x_n)$$

увек налази у размаку између двеју вредности

$$(73) \qquad \left[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\right]-(n-1)f(0) = A$$

и

$$\frac{f(nx_1)+f(nx_2)+\ldots+f(nx_n)}{n} = B$$

и за ма коју функцију поменуте врсте ове границе размака могу стварно бити достигнуте. Кад се овај размак изрази у облику

$$(74) \qquad f(x_1+x_2+\ldots+x_n) = A+\vartheta(B-A),$$

добија се једна врста адиционе теореме за функцију $f(x)$; теорема изражава, у облику бројног размака, функцију збира помоћу функције сабирака умножених једним истим сталним бројем n.

Тако се исто из (70) види и тò, да вредност симетричне функције

$$f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)$$

од n позитивних бројева чији је збир s, лежи увек у размаку између двеју вредности

$$nf\left(\frac{s}{n}\right)=C \tag{75}$$

и

$$f(s)+(n-1)f(0)=D,$$

тако да је

$$f(x_1)+\ldots+f(x_n)=C+\vartheta(D-C); \tag{76}$$

границе размака су такође достигнуте у поменутим случајевима, па ма каква била функција $f(x)$ посматране врсте.

Неједначине (70) одређују размак, у коме ће се налазити средина M_n, изражен помоћу средине μ_n. Границе тога размака су одиста достигнуте за ма какву конвексну функцију $f(x)$, и то, доња граница кад су све вредности x_i међу собом једнаке, а горња граница кад су све оне једнаке нули осим једне од њих.

Приметимо и то да те неједначине важе и за функције $f(x)$ позитивне и *конкавне* у посматраном размаку, тј. функције чији је други извод негативан за вредност x у томе размаку, само што се тада мења смисао неједначина.

1. *пример*. – Нека је

$$f(x)=x^k$$

која је функција конвексна за $k>1$, а за x позитивно. Тада је

$$f(\mu_n)=\mu_n^k=\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^k}{n^k},$$

$$M_n=\frac{x_1^k+\ldots+x_n^k}{n},$$

па неједначине (70) дају

$$\frac{(x_1+\ldots+x_n)^k}{n^k}\le\frac{x_1^k+\ldots+x_n^k}{n}\le\frac{(x_1+\ldots+x_n)^k}{n},$$

што значи да се вредност количника

$$\frac{(x_1+\ldots+x_n)^k}{x_1^k+\ldots+x_n^k}=\rho$$

увек налази у размаку $(1, n^{k-1})$. Границе тог размака стварно су достигнуте када су сви x_i међу собом једнаки, или када су сви они једнаки нули осим једнога од њих.

У специјалном случају кад је $k = 2$ добија се раније наведена једначина

$$1 \leq \frac{(x_1 + ... + x_n)^2}{x_1^2 + ... + x_n^2} \leq n,$$

чији је специјалан случај неједначина

$$\frac{a+b}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$$

или неједначина

$$\frac{a+b+c}{\sqrt{3}} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \leq a + b + c.$$

У случају кад је $k < 1$, функција x^k је конкавна и горње неједначине мењају смисао.

Ти исти резултати су нађени, у ранијем одељку, на други начин.

2. *пример*. – Узевши $f(x) = e^x$ налази се да је

$$e^{x_1} + e^{x_2} + ... + e^{x_n} = C + \vartheta H,$$

где је

$$C = ne^{\frac{S}{n}}, \quad H = e^S - ne^{\frac{S}{n}} + n - 1, \quad S = x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

3. *пример*. – Узевши

$$x_1 = \sin^2 x, \quad x_2 = \cos^2 x$$

налази се да је

$$f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x) = C + \vartheta H,$$

где су C и H бројеви независни од промењиве x

$$C = 2f\left(\frac{1}{2}\right), \quad H = f(1) + f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right).$$

4. *пример*. – Узевши

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = \gamma,$$

где су α, β, γ углови једног троугла (изражени у деловима од π), збир $x_1 + x_2 + x_3$ има за вредност π и налази се да је

$$f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)=C+\vartheta H,$$

где су C и H бројеви независни од углова

$$C=3f\left(\frac{\pi}{3}\right),\qquad H=f(\pi)+2f(0)-3f\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Тако нпр. за све троугле биће

$$e^{\alpha}+e^{\beta}+e^{\gamma}=3e^{\frac{\pi}{3}}+\vartheta\left(2+e^{\pi}-3e^{\frac{\pi}{3}}\right),$$

тј.

$$e^{\alpha}+e^{\beta}+e^{\gamma}=8,5489+16,5914\,\vartheta.$$

5. *пример.* – Узевши

$$x_1=\alpha_1,\qquad x_2=\alpha_2,\dots,x_n=\alpha_n,$$

где су $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ корени алгебарске једначине

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n=0, \tag{77}$$

која има све своје корене реалне и позитивне, биће

$$x_1+x_2+\dots+x_n=-a_1,$$

па се налази да вредност симетричне функције корена

$$f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+\dots+f(\alpha_n)$$

увек лежи у размаку између вредности

$$C=nf\left(-\frac{a_1}{n}\right),$$

и

$$D=f(-a_1)+(n-1)f(0)-nf\left(-\frac{a_1}{n}\right),$$

тако да је

$$f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+\dots+f(\alpha_n)=C+\vartheta(D-C).$$

Ма каква била функција $f(x)$ поменуте врсте, граница C размака је достигнута кад су α_i корени алгебарске једначине

$$\left(x+\frac{a_1}{n}\right)^n=0,$$

а граница D кад су α_i корени једначине

$$x^{n-1}(x+a_1)=0.$$

Тако је нпр.

$$e^{r\alpha_1}+e^{r\alpha_2}+\ldots+e^{r\alpha_n}=C+\vartheta(D-C), \qquad r=\text{const.},$$

где је

$$C=ne^{-\frac{ra_1}{n}}, \quad D=e^{-ra_1}-ne^{-\frac{ra_1}{n}}+n-1.$$

У случајевима кад су корени α_i једначине (77) реални, а ма кога знака, узевши да је

$$x_1=\alpha_1^2, \quad x_2=\alpha_2^2,\ldots,x_n=\alpha_n^2,$$

биће сви x_i позитивни и

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=a_1^2-2a_2$$

и према томе

$$f(\alpha_1^2)+f(\alpha_2^2)+\ldots+f(\alpha_n^2)=C+\vartheta H,$$

где је

$$C=nf\left(\frac{a_1^2-2a_2}{n}\right),$$

$$H=f(a_1^2-a_2)+(n-1)f(0)-nf\left(\frac{a_1^2-2a_2}{n}\right).$$

Тако је нпр.

$$e^{\alpha_1^2}+e^{\alpha_2^2}+\ldots+e^{\alpha_n^2}=C+\vartheta H,$$

где је

$$C=ne^{\frac{a_1^2-2a_2}{n}},$$

$$H=e^{a_1^2-2a_2}-ne^{\frac{a_1^2-2a_2}{n}}+n-1.$$

Исто тако се налази да је

$$\alpha_1^{2k}+\alpha_2^{2k}+\ldots+\alpha_n^{2k}=\lambda(a_1^2-2a_2)^k,$$

где је λ један број који увек лежи између $\frac{1}{n^{2k-1}}$ и 1.

Реални корени алгебарских једначина као бројни размаци

Нека је дата алгебарска једначина

(78) $$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0,$$

чији су коефицијенти сви позитивни; тада ће сви њени реални корени $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ бити негативни и може се доказати ова теорема (теорема *Kakeya*):

Сви корени $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *налазе се у размаку између* $-$M *и* $-$N, *где је* N *најмања, а* M *највећа од вредности*

(79) $$\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Да бисмо то доказали, уочимо најпре алгебарску једначину

(80) $$p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_n z^n = 0,$$

чији су коефицијенти $p_0, p_1, \ldots, p_n$ сви позитивни и све мањи уколико им је ранг већи, тј.

(81) $$p_n < p_{n-1} < \ldots < p_1 < p_0.$$

Ако се пође од идентичности

$$\begin{aligned}&(1-z)(p_0 + p_1 z + \ldots + p_n z^n) = \\ &= p_0 - (p_0 - p_1)z - (p_1 - p_2)z^2 - \ldots - (p_{n-1} - p_n)z^n - p_n z^{n+1} = \\ &= p_0 - \left\{(p_0 - p_1)z + (p_1 - p_2)z^2 + \ldots + (p_{n-1} - p_n)z^n + p_n z^{n+1}\right\};\end{aligned}$$

то, пошто су све разлике $p_0 - p_1$, $p_1 - p_2, \ldots, p_{n-1} - p_n$, као и p_n, позитивни бројеви, велика заграда на десној страни имаће за $-1 < z < 0$ вредност мању од оне, коју би имала за $z = +1$, тј. мању од

$$(p_0 - p_1) + (p_1 - p_2) + \ldots + (p_{n-1} - p_n) + p_n = p_0,$$

што значи да је за $-1 < z < 0$ вредност израза

$$(1-z)(p_0 + p_1 z + \ldots + p_n z^n)$$

увек позитивна и различита од нуле. Па пошто је за такве вредности z вредност $1- z$ различита од нуле, тако ће бити и са полиномом

$$p_0 + p_1 z + \ldots + p_n z^n.$$

Једначина (80) нема дакле корена између -1 и 0.

Уочимо сада једну ма коју једначину

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = 0 \tag{82}$$

са позитивним коефицијентима (од којих ни један не сме бити једнак нули).

Ставимо најпре

$$x = Nz,$$

где је N најмањи од бројева

$$\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, ..., \frac{a_{n-1}}{a_n}, \tag{83}$$

па се из неједначине

$$N < \frac{a_k}{a+1}$$

добија да је

$$a_{k+1}N^{k+1} < a_kN^k. \tag{84}$$

Једначина (82) том сменом постаје

$$a_0 + a_1Nz + a_2N^2z^2 + ... + a_nN^nz^n = 0,$$

тако да коефицијенат p_k од z^k има за вредност $p_k = a_kN^k$, а коефицијенат p_{k+1} од z^{k+1} вредност $p_{k+1} = a_{k+1}N^{k+1}$.

Према неједначини (84) њени коефицијенти p_k опадају кад им ранг расте. Та једначина нема, дакле, корена између -1 и 0, тј. није задовољена ни за какву вредност $-1 < z < 0$ или $-1 < \frac{x}{N} < 0$; то значи да једначина (82) нема ниједан корен x такав да је

$$\frac{x}{N} = -\vartheta \quad \text{тј.} \quad x = -N\vartheta; \quad 0 \leq \vartheta \leq 1$$

она, дакле, нема никакав корен у размаку $(0, -N)$.

Ставимо сад

$$x = \frac{M}{z},$$

где је M највећи од бројева (83) па се из неједначине

$$M > \frac{a_k}{a_{k+1}} \tag{85}$$

добија да је

$$a_{k+1}M^{k+1} > a_kM^k. \tag{86}$$

Једначина (82) том сменом постаје

$$(87)\quad a_n M^n + a_{n-1} M^{n-1} z + ... + a_2 M^2 z^{n-2} + a_1 M z^{n-1} + a_0 z^n = 0,$$

тако да коефицијенат p_k од z^k има за вредност

$$p_k = a_{n-k} M^{n-k},$$

а коефицијенат p_{k+1} од z^{k+1} вредност

$$p_{k+1} = a_{n-k-1} M^{n-k-1}.$$

Према неједначини (86), из које је

$$a_{n-k} M^{n-k} > a_{n-k-1} M^{n-k-1},$$

види се да је $p_k > p_{k+1}$, тј. да коефицијенти једначине (87) опадају кад им ранг расте. Та једначина није задовољена ни за какву вредност $-1 < z < 0$ или $-1 < \frac{M}{x} < 0$; једначина (82) не може имати ниједан корен x такав да је

$$\frac{M}{x} = -\vartheta, \quad \text{тј.} \quad x = -\frac{M}{\vartheta}, \quad \text{где је} \quad 0 \leq \vartheta \leq 1$$

што значи да она нема никакав корен у размаку између $-\infty$ и $-M$.

Као што се види из свега овога, једначина (82) не може имати никакав корен у размаку између $-\infty$ и $-M$ ни у размаку од $-N$ до 0; кад год, дакле, она има реалних корена, сви се ови морају налазити у размаку $(-M, -N)$, чиме је теорема доказана.

Теореми се може дати овај облик:

Ако се са N *и* M *означе најмањи и највећи међу бројевима*

$$\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, ..., \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

сви реални корени $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *једначине (82) могу се изразити у облику*

$$\begin{array}{ll}
\alpha_1 = N + \vartheta_1(M-N), & 0 \leq \vartheta_1 \leq 1 \\
\alpha_2 = N + \vartheta_2(M-N), & 0 \leq \vartheta_2 \leq 1 \\
\alpha_3 = N + \vartheta_3(M-N), & 0 \leq \vartheta_3 \leq 1 \\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ .\ .
\end{array}$$

Применимо теорему, примера ради, на квадратну једначину

$$x^2 + px + q = 0$$

са позитивним коефицијентима p и q. За њу је

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{q}{p}, \quad \frac{a_1}{a_2} = p,$$

па пошто је из услова за реалност корена

$$\frac{q}{p} \leq \frac{p}{4}$$

па дакле утолико пре и $\frac{q}{p} \leq p$, биће

$$N = \frac{q}{p}, \quad M = p,$$

и корени се налазе у размаку између $-p$ и $-\frac{q}{p}$ што показује да се они могу изразити у облику

$$\alpha_1 = \frac{q}{p} + \vartheta_1 \left(p - \frac{q}{p} \right),$$

$$\alpha_2 = \frac{q}{p} + \vartheta_2 \left(p - \frac{q}{p} \right).$$

Кад су оба корена једнака, биће $p^2 - 4q$ према чему је

$$N = \frac{q}{p} = \frac{p}{4}, \quad M = p;$$

оба корена имају заједничку вредност која се може изразити у облику

$$\alpha_{1,2} = -\frac{p}{4}(1 + 3\vartheta),$$

па пошто тај корен треба да буде $-\frac{p}{2}$, то број ϑ што одговара двоструком корену јесте $\vartheta = \frac{1}{3}$.

Размак вредности полинома

Нека је

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

ма какав полином по x, па означимо са (A, B) један размак у коме ће се налазити вредности тога полинома за све вредности x које се налазе у једном датом размаку (a, b).

У случају кад су a и b позитивни бројеви, постоји Cauchy-ево правило које гласи: ако се у полиному раздвоје скуп чланова $f_1(x)$ са позитивним коефицијентима, и скуп чланова $f_2(x)$ са негативним коефицијентима, тако да је

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

за размак (A, B) *може се узети размак између вредности*

$$f_1(a) + f_1(b) \quad \text{и} \quad f_2(a) + f_2(b).$$

Али постоји једно правило које и не претпоставља ништа о знацима бројева a и b, и у опште даје ужи, па дакле и пробитачнији размак (A, B). То је Laguerre-ово правило које се састоји у овоме:

Нека су

$$\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$$
$$\beta_0, \beta_1, ..., \beta_n$$

два низа вредности дефинисаних рекурсивним обрасцима

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha_0 = a_n, & \alpha_1 = a\alpha_0 + a_{n-1} \\ \alpha_2 = a\alpha_1 + a_{n-2} ... & \alpha_n = a\alpha_{n-1} + a_0 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \beta_n = \alpha_n & \beta_{n-1} = \beta_n + (b-a)\alpha_{n-1} \\ \beta_{n-2} = \beta_{n-1} + (b-a)b\alpha_{n-2}, & \beta_{n-3} = \beta_{n-2} + (b-a)b^2\alpha_{n-3} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ \beta_1 = \beta_2 + (b-a)b^{n-2}\alpha_1 & \beta_0 = \beta_1 + (b-a)b^{n-1}\alpha_0. \end{array}\right\}$$

Означимо са N и M најмању и највећу међу вредностима $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_n$, *па се за размак* (A, B) *може узети размак* (N, M).

Правило се може исказати и у овоме облику: *за све вредности*

$$x = a + \vartheta(b - a)$$

биће

$$f(x) = N + \theta'(M - N).$$

Тако нпр. кад је

$$f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 2$$

и кад је $a = 1$, $b = 2$ добија се да је

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0 = 1 & \alpha_1 = -1 & \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = -3 & \alpha_4 = 1 & \alpha_5 = -1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \beta_5 = -1 & \beta_4 = 0 & \beta_3 = -6 \\ \beta_2 = -6 & \beta_1 = -14 & \beta_0 = 2 \end{Bmatrix}$$

што показује да се за размак (A, B) може узети размак (–14, 2), тј. да ће се за $x = 1 + \vartheta$ имати

$$f(x) = -14 + 16\vartheta'.$$

Међутим, по Cauchy-евом правилу за (A, B) би се добио шири размак $(-40, 41)$.

Кад је $a = 2$, $b = 3$ добија се да је

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0 = 1 & \alpha_1 = 0 & \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = -1 & \alpha_4 = 2 & \alpha_5 = 2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \beta_5 = 2 & \beta_4 = 4 & \beta_3 = 1 \\ \beta_2 = 10 & \beta_1 = 10 & \beta_0 = 91 \end{Bmatrix}$$

што показује да се за (A, B) може узети размак (1,91), тј. да ће се за $x = 2 + \vartheta$ имати

$$f(x) = 1 + 90\,\vartheta'$$

док би се по Cauchy-евом правилу добио шири размак (–143, 236).

Навешћемо овде и једно правило за логаритамски извод ма каквог полинома $f(x)$ који има све своје нуле реалне, тј. за рационалну функцију

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Правило гласи: ако је x ма која вредност већа од свих нула полинома $f(x)$, одговарајућа вредност извода $\varphi'(x)$ увек се налази у размаку између

$$-\varphi^2(x) \quad \text{и} \quad -\frac{\varphi^2(x)}{n}.$$

Јер ако су нуле полинома *f*(*x*) означене са $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$, где је *n* његов степен, биће

$$\varphi(x) = \frac{1}{x-\alpha_1} + ... + \frac{1}{x-\alpha_n}$$

и према томе

$$-\varphi'(x) = \frac{1}{(x-\alpha_1)^2} + ... + \frac{1}{(x-\alpha_n)^2}.$$

Пошто су све разлике $x - \alpha_k$ позитивне, вредност десне стране последње једначине налазиће се у размаку

$$\frac{\varphi^2(x)}{n} \quad \text{и} \quad \varphi^2(x),$$

што доказује горње правило. *Према томе је*

$$-\varphi'(x) = \frac{1+\vartheta(n-1)}{n}\varphi^2(x),$$

за све поменуте вредности x.

Разни други бројни размаци

У разним областима аритметике и алгебре постоји непрегледан број случајева у којима се за једну посматрану количину, ма се и не знала њена тачна вредност, зна одређен размак у коме се она насигурно налази. Поред оних који су довде наведени, навешћемо још неке од њих који су од користи било са теоријског гледишта, било са гледишта пректичних примена.

α) Laguerre је нашао да је, за вредности *x* што се налазе између 0 и $\frac{\pi}{2}$, разлика између двеју функција

$$f(x) = \cos x$$

$$\varphi(x) = 1 - \frac{z^2}{z+(z-1)\sqrt{\frac{2-z}{3}}}, \qquad z = \frac{2x}{\pi},$$

увек негативна и по апсолутној вредности не прелази вредност 0,0003. *Према томе је за те вредности x*

$$\cos x = \varphi(x) - \vartheta \cdot 0{,}0003,$$

а из тога се изводе и слични обрасци за изражавање других тригонометријских функција помоћу алгебарских функција, у облику бројних размака.

β) Зна се да се за

$$a \geq 20b > 0$$

и за логаритме са основицом 10, вредности

$$\log(a+b) \quad \text{и} \quad \log a + \frac{2Mb}{2a+b},$$

где је

$$M = \log e = 0{,}434295...$$

разликују тек у шестој децимали. Према томе је за такве вредности a и b

$$\log(a+b) = \log a + \frac{2Mb}{2a+b} + \frac{\theta}{10^5}$$

што олакшава практично израчунавање логаритама.

γ) Уочимо алгебарску једначину непарног $(2n + 1)$-ог степена

$$\varphi(x) + \lambda = 0, \tag{88}$$

где је $\varphi(x)$ полином по x који садржи само непарне степене променљиве, а λ ма какав ралан број. Ако се са α означи апсолутна вредност λ, Чебишев је доказао да једначина (88) има бар један реалан корен у размаку између

$$-2\sqrt[2n+1]{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{и} \quad +2\sqrt[2n+1]{\frac{\alpha}{2}}.$$

То значи да једначина има бар један корен који се може изразити у облику

$$x = 2\omega\sqrt[2n+1]{\frac{\alpha}{2}}, \quad -1 \leq \omega \leq 1.$$

Применивши то нпр. на једначину трећег степена

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{89}$$

пошто се ова сменом

$$x = z - \frac{a}{3}$$

сведе на једначину

$$z^3 + pz + q = 0,$$

где је

$$p = b - \frac{a^3}{3},$$

$$q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$$

добија се овај резултат: једначина (89) има бар један корен који се може изразити у облику

$$x = -\frac{a}{3} + \frac{2\omega}{3}\sqrt[3]{\left| a^3 - \frac{9}{2}ab + \frac{27}{2}c \right|}$$

што олакшава практично решавање једначине трећег степена.

δ) Нека је $f(x)$ коначна и непрекидна функција за вредности x садржане у размаку (a, b), као и њен извод $f'(x)$. Према теореми за коначне прираштаје, постоји у размаку (a, b) бар једна вредност c за коју је

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Ако се, дакле, означи са N најмања, а са M највећа вредност коју има извод $f'(x)$ за вредности x у размаку (a, b) биће

(90) $$f(b) - f(a) = (b - a)\left[N + \vartheta(M - N)\right], \qquad 0 \le \vartheta \le 1.$$

Тако се нпр. налази да је

$$\operatorname{arctg}(x + 1) = \operatorname{arctg} x + \delta,$$

где се δ увек налази у размаку

$$\frac{1}{1 + (x + 1)^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{1 + x^2}.$$

ε) Потражимо размак у коме ће се налазити вредност

(91) $$f(a) - 2f(a + h) + f(a + 2h),$$

за вредности h садржане у размаку $(0, a)$. Тога ради потражимо вредност λ за коју ће бити

(92) $$f(a) - 2f(a + h) + f(a + 2h) - \lambda h^2 = 0.$$

Посматрањем функције

$$g(z) = f(a) - 2f(a + z) + f(a + 2z) - \lambda z^2$$

види се да је она једнака нули за $z = 0$ и $z = h$; према Rolle-овој теореми њен извод

$$g'(z) = -2f'(a+z) + 2f'(a+2z) - 2\lambda z$$

мора постати једнак нули за једну вредност $z = c$ садржану у размаку (0, h). За ту ће вредност c бити

$$\lambda c = f'(a+2c) - f'(a+c),$$

а применом обрасца (90) налази се да се десна страна ове једначине може написати у облику

$$\left[P + \vartheta(Q-P)\right]c,$$

где су P и Q најмања и највећа вредност коју има други извод $f'(z)$ за вредности z садржане у размаку (0, h). Отуда

$$\lambda = P + \vartheta(Q-P),$$

што према обрасцу (92) показује да се вредност

$$f(a) - 2f(a+h) + f(a+2h)$$

увек налази у размаку између

$$Ph^2 \quad \text{и} \quad Qh^2.$$

10. БРОЈНИ РАЗМАЦИ У ТЕОРИЈИ ГРЕШАКА

За сваки недовољно одређен податак x може се утврдити један размак (α, β) у коме ће се он насигурно налазити, тј. x се може написати у облику

$$x = \alpha + \vartheta(\beta - \alpha). \tag{93}$$

Кад се таквим податком буду вршиле какве било рачунске радње, резултат рачуна такође ће бити један недовољно одређен број X. Али и за тај број увек се може одредити један размак (A, B) изван кога се он насигурно неће налазити, тако да ће бити

$$X = A + \vartheta(B - A). \tag{94}$$

Тако исто, кад непозната количина X зависи од више недовољно одређених података $x_1, x_2, ..., x_n$, може се за сваки од ових утврдити по један размак (α_k, β_k) у коме ће се x_k насигурно налазити, тј. ти се подаци могу изразити у облику

$$
(95) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \vartheta_1(\beta_1 - \alpha_1), \\ x_2 &= \alpha_2 + \vartheta_2(\beta_2 - \alpha_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}
$$

Кад се, помоћу везе која буде дата између X и x_i, буде израчунала вредност X, она неће бити довољно одређена, али се и за њу може одредити један размак (A, B), тако да се она може изразити у облику (94).

Тако исто, кад више непознатих количина $X_1, X_2, ..., X_p$ истовремено зависе од више података $x_1, x_2, ..., x_n$, од којих је сваки недовољно одређен, па се те непознате израчунају помоћу везе која буде постојала између X_k и x_i, за сваку непознату X_k може се утврдити по један размак (A_k, B_k) у коме ће се она налазити, тј. тако да буде

$$
(96) \qquad \begin{aligned} X_1 &= A_1 + \vartheta_1(B_1 - A_1), \\ X_2 &= A_2 + \vartheta_2(B_2 - A_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}
$$

Очевидно је да одређивање грешака којима се излаже израчунавање непознате количине из нетачних података, није ништа друго до одређивање размака у којима се могу кретати тако израчунате непознате, а који би се размаци свели на тачне вредности ових, кад би сами подаци били апсолутно тачни.

На тај начин, *рачунање са недовољно одређеним подацима и израчунавање резултујућих грешака што произилази од њих, своди се на рачунање са бројним размацима.* Задатак се своди на један од три основна задатка ове врсте, који су били предмет ранијег излагања:

1° одредити размак за вредности дате функције $f(x)$ кад је x дато у облику једног размака;

2° одредити размак за вредности функције $f(x_1, ..., x_n)$ кад је свака од вредности x_i дата у облику једног размака;

3° одредити размаке за вредности датог скупа функција f_1, f_2, $f_3, ..., f_p$ које све истовремено зависе од скупа података $x_1, x_2, ..., x_n$.

Уопште кад се зна да једна количина x лежи у размаку (α, β), ако се за x узме једна вредност p садржана у том размаку, тиме учињена грешка δx, тј. разлика $p - x$, не може по апсолутној вредности бити већа од дужине размака (α, β), тј. по апсолутној вредности биће

$$\delta x < \beta - \alpha$$

и та грешка може бити позитивна или негативна.

Учињена *релативна грешка* Δx, тј. одступање узете вредности p од тачне вредности x, упоређено са самом вредношћу x, била би

$$\Delta x = \left|\frac{\delta x}{x}\right|.$$

Међутим, пошто нам је тачна вредност x непозната, а познаје се само вредност p по којој се цени и сама величина x, то се за релативну грешку учињену на вредности x обично узима

$$\Delta x = \left|\frac{\delta p}{p}\right| = \left|\frac{\delta x}{p}\right|.$$

Уосталом, кад је учињена грешка δx довољно мала наспрам p тако да је квадрат количника $\frac{\delta x}{p}$ занемарљив, разлика између такве две релативне грешке

$$\frac{\delta x}{x} - \frac{\delta x}{p} = \frac{\delta x}{p - \delta x} - \frac{\delta x}{p} = \frac{(\delta x)^2}{p(p - \delta x)}$$

биће практички занемарљива.

Учињена *процентуална грешка* је 100 Δx.

Пошто је увек $x \geq \alpha$, то је

$$\Delta x \leq \frac{\delta x}{\alpha}$$

и према томе је, ако се води рачун и о знаку грешака,

$$\delta x = \omega(\beta - \alpha),$$

$$\Delta x = \omega\frac{\beta - \alpha}{\alpha}, \qquad -1 \leq \omega \leq 1,$$

а ако се води рачун само о апсолутној вредности грешака

$$\delta x = \vartheta(\beta - \alpha),$$

$$\Delta x = \vartheta\frac{\beta - \alpha}{\alpha}.$$

Ови изрази за Δx су илузорни у случајевима кад је $\alpha = 0$, јер се тада могу поклопити са ма којом вредношћу од $-\infty$ до $+\infty$ (односно од нуле до $+\infty$).

Ако се за број p узме средина $\frac{\alpha+\beta}{2}$ размака (α, β) учињена грешка δx није никад већа од полудужине $\frac{\beta-\alpha}{2}$ тога размака, а може бити позитивна или негативна. Тада је, дакле

$$\delta x = \omega \frac{\beta-\alpha}{2},$$

$$\Delta x = \omega \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}.$$

Напослетку, ако се за p узме предњи крај размака (α, β), грешка δx не премаша дужину $\beta-\alpha$ размака и увек је позитивна; тада је

$$\delta x = \vartheta(\beta-\alpha),$$

$$\Delta x = \vartheta \frac{\beta-\alpha}{\alpha}, \qquad 0 \leq \vartheta \leq 1.$$

Када је размак (α, β) довољно узак да су степени његове дужине $(\beta-\alpha)$ врло мали бројеви, занемарљиви наспрам саме те дужине, грешка δx може се сматрати као диференцијал количине x, пошто су тада и степени од δx занемарљиви наспрам δx.

Одговарајућа грешка δf, учињена на датој функцији f, која зависи од x, као размак између израчунате и тачне вредности f (која би се имала кад би x било тачан број) има се сматрати као диференцијал те функције. Ако ова зависи од више података $x_1, x_2, ..., x_n$ са довољно уским размаком варијација (тј. довољно малим могућним грешкама), грешка δf има се сматрати као тотални диференцијал функције по променљивима x_i. Напослетку, ако један дати скуп функција $f_1, f_2, ..., f_p$ истовремено зависи од података $x_1, x_2, ..., x_n$, грешка δf_k има се сматрати као тотални диференцијал функције f_k по променљивима x_i.

На тој је примедби основана теорија утицаја нетачних података са довољно малим могућним грешкама, на резултате рачуна са таквим подацима. Али кад су могућне грешке на подацима толике, да им више степени и међусобни производи нису занемарљиви наспрам њих самих, тако да се не могу сматрати као диференцијали, утицај таквих података, изражен у *резултујућој грешки*, мора се решавати методама рачунања са бројним размацима, које су предмет ових излагања.

1. *пример*. – У коме ће се размаку налазити износ P површине квадрата чија је страна $x = 2,3$ m дата са једном децималом тачно?

Овде је $2{,}3 < x < 2{,}4$, па дакле у метрима

$$x = 2{,}3 + \vartheta \cdot 0{,}1,$$

према чему је

$$P = x^2 = (2{,}3 + \vartheta \cdot 0{,}1)^2,$$

па дакле

$$P = 5{,}29 + \theta' \cdot 0{,}47.$$

Ако се за P узме средина тога размака, тј. вредност 5,525 m^2 учињена грешка је

$$\delta x = \omega \cdot 0{,}235\ \mathrm{m}^2,$$

а релативна грешка

$$\Delta x = \omega \cdot 0{,}104.$$

2. *пример*. – Израчунати вредност

$$x = \sqrt{p},$$

где је p дат цео позитиван број, тако да разлика између тачне и нађене вредности не премаша вредност $\frac{1}{q}$, где је q опет дат цео позитиван број.

Означимо са m највећи цео број садржан у вредности

$$x' = \sqrt{pq^2},$$

па ће бити

$$m \leq x' \leq m + 1,$$

па дакле и

$$\frac{m}{q} \leq x \leq \frac{m+1}{q},$$

према чему је

$$x = \frac{m}{q} + \frac{\vartheta}{q}, \qquad 0 \leq \vartheta \leq 1.$$

Рационалан број $\frac{m}{q}$ представља дакле $\sqrt{p}$ са негативном грешком која не премаша $\frac{1}{q}$.

Тако нпр. ако се тражи $\sqrt{4368}$ тако да грешка буде негативна, а не премаша $\frac{1}{7}$, биће

$$m = 462, \quad \frac{m}{7} = 66,$$

тако да је

$$\sqrt{4368} = 66 + \frac{\vartheta}{7}.$$

3. *пример*. – Са колико тачних децимала треба узети број π да би се из тако узете вредности могао израчунати

$$x = \sqrt{\pi}$$

са позитивном грешком која не премаша $\frac{1}{10^4}$?

Ако се са m означи највећи цео број садржан у вредности

$$x' = \sqrt{10^8 \cdot \pi},$$

биће

$$m \leq x' \leq m + 1,$$

па дакле и

$$\frac{m}{10^4} \leq x \leq \frac{m+1}{10^4}.$$

према чему је

$$x = \frac{m}{10^4} + \frac{\vartheta}{10^4}.$$

Рационалан број $\frac{m}{10^4}$ представља $\sqrt{\pi}$ са позитивном грешком која не премаша $\frac{1}{10^4}$, а за то је потребно и довољно да је број π дат са 4 тачних децимала.

4. *пример*. – У коме ће се размаку налазити износ запремине V лопте полупречника $x = 1{,}23$ m датог са две децимале тачно, а кад се број π узме са 3 децимале тачно?

Овде је

$$1{,}23 < x < 1{,}24,$$

$$3{,}141 < \pi < 3{,}142,$$

па дакле у метрима

$$x = 1{,}23 + \vartheta \cdot 0{,}01,$$

$$\pi = 3{,}141 + \vartheta' \cdot 0{,}001,$$

према чему је

$$V = 7{,}794 + \vartheta'' \cdot 0{,}1850.$$

Ако се за V узме средина тога размака, тј. вредност

$$p = 7{,}886,$$

учињена грешка је

$$\delta x = \omega \cdot 0{,}0975,$$

а релативна грешка

$$\Delta x = \omega \cdot 0{,}123.$$

5. *пример*. – Претпоставимо да су у једној смеши која садржи калијум и натријум у облику соли, ове соли најпре претворене у карбонате и у томе облику измерене, па да је тако нађена колективна тежина q_1, са грешком која ни у позитивном, ни у негативном смислу не прелази позитиван број δ_1; затим да су карбонати претворени у хлориде и у томе облику измерени, па да је нађена тежина q_2, са грешком која ни у позитивном, ни у негативном смислу не прелази позитиван број δ_2.

Претпостављајући да се не узима у обзир нетачност атомских тежина K, Na, C, O, Cl, тежина Z_1 калијума и тежина Z_2 натријума у првобитној смеши израчунавају се из одговарајућих хемијских једначина

$$Z_1 = 25{,}875x_1 - 23{,}444x_2,$$

$$Z_2 = 17{,}989x_2 - 19{,}421x_1,$$

где би x_1 и x_2 имале бити тачне тежине карбоната и хлорида у смеши.

У којим ће се размацима насигурно налазити тежине Z_1 и Z_2 кад се на место x_1 и x_2 узму q_1 и q_2.

Симетрички нормални представници размака у којима ће се налазити x_1 и x_2 су

$$x_1 = q_1 + \omega_1\delta_1, \qquad -1 \leq \omega_1 \leq 1;$$

$$x_2 = q_2 + \omega_2\delta_2, \qquad -1 \leq \omega_2 \leq 1$$

и према томе ће њихов асиметрички нормални представник бити

$$x_1 = q_1 - \delta_1 + 2\vartheta_1\delta_1, \qquad 0 \leq \vartheta_1 \leq 1;$$

$$x_2 = q_2 - \delta_2 + 2\vartheta_2\delta_2, \qquad 0 \leq \vartheta_2 \leq 1.$$

Крајеви размака Z_1 биће дакле

$$N_1 = 25{,}875\,(q_1 - \delta_1) - 23{,}444(q_2 + \delta_2),$$

$$M_1 = 25{,}875\,(q_1 + \delta_1) - 23{,}444(q_2 - \delta_2),$$

а крајеви размака Z_2 биће

$$N_2 = 17,989(q_2 - \delta_2) - 19,421(q_1 + \delta_1),$$

$$M_2 = 17,989(q_2 + \delta_2) - 19,421(q_1 - \delta_1).$$

Тражени размаци су, дакле

$$Z_1 = 25,875\,(q_1 - \delta_1) + \vartheta_1' \cdot 46,888\delta_2, \qquad 0 \le \vartheta_1' \le 1;$$

$$Z_2 = 17,989(q_2 - \delta_2) + \vartheta_2' \cdot 38,842\delta_2, \qquad 0 \le \vartheta_2' \le 1.$$

6. *пример*. – Ако је z један број већи од јединице или једнак јединици напред је показано да је

$$1 \le \sqrt[n]{z} < 1 + \frac{z-1}{n}.$$

Ако се за x узме средина тог размака

$$p = \sqrt[n]{z} < 1 + \frac{z+2n-1}{2n}$$

учињена грешка δx ће бити

$$\delta x = \omega \frac{z-1}{2n}, \qquad -1 \le \omega \le 1.$$

Ако је, пак, z број мањи од јединице, показано је да је

$$\frac{1}{1+\dfrac{1-z}{nz}} < \sqrt[n]{z} < 1,$$

тако, да ако се узме средина тог размака

$$p = \sqrt[n]{z} = \frac{(2n-1)z+1}{2(n-1)z+2},$$

учињена грешка ће бити

$$\delta x = \omega \frac{1-z}{2(n-1)z+2}.$$

У оба случаја грешка ће бити у толико мања, у колико је z ближе јединици и у колико је n веће.

7. *пример*. – Напред је показано да је за позитивне вредности a и b

$$x = \sqrt{a^2+b^2} = \lambda(a+b), \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \le \lambda \le 1$$

где је доња граница размака достигнута кад је $a = b$, а горња кад је једна од вредности a и b једнака нули. Пошто је

$$\alpha = \frac{a+b}{\sqrt{2}}, \qquad \beta = a + b,$$

то ако се за x узме средина размака

$$p = \frac{\alpha+\beta}{2} = 0{,}8535(a+b),$$

учињена грешка ће бити

$$\delta x = \omega \cdot \frac{\beta-\alpha}{2} = \omega \cdot 0{,}1465(a+b), \qquad -1 \leq \omega \leq 1,$$

и она је једнака нули кад је $a = b$, а добија своју највећу могућу вредност 0,1465 b кад је $a = 0$.

Релативна грешка је

$$\Delta x < \frac{\delta x}{p} = \frac{\beta-\alpha}{2} \cdot \frac{2}{\alpha+\beta} = \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha},$$

према чему је

$$\Delta x = \omega \cdot 0,1716.$$

Навешћемо да постоји више начина за изражавање израза $x = \sqrt{a^2+b^2}$ у линеарном хомогеном облику

$$x = \xi a + \eta b.$$

Начин Poncelet-а, у случају кад се о позитивним бројевима a, b ништа не претпоставља, доводи до резултата који се подударају са напред наведеним, тј.

$$\xi = \eta = 0{,}85,$$

са релативном грешком која не премаша 0,172, тј. отприлике $^1/_6$. Међутим, тај начин даје могућности да се одреде коефицијенти ξ, η тако да релативна грешка Δx буде знатно мања, у случајевима кад се бар овлашно зна колико је пута један од бројева a, b већи од другога.

Тако се налази да је

$$\text{за } b > a, \qquad x = 0,40a + 0,96b, \qquad \Delta x < \frac{1}{25};$$

$$\text{за } b > 2a, \qquad x = 0,23a + 0,99b, \qquad \Delta x < \frac{1}{71};$$

за $b > 3a$, $x = 0{,}16a + 0{,}99b$, $\Delta x < \frac{1}{154}$;

за $b > 4a$, $x = 0{,}12a + 0{,}99b$, $\Delta x < \frac{1}{266}$;

за $b > 5a$, $x = 0{,}10a + b$, $\Delta x < \frac{1}{417}$;

за $b > 6a$, $x = 0{,}08a + b$, $\Delta x < \frac{1}{589}$;

за $b > 7a$, $x = 0{,}07a + b$, $\Delta x < \frac{1}{800}$;

за $b > 8a$, $x = 0{,}06a + b$, $\Delta x < \frac{1}{1049}$;

за $b > 9a$, $x = 0{,}05a + b$, $\Delta x < \frac{1}{1428}$;

за $b > 10a$, $x = 0{,}05a + b$, $\Delta x < \frac{1}{1538}$;

Навешћемо, примера ради, један прост начин који доводи до обрасца

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 0{,}40a + 0{,}96b \tag{97}$$

у случају кад се зна да је $b > a$.

Лако се уверити да је

$$\frac{24}{25}\sqrt{a^2 + b^2} < 0{,}40a + 0{,}96b < \frac{26}{25}\sqrt{a^2 + b^2}, \tag{98}$$

јер, ако се примети да је

$$0{,}40 = \frac{10}{25}, \quad 0{,}96 = \frac{24}{25},$$

неједначине постају

$$12\sqrt{a^2 + b^2} < 5a + 12b < 13\sqrt{a^2 + b^2}$$

или квадрирањем

$$144(a^2 + b^2) < 25a^2 + 120ab + 144b^2 < 169(a^2 + b^2).$$

Лева се неједначина своди на

$$119\,a^2 < 120\,ab$$

и она очевидно постоји пошто је $b > a$.

Десна неједначина постаје

$$120\,ab < 25\,b^2 + 144\,a^2$$

па и она постоји према идентичности

$$144\,a^2 - 120\,ab + 25\,b^2 = (12\,a - 5\,b)^2 > 0.$$

Двострука неједначина (98) постоји дакле за $b > a$, а из ње се добија да је

$$0{,}40\,a + 0{,}96\,b = \frac{24 + 2\vartheta}{25}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Вредност разломка пред квадратним кореном увек се налази у размаку између

$$1 - \frac{1}{25} \quad \text{и} \quad 1 + \frac{1}{25}$$

што значи да образац (97) одиста даје вредност $\sqrt{a^2 + b^2}$ у линеарном облику са грешком чија апсолутна вредност не прелази $\frac{1}{25} = 0{,}04$, тј. 4%.

11. БРОЈНИ РАЗМАЦИ У ГЕОМЕТРИЈИ

Као и у аритметици и у алгебри, и геометријске величине могу се јављати као размаци, тј. једна величина x може бити одређена размаком између двеју величина исте врсте у коме се x налази. Тада ће и све геометријске величине, које се рачуном или геометријском конструкцијом изводе из таквих података x, бити и саме одређене у облику размака. То се нпр. дешава:

а) кад подаци нису тачно дати;

б) кад рачунске или конструктивне тешкоће не допуштају тачну одредбу непознате величине из датих података баш кад би ови и били тачни;

в) кад се одредба непознате, по самој природи задатка, не састоји у тачној одредби њене вредности, већ у одредби размака у коме она треба да се налази да би били задовољени услови задатка;

г) кад су подаци недовољни за тачну одредбу непознате, али су довољни за одредбу једнога размака у коме се непозната непрестано налази.

Случај ове последње врсте јавља се нпр. кад је један податак x збир од неколико геометријских величина $x_1, x_2, x_3, \ldots$, а тражена непозната геометријска величина y зависи од збира квадрата или трећих степена итд. величина x_k. Тада се има посла са *недовољно одређеним задацима*, као што су нпр. ови:

1° одредити хипотенузу правоуглог троугла из датог збира његових катета;

2° одредити углове правоуглог троугла, кад се зна да овај има као катете збир катета и хипотенузу једнога другог, непознатог, правоуглог троугла;

3° одредити дијагоналу паралелопипеда из датог збира његових страна;

4° одредити обим и површину једног троугла из датог збира двеју његових страна и угла који оне захватају;

5° одредити збир одстојања једне произвољне тачке описаног круга око правилног полигона, од свију темена полигона, знајући само број страна и обим овога.

Задаци који се своде на проучавање аритметичке средине конвексних или конкавних функција

У великоме броју задатака такве врсте служи као основица раније доказани резултат да, ако се са μ_n означи аритметичка средина позитивних бројева $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а са M_n аритметичка средина

$$M_n = \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n},$$

где је $f(x)$ ма каква функција променљиве x, позитивна и конвексна у размаку који садржи све бројеве x_i, вредност M_n увек се налази у размаку између вредности

$$(99) \qquad f(\mu_n) \quad \text{и} \quad \frac{f(n\mu_n) + (n-1)f(0)}{n},$$

где су границе размака стварно достигнуте кад су сви x_i међу собом једнаки; или кад су сви једнаки нули, осим једнога од њих.

Међутим, *тај се размак може још сузити у случају кад су* x_1, x_2, x_3, *стране* a, b, c *једног истог троугла.*

Пођимо од неједначине која према општем ставу важи за три ма која позитивна броја x, y, z

$$(100) \qquad 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leq f(x)+f(y)+f(z) \leq f(x+y+z)+2f(0).$$

Кад су a, b, c стране једнога истог троугла, мора бити

$$a+b>c, \quad b+c>a, \quad c+a>b,$$

тако да ако се полузбир страна означи са

$$p=\frac{a+b+c}{2},$$

мора бити

$$p>a, \quad p>b, \quad p>c,$$

тј. вредности

$$(101) \qquad x=p-a, \quad y=p-b, \quad z=p-c,$$

увек су позитивне.

Ставимо у (100) да је

$$f(t)=F(p-t),$$

па ће, пошто је

$$\frac{d^2f}{dt^2}=\frac{d^2F}{dt^2},$$

функција F бити конвексна за сваки размак променљиве x за који је и сама функција f конвексна. Неједначина (101) тада постаје

$$3F\left(p-\frac{x+y+z}{3}\right) \leq F(p-x)+F(p-y)+F(p-z) \leq$$

$$\leq F(p-x-y-z)+2F(p),$$

а ова ће, кад се у њој x, y, z смене својим вредностима (101), постати

$$(102) \qquad 3F\left(\frac{2p}{3}\right) \leq F(a)+F(b)+F(c) \leq F(0)+2F(p).$$

Вредности симетричке функције страна троугла

$$(103) \qquad F(a)+F(b)+F(c),$$

где је F *ма каква конвексна функција тих страна, увек лежи у размаку између вредности*

$$(104) \qquad 3F\left(\frac{2p}{3}\right) \quad \text{и} \quad F(0)+2F(p),$$

где је p *полузбир страна.*

Ове границе размака стварно су достигнуте у случају равностраног троугла, или равнокраког троугла са углом између једнаких страна који је једнак нули.

Да је размак (104) одиста ужи од размака између вредности

$$(105) \qquad 3F\left(\frac{2p}{3}\right) \quad \text{и} \quad F(2p)+2F(0),$$

које одређује неједначина (100) за ма какве позитивне бројеве a, b, c, види се нпр. из специјалног случаја када се узме да је

$$F(x)=x^2.$$

Размак (105) у коме ће се налазити збир $a^2+b^2+c^2$ био би онај између вредности $\frac{4}{3}p^2$ и $4p^2$, тј. између вредности

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)}{3} \quad \text{и} \quad (a+b+c)^2,$$

док би размак (104) био онај између вредности $\frac{4}{3}p^2$ и $2p^2$, тј. између

$$(106) \qquad \frac{(a^2+b^2+c^2)}{3} \quad \text{и} \quad \frac{(a+b+c)^2}{2},$$

а тај је размак очевидно ужи од размака (105).

Збир квадрата страна једног троугла увек се, дакле, налази у размаку између вредности (106), и то је у исто време и најужи размак, који се може утврдити за општи случај. Његове су границе стварно достигнуте кад је троугао равностран, или равнокрак са трећом страном једнаком нули.

Горњем резултату о размаку, у коме се налази функција (103) страна троугла, може се дати и овај облик од интереса за разноврсне примене:

Ставимо у неједначини (102) да је

$$F(t)=\Phi(p-t),$$

па ће $\Phi(t)$ опет бити конвексна функција променљиве t пошто је

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = \frac{d^2F}{dt^2} = \frac{d^2f}{dt^2}.$$

Образац (102) тада постаје

$$3\Phi\left(\frac{p}{3}\right) \leq \Phi(p-a) + \Phi(p-b) + \Phi(p-c) \leq \Phi(p) - 2\Phi(0).$$

Кад се нпр. узме да је

$$\Phi(t) = t^k, \qquad (k > 1),$$

добија се

$$\frac{p^k}{3^{k-1}} \leq (p-a)^k + (p-b)^k + (p-c)^k \leq p^k.$$

Кад се у обрасцу (102) узме да је

$$F(t) = \frac{t}{2p-t},$$

$F(t)$ ће опет бити конвексна функција променљиве t за $t = a$, $t = b$, $t = c$, пошто је

$$\frac{d^2F}{dt^2} = \frac{4p}{(2p-t)^2},$$

а свака је од разлика $2p-a, 2p-b, 2p-c$ позитивна.

Образац (102) тада постаје

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq 2$$

што значи *да је за све троугле*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1{,}5 + \vartheta \cdot 0{,}5\,, \qquad (0 \leq \vartheta \leq 1).$$

Уосталом, кад год је $F(t)$ каква хомогена функција по променљивима p и t, онда, ако је то хомогена функција нултог реда, доња и горња граница размака, у коме ће се налазити збир

$$F(a) + F(b) + F(c),$$

имаће се у облику апсолутног броја. *Кад је степен хомогености те функције једнак каквом броју* h, *границе размака добиће се у облику вредности* p^{h} *помножене једним апсолутним бројем.*

1. *пример.* – Хипотенуза c правоуглог троугла, за који је познат само збир $a + b$ двеју катета, је

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \lambda(a+b), \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \lambda \leq 1,$$

према чему је

$$c = (0{,}7071 + \vartheta \cdot 0{,}2929)(a+b).$$

2. *пример.* – Хипотенуза h правоуглог троугла, чије су катете дијагонале паралелограма обима s, увек лежи у размаку између $\frac{s}{2}$ и s, тако да је

$$h = s\,\frac{1+\vartheta}{2}.$$

То произилази непосредно из особине паралелограма да је збир квадрата његове четири стране једнак збиру квадрата његових дијагонала.

3. *пример.* – Који правоугли троугли могу имати као своје две катете збир катета и хипотенузу другог једног правоуглог троугла?

Ако се катете првог троугла означе са a и b, катете другога са a' и b', треба да је

$$a = a' + b',$$

$$b = \sqrt{a'^2 + b'^2} = \lambda[a' + b'], \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \lambda \leq 1,$$

према томе један угао α првог троугла треба да је такав да је

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} = \lambda,$$

тј. треба да лежи у размаку између 35°16′ и 45° (а други угао између 45° и 54°44′).

4. *пример.* – Знајући збир страна $a + b + c$ једног паралелопипеда, одредити му дужину дијагонале d. Пошто је

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \mu(a+b+c), \qquad \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \mu \leq 1,$$

то је

$$d = (0{,}5774 + \vartheta \cdot 0{,}4226)(a+b+c).$$

5. *пример*. – Знајући збир страна $a+b+c=s$ једног паралелопипеда, као и то да се од страна a, b, c може саставити један троугао, одредити дужину дијагонале d паралелопипеда.

Као што је напред показано, кад су a, b, c, три стране једног троугла, количник

$$s=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{a+b+c}$$

лежи у размаку између $\frac{1}{\sqrt{3}}=0,5774$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}=0,7071$.

Према томе дужина d дијагонале лежи у размаку између

$$0{,}5774\,s \quad \text{и} \quad 0{,}7071\,s\,.$$

Ако се, дакле, за d узме средина тог размака, тако да је

$$d=0{,}6422\,s,$$

учињена грешка не премаша вредност 0,0649, тј. $6^1/_2$%.

6. *пример*. – Из познатог обрасца

$$m^2+n^2+p^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2),$$

за дужине m, n, p медијана једног троугла чије су стране a, b, c, добија се да је

$$\sqrt{m^2+n^2+p^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda(a+b+c), \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}\leq\lambda\leq\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Према томе дијагонала d паралелопипеда, који има за стране медиане једног троугла чији је обим s, одређена је размаком

$$d=(0,5+\vartheta\cdot 0,1123)\,s.$$

Из тога се нпр. види да се правоугли троугли, који имају као једну катету обим једнога троугла, а као другу катету дијагоналу паралелопипеда састављеног из медиана истог троугла као страна, налазе само међу оним правоуглим троуглима чији један угао има за тангенс какву вредност, која се налази у размаку између

$$0,5 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}=0,6123,$$

тј. чији се један угао налази у размаку између

$$26°33' \quad \text{и} \quad 31°28'.$$

7. *пример.* – У Геометрији је позната ова теорема за правилне полигоне од n страна: збир квадрата одстојања једне произвољне тачке на описаном кругу, од свих темена полинома, има за вредност $2nR^2$, где је R полупречник тога круга. Ако се, дакле, та растојања означе са $a_1, a_2, ..., a_n$, биће

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2} = R\sqrt{2n}.$$

Према напред доказаном резултату је

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2} = \lambda(a_1+a_2+...+a_n), \qquad \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \lambda \leq 1.$$

Међутим, ни једна ни друга од тих двеју граница није никад достигнута, јер на описаном кругу не постоји ни једна тачка, за коју ће сва растојања a_k бити међу собом једнака, или сва једнака нули осим једнога од њих.

Из тога се види да се збир растојања

$$s = a_1+a_2+...+a_n$$

увек налази у размаку између

$$R\sqrt{2n} \quad \text{и} \quad nR\sqrt{2},$$

тако да је

$$s = \left[\sqrt{2n}+\vartheta\sqrt{2}(n-\sqrt{n})\right]R.$$

За троугао ће нпр. бити

$$s = (2,4495+\vartheta\cdot 1,7931)R,$$

за квадрат

$$s = 2,8284(1+\vartheta)R,$$

за пентагон

$$s = (3,1622+\vartheta\cdot 3,9088)R \quad \text{итд.}$$

Кад је, на место полупречника R описаног круга, дата дужина a стране полигона, треба горњим обрасцима заменити:

за *троугао* $$R = \frac{\sqrt{3}}{3}a = 0,5773\,a,$$

дакле

$$s = (1,4140+\vartheta\cdot 1,0351)\,a;$$

за *квадрат* $$R = \frac{a}{\sqrt{2}} = 0,7071\,a,$$

дакле

$$s = 2(1+\vartheta)\,a;$$

за *пентагон* $\quad R = \frac{a}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}} = 0{,}8506\,a,$

дакле

$$s = (2{,}6897 + \vartheta \cdot 3{,}3248)\,a.$$

Кад је, на место R, дата површина P полигона, треба сменити:

за *троугао* $\quad R = \frac{2}{\sqrt[4]{27}}\sqrt{P} = 0{,}8774\sqrt{P},$

дакле

$$s = (2{,}1491 + \vartheta \cdot 1{,}5732)\sqrt{P};$$

за *квадрат* $\quad R = \sqrt{\frac{P}{2}} = 0{,}7071\sqrt{P},$

дакле

$$s = 2(1+\vartheta)\sqrt{P}\,;$$

за *пентагон* $\quad R = \sqrt{\frac{8}{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}\sqrt{P} = 0{,}3856\sqrt{P},$

дакле

$$s = (1{,}2193 + \vartheta \cdot 1{,}5072)\sqrt{P}.$$

8. *пример*. – У Геометрији је позната и ова теорема за правилне полигоне од n страна ($n > 3$): нека су $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ пројекције темена $A_1, A_2, \ldots, A_n$ полигона на једну произвољну праву, O' пројекција средишта полигона на исту праву; ако се стави да је

$$S = \overline{O'A'_1}^4 + \overline{O'A'_2}^4 + \ldots + \overline{O'A'_n}^4,$$

увек је

$$S = \frac{3n}{8}R^4.$$

Према томе је

$$\sqrt[4]{S} = R\sqrt[4]{\frac{3n}{8}},$$

а пошто је, према напред показаном

$$\sqrt[4]{S} = \lambda s, \qquad\qquad \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \le \lambda \le 1,$$

где је

$$s = \overline{O'A'}_1 + \overline{O'A'}_2 + \ldots + \overline{O'A'}_n,$$

то се вредност $s = \frac{1}{\lambda}\sqrt[4]{S}$ увек налази у размаку између

$$R\sqrt[4]{\frac{3n}{8}} \quad \text{и} \quad nR\sqrt[4]{\frac{3}{8}}.$$

Према томе, збир растојања $\overline{O'A'_k}$ представљен је размаком

$$\sqrt[4]{\frac{3n}{8}}\left[1 + \vartheta(\sqrt[4]{n^3} - 1)\right]R,$$

који се нпр. за троугао своди на

$$\sqrt[4]{\frac{9}{8}}\,(1 + \vartheta \cdot 1,2795)R = (1,0299 + \vartheta \cdot 1,3178)R,$$

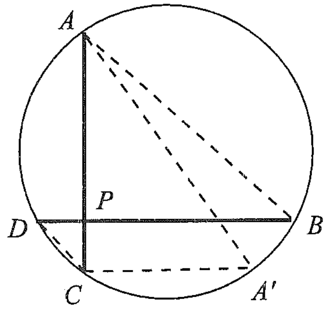
за квадрат на

$$\sqrt[4]{\frac{3}{2}}\,(1 + \theta \cdot 1,8284)R = (1,1067 + \vartheta \cdot 2,0235)R,$$

за пентагон на

$$\sqrt[4]{\frac{15}{8}}\,(1 + \vartheta \cdot 2,3437)R = (1,1702 + \vartheta \cdot 2,7426)R.$$

9. *пример.* – Ако се из једне тачке на кругу полупречника r повуку две, једна на другу управне сечице AC и DB, збир одсечака $AC + DB$ има дужину која се увек налази у размаку између $2r$ и $2r\sqrt{2}$.



Јер је

$$\overline{PA^2} + \overline{PB^2} = \overline{AB^2},$$

$$\overline{PC^2} + \overline{PD^2} = \overline{DC^2} = \overline{A'B^2},$$

па дакле

$$\overline{PA^2} + \overline{PB^2} + \overline{PC^2} + \overline{PD^2} = \overline{AB^2} + \overline{A'B^2} = 4r^2.$$

Вредност збира квадрата на левој страни налази се у размаку између вредности

$$\frac{(\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD})^2}{2} = \frac{(\overline{DB} + \overline{AC})^2}{2}$$

и вредности

$$(\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD})^2=(\overline{DB}+\overline{AC})^2,$$

и према томе је

$$\frac{(\overline{DB}+\overline{AC})^2}{2}\le 4r^2\le(\overline{DB}+\overline{AC})^2.$$

Одатле је

$$2r\le\overline{DB}+\overline{AC}\le 2r\sqrt{2},$$

чиме је горње тврђење доказано.

Из тога се, у исто време, види и ово: ако се збир одсечака двеју међусобно управних сечица круга означи са l, пречник круга увек се налази у размаку између 0,7071 l и l.

Ако се кроз једну сталну, произвољно изабрану тачку P у кругу повуче један ма који пар међу собом управних сечица, може се доказати да се збир одсечака $DB+AC$ увек налази у размаку између

$$2\sqrt{2r^2-d^2}\quad \text{и}\quad 2\sqrt{2}\sqrt{2r^2-d^2}.$$

Јер је

$$\overline{AC}=\overline{PA}+\overline{PC},$$

$$\overline{DB}=\overline{PB}+\overline{PD},$$

а одатле квадрирањем и сабирањем

$$\overline{AC^2}+\overline{DB^2}=\overline{PA^2}+\overline{PC^2}+\overline{PB^2}+\overline{PD^2}+2\overline{PA}\cdot\overline{PC}+2\overline{PB}\cdot\overline{PD}.$$

Са друге стране, ако се са d означи стално растојање $\overline{OP}$, биће

$$\overline{PA}\cdot\overline{PC}-\overline{PB}\cdot\overline{PD}=r^2-d^2,$$

па ће, водећи рачуна о горе нађеној једначини, бити

$$\overline{AC^2}+\overline{DB^2}=8r^2-4d^2,$$

па пошто се вредност збира квадрата на левој страни налази у размаку између

$$\frac{(\overline{AC}+\overline{DB})^2}{2}\quad\text{и}\quad(\overline{AC}+\overline{DB})^2,$$

тако да је

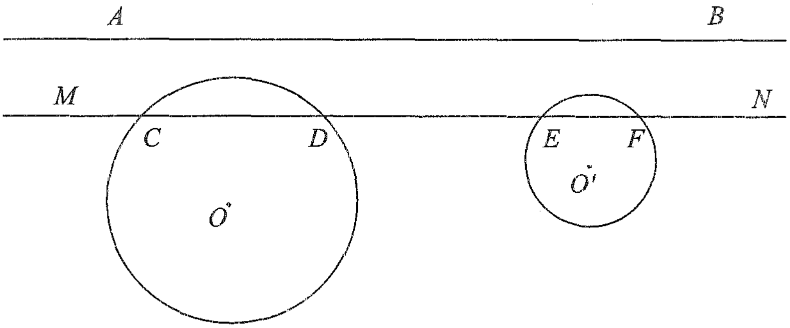
$$\frac{(\overline{AC}+\overline{DB})^2}{2}\le 8r^2-4d^2\le(\overline{AC}+\overline{DB})^2,$$

биће

$$2\sqrt{2r^2-d^2}\le\overline{AC}+\overline{DB}\le 2\sqrt{2}\sqrt{2r^2-d^2},$$

што доказује горње тврђење.

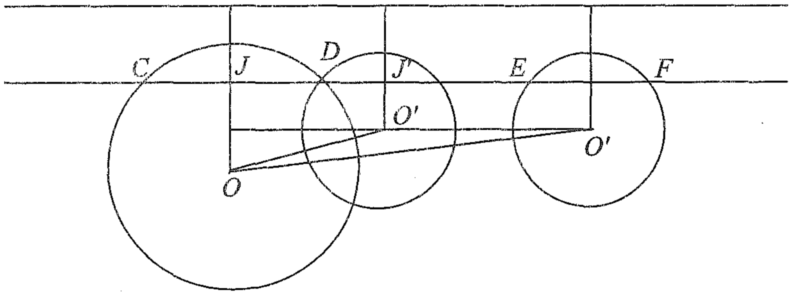
Слични се резултати добијају и за одсечке које у једној кугли чини један систем од три међу собом управне сечице.



10. *пример.* – Дата су два круга са средиштима O и O' и једна права AB; повући једну заједничку сечицу MN за оба круга, паралелну правој AB и такву да збир $CD + EF$ њених одсечака има дату дужину λ.

Повуцимо на праву AB две управне и из O' праву $O'K$ паралелну правој AB. Померимо круг O' паралелно правој AB дотле, док се тачка E не поклопи са тачком D и нека је O_1' нов положај средишта O', па ће бити

$$\overline{KO_1'} = \overline{JD} + \overline{DJ'} = \frac{\overline{CD}}{2} + \frac{\overline{EF}}{2} = \frac{\lambda}{2}.$$



Ако се око O_1', са полупречником $\overline{O'E}$, опише круг, пресек овога са кругом O пашће тачно у тачку D.

Означимо са d, r, r' *непроменљиву* дужину $\overline{OK}$ и полупречнике кругова O и O'. Изразивши да се кругови O и O' секу или додирују, добија се за могућност решења задатка овај услов: потребно је и довољно да буде

$$r - r' \le \overline{OO_1'} \le r + r',$$

а пошто је

$$\overline{OO'_1}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{KO'_1}^2 = d^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2,$$

то се квадрирањем горњих неједначина добија као услов

$$(r-r')^2 - d^2 \leq \frac{\lambda^2}{4} \leq (r+r')^2 - d^2,$$

што значи да је потребно и довољно да се дужина λ налази у размаку између дужина

$$2\sqrt{(r-r')^2 - d^2} \quad \text{и} \quad 2\sqrt{(r+r')^2 - d^2}.$$

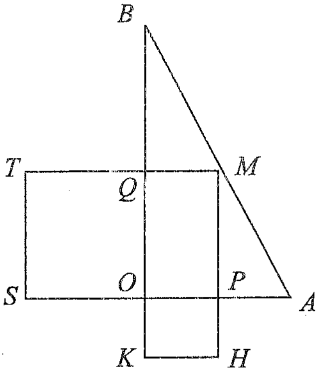
Задаци који се своде на проучавање тринома другог степена

Велики број геометријских задатака своди се на одређивање бројних размака у вези са триномом другог степена

$$f(x) = ax^2 + 2bx + c$$

и то тако да се решење задатка састоји не у одредби вредности x за које тај трином постаје једнак нули, већ у одредби размака у коме треба да се налази било сама вредност x, било какав променљив параметар λ, који фигурише у коефицијентима a, b, c тринома. Такве су врсте задаци наведени у следећим примерима:

1. *пример*.– Из произвољне тачке M на хипотенузи AB правоуглог троугла AOB повуку се две управне MP и MQ на катете троугла, па се на одсечцима OP и OQ ових конструишу два квадрата $OPHK$ и $OSTQ$. За који ће положај тачке M површина ограничена испреламаном линијом $MPHKOSTQM$ имати дату вредност λ^2?



Означимо да је

$$\overline{OA} = a, \quad \overline{OB} = b, \quad \overline{OP} = x, \qquad (a < b)$$

па се добија једначина

$$\lambda^2 = x^2 + \frac{b^2(a-x)^2}{a^2} + \frac{bx(a-x)}{a}$$

или

$$f(x) = (a^2 - ab + b^2)x^2 - ab(2b - a)x + a^2(b^2 - \lambda^2) = 0.$$

Да би решење имало смисла, потребно је и довољно да су корени једначине реални и да се бар један од њих налази у размаку између 0 и a. Први услов тражи да је

$$\lambda^2 \geq \frac{3a^2b^2}{4(a^2 - ab + b^2)}, \tag{107}$$

а да би се проучио други услов, треба испитати знаке израза

$$f(0) = a^2(b^2 - \lambda^2),$$

$$f(a) = a^2(a^2 - \lambda^2),$$

и разликовати ове случајеве:

1° кад се λ^2 налази у размаку између a^2 и b^2, вредности $f(0)$ и $f(a)$ имају супротне знаке, што значи да постоји једна вредност x која задовољава услов задатка;

2° кад је $\lambda^2 < a^2$, онда је и $\lambda^2 < b^2$; обе су вредности $f(0)$ и $f(a)$ позитивне; тада, ако је испуњен услов реалности (107), или ће оба корена задовољити услов задатка, или га неће задовољити ни један од њих. Да би се имао први случај, потребно је и довољно да се вредност полузбира тих корена налази у размаку између нуле и a, тј. да буде

$$0 < \frac{ab(2b - a)}{2(a^2 - ab + b^2)} < a,$$

што ће бити ако је у једно исто време

$$2b - a > 0 \quad \text{и} \quad 2a - b > 0.$$

Прва неједначина постоји пошто је $a < b$; друга тражи да је

$$a > \frac{b}{2}.$$

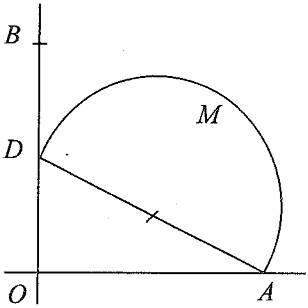
Према томе, да би оба корена једначине $f(x) = 0$ задовољила услов задатка, потребно је и довољно:

α) да се a налази у размаку између $\frac{b}{2}$ и b;

β) да се λ^2 налази у размаку између

$$\frac{3a^2b^2}{4(a^2 - ab + b^2)} \quad \text{и} \quad a^2.$$

2. *пример.* – На крацима правог угла обележе се тачке A и B на одстојањима $OA = a$, $OB = b$ од темена; одредити на OB такву једну тачку D, да збир полуобима круга DMA и одсечка DB буде једнак датој дужини λ.



Ако се за непознату узме дужина $BD = x$, задатак се своди на једначину

$$\frac{1}{2}\pi\sqrt{a^2+(b-x)^2}+x=\lambda,$$

тј. на једначину

$$(108)\quad (\pi^2-4)x^2-2(\pi^2 b-4\lambda)x+\pi^2(a^2-b^2)-4\lambda^2=0.$$

Да би вредност x, добијена решењем те једначине, дала решење задатка, потребно је и довољно да она буде реална, позитивна и мања од λ.

Услов реалности се може довести на облик

$$(2\lambda-2b+a\sqrt{\pi^2-4})(2\lambda-2b-a\sqrt{\pi^2-4})\geq 0,$$

а он ће бити задовољен или кад је

$$(109)\qquad \lambda\leq b-\frac{a}{2}\sqrt{\pi^2-4},$$

или кад је

$$(110)\qquad \lambda\geq b+\frac{a}{2}\sqrt{\pi^2-4}.$$

Лако се види да је увек $\lambda > b$ и да према томе неједначина (109) не може бити задовољена тако да долази у обзир само неједначина (110).

Производ корена квадратне једначине (108) има за вредност

$$(111)\qquad \frac{\pi^2(a^2+b^2)-4\lambda^2}{\pi^2-4},$$

па пошто је именилац позитиван број, тај ће производ имати знак свога бројиоца. И онда се имају разликовати ови случајеви:

α) нека се λ налази у размаку између

$$b+\frac{a}{2}\sqrt{\pi^2-4}\quad \text{и}\quad \frac{\pi}{2}\sqrt{a+b^2}.$$

Тада је производ (111) позитиван, па дакле су корени x истог знака, а то је знак њиховог збира

$$\frac{2(\pi^2 b - 4\lambda)}{\pi^2 - 4}; \tag{112}$$

они ће бити позитивни, тј. моћи представљати решења задатка само кад је

$$\lambda < \frac{\pi^2 b}{4}.$$

β) нека је

$$\lambda < \frac{\pi}{4}\sqrt{a^2 + b^2};$$

пошто је производ (111) једнак нули, један је од корена x једнак нули; да би други корен дао решење задатка, он треба да је позитиван, тј. треба да је позитиван бројилац израза (112), што захтева да је

$$a < \frac{b}{2}\sqrt{\pi^2 - 4};$$

γ) нека је

$$\lambda > \frac{\pi}{4}\sqrt{a^2 + b^2},$$

тада је израз (111) негативан и корени x су супротно означени; у томе случају постоји један позитиван корен x и он даје решење задатка.

Бројни размаци у тригонометријским задацима

На одређивање бројних размака у тригонометријским задацима наилази се или при испитивању реалности решења, или по самим особинама тригонометријских функција реалних количина да не могу изићи ван једног одређеног размака, као што је нпр. случај са синусом, косинусом и разноврсним њиховим комбинацијама.

1. *пример.* – Поделити дати угао α на два таква дела да збир тангенса тих делова има дату вредност 2λ.

Ако се ти делови означе са x и y, имаће се две једначине

$$x + y = \alpha,$$

$$\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y = 2\lambda.$$

Другој се једначини може дати облик

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} = 2\lambda,$$

па пошто је

$$\sin(x+y) = \sin\alpha,$$

$$2\cos x \cdot \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y) = \cos\alpha + \cos(x-y),$$

па та иста једначина постаје

$$(113) \qquad \cos(x-y) = \frac{\sin\alpha}{\lambda} - \cos\alpha.$$

Ако је, дакле, α најмањи угао чији косинус има за вредност десну страну једначине (113), за одредбу непознатих x и y имаће се две једначине

$$x + y = \alpha,$$

$$x - y = 2k\pi \pm \alpha,$$

које дају решења x и y.

Али да би решење имало смисла, треба да је

$$-1 < \frac{\sin\alpha}{\lambda} - \cos\alpha < +1,$$

што се може написати и у облику

$$-(1-\cos\alpha) < \frac{\sin\alpha}{\lambda} < 1 + \cos\alpha.$$

Кад је нпр. $\sin\alpha > 0$, те неједначине показују да се вредност $\frac{1}{\lambda}$ мора налазити у размаку између

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$

2. *пример*. – Кад је α дат оштар угао, за које ће вредности x израз

$$(x-1)[x^4 - 2(1+\cos^2\alpha)x^2 + \sin^4\alpha]$$

бити позитиван?

Израз се може написати у облику

$$(x-1)[x+(1+\cos\alpha)][x+(1-\cos\alpha)][x-(1-\cos\alpha)][x-(1+\cos\alpha)].$$

Пошто је $\cos\alpha > 0$, израз ће бити позитиван ако се x налази у једноме, ма коме, од ова три размака

или између	$-(1-\cos\alpha)$	и	$-(1+\cos\alpha)$
или између	$1-\cos\alpha$	и	1
или између	$1+\cos\alpha$	и	$+\infty$.

3. *пример*. – За какве се позитивне вредности x, y, z може написати да је

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\alpha,$$

где је α какав реалан угао?

Пошто се вредност

$$\frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz} = \cos\alpha$$

мора налазити у размаку између -1 и $+1$, то се добијају две неједначине из којих се налази да x треба да се налази у размаку између

$$\pm(y-z) \quad \text{и} \quad (y+z).$$

4. *пример*. – Одредити елементе једног троугла знајући му дужину a једне стране, супротни угао A и збир k^2 квадрата осталих двеју страна b и c.

За одредбу страна b и c има се систем од две једначине

$$(114) \qquad \begin{aligned} b^2 + c^2 &= k^2, \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A, \end{aligned}$$

одакле је

$$2bc = \frac{k^2 - a^2}{\cos A}.$$

Додавањем те вредности и одузимањем првој од једначина (114), добијају се две једначине

$$(115) \qquad \begin{aligned} (b+c)^2 &= \frac{k^2(1+\cos A) - a^2}{\cos A}, \\ (b-c)^2 &= \frac{a^2 - k^2(1-\cos A)}{\cos A}, \end{aligned}$$

из којих се могу израчунати b и c. Да би решење имало смисла, потребно је и довољно:

α) да десне стране једначина (115) буду позитивне;

β) да се a налази у размаку $(b-c, b+c)$.

Разликујемо ова два случаја према томе да ли је угао A оштар или туп:

1° угао A је оштар; услов α) своди се на двоструку неједначину

$$k^2(1-\cos A) < a^2 < k^2(1+\cos A),$$

а услов β) на

$$\frac{a^2-k^2(1-\cos A)}{\cos A} < a^2 < \frac{k^2(1+\cos A)-a^2}{\cos A}$$

из које излази да треба да буде

$$k^2 > a^2.$$

Ти се услови тада своде на

$$2k^2\sin^2\frac{A}{2} < a^2 < k^2$$

што значи да збир k^2 треба да се налази у размаку између

$$a^2 \quad \text{и} \quad \frac{a^2}{2\sin^2\dfrac{A}{2}};$$

2° угао A је туп; услов α) своди се на двоструку неједначину

$$k^2(1-\cos A) < a^2 < k^2(1+\cos A),$$

а услов β) на

$$k^2 < a^2.$$

Ти се услови тада своде на

$$k^2(1-\cos A) < a^2 < k^2$$

што значи да k^2 треба да се налази у размаку између

$$\frac{a^2}{2\sin^2\dfrac{A}{2}} \quad \text{и} \quad a^2.$$

5. *пример*. – Нека су a, b, c стране троугла ABC; кад су дате две стране a и b ($b > a$), а није дат и њима захваћен угао C, трећа страна c одређена је размаком

$$c = (b-a) + 2\vartheta a,$$

пошто је увек

$$b - a \leq c \leq b + a.$$

Кад је, пак, дат и угао C, биће

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C}.$$

Из односа

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

добија се

$$a = \frac{\sin A}{\sin A + \sin B}(a + b),$$

$$b = \frac{\sin B}{\sin A + \sin B}(a + b),$$

тако да је

$$c = (a + b)\,\varphi(A, B, C),$$

где је

$$\varphi(A, B, C) = \frac{\sqrt{\sin^2 A + \sin^2 B - 2\sin A \cdot \sin B \cdot \cos C}}{\sin A + \sin B}.$$

Идентичност

$$2pq = (p + q)^2 - (p^2 + q^2),$$

узевши да је

$$p = \sin A, \quad q = \sin B,$$

претвара израз φ у

$$\varphi(A, B, C) = \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{(p + q)^2}(1 + \cos C) - \cos C},$$

а пошто су p и q увек позитивни, биће

$$\frac{1}{2} \leq \frac{p^2 + q^2}{(p + q)^2} \leq 1.$$

То показује да је

$$\sqrt{\frac{1 - \cos C}{2} - \cos C} \leq \varphi(A, B, C) \leq 1,$$

што према обрасцу

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

даје

$$\sin\frac{C}{2} \leq \varphi(A, B, C) \leq 1,$$

чиме се долази до овога резултата: страна c троугла ABC увек се налази у размаку између

$$(a+b)\sin\frac{C}{2} \quad \text{и} \quad (a+b).$$

Према обрасцу

$$1-\sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right),$$

то показује да је

$$c=\left(\sin\frac{C}{2}+2\vartheta\cdot\cos^2\frac{\pi+C}{4}\right)(a+b),$$

а тај образац даје могућност да се из збира двеју страна и захваћеног угла једнога троугла израчунава трећа страна у облику размака.

Ако се за c узме средина тога размака, тако да је

$$c=(a+b)\cos^2\frac{\pi-C}{4}$$

учињена грешка по апсолутној вредности неће премашити вредност

$$(a+b)\cos^2\frac{\pi+C}{4},$$

а релативна грешка ниће премашити вредност

$$\Delta c=\left(\frac{\cos^2\dfrac{\pi+C}{4}}{\cos^2\dfrac{\pi-C}{4}}\right)=\operatorname{tg}^2\frac{\pi-C}{4}.$$

Ова је грешка у толико мања, у колико се угао C мање разликује од 180°; за тај угао она је једнака нули.

Уопште, горњи је резултат од нарочитог интереса за троугле ABC са тупим углом C. За такве троугле, ако се узме да је

$$c=(a+b)\cos^2\frac{\pi-C}{4},$$

учињена релативна грешка никад не премаша вредност

$$\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}=0{,}171,$$

а она брзо опада кад се C приближује углу од 180°. Тако је

$$\begin{aligned} \text{за } C &> 120^\circ & \Delta C &< 0{,}070 \\ C &> 140^\circ & \Delta C &< 0{,}040 \\ C &> 150^\circ & \Delta C &< 0{,}018 \\ C &> 160^\circ & \Delta C &< 0{,}007 \\ C &> 170^\circ & \Delta C &< 0{,}002 \\ C &> 175^\circ & \Delta C &< 0{,}0003. \end{aligned}$$

Троуглови за које је релативна грешка ΔC мања, по апсолутној вредности, од једног датог броја ε, јесу они за које је туп угао C, изражен у деловима од π, већи од разлике

$$\pi - 4\operatorname{arctg}\sqrt{\varepsilon},$$

или, за довољно мале вредности ε

$$C > \pi - 4\sqrt{\varepsilon}.$$

Обим s троугла ABC изражен помоћу збира $a + b$ и угла C, је

$$s = \left(1 + \sin\frac{C}{2} + 2\vartheta \cdot \cos^2\frac{\pi + C}{4}\right)(a + b).$$

Ако се, дакле, за обим узме средина тога размака, тако да је

$$s = \left(1 + \sin\frac{C}{2} + \theta \cdot \cos^2\frac{\pi + C}{4}\right)(a + b)$$

учињена грешка неће, по апсолутној вредности, премашити вредност

$$(a + b) \cdot \cos^2\frac{\pi + C}{4}.$$

12. ПОТПУНА И НЕПОТПУНА ФУНКЦИОНАЛНА ЗАВИСНОСТ

Кад две променљиве количине x и y стоје у таквој међусобној вези, да датој вредности једне од њих одговара, не ма каква, већ једна или више потпуно одређених вредности друге, за те се количине каже да су у *функционалној вези* једна са другом, да су *функције* једна од друге. Тај је појам уведен још при оснивању и првој обради општега рачуна са функцијама, кад се појавио проблем успостављања везе између поступних промена једне количине и одговарајућих промена других количина које се са њоме упоредо мењају.

Међутим, поред такве *потпуно одређене,* постоји још и *непотпуно одређена функционална зависност* између променљивих количина, на коју смо већ наилазили у ранијим излагању. Појам о њој добићемо најлакше и најбрже из ових неколико простих примера.

На први поглед изгледало би нпр. да не постоји никаква функционална зависност између дужине хипотенузе c и збира s катета a и b једног правоуглог троугла. Тако, могућно је поступно мењати збир s, а да хипотенуза c остане иста, и обрнуто. Довољно је нпр. да се давши збиру s једну произвољно изабрану вредност, за катету a узме један корен квадратне једначине

$$a^2 + (s - a)^2 = A^2,$$

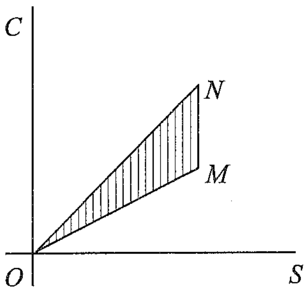
а за другу катету разлику $s - a$, па да, поред све произвољности збира s хипотенуза c има вредност A која се не мења кад се мења s. Тако исто се може учинити да се хипотенуза c мења са збиром s по произвољном закону $c = \varphi(s)$; довољно је узети за катету a један корен квадратне једначине

$$a^2 + (s - a)^2 = [\varphi(s)]^2,$$

а за другу катету разлику $s - a$. Међутим, ипак између c и s постоји једна врста зависности: напред нађена двострука неједначина

$$(a - b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \leq 2(a + b)^2,$$

показује да c никад не излази из размака који се налази између вредности $s / \sqrt{2}$ и s. Ако се у равни xOy повуку две праве OM и ON, од којих прва заклапа са осом Ox угао од $35°16'$, а други угао од $45°$, тачка P чије су координате $x = s$, $y = c$ никад није изван области између тих правих. Она се може у специјалним случајевима и поклопити са једном или другом од тих двеју правих: и то са правом OM кад је троугао равнокрак, а са правом ON кад се једна катета троугла смањи до нуле.



Између s и c постоји, дакле, једна нарочита врста зависности: једној датој вредности s не одговара ни потпуно одређена, ни сасвим произвољна вредност c, већ једна вредност која се може произвољно мењати само у једноме одређеном размаку, ван кога она никад не може изићи. Зависност која би постојала кад би датој вредности s одговарала једна потпуно одређена вредност c, била би геометријски представљена једном *линијом* у равни; у горњем случају она је представљена једном *пругом* чија је ши-

Међутим, поред такве *потпуно одређене,* постоји још и *непотпуно одређена функционална зависност* између промењљивих количина, на коју смо већ наилазили у ранијим излагању. Појам о њој добићемо најлакше и најбрже из ових неколико простих примера.

На први поглед изгледало би нпр. да не постоји никаква функционална зависност између дужине хипотенузе c и збира s катета a и b једног правоуглог троугла. Тако, могућно је поступно мењати збир s, а да хипотенуза c остане иста, и обрнуто. Довољно је нпр. да се давши збиру s једну произвољно изабрану вредност, за катету a узме један корен квадратне једначине

$$a^2+(s-a)^2=A^2,$$

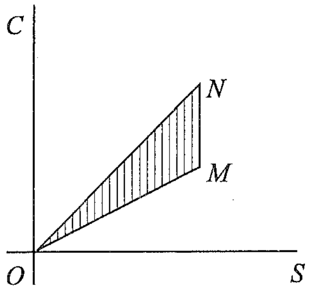
а за другу катету разлику $s-a$, па да, поред све произвољности збира s хипотенуза c има вредност A која се не мења кад се мења s. Тако исто се може учинити да се хипотенуза c мења са збиром s по произвољном закону $c=\varphi(s)$; довољно је узети за катету a један корен квадратне једначине

$$a^2+(s-a)^2=[\varphi(s)]^2,$$

а за другу катету разлику $s-a$. Међутим, ипак између c и s постоји једна врста зависности: напред нађена двострука неједначина

$$(a-b)^2\leq 2(a^2+b^2)\leq 2(a+b)^2,$$

показује да c никад не излази из размака који се налази између вредности $s/\sqrt{2}$ и s. Ако се у равни xOy повуку две праве OM и ON, од којих прва заклапа са осом Ox угао од $35°16'$, а други угао од $45°$, тачка P чије су координате $x=s$, $y=c$ никад није изван области између тих правих. Она се може у специјалним случајевима и поклопити са једном или другом од тих двеју правих: и то са правом OM кад је троугао равнокрак, а са правом ON кад се једна катета троугла смањи до нуле.



Између s и c постоји, дакле, једна нарочита врста зависности: једној датој вредности s не одговара ни потпуно одређена, ни сасвим произвољна вредност c, већ једна вредност која се може произвољно мењати само у једноме одређеном размаку, ван кога она никад не може изићи. Зависност која би постојала кад би датој вредности s одговарала једна потпуно одређена вредност c, била би геометријски представљена једном *линијом* у равни; у горњем случају она је представљена једном *пругом* чија је ширина све већа у колико је дужина s већа, а дужина јој је неограничена. Пруга је ограничена двема правама које се секу у почетку и те граничне праве могу бити стварно достигнуте у појединим специјалним случајевима.

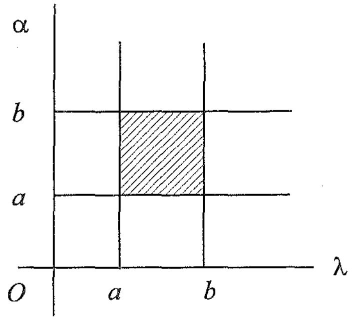
Узмимо, као други пример, једначину трећег степена

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0, \tag{116}$$

чији су коефицијенти реални и позитивни. Означимо са λ вредност једнога, кога било, од три количника

$$\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}. \tag{117}$$

На први мах би изгледало да не постоји никаква функционална зависност између корена једначине и вредности λ, јер се подесним мењањем коефицијената a_0, a_1, a_2, a_3, може учинити да се нпр. λ поступно мења, а да се при томе не промени ни један од три корена. Међутим, ако се пусти да се λ мења у размаку (a, b) између вредности остала два количника (117), напред је показано да апсолутне вредности сва три корена једначине, мењајући се, никако неће изаћи ван размака (a, b).



Једној, дакле, датој вредности λ у размаку (a, b) опет не одговара ни потпуно одређена, ни сасвим произвољна вредност корена, већ свакоме корену одговара по једна вредност, која се може произвољно мењати само у једноме одређеном размаку. Таква зависност, на место тога да буде графички представљена једном *линијом*, биће представљена једном *пругом* непромењиве ширине, једнаке њеној дужини; зависност је исте врсте као и у првоме примеру. Пруга је ограничена двема правама паралелним оси x и двема правама паралелним оси y.

Узмимо, као трећи пример, аритметичку средину

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

једнога низа позитивних бројева $x_1, x_2, \ldots, x_n$ садржаних у једном датом размаку (a, b) и аритметичку средину

$$M = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n},$$

вредности $f(x_k)$, где је $f(x)$ једна дата реална, позитивна и конвексна функција променљиве x у размаку (a, b), тј. таква да је за све вредности x у томе размаку производ

$$f(x) \cdot f''(x)$$

позитиван.

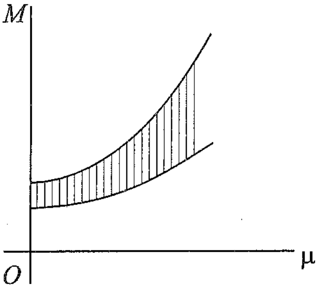
Изгледало би, опет, да не постоји никаква функционална веза између аритметичких средина μ и M, јер се подесним мењањем бројева $x_1, x_2, ..., x_n$ може учинити да се μ потпуно мења, а да се при томе не промени M, или да се мења по произвољно датом закону. Међутим, као што је напред показано, ма како се мењала вредост μ, вредност M, мењајући се, никад неће изаћи ван размака који се налази између вредности

$$f(\mu) \quad \text{и} \quad \frac{f(n\mu)+(n-1)f(0)}{n}.$$

Случај је исте врсте као онај у горња два примера; графички представник зависности између μ и M биће једна *пруга* чија се ширина мења са величином μ, а дужина је неограничена. Пруга је ограничена двема кривим линијама

$$y = f(x) \quad \text{и} \quad y = \frac{f(nx)+(n-1)f(0)}{n}$$

које су обе конвексне према осовини Ox.



Овакву врсту *непотпуно одређене функционалне зависности*, на какву се наилази у горњим примерима, а која је *апсолутно објективна* и призлази од саме природе ствари, не треба мешати са једном *чисто субјективном* чињеницом сличне врсте, на коју се често наилази при решавању математичких задатака. Дешава се, на име, да је, мада задатак има своје математички тачно решење у облику *једога тачнога броја*, до тога решења практички немогуће доћи, али се ипак може утврдити један бројни размак у коме ће се то решење тачно налазити.

Тако нпр. мада је количник обима једнога круга и његовог пречника тачан број $\pi = 3{,}141592...$, овај се не може одредити тачно са свима његовим бескрајно многим децималама, али се нпр. лако сазнаје да се она налази у размаку између $\frac{333}{106}$ и $\frac{22}{7}$.

Тако исто, кад је дата једначина петога степена

$$x^5 - 80x + a = 0,$$

где је a променљив параметар, немогуће је одредити тачно њене корене мада ови постоје; међутим се лако сазнаје применом Rolle-ове теореме да она има:

1° три реална корена кад се a налази у размаку $(-128, +128)$ и та три корена леже у следећим размацима:

α) $a > 0$, у размацима $(-\infty, -2)$, $(0, +2)$, $(+2, +\infty)$,

β) $a < 0$, у размацима $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(+2, +\infty)$;

2° један реалан корен кад се a налази ван размака $(-128, +128)$ и тај се једини реалан корен налази у размаку:

α) $a > 128$, у размаку $(-\infty, -2)$,

β) $a < -128$, у размаку $(+2, +\infty)$.

Али таква је непотпуно одређена зависност између корена и коефицијента чисто субјективна и произлази само од неспособности онога који рачуна да нађе тачну функционалну везу између једне и друге променљиве количине, или између децимала једне и друге, мада таква веза насигурно постоји. Међутим за зависност о којој је реч у напред наведеним примерима, постоји *апсолутна немогућност* да се она геометријски представи *линијом*, јер у ствари и не постоји линија која би је представљала; она је по својој природи изражљива само *пругом* сталне или променљиве ширине. Грубо речено, таква је зависност апсолутно неизражљива трагом који у равни за собом оставља идеално заоштрени врх игле; она се може изразити само трагом који оставља један сегменат праве коначне и од нуле различне дужине, који се транслаторно креће у равни остајући нпр. непрестано паралелан једном одређеном правцу, или непрестано управан на једну дату криву итд.

О тој се врсти зависности мора водити рачуна при склапању задатака, да се не би изложило случајности да задатак буде бесмислен, апсурдан. Задатак нпр. да се одреде углови троугла чије су стране $a = 6$, $b = 2$, $c = 3$, бесмислен је, јер се страна a мора налазити у размаку између $c - b$ и $c + b$. Задатак да се одреде елементи правоуглог троугла чија хипотенуза c има дужину 7 m, а збир катета s износи 10 m, и ако је алгебарски потпуно решљив, јер се за одредбу катета имају две једначине са две непознате, бесмислен је геометријски: дужина c мора се налазити у размаку између s и $0{,}7071\ s$.

У тако простим задацима овакву бесмисленост није тешко уочити и на први поглед. Али у маси задатака то је већ теже. Такав би нпр. један задатак био овакве врсте: знајући обим s и површину једног троугла, дијагоналу d правоуглог паралелопипеда који има за стране медиане тог троугла, одредити елементе истог троугла. Задатак је алгебарски потпуно решљив. Али ако се унапред не води рачуна о томе да се дужина d увек налази у размаку између

$$\frac{s}{2} \quad \text{и} \quad \frac{s}{2}\sqrt{\frac{3}{2}},$$

може се склопити задатак горње врсте који је геометријски бесмислен.

Исти би случај био нпр. са алгебарским задатком да се формира једначина трећег степена

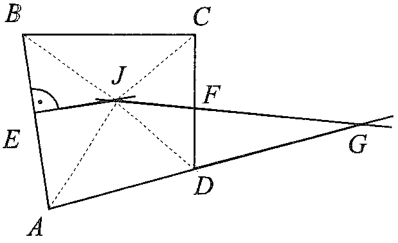
$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0,$$

која ће имати као један корен $x = 3$, а за коју ће сва три количника

$$\frac{a_0}{a_1}, \quad \frac{a_1}{a_2}, \quad \frac{a_2}{a_3}$$

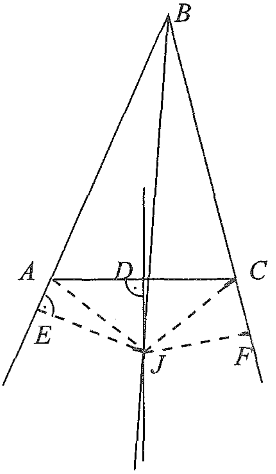
имати дате вредности веће од 4. Корен 3, према ономе што је напред речено, мора се налазити у размаку између најмањег и највећег од та три количника; кад су ови сви већи од 4, корен не може бити 3.

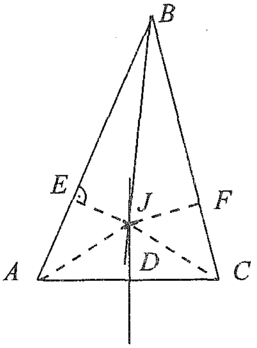
Навешћемо и један од познатих геометријских доказа, који су нетачни ако се при конструкцији не води рачуна о томе, да се извесна тачка при тој конструкцији увек налази, или никад не налази, у једном одређеном размаку.



Нека је дат четвороугао $ABCD$ чији је један угао C прав, један угао D туп, а стране BC и AD међу собом једнаке. Из средина E и F страна AB и CD подигнимо две управне на те стране. Те управне не могу бити паралелне, јер би у том случају биле паралелне и стране AB и CD, што се претпоставља да није случај. Управне у E и F секу се, дакле, у једној тачки J. Било да је та тачка у унутрашњости четвороугаоника, било да је ван овога или на самоме њему, лако се доказује да су троугли AJD и BJC међу собом једнаки и да је према томе угао ADJ једнак углу BCJ, тј. да је угао ADF прав, што по претпоставци није. Грешка произлази отуда што се при горњој конструкцији није водило рачуна о томе да се пресечна тачка J увек налази, не само ван четвороугла, већ и даље од пресечне тачке G стране AD са управном у F у коме је случају горњи доказ немогућ.

У томе се примеру има посла са случајем где једна карактеристична тачка при конструкцији треба да се налази *ван једног одређеног размака*. У следећем примеру она треба да се налази *у једном одређеном размаку*. Нека је ABC ма какав троугао, који има све три стране неједнаке. Повуцимо бисектрису BJ угла B и управну на страну AC у њеној средини D. Те две праве нису паралелне, јер би у томе случају троугао био равнокрак. Оне се дакле секу у једној тачки J. Било да је ова тачка у унутрашњости троугла, било да је ван овога, лако се доказује да су правоугли троугли BJE и BJF, где су праве EJ и FJ управне на AB и BC, међу собом подударни, па је, дакле, $BE = BF$. Тако су исто правоугли троугли AJE и CJF међу собом подударни, па је, дакле, $AE = CF$. Додајући, односно одузимајући једнаким дужинама BE и BF једнаке дужине AE и CF, добија се да је $BA = BC$, што није случај и што би значило да је сваки троугао равнокрак. Грешка произлази отуда што при конструкцији није вођено рачуна о томе да се пресечна тачка J никад не налази у унутрашњости троугла; кад је она већ ван троугла, пресечна тачка E управне спуштене из J на већу страну AB са самом том страном увек се налази у размаку између тачака A и B, у коме случају је горњи доказ немогућ.





Такви примери довољно показују колико се при склапању задатака, или при доказима алгебарских или геометријских резултата, мора унапред водити рачуна о *размацима* у којима се, или ван којих се, одређени елементи морају налазити. А до тих се размака долази проучавањем функционалне зависности између алгебарских или геометријских елемената *и то зависности баш онакве врсте, о каквој је реч у овим предавањима.*

ДРУГИ ОДЕЉАК

БРОЈНИ РАЗМАЦИ У ИНФИНИТЕЗИМАЛНОМ РАЧУНУ

13. ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕЊЕ И ИНТЕГРАЛЕЊЕ БРОЈНИХ РАЗМАКА

Кад је једна променљива y у недовољно одређеној зависности од друге променљиве x, тако, да једној одређеној вредности x одговара, не једна одређена вредност y, већ један размак у коме ће се ова налазити, мењањем вредности x помераће се и мењаће се и деформисаће се и тај размак; крајеви размака описиваће доњу и горњу граничну линију области у којој ће се налазити вредност y.

Ако се пусти да променљива x прирасте, у позитивном или негативном смислу, за dx, ординате и једне и друге граничне линије такође ће прирасти за једну одређену количину која се одређује из једначина тих линија као диференцијал њихових ордината. Али сам прираштај dy променљиве y остаје неодређен; све што се може знати је то да се нова вредност $y + dy$ те променљиве налази између граничних линија, али се ништа не може знати за сам прираштај dy.

То се, уосталом, види и посматрањем рачунског представника

$$y = f(u, v, \lambda), \qquad \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$$

где су u и v две тачно одређене функције променљиве x, а λ_1 и λ_2 два одређена броја. Пошто се λ, и ако увек лежи између та два броја, мења од једне вредност x до друге, то ће и тај параметар λ бити извесна функција променљиве x, за коју ћемо познавати само границе њених варијација, али ни у колико не и њен ток или аналитички облик. Према томе, неће се познавати ни њен извод по x који, и ако λ непрестано лежи у размаку (λ_1, λ_2), може имати ма коју, нама непознату, вредност између $-\infty$ и $+\infty$. Па пошто је

$$dy = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dx}\right)dx,$$

где ћемо тачно познавати вредности свих извода што фигуришу у томе изразу, осим извода $\frac{d\lambda}{dx}$ који остаје потпуно неодређен, то нећемо ни у колико познавати величину dy.

Према томе: *обично диференцијалење бројних размака уопште нема смисла и оно се уопште и не врши.*

Па ипак, у појединим специјалним случајевима, *постоји одређена веза између размака у коме се креће извод функције и размака у коме се креће вредност саме функције.* Тај случај наступа нпр. сваки пут када се зна да је посматрана функција y интеграл какве диференцијалне једначине првога реда

$$y' = f(x, y).$$

Кад се y креће у размаку између $A(x)$ и $B(x)$ при кретању променљиве x у размаку (a, b), може се одредити размак у коме ће се налазити вредност извода y'. Ако се са $N(x)$ и $M(x)$ означе крајеви једног променљивог размака у коме ће се кретати функција двеју променљивих $f(x, y)$, кад се x креће у размаку (a, b), а y у размаку (A, B), очевидно је *да ће се вредност извода* y' *непрестано налазити у томе променљивом размаку* (N, M).

Такав је случај нпр. са ма каквом рационалном функцијом $y = R(x)$ променљиве x; елиминацијом x из двеју једначина

$$y = R(x) \quad \text{и} \quad y' = R'(x)$$

добија се једначина облика

$$y' = T(y)$$

и означивши са N и M најмању и највећу вредност коју има посматрана грана функције $T(y)$ кад се y креће у размаку између вредности $A(x)$ и $B(x)$, вредност y' ће се непрестано налазити у размаку (N, M).

Исти је случај и са ма каквим полиномом $y = P(x)$, као специјалним случајем рационалних функција. Доказан је, шта више, и један општи, а прост резултат према коме, ако се вредности једног полинома n-тог степена, за вредности x садржане у једном датом размаку (a, b), налазе у једноме размаку $(-M, +M)$, вредности његовог извода $P'(x)$ налазиће се, за исте вредности x, непрестано у размаку између вредности $-n^2M$ и $+n^2M$.

Тако исто, показано је да, ако се вредност једног тригонометријског полинома

$$S(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + ... + a_n \cos nx$$

за ма које вредности x, непрестано налази у једноме размаку $(-M, +M)$, вредност његовог извода $S'(x)$ непрестано ће се налазити у размаку $(-nM, +nM)$.

Исто тако, а као што је напред показано, ако је $\varphi(x)$ логаритамски извод једнога полинома n-тог степена чије су нуле све реалне, биће

$$-\varphi'(x) = \frac{1+\vartheta(n-1)}{n} \cdot \varphi^2(x)$$

за сваку вредност x већу од свију нула полинома. Кад се, дакле, вредност $\varphi(x)$ креће у једноме размаку (N, M), вредност $\varphi'(x)$ кретаће се у размаку $\left(\frac{N^2}{n}, M^2\right)$.

Сличан ће се случај имати увек када се из диференцијалне једначине једна функције y може извести закључак да се, за вредност x и y садржане у одговарајућим размацима, извод y' мора непрестано налазити у одређеном размаку.

Али, такви су случајеви изузетни и *у ойшшем случају не йосшоји одређена веза између размака функције и њеноī извода.* Па и у тим изузетним случајевима до те се везе не долази обичним диференцијалењем размака, јер ово уопште нема смисла, већ непосредним закључивањем из специјалних услова које задовољава посматрана функција.

Међутим, лако се уверити да *иншеīралење бројних размака, у одређеним īраницама, има смисла и да се оно уойшше може вршиши са размацима, као и са шачно одређеним функцијама.*

Тако, претпоставимо да је рачунски представник размака y сведен на асиметрички нормални облик

$$y = u + \vartheta v,$$

где су u и v одређене функције променљиве x, и v позитивна функција у једноме посматраном размаку (a, b) променљиве x; уочимо тада одређени интеграл

$$J = \int_a^b y\, dx = \int_a^b u\, dx + \int_a^b \vartheta v\, dx.$$

Први интеграл на десној страни има тачно одређену вредност. Други интеграл, према теореми средњих вредности, има за вредност

$$\vartheta_1 \int_a^b v\, dx\,, \quad 0 \le \vartheta_1 \le 1$$

и према томе је вредност интеграла J одређена размаком чији је рачунски представник, у своме асиметричком нормалном облику

$$J = \int_a^b u\,dx + \vartheta_1 \int_a^b v\,dx$$

што доказује горње тврђење.

Да интеграл једна функције y, дате само размаком у коме се она налази, одиста има смисла у толико, што се она може изразити у облику одређеног размака, види се и из овога: ма какав ток имала крива

$$y = f(x)$$

која се налази између двеју утврђених кривих

$$y_1 = f_1(x) \quad \text{и} \quad y_2 = f_2(x),$$

површина те линије, ограничена луком криве y, двема крајним ординатама и x-осовином, увек се налази у једном размаку који је одређен одговарајућим површинама кривих y_1 и y_2. Међутим, факт да се износ површине криве y налази између два позната износа површина, ни у колико не даје могућности да се позна сам ток криве y; криве y са бескрајно разноврсним током, а које ипак непрестано остају у утврђеном и познатом размаку, могу имати износ површине садржан у једноме истом размаку. Другим речима: интеграл једнога размака, и сам као размак, увек има смисла, док га извод не мора имати.

14. ОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛИ КАО БРОЈНИ РАЗМАЦИ

У непрегледном броју случајева, за један одређени интеграл

1° или није могућно тачно израчунати му вредност, или је такво израчунавање заметно и тешко;

2° или, за оно што се има у виду, није ни потребно знати му тачну, па чак ни врло приближну вредност, већ само његову овлашну величину или његов инфинитезимални ред наспрам друге које количине са којом се упоређује.

У таквим случајевима интеграл се одређује у облику једног бројног размака у коме се он налази, што је увек извршљиво и што је врло често довољно за оно што се има у виду.

Тако се нпр. интеграл

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}$$

за произвољну вредност n не може тачно израчунати; међутим се лако налази да његова вредност увек лежи између 0,50 и 0,524 за ма коју вредност $n > 2$.

Тако исто, интеграл

$$J = \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

се не може израчунати док не буде тачно дата функција $f(x)$ па и тада је то уопште немогућно, сем у изузетним и ретким случајевима; међутим се налази да његова вредност увек лежи у једном одређеном размаку $\left(\frac{A}{n}, \frac{B}{n}\right)$, где A и B зависе само од облика функције $f(x)$, а ни у колико не од n. Тај резултат игра доста важну улогу при испитивању конвергенције тригонометријских редова и довољан је за многа друга испитивања и израчунавања.

Интеграл

$$J = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} \, dx$$

се може, за дату вредност целога броја n, израчунати са апсолутном тачношћу, јер је његова вредност цео број 1, 2, 3,..., n. Али за велике вредности n такво је израчунавање практички тешко и заметно, јер се имају извршити множења бројева са великим бројем цифара. Међутим се налази да вредност интеграла лежи у размаку између

$$e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} \quad \text{и} \quad e^{-n+\frac{1}{12n}} n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}$$

и ако се нпр. за $n = 20$ узме за ту вредност доњи крај овог размака, добија се на доста брз начин

$$J = 2422786385510400000$$

на место тачне вредности

$$J = 2432902008176640000;$$

разлика између двеју вредности је велика, али се ипак из тих вредности добија овлашна, за многа питања довољно одређена представа о величини интеграла J, која је нпр. за доказивање појединих теорема довољна.

Постоји пространа област случајева, у којима се један одређени интеграл може лако одредити у облику бројног размака, ширег или ужег према природи случаја. За образац који изражава једну пространију класу одређених интеграла у облику размака, каже се да представља једну *теорему средње вредности* за ту класу интеграла; разлог се називу налази у томе што се интеграл таквим обрасцем одређује као нека средња, и ако недовољно одређена, вредност између крајева размака.

Таквих теорема средњих вредности има доста велики број, и овде ће бити наведене неке од њих које имају простране области своје применљивости.

15. ОБИЧНА ТЕОРЕМА СРЕДЊИХ ВРЕДНОСТИ ИНТЕГРАЛА

Она гласи:

Ако су f_1, f, f_2 *три функције променљиве* x, *коначне у размаку* (a, b) *те променљиве и такве да је за све вредности* x *у томе размаку*

$$f_1 \le f \le f_2,$$

биће

$$\int_a^b f(x)\,dx = u + \vartheta v, \qquad (118)$$

где је

$$u = \int_a^b f_1(x)\,dx, \quad v = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx.$$

Доказ да је у томе што оба интеграла

$$\int_a^b (f - f_1)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^b (f_2 - f)\,dx$$

немају ни један негативан интегрални елеменат, па оба имају позитивну вредност.

Кад је дат интеграл

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^{\alpha}}},$$

где је α један ма колики број већи од 2, пошто је између интегралних граница $x^{\alpha} < x^2$, биће за све вредности x у размаку $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

$$1 < f < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

тако да се може узети

$$f_1 = 1, \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

и онда је

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f_1 dx = \frac{1}{2} = 0,5, \quad \int_0^{\frac{1}{2}} f_2 dx = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = 0,523...$$

и према томе

$$J = 0,5 + \vartheta \cdot 0,023...$$

Непосредна последица горње теореме је ова:

Нека су f *и* φ *две функције променљиве* x, *коначне у размаку* (a, b) *променљиве* x, *у коме* φ *непрестано задржава један исти знак (нпр. +) и за које вредности функције* f *непрестано остају у области ограниченој двема функцијама* f_1 и f_2, *тако да је*

$$f_1 \leq f \leq f_2;$$

тада ће бити

$$\int_a^b f\varphi\, dx = u + \vartheta v,$$

где је

$$u = \int_a^b f_1\varphi\, dx, \quad v = \int_a^b f_2\varphi\, dx - \int_a^b f_1\varphi\, dx.$$

Довољно је у првој теореми узети $f\varphi$ за f, $f_1\varphi$ за f_1 и $f_2\varphi$ за f_2.

У случају кад, за све вредности x у размаку (a, b), вредности функције f остају у размаку између два стална броја N и M, биће

$$\int_a^b f\varphi\, dx = \left[N + \vartheta(M - N)\right]\int_a^b \varphi\, dx.$$

Узмимо, као пример, одредбу збира s реда

$$(119) \qquad \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} - ...$$

који је конвергентан за $b > 0$; та одредба је веома дуга и заметна (нарочито кад је вредност b мала наспрам вредности a), а међу тим се помоћу обрасца (118) s брзо и доста тачно одређује у облику размака.

Тога ради приметимо да је

(120) $$\frac{1}{a+pb}=\frac{1}{b}\int_0^1 x^{p+\frac{a}{b}-1}dx, \quad (p=1,2,3...)$$

па дакле наш ред

$$s=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{a+3b}-...$$

имаће за збир

(121) $$s=\frac{1}{b}\int_0^1 \frac{x^{\frac{a}{b}}}{1+x}dx.$$

Ако се сад стави да је

$$\frac{1}{1+x}=\left(1-x+\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{4}x^3\right)+U,$$

налази се да је

$$U=\frac{1}{4}\frac{x^2(1-x)^2}{1+x}.$$

Функција U остаје непрестано позитивна у размаку (0,1) променљиве x и достиже свој максимум за

$$x=\frac{\sqrt{33}-3}{6}=0,457427...,$$

а вредност тог максимума је 0,0106... . Према томе је у размаку (0,1)

$$0<U<0{,}0106,$$

што значи, ако се стави

$$\psi(x)=1-x+\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{4}x^3,$$

биће, за вредности x у размаку (0,1),

$$\psi(x)\le\frac{1}{1+x}\le\psi(x)+0,0106...,$$

тј.

$$\frac{1}{1+x}=\psi(x)+\vartheta\cdot 0,0106..., \qquad 0\le\vartheta\le 1.$$

Образац (121) добија тада облик

$$s = \frac{1}{b}\int_0^1 x^{\frac{a}{b}}\psi(x)dx + \frac{\vartheta'}{b}\int_0^1 x^{\frac{a}{b}}dx \cdot 0{,}0106...$$

што, кад се изврше означене интеграције, доводи до обрасца

$$s = \left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+2b} + \frac{3}{4}\frac{1}{a+3b} - \frac{1}{4}\frac{1}{a+4b}\right) + \vartheta'\frac{0{,}0106...}{a+b}.$$

Тај образац даје збир s са грешком увек позитивном, а која никад не премаша $\frac{0{,}0106...}{a+b}$. Да би се толика тачност имала непосредним сумирањем реда, требало би сабрати најмање 94 члана.

Као другу последицу горње теореме навешћемо то, да кад је f коначна и непрекидна функција у размаку (a, b) променљиве x, и кад њене вредности за тај размак непрестано леже у размаку између два броја N и M, увек је

$$\int_a^b f(x)\,dx = [N + \vartheta(M - N)](b - a). \tag{122}$$

Довољно је узети да је у последњој теореми $\varphi = 1$. Ако се, пак, са $\varphi(x)$ означи једна функција која има за извод функцију $f(x)$, биће

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

и образац (122) постаје

$$\varphi(b) - \varphi(a) = [N + \vartheta(M - N)](b - a), \tag{123}$$

где су N и M такве две вредности, да се за све вредности променљиве x у размаку (a, b) вредности извода $\varphi'(x)$ налазе у размаку (N, M).

Образац (123) зове се *образац за коначне прираштаје* произвољне функције $\varphi(x)$ тј. он даје коначни прираштај $\varphi(b) - \varphi(a)$ те функције у облику једног размака. Тај ће размак бити најужи ако се за N и M узме најмања и највећа међу вредностима које добија $\varphi'(x)$ за време док се x мења од a до b; он се обично изражава у облику (в. стр. 72 и 73)

$$\varphi(b) - \varphi(a) = (b - a)\varphi'(c),$$

где је c једна вредност што се налази између a и b.

Образац (122) не претпоставља ништа друго за функцију f, осим њену коначност и непрекидност у размаку (a, b). Ако су, међутим, познате још и неке друге особине посматране функције, размак одређен десном страном једначине (122), може бити замењен неким ужим размацима.

Тако нпр. кад је функција $f(x)$ позитивна и конвексна у размаку (a, b), тј. таква да је за ма који пар вредности x' x'' у томе размаку непрестано

$$\frac{f(x')+f(x'')}{2} \leq f\left(\frac{x'+x''}{2}\right),$$

доказује се да је

$$(124) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \left[M + N + \vartheta(M-N)\right]\cdot\frac{b-a}{2};$$

размак (124) очевидно је ужи од размака (122).

Кад је $f(x)$ какав тригонометријски полином n-тог реда, тј. облика

$$f(x) = (a_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx) + \\ + (b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots + b_n \cos nx),$$

доказује се (теорема Fejér-a) да је

$$(125) \int_a^b f(x)\,dx = \left[\left(N + \frac{M-N}{n+1}\right) + \vartheta\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)(M-N)\right]\frac{b-a}{2};$$

размак (125) је најужи могућни размак док се остаје у генералности, јер су његове обе границе стварно достигнуте за поједине специјалне тригонометријске полиноме $f(x)$.

На сличан је начин одређен и најужи могућни размак за интеграл (122) кад је $f(x)$ какав полином n-тог степена по x.

16. ДРУГА ТЕОРЕМА СРЕДЊИХ ВРЕДНОСТИ ИНТЕГРАЛА

Доказаћемо најпре један помоћни Abel-ов став за два коначна или бескрајна низа реалних бројева

$$(126) \qquad \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p,$$

$$(127) \qquad u_0, u_1, u_2, \ldots, u_p,$$

од којих се за прве претпоставља да су позитивни и да опадају са својим рангом. Став гласи:

Ако се сви збирови

$$S_0 = u_0, \quad S_1 = u_0 + u_1, \quad S_2 = u_0 + u_1 + u_2, \dots, \quad S_p = u_0 + u_1 + \dots + u_p$$

налазе у једноме бројном размаку (A, B), збир

$$(128) \qquad V = \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p$$

налазиће се у размаку $(A\alpha_0, B\alpha_0)$.

Јер, пошто се може написати да је

$$u_0 = S_0, \quad u_1 = S_1 - S_0, \quad u_2 = S_2 - S_1, \dots, \quad u_p = S_p - S_{p-1},$$

биће

$$(129) \qquad V = (\alpha_0 - \alpha_1)S_0 + (\alpha_1 - \alpha_2)S_1 + (\alpha_2 - \alpha_3)S_2 + \dots$$
$$\dots + (\alpha_{p-1} - \alpha_p)S_{p-1} + \alpha_p S_p.$$

По претпоставци, свака од разлика $\alpha_{k-1} - \alpha_k$ је позитивна; према томе, ако се на десној страни израза (121) сваки збир S_k смени најпре својом доњом границом A, па затим својом горњом границом B, биће очевидно

$$A\alpha_0 < V < B\alpha_0,$$

чиме је став доказан.

Нека је сад дат интеграл

$$J = \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx, \qquad (a < b)$$

где је $\varphi(x)$ каква непрекидна, позитивна и непрестано опадајућа функција за вредност x у размаку (a, b) а $f(x)$ је ма каква функција за коју интеграл $\int_a^x f(x)\,dx$ има смисла за вредности x у размаку (a, b).

Ако се размак (a, b) подели на n размака

$$x_1 - a, \quad x_2 - x_1, \quad x_3 - x_2, \dots, b - x_{n-1},$$

интеграл ће бити гранична вредност збира

$$f(a)\varphi(a)(x_1 - a) + f(x_1)\varphi(x_1)(x_2 - x_1) + \dots + f(x_{n-1})\varphi(x_{n-1})(b - x_{n-1})$$

кад n бескрајно расте и кад сваки од размака $x_k - x_{k-1}$ тежи нули.

Ако се у горњем ставу узме да је

$$\alpha_0 = \varphi(a), \quad \alpha_1 = \varphi(x_1), \quad \alpha_2 = \varphi(x_2), \dots$$

и

$$u_0 = f(a)(x_1 - a), \quad u_1 = f(x_1)(x_2 - x_1) \quad u_2 = f(x_2)(x_3 - x_2), \dots$$

биће

$$\begin{aligned} S_0 &= f(a)(x_1 - a), \\ S_1 &= f(a)(x_1 - a) + f(x_1)(x_2 - x_1), \\ S_2 &= f(a)(x_1 - a) + f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)(x_3 - x_2), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_{n-1} &= f(a)(x_1 - a) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \dots + f(x_{n-1})(b - x_{n-1}), \end{aligned}$$

и према томе биће

$$V = f(a)\varphi(a)(x_1 - a) + f(x_1)\varphi(x_1)(x_2 - x_1) +$$

$$+ f(x_2)\varphi(x_2)(x_3 - x_2) + \dots + f(x_{n-1})\varphi(x_{n-1})(b - x_{n-1}).$$

Према горњем ставу, ако се сви збирови S_k налазе у једном размаку (A, B), збир ће се V налазити у размаку између $A\varphi(\alpha)$ и $B\varphi(\alpha)$.

То важи за ма колики број n уметнутих размака $x_k - x_{k-1}$, па и кад се пусти да n бескрајно расте. Збир V постаје тада интеграл J, а збир S_k, узевши да је увек $x_{k+1} \leq x$, тежи интегралу,

$$S = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Ако се са N' и M' означе једна доња и једна горња граница интеграла

$$\text{(130)} \qquad \int_a^x f(x)\,dx,$$

збир ће се V налазити у размаку између

$$N'\varphi(a) \quad \text{и} \quad M'\varphi(a),$$

тј. биће

$$\text{(131)} \qquad J = \left[N' + \vartheta(M' - N')\right]\varphi(a).$$

Томе се резултату може дати још и овај облик: ако се са N и M означе најмања и највећа вредност коју добија интеграл (130) за вредност x у размаку (a, b), вредност $\dfrac{J}{\varphi(a)}$ налазиће се у размаку (N, M), тј.

она ће бити једнака вредности коју добија интеграл (130) за једну извесну вредност $x = \xi$ што се налази у размаку (a, b), тј. једнака вредности

$$\int_a^\xi f(x)\,dx, \quad a < \xi < b.$$

Према томе је

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx, \quad a < \xi < b \tag{132}$$

и у томе се састоји *први део теореме Ossian-Bonnet-a,* познате под именом *друге теореме средњих вредности интеграла.*

У случају кад је $\varphi(x)$ позитивна и растућа функција променљиве x у размаку (a, b), на исти се начин доказује образац

$$J = \left[P' + \vartheta(Q' - P')\right]\varphi(b), \tag{133}$$

где су P' и Q' једна доња и једна горња граница интеграла

$$\int_x^b f(x)\,dx, \tag{134}$$

док x варира од a до b.

Томе се резултату, на исти начин као и у првом случају, може дати и облик:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx, \quad a < \xi < b; \tag{135}$$

што је други део теореме Ossian-Bonnet-a.

Лако се увиђа да знак функције $\varphi(x)$ у размаку (a, b) не утиче на доказивање образаца (132) и (135); он може само повући за собом међусобну пермутацију вредности M', N', односно P', Q', што не мења обрасце (132) и (135).

Претпоставимо да сада функција φ мења, у размаку (a, b) променљиве x, свој смисао варијација, тако да наизменично расте и опада. Поделимо тада размак (a, b) на узастопне размаке

$$(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, b) \tag{136}$$

такве, да се у сваком од њих φ мења у истом смислу, непрестано растући или непрестано опадајући. Интеграл J ће бити збир од интеграла

$$\int_{a}^{x_1}, \int_{x_1}^{x_2}, \dots, \int_{x_{n-1}}^{b}$$

и за сваки од ових горња ће теорема дати по један размак у коме ће се интеграл налазити. Из тога се, према ономе што је раније показано, може извести размак у коме ће се налазити и сам интеграл J.

Тако нпр. кад је дат интеграл

$$(137) \qquad J = \int_{a}^{b} \psi(x) \cos nx \, dx,$$

ако се узме да је

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad \text{и} \quad f(x) = \cos nx,$$

па се размак (a, b) подели на размаке (136) такве да се у сваком од њих функција $\psi(x)$ мења непрестано у једном смислу, према горњој теореми имаћемо за један од размака (x_k, x_{k+1}) у коме она непрестано *опада*

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \psi(x) \cos nx \, dx = \psi(x_k) \int_{x_k}^{\xi_1} \cos nx \, dx = \psi(x_k) \frac{\sin n\xi_1 - \sin nx_k}{n},$$

а за један од размака (x_i, x_{i+1}) у коме она непрестано *расте*

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(x) \cos nx \, dx = \psi(x_{i+1}) \int_{\xi_2}^{x_{i+1}} \cos nx \, dx = \psi(x_{i+1}) \frac{\sin nx_{i+1} - \sin n\xi_2}{n}.$$

Интеграл J, као збир свих тих интеграла, добиће се у облику

$$J = \frac{A + \vartheta B}{n},$$

где су A и B вредности које, као линеарне комбинације синуса са коефицијентима што не зависе од n, остају коначне кад n бескрајно расте. Према томе *за велике вредности* n *интеграл се* J *понаша као* $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{n}}$, *где је* H *једна коначна количина.*

Исти се резултат добија и на исти начин, за интеграл

$$(138) \qquad J = \int_{a}^{b} \psi(x) \sin nx \, dx.$$

Ти су резултати од важности при испитивању конвергенције тригонометријских редова, тј. редова уређених по $\sin nx$ и $\cos nx$, јер су коефицијенти тих редова интеграли облика (137) и (138).

17. ЛУЧНИ ИНТЕГРАЛИ КАО БРОЈНИ РАЗМАЦИ

Луци кривих у равни

Кад су дате две реалне количине u и v, означивши са $\dot{u}$ и $\dot{v}$ њихове апсолутне вредности, биће

$$\sqrt{u^2+v^2}=\lambda(\dot{u}+\dot{v}),\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\le\lambda\le 1.$$

Ако су u и v две функције променљиве x, множећи их са dx и интегралећи у једном размаку (a, b) те променљиве, за који оба интеграла

$$J_1=\int_a^b \dot{u}\,dx \quad \text{и} \quad J_2=\int_a^b \dot{v}\,dx$$

имају смисла, биће према томе

$$J=\int_a^b \sqrt{u^2+v^2}\,dx=\lambda(J_1+J_2),$$

тако, да ако се нпр. узме за λ средина размака у коме се та вредност налази, биће

$$J=0,8535(J_1+J_2),$$

са учињеном грешком која не премаша $0{,}1465(J_1+J_2)$; процентна грешка не достиже, дакле, никад 15%.

Тако се добија да се, нпр. вредност елиптичног интеграла

$$J=\int_a^b \sqrt{h+kx^4}\,dx,$$

(где су h и k позитивни бројеви) увек налази у размаку између вредности

$$0,7071\left[(b-a)\sqrt{h}+\frac{\sqrt{k}}{3}(b^3-a^3)\right] \quad \text{и} \quad (b-a)\sqrt{h}+\frac{\sqrt{k}}{3}(b^3-a^3).$$

Горњи образац даје могућност да се одреди размак, у коме ће се налазити дужина лука дате криве линије у равни, између двеју његових тачака, *помоћу интеграла простијих од лучног интеграла.*

Тако, кад крива $y = f(x)$ никако не опада у размаку (a, b), дужина њеног лука s у томе размаку биће

$$s = \int_a^b dx\sqrt{1+f'(x)^2} = \lambda\left[(b-a)+f(b)-f(a)\right], \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \le \lambda \le 1,$$

а кад крива никако не расте у том размаку биће

$$s = \lambda[(b-a)+f(a)-f(b)].$$

Гранична вредност $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ достигнута је у случају праве $y = x + c$, а гранична вредност $\lambda = 1$ у случају праве $y = c$.

Тако би се, нпр., дужина лука параболе трећег степена

$$y = \alpha x^3, \quad (\alpha > 0)$$

између тачака $x = a$ и $x = b$, налазила у размаку између

$$0{,}7071[(b-a)+\alpha(b^3-a^3)] \quad \text{и} \quad (b-a)+\alpha(b^3-a^3).$$

Ако, пак, крива наизменично расте и опада дуж лука s, може се поделити на луке $s_1, s_2, s_3, \dots$ дуж којих крива има један исти смисао, па на сваки од ових лукова применити горњи образац и резултате сабрати у лук s.

Тако се може решити у облику размака и овај, у општем случају тачно нерешљив задатак:

Одредити криве у равни чији је лук s *дата функција* f(x, y) *координата његове крајње тачке* (x, y).

Нека су x_0, y_0 координате почетне тачке лука; сменивши у једначини задатка $s = f(x, y)$ лук s са

$$\lambda[(x-x_0)+(y-y_0)],$$

или са

$$\lambda[(x-x_0)-(y-y_0)], \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \le \lambda \le 1,$$

(према томе да ли се крива дуж лука s пење или силази), тражене криве биће одређене једном или другом од области у равни (x, y):

$$f(x,y)-\lambda[(x-x_0)+(y-y_0)] = 0,$$
$$f(x,y)-\lambda[(x-x_0)-(y-y_0)] = 0.$$

Тако нпр. једначине растуће гране кривих што пролазе кроз координатни почетак, а чији је лук облика

$$s = (mx + n)y - (hx + k),$$

(где су m, n, h, k позитивне константе) увек се могу довести на облик

$$y = \frac{(h+\lambda)x + k}{mx + (n-\lambda)},$$

тако, да се за позитивне вредности x те гране увек налазе између двеју хипербола:

$$y = \frac{(h+0{,}7071)x + k}{mx + (n-0{,}7071)} \quad \text{и} \quad y = \frac{(h+1)x + k}{mx + (n-1)};$$

и опадајуће гране ће се такође налазити између двеју хипербола које је лако одредити.

Луци кривих у простору

Ако су u, v, w три реалне функције, биће

$$\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \lambda(\dot{u} + \dot{v} + \dot{w}), \qquad \frac{1}{\sqrt{3}} \le \lambda \le 1.$$

Означивши са

$$J_1 = \int_a^b \dot{u}\, dx, \quad J_2 = \int_a^b \dot{v}\, dx, \quad J_3 = \int_a^b \dot{w}\, dx,$$

биће

$$J = \int_a^b \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}\, dx = \lambda(J_1 + J_2 + J_3),$$

тако, да ако се за λ узме средина размака у коме се та вредност налази, биће

$$J = 0{,}7887(J_1 + J_2 + J_3)$$

са учињеном грешком која не прелази $0{,}2113(J_1 + J_2 + J_3)$.

Када је нпр. крива у простору дефинисана једначинама $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$, где су f и φ растуће функције променљиве x у размаку (a, b) те променљиве, дужина s лука криве у томе размаку биће

$$s = \int_a^b dx \sqrt{1 + f'^2 + \varphi'^2} = \lambda[(b-a) + f(b) + \varphi(b) - f(a) - \varphi(a)],$$

а сличан се резултат има и за ма који начин варијације функција f и φ у размаку (a, b).

Луци кривих у хиперпростору

За лук једне криве у хиперпростору од n димензија казаћемо да *има моношони шок* према једноме узетом праволинијском и правогулом координатном систему $Ox_1, \ldots, Ox_n$, ако дуж тога лука, идући са једног краја на дуги, ни једна од координата x_i не мења свој смисао варијација, тако да свака од њих при том или непрестано расте, или непрестано опада.

Ако се са α_k означи јединица, кад јој се прида непроменљив знак диференцијала dx_k дуж лука s, биће

$$ds^2 = (\alpha_1 dx_1)^2 + \ldots + (\alpha_n dx_n)^2, \qquad s = \int_{P_0}^{P_1} ds,$$

где P_0 и P_1 означују крајње тачке лука s. Према томе је

$$ds = \lambda(\alpha_1 dx_1 + \ldots + \alpha_n dx_n), \qquad \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \lambda \leq 1.$$

Ако се са X_k означи коначни прираштај координате x_k при преласку од једнога краја лука на други, из горњих се образаца изводи овај резултат:

Дужина лука s *налази се у размаку између*

$$N = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \quad \text{и} \quad M = X_1 + \ldots + X_n, \tag{139}$$

тј.

$$s = \lambda(X_1 + \ldots + X_n), \qquad \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \lambda \leq 1.$$

У случајевима кад поједине координате x_i престају имати монотон ток дуж лука s, овај се може поделити на више лукова $s_1, s_2, s_3, \ldots$ таквих, да дуж сваког до њих све координате имају монотон ток. Применивши тада на сваки од лукова s_k горњи резултат, сумирањем добијених размака добио би се размак у коме ће се налазити дужина самог лука s.

Све се то непосредно примењује и на интеграле

$$J = \int_a^b \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2}\, dx,$$

где су f_i функције променљиве x. Ако која од ових мења знак у размаку (a, b), тај ће се размак поделити на друге, у којима свака од функција има монотон ток; на такве размаке интеграције применио би се горњи резултат и сабирањем добијених размака за поједине интеграле добио би се размак варијације интеграла J.

Истегљивост лукова са монотоним током

Нека је дат лук s у хиперпростору од n димензија, који има монотон ток према узетом координатном систему $Ox_1, \ldots, Ox_n$. До које се мере може тај лук истегнути а да се не промене његове крајње тачке и да не изгуби монотонију свога тока?

Пошто је сваки прираштај X_k координата при преласку од једног краја лука до другог, при таквој деформацији, остао непромењен, нови, деформисани лук s' налазиће се опет у размаку (N, M) датом обрасцем (139). А пошто се и првобитни лук s налази у томе истом размаку, лук s' може бити највише $\sqrt{n}$ пута дужи од лука s, из чега излази овај закључак:

Један лук у простору од n *димензија, са утврђеним крајњим тачкама, не може се истегнути више од* $\sqrt{\text{n}}$ *пута, а да при том истезању не изгуби монотонију свога тока.*

Та крајња граница истегљивости постигнута је у специјалном случају кад се лук s састављен из сегмента праве

$$\alpha_1 x_1 + a_1 = \alpha_2 x_2 + a_2 = \ldots = \alpha_n x_n + a_n, \quad (a_i = \text{const.})$$

деформише тако, да се претвори у испреламану линију састављену из n праволинијских сегемната паралелних координатним осовинама, а која линија пролази кроз крајеве сегмента s.

Тако, *лук у равни не може се истегнути више од 1,4142... пута, а лук кривих у обичном простору више од 1,7320... пута без губитка монотоније свог тока*. Те су крајње границе достигнуте кад се лук s своди на сегменат праве која гради исти угао са сваком до координатних оса, а деформисани лук s' поклопи са испреламаном линијом, што пролази кроз крајеве лука s, састављеном из праволинијских комада паралелних координатним осама.

Однос између дужине лука и праваца дирака за криве у равни

Нека је s дужина лука једне непрекидне криве између крајњих тачака A и B лука, а l дужина тетиве AB. Може се доказати да:

Синус половине угла који граде међу собом два произвољна правца у равни криве, а која нису паралелна ни једној дирци на кривој дуж лука s, *никад не премаша вредност* $\frac{1}{s}$.

Јер ако се за координатне осе узму две праве паралелне таквим двама правцима што пролазе кроз тачке A и B и ако се са α_1 и α_2 означи јединица, пошто јој се прида знак диференцијала dx и dy, обе су вредности $\alpha_1 dx$ и $\alpha_2 dy$ позитивне дуж лука s. То излази из тога, што, по претпоставци, дуж лука s ниједна дирка није паралелна ни једној ни другој од координатних оса, па према томе сваки од диференцијала dx и dy задржава непромењен знак дуж целог тог лука.

Ако се са ϑ означи угао између две праве узете за координатне осе, лук се s може изразити обрасцем

$$s = \int_A^B \sqrt{(\alpha_1 dx)^2 + (\alpha_2 dy)^2 - 2(\alpha_1 dx)(\alpha_2 dy)\cos\vartheta}.$$

А пошто је страна ds елементарног троугла мања од збира осталих двеју страна, то је квадратни корен под знаком интеграла мањи од вредности $\alpha_1 dx + \alpha_2 dy$. Ако су, дакле, $(a, 0)$ и $(0, b)$ координате крајњих тачака A и B, а h дужина

$$h = \alpha_1 a + \alpha_2 b,$$

биће

$$s < h. \tag{140}$$

Са друге стране, дужина тетиве AB има за израз

$$l = \sqrt{(\alpha_1 a)^2 + (\alpha_2 b)^2 - 2(\alpha_1 a)(\alpha_2 b)\cos\vartheta},$$

а као што је напред показано (стр. 103), израз на десној страни никад нема мању вредност од

$$(\alpha_1 a + \alpha_2 b)\sin\frac{\vartheta}{2},$$

према чему је

$$l > h\sin\frac{\vartheta}{2}. \tag{141}$$

Упоређењем неједначина (140) и (141) добија се да је

$$\sin\frac{\vartheta}{2} < \frac{l}{s}, \quad \text{тј.} \quad \sin\frac{\vartheta}{2} < \frac{\lambda l}{s}, \qquad 0 \leq \lambda < 1, \tag{142}$$

што доказује горње тврђење. А томе резултату се може дати и овај облик:

Кад дужина лука није мања од k *пута дужине тетиве, угао између ма која два правца, који нису паралелни ниједној дирци на кривој дуж тога лука, има за синус своје половине једну вредност која не премаша* $\frac{1}{k}$.

Као што се види, сама чињеница да постоје два правца који нису паралелни ни једној дирци на кривој дуж лука s, повлачи собом неједнакост

$$(143) \qquad s < \frac{l}{\sin\frac{\vartheta}{2}}, \quad \text{тј.} \quad s = \frac{\lambda l}{\sin\frac{\vartheta}{2}}, \qquad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

где ϑ означује угао између та два правца.

Тако нпр. кад год постоје две, један на другом управна правца, који нису паралелни ни једној дирци дуж лука s, дужина лука никад не прелази $l\sqrt{2}$.

Приметимо да се горњој граници за лук s, представљеној десном страном неједначине (143), лук s може у специјалном случају приближити колико год се хоће: то ће бити за криве које се врло мало разликују од двеју страна равнокраког троугла чија је основица дужина l а ϑ угао између тих двеју страна.

18. ПОВРШИНЕ У ПРОСТОРУ КАО БРОЈНИ РАЗМАЦИ

Као пример за одредбу износа површине у простору у облику бројног размака, навешћемо такву одредбу за *обртне површине.*

Нека је P обртна површина описана обртањем лука s једне криве у равни око једне осовине коју ћемо узети за осу Ox. Означимо

1° са A апсолутну вредност износа равне површине ограничене луком s, обртном осом Ox и ординатама крајних тачака лука s;

2° са B равну површину која има за износ: *a*) или апсолутну вредност полу-разлике квадрата ордината крајних тачака лука s (то у случају кад крива има монотон тон дуж целог лука s); *b*) или збир апсолутних вредности полу-разлика квадрата ордината крајних тачака лукова на које се може поделити лук s тако, да у сваком од тих крива задржава монотонију тока;

3° са R страну квадрата чија је површина $A + B$.

Тада се може доказати овај резултат:

Износ површине P *једнак је износу површине круга полупречника* $r = \lambda R$, *где је* λ *један апсолутан број који се за све обртне површине налази у размаку између*

$$\sqrt[4]{2} = 1{,}1892\ldots \quad \text{и} \quad \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$$

Да бисмо то доказали, претпоставимо најпре да крива има монотон ток дуж целог лука s, и нека су (x_0, y_0) и (x_1, y_1) координате крајњих тачака M_0 и M_1 лука. Тада је

$$P = 2\pi\int_{x_0}^{x_1} y\,ds = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{(\alpha_1 dx)^2 + (\alpha_2 dy)^2},$$

где α_1 и α_2 означују јединицу, пошто јој се прида непромењив знак диференцијала dx и dy. Па пошто је

$$\sqrt{(\alpha_1 dx)^2 + (\alpha_2 dy)^2} = \lambda'(\alpha_1 dx + \alpha_2 dy), \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \lambda' \leq 1,$$

то је

$$P = \lambda' 2\pi\left[\alpha_1\int_{x_0}^{x_1} y\,dx + \alpha_2\frac{y_1^2 - y_0^2}{2}\right].$$

Према томе, пошто је

$$\alpha_1\int_{x_0}^{x_1} y\,dx = A \quad \text{и} \quad \alpha_2\frac{y_1^2 - y_0^2}{2} = B,$$

добија се да је

$$P = \lambda' 2\pi(A + B) = \pi(R\sqrt{2\lambda'})^2 = \pi r^2,$$

где је

$$r = \lambda R, \quad \text{са} \quad \lambda = \sqrt{2\lambda'},$$

и према томе

$$\sqrt[4]{2} \leq \lambda \leq \sqrt{2},$$

чиме је горњи резултат доказан.

Претпоставимо сад да крива ма колико пута мења монотонију свога тока дуж лука s; такав се лук може разделити на лукове (континуалне или испреламане)

$$(144) \qquad M_0M', \quad M'M'', \quad M''M''', \ldots$$

такве да крива у свакоме од њих има монотон ток. Означимо тада:

1° са A', A'', A'''... износе површина A што одговара луцима (144);

2° са B', B'', B'''... износе равних површина B што одговарају истим луцима;

3° са P', P'', P'''... износе површина описаних обртањем истих лукова око осе Ox.

Тада ће, према овоме што претходи, бити

$$2\pi\frac{A'+B'}{\sqrt{2}} \leq P' \leq 2\pi(A'+B'),$$
$$2\pi\frac{A''+B''}{\sqrt{2}} \leq P'' \leq 2\pi(A''+B''),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

а из тога се сабирањем добија

$$\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\left[\sum A^{(i)} + \sum B^{(i)}\right] \leq \sum P^{(i)} \leq 2\pi\left[\sum A^{(i)} + \sum B^{(i)}\right].$$

Збир $\Sigma A^{(i)}$ једнак је износу целокупне површине A ограничене луком s, осом Ox и ординатама крајњих тачака лука s; збир $\Sigma\ B^{(i)}$ једнак је износу површине B, који је једнак збиру апсолутних вредности полуразлика квадрата узастопних ордината на крајевима лукова (144).

Износ целокупне површине

$$P = \sum P^{(i)}$$

описане обртањем лука s око Ox, има, дакле, опет за вредност $P = \pi r^2$, тако да горе доказани резултат важи и онда кад крива мења монотонију свога тока дуж лука s ма колико пута.

Отуда општи закључак:

Полуйречник r *круīа, чија је йовршина једнака износу* P *обрШне йовршине, увек се налази у размаку између*

$$1{,}1892\,R \quad \text{и} \quad 1{,}4142\,R.$$

Ако се за P узме средина тога размака, тако да буде

$$r = 1{,}3017\,R,$$

учињена релативна грешка биће, по апсолутној вредности, мања од 0,0864, тј. процентална грешка не достиже 9% ни за коју обртну површину.

Границе тако одређених размака су у исто време и *најуже īранице* док се остаје у претпостављеној генералности, јер се њима одређен размак не може сузити, а да се та генералност не изгуби. То се види из тога, што су обе границе одиста достигнуте у појединим случајевима.

Тако, граница $\lambda' = \frac{1}{\sqrt{2}}$, тј. граница $\lambda = \sqrt[4]{2}$, достигнута је у случају кад је обртна површина један обртни конус чије генератрисе заклапају са обртном осовином угао од 45°. Јер тада је (померивши за колико је потребно теме конуса дуж осе Ox) $y = x$ и према томе

$$A = \frac{x_1^2 - x_0^2}{2} = \frac{y_1^2 - y_0^2}{2} = B,$$

тако да је

$$P = \lambda' \cdot 4\pi B = \lambda' \cdot 4\pi(y_1 - y_0)\frac{y_1 + y_0}{2} = \lambda' \cdot 4\pi(x_1 - x_0)\frac{y_1 + y_0}{2};$$

ако се, дакле, са h означи висина, а са d средњи пречник посматраног зарубљеног конуса, биће

$$P = \lambda' \cdot 4\pi hd,$$

а према чему би полупречник r имао за вредност

$$r = 2\sqrt{\lambda'} \cdot \sqrt{hd}. \tag{145}$$

Међутим тачна је вредност

$$P = 2\pi s\frac{y_1 + y_0}{2} = 2\pi \cdot \sqrt{2}(y_1 - y_0)\frac{y_1 + y_0}{2} = 2\pi \cdot \sqrt{2}hd,$$

према чему је тачна вредност полупречника r

$$r = \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt{hd}. \tag{146}$$

Упоређењем вредности (145) и (146) добија се да је

$$2\sqrt{\lambda'} = \sqrt[4]{8},$$

из чега се види да је

$$\lambda' = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{тј.} \quad \lambda = \sqrt[4]{2}.$$

Тако је исто достигнута и граница $\lambda' = 1$, тј. $\lambda = \sqrt{2}$, а то у случају кад је обртна површина једна обртна цилиндарска површина. Означивши тада са ρ полупречник основице цилиндра, а са h његову висину, биће

$$A = \rho(x_1 - x_0) - \rho h, \quad B = 0,$$

тако да је

(147) $$r = \sqrt{2\lambda} \cdot \sqrt{\rho h}.$$

Међутим тачна је вредност

$$P = 2\pi \cdot \rho h,$$

према чему је

(148) $$r = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\rho h}.$$

Упоређењем вредности (147) и (148) добија се да је

$$\sqrt{2\lambda'} = \sqrt{2},$$

према чему је

$$\lambda' = 1 \quad \text{тј.} \quad \lambda = \sqrt{2}.$$

1. *пример.* – Обртна површина описана обртањем кружног квадранта полупречника ρ око његовог полупречника (узетог за осу *Ox*). Тада је

$$A = \frac{\pi\rho^2}{4}, \quad B = \frac{\rho^2}{2},$$

тако да је

$$R = \sqrt{A + B} = \alpha\rho,$$

где је α апсолутни број

$$\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}} = 1{,}1337...$$

Према томе је

$$r = \lambda R = \mu \cdot \rho,$$

где је μ један апсолутан број који се налази у размаку између

$$\alpha\sqrt[4]{2} = 1{,}3482... \quad \text{и} \quad \alpha\sqrt{2} = 1{,}6033...$$

Ако се, дакле, за μ узме средина тога размака, тако да буде

(149) $$r = 1{,}4758\rho,$$

учињена грешка, према горњем општем резултату, неће премашити 9%. И одиста, пошто је тачна вредност

(150) $$r = \rho\sqrt{2} = 1{,}4142\rho,$$

грешка која се чини кад се узме вредност (149) за (150) износи 4,1%.

2. *пример.* – Обртна површина описана обртањем квадранта елипсе, чије су полуосе *a* и *b*, око *a* (узете за осу *Ox*). Тада је

$$A = \frac{\pi ab}{4}, \quad B = \frac{b^2}{2},$$

тако да је

$$R = \sqrt{A+B} = b\sqrt{\frac{\pi a}{4b} + \frac{1}{2}}.$$

Према томе је

$$r = \lambda R = \lambda b\sqrt{\frac{\pi a}{4b} + \frac{1}{2}},$$

тако да полупречник круга који има исту површину као и посматрани полу-елипсоид, лежи у размаку између

$$1{,}1892\,R \quad \text{и} \quad 1{,}4142\,R.$$

Кад је $a = b$, ови се обрасци своде на оне што важе за полукуглу.

19. РАЗНЕ КЛАСЕ ОДРЕЂЕНИХ ИНТЕГРАЛА КАО БРОЈНИ РАЗМАЦИ

Интеграл производа

Поред напред наведеног обрасца, који даје интеграл продукта у облику бројног размака (обична теорема средњих вредности) и који претпоставља да један од чинилаца продукта не мења знак у размаку интеграције, доказаћемо још један образац за исти задатак, али који не претпоставља да је задовољен поменути услов.

Нека су u и v ма какве функције променљиве x, реалне у размаку (a, b) те променљиве. Из идентичности

$$uv = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - \frac{1}{2}(u-v)^2$$

добија се да је

$$J = \int_a^b uv\,dx = V - \delta, \quad (b > a),$$

где је

$$V = \frac{1}{2}\int_a^b u^2 dx + \frac{1}{2}\int_a^b v^2 dx,$$

(151) $$\delta = \frac{1}{2}\int_a^b (u-v)^2 dx.$$

Ако се са N и M означе једна горња граница позитивне вредности $(u-v)^2$, вредност δ ће се налазити у размаку између

$$\frac{b-a}{2}N^2 \quad \text{и} \quad \frac{b-a}{2}M^2$$

и према томе *вредносӣ инӣеграла* J *ће се налазиӣи у размаку између*

$$V-\frac{b-a}{2}M^2 \quad \text{и} \quad V-\frac{b-a}{2}N^2,$$

ӣако да је

$$J=V-\frac{b-a}{2}M^2+\vartheta\frac{b-a}{2}(M^2-N^2). \tag{152}$$

Интерес овог обрасца лежи у томе, што се помоћу њега интеграл J разлаже на два, од који један зависи само од u, а други само од v, са једним корективним чланом који је у толико мањи, у колико је мања разлика између u и v у размаку интеграције. Осим тога, образац не претпоставља о функцијама u и v ништа друго осим реалност у размаку интеграције и услов да горњи интеграли имају коначне и одређене вредности.

Тако исто, из идентичности

$$uv=\frac{1}{4}(u+v)^2-\frac{1}{4}(u-v)^2$$

добија се да је

$$J=\int_a^b uv\,dx=W-\frac{\delta}{2},$$

где је

$$W=\frac{1}{4}\int_a^b (u+v)^2\,dx,$$

а δ је дато обрасцем (151). *Вредносӣ инӣеграла* J *налази се, дакле, у размаку између*

$$W-\frac{b-a}{4}M^2 \quad \text{и} \quad W-\frac{b-a}{4}N^2,$$

ӣако да је

$$J=W-\frac{b-a}{4}M^2+\vartheta\cdot\frac{b-a}{4}(M^2-N^2). \tag{153}$$

Интерес обрасца је у томе што се помоћу њега интеграл J изражава помоћу интеграла квадрата збира функција u и v, са једним корективним чланом који је два пута мањи од онога у обрасцу (152), а у толико је мањи у колико се u и v мање разликују у размаку интеграције. Образац (153) не претпоставља о функцијама u и v ништа друго до оно што претпоставља и образац (152).

Ма какве биле функције u и v, интеграбилне у размаку интеграције $(a,\ b)$, може се за интеграл продукта имати једна горња граница која доводи до закључака од интереса, како при израчунавању разноврсних одређених интеграла, тако и за доказивање разних резултата у математичкој анализи. Уочимо одређени интеграл

$$J=\int_a^b (u+\lambda v)^2\,dx,$$

(где је λ променљив параметар) који има све своје елементе позитивне и према томе не може бити једнак нули ни за какву реалну вредност λ. Пошто се он може написати у облику

$$J=\int_a^b u^2dx+2\lambda\int_a^b uv\ dx+\lambda^2\int_a^b v^2dx,$$

та је чињеница изражена неједначином

$$\left(\int_a^b u^2dx\right)\left(\int_a^b v^2dx\right)-\left(\int_a^b uv\ dx\right)^2>0,$$

према чему је

$$\left(\int_a^b uv\ dx\right)^2<\left(\int_a^b u^2dx\right)\left(\int_a^b v^2dx\right),$$

што се назива *Schwarz-овом инѿеїралном неједначином.*

Кад су u и v још и позитивне функције у размаку $(a,\ b)$, може се, дакле, написати да је

$$\int_a^b uv\ dx=\vartheta\sqrt{\left(\int_a^b u^2dx\right)\left(\int_a^b v^2dx\right)}.$$

Интеграл уопштеног биномног диференцијала

Нека су $u,\ v,\ w$ три функције позитивне у размаку интеграције $(a,\ b)$, па уочимо одређени интеграл

$$J = \int_a^b w(u^m + v^m)^p \, dx,$$

где су *m, p* произвољни позитивни стални бројеви. Према раније доказаноме резултату, вредност количника

$$\rho = \frac{(u^m + v^m)^p}{u^{mp} + v^{mp}} \tag{154}$$

увек се налази у размаку Δ између вредности 1 и 2^{p-1}; границе тога размака су достигнуте у случају кад је $u = v$, или кад је једна од количина *u* и *v* једнака нули.

Према томе је

$$J = \lambda \left[\int_a^b wu^{mp} dx + \int_a^b wu^{mp} dx \right], \tag{155}$$

где је λ један број који се налази у размаку Δ.

Узевши да је $p = \dfrac{1}{m}$, добија се образац

$$\int_a^b w\sqrt[m]{u^m + v^m} dx = \lambda \left(\int_a^b uw \, dx + \int_a^b vw \, dx \right), \tag{156}$$

где је

$$\frac{1}{2^{\frac{m-1}{m}}} \le \lambda \le 1. \tag{157}$$

Интеграл квадрата збира или разлике

Из идентичности

$$(u \pm v)^2 = u^2 + v^2 \pm 2uv$$

добија се да је

$$\int_a^b (u + v)^2 dx = U^2 + V^2 \pm 2 \int_a^b uv \, dx,$$

где је

$$U^2 = \int_a^b u^2 dx, \quad V^2 = \int_a^b v^2 dx.$$

Када су u и v интеграбилне и позитивне функције у размаку (a, b), биће као што је малочас показано

$$\int_a^b uv\,dx = \vartheta \cdot UV, \qquad 0 \le \vartheta \le 1$$

што доводи до обрасца

$$\int_a^b (u+v)^2\,dx = U^2 + V^2 + 2\vartheta \cdot U \cdot V,$$

$$\int_a^b (u-v)^2\,dx = U^2 + V^2 - 2\vartheta \cdot U \cdot V.$$

Ти обрасци претпостављају само интеграбилност посматраних функција и услов да су обе функције u и v позитивне у размаку интеграције (a, b). Нађени размаци за интеграле квадрата збира или квадрата разлике, изражени истим обрасцима, су *најужи* могући размаци за те интеграле док се остаје у претпостављеној генералности, јер осцилација $2\vartheta \cdot UV$ одиста достиже своју највећу могућу вредност $2UV$ у случају кад је $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$

Обрасци су од интереса стога што дају за посматрани интеграл један размак чије границе поједини интеграли исте врсте стварно и достижу, а те се границе израчунавају помоћу два интеграла U и V од којих један зависи само од u, а други само од v.

У случају $m = 2$ број λ у обрасцу (156) налази се у размаку између $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071$ и 1.

У случају *елиптичких* и *хиперелиптичких* интеграла, ти обрасци изражавају вредност интеграла у облику размака чије се границе добијају као интеграли *рационалних* функција.

Исти начин одређивања интегралног размака примењује се и на интеграле облика

$$J_m = \int_a^b w \cdot \log(u^m + v^m)\,dx \tag{158}$$

за функције u, v, w позитивне у размаку (a, b). Из тога што се вредност количника (154) увек налази у размаку између 1 и 2^{p-1}, закључује се да је за ма коју вредност броја p

$$(159)\qquad \log(u^m+v^m)=\frac{1}{p}\log(u^{mp}+v^{mp})+\vartheta\cdot\frac{p-1}{p}\log 2,$$

$$\log(u^{mp}+v^{mp})=p\log(u^m+v^m)-(p-1)\log 2.$$

Према томе је

$$(160)\qquad J_m=\frac{1}{p}J_{mp}+\vartheta\frac{p-1}{p}\log 2\int_a^b w\,dx,$$

$$(161)\qquad J_{mp}=pJ_m-\vartheta(p-1)\log 2\int_a^b w\,dx.$$

Кад се у једначини (160) узме $p=\frac{1}{m}$, добија се

$$\int_a^b w\cdot\log(u^m+v^m)\,dx=m\int_a^b w\cdot\log(u+v)\,dx+\vartheta(1-m)\log 2\int_a^b w\,dx,$$

а приманом тога на Jensen-ов интеграл

$$\int_0^{2\pi}\log_{(e)}\sqrt{u^2+v^2}\,dx$$

који игра важну улогу у теорији функција комплексне променљиве количине, добија се тај резултат, *да се разлика између њега и интеграла* $\int_0^{2\pi}\log(u+v)\,dx$ *увек налази у размаку између*

$$-\frac{1}{2}\log 2=-0,3462\ldots\ \text{и}\ \ 0.$$

Интеграл монотоно опадајуће функције

Нека је $f(x)$ једна функција која монотоно опада до нуле кад x расте од 0 до ∞, па уочимо интеграл

$$J_n=\int_0^n f(x)\,dx,$$

где је n цео позитиван број. Пошто је

$$J_n = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^2 f(x)\,dx + \ldots + \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx, \tag{162}$$

а функција $f(x)$ монотоно опада, биће за сваки број k у размаку $(1, n)$ и за сваку вредност x у размаку $(k-1, k)$

$$f(x) < f(k-1),$$

па, дакле, такође и

$$\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx < f(k-1),$$

према чему је

$$J_n < f(0) + f(1) + \ldots + f(n-1). \tag{163}$$

Са друге стране, пошто је у исто време и

$$f(x) > f(k),$$

биће такође и

$$\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx > f(k),$$

према чему је

$$J_n > f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) + f(n). \tag{164}$$

Ако се, дакле, стави да је

$$f(0) + f(1) + \ldots + f(n) = F(n),$$

неједначине (163) и (164) показују да *се вредност интеграла J_n налази у размаку између*

$$F(n) - f(0) \quad \text{и} \quad F(n) = f(n)$$

тако да је

$$J_n = \int_0^n f(x)\,dx = F(n) - f(0) + \vartheta\left[f(0) - f(a)\right]. \tag{165}$$

Границе размака у коме ће се налазити интеграл J_n могу се, дакле, одредити сумирањем коначнога реда чији је општи члан $f(k)$. Кад се пусти да n бескрајно расте, $f(n)$ тежи нули, а $F(n)$ постаје збир S бескрајног реда

$$S = f(0) + f(1) + f(2) + \ldots; \tag{166}$$

образац (165) постаје

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = S - f(0) + \vartheta \cdot f(0) = S - \vartheta' \cdot f(0), \qquad 0 \leq \vartheta' \leq 1 \tag{167}$$

и вредност интеграла налазиће се у размаку између S – f(0) *и* S.

Образац (167) даје непосредан доказ Cauchy-ове теореме: *интеграл* (167) *и збир реда* (166) *или су обоје коначни, или су обоје бескрајни;* један од њих не може бити коначан а да и други то не буде.

У случају кад је $f(0) = \infty$, треба на место интеграла J посматрати интеграл у коме је на место доње интегралне границе 0 узета граница 1; ако је $f(1) = \infty$, треба за доњу границу узети 2 итд. Тако нпр. вредност интеграла

$$J_n = \int_1^\infty \frac{dx}{x^k} = \frac{1}{k-1}$$

налази се у размаку (S–1, S), где је

$$S = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots$$

Интеграл J и збир S су обоје коначни за $k > 1$.

Интеграл

$$J = \int_2^\infty \frac{dx}{x \log x} = \log\log\infty - \log\log 2$$

и збир реда

$$S = \frac{1}{2 \cdot \log 2} + \frac{1}{3 \cdot \log 3} + \frac{1}{4 \cdot \log 4} + \ldots$$

су обоје бескрајни.

Интеграл алгебарске функције другога реда

Уочимо интеграл

$$J = \int_a^b |\, y \,|\, dx,$$

где је y функција променљиве x одређена квадратном једначином

$$y^2 + f(x)y + \varphi(x) = 0$$

и где је размак интеграла (a, b) такав, да су у њему обе функције

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} \quad \text{и} \quad f(x) - \frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

коначне, одређене и позитивне. Према ономе што је напред показано за корене квадратне једначине, апсолутна вредност функције y може се написати у облику

$$|y| = \frac{\varphi}{f} + \vartheta\left(f - \frac{\varphi}{f}\right), \qquad 0 \le \vartheta \le 1$$

према чему ће бити

$$J = \int_a^b \frac{\varphi}{f}\,dx + \vartheta\left(\int_a^b f dx - \int_a^b \frac{\varphi}{f}\,dx\right)$$

тако *да ће се интеграл* J *налазити између*

$$\int_a^b f dx \quad \text{и} \quad \int_a^b \frac{\varphi}{f}\,dx.$$

Интерес резултата лежи у тиме што се границе интеграла, у коме функције под интегралним знаком *стоје под квадратним кореном*, одређују као размаци чији су крајеви интеграли без *тих квадратних корена*.

Сличан се резултат добија и за интеграле алгебарских функција m-тог реда, помоћу напред наведене теореме о размаку који садржи апсолутне вредности свих реалних корена дате алгебарске једначине m-тог степена.

Једна класа одређених интеграла

На одређене интеграле облика

$$J(x) = \int_a^b u e^{vx} dt,$$

где су u и v дате функције интеграционе променљиве t, наилази се, као на рачунске елементе, у разноврсним проблемима математичке анализе.

Кад је размак интеграције (a, b) коначан, а u и v коначне и непрекидне функције у томе размаку, сваки такав интеграл $J(x)$ представља по једну функцију променљиве x холоморфну у целој равни те променљиве. Та се функција може развити у ред

$$J(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$$

конвергентан у целој равни x, а где ће бити

$$a_n = \frac{1}{n!}\int_a^b uv^n dt.$$

Конвергенција се лако доказује поделивши размак инеграције (a, b) на подразмаке такве да у свакоме од њих функција u задржава један исти знак. Ако је (α, β) такав један под-размак, биће по апсолутној вредности, а према обичној теореми за средње вредности одређених интеграла,

$$\int_\alpha^\beta uv^n dt = R^n \int_\alpha^\beta u\, dt,$$

где је R једна вредност која се налази између најмање и највеће вредности функције v у томе размаку. Групишући такве интеграле за све под-размаке у размаку (a, b), добија се за a_n један израз који показује да је по апсолутној вредности

$$a_n < \frac{AM^n}{n!},$$

где су A и M независни од n, а што доказује конвергенцију реда.

Ма какав био знак функције u у размаку (a, b) пошто e^{vx} задржава непроменљив знак у томе размаку, теорема средњих вредности показује *да се за ма коју реалну вредност* x, *вредност интеграла налази у размаку између*

$$(168) \qquad N\int_\alpha^b e^{v_1x}dt \quad \text{и} \quad M\int_\alpha^b e^{v_2x}dt,$$

где су v_1 и v_2 две ма какве функције између којих се за t у (a, b) налази вредност функције v; N и M су предњи и задњи крај једнога, ма кога, размака у коме се налази вредност функције u за вредности t у размаку (a, b). Могу се нпр. за N и M узети најмања и највећа вредност коју добија функција u за вредности t у размаку (a, b). Тако се исто за v_1 и v_2 може узети најмања и највећа вредност Q и P коју добија функција v за t у размаку (a, b); *размак функције* $J(x)$ *је тада онај између вредности*

$$Pe^{Nx} \text{ и } Qe^{Mx}$$

или између

$$Pe^{Mx} \text{ и } Qe^{Nx}$$

према знаку посматраних вредности x.

Један, по кашто ужи, па дакле и пробитачнији, размак за вредности функције $J(x)$, добија се применом Schwarz-ове интегралне неједначине

$$\left(\int \varphi\psi\, dt\right)^2 < \left(\int \varphi^2\, dt\right)\left(\int \psi^2\, dt\right)$$

која, као што је казано, важи за ма какве интерабилне функције φ и ψ променљиве t. Ако се стави да је

$$\varphi = u, \qquad \psi = e^{vx}$$

добија се

$$J^2(x) < H\int_a^b e^{2vx}dt,$$

где је H константа

$$H = \int_a^b u^2 dt,$$

Ако је, дакле, $\lambda(x)$ тачна вредност, или једна горња граница интеграла

$$\int_a^b e^{2vx}dx,$$

задњи се крај размака (168) *за функцију* $J(x)$ *може сменити вредношћу* $\sqrt{H\lambda(x)}$ што је од интереса кад је та вредност мања од вредности

$$M\int_a^b e^{v_2 x}dx,$$

јер је тада размак функције $J(x)$ ужи од размака (168).

Из обрасца

$$\frac{d^k y}{dx^k} = \int_a^b uv^k e^{vx}dx,$$

у коме су изводи функције J изражени интегралима истог типа као и сама функција J, добијају се на исти начин и размаци у којима ће се налазити вредности тих извода за посматране вредности x.

Као пример, одредићемо такве размаке за вредности функције

$$J(x)=\int_0^1 e^{vx}dx,$$

где је $v = t\log\frac{1}{t}$. Та се функција поклапа са једном трансцедентом на коју се наилази у многобројним општијим аналитичким проблемима и која је представљена редом

$$\Delta(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)^{n+1}}=1+\frac{x}{4}+\frac{x^2}{27}+\frac{x^3}{256}+...$$

Пошто функција v, за време док t расте од 0 до 1, и сама почиње расти до нуле, достиже свој максимум чија је вредност

$$\frac{1}{e}=0{,}36788...$$

па затим опада до нуле, биће према теореми средњих вредности

$$J(x)<e^{\frac{x}{e}} \quad \text{за} \quad x>0,$$

$$J(x)>e^{\frac{x}{e}} \quad \text{за} \quad x<0.$$

Вредност $J(x)$ налази се, дакле, увек у размаку између 1 и $e^{\frac{x}{e}}$, тако да је

$$J(x)=1+\vartheta(e^{\frac{x}{e}}-1) \quad \text{за} \quad x>0,$$

$$J(x)=e^{\frac{x}{e}}+\vartheta(1-e^{\frac{x}{e}}) \quad \text{за} \quad x<0.$$

Међутим за позитивне вредности x могу се за $J(x)$ одредити и ужи размаци на овај начин:

Из двогубе неједначине

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<\left(\frac{n}{2}\right)^n,$$

која вреди за све целе бријеве $n\geq 5$, налази се да је за такве вредности

$$(169) \qquad \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}<\frac{1}{(n+1)^{n+1}}<\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Ако се стави да је

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2^2} + \ldots + \frac{x^n}{n^n},$$

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)^{n+2}} + \ldots$$

тако да је

$$1 + x\, J(x) = P_n(x) = R_n(x) \tag{170}$$

према неједначини (169) биће за $n \geq 5$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{e}\right)^k < R_n(x) < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k. \tag{171}$$

Међутим, бескрајни збирови, који фигуришу на левој и десној страни неједначине (171), нису ништа друго до остаци редова

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{e}\right)^k = e^{\frac{x}{e}}, \tag{172}$$

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k = e^{\frac{x}{2}}. \tag{173}$$

Применом познатог правила да остатак једнога реда

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

има за вредност

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\vartheta x), \qquad 0 \leq \vartheta \leq 1$$

налази се да ће остатак реда (172) бити

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{e^{\frac{\vartheta x}{e}}}{e^{2(n+1)}},$$

а остатак реда (173)

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{e^{\frac{\vartheta' x}{e}}}{2^{2(n+1)}},$$

где су ϑ и ϑ' два броја који се налазе у размаку (0, 1).

Неједначина (171) тада доводи до овог резултата:

За све позитивне вредности x и ма колики био цео број $n \geq 5$, биће

$$1 + x\,J(x) = P_n(x) = R_n(x),$$

где се $R_n(x)$ увек налази у размаку између вредности

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{1}{e^{2(n+1)}} \quad \text{и} \quad \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{e^{\frac{x}{e}}}{4^{n+1}}.$$

Ако се узме $n = 5$, добија се на тај начин да је

$$J(x) = 1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{27} + \frac{x^3}{256} + \frac{x^4}{3125} + R_4(x),$$

где се $R_4(x)$ увек налази у размаку између вредности

$$Ax^6 \quad \text{и} \quad Bx^6 e^{\frac{x}{e}},$$

где су A и B константе

$$A = \frac{1}{6!\,e^{12}} = 8534 \cdot 10^{-12},$$

$$B = \frac{1}{6!\,2^{12}} = 339084 \cdot 10^{-12}.$$

На сличан начин, помоћу обрасца

$$\frac{d^k J(x)}{dx^k} = \int_0^1 v^k e^{vx} dx$$

могу одредити и размаци између којих ће се налазити вредности извода функције $J(x)$.

Из обрасца

$$J(x) = \int_0^1 e^{vx} dt, \qquad v = t \log \frac{1}{t},$$

пошто функција v остаје непрестано позитивна између интегралних граница 0 и 1, види се у исто време да:

1° кад x бескрајно расте у правцу $+\infty$, функција $J(x)$ бескрајно расте;

2° кад x бескрајно расте у правцу $-\infty$, функција $J(x)$ тежи нули.

Према горњем интегралном обрасцу за n-ти извод функције $J(x)$, то исто важи и за све изводе те функције.

Крива линија $y = J(x)$ има, квалитативно, исти облик као експоненцијална крива линија $y = e^x$. Она има осу Ox као асимптоту за $x = -\infty$; док x расте од $-\infty$ до $+\infty$, она непрестано расте од нуле до $+\infty$, немајући при томе ни максимума, ни минимума, ни превојних тачака и секући осу Oy у тачки $y = 1$.

На функције се облика $J(x)$ наилази нпр. при одредби износа површине од $x = 0$ до $x = 1$, ограничене осом Ox и луком ма које интегралне криве линеарне диференцијалне једначине ма кога реда, која се трансформацијом

$$t \log t = z$$

интеграционе промењиве t своди на линеарну једначину са сталним коефицијентима.

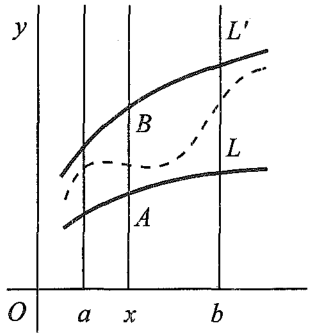
Исте се функције употребљавају у разноврсним проблемима математичке анализе, као *компаративни елементи* за разне друге класе функција, које се са њима упоређују, па се из тих упоређења сазнају поједине особине тих класа функција.

ТРЕЋИ ОДЕЉАК

БРОЈНИ РАЗМАЦИ ЗА ИНТЕГРАЛЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

20. МЕЂУСОБНО УПОРЕЂИВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

Поред доста великог броја диференцијалних једначина које се могу интегралити помоћу квадратура, или помоћу познатих комбинација њихових коефицијената, постоји непрегледан и од првога бескрајно већи број једначина које се не могу интегралити у таквоме облику. Та немогућност или је *айсолуйна*, тј. интеграл је уопште неизражљив на поменути начин, или је *йривремена*, тј. долази од тога што се за данас нема метода за такву интеграцију. Међутим, и у једном и у другом случају постоје методе за интеграцију помоћу бескрајних редова, конвергентних у одређеним размацима независно промењиве количине; такве методе дају могућност да се интеграл $y(x)$, који за једну дату почетну вредност $x = x_0$ има дату вредност $y = y_0$, израчуна и за сваку другу вредност x садржану у размаку конвергенције добијеног реда.



Али, било да је тачна интеграција могућна или немогућна, постоје методе за *одређивање инйеграла у облику размака*, тако да се за сваку вредност x садржану у једноме размаку (a, b) може одредити одговарајући размак (A, B) у коме ће се насигурно налазити вредност уоченог интеграла дате диференцијалне једначине. Такав је размак, као што се види, промењив, јер се он мења од једне вредности x до друге. Кад се x поступно мења у размаку (a, b), крајеви A и B *инйегралноī размака* (A, B) описују по једну линију у равни xOy: то су *īраничне линије* интеграла у томе размаку промењиве x, и то *доња* и *īорња* гранична линија L и L'.

Одређивање инйеграла у облику размака сасйоји се у одређивању īорње и доње īраничне линије инйеграла. Кад су ове одређене, интегрални размак (A, B) за једну дату вредност x, имаће се као одсечак (сегмент) праве која пролази кроз тачку $(x, 0)$ и која је паралелна осовини Oy.

За одређивање граничних линија интеграла постоје разне методе. Већина је од њих основана на *међусобном упоређивању диференцијалних једначина* у овоме смислу: кад је дата једначина

$$f(x, y, y', y'', \ldots) = 0 \tag{174}$$

и кад су дате почетне вредности x_0, y_0, где је вредност x садржана у датоме размаку (a, b) променљиве x, нађу се две једначине

$$\begin{aligned} f_1(x, u, u', u'', \ldots) &= 0, \\ f_2(x, v, v', v'', \ldots) &= 0, \end{aligned} \tag{175}$$

које задовољавају ове захтеве:

1° да се могу одредити њихови интеграли u и v који за $x = x_0$ добијају вредности $u = y_0$ и $v = y_0$;

2° да се за све вредности x у размаку (a, b) може доказати двострука неједнакост

$$u \leq y \leq v.$$

Криве у равни xOy, које представљају такве интеграле u и v, биће граничне линије интеграла y; једначине (175) играју тада улогу *компаративних једначина* за дату диференцијалну једначину (174). Кад су нађене такве две једначине и њихови интеграли u и v, интеграл y једначине (174) биће дат у облику размака обрасцем

$$y = u + \vartheta(v - u), \qquad 0 \leq \vartheta \leq 1.$$

У овоме, што сада долази, биће изложено неколико метода за одређивање компаративних једначина и граничних линија за интеграле дате диференцијалне једначине. Те су методе од нарочите користи у случајевима кад се диференцијална једначина не може ни тачно, ни приближно интегралити, па је корисно сазнати бар то, у коме се размаку налази вредност њеног интеграла за дату вредност променљиве x.

21. ПРВА МЕТОДА

Нека су

$$y' = F(x, y), \tag{176}$$

$$u' = F_1(x, u), \tag{177}$$

$$v' = F_2(x, v). \tag{178}$$

три диференцијалне једначине првога реда. Функције двеју променљивих x и y

$$F(x,y)-F_1(x,y), \tag{179}$$

$$F(x,y)-F_2(x,y), \tag{180}$$

имаће, у равни xOy, свака своју позитивну и негативну област. Означимо са:

Δ_1 и Δ_2 позитивну и негативну област функције (179);

Ω_1 и Ω_2 позитивну и негативну област функције (180);

$D_1, D_2, \ldots$ линије које ограничавају те области;

$E_1, E_2, \ldots$ линије које представљају геометријска места сингуларитета функција F, F_1, F_2;

П део равни који је заједнички за један пар области Δ и Ω супротно означених, нпр. за области Δ_1 и Ω_2.

Нека је $M_0(x_0, y_0)$ једна тачка која не припада ни једној од линија D ни E, а која се налази у области *П*.

Напослетку, нека су y, u, v интеграли једначина (176), (177), (178), који за $x = x_0$ имају заједничку вредност

$$y = y_0, \quad u = y_0, \quad v = y_0.$$

Тада ће, са једне и друге стране тачке $(x_0, 0)$, постојати на оси Ox један размак чије пространство није нула, нпр. размак

$$\text{од} \quad x_0 - h_1 \quad \text{до} \quad x_0 + h_2, \tag{181}$$

(где су h_1 и h_2 два позитивна броја) који ће испуњавати ове услове:

α) док се x мења у размаку (181), интеграли u и v једначина (177) и (178), као и њихови први изводи, су одређени, коначни и непрекидни;

β) контура Γ састављена од кривих u, v и двеју правих

$$x = x_0 - h_1 \quad \text{и} \quad x = x_0 + h_2,$$

садржана је у области *П* и она не обухвата ни један део кривих D ни E, нити се са којом од ових сече.

Тада се може доказати овај резултат:

Кад се x *мења у размаку* (181), *интеграл* y *једначине* (176) *биће коначан и непрекидан, а налазиће се непрестано у размаку између одговарајућих вредности интеграла* u *и* v *једначина* (177) *и* (178), тј. интеграла који за $x = x_0$ добијају вредност y_0.

Јер, пошто се тачка M_0 налази у области *П*, биће за ту тачку

$$F(x,y)-F_1(x,y)>0, \quad F(x,y)-F_2(x,y)<0 \tag{182}$$

и према томе

$$\frac{d}{dx}(y-u)>0, \quad \frac{d}{dx}(y-v)<0. \tag{183}$$

Са друге стране је за $x = x_0$

$$y-u=0, \quad y-v=0, \tag{184}$$

па дакле

$$v<y<u \text{ за } x=x_0-\varepsilon, \quad u<y<v \text{ за } x=x_0+\varepsilon, \tag{185}$$

где је ε довољно мали позитиван број.

Горње тврђење, дакле, насигурно важи за један довољно узак размак са једне и друге стране вредности x_0; ми ћемо сад доказати да он важи и за све вредности x у размаку (181). Тога ради приметимо да би он тек онда могао да престане важити, кад би наступио један или други од ова два случаја:

а) или да крива y пресече једну од кривих u или v у једној тачки чија се апсциса налази у размаку (181);

б) или да за једну вредност $x=\alpha$, садржану у размаку (181), и за једну вредност $y=\beta$ садржану у размаку између $u(\alpha)$ и $u(\beta)$, извод $\frac{dy}{dx}$, па дакле и функција $F(x,y)$, постане било бескрајна, било неодређена, или да промени детерминацију.

Случај *а*) не може наступити, јер кад би $x=\gamma$, $y=\delta$ биле координате једне заједничке тачке M, нпр. кривих y и u која је, међу осталим заједничким тачкама (ако их има) најближа тачки M_0, то, пошто се тачка M налази на самој контури Γ, а ова је садржана у области Π, морало би за ту тачку M бити

$$F(x,y)-F_1(x,y)>0$$

и према томе

$$\frac{d}{dx}(y-u)>0,$$

а уз то и

$$y-u=0.$$

Према томе би морало бити

$$(186)\qquad \begin{aligned} &y < u \quad \text{за} \quad x = \gamma - \varepsilon, \\ &y > u \quad \text{за} \quad x = \gamma + \varepsilon, \end{aligned}$$

а то је у супротности са неједначинама (185), јер упоредивши међу собом неједначине (185) и (186) види се да би разлика $y - u$ при преласку од тачке M_0 на тачку M морала променити знак, што је немогуће пошто, између тих двеју тачака, та разлика не постаје једнака нули.

Случај *б*) такође не може наступити, јер се ни једна тачка кривих E не налази ни у контури Γ ни на њој самој; извод $\frac{dy}{dx}$ је, дакле, одређен, коначан и непрекидан за све вредности α садржане у размаку (181) и за све вредности β садржане у размаку између $u(\alpha)$ и $u(\beta)$; он за њих не мења ни детерминацију.

Горње тврђење је тиме доказано и оно важи за цео размак (181), и то тако да је

$$\begin{aligned} &v < y < u \quad \text{у размаку} \quad \text{од} \quad x_0 - h_1 \quad \text{до} \quad x_0, \\ &u < y < v \quad \text{у размаку} \quad \text{од} \quad x_0 \quad \text{до} \quad x_0 + h_2. \end{aligned}$$

Кад би се тачка M_0 налазила у заједничком делу области Δ_2 и Ω_1, све досадашње неједначине промениле би смисао, а резултат би остао исти, тако да се може сматрати као доказан овај општи резултат:

Кад год се тачка (x_0, y_0) *налази у заједничком делу двеју области* Δ_i, Ω_k, *где је један од индекса* i *или* k *паран, а други непаран, интеграл* y, *који за* $x = x_0$ *има вредност* $y = y_0$, *биће коначан, непрекидан и садржан у размаку између* u *и* v *за све вредности* x *у размаку* (181).

Приметимо да за сваку диференцијалну једначину (176)

$$y' = F(x, y)$$

и за сваки пар (x_0, y_0) почетних вредности (остављајући на страну изузетне напред поменуте парове) постоји такав размак (181) чије пространство није нула. *За сваку, дакле, једначину* (176) *и за сваки пар вредности* (x_0, y_0) *може се одредити један размак који ће насигурно садржати интеграл* y *за све вредности* x *садржане у једноме размаку* (181) *око вредности* x_0. У појединим случајевима размак (181), који се никад не своди на нулу, може обухватати и све вредности x од 0 до $+\infty$, или од $-\infty$ до $+\infty$.

Једначине (177) и (178) играју улогу компаративних једначина за једначину (176), а u и v дају граничне линије за интеграл y.

Пример. – Применимо то на Riccati-еву једначину

$$y' = y^2 + f(x), \tag{187}$$

где се претпоставља да функција $f(x)$ нема никакав реалан сингуларитет (нпр. да је она какав полином по x).

Уочимо најпре случај кад је вредност $f(x_0)$ позитивна; тада постоји један размак (α_1, α_2) вредности x, који обухвата вредност x_0 и у коме ће функција $f(x)$ бити непрестано позитивна.

Означимо са N и M предњи и задњи крај једнога размака који обухвата вредности $f(x)$, док се x мења у размаку (α_1, α_2), па узмимо за компаративне једначине (177) и (178), једначине

$$\begin{aligned} u' &= u^2 + N, \\ v' &= v^2 + M. \end{aligned} \tag{188}$$

Функције (179) и (180) ће бити

$$f(x) - N, \quad f(x) - M, \tag{189}$$

а области се Δ_1 и Ω_2 поклапају са делом равни xOy између правих $x = \alpha_1$ и $x = \alpha_2$; тај део равни представља у исто време и заједничку им област Π.

Интеграли u и v компаративних једначина, који за $x = x_0$ имају заједничку вредност y_0, овде су

$$\begin{aligned} u &= \frac{y_0\sqrt{N} + N\mathrm{tang}[(x - x_0)\sqrt{N}]}{\sqrt{N} + y_0\mathrm{tang}[(x - x_0)\sqrt{N}]}, \\ v &= \frac{y_0\sqrt{M} + M\mathrm{tang}[(x - x_0)\sqrt{M}]}{\sqrt{M} + y_0\mathrm{tang}[(x - x_0)\sqrt{M}]}, \end{aligned} \tag{190}$$

и они су одређени, коначни и непрекидни у извесном размаку

$$\text{од} \quad \beta_1 = x_0 - k_1 \quad \text{до} \quad \beta_2 = x_0 + k_2,$$

где су k_1 и k_2 позитивне константе које је лако одредити.

Криве E овде не постоје, пошто функције (189) немају реалних сингуларитета. Са друге стране, пошто се област Π протеже на целокупан део равни xOy што се налази између правих $x = \alpha_1$ и $x = \alpha_2$, то је и контура Γ садржана у тој области.

Према свему томе, као размак (181) има се сматрати заједнички део размака (α_1, α_2) и (β_1, β_2); *за све вредности* x *у томе размаку интеграл* y *ће бити коначна и непрекидна функција променљиве* x, *садржана у размаку између функција* u *и* v *изражених обрасцима* (190).

Уочимо сад случај кад је вредност $f(x_0)$ негативна; функција $f(x)$ ће тада бити непрестано негативна у једноме размаку (α_1, α_2) који обухвата вредност x_0.

Означимо са $-M$ и $-N$ предњи и задњи крај једнога размака који обухвата вредности $f(x)$, док се x мења у размаку (α_1, α_2), па узмимо за компаративне једначине

$$\begin{aligned} u' &= u^2 - M, \\ v' &= v^2 - N. \end{aligned} \tag{191}$$

Њихови интеграли u и v који за $x = x_0$ имају заједничку вредност y_0, тада су

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{M}\,\frac{(y_0+\sqrt{M})+(y_0-\sqrt{M})\,e^{2(x-x_0)\sqrt{M}}}{y_0+\sqrt{M}-(y_0-\sqrt{M})\,e^{2(x-x_0)\sqrt{M}}}, \\ v &= \sqrt{N}\,\frac{(y_0+\sqrt{N})+(y_0-\sqrt{N})\,e^{2(x-x_0)\sqrt{N}}}{y_0+\sqrt{N}-(y_0-\sqrt{N})\,e^{2(x-x_0)\sqrt{N}}} \end{aligned} \tag{192}$$

и они су одређени, коначни и непрекидни за све вредности x у извесном размаку (β_1, β_2), који обухвата вредност x_0 и који је лако одредити.

На исти начин као у првоме случају, лако се види да се као размак (181) има сматрати заједнички део размака (α_1, α_2) и (β_1, β_2) *и да ће за све вредности* x *у томе размаку интеграл* y *бити коначна и непрекидна функција променљиве* x, *садржана у размаку између функција* u *и* v *изражених обрасцима* (192).

22. ДРУГА МЕТОДА

Наведена прва метода је општа и *примењива на све диференцијалне једначине првога реда, како алгебарске, тако и трансцендентне и за све парове почетних вредности* x_0, y_0, осим оних изузетних парова који се могу унапред сазнати непосредно на самој диференцијалној једначини.

Међутим, у специјалним случајевима, кад једначина задовољава извесне, више или мање простране услове, може се интегрални размак одредити на разне друге начине, везане за такве случајеве и за такве услове. Једна од многобројних метода за то одређивање била би ова што ће се овде навести.

Нека је дата диференцијална једначина првога реда

$$y' = F(x, \varphi), \tag{193}$$

где је φ дата функција променљиве y, па уочимо случај кад су испуњени ови услови:

1° да су функција $\varphi(y)$ и њен први извод функције реалне, непрекидне и коначне за све вредности y од $-\infty$ до $+\infty$;

2° да су функција F и њен парцијални извод $\frac{\partial F}{\partial \varphi}$ реални, коначни, непрекидни и непроменљивог знака за све вредности x садржане у једноме размаку (α_1, α_2) и за све вредности y садржане у истом размаку (N, M) који садржи и вредност функције $\varphi(y)$ за вредности y од $-\infty$ до $+\infty$.

3° да, означивши са k један ма који сталан број садржан у размаку (N, M), а са x_1 и x_2 два ма која стална броја садржана у размаку (α_1, α_2), одређен интеграл

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, k)\, dx$$

има само једну реалну вредност, и то одређену и коначну (а може имати и колико се хоће других, али имагинарних вредности које нпр. произлазе од интегралних периода).

Узмимо за почетне вредности x_0, y_0 једну ма коју вредност x_0 садржану у размаку (α_1, α_2) и једну ма коју вредност y_0 од $-\infty$ до $+\infty$, па формирајмо две функције

$$\lambda(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, N)\, dx,$$

$$\mu(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, M)\, dx,$$

Тада се може доказати овај резултат:

Интеграл у једначине (193), *који за* x = x_0 *има вредност* y = y_0, *биће коначан и непрекидан за све вредности* x *садржане у размаку* (α_1, α_2), *мењаће се при томе у једном истом смислу, монотоно растући или опадајући, и биће непрестано садржан у размаку између одговарајућих вредности функција* λ *и* μ.

Да бисмо то доказали, приметимо да кад су испуњени услови 1° и 2°, апсолутна вредност функције F остаје мања од једног коначног позитивног броја за све вредности x садржане у размаку (α_1, α_2) и за све вредности y од $-\infty$ до $+\infty$. То ће исто бити и са њеним парцијалним изводом

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dy}.$$

Према једној познатој теореми из аналитичке теорије диференцијалних једначина првога реда, интеграл y једначине (193) који за $x = x_0$ има вредност $y = y_0$, биће коначан и непрекидан за све вредности x садржане у размаку (α_1, α_2).

Према услову 2° функција F и њен парцијални извод $\frac{\partial F}{\partial y}$ имају у размацима (α_1, α_2) и (N, M) непромењив знак; уочимо случај кад је овај позитиван. Према једначини (193) интеграл y непрестано расте, а према двострукој неједначини

$$F(x, N) \leq F(x, \varphi) \leq F(x, M)$$

и према једначини (193), интеграл

$$\int_{x_0}^{x} F(x, \varphi)\, dx,$$

који није ништа друго до разлика $y - y_0$, налазиће се увек у размаку између одговарајућих вредности интеграла

$$J_1(x) = \int_{x_0}^{x} F(x, N)\, dx,$$

$$J_2(x) = \int_{x_0}^{x} F(x, M)\, dx,$$

чиме је горње тврђење доказано.

Исти би се резултат и исти доказ, само са пермутованим крајевима размака, имао и у случају кад би знак функција F и $\frac{\partial F}{\partial y}$ био негативан.

У случају кад размак (α_1, α_2) обухвата све реалне бројеве, *горњи резултат важи за ма које почетне вредности* x_0, y_0.

1. *пример*. – Нека је дата једначина

$$y' = mx^2 + ne^{-ky^2},$$

где су k, m, n позитивне константе. Узевши да је

$$\varphi(y) = e^{-ky^2},$$

услови 1° и 2° испуњени су нпр. за све позитивне вредности x, y; вредности N и M су: $N = 0$, $M = 1$; функције λ и μ су

$$\lambda(x, x_0, y_0) = y_0 + \frac{m}{3}(x^3 - x_0^3),$$
$$\mu(x, x_0, y_0) = y_0 + \frac{m}{3}(x^3 - x_0^3) + (x - x_0)$$

и за све позитивне вредности x_0 и x интеграл y биће коначна, непрекидна и позитивна, монотоно растућа функција, садржана у размаку (λ, μ).

2. *пример*. – Нека је дата једначина

$$y' = \frac{e^{-rx^2}}{1 - me^{-kx^2} - ne^{-kx^2 - py^2}},$$

где су m, n, k, p, r позитивне константе, а уз то је још и

$$m + n < 1.$$

Узевши да је

$$\varphi(y) = e^{-ky^2},$$

услови 1° и 2° су испуњени за све реалне вредности x, y; тада је $N = 0$, $M = 1$; функције λ и μ су:

$$\lambda(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-rx^2}}{1 - me^{-kx^2}}\,dx,$$
$$\mu(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-rx^2}}{1 - (m+n)\,e^{-kx^2}}\,dx$$

и оне ограничавају интеграл J, који за $x = x_0$ добија вредност $y = y_0$ и остаје коначан, непрекидан, позитиван за све реалне вредности x, растући при томе монотоно.

3. *пример*. – Нека је дата једначина

$$y' = \frac{a + y^2}{ab + x + by^2},$$

где су a и b позитивне константе. Узевши да је

$$\varphi(y)=\frac{1}{a+y^2},$$

чиме једначина добија облик

$$y'=\frac{1}{b+x\,\varphi(y)},$$

услови 1° и 2° испуњени су нпр. за све позитивне вредности x, y; тада је $N=0$, $M=\frac{1}{a}$; функције λ и μ су

$$\lambda(x,x_0,y_0)=y_0+\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{b}=C_1+\frac{x}{b},$$
$$\mu(x,x_0,y_0)=y_0+\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{b+\frac{x}{a}}=C_2+a\log(x+ab),$$

где су C_1 и C_2 константе

$$C_1=y_0-\frac{x_0}{b},$$
$$C_2=y_0-a\log(x_0+ab),$$

и за све позитивне вредности x_0 и x интеграл ће бити садржан у размаку (λ,μ).

Асимптотна вредност интеграла. Казано је да, кад размак (α_1,α_2) обухвата све реалне бројеве, горњи резултати важе за ма које почетне вредности x_0, y_0. У томе случају *асимптотна вредност* интеграла y, тј. његова вредност за $x=+\infty$ или за $x=-\infty$, биће коначна или бескрајна према томе да ли одговарајуће вредности интеграла J_1 и J_2 теже коначним или бескрајно великим границама. *Кад год су те границе коначне, асимптотна вредност* у *налази се у размаку између вредности*

$$y_0+\lim J_1(x)\quad \text{и}\quad y_0+\lim J_2(x)$$

тако да, ако се стави да је

$$\text{асимпт. вредност } y=Y,$$
$$\text{асимпт. вредност } J_1=A_1,$$
$$\text{асимпт. вредност } J_2=A_2,$$

биће

$$Y=A_1+\vartheta(A_2-A_1).$$

Тако, у првом примеру, кад је дата једначина

$$\frac{dy}{dx} = mx^2 + ne^{-ky^2},$$

(m, n, k позитивне константе) асимптотна вредност интеграла y, који за $x = x_0$ има вредност y_0, бескрајно је велика, јер интеграли J_1 и J_2 теже бескрајно великим границама.

Напротив, у другоме примеру, кад је дата једначина

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-rx^2}}{1-\alpha e^{-kx^2} - \beta e^{-kx^2-py^2}},$$

(α, β, k, p позитивне константе и $\alpha + \beta < 1$) лако се уверавамо да је асимптотна вредност интеграла коначна и да јој се може одредити бројни размак у коме ће се она насигурно налазити.

Јер у томе је случају

$$J_1(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-rx^2}}{1-\alpha e^{-kx^2}} dx$$

$$J_2(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-rx^2}}{1-(\alpha+\beta)\, e^{-kx^2}} dx.$$

А пошто је за вредности z, по апсолутној вредности мање од 1,

$$\frac{1}{1-z\, e^{-kx^2}} = 1 + z\, e^{-kx^2} + z^2 e^{-2kx^2} + z^3 e^{-3kx^2} + \ldots,$$

то је

$$\frac{e^{-rx^2}}{1-z\, e^{-kx^2}} = e^{-rx^2} + ze^{-(r+k)x^2} + z^2 e^{-(r+2k)x^2} + z^3 e^{-(r+3k)x^2} + \ldots$$

и према томе је

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-rx^2}}{1-z\, e^{-kx^2}} dx = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + u_3 z^3 + \ldots,$$

где је

$$u_n = \int_0^{\infty} e^{-(r+nk)x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{r+nk}},$$

тако, да се може написати

$$(194) \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-rx^2}}{1-z\,e^{-kx^2}}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\Phi(z),$$

где је

$$(195) \qquad \Phi(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{z^n}{\sqrt{r+nk}},$$

који образац важи за вредности z по апсолутној вредности мање од 1.

Међутим, према обрасцу

$$\int_{x_0}^{\infty} = \int_{x_0}^{0} + \int_{0}^{\infty}$$

и обрасцима (194) и (195) може се написати да је

$$A_1 = J_1(0) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\Phi(\alpha)$$
$$A_2 = J_2(0) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\Phi(\alpha+\beta),$$

па пошто су вредности α и $\alpha+\beta$ мање од јединице, обе су вредности A_1 и A_2 коначне и одређене; *асимптотна вредност интеграла* у *коначна је и налази се у размаку између* A_1 *и* A_2.

Од интереса је скренути пажњу на улогу коју игра функција $\Phi(z)$ при одредби размака у коме се налази асимптотна вредност интеграла y горње једначине. Та је функција дефинисана редом (195) у коме ранг n његових чланова фигурише под квадратним кореном, а на такве се редове никад не наилази при интеграцији алгебарских диференцијалних једначина.

23. КВАЛИТАТИВНИ ПРВИ ИНТЕГРАЛИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

Напред изложене две методе односе се на диференцијалне једначине *првога реда;* метода која ће овде бити изложена применљива је на једначине *ма кога реда.* Она се састоји у употреби једне нарочите врсте првих интеграла диференцијалних једначина.

У општој теорији диференцијалних једначина сматра се као *први интеграл* дате једначине

$$(196) \qquad F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

такав један израз

$$(197) \qquad \Phi(x, y, y', \ldots, y^{(m)}),$$

који се према самој једначини (196) своди на једну константу кад се у њему y смени једним *којим било* интегралом (196). Егзистенција таквог интеграла изражава се једначином

$$(198) \qquad \Phi = \text{const.}$$

Тако нпр. једначина

$$yy'' + y'^2 = 0$$

има као свој први интеграл

$$yy' = \text{const.};$$

за једначину

$$(y + 2xy')y'' + 2y'^2 = 0$$

постоји први интеграл

$$xy'^2 + yy' = \text{const.}$$

Међутим, поред такве врсте првих интеграла, који изражавају да се један одређен израз Φ *не мења* са промењивом x кад се у њему y смени интегралом једначине (196), у великом броју случајева постоји за исту једначину и такав један израз Φ, који се *мења само у одређеном бројном размаку,* кад се у њему y смени интегралом једначине (196); то се изражава једначином

$$(199) \qquad \Phi = \lambda$$

са придодатом јој двоструком неједначином

$$(200) \qquad \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$$

(где λ_1 и λ_2 означавају предњи и задњи крај размака у коме се мења израз Φ) или једначином

$$(201) \qquad \Phi = \lambda_1 + \vartheta(\lambda_2 - \lambda_1), \quad 0 \leq \vartheta \leq 1.$$

Али, док једначина (198) важи *за који било* интеграл једначине (196), једначина (199) важи *само за поједине врсте* интеграла исте једначине (196), нпр. само за интеграле реалне, или позитивне, или монотоно растуће, или конвексне итд.

Тако нпр. пошто је за реалне вредности y и y'

$$\frac{1}{2}(y'^2 + y^2)^2 \leq y'^4 + y^4 \leq (y'^2 + y^2)^2,$$

то се за диференцијалну једначину

$$y'^4 + y^4 = f(x) \tag{202}$$

добија да је

$$\frac{y'^2 + y^2}{\sqrt{f(x)}} = 1 + \vartheta(\sqrt{2} - 1), \quad 0 \leq \vartheta \leq 1,$$

тако да је, за ма који реални интеграл једначине (202)

$$\frac{y'^2 + y^2}{\sqrt{f(x)}} = 1 + \vartheta \cdot 0{,}4142. \tag{203}$$

Тако исто, пошто је за реалне и позитивне вредности y и y'

$$\frac{1}{2}(y' + y)^2 \leq y'^2 + y^2 \leq (y' + y)^2,$$

то ће, за ма који позитиван и монотоно растући интеграл једначине

$$y'^2 + y^2 = \varphi(x), \tag{204}$$

бити

$$\frac{y' + y}{\sqrt{\varphi(x)}} = 1 + \vartheta \cdot 0{,}4142. \tag{205}$$

Тако се исто налази, да ће за ма који позитиван и конвексан интеграл једначине

$$y''^2 + y^2 = \psi(x), \tag{206}$$

бити

$$\frac{y'' + y}{\sqrt{\psi(x)}} = 1 + \vartheta \cdot 0{,}4142. \tag{207}$$

Тако исто, док једначина (198) важи за *све вредности* x, како реалне тако и имагинарне, једначина (199) важи само за *реалне* вредности x, обично *садржане у једноме одређеном размаку* (a, b). Тако нпр. у случају једначине (202), једначина (203) ће важити само за оне размаке (a, b) вредности x у коме је уочени интеграл реалан; у случају једначине (204), једначина (205) важи само за размак (a, b) у коме је интеграл позитиван и монотоно расте итд.

Скуп од свију тих чињеница означује се једначином

$$(208) \qquad \Phi = \lambda$$

и неједначинама

$$a < x < b,$$
$$\lambda_1 < \lambda < \lambda_2,$$

где ћемо, као и до сада, означавати λ са ϑ кад $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, а са ω кад је $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = +1$.

При томе треба имати на уму да су λ, ϑ, ω ипак функције променљиве x, чије вредности непрестано остају у одговарајућем размаку (λ_1, λ_2), односно $(0, 1)$ или $(-1, +1)$, али су различне за разне вредности x садржане у размаку (a, b).

Док први интеграл у обичном смислу, тј. једначина Φ = const., изражава једну потпуно одређену математичко-*квантитативну* чињеницу, дотле једначина (208) изражава једну непотпуно одређену чињеницу, која је математичко-*квалитативне* природе, јер само означује размак у коме се налази израз Φ, не прецизирајући његову праву вредност. Стога ће се за једначину (208), или за сам израз Φ, казати да представљају један *квалитативни први интеграл* дате једначине (196).

Таква врста првих интеграла, мада не изражава никакву прецизну математичку чињеницу, може ипак корисно послужити за проучавање интеграла на које се односи. На име, такви први интеграли дају могућности да се одреди размак у коме ће бити садржане вредности уоченог интеграла y дате једначине (196), број нула интеграла y у датоме размаку (a, b) променљиве x, размаци који се односе на максимуме и минимуме интеграла y у размаку (a, b) променљиве x итд. А све је то од нарочитог интереса у случајевима кад се диференцијална једначина не може ни тачно, ни приближно интегралити. Такав начина одређивања интегралних размака видеће се из овога што следује.

24. ИНТЕГРАЛНИ РАЗМАЦИ ОДРЕЂЕНИ ПОМОЋУ КВАЛИТАТИВНИХ ПРВИХ ИНТЕГРАЛА

У великом броју случајева, искористивши обрасце за интегралне размаке, изложене у ранијим одељцима ове књиге, могућно је интегралити диференцијалну једначину $\Phi = \lambda$ која представља квалитативни први интеграл дате једначине $F = 0$, а да се при томе не мора знати тачна вредност броја λ која одговара датој вредности x, тј. да се не мора знати функција $\lambda(x)$. Тада се интеграл y, који за $x = x_0$ има вредност $y = y_0$ добија у облику

$$(209) \qquad y = f(x, x_0, y_0, \mu),$$

где је μ један број коме се не зна тачна вредност, али се зна размак у коме ће се он насигурно налазити па ма каква била вредност x у размаку (a, b).

Помоћу једначине (209) *може се тада одредити и променљив размак* (A, B) *у коме ће се налазити интеграл* y *кад се променљива* x *буде мењала у своме размаку* (a, b). Размак (A, B) може се тада израчунати и у облику свога асиметричког или симетричког нормалног представника

$$y = u_1 + \vartheta v_1, \qquad 0 \le \vartheta \le 1$$

$$y = u_2 + \omega v_2, \qquad -1 \le \omega \le 1$$

тако, да се са интегралом y, као бројним размаком, могу вршити све врсте рачуна, на напред показани начин за бројне размаке.

Начин на који се, из једног познатог квалитативног првог интеграла $\Phi = \lambda$ долази до бројног размака за интеграл y, зависи у првоме реду од аналитичког облика израза Φ. За одређене типове таквих израза везане су поједине особине интеграла y, које се своде на одредбу појединих бројних размака. Овде ће бити показано како то бива за неколико простих типова израза Φ.

Први тип облика

$$\Phi = \frac{y'}{y} = \lambda, \qquad a < x < b, \quad \lambda_1 < \lambda < \lambda_2 .$$

Одатле је интеграцијом

$$\log y - \log y_0 = \int_{x_0}^{x} \lambda dx = \lambda' \int_{x_0}^{x} dx = \lambda'(x - x_0)$$

(где је λ' један број који лежи између λ_1 и λ_2) и према томе се интеграл дате једначине $F = 0$, који за $x = x_0$ има вредност $y = y_0$ може написати у облику

$$y = y_0 e^{\lambda'(x - x_0)},$$

Из тога се облика види да *интеграл* y *не постаје једнак нули ни за коју вредност* x *садржану у размаку* (a, b) *и да је за све вредности* x *у томе размаку и сам садржан у размаку између функција*

$$y_0 e^{\lambda_1 (x - x_0)} \quad \text{и} \quad y_0 e^{\lambda_2 (x - x_0)},$$

тако да је

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + \vartheta (C_2 e^{\lambda_2 x} - C_1 e^{\lambda_1 x}), \qquad 0 \le \vartheta \le 1,$$

где су C_1 и C_2 константе

$$C_1 = y_0 e^{\lambda_1 x_0}, \quad C_2 = y_0 e^{-\lambda_2 x_0}.$$

У случају кад се размак (a, b) распростире од 0 до ∞, *интеграл асимптотно тежи нули или бескрајно расте као експоненцијална функција* $e^{\alpha x}$ (где је α једна вредност садржана у размаку између λ_1 и λ_2) према знаку λ_1 и λ_2. Сличан резултат важи и за случај кад се (a, b) пружа од $-\infty$ до 0, или од $-\infty$ до $+\infty$.

1. *пример*. – Нека је дата диференцијална једначина

$$(\varphi + \psi y^2)^2 y'^2 - (\varphi^2 + \psi^2 y^4) y^2 = 0,$$

где су φ, ψ функције променљиве x, позитивне и коначне у размаку (a, b). Пошто је, за ма какву реалну вредност y

$$\frac{1}{2}(\varphi + \psi y^2)^2 \leq \varphi^2 + \psi^2 y^4 \leq (\varphi + \psi y^2)^2,$$

то ће се, за све вредности x у размаку (a, b) и за све реалне интеграле y, имати као квалитативни први интеграл:

$$\frac{y'}{y} = \lambda, \quad a < x < b, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} < \lambda < 1 \quad \text{или} \quad a < x < b, \quad -1 < \lambda < -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

према једној или другој детерминацији квадратног корена

$$\sqrt{\varphi^2 + \psi^2 y^4}.$$

2. *пример*. – Диференцијална једначина

$$y' = (a + b e^{-x^2 - y^2}) y,$$

где су a и b позитивне константе, има за све реалне вредности x и за све своје интеграле, као први интеграл

$$\frac{y'}{y} = \lambda, \quad -\infty < x < \infty, \quad a < \lambda < a + b,$$

Други тип облика

$$(y' + y)\varphi = \lambda, \quad a < x < b, \quad \lambda_1 < \lambda < \lambda_2,$$

где је φ функција променљиве x. Интеграцијом и применом обичне теореме средњих вредности налази се да се интеграл y, који за $x = x_0$ има вредност $y = y_0$, може написати у облику

$$y = e^{-(x-x_0)}\left[y_0 + \lambda' e^{-x_0}\int_{x_0}^{x}\frac{e^x}{\varphi}dx\right],$$

где је λ' један број који лежи у размаку (λ_1, λ_2). Из тога се види да је, за вредности x садржане у размаку (a, b), интеграл y садржан у размаку између функција

$$e^{-x}\left(C + \lambda_1\int_{x_0}^{x}\frac{e^x}{\varphi}dx\right)$$

и

$$e^{-x}\left(C + \lambda_2\int_{x_0}^{x}\frac{e^x}{\varphi}dx\right),$$

где је C константа

$$C = y_0 e^{x_0}.$$

Сличан се резултат добија и за случај кад постоји један квалитативни први интеграл облика

$$(y' - y)\varphi = \lambda.$$

3. *пример*. – Нека је дата диференцијална једначина

$$y'^2 + y^2 = f(x),$$

где је функција $f(x)$ реална, позитивна, коначна и непрекидна у уоченом размаку (a, b) променљиве x.

Уочимо, најпре, позитивну детерминацију квадратног корена $\sqrt{f(x)}$ и интеграл y који за $x = x_0$ има вредност $y = y_0$. Почетна тачка $M(x_0, y_0)$ може се налазити изнад или испод осе Ox, или на њој самој; ми ћемо узети да се она налази изнад те осе. Та се тачка тада мора налазити у области равни xOy, ограниченој осом Ox и кривом

$$y = \sqrt{f(x)}, \tag{210}$$

јер би иначе уочена грана интеграла y била имагинарна.

Кроз тачку M_0 пролазе две позитивне гране интеграла, једна монотоно растућа Y_1, која за коефицијенат правца дирке у M_0 има вредност

$$+\sqrt{f(x_0)-y_0^2},$$

друга монотно опадајућа Y_2, која за тај коефицијенат има вредност

$$-\sqrt{f(x_0)-y_0^2};$$

обе се дирке међу собом поклапају кад се тачка M_0 налази на кривој (210).

Грани Y_1 одговара квалитативни први интеграл

$$\frac{y'+y}{\sqrt{f(x)}}=\lambda, \qquad a<x<b,\ \ 1<\lambda<\sqrt{2},$$

што, према горе реченом, показује да се она, за вредности x садржане у размаку (a, b), непрестано налази у размаку између функција

$$e^{-x}\left[C+\int_{x_0}^{x}e^{x}\sqrt{f(x)}\,dx\right]$$

и

$$e^{-x}\left[C+\sqrt{2}\int_{x_0}^{x}e^{x}\sqrt{f(x)}\,dx\right],$$

где је C константа

$$C=y_0e^{x_0}.$$

Грани Y_2 одговара квалитативни први интеграл

$$\frac{-y'+y}{\sqrt{f(x)}}=\lambda, \qquad a<x<b,\ \ 1\leq\lambda\leq\sqrt{2},$$

што показује да се она, за вредности x садржане у размаку (a, b), непрестано налази у размаку између функција

$$y=e^{x}\left[D-\sqrt{2}\int_{x_0}^{x}e^{-x}\sqrt{f(x)}\,dx\right]$$

и

$$y=e^{x}\left[D-\int_{x_0}^{x}e^{-x}\sqrt{f(x)}\,dx\right].$$

Кроз тачку $M_0'(x_0, -y_0)$, симетричну тачки M_0 према оси Ox, пролазе такође две, и то негативне гране интеграла y, једна монотоно опадајућа U_1, друга монотоно растућа U_2; оне су симетричне гранама Y_1 и Y_2 према оси Ox, и лако им је на горњи начин одредити размаке у којима ће се оне налазити.

Трећи тип облика

$$\Phi = \frac{y''}{y} = \lambda, \quad a < x < b, \quad \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2. \tag{211}$$

Из таквог се облика израза Φ може одмах закључити, да *сваки коначан и нейрекидан инйеграл у једначине* F = 0 *мења знак йри свакоме своме йроласку кроз нулу.* Јер, ако се у једначини

$$y'' - \lambda y = 0 \tag{212}$$

стави

$$y = (x-a)^k \cdot \varphi,$$

где је a произвољан број, добија се

$$(x-a)^2(\varphi\lambda - \varphi'') = k(k-1)\varphi + 2k(x-a)\varphi'. \tag{213}$$

Кад је $x = a$ један корен k-тог реда једначине $y = 0$, функција φ остаје коначна, одређена и од нуле различна за $x = a$, као и њени узастопни изводи. Једначина (213) тада показује да њена десна страна за $x = a$ тежи граници $k(k-1)\varphi$, па пошто та граница мора бити нула, треба да је или $k = 0$ (у коме случају a није корен једначине $y = 0$) или $k = 1$ (у коме је случају a прост корен исте једначине) чиме је горње тврђење доказано.

Разликујмо сада ова два случаја:

Први случај: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Нека је $x = x_0$ један прост корен једначине $y' = 0$ садржан у размаку (a, b). Пошто су тада, према једначини (211), y и y'' истога знака за све вредности x садржане у размаку (a, b), то интеграл y не може у томе размаку имати ни позитивних максимума, ни негативних минимума. Према томе, ако се са y_0 означи вредност коју има y за $x = x_0$ онда

1° ако је $y_0 > 0$, интеграл ће y за $x = x_0$ достићи један позитиван минимум, а у размаку вредности x од a од x_0 биће позитиван и опадаће монотоно; за вредности x у размаку од x_0 до b он ће бити позитиван и монотоно ће расти;

2° ако је $y_0 < 0$, интеграл ће y за $x = x_0$ достићи један негативан максимум, а за вредности x у размаку од a до x_0 биће негативан и монотоно ће расти; за x у размаку од x_0 до b он ће бити негативан и монотоно ће опадати.

У сваком случају, промена знака извода y' наступа само за $x = x_0$.

Множећи једначину (211) са $y'dx$, интегралећи између граница x и x_0, где је x једна произвољна вредност садржана у размаку $(a, \ x_0)$ и водећи рачуна о томе да је $y' = 0$ за $x = x_0$, добија се да је

$$-\frac{y'^2}{2} = \int_x^{x_0} \lambda y y' dx. \tag{214}$$

Пошто производ yy' не мења знак у размаку интеграције, обична теорема средњих вредности, примењена на интеграл (214), даје

$$-y'^2 = \lambda'(y_0^2 - y^2), \quad \lambda_1 \leq \lambda' \leq \lambda_2,$$

одакле се опет интеграцијом и применом исте теореме добија да је

$$y = y_0 \frac{e^X + e^{-X}}{2} = y_0 chX, \tag{215}$$

где је

$$X = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\lambda'} dx = \lambda''(x - x_0), \quad \sqrt{\lambda_1} \leq \lambda'' \leq \sqrt{\lambda_2}. \tag{216}$$

Да смо, пак, на место интеграције између граница x и x_0, извршили интеграцију између граница x_0 и x, где је x једна произвољна вредност садржана у размаку (x_0, b), добила би се једначина

$$-\frac{y'^2}{2} = \int_{x_0}^{x} \lambda y y' dx,$$

која доводи до истих образаца (215) и (216).

На тај се начин долази до овога резултата:

Кад дата диференцијална једначина F = 0 *има за своје реалне, коначне и непрекидне интеграле* y, *а за вредности* x *садржане у размаку* (a, b) *један квалитативни први интеграл* (211), *где су* a *и* b *позитивни бројеви, сваки се од тих интеграла, а за такве вредности* x, *може написати у облику*

$$y = y_0 \frac{e^{\lambda''}(x - x_0) + e^{-\lambda''}(x - x_0)}{2} = y_0 \mathrm{ch}\left[\lambda''(x - x_0)\right],$$

где је y_0 *прост корен једначине* $y' = 0$ *који се налази у размаку* (a, b) *а* λ'' *један број који се налази у размаку између вредности* $\sqrt{\lambda_1}$ *и* $\sqrt{\lambda_2}$.

Став, као што се види, важи за оне, међу интегралима y једначине $F = 0$, чији први извод постаје једнак нули за једну вредност $x = x_0$ садржану у размаку (a, b), а таквих интеграла има бескрајно много. *Сви такви интеграли леже у размаку између вредности*

$$(217) \qquad y_0 \operatorname{ch}(x - x_0)\sqrt{\lambda_1} \quad \text{i} \quad y_0 \operatorname{ch}(x - x_0)\sqrt{\lambda_2}$$

за све вредности x *садржане у размаку* (a, b).

За све вредности x довољно блиске вредности x_0, интеграли се налазе у области између двеју парабола

$$y = y_0\left[1 + \frac{\lambda_1}{2}(x - x_0)^2\right],$$

$$y = y_0\left[1 + \frac{\lambda_2}{2}(x - x_0)^2\right],$$

које пролазе кроз тачку (x_0, y_0). То се види из облика реда уређеног по степенима разлике $x - x_0$, у који се могу развити изрази (217).

1. *пример.* – Хомогена линеарна диференцијална једначина другог реда

$$(218) \qquad y'' - f(x)y = 0$$

обухваћена је горњим ставом за сваки размак вредности x у коме је функција $f(x)$ *позитивна*; вредности λ_1 и λ_2 су најмања и највећа вредност које има $f(x)$ у томе размаку. За интеграл y те једначине важи све оно што је малочас нађено за трећи тип квалитативних првих интеграла.

2. *пример.* – Диференцијална једначина

$$y'' + \varphi y' + \psi y = 0$$

сменом

$$y = z e^{-\frac{1}{2}\int \varphi \, dx}$$

претвара се у једначину

$$z'' - f(x)z = 0,$$

где је

$$(219) \qquad f(x) = \psi - \frac{\varphi^2}{4} - \frac{\varphi'}{2},$$

из чега се изводи овај резултат:

Сваки реалан интеграл, коначан и непрекидан у једноме размаку $(a,\ b)$ променљиве x, у коме је функција (219) позитивна, и који је такав, да први извод функције

$$z = ye^{\frac{1}{2}\int \varphi\, dx}$$

постаје једнак нули за једну вредност $x = x_0$ садржану у размаку $(a,\ b)$, налази се у размаку између вредности

$$\frac{y_0}{2} e^{-\frac{1}{2}\int \varphi\, dx} \operatorname{ch}\left[(x - x_0)\mu_1\right]$$

и

$$\frac{y_0}{2} e^{-\frac{1}{2}\int \varphi\, dx} \operatorname{ch}\left[(x - x_0)\mu_2\right],$$

где су μ_1 и μ_2 најмања и највећа вредност, које има квадратни корен функције (219) у размаку $(a,\ b)$.

3. *йример.* – Нека је дата диференцијална једначина n-тог реда

$$\text{(220)} \qquad \left[x^{2k} + y^{2k} + y'^{2k} + \ldots + y^{(n)2k}\right] y'' -$$

$$-\left[x^2 + y^2 + y'^2 + \ldots + y^{(n)2}\right]^k y = 0,$$

где је k цео број већи од јединице; према ранијем ставу да је за позитивне вредности a_k

$$1 \leq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_p)^k}{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_p^k} \leq p^{k-1}$$

види се да једначина (220) има, за све своје интеграле y, реалне, коначне и непрекидне у размаку $(a,\ b)$ променљиве x, један квалитативни први интеграл облика (211), где је

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = (n+2)^{k-1}.$$

Уочени интеграли, за x у размаку $(a,\ b)$, налазе се, дакле, у размаку између функција

$$\frac{y_0}{2}\left[e^{(x-x_0)} + e^{-(x-x_0)}\right],$$

$$\frac{y_0}{2}\left[e^{(x-x_0)(n+2)^{\frac{k-1}{2}}} + e^{-(x-x_0)(n+2)^{\frac{k-1}{2}}}\right].$$

Други случај: $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Диференцијална једначина

$$y'' + hy = 0, \tag{221}$$

где је h позитивна константа, има за општи интеграл израз

$$y = C_1 \cos(C_2 + x\sqrt{h}), \tag{222}$$

где су C_1 и C_2 интеграционе константе. Интеграл је, дакле, осцилаторан и састављен из полуталаса наизменце позитивних и негативних.

У теорији линеарних диференцијалних једначина другога реда доказује се да то исто важи и за општи интеграл једначине (221) кад год је h каква функција променљиве x, *позитивна* за вредности x садржане у једном довољно пространом размаку (a, b). (Sturm-ова теорема за хомогене линеарне једначине другога реда).

Уочимо, дакле једначину

$$y'' + \lambda y = 0, \tag{223}$$

где фредност λ, пошто се креће у позитивном размаку

$$(-\lambda_1, -\lambda_2),$$

остаје позитивна за вредности x садржане у размаку (a, b).

Посматрајмо најпре један *позитиван* полуталас интеграла y. Према самој једначини (223), други извод y'' је негативан дуж целога тога полу таласа, што значи да овај на њему може имати само један максимум. Нека је $x = x_0$ вредност за коју је тај максимум достигнут, а нека су $x = x_1$ и $x = x_2$ вредности x које одговарају двама крајевима полуталаса.

Док се x мења од x_1 до x_0, интеграл y је непрестано позитиван и расте; док се x мења од x_0 до x_2, он је непрестано негативан и опада. У свакоме од два размака (x_1, x_0) и (x_0, x_2) производ yy' има, дакле, непроменљив знак.

Уочимо најпре део полуталаса y у размаку (x_1, x_0). Множећи једначину (223) са $y'dx$, интегралећи између граница x и x_0, где је x једна произвољна вредност садржана у томе размаку и водећи рачуна о томе да је $y' = 0$ за $x = x_0$, добија се једначина (214), па пошто производ yy' не мења знак у размаку (x, x_1), обична теорема средњих вредности даје тада

$$y'^2 = \lambda'(y_0^2 - y^2), \qquad -\lambda_1 \leq \lambda' \leq -\lambda_2, \tag{224}$$

где је y_0 вредност y за $x = x_0$; ова вредност представља, дакле, *амплитуду полуталаса.* Из тога се налази

Други случај: $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Диференцијална једначина

$$y'' + hy = 0, \tag{221}$$

где је h позитивна константа, има за општи интеграл израз

$$y = C_1 \cos(C_2 + x\sqrt{h}), \tag{222}$$

где су C_1 и C_2 интеграционе константе. Интеграл је, дакле, осцилаторан и састављен из полуталаса наизменце позитивних и негативних.

У теорији линеарних диференцијалних једначина другога реда доказује се да то исто важи и за општи интеграл једначине (221) кад год је h каква функција променљиве x, *позитивна* за вредности x садржане у једном довољно пространом размаку (a, b). (Sturm-ова теорема за хомогене линеарне једначине другога реда).

Уочимо, дакле једначину

$$y'' + \lambda y = 0, \tag{223}$$

где фредност λ, пошто се креће у позитивном размаку

$$(-\lambda_1, -\lambda_2),$$

остаје позитивна за вредности x садржане у размаку (a, b).

Посматрајмо најпре један *позитиван* полуталас интеграла y. Према самој једначини (223), други извод y'' је негативан дуж целога тога полу таласа, што значи да овај на њему може имати само један максимум. Нека је $x = x_0$ вредност за коју је тај максимум достигнут, а нека су $x = x_1$ и $x = x_2$ вредности x које одговарају двама крајевима полуталаса.

Док се x мења од x_1 до x_0, интеграл y је непрестано позитиван и расте; док се x мења од x_0 до x_2, он је непрестано негативан и опада. У свакоме од два размака (x_1, x_0) и (x_0, x_2) производ yy' има, дакле, непроменљив знак.

Уочимо најпре део полуталаса y у размаку (x_1, x_0). Множећи једначину (223) са $y'dx$, интегралећи између граница x и x_0, где је x једна произвољна вредност садржана у томе размаку и водећи рачуна о томе да је $y' = 0$ за $x = x_0$, добија се једначина (214), па пошто производ yy' не мења знак у размаку (x, x_1), обична теорема средњих вредности даје тада

$$y'^2 = \lambda'(y_0^2 - y^2), \quad -\lambda_1 \leq \lambda' \leq -\lambda_2, \tag{224}$$

где је y_0 вредност y за $x = x_0$; ова вредност представља, дакле, *амплитуду полуталаса.* Из тога се налази

$$(225)\quad y = y_0 \cos\left[(x - x_0)\mu\right], \quad x_1 < x < x_0, \quad \sqrt{\mu_1} \leq \mu \leq \sqrt{\mu_2}$$

где је

$$\mu_1 = -\lambda_1, \quad \mu_2 = -\lambda_2.$$

За део полуталаса y у размаку (x_0, x) добили бисмо на исти начин исту једначину (224), из чега се закључује да се цео полуталас може изразити једначином (225) са неједначинама

$$(226)\quad \begin{array}{c} x_1 < x < x_2, \\ \sqrt{\mu_1} \leq \mu \leq \sqrt{\mu_2}. \end{array}$$

Посматрајмо сад један негативан полуталас чији крајеви нека су $x = x_1$ и $x = x_2$. Према једначини (223), други извод y'' тада је позитиван дуж целог тога полуталаса, што значи да овај на њему може имати само један минимум, достигнут нпр. за $x = x_0$. Док се x мења од x_1 до x_0, интеграл y је непрестано негативан и опада; док се x мења од x_0 до x_2, он је непрестано позитиван и расте. У свакоме од та два размака производ yy' има, дакле, непроменљив знак. И тада се налази, као малочас за позитиван полуталас, тада се цео полуталас може изразити једначином (225) са неједначинама (226).

Из тога се изводи овај општи закључак:

Кад дата диференцијална једначина (196) *има за своје реалне, коначне и непрекидне интеграле* y, *за вредности* x *садржане у размаку* (a, b)*, један квалитативни први интеграл облика* (211), *где су* λ_1 и λ_2 *негативни бројеви, интеграл* y *састављен је из позитивних и негативних полуталаса; сваки од ових може се изразити у облику*

$$(227)\quad y = y_0 \cos\left[(x - x_0)\mu\right], \quad x_1 < x < x_2, \quad \sqrt{\mu_1} \leq \mu \leq \sqrt{\mu_2}$$

где су $x = x_1$ *и* $x = x_2$ *крајеви полуталаса,* y_0 *његова амплитуда, а* μ_1 *и* μ_2 *апсолутне вредности бројева* λ_1 *и* λ_2.

Пошто дуж посматраног полуталаса, тј. за вредности x садржане у размаку (x_1, x_2), израз

$$\cos\left[(x - x_0)\mu\right]$$

не мења знак, то је за све те вредности

$$-\frac{\pi}{2} \leq (x - x_0)\mu \leq +\frac{\pi}{2},$$

па, дакле,

$$x_1 = x_0 - \frac{\pi}{2\mu}, \quad x_2 = x_0 + \frac{\pi}{2\mu},$$

а пошто се μ налази у размаку између $\sqrt{\mu_1}$ и $\sqrt{\mu_2}$, то се x_1 налази у размаку између вредности

$$x_0 - \frac{\pi}{2\sqrt{\mu_1}} \quad \text{и} \quad x_0 - \frac{\pi}{2\sqrt{\mu_2}},$$

а x_2 у размаку између вредности

$$x_0 + \frac{\pi}{2\sqrt{\mu 2}} \quad \text{и} \quad x_0 + \frac{\pi}{2\sqrt{\mu_1}}.$$

То показује *да се разлика* $x_2 - x_1$, *тј. дужина полуталаса, увек налази у размаку између*

$$\frac{\pi}{\sqrt{\mu_2}} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1}},$$

из чега се нпр. лако изводи закључак о броју полуталаса у једноме датоме размаку (a, b) вредности x. Дужина l полуталаса може се написати у облику

$$l = \frac{\pi}{\sqrt{\mu_2}} + \vartheta\pi \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_1}} - \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} \right), \quad 0 \leq \vartheta \leq 1;$$

ако се са p означи цео број који показује колико је пута вредност $\frac{\pi}{\sqrt{\mu_1}}$ садржана у вредности $b - a$, а са q цео број који показује колико је пута $\frac{\pi}{\sqrt{\mu_2}}$ садржано у истој вредности $b - a$, *број целих полуталаса, садржаних у размаку* (a, b), *увек се налази у размаку* (p, q), тј. *он је*

$$p + \vartheta'(q - p), \quad 0 \leq \vartheta' \leq 1.$$

25. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПРВОГ И ДРУГОГ РЕДА СА ОСЦИЛАТОРНИМ ИНТЕГРАЛИМА

Најважнији тип диференцијалних једначина са *осцилаторним интегралима*, тј. чији је интеграл састављен из наизменичних полуталаса, је хомогена линеарна једначина другога реда. Кад је таква једначина сведена на тип

$$(228) \qquad y'' + f(x)y = 0,$$

кад год је функција $f(x)$ у једном датом, довољно пространом, размаку (a, b) променљиве x, коначна, непрекидна и позитивна, из овога што претходи види се да су њени интеграли уопште *осцилаторне функције* те променљиве у размаку (a, b). Честина осцилација, тј. број полуталаса у томе размаку, одређује се на напред наведени начин. Кад функција $f(x)$ садржи какав променљив параметар, овај ће очевидно утицати и на честину осцилација. Тај се утицај може испитати проучавајући начин промена бројева λ_1 и λ_2 (из ранијег одељка) кад се буде мењао тај параметар. Интерес и важност таквих испитивања долази отуда, што се на линеарне диференцијалне једначине другога реда наилази у великоме броју проблема механике и математичке физике, у теоријама осцилаторних појава, као што су: кретање клатна, светлосне и електричне осцилације, појаве еластичности итд.

Приметимо да интеграл може бити осцилаторан и онда кад функција $f(x)$ наизменце прелази од једнога знака на други, постајући наизменце позитивна и негативна. Јер тада израз

$$yy'' = -f(x)y^2,$$

који увек има знак функције $-f(x)$, и сам постаје наизменце позитиван и негативан, што значи да интегрална крива наизменце прелази од конвексности на конкавност (према оси Ox), а што може бити и једним низом осцилација. Само што, при таквим осцилацијама, прелаз из једног полуталаса у други (тј. места промене конвексности и конкавности) бива за сталне вредности x, које не зависе од интеграционих констаната и које се налазе међу коренима једначине $f(x) = 0$, па се, дакле, не мењају од једног партикуларног интеграла до другог. Напротив, у случајевима кад $f(x)$ задржава стално позитиван знак, ти прелази бивају за вредности x које зависе од тих констаната и мењају се од једног интеграла до другог.

Међутим, *једначине облика* (228) *задовољавају и интеграли појединих диференцијалних једначина првога реда*

$$(229) \qquad y' = F(x, y)$$

тако, да кад год функција $f(x)$, што им одговара после извршеног диференцијалења једначине (229), задовољава напред изложене погодбе за осцилаторни карактер интеграла једначине (228), и *интеграли једначине (229) ће бити осцилаторни.*

Које су то једначине (229) чији општи интеграл задовољава једну једначину облика (228)?

Из (229) се добија диференцијалењем

$$y'' = \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x} + F \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Интеграл y *задовољаваће, дакле, једну једначину* (228) *кад год се израз* $\frac{y''}{y}$, тј. израз

(230) $$\frac{1}{y}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + F \frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

своди на једну функцију само променљиве x; *па ће функција тада бити* f(x) *из једначине* (228), *пошто јој се промени знак.*

1. *пример.* – За једначину првога реда

(231) $$y'^2 + y^2 = \varphi(x),$$

израз (230) има облик

$$\pm\frac{\varphi'}{2y\sqrt{\varphi - y^2}} - 1;$$

да би он био независан од y потребно је и довољно да буде φ = const., чему одговара $f(x)$ = const.

Једначина (231), чији општи интеграл задовољава једну једначину облика (228), јесте, дакле,

(232) $$y'^2 + y^2 = a^2$$

(где је a константа која се увек може свести на јединицу), а њој одговара једначина (228) облика

(233) $$y'' + y = 0.$$

Општи интеграл једначине (233)

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

је осцилаторан, па ће то бити случај и са општим интегралом једначине (232), који је (за $a = 1$)

$$y = C \sin x + \sqrt{1 - C^2} \cos x.$$

2. *пример.* – За линеарну једначину првога реда

$$y' = uy + v$$

(где су u и v дате функције променљиве x) израз (230) је облика

$$(u'+u^2)+\frac{1}{y}(v'+uv);$$

да би он био независан од y, потребно је и довољно да буде

$$u=-\frac{v'}{v} \tag{234}$$

и да одговарајућа функција

$$f(x)=-(u'+u^2)$$

буде позитивна. Пошто се тада налази да је

$$u'+u^2=\frac{2v'^2-vv''}{v^2},$$

то поред услова (234), треба још да је у посматраном размаку (a, b) и израз

$$vv''-2v'^2$$

позитиван, или да функција

$$\frac{v''}{v}-2\left(\frac{v'}{v}\right)^2$$

наизменце прелази од једнога знака на други.

Али једначина (228) *није једина диференцијална једначина другога реда која има осцилаторне интеграле.* Тако, постоји бескрајно много, како алгебарских, тако и трансцендентних функција $F(x, y)$ које, кад се променљива x буде мењала у једноме датоме размаку (a, b), остају непрестано *позитивне и веће од једнога сталног позитивног броја N*, па ма каквом реалном вредношћу (коначном или бескрајном) сменили у F променљиву y.

Таква би нпр. једна функција, међу алгебарским функцијама, био полином $P(x, y)$ по променљивој y, који садржи само *парне* степене те променљиве, са коефицијентима који су, као и $P(x, 0)$ или сталне *позитивне* количине, или ма какве функције променљиве x позитивне у размаку (a, b). Таква би, такође међу трансцендентним функцијама, била функција

$$F(x, y)=f(x)+\varphi(x)\,e^{-P(x,y)}, \tag{235}$$

где је P ма какав полином, а f и φ ма какве функције променљиве x, коначне, непрекидне и позитивне у размаку (a, b).

У исто време, постоји и бескрајно много, како алгебарских, тако и трансцендентних функција $\Phi(x, y)$ таквих да, док се x мења у једном датом размаку (a, b), вредност је функције непрестано позитивна и налази се између два стална броја N и M $(N < M)$ па ма каквом реалном вредношћу (коначном или бескрајном) сменили у њој y.

Таква би нпр. била функција

$$\Phi(x, y) = \frac{u + vy^2}{w + sy^2},$$

где су u, v, w, s или сталне позитивне количине, или коначне, непрекидне и позитивне функције променљиве x у размаку (a, b). Таква би била и функција

$$\Phi(x, y) = \frac{u^2 + v^2 y^4}{(u + vy^2)^2}.$$

Са тако дефинисаним функцијама F и Φ има се, дакле, резултат: *Диференцијална једначина*

$$y'' + yF(x, y) = 0 \tag{236}$$

има као квалитативни први интеграл

$$\frac{y''}{y} = \lambda, \qquad a < x < b;\ N < \lambda < +\infty, \tag{237}$$

а диференцијална једначина

$$y'' + y\,\Phi(x, y) = 0 \tag{238}$$

има као такав интеграл

$$\frac{y''}{y} = \mu, \qquad a < x < b;\ N < \mu < M. \tag{239}$$

Из овога се непосредно изводе закључци везани за такве прве интеграле, а који су напред наведени, тј.

1° Сваки интеграл y, кад год су он и његов први и други извод коначне и непрекидне функције променљиве x у размаку (a, b) довољно пространом да би се у њему могао испољити осцилаторни карактер, биће *осцилаторан*: имаће у томе размаку само простих нула, мењајући знак сваки пут при проласку кроз сваку од ових;

2° Интеграл y једначине (236) има у размаку (a, b) *најмање* онолико полуталаса, колико је пута вредност $\frac{\pi}{\sqrt{N}}$ садржана у вредности $b - a$;

3° Интеграл y једначине (238) има у размаку (a, b) *најмање* онолико полуталаса, колико се пута вредност $\frac{\pi}{\sqrt{N}}$ садржи у вредности $b-a$, *а највише* онолико колико је пута вредност $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$ садржана у $b-a$.

Тако нпр. једначина

$$y'' + \alpha y + \beta y^3 = 0$$

(α, β позитивне константе), а која се интеграли помоћу елиптичких функција, одговара функција

$$F(x, y) = \alpha + \beta y^2,$$

чија је вредност увек већа од α; њен ће интеграл, дакле, имати у размаку (a, b) *најмање* онолико полуталаса колико се пута број $\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$ садржи у разлици $b-a$.

Једначини

$$(u + vy^2)y'' + y\sqrt{v^2y^4 + u^2} = 0 \tag{240}$$

[u и v су или сталне позитивне количине, или функције променљиве x, које су коначне, непрекидне и позитивне у размаку (a, b)] одговара функција

$$\Phi(x, y) = \frac{\sqrt{u^2 + v^2y^4}}{u + vy^2},$$

чија вредност, за све вредности x у размаку (a, b) и за све реалне вредности y, лежи у размаку између $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и 1. Према томе је

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071\ldots, \qquad M = 1$$

и интеграл y једначине (240) има у размаку (a, b) *најмање* онолико полуталаса, колико се пута број $\pi\sqrt[4]{2}$ садржи у разлици $b-a$, а *највише* онолико полуталаса колико се пута број π садржи у тој разлици.

Услов да би општи интеграл једне диференцијалне једначине првога реда

$$y' = f(x, y)$$

задовољавао једну једначину облика (236) или (238), састоји се у овоме: *шреба да се израз*

$$\frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+f\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

своди на једну функцију $F(x,y)$ *или* $\Phi(x,y)$.

26. РАЗМАЦИ ЗА ИНТЕГРАЛЕ СИСТЕМА СИМУЛТАНИХ ЈЕДНАЧИНА

Систем симултаних једначина

$$(241)\qquad \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x,y_1,\dots,y_n),\\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x,y_1,\dots,y_n),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x,y_1,\dots,y_n), \end{aligned}$$

може такође имати, за своје реалне, коначне и непрекидне интеграле $y_1, y_2, \dots, y_n$, квалитативних првих интеграла

$$(242)\qquad \Phi=\lambda,\qquad a<x<b;\ M_1<\lambda<M_2,$$

где је Φ једна одређена функција једне или више непознатих $y_1, y_2, \dots, y_n$, променљиве x и извода непознатих функција y_k по x; Φ може, уосталом, зависити и од почетних вредности функција y_k.

Тако, кад год се, међу једначинама (241), налази једна или више једначина облика

$$(243)\qquad \frac{dy_k}{dx}=y_kf_k,$$

где је f_k каква функција променљиве x и непознатих y_k, по вредности непрестано већа од једног сталног позитивног броја N за све реалне (коначне или бескрајне) вредности променљивих што у њој фигуришу, *свакој шаквој једначини* (241) *одговараће по један квалишашивни први иншеграл облика*

$$\frac{1}{y_k}\frac{dy_k}{dx} = \lambda, \qquad -\infty < x < +\infty, \quad N < \lambda < +\infty.$$

Из таквог се првог интеграла могу извести напред наведени закључци за интеграл y_k, везани за егзистенцију првих интеграла таквих облика. Тако, *интеграл* y_k *система* (241), *који за* $x = x_0$ *има вредност* $y = y_{k,0}$, *биће, за сваку реалну вредност* x, *по апсолутној вредности већи од*

$$y_{k,0}e^{N(x-x_0)};$$

он неће имати реалних нула итд.

Диференцијалењем једне, ма које, од једначина (241) добија се једначина облика

$$\frac{d^2y_k}{dx^2} = \frac{\partial f_k}{\partial x} + \frac{\partial f_k}{\partial y_1}\cdot\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_k}{\partial y_n}\cdot\frac{dy_n}{dx},$$

која, према самим једначинама (241) постаје

$$\frac{d^2y_k}{dx^2} = \frac{\partial f_k}{\partial x} + f_1\frac{\partial f_k}{\partial y_1} + f_2\frac{\partial f_k}{\partial y_2} + \ldots + f_k\frac{\partial f_k}{\partial y_n},$$

према чему је

$$\frac{1}{y_k}\frac{d^2y_k}{dx^2} = \frac{1}{y_k}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x} + \sum_{i=1}^{i=n} f_i\frac{\partial f_k}{\partial y_i}\right), \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

И тада, кад год један или више израза

$$\frac{1}{y_k}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x} + \sum f_i\frac{\partial f_k}{\partial y_i}\right)$$

за вредности x у размаку (a, b) остаје по вредности непрестано мањи од једног негативног сталног броја $-N$, а већи од једнога негативног сталног броја $-M$, на ма какве реалне вредности имали $y_1, y_2, \ldots, y_k$, *k-тој једначини* (241) *одговараће по један квалитативан први интеграл облика*

$$\frac{1}{y_k}\frac{d^2y_k}{dx^2} = \lambda, \qquad a < x < b, \ -M < \lambda < -N.$$

А из егзистенције таквог првог интеграла, закључује се на напред показани начин:

1° *да је интеграл* $\mathrm{y_k}$, *који за* $\mathrm{x = x_0}$ *има вредност* $\mathrm{y = y_{k,0}}$ *састављен из позитивних и негативних полуталаса* од којих се сваки може изразити у облику

$$y = y_{k,0}\cos[(x - x_0)\mu], \qquad x_1 < x < x_2; \; \sqrt{N} < \mu < \sqrt{M},$$

где су x_1 и x_2 крајеви полуталаса;

2° *да се дужина* l *полуталаса може изразити у облику*

$$l = \frac{\pi}{\sqrt{M}} + \vartheta\pi\left(\frac{1}{\sqrt{N}} - \frac{1}{\sqrt{M}}\right);$$

3° ако се са p и q означе цели бројеви, који показују колико је пута вредност $\frac{\pi}{\sqrt{N}}$ и $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$ садржана у разлици $b - a$, *број* h *полуталаса у размаку* (a, b) *биће*

$$h = p + \vartheta'(q - p).$$

Пример: Нека је дат систем

$$\frac{dy_1}{dx} = \alpha y_2 y_3, \qquad \frac{dy_2}{dx} = \beta y_1 y_3, \qquad \frac{dy_3}{dx} = \gamma y_1 y_2 \tag{244}$$

(α, β, γ константе), на који се наилази у проблему кретања чврстог тела и чији се интеграли изражавају помоћу елиптичких функција.

Диференцијалењем прве једначине добија се

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \alpha\left(y_2\frac{dy_3}{dx} + y_3\frac{dy_2}{dx}\right)$$

што, према другој и трећој једначини, даје

$$\frac{1}{y_1}\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \alpha(\gamma y_2^2 + \beta y_3^2), \tag{245}$$

а сличне се једначине добијају и за изразе

$$\frac{1}{y_2}\frac{d^2 y_2}{dx^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{y_3}\frac{d^2 y_3}{dx^2}.$$

Кад су β и γ *истога знака*, израз (245) може бити једнак нули само за такву једну реалну вредност $x = x'$, за коју би било у исти мах $y_2 = 0$ и $y_3 = 0$. Али, те две функције не могу бити једнаке нули за једну исту вредност $x = x'$. Јер, узастопним диференцијалењем једначина (244) добио би се за ма који извод интеграла y_1 један израз који и сам постаје једнак нули кад је $y_2 = 0$ и $y_3 = 0$, тј. за $x = x'$. А пошто вредност n-тог извода функције y_1 за $x = x'$, подељен са $n!$, представља коефицијенат од $(x - x')^n$ у развитку интеграла y_1 у Taylor-ов ред (који, према основној теореми о егзистенцији интеграла симултаних једначина, мора бити конвергентан у близини вредности $x = x'$), то би сви ти коефицијенти, изузевши први, били једнаки нули, тј. интеграл y_1 би се идентички свео на константу. Према томе би се, на основу прве једначине (244) један од два интеграла y_2 и y_3 свео идентички на нулу, а према (245) и други. Кад год су, дакле, y_1 и y_2 праве функције променљиве x, оне не могу бити једнаке нули за једну исту вредност $x = x'$.

Из тога се закључује, да кад су β и γ *истога знака*, апсолутна вредност израза (245) за све реалне вредности x остаје непрестано *већа* од једнога сталног позитивног броја M, што значи *да систем* (244) *има један квалитативан први интеграл облика*

$$\frac{1}{y_1}\frac{d^2y_1}{dx^2} = \lambda,$$

$$-\infty < x < +\infty;\ M < \lambda < +\infty \quad \text{или} \quad -\infty < x < +\infty;\ -\infty < \lambda < -M,$$

(према томе да ли је заједнички знак констаната $\alpha\beta$ и $\alpha\gamma$ позитиван или негативан) тако да се могу применити напред наведена посматрања.

27. РАЗМАЦИ ЗА ИНТЕГРАЛЕ ПАРЦИЈАЛНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

Као и обичне диференцијалне једначине и систем симултаних једначина, тако и парцијалне једначине

$$(246) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n; V, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}; \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}, \ldots) = 0$$

могу имати квалитативних првих интеграла облика

$$(247) \qquad \Phi = \lambda, \quad \lambda_1 < \lambda < \lambda_2,$$

за одређене области независно променљивих количина $x_1, \ldots, x_n$, и за своје реалне интеграле V који, при томе, задовољавају још и какве дате услове.

Такве је прве интеграле могућно формирати нпр. користећи се раније изведеним алгебарским или интегралним неједначинама, које би, примењене на израз F, дале могућности да се из његовог облика закључи о егзистенцији једнога израза Φ који би:

1° зависио од променљивих $x_1, \ldots, x_n$, непознате функције V и њених парцијалних извода по тим променљивим;

2° остао, за посматрану класу интеграла V, непрестано у једноме одређеном размаку (λ_1, λ_2), а за све вредности $x_1, \ldots, x_n$ што се налазе у једној опет одређеној области Δ.

Тако добивена једначина (247) представља једну нову парцијалну једначину; ако се ова може интегралити за произвољну вредност λ, *тражени интеграл V налазиће се између двеју функција V_1 и V_2 које се добијају кад се у интегралу једначине (247) смени λ једанпут са најмањом, а други пут са највећом вредношћу коју добија овај интеграл док се λ мења од λ_1 до λ_2.*

Тако ће се добити интеграл V у *облику једнога размака.*

То ће овде бити објашњено на једноме важном типу парцијалних једначина првога реда, на које се наилази у општијим проблемима геометрије, механике и математичке физике. То је једначина

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2 = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{248}$$

где је f дата функција независно променљивих количина $x_1, \ldots, x_n$.

Нека је Δ једна посматрана област променљивих $x_1, \ldots, x_n$, па уочимо оне интеграле V једначине (248), који су у тој области реални и такви да им сваки од парцијалних извода

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}$$

у тој области задржава непроменљив знак. Означимо са s_k јединицу узету са непроменљивим знаком извода $\frac{\partial V}{\partial x_k}$, па се једначина (248) може написати у облику

$$\sqrt{\left(s_1 \frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(s_n \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2} = \varphi(x_1, \ldots, x_n), \tag{249}$$

где је

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{f(x_1, \ldots, x_n)}. \tag{250}$$

Пошто се, као што је напред показано, вредност на левој страни једначине (249) у којој су сви чланови

$$s_1 \frac{\partial V}{\partial x_1},\ \ s_2 \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, s_n \frac{\partial V}{\partial x_n}$$

очевидно позитивни, налази у размаку између

$$\frac{P}{\sqrt{n}} \quad \text{и} \quad P,$$

где је

$$P = s_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + s_n \frac{\partial V}{\partial x_n},$$

то се једначина (250) може написати у облику

$$(251) \qquad s_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + s_n \frac{\partial V}{\partial x_n} = \lambda\,\varphi(x_1, \ldots, x_n), \quad 1 \leq \lambda \leq \sqrt{n},$$

(где за φ треба узети позитивну детерминацију квадратног корена на левој страни једначине 250).

Једначина (251) *представља један квалитативни први интеграл дате једначине* (248).

Једначина се (251) може интегралити за произвољну вредност λ, и то по обичном упутству за интеграцију линеарних парцијалних једначина првога реда. По томе упутству треба образовати систем

$$s_1 \frac{dx_1}{1} = s_2 \frac{dx_2}{1} = \ldots = s_n \frac{dx_n}{1} = \frac{dV}{\lambda\varphi},$$

из кога се добија

$$(252) \qquad \begin{aligned} x_2 &= \frac{s_1}{s_2} x_1 + C_1, \\ x_3 &= \frac{s_1}{s_3} x_1 + C_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \frac{s_1}{s_n} x_1 + C_{n-1} \end{aligned}$$

као и једначина

$$(253) \qquad \frac{dV}{dx_1} = s_1 \lambda\varphi.$$

Ако се, према општем упутству за ту интеграцију, на десној страни једначине (253) смене $x_2, x_3, \ldots, x_n$ њиховим вредностима (252), та једначина постаје

$$\frac{dV}{dx_1} = s_1\lambda\psi(x_1, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}), \tag{254}$$

где је ψ одређена функција променљиве x_1, која садржи $n-1$ произвољних констаната $C_1, \ldots, C_{n-1}$; та ће функција бити одређена непосредно поменутом сменом.

Из (254) се добија интеграцијом

$$V = s_1\int \lambda\psi\, dx_1 + C_n, \tag{255}$$

где је C_n једна нова интеграциона константа.

Према датој једначини (248), функција f као збир квадрата реалних количина увек је позитивна; према томе је функција φ, па дакле и функција ψ, увек реална и од нуле различна у области Δ. Функција ψ задржава, дакле, непроменљив знак у тој области и онда, применом обичне теореме за средње вредности интеграла, налази се да је

$$\int \lambda\psi\, dx_1 = \mu\int \psi\, dx_1, \quad 1 < \mu < \sqrt{n},$$

тако, да једначина (255) постаје

$$V = s_1\mu\int \psi\, dx_1 + C_n. \tag{256}$$

Међутим, из (252) и (256) је

$$C_k = x_{k+1} - \frac{s_1}{s_{k+1}}x_1, \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$C_n = V - s_1\mu F(x_1, C_1, \ldots, C_{n-1}),$$

где је

$$F(x_1, C_1, \ldots, C_{n-1}) = \int \psi(x_1, C_1, \ldots, C_{n-1})dx_1.$$

Према упутству за интеграцију линеарних парцијалних једначина ако се означи да је

$$\begin{aligned} u_k &= s_{k+1}x_{k+1} - s_1x_1, \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \\ u_n &= V - s_1\mu F(x_1, u_1, \ldots, u_{n-1}) \end{aligned} \tag{257}$$

сваки интеграл V посматране врсте мора задовољавати по једну једначину облика

$$H(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0, \tag{258}$$

где је H функција само променљивих $u_1, \ldots, u_n$; обрнуто, свакој произвољно узетој функцији H одговара један интеграл V.

Решењем једначине (258) по u_n, а с обзиром на последењу од једначина (257), добија се интеграл V у облику

$$V = s_1 \mu F(x_1, u_1, \ldots, u_{n-1}) + \Phi(u_1, \ldots, u_{n-1}), \tag{259}$$

где је Φ произвољна функција променљивих $u_1, \ldots, u_{n-1}$.

Свакоме партикуларном интегралу V *посматране врсте одговара у изразу* (259) *по једна специјална функција* Φ, *и свакој произвољно узетој функцији* Φ *одговара по један партикуларни интеграл* V. Тај ће интеграл, а за вредности $x_1, \ldots, x_n$ садржане у области Δ, лежати у размаку између

$$s_1 F + \Phi \quad \text{и} \quad s_1 \sqrt{n} F + \Phi.$$

Функција F, као што се види из горе наведеног, добија се из дате функције f помоћу једна просте квадратуре. На тај начин, *сви интеграли V посматране врсте добијају се у облику размака, помоћу једне просте квадратуре.* Произвољна функција Φ одређује се, као и увек код парцијалних једначина, помоћу почетних услова које има да задовољи интеграл V што се има у виду.

Пример. – Нека је дата једначина

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2 = (x_2 - x_1)^4,$$

па потражимо њене реалне интеграле чији је извод $\dfrac{\partial V}{\partial x_1}$ непрестано негативан, а извод $\dfrac{\partial V}{\partial x_2}$ непрестано позитиван у датој области Δ равни (x_1, x_2). Тада је

$$s_1 = -1, \quad s_2 = +1$$

и

$$\varphi(x_1, x_2) = (x_2 - x_1)^2,$$

тако да се има формирати систем

$$-\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{1} = \frac{dV}{\lambda(x_2 - x_1)^2}, \quad 1 \leq \lambda \leq \sqrt{2}.$$

Одатле је

$$x_2 = -x_1 + C_1,$$

$$u_1 = x_2 + x_1.$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = -\lambda(x_2 - x_1)^2 = -\lambda(C_1 - 2x_1)^2,$$

и према томе

$$V = \mu\frac{(C_1 - 2x_1)^3}{6} + C_2, \quad 1 \leq \lambda \leq \sqrt{2},$$

$$F(x_1, C_1) = -\frac{(C_1 - 2x_1)^3}{6},$$

$$F(x_1, u_1) = -\frac{(x_2 - x_1)^3}{6}.$$

Сваки од тражених интеграла V биће, дакле, облика

$$V = \mu\frac{(x_2 - x_1)^3}{6} + \Phi(x_1 + x_2),$$

где је Φ функција једне променљиве. Број μ зависи од x_1 и x_2, али за све вредности тих променљивих, што се налазе у области Δ, остаје непрестано у размаку између 1 и $\sqrt{2}$. Он достиже своју граничну вредност $\mu = 1$ за оне парове вредности x_1, x_2, за које један или други од извода $\frac{\partial V}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial V}{\partial x_2}$ постаје једнак нули; он такође достиже своју граничну вредност $\sqrt{2}$ за оне парове вредности x_1, x_2 за које је

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = -\frac{\partial V}{\partial x_2} \quad \text{тј.} \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0.$$

Свакој функцији Φ (која се може произвољно бирати) одговара по један размак горње врсте у коме се налази један партикуларни интеграл V. Узевши нпр. Φ = const. добијају се интеграли облика

$$V = \mu\frac{(x_2 - x_1)^3}{6} + \text{const.},$$

који се сви могу изразити у облику

$$V = (1 + 0,4142\vartheta)\frac{(x_2 - x_1)^3}{6} + \text{const.}, \qquad 0 \le \vartheta \le 1.$$

Интеграл V те врсте који нпр. постаје једнак нули за $x_1 = x_2$ лежаће у области између функција

$$\frac{(x_2 - x_1)^3}{6} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{2}}{6}(x_2 - x_1)^3,$$

тј. између функција

$$0{,}1667(x_2 - x_1)^3 \quad \text{и} \quad 0,2357(x_2 - x_1)^3.$$

* * *

МАТЕМАТИЧКИ СЕМИНАР УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

*СЕДЕ: др **Никола Салтиков**, проф. теоријске математике, раније декан Физичко-математичког факултета Харковског универзитета; др **Михаило Петровић**, проф. теоријске математике, редовни члан СКА; др **Павле Поповић**, проф. историје књижевности, редовни члан СКА, ректор Универзитета у Београду; др **Богдан Гавриловић**, проф. математике на Техничком факултету, редовни члан СКА; др **Владимир Петковић**, проф. геологије, дописни члан СКА, декан Филозофског факултета; др **Милутин Миланковић**, проф. небеске механике, редовни члан СКА.*

*СТОЈЕ: **Милош Радојчић**, хоно. асистент теоријске математике; др **Тадија Пејовић**, доцент теоријске математике; др **Вјечеслав Жардецки**, доцент теоријске физике; др **Антон Билимовић**, проф. рационалне механике и дописни члан СКА, раније ректор Универзитета у Одеси; инж. **Петар Зајончковски**, проф. математике на Техничком факултету; **Јеленко Михаиловић**, управник Сеизмолошког завода; др **Радивој Кашанин**, доцент математике на Техничком факултету; др **Јован Карамата**, асистент теоријске математике.*

(Снимак начињен 1926. године у просторијама Ректората после промоције Јована Карамате за доктора филозофије; аутор фотографије није познат.)

ЈЕДАН ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ АЛГОРИТАМ И ЊЕГОВЕ ПРИМЕНЕ

ПРВИ ОДЕЉАК

РЕЛАТИВНЕ ВРЕДНОСТИ ИЗВОДА И ЊИХОВЕ МЕЂУСОБНЕ ВЕЗЕ

1. АЛГОРИТАМ Δ_n КАО РЕЛАТИВНА ВРЕДНОСТ ИЗВОДА ФУНКЦИЈЕ

Под релативном вредношћу n-тог извода једне функције

$$y = f(x),$$

или под њеним *n-тим релативним изводом* подразумеваћемо вредност n-тог извода функције упоређену са вредношћу саме функције, тј. количник

$$\frac{1}{y}\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{y^{(n)}}{y}$$

и означићемо га са $\Delta_n(y)$, тако да је

$$\text{(1)} \qquad \Delta_n(y) = \frac{1}{y}\frac{d^n y}{dx^n},$$

а k-ти извод тога извода по промењивој x биће означен са

$$\text{(2)} \qquad \Delta_n^{(k)}(y) = \frac{d^k}{dx^k}\Delta_n(y) = \frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{1}{y}\frac{d^n y}{dx^n}\right].$$

Тако би, нпр. било:

$$\begin{aligned} &\text{за } y = \text{const.}, && \Delta_n(y) = 0; \\ &\text{за } y = x^m, && \Delta_n(y) = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{x^n}; \\ &\text{за } y = e^x, && \Delta_n(y) = 1. \end{aligned}$$

За $y = \sin x$ извод $\Delta_n(y)$ имао би једну од четири вредности

$$-1, \quad +1, \quad \operatorname{cotg} x, \quad -\operatorname{cotg} x,$$

према вредности броја n.

За

$$y = e^{\varphi(x)}$$

било би

$$\Delta_1(y) = \varphi', \quad \Delta_2(y) = \varphi'' + \varphi'^2.$$

За случај

$$y = e^{\frac{ax^2}{2}+bx},$$

било би

$$\Delta_1(y) = ax + b,$$
$$\Delta_2(y) = a^2x^2 + 2abx + b^2 + a.$$

Релативни извод, изражен као **алгоритам** Δ_n, представља један нарочити функционални комплекс у облику кога се у великом броју проблема јављају познате или непознате функције што карактеришу проблем. Он у исти мах представља и једну нарочиту функционелу чије су особине у зависности од функције на коју се односи, а која зависност чини да се из особина те функционеле могу сазнавати поједине особине саме функције. Међутим, особине функционеле распознају се непосредно на самој диференцијалној једначини проблема, или се из ове изводе непосредно на један начин који не захтева интеграцију једначине. И баш у томе и лежи интерес тога алгоритма као рачунског елемента у разноврсним проблемима математичке анализе, више геометрије, механике, математичке физике и опште феноменологије, у којима се он, по самој природи проблема, јавља као такав елеменат.

Ова књижица даје кратку монографију елементарних сазнања о операцији означеној алгоритмом Δ_n, особинама тога алгоритма, његовим везама са особинама и аналитичким појединостима функције на коју се односи и о његовој интервенцији у применама Математичке анализе, геометрије, механике, математичке физике и опште феноменологије.

2. АЛГОРИТАМ Δ_1 ЗА РАЗНЕ КОМБИНАЦИЈЕ ФУНКЦИЈА

Пошто је

$$\Delta_1(y) = \frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}\log y,$$

то су очевидни обрасци

$$\begin{aligned}
&\Delta_1(ay) = \Delta_1(y),\\
&\Delta_1(-y) = \Delta_1(y),\\
&\Delta_1(y^m) = m\Delta_1(y),\\
&\Delta_1(e^y) = y',\\
&\Delta_1(e^{\varphi(y)}) = \varphi'(y)y',\\
&\Delta_1(y_1y_2) = \Delta_1(y_1) + \Delta_1(y_2),\\
&\Delta_1\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \Delta_1(y_1) - \Delta_1(y_2),\\
&\Delta_1(\log y) = \frac{\Delta_1(y)}{\log y},\\
&\Delta_1\left(\frac{1}{y}\right) = -\Delta_1(y),
\end{aligned}$$

из чега се, нпр. добијају у применама корисни обрасци

$$(3)\qquad \begin{cases}
\Delta_1(y_1y_2) + \Delta_1\left(\dfrac{y_1}{y_2}\right) = 2\Delta_1(y_1),\\[2mm]
\Delta_1(y_1y_2) - \Delta_1\left(\dfrac{y_1}{y_2}\right) = 2\Delta_1(y_2),\\[2mm]
\Delta_1(y_1y_2)\cdot\Delta_1\left(\dfrac{y_1}{y_2}\right) = \Delta_1(y_1)^2 - \Delta_1(y_2)^2.
\end{cases}$$

Кад, дакле, у једноме размаку вредности x, функција y_2 и њен извод y_2' имају исти знак, онда, ма каква била функција y_1, увек је у томе размаку

$$\Delta_1(y_1y_2) > \Delta_1\left(\frac{y_1}{y_2}\right),$$

а кад су ти знаци различни, увек је у истоме размаку

$$\Delta_1(y_1y_2) < \Delta_1\left(\frac{y_1}{y_2}\right).$$

3. АЛГОРИТАМ Δ_2 ЗА РАЗНЕ КОМБИНАЦИЈЕ ФУНКЦИЈА

Имају се очевидни или лако изводљиви обрасци:

$$\begin{aligned}
&\Delta_2(ay) = \Delta_2(y),\\
&\Delta_2(-y) = \Delta_2(y),\\
&\Delta_2(u^m) = m\Delta_2(u) + m(m-1)\,\Delta_1(u)^2,\\
&\Delta_2(e^u) = u\Delta_2(u) + u^2\Delta_1(u)^2,\\
&\Delta_2(\log u) = \frac{\Delta_2(u) - \Delta_1(u)^2}{\log u}.
\end{aligned}$$

Из обрасца

$$\Delta_2(u+v) = \frac{u'' + v''}{u+v} = \frac{u\,\dfrac{u''}{u} + v\,\dfrac{v''}{v}}{u+v}$$

добија се

$$\Delta_2(u+v) = \frac{u\Delta_2(u) + v\Delta_2(v)}{u+v},$$

$$\Delta_2(u-v) = \frac{u\Delta_2(u) - v\Delta_2(v)}{u-v},$$

одакле је

$$\Delta_2(u+v)\cdot\Delta_2(u-v) = \frac{u^2\Delta_2(u)^2 - v^2\Delta_2(v)^2}{u^2 - v^2}.$$

Из обрасца

$$\Delta_2(uv) = \frac{uv'' + 2u'v' + vu''}{uv} = \frac{v''}{v} + 2\,\frac{u'}{u}\,\frac{v'}{v} + \frac{u''}{u}$$

добија се

$$\Delta_2(uv) = \Delta_2(u) + 2\Delta_1(u)\cdot\Delta_1(v) + \Delta_2(v).$$

Из обрасца

$$\Delta_2\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u''}{u} - \frac{v''}{v} - 2\,\frac{u'}{u}\,\frac{v'}{v} + 2\left(\frac{v'}{v}\right)^2$$

добија се

$$\Delta_2\left(\frac{u}{v}\right) = \Delta_2(u) - \Delta_2(v) - 2\Delta_1(u)\cdot\Delta_1(v) + 2\,\Delta_1(v)^2.$$

Комбинацијом тих образаца добија се

$$\begin{aligned}
\Delta_2(uv) + \Delta_2\left(\frac{u}{v}\right) &= 2\Delta_2(u) + 2\,\Delta_1(v)^2,\\
\Delta_2(uv) - \Delta_2\left(\frac{u}{v}\right) &= 2\Delta_2(v) + 4\Delta_1(u)\cdot\Delta_1(v) - 2\,\Delta_1(v)^2,\\
\Delta_2\left(\frac{1}{v}\right) &= 2\,\Delta_1(v)^2 - \Delta_1(v).
\end{aligned}$$

Узевши

$$v = e^{ax},$$

налази се да је

$$\Delta_2(ue^{ax}) + \Delta_2(ue^{-ax}) = 2\Delta_2(u) + 2a^2,$$
$$\Delta_2(ue^{ax}) - \Delta_2(ue^{-ax}) = 4a\Delta_1(u) + 2a - 2a^2.$$

Из тих се образаца изводе неколико неједначина корисних у применама.

За сваку континуалну реалну функцију u је

$$\Delta_2\left(\frac{1}{u}\right) > -\Delta_2(u),$$

$$\Delta_2(e^u) > u\Delta_2(u),$$

$$\Delta_2(u^m) > m\Delta_2(u) \quad \text{за} \quad m > 1 \quad \text{и} \quad m < -1,$$

$$\Delta_2(u^m) < m\Delta_2(u) \quad \text{за} \quad -1 < m < 1.$$

У свакоме размаку вредности x, у коме фунција u има вредност већу од броја e, увек је

$$\Delta_2(\log u) < \frac{\Delta_2(u)}{\log u}.$$

За све континуалне функције u и v је

$$\Delta_2(uv) + \Delta_2\left(\frac{u}{v}\right) > 2\Delta_2(u),$$

$$\Delta_2(uv) - \Delta_2\left(\frac{u}{v}\right) < 2\Delta_2(v) + 4\Delta_1(u)\cdot\Delta_1(v).$$

За све такве функције, кад год је извод $\Delta_2(u)$ негативан, извод $\Delta_2\left(\frac{1}{u}\right)$ је позитиван.

Од важности су следећа правила за вредности алгоритма Δ_2, која играју корисну улогу при трансформацијама линеарних диференцијалних једначина другога реда:

Прво правило. – Ако је, при независно промењивој количини x

$$\Delta_2(y) = f(x),$$

па се x и y изразе као функције једне нове независно промењљиве количине t дефинисане релацијом

$$(4) \qquad x = \varphi(t),$$

при тој новој независно промењљивој t биће

$$\Delta_2\left(\frac{y}{\varphi'}\right) = \Phi(t),$$

где се функција $\Phi(t)$ изражава као комбинација функција φ и f на овај начин:

$$\Phi(t) = F_2 - \frac{1}{2}F_1' - \frac{1}{4}F_1^2,$$

$$F_1(t) = -\frac{2\varphi''}{\varphi'} = -2\Delta_1(\varphi'),$$

$$F_2(t) = -\varphi'^2 f(\varphi).$$

Друго правило. – Ако је, при независно промењљивој x

$$\Delta_2(y) = f(x),$$

па се изврши двострука смена

$$(5) \qquad x = \varphi(t), \quad y = z\psi(t),$$

за нове промењљиве t и z биће

$$\Delta_2\left(\frac{\varphi' z}{\psi}\right) = U(t),$$

где се функција $U(t)$ изражава као комбинација функција f, φ, ψ на овај начин:

$$U(t) = \Phi_2 - \frac{1}{2}\Phi_1' - \frac{1}{4}\Phi_1^2,$$

$$\Phi_1 = 2\,[\Delta_1(\psi) - \Delta_1(\varphi')],$$

$$\Phi_2 = -[\varphi'^2 f(\varphi) + \Delta_1(\varphi)\cdot\Delta_1(\psi) - \Delta_2(\psi)].$$

Та правила су непосредна последица начина на који се у диференцијалној једначини

$$y'' = f(x)y$$

извршује смена (4) и двострука смена (5).

Треће правило. – Кад су две функције u и v једне независно промењиве количине x међу собом везане каквом бирационалном релацијом

$$u = \frac{av + b}{cv + d}, \quad v = \frac{a'u + b'}{c'u + d'},$$

где су a, b, c, d, a', b', c', d' константе, изрази

$$\Delta_2(u') - \frac{3}{2}\Delta_1(u)^2,$$

$$\Delta_2(v') - \frac{3}{2}\Delta_1(v)^2,$$

представљају једну исту функцију промењиве x и имају за сваку вредност x једну исту вредност.

Правило је непосредна последица Schwarz-ове теореме по којој израз

$$\Delta_2(y') - \frac{3}{2}\Delta_1(y)^2,$$

представља једну инваријанту за све бирационалне трансформације функције y.

Четврто правило. – Кад су S и T две функције независно промењиве количине x, везане диференцијалном релацијом

$$S'(S^2 - 4T) - SS' + 2T' = 0,$$

па се уочи функција

$$y = \alpha_1 e^{\int \varphi_1 dx} + \alpha_2 e^{\int \varphi_2 dx},$$

где су φ_1 и φ_2 функције промењиве x дефинисане као корени квадратне једначине

$$\varphi^2 + S\varphi + T = 0,$$

а α_1 и α_2 две ма какве константе, за такву функцију y биће

$$\Delta_2(y) = \frac{2TS' - ST'}{S^2 - 4T} - T.$$

То излази непосредно из резултата у облику кога је Petzvala[1] дао решење задатка: формирати диференцијалну једначину

---

[1] S. Spitzer: *Studien über die Integration linearer Diff. Gleichungen* (Wien, 1862). (Zweite Vorsetzung, S. 100–102).

$$f_1 y'' + f_2 y' + f_3 y = 0$$

која ће имати за општи интеграл

$$y = C_1 e^{\int \varphi_1 dx} + C_2 e^{\int \varphi_2 dx},$$

где су φ_1 и φ_2 две функције независно променљиве x дефинисане као корени квадратне једначине

$$\varphi^2 + S\varphi + T = 0,$$

чији су коефицијенти S и T дате функције променљиве x.

Према томе решењу, потребан и довољан за то је да буде

$$\begin{aligned} f_1 &= S^2 - 4T, \\ f_2 &= S'(S^2 - 4T) - SS' + 2T', \\ f_3 &= T(S^2 - 4T) - 2TS' + ST'. \end{aligned}$$

Кад је идентички

$$f_2 = 0,$$

биће за такву једначину

$$\Delta_2(y) = -\frac{f_3}{f_1},$$

што доводи до горњег правила.

Пето правило. – Кад се са функцијом y, за коју је

$$\Delta_1(y) = f(x),$$

изврши смена

$$y = ze^{\int f(x)dx},$$

биће

$$\Delta_2(z) = \frac{1}{2} f' + \frac{1}{4} f^2$$

или, што је исто

$$\Delta_2(ye^{-\int f(x)dx},) = \frac{1}{2}\Delta_1'(y) + \frac{1}{4}\Delta_1(y)^2. \tag{6}$$

Јер, кад се у диференцијалној једначини

$$y' = f(x)y$$

диференцираној по x, што даје

$$y'' - fy' - f'y = 0$$

изврши горња смена, z ће бити интеграл једначине

$$z'' + \psi z = 0,$$

где је

$$\psi = -\frac{1}{2} f' - \frac{1}{4} f^2.$$

Из једначине (6) се, нпр. види да је за сваку реалну континуалну функцију y

$$\Delta_2(ye^{-\int t dx}) > \frac{1}{2} \Delta_1'(y).$$

4. АЛГОРИТАМ Δ_n ЗА РАЗНЕ КОМБИНАЦИЈЕ ФУНКЦИЈА

Пре свега имају се очевидни обрасци

$$(7) \qquad \begin{cases} \Delta_n(ay) = \Delta_n(y), \\ \Delta_n(-y) = \Delta_n(y), \\ \Delta_n(u+v) = \dfrac{u\Delta_n(u) + v\Delta_n(v)}{u+v}, \\ \Delta_n(u-v) = \dfrac{u\Delta_n(u) - v\Delta_n(v)}{u-v}, \end{cases}$$

$$\Delta_n(uv) = \Delta_n(u) + \binom{n}{1} \Delta_{n-1}(u) \cdot \Delta_1(v) + \binom{n}{2} \Delta_{n-2}(u) \cdot \Delta_2(v) + \ldots$$

Из горњег обрасца за алгоритам збира види се да алгоритам Δ_n у опште *нема дистрибутивну особину*, према којој би имало бити

$$\Delta_n(u+v) = \Delta_n(u) + \Delta_n(v).$$

Међутим, за поједине специјалне функције u и v *он има такву особину*. Које су то функције?

Према горњем обрасцу, за такве је функције

$$(8) \qquad \frac{u\Delta_n(u) + v\Delta_n(v)}{u+v} = \Delta_n(u) + \Delta_n(v),$$

што доводи до

$$\frac{\Delta_n(u)}{u} + \frac{\Delta_n(v)}{v} = 0,$$

одакле је

$$(9)\qquad \frac{1}{u^2}\frac{d^n u}{dx^n}+\frac{1}{v^2}\frac{d^n v}{dx^n}=0.$$

Изабравши произвољно једну од двеју функција u и v, нпр. v, и означивши тада функцију

$$-\frac{1}{v^2}\frac{d^n v}{dx^n}=-\frac{1}{v}\Delta_n(v)$$

са $f(x)$, *да би алīоритам* Δ_n *имао за* u *и* v *дистрибутивну особину, йотребно је и довољно да* u *буде интеīрал диференцијалне једначине*

$$(10)\qquad \frac{d^n u}{dx^n}+f(x)u^2=0.$$

Решење проблема своди се, дакле, на једну произвољну функцију и на n произвољних констаната.

У специјалном случају кад је $n=1$, погодба (9) постаје

$$\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}+\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}=0,$$

одакле је интеграцијом

$$(11)\qquad \frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\text{const.}$$

Да би, дакле, алгоритам Δ_1 имао за функције u и v дистрибутивну особину, *йотребно је и довољно да збир реципрочних вредности тих двеју функција не зависи од променљиве x.*

Из погодбе (11) се види да ће Δ_1 имати такву особину кад год је збир функција u и v једнак њиховом производу. А то се може проширити и на произвољан број функција

$$(\text{A})\qquad u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$$

тј. алгоритам Δ_1 ће, за такве функције, имати дистрибутивну особину

$$(12)\qquad \Delta_1(u_0+u_1+u_2+\ldots)=\Delta_1(u_0)+\Delta_1(u_1)+\Delta_1(u_2)+\ldots$$

кад год су функције u_k такве да је

$$(13)\qquad u_0u_1u_2\ldots=u_0+u_1+u_2+\ldots$$

Постоје ли такве функције и каква је њихова аналитичка природа?

Да бисмо то видели, приметимо да је из обрасца (13)

$$u_k = \frac{u_0 + u_1 + \ldots + u_{k-1}}{u_0 u_1 \ldots u_{k-1} - 1}, \tag{14}$$

а у исти мах и

$$u_k = \frac{u_0 u_1 u_2 \ldots u_{k-1}}{u_0 u_1 u_2 \ldots u_{k-1} - 1},$$

одакле је

$$u_0 u_1 \ldots u_{k-1} = \frac{u_k}{u_k - 1}. \tag{15}$$

Множењем са u_k добија се из (15) да је

$$u_0 u_1 \ldots u_k = \frac{u_k^2}{u_k - 1}, \quad (k = 1, 2, 3 \ldots),$$

одакле је, сменивши k са $k - 1$

$$u_0 u_1 u_2 \ldots u_{k-1} = \frac{u_{k-1}^2}{u_{k-1} - 1}, \quad (k = 2, 3, 4 \ldots). \tag{16}$$

Упоређењем једначина (15) и (16) добија се да је

$$u_k = \frac{u_{k-1}^2}{u_{k-1}^2 - u_{k-1} + 1}, \quad (k = 2, 3, 4 \ldots), \tag{17}$$

$$u_1 = \frac{u_0}{u_0 - 1}. \tag{18}$$

Тражене функције низа (А) јесу, дакле, оне које се једна из друге изводе по рекурсивном закону (17) и (18). Прва од њих u_0 остаје произвољна; ако се она означи са t, добија се низ образаца који дају остале функције низа:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{t}{t-1}, \\ u_2 &= \frac{t^2}{t^2 - t - 1}, \\ u_3 &= \frac{t^4}{t^4 - t^3 + 2t^2 - 2t + 1}, \\ u_4 &= \frac{t^8}{t^8 - t^7 + 3t^6 - 6t^5 + 9t^4 - 10t^3 + 8t^2 - 4t + 1}, \\ u_5 &= \frac{t^{16}}{w}, \end{aligned} \tag{19}$$

где је

$$w = t^{16} - t^{15} + 4t^{14} - 12t^{13} + 30t^{12} - 64t^{11} + 118t^{10} - 188t^{9} +$$

$$+258t^{8} - 302t^{7} + 298t^{6} - 244t^{5} + 162t^{4} - 84t^{3} + 32t^{2} - 8t + 1,$$

. . . .

Има се, дакле, овај резултат:

Све су функције u_k *рационалне функције једне произвољне функције* t *независно променљиве количине* x, *са коефицијентима који су сви цели бројеви.*

Рекурсивној релацији између функција u_k могу се дати и разни други облици који су од интереса.

Тако, ако се стави

$$u_0 u_1 u_2 \ldots u_n = P_n,$$

биће

$$(20) \qquad u_k = P_k - P_{k-1},$$

па се из једначине (14), из које је

$$(21) \qquad u_k = \frac{P_{k-1}}{P_{k-1} - 1},$$

добија да је

$$(22) \qquad P_k = \frac{P_{k-1}^2}{P_{k-1} - 1}, \quad (k - 1, 2, 3, \ldots).$$

Ако се, као и малочас, са t означи произвољна функција променљиве x и узме да је $u_0 = t$, образац (22) показује да је P_k *рационална* функција променљиве t

$$(23) \qquad P_k = \frac{f_k}{\varphi_k},$$

где су f_k и φ_k полиноми по t, са коефицијентима који су *цели* бројеви.

Из (22) и (23) добија се тада да је

$$(24) \qquad P_n = \frac{f_{n-1}^2}{f_{n-1}\varphi_{n-1} - \varphi_{n-1}^2},$$

из чега се види да су полиноми f и φ у обрасцу (23) међу собом везани рекурсивним релацијама

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1}^2, \\ \varphi_n = f_{n-1}\varphi_{n-1} - \varphi_{n-1}^2, \end{cases} \tag{25}$$

па пошто је $f_0 = t$ добија се поступно

$$f_n = t^{2^{n-1}}, \tag{26}$$

$$\begin{cases} \varphi_n = t^{2^{n-1}}\varphi_{n-1} - \varphi_{n-1}^2, \\ \varphi_0 = 1. \end{cases} \tag{27}$$

Из рекурсивних релација (26) и (27) добија се низ образаца

$$\begin{cases} P_0 = t, \\ P_1 = \dfrac{t^2}{t-1}, \\ P_2 = \dfrac{t^4}{t^3 - 2t^2 + 2t - 1}, \\ P_3 = \dfrac{t^3}{t^7 - 3t^6 + 6t^5 - 9t^4 + 10t^3 - 8t^2 + 4t - 1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{28}$$

који одређују производе P_k, а ови према обрасцу (20) одређују функције u_k.

Функције u_k могу се одредити још и на овај начин. Ако се, на место u_k, уведу нове функције w_k дефинисане релацијом

$$u_k = \frac{1}{1+w_k}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \tag{29}$$

имаће се за ове рекурсивна релација

$$\begin{cases} w_k = w_{k-1} + w_{k-1}^2, \\ w_1 = -\dfrac{1}{t}, \end{cases} \tag{30}$$

тако, да ако се стави

$$-\frac{1}{t} = v,$$

биће

$$w_k = v\,(1+w_1)(1+w_2)\dots(1+w_{k-1}). \tag{31}$$

Функције w_k су полиноми по променљивој v и то w_k је полином степена 2^{k-1}. Тако се налази да је:

$$
\begin{aligned}
&w_1 = v,\\
&w_2 = v + v^2,\\
&w_3 = v + 2v^2 + 2v^3 + v^4,\\
(32)\quad &w_4 = v + 3v^2 + 6v^3 + 9v^4 + 10v^5 + 8v^6 + 4v^7 + v^8,\\
&w_5 = v + 4v^2 + 12v^3 + 30v^4 + 64v^5 + 118v^6 + 188v^7 + 258v^8 +\\
&+ 302v^9 + 298v^{10} + 244v^{11} + 162v^{12} + 84v^{13} + 32v^{14} + 8v^{15} + v^{16},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Ови полиноми постају једнаки нули за

$$v = 0 \quad \text{и} \quad v = -1,$$

а различни су од нуле за све друге реалне вредности v.

Као што се види, *испитивање функција* u_k *може се свести на испитивање полинома* φ_n *дефинисаних релацијом* (27), *или полинома* w_n *дефинисаних релацијом* (31).

Од интереса је још и овај резултат:

Свака дата функција $f(x)$ *може се изразити као збир датога броја n функција*

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$$

за које ће алгоритам Δ_1 *имати дистрибутивну особину.*

Јер се из двеју једначина

$$f(x) = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 u_1 \dots u_n,$$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 u_1 \dots u_{n-1},$$

добија

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = f(x) - u_n = u_0 u_1 \dots u_{n-1} = \frac{f(x)}{u_n},$$

тако да је

$$(33) \qquad u_n^2 - f(x)(u_n - 1) = 0.$$

Функција u_n добија се, дакле, као корен квадратне једначине (33). Знајући тако u_n, израчунаће се функција

$$f(x) - u_n = f_1(x),$$

па ће се из једначина

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-2} = u_0 u_1 \ldots u_{n-2} =$$

$$= f_1(x) - u_{n-1} = \frac{f(x)}{u_n u_{n-1}} = \frac{f_1(x)}{u_{n-1}}$$

имати функција u_{n-1} као корен квадратне једначине

$$u_{n-1}^2 - f_1(x)(u_{n-1} - 1) = 0. \tag{34}$$

Знајући u_{n-1} знаће се и функција

$$f_1(x) - u_{n-1} = f_2(x),$$

па ће се из једначине

$$f_2(x) - u_{n-2} = \frac{f_1(x)}{u_n u_{n-1} u_{n-2}} = \frac{f_2(x)}{u_{n-2}}$$

имати функција u_{n-2} као корен квадратне једначине

$$u_{n-2}^2 - f_2(x)(u_{n-2} - 1) = 0. \tag{35}$$

Према томе, у опште: функција

$$u_{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

добија се као корен квадратне једначине

$$u_{n-k}^2 - f_k(x)(u_{n-k} - 1) = 0, \tag{36}$$

где је

$$\begin{cases} f_0(x) = f(x), \\ f_1(x) = \dfrac{f(x)}{u_n}, \\ f_2(x) = \dfrac{f_1(x)}{u_{n-1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_k(x) = \dfrac{f_{k-1}(x)}{u_{n-k+1}}. \end{cases} \tag{37}$$

За тако израчунате функције u_k биће

$$\Delta_1(u_0 + u_1 + \ldots + u_k) = \Delta_1(u_0) + \Delta_1(u_1) + \ldots + \Delta_1(u_k),$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

$$f(x) = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

5. АЛГОРИТАМ Δ_n ИЗРАЖЕН ПОМОЋУ Δ_1 И ЊЕГОВИХ ИЗВОДА

Ставимо да је

$$\log y = z,$$

па је

$$y' = yz', \quad z' = \Delta_1(y),$$

одакле је

$$y^{(n)} = z'y^{(n-1)} + \binom{n-1}{1} z''y^{(n-2)} + \ldots + \binom{n-1}{n-2} z^{(n-1)}y' + z^{(n)}y.$$

Деобом са y и означивши краткоће ради

$$\Delta_k(y) \quad \text{са} \quad \Delta_k,$$

добија се рекурсивни образац

$$\Delta_n = z'\Delta_{n-1} + \binom{n-1}{1} z''\Delta_{n-2} + \ldots + \binom{n-1}{n-2} z^{(n-1)}\Delta_1 + z^{(n)}, \tag{38}$$

из кога се могу поступно израчунавати релативни изводи

$$\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \ldots \tag{39}$$

помоћу

$$z', z'', z''', \ldots$$

тј. помоћу

$$\Delta_1, \Delta_1', \Delta_1'', \ldots . \tag{40}$$

Тако се добија низ једначина

$$\begin{cases} \Delta_2 = \Delta_1' + \Delta_1^2, \\ \Delta_3 = \Delta_1'' + 3\Delta_1'\Delta_1 + \Delta_1^3, \\ \Delta_4 = \Delta_1''' + 4\Delta_1''\Delta_1 + 3\Delta_1'^2 + 6\Delta_1'\Delta_1^2 + \Delta_1^4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{41}$$

из чега се добија овај резултат:

Алгоритам Δ_n *изражава се као полином n-тог степена по вредностима*

$$\Delta_1, \Delta_1', \Delta_1'', \ldots, \Delta_1^{(n-1)},$$

а сви коефицијенти тога полинома су позитивни цели бројеви.

Експлицитни израз за Δ_n дат је детерминантом

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \binom{0}{0}\Delta_1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \binom{1}{0}\Delta_1' & \binom{1}{1}\Delta_1 & \dots & 0 & 0 \\ \binom{2}{0}\Delta_1'' & \binom{2}{1}\Delta' & \dots & 0 & 0 \\ \cdot\cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \binom{n-3}{0}\Delta_1^{(n-3)} & \binom{n-3}{1}\Delta_1^{(n-4)} & \dots & -1 & 0 \\ \binom{n-2}{0}\Delta_1^{(n-2)} & \binom{n-2}{1}\Delta_1^{(n-3)} & \dots & \binom{n-2}{n-2}\Delta_1 & -1 \\ \binom{n-1}{0}\Delta_1^{(n-1)} & \binom{n-1}{1}\Delta_1^{(n-2)} & \dots & \binom{n-1}{n-2}\Delta_1' & \binom{n-1}{n-1}\Delta_1 \end{vmatrix}$$

Исто тако важи следеће.

Извод по x, *ма кога реда* p, *алгоритма* Δ_k *изражава се као полином по вредностима*

$$\Delta_1, \Delta_1', \Delta_1'', \dots, \Delta_1^{(k+p-1)}, \tag{42}$$

а коефицијенти таквог полинома увек су цели бројеви, позитивни или негативни.

То следује из обрасца

$$\Delta_k' = \frac{d}{dx}\left(\frac{y^{(k)}}{y}\right) = \Delta_{k+1} - \Delta_1\Delta_k, \tag{43}$$

који показује да се Δ_k' изражава као полином по вредностима

$$\Delta_1, \Delta_1', \dots, \Delta_1^{(k)},$$

чији су коефицијенти цели бројеви, пошто се, према овоме што претходи, Δ_k и Δ_{k+1} изражавају на такав начин.

Диференцијалењем обрасца (43) по x добија се

$$\Delta_k'' = \Delta_{k+1}' - \Delta_1\Delta_k' - \Delta_1'\Delta_k,$$
$$\Delta_k''' = \Delta_{k+1}'' - 2\Delta_1'\Delta_k' - \Delta_1''\Delta_k,$$

....

из чега, а према горњем правилу за изражавање алгоритма Δ_n, следује наведени резултат.

6. ИТЕРАЦИЈА АЛГОРИТМОМ Δ_n

Означимо да је

$$(44) \qquad \begin{cases} y_1 = \Delta_{k_1}(y), \\ y_2 = \Delta_{k_2}(y_1), \\ y_3 = \Delta_{k_3}(y_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

тако да је y_p резултат суперпозиције узастопних операција

$$(45) \qquad \Delta_{k_1}, \Delta_{k_2}, \Delta_{k_3}, \dots, \Delta_{k_{p-1}}$$

извршених над првобитном функцијом y.

Итерација реда p, *тј. функција* y_p, *изражава се као рационална функција ограниченог броја елемената*

$$(46) \qquad \Delta_1(y), \Delta_1'(y), \Delta_1''(y), \dots$$

а коефицијенти те рационалне функције су цели бројеви.

Јер, функција y_1 изражава се, према овоме што претходи, као полином по елементима (46), са коефицијентима који су цели бројеви.

На исти начин, функција y_2 изражава се као полином по елементима

$$(47) \qquad \Delta_1(y_1), \Delta_1'(y_1), \Delta_1''(y_1), \dots .$$

Пошто је

$$\Delta_1(y_1) = \frac{y_1'}{y_1} = \frac{\Delta_{k_1}'(y)}{\Delta_{k_1}(y)},$$

$$\Delta_1'(y_1) = \frac{\Delta_{k_1}''(y) \cdot \Delta_{k_1}(y) - \Delta_{k_1}'(y)^2}{\Delta_{k_1}(y)^2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

и пошто се, према претходном параграфу, $\Delta_{k_1}(y), \Delta_{k_1}'(y), \Delta_{k_1}''(y), \dots$ изражавају као полиноми по елементима (46) са коефицијентима који су цели бројеви, то је очевидно да се и y_2 изражава као рационална функција по елементима (46) са целим коефицијентима.

На исти начин, функција y_3 изражава се као полином по елементима

$$(48) \qquad \Delta_1(y_2), \Delta_1'(y_2), \Delta_1''(y_2), \dots .$$

Пошто је

$$\Delta_1(y_1) = \frac{y_2'}{y_2} = \frac{\Delta_{k_2}'(y_1)}{\Delta_{k_2}(y_1)},$$

$$\Delta_1'(y_2) = \frac{\Delta_{k_2}''(y_1)\cdot\Delta_{k_2}(y_1) - \Delta_{k_2}'(y_1)^2}{\Delta_{k_2}(y_1)^2},$$

. . . .

и пошто се $\Delta_{k_2}(y_1)$, $\Delta_{k_2}'(y_1)$, $\Delta_{k_2}''(y_1), \ldots$ изражавају као полиноми по елементима (47) са коефицијентима који су цели бројеви, а елементи (47) изражавају се као рационалне функције по елементима (46) са целим коефицијентима, то је очевидно да се и y_3 изражава као рационална функција по елементима (46) са целим коефицијентима.

Продуживши тако са узастопним итерацијама

$$y_4, y_5, \ldots$$

доказује се горњи резултат за итерацију y_p.

Тако се исто доказује и овај резултат:

Извод по промењљивој x, *ма кога реда, итерације* y_p *изражава се рационално помоћу елемената*

$$\Delta_1(y), \Delta_1'(y), \Delta_1''(y), \ldots$$

са коефицијентима који су сви цели бројеви.

7. АЛГОРИТАМ Δ_n ИЗРАЖЕН ПОТЕНЦИЈАЛНИМ РЕДОМ

Проблем, који се поставља при таквоме изражавању, био би следећи.

Знајући коефицијенте a_n реда

$$y = a_0 + \frac{a_1}{1!}x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \ldots, \tag{49}$$

одредити коефицијенте реда

$$\Delta_n(y) = A_0 + \frac{A_1}{1!}x + \frac{A_2}{2!}x^2 + \ldots\,. \tag{50}$$

Тога ради, из развитка (49) добија се

$$(51) \qquad \begin{cases} y' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{k!} x^k, \\ y'' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+2}}{k!} x^k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+n}}{k!} x^k, \end{cases}$$

па пошто је

$$(52) \qquad y^{(n)} = y\Delta_n(y) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} x^k\right] \left[\sum_{h=0}^{\infty} \frac{A_h}{h!} x^h\right],$$

упоређењем ове једначине са последњом једначином (51), добија се

$$\frac{a_{k+n}}{k!} = \sum_{h=0}^{h=k} \frac{a_h}{h!} \frac{A_{k-h}}{(k-h)!}.$$

То се може написати у облику

$$\frac{a_{k+n}}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{h=0}^{h=k} \binom{k}{h} a_h A_{k-h},$$

што даје за коефицијенте a_n рекурсивну релацију

$$(53) \qquad a_{k+n} = \sum_{h=0}^{h=k} \binom{k}{h} a_n A_{k-h}.$$

Ова се релација за

$$k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

своди на низ једначина

$$(54) \qquad \begin{cases} a_n = a_0 A_0, \\ a_{n+1} = \binom{1}{0} a_0 A_1 + \binom{1}{1} a_1 A_0, \\ a_{n+2} = \binom{2}{0} a_0 A_2 + \binom{2}{1} a_1 A_1 + \binom{2}{2} a_2 A_0, \\ a_{n+3} = \binom{3}{0} a_0 A_3 + \binom{3}{1} a_1 A_2 + \binom{3}{2} a_2 A_1 + \binom{3}{3} a_3 A_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

из којих се могу поступно израчунати коефицијенти

$$A_0, A_1, A_2, \dots$$

помоћу коефицијената

$$a_0, a_1, a_2, \dots$$

Општи коефицијенат A_k добија се у облику детерминанте

$$A_k = \frac{1}{a_0^{k+1}} \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n+1} \\ a_2 & \binom{2}{1} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 & a_{n+2} \\ a_3 & \binom{3}{2} a_2 & \binom{3}{1} a_1 & 0 & \dots & 0 & a_{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_k & \binom{k}{k-1} a_{k-1} & \binom{k}{k-2} a_{k-2} & \binom{k}{k-3} a_{k-3} & \dots & \binom{k}{1} a_1 & a_{n+k} \end{vmatrix}$$

или, преместивши последњи стуб детерминанте на прво место

$$(55) \qquad A_k = \frac{(-1)^k}{a_0^{k+1}} \begin{vmatrix} a_n & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n+1} & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n+2} & a_2 & \binom{2}{1} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n+3} & a_3 & \binom{3}{2} a_2 & \binom{3}{1} a_1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n+k} & a_k & \binom{k}{k-1} a_{k-1} & \binom{k}{k-2} a_{k-2} & \binom{k}{k-3} a_{k-3} & \dots & \binom{k}{1} a_1 \end{vmatrix} .$$

Проблем се, уосталом, лако решава и применом Leibnitz-овог обрасца за изводе производа два фактора, који ће овде бити примена на одредбу другога релативног извода $\Delta_2(y)$.

Ако се стави да је

$$\Delta_2(y) = u,$$

биће

$$(56) \qquad \frac{d^n}{dx^n} y'' = \frac{d^n}{dx^n}(uy) =$$

$$= uy^{(n)} + \binom{n}{1} u' y^{(n-1)} + \binom{n}{2} u'' y^{(n-2)} + \dots,$$

па пошто је за $x = 0$

$$y^{(k)} = a_k, \quad u^{(h)} = A_h,$$

$$\frac{d^p}{dx^p}(uy) = \left[y''\right]^{(p)} = y^{(p+2)} = a_{p+2},$$

то, у вези са обрасцем (56), доводи до рекурсивног обрасца

$$a_{n+2} = a_n A_0 + \binom{n}{1} a_{n-1} A_1 + \binom{n}{2} a_{n-2} A_2 + \ldots$$

према коме је

$$\begin{aligned} &A_0 a_0 = a_2, \\ &A_0 a_1 + A_1 a_0 = a_3, \\ &A_0 a_2 + 2A_1 a_1 + A_2 a_0 = a_4, \\ &A_0 a_3 + 3A_1 a_2 + 3A_2 a_1 + A_3 a_0 = a_5, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

где коефицијенти a_0 и a_1 остају произвољни.

Из тих се једначина добијају коефицијенти

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{a_2}{a_0}, \\ A_1 &= \frac{-1!}{a_0^2} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \\ A_2 &= \frac{2!}{a_0^3} \begin{vmatrix} a_1 & \frac{a_2}{2} & \frac{a_4}{2} \\ a_0 & a_1 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

а то је оно исто што се добија применом обрасца (55) на случај кад је $n = 2$.

8. РАЗМАК ВАРИЈАЦИЈА ВРЕДНОСТИ Δ_n

У многобројним случајевима, кад функција y није дата у експлицитном облику, већ је одређена каквом својом функционелом, или каквом својом релацијом са другим, познатим функцијама, није могућно одредити експлицитно и прецизно њене релативне изводе као функције независно променљиве количине x од које она зависи. Међутим је, у великоме броју таквих случајева, ипак могућно одредити *размак у коме ће* $\Delta_n(y)$ *варирати кад се променљива* x *мења у једноме датом размаку* (a, b).

Овде ће бити наведена, примера ради, два случаја такве врсте; у првоме случају функција y је дефинисана као одређени интеграл у коме x фигурише као параметар, а у другоме она је дефинисана једном диференцијалном једначином која се не може интегралити.

Уочимо функцију y дату у облику Laplace–Abel-овог интеграла

$$y(x) = \int_a^b ue^{tx}dt,$$

где је u функција интеграционе променљиве t, која не мења знак кад t варира у размаку (a, b). Из обрасца

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \int_a^b t^n ue^{tx}dt$$

добија се, применом теореме средњих вредности интеграла да је

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \xi^n \int_a^b ue^{tx}dt = \xi^n y,$$

где је ξ једна вредност што лежи између a и b. Из тога се закључује да је за све реалне вредности x

$$\Delta_n(y) = a^n + \theta(x)(b^n - a^n),$$

где је $\theta(x)$ једна функција променљиве x чије вредности леже између 0 и 1 за све реалне вредности x.

У општијем случају кад је

$$y = \int_a^b ue^{vx}dt,$$

биће

$$\frac{d^n y}{dx^n} = [v(\xi)]^n \int_a^b ue^{vx}dt = [v(\xi)]^n y,$$

па дакле

$$\Delta_n(y) = A + \theta(x)(B - A),$$

где A и B означују најмању и највећу вредност коју добија функција v кад t варира у размаку (a, b).

Навешћемо као пример за други случај функције y дефинисане диференцијалним једначинама

$$(u+vy^2)\frac{dy}{dx}=(w+sy^2)y, \tag{59}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(u+ve^{-w})y, \tag{60}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=(u+ve^{-x^2-y^2})y, \tag{61}$$

где су u, v, w, s полиноми по x чији су коефицијенти цели позитивни бројеви.

За функцију y дефинисану једначином (59) је

$$\Delta_1(y)=\frac{w+sy^2}{u+vy^2},$$

па је за све позитивне вредности x

$$\Delta_1(y)=\frac{w}{u}+\theta(x)\frac{s}{v}.$$

За функцију y дефинисану једначином (60) је

$$\Delta_2(y)=u+ve^{-w},$$

па је, опет за све позитивне вредности x,

$$\Delta_2(y)=u+\theta(x)(u+v).$$

За функцију (61) је

$$\Delta_3(y)=u+ve^{-x^2-y^2},$$

па је опет за x позитивно

$$\Delta_3(y)=u+\theta(x)(u+v).$$

ДРУГИ ОДЕЉАК

ФУНКЦИЈЕ ДЕФИНИСАНЕ АЛГОРИТМОМ Δ_n

9. ФУНКЦИЈА y ДЕФИНИСАНА АЛГОРИТМОМ $\Delta_2(y)$

Међу релативним изводима Δ_n, по њиховим интервенцијама у аналитичким проблемима и њиховим применама, несумњиво највећу важност има извод Δ_2. Као што ће бити показано у последњим одељцима ове књиге, могућност решења многобројних таквих проблема произлази из могућности да се из услова задатка може формирати непосредно тај извод као функција независно променљиве количине, па се из облика те функције, или из разних њених појединости могу изводити закључци о решењу проблема.

У томе погледу од нарочите је важности проблем да се из израза извода $\Delta_2(y)$, као дате функције променљиве x, одреди функција y која има такав израз за свој други релативни извод. Задатак се своди на интеграцију биномне линеарне диференцијалне једначине другог реда

$$\frac{d^2y}{dx^2} - f(x)y = 0, \tag{62}$$

где је f дата функција променљиве x. Одговарајућих фунција, које имају $f(x)$ као свој други релативни извод, има бескрајно много и оне су све обухваћене општим изразом

$$y = C_1y_1 + C_2y_2, \tag{63}$$

где су y_1 и y_2 два ма која линеарно независна партикуларна интеграла једначине (62), а C_1 и C_2 произвољне константе.

У општем случају (функција f ма каква) није позната ни једна од функција y_1, y_2. Међутим, за велики број специјалних облика функције f позната је бар једна од тих двеју функција; према елементарној особини једначине (62), ако је та једна функција y_1, друга ће бити одређена обрасцем

$$y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^2},$$

па ће тако бити познате и све функције y што одговарају датоме $\Delta_2(y)$.

Због олакшица у рачунима, овде ће бити изложен преглед таквих познатијих случајева, а на које се најчешће наилази у применама.

1° Кад је

$$\Delta_2(y) = \text{const.} = a,$$

биће

$$\text{за} \quad a > 0, \quad y_1 = e^{x\sqrt{a}}, \quad y_2 = e^{-x\sqrt{a}},$$

$$\text{за} \quad a < 0, \quad y_1 = \sin x\sqrt{a}, \quad y_2 = \cos x\sqrt{a};$$

2° Кад је

$$\Delta_2(y) = \frac{a^2}{(ax+b)^2},$$

биће

$$y_1 = (ax+b)^{r_1}, \quad y_2 = (ax+b)^{r_2},$$

где је

$$r_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \quad r_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5});$$

3° Кад је

$$\Delta_2(y) = \frac{1}{x},$$

биће (Poisson)

$$y_1 = x \int_{-2}^{2} e^{t\sqrt{x}} \sqrt{t^2-4}\, dt,$$

$$y_2 = x \int_{-2}^{2} \frac{e^{t\sqrt{x}}}{\sqrt{t^2-4}} [1 + t\sqrt{x} \cdot \log(t^2-4)\sqrt{x}]\, dt;$$

4° Кад је

$$\Delta_2(y) = -\frac{1}{x},$$

биће (Poisson)

$$y_1 = \int_{0}^{\infty} e^{-\left(t+\frac{x}{t}\right)} dt.$$

У исто време постоји и решење

$$y = x - \frac{2x^2}{(1\cdot 2)^2} + \frac{3x^3}{(1\cdot 2\cdot 3)^2} + \frac{4x^4}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)^2} - \ldots = \sqrt{x}\, I_1(2\sqrt{x}),$$

где је I_1 позната цилиндрична функција;

5° Кад је

$$\Delta_2(y) = \frac{\lambda}{x^4},$$

биће

$$y_1 = xe^{\frac{\sqrt{\lambda}}{x}}, \quad y_2 = xe^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{x}}$$

6° Кад је

$$\Delta_2(y) = \frac{\lambda}{(a + 2bx + cx^2)^2},$$

биће (Euler)

$$y_1 = e^{\int u_1 dx}, \quad y_2 = e^{\int u_2 dx},$$

где је

$$u_1 = \frac{b + k + cx}{a + bx + cx^2},$$

$$u_2 = \frac{b - k + cx}{a + bx + cx^2},$$

$$k = \sqrt{b^2 - ac + \lambda};$$

7° Кад је

$$\Delta_2(y) = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2},$$

биће (Poisson)

$$y_1 = e^{\frac{x^2}{4}} \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad y_2 = e^{\frac{x^2}{4}};$$

8° Кад је

$$\Delta_2(y) = \frac{8}{\sin^2 2x},$$

биће

$$y_1 = \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x;$$

9° Кад је

$$\Delta_2(y) = \frac{4(n-1)x + 1}{4x^2},$$

биће

$$y_1 = x^n e^{-\frac{1}{2x}} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{\frac{1}{x}};$$

10° Кад је

$$\Delta_2(y) = -\frac{n(n-2)}{(1+x^2)^2},$$

биће

$$y_1 = (1+x^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(\frac{1}{1+x^2}\right);$$

11° Кад је

$$\Delta_2(y) = \frac{2(\beta-\alpha)}{(x+\beta)(x+\alpha)^2},$$

биће

$$y_1 = \frac{x+\beta}{x+\alpha};$$

12° Кад је

$$\Delta_2(y) = x^2 - (2n \pm 1),$$

биће (Hermite)

$$y_1 = e^{\pm\frac{x^2}{2}P_n(x)},$$

где $P_n(x)$ означује Hermite-ов полином;

13° Кад је

$$\Delta_2(y) = \frac{n(n+1)x^2 - (n^2+n+1)}{(x^2-1)^2},$$

биће (Legendre)

$$y_1 = \sqrt{x^2-1} \cdot X_n,$$

где је X_n Legendre-ов полином;

14° Кад је

$$\Delta_2(y) = \frac{x - x^2 - 1}{4x^2(x-1)^2},$$

биће

$$y_1 = \sqrt{x(x-1)} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-xt^2)}};$$

15° Кад је

$$\Delta_2(y) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

y_1 и y_2 добијају се, по Laplace-овој методи интеграције, у облику Laplace–Abel-ових интеграла

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(t)\, e^{tx} dt;$$

16° Кад је

$$\Delta_2(y) = h^2 + \frac{k(k-1)}{2x^2}, \qquad 0 < k < 1,$$

биће (Poisson)

$$y_1 = x^k \int_0^{\pi} e^{-hx\cos t} \sin^{2k-1} t \cdot dt;$$

$$y_2 = x^{1-k} \int_0^{\pi} e^{-hx\cos t} \sin^{1-2k} t \cdot dt.$$

У специјалном случају кад је $k = \frac{1}{2}$, тј. кад је

$$\Delta_2(y) = h^2 - \frac{1}{16x^2},$$

биће (Poisson)

$$y_1 = \sqrt{x} \int_0^{\pi} e^{-hx\cos t} dt,$$

$$y_2 = \sqrt{x} \int_0^{\pi} e^{-hx\cos t} \log(x \cos^2 t)\, dt;$$

17° Кад је

$$\Delta_2(y) = \frac{1}{1 - e^{2x}},$$

биће[1]

$$y = \Delta_1(u),$$

где је

$$u = \frac{s_1(x)}{s_2(x)} - 1,$$

$$s_1(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 t}},$$

---

[1] G. F. Childe: Messenger of Math. 1889–1890, p. 155–164.

$$s_2(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - x^2 \sin^2 t} dt;$$

18° Кад је

$$\Delta_2(y) = \frac{1}{X},$$

где је X функција променљиве x, сменом

$$y = e^{\int z dx},$$

добија се за z диференцијална једначина

$$\frac{dz}{dx} + z^2 = \frac{1}{X},$$

а за ову се зна да:

a) Кад је X линеарна функција променљиве x, једначина има као партикуларни интеграл Bessel-ову трансценденту

$$z = X\left[1 + \frac{X}{2(1!)^2} + \frac{X^2}{3(2!)^2} + \frac{X^3}{4(3!)^2} + \ldots\right];$$

b) Кад је

$$X = (x - a)^2,$$

она има за општи интеграл

$$\frac{2(x - a)z - (1 + \sqrt{5})}{2(x - a)z - (1 - \sqrt{5})}(x - a)^{\sqrt{5}} = C;$$

c) Кад је

$$X = ax^2 + bx + c,$$

једначина се интеграли помоћу хипергеометријских функција, које у појединим специјалним случајевима дегенеришу у елементарне функције (алгебарске и логаритамске);

19° Кад је

$$\Delta_2(y) = m(m + 1)k^2 sn^2 x + h,$$

где је h ма каква константа, k модуо елиптичке функције snx, а m цео позитиван број, функције y_1 и y_2 су мероморфне дво-периодичке функције.

* * *

Став који ће овде бити наведен даје могућност да се одреде функције y што одговарају бескрајно многим и разноврсним облицима другога извода $\Delta_2(y)$.

Нека је

$$y = v(x)$$

једна од функција за које је

$$\Delta_2(y) = \varphi(x) + a,$$

где је φ дата функција променљиве x, а a једна одређена константа. Нека је затим

$$u = w(x, C_1, C_2)$$

најопштија функција u за коју је

$$\Delta_2(y) = \varphi(x) + b,$$

где је b каква константа различна од a.

Најопштија функција z *за коју је*

$$\Delta_2(z) = \Phi(x),$$

где је Φ(x) *функција променљиве* x *дата обрасцем*

$$\Phi(x) = \frac{1}{v}[2\Delta_1^2(v) - \Delta_2(v)] + b - a,$$

јесте

$$z = [\Delta_1(u) - \Delta_1(v)]\, u.$$

Став произлази из једне теореме о хомогеним линеарним диференцијалним једначинама другога реда, коју је доказао Darboux[1] и која гласи:

Нека је

$$y'' = [\varphi(x) + a]\, y$$

каква једначина интеграбилна за једну одређену вредност константе a; нека је

$$y = v(x)$$

један партикуларан интеграл те једначине, а

---

[1] G. Darboux: *Sur une propriété relative aux équations linéarires* [Comp. rendus de l'Acad. des Sciences de Paris, t. XCIV, 1882, p. 1456.] – Такође: *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, II partie, 1899, p. 196.

$$y = w(x, C_1, C_2)$$

општи интеграл једначине

$$y'' = [\varphi(x) + b]\, y,$$

где је b каква константа различна од a. Тада једначина

$$y'' = \left[v(x)\left(\frac{1}{v}\right)'' + b - a \right] y$$

има за општи интеграл

$$y = w' - w\frac{v'}{v}.$$

Довољно је приметити да је

$$v\left(\frac{1}{v}\right)'' + 2\left(\frac{v'}{v}\right)^2 - \frac{v''}{v} = 2\Delta_1^2(v) - \Delta_2(v),$$

и према томе

$$v\left(\frac{1}{v}\right)'' + b - a = \Phi(x),$$

а у исто време

$$w' - w\frac{v'}{v} = u' - u\frac{v'}{v} = u\left(\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}\right) =$$

$$= [\Delta_1(u) - \Delta_1(v)]\, u = z,$$

па је горњи став доказан.

1. *пример*. – Пошавши од случаја

$$\varphi(x) = 0, \quad a = 0, \quad b = 1,$$

налази се да ће најопштија функција z, за коју је

$$\Delta_2(z) = 1 + \frac{2}{x^2},$$

бити

$$z = C_1 e^x \left(1 - \frac{1}{x}\right) - C_2 e^{-x}\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

2. *пример*. – Случај

$$\varphi(x) = 0, \quad a = 0, \quad b = -1,$$

доводи до тога да је најопштија функција z за коју је

$$\Delta_2(z) = -1 + \frac{2}{x},$$

функција

$$z = C_1\left(\cos x - \frac{\sin x}{x}\right) + C_2\left(\sin x -\right.$$

3. *пример*. – Случај

$$\varphi(x) = 0, \quad a = -1, \quad b =$$

доводи до тога да је

$$z = C_1 \operatorname{tang} x + C_2 (1 + x) \mathrm{ta}$$

најопштија функција за коју је

$$\Delta_2(z) = 2(1 - \operatorname{cotg}^2 x).$$

10. ФУНКЦИЈА y ДЕФИНИСАНА АЛ

Проблем да се одреди функција y чији међу $n + 1$ интегра- једнак датој функцији $f(x)$, своди се на интегра ош и да је[1] цијалне једначине n-тог реда

$$\frac{d^n y}{dx^n} - f(x)y = 0. \tag{64}$$

Према томе, све су такве функције, за једну да обухваћене општим изразом $\left.{}^{2isx}\right] ds,$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \tag{65}$$

где је

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \tag{66}$$

један систем линеарно независних партикуларних интегр (64), а

$$C_1, C_2, \ldots, C_n$$

скуп произвољних констаната. Тако:

1° Кад $\Delta_n(y)$ има сталну вредност a, најопштија функција y облик

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x},$$

и биномне једначине

општи интеграл једнач

$$r^n = a,$$

где је b каква констант

чају кад је

$$\Delta_{2n}(y) = 1,$$

иписати и у облику

има за општи интегра

$$y = C_0e^x + C_0'e^{-x} +$$

Довољно је прим $^{\frac{kt}{n}}\left[C_k \cos\left(x \sin\frac{k\pi}{n}\right) + C_k' \sin\left(x \sin\frac{k\pi}{n}\right)\right]$,

$$v\left(\frac{1}{v}\right) \qquad C_0,\ C_0',\ C_k,\ C_k'$$

и према томе них констaната.

за које је

$$\Delta_n(y) = x$$

а у исто време ацијом Scherk–Lobato-ве диференцијалне једначине

$$\frac{d^ny}{dx^n} - xy = 0.$$

општи интеграл[1]

па је горњи став

1. *пример*. –

$$y = \int_0^\infty u(t)\, e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}} dt,$$

налази се да ћ $u(t) = \mu_1C_1e^{\mu_1tx} + \mu_2C_2e^{\mu_2tx} + \ldots + \mu_{n+1}C_{n+1}e^{\mu_{n+1}tx}$,

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n+1}$$

бити иномне једначине

$$\mu^{n+1} + 1 = 0,$$

ене по μ, а C_k произвољне константе везане релацијом

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_{n+1} = 0.$$

---

[1] S. Spitzer: *Studien über die Integration linearer Diff. Gleichungen* (Wien 1860) S. 44.

3° Функције y за које је

$$\Delta_n(y) = x^m$$

добијају се интеграцијом Kummer-ове једначине

$$\frac{d^n y}{dx^n} - x^m y = 0.$$

Она има за општи интеграл

$$y = \int_0^\infty t^{m-1} e^{-\frac{t^{n+m}}{n+m}} \Phi(tx)\, dt,$$

где је

$$z = \Phi(x)$$

општи интеграл једначине $(n + 1)$-ог реда

$$\frac{d^{n+1} z}{dx^{n+1}} = x^{m+1} z,$$

(али у којој је степен m смањен за јединицу), где између $n + 1$ интеграционих констаната постоји једна утврђена релација.

У специјалнијем случају кад је $m = 2$ налази се још и да је[1]

$$y = \int_0^\infty t e^{-\frac{t^{n+2}}{n+2}} \Phi(tx)\, dt,$$

где је

$$\Phi(tx) = \int_0^\infty e^{-\frac{s^{n+2}}{n+2}} [\mu_1 C_1 e^{\mu_1 tsx} + \ldots + \mu_{n+2} C_{n+2} e^{\mu_{n+2} tsx}]\, ds,$$

где су μ_k корени биномне једначине

$$\mu^{n+2} + 1 = 0,$$

а

$$C_1, C_2, \ldots, C_{n+2}$$

произвољне константе везане двема релацијама

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_{n+2} = 0,$$

$$\mu_1^{n+1} C_1 + \mu_2^{n+1} C_2 + \ldots + \mu_{n+2}^{n+1} C_{n+2} = 0.$$

---

[1] Spitzer: loc. cit. S. 63.

4° Функције y за које је

$$\Delta_n(y) = \frac{1}{x^{2n}},$$

добијају се интеграцијом једначине

$$x^{2n} \frac{d^n y}{dx^n} - y = 0,$$

чији је општи интеграл[2]

$$y = x^{n-1}(C_1 e^{-\frac{\mu_1}{x}} + \ldots + C_n e^{-\frac{\mu_n}{x}}),$$

где су μ_k корени биномне једначине

$$\mu^n - 1 = 0.$$

Исто важи и за функције y за које је

$$\Delta_n(y) = -\frac{1}{x^{2n}},$$

само што су тада μ_k корени биномне једначине

$$\mu^n + 1 = 0.$$

11. ФУНКЦИЈА y ДЕФИНИСАНА АЛГОРИТМОМ Δ_n ИЗРАЖЕНА У ОБЛИКУ ПОТЕНЦИЈАЛНОГ РЕДА

Проблем који се поставља при таквој одредби функције y био би овај.

Знајући коефицијенте A_k реда

(67) $$\Delta_n(y) = A_0 + \frac{A_1}{1!} x + \frac{A_2}{2!} x^2 + \ldots,$$

одредити коефицијенте a_n реда

(68) $$y = a_0 + \frac{a_1}{1!} x + \frac{a_2}{2!} x^2 + \ldots$$

---

[2] Spitzer: loc. cit. S. 111.

Напред је показана веза између коефицијената a_k и A_k, која се изражава у облику низа једначина (54). Из ових се могу, или поступно израчунавати коефицијенти a_k један из другога, или изразити непосредно a_n у облику детерминанте. При тој одредби коефицијенти

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$$

остају произвољни и они имају улогу n интеграционих констаната које уводи у функцију y диференцијална једначина n-тога реда, која ту функцију одређује из датога $\Delta_n(y)$.

Сви ће даљи коефицијенти

$$a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots$$

бити полиноми по коефицијентима

$$A_0, A_1, A_2, \ldots,$$

а коефицијенти тих полинома су позитивни цели бројеви.

Као што се види, кад год су коефицијенти A_k, као и првих n коефицијената a_k цели бројеви, такви ће бити и сви коефицијенти a_k; кад су они први позитивни, тако ће бити и са свима коефицијентима a_k. Та примедба има своје важности за одређивање спектара низа (a_k) непосредно помоћу функције $f(x)$ једнаке релативном изводу $\Delta_n(y)$.

Овде ће се, као специјалан, а нарочито важан случај, извести у појединостима израчунавање коефицијената a_k помоћу коефицијената A_k другога релативног извода $\Delta_2(y)$.

Из низа релација (54) добија се да је

$$a_{k+2} = a_0 P_{k+2} + a_1 Q_{k+2}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

где a_0 и a_1 остају произвољни, а P_{k+2} и Q_{k+2} су полиноми по

$$A_0, A_1, A_2, \ldots$$

чији су коефицијенти позитивни цели бројеви. Тако се налази у развијеном облику да је

$$\begin{aligned}
P_2 &= A_0, \\
P_3 &= A_1, \\
P_4 &= A_0^2 + A_2, \\
P_5 &= 4A_0A_1 + A_3, \\
P_6 &= A_0^3 + 7A_0A_2 + 4A_1^2 + A_4, \\
P_7 &= A_0A_1 + 5A_1A_0^2 + 5A_1A_5 + 10A_1A_2 + 10A_0A_2 + A_5, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= 0, \\ Q_3 &= A_0, \\ Q_4 &= 2A_1, \\ Q_5 &= A_0^2 + 3A_2, \\ Q_6 &= 6A_0A_1 + 4A_3, \\ Q_7 &= 4A_0^2 + A_0^3 + 13A_0A_2 + 10A_1^3 + 5A_4, \end{aligned}$$

. . . .

Узевши, нпр. да је

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1,$$

а затим да је

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0,$$

добијају се специјалне функције y

$$\begin{aligned} y_1 &= x + P_2x^2 + P_3x^3 + \ldots, \\ y_2 &= 1 + P_2x^2 + P_3x^3 + \ldots, \end{aligned}$$

које имају исти други релативни извод $\Delta_2(y)$; све остале такве функције обухваћене су обрасцем

$$y = a_0y_1 + a_1y_2.$$

У појединим специјалнијим случајевима могу се коефицијенти a_k једне од функција што одговарају датоме $\Delta_2(y)$ одредити и помоћу методе неодређених коефицијената. Та метода доводи до те одредбе и у случајевима кад се у развитку функције y, поред чланова са позитивним степенима променљиве x, налази и чланова са негативним или разломљеним степенима. Тако, нпр.:

а) Кад је

$$\Delta_2(y) = 1 + \frac{1}{4x^2},$$

налази се, као једна од функција y, Bessel-ова трансцендента

$$y_1 = \sqrt{x}\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \ldots\right).$$

б) Кад је

$$\Delta_2(y) = \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x},$$

налази се

$$y_1 = \sqrt{x}\left[\frac{x}{(1!)^2} + \frac{x^2}{(2!)^2} + \frac{x^3}{(3!)^2} + \dots\right].$$

в) Кад је

$$\Delta_2(y) = x^m,$$

добијају се, у облику реда, две функције y, и то једна

$$y_1 = 1 + ax^{m+2} + bx^{2m+1} + cx^{3m+6} + \dots,$$

где је

$$a = \frac{1}{(m+1)(m+2)},$$

$$b = \frac{1}{(m+1)(m+2)(2m+3)(2m+4)},$$

$$c = \frac{1}{(m+1)(m+2)(2m+3)(2m+4)(3m+5)(3m+6)},$$

....

и друга

$$y_2 = x + a'x^{m+3} + b'x^{2m+5} + c'x^{3m+7} + \dots,$$

где је

$$a' = \frac{1}{(m+2)(m+3)},$$

$$b' = \frac{1}{(m+2)(m+3)(2m+4)(2m+5)},$$

$$c' = \frac{1}{(m+2)(m+3)(2m+4)(2m+5)(3m+6)(3m+7)},$$

....

Према ономе што се зна о једначини

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^m y = 0$$

функција y, за коју $\Delta_2(y)$ има за израз x^m, изражава се у коначном облику помоћу елементарних функција кад је број m облика

$$\frac{-4k}{2k \pm 1},$$

где је k какав цео позитиван број, или једнак нули, или је бескрајно велики.

г) Кад је

$$\Delta_2(y) = \frac{x + \frac{1}{4}(n+1)^2 - \frac{1}{2}n(n+1)}{x^2},$$

налази се

$$y_1 = x^{\frac{n+1}{2}} \left[1 + \frac{x}{1\cdot(n+1)} + \frac{x^2}{1\cdot 2\,(n+1)(n+2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right].$$

д) Кад је

$$\Delta_2(y) = 1 + \frac{4n^2 - 1}{4x^2},$$

налази се

$$y_1 = x^{\frac{2n+1}{2}} \left[1 + \frac{x^2}{2\cdot(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} + \dots \right].$$

е) Кад је

$$\Delta_2(y) = \frac{m^2 - 2m}{4x^2} - 1,$$

налази се

$$y_1 = x^{\frac{m}{2}} \left[1 - \frac{x^2}{2\cdot(m+1)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(m+1)(m+3)} - \dots \right].$$

12. ФУНКЦИЈА y ОДРЕЂЕНА ПОМОЋУ Δ_n МЕТОДАМА ОПШТЕ ТЕОРИЈЕ ФУНКЦИЈА

Општа теорија аналитичких функција даје решења многобројних проблема о функцији y која има дату функцију $f(x)$ за свој релативни извод $\Delta_n(y)$. Све се то своди на примену те опште теорије на биномну хомогену линеарну диференцијалну једначину n-тог реда

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)y. \tag{69}$$

Методе опште теорије функције не захтевају интеграцију те једначине, већ непосредно одређују везе између аналитичких појединости функције $f(x)$, тј. извода $\Delta_n(y)$, и саме функције y што му одговара.

Такве би врсте били следећи проблеми.

1. *Одредити сингуларитете функције* y, *аналитички облик и понашање функције у близини сингуларитета.*

Функција y не може имати других сингуларитета, осим оних које има сам извод $\Delta_n(y)$, премда сваки сингуларитет тога извода не мора бити у исти мах и сингуларитет функције y; једна проста нула, нпр. ове функције може бити пол за њен извод $\Delta_n(y)$. У колико се тиче критичких тачака (алгебарских и трансцендентних), за њих је сигурно да је свака критичка тачка извода $\Delta_2(y)$ у исти мах и критичка тачка функције y.

Fuchs-ове теореме о интегралима линеарних диференцијалних једначина

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = 0, \tag{70}$$

где су коефицијенти p_k униформне функције променљиве x, дају могућност да се одреди аналитички облик интеграла y у близини интегралних сингуларитета.

Нека је, нпр. $x = \alpha$ сингуларитет једне од функција $p_k(x)$, у близини кога су све те функције униформне. Аналитички облик интеграла y и његово понашање при обртању тачке x око тачке α, зависи од природе корена карактеристичне алгебарске једначине n-тог степена

$$r^n + A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + \ldots + A_{n-1} r + A_n = 0 \tag{71}$$

везане за диференцијалну једначину (70).

Свакоме од простих корена те једначине, нпр. корену r, одговара по један интеграл једначине који у близини тачке $x = \alpha$ има облик

$$y = (x - \alpha)^r \varphi(x),$$

где је $\varphi(x)$ униформна функција у близини те тачке. Кад су сви корени једначине (71) прости, диференцијална једначина (70) има један скуп линеарно независних партикуларних интеграла облика

$$\begin{aligned} y_1 &= (x - \alpha)^{r_1} \varphi_1(x), \\ y_2 &= (x - \alpha)^{r_2} \varphi_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= (x - \alpha)^{r_n} \varphi_n(x), \end{aligned}$$

где су $r_1, r_2, \ldots, r_n$ корени једначине (71).

Свакоме двоструком корену r одговара по један интеграл који у близини тачке $x = \alpha$ има облик

$$y = (x - \alpha)^r[\varphi + \varphi_1 \log(x - \alpha)],$$

где су φ и φ_1 униформне функције у тој близини.

Свакоме троструком корену r одговара по један интеграл облика

$$y = (x - \alpha)^r[\varphi + \varphi_1 \log(x - \alpha) + \varphi_2 \log^2(x - \alpha)],$$

где су φ, φ_1, φ_2 униформне функције.

И у опште, свакоме вишеструком корену p-тог реда одговара по један интеграл који је полином p-тог степена по изразу

$$\log(x - \alpha)$$

са коефицијентима који су униформне функције помножене изразом $(x - \alpha)^r$.

Корени карактеристичне једначине одређују, дакле, аналитички облик мултиформних функција што улазе у састав интеграла y, а те су мултиформне функције полиномске комбинације елементарних функција

$$(x - \alpha)^r \quad \text{и} \quad \log(x - \alpha).$$

Прва се од тих функција, при обртању око $x = \alpha$, мења тако да постаје једнака првобитној функцији помноженој једним сталним фактором; друга при томе обртању бива измењена додатком једнога сталног фактора, и на тај начин се може лако одредити шта бива са интегралом y при томе обртању.

Униформне функције

$$\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$$

могу имати вредност $x = \alpha$ само као обичну тачку, као пол, или као есенцијалну тачку. Једна Fuchs-ова теорема даје потребне и довољне услове да то не би био есенцијални сингуларитет тако, да ако је $x = \alpha$ уопште интегрални сингуларитет, он је пол интеграла. За то је потребно и довољно да сваки коефицијенат $p_i(x)$ има тачку $x = \alpha$ или као обичну тачку, или као пол чији ред не премаша ранг i коефицијента.

Проучавање функције y, што одговара датом изводу $\Delta_n(y)$ као познатој функцији променљиве x, своди се на проучавање интеграла једначине (70) у којој је идентички

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_{n-1} = 0.$$

Применом горњих ставова на такву једначину

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_n y = 0$$

одредиле би се најпре вредности x које могу бити сингуларитети функције y, па затим аналитички облик и понашање те функције у близини уоченог сингуларитета. А све ће то зависити од природе функција p_k и корена карактеристичне алгебарске једначине (71) везане за посматрани извод $\Delta_n(y)$.

У случају кад се функција y одређује помоћу датога свог другог релативног извода $\Delta_2(y)$ као познате функције $f(x)$ променљиве x, карактеристична алгебарска једначина је квадратна једначина

$$r^2 - r + f(\alpha) = 0,$$

и аналитички облик функције y у близини вредности $x = \alpha$ зависиће од тога да ли је

$$f(\alpha) \neq \frac{1}{4}, \quad \text{или је} \quad f(\alpha) = \frac{1}{4}.$$

2. *Одредити аналитички облик функције* y *који би важио за целу раван променљиве* x.

Проблем се, у опште, решава интеграцијом диференцијалне једначине (69), кад је та интеграција могућна. Кад то није случај, прибегава се методама опште теорије функција и аналитичке теорије линеарних диференцијалних једначина. Те методе доводе, нпр. до ставова овакве врсте:

Кад је извод $\Delta_n(y)$ *рационална функција променљиве* x, *која тежи коначној и од нуле различној граници* λ *кад* x *бескрајно расти у позитивном правцу, онда најопштија униформна функција* y, *што одговара таквоме* $\Delta_n(y)$, *облика је*

$$y = R_1(x)\,e^{r_1 x} + R_2(x)\,e^{r_2 x} + \ldots + R_n(x)\,e^{r_n x}, \tag{72}$$

где су

$$R_1, R_2, R_3, \ldots$$

рационалне функције променљиве x, *а*

$$r_1, r_2, r_3, \ldots$$

корени биномне једначине

$$r^n + \lambda = 0. \tag{73}$$

Став се доказује непосредном применом Halphen-ове теореме (основане на ставовима опште теорије функција) о општем интегралу линеарне диференцијалне једначине (70). Теорема гласи[1]

Нека је дата једначина (70), где су

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

рационалне функције променљиве x, од којих ни једна не расти бескрајно при бескрајном рашћењу те променљиве.

Кад год је општи интеграл једначине (70) униформна функција у целој равни, он је облика (72), где су R_kрационалне функције, а r_k корени алгебарске једначине

$$r^n + A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + \ldots + A_n = 0, \tag{74}$$

и где је

$$A_k = \lim p_k(x) \quad \text{за} \quad x = +\infty.$$

У примени на једначину

$$\Delta_n(y) = f(x) \tag{75}$$

алгебарска једначина (74) се своди на биномну једначину (73) и доводи до горњега става о облику функције y.

У случају кад је функција дефинисана својим датим другим релативним изводом

$$\Delta_2(y) = f(x), \tag{76}$$

где је $f(x)$ рационална функција променљиве x која остаје коначна за $x = +\infty$, *најопштија функција* y, *униформна у целој равни, која одговара томе изводу, облика је*

$$y = R_1(x)e^{x\sqrt{\lambda}} + R_2(x)e^{-x\sqrt{\lambda}}, \tag{77}$$

где су функције R_1 и R_2 *рационалне, а*

$$\lambda = \lim f(x) \quad \text{за} \quad x = +\infty. \tag{78}$$

3. *Какви услови треба да су испуњени па да, поред тога што је за дато* n *релативни извод* $\Delta_n(y)$ *дата рационална функција променљиве* x, *и* $\Delta_1(y)$*буде такође рационална функција те променљиве?*

---

[1] G. G. Halphen: *Sur une nouvelle classe d'équations diff. linéaires intégrables* (Compt. rend. de l'Acad. des Sciences de Paris, t. 101, 1886, p. 1238–1240).

Такав је, нпр. случај кад је

$$\Delta_2(y)=\frac{3x^2-18x+19}{4(1-x)^4},$$

јер је тада

$$y=\frac{1}{x^2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}e^{\frac{x}{1-x}},$$

и према томе

$$\Delta_1(y)=\frac{-5x^2+11x-4}{2x(1-x)^2}.$$

У општем случају проблем се своди на проблем аналитичке теорије диференцијалних једначина:

Кад је дата биномна хомогена линеарна једначина

$$\frac{d^ny}{dx^n}+f(x)y=0, \tag{79}$$

где је f дата рационална функција променљиве x, какве услове треба да испуњава та функција, па да једначина има као партикуларни интеграл функцију облика

$$e^{\int R(x)\,dx},$$

где је R рационалан функција ?

Решење проблема дао је Appell[1] у својим радовима о биномним линеарних диференцијалним једначинама чији су коефицијенти рационалне функције интеграционе променљиве количине.

4. *Какве услове треба да испуњава за дато* n *дата алгебарска функција* $\Delta_n(y)$, *па да и функција* $\Delta_1(y)$ *буде алгебарска?*

Проблем се своди на проблем аналитичке теорије диференцијалних једначина:

Кад је у датој једначини (79) функција f дата алгебарска функција променљиве x, какве услове треба да испуњава та функција па да једначина има као партикуларни интеграл функцију облика

$$e^{\int F(x)\,dx},$$

где би F била алгебарска функција?

И решење тога проблема дао је Appell[2] , па оно потпуно решава проблем о изводу $\Delta_n(y)$ о коме је реч.

---

[1] P. Appell: *Sur une classe d'équations différ. linéaries binomes à coefficients algébriques* [Compt. rend. de l'Acad. des Sciences de Paris, Nº du 20 Janv. 1882; Annales de l'Ecole Norm. Sup., 2-me série, t. XII, 1883, p. 9–46].

[2] Loc. cit.

ТРЕЋИ ОДЕЉАК

ВЕЗЕ ИЗМЕЂУ ОСОБИНА ФУНКЦИЈЕ И ЊЕНИХ ИЗВОДА Δ_n

13. ВРЕДНОСТИ $\Delta_n(y)$ У ЗАВИСНОСТИ ОД НУЛА ФУНКЦИЈЕ y

Ма да једноме датом $\Delta_n(y)$ одговара бескрајно много функција y обухваћених једним аналитичким изразом који садржи n произвољних констаната, сингуларне тачке остају исте за све те функције: оне су сталне у равни независно променљиве количине x, тј. не зависе ни од једне од тих произвољних констаната. То је очевидно из самога општег израза за y који је

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

где је

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

један систем посебних функција које имају један исти дати извод $\Delta_n(y)$. Сингуларитети функције y поклапају се са сингуларитетима функција y_k, па су, дакле, независне од констаната C_k.

Кад се у равни променљиве x обележе сталне тачке

$$x = \xi_i$$

које су сингуларитети функције y , у свему што буде даље излагано имаће се у виду остале, *обичне тачке*, те функције, тј. једна ма која тачка $x = \alpha$ која се не поклапа ни са једном од тачака ξ_i.

Релативни извод $\Delta_n(y)$ може постати бескрајан само за оне вредности $x = \alpha$, за које функција y постаје једнака нули; за све остале вредности $x = \alpha$, она је коначна и непрекидна.

У близини такве једне тачке $x = \alpha$ функција y се може развити у ред облика

$$y = A_0 + A_1 (x - \alpha) + A_2 (x - \alpha)^2 + \ldots \tag{80}$$

конвергентан у кругу C описаном око $x = \alpha$ као центра, са полупречником једнаким растојању између тачке α и овој најближе тачке ξ_i.

Пошто је

$$\Delta_n(y) = \frac{n!A_n + (x-\alpha)F_2(x)}{A_0 + (x-\alpha)F_1(x)}, \tag{81}$$

где су F_1 и F_2 две функције променљиве x које остају коначне за $x = \alpha$, то за сваку вредност $x = \alpha$ која се не поклапа са којом од нула функције y, извод $\Delta_n(y)$ има коначну вредност

$$\frac{n!A_n}{A_0}. \tag{82}$$

Кад је $x = \alpha$ нула m-тог реда за y, функција се за све вредности x у кругу C може написати у облику

$$y = (x-\alpha)^m \varphi(x),$$

где функција φ не постаје ни једнака нули, ни бескрајна за $x = \alpha$.

Из једначине

$$\Delta_1(y) = \frac{m}{x-\alpha} + \frac{\varphi'}{\varphi} \tag{83}$$

тада непосредно следује елементарна особина извода $\Delta_1(y)$ да он постаје бескрајан за $x = \alpha$, прелазећи нагло од знака − на знак + кад x пређе од $x - \varepsilon$ на $x + \varepsilon$.

Из (82) се добија узастопним диференцијалењима и логаритмисањем низ једначина

$$\begin{aligned} \log y &= m\log(x-\alpha) + \log\varphi_0, \\ \log y' &= (m-1)\log(x-\alpha) + \log\varphi_1, \\ \log y'' &= (m-2)\log(x-\alpha) + \log\varphi_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

где су $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ функције које не постају једнаке нули, нити бескрајне за $x = \alpha$. Из тих се једначина добија

$$\begin{aligned} \Delta_1(y) &= \frac{m}{x-\alpha} + \Delta_1(\varphi_0), \\ \Delta_1(y') &= \frac{m-1}{x-\alpha} + \Delta_1(\varphi_1), \\ \Delta_1(y'') &= \frac{m-2}{x-\alpha} + \Delta_1(\varphi_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{84}$$

што, у вези са идентичношћу

$$(85) \qquad \Delta_n(y) = \Delta_1(y)\cdot\Delta_1(y')\cdot\Delta_1(y'')\ldots\Delta_1(y^{(n-1)}),$$

доводи до обрасца

$$(86)\ \Delta_n(y) = \frac{m!}{(m-n)!}\frac{1}{(x-\alpha)^n} + \frac{\Phi_1(x)}{(x-\alpha)^{n-1}} + \frac{\Phi_2(x)}{(x-\alpha)^{n-2}} + \ldots,$$

где функције

$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots$$

остају коначне за $x = \alpha$.

Отуда став:

Кад је x = α *нула* m-*тог реда за функцију* y, *израз*

$$(87) \qquad (x-\alpha)^n\Delta_n(y)$$

тежи за x = α *једноме целом позитивном броју који има за вредност*

$$(88) \qquad m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1).$$

Та ће гранична вредност бити прост број само кад је

$$n = 1, \quad m = \text{прост број},$$

иначе је то увек сложен цео број.

Из тога се непосредно изводи и овај резултат:

Кад је функција Δ_n(y) *коначна у једноме размаку* (a, b) *променљиве* x, *ред ма које нуле* x = α, *што лежи у томе размаку а не поклапа се ни са једном од сталних вредности* ξ_i, *увек је нижи од броја* n.

Јер у томе случају израз (87) тежи нули за све вредности $x = \alpha$ што леже у размаку (a, b), а не поклапају се са ξ_i, па према томе мора бити

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1) = 0,$$

што значи да m може бити само један од бројева

$$1,\ 2,\ 3, \ldots, n-1.$$

Из овога се види и следеће:

Свака се нула функције y, *вишега реда од* (n – 1), *поклапа са којом од сталних вредности* ξ_i.

За даље излагање од важности је проблем:

Наћи потребне и довољне услове да би извод $\Delta_n(y)$ *био коначан и од нуле различан за све вредности* x = β_i, *што се не поклапају ни са једном од сталних вредности* ξ_i.

Пре свега, вредност $\Delta_n(y)$ може тада постати бескрајна само за оне вредности $x = \beta_i$, што се поклапају са којом од нула функције y. Нека је $x = \alpha$ таква једна нула, а m њен ред, који је увек нижи од n. Ред, уређен по степенима бинома $(x - \alpha)$, који представља функцију y у одговарајућем кругу C око тачке $x = \alpha$, а који ће бити написан у облику

$$(89) \qquad y = a_0 + \frac{a_1}{1!}(x-\alpha) + \frac{a_2}{2!}(x-\alpha)^2 + \ldots$$

има своје коефицијенте

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$$

једнаке нули, а коефицијенат a_m различан од нуле, тако да је он облика

$$(90) \qquad y = \frac{a_m}{m!}(x-\alpha)^m + \frac{a_{m+1}}{(m+1)!}(x-\alpha)^{m+1} + \ldots$$

Одатле је за све индексе

$$p = 0, 1, 2, \ldots, m$$

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \frac{a_m}{(m-p)!}(x-\alpha)^{m-p} + \frac{a_{m+1}}{(m-p+1)!}(x-\alpha)^{m-p+1} + \ldots$$

и према томе ($p = m$)

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{a_m}{0!} + \frac{a_{m+1}}{1!}(x-\alpha) + \frac{a_{m+2}}{2!}(x-\alpha)^2 + \ldots,$$

а одатле је за $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\frac{d^{m+k} y}{dx^{m+k}} = \frac{a_{m+k}}{0!} + \frac{a_{m+k+1}}{1!}(x-\alpha) + \frac{a_{m+k+2}}{2!}(x-\alpha)^2 + \ldots,$$

па, дакле

$$(91) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{a_n}{0!} + \frac{a_{n+1}}{1!}(x-\alpha) + \frac{a_{n+2}}{2!}(x-\alpha)^2 + \ldots$$

Да би извод $\Delta_n(y)$ био за $x = \alpha$ коначан и од нуле различан, а пошто је у реду за y коефицијенат a_m различан од нуле, потребно је и довољно да у реду (91) буде

$$a_n = a_{n+1} = \ldots = a_{n+m-1} = 0,$$

а поред тога да је

$$a_{n+m} \neq 0.$$

А кад су услови испуњени, биће

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{a_{n+m}}{m!}(x-\alpha)^m + \frac{a_{n+m+1}}{(m+1)!}(x-\alpha)^{m+1} + \ldots$$

и према томе

$$\Delta_n(y) = \frac{\dfrac{a_{n+m}}{m!} + \dfrac{a_{n+m+1}}{(m+1)!}(x-\alpha) + \ldots}{\dfrac{a_m}{m!} + \dfrac{a_{m+1}}{(m+1)!}(x-\alpha) + \ldots},$$

тако да за $x = \alpha$ извод $\Delta_n(y)$ има за вредност

$$(92) \qquad \Delta_n(y) = \frac{a_{n+m}}{a_m}.$$

Из тога се изводи овај став:

Да би извод $\Delta_n(y)$ *функције* у *изражене редом*

$$y = \Sigma A_k(x-\alpha)^k,$$

а која има вредносӣ $x = \alpha$ *као своју нулу* m-*ӣоī реда, био за* $x = \alpha$ *коначан и од нуле различан, ӣоӣребно је и довољно да ӣоред ӣоīа шӣо је*

$$(93) \qquad A_0 = A_1 = \ldots = A_{m-1} = 0, \quad A_m \neq 0,$$

буде још и

$$(94) \qquad A_n = A_{n+1} = \ldots = A_{n+m-1} = 0, \quad A_{n+m} \neq 0,$$

Вредносӣ $\Delta_n(y)$ *за* $x = \alpha$ *ӣада је*

$$(95) \qquad \Delta_n(y) = \frac{(n+m)!}{m!}\frac{A_{n+m}}{A_m}.$$

Из тих се услова види, нпр. ово што је и по себи очевидно:

Извод $\Delta_1(y)$ постаје бескрајан за сваку нулу $x = \alpha$ функције y, јер за $n = 1$ услови (93) и (94) не могу бити задовољени: према (93) треба да је $A_m \neq 0$, а према (94) да је $A_m = 0$.

Међутим, за изводе Δ_n ма кога вишег реда

$$x = 2, 3, 4, \ldots$$

ти услови могу бити задовољени, тако да извод Δ_n може бити коначан.

За $\Delta_2(y)$, пошто тада мора бити $m < 2$, за то би било потребно и довољно да буде

$$A_0 = A_2 = 0, \quad A_1 \neq 0, \quad A_3 \neq 0,$$

и тада Δ_2 има вредност

$$\Delta_2(y) = \frac{6A_3}{A_1}.$$

За $\Delta_3(y)$, пошто мора бити $m < 3$, потребно је и довољно да буде:

а) за просте нуле $x = \alpha$

$$A_0 = A_3 = 0, \quad A_1 \neq 0, \quad A_4 \neq 0,$$

и тада Δ_3 има вредност

$$\Delta_3(y) = \frac{24A_4}{A_1};$$

б) за двоструке нуле $x = \alpha$

$$A_0 = A_3 = 0, \quad A_2 \neq 0, \quad A_5 \neq 0,$$

и тада Δ_3 има вредност

$$\Delta_3(y) = \frac{60A_5}{A_2}.$$

Уочимо, примера ради, извод $\Delta_n(y)$ елиптичке функције

$$y = \mathrm{sn}x,$$

чији модуо k лежи између 0 и 1. Нека је $x = \alpha$ једна њена реална нула, тј. једна од вредности

$$\alpha_1 = 4\lambda K, \quad \alpha_2 = 6\lambda K,$$

где је

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

а λ ма какав, позитиван или негативан цео број.

Као што је познато, функција

$$z = \mathrm{sn}\,(x + \alpha)$$

је непарна функција променљиве x која има вредност $x = 0$ као своју нулу; према томе, у близини тачке $x = 0$ биће

$$\mathrm{sn}\,(x + \alpha) = A_1x + A_3x^3 + A_5x^5 + \ldots, \tag{96}$$

где је коефицијенат A_k, као што се зна, полином по модулу k (са целим позитивним коефицијентима) подељен факторијелом $i!$, и сви су различни од нуле. Узастопним диференцијаљењем обрасца (96) се види да:

1° сваки извод функције z *парног* реда је *непарна* функција променљиве x која постаје једнака нули за $x = 0$;

2° сваки извод *непарног* реда је *парна* функција која је различна од нуле за x =0.

Пошто је

$$y = \mathrm{sn}x = z(x-\alpha) =$$

$$= A_1(x-\alpha) + A_3(x-\alpha)^3 + A_5(x-\alpha)^5 + \ldots,$$

то су услови (93), који траже да је

$$A_0 = 0, \quad A_1 \neq 0,$$

испуњени за све вредности n; услови (94), по којима треба да је

$$A_n = 0, \quad A_{n+1} \neq 0,$$

испуњени су само за парне вредности n. А то истиче на видик ову особину функције *snx*:

Сваки њен извод Δ_n *парнога* реда има, за сваку нулу $x = \alpha$ функције, коначну и од нуле различну вредност; за изводе Δ_n *непарног* реда та је вредност бескрајна.

Па пошто функција *snx* нема реалних бесконачница, може се тврдити да сваки њен извод Δ_n *парнога* реда остаје *коначан* за све реалне вредности x, док сваки извод Δ_n *непарног* реда постаје *бескрајан* за нуле те функције.

На пример, за извод $\Delta_2(y)$ то се непосредно види из његовог експлицитног израза за ту функцију, а то је

$$\Delta_2(y) = 1 - k^2 - 2dn^2x,$$

која за све реалне вредности x варира између двеју граничних, коначних и од нуле различних вредности, а ове не обухватају нулу.

Горњи општи став за коначност извода Δ_n доводи непосредно до овога става:

Да би извод $\Delta_n(y)$ *једне функције* y *имао, за све реалне вредности* x *које се не поклапају са сталним вредностима* ξ_i, *коначну и од нуле различну вредност, потребно је и довољно*:

1° *или да функција* y *нема реалних нула које се не би поклапале са којом од вредности* ξ_i;

2° *или да, ако их има, за сваку нулу* m*-тог реда буде*

(97)
$$\frac{d^{n+m}y}{dx^{n+m}} \neq 0,$$

а поред тога да је за ту нулу

(98)
$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \ldots = \frac{d^{n+m-1}y}{dx^{n+m-1}} = 0.$$

Лако је запазити да се доказ става дословце примењује и на имагинарне вредности x. Према томе би се, применивши све то на *целе* функције y, имао овај став:

Да би извод $\Delta_n(y)$ *једне целе функције* y *био такође цела функција независно променљиве количине* x, *потребно је и довољно:*

1° *или да је* y *облика*

$$y = e^{G(x)},$$

где је G (x) *цела функција;*

2° *или да за сваку нулу* m*-тог реда функције* y *буду испуњени услови* (97) *и* (98).

Тако, нпр. кад је y цела функција чије су све нуле просте, да би $\Delta_2(y)$ био такође цела функција, потребно је и довољно да ни једна од тих нула не поништава трећи извод y''' функције y.

Другојаче исказано: потребно је и довољно да, ако је $x = \alpha$ једна таква нула, ред

$$y(x+\alpha) = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

има свој коефицијенат A_3 различан од нуле.

Такав је, нпр. случај са функцијом

$$y = \sin x,$$

за коју је

$$\sin(x + k\pi) = +\sin x = +\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right).$$

Нека су, такође као пример, наведене функције променљиве x дефинисане одређеним интегралима облика

$$y_1 = \int_a^b f(t) \sin xt \, dt,$$

$$y_2 = \int_a^b f(t) \cos xt \, dt,$$

где је $f(t)$ каква функција интеграционе променљиве t, коначна у размаку интеграције (a, b). Све су такве функције *у целе* функције променљиве x, са бескрајно много нула $x = \alpha_i$ које су све просте кад су интеграли

$$z_1 = \int_a^b t \, f(t) \sin t\alpha_i \, dt,$$

односно

$$z_2 = \int_a^b t \, f(t) \cos t\alpha_i \, dt,$$

различни од нуле. Да би таква једна функција y_1, односно y_2, имала за извод Δ_2 једну целу функцију променљиве x, потребно је и довољно да одговарајући интеграл

$$u_1 = \int_a^b t^3 f(t) \sin t\alpha_i \, dt,$$

односно

$$u_2 = \int_a^b t^3 f(t) \cos t\alpha_i \, dt,$$

има вредност различну од нуле.

14. НУЛЕ ФУНКЦИЈЕ y У ЗАВИСНОСТИ ОД $\Delta_n(y)$

Егзистенција реалних нула реалних континуалних функција y, њихова густина и распоред у посматраноме размаку варијација независно променљиве количине x, у зависности су од аналитичких појединости везаних за релативне изводе $\Delta_n(y)$ тих функција. Оно што се у овај мах може знати о тој зависности, излази из појединих ставова о хомогеним биномним диференцијалним једначинама

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \varphi(x) y = 0. \tag{99}$$

Од тих ставова ми ћемо, као најопштије и најпростије, навести ове што следују и њиме се послужити за испитивања о поменутој зависности.

Претпоставимо да је функција $\varphi(x)$ континуална за *позитивне* вредности x и да за ове задржава непрестано *један исти знак*. Познато је у теорији једначина (99) да међу њима само оне које су облика

$$\frac{d^{2m}y}{dx^{2m}}-(-1)^m\varphi(x)y=0, \tag{100}$$

или

$$\frac{d^{2m}y}{dx^{2m}}+(-1)^m\varphi(x)y=0 \tag{101}$$

могу имати *периодичких* интеграла; то важи за једначину (100) кад је функција φ негативна, а за једначину (101) кад је та функција позитивна[1].

Тако, нпр. једначине најнижег реда (100) и (101), које могу имати периодичких интеграла, јесу

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\varphi(x)y=0, \tag{102}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}-\varphi(x)y=0, \tag{103}$$

где је φ позитивна функција за позитивне вредности x.

За једначине (100) и (101) зна се и то да, кад у једној или другој функција φ не постаје никако једнака нули у размаку једне интегралне периоде, сваки њихов периодички интеграл има бар једну нулу у томе размаку[2].

Из тих се ставова непосредно изводи следећи став:

Једна периодичка функција у *може имати својих извода* Δ_{2m} *парног реда таквих да израз*

$$\pm(-1)^{m+1}\Delta_{2m}(y) \tag{104}$$

буде за позитивне вредности x *континуалан и позитиван, али не може имати својих релативних извода парног реда за које би израз*

$$(-1)^{m+1}\Delta_{2m}(y) \tag{105}$$

---

[1] Davidoglou: *Sur les intégrales périodiques des éq. diff. binomes* (Compt. rend. de l'Acad. des Sciences de Paris, t. 133, 1901, p. 582–584).

[2] Davidoglou: ibid.

имао такву особину, нити може имати својих релативних извода непарног реда $\Delta_{2m+1}(y)$ *који би за позитивне вредности* x *били непрестано континуални и позитивни.*

Кад, дакле, за позитивне вредности x, један израз (105) или који од извода $\Delta_{2m+1}(y)$ задржавају позитиван знак, а континуалне су функције променљиве x, таквим релативним изводима *не одговара никаква периодичка функција.*

У случају кад једноме релативном изводу *парнога* реда, који задовољава услов горњега става, одговара каква периодичка функција, а тај извод никако не постаје једнак нули у размаку једне интегралне периоде, *одговарајућа периодичка функција, у случају кад она постоји, има бар једну нулу у томе размаку.*

За диференцијалну једначину (99), кад је $n = 3$, зна се ово:

Ако једначина

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \varphi(x)y = 0$$

има једну своју интегралну криву која додирује осовину Ox у једноме размаку (a, b) променљиве x, и ако једначина

$$\frac{d^3z}{dx^3} + \varphi_1(x)z = 0,$$

где је $\varphi_1(x)$ таква једна функција да је у размаку (a, b) непрестано

$$\varphi_1(x) \geq \varphi(x)$$

има такав један интеграл z, да ни z ни његов извод z' нису негативни за $x = a$, овај ће интеграл z имати бар једну нулу у размаку (a, b)[1].

А то се, са гледишта проблема о коме је реч, може исказати на овај начин:

Претпоставимо да су испуњене ове погодбе:

1° да међу функцијама y што одговарају датоме изводу $\Delta_3(y)$ има бар једна функција y таква да у посматраноме размаку додирује осовину Ox;

2° да међу функцијама z што одговарају другоме једном датом изводу $\Delta_3(z)$, има бар једна функција z таква да ни она, ни њен први извод z' нису негативни за $z = a$;

---

[1] Davidoglou: *Sur les zéros réels des intégrales réelles des équations linéaires troisième ordre* (Compt. rend. de l'Acad. des Sciences de Paris, t. 130, 1900, p. 399–401).

3° да је у размаку (a, b) непрестано

$$\Delta_3(y) \geq \Delta_3(y).$$

Тада *функција* z *има бар једну нулу у размаку* (a, b).

За исту једначину (99), кад је $n = 4$, зна се и ово.

Уочимо једначину

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - k\varphi(x)y = 0, \tag{106}$$

где је k променљив параметар, а $\varphi(x)$ каква функција која не добија негативне вредности за вредности x у посматраноме размаку (a, b). Тада постоји један бескрајан дискретан низ

$$k_1, k_2, k_3, \ldots \quad , \tag{107}$$

вредности параметра k које су све позитивне и бескрајно расту са својим рангом и које су такве, да ће за једну ма коју од њих, нпр. $k = k_n$, једначина (106) имати бар једну своју интегралну криву што ће додиривати осовину Ox у размаку (a, b), а имаће у томе размаку $(n - 1)$ нула[1].

Изражено као особина извода $\Delta_4(y)$, то значи:

Кад $\Delta_4(y)$ *никако не добија негативне вредности у размаку* (a, b), *постоји један бескрајан дискретан низ* (107) *позитивних и бескрајно растућих вредности таквих да свакоме од релативних извода*

$$\frac{1}{k_n}\Delta_4(y)$$

одговара бар по једна функција у *која ће додиривати осовину* Ox *и имати у размаку* (a, b) *тачно* (n – 1) *нула.*

Постоји још сличних зависности између релативних извода $\Delta_n(y)$ и нула одговарајућих им функција y, али су оне компликованије и захтевају доста рестрикција. Најпростије су и најодређеније оне што се односе на други релативни извод $\Delta_2(y)$. Оне су и за примене од највеће важности и биће предмет излагања што следују.

---

[1] Davidoglou: *Sur une apolication de la méthode des approximations successives* (Compt. rendus de l'Acad. des Sciences de Paris, t. 130, 1900, p. 1241–1243).

15. НУЛЕ ФУНКЦИЈЕ y У ЗАВИСНОСТИ ОД $\Delta_2(y)$

У свему што следује посматраће се функције у размацима (a, b) које не садрже ни једну од сталних вредности ξ_i, напред дефинисаних и у којим је размацима, према томе, функција непрестано коначна и континуална. И тада важе ови ставови, овде доказани на најелементарнији могући начин.

Кад извод $\Delta_2(\mathrm{y})$ *остаје коначан и континуалан за све вредности* x *у размаку* (a, b), *нуле свих одговарајућих им функција* y, *што леже у томе размаку, просте су.*

То излази непосредно из напред доказаног факта да, ако је $x = \alpha$ нула функције y која се не поклапа ни са једном вредношћу ξ_i, израз

$$(x - \alpha)^2 \Delta_2(y)$$

тежи за $x = \alpha$, са једне стране нули, а са друге граници $m(m-1)$, где m означује ред те нуле. То је једно с другим у складу само кад је $m = 1$.

То се, уосталом, види и на овај начин. Нека је y_1 једна од функција које имају дати релативни извод $\Delta_2(y)$, а нека је y најопштија таква функција. Једначине

$$\Delta_2(y_1) = f(x), \qquad \Delta_2(y) = f(x) \tag{108}$$

доводе до релације

$$yy_1'' - y_1y'' = 0, \tag{109}$$

из које се интеграцијом добија

$$yy_1' - y_1y' = \text{const.} = C \tag{110}$$

Кад би $x = \alpha$ била једна вишеструка нула функције y_1, за ту би вредност морало бити

$$y_1 = 0, \quad y_1' = 0,$$

што према (110) може бити само кад је $C = 0$. А кад је то случај, једначина (110) показује да је за све вредности x

$$\Delta_1(y_1) = \Delta_1(y),$$

тј. да је

$$y = \lambda y_1, \quad \lambda = \text{const.}, \tag{111}$$

што је немогућно, јер (111) не може бити најопштија функција која има исти извод Δ_2 као и y_1. Према томе, $x = \alpha$ не може бити вишеструка нула функције y_1. Пролазећи кроз сваку своју нулу у размаку (a, b), *свака од функција* у *мења знак.*

Поред тога се види и ово:

Кад две функције, које имају заједничких нула, имају један исти извод Δ_2, *њихов је количник сталан број.*

Нека су сад y_1 и y_2 две функције, коначне и континуалне у датоме размаку (a, b), које имају исти извод Δ_2, а чији количник није сталан број. За њих се може доказати овај став:

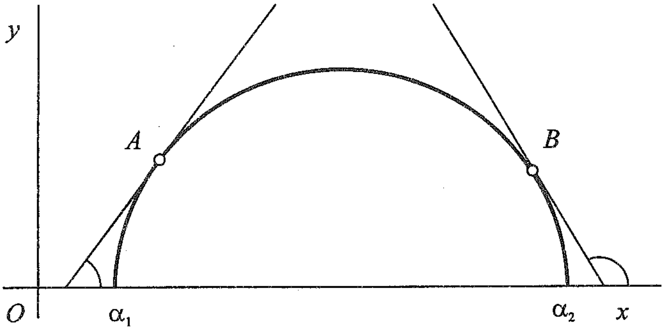
Функције y_1 *и* y_2 *немају у размаку* (a, b) *заједничких нула, али им се нуле међусобно раздвајају, тј. између двеју узастопних нула једна од њих увек се налази једна, и то само једна нула друге функције.*

Да не може бити заједничких нула, јасно је из претходног става. Из релације

$$\Delta_2(y_1) = \Delta_2(y_2)$$

добија се интеграцијом

$$y_2 y_1' - y_1 y_2' = \text{const.} = C. \tag{112}$$

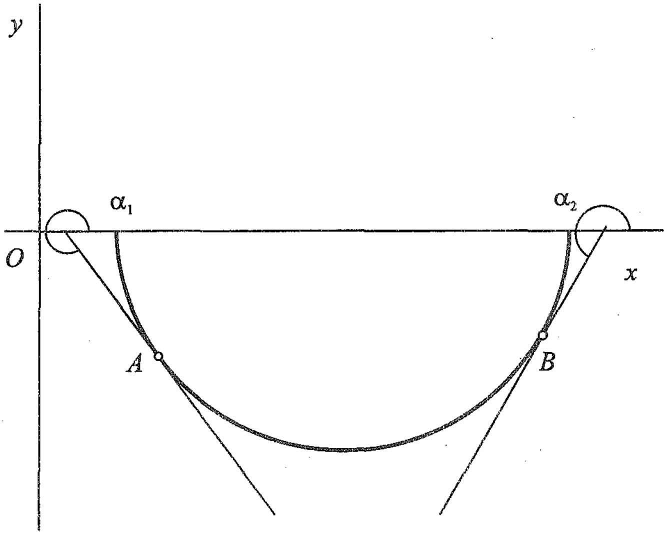


Сл. 1

Пошто количник $\frac{y_2}{y_1}$ није сталан број, константа C је различна од нуле. Ако су α_1 и α_2 две узастопне нуле функције y_1, пошто су оне просте, биће за $x = \alpha_1$

$$y_1 = 0, \quad y_1' \neq 0,$$

па ће, дакле, према релацији (112) производ $y_2 y_1'$ за $x = \alpha_1$ имати знак константе C. У тачки $x = \alpha_2$ (сл. 1 и 2) је исти случај, па за $x = \alpha_2$ производ $y_2 y_1'$ има исти знак као за $x = \alpha_1$. Међутим, прелазећи од α_1 на α_2 извод y_1' мења знак, па према томе и y_2 мора променити знак у размаку (a, b), тј. тај размак садржи бар једну нулу функције y_2. Тако исто, очевидно, размак (β_1, β_2) између двеју узастопних нула функције y_2 мора садржати бар једну нулу функције y_1. Нуле α_i и β_i се, дакле, међу собом раздвајају.



Сл. 2

Зависност нула функције y од знака извода $\Delta_2(y)$ огледа се у следећим ставовима:

У сваком размаку (a, b), *у коме је извод* $\Delta_2(y)$ *нейрестано йозитиван ни једна од одговарајућих му функција* y *не може имати више од једне нуле.*

Јер тада у размаку (a, b) извод y'' има непрестано исти знак, као и y, па, дакле, крива y је у томе размаку непрестано конвексна према осовини Ox.

У размаку (a, b), *у коме је извод* $\Delta_2(y)$ *нейрестано негативан, број у њему садржаних нула сваке од одговарајућих функција* y *зависи од ширине размака у коме варира* $\Delta_2(y)$ *за време док* x *варира у размаку* (a, b).

А та зависност ће се видети из овога што следује.

Нека су y и z две функције променљиве x, чији су други релативни изводи

$$\Delta_2(y) = -\mu_1(x), \qquad (113)$$
$$\Delta_2(z) = -\mu_2(x)$$

негативни у посматраноме размаку (a, b), тако да је

$$\mu_1(x) > 0, \quad \mu_2(x) > 0.$$

Тада се доказује овај став:

Кад је у (a, b) *нейрестано*

$$\mu_1(x) > \mu_2(x), \tag{114}$$

и кад у шоме размаку функција z *има нула, онда:*

1° *између две узасшойне нуле функције* z *увек се налази бар једна нула функције* y;

2° *ако* y *и* z *имају коју нулу заједничку, онда, кад* x *расше, йочевши од ше нуле, йрво ће наићи на једну нулу функције* y, *йа шек зашим на једну нулу функције* z.

Да би се став доказао, приметимо да се из једначина (113) добија

$$yz'' - zy'' = yz(\mu_1 - \mu_2),$$

одакле је интеграцијом

$$yz' - zy' = C + \int_h^x yz(\mu_1 - \mu_2)\,dx, \tag{115}$$

где је h једна произвољна вредност што се налази у размаку (a, b). Узевши за x специјалну вредност $x = h$, добија се за интеграциону константу C вредност

$$C = [yz' - zy'] \quad \text{за} \quad x = h. \tag{116}$$

Не умањујући тиме генералност резултата, може се увек претпоставити да су обе функције y и z позитивне за вредности x што леже у размацима између њихових двеју посматраних узастопних нула α_1 и α_2, односно β_1 и β_2, које се и саме буду налазиле у размаку (a, b). То је јасно из тога, што се променом знака тих функција ни у чему не мењају ни њихове нуле, ни њихови релативни изводи Δ_2.

У таквој претпоставци о знацима функција y и z, и с обзиром на неједначину (114), очевидно је да је члан

$$\int_h^x yz(\mu_1 - \mu_2)\,dx \tag{117}$$

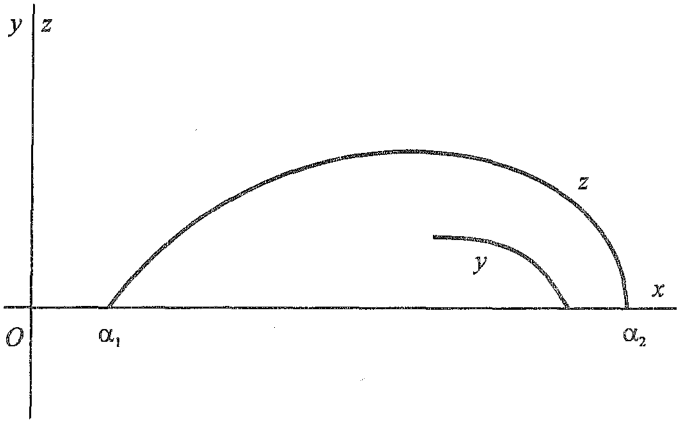
једначине (115) позитиван за све вредности x у размаку (a, b). Да бисмо знали знак константе C, и према њему познали међусобни распоред нула α_i и β_i у томе размаку, разликоваћемо ова четири случаја:

1° функције y и z немају у (a, b) заједничких нула;

2° α_1 је заједничка нула тих функција;

3° α_2 је заједничка нула истих функција;

4° и α_1 и α_2 су њихове заједничке нуле.



Сл. 3

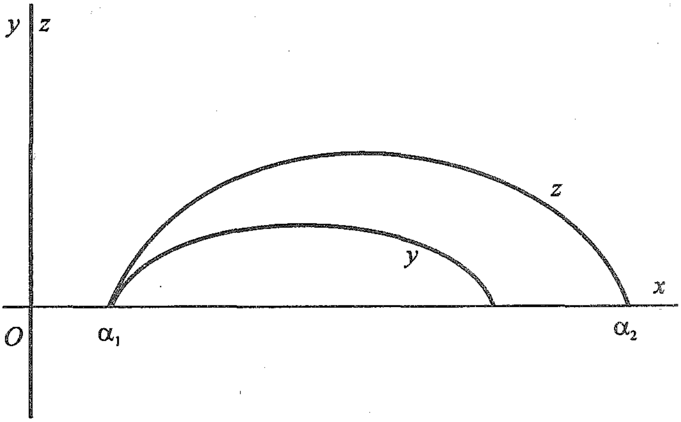
Први случај. Пошто се за h може узети произвољна вредност што се налази између узастопних нула α_1 и α_2 функције z, узмимо за ту вредност какав број врло мало већи од α_1. За такву ће вредност $x = h_1$ бити z врло блиско нули, а z' различно од нуле (сл. 3), па то и онда кад је h_1 бескрајно блиско нули α_1. А пошто за $x = h_1$ вредност y није блиска нули (јер α_1 није нула те функције), то ће константа C имати знак производа yz' за $x = h_1$, који је позитиван. Према томе, и према једначини (115), мора бити за све вредности x у размаку (α_1, α_2) непрестано

$$yz' - zy' > 0. \tag{118}$$

Међутим, узевши за h какав број h_2 врло мало мањи од α_2, види се на исти начин да ће константа C имати знак производа yz' за $x = h_2$; то би, пошто за $x = h_1$ и $x = h_2$ извод z' има супротне знаке, било немогућно кад у размаку (α_1, α_2) функција y не би бар један пут променила свој знак, тј. прошла кроз нулу.

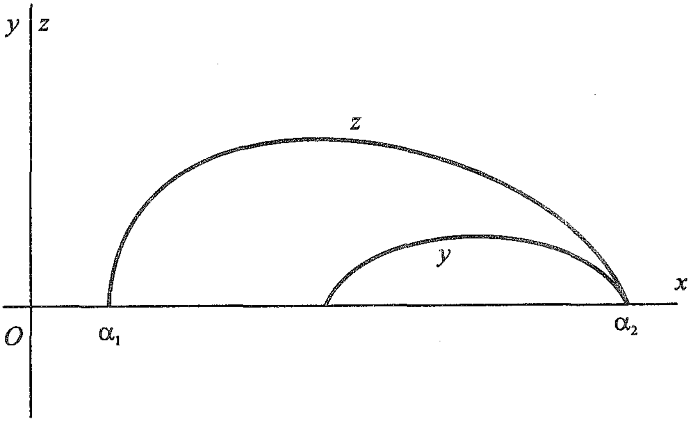
Други случај. Кад је α заједничка нула функција z и y, узмимо $h = \alpha_1$, па ће према (116) бити $C = 0$. Пошто је интеграл (117) увек позитиван, из (115) се опет добија неједначина (118) за све вредности x у размаку (α_1, α_2).

Међутим, за x блиско вредности α_2 производ zy' има вредност блиску нули, док то није случај и са производом yz', што према неједначини (118) значи да ће овај бити позитиван и за $x = \alpha_2$, као што је позитиван и за вредности x блиске α_1. Па пошто за $x = \alpha_1$ и $x = \alpha_2$ извод z' мора имати супротне знаке, то би било немогућно кад у размаку (α_1, α_2) функција y не би променила знак, тј. прошла кроз нулу (сл. 4).



Сл. 4

Трећи случај. Кад је α_2 заједничка нула функција z и y, узмимо $h = h_2$, па ће опет бити $C = 0$. А пошто једначина (115) тада добија облик



Сл. 5

$$(119) \qquad yz' - zy' = -\int_x^{\alpha_2} yz(\mu_1 - \mu_2)\,dx,$$

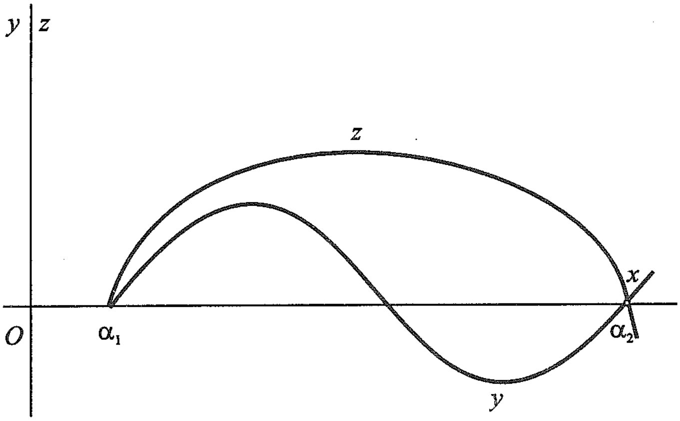
то ће у целоме размаку (α_1, α_2) бити непрестано

$$(120) \qquad yz' - zy' < 0,$$

па ће тако бити и за вредност x мало већу од α_1. Па како је за такво x производ zy' врло мали, израз на левој страни обрасца (119) имаће знак свога првога члана yz' који није близак нули. А пошто су тада y и z' позитивни, тај би знак био позитиван а не негативан као што захтева неједначина (120), кад функција y не би мењала знак између α_1 и α_2.

Четврти случај. Кад су и α_1 и α_2 заједничке нуле функција z и y, добија се $C = 0$ и једначина (115) је

$$(121) \qquad yz' - zy' = \int_{\alpha_1}^{x} yz(\mu_1 - \mu_2)\,dx.$$



Сл. 6

За $x = \alpha_2$ израз на левој страни једнак је нули, а интеграл на десној страни постаје

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} yz(\mu_1 - \mu_2)\,dx.$$

Пошто z не мења знак у размаку (α_1, α_2), то кад би био исти случај и са y, тај интеграл не би могао бити једнак нули, као што захтева једначина (121).

У свакоме, дакле, случају, између α_1 и α_2 налази се бар једна нула β функције y_1 и горњи је став доказан.

Претпоставимо сад да је у посматраном размаку (a, b) непрестано

$$\mu_1(x) < \mu_2(x)$$

поред услова да су функције μ_1 и μ_2 позитивне, тј. да су изводи $\Delta_2(y)$ и $\Delta_2(z)$ *негативни* у томе размаку. Пермутирањем функција y и z у горњим обрасцима и закључцима, имаће се за z све оно што је нађено за y, тако да се долази до ове теореме [водећи рачуна и о томе да y може имати још и једну нулу испред најмање и једну иза највеће нуле функције u у размаку (a, b)]:

Нека су u, y, z три функције променљиве x, а (a, b) један размак који не садржи ни једну од сталних вредности ξ_i (тако да су све три функције у томе размаку вредности x коначне и континуалне) и у коме су сва три извода

$$\Delta_2(u), \quad \Delta_2(y), \quad \Delta_2(z)$$

негативни. Тада (Sturm-ова теорема):

Ако је у размаку (a, b) *непрестано*

$$-\Delta_2(z) < -\Delta_2(y) < -\Delta_2(u), \tag{122}$$

функција y *имаће у томе размаку најмање онолико нула колико их има* z, *а највише онолико колико их има* u *пошто се овај број повећа са 2.*

Ако се, дакле, број нула функција z, y, u у (a, b) означи са n_1, n, n_2, биће

$$n = n_1 + \theta(n_2 - n_1 + 2),$$

где је θ један број што лежи између 0 и 1.

16. КОМПАРАТИВНИ ИЗВОДИ Δ_2

Горња општа теорема даје могућност да се, у *погледу честине нула* у датоме размаку (a, b) једна непозната функција y, за коју је познат њен извод $\Delta_2(y)$, упореди са двема другим функцијама z и u чији су изводи $\Delta_2(z)$ и $\Delta_2(u)$ такође познати, као и саме функције z и u.

Функције z и u треба да су такве:

1° да су им изводи $\Delta_2(z)$ и $\Delta_2(u)$ негативни у размаку (a, b);

2° да се за сваку од њих може знати број њихових нула у томе размаку.

Теорема је, уосталом, примењива и онда кад се зна само једна *доња* граница за број n_1, или једна *горња* граница за број n_2.

Према горњим условима, које треба да испуњавају функције z и u, њихов је избор доста произвољан. Избор се врши или према захтеву да рачуни буду што простији, или према потреби да нађени број нула функције y буде *што прецизнији*, тј. да размак између граница n_1 и n_2, између којих ће се налазити број n, буде *што ужи.*

Кад се гледа само на простоту рачуна, могу се за z и u узети функције

$$z = \sin x\sqrt{N}, \quad u = \sin x\sqrt{M}, \tag{123}$$

где су N и M једна доња и једна горња граница за вредности које добија израз $-\Delta_2(y)$ за вредности x у размаку (a, b). Тада је

$$-\Delta_2(z) = N,$$
$$-\Delta_2(u) = M,$$

на пошто је у (a, b) непрестано

$$N < -\Delta_2(y) < M,$$

према горњој теореми функција y ће у размаку (a, b) имати најмање онолико нула колико их има z, а највише онолико колико их има u, или можда још једну или две нуле више. Размак између две узастопне нуле функције z има за дужину $\frac{\pi}{\sqrt{N}}$, па пошто сваки такав размак, почевши од најмање нуле те функције, садржи бар једну нулу функције y, то ће број тих нула за функцију y бити бар онолики колико има целих јединица у броју

$$\frac{(b-a)\sqrt{N}}{\pi} - 1.$$

Тако исто, размак између две узастопне нуле функције u је $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$, па пошто сваки такав размак не може садржати више од једне нуле функције y, то ће број нула те функције бити највише онолики колико је пута број $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$ садржан у броју $(b-a)$, водећи рачуна и о томе да, поред таквих нула, функција y може имати још и једну нулу испред најмање и једну иза највеће нуле функције u у размаку (a, b).

А из свега тога изводи се ова (Sturm-ова) теорема:

Ако се са N *и* M *означе једна доња и једна горња граница за вредности које добија израз* $-\Delta_2(y)$ кад се x налази у посматраном размаку (a, b), *једна ма која функција* y *што одговара таквоме изводу* $\Delta_2(y)$ *имаће у* (a, b) *најмање онолико нула колико има целих јединица у броју*

$$\frac{(b-a)\sqrt{N}}{\pi}-1, \tag{124}$$

а највише онолико колико има целих јединица у броју

$$\frac{(b-a)\sqrt{M}}{\pi}+2. \tag{125}$$

Тај број n може се изразити обрасцем

$$n=-1+\frac{(b-a)\sqrt{N}}{\pi}+\left[3+\frac{(b-a)}{\pi}(\sqrt{M}-\sqrt{N})\right]\theta, \tag{126}$$

где је θ један број што лежи између 0 и 1.

Међутим, кад се тражи да нађени размак за број нула n буде што ужи, треба за компарацију бирати функције z и u погодније за то. Тако се, нпр. за те функције може узети

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{x}\,\sin(p\log x),\\ u &= \sqrt{x}\,\sin(p'\log x), \end{aligned} \tag{127}$$

где су p и p' две позитивне константе такве да је у (a, b)

$$-\frac{\sqrt{p^2+\frac{1}{4}}}{x^2}<-\Delta_2(y)<-\frac{\sqrt{p'^2+\frac{1}{4}}}{x^2}.$$

А пошто је за такве функције z и u

$$\Delta_2(z)=-\frac{\sqrt{p^2+\frac{1}{4}}}{x^2},$$

$$\Delta_2(u)=-\frac{\sqrt{p'^2+\frac{1}{4}}}{x^2},$$

то је за вредности x у (a, b) испуњен услов (122), па ће y у томе размаку најмање онолико нула колико их има функција z, а највише онолико колико их буде имала функција u, пошто се овај последњи број повећа за 2. Међутим, лако се сазнаје за број нула функција z и u у размаку (a, b), јер за z нуле су

$$\alpha_k=e^{\frac{k\pi}{p}},$$

а за u то су

$$\alpha'_k = e^{\frac{k\pi}{p'}},$$

где је

$$k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots$$

Подесним избором компаративних извода $\Delta_2(z)$ као функција променљиве x, могу се решавати поједина питања које је немогућно решити помоћу најпростијег таквог извода

$$(128) \qquad \Delta_2(z) = \text{const.}$$

Једном би, нпр. од таквих проблема био тај да се проучи честина нула функције y у близини једне вредности x за коју извод $\Delta_2(y)$ постаје једнак нули.

Претпоставимо, дакле, да је то случај. При компаративном изводу (128) било би $N = 0$ и за доњу границу броја нула функције y у размаку (a, b) што обухвата посматрану нулу $x = \alpha$ извода $\Delta_2(z)$ добио би се број $n_1 = 0$. Да би се дошло до одређенијих података о тој доњој граници, треба узети за компаративни извод какву, за тај циљ, подесно изабрану функцију променљиве x.

У случају, нпр. кад $\Delta_2(y)$ има у размаку (a, b) једну, и то двоструку нулу, могло би се поступити на следећи начин. Функција

$$-\frac{\Delta_2(y)}{(x-\alpha)^2}$$

ће у размаку (a, b) бити коначна, од нуле различна и позитивна. Према томе ће постојати два стална, коначна, од нуле различна и позитивна броја μ и μ' таква, да је за све вредности x у размаку (a, b)

$$-\mu < -\frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^2} < -\mu'.$$

Ако се тада за компаративне изводе узму

$$(129) \qquad \begin{aligned} \Delta_2(z) &= -\mu(x-\alpha)^2, \\ \Delta_2(u) &= -\mu'(x-\alpha)^2, \end{aligned}$$

то, пошто је испуњен услов (122) и пошто изводи $\Delta_2(z)$ и $\Delta_2(u)$ остају у (a, b) непрестано негативни и немају вредност $x = \alpha$ као нулу, одговарајуће функције z и u, тј. интеграли диференцијалних једначина

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \mu(x-\alpha)^2 z = 0,$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \mu'(x-\alpha)^2 u = 0,$$

могу се узети за компаративне изводе и познавање броја њихових нула у посматраноме размаку доводи до обавештења о броју нула саме функције y.

17. РАСПОРЕД НУЛА ФУНКЦИЈЕ y У ЗАВИСНОСТИ ОД $\Delta_2(y)$

Да бисмо проучили *расӣоред* нула функције y у посматраноме размаку (a, b) промењиве x, узмимо за компаративне функције

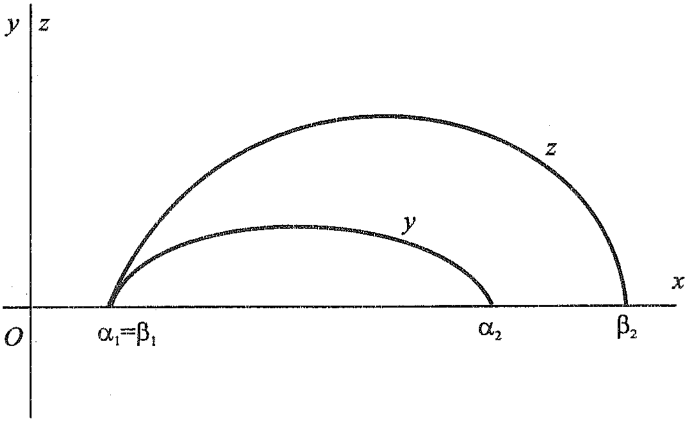
$$z = \sin[(x-\alpha_1)\sqrt{N}], \quad u = \sin[(x-\alpha_1)\sqrt{M}], \tag{130}$$

где је α_1 једна нула функције y, а N и M једна доња и једна горња граница вредности те функције у (a, b). Пошто је

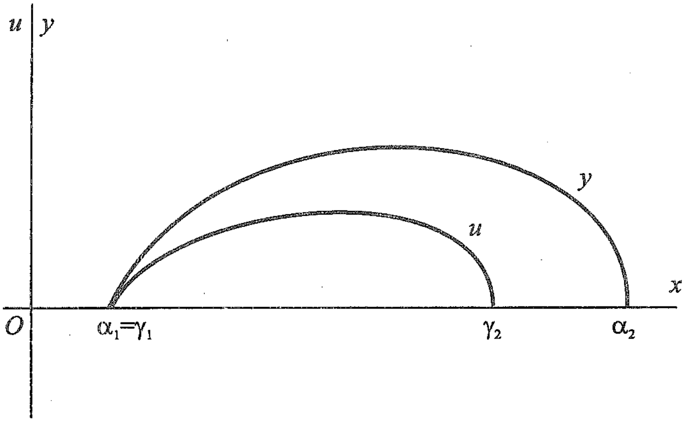
$$\Delta_2(z) = -N,$$
$$\Delta_2(u) = -M,$$

и пошто је α_1 заједничка нула трију функција z, y, u, према напред доказаном ставу промењива x, растући, почевши од $x = \alpha_1$, најпре ће наићи на једну нулу α_2 функције y, па тек затим на једну нулу β_2 функције z (сл. 7 и 8), тако да ће бити $\alpha_2 < \beta_2$. Па пошто је прва нула функције z, која долази после α_1, одређена једначином

$$(x-\alpha_1)\sqrt{N} = \pi,$$



Сл. 7



Сл. 8

биће

$$\beta_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{\sqrt{N}},$$

па, дакле

$$\alpha_2 < \alpha_1 + \frac{\pi}{\sqrt{N}},$$

и према томе

$$\alpha_2 - \alpha_1 < \frac{\pi}{\sqrt{N}}. \tag{131}$$

Тако исто, x растући, почевши од $x = \alpha_1$, најпре ће наићи на једну нулу γ_2 функције u, па тек за тим на једну нулу α_2 функције y, тако да ће бити $\alpha_2 > \gamma_2$. Па пошто је

$$\gamma_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{\sqrt{M}},$$

биће

$$\alpha_2 - \alpha_1 > \frac{\pi}{\sqrt{M}}, \tag{132}$$

што према (131) показује да је

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} < \alpha_2 - \alpha_1 < \frac{\pi}{\sqrt{N}}, \tag{133}$$

а из тога следује овај став:

Растојање између две узастопне нуле функције y, *чији извод* Δ_2(y) *лежи између два негативна броја* –M *и* –N, *налази се по својој дужини између два броја*

$$(134)\qquad \frac{\pi}{\sqrt{M}} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{\sqrt{N}}.$$

Из тога се добија образац

$$(135)\qquad \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{\sqrt{H}},$$

где је H једна од вредности које добија извод $\Delta_2(y)$ кад x расте од једнога до другога краја размака (a, b). А обрасцу се може дати и овај облик

$$(136\qquad \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{\sqrt{N+\theta(M-N)}},$$

где је θ један број који лежи између 0 и 1.

Образац (135) даје могућност да се проучи распоред нула функције y у посматраноме размаку (a, b). У томе погледу се долази до следећих резултата.

Поделимо размак (a, b) на подразмаке

$$(a, a_1),\ (a_1, a_2),\ (a_2, a_3), \ldots$$

такве, да је функција $\Delta_2(y)$ у свакоме од њих *монотона*. Уочимо најпре један размак $(a_{k-1,}a_k)$ у коме функција

$$-\Delta_2(y) = f(x),$$

монотоно *расте*, па нека су

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

узастопне нуле одговарајуће функције y. Према обрасцу (135) биће

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{\sqrt{f(\lambda_1)}},$$
$$\alpha_3 - \alpha_2 = \frac{\pi}{\sqrt{f(\lambda_2)}},$$
$$\alpha_4 - \alpha_3 = \frac{\pi}{\sqrt{f(\lambda_3)}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

где су $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ такви бројеви да је

$$\alpha_1 < \lambda_1 < \alpha_2,$$
$$\alpha_2 < \lambda_2 < \alpha_3,$$
$$\alpha_3 < \lambda_3 < \alpha_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Пошто је у размаку $(a_{k-1,}a_k)$

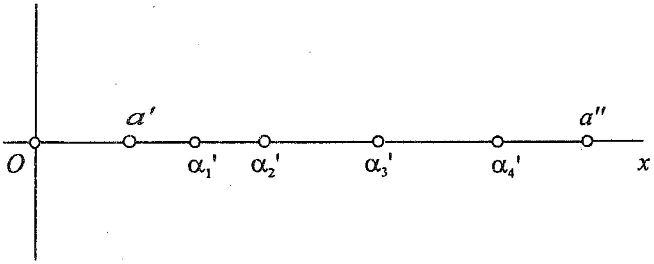
$$f(\lambda_1) < f(\lambda_2) < f(\lambda_3) < \ldots < M = f(a_k),$$

то ће бити и

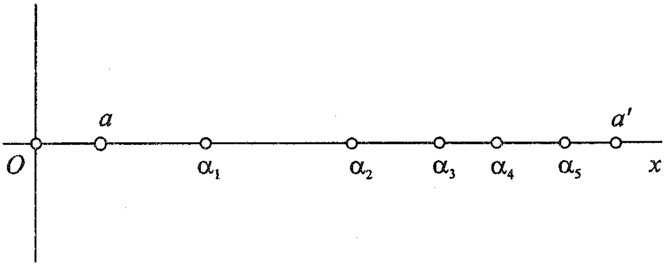
$$\alpha_2 - \alpha_1 > \alpha_3 - \alpha_2 > \alpha_4 - \alpha_3 > \ldots > \frac{\pi}{\sqrt{M}},$$

из чега се добија овај став:

Кад у једноме размаку вредности x *функција* $-\Delta_2(y)$ *монотоно расти, нуле се функције* y *од једног краја размака до другог све више згушњавају, али при томе њихово међусобно растојање никако не постаје мање од* $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$, *где* M *означује вредност* $-\Delta_2(y)$ *на задњем крају размака.*



Сл. 9



Сл. 10

Уочимо за тим један размак (a_{k-1}, a_k) у коме функција $-\Delta_2(y)$ монотоно *опада*. На исти начин као малочас долази се до неједнакости

$$\alpha_2 - \alpha_1 < \alpha_3 - \alpha_2 < \alpha_4 - \alpha_3 < \ldots < \frac{\pi}{\sqrt{N}},$$

што доводи до овога става:

Кад у једноме размаку вредности x *функција* $-\Delta_2(y)$ *монотоно опада, нуле функције у од једног краја размака до другог све се више разређују, али при томе њихово међусобно растојање никако не постаје веће од* $\frac{\pi}{\sqrt{N}}$, *где* N *означује вредност* $-\Delta_2(y)$ *на предњем крају размака.*

18. РАЗМАЦИ ВАРИЈАЦИЈА ФУНКЦИЈЕ y У ЗАВИСНОСТИ ОД $\Delta_2(y)$

Са знаком и вредностима извода $\Delta_2(y)$ стоје у зависности не само нуле функције y, већ и размаци у којима ће се кретати вредности y кад промењљива x варира у датоме размаку.

1. Уочимо најпре какав размак (a, b) у коме је извод

$$\Delta_2(y) = f(x)$$

непрестано *позитиван*, па међу функцијама y, што одговарају датој функцији $f(x)$, посматрајмо оне чији први извод y' има нула у (a, b), а таквих ће функција , за дато $f(x)$, имати бескрајно много, пошто општа функција x садржи линеарно две произвољне константе.

Нека је $x = x_0$ једна таква нула извода y'; она се очевидно мења од једне функције y, обухваћене општом функцијом, до друге. Пошто је

$$\frac{y''}{y} = f(x) > 0,$$

то y и y'' имају у (a, b) исти знак, што показује да функција y нема у томе размаку ни позитивних максимума, ни негативних минимума. Та вредност $x = x_0$ не може бити нула извода y'', јер би онда према једначини

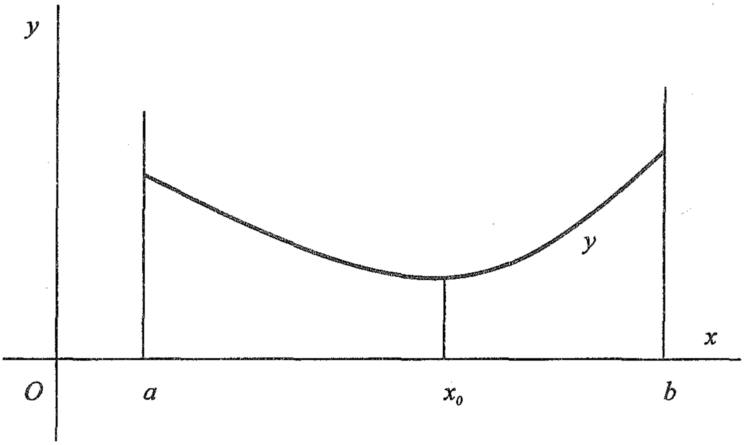
$$y'' = f(x)y \tag{137}$$

она била и нула функције y, па пошто је за њу и $y' = 0$, то би била вишеструка нула функције y, каквих, према ранијем, нема у размаку (a, b). Према томе:

1° Кад је вредност

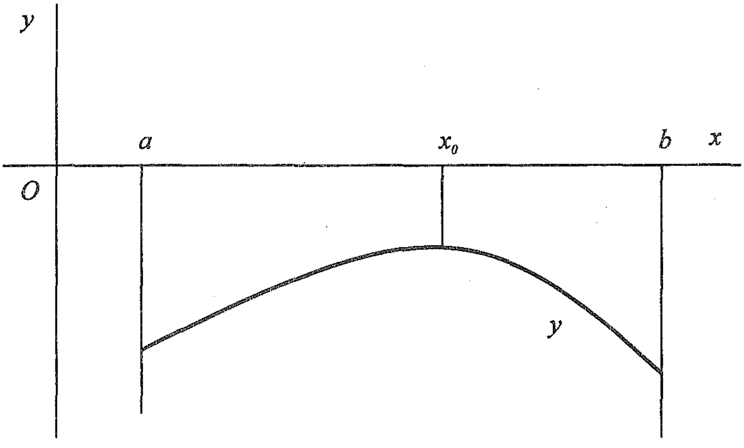
$$y = y_0 \quad \text{за} \quad x = x_0$$

позитивна, то ће бити један позитиван минимум функције y (сл. 11); за вредности x што леже између $x = a$ и $x = x_0$ функција y је *позитивна* и монотоно *опада*; за вредности x, што леже између $x = x_0$ и $x = b$, она је *позитивна* и монотоно *расти*;



Сл. 11

2° Кад је вредност $y = y_0$ *негативна*, то ће бити један негативан максимум функције y; за вредности x, што леже између $x = a$ и $x = x_0$ функција y је *негативна* и монотоно *расти*; за x између $x = x_0$ и $x = b$ она је *негативна* и монотоно *опада* (сл. 12).



Сл. 12

Из свега тога се види да производ yy' мења знак у размаку (a, b) само у тачки $x = x_0$. Кад се обе стране једначине (137) помноже са $y'dx$ и интеграле у границама x и x_0, где је

$$a < x < x_0,$$

а водећи рачуна о томе да је вредност y_0' за $x = x_0$ једнака нули, добија се да је

$$-\frac{y'^2}{2} = \int_x^{x_0} f(x)yy'dx$$

из чега, према теореми о средњим вредностима интеграла и пошто yy' не мења знак у размаку (x, x_0), излази да је

$$y'^2 = f(\xi)(y^2 - y_0^2),$$

где је ξ један број што лежи између x и x_0. Одатле је

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - y_0^2}} = dx\sqrt{f(\xi)},$$

па се интеграцијом и поновном применом теореме о средњим вредностима интеграла добија да је

(138) $$y = \frac{y_0}{2}(e^V + e^{-V}) = y_0 \mathrm{ch} V,$$

где је

(139) $$V = (x - x_0)\sqrt{f(\lambda)},$$

а λ означује један број што лежи између x и x_0.

Исто тако , кад се обе стране једначине (137) помноже са $y'dx$ и интеграле у границама x_0 и x, где је

$$x_0 < x < b,$$

добија се

$$\frac{y'^2}{2} = \int_{x_0}^{x} f(x)yy'dx,$$

а из те једначине се опет долази до једначина (138) и (139).

Отуда став:

Кад је у једноме размаку (a, b) *извод* $\Delta_2(y)$*непрестано позитиван, свака од бескрајно многих одговарајућих функција* y, *чији први извод*

y' *има нула у* (a, b), *може се за све вредности* x *у томе размаку написати у облику* (138) *и* (139).

А пошто yy', према малочас казаноме, не мења знак између x и x_0, има се такође овај став:

За све вредности x *у размаку* (a, b) *вредности функције* y *леже у размаку између*

$$y = \frac{y_0}{2}[e^{(x-x_0)\sqrt{N}} + e^{-(x-x_0)\sqrt{N}}] = y_0 \mathrm{ch}[(x-x_0)\sqrt{N}]$$

и

$$y = \frac{y_0}{2}[e^{(x-x_0)\sqrt{M}} + e^{-(x-x_0)\sqrt{M}}] = y_0 \mathrm{ch}[(x-x_0)\sqrt{M}],$$

где N *и* M *означују једну доњу и једну горњу границу вредности функције* f(x) *за вредности* x *што се налази између* x и x_0 (па према томе и између a и b).

II. Уочимо сад какав размак (a, b) у коме је извод

$$(140) \qquad \Delta_2(y) = f(x)$$

непрестано *негативан*. Тада, као што је напред показано, свака од одговарајућих функција y мења знак при свакоме проласку кроз нулу, и кад је размак (a, b) довољно простран, y је у њему *осцилаторна* функција променљиве x и *састоји се из полуталаса наизменично позитивних и негативних.*

Посматрајмо најпре један *позитиван* полуталас. Из једначине

$$(141) \qquad y'' = f(x)y$$

види се да је дуж тога полуталаса извод y'' непрестано негативан, тако да на њему y има само један максимум, и то y_0. Нека је $x = x_0$ вредност x за коју је тај максимум достигнут, па означимо са x_1 и x_2 вредности x што одговарају крајевима полуталаса.

Док x расте од x_1 до x_0, ордината y је непрестано позитивна и расти; кад x расти од x_0 до x_2, она је непрестано позитивна и опада. У оба размака (x_1, x_0) и (x_0, x_2) производ yy' не мења знак, остајући позитиван у првоме, а негативан у другоме размаку.

Потражимо најпре израз за y у размаку (x_1, x_0). Множећи обе стране једначине (141) са $y'dx$ и интегралећи у границама x и x_0, где је

$$x_1 < x < x_0,$$

добија се

$$-\frac{y_0'^2}{2} = \int_x^{x_0} f(x) yy' dx$$

што, применом теореме средњих вредности интеграла, даје

$$-\frac{y_0'^2}{2}=(y_0^2-y^2)\lambda,$$

где је λ вредност коју добија $f(x)$ за једну вредност x што се налази између x и x_0. Одатле је поновном интеграцијом и применом теореме средњих вредности

(142) $$y=y_0\cos[(x-x_0)\sqrt{L}],$$

где је L вредност коју добија функција $f(x)$ за једну вредност x што се налази између x и x_0, и то важи за све вредности x у размаку (x_1, x_2).

Потражимо затим израз за y у размаку (x_0, x_2). Множећи опет обе стране једначине (141) са $y'dx$ и интегралећи у границама x_0 и x, где је

$$x_0<x<x_2,$$

добија се

$$\frac{y'^2}{2}=\int_{x_0}^{x}f(x)yy'dx=(y^2-y_0^2)\mu,$$

где је μ вредност коју добија $-f(x)$ за једну вредност x што се налази између x_0 и x. Одатле се, на исти начин као малочас, добија једначина облика (142) која важи за све вредности x у размаку (x_0, x_2). Као што се, дакле, види, дуж целога позитивног полуталаса вредност y има за израз (142).

Посматрајмо сад један *негативан* полуталас. Извод y'' на њему је непрестано позитиван, према једначини (141), тако да y има на њему само један минимум, и то y_0. Нека је $x=x_0$ вредност за коју је тај минимум достигнут и нека су x_1 и x_2 вредности x што одговарају крајевима полуталаса.

Док x расти од x_1 до x_0, ордината y је непрестано негативна и опада; кад x расти од x_0 до x_2, она је непрестано негативна и расти. У свакоме од два размака (x_1, x_0) и (x_0, x_2) производ yy' задржава исти знак. Искоришћујући то, налази се, на исти начин као и за позитиван полуталас, да ће y опет дуж целога негативног полуталаса имати за израз (142). Отуда став:

За све вредности x *дуж ма кога полуталаса, позитивног или негативног, што се налази у посматраном размаку* (a, b), *вредност* y *се може изразити обрасцем*

(143) $$y=y_0\cos[(x-x_0)\sqrt{H}],$$

где је H *једна од вредности коју добија функција* −f(x) *између двеју крајњих тачака полуталаса.*

Цео полуталас се налази у области између двеју кривих

$$y = y_0 \cos[(x - x_0)\sqrt{H_1}],$$
$$y = y_0 \cos[(x - x_0)\sqrt{H_2}],$$

где су H_1 и H_2 једна доња и једна горња граница вредности $-f(x)$ кад се x налази између крајева полуталаса.

Пошто је $y = 0$ за крајеве $x = x_1$ и $x = x_2$ полуталаса, из (143) се дибија да је

$$(x_1 - x_0)\sqrt{H'} = -\frac{\pi}{2},$$
$$(x_2 - x_0)\sqrt{H''} = +\frac{\pi}{2},$$

где су H' и H'' вредности H што одговарају вредностима x_1 и x_2 променљиве x. Одатле је

$$x_1 = x_0 - \frac{\pi}{2\sqrt{H'}},$$
$$x_2 = x_0 + \frac{\pi}{2\sqrt{H''}},$$

па је, дакле

$$x_2 - x_1 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{H'}} + \frac{1}{\sqrt{H''}}\right).$$

Ако се са M и N означе, као и до сад, једна горња и једна доња граница вредности које добија $-f(x)$ кад се x налази у размаку (a, b), вредност

$$\frac{1}{\sqrt{H'}} + \frac{1}{\sqrt{H''}}$$

налазиће се између двеју вредности

$$(144) \qquad \frac{\pi}{\sqrt{M}} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{\sqrt{N}},$$

што доводи до става:

Дужина једнога, ма кога, полуталаса налази се у размаку између вредности (144).

То је, уосталом, у сагласности са оним што је напред нађено за међусобно растојање узастопних нула функције y. А из става следује непосредно и овај закључак:

Функција у има у размаку (a, b) *најмање онолико полуталаса колико има целих јединица у броју*

$$\frac{(b-a)\sqrt{N}}{\pi}-1,$$

а највише онолико колико има целих јединица у броју

$$\frac{(b-a)\sqrt{M}}{\pi}+2.$$

А то је такође у сагласности са ранијим ставом о броју нула функције y у размаку (a, b).

19. АСИМПТОТНО ПОНАШАЊЕ ФУНКЦИЈЕ y У ЗАВИСНОСТИ ОД $\Delta_n(y)$

Проучавајући асимптотно понашање интеграла биномне диференцијалне једначине

$$\frac{d^n y}{dx^n}+f(x)y=0 \tag{145}$$

за велике позитивне вредности x и претпостављајући:

1° да је функција $f(x)$ за такве вредности x непрестано *позитивна*, коначна, континуална, а да не тежи нули;

2° да су, опет за такве вредности x, функција y и њени изводи

$$y', y'', \ldots, y^{(n)}$$

такође коначни и континуални, Kneser[1] је дошао до ових резултата:

а) кад је број n паран, интеграл y је за велике позитивне вредности x осцилаторна функција, у томе смислу што она тада има реалних нула и осцилаторних прелазака из позитивног стања у негативно, и обратно, већих од сваког позитивног броја;

б) кад је број n непаран, y није осцилаторна функција; свака од функција

$$y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$$

---

[1] A. Kneser: *Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Diff. Gleichungen* (Math. Annalen, Bd. 42, 1893, S. 400–435).

је за велике позитивне вредности x непрестано позитивна или непрестано негативна, и то тако да су за

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

вредности $y^{(k)}$ и $y^{(k+1)}$ супротно означене; за $x = +\infty$ све те функције теже нули.

Примењено на релативни извод $\Delta_n(y)$, то непосредно доводи до овога става:

Кад је за велике позитивне вредности x *релативни извод* Δ_n(y) *коначна, континуална и непрестано негативна функција променљиве* x *и не тежи нули кад* x *бескрајно расти, онда:*

1° *за* n *парно, функција* y *је за такве вредности* x *осцилаторна, осцилујући бескрајно много пута око нуле;*

2° *за* n *непарно, функција није никад осцилаторна, а асимптотно и монотоно се приближује нули.*

Kneser је горе наведене резултате за једначину (145) уопштио и проширио, без икакве измене, и на случај кад је функција $f(x)$ остајући за велике вредности x непрестано коначна, континуална, таква да при бескрајном рашћењу променљиве x тежи нули, али да производ

$$x^{\alpha} f(x) \tag{146}$$

тежи коначној и од нуле различној позитивној граници за какву вредност α што лежи између 0 и $\frac{n}{2}$. Према томе:

Кад је за велике позитивне вредности x *производ* $x^{\alpha}\Delta_n$(y) *коначна, континуална и негативна функција променљиве* x *која при бескрајном рашћењу те променљиве тежи коначној и од нуле различној граници за какву позитивну вредност* α *мању од* $\frac{n}{2}$, *важиће неизмењене одредбе* 1° *и* 2° *горњега става.*

За случај $n = 2$, тј. за биномну једначину другога реда

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)y = 0, \tag{147}$$

Kneser је дошао до потпунијих резултата, који се могу исказати у овоме облику:

Кад је функција $f(x)$ за велике вредности x непрестано *негативна*, једначина (147) нема ни један интеграл осцилаторан за такве вредности x; сваки интеграл који је, као и његов први и други извод, коначна и континуална функција за те вредности x, монотоно расти и тежи граници $+\infty$, или монотоно опада и тежи граници $-\infty$.

Кад је функција $f(x)$ за велике позитивне вредности x непрестано *позитивна*, а не тежи нули, сваки интеграл је осцилаторан, осцилујући бескрајно много пута око нуле.

Из тога се непосредно могу извести закључци о асимптотном понашању функције y кад се зна понашање њеног релативног извода $\Delta_2(y)$ за велике вредности x.

А из онога што је напред казано о распореду нула функције y у зависности од $\Delta_2(y)$, изводе се још и ови резултати:

1° Претпоставимо најпре да позитивна функција $-\Delta_2(y)$, почевши од једне довољно велике вредности $x = h$, непрестано и бескрајно *расти*. Пошто је тада $M = \infty$, напред доказани став о распореду нула функције y доводи до закључка:

У размаку (h, ∞) *функција* y *је осцилаторна, са бескрајно много осцилација око нуле, које се осцилације све више згушњавају и чије међусобно растојање тежи нули.*

2° Претпоставимо да позитивна функција $-\Delta_2(y)$, почевши од $x = h$, непрестано *расти*, али да при томе тежи коначној и од нуле различној граници ρ. Пошто је тада $M = \rho$, поменути став доводи до закључка:

У размаку (h, ∞) *функција* y *је осцилаторна; осцилације се све више згушњавају, али при томе њихово међусобно растојање никако не постаје мање од* $\dfrac{\pi}{\sqrt{\rho}}$.

3° Ако позитивна функција $-\Delta_2(y)$, почевши од $x = h$, непрестано *опада*, али не тежећи при томе нули, тако да има за асимптоту једну праву $y = \rho'$, биће $N = \rho'$, што доводи до закључка:

У размаку (h, ∞) *функција* y *је осцилаторна; осцилације се све више разређују, али при томе њихово међусобно растојање никако не постаје веће од* $\dfrac{\pi}{\sqrt{\rho'}}$.

4° Кад позитивна функција $-\Delta_2(y)$, почевши од $x = h$, непрестано *опада*, тежећи при томе нули као граничној вредности, поменути став не доводи ни до каквог одређенијег закључка, јер је тада $N = 0$ и растојање између узастопних нула функције y постаје бескрајно велико. Али се тада могу добити одређенији закључци помоћу особина позитивне функције

$$-x^2\Delta_2(y) = \varphi(x).$$

Претпоставимо, нпр. да функција φ, почевши од $x = h$, непрестано и бескрајно расти. Тада ће за довољно велике вредности x бити непрестано

$$-x^2\Delta_2(y) > \frac{1}{4},$$

па, дакле

$$-\Delta_2(y) > \frac{1}{4x^2}.$$

Ако се тада за компаративни извод $\Delta_2(u)$ узме

$$\Delta_2(u) = \frac{1}{4x^2},$$

према Sturm-овом ставу функција y ће у размаку (h, ∞) имати највише онолико нула, колико их у томе размаку буде имала ма која од одговарајућих функција u (или можда још једну или две нуле више). Па како се за u може узети функција

$$u = \sqrt{x},$$

то *функција* y *при бескрајном рашћењу променљиве* x *није осцилаторна.*

Исти ће случај, очевидно, бити и онда кад функција φ не расти бескрајно, али за $x = \infty$ тежи каквој граничној вредности већој од $\frac{1}{4}$.

Претпоставимо сад да функција φ, почевши од $x = h$, непрестано расти, али да при томе рашћењу остаје непрестано мања од $\frac{1}{4}$. Тада увек постоји један позитиван, коначан и од нуле различан број ε такав да је за довољно велике вредности x непрестано

$$\varphi(x) = -x^2\Delta_2(y) < \frac{1}{4} + \varepsilon.$$

Па ако се за компаративни извод $\Delta_2(z)$ узме

$$\Delta_2(z) = \frac{\frac{1}{4}+\varepsilon}{x^2},$$

функција y ће у размаку (h, ∞) имати најмање онолико нула колико их у томе размаку има једна ма која функција z што одговара таквоме $\Delta_2(z)$. А како се за z може узети функција

$$z = \sqrt{x} \cdot \cos(\sqrt{\varepsilon} \log x),$$

која има бескрајно много нула датих обрасцем

$$\beta_k = e^{\frac{2k+1}{2\sqrt{\varepsilon}}\pi}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

које се све више разређују кад k расти, долази се до закључка да је *функција* у *за велике позитивне вредности* x *осцилаторна и да у размаку* (h, ∞) *има бескрајно много осцилација које се све више, и до бескрајности, разређују.*

У погледу асимптотног понашања функције y, у зависности од њеног другог релативног извода, од интереса је још и овај став, који проистиче из резултата до којих је дошао Кнесер[1] у својим испитивањима о асимптотном понашању интеграла линеарне хомогене диференцијалне једначине другога реда:

Кад год $\Delta_2(y)$ има вредност $x = 0$ као пол, или као есенцијални сингуларитет, тако да се тај израз може у близини тачке $x = 0$ развити у ред

$$\Delta_2(y) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots,$$

где је коефицијенат a_0 позитиван, *функција* у *при бескрајном рашћењу променљиве* x *у позитивном смислу и сама бескрајно расти истом брзином као и функција*

$$u = x^{\beta} e^{\alpha x},$$

где су α *и* β *две позитивне константе*

$$\alpha = a_0^2, \quad \beta = \frac{a_1}{2a_0},$$

а количник $\frac{y}{u}$ *тежи тада граници* a_0.

20. ОСОБИНЕ ИЗВОДА y' У ЗАВИСНОСТИ ОД $\Delta_n(y)$

Поједине особине извода

$$y', \ y'', \ y''', \ldots$$

---

[1] A. Kneser: *Asymptotische Darstellungen bei linearen Diff. Gleichungen* (Math. Ann., 1897, S. 383–399).

функције y последице су особина саме те функције, за које је у овоме што претходи показана зависност од релативних извода $\Delta_n(y)$.

Тако, нпр. Rolle-ова теорема примењена на y, а у вези са ранијим ставом о броју нула те функције у посматраном размаку (a, b), доводи до резултата:

Кад је други релативни извод $\Delta_2(\mathrm{y})$ *коначан, континуалан и негативан у размаку* (a, b), *извод* y' *има у томе размаку најмање онолико нула колико има целих јединица у броју*

$$\frac{(b-a)\sqrt{N}}{\pi}-1,$$

где N *означује једну доњу границу израза* $-\Delta_2(\mathrm{y})$ *у томе размаку.*

Пошто је

$$y''=y\Delta_2(y),$$

то се, кад је $\Delta_2(y)$ дата функција $f(x)$ променљиве x, особине извода y'' доведене у непосредну везу са особином функције

$$\varphi(x)=y\Delta_2(y),$$

па се из особина двеју функција

$$y \quad \text{и} \quad y\Delta_2(y),$$

а помоћу ранијих ставова, изводе закључци о особинама извода y''.

Али се испитивање извода y' *може довести у зависност са другим релативним изводом* Δ_2 *једне просте комбинације функције* y, на коју се тада може непосредно применити оно што је напред нађено о везама између особина извода Δ_n и одговарајуће му примитивне функције.

То је основано на овој особини извода Δ_2:

Кад функција y *има за други релативни извод функцију* f(x), *функција*

$$u=\frac{y'}{\sqrt{f(x)}}$$

има за такав извод израз

$$\Delta_2(u)=\Delta_2\left(\frac{y'}{\sqrt{f}}\right)=f^2+\frac{3}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2-\frac{1}{4}\frac{f''}{f}. \tag{148}$$

Јер кад се у диференцијалној једначини

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)y$$

изврши смена

(149) $$y' = u\sqrt{f(x)},$$

функција *u* је интеграл једначине

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x)u,$$

где је функција φ једнака изразу на десној страни једначине (148).

Према обрасцу (149) извод y' има као своје нуле:

1° нуле функције $\varphi(x)$ које су сталне и могу се увек знати, па посматрати размаке (a, b) који не садрже ни једну од тих нула;

2° нуле функције *u*, које се мењају од једне функције *y* до друге и које су у зависности од знака и вредности експлицитно познате функције $\varphi(x)$, на напред показани начин.

Тако, ако је функција φ у размаку (a, b) непрестано *позитивна*, функција *u*, па, дакле, и функција y', могу у (a, b) имати највише једну нулу; *y* може у томе размаку имати највише један екстремум (максимум или минимум).

Ако је функција φ у (a, b) непрестано *негативна*, број у (a, b) садржаних нула извода y' зависиће од најмање и највеће вредности које добија функција $-\varphi$ у томе размаку.

Применом предњих ставова о распореду нула у асимптотном понашању функције у зависности од њеног извода Δ_2, на комбинацију *u* функције *y*, имали би се закључци о сличним појединостима везаним за извод y'.

21. ОСОБИНЕ ФУНКЦИЈА ЧИЈИ ИЗВОД Δ_2 САДРЖИ ЛИНЕАРНО ЈЕДАН ПРОМЕНЉИВ ПАРАМЕТАР

Нека је

(150) $$-\Delta_2(y) = \lambda f_1(x) + f_2(x),$$

где је λ какав променљив параметар, и нека је

$$y = C_1y_1 + C_2y_2$$

најопштија функција што одговара таквоме изводу $\Delta_2(y)$, где су y_1 и y_2 две ма које функције *y* што одговарају таквоме изводу, а C_1 и C_2 произвољне константе.

Нека су h и k две позитивне, такође произвољно узете константе, па изаберимо C_1 и C_2 тако да буде

$$\frac{dy}{dx} - hy = 0 \quad \text{за} \quad x = a,$$

$$\frac{dy}{dx} + ky = 0 \quad \text{за} \quad x = b.$$

Константе C_1 и C_2 тада су одређене једначинама

$$\begin{aligned} C_1U_1 + C_2U_2 &= 0, \\ C_1V_1 + C_2V_2 &= 0, \end{aligned} \tag{151}$$

где је

$$U_1 = \frac{dy_1}{dx} - hy_1 \quad \text{за} \quad x = a,$$

$$U_2 = \frac{dy_2}{dx} - hy_2 \quad \text{за} \quad x = b,$$

$$V_1 = \frac{dy_1}{dx} + ky_1 \quad \text{за} \quad x = a,$$

$$V_2 = \frac{dy_2}{dx} + ky_2 \quad \text{за} \quad x = b.$$

Да би те две једначине имале решења по C_1 и C_2 , потребно је и довољно да буде

$$U_1V_2 - U_2V_1 = 0. \tag{152}$$

Лева страна ове једначине је одређена функција параметра λ, вредности a и b, и произвољно изабраних констаната h и k. Ако су константе a, b, h, k једном изабране и утврђене, онда се једначина (150) своди на извесну једначину

$$\Phi(\lambda) = 0 \tag{153}$$

и да би једначине (151) имале решења по C_1 и C_2 , потребно је и довољно да параметар λ има вредност једнога ма кога корена једначине (153) по λ.

Сваки релативни извод (150) има своју једначину (153) што јој одговара и која ће бити названа *изводницом* посматраног извода $\Delta_2(y)$. Облик изводнице зависи од облика функција f_1 и f_2 што фигуришу у изразу за $\Delta_2(y)$. Тако, за најпростији случај, кад је

$$f_1(x) = \text{const.} = \alpha,$$
$$f_2(x) = \text{const.} = \beta,$$

тј. за релативни извод

$$\Delta_2(y) = -(\alpha\lambda + \beta)$$

за које је

$$y_1 = \sin\gamma x,$$
$$y_2 = \cos\gamma x,$$

где је

$$\gamma = \sqrt{\alpha\lambda + \beta},$$

изводница ће бити једначина

$$\operatorname{tang}\,[(b-a)\sqrt{\alpha\lambda + \beta}\,] - \frac{(k+h)\sqrt{\alpha\lambda + \beta}}{hk + \beta + \alpha\lambda} = 0.$$

У случају кад је

$$f_1(x) = \frac{m}{x^2}, \qquad f_2(x) = \frac{n}{x^2},$$

тј. за релативни извод

$$\Delta_2(y) = \frac{n - \lambda m}{x^2},$$

за који је

$$y_1 = \sqrt{x}\,\sin(p\log x),$$
$$y_2 = \sqrt{x}\,\cos(p\log x),$$

где је

$$p = \frac{1}{2}\sqrt{4(m\lambda - n) - 1},$$

изводница ће бити облика

$$\operatorname{tang}\,[\alpha\sqrt{4(m\lambda - n) - 1}\,] - \frac{\beta\sqrt{4(m\lambda - n) - 1}}{\gamma\lambda - \delta} = 0,$$

где су α, β, γ, δ подесно изабране константе, итд.

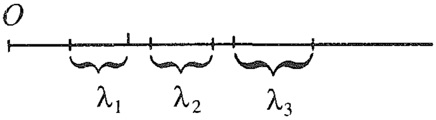
У теорији хомогених линеарних диференцијалних једначина другога реда познате су особине једначина изводница[1] и ставови о тим особинама, примењени на извод $\Delta_2(y)$, доводе до ових резултата:

---

[1] Sturm: *Mémoire sur les équations linéaires du second ordre* i *Mémoire sur une classe d'équations à différences partielles* (Journal de math. pures et appliquées, t. I, p. 160 et p. 373).

1. Кад је у једноме размаку (a, b) променљиве x функција $f_1(x)$ позитивна, а функција $f_2(x)$ негативна, изводница има бескрајно много корена, који су сви реални, позитивни и неједнаки.

2. Кад се пусти да h и k варирају од 0 до ∞, ти се корени мењају, али сваки од њих само у одређеним границама; размак у коме варира један такав корен никада се, ни потпуно ни делимично, не поклапа са размаком варијација кога другог корена. За време док h расте од 0 до ∞, а k остаје стално, или док k расте, а h остаје стално, или кад обе вредности једновремено расту, корени изводнице такође сви расту, и то сваки у своме размаку.



Сл. 13

3. Ако функција $f_2(x)$ није непрестано негативна у размаку (a, b), а међутим је функција $f_1(x)$ у њему непрестано позитивна, изводница има бескрајно много реалних позитивних корена и ови су сви неједнаки, али поред тога може имати још и негативних корена. Број ових последњих увек је ограничен и сви се они налазе у размаку између нуле и најмање вредности коју добија количник

$$\varphi(x) = \frac{f_2(x)}{f_1(x)}$$

за време док x расте од a до b.

Означимо са

$$\lambda_1, \ \lambda_2, \ \lambda_3, \ldots$$

узастопне корене изводнице

$$\Phi(\lambda) = 0$$

поређане по реду њихових величина. Сменимо у изразу (150) за други релативни извод $\Delta_2(y)$ параметар λ узастопце овим коренима и означимо уопште са

$$(154) \qquad y(x, \lambda_u)$$

функцију y што одговара вредности $\lambda = \lambda_n$ параметра и одговарајућем изводу Δ_2.

Свака таква најопштија функција садржи као чинилац једну произвољну константу. Јер најопштија функција y што одговара датоме изразу (150) је облика

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2;$$

корен $\lambda = \lambda_n$ изабран је, према самој дефиницији изводнице, тако да две једначине (151) буду једновремено задовољене једном истом вредношћу $\lambda = \lambda_n$, па ма какве биле константе C_1 и C_2. Из једне од тих двеју једначина може се израчунати једна од констаната C_1 и C_2 помоћу друге која остаје произвољна и која ће се тада јавити у општој функцији (154) као чинилац. И тада:

4. Функција $y(x, \lambda_1)$ никако не мења знак у размаку (a, b); функција $y(x, \lambda_2)$ постаје једнака нули и мења знак једанпут у томе размаку; функција $y(x, \lambda_3)$ постаје једнака нули и мења знак два пута, и уопште, функција $y(x, \lambda_n)$ постаје једнака нули и мења знак $(n - 1)$ пута у томе размаку.

5. Једина нула функције $y(x, \lambda_2)$ налази се између јединих двеју нула функције $y(x, \lambda_3)$ у размаку (a, b), а уопште узастопне нуле двеју функција

$$y(x, \lambda_n) \quad \text{и} \quad y(x, \lambda_{n+1}),$$

што се налази у (a, b), раздвајају се међусобно, а кад x расте, почевши од $x = a$, прво наилази на нулу функције $y(x, \lambda_n)$, па затим на нулу функције $y(x, \lambda_{n+1})$.

6. Ако се уочи какав подразмак (a', b') обухваћен посматраним размаком (a, b), функција $y(x, \lambda_{n+p})$ може у (a', b') имати највише p пута више нула него функција $y(x, \lambda_n)$; између две ма које узастопне нуле функције $y(x, \lambda_n)$ не може се налазити више од p нула функције $y(x, \lambda_{n+p})$.

7. Кад се пусти да константа k расте, нуле функције $y(x, \lambda_n)$ постају све мање; напротив, кад h расте, нуле постају све веће. Кад h расте, а k опада, те нуле расту; напротив, кад h опада, а k расте, оне опадају.

8. Ако је у размаку (a, b) непрестано

$$\lambda f_1 + f_2 > 0 \tag{155}$$

за позитивне вредности параметра λ, функција $y(x, \lambda_1)$ може у томе размаку имати само један екстремум (максимум или минимум); функција $y(x, \lambda_2)$ има један максимум и један минимум између којих она постаје једнака нули и мења знак: екстремум функције $y(x, \lambda_1)$ лежи тада између ова два екстремума функције $y(x, \lambda_2)$. Функција $y(x, \lambda_3)$ има два максимума и један минимум (или два минимума и један максимум), између којих она има две своје нуле; екстремуми функције $y(x, \lambda_2)$ налазе се између узастопних екстремума функције $y(x, \lambda_3)$ итд. Кад k расте, а h остаје стално или опада, вредности x за које

$y(x, \lambda_n)$ достиже своје екстремуме, постају све мање; напротив, те вредности постају све веће кад h расте а k остаје стално или опада.

9. Заменимо у изразу (150) извода $\Delta_2(y)$ функције f_1 и f_2 другим двема функцијама φ_1 и φ_2 променљиве x, таквим, да је у размаку (a, b) вредности x непрестано

$$\varphi_1(x) > 0, \quad \varphi_2(x) < 0, \tag{156}$$

па нека је

$$\Psi(\mu) = 0 \tag{157}$$

изводница новога израза

$$\Delta_2(z) = \mu\varphi_1(x) + \varphi_2(x), \tag{158}$$

где је μ променљив параметар. Означимо са

$$\mu_1, \ \mu_2, \ \mu_3, \ldots$$

узастопне корене једначине (157), а са

$$z(x, \mu_n)$$

општу функцију z што одговара изводу (158) за $\mu = \mu_n$. Тада:

Ако су функције φ_1 и φ_2 такве, да је у размаку (a, b) непрестано

$$\lambda\varphi_1 - \varphi_2 \geq \lambda f_1 - f_2,$$

или, што је исто

$$\lambda(\varphi_1 - f_1) - (\varphi_2 - f_2) \geq 0$$

за све позитивне вредности параметра λ, корени μ_n биће мањи од корена λ_n истога ранга, а нуле функције $z(x, \mu_n)$ биће веће од нула истога ранга функције $y(x, \lambda_n)$. То исто важи и за вредности x за које функције z и y достижу своје максимуме и минимуме.

ЧЕТВРТИ ОДЕЉАК

АНАЛИТИЧКЕ ПРИМЕНЕ АЛГОРИТМА Δ_n

22. ТРАНСФОРМАЦИЈА И ИНТЕГРАЦИЈА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПОМОЋУ АЛГОРИТМА Δ_n

За поједине општије типове диференцијалних једначина особине алгоритма Δ_n доводе до трансформација таквих једначина у друге које, или су нижега реда од првобитне, или потпадају под коју од класа интеграбилних једначина.

Овде ће бити наведено неколико таквих типова.

Први тип: једначине хомогене по непознатој функцији и њеним изводима. Таква једначина

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{159}$$

хомогена по

$$y, y', y'', \dots, y^{(n)}, \tag{160}$$

подељена извесним степеном функције y, постаје

$$F(x, 1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n) = 0. \tag{161}$$

Према особинама алгоритма Δ_k овај се изражава као полином по елементима

$$\Delta_1, \Delta_1', \Delta_1'', \dots, \Delta_1^{(k-1)} \tag{162}$$

и према томе се једначина (159) своди на једну једначину

$$\Phi(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}) = 0 \tag{163}$$

$(n-1)$-ог реда по новој непознатој функцији

$$u = \Delta_1(y) = \frac{y'}{y}. \tag{164}$$

Свакоме интегралу u једначине (163) одговара по један интеграл

$$y = e^{\int u dx}$$

једначине (159).

Најпростији тип једначина (159) је тип линеарних хомогених диференцијалних једначина

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0,$$

које се деобом са y претварају у

$$\Delta_n + p_1 \Delta_{n-1} + \ldots + p_{n-1} \Delta_1 + p_n = 0,$$

и помоћу ранијих образаца

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= \Delta_1' + \Delta_1^2, \\
\Delta_3 &= \Delta_1'' + 3\Delta_1'\Delta_1 + \Delta_1^3, \\
\Delta_4 &= \Delta_1''' + 4\Delta_1''\Delta_1 + 3\Delta_1'^{2} + 6\Delta_1'\Delta_1^2 + \Delta_1^4, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

своде на једначину $(n-1)$-ог реда (163).

Тако се, нпр. једначина другога реда

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0,$$

своди на Riccati-еву једначину првога реда

$$u' + u^2 + p_1 u + p_2 = 0.$$

Једначина трећега реда

$$y''' + p_1 y'' + p_2 y' + p_3 y = 0,$$

своди се на једначину другога реда

$$u'' + (3u + p_2)u' + u^3 + p_1 u^2 + p_2 u + p_3 = 0.$$

Други тип: једначине (159) које не садрже x, а хомогене су по елементима

$$y', \ \Delta_1(y'), \ \Delta_1(y''), \ \Delta_1(y'''), \ldots$$

Кад се у таквој једначини стави да је

$$y' = p,$$

биће

$$y'' = p\frac{dp}{dy},$$

$$y''' = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

па се једначина (159) претвара у другу која ће бити (n – 1)-ог реда. Кад је ова интеграљена, интеграл y добија се из интеграла p помоћу једне квадратуре, према обрасцу

$$dx = \frac{dy}{p}.$$

Трећи тип: једначине (159) такве, да кад се изврши ограничен низ узастопних смена

$$\begin{aligned} u_1 &= \Delta_1(y), \\ u_2 &= \Delta_1(u_1), \\ u_3 &= \Delta_1(u_2), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ u_p &= \Delta_1(u_{p-1}) \end{aligned} \tag{165}$$

тако добијени трансформисани низ једначина је такав да је:

1° првобитна једначина (159) хомогена по елементима (160);

2° једначина са новом функцијом u_1 хомогена по

$$u_1, u_1', u_1'', \dots, u_1^{(n-1)};$$

3° једначина са новом функцијом u_2 хомогена по

$$u_2, u_2', u_2'', \dots, u_2^{(n-2)};$$

4° и уопште, једначина са непознатом функцијом u_k хомогена по

$$u_k, u_k', u_k'', \dots, u_k^{(n-k)}, \quad (k = 1, 2, \dots, p).$$

Ми ћемо сматрати да првобитна једначина (159) има *хомогеност реда* (p + 1) кад су ови услови испуњени за све вредности позитивног целог броја k од $k = 1$ до $k = p$. И онда се има овај став што следује из особине једначина првога типа:

Свака диференцијална једначина

$$(166) \qquad F\,(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

n *тог реда, која има хомогеност* (p + 1)-*ог реда, своди се на другу једначину* (n – p – 1)-*ог реда.*

Кад је познат интеграл u_p оне последње једначине или који од интеграла $u_1, u_2, u_3, \ldots$, интеграл y једначине (166) биће одређен обрасцима

$$(167) \qquad y = C_1 e^{\int u_1 dx} = C_1 e^{C_2 e^{\int u_2 dx}} = C_1 e^{C_2 e^{C_3 e^{\int u_3 dx}}} = \ldots$$

Свака диференцијална једначина (166) n-*тог реда, која има хомогеност* (n – 2)-*ог реда, своди се низом трансформација* (165) *на једну једначину првога реда.*

А из обрасца (167) се види и ово:

Кад је ред хомогености једначине (166) *већи од* 2, *општи интеграл те једначине садржи најмање* (p – 1) *интеграционих констаната које, ма колика била произвољност са којом се оне могу бирати, никад не улазе алгебарски у састав тога интеграла.*

Те константе су $C_2, C_3, \ldots, C_p$ у обрасцима (167).

Приметимо још и то да једна једначина хомогена по елементима

$$(168) \qquad \Delta_1, \Delta_1', \Delta_1'', \ldots$$

увек је хомогена и по елементима

$$(169) \qquad y, \ y', \ y'', \ldots,$$

али да обрнуто тврђење није тачно: једначина може бити хомогена по елементима (169), а да то не буде по елементима (168).

Тако, нпр. једначина

$$f(x)\,yy' + \varphi(x)\,yy'' - \varphi(x)\,y'^2 = 0,$$

која се своди на облик

$$f(x)\,\Delta_1(y) + \varphi(x)\,\Delta_1'(y) = 0,$$

хомогена је и по (169) и по (168).

Напротив једначина

$$f(x)\,y'' + \varphi(x)\,y' + \psi(x)\,y = 0,$$

која се своди на облик

$$f(x)\,\Delta_1'(y)+f(x)\,\Delta_1^2(y)+\varphi(x)\,\Delta_1(y)+\psi(x)=0,$$

хомогена је по (169), али није по (168).

Четврти тип: једначине другога реда, облика

$$y''+y'^2+f(x,y)=0. \tag{170}$$

Кад функција f не садржи y, једначина се сменом

$$y=\int z dx$$

своди на Riccati-еву једначину првога реда.

Уочимо, међу једначинама (170) оне за које се подесним избором функције $f(x)$ може учинити да израз

$$y+\log[-\varphi(x)+f(x,y)]$$

не садржи y. То је случај са функцијама f облика

$$f(x,y)=\varphi(x)+\lambda(x)\,e^{-y}, \tag{171}$$

где су φ и λ ма какве функције променљиве x.

За једначину

$$y''+y'^2+\varphi+\lambda e^{-y}=0 \tag{172}$$

може се тада доказати овај став:

Нека је

$$\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\dots,\lambda_n,\quad (\lambda_0=0), \tag{173}$$

један произвољан низ функција независно променљиве количине x, а y_k један партикуларан интеграл једначине

$$y''+y'^2+\varphi+\lambda_k e^{-y}=0. \tag{174}$$

Кад се зна један систем

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\dots,y_n$$

партикуларних интеграла једначина (174) *за*

$$k=0,1,2,\dots,n$$

знаће се и општи интеграл једначине

$$(175) \qquad y'' + y'^2 + \varphi + (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)\, e^{-y} = 0$$

и то помоћу две квадратуре.

Јер, кад се у једначини (175) изврши смена

$$y = \log u, \quad \text{тј.} \quad u = e^y,$$

биће

$$y'' + y'^2 = \Delta_2(u),$$

па једначина постаје

$$\Delta_2(u) + \varphi + \frac{\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n}{u} = 0,$$

тј.

$$u'' + \varphi u + (\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n) = 0.$$

Нека је

$$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$$

један систем партикуларних интеграла линеарних једначина

$$(176) \qquad u'' + \varphi u + \lambda_k = 0$$

за

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Ти ће интеграли бити

$$u_0 = e^{\gamma_0}, \quad u_1 = e^{\gamma_1}, \ldots, u_n = e^{\gamma_n}.$$

Знајући u_0, знаће се и општи интеграл U једначине

$$u'' + \varphi u = 0,$$

који ће бити одређен обрасцем

$$U = C_1 u_0 + C_2 u_0 \int \frac{dx}{u_0^2} = C_1 e^{\gamma_0} + C_2 e^{\gamma_0} \int \frac{dx}{[\int e^{\gamma_0} dx]^2}.$$

Тако исто, знајући партикуларне интеграле u_k једначине (176), знаће се и један партикуларни интеграл једначине (175) и то ће бити

$$V = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = e^{\gamma_1} + e^{\gamma_2} + \ldots + e^{\gamma_n}.$$

Према томе, општи интеграл једначине (175) биће

$$y = \log(U + V).$$

За једначину (175) вреди навести још и овај став:

Постоје такве специјалне функције

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \tag{177}$$

промењиве x, *које остају исте за све једначине* (166) и које имају ову интересантну особину:

Кад је за једну ма коју такву функцију μ_k *познат један партикуларни интеграл једначине*

$$y'' + y'^2 + \varphi + \mu_k e^{-y} = 0, \tag{178}$$

знаће се и један партикуларан интеграл једначине

$$y'' + y'^2 + \varphi + \psi e^{-y} = 0, \tag{179}$$

где је ψ *ма каква функција променљиве* x.

Став је последица једне теореме доказане у моме ранијем раду о линеарним диференцијалним једначинама[1] и која гласи:

Ако се са Φ означи израз

$$\Phi = y^{(n)} + f_1 y^{(n-1)} + \ldots + f_{n-1} y' + f_n y,$$

где су $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ма какве функције променљиве x, постоје специјалне функције (177) те променљиве, које остају исте за ма какав израз Φ и које имају ову особину:

Кад се за једну такву функцију μ_k зна један партикуларан интеграл једначине

$$\Phi = \mu_k(x), \tag{180}$$

из њега се може извести један партикуларан интеграл једначине

$$\Phi = \psi(x),$$

где је ψ ма каква реална аналитичка функција променљиве x.

Такве би, нпр. специјалне функције μ_k биле

$$\mu_1 = \frac{x}{1 - 2ax + x^2},$$

$$\mu_2 = \frac{1 - x}{1 - 2ax + x^2},$$

$$\mu_3 = \log(1 - 2ax + x^2),$$

. . . .

---

[1] Мих. Петровић: *Једна особина линеарних диференцијалних једначина* (Глас Срп. Кр. Акад. књ. XCIX. 1922).

где је a какав реални параметар.

Теорема обухвата једначину (180) на коју се наведеном сменом своди једначина (179) и за коју је

$$\Phi = y'' + \varphi y,$$

па је наведена особина једначине (179) непосредна последица теореме о линеарним једначинама.

23. ТЕОРЕМА О RICCATI-ЕВОЈ ЈЕДНАЧИНИ

Најопштија Riccati-ева једначина

$$\frac{dy}{dx} + \varphi_1 y^2 + \varphi_2 y + \varphi_3 = 0, \tag{181}$$

где су $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ функције независно променљиве количине x, своди се, сменом

$$\begin{aligned} y &= z - \frac{\varphi_2}{2\varphi_1}, \\ t &= \int \varphi_1 dx, \end{aligned} \tag{182}$$

на једначину облика

$$y' = y^2 + f(x), \tag{183}$$

а за ову једначину може се доказати теорема:

За сваку интеграбилну једначину (183) *постоји по један неограничен низ функција променљиве* x

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3, \ldots \tag{184}$$

таквих да је и свака једначина

$$y' = y^2 + (f + \lambda_k) \ldots \tag{185}$$

такође интеграбилна, и то без икаквих суплементарних квадратура.

Да би се то доказало, посматрајмо неограничени низ функција променљиве x

$$X_0,\ X_1,\ X_2, \ldots$$

формираних по рекурентном закону

$$(186) \qquad X_n = X_{n-1} + \frac{3}{4}\Delta_1^2(X_{n-1}) - \frac{1}{2}\Delta_2(X_{n-1}),$$

или у развијеном облику

$$X_n = X_{n-1} + \frac{3}{4}\left(\frac{X'_{n-1}}{X_{n-1}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{X''_{n-1}}{X_{n-1}}\right),$$

где је почетна функција X_0 произвољна.

Према релацији

$$(187) \qquad \Delta_2(X) = \Delta_1'(X) + \Delta_1^2(X)$$

образац (186) може се написати и у облику

$$X_n = X_{n-1} + \frac{1}{4}\Delta_1^2(X_{n-1}) - \frac{1}{2}\Delta_1'(X_{n-1}),$$

или у развијеном облику

$$X_n = X_{n-1} + \frac{1}{4}\left[\frac{d}{dx}\log X_{n-1}\right] - \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\log X_{n-1}.$$

Помоћу тако дефинисаних функција X_n, формирајмо низ (184) према обрасцу

$$\lambda_n = X_n - X_{n-1}.$$

Ми ћемо показати да, кад се за X_0 узме функција $f(x)$ из једначине (183), једначина (185) има у горњој теореми наведену особину.

Тога ради извршимо у једначини (183) смену

$$(188) \qquad y = \frac{d}{dx}\left(\int e^{\int \gamma_1 dx}\sqrt{f}dx\right),$$

где је непозната функција y смењена новом непознатом y_1. Таква је смена еквивалентна трима узастопним сменама

$$(189) \qquad y = \frac{u'}{u},$$

$$(190) \qquad u = \int v\sqrt{f}dx,$$

$$(191) \qquad v = e^{\int \gamma_1 dx}.$$

Прва смена (189) претвара једначину у

$$u'' = f(x)\,u, \tag{192}$$

а друга (190) претвара ову последњу у

$$v = \varphi(x)\,v, \tag{193}$$

где је

$$\varphi = f + \frac{3}{4}\Delta_1^2(f) - \frac{1}{2}\Delta_2(f). \tag{194}$$

Јер, диференцијалећи (192), сменивши затим u његовом вредношћу

$$u = \frac{u''}{f},$$

и извршивши после тога смену

$$u' = z,$$

добија се једначина

$$z'' - \Delta_1(f)\,z' - fz = 0,$$

па ова сменом

$$z = v\sqrt{f}$$

постаје једначина (193).

Напослетку, трећа смена (191) претвара једначину (193) у нову једначину

$$y_1' = y_1^2 + \varphi, \tag{195}$$

где функција φ има за израз (194).

Дакле, смена (188) претвара једначину (183) у (195).

Узмимо сад за први члан низа X_n функцију

$$X_0 = f.$$

Према изразу (194) за функцију φ и према једначини (186) види се да је

$$\varphi = X_0 + \frac{3}{4}\Delta_1^2(X_0) - \frac{1}{2}\Delta_2(X_0) = X_1,$$

тако да једначина (195) постаје

$$y_1' = y_1^2 + X_1. \tag{196}$$

Међутим, функција y_1 изражава се помоћу функције y обрасцем (188), из кога је

(197) $$y_1 = y + \Delta_1\left(\frac{y}{\sqrt{f}}\right).$$

Па ако се тада изврши смена

(198) $$y_1 = \frac{d}{dx}\log\left(\int e^{\int y_2 dx}\sqrt{X_1}dx\right),$$

где је y_2 нова непозната функција, једначина (196) се претвара у једначину

(199) $$y_2' = y_2^2 + X_2,$$

чији се интеграл изражава помоћу y_1 обрасцем

(200) $$y_2 = y_1 + \frac{d}{dx}\log\frac{y_1}{\sqrt{X_1}}.$$

Продужујући тако, долази се до једнога неограниченог низа једначина

(201) $$\begin{gathered} y_k' = y_k^2 + X_k, \\ y_0 = y, \quad X_0 = f(x), \\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{gathered}$$

које имају ову особину:

Интеграл y_k *изражава се помоћу интеграла* y_{k-1} *обрасцем*

(202) $$y_k = y_{k-1} + \frac{d}{dx}\log\frac{y_{k-1}}{\sqrt{X_{k-1}}} = y_{k-1} + \Delta_1\left(\frac{y_{k-1}}{\sqrt{X_{k-1}}}\right).$$

Ставимо сад да је

$$\frac{3}{4}\Delta_1^2(X_n) - \frac{1}{2}\Delta_2(X_n) = \mu_n,$$

па ће се имати низ једначина

(203) $$\begin{aligned} X_k &= X_{k-1} + \mu_{k-1}, \\ X_{k-1} &= X_{k-2} + \mu_{k-2}, \\ X_{k-2} &= X_{k-3} + \mu_{k-3}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_1 &= X_0 + \mu_0 = f + \mu_0. \end{aligned}$$

Сабирањем тих једначина добија се

$$X_k = f + \lambda_k, \tag{204}$$

где је

$$\lambda_k = \mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_{k-1}. \tag{205}$$

То показује да се функција λ_k из наведене теореме изражава обрасцем

$$\begin{aligned} \lambda_k = {} & \frac{3}{4}[\Delta_1^2(X_0) + \Delta_1^2(X_1) + \ldots + \Delta_1^2(X_{k-1})] - \\ & -\frac{1}{2}\left[\Delta_2(X_0) + \Delta_2(X_1) + \ldots + \Delta_2(X_{k-1})\right], \end{aligned} \tag{206}$$

који се, према релацији (187), може написати још и у облику

$$\lambda_k = \frac{1}{4}[\Delta_1^2(X) + \ldots + \Delta_1^2(X_{k-1})] - \frac{1}{2}\Delta_1'(X_0 X_1 X_2 \ldots X_{k-1}). \tag{207}$$

Као што се види: *функције* λ_k низа (184), *везане за Riccati-еву једначину* (183), *изражавају се помоћу функције* f(x) *једним низом алгебарских операција и диференцијалења.*

Интеграл једначине

$$y_k' = y_k^2 + X_k$$

израчунава се поступно из претходних интеграла

$$y_{k-1}, y_{k-2}, \ldots, y_1, y$$

помоћу низа образаца

$$\begin{aligned} y_1 &= y + \Delta_1\left(\frac{y}{\sqrt{f}}\right), \\ y_2 &= y_1 + \Delta_1\left(\frac{y_1}{\sqrt{X_1}}\right), \\ y_3 &= y_2 + \Delta_1\left(\frac{y_2}{\sqrt{X_2}}\right), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{208}$$

где је почетна функција y интеграл дате Riccati-еве једначине

$$y' = y^2 + f(x).$$

То израчунавање, почевши од y, своди се на саме алгебарске операција и на диференцијалење, чиме је теорема доказана.

Пошавши, нпр. од једначине

$$y' = y^2 + ax, \tag{209}$$

налази се да је

$$\lambda_1 = \frac{3}{4x^2},$$

па пошто се једначина (209) интеграли помоћу Bessel-ових трансцедената, исто ће то бити и са једначином

$$y' = y^2 + ax + \frac{3}{4x^2}.$$

Пошавши од једначине

$$y' = y^2 + ax^m, \tag{210}$$

налази се да је

$$\lambda_1 = \frac{3mx + 2m(m-1)}{4x^2},$$

па пошто се једначина (210) интеграли помоћу елементарних функција кад је

$$m = \frac{-4k}{1 \mp 2k},$$

где је k цео позитиван број, исто ће то бити и са једначином

$$y' = y^2 + ax^m + \frac{3mx + 2m(m-1)}{4x^2}.$$

Интерес доказане теореме лежи у томе, што се помоћу ње може, пошавши од једне ма које интеграбилне Riccati-еве једначине, формирати бескрајан низ других Riccati-евих једначина које ће такође бити интеграбилне и чија интеграција не захтева никаквих других операција са интегралом y првобитне једначине, осим чисто алгебарских радњи и диференцијалења.

24. ОПШТИ ПОГЛЕД НА УЛОГУ АЛГОРИТМА Δ_n ПРИ КВАЛИТАТИВНОЈ ИНТЕГРАЦИЈИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

Напред наведени ставови о међусобној зависности особина функције y и њених релативних извода $\Delta_n(y)$, налазе непосредну примену при квалитативној интеграцији диференцијалних једначина, при којој се траже, не тачно одређене вредности интеграла или појединих интегралних елемената, већ овлашни, *квалитативни* подаци о њима као што су: ток непознате функције, њене нуле, њене бесконачнице, максимуми и минимуми, размаци варијација, асимтотно понашање итд.

Примена је основана на факту да је, за простране класе диференцијалних једначина свих редова, *могућно изразити им* из саме једначине, без потребе да се ова интеграли, *који од релативних извода* $\Delta_n(y)$ њенога интеграла y, па онда, чинећи претпоставке о аналитичкој природи интеграла (нпр. да је овај у датоме размаку независно променљиве количине x коначан, континуалан, позитиван, монотон итд.), или ограничавајући се на посматрање таквих интеграла, *из особина извода* $\Delta_n(y)$, *изводити закључке о квалитативним појединостима везаним за интеграл* y.

У појединим случајевима и такве су претпоставке непотребне, јер се на самој диференцијалној једначини може распознати да је оно, што оне траже, испуњено само по себи. У другим случајевима посматраће се само такви интеграли једначине (ако би их, у ствари, било) који задовољавају услове претпоставака.

Релативни извод $\Delta_n(y)$ може се из дате диференцијалне једначине одредити:

1° или као експлицитна функција само променљиве x;

2° или као функција променљиве x, интеграл y и извесног броја његових извода $y', y'', y''', \ldots$ по x.

Први случај наступа само код биномних хомогених линеарних једначина

$$y^{(n)} + f(x)y = 0,$$

а за њих је

$$\Delta_n(y) = -f(x).$$

За све остале једначине може се из ове извести израз за извод $\Delta_n(y)$ у облику експлицитне функције променљивих

$$x, y, y', y'', \ldots$$

У првоме случају сингуларитети интеграла не зависе од интеграционих констаната; они су сталне тачке $x = \xi_i$ у равни променљиве x

које се могу познавати и у тој равни фиксирати. У свакоме размаку (a, b) реалних вредности x, који не обухвата ни једну од тачака ξ_i, интеграл y ће насигурно бити коначна и континуална функција променљиве x, као и сви његови изводи

$$y', y'', y''', \dots$$

Он се, у близини једне ма које вредности $x = \alpha$ у томе размаку, може развити у ред

$$y = A_0 + A_1(x - \alpha) + A_2(x - \alpha)^2 + \dots$$

и на тај се интеграл, без икаквих претпоставака о његовој природи, може применити све оно што се зна о зависности између извода $\Delta_n(y)$ и квалитативних појединости одговарајуће му функције y.

У другоме случају интегрални сингуларитети, осим у изузетним случајевима, зависе од интеграционих констаната и померају се у равни променљиве x кад се те константе буду мењале. То нису више сталне тачке ξ_i које се могу познавати, да би се могли посматрати размаци (a, b) у којима нема сингуларитета. Стога се у томе случају закључци о квалитативним појединостима интеграла могу изводити само под претпоставкама да интеграл испуњава одређене услове, или се бар ограничити на такве интеграле (ако их буде било). У мноштву случајева могу се, под таквим претпоставкама, на добијеноме изразу за $\Delta_n(y)$ распознати квалитативне појединости тога извода, довољне да би се могли изводити закључци о интегралу y.

25. ПРИМЕНА НА БИНОМНЕ ЛИНЕАРНЕ ЈЕДНАЧИНЕ n-ТОГ РЕДА

Из напред реченог о зависности тока функције y од њеног извода $\Delta_n(y)$ могу се извести закључци о квалитативним појединостима интеграла y једначине

$$(211) \qquad y^{(n)} + f(x)y = 0,$$

за коју је

$$\Delta_n(y) = -f(x).$$

Таквих је закључака за сада мало у случају кад је $n > 2$. За такав се случај може, нпр. тврдити следеће:

Међу једначинама (211) за које функција $f(x)$ има за све позитивне вредности x *исти знак*, само оне које су облика

$$y^{(2m)} \mp (-1)^m \varphi(x) y = 0$$

могу имати *периодичких* интеграла; од два знака треба узети + или − према томе да ли је сталан знак функције φ позитиван или негативан. Сваки периодички интеграл *у има бар по једну нулу у размаку једне интегралне периоде.*

Специјално за једначину четвртог реда

$$y^{(4)} - k\varphi(x) y = 0, \tag{212}$$

кад функција φ остаје у посматраноме размаку вредности x непрестано *позитивна*, а k означује један променљив параметар, може се тврдити да постоји један бескрајно растући дискретан низ позитивних бројева

$$k_1, \quad k_2, \quad k_3, \ldots$$

таквих, да свакој од вредности $k = k_1$ параметра k одговара по један интеграл y једначине (212) *који додирује осовину* Ox *и има* (i − 1) *нула у посматраном размаку.*

За једначину трећег реда

$$y''' + \varphi(x) y = 0 \tag{213}$$

може се тврдити ово:

Нека је y један интеграл те једначине који додирује осовину Ox у једноме размаку (a, b); нека је

$$z''' + \varphi_1(x) z = 0 \tag{214}$$

друга једна биномна линеарна једначина трећега реда, где је φ_1 таква функција да је у размаку (a, b) непрестано

$$\varphi_1 \geq \varphi.$$

Кад год једначина (214) има такав један интеграл z да с z и z' позитивни за $x = a$, *тај ће интеграл* z *имати бар једну нулу у размаку* (a, b).

У погледу асимтотног понашања интеграла y једначине (211) за $x = + \infty$, може се тврдити ово:

Кад је за велике позитивне вредности x функција $f(x)$ коначна, континуална и непрестано *позитивна*, а не тежи нули за $x = + \infty$, онда:

1° кад је n *парно*, сви интеграли једначине су за такве вредности x *осцилаторни, осцилујући око нуле бескрајно много пута*;

2° кад је n непарно, ни један интеграл није осцилаторан; сваки се од њих *асимтотно и монотоно приближује нули не мењајући при том никако свој знак.*

У случајевима кад функција $f(x)$, остајући за велике позитивне вредности x непрестано коначна, континуална и позитивна, тежи нули за $x = +\infty$, онда кад год постоји какав сталан позитиван број α, мањи од $\frac{n}{2}$, за који продукат

$$x^{\alpha} f(x)$$

при бескрајном рашћењу промењиве x, тежи коначној и од нуле различној граници, *важиће неизмењени горњи закључци под* 1° *и* 2°.

Међутим се много одређенији и потпунији закључци из претходнога излагања могу извести за случај кад је $n = 2$, што ће бити предмет излагања у идућем параграфу.

26. ПРИМЕНА НА БИНОМНЕ ЛИНЕАРНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ДРУГОГА РЕДА

Изложени ставови о нулама функције y, у зависности од њеног другог релативног извода $\Delta_2(y)$, доводе непосредно до следећих закључака о интегралима линеарне једначине другога реда

$$y'' + f(x)y = 0. \tag{215}$$

У свему што следује биће претпостављено да посматрани размак (a, b) не обухвата ни једну од сталних вредности ξ_i које су интегрални сингуларитети за дату једначину; за тај се услов у свакоме датом случају може знати да ли је испуњен.

У свакоме таквом размаку (a, b) интеграл y је коначна и континуална функција промењиве x и све су му нуле у томе размаку просте; *интеграл мења знак пролазећи кроз сваку своју нулу*. Све интегралне нуле вишега реда су *сталне*, не мењајући се од једнога партикуларног интеграла до другог.

Два партикуларна интеграла y_1 и y_2, чији количник није сталан број, никад немају заједничких нула; њихове се нуле међу собом *раздвајају*, тј. између двеју узастопних нула интеграла y_1 налази се по једна (и само једна) нула интеграла y_2, и обрнуто.

У једноме размаку (a, b) у коме функција $f(x)$ остаје непрестано *негативна*, ни један партикуларни интеграл y *не може имати више од једне нуле*.

Кад се посматрају две једначине

$$y'' + f(x)y = 0, \tag{216}$$

$$(217) \qquad z'' + f_1(x)z = 0,$$

где су обадве функције f и f_1 *позитивне* у размаку (a, b), па је у томе размаку непрестано

$$f(x) > f_1(x),$$

онда, у томе размаку, *између двеју узастопних нула једнога ма кога партикуларног интеграла* z *једначине* (217) *увек се налази бар по једна нула свакога партикуларног интеграла* y *једначине* (216).

У случају кад интеграли y и z имају у размаку (a, b) коју нулу заједничку, променљива x, растући, почевши од те нуле, *пре но што наиђе на једну нулу интеграла* z *у томе размаку наићи ће на једну нулу интеграла* y.

Кад се посматрају две једначине

$$(218) \qquad y'' + f(x)y = 0,$$

$$(219) \qquad u'' + f_2(x)u = 0,$$

где су обе функције f и f_2 *позитивне* у (a, b), па је у томе размаку непрестано

$$f(x) < f_2(x),$$

онда у (a, b), *између двеју узастопних нула једнога ма кога партикуларног интеграла* y *једначине* (218) *увек се налази бар по једна нула свакога партикуларног интеграла* z *једначине* (219).

У случају кад интеграли y и u имају у (a, b) коју нулу заједничку, променљива x, растући, почевши од те нуле, *пре но што наиђе на једну нулу интеграла* y, *наићи ће на једну нулу интеграла* u.

Кад се посматрају три једначине

$$y'' + f(x)y = 0,$$
$$z'' + f_1(x)z = 0,$$
$$u'' + f_2(x)u = 0,$$

где су све три функције f, f_1, f_2 *позитивне* у размаку (a, b), па је у томе размаку непрестано

$$f_1(x) < f(x) < f_2(x),$$

сваки интеграл y *ће у томе размаку имати најмање онолико нула колико их има ма који интеграл* z, *а највише онолико колико их има ма који интеграл* u, *пошто се овај последњи број повећа за* 2.

Ако се са N и M означе једна доња и једна горња граница за вредности које добија *позитивна* функција $f(x)$ у размаку (a, b), *сваки интеграл* y једначине

$$(220) \qquad y'' + f(x)y = 0$$

имаће у (a, b) *најмање онолико нула колико има целих јединица у броју*

$$\frac{(b-a)\sqrt{N}}{\pi} - 1,$$

а највише онолико колико их има у броју

$$\frac{(b-a)\sqrt{M}}{\pi} + 2.$$

Ако се са p и p' означе два стална позитивна броја већа од $\frac{1}{4}$ и таква да је у размаку (a, b) непрестано

$$\frac{p}{x^2} < f(x) < \frac{p'}{x^2},$$

сваки ће интеграл имати у (a, b) *најмање онолико нула колико размак буде обухватио бројева*

$$\alpha_k = e^{\frac{k\pi}{\lambda}}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

а највише онолико колико размак буде обухватио бројева

$$\alpha'_k = e^{\frac{k\pi}{\lambda'}}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

где λ *и* λ' *означују позитивне константе*

$$\lambda = \sqrt{p^2 - \frac{1}{4}}, \quad \lambda' = \sqrt{p'^2 - \frac{1}{4}},$$

(с тим да их евентуално може имати једну или две више).

Кад у размаку (a, b) позитивна функција $f(x)$ *монотоно расти*, нуле свакога интеграла y се од једнога краја размака до другог све више *згушњавају*, али при томе њихово међусобно растојање *никако не постаје мање од*

$$\frac{\pi}{\sqrt{f(b)}}.$$

Кад у (a, b) позитивна функција $f(x)$ *монотоно опада*, нуле свакога интеграла y се од једнога краја размака до другог све више *разређују*, али при томе њихово међусобно растојање *никако не постаје веће од*

$$\frac{\pi}{\sqrt{f(a)}}.$$

Из онога што је напред нађено у погледу зависности размака варијација функције y од знака и вредности њеног релативог извода $\Delta_2(y)$, могу се изводити закључци о *размаку варијација интеграла* y једначине (220) кад x варира у размаку (a, b).

Подсетићемо најпре на ове чињенице које важе за специјалан случај кад се функција $f(x)$ своди на какву реалну константу a:

1° кад је константа a *негативна*, ставивши да је $a = -\alpha$ и кад се у општем интегралу

$$y = C_1 e^{x\sqrt{\alpha}} + C_2 e^{-x\sqrt{\alpha}}$$

узму за интеграционе константе вредности x_0 и y_0 везане са C_1 и C_2 релацијама

$$C_1 = \frac{y_0}{2} e^{-x_0\sqrt{\alpha}}, \qquad C_2 = \frac{y_0}{2} e^{x_0\sqrt{\alpha}},$$

из којих је

$$x_0 = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \log \frac{C_2}{C_1}, \qquad y_0 = 2\sqrt{C_1 C_2},$$

општи се интеграл изражава у облику

$$y = \frac{y_0}{2} ch[(x - x_0)\sqrt{\alpha}].$$

Константа x_0, која се мења од једнога партикуларног интеграла до другога, представља једину реалну нулу извода y', а константа y_0 је вредност коју добија y за $x = x_0$, а која се такође мења од једнога партикуларног интеграла до другог;

2° кад је константа a *позитивна* и кад се у општем интегралу

$$y = C_1 \sin x\sqrt{a} + C_2 \cos x\sqrt{a}$$

узму за интеграционе константе вредности x_0, y_0 везане са C_1 и C_2 релацијама

$$C_1 = y_0 \sin x_0\sqrt{a}, \qquad C_2 = y_0 \cos x_0\sqrt{a},$$

из којих је

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{C_1}{C_2}, \qquad y_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2},$$

општи се интеграл изражава у облику

$$y = y_0 \cos[(x - x_0)\sqrt{a}\,].$$

Константа x_0, која се мења од једнога партикуларног интеграла до другог, представља вредност x за коју y достиже свој максимум или минимум, а y_0 је сама вредност тога екстремума. Интегрална крива се састоји из полуталаса наизменично позитивних и негативних; број полуталаса у датоме размаку (α, β) може се само за јединицу разликовати од броја

$$\frac{(\beta - \alpha)\sqrt{a}}{\pi}.$$

Сасвим сличне чињенице важе и за диференцијалну једначину

$$y'' + f(x)y = 0 \tag{221}$$

кад је f(x) *произвољна функција променљива* x, само са том разликом што ће вредност a, у обрасцима што важе за случај кад је

$$f(x) = \text{const.}$$

бити смењена једном променљивом количином, функцијом променљиве x. Напред наведени ставови о размаку варијација функције y у зависности од извода $\Delta_2(y)$ доводе тада до следећих закључака.

Кад год је у размаку (a, b) функција $f(x)$ *негативна*, за све вредности x у (a, b) *интегрална крива у налазиће се у области између двеју кривих*

$$y = y_0 \operatorname{ch}[(x - x_0)\sqrt{N}\,],$$
$$y = y_0 \operatorname{ch}[(x - x_0)\sqrt{M}\,],$$

где N и M означују једну доњу и једну горњу границу вредности функције $f(x)$ за вредности ξ што се налазе између x и x_0 (а које се могу сменити границама између a и b); x_0 означава једну нулу извода y' у томе размаку, а y_0 вредност y за $x = x_0$.

Кад је у размаку (a, b) функција $f(x)$ *позитивна, интегрална крива се састоји из полуталаса наизменично позитивних и негативних, а сваки се полуталас налази у области између двеју кривих*

$$y = y_0 \cos[(x - x_0)\sqrt{H}\,],$$
$$y = y_0 \cos[(x - x_0)\sqrt{L}\,],$$

где H и L означују једну доњу и једну горњу границу вредности $f(x)$ за вредности x што се налазе између двеју крајњих тачака полуталаса; x_0 и y_0 означују координате врха таласа. *Број полуталаса* у размаку (a, b) износи најмање онолико колико има целих јединица у броју

$$\frac{(b-a)\sqrt{N}}{\pi}-1,$$

а највише онолико колико их има у броју

$$\frac{(b-a)\sqrt{M}}{\pi}+2,$$

где N и M имају напред наведено значење.

У погледу *асимптотног понашања* интеграла y за велике позитивне вредности x, опет непосредном применом онога што је напред нађено за зависност између релативног извода $\Delta_2(y)$ и вредности y за такве вредности x, добијају се ови закључци:

Кад *позитивна* функција $f(x)$, почевши од једне довољно велике вредности h, непрестано и бескрајно *расте*, сви су интеграли једначине (221) у размаку (h, ∞) *осцилаторни*, са бескрајно много осцилација *које се све више згушњавају, и чије међусобно растојање, при бескрајном рашћењу вредности* x, *тежи нули.*

Кад $f(x)$ при томе рашћењу тежи једној одређеној коначној граници ρ, осцилације се опет *све више згушњавају, али при томе њихово међусобно растојање никако не постаје мање од броја*

$$\lambda=\frac{\pi}{\sqrt{\rho}}.$$

Кад $f(x)$, почевши од $x=h$, непрестано *опада*, али не тежећи при томе нули, као граничној вредности, тако да крива

$$y=f(x) \tag{222}$$

има као асимптоту једну праву

$$y=\rho'>0,$$

сви су интеграли y у размаку (h, ∞) опет *осцилаторни* и осцилације им се при рашћењу вредности x *све више разређују, али при томе њихово међусобно растојање не постаје веће од броја* λ.

Кад $f(x)$ при томе опадању тежи нули, тако да крива (222) има осовину Ox као асимптоту, онда:

1° кад функција

$$u=x^2f(x),$$

почевши од $x=h$, непрестано и бескрајно *расте*, ни један интеграл y при бескрајном рашћењу вредности x *није осцилаторан*. Исто ће бити и кад функција *u* не расти бескрајно, али за $x = \infty$ тежи каквој граничној вредности већој од $\frac{1}{4}$;

2° кад функција *u* при томе рашћењу остаје непрестано мања од $\frac{1}{4}$, сви су интеграли *y* за велике вредности *x* *осцилаторни*, али им се осцилације *све више разређују и међусобно им растојање постаје веће од сваког, ма колико великог броја.*

Од важности је, нарочито у конкретним применама линеарне једначине другога реда, квалитативно проучавање интеграла једначине

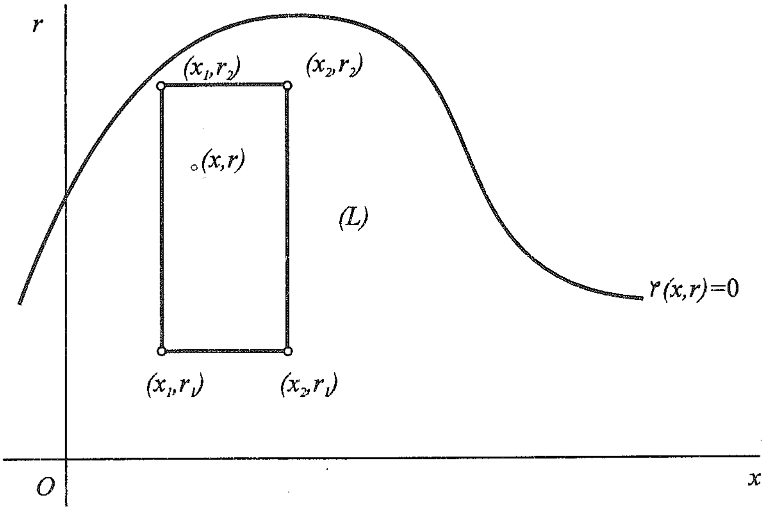
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \varphi(x, r)y = 0, \tag{223}$$

у којој дата функција φ *садржи један променљив параметар* r. Да ли ће интеграл $y(x, r)$ бити осцилаторан или не у посматраноме размаку (a, b) вредности x, и за које ће вредности параметра r то бити, зависи у првоме реду од знака функције $\varphi(x, r)$ за такве вредности x и r.

Ако се конструише крива

$$\varphi(x, r) = 0,$$

сматрајући x као апсцису, а r као ординату, ова ће имати у равни xOr своје позитивне и негативне области. Ако се у једној таквој области (L) конструише правоугаоник чије су стране паралелне координатним осовинама и чија темена (сл. 14) нека су тачке



Сл. 14

$$(x_1, r_1),\ (x_2, r_1),\ (x_1, r_2),\ (x_2, r_2),$$

онда ће за све вредности x у размаку (x_1, x_2), и за све вредности r у размаку (r_1, r_2), тј. за све тачке (x, r) у унутрашњости правоугаоника, функција $\varphi(x, r)$ задржавати један исти знак, па ће се на интеграл y, а за вредности x и r у тим размацима, моћи применити све оно што је нађено за једначину

$$(224) \qquad y'' + f(x)y = 0$$

кад f не садржи никакав променљив параметар.

Тако, ако је област (L) *негативна*, интеграл неће имати више од једне нуле у размаку (x_1, x_2), и то ни за коју вредност r што лежи у размаку (r_1, r_2). – Ако је област (L) *позитивна*, број и распоред нула зависиће од начина мењања функција $\varphi(x, r)$ у тим размацима. За вредности параметра r, што се налазе у једним размацима, интеграл може бити осцилаторан, са згушњавањем или разређивањем осцилација; за вредности r у другим размацима он неће имати никаквих осцилација, већ ће монотоно расти или опадати. А могућност закључивања о свему томе садржана је у ставовима напред доказаним за једначину (224), а нарочито за једначину

$$\Delta_2(y) = rf_1(x) + f_2(x)$$

која линеарно садржи параметар r.

Све се то примењује и на триномне линеарне једначине

$$(225) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)y = 0,$$

које се сменом

$$y = ue^{-\frac{1}{2}\int f_1 dx}$$

своде на биномну једначину

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \varphi(x)y = 0,$$

где је

$$\varphi(x) = f_2 - \frac{1}{2}f_1' - \frac{1}{4}f_1^2.$$

Нуле интеграла y поклапају се са нулама функције u, за коју је

$$\Delta_2(u) = \frac{1}{4}f_1^2 + \frac{1}{2}f_1' - f_2,$$

поред евентуалних сталних нула функције

$$\psi(x) = e^{-\frac{1}{2}\int f_1 dx}$$

које се увек могу знати. Монотоност или осцилаторни карактер интеграла y зависиће од фактора $\psi(x)$, чији се ток познаје, и непознатог фактора u за који се познаје извод $\Delta_2(u)$ као експлицитна функција променљиве x, па му се према томе може знати знак, вредност и асимптотно понашање, а од чега зависе такви елементи за интеграл y. Исто ће тако бити и кад коефицијенти f_1 и f_2 садрже какав променљив параметар r.

Асимптотно понашање интеграла y за велике вредности x зависи у исти мах од асимптотног понашања и функције $\psi(x)$ и интеграла u. За ово друго се сазнаје применом онога што је казано за биномне хомогене линеарне једначине другога реда. За прво се сазнаје непосредно на аналитичком изразу функције $\psi(x)$, односно функције $f_1(x)$. Кад је, нпр. функција f_1 непрестано позитивна за велике позитивне вредности x, функција $\psi(x)$ асимптотно тежи нули, па ако интеграл u при томе остаје коначан, или бескрајно расти, али брзином мањом но што расти функција

$$\frac{1}{\psi(x)} = e^{\frac{1}{2}\int f_1 dx}, \tag{226}$$

и интеграл y ће асимптотно тежити нули. Ако је, при том, интеграл u још и ослицаторан, те ће осцилације при рашћењу променљиве x бити слабије но што би биле без интервенције фактора $\psi(x)$. *Фактор* $\psi(x)$ *производи, дакле, поступно амортизирање осцилација интеграла* y, а брзина амортизирања биће одређена брзином рашћења фактора (226).

Приметимо и то да се, према ономе што је казано у параграфу 20, сви ставови што се односе на интеграл y једначине

$$y'' + f(x)y = 0, \tag{227}$$

могу дословце применити и на његов извод y', према напред наведеној чињеници да се једначина (227) сменом

$$y' = u\sqrt{f(x)}$$

своди на једначину облика

$$u'' + \varphi(x)u = 0.$$

Напослетку, све се то примењује и на линеарну једначину са независним чланом

$$y'' + f_1(x)y + f_2(x) = 0. \tag{228}$$

Нека је y_1 један партикуларан интеграл те једначине (за који ће се претпоставити да је познат), па ће бити

$$\Delta_2(y_1) = -f_1(x) - \frac{f_2(x)}{y_1}. \tag{229}$$

Разликоваћемо ова два случаја:

1° Нека је (a, b) један размак вредности променљиве x такав да је у њему непрестано

$$y_1 < -\frac{f_2(x)}{f_1(x)}.$$

Тада је у (a, b) извод $\Delta_2(y_1)$ позитиван, па, дакле, y_1 не може у томе размаку имати више од једне нуле. Па пошто је општи интеграл једначине (229)

$$y = y_1 + u, \tag{230}$$

где је u општи интеграл једначине

$$u'' + f_1(x)u = 0, \tag{231}$$

то се види да:

Никаква интегрална крива y_2 *једначине* (229) *не сече ни једну од интегралних кривих* u *једначине* (231) *у више тачака од једне.*

2° Нека је (a, b) један размак такав да је у њему непрестано

$$y_1 > -\frac{f_2(x)}{f_1(x)}.$$

Тада је у (a, b) извод $\Delta_2(y_1)$ негативан, па ако су N и M једна доња и једна горња граница вредности

$$\lambda(x) = f_1(x) + \frac{f_2(x)}{y_1}$$

у размаку (a, b), *свака интегрална крива* y_2 *пресецаће сваку од интегралних кривих* u *најмање у онолико тачака колико има целих јединица у броју*

$$\frac{(b-a)\sqrt{N}}{\pi} - 1, \tag{232}$$

а највише у онолико колико их има у броју

$$(233) \qquad \frac{(b-a)\sqrt{M}}{\pi}+2.$$

Исто тако за једначину (229) важе и ови ставови:

Кад је у размаку (a, b) *функција* f_1 *непрестано позитивна, њене ма које две интегралне криве* y_1 *и* y_2 *не могу се у* (a, b) *пресецати више од једанпут.*

Кад је у (a, b) *функција* f_1 *непрестано негативна и вредности су јој садржане у једноме размаку*

$$(-M,-N),$$

криве y_1 *и* y_2 *секу се у најмање* n, *а највише у* m *тачака, где* n *и* m *означују број целих јединица садржаних у бројевима* (232) и (233).

У специјалном случају кад је једначина (228) облика

$$(234) \qquad y''+y+f(x)=0,$$

функција u је облика

$$u=C_1\sin(x+C_2),$$

где су C_1 и C_2 произвољне константе.

Кад једначина (234) има партикуларни интеграл y_1 такав да је у размаку (a,b) непрестано

$$y_1>f(x),$$

ни једна од интегралних кривих y неће у (a,b) пресецати ни једну од синусоида u више од једанпут.

А кад једначина има партикуларни интеграл y_1 такав да је у (a,b) непрестано

$$y_1<-k\,f(x),$$

где је k какав сталан, позитиван или негативан број, али који не лежи између 0 и 1, свака интегрална крива y_2 пресецаће сваку од синусоида u најмање онолико пута колико има целих јединица у броју

$$\frac{b-a}{\pi}\sqrt{1-\frac{1}{k}}-1.$$

Ма које две интегралне криве једначине (234) пресецаће се међусобно у бескрајно много узастопних тачака чије пројекције на осовини Ox имају стално међусобно растојање π.

27. ПРИМЕНА НА ОПШТИЈЕ ТИПОВЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

Могућност примене ставова о релативним изводима Δ_n на биномне линеарне диференцијалне једначине долази отуда што је код ових могућно непосредно израчунати $\Delta_n(y)$ помоћу коефицијената једначине и тако имати експлицитан израз тога извода у облику познате функције независно променљиве количине x. Све оно од чега битно зависе квалитативне појединости интеграла y, а то су: знак извода у посматраноме размаку (a, b) вредности променљиве x, вредности тога извода у томе размаку, његово асимптотно понашање и др. може се непосредно разазнати на аналитичкоме изразу те функције.

Биномне хомогене линеарне једначине су једине једначине за које је могућно имати непосредно који од релативних извода $\Delta_n(y)$ *као експлицитну и од интеграционих констаната независну функцију само променљиве* x, без претходне интеграције. За остале једначине такав израз за извод се може имати тек пошто се експлицитно одреди интеграл y.

Али се увек може непосредно из дате диференцијалне једначине, без претходне интеграције:

1° или добити, као експлицитна и од интеграционих констаната независна функција саме променљиве x, који од извода Δ_n не самога интеграла y, већ какве одређене (експлицитне, диференцијалне или интегралне) комбинације Φ прменљивих x и y. Тако, нпр.

За Riccati-еву једначину

$$y' + y^2 + f(x) = 0$$

је

$$\Delta_2(e^{\int \gamma dx}) = -f(x);$$

За Riccati-еву једначину

$$y' - y^2 + f(x) = 0$$

је

$$\Delta_2(e^{-\int \gamma dx}) = f(x);$$

За најопштију Riccati-еву једначину

$$y' + f_1(x)\,y^2 + f_2(x)\,y + f_3(x) = 0$$

комбинација

$$z = \frac{1}{\sqrt{f_1}}\, e^{\int\left(yf_1 + \frac{f_2}{2}\right)dx}$$

има за Δ_2 израз

$$\Delta_2(z) = f_1 f_3 + \frac{1}{4}(f_1 f_2 - f_1')^2 - f_1\left(\frac{f_1 f_2 - f_1'}{2f_1^2}\right)' - \frac{f_2}{4f_1}(f_1 f_2 - f_1');$$

За једначину

(235) $$y'' + f_1 y' + f_2 y = 0$$

је

$$\Delta_2\left(ye^{-\frac{1}{2}\int f_1 dx}\right) = f_2 - \frac{1}{2}f_1' - \frac{1}{4}f_1^2.$$

У случају једначине (235), кад су корени r_1 и r_2 квадратне једначине

$$r^2 + f_1(x)r + f_2(x) = 0$$

решене по r, такви да им је разлика сталан број, тако да је

$$r_1 = \alpha_1 + \varphi(x), \quad r_2 = \alpha_2 + \varphi(x),$$

где су α_1 и α_2 две константе, за интегралну комбинацију

$$z = ye^{-\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} - \int \varphi dx}$$

налази се да је[1]

$$\Delta_2(z) = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{4} - \varphi'(x).$$

За једначину

$$yy'' + y'^2 + 2yy' + f(x)y^2 = 0$$

налази се

$$\Delta_2(e^x y^2) = \frac{1}{2} - f(x).$$

За једначину

$$yy'' - y'^2 + f(x)yy' = 0$$

је

$$\Delta_1\left(\frac{y'}{y}\right) = -f(x).$$

За једначину

$$yy^{(4)} + 4y'y''' + 3y^2 + f(x)yy' = 0$$

је

$$\Delta_3(yy') = -f(x).$$

---

[1] Michel Petovitch: *Sur l'équation diff. linéarie du second ordre* (Bull. de la Société mathématique de France, t. XXV, 1897).

2° или добити који извод $\Delta_n(y)$ самога интеграла y у облику какве одређене комбинације Φ промењљивих x и y. Тако, нпр.

За једначину

$$y' + f(x, y)y = 0$$

је

$$\Delta_1(y) = -f(x, y);$$

За једначину

$$y'' + f(x, y, y')y = 0$$

је

$$\Delta_2(y) = -f(x, y, y').$$

А) У случају под 1° општи ставови о изводима Δ_n, непосредно доводе до квалитативних појединости комбинације Φ којом је извод $\Delta_n(\Phi)$ изражен као експлицитна функција променљиве x, а из тих закључака изводе се квалитативне појединости самога интеграла y дате једначине. Тако, нпр.

За Riccati-еву једначину

$$y' + y^2 + f(x) = 0$$

и за интегралну комбинацију

$$\Phi = e^{\int y dx}$$

налази се да је

$$\Delta_2(\Phi) = -f(x).$$

Ставови о зависности нула функције Φ од њеног извода $\Delta_2(\Phi)$ доводе до података о бесконачницама интеграла y, јер је свака нула функције Φ пол првога реда за y (полови вишега реда су сталне вредности ξ_i које се, када их, у ствари, има, могу разазнати на самој диференцијалној једначини.

Б) У случају под 2°, пошто је за примене поменутих ставова потребно познавање само неких квалитативних појединости (P) извода Δ_n, као што су: знак, једна доња или горња граница његових вредности и др., а за многобројне типове диференцијалних једначина те се појединости могу разазнати на самоме Δ_n изражeном помоћу одређене комбинације Φ, то се из ових могу извести и квалитативне појединости самога интеграла y.

Али, појединости (P) у већини случајева могућно је сазнати само ограничавајући се на посматрање интеграла y који испуњавају одређене услове (C), као, нпр. да су у посматраноме размаку (a, b) коначни и континуални, монотони, позитивни или негативни итд.

Уочимо, нпр. диференцијалну једначину првога реда

$$(236) \qquad (1+2x^2y^2)y'^2-(1+4x^4y^4)y^2=0$$

која има две врсте интеграла, од којих једни одговарају једначини

$$\Delta_1(y)=\frac{\sqrt{1+4x^4y^4}}{1+2x^2y^2},$$

а други једначини

$$\Delta_1(y)=-\frac{\sqrt{1+4x^4y^4}}{1+2x^2y^2}.$$

Приметивши да је за позитивне вредности a и b увек

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\leq\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}\leq 1,$$

види се да за прву врсту интеграла вредност $\Delta_1(y)$ лежи између

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=0,7071 \quad \text{и} \quad 1,$$

а за другу ова лежи између

$$-1 \quad \text{и} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

и то важи за све реалне интеграле једначине (236) који су коначни и континуални, као и њихов извод y', за све реалне вредности x; то важи, у исти мах и за све вредности x од $-\infty$ до $+\infty$. А из тога се изводи овај закључак:

За све такве интеграле y и за све реалне вредности x биће

$$y=y_0e^{(x-x_0)\lambda},$$

где је λ једна функција промењиве x чије вредности, ма колике биле реалне вредности x, леже у размаку $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)$ за интеграле прве врсте, а у размаку $\left(-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ за интеграле друге врсте.

Ни један интеграл y нема реалних нула, а сваки се од њих, за све реалне вредности x, налази у области између двеју експоненцијалних кривих

$$y = y_0 e^{\frac{x-x_0}{\sqrt{2}}} \quad \text{и} \quad y = y_0 e^{x-x_0}$$

ако је то интеграл прве врсте, а у области између кривих

$$y = y_0 e^{x_0 - x} \quad \text{и} \quad y = y_0 e^{\frac{x_0-x}{\sqrt{2}}}$$

ако је то интеграл друге врсте.

Уочимо, као други пример једначину првога реда

$$y' = \varphi(xy),$$

где је $\varphi(t)$ какав полином по променљивој t са позитивним коефицијентима који садржи само *нейарне* степене те променљиве. Из ње је

$$y'' = \varphi'(xy)[y + x\,\varphi(xy)],$$

па, дакле

$$\Delta_2(y) = \varphi'(xy)\left[1 + \frac{x}{y}\varphi(xy)\right].$$

Приметивши да израз $\varphi'(xy)$ садржи само *йарне* степене променљиве xy, и да израз

$$\frac{x}{y}\varphi(xy)$$

садржи само *йарне* степене сваке од променљивих x и y, лако се види да је извод $\Delta_2(y)$ позитиван за све реалне вредности x. Према томе: ни један континуалан интеграл те једначине не може имати више од једне реалне нуле.

Тако, у најпростијем случају једначине

$$y' = axy,$$

чији је интеграл

$$y = Ce^{\frac{ax^2}{2}},$$

овај нема ни једну нулу, док интеграл једначине

$$y' = axy + b,$$

који је

$$y = e^{\frac{ax^2}{2}}\left(C + b\int e^{-\frac{ax^2}{2}}dx\right),$$

има једну, или ни једну, реалну нулу.

Уочимо још, као трећи пример, једначину другога реда

$$y'' = \alpha y + \beta y e^{-x^2-y^2}$$

где су α и β константе. Из ове једначине је

$$\Delta_2(y) = \alpha + \beta e^{-x^2-y^2}$$

и према томе, за све реалне интеграле y и за све вредности x од $-\infty$ до $+\infty$ вредности извода $\Delta_2(y)$ леже у размаку између α и $\alpha+\beta$. Ако су, дакле, α и $\alpha+\beta$ позитивни, тај је извод позитиван за све реалне вредности x, што значи да интеграл y нема више од једне реалне нуле. А ако су α и $\alpha+\beta$ негативни, сваки је интеграл осцилаторан и има бескрајно много осцилација око вредности нула. Сваки ће интеграл који је, као и његови изводи y' и y'', коначан и континуалан у једноме датом размаку (a, b) имати у томе размаку најмање онолико осцилација колико има целих јединица у броју

$$\frac{(b-a)\sqrt{\alpha}}{\pi} - 1,$$

а највише онолико колико их има у броју

$$\frac{(b-a)\sqrt{\alpha+\beta}}{\pi} + 2.$$

28. ТЕОРЕМЕ О РЕАЛНИМ КОНТИНУАЛНИМ ФУНКЦИЈАМА

Из овога што претходи могу се извести и разни општи ставови од интереса за теорију реалних континуалних функција. Овде ће, примера ради, бити наведено неколико ставова такве врсте, као последице веза између особина реалних функција y и њиховог другог релативног извода $\Delta_2(y)$.

1. став. – *Кад две реалне континуалне функције имају један исти извод* Δ_2, *а поред тога имају и једну заједничку реалну нулу, оне имају и један исти извод* Δ_1.

То је непосредна последица ранијег става по коме се реалне нуле двеју функција u и v поменуте врсте, за које је

$$\Delta_2(u) = \Delta_2(v)$$

међусобно раздвајају и да се једна нула једне може поклопити са једном нулом друге функције само онда кад је количник $\frac{u}{v}$ сталан број.

2. став. – *Кад за једну функцију* y, *коначну и континуалну у једноме размаку* (a, b) *вредности* x *(као и њени изводи* y′ *и* y″*), други релативни извод* Δ_2(y) *никако не премаша у томе размаку вредност*

$$-\left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^2,$$

функција y *бар једанпут мења у* (a, b) *свој знак пролазећи кроз нулу.*

Јер је тада у размаку (a, b) непрестано

$$-\Delta_2(y) \geq \left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^2,$$

па ће, дакле, једна доња граница за $-\Delta_2(y)$ бити позитиван број

$$N = \left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^2,$$

па пошто је

$$\frac{(b-a)\sqrt{N}}{\pi} \geq 2,$$

функција y ће, према једном напред доказаном ставу, имати бар једну просту нулу у размаку (a, b).

3. став. – *Кад за једну функцију* y, *коначну и континуалну у размаку* (a, b) *(као и њени изводи* y′ *и* y″*) извод* Δ_2(y) *за све вредности* x *у* (a, b) *премаша вредност*

$$-\left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2$$

(k = *цео позитиван број), функција* y *не мења у* (a, b) *свој знак више од* (k + 2) *пута.*

Јер је тада у размаку (a, b) непрестано

$$-\Delta_2(y) \leq \left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^2,$$

тако, да је једна горња граница за $-\Delta_2(y)$ позитиван број

$$M = \left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2,$$

па пошто је

$$\frac{(b-a)\sqrt{M}}{\pi} \leq k,$$

та ће функција y, према једном ранијем ставу, имату у (a, b) највише $(k+2)$ простих нула.

4. став. – *Никаква реална цела функција променљиве* x, *нултог рода (genre) не може имати свој други релативни извод* Δ_2 *негативан за све вредности* x *веће од једног коначног броја* h, *ни за све вредности* x *мање од таквог једног броја.*

Јер кад би то био случај, цела функција y задовољавала би диференцијалну једначину

$$y'' + \varphi(x)y = 0,$$

где би у једноме размаку

$$(h, \infty), \quad \text{односно} \quad (-\infty, h),$$

непрестано било

$$-\Delta_2(y) = \varphi(x) > 0.$$

Према томе ће постојати такав један позитиван и од нуле различан број N да ће у таквоме размаку непрестано бити

$$-\Delta_2(y) > N,$$

па ће, дакле, у једноме размаку

$$\begin{array}{ccc} (h, h'), & \text{односно} & (-h'', h) \\ h' > h & & h < h'' \end{array}$$

интеграл y имати најмање онолико нула колико има целих јединица у броју

$$\frac{(h'-h)\sqrt{N}}{\pi} - 1, \quad \text{односно} \quad \frac{(h+h'')\sqrt{N}}{\pi} - 1.$$

Кад се, дакле, узме

$$h' = \infty, \quad h'' = \infty,$$

ма колики био број N, тај ће број нула бити бескрајно велики.

Међутим, кад се те нуле α_k упореде са нулама β_k функције

$$z = \sin x\sqrt{N},$$

за коју је

$$\Delta_2(z) = -N,$$

па је, дакле, у поменутоме размаку непрестано

$$-\Delta_2(y) > -\Delta_2(z),$$

налази се, према ранијем ставу, да две узастопне нуле β_k у томе размаку обухватају бар једну нулу α_k, а ако се које α_k поклопи са којим β_k, промењива x, растући, почевши од такве нуле (односно опадајући, почевши од ове), прво ће наићи на једну нулу α_k, па тек затим на једну нулу β_k. То показује да нуле α_k *нису ређе* од нула β_k, тј. да α_k расту по својој апсолутној вредности са рашћењем ранга k *мањом брзином* (или бар толиком истом) но што је она којом расту и β_k. Па пошто је модуларни ред

$$\frac{1}{|\beta_k|}+\frac{1}{|\beta_{k+1}|}+\frac{1}{|\beta_{k+2}|}+\ldots=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots\right)$$

дивергентан, биће дивергентан и модуларни ред

$$\frac{1}{|\alpha_k|}+\frac{1}{|\alpha_{k+1}|}+\frac{1}{|\alpha_{k+2}|}+\ldots.$$

Па кад се томе реду придодаду још и евентуални чланови који произлазе од имагинарних нула интеграла y, јасно је да је ред реципрочних вредности модула нула тога интеграла дивергентан, и према томе y *не може бити нултога рода.*

Став се може изразити и на овај начин:

Једна реална цела функција нултог рода не може бити интеграл никакве једначине

$$y''+\varphi(x)y=0, \tag{237}$$

у којој је коефицијенат $\varphi(x)$ *позитиван за све вредности* x *веће од једнога коначног броја, или за све вредности* x *мање од овога.*

А као специјалан случај имао би се овај став:

Једна реална цела функција нултог рода не може бити интеграл никакве једначине (237), *где је функција* φ *позитивна за све реалне вредности* x.

Приметивши да је за функцију

$$y=\sin x,$$

чији је род једнак јединици,

$$\Delta_2(y)=-1$$

за све вредности x у размаку $(-\infty, +\infty)$, јасно је да ти ставови не вреде и за целе функције чији је род *једнак јединици.* А за функције чији је род *виши од нуле* може се доказати следећи општи став.

Свака таква функција, ма кога рода она била, облика је

$$y = e^{G(x)} \cdot Y(x),$$

где је $Y(x)$ канонски продукат примарних фактора функције y, а $G(x)$ *цела* функција променљиве x, која се може свести на полином по x у случају кад је род функције y бескрајан. Канонски продукат $Y(x)$ и сам је цела функција променљиве x и за њега важи овај став:

5. став. – *Кад каква реална цела функција, ма кога рода она била, а која нема бескрајно много имагинарних нула, има свој други релативни извод* Δ_2 *коначан и негативан за бескрајно растуће вредности* x *веће од једног коначног броја, или за бескрајно опадајуће вредности* x *мање од једног таквог броја, њен канонски продукат примарних фактора је цела функција чији је род једнак јединици.*

Јер, пошто је у размаку

$$(h, \infty), \quad \text{односно} \quad (-\infty, h)$$

непрестано

$$-\Delta_2(y) > 0,$$

а у исто време и

$$-\Delta_2(y) < M,$$

где је M један коначан позитиван број, вредност $-\Delta_2(y)$ ће бити у томе размаку позитивна и мања од M. Па кад се нуле α_k интеграла y једначине (237), где је

$$\varphi(x) = -\Delta_2(y),$$

упореде са нулама γ_k функције

$$u = \sin x\sqrt{M},$$

за коју је

$$-\Delta_2(y) > M,$$

налази се, према ранијем ставу, да две узастопне нуле α_k обухватају бар једну нулу γ_k, а ако се које α_k поклопи са којим γ_k, променљива x, растући, почевши од такве заједничке нуле (односно опадајући, почевши од ње), прво ће наићи на једну нулу γ_k, па тек затим на једну нулу α_k. То показује да нуле α_k *нису чешће* од нула γ_k, тј. да α_k расти, по својој апсолутној вредности, а са рашћењем ранга k, *већом брзином* (или бар толиком истом) од оне којом расту γ_k. Па пошто је ред

$$\frac{1}{|\gamma_k|^2}+\frac{1}{|\gamma_{k+1}|^2}+\frac{1}{|\gamma_{k+2}|^2}+\ldots=\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+2)^2}+\ldots\right]$$

конвергентан, биће конвергентан и ред

$$\frac{1}{|\alpha_k|^2}+\frac{1}{|\alpha_{k+1}|^2}+\frac{1}{|\alpha_{k+2}|^2}+\dots.$$

А пошто y нема неограничен број имагинарних нула, та ће конвергенција остати и кад се овом последњем реду придодаду и чланови који произлазе од евентуалних имагинарних нула те функције. То пак показује да је род целе функције $Y(x)$ *једнак јединици.*

Из става 5 се, нпр. изводи да:

Кад каква реална цела функција y, *која нема бескрајно много имагинарних нула, задовољава какву диференцијалну једначину*

$$y''+\varphi(x)y=0,$$

где функција φ *остаје коначна и позитивна, било за све позитивне, било за све негативне, било за све реалне вредности* x, *она се изражава као производ од једнога експоненцијалног фактора* $e^{G(x)}$ (*где је* G *цела функција*) *и једне целе функције без таквог фактора; а чији је род једнак јединици.*

Из истога става излази као последица и овај став:

6. став. – *Свака реална цела функција, за коју је род њеног канонског продукта већи од јединице, а који задовољава какву диференцијалну једначину* (237), *где функција* φ *има наведену особину, има бескрајно много реалних и бескрајно много имагинарних нула.*

Као специјалан случај важи овај став:

Свака реална цела функција, чији други релативни извод Δ_2 *остаје коначан и негативан, било за све позитивне, било за све негативне, било за све реалне вредности* x, *а чији канонски продукат има свој род већи од јединице, има бескрајно много и реалних и имагинарних нула.*

29. ПРИМЕНА НА СИСТЕМЕ СИМУЛТАНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

Међу једначинама једнога система симултаних једначина може их бити једна или више таквих из којих се може изразити други релативни извод Δ_n једне или више непознатих функција у систему, нпр. функције y_1, било као експлицитна и од интеграционих констаната независна функција променљиве x, било као одређена комбинација Φ те промењиве и једне или више непознатих функција $y_2, y_3, \ldots$ истог система, али из које се могу изводити закључци о знаку и вредности извода $\Delta_2(y_1)$. Тада се на такву функцију y_1 могу применити ставови о зависности између особина функције и њеног извода Δ_2, па изводити закључци о току функције, њеним нулама, бесконачницама, екстремумима, размаку варијација, асимтотном понашању итд.

Нека је, нпр. дат систем

$$\frac{dy_1}{dx} = \alpha y_2 y_3,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \beta y_1 y_3, \tag{238}$$

$$\frac{dy_3}{dx} = \gamma y_1 y_2.$$

(где су α, β, γ константе), на који се наилази у проблему кретања чврстог тела и чији се интеграли изражавају помоћу основних елиптичких функција.

$$\operatorname{sn} x, \quad \operatorname{cn} x, \quad \operatorname{dn} x.$$

Диференцијалењем прве једначине добија се

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \alpha\left(y_2\frac{dy_3}{dx} + y_3\frac{dy_2}{dx}\right),$$

што, према другој и трећој једначини, даје

$$\Delta_2(y_1) = \alpha(\gamma y_2^2 + \beta y_3^2), \tag{239}$$

а сличне се једначине добијају и за изводе

$$\Delta_2(y_2) \quad \text{и} \quad \Delta_2(y_3).$$

Кад су β и γ истога знака, израз (239) може бити једнак нули само за такву једну реалну вредност $x = x'$ за коју би било у исти мах

$$y_2 = 0, \quad y_3 = 0. \tag{240}$$

Али те две функције не могу бити једнаке нули за једну исту вредност $x = x'$. Јер, узастопним диференцијалењем једначина (238) добио би се за сваки извод функције y_1 по један израз који би и сам био једнак нули кад је испуњен услов (240), тј. за $x = x'$. А пошто вредност n-тог извода функције y_1 за $x = x'$, подељен са $n!$, представља коефицијенат A_n у развитку

$$y_1 = A_0 + A_1(x - x') + A_2(x - x')^2 + \ldots$$

(који би, према основној теореми о егзистенцији интеграла симултаних једначина, био конвергентан у близини вредности $x = x'$), то би сви ти коефицијенти, изузевши први, били једнаки нули, тј. интеграл y_1 би се идентички свео на константу. Према томе би се, и према првој једначини (238), једна од двеју функција y_2 и y_3 свела идентички на нулу, а према једначини (239) то би морало бити и са другом. У сваком случају, кад су две функције y_2 и y_3 праве функције променљиве x, оне не могу бити једнаке нули за једну исту вредност $x = x'$.

Из тога се закључује да апсолутна вредност извода $\Delta_2(y_1)$ остаје за све реалне вредности x *већа* од једног сталног позитивног броја. Од знака константе α и заједничког знака констаната β и γ зависиће тада то да ли ће функција y_1 бити монотона или осцилаторна, као и то у којим ће размацима она варирати за вредности x у једноме датом размаку (a, b).

У случају, нпр. кад све три константе α, β, γ имају исти знак, сва ће три релативна извода

$$\Delta_2(y_1), \quad \Delta_2(y_2), \quad \Delta_2(y_3)$$

за све реалне вредности x бити различни од нуле и позитивни, па, дакле, већи од једног утврђеног позитивног броја M. Све ће три функције y_1, y_2, y_3 бити осцилаторне, имати бескрајно много простих нула, бескрајно много максимума и минимума итд.

Уочимо сад општи случај система симултаних једначина

$$(241) \qquad \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, \ldots, y_m), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_m}{dx} &= f_m(x, y_1, \ldots, y_m). \end{aligned}$$

Диференцијалењем једне, ма које од њих, нпр. прве, добија се једначина облика

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x},$$

која према једначинама (241) постаје

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + f_1\frac{\partial f_1}{\partial y_1} + f_2\frac{\partial f_1}{\partial y_2} + \ldots + f_m\frac{\partial f_1}{\partial y_m}$$

према чему је

$$\Delta_2(y_1) = \frac{1}{y_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^{k=m} f_k \frac{\partial f_1}{\partial y_k}\right). \tag{242}$$

Кад год израз на десној страни једначине (242) зависи само од промењљиве x, или кад се може на њему самоме сазнати да он за вредности x у посматраноме размаку (a, b) задржава један исти знак, на интеграл y_1 се могу применити ставови о зависности квалитативних појединости функције и њеног другог релативног извода.

Такав је, нпр. случај са системом (238) за који тај израз има облик

$$\alpha(\gamma y_2^2 + \beta y_3^2),$$

па му се може знати знак за све реалне вредности x.

Једно пространо поље за истраживања те врсте отворено је једном теоремом коју су доказали руски математичари Апелрот и Лагутински[1], и која гласи:

Сваки систем симултаних алгебарских диференцијалних једначина, ма кога реда ове биле, сводљив је подесном сменом промењљивих на систем облика

$$\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = y_1\Phi_1, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\frac{dy_m}{dx} = y_m\Phi_m, \end{aligned} \tag{243}$$

где су

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m$$

линеарне форме по непознатим функцијама $y_1, y_2, \dots, y_m$

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m, \\ \Phi_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Phi_m &= a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mm}y_m, \end{aligned} \tag{244}$$

и где су коефицијенти a_{ik} стални цели бројеви од којих ни један није мањи од -1.

---

[1] Саопштење математичком друштву у Москви (Recueil mathématique t. 23, 1902; t. 27, 1909; t. 32, 1924).

Тако се, нпр. систем

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2 y_3,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = -y_1 y_3,$$
$$\frac{dy_3}{dx} = k^2 y_1 y_2,$$

који има за интеграле елиптичке функције

$$y_1 = \operatorname{sn}(x + C_1),$$
$$y_2 = \operatorname{cn}(x + C_2),$$
$$y_3 = \operatorname{dn}(x + C_3),$$

сменом

$$z_1 = \Delta_1(y_1) = \frac{d}{dx}\log y_1,$$
$$z_2 = \Delta_1(y_2) = \frac{d}{dx}\log y_2,$$
$$z_3 = \Delta_1(y_3) = \frac{d}{dx}\log y_3,$$

своди на систем

$$\frac{dz_1}{dx} = z_1(-z_1 + z_2 + z_3),$$
$$\frac{dz_2}{dx} = z_2(z_1 - z_2 + z_3),$$
$$\frac{dz_3}{dx} = z_3(z_1 + z_2 - z_3).$$

У општем случају, диференцијалећи једначине (243) и смењујући у добијеном резултату прве изводе функција y_k њиховим вредностима из самих тих једначина, систем се може написати у облику

$$(245)\qquad \begin{aligned} &\frac{d^2 y_1}{dx^2} = y_1 H_1,\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &\frac{d^2 y_m}{dx2} = y_m H_m, \end{aligned}$$

где су изрази

$$H_1, H_1, \dots, H_m$$

квадратне форме по функцијама $y_1, \dots, y_m$ са коефицијентима који су цели бројеви.

Са друге стране, форма H_k може се увек изразити као збир квадрата линеарних форми по $y_1, \ldots, y_m$, тако да број p тих квадрата не премаша m, и тада је

$$(246)\qquad \begin{aligned} H_1 &= Y_{11}^2 + Y_{21}^2 + \ldots + Y_{p1}^2, \\ H_2 &= Y_{12}^2 + Y_{22}^2 + \ldots + Y_{p2}^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H_m &= Y_{1m}^2 + Y_{2m}^2 + \ldots + Y_{pm}^2, \end{aligned}$$

где су Y_{ik} поменуте линеарне форме.

Из тога се, у погледу израза за други релативни извод, изводе ови ставови:

1. став: *сваки сисӣем симулӣаних алīебарских диференцијалних једначина сводљив је, ӣодесном сменом ӣромењљивих, на сисӣем облика*

$$(247)\qquad \begin{aligned} \Delta_1(y_1) &= \Phi_1, \\ \Delta_1(y_2) &= \Phi_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \Delta_1(y_m) &= \Phi_m, \end{aligned}$$

īде су

$$(248)\qquad \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$$

линеарне хомоīене функције ӣромењљивих

$$(249)\qquad y_1, y_2, \ldots, y_m,$$

чији су коефицијенӣи сӣални цели бројеви оd којих ни један није мањи –1.

Према једној теореми коју је доказао Апелрот, то свођење увек се може извршити и тако да коефицијенти форми Φ_k *буду сви једнаки јединици или нули.* Кад је такво свођење извршено, може се, нпр. тврдити да кад у једноме размаку (a, b) вредности независно промењљиве количине x постоји један систем интеграла (249) који сви имају у томе размаку исти знак, сви ти интеграли имају у (a, b) *моноӣон ӣок*, непрестано растући или непрестано опадајући, према томе, да ли су они у томе размаку позитивни или негативни.

А треба још додати да се Апелротова трансформација извршује само сменом функција y_k која оставља непромењену првобитну независно промењиву количину x.

2. став: *сваки систем симултаних алгебарских диференцијалних једначина сводљив је, подесном сменом промењивих, а без измене првобитне независно промењиве количине* x, *на систем облика*

$$\begin{aligned} &\Delta_2(y_1) = H_1, \\ (250) \qquad &\Delta_2(y_2) = H_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Delta_2(y_m) = H_m, \end{aligned}$$

где је сваки од израза

$$(251) \qquad H_1, H_2, \ldots, H_m$$

једнак збиру квадрата линеарних и хомогених израза $\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \mathrm{Y}_3, \ldots$, *по* $\mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{m}$, *а чији су коефицијенти сви једнаки јединици или нули.*

У случају кад су линеарне форме Y_k све реалне и кад једначине

$$(252) \qquad Y_1 = 0, \quad Y_2 = 0, \quad Y_3 = 0, \ldots$$

нису у међусобном складу, одговарајући извод $\Delta_2(y)$ је различан од нуле и позитиван за све вредности x од $-\infty$ до $+\infty$. Према томе, систем (250) нема ни један осцилаторни интеграл y_k. Сваки интеграл y_k, који је за реалне вредности x коначан и континуалан (као и његови изводи y_k' и y_k''), непрестано и монотоно расти.

У случају кад су форме Y_k све чисто имагинарне, а једначине (252) нису у међусобном складу, одговарајући извод $\Delta_2(y)$ је различан од нуле и негативан за све реалне вредности x. Према томе, сваки интеграл y_k, који је за реалне вредности x коначан и континуалан, *осцилаторан је и има бескрајно много реалних простих нула.* У случајевима кад су интеграли целе функције промењиве x, њихов је род (genre) већи од нуле.

30. ДВА ПРОБЛЕМА О РЕЛАТИВНОМ ИЗВОДУ Δ_2

Проблеми, који ће овде бити решени, од интереса су за теорију другога релативног извода $\Delta_2(y)$ и за његове аналитичке и конкретне примене.

Први проблем. *Одредити све диференцијалне једначине првога реда*

(253) $$y' = f(x, y)$$

за које је други релативни извод $\Delta_2(y)$ *општег интеграла* у *независан од интеграционе константе.*

Услов задатка тражи да буде

(254) $$\Delta_2(y) = \tilde{\omega}(x),$$

где је $\tilde{\omega}$ функција само променљиве x, независна од интеграционе константе. Из једначине

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y} = \tilde{\omega}(x)y$$

види се да су тражене једначине оне *за које се израз*

(255) $$\frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

своди на једну функцију само променљиве x.

Тако, нпр. за једначину

(256) $$y'^2 + y^2 = \varphi(x)$$

израз (255) има облик

$$\frac{\varphi'}{2y\sqrt{\varphi - y^2}} - 1;$$

да би он био независан од y, потребно је и довољно да буде φ = const., чему одговара

$$\tilde{\omega}(x) = \text{const.} = 1.$$

Једина једначина (256), чији општи интеграл испуњава тражени услов, је

$$y'^2 + y^2 = a, \quad a = \text{const.} > 0,$$

чији је општи интеграл

$$y = C\sin x + \sqrt{a^2 - C^2}\cos x$$

осцилаторан, као што захтева извод $\Delta_2(y)$.

Да би линеарна једначина

$$y' = uy + v,$$

(где су u и v функције променљиве x) испуњавала горњи услов, потребно је и довољно да буде

$$v = Ae^{-\int udx}, \quad A = \text{const.},$$

и тада је

$$\Delta_2(y) = u' + u^2.$$

Да би једначина

$$y' = uy + \sqrt{v + wy^2}$$

(где су u, v, w функције променљиве x) испуњавала услов, потребно је и довољно да буде

$$w' + 4uv = 0,$$

$$v' + 2uw = 0,$$

тако да се u и v изражавају помоћу w обрасцима

$$u = -\frac{\sqrt{2}}{1}\frac{w}{\sqrt{w^2 + A}},$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{w^2 + A},$$

и тада је

$$\Delta_2(y) = u' + u^2 + w.$$

Једначина такве врсте, нпр.

$$y' = -\frac{1}{2}\frac{\varphi'}{\varphi}y + \sqrt{\varphi - k\varphi^2 y^2}$$

(где је φ функција променљиве x) има за општи интеграл

$$y = k\sqrt{\varphi}\cdot\sin\left(k\int\varphi dx + C\right),$$

а за други релативни извод

$$\Delta_2(y) = \frac{3}{4}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 - k^2\varphi^2 - \frac{1}{2}\frac{\varphi''}{\varphi}.$$

Задржимо се на општем задатку: *одредити најопштији облик једначина* (253) *за које је извод* $\Delta_2(y)$ *независан од интеграционе константе.*

Пошто општи интеграл y такве једначине, мора у исти мах бити и један интеграл линеарне једначине другога реда

$$y'' - \tilde{\omega}(x)y = 0, \tag{257}$$

чији је општи интеграл облика

$$y = C_1\lambda + C_2\mu, \tag{258}$$

то и он мора бити облика (258), само што тада интеграционе константе C_1 и C_2 морају бити међу собом везане каквом утврђеном релацијом

$$\Phi(C_1, C_2) = 0. \tag{259}$$

Из двеју једначина (258) и

$$y = C_1\lambda' + C_2\mu' \tag{260}$$

добија се

$$C_1 = \frac{\mu' y - \mu y'}{\mu'\lambda - \mu\lambda'},$$
$$C_2 = \frac{\lambda' y - \lambda y'}{\mu'\lambda - \mu\lambda'},$$

и, према томе, диференцијална једначина мора бити облика

$$\Phi\left(\frac{\mu' y - \mu y'}{\mu'\lambda - \mu\lambda'}, \frac{\lambda' y - \lambda y'}{\mu'\lambda - \mu\lambda'}\right) = 0.$$

Ако се стави да је

$$\frac{\mu'}{\mu'\lambda - \mu\lambda'} = \alpha, \quad -\frac{\mu}{\mu'\lambda - \mu\lambda'} = \beta,$$
$$\frac{\lambda'}{\mu'\lambda - \mu\lambda'} = \gamma, \quad -\frac{\lambda}{\mu'\lambda - \mu\lambda'} = \delta,$$

добија се најпре да је

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\mu'}{\mu}, \quad \frac{\gamma}{\delta} = -\frac{\lambda'}{\lambda},$$

а затим

$$\lambda' = \frac{\gamma}{\beta\gamma - \alpha\delta}, \quad \lambda = \frac{\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma},$$
$$\mu' = \frac{\alpha}{\beta\gamma - \alpha\delta}, \quad \mu = \frac{\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma},$$

а из тога се изводи овај став:

Најопштија једначина првога реда, за коју $\Delta_2(y)$ *не зависи од интеграционе константе, је сводљива на облик*

$$\Phi(\alpha y + \beta y', \gamma y + \delta y') = 0, \tag{261}$$

где је Φ *ма каква функција двеју променљивих, а* α, β, γ, δ *функције променљиве* x *међу собом везане двема релацијама*

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\beta\gamma - \alpha\delta} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma}\right), \\ \frac{\alpha}{\beta\gamma - \alpha\delta} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma}\right). \end{aligned} \tag{262}$$

Кад су утврђене функције α, β, γ, δ што одговарају једној датој једначини овде посматраног типа, биће

$$\begin{aligned} \lambda &= e^{-\int \frac{\alpha}{\beta} dx}, \\ \mu &= e^{-\int \frac{\gamma}{\delta} dx}, \end{aligned} \tag{263}$$

и општи интеграл такве једначине је

$$y = C_1 e^{\int \frac{\alpha}{\beta} dx} + C_2 e^{-\int \frac{\gamma}{\delta} dx}, \tag{264}$$

где су произвољне константе C_1 и C_2 везане одговарајућом релацијом

$$\Phi(C_1, C_2) = 0.$$

На пример, за једначину

$$y'^2 + y^2 - 1 = 0$$

је

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda = \sin x, \quad \mu = \cos x, \\ \mu'\lambda - \lambda'\mu = -1, \\ \alpha = \sin x, \quad \beta = \cos x, \\ \gamma = -\cos x, \ \delta = \sin x, \\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \\ \Delta_2(y) = -1. \end{array} \right. \tag{265}$$

а релација $\Phi = 0$ је

$$C_1^2 + C_2^2 - 1 = 0.$$

До горњег става се долази и интеграцијом парцијалне једначине првог реда, везане за проблем о коме је реч.

Уочимо најопштију једначину првога реда

$$F(x, y, y') = 0 \tag{266}$$

и потражимо услове који треба да су испуњени па да њен општи интеграл задовољава једначину облика

$$y'' = \tilde{\omega}(x)y; \tag{267}$$

тада се налази да функција

$$z = F(x, y, y') \tag{268}$$

треба да задовољи парцијалну једначину

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}y' + \tilde{\omega}(x)y\frac{\partial z}{\partial y'} = 0. \tag{269}$$

Ова се своди на систем

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y'} = \frac{dy'}{\tilde{\omega}(x)y},$$

еквивалентном систему

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = \tilde{\omega}(x)y,$$

чија су два интеграла облика (258), а последица тога је горњи став који, према томе, важи и за једначину (266).

Тако, нпр. за једначину

$$y'^2\cos^2 x + 2yy'\sin x\cos x + y'\sin x + y^2\sin^2 x - y\cos x = 0$$

имаће се све једначине (265), само што је релација $\Phi = 0$ облика

$$C_1^2 - C_2 = 0,$$

а општи интеграл

$$y = C\sin x + C^2\cos x \quad \text{са} \quad \Delta_2(y) = -1.$$

Проблем да се на датој једначини првога реда распозна да ли она испуњава горње погодбе, може се знатно упростити непосредним проучавањем интегралних сингуларитета на самој једначини. Пошто једначине, о којима је реч, имају општи интеграл облика

$$y = C_1\lambda + C_2\mu,$$

где су интеграционе константе C_1 и C_2 везане једном релацијом, то су *сви интегрални сингуларитети за такве једначине независни од тих констаната*, тј. стални за све партикуларне интеграле једначине. Такве се једначине могу тражити само међу онима које имају сталне сингуларитете, а у аналитичкој теорији диференцијалних једначина првога реда познате су методе помоћу којих се за дату једначину може распознати да ли она припада тој класи једначина, или не.

Тако, нпр. једно просто правило даје у мноштву случајева могућност да се проблем реши нашавши да дата једначина нема свој извод $\Delta_2(y)$ независан од интеграционе константе. То је ово:

Нека је дата диференцијална једначина написана у облику

$$\sum_{i=0}^{i=m} F_i(x, y)y'^{m-1} = 0,$$

где су F_i полиноми по y чији су коефицијенти какве било функције променљиве x. Да би полови (и у опште бесконачнице) општега интеграла y били независни од интеграционе константе, *потребно је и довољно да, означивши са* k_i *степен полинома* F_i *по* y, *буде*

$$k_1 - k_0 \leq 1,$$

$$k_2 - k_0 \leq 2,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$k_m - k_0 \leq m.$$

Ако за дату једначину ма и једна од тих m неједначина није задовољена, она не припада траженој класи.

До таквих негативних резултата доводи и Fuchs-ова метода за распознавање на датој једначини да ли су њени алгебарски критички сингуларитети стални или не.

Тако се, нпр. долази до ових закључака:

Међу једначинама првог реда и првог степена

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

где су P и Q полиноми по y, једина за коју извод $\Delta_2(y)$ не зависи од интеграционе константе, може бити линеарна једначина

$$y' = f(x)y + \varphi(x),$$

и то под условом да функције $f(x)$ и $\varphi(x)$ испуњавају извесне погодбе.

Међу биномним једначинама

$$y'^m = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

са таквом особином једина је, поред линеарне, једначина

$$y'^2 = f(x)(y^2 - a^2), \quad a = \text{const.}$$

чији је општи интеграл

$$y = Ce^{\int\sqrt{f}dx} + \frac{a^2}{4C}e^{-\int\sqrt{f}dx}$$

која се сменом

$$i\sqrt{f(x)}dx = dt$$

своди на једначину

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y^2 = a^2, \tag{270}$$

а њен општи интеграл на

$$y = C_1 \sin t + C_2 \cos t,$$

где су C_1 и C_2 произвољне константе везане релацијом

$$C_1^2 + C_2^2 - a^2 = 0,$$

па је за једначину (270)

$$\Delta_2(y) = -1.$$

Други проблем. *Каква се трансформација*

$$x = \varphi(t), \quad y = z\psi(t) \tag{271}$$

треба извршити на датој линеарној једначини

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)y = 0, \tag{272}$$

па да општи интеграл тако добијене диференцијалне једначине има свој други релативни извод $\Delta_2(\mathrm{z})$ *независан од интеграционих констаната?*

Из једначина (271) добија се

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\left(\frac{dz}{dt}\psi+z\psi'\right)\cdot\frac{1}{\varphi'},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\left[\varphi'\psi\frac{d^2z}{dt^2}+(2\psi'\varphi'-\psi\varphi'')\frac{dz}{dt}+(\psi''\varphi'-\varphi''\psi')\right]\cdot\frac{1}{\varphi'^3},$$

из чега се, заменом у (272), добија једначина

$$F_1(t)\frac{d^2z}{dt^2}+F_2(t)\frac{dz}{dt}+F_3(t)z=0, \tag{273}$$

где је

$$\begin{aligned} F_1(t)&=\varphi'\psi,\\ F_2(t)&=2\psi'\varphi'-\psi\varphi'',\\ F_3(t)&=\psi''\varphi'-\psi'\varphi''+f(\varphi)\psi\varphi'^3. \end{aligned} \tag{274}$$

Кад је

$$2\psi'\varphi'-\psi\varphi''=0,$$

тј.

$$\varphi'(t)=A[\psi(t)]^2,\qquad A=\text{const.},$$

биће $F_2=0$, па се једначина (273) своди на

$$\Phi_1\frac{d^2z}{dt^2}+\Phi_2 z=0,$$

где је

$$\begin{aligned} \Phi_1&=A\psi^3,\\ \Phi_2&=A\psi^2\psi''-2A\psi\psi'^2+A^3f(\varphi)\psi^7. \end{aligned}$$

Тада је

$$\begin{aligned} \Delta_2(z)&=-\frac{\Phi_2(t)}{\Phi_1(t)}=2\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2-\frac{\psi''}{\psi}-A^2f(\varphi)\psi^4=\\ &=2\Delta_1(\psi)-\Delta_2(\psi)-A^2f(\varphi)\psi^4, \end{aligned}$$

па је, према томе, извод $\Delta_2(z)$ независан од интеграционих констаната.

Према томе има се овако решење проблема: *треба да су функције φ и ψ везане релацијом*

$$\varphi'-A\psi^2=0,$$

где је A *каква константа.*

Подсетићемо на то да трансформација (271) игра важну улогу у теорији линеарних диференцијалних једначина уопште, а нарочито у теорији линеарних једначина другога реда.

ПЕТИ ОДЕЉАК

ЛЕТИМИЧНИ ПОГЛЕД НА КОНКРЕТНЕ ПРИМЕНЕ АЛГОРИТМА Δ_n

У многобројним обрасцима геометрије, рационалне механике, небеске механике, математичке физике и математичке феноменологије, функције са којима се има посла фигуришу у облику својих релативних извода Δ_n. И онда, не само да тај алгоритам упрошћава обрасце и релације, већ се из његових особина може закључивати о особинама функција на које се односи и решавати проблеми који би били нерешљиви кад би се морале извршивати често неизвршљиве или компликоване интеграције.

Овде ће бити наведено неколико примера такве интервенције тога алгоритма у геометријским, механичким, физичким и феноменолошким проблемима.

31. ГЕОМЕТРИЈСКИ ПРОБЛЕМИ

Од реалтивних извода Δ_n једини први извод $\Delta_1(y)$ има одређено геометријско значење, везано за криву линију

$$y = f(x)$$

на коју се односи. Његова реципрочна вредност

$$s = \frac{1}{\Delta_1(y)}$$

представља дужину субтангенте криве y у њеној тачки (x, y).

Али, разноврсни геометријски фактори изражавају се као аналитичке (експлицитне, диференцијалне или интегралне) комбинације извода $\Delta_1(y)$ и $\Delta_2(y)$, и обрнуто: у мноштву случајева се $\Delta_1(y)$ и $\Delta_2(y)$ изражавају помоћу геометријских фактора криве на коју се односе. Тако:

1. У правоуглим координатама (x, y) полупречник кривине r криве y изражава се помоћу

$$y, \quad \Delta_1(y), \quad \Delta_2(y)$$

у облику

$$r = \frac{[1+y^2\Delta_1^2(y)]^{\frac{3}{2}}}{y\Delta_2(y)}.$$

У поларним координатама (ρ, θ) је

$$r = \frac{1}{\rho}\frac{[1+\Delta_1'(\rho)^2]^{\frac{3}{2}}}{1+2\Delta_1^2(\rho)-\Delta_2(\rho)},$$

а у координатама (ρ, s), где је s лук криве рачунат од једне утврђене почетне тачке, је

$$r = \frac{[1-\rho^2\Delta_1^2(\rho)]^{\frac{1}{2}}}{\Delta_2(\rho)-\Delta_1^2(\rho)-\dfrac{1}{\rho}}.$$

2. Кад је крива дата у поларним координатама (θ, ρ), угао α, који заклапају међу собом дирке на крајевима θ_1 и θ_2 криве, изражава се обрасцем

$$\alpha = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1+\Delta_2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{1+\Delta_1^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}d\theta.$$

3. Кад је крива дата у тангенцијалним координатама, тако да је једначина дирке у тачки (x, y) облика

$$x\sin\alpha - y\cos\alpha = p,$$

полупречник кривине r изражава се обрасцем

$$r = \frac{d^2p}{d\alpha^2} + p.$$

Проблем да се у систему (α, p) одреде све криве које имају полупречник r као дату функцију $f(\alpha)$ координате α, своди се на интеграцију једначине другога реда

$$\frac{d^2p}{d\alpha^2}+p=f(\alpha).$$

Ако је

$$p=f(\alpha)$$

једначина једне од тражених кривих, све остале ће бити дате обрасцем

$$p=f(\alpha)+Y,$$

где је Y најопштија функција за коју је

$$\Delta_2(Y)=-1,$$

а то је

$$Y=C_1\sin\alpha+C_2\cos\alpha.$$

Као што се у исти мах види, *у тангенцијалним координатама* (α, p) *вредност другог релативног извода* $\Delta_2(p)$ *једнака је количнику* $\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{p}}$ *умањеном за јединицу.*

Кад, нпр. док се тачка M креће дуж лука M_1M_2 једне такве криве, полупречник кривине r остаје непрестано мањи од p, биће дуж тога лука

$$\Delta_n(p)<0,$$

па ако се са l означи дужина размака (α_1,α_2), где су α_1 и α_2 вредности координате α у крајњим тачкама лука M_1M_2, *координата* p *ће променити знак дуж тога лука бар онолико пута колико има целих јединица у најмањој вредности коју добија израз*

$$\frac{l}{\pi}\sqrt{1-\frac{r}{p}}$$

дуж истога лука.

4. Уочимо све криве линије добијене варијацијом констаната C_1 и C_2 у каквоме изразу

$$y=C_1y_1+C_2y_2, \tag{275}$$

где су y_1 и y_2 утврђене функције независно променљиве количине x. Нека су

$$x=\alpha,\quad y=\beta$$

координате једне утврђене тачке P у равни xOy, па потражимо геометријско место центара кривине кривих (275) што пролазе кроз тачку P.

Ако се са ξ и η означе координате центра кривине једне од таквих кривих у тачки (x, y) те криве, биће према познатим обрасцима

$$\xi = x - \frac{(1+y'^2)y'}{y''}, \qquad (276)$$
$$\eta = y + \frac{(1+y'^2)}{y''},$$

а полупречник кривине R исте криве у тој тачки биће изражен у исти мах и једним и другим изразом

$$R = \pm\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$
$$R = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2},$$

тако да је

$$(277) \qquad \pm\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}.$$

Знак на левој страни обрасца (277) треба изабрати тако да израз на тој страни буде позитиван.

Међутим, из једначина (276) је

$$y' = -\frac{\xi - x}{\eta - y},$$

па се заменом у (277) добија

$$(278) \qquad y'' = \pm\frac{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}{(\eta - y)^3}.$$

Посматрајмо сад функције y за које други релативни извод $\Delta_2(y)$ има за вредност дату функцију $f(x)$ променљиве x. Најопштија функција те врсте је облика (275), па, дакле, за сваку од тих функција важе обрасци (276), (277), (278). Заменом вредности (278) у обрасцу

$$\Delta_2(y) = \frac{y''}{y} = f(x)$$

добија се једначина

$$(279) \qquad (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \mp yf(x)(\eta - y)^3 = 0.$$

Та једначина исказује везу између једне произвољне тачке $M(x, y)$ посматране опште криве y и центра кривине $Q(\xi, \eta)$ једне ма које специјалне криве y, која има за $\Delta_2(y)$ функцију $f(x)$, у тачки M.

Узмимо сад за тачку M утврђену тачку P, сменивши у њој

$$x = \alpha, \quad y = \beta,$$

па ће, по координатама ξ, η, једначина (279) представљати утврђену криву линију трећега степена

$$\eta^3 + a\eta^2 + b\eta + c\xi^2 + h\xi + k = 0, \tag{280}$$

где коефицијенти

$$a, b, c, h, k,$$

стални за једну утврђену тачку P, имају за вредности

$$\begin{aligned} a &= \frac{\mp 1 - 3\beta^2 f(\alpha)}{\beta f(\alpha)}, \\ b &= \frac{\pm 2 + 3\beta^2 f(\alpha)}{f(\alpha)}, \\ c &= \mp\frac{1}{\beta f(\alpha)}, \\ h &= \pm\frac{2\alpha}{\beta f(\alpha)}, \\ k &= \frac{\mp(\alpha^2 + \beta^2) - \beta^4 f(\alpha)}{\beta f(\alpha)}, \end{aligned} \tag{281}$$

где горњи знаци одговарају случају $y'' < 0$, а доњи случају $y'' > 0$.

А то доводи до овога става:

Геометријско место центара кривине у утврђеној тачки $P(\alpha, \beta)$ *равни* xOy, *за све криве за које је извод* $\Delta_2(y)$ *једнак једној датој функцији* $f(x)$ *променљиве* x, *је крива линија трећег степена* (280), *чији коефицијенти зависе од тачке* P *на начин исказан обрасцима* (281).

Потражимо, нпр. геометријско место центара кривине свију синусоида

$$y = C_1 \sin(x + C_2),$$

што пролазе кроз тачку P чије су координате $\alpha = \beta = 1$. Из

$$\Delta_2(y) = -1$$

види се да је у тој тачки

$$y'' < 0, \quad f(\alpha) = -1,$$

па је, према томе,

$$a = \frac{-1+3}{-1} = -2$$

$$b = 1, \quad c = 1, \quad h = -2,$$

$$k = \frac{-2+1}{-1} = 1,$$

и тражено геометријско место је крива трећега степена

$$\eta^3 - 2\eta^2 + \eta + \xi^2 - 2\xi + 1 = 0.$$

5. Кад су z, r, θ семи-поларне координате једне тачке у простору, једначина

$$\Phi(z) = a\theta + F(r), \quad a = \text{const.}, \tag{282}$$

представља врло пространу класу површина која обухвата као специјалне случајеве: обртне, праволинијске, хеликоидалне и коноидне површине. Све су те површине описане кад се равна крива

$$a\theta + F(r) = 0$$

креће у простору тако да њена раван буде непрестано управна на осовини Oz, а она се за то време окреће око Oz по каквоме закону који је одређен датом релацијом између ординате z и обртног угла θ.

Тражећи да одреди оне од обртних површина (282) чије асимтотне линије леже на двама системима коноида дефинисаних једначинама

$$\frac{d\theta}{dz} = \sqrt{\psi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{d\theta}{dz} = -\sqrt{\psi(x)}, \tag{283}$$

где је ψ дата функција променљиве z, Buhl[1] је нашао да се тражене линије добијају у облику општега интеграла једначине

$$\frac{d^2 r}{dz^2} - \psi(z) r = 0. \tag{284}$$

А из тога се добија овај став, који у неколико прецизира геометријско значење извода Δ_2 за површине у простору:

---

[1] Buhl: *Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent par quadratures.* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1909, p. 337–354).

Једначина

$$r = \Delta_2(z)$$

дефинише у семи-поларном координатном систему (z, r, θ) *оне обртне површине чије асимптотне линије леже на коноидима*

$$\Delta_2(r) = \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2$$

кад се извод $\Delta_2(\mathrm{r})$ *изрази као функција координате* z *помоћу једначине*

$$(285) \qquad \Delta_2(r) = \psi(z),$$

где је $\psi(\mathrm{z})$ *функција што на горњи начин дефинише посматране коноиде.*

Задржимо се сад на обрнутоме проблему; нека је дата једначина

$$(286) \qquad r = \Phi(z)$$

која изражава координату r као функцију координате z, а чиме су одређена поменута два система коноида, јер ће ови тада бити одређени једначином

$$(287) \qquad \Delta_2(\Phi) = \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2.$$

Једначина (285) одређује извод $\Delta_2(r)$ као функцију $\psi(z)$ координате z, а пошто једначина (286) даје једну функцију r која има такав извод, имаће се и најопштија таква функција у облику

$$(288) \qquad r = C_1\Phi(z) + C_2\int\frac{dz}{[\Phi(z)]^2},$$

из чега следује овај став:

Кад је дата функција $\Phi(\mathrm{z})$, *обртне површине чије асимптотне линије леже на коноидима* (287) *јесу оне које су дефинисане једначином* (288).

И следећи став доводи други релативни извод Δ_2 у везу са асимтотним линијама површина.

Три једначине

$$(289) \qquad \begin{aligned} x &= uf_1(v), \\ y &= uf_2(v), \\ z &= cv, \qquad (c = \text{const.}) \end{aligned}$$

које изражавају правоугле координате x, y, z у простору као функције два параметра u, v, представљају једну коноидну површину. И тада:

За све такве коноидне површине, за које функције f_1 *и* f_2 *имају исти други релативни извод* Δ_2, *криве* $\mathrm{u} = \mathrm{const.}$ *су асимптотне линије површине.*

То следује непосредно из Lerch-овог става[1] да кад се за f_1 и f_2 узму два ма која партикуларна интеграла једне ма које диференцијалне једначине облика

$$\frac{d^2z}{dv^2} - \Phi(v)z = 0,$$

криве линије $u = \mathrm{const.}$ су асимптотне линије коноидне површине дефинисане једначинама (289).

6. На извод Δ_2 се наилази и при одредби линија највећег нагиба на површинама у простору.

Уочимо, нпр. површину

$$z = 5x^2y - y^5,$$

где је осовина Ox у правоуглом координатном систему вертикална. Ту површину описију параболе

$$y = C, \quad z = 5Cx^2 - C^5, \quad C = \mathrm{const.}$$

које се крећу тако да непрестано секу две сталне параболе у равни xOy.

Тражећи линије нагиба на тој површини, налази се да су ове одређене општим интегралом Riccati-еве једначине

$$\frac{du}{dt} - u^2 - \frac{1}{t} = 0$$

пошто се у њему смени

$$t = \frac{x^2}{4}, \quad u = \frac{2}{y^2}.$$

Сменом

$$u = -\frac{1}{v}\frac{dv}{dt}$$

функција v постаје општи интеграл једначине

---

[1] M. Lerch: *Asymptotische Linien auf einem geraden Konoid* (Časopis, herausg von Verein. böhm. Mathematiker, Prag, 1912, p. 47).

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{v}{t}=0.$$

Као што се види, тражене линије највећега нагиба налазе се одређујући најопштију функцију v за коју извод $\Delta_2(v)$ има за израз

$$\Delta_2(v)=-\frac{1}{t},$$

па се у једначини

$$\Delta_1(v)=-\frac{2}{y^2}$$

смени у тако нађеној функцији v променљива t изразом $\frac{x^2}{4}$.

7. Други релативни извод Δ_2 има нарочити значај у теорији геодезијских линија на површинама, кад су ове аналитички изражене у ортогоналном систему (u, v) таквом, да су криве

$$v = \text{const.}$$

геодезијске линије површине, а криве

$$u = \text{const.}$$

њихове ортогоналне трајекторије.

Елеменат лука јавља се тада у облику

$$ds^2 = du^2 + Gdv^2, \tag{290}$$

где је G одређена функција променљивих u и v, везана за посматрану класу површина.

Функција G увек је позитивна јер, као што се зна, елеменат ds^2 за једну реалну површину никад није распадљив на два реална чиниоца. Та функција игра важну улогу у теорији површина, јер се сви геометријски фактори ових изражавају помоћу те функције и њених делимичних извода по u и v.

Нека је

$$v = \text{const.} = \alpha$$

једна уочена геодезијска линија посматране површине. Означимо са σ тоталну кривину површине у њеној тачки $M(u, v)$, тако да је

$$\sigma=\frac{1}{RR'},$$

где су R и R' главни полупречници кривине у тачки M. Према Gauss-овом обрасцу је

$$\sigma = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$$

и према томе

$$\sigma = -\Delta_2(\sqrt{G}) \tag{291}$$

имајући на уму да се диференцијалење врши по u.

Из тога се изводи став:

Тотална кривина површине у њеној произвољној тачки (u, v) *једнака је другом релативном изводу функције* $\sqrt{\mathrm{G}}$ *по променљивој* u, *пошто се томе изводу промени знак.*

Кад је утврђена вредност α која одређује посматрану геодезијску линију површине, кривина σ зависи само од променљиве u. Кад је при том позната функција G, биће позната и кривина σ у свакој тачки површине, и то непосредно у облику другога релативног извода функције $\sqrt{G}$.

Обрнуто, кад је позната кривина σ као функција променљивих u и v, функција $\sqrt{G}$ биће одређена као функција која одговара једноме датом $\Delta_2(y)$, што доводи до диференцијалне једначине другога реда облика

$$4u^2 \frac{d^2 y}{du^2} + \varphi(u, v) y = 0, \tag{292}$$

где v игра улогу променљивог параметра, а u улогу интеграционе променљиве количине; параметар v, за једну посматрану геодезијску линију има за вредност $v = \alpha$.

Општи интеграл једначине (292) је облика

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

а функција G је облика

$$G = (C_1 y_1 + C_2 y_2)^2,$$

где су y_1 и y_2 два њена партикуларна интеграла, а C_1 и C_2 две произвољне константе.

Облик везе између тоталне кривине σ и функције G доводи до могућности да се ставови о зависности особина једне функције и њеног извода Δ_2 примене на мноштво проблема о геодезијским линјама површина. О таквим применама може се добити идеја из овога што следује.

Означимо са λ четвороструки производ тоталне кривине σ површине у посматраној тачки $M(u, v)$ и квадрата лука

$$M_1 M_2 = u$$

једне геодезијске линије што пролази кроз M и кроз једну утврђену тачку M_0 на површини, тако да је

$$\lambda = 4\sigma u^2.$$

Број λ је једнак нули у почетној тачки M_0 лука; кад се тачка M почне удаљавати по луку, λ почиње да расти по апсолутној вредности, мењајући се упоредо са променама кривине σ и дужине лука.

Тако дефинисан број λ је независан од измена координатног система и избора јединица мера: *то је један апсолутан број*. То произилази из тога што је он производ два фактора, једног σ чија је димензија L^{-2}, и другог u^2 чија је димензија L^2, а и један и други фактор независни су од координатног система; са друге стране, пошто производ има димензију L^0, он је независан од јединица мера. *Број λ је, дакле, једна инваријанта површине у односу на координатне системе и на јединице мера.* Он зависи само до интимних особина површине и од посматране геодезијске линије коју карактерише.

Број λ је позитиван или негативан, према томе, да ли је тотална кривина површине дуж лука *и* позитивна или негативна. Да би он био по целој површини једнак нули, *потребно је и довољно да то буде развојна површина*. Јер за то је потребно да буде по целој површини $\sigma = 0$, а та особина карактерише само развојне површине.

Из обрасца

$$\lambda = 4\sigma u^2 = -4\Delta_2(\sqrt{G})\, u^2$$

види се *да је број λ једнак четвороструком квадрату лука посматране геодезијске линије, помноженом са другим релативним изводом функције $\sqrt{\mathrm{G}}$ по промењљивој u, а пошто се томе изводу промени знак.*

А пошто је

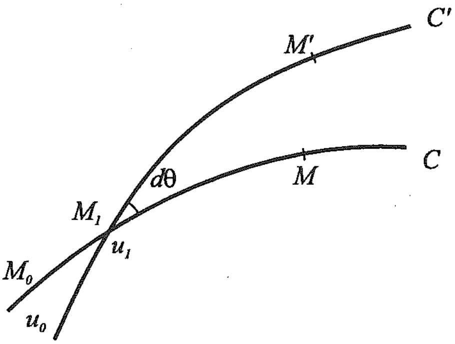
$$-\Delta_2(\sqrt{G}) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{G^2}\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 - \frac{2}{G}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right],$$

то се број λ изражава, помоћу првог и другог релативног извода функције G по промењљивој u, обрасцем

$$\lambda = [\Delta_1^2(G) - 2G\Delta_2(G)]\, u^2,$$

у коме треба сменити параметар v константом α која карактерише посматрану геодезијску линију.

Апсолутни број λ појављује се у извесним проблемима теорије геодезијских линија на површинама, као што је, нпр. проблем *стварно најкраћега пута између двеју тачака на површини.* А било би од интереса прерадити решења многих проблема те теорије у координатном систему (λ, u). Те се координате по кашто сасвим природно јављају у извесним проблемима те теорије, као што је, нпр. проблем о коме ће, примера ради, бити реч у овоме што следује.



Сл. 14 bis

Уочимо две бескрајно блиске геодезијске линије C и C', што пролазе кроз тачку $M_1(u, v)$ површине. Према Jacobi-евој теореми лук M_1M линије C биће најкраћи пут између тачака M_1 и M ако између тих тачака геодезијска линија C' не пресеца линију C. То ће, према томе, бити најкраћи пут за сваку област површине на којој је тотална кривина непрестано *негативна*. Лук ће престати бити најкраћи пут ако се, идући по њему, пре него што се наиђе на тачку M, наиђе на једну пресечну тачку линија C и C'.

Према једној теореми Ossian-Bonnet-а, за једну површину чија је тотална кривина свуда *позитивна* и већа од једнога броја a, геодезијска линија престаје бити најкраћи пут дуж једног лука дужег од $\frac{\pi}{\sqrt{a}}$.

До тих се теорема, као и до других прецизнијих, може доћи проучавањем варијација броја λ дуж једне геодезијске линије, а применом ставова о зависности нула једне функције од њеног другог релативног извода. Тако:

Означимо са p променљиво растојање

$$p = MM'$$

геодезијске линије C од C'. Према Gauss-овом обрасцу, кад се p сматра као функција дужине лука

$$u = M_1M$$

геодезијске линије, биће

$$\sigma = -\Delta_2(p).$$

Одстојање p је интеграл диференцијалне једначине

$$\frac{d^2p}{du^2} + \sigma p = 0,$$

који постаје једнак нули за $u = u_1$ и чији извод $\frac{dp}{du}$ добија, за ту вредност промењљиве u, вредност $d\theta$ једнаку углу који међу собом заклапају две бескрајно блиске геодезијске линије C и C' секући се у тачки M_1.

Пошто је

$$\sigma = \frac{\lambda}{4u^2},$$

диференцијална једначина одстојања p постаје

$$\Delta_2(p) = -\frac{\lambda}{4u^2},$$

тј. у развијеном облику

$$4u^2\frac{d^2p}{du^2} + \lambda p = 0,$$

и она се сменом

$$u = e^t, \quad p = ze^{\frac{t}{2}} = z\sqrt{u}$$

трансформише у једначину

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\lambda - 1}{4}z = 0.$$

Остављајући на страну вредност $u = 0$, вредности p и z постају једнаке нули за једне исте вредности t и u.

Претпоставимо да дуж лука M_1M геодезијске линије C број λ остаје непрестано *мањи* од једнога броја $\beta < 1$, па посматрајмо диференцијалну једначину

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{\beta - 1}{4}\eta = 0$$

узету као компаративну једначину. Њен интеграл, изражен помоћу промењљиве u, који постаје једнак нули за $u = u_1$ и чији извод $\frac{d\eta}{dt}$ има за $u = u_1$ вредност $d\theta$, је

$$\eta = \frac{\sqrt{u_1}}{2a}\left[\left(\frac{u}{u_1}\right)^a - \left(\frac{u_1}{u}\right)^a\right] d\theta,$$

где a означује реалан позитиван број

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{1-\beta}.$$

Упоредивши међу собом два релативна извода

$$\Delta_2(z) = -\frac{\lambda - 1}{4} \quad \text{и} \quad \Delta_2(\eta) = -\frac{\beta - 1}{4},$$

налази се да у ма коме размаку променљиве u, почевши од $u = u_1$, вредност η мора постати једнака нули најмање онолико пута колико и вредност z (а према томе и вредност p). Бескрајно блиске геодезијске линије C и C' никако се више не секу пошто се пређе тачка M_1 и, према Jacobi-евој теореми, линија C представља најкраћи пут дуж целога лука M_1M . А из тога следује овај став:

Лук сваке геодезијске линије, дуж кога је, почевши од његове почетне тачке M_0, *број* λ *непрестано мањи од јединице, увек је најкраћи пут између ма којих двеју њених тачака.*

Такав је случај са свима геодезијским линијама на површинама са *негативном* тоталном кривином; број λ је ту непрестано негативан, па дакле мањи од јединице; геодезијска линија је увек најкраћи пут између ма којих двеју тачака површине, као што гласи и Jacobi-ева теорема. Само што је горњи став *општији* од те теореме: он важи и за површине (односно поједине области површина) са *позитивном* тоталном кривином, и то кад год је број λ на таквој површини (односно области) мањи од јединице.

Посматрајмо, нпр. какву површину са позитивном тоталном кривином, али која је непрестано мања од једнога сталног броја α. Ако је тада

$$u < \frac{1}{2\sqrt{\alpha}},$$

биће $\lambda < 1$ и на површину се може применити горњи став. Добија се, дакле овај став који у извесној мери допуњује Jacobi-еву и Bonnet-ову теорему:

На површинама чија је тотална кривина свуда позитивна и мања од једнога сталног позитивног броја α, *свака је геодезијска линија најкраћи пут на ма коме њеноме луку краћем од* $\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$.

Посматрајмо сад какву површину која не испуњава горњи услов, и на њој једну геодезијску линију C дуж чијег лука M_1M број λ има непрестано вредност *већу* од једнога сталног позитивног броја $\delta > 1$, па уочимо диференцијалну једначину

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{\delta - 1}{4}\zeta = 0.$$

Њен интеграл, изражен помоћу променљиве u, који постаје једнак нули за $u = u_1$, и чији извод $\frac{d\zeta}{dt}$ има за $u = u_1$ вредност $d\theta$, је

$$\zeta = \frac{\sqrt{u_1}}{b}\sin\left(b\log\frac{u}{u_1}\right)d\theta,$$

где b означује реалан позитиван број

$$b = \frac{1}{2}\sqrt{\delta - 1}.$$

Упоредивши међу собом два релативна извода

$$\Delta_2(z) = -\frac{\lambda - 1}{4} \quad \text{и} \quad \Delta_2(\zeta) = -\frac{\delta - 1}{4},$$

налази се да ће z (а, према томе, и p), почевши од $u = u_1$, постати једнако нули пре него ζ, а пошто ζ постаје једнако нули за

$$u = u_1 e^{\frac{n\pi}{b}}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

то ће p бити једнако нули пре него што u достигне вредност

$$u_2 = u_1 e^{\frac{\pi}{b}}.$$

Дужина лука

$$M_1M_2 = u_2 - u_1 = (e^{\frac{\pi}{b}} - 1)\,u_1,$$

чији су крајеви две узастопне пресечне тачке геодезијских линија C и C', биће, према томе, мања од дужине лука

$$u_1 = M_0M_1 = L$$

помножене фактором

$$\mu = e^{\frac{\pi}{b}} - 1 = e^{\frac{2\pi}{\sqrt{\delta-1}}} - 1,$$

из чега, у вези са Јасоbі-евом теоремом, следује овај став:

Кад је, дуж посматраног лука s *геодезијске линије, број* λ *непрестано већи од јединице, такав лук никад није најкраћи пут на дужини већој од*

$$\mu L = (e^{\frac{\pi}{b}} - 1)L.$$

Таквим се посматрањима, помоћу самога апсолутног броја λ везаног за геодезијске линије што полазе од једне тачке M површине, могу решавати, нпр. и проблеми овакве врсте:

1° одредити на површини једну област која обухвата тачку M и која ће бити таква да је лук ма које геодезијске линије што пролази кроз M најкраћи пут између тачке M и једне ма које тачке тога лука, или, ако то није случај, до које ће тачке лука то бити најкраћи пут;

2° одредити границе броја пресека двеју бескрајно блиских геодезијских линија на једноме датом луку једне од њих.

Вратимо се сад на функцију $G(u, v)$ која одређује лучни елеменат површине и помоћу које се одређују сви геометријски фактори исте површине, као и на овој повучених кривих линија.

Из ранијег става да је тотална кривина σ површине у њеној произвољној тачки (u, v) једнака другоме релативном изводу функције $\sqrt{G}$ по промењивој u, пошто се томе изводу промени знак, и према ранијим ставовима о зависности размака варијација вредности y од извода $\Delta_2(y)$ те функције, може се у неколико прецизирати зависност варијација функције G дуж посматране геодезијске линије $v = \alpha$ на површини, од промена тоталне кривине дуж те линије.

Према једном таквом ставу, кад је у једноме размаку (a, b) извод $\Delta_2(y)$ непрестано позитиван, за све вредности x у (a, b) вредност функције y лежи у размаку између

$$y_0 \mathrm{ch}\,[(x - x_0)\sqrt{N}], \qquad y_0 \mathrm{ch}\,[(x - x_0)\sqrt{M}\,],$$

где N и M означују по једну доњу и једну горњу границу вредности $\Delta_2(y)$ у размаку (a, b), а x_0 означава једну нулу извода y' у томе размаку. Примењено на функцију

$$y = \sqrt{G},$$

то доводи до овога става:

Кад површина има, дуж једнога лука посматране геодезијске линије $v = \alpha$ *на њој, своју тоталну кривину непрестано негативну, вредности функције* G *дуж тога лука непрестано се налазе између вредности*

$$G_0 \mathrm{ch}^2\,[(u - u_0)\sqrt{N}], \qquad G_0 \mathrm{ch}^2\,[(u - u_0)\sqrt{M}\,],$$

где N *и* M *означују најмању и највећу тоталну кривину површине дуж посматраног лука,* u_0 *је вредност променљиве* u *за коју извод*

$$\frac{d}{du}G(u,\alpha)$$

постаје једнак нули, а G_0 *је вредност*

$$G_0 = \frac{d}{du_0}G(u_0,\alpha).$$

Ставу се, уосталом, може дати и овај облик:

Дуж једне ма које геодезијске линије је

$$G = G_0\, ch^2 V,$$

где је

$$V = (u - u_0)\sqrt{\xi}$$

и где ξ *означава тоталну кривину површине у једној тачки на посматраноме луку.*

Пошто су тада релативни извод $\Delta_2(\sqrt{G})$ и почетна вредност G_0 функције G позитивни, функција G не може дуж тога лука имати више од једне нуле; она ту монотоно расти брзином једне експоненцијалне функције.

Посматрајмо сад какав лук геодезијске линије дуж кога је тотална кривина површине непрестано позитивна. Према напред казаноме, кад је у размаку (a, b) извод $\Delta_2(y)$ непрестано негативан, крива y је у томе размаку састављена из полуталаса, позитивних и негативних, који осцилују око осовине Ox.

Ако се са x_0 означи вредност x за коју уочени полуталас достиже свој максимум или минимум, онда је сваки полуталас представљен једначином

$$y = y_0 \cos[(x - x_0)\sqrt{H}],$$

где је H једна од вредности коју добија функција $-\Delta_2(y)$ између двеју крајњих тачака полуталаса. Функција y има у размаку (a, b) најмање онолико полуталаса, колико има целих јединица у броју

$$(293) \qquad \frac{b-a}{\pi}\sqrt{N} - 1,$$

а највише онолико колико их има у броју

$$(294) \qquad \frac{b-a}{\pi}\sqrt{M},$$

где N и M означују једну доњу и једну горњу границу вредности $-\Delta_2(y)$ у томе размаку.

Примењено на функцију

$$y=\sqrt{G},$$

то доводи до овога става:

Кад површина има, дуж једнога лука посматране геодезијске линије, своју тоталну кривину непрестано позитивну, функција G *се у томе размаку мења у облику позитивних полуталаса.* Сваки полуталас лежи између два гранична полуталаса чије су елонгације

$$G_0\cos^2[(u-u_0)\sqrt{N}], \qquad G_0\cos^2[(u-u_0)\sqrt{M}],$$

где $-N$ и $-M$ означују највећу и најмању тоталну кривину површине дуж посматраног лука.

Број полуталаса дуж лука u, чијим крајевима одговарају вредности $u=u_1$ и $u=u_2$ променљиве u, биће најмање онолики колико има целих јединица у броју (293), а највише онолики колико их има у броју (294).

У свима случајевима, дужина $\sqrt{G}dv$ представља елеменат лука једне од кривих $u=\mathrm{const.}$; то је дакле, растојање између двеју бескрајно блиских геодезиских линија у посматраној тачки $M(u,v)$.

То је растојање бескрајно мала количина првога реда, али оно постаје вишега реда у близини тачака M у којима функција G постаје једнака нули, тј. кроз које пролазе две бескрајно блиске геодезијске линије посматраног система. Геометријско место тачака M у којима је $G=0$, ако ова једначина дефинише v као реалну функцију променљиве u, представља обвојницу геодезијских линија $v=\mathrm{const.}$ Такав је, нпр. случај код развојних површина са лучним елементом облика

$$ds^2=du^2+[u-\varphi(v)]^2dv^2.$$

Крива $u=\varphi(v)$ представља тада обвојницу геодезијских линија површине, а то је сама куспидална ивица површине.

Из следећег става видеће се из чега, углавном, произлази учешће и важност другог релативног извода Δ_2 у проблемима Геометрије у простору.

Велики број геометријских фактора на површинама одређује се помоћу тоталне кривине σ површине. Кривина је такође у вези са мноштвом особина површина што непосредно или посредно од ње зависе. Међутим:

За сваку површину постоји по један ортогонални систем координата (α, β) *и две функције*

$$\Phi_1(\alpha,\beta) \quad \text{и} \quad \Phi_2(\alpha,\beta)$$

тих координата, које се увек могу одредити и које су такве да се тотална кривина σ *изражава као производ једне од њих и збира других делимичних релативних извода друге од њих по координатама* α *и* β.

Да бисмо се о томе уверили, послужићемо се познатим Liouville-овим ставом да за сваку површину постоји такав један координатни систем (α, β) да се у њему лучни елеменат површине изражава у облику

$$ds^2 = \varphi(\alpha,\beta)(d\alpha^2 + d\beta^2);$$

по методи Liouville-а функција φ се добија као инеграциони фактор извесне диференцијалне једначине

$$F\left(\alpha,\beta,\frac{d\beta}{d\alpha}\right) = 0$$

везане за посматрану површину. Криве

$$\alpha = \text{const.} \quad \text{и} \quad \beta = \text{const.}$$

секу се под правим углом.

Кривина σ изражава се тада помоћу функције φ Liouville-овим обрасцем

$$\sigma = -\frac{1}{2\varphi}\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\log\varphi + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\log\varphi\right].$$

Ако се, дакле, за Φ_1 и Φ_2 узму две функције

$$\Phi_1 = -\frac{\log\varphi}{2\varphi},$$

$$\Phi_2 = \log\varphi,$$

кривина σ се јавља у облику

$$\sigma = \Phi_1[\Delta_{2,\alpha}(\Phi_2) + \Delta_{2,\beta}(\Phi_2)],$$

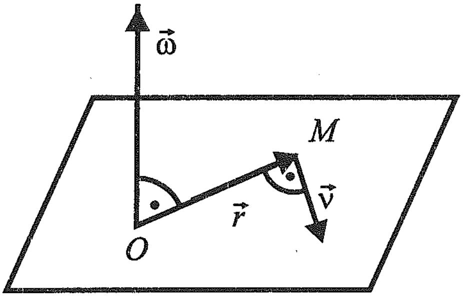
где $\Delta_{2,\alpha}$ означује други релативни извод по α, $\Delta_{2,\beta}$ други такав извод по β, чиме је став доказан.

Уосталом, функција Φ_1 се изражава помоћу функције Φ_2 обрасцем

$$\Phi_1 = -\frac{1}{2}\Phi_2 e^{-\Phi_2}.$$

32. КИНЕМАТИЧКИ ПРОБЛЕМИ

Замислимо једну раван (сл. 15) која ротира око једне непомичне тачке O. Означимо са $\vec{r}$ вектор положаја произвољне тачке M равни у погледу на непомичну тачку O. Брзина тачке M, а то је вектор $\vec{v}$, представља извод вектора положаја по времену t, па ће, дакле, бити



Сл. 15

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}.$$

Уопште, други релативни извод

$$\Delta_2(r) = \frac{1}{r}\frac{d^2r}{dt^2},$$

док се остаје на скаларном пољу, нема никакво нарочито кинематичко значење. Али кад се узме да извод и сама функција представљају вектор, тј. кад се посматра

$$\Delta_2(\vec{r}) = \frac{1}{\vec{r}}\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}),$$

онда тај други релативни извод има једно конкретно кинематичко значење које ће овде бити приказано[1].

Брзина $\vec{v}$ може се представити помоћу векторског производа вектора $\vec{\omega}$ тренутне угаоне брзине и вектора $\vec{r}$, тј.

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]. \tag{295}$$

Јер: 1° вектор $\vec{v}$ има правац вектора што стоји управно на векторе $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$;

---

[1] По усменом саопштењу проф. А. Билимовића.

2° смер му одговара смеру тога производа, пошто око, постављено са друге стране равни куда је наперен вектор $\vec{v}$, види да други вектор производа, тј. $\vec{r}$, надовезан на крај првога вектора $\vec{\omega}$, вуче овај вектор у смислу кретања казаљке на сату;

3° он има интензитет ωr, што одговара интензитету векторског производа два ортогонална вектора.

Ако се једначина (295) диференцира векторски по времену t, добија се

$$\dot{v} = \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}) = \ddot{r} = [\dot{\omega}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, \dot{r}].$$

Претпоставимо сад да се ротација врши равномерно, па је

$$\dot{\omega} = 0$$

и после смене

$$\dot{r} = \vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

може се написати да је

$$(296) \qquad \ddot{r} = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]].$$

Међутим, из општег векторског обрасца за развијање производа

$$[\vec{A}[\vec{B}, \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}, \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}, \vec{B})$$

примењеном на случај што се има у виду, при коме је

$$(\vec{A}, \vec{C}) = (\vec{\omega}, \vec{r}) = 0$$

и због ортогоналности при којој је

$$-\vec{C}(\vec{A}, \vec{B}) = -\vec{r}(\vec{\omega}, \vec{\omega}) = -\vec{r}\omega^2,$$

десна страна једначине (296) има за вредност

$$-\omega^2\vec{r}^2,$$

тако да ће се дефинитивно имати да је

$$\ddot{r} = -\vec{r}\omega^2,$$

а из тога следује да је

$$\Delta_2(\vec{r}) = \frac{\ddot{r}}{\vec{r}} = -\omega^2,$$

што се изражава ставом:

Кад r *представља вектор положаја тачке која се равномерно обрће око једне осовине, други релативни извод тога вектора једнак је негативној вредности квадрата угаоне брзине.*

Исти се став, уосталом, може извести и без употребе векторских операција. Пођимо од образаца за брзину

$$\vec{v} = \dot{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\omega^2,$$

и за убрзање

$$\vec{w} = \dot{v} = \ddot{r} = \frac{d^2}{dt^2} = (\vec{r}).$$

Убрзање се може раставити на тангенцијално, које је за случај равномерног кретања једнако нули, и нормално, наперено ка центру круга са вредношћу

$$\frac{v^2}{r}$$

и са правцем орта (јединичног вектора), чији је израз

$$-\frac{\vec{r}}{r}.$$

Према томе се може написати да је

$$\vec{w} = \ddot{r} = \frac{v^2}{r} \cdot \left(-\frac{\vec{r}}{r}\right) = -\left(\frac{v}{r}\right)^2 \cdot \vec{r}.$$

Са друге стране, узевши у обзир да је

$$v = r\omega,$$

где је ω угаона брзина, биће

$$\ddot{r} = -r\omega^2,$$

или дефинитивно

$$\frac{\ddot{r}}{\vec{r}} = -\omega^2,$$

што је исказано горњим ставом.

33. МЕХАНИЧКИ ПРОБЛЕМИ

1. Посматрајмо у поларним координатама (θ, ρ) у равни кретање материјалне тачке M под утицајем централне силе F чији је закон

$$F = \frac{\varphi(\theta)}{\rho^2}, \tag{297}$$

где је φ дата функција поларног угла.

Узевши да је маса тачке једнака јединици, диференцијална једначина кретања је (Binet)

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\varphi(\theta)}{C^2}, \tag{298}$$

где је

$$u = \frac{1}{\rho},$$

а C константа одређена теоремом описаних површина

$$\frac{1}{\rho} v \sin\alpha = C,$$

где је v брзина тачке, α нагиб брзине према потегу ρ.

Из једначине (298) је

$$\Delta_2(u) = \frac{\varphi(\theta)}{C^2 u} - 1 = \rho\frac{\varphi(\theta)}{C^2} - 1,$$

што показује да у поларним координатама извод $\Delta_2\left(\frac{1}{\rho}\right)$ има за израз

$$\Delta_2\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\alpha F}{\rho^3} - 1,$$

где је α позитивна константа, а из тога је, према напред изложеном, могућно извести квалитативне појединости кретања тачке.

2. Проблем кретања физичког клатна чија се дужина l мења у току кретања по линеарном закону, као линеарна функција времена t (што је, нпр. случај кад се клатно састоји из терета обешеног на ланцу који се вертикално одвија са једнога хоризонталног ваљка што се окреће око своје осовине), кад се у правоуглом координатном систему xOy узме за осовину Oy вертикала управљена на ниже, своди се на две линеарне диференцијалне једначине

$$\frac{d^2x}{dt^2} + T\frac{x}{l} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + T\frac{y}{l} = g,$$

где је T сила која затеже клатно у правцу његове дужине, g компонента теже.

Проблем се, дакле, своди на проучавање функција x и y дефинисаних својим другим релативним изводима по времену t

$$\Delta_2(x) = -\frac{T}{l},$$

$$\Delta_2(y) = \frac{g}{l} - \frac{T}{l}.$$

Случај малих осцилација таквога клатна своди се на проучавање функције $u(t)$ чији други релативни извод по времену t има за израз

$$\Delta_2(u) = -\frac{1}{t}.$$

Диференцијална једначина, што одговара таквоме изводу Δ_2, интеграли се помоћу цилиндричних функција, као што је то напред наведено. Горњи облик извода $\Delta_2(u)$ доводи и до једначине

$$\frac{d}{dt}\left(u - t\frac{du}{dt}\right) = u,$$

која се може овако растумачити:

Брзина промене ординате за $x = 0$ дирке на кривој линији

$$f(t, u) = 0,$$

која решава проблем кретања, једнака је ординати u те криве у посматраноме тренутку t.

3. У небеској механици, у Hill-овој и Brown-овој теорији кретања Месеца, проучавање померања чвора и перихела, основица је проблем да се одреди функција y за коју је $\Delta_2(y)$ дата функција времена t.

У теорији планетарних пертурбација наилази се на проблем да се одреди функција y за коју је

$$\Delta_2(y) = h^2 \cos^2 x - k^2,$$

где су h и k две константе.

У проблему трију тела кад се, у првој апроксимацији, занемаре чланови који садрже као факторе степена поремећајне функције више од 2, проблем се, по Gylden-овој теорији, своди на диференцијалну једначину облика

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)y=\varphi(x), \qquad f(x)>0.$$

Кад се зна једно њено партикуларно решење y_1, опште решење је

$$y=y_1+Y,$$

где је Y најопштија функција променљиве x за коју извод $\Delta_2(Y)$ има за израз функцију $-f(x)$. Кад је функција $f(x)$ позната, крива y ће осциловати око криве y_1, а честина тих осцилација биће одређена ранијим ставовима о односима између y и $\Delta_2(y)$.

34. ФИЗИЧКИ ПРОБЛЕМИ

У разноврсним проблемима математичке физике наилази се на релативне изводе Δ_n непознатих функција које решавају проблем, било на тај начин што се сам проблем и своди на тражење таквих функција, било тиме што би се имало довољно решење кад би се сазнале извесне квалитативне појединости тих функција из познатих појединости њихових релативних извода, а које би, према подацима у проблему, било могућно експлицитно формирати.

Ретки су физички проблеми у којима се јављају релативни изводи вишега реда од другога. На такав се један проблем наилази, нпр. при проучавању вибрација еластичне шипке чија дебљина није бескрајно мала; за непознату функцију y проблема могућно је експлицитно формирати њен релативни извод четвртог реда

$$\Delta_4(y)=f(t)$$

као функцију времена t, па се из појединости функције $f(t)$ могу сазнавати квалитативне појединости функције y карактеристичне за ток појаве.

Међутим, у великоме броју проблема јавља се други релативан извод Δ_2. Такве би врсте били, нпр. проблеми у следећим појавама:

1° хлађење хетерогене шипке, сводљиво на извод облика

$$\Delta_2(y)=\frac{a}{x}, \tag{299}$$

где је a негативна константа;

2° разноврсне вибрације и слабе осцилације материјалних или физичких система, као што су, нпр. вибрације еластичне мембране ограничене једном параболом; проблем се своди на извод

$$\Delta_2(y) = -(h + k^2 x^2),$$

где су h и k константе;

3° појаве еластичности у којима је

$$\Delta_2(y) = m(m+1)\,k^2 sn^2 x + h,$$

где је h константа, m позитиван цео број, а k модуо елиптичке функције sn x (Lamé-ова једначина);

4° дифракција светлосних зракова при пропуштању ових кроз отворе кружног облика; проблем се своди на извод облика (299);

5° испражњавање електричних кондензатора са сталним или промењивим електричним отпором, капацитетом, коефицијентом ауто-индукције, електричним оптерећењем и електро-моторном силом у њиховом саставу; проблем се своди на извод

$$\Delta_2(y) = f(t),$$

где је $f(t)$ карактеристична функција појаве, чији облик зависи од начина мењања поменутих физичких фактора у току појаве и коју је увек могућно формирати кад је познат тај начин варијације за посматрану појаву. Ова ће бити детаљно обрађена у параграфу који следује;

6° уочимо физичке појаве што потпадају под феноменолошки тип факата: појаве што произлазе из акције депресивног узрока који се мења пропорционално тоталитету свога непосредног објекта.

Ако се са λ означи коефицијенат утицаја узрока, интензитет овога биће

$$X = -\lambda\eta = -\lambda \int v\,dt,$$

где је v дескриптивни елеменат појаве, а η његов тоталитет. У току појаве је

$$\Delta_2(\eta) = \text{const.} = -\frac{\lambda}{k},$$

где је k коефицијенат инерције елемента v.

Сматрајући као почетан тренутак онај у коме је тоталитет η једнак нули, закон варијације тоталитета дат је једначином

$$\eta = v_0\sqrt{\frac{k}{\lambda}}\sin t\sqrt{\frac{\lambda}{k}},$$

а закон варијације самога дескриптивног елемента v је

$$v = v_0 \cos t\sqrt{\frac{\lambda}{k}}.$$

Појава је осцилаторна; она се састоји из бескрајнога низа међу собом једнаких осцилација око једнога одређеног стања, дефинисаног вредношћу тоталитета једнакој нули и почетном вредношћу v_0 елемента v. Периода тих осцилација, било тоталитета, било самога елемента v, има за вредност

$$\tilde{\omega} = \pi\sqrt{\frac{k}{\lambda}};$$

она је, дакле, у толико дужа у колико је већи коефицијенат инерције у појави, а у толико краћа у колико је већи коефицијенат утицаја депресивног узрока.

Највећа удаљења тоталитета од вредности нуле стална су и имају за вредност

$$v_0\sqrt{\frac{k}{\lambda}};$$

она расту и опадају са вредностима коефицијената k и λ на исти начин као и периода $\tilde{\omega}$ осцилација.

Најпростији пример појава таквога феноменолошког типа представљале би кратке осцилације клатна у безваздушном простору. Улогу v игра брзина кретања, улогу тоталитета η елонгација, а улогу депресивног узрока хоризонтална компонента теже.

Тип би обухватио и појаву вибрација еластичне шипке, утврђене једним својим крајем, изведене из свога равнотежног положаја и остављене самој себи. Он би обухватио и појаву осцилација разлике нивоа течности у двама комуникационим судовима везаним међу собом хоризонталном цеви, кад се занемари отпор трења (улогу v игра брзина промене нивоске разлике, улогу η сама та разлика). Исто би тако тип обухватио и појаву испражњавања електричног кондензатора кад је електрични отпор кола занемарљив (улогу v игра јачина струје испражњавања, улогу η количина електрицитета);

7° уочимо појаве у линеарном феноменском пољу, што произлазе из акције једнога узрока пропорционалног дивергенцији поља.

Јачина узрока има за израз

$$X = \lambda \operatorname{div} v = \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial s^2},$$

где је s дужина лука линије на коју се своди поље, а λ је коефицијенат утицаја узрока.

У току појаве је

$$\Delta_{2,s}(v) = \frac{1}{\alpha}\Delta_{1,t}(v), \tag{300}$$

где $\Delta_{2,s}$ означује други релативни извод по луку s, а $\Delta_{1,t}$ први релативни извод по времену t; α је позитивна константа

$$\alpha = \frac{k}{\lambda}.$$

Појава се своди на парцијалну диференцијалну једначину

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, \tag{301}$$

која дефинише вредност елемента v као функцију времена и положаја тачке. Ту функцију још имају да прецизирају унапред дате *локалне* и *тренутне* погодбе, које одређују закон промене стања у једној утврђеној тачки поља у току времена, или распоред стања у пољу у једноме утврђеном тренутку.

Општи интеграл једначине (301) може се, као што је познато, изразити у два разна облика:

1° помоћу бескрајног реда уређеног по степенима временског размака $t - t_0$, где t_0 означује почетни тренутак;

2° помоћу одређеног интеграла у коме време t и лук s играју улоге променљивих параметара.

Први је облик

$$v = A_0 + A_1(t-t_0) + A_2(t-t_0)^2 + \dots \tag{302}$$

где су коефицијенти A_n функције променљиве s изражене општим обрасцем

$$A_n = \frac{\alpha^n}{n!}\frac{d^{2n}}{ds^{2n}}F(s)$$

и где је $F(s)$ произвољна функција лука s изабрата тако да ред (302) буде конвергентан за вредности s и t које се имају у виду.

Тако се исто v изражава и у облику реда уређеног по степенима лучног размака $s - s_0$, где s_0 означује почетно s. Тај израз је

$$\begin{aligned} v &= B_0 + B_1(s-s_0)^2 + B_2(s-s_0)^4 + \dots + \\ &+ A_1(s-s_0) + A_3(s-s_0)^3 + \dots, \end{aligned} \tag{303}$$

где су коефицијенти A_n и B_n функције времена t изражене општим обрасцима

$$A_n = \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{\alpha^{\frac{n-1}{2}}}\frac{d^{\frac{n-1}{2}}}{dx^{\frac{n-1}{2}}}\varphi(t), \quad (n = 1, 3, 5, 7, \ldots),$$

$$B_n = \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{\alpha^{\frac{n}{2}}}\frac{d^{\frac{n}{2}}}{dx^{\frac{n}{2}}}\psi(t), \quad (n = 0, 2, 4, 6, \ldots).$$

Израз (302) садржи једну произвољну функцију $F(s)$, док их израз (303) садржи две $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Међутим, овај други израз није општији од првога; Poisson је показао да се та два израза могу трансформисати један у други, под условом да сви означени редови буду конвергентни.

Други је облик интеграла

$$(304) \qquad v = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F\,[s - s_0 + 2z\sqrt{\alpha(t - t_0)}\,]\,e^{-z^2}\,dz,$$

где је $F(x)$ произвољна функција која има да задовољи само ове услове:

1° да се може развити у конвергентан ред облика

$$F(x) = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + C_3 e^{\alpha_3 x} + \ldots,$$

где су

$$C_1, C_2, C_3, \ldots$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

количине независне од x;

2° да производ

$$e^{-x^2} F(x)$$

тежи нули кад x бескрајно расти у позитивном правцу.

Произвољне функције у свима тим обрасцима одређују се према погодби да се, у почетном тренутку $t = t_0$, има један дати распоред стања, дефинисан датом једначином

$$(305) \qquad v = F_1(s),$$

или да се у утврђеној тачки $s = s_0$ поља има један дати закон временских промена стања, дефинисан датом једначином

(306) $$v = F_2(t).$$

У првоме случају произвољна функција, нпр. $F(x)$ у обрасцу (304) бира се тако да је

$$F(x) = F_1(x),$$

а у другоме тако да је

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\beta z) e^{-z^2} dz = F_2(t),$$

где је β константа у односу на z, дата обрасцем

$$\beta = 2\sqrt{\alpha(t - t_0)}.$$

Тип појава, о коме је овде реч, обухвата, нпр. све физичке појаве које се састоје у варијацијама једнога стања (v) у металној жици довољно дугачкој да на промене стања у једној тачки жице не утиче стање на њеним крајевима, а кад се те промене врше у приликама овакве врсте: стање у једној, ма којој тачки жице тежи да се изједначи са стањем тачака у њеној непосредној близини, и то тако, да је таква тежња између двеју суседних тачака у толико јача у колико се стања у овима јаче разликују, а да она брзо опада са растојањем тачака и да постаје неосетна кад се изађе из непосредне близине посматране тачке. Такав је, нпр. случај:

а) При распростирању топлоте по дугачкој жици, изолованој од утицаја средине, доведеној најпре на температуру $T = 0$, па затим напрасно изложеној, једним својим крајем, акцији топлотног извора чија се температура T одржава неизмењена у току појаве. Улогу v игра температура T тачке на жици; улогу $\frac{\partial v}{\partial t}$ брзина загревања, а улогу α квадратни корен термичног коефицијента материјала жице. Топлота се постепено распростире од тачке до тачке жице на начин који се може у појединостима извести из горњих једначина;

б) Кад се један крај дугачке изоловане жице, на којој је изолацијом спречен бочни губитак електрицитета, а која је првобитно у неутралном електричном стању, напрасно доведе на потенцијал

$$v = \text{const.},$$

који се од тада на томе крају одржава неизмењен, а други се крај веже са земљом. Електрично стање се, пре но што буде ушло у свој перманентни режим, распростире по жици на начин обухваћен горњим једначинама. Улогу v игра електрични потенцијал тачке на одстојању s од почетног краја жице, а у тренутку t; улогу α квадратни корен коефицијента спроводљивости материјала жице;

в) Под исти тип појаве, само са нешто другојачим локалним и тренутним погодбама, потпада и појава поступних варијација концентрације јона у волтаметру, при чему се концентрација мења са временом и одстојањем s посматране тачке раствора од електроде. Улогу v игра концентрација јона у тачки s у тренутку t; улогу α квадратни корен брзине дифузије која карактерише раствор;

8° уочимо, као последњи пример те врсте, појаве у линеарним феноменским пољима, што произлазе из једновремене акције двају узрока: једнога пропорционалног дивергенцији поља и једнога пропорционалног величини свога непосредног објекта.

Јачина првог узрока има за израз

$$X_1 = \lambda \,\mathrm{div}\, v = \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, \tag{307}$$

а јачина другог

$$X_2 = \mu v. \tag{308}$$

У току појаве је

$$\Delta_{2,s}(v) = \frac{1}{\alpha}\Delta_{1,t}(v) + \beta, \tag{309}$$

где су α и β константе

$$\alpha = \frac{\lambda}{k}, \quad \alpha = \frac{\mu}{\lambda},$$

где λ, k, μ имају малопређашње значење.

Појава се своди на парцијалну диференцијалну једначину

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial v}{\partial t} - \beta v = 0 \tag{310}$$

и ова, са локалним и тренутним погодбама, дефинише v као функцију времена и положаја тачке.

Уочимо један одређен случај те врсте. Нека је дато затворено линеарно феноменско поље и нека је почетни распоред стања v у њему, у тренутку $t = 0$, дат једначином

$$v = f(s), \tag{311}$$

где је f дата функција положаја тачке. Једновременом акцијом двају узрока наведене врсте стање v поступно ће се мењати у току времена, по закону који је изражен оним интегралом једначине (310) што се за $t = 0$ своди на (311).

Изабравши јединицу мере за одстојања s тако, да дужина поља буде 2π, а јединицу мере за време тако да буде $h = 1$, тај је закон облика

$$v = \sum_n [(a_0 \cos ns + b_0 \sin ns)e^{-n^2}], \tag{312}$$

где су a_n и b_n коефицијенти Fourier-овог реда

$$f(s) = \sum_n [a_n \cos ns + b_n \sin ns].$$

Појава асимтотно тежи стационарном стању

$$v = \text{const.} = a_0$$

и то по опадајућем експоненцијалном закону облика

$$v = Ae^{-t},$$

где се вредност константе A мења од тачке до тачке поља.

Такав је, нпр. случај при поступном хлађењу затворене контуре од металне жице, изложене утицају средине, кад хлађење почиње од тренутка кад је термично стање по жици дато једначином (311), где улогу v игра температура тачке на одстојању s од изабране почетне тачке на жици; улогу узрока X_1 игра тежња суседних тачака ка уједначавању температура, а улогу узрока X_2 утицајна тежња средине у којој се жица хлади.

У случају кад је распоред коефицијената α и β у пољу *хетероген*, тако да су ти коефицијенти функције положаја тачке, стање v у тачки s, а у тренутку t, може се сматрати као резултат суперпозиције бескрајнога низа елементарних стања

$$w_1, w_2, w_3, \ldots$$

која се у току времена мењају по законима облика

$$\begin{aligned} w_1 &= C_1 u_1 e^{-r_1 t}, \\ w_2 &= C_2 u_2 e^{-r_2 t}, \\ w_3 &= C_3 u_3 e^{-r_3 t}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{313}$$

где су

$$C_1, C_2, C_3, \ldots$$

константе независне од времена и положаја тачке;

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

функције положаја тачке за које је други релативни извод облика

$$\Delta_2(u) = a^2 - b^2 r,$$

(a и b константе), а r један променљив параметар;

$$r_1, r_2, r_3, \ldots$$

су вредности тога параметра одређене као корени извесне трансцендентне једначине

$$(314) \qquad \varphi(r) = 0,$$

формиране помоћу интеграла u једначине

$$(315) \qquad \frac{d^2 u}{ds^2} + (b^2 r - a^2) u = 0$$

и граничних погодаба.

На такав се случај наилази, нпр. у појави поступног хлађења жице неједнаке дебљине, или са неједнаким распоредом материјала тако, да се густина, специфичка топлота и проводљивост мењају од тачке до тачке жице. За корене једначине (314) доказује се да су сви реални и позитивни. Функције u_k имају тада особине сличне особинама синуса и косинуса умножених углова што фигуришу у Fourier-овим редовима. Свака од њих мења знак пролазећи кроз нулу. Прва међу њима, функција u_1 што одговара најмањем корену r_1 једначине (314), задржава један исти знак дуж целог поља. Функција u_2 мења једанпут знак између крајњих тачака поља функција u_3 два пута итд. Али размаци између узастопних тачака у којима једна, ма која, од тих функција мења знак, нису међу собом једнаки, као што је случај код синуса и косинуса: они се мењају са распоредом констаната a и b, односно α и β, тј. са распоредом специфичких особина материјала у феноменском пољу, и то по одређеним законима, упоредо са променама распореда материјала који непосредно утиче на вредности корена једначине (314).

Тако, кад се на једноме крају поља коефицијенат β (што у овде посматраној конкретној појави значи повећати емисиону моћ, чија јачина зависи од материјала и степена глаткости спољне површне жице) сви се корени r_k повећавају и тачке у којима функције u_k мењају знак удаљавају се од тога краја поља.

По истеку једнога, довољно дугачког, размака времена свако се од елементарних стања

$$(316) \qquad w_1, w_2, w_3, \ldots$$

неосетно разликује од неутралног стања

$$u_1 = 0$$

коме оно асимтотно тежи. Пре но што то буде и са резултујућим стањем (v), као суперпозицијом стања (316), наступиће један тренутак кад се стање (v) неосетно разликује од елементарног стања

$$w_1 = C_1 u_1 e^{-r_1 t}$$

и према томе ће у толико брже тежити своме асимтотном, неутралном стању у колико је већи корен r_1 једначине (314), тј. у колико је већи коефицијенат β.

Под исти тип појава потпадају и флуктуације електрицитета по жици у промењивом режиму, при бочном губљењу електрицитета и локалним и тренутним погодбама сличним онима о којима је напред била реч.

35. ПРИМЕР ФИЗИЧКОГ ПРОБЛЕМА ОБРАЂЕНОГ ПОМОЋУ ОСОБИНА АЛГОРИТМА Δ_2

Кад се арматуре електричног кондензатора, помоћу спроводне жице, споје са земљом или међу собом, кондензатор се испражњава. Испражњавање није тренутно; за време, за које оно траје, кроз спроводну'жицу креће се електрицитет – струја испражњавања – и налази се у тзв. *променљивом режиму*. Интензитет и смисао струје, услед индукционих утицаја, мењају се од једнога тренутка до другог и проучавање тих промена саставља теорију континуалног и осцилаторног испражњавања кондензатора.

Теоријски је доказано и експериментом потврђено да карактер испражњавања зависи на првоме месту од релативних величина електричног отпора и коефцијента селф-индукције спроводне жице, и од капацитета самога кондензатора, и да је према тим величинама испражњавање континуално или осцилаторно.

У првоме случају интензитет струје у почетку је једнак нули, затим расте, достиже један максимум после кога стално опада до нуле; електрично оптерећење кондензатора стално опада од своје првобитне вредности до нуле.

У другом случају у жици се јављају електричне осцилације; смисао струје наизменце је, и у врло кратким размацима времена, позитиван и негативан; електрично оптерећење кондензатора такође је наизменце позитивно и негативно.

Теорију појаве поставили су Thomson, Helmholz и Kirchoff, пошавши од принципа одржања енергије и комбинујући га са Ampère-овим електромагнетним и Joule-овим термичким законом. Она даје могућност да се одреди утицај појединих физичких фактора на ток појаве, на дужину електричних таласа, брзину вибрација итд. и да се унапред, рачуном, одреде промене у појави проузроковане варијацијама отпора, капацитета селф-индукције итд.

Али у тој теорији електричних осцилација непрестано се претпоставља да су ти фактори, што утичу на ток појаве, као: отпор, капацитет итд. *непромењиви* у току ове. Теорија се тада своди на проучавање једне линеарне диференцијалне једначине другога реда, која је увек интеграбилна и чији интеграл, који је врло простог облика, допушта да се проуче све појединости појаве. Нађени резултати потврђени су експериментом и у томе погледу нема се шта додати ономе што се већ зна.

Међутим, та теорија оставља недодирнуте оне случајеве у којима се поменути фактори, што битно утичу на ток појаве, такође *и сами мењају у току ове* и тиме је компликују. Често се дешава и само по себи, а може се на много начина постићи и нарочитим експерименталним средствима, да се или отпор спроводника, или капацитет кондензатора, или коефицијенат селф-индукције спроводника или сви ови фактори једновремено мењају са временом, било по познатим и унапред датим законима, било и без тачног познавања тих закона. Појава тада постаје сложенија, али поједине њене особитости остају сличне онима што одговарају непромењивим факторима и чине да се појава ипак може у појединостима проучити. И у таквим случајевима испражњавање кондензатора може бити *монотоно* или *осцилаторно*, што искључиво зависи од релативних величина и начина варијација отпора, капацитета и коефицијента селф-индукције.

У овоме последњем случају, кад је испражњавање осцилаторно, стварају се алтернативне струје сличне онима код обичнога испражњавања при сталним утицајним факторима, али са том битном разликом што им осцилаторне периоде нису више сталне. На тај начин стварају се, дакле, *алтернативне струје са промењивим периодама*.

Теорија се тада своди на *проучавање функције која за други релативни извод* Δ_2 *има једну одређену и познату функцију времена.* Диференцијалне једначине до којих се тада долази, изузевши ретке случајеве, не могу се експлицитно интегралити и, према томе, изгледало би да је теорија појаве немогућна. Али искоришћујући напред показане везе између појединости извода $\Delta_2(y)$ и одговарајуће му функције y, обрада те теорије постаје могућна и доводи до резултата сличних онима при непроменљивим утицајним факторима. То ће бити показано у овоме што следује.

*
* *

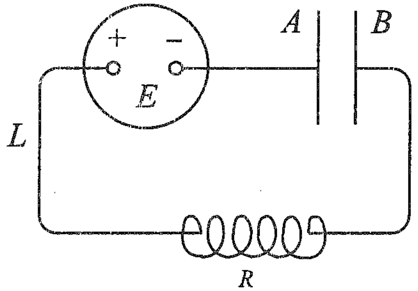
Потражимо најпре аналитички израз за други релативни извод Δ_2 од кога ће зависити ток појаве како при непроменљивим, тако и при променљивим утицајним факторима. За тај циљ биће употребљени принципи на којима су Thomson, Helmholz и Kirchoff основали теорију обичнога испражњавања, а то су:

а) принцип одржања енергије;

б) закони електромагнетне индукције;

в) принцип трансформације електричне енергије у топлотну.

Уочимо кондензатор (сл. 16) чије арматуре A и B нека су напуњене количинама Q и $-Q$ електрицитета. Вежимо обе арматуре спроводном жицом чији се капацитет може занемарити и узмимо још да се у саставу тако образованог електричног система налази и какав извор електромоторне силе E, нпр. какав електрични елеменат или батерија.



Сл. 16

Према принципу одржања енергије, у бескрајно малом размаку времена dt, целокупна енергија, произведена електромоторном силом употребљенога извора и испражњавањем кондензатора, једнака је збиру:

1° количине топлоте развијене отпором спроводне жице;

2° промене електромагнетне енергије у систему за време dt.

Означимо тада са:

E електромоторну силу коју даје употребљени извор;

I интензитет струје произведене испражњавањем кондензатора;

P електрични отпор спроводне жице;

L коефицијенат селф-индукције спроводне жице;

Q електрично оптерећење кондензатора;

C капацитет кондензатора;

q притицај индукције (flux d'induction) проузрокован спољним узроцима и који пролази кроз спроводну жицу.

Тада, као што је познато:

1° енергија, произведена електромоторном силом E у размаку времена dt, биће

$$EIdt;$$

2° енергија, развијена испражњавањем кондензатора у томе размаку времена, а која одговара његовој разлици потенцијала

$$V_2 - V_1 = \frac{Q}{C},$$

биће

$$\frac{IQ}{C}dt;$$

3° количина топлоте, развијена отпором спроводника жице, биће по Joule-овом закону

$$RI^2dt;$$

4° промена електромагнетне енергије у систему једнака је, према основном закону електромагнетне индукције, интензитету струје I помноженом диференцијалом збира притицаја q спољне индукције и прилива LI селф-индукције произведе самом струјом што пролази кроз жицу. Та ће промена, дакле, бити

$$I \cdot d(q + LI).$$

Отуда се, према принципу одржања енергије, добија једначина

$$EIdt + \frac{IQ}{C}dt = RI^2dt + I \cdot d(q + LI),$$

или

$$E + \frac{Q}{C} = RI + \frac{dq}{dt} + L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}.$$

Али је, усвојивши уобичајену погодбу да се сматра као позитиван интензитет струје испражњавања кад ова постаје умањавањем електричног испражњавања кондензатора

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

и према томе се последња једначина може написати у облику

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \left(R + \frac{dL}{dt}\right)\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = \frac{dq}{dt} - E. \tag{317}$$

То је најопштија диференцијална једначина појаве. Она је другога реда, линеарна по количини Q и вреди па на ма који начин се мењали утицајни фактори

$$C, R, L, E, q.$$

Кад је начин мењања тих фактора познат, интеграцијом једначине добија се електрично оптерећење Q као функција времена t; помоћу тога добијају се и сви остали подаци потребни за теорију. Приметимо само да, према распореду слике 16, Q означује електрично оптерећење арматуре A кондензатора; оптерећење арматуре B биће тада $-Q$.

Кад нема индукције произведене спољним утицајима, или ако је ова непромењива у току појаве, биће

$$\frac{dq}{dt} = 0$$

и једначина појаве постаје

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \left(R + \frac{dL}{dt}\right)\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q + E = 0.$$

Ако у саставу система нема никаквог извора електромоторне силе, једначина постаје

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \left(R + \frac{dL}{dt}\right)\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = \frac{dq}{dt}.$$

Ако је, при томе, и утицај спољне индукције непромењив, или га и нема, једначина се своди на

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \left(R + \frac{dL}{dt}\right)\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = 0.$$

Напослетку, ако су у овоме последњем случају отпор, капацитет и коефицијенат селф-индукције непромењиви за време појаве, једначина се своди на линеарну једначину другога реда са сталним коефицијентима и без независног члана

(318) $$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=0.$$

која служи као основица обичној теорији испражњавања кондензатора. А ова се, као што је познато, у главним својим цртама, састоји у овоме:

Интеграцијом једначине (318) добија се

$$Q=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t},$$

где су r_1 и r_2 корени квадратне једначине

$$r^2+\frac{R}{L}r+\frac{1}{CL}=0,$$

дакле, дати обрасцима

$$r_1=-\frac{R}{2L}+\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{CL}},$$

$$r_1=-\frac{R}{2L}-\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{CL}}.$$

Према томе, да ли је

$$R>2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{или} \quad R<2\sqrt{\frac{L}{C}},$$

корени су реални или имагинарни. Интеграционе константе C_1 и C_2 одређују се на тај начин да за $t=0$ буде

Q = првобитном оптерећењу Q_0,

а интензитет струје $I=0$, према чему се имају две једначине

$$C_1+C_2=Q_0,$$
$$r_1C_1+r_2C_2=0,$$

из којих је

$$C_1=\frac{Q_0r_2}{r_2-r_1}=\left(\frac{1}{2}+\frac{R}{4\alpha L}\right)Q_0,$$

$$C_2=\frac{Q_0r_1}{r_1-r_2}=\left(\frac{1}{2}-\frac{R}{4\alpha L}\right)Q_0,$$

где је

$$\alpha=\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{CL}},$$

Кад су корени r_1 и r_2 реални, биће

$$(319)\qquad \begin{aligned} Q &= Q_0 e^{-\frac{Rt}{2L}}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{R}{4\alpha L}\right)e^{\alpha t}+\left(\frac{1}{2}-\frac{R}{4\alpha L}\right)e^{-\alpha t}\right], \\ I &= \frac{Q_0}{2\alpha LC}e^{-\frac{Rt}{2L}}\left(e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}\right), \end{aligned}$$

а ако су корени имагинарни и ако се стави да је

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{CL}-\frac{R^2}{4L^2}},$$

добија се

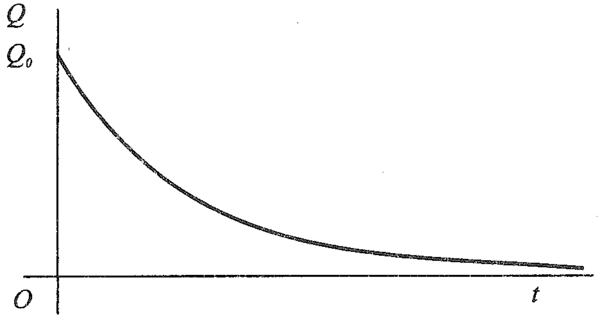
$$(320)\qquad \begin{aligned} Q &= Q_0 e^{-\frac{Rt}{2L}}\left(\cos\beta t+\frac{R}{2\beta L}\sin\beta t\right), \\ I &= \frac{Q_0}{\beta LC}e^{-\frac{Rt}{2L}}\sin\beta t. \end{aligned}$$

Карактер испражњавања различан је према томе да ли су корени r_1 и r_2 реални или имагинарни, тј. према томе да ли је решење проблема изражљиво обрасцима (319), или обрасцима (320).

У првоме случају испражњавање је *монотоно*. Електрично оптерећење кондензатора, које у почетку има вредност Q_0, опада поступно и непрекидно до нуле, пошто је

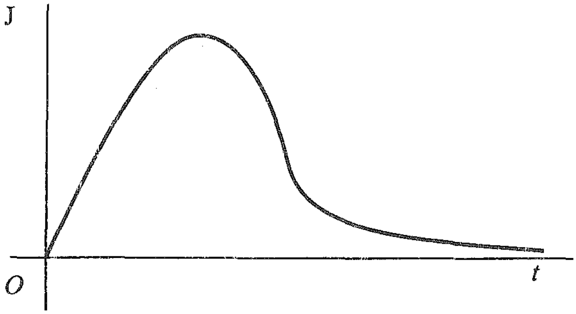
$$\frac{R}{2L} > \alpha,$$

па ће промене електричног оптерећења у току времена бити представљене сликом 17.



Сл. 17

Интензитет струје у почетку је једнак нули, затим расте, достиже свој максимум после кога стално опада до нуле, што је оличено сликом (18). Време што одговара максимуму интензитета одређено је условом



Сл. 18

$$\frac{dI}{dt}=0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2Q}{dt^2}=0,$$

из кога се добија

$$\left(\frac{R}{2L}-\alpha\right)e^{2\alpha t}=\frac{R}{2L}+\alpha,$$

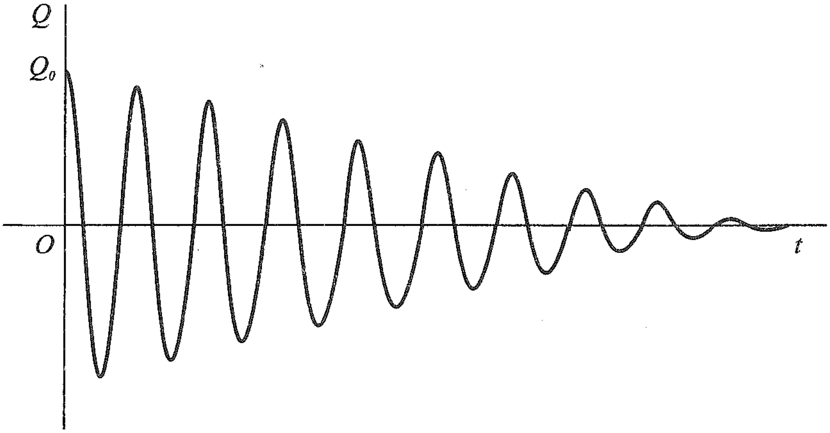
па ће, дакле, максимум наступити у тренутку

$$t=\frac{1}{2\alpha}\log\frac{\frac{R}{2L}+\alpha}{\frac{R}{2L}-\alpha}.$$

У другоме случају Q и I биће периодично-амортизиране функције; у спроводнику се јављају алтернативне струје, наизменце позитивне и негативне, и испражњавање кондензатора је *осцилаторно*. Електрично оптерећење, које је у почетку има вредност Q_0, опада, постаје једнако нули, затим негативно, достиже један негативан минимум, затим расте, постаје поново једнако нули, достиже један позитиван максимум, после кога опет опада итд. као што је представљено сликом 19.

Вредности времена, што одговарају овим наизменичним максимумима и минимумима, одређене су једначином $\sin\beta t=0$, из које се добијају те вредности

$$t=\frac{n\pi}{\beta}=\frac{n\pi}{\sqrt{\frac{1}{CL}-\frac{R^2}{4L^2}}}, \quad (n=1,2,3,\ldots).$$



Сл. 19

Саме максималне и минималне вредности оптерећења биће

$$\text{први максимум } +Q_0, \quad \text{први минимум } -Q_0 e^{-\frac{R\pi}{2L\beta}},$$

$$\text{други максимум } +Q_0 e^{-\frac{2R\pi}{2L\beta}}, \quad \text{други минимум } -Q_0 e^{-\frac{3R\pi}{2L\beta}}, \text{ итд.}$$

Те вредности опадају, дакле, као чланови геометријске постепености код које је апсолутна вредност количника

$$r = e^{-\frac{R\pi}{2L\beta}}.$$

Осцилације су правилне и имају за периоду:

$$T = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

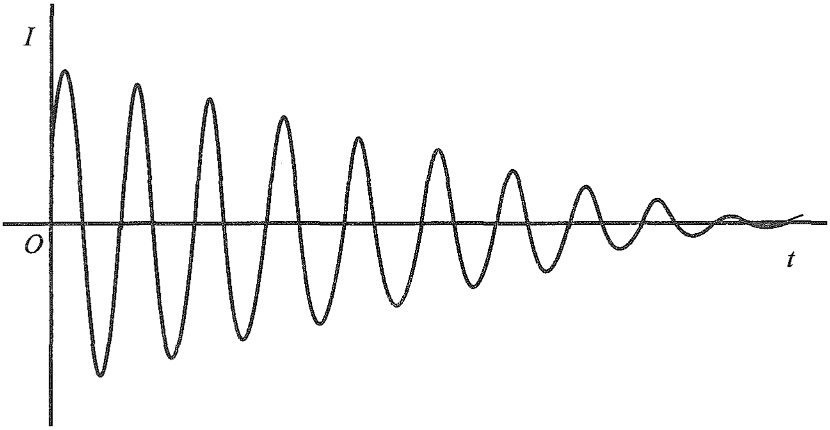
У случају кад је вредност

$$\frac{R^2}{4L^2} \text{ врло мала наспрам } \frac{1}{LC},$$

што ће бити кад су осцилације врло брзе, та ће периода бити приближно представљена Thomson-овим обрасцем

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Интензитет струје у почетку је једнак нули, затим расте до једног максимума, после кога опада до нуле, постаје негативан и опада до једног минимума; од тада поново расте итд., што је оличено у сл. 20.



Сл. 20

Тренуци t, што одговарају максимумима и минимумима интензитета, одређени су условом

$$\frac{dI}{dt} = 0$$

који доводи до једначине

$$\operatorname{tg} \beta t = \frac{2\beta L}{R},$$

а ова се своди на једначину

$$\sin \beta t = \pm \beta \sqrt{LC}, \tag{321}$$

што показује да се ма која два таква узастопна тренутка разликују међу собом за једну сталну количину. Саме максималне и минималне вредности интензитета биће

$$+\frac{Q}{\sqrt{LC}}\, e^{-\frac{R\theta}{2L}}, \quad -\frac{Q_0}{\sqrt{LC}}\, e^{-\frac{R}{2L}\left(\theta+\frac{\pi}{\beta}\right)};$$

$$+\frac{Q_0}{\sqrt{LC}}\, e^{-\frac{R}{2L}\left(\theta+\frac{2\pi}{\beta}\right)}, \quad -\frac{Q_0}{\sqrt{LC}}\, e^{-\frac{R}{2L}\left(\theta+\frac{3\pi}{\beta}\right)};$$

. . . .

где је θ најмањи позитивни корен једначине (321). Те вредности опадају, дакле, поступно као чланови геометријске постепености.

И електрично оптерећење и интензитет струје испражњавања имају, према томе, наизменце максимуме и минимуме, али који су све мањи у току времена и теже нули.

Сви наведени обрасци, а *који су последице израза за други релативни извод функције*

$$z = Qe^{-\frac{R\theta}{2L}},$$

а то је

$$\Delta_2(z) = \frac{1}{L}\left(\frac{1}{C} - \frac{R^2}{4L}\right),$$

дају могућност да се до појединости проучи начин на који се измењује појава кад се за

$$C, R, L$$

узимају разне вредности, сталне у току једне исте појаве, али промењљиве од једне такве појаве до друге. A. Edlund, Feddersen, Mouton, Hertz и др. физичари експериментално су потврдили све те теоријске резултате.

* * *

Све што је горе казано претпоставља да су фактори

$$C, R, L$$

непромењљиви за време трајања појаве и да у саставу система нема никакве електромоторне силе нити индукције произведене спољним узроцима.

Али често се и само по себи дешава, а може се и нарочитим експерименталним диспозицијама учинити, да се који од тих фактора мења у току појаве, било по каквом закону који је непосредно дат, или се може сазнати, било и без тачног познавања тог закона, али тако да се знају границе између којих се крећу те промене. У једноме своме ранијем раду ја сам изнео разне физичке начине за такво мењање поменутих фактора, основане већином на мењању једне дужине у току времена по каквоме познатом закону.

Уочимо, дакле, случај кад се у току појаве мења који од утицајних фактора

$$C, R, L, E, q$$

или више њих у исти мах, на који од таквих начина. Појава се тада своди на линеарну диференцијалну једначину другога реда са *промењљивим* коефицијентима и независним чланом

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\left(\frac{R}{L}+\frac{1}{L}\frac{dL}{dt}\right)\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{CL}=\frac{1}{L}\left(\frac{dq}{dt}-E\right). \tag{322}$$

Претпоставимо најпре да у саставу система или нема никакве електромоторне силе и никаквог спољнег индукционог утицаја, или, ако их има, да се ти фактори мењају у току времена тако да за све време трајања појаве разлика

$$\frac{dq}{dt}-E$$

буде једнака нули.

Први услов је лако испунити уклонивши из састава система све изворе електромоторне силе, као: електричне елементе, индукционе машине итд. и изолујући га од свих спољних индукционих утицаја.

Други се услов може практички остварити учинивши да се електромоторна сила E и прилив индукције q мењају са временом, нпр. по физички лако остварљивим законима

$$E=E_0\sin 2\pi\frac{t}{T},$$
$$q=q_0+\beta\cos 2\pi\frac{t}{T},$$

где би почетна јачина E_0 електромоторне силе требало да буде

$$E_0=\frac{2\pi\beta}{T},$$

па ће тада бити

$$\frac{dq}{dt}-E=0$$

и појава се своди на линеарну хомогену једначину другога реда

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\left(\frac{R}{L}+\frac{1}{L}\frac{dL}{dt}\right)\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{CL}=0, \tag{323}$$

где су коефицијенти непознате функције Q и њених извода променљиви у току времена.

Ако се стави да је

$$Q=\frac{y}{\sqrt{L}}e^{-\frac{1}{2}\int\frac{R}{L}dt}, \tag{324}$$

једначина (323) постаје

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \tilde{\omega}(t)\,y = 0, \tag{325}$$

где је $\tilde{\omega}(t)$ експлицитна функција времена t дефинисана обрасцем

$$\tilde{\omega}(t) = \frac{1}{CL} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{R}{L} + \frac{d}{dt}\log L\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{R}{L} + \frac{d}{dt}\log L\right)^2.$$

Други релативни извод функције

$$y = Q\sqrt{L}e^{\frac{1}{2}\int\frac{R}{L}dt}$$

по времену t *имаће, дакле, за израз*

$$\Delta_2(y) = -\tilde{\omega}(t),$$

и према томе ће карактер и ток појаве зависити од облика функције $\tilde{\omega}(t)$. Свакој појави испражњавања кондензатора, па на ма који начин у њој варирали са временом утицајни фактори C, R, L, одговара по једна таква функција; она ће, према својој улози у појави бити њена *карактеристична функција.*

У специјалном случају, кад су C, R, L непроменљиви у току појаве, карактеристична функција се своди на

$$\tilde{\omega}(t) = \text{const.} = \frac{1}{L}\left(\frac{1}{C} - \frac{R^2}{4L}\right);$$

у другим случајевима то ће бити функција времена t, увек позната кад се зна начин на који се мењају поменути утицајни фактори.

Али карактеристична функција своди се на константу и у бескрајно много других случајева, кад су ти фактори праве функције времена t. Нека је наведен овај пример такве појаве, који је лако и физички остварити: претпоставимо да фактор L остаје непромењен у току појаве, а да се фактори R и C мењају периодички по законима

$$R = K + H\sin\gamma t,$$

$$C = \frac{1}{A + B\cos\gamma t + D\sin\gamma t + E\sin^2\gamma t},$$

где су

$$A, B, D, E, H, K$$

позитивне константе такве да је

$$B = \frac{\gamma H}{2}, \quad D = \frac{KH}{2L}, \quad E = \frac{H^2}{4L}.$$

Карактеристична функција имаће тада сталну вредност

$$\tilde{\omega}(t) = \frac{A}{L} - \frac{K}{4L^2},$$

и ако се та вредност означи са h, електрично оптерећење кондензатора мењаће се у току времена по закону

$$Q = \frac{1}{\sqrt{L}}\left(C_1 e^{t\sqrt{-h}} + C_2 e^{-t\sqrt{-h}}\right) e^{-\frac{Kt}{L}+\frac{H\cos\gamma t}{L\gamma}},$$

или по закону

$$Q = \frac{1}{L}\left(C_1 \sin t\sqrt{\alpha} + C_2 \cos t\sqrt{\alpha}\right) e^{-\frac{Kt}{L}+\frac{H\cos\gamma t}{L\gamma}}$$

према знаку количине h. У првоме случају испражњавање је континуално, а у другоме осцилаторно. У оба случај оно је слично обичноме испражњавању при непромењивим факторима C, R, L, са том разликом што због присуства фактора

$$e^{\frac{H\cos\gamma t}{L\gamma}}$$

вредност електричног оптерећења Q непрестано осцилује око оних вредности које би одговарале испражњавању при сталним C, R, L, а периода тих осцилација је она иста што одговара периодичким варијацијама отпора и капацитета. Слично важи и за варијације интензитета струје са временом.

Али у пракси се најчешће има посла са случајевима кад поменути утицајни фактори не задовољавају такве услове, па је карактеристична функција $\tilde{\omega}(t)$ појаве права функција времена t, за коју је експлицитна интеграција диференцијалне једначине (325) немогућна.

Међутим, пошто је у таквим случајевима познат израз другог релативног извода $\Delta_2(y)$ у облику функције $-\tilde{\omega}(t)$, то се применом ставова о зависности особина функције y од особина тога извода, може сазнати велики број појединости функције y, и то баш оних које су готово једине од интереса у физичком погледу за теорију појаве. Такве би појединости биле, нпр. ове: довољно приближна слика о временском току појаве; о начину на који електрично оптерећење кондензатора и интензитет струје што пролази кроз спроводну жицу, варирају са временом; о облицима кривих линија које графички представљају ток тих варијација: о нулама, максимумима, минимумима тих линија; о њиховим деформацијама кад се који од поменутих фактора мења итд.

О таквим ће појединостима појаве, *као последицама особина извода* $\Delta_2(y)$, бити реч у овоме што следује.

* * *

Карактеристична функција $\tilde{\omega}(t)$ појаве, једнака релативном изводу $\Delta_2(y)$ са промењеним знаком, има ту основну особину да од њеног знака у једноме датом размаку времена, нпр. од $t = t_1$ до $t = t_2$, зависи смисао и карактер испражњавања кондензатора. Та је зависност исказана у овим двама ставовима:

1. У ма коме размаку времена (t_1, t_2), у коме је карактеристична функција непрестано *негативна*, електрично оптерећење кондензатора не може променити знак више од један пут: пре и после те промене испражњавање је уопште *монотоно*.

2. У ма коме размаку времена (t_1, t_2), у коме је карактеристична функција непрестано *позитивна*, испражњавање је уопште *осцилаторно* и у жици се јављају *алтернативне струје* са сталним или промењивим периодама.

То следује непосредно из ранијих ставова о изводу $\Delta_2(y)$, примењених на функцију y која има за други релативни извод функцију $\tilde{\omega}(t)$. Међутим, пошто се електрично оптерећење Q, према обрасцу (324), добија кад се интеграл y једначине (325) помножи фактором

$$(326) \qquad \frac{e^{-\frac{1}{2}\int\frac{R}{L}dt}}{\sqrt{L}},$$

(чије се варијације тачно знају), то у нарочитим изузетним случајевима, при варијацијама нарочите врсте тога фактора, монотони или осцилаторни карактер испражњавања може бити измењен, што је могуће испитати и сазнати у свакоме датом конкретном случају.

У општем случају, фактор (326) (осим изузетних начина варијација коефицијента селф-индукције L), тежи нули при бескрајном рашћењу времена t, па се његова улога у појави састоји у томе да *слаби рашћење оптерећења* Q (у позитивном или негативном смислу) у случају кад је испражњавање монотоно, а да поступно *амортизира осцилације*, тј. да им скраћује амплитуде, у случају кад је испражњавање осцилаторно.

У исто време, из ранијега следује овај резултат:

Кад је карактеристична функција *позитивна* у размаку времена (t_1, t_2), па се са M и N означе највећа и најмања вредност коју та функција има у томе размаку, *електрично оптерећење кондензатора ће у истоме размаку времена променити знак најмање онолико пута колико има целих јединица у броју*

$$(327) \qquad \frac{(t_2 - t_1)\sqrt{N}}{\pi} - 1,$$

а највише онолико пута колико има целих јединица у броју

$$(328) \qquad \frac{(t_2 - t_1)\sqrt{M}}{\pi} + 2.$$

Приметимо да се, као што то мора бити и по самој природи ствари, бројеви (327) и (328), што одређују једну доњу и једну горњу границу мењања знака електричног оптерећења, *не мењају кад се буду мењале јединице мере за факторе* C, R, L. О томе непосредно уверавамо водећи рачуна о димензијама тих фактора, које су:

1° *У електро-статичком систему*:

$$C = [L], \quad R = [L^{-1}T], \quad L = [L^{-1}T^2];$$

2° *У електро-магнетном систему:*

$$C = [L^{-1}T], \quad R = [LT^{-1}], \quad L = [L].$$

Заменом тих израза за димензије у обрасцу

$$\tilde{\omega}(t) = \frac{1}{CL} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{R}{L} + \frac{d}{dt}\log L\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{R}{L} + \frac{d}{dt}\log L\right)^2$$

налази се да је димензија карактеристичне функције и у електро-статичком и у електро-магнетном систему $[T^{-2}]$. Изрази

$$(t_2 - t_1)\sqrt{N} \quad \text{и} \quad (t_2 - t_1)\sqrt{M}$$

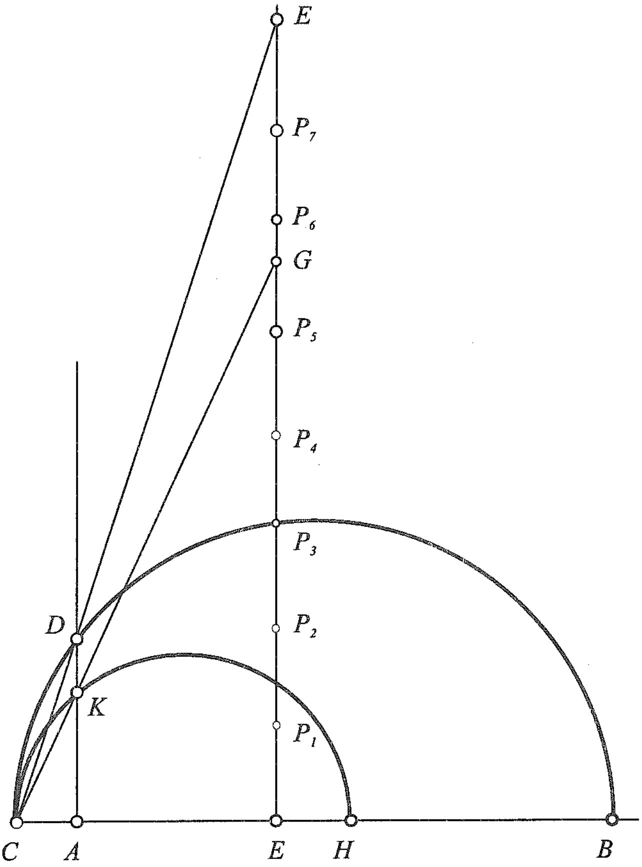
су, дакле, нулте димензије и, према томе, неће се променити кад се буду промениле основне јединице мера за дужину, масу и време: ти су изрази, па дакле и бројеви (327) и (328), *айсолутни бројеви* као што је и требало очекивати.

Из горњег се става, а за случај врло лаганих осцилација може извести и једна интересантна графичка конструкција за одређивање броја промена знака електричног оптерећења у датоме размаку времена (t_1, t_2).

Замислимо конструисану криву линију

$$z = \tilde{\omega}(t),$$

узевши време t као апсцису, а z као ординату. Нека су AB и AH највећа и најмања ордината те криве у размаку (t_1, t_2). Пренесимо те две дужине на једну исту праву AB, почевши од A и на исту страну од те тачке. Са супротне стране тачке A, а на исту праву AB, пренесимо дужину $AC = 1$ и од C дужину CE једнаку дужини размака (t_1, t_2), претпостављајући да су све количине, које се овде преносе као дужине, изражене у јединицама $C \cdot G \cdot S$. Над дужинама CB и CH опишимо полукругове; затим из тачке A повуцимо праву DK управну на CB до пресека D и K са полукруговима. Тачку C саставимо са D и K и продужимо саставну праву до пресека E и G са правом EG повученом из E управно на CB. Напослетку, ректифицирајмо круг описан над CA као пречником и тако ректифицирану дужину одмеримо дуж праве EF, почевши од E; нека су $P_1, P_2, P_3 \ldots$ тако добијене крајње тачке пренесених дужина.



Сл. 21

Тада према горњем ставу и овде извршеној конструкцији:

Електрично оптерећење кондензатора промениће у размаку времена (t_1, t_2) знак *најмање онолико пута колики је број тачака* P_k *што се налазе на размаку* EG *(пошто се тај број смањи за јединицу)*,*а највише онолико пута колики је број тих тачака на размаку* EF *(пошто се тај број повећава за две јединице)*.

Јер према конструкцији је

$$EF = \frac{CE \cdot AD}{AC} = \frac{(t_2 - t_1)\sqrt{AC \cdot AD}}{AC} = (t_2 - t_1)\sqrt{M};$$

$$EG = \frac{CE \cdot AK}{AC} = \frac{(t_2 - t_1)\sqrt{AC \cdot AH}}{AC} = (t_2 - t_1)\sqrt{N},$$

а поред тога је

$$EP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = \ldots = \pi.$$

Неколико ставова, који ће сад бити наведени, а који следују из ранијих ставова о зависности особина другога извод $\Delta_2(y)$и одговарајуће му функције y, исказују везу што постоји између начина варијације карактеристичне функције $\tilde{\omega}(t)$ и величине осцилаторне периоде, сматрајући као *осцилаторну периоду* размак времена између двају узастопних тренутака у којима електрично оптерећење мења знак. За величину периоде важе ови ставови:

1. Кад је карактеристична функција *позитивна* и непрестано *опада*, док t расте од t_1 до t_2, *периода постаје све дужа идући од* t_1 *до* t_2, *али непрестано остаје мања од* $\frac{\pi}{\sqrt{N}}$.

2. Кад, док време расте од $t = t_1$ до бескрајности, карактеристична функција непрестано *опада*, али остаје непрестано *позитивна* и асимтотно тежи каквој коначној и од нуле различној граници λ, електрично оптерећење *имаће бескрајно много осцилација за то време; осцилаторна периода постаје све дужа али не прелази границу* $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$, *тежећи асимтотно тој граници.*

На тај начин, после извеснога времена периоде се приближно изједначавају, као у случају обичнога испражњавања кондензатора са сталним факторима C, R, L и постају све приближно једнаке броју $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$.

Може се десити да граница λ, којој тежи карактеристична функција, буде једнака нули. Осцилаторна периода постаје у току времена све дужа и бескрајно расте. Тада се јавља питање: да ли ће тада број осцилација остати коначан или ће бескрајно расти? За решење питања потребна је дубља дискусија, коју је могућно извести на основу ранијих ставова о другоме релативном изводу.

3. Кад, у посматраноме размаку времена, вредност карактеристичне функције непрестано лежи између два позитивна броја N и M, *ос-*

цилаторна периода ће се, по својој дужини непрестано налазити у размаку између бројева

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{\sqrt{N}},$$

тако да се њена дужина изражава у облику

$$\frac{\pi}{\sqrt{N+\theta(M-N)}},$$

где је θ један број који лежи између 0 и 1.

4. Кад је карактеристична функција *позитивна* и непрестано расте док t расте од t_1 до t_2, осцилације електричног оптерећења се *све више згушњавају*; осцилаторна периода *постаје све краћа идући од* t_1 *до* t_2, *али при томе не прелази границу* $\frac{\pi}{\sqrt{\mathrm{M}}}$.

Па ако, док t расте од тренутка t_1 до бескрајности, карактеристична функција непрестано расте, остајући при том позитивна и тежећи каквој коначној граници μ, периода постаје поступно све мања и тежи граници $\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$.

Та промењивост осцилаторне периоде јесте оно што битно разликује испражњавање кондензатора са промењивим капацитетом, отпором и коефицијентом селф-индукције, од обичнога испражњавања са непромењивим тим факторима, при чему је периода непромењива за све време трајања појаве.

Код тога обичног испражњавања кондензатора, ако овај није у вези са каквим извором електромоторне силе, амплитуде електричних осцилација постају све мање и бескрајно опадају кад време расте, па се појава поступно гаси и то после извесног времена постаје неосетна. Узрок је томе, са чисто рачунске стране, тај што је реални део корена карактеристичне квадратне једначине

$$r^2+\frac{R}{L}r+\frac{1}{CL}=0,$$

што одговара диференцијалној једначини појаве

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{CL}=0$$

увек *негативан*, пошто је коефицијенат $\frac{R}{L}$ увек позитиван.

Међутим, при испражњавању кондензатора са промењивим капацитетом, отпором и коефицијентом селф-индукције, може се десити да амплитуде осцилација час расту, час опадају. Јер у диференцијалној једначини појаве

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{1}{L}\left(R+\frac{dL}{dt}\right)\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{CL}=0,$$

од које зависи њен карактер, коефицијенат члана са Q увек је позитиван, али коефицијенат

$$\frac{1}{L}\left(R+\frac{dL}{dt}\right)$$

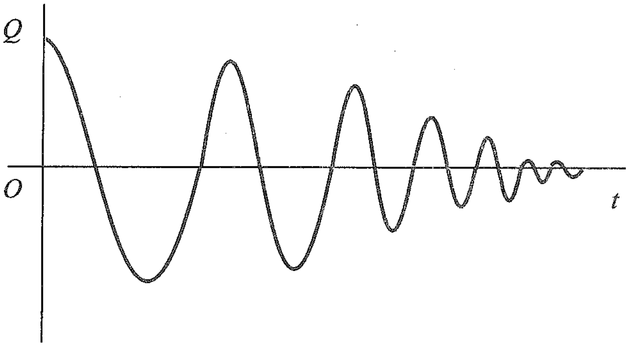
извода $\frac{dQ}{dt}$ може бити позитиван или негативан, према начину мењања електричног отпора и коефицијента селф-индукције у току времена. Тако, ако је отпор довољно слаб, а коефицијенат селф-индукције опада у размаку времена (t_1, t_2), и то тако да је

$$\frac{dL}{dt}<-R,$$

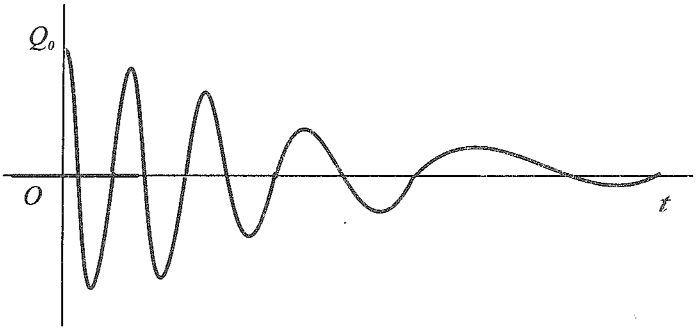
коефицијенат извода $\frac{dQ}{dt}$ биће непрестано негативан у томе размаку, па амплитуде осцилација могу све више расти.

Испитивање начина варијације амплитуда било би од великог интереса са чисто физичког гледишта, али ће се аналитичке тешкоће, које оно задаје, моћи савладати тек онда кад буде дубље проучена веза између особина релативног извода $\Delta_2(y)$ и одговарајуће му функције y. Проблем је од нарочитога интереса са овога гледишта: кад би он био решен, било би могућно наћи експерименталних диспозиција које би, спречивши оно нагло опадање осцилаторних амплитуда, што задаје толиких тешкоћа експерименталном проучавању осцилација, биле у стању продужавати размак времена у коме су осцилације осетне.

Међутим, већ и ово што је овде изложено, а оснивајући резултате на ономе што се зна о особинама другога релативног извода $\Delta_2(y)$, даје могућност да се у појединостима квалитативно проучи начин мењања електричног оптерећења у току испражњавања кондензатора. Криве, које графички представљају начин тих варијација, сличне су онима при обичноме испражњавању: оне осцилују изнад и испод осовине времена (сл. 22 и 23). Према знаку карактеристичне функције и начину на који се ова мења у току времена, периоде осцилација постају све краће, али не смањујући се преко одређене границе, или све дуже, при чему могу расти и до бескрајности. У првоме случају осцилације се згушњавају, а у другом се разређују, а ово разређивање може ићи и до бескрајности. Испражњавање кондензатора може бити у једноме размаку времена монотоно, а у другоме осцилаторно, а може у целом размаку задржати један исти карактер, што ће, као што је показано, зависити од облика карактеристичне функције, једнаке другоме релативном изводу са промењеним знаком.



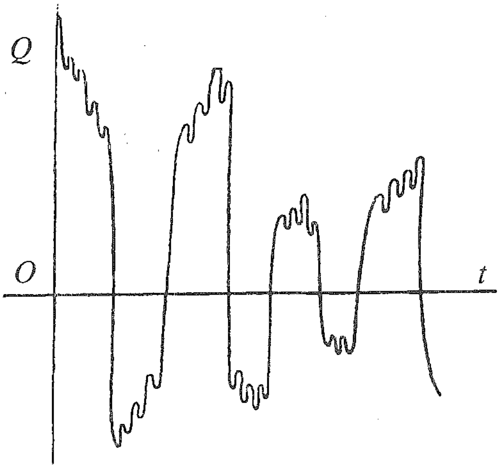
Сл. 22



Сл. 23

Сам број електричних осцилација зависиће на показани начин од вредности карактеристичне функције у посматраноме размаку времена; он се може по вољи повећавати или смањивати удешавајући експерименталне диспозиције тако, да карактеристична функција има у датоме размаку времена што мању или што већу позитивну вредност.

Осцилације могу по облику бити и компликованије од оних при обичноме испражњавању. Крива, што их графички представља, може осциловати око криве која представља електричне осцилације при обичном испражњавању; она може имати и по више максимума или минимума између двају тренутака у којима електрично оптерећење мења знак (сл. 24) итд.



Сл. 24

Кад је тако појава проучена у погледу мењања оптерећења, лако је проучити је и у погледу мењања *интензитета струје испражњавања* која се креће кроз спроводну жицу. Из обрасца

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

види се:

1° да је, за све време за које електрично оптерећење Q *расте*, интензитет струје *негативан*;

2° да је, за све време за које оптерећење *опада*, интензитет струје *позитиван*;

3° пошто су функција Q и њен извод по времену увек коначне и континуалне функције времена, то, према Rolle-овој теореми, у размаку између ма којих двају тренутака у којима оптерећење мења знак, интензитет струје бар једном (а може и више пута) мења знак;

4° тренуци у којима интензитет струје мења знак одговарају оним вредностима у којима електрично оптерећење достиже своје максимуме и минимуме.

* * *

Од интереса је још упоредити међусобно ток појаве у више разних прилика, при којима се неки од фактора C, R, L мењају на један исти начин, а други на разне начине у току више експеримената.

Замислимо, нпр. да се у току једне појаве електрични отпор и коефицијенат селф-индукције мењају по каквим познатим законима, а да капацитет кондензатора остаје за то време непроменљив. То би се, нпр. постигло помоћу каквога равног кондензатора, чије би арматуре остале за све време испражњавања на једном сталном међусобном растојању, а испражњавање би се вршило преко каквог апарата који у свакоме тренутку мења отпор и коефицијенат селф-индукције (нпр. помоћу реостата).

У колико би био измењен ток појаве, честина осцилација, осцилаторне периоде електричног оптерећења кондензатора и интензитета струје, кад би, задржавајући све остале прилике непромењене, повећали или смањили међусобно растојање арматура кондензатора, али тако да оно остане стално за све време новога експеримента и да се два експеримента разликују само по величини тога растојања?

Исто тако може се, нпр. у току једнога експеримента изменити капацитет и коефицијенат селф-индукције, а да отпор остане сталан; какве би тада измене у току појаве изазвало смењивање електричног отпора новим отпором, већим или мањим од првобитног?

На таква питања може се одговорити применом ранијих ставова о другоме релативном изводу. Из њих, нпр. следује да:

Свака експериментална диспозиција, која иде на то да повећа вредност карактеристичне функције у посматраноме размаку времена, изазива повећање броја електричних осцилација у томе размаку, а смањује осцилаторну периоду.

Тако, умањавањем капацитета кондензатора повећава се вредност карактеристичне функције, и ако се међусобно упореде два експеримента у којима се отпор и коефицијенат селф-индукције мењају на један исти начин, а капацитет је у првоме експерименту већи него у другом, у првоме ће честина електричних осцилација бити већа, а осцилаторна периода мања, но у другом. Међутим, повећавањем отпора смањује се честина осцилација, а повећава се осцилаторна периода.

Али се у томе може ићи још даље.

Замислимо да се у току једнога експеримента отпор и коефицијенат селф-индукције мењају на који било начин, а да капацитет кондензатора остаје сталан за све време експеримента. Кад би се тај капацитет сменио неким другим, такође сталним за време експеримента, већим или мањим од првобитнога, та би измена изазвала измену честина осцилација и њихових периода, и то тако да, у једноме размаку времена (t_1, t_2) ти елементи зависе од вредности t_1, t_2 и узете вредности капацитета. Сам начин те зависности може се проучити помоћу особина једначине изводнице везане за појаву, а о којим је особинама била реч у ранијим излагањима особина функција чији други релативни извод $\Delta_2(y)$ садржи линеарно један променљив параметар.

Пођимо од једначине

(329) $$\Delta_2(y) = -\tilde{\omega}(t)$$

на чије се проучавање своди теорија електричних осцилација при испражњавању кондензатора и где је

$$\tilde{\omega}(t) = \frac{1}{CL} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{R}{L} + \frac{d}{dt}\log L\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{R}{L} + \frac{d}{dt}\log L\right)^2.$$

Ако се стави да је

$$\frac{1}{C} = \lambda, \quad \frac{1}{L} = f_1(t),$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{R}{L} + \frac{d}{dt}\log L\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{R}{L} + \frac{d}{dt}\log L\right)^2 = f_2(t),$$

једначина (329) постаје

(330) $$-\Delta_2(y) = \lambda f_1(t) + f_2(t),$$

где је λ променљив параметар. Нека је

$$\Phi(\lambda) = 0$$

једначина изводница извода $\Delta_2(y)$ дефинисаног једначином (330), што одговара датоме размаку времена (t_1, t_2) и двема константама h и k.

Ако се пусти да h и k варирају од нуле до бескрајности, корени

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$$

изводнице вариpаће такође, али сваки у своме размаку, ван кога никако неће изаћи; два таква ра̂змака, што одговарају двама различним коренима, никад се ни тотално, ни делимично не поклапају.

Означимо са (λ_n) размак варијација корена λ_n. Тада, према раније наведеној особини функције чији други релативни извод садржи линеарно један променљив параметар, може се исказати овај став:

Број елекӣричних осцилација у ӣојави, у размаку времена $(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2)$ *једнак је ранīу* n, *умањеном за јединицу, онoīа размака* (λ_n) *који обухваīа рециӣрочну вредносӣ* $\frac{1}{\mathrm{C}}$ *каӣациӣеӣа кондензаӣора, или самоме* *томе рангу* [ово последње у случају кад се вредност $\frac{1}{C}$ налази између два таква размака (λ_n) и (λ_{n+1})].

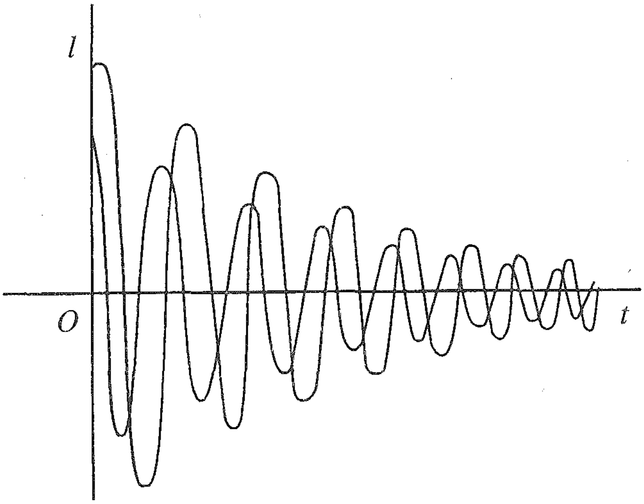
У колико је капацитет већи, у толико је нижи ранг размака (λ_n) који садржи изврнуту вредност капацитета; према томе, у толико је мањи број електричних осцилација у датоме размаку времена. Са опадањем капацитета тај број постаје све већи и број осцилација све више расте. Осцилаторна периода, напротив, услед тога опада.

Упоредимо међусобно бројеве електричних осцилација у датом размаку времена (t_1, t_2), у различним експериментима у којима се отпор и коефицијенат селф-индукције мењају на један исти начин, а капацитет има сталне вредности у једноме истом експерименту, а разне вредности од једнога експеримента до другог.

Претпоставимо да је у једном експерименту капацитет толики да се његова изврнута вредност

$$\lambda = \frac{1}{C}$$

налази у размаку (λ_n), или између размака (λ_n) и (λ_{n+1}), а у другом експерименту у размаку (λ_{n+1}), или између размака (λ_{n+1}) и (λ_{n+2}). *Број осцилација у првом експерименту биће* n – 1, *или* n, *а у другом* n *или* n + 1. Тренуци у којима електрично оптерећење у првоме и другом експерименту мења знак, а у размаку времена (t_1, t_2), следују наизменце један за другим и то тако, да оптерећење најпре мења знак у једном експерименту, па затим у другом, и тако наизменце, као што показује слика 25.



Сл. 25

И уопште, ако се међусобно упореде два експеримента, од којих првоме одговара за $\frac{1}{C}$ размак (λ_n), а другоме размак (λ_{n+1}), k-ти тренутак, почевши од $t = t_1$, у коме електрично оптерећење мења знак у првоме експерименту, наилази после k-тог, а пре $(k + p)$-тог тренутка у коме оптерећење мења знак у другоме експерименту.

Пошто је у размаку времена (t_1, t_2), кад је испражњавање кондензатора *осцилаторно*, услов

$$\lambda f_1 + f_2 > 0$$

увек испуњен [јер други релативни извод $\Delta_2(y)$ мора тада бити *позитиван*], то, према ранијем ставу, оптерећење кондензатора за капацитет такав да се λ налази у размаку (λ_1) не мења ни једанпут знак у размаку (t_1, t_2) и има у њему један максимум или један минимум. За капацитет такав, да се λ налази у размаку (λ_2), оптерећење мења једанпут знак у томе размаку времена и у овоме достиже један свој максимум и један минимум; максимум (или минимум) оптерећења у првоме експерименту лежи између овога максимума и минимума у другоме експерименту. И уопште:

Максиимуми и минимуми електричног оптерећења за капацитет за који се λ налази у размаку (λ_{n+1}) раздвојени су максимумима и минимумима оптерећења што одговарају капацитету за који се λ налази у размаку (λ_n).

Упоредимо још међусобно два експеримента, један за који је карактеристична функција

$$\tilde{\omega}(t) = \lambda f_1 + f_2$$

и други за који је та функција

$$\tilde{\omega}(t) = \lambda\varphi_1 + \varphi_2,$$

где су f_1, f_2, φ_1, φ_2, дате функције времена t.

Ако је у размаку времена (t_1, t_2) за све позитивне вредности λ непрестано

$$\lambda f_1 + f_2 \geq \lambda\varphi_1 + \varphi_2,$$

тј.

$$\lambda(f_1 - \varphi_1) \geq \lambda(f_2 - \varphi_2),$$

и ако се корени изводница у првоме и другом експерименту означе са

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3, \ldots$$
$$\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3, \ldots$$

онда, према ранијем ставу, корен λ_n биће већи од корена μ_n истога ранга, а тренуци t у којима електрично оптерећење у првоме експерименту (ономе што одговара капацитету λ_n) наступају после тренутака t истога ранга у којима оптерећење у другоме експерименту (ономе што одговара капацитету μ_n) мења знак.

То исто важи и за тренутке у којима електрично оптерећење кондензатора достиже своје максимуме и минимуме.

* * *

До сада је било претпостављено да у саставу система у коме се врши испражњавање кондензатора, или нема никакве електромоторне силе и никаквог спољнег индукционог уплива, или, ако их има, да се обоје тако са временом мењају, да разлика

$$\frac{dq}{dt} - E$$

буде једнака нули за све време испражњавања.

Претпоставимо сад општији случај: да систем садржи и какав извор електромоторне силе E и да је, под индукционим упливом каквога спољнег магнетног поља, чији притицај нека је q, а да се обоје мењају по каквим познатим законима у току времена. Ако се тада и капацитет кондензатора, отпор и коефицијенат селф-индукције такође мењају са временом, теорија проблема своди се на интеграцију и дискусију једне линеарне диференцијалне једначине другога реда са промењљивим коефицијентима и апсолутним чланом. Такве једначине, не само да се у општем случају не могу интегралити, већ су непримењљиви и закључци изведени у овоме што претходи и који важе за случај кад је једначина без апсолутног члана.

Међутим, интеграција је ипак могућна у појединим специјалним случајевима и код нарочитих експерименталних диспозиција. Тако, ако се за време експеримента капацитет кондензатора, отпор и коефицијенат селф-индукције не мењају, интеграција је могућна па ма по каквом се закону мењала електромоторна сила E и притицај спољне индукције q. Једначина се тада своди на линеарну једначину другога реда са сталним коефицијентима и промењљивим апсолутним чланом, а такве се једначине увек могу интегралити.

Тако, нпр. ако се електромоторна сила производи каквом махином за алтернативне струје, биће

$$E = E_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}, \tag{331}$$

па ако су, при томе, капацитет, отпор и коефицијенат селф-индукције непромењиви, проблем се своди на интеграцију једначине

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=-E_0\sin 2\pi\frac{t}{T},$$

чији општи интеграл има један од облика

$$(332)\qquad Q=A\sin 2\pi\frac{t}{T}+B\cos 2\pi\frac{t}{T}+C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}$$

или

$$(333)\quad Q=A\sin 2\pi\frac{t}{T}+B\cos 2\pi\frac{t}{T}+e^{-\frac{Rt}{2L}}(C_1\sin\alpha t+C_2\cos\alpha t),$$

где су C_1 и C_2 произвољне константе, A и B константе одређене двема једначинама

$$\frac{2\pi}{T}RA+\left(\frac{1}{C}-\frac{4\pi^2L}{T^2}\right)R=0,$$
$$\left(\frac{1}{C}-\frac{4\pi^2L}{T^2}\right)A-\frac{2\pi R}{T}B+E_0=0,$$

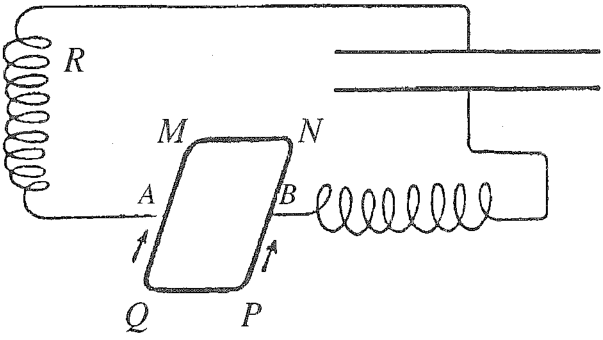
r_1 и r_2 корени квадратне једначине

$$r^2+\frac{R}{L}r+\frac{1}{CL}=0,$$

а α константа чија је вредност

$$\alpha=\sqrt{\frac{1}{CL}-\frac{R^2}{4L^2}}.$$

Појава се дешава као да је остала суперпозицијом двају разних испражњавања кондензатора: једнога обичног (без електормоторне силе) и једнога које бива по простоме синусном и косинусном закону и које се такође може лако проучиту у свима својим појединостима. Експериментална диспозиција била би шематски представљена сликом 26; спроводна жица, кроз коју се врши испражњавање, у вези је са металним оквиром *MNOP* који се окреће око осовине *AB* у магнетном пољу чије су линије сила управне на обртној осовини (или уопште, који је у вези са каквом махином за алтернативне струје). Тим обртањем изазива се у металном оквиру електромоторна сила која се у току времена мења по горе означеном закону (331).



Сл. 26

Такав би се исти случај имао кад би се притицај спољне индукције q мењао периодички у току времена. Тако би, нпр. било кад би се у саставу система налазила каква метална мембрана која би трептала под утицајем електромагнета. Ако је T периода тих вибрација, q ће се мењати са временом по закону облика

$$q = \alpha + \beta \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

где су α и β константе. Диференцијална једначина појаве би била

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = U,$$

где је U једна или друга од двеју функција

$$U = \frac{2\pi\beta}{T}\cos 2\pi \frac{t}{T},$$

$$U = \frac{2\pi\beta}{T}\cos 2\pi \frac{t}{T} - E_0 \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

према томе, да ли се у саставу система налази електормоторна сила E или не.

У оба случаја електрично оптерећење Q биће изражено обрасцима облика (332) или (333), само што ће константе A и B бити у неколико промењене. Теорија појаве не би се ниуколико разликовала од малопређашње.

Напослетку, ако се у саставу система налази каква стална електромоторна сила E (произведена, нпр. електричним елементом или батеријом) и ако капацитет кондензатора остане непромењен за све време појаве, онда на ма који се начин мењали отпор и коефицијенат селф-индукције, могућно је у појединостима проучити ток појаве и карактер електричних осцилација на исти начин, као и у случају кад се у саставу система не налази никакав извор електромоторне силе. Јер диференцијална једначина појаве тада је

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+\left(R+\frac{dL}{dt}\right)\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}+E=0;$$

општи интеграл ове једначине је

$$Q=-CE+V,$$

где је V општи интеграл једначине

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+\left(R+\frac{dL}{dt}\right)\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=0,$$

а ова је у овоме што претходи проучена до појединости. Криве, што графички представљају законе по којима електрично оптерећење и интензитет струје варирају у току времена, нису ништа друго до такве криве што одговарају испражњавању кондензатора без икакве електромоторне силе у саставу система, али само померене испод апсцисне осовине за сталну дужину CE.

* * *

На исти израз за други релативни извод Δ_2 и исте закључке као у проблему испражњавања електричних кондензатора, наилази се и у другим појавама, сасвим друге конкретне природе. Такве би појаве, нпр. биле ове:

1° осцилаторно кретање клатна са сталном или променљивом масом, трењем материјала и отпором средине кроз коју се креће;

2° осцилаторно кретање течности у пресавијеној цеви, на којој је једна страна отворена, а друга затворена, пошто се ова затворена страна нагло отвори.

Ако се означи са:

m маса клатна;

y елонгација клатна у тренутку t;

f специфични отпор средине кроз који се клатно креће;

h специфична сила која тежи да врати клатно у равнотежни положај;

F отпор трења,

закон кретања клатна у првој апроксимацији добија се интеграцијом линеарне диференцијалне једначине другога реда

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+f\frac{dy}{dt}+hy=F.$$

Једначина је истога облика као и она при испражњавању кондензатора, само што елонгација y игра улогу електричног оптерећења Q, коефицијенат f игра улогу коефицијента

$$R+\frac{dL}{dt},$$

коефицијенат h замењује реципрочну вредност капацитета, а F замењује количину

$$\frac{dq}{dt}-E.$$

Кад коефицијенти једначине

$$m,\ f,\ h,\ F \tag{334}$$

остају непроменљиви у току појаве, имао би се случај потпуно аналог обичноме испражњавању кондензатора и коефицијенат f би играо улогу електричног отпора спроводне жице, а F улогу електромоторне силе са промењеним знаком. Осцилације би биле представљене амортизирано-периодичким функцијама, као и у случају испражњавања кондензатора; амплитуде осцилација биле би све мање у току времена и напослетку би се потпуно угасиле.

Кад су коефицијенти (334) променљиви за време појаве, кретање клатна било би потпуно аналого осцилаторним флуктуацијама електрицитета при испражњавању кондензатора са променљивим капацитетом, електричним отпором, коефицијентом селф-индукције, притицајем спољне индукције и електромоторном силом.

Иста диференцијална једначина, исти израз за извод Δ_2 и исти закључци важе и за осцилаторно кретање течности у савијеној цеви. Улогу електричног оптерећења играла би у тој појави висина течног стуба.

* * *

ПРИЛОЗИ

Предавања на Београдском Универзитету

РАЧУНАЊЕ
СА
БРОЈНИМ РАЗМАЦИМА

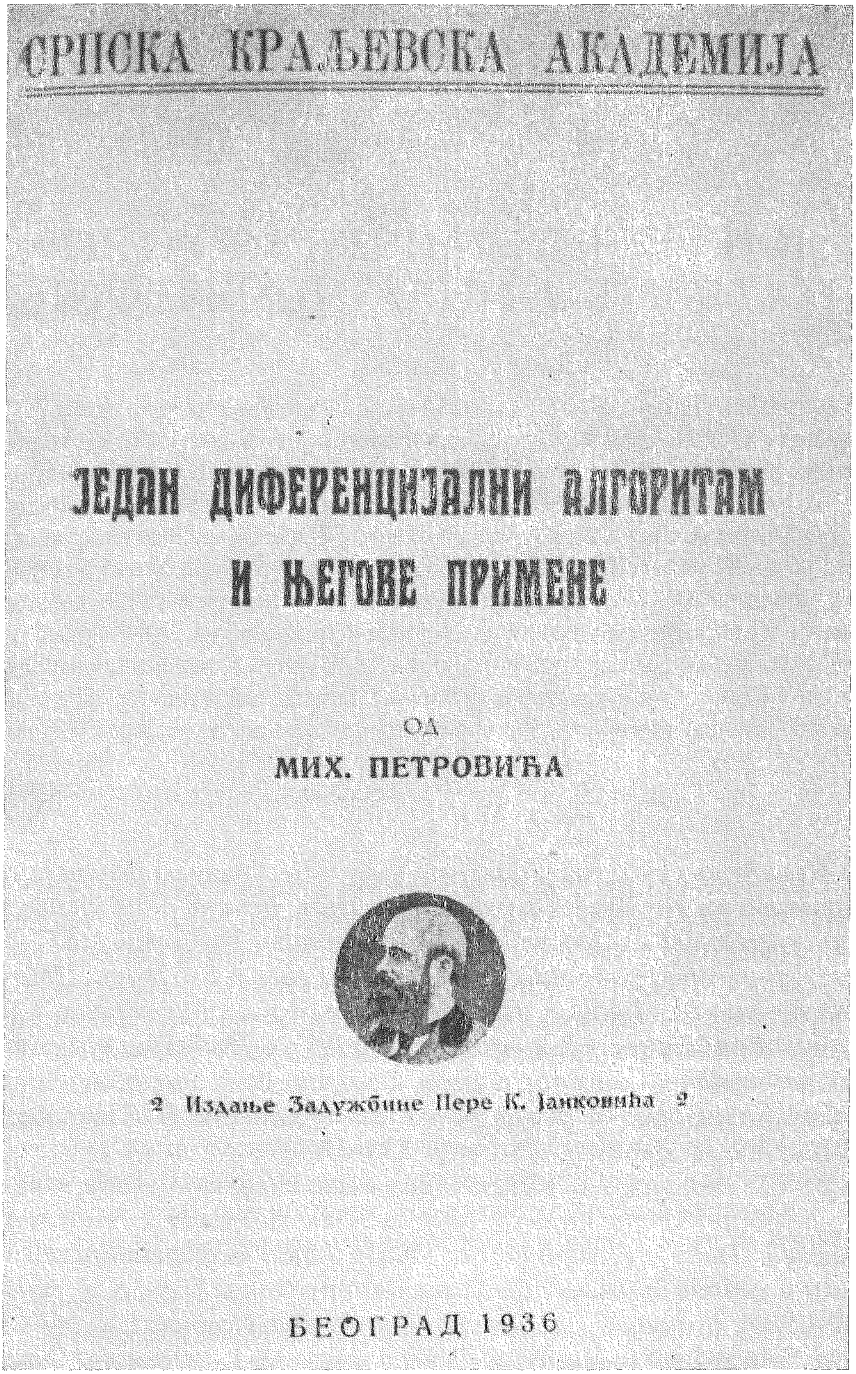
Од

МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

проф. Универзитета

Издање Задужбине Луке Ћеловића-Требињца.

БЕОГРАД
1932.



СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

ЈЕДАН ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ АЛГОРИТАМ И ЊЕГОВЕ ПРИМЕНЕ

ОД

МИХ. ПЕТРОВИЋА

2 Издање Задужбине Пере К. Јанковића 2

БЕОГРАД 1936

Између два рата на Универзитету у Београду излазила је серија **Предавања на Београдском универзитету**. Већина ових књига штампане су средствима Задужбине Луке Ћеловића Требињца (1854–1931), једног од највећих добротвора Универзитета у Београду. Поред ове изложене књиге, Михаило Петровић је у овој серији објавио још два уџбеника **Елиптичке функције**, Београд 1937. и **Интеграција диференцијалних једначина помоћу редова**, Београд, 1938; подробније у књизи **Задужбине и фондови Београдског универзитета**, Публикације Ректората, књ. 58, Београд, 1940, стр. 353–370.

Многа своја издања Српска краљевска академија је објавила средствима добротвора који су свој иметак завештали овој научној установи. Тако је Петровићева књига **Један диференцијални алгоритам и његове примене** објављена помоћу Фонда Пере К. Јовановића (1852–1900), познатог апотекара Округа крагујевачког; подрбоније у књизи **Задужбине и фондови**, Српска краљевска академија, Споменице, књ. 8. Београд, 1936, стр. 93–98.

ПЕТРОВИЋЕВИ ИНТЕРВАЛИ И ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ АЛГОРИТАМ

У овој књизи *Сабраних дела Михаила Петровића* изложене су две монографије: ***Рачунање са бројним размацима*** (Београд, 1932) и ***Један диференцијални алгоритам и његове примене*** (Београд, 1936). Прва је књига више година коришћена као редовни уџбеник за студенте математике на Филозофском факултету у Београду, док су се другом књигом користили студенти и други математичари, слушаоци ванредног Петровићевог течаја о присуству алгоритма $\Delta_n(y)$ у теорији диференцијалних једначина (Универзитет у Београду, 1936–1940). Да бисмо пружили општи увид у ове значајне Петровићеве књиге, покушали смо да утврдимо, како је све то почело и развијало се у делу Михаила Петровића. Јер, рад на начуним монографијама и универзитетским уџбеницима има посебно место у делу овог најзначајнијег српског математичара.

1

Од доласка на Филозофски факултет Универзитета у Београду (22. октобар 1894) Михаило Петровић није полагао нарочиту пажњу састављању, писању уџбеника за своје студенте математике. Припадао је групи професора која је сматрала да ову врсту стручних књига не треба писати у младости, већ у годинама потпуне стручне зрелости када се наставник у целости „офамилијари“ у предмету и успе да га доведе до нивоа угледних страних уџбеника. Све ово треба постићи у процесу и са жељом уношења и својих оригиналних прилога до којих је наставник дошао у дужем временском периоду. Тако је и било. Још за време школовања и усавршавања на Faculté des Sciences и École Normale Supérieure у Паризу, Михаило Петровић увидео је да у младости треба радити на науци, што више исказати себе на пољу оригиналних прилога.[1] Математичке науке траже младог одважног човека, пуног знања са добро завр-

---

[1] О Петровићевом школовању у Паризу подробније је писано у књизи Д. Трифуновић, *Летопис живота и рада Михаила Петровића*, САНУ, Београд, 1969, стр. 78–128.

шеном школом. А то је Петровић све имао. Примери су му били француски математичари. Професор Пенлеве, само неколико година је старији од Петровића, затим „чудо“ младог Поенкареа, а пре свих и понајвише, оснивач савремене француске математичке школе, професор Ермит, чији је животопис и научно дело млади Петровић веома добро упознао.[2]

Супротно својим претходницима у математици Србије, Петровић од првих дана ради интензивно у науци и заступа став да универзитетска настава може достизати своје врхове само преко науке. Без добре школе, нема добре науке, и обратно, сматрао је Петровић. У овим важним настојањима на Великој школи, примарно му је било да лично ствара у науци. Вратио се из Париза пун зацртаних идеја, скицираних расправа, програма, савремене литературе, те није случајно да у првим годинама рада на Великој школи објављује веома запажене расправе у тада најугледнијим часописима великог света.[3] Каква новост, каква срећа за научну средину Београда. По први пут Србија је имала потпуно квалификованог математичара оригиналног ствараоца. Убрзо је Петровић изабран за дописног члана Академије природних наука у Српској краљевској академији (било му је 28 година),[4] Југославенске академије знаности и умјетности и академија наука Чешке и Пољске.

У обновљеној Србији Петровићеви претходници на Лицеју и Великој школи радили су супротно. Два нематематичара (!) Атанасије Николић и Емилијан Јосимовић целог радног века састављали су математичке уџбенике за лицејце и великошколце. У њихово време, то је било неопходно, а сводило се на неуспела посрбљавања страних књига.[5] Они су били „математичари“ без иједног научног или стручног прилога, или бар неког покушаја. Једноставно, науком се нису бавили, нису ни могли (први је био по струци агроном, а други архитекта). Доцније, Богдан Гавриловић по доласку из Будимпеште са докторатом наука (1887), првих 10–15 година посвећује се искључиво уџбеницима за потребе великошколаца.[6] Најдрагоценије време за научни рад у математици изгубио је. Тек, 1900. године Гавриловић се јавља са првом расправом, да

---

[2] М. Петровић, *Француска математика*, Летопис Матице српске 100 (1926), 3, стр. 207–220.

[3] Наводимо наслове неколико часописа: Mathematische Annalen (3 расправе), Acta mathematica (1), American Journal of Mathematics (3), Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (4), Bulletin de la Société mathématique de France (14), Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences – Paris (30) и други.

[4] За дописног члана Српске краљевске академије Михаило Петровић је изабран 5. фебруара 1897, а за редовног члана 4. фебруара 1899..У ово време, од математичара чланови Академије су били: Димитрије Нешић, професор Велике школе и Петар Ј. Живковић, професор Београдске реалне гимназије.

[5] А. Николић је саставио два уџбеника: *Алгебра*, Београд, 1839, стр. 258 и *Елементарна геометрија*, Београд, 1841, стр. 226, а Е. Јосимовић: *Начела више математике у три части*, Београд, 1858, 1860, 1872. и *Практична геометрија*, Београд, 1862, стр. 116.

[6] Б. Гавриловић, *Аналитичка геометрија тачке, праве, круга и коничних пресека*, Београд, 1896, стр. 938; *Теорија детерминаната*, Београд, 1899, стр. 288.

би 1907. године престао са научним радом. Био је, дакако, веома искрен према себи.[7] Слично је било још са неколицином математичара на Великој школи, односно Универзитету у Београду.

Петровић је сигурно добро поступио. Да је неким случајем започео рад као његови претходници, пропао би, а развој математичких наука у Србији био би заустављен; живот у науци наставио би се без резултата, био би празан. Стваралачки рад у математичким наукама сигурно би био одложен до појаве Јована Карамате средином 20-их година овог века.

Како је и шта, заправо, Петровић предаво студентима математике? Из Париза је донео програме и француску уџбеничку литературу из које је и сам учио. На овим основама почео је да гради своје течајеве. Ту су доминирале ручне књиге Ермита из више алгебре, Пикара из математичке анализе, Гурсаов курс калкулуса, Пенлевеа из диференцијалних једначина и других. То је било Петровићево полазиште и, свакако, не у обиму париских течајева, већ у знатно скромнијем приступу прилагођеном времену и приликама на Великој школи у Београду. На примеру Поенкареовог течаја из математичке физике, Петровић је веома рано увидео да аналитичка механика, теоријска физика треба да се развијају на универзитетском нивоу уз присуство математичких предмета. Тако се и догодило, да се на групи математике Филозофског факултета у Београду оснује катедра за примењену математику која је обухватала рационалну механику, небеску механику и математичку (теоријску) физику.[8]

У првим годинама рада студенти математике правили су белешке са Петровићевих предавања. Било је и такмичења чије ће бити боље и лепше исписане. Професор је предлагао да се користе поменутим уџбеницима Богдана Гавриловића из аналитичке геометрије и линеарне алгебре. Посебно је истицао уџбеник свог професора Димитрија Нешића.[9] Упознавао их да Војна академија објављује квалитетне уџбенике,[10] а није изостала ни страна литература. Уочи Првог великог рата студенти су већ имали литографисана скрипта *По предавањима проф. др Мих. Петровића.* Ове, уредно писане руком, табаке одобравао је професор, али без ауторизације. Скрипта су била у употреби једно време и после рата, нарочито за студенте математике који су били ометени ратом (нпр. генерација Тадије Ж. Пејовића и друге). Из њих су учили Јован Карамата, Милош Радојчић, Станимир Фемпл,... Сачувана је колекција ових литографисаних Петровићевих предавања, те се може сазнати шта је, како и

---

[7] П. Перишић – Д. Трифуновић, *Математичар Богдан Гавриловић – Живот и дело,* Београд, 1994, стр. 64.

[8] Први професор примењене математике на Филозофском факултету био је Коста Стојановић којег ће заменити Милутин Миланковић школске 1909/10. године.

[9] Д. Нешић, *Алгебарска анализа* I и II, Београд, 1883, стр. 592 + 690.

[10] То су познати уџбеници Димитрија Данића, професора Војне академије у Београду.

колико Петровић предавао на додипломском курсу теоријске математике на Филозофском факултету.[11] Наводимо наслове ових табака.

Предавања проф. др Михаила Петровића
Литографисани табаци
1909–1912 (1924). год.

ОСНОВИ ТЕОРИЈЕ ДЕТЕРМИНАНАТА, 14 арака[12] или 56 страна; умножено у „Новој литографији", Београд, Теразије 3.

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА У РАВНИ, 22 а. или 88 стр.; приредио П. Шевић, студ. мат.

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА У ПРОСТОРУ, 14 а. или 56 стр.

ОСНОВИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОГ РАЧУНА, 23 а. или 92 стр. ; приредили Н. Бошковић и М. Маринчић, студ. мат.; умножено у Литографији К. М. Бојковића, Београд, Поенкареова 21.

ОСНОВИ ИНТЕГРАЛНОГ РАЧУНА, недостаје.

АЛГЕБРА, недостаје.

ТЕОРИЈА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА, 20 а. или 80 стр.; умножено у Литографији К. М. Бојковића, Београд, Поенкареова 21.

ЛИНЕАРНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ, 5 а. или 20 стр.

ГЕОМЕТРИЈСКА ПРИМЕНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА, 12 а. или 48 стр.

ПАРЦИЈАЛНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ, 12 а. или 48 стр., приредио Ст. Петковић, студ. мат.

Ово је практично, цео крус теоријске математике Михаила Петровића који је држан до средине 20-их година. Течајеви су били кратки, језгровити и методички лепо замишљени. Нема претеривања у садржају, а Французе не прихвата у целости. Узео је њихову скелу, али себе исказао у жељи да у прво време што више поједностави курс. Да ли је то било добро? Код сваке деонице излаже теорију (теореме са доказима), а потом следе урађени примери и „рангирани" задаци.

Као илустрацију овог ПРВОГ ПЕРИОДА Петровићевих писаних (литографисаних) предавања, укажимо на појединости из течаја *Теорија диференцијалних једначина*. **Прво**. Једноставним поређењем долази се до сазнања да се садржај овог Петровићевог течаја задржао све до 60-их година у предавањима професора Тадије Пејовића на Природно-математичком факултету у Београду.[13] Неоспорно, овај податак указује на присуство конзервативности у

---

[11] Петровићев потпун крус теоријске математике у табацима припадао је Милоњи Јојићу, професору Шесте мушке гимназије у Београду, а сада се налазе код писца ових редова.

[12] Арак је реч латинског порекла (arcus = лук) која означава табак хартије од четири стране димензија 21,3 × 33, 7 у cm.

[13] Реч је о вишегодишњем Пејовићевом течају из диференцијалних једначина до егзистенције решења, односо варијационог рачуна.

настави која је довела до застарелих програма, а који су дуго били присутни на Филозофском, односно Природно-математичком факултету у Београду.

Приметимо, да Петровић ни речи није унео из основа квалитативне интеграције диференцијалних једначина. Сматрао је да то није за наставу, већ само за научни рад. А при анализи појединих деоница у течају, редовито изоставља „надградњу“. Рецимо, када излаже затворен израз за решавање линеарне диференцијалне једначине првог реда, он се не упушта у анализу ове формуле, изоставља понашање интеграла једначине у бесконачности и слично.

Увида ради, поменимо садржај бар једног Петровићевог течаја.

ГЕОМЕТРИЈСКА ПРИМЕНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА. *Увод. Задаци који се своде на диференцијалне једначине I реда. О орШогоналним ШрајекШоријама. Задаци који се своде на диференцијалне једначине II и III реда. Примена у Поларним координаШама. Примене у ПросШору. Линије кривина Површина (за обрШне и развојне Површине). Геодезијске линије на Површини.*

Упадљив је и Петровићев добар и плодоносан манир, да се често позива на стране изворе са навођењем тачног имена писца и наслова дела. Када неки исказ захтева више времена у настави, кад је по садржају обиман, професор слушаоца упућује на стране књиге. На пример, у *Парцијалним диференцијалним једначинама* код функционалних детерминаната, Петровић исказује теорему, а за њен доказ вели: „Доказ има код Bertrand-a, t. I, p. 65“. Овакви случајеви су чести и указују на професорову жељу, да будући математичари још зарана упознају и прихвате рад на страној литератури. А библиотека Математичког семинара Филозофског факултета била је пребогата и могла да одговори захтевима својих корисника.[14]

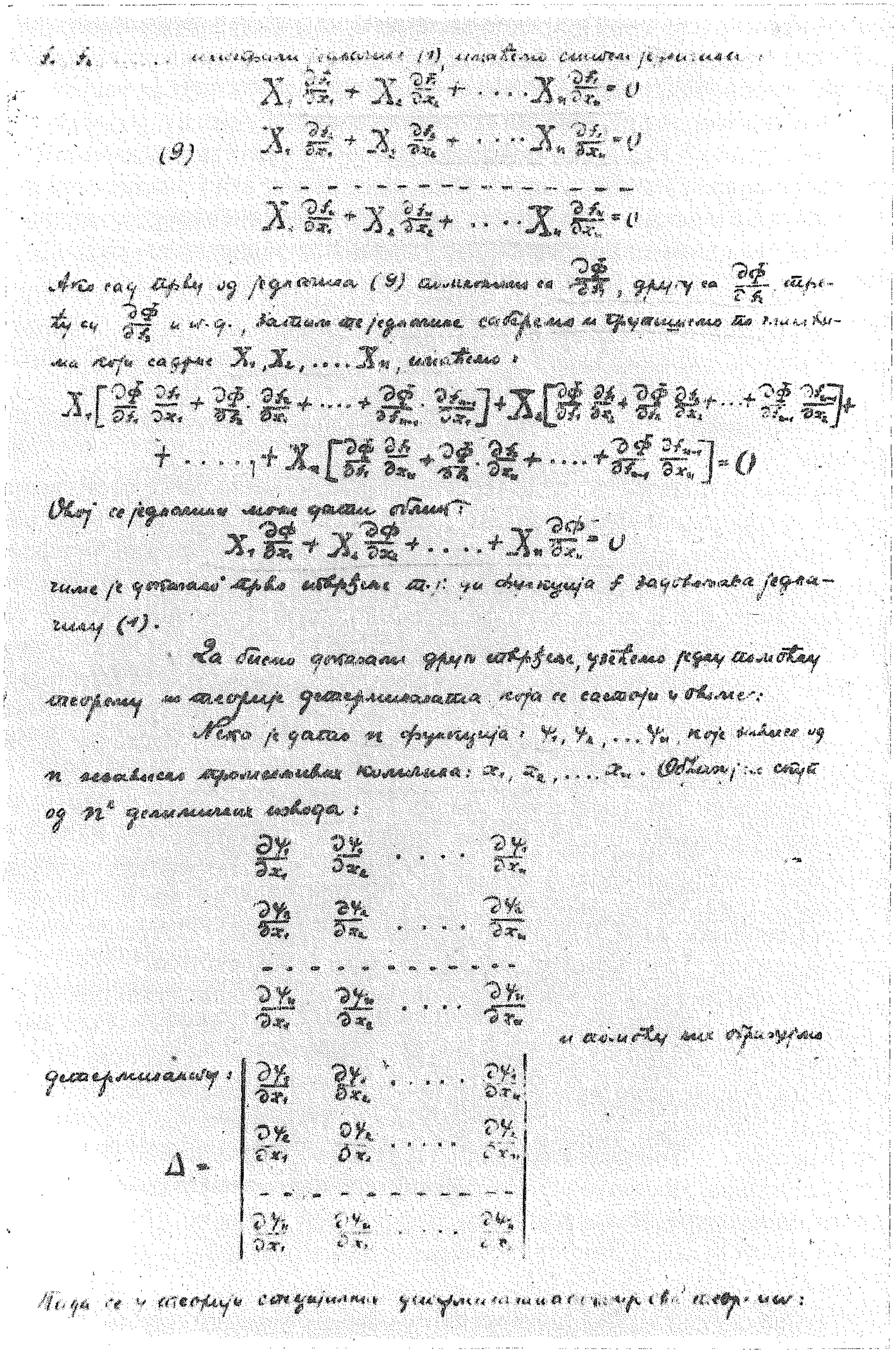
Петровићеви литографисани табаци не обилују задацима и отвореним проблемима. Слушаоце је упућивао на збирке задатака професора Raffy-a које је и сам решавао у Паризу. А како је Мијалко Ћирић, по доласку са студија у Паризу, објавио збирку задатака у два дела, у којој су изложени скоро сви задаци са Conférencie de M. Raffy са Faculté des Sciences, то је Петровић у Математичком семинару био потпуно задовољан овим делом наставе.[15]

Већ је поменуто да су ови Петровићеви течајеви били нетешки, за студенте веома приступачни. Професор је успео да састави врсту „средњег курса“ прихватљивог за сваког. Такав је био Михаило Петровић у настави до краја радног века. Ако је неко желео више, професор је предлагао стране књиге, часописе и у Семинару пружао корисне савете. То је био случај са студијама Јована Карамате и Милоша Радојчића. Практично, они су преко Петровићевих табака дознавали само основни садржај течајева, а сам предмет изучавали из стране литературе. Из ових разлога, сигурно није случајно, да се обојица, и

---

[14] О библиотеци Математичког семинара Филозофског факултета, коју су немачки фашисти спалили 17. октобра 1944, погледати у књизи наведеној под 1.

[15] М. Ћирић, *Проблеми из диференцијалноī и инШеīралноī рачуна*, Први део, Београд, 1890, стр. 324; Други део, Београд, 1891, стр. 436.



$f_1, f_2, \ldots$ интеграли једначине (1), имаћемо систем једначина:

$$
(9)\qquad
\begin{array}{l}
X_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \ldots X_n \frac{\partial f_1}{\partial x_n} = 0 \\
X_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \ldots X_n \frac{\partial f_2}{\partial x_n} = 0 \\
- - - - - - - - - - - - - - \\
X_1 \frac{\partial f_n}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_n}{\partial x_2} + \ldots X_n \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = 0
\end{array}
$$

Ако сад прву од једначина (9) помножимо са $\frac{\partial \Phi}{\partial f_1}$, другу са $\frac{\partial \Phi}{\partial f_2}$, трећу са $\frac{\partial \Phi}{\partial f_3}$ и т. д., затим те једначине саберемо и групишемо по члановима који садрже $X_1, X_2, \ldots X_n$, имаћемо:

$$
X_1\left[\frac{\partial \Phi}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial f_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial f_{n-1}}\cdot\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}\right] + X_2\left[\frac{\partial \Phi}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial f_{n-1}}\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2}\right] +
$$

$$
+ \ldots + X_n\left[\frac{\partial \Phi}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial f_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial f_{n-1}}\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n}\right] = 0
$$

Овој се једначини може дати облик:

$$
X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0
$$

чиме је доказано прво тврђење т. ј. да функција f задовољава једначину (1).

Да бисмо доказали друго тврђење, узећемо једну помоћну теорему из теорије детерминаната која се састоји у овоме:

Нека је дато n функција: $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$, које зависе од n независно променљивих количина: $x_1, x_2, \ldots x_n$. Образујмо [illegible] од n^2 делимичних извода:

$$
\begin{array}{cccc}
\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\
\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_n} \\
- - - & - - - & - - - & - - - \\
\frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n}
\end{array}
$$

и помоћу њих образујмо детерминанту:

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\
\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_n} \\
- - - & - - - & - - - & - - - \\
\frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n}
\end{vmatrix}
$$

Пода се у теорији специјалних детерминаната [illegible] теорему:

Аутограф једне стране Петровићевих табака

Парцијалне диференцијалне једначине

Карамата, и Радојчић, одмах по завршетку студија јављају са научним расправама, а убрзо су дошле и њихове докторске дисертације.[16]

Поменимо на крају, да изложени курс теоријске математике не садржи ниједан течај геометрије (елементарна, нееуклидска и пројективна). То је била велика рана и мана Петровићеве Школе. Све до појаве Милоша Радојчића 30-их година, геометрије као самосталне научне дисциплине и предмета на Филозофском факултету није било.[17] Такође, курс је без савремених области анализе, комплексне променљиве још нема, а вектори су ван сваког домашаја. Налети Вајерштраса, Кантора, Дедекинда и конзервативца Кронекера нису допирали и тек при крају Петровићеве наставе почињу да добијају прве обрисе и то у настојањима његових ученика, наследника у Математичком семинару.

Тако се завршио *први период* уџбеничке литературе Михаила Петровића. Његови овде анализовани табаци пожутелих листова стоје данас као вредан експонат у будућем музеју Универзитета у Београду. Они су предиван споменик једном времену којег се често треба присетити. Овај период већ „припада историји, оном херојском добу кад је мала Србија стварала своју културу и успевала да и својим културним постигнућима продире у свет“.[18]

Други период литографисаних Петровићевих предавања почиње средином 20-их година. Постепено се мењају услови за рад. Програми течајева се проширују, постају садржајнији. Све је у успону, и настава на Универзитету, и научни рад. Придошла је руска научна емиграција, угледни професори, декан Физичко-математичког факултета Харковског универзитета Никола Н. Салтиков, затим ректор Универзитета у Одеси Антон Д. Билимовић, ректор Кијевског универзитета Никола М. Бубнов[19] и други. Већ видно стасавају младе снаге у Математичком семинару – Тадија Пејовић, Јован Карамата и Милош Радојчић, а студенти математике оснивају своје Удружење. Све је постало плодотворно и било у успону. Настава на Универзитету и научни рад добијају нове посленике. Курс теоријске математике више се не полаже скупно већ по течајевима, што је много значило у развоју научних предмета. Појављује се часопис Publications mathématiques de l'Université de Belgrad (1932. г.) који се сврстава међу најзначајније тог времена.[20] Све је ово имало видног утицаја на обим и садржај курса теоријске математике. Петровић више није сам; многе течајеве преузимају његови наследници – Т. Пејовић, Ј. Карамата, Н. Салтиков, М. Радојчић. И они сада граде своје ручне књиге за потребе

---

[16] Д. Трифуновић, *Тиха и усрдна молитва Милоша Радојчића*, Народна књига, Београд,1995, стр. 318.

[17] Исто.

[18] Р. Кашанин, Зборник радова Математичког института 3 (1953), стр. VIII.

[19] По доласку у Београд, Никола Бубнов, највећи познавалац историје броја, убрзо је отишао на тек основан Љубљански универзитет на којем је радио до краја живота (1943. г.).

[20] О овом часопису који и данас излази, најбоље је погледати *Преглед издања Математичког института*, Београд, 1986, стр. 284.

предмета којег предају.[21] Њихов професор био је срећан и тешком муком стишавао радост због свега тога шта види око себе. У познатој скромности, коју је пренео и на своје ученике, није могао да одустане и да не напише осврт на тако набујало дело математичких наука у српском народу: *Математички институт на Београдском универзитету – кошница научног рада.*[22] При излагању обиља резултата признатих од света науке, доктората математичких наука који се сада по први пут полажу у Београду, гостовања београдских математичара на страним универзитетима, Петровић није заборавио да помене плодан рад својих студената који издају и часопис Математички весник (1933. г.).[23] Било је професору Петровићу веома пријатно и задовољно је прихватио поруку математичке младости: „Путуј игумане, не брини за манастир".

У раду на Петровићевим ручним књигама највише је било ангажовано Удружење студената математике Београдског универзитета.[24] Основано школске 1924/25. године, а уједињено 1927. године са сличним удружењима у Загребу и Љубљани, Удружење је веома озбиљно пришло сређивању Петровићевих литографисаних књига.[25] Као секретар Савеза удружења студент математике Платон Димић и председник Савеза Н. Радовић, а највише председник Удружења са Универзитета у Београду, студент математике Мирослав Ненадовић, учинили су све да додипломски Петровићеви течајеви буду сви објављени и редовно обнављани.[26]

При изради што потпуније библиографије Петровићевог дела, утврђене су следеће Петровићеве књиге – скрипта у саставу предмета теоријска математика на Филозофском факултету.[27]

ОСНОВИ ТЕОРИЈЕ ДЕТЕРМИНАНАТА, Београд, 1924, стр. 43;
ТЕОРИЈА ИЗВОДА СА ПРИМЕНАМА, Београд, 1924, стр. 96;
ИНТЕГРАЛНИ РАЧУН, Београд, 1924, стр. 64;
ТЕОРИЈА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА, Београд, 1924, стр. 73;

---

[21] Нпр. Ј. Карамата, *Виша алгебра I*, Београд, 1936, стр. 192, in 4° (по предавањима др Јована Карамате средили студенти математике Блажо Ивановић и Богдан Вујошевић; издало Удружење студената математике; литографија и штампарија Косте М. Бојковића, Београд, Скадарска 6).

[22] Политика од 8. маја 1938.

[23] О овом часопису и Удружењу студената математике подробније у књизи наведеној под 1.

[24] Исто.

[25] Тачан назив овог Удружења је „Савез Југословенских Студената Математике" (основано 21. октобра 1927). Почасни председник овог Савеза био је Михаило Петровић. Приметимо да је Југословенско математичко друштво основано 1938. године у Београду. Председник овог Друштва био је професор Тадија Пејовић.

[26] Најистакнутији чланови Удружења били су доцније позната имена науке и технике, нпр. академик Мирослав Ненадовић, Платон Димић, проф. унив. и др.

[27] *Библиографија Михаила Петровића* у књизи наведеној под 1.

ГЕОМЕТРИЈСКА ПРИМЕНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА, Београд, 1924, стр. 42;

ТЕОРИЈА ФУНКЦИЈА, Београд, 1924, стр. 96;

ТЕОРИЈА АНАЛИТИЧКИХ ФУНКЦИЈА, Београд, 1925, стр. 244 (2. издање, Београд, 1928; 3. издање, Београд, 1937);

ОСНОВИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОГ РАЧУНА, Београд, 1925, стр. 91 (2. издање, Београд, 1935);

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА У РАВНИ, Београд, 1926, стр. 83;

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА У ПРОСТОРУ, Београд, 1926, стр. 54;

ТЕОРИЈА ЕЛИПТИЧКИХ ФУНКЦИЈА, Београд, 1927, стр. 138 (2. издање, Београд, 1928; 3. издање, Београд, 1937);

ТЕОРИЈА РЕДОВА, Београд, 1927, стр. 40;

ТЕОРИЈА АЛГЕБАРСКИХ ЈЕДНАЧИНА, Београд, 1927, стр. 204 (са Н. Н. Салтиковим);

ИНТЕГРАЦИЈА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПОМОЋУ РЕДОВА, Београд, 1929, стр. 117 (2. издање, Београд, 1937);

ЕЛЕМЕНТАРНА ТЕОРИЈА ГРЕШАКА, Београд, 1930, стр. 60.

Како су године одмицале, предавања су била све сложенија, јављају се нове области, све је некако квалитетније, а што је последица јачања програма наставе теоријске математике, а понајвише развоја научног рада. Београд је постепено испуњавао услове који га стављају уз бок научних центара Европе. Скрипта су сада одштампана у облику књиге.[28] Међутим, Петровић и даље не намерава да изда званичне уџбенике у високој штампи. Да ли чека „време зрења" које је упознао далеке 1894. године у Паризу, или је по среди материјална немоћ Универзитета? Све је препустио Удружењу студената математике да учини његова предавања доступним. Ове књиге Петровић сада ауторизује. Још је сам, осим у случају течаја *Теорија алгебарских једначина* који је предавао са професором Николом Салтиковом. Удружење је показало високу зрелост у овим пословима и „спасавало своје професоре". И не само то. Појединци, по предавањима Петровића или Карамате, састављали су веома добре уџбенике који су настави значили много.Ових је књига било неколико и оне су данас права реткост. По садржају одговарале су времену у којем су настале, а симболика и терминологија је као данашња. Поменимо овде само једну од ових књига *Теорија низова са примерима и задацима* (Удружење студената математике, Београд, 1939, стр. 206, in 8°), која у целости може и данас служити настави анализе. Вредно је навести шта у предговору ове књиге пишу студенти: „Овом књигом уз велике напоре и љубави према студијама, Удружењу и математици борећи се са више него оскудним могућностима и средствима дајемо математичкој литератури на нашем језику још један прилог. – Од свог оснивања (1924) до данас је Удружење знатно олакшало студирање математике и припомогло развијање наше скромне математичке литературе".

---

[28] Литографисан рукопис откуцан је писаћом машином, а не на табацима писаним руком као раније.

Тридесетих година Петровић уноси више научних референци, као и своје резултате, махом из дифренцијалних једначина и разних процена у анализи (примена неједнакости). Више је примера, а јављају се и отворени (нерешени) проблеми за научни рад. Преко Рикатијеве и биномне диференцијалне једначине уводи деоницу о квалитативном испитивању решења диференцијалних једначина. И даље се код Петровића осећа присуство француске школе, одсуство геометрија,[29] а теорије вектора још нема. За векторе је Петровић тврдио: „Како могу да изневерим свог професора Апела, па да кренем у нешто непознато". Поводом овога, наведимо и речи Антона Билимовића: „Што се тиче форме излагања, Петровић се придржавао само класичних форама. У нову симболику, чак ни теорије множина, није хтео улазити, не из разлога што је ову сматрао неподесном, већ је говорио: ‚Доцкан је'. Није се хтео служити векторским ни тензорским рачуном."[30]

У теорији функција, махом је окренут Кошијевом рачуну остатка, а изложен је и одељак о комплексним функцијама реалне променљиве, што ће доцније знатно развити Јован Карамата. У течају *Теорија аналитичких функција* и на другим местима, препознајемо новог Петровића када уноси у течај и своје оригиналне резултате. То је оно право стање у настави које доводи до Школе са свим одликама по којима ће се доцније ова Школа препознавати. Овде налазимо његове трансценденте, како је називао специјалне функције. „Започео је проблем испитивања класа функција дефинисаних Тајлоровим редовима који имају особину да се из распореда њихових нула може закључити брзина раста тих функција у неком правцу" – наглашава Миодраг Томић.[31] Унео је у наставу и своја истраживања функција дефинисаних одређеним интегралима чиме је допунио класичне Стилтјесове формуле и из тога извео низ особина функција дефинисаних одређеним интегралима.

Поред француских аутора, сада се код Петровића запажа и присуство резултата немачких математичара, нпр. Вајерштраса, а знатније Кнопа. Професор и даље не води рачуна о потребним и довољним условима. Ипак, у његовим књигама сада се више осећа строгост у исказима дефиниција и теорема. Он и даље остаје свој, донекле конзервативан математичар, који не жели да се удаљи од стечених знања у младости. Био је и остао француски ђак, како је рекао чувени Ели Картан при посети Београду почетком 1940. године.[32]

---

[29] Ево како математичари признају немоћ француске геометрије: „Геометрија је необично развијена у Италији, земљи већ више од једног века плејаде великих геометара. Изучавајући алгебарску геометрију површина они су истина стали на чистије геометријско гледиште од Емила Пикара али, као што је рекао Емил Борел, алгебарска би геометрија без његових радова била веома саката" (према Ели Картану).

[30] А. Билимовић, Зборник радова Математичког института 3 (1953), стр. IX.

[31] М. Томић, *Математичке науке*, САНУ и развој науке и уметности у Срба, књ. 1, Београд, 1989, стр. 13–34.

[32] Elie Cartan (професор на Сорбони), *Улога Француске у развоју математике* (са предговором Михаила Петровића), Публикација Југ. астр. друштва, књ. 2, Београд, 1941, стр. 36; *Исто*, Сатурн 6 (1940), 4–5, 6–7 (превод Милорада Б. Протића). Ово је

Време **другог периода** Петровићевих књига је доба нових области, проблема, као што су мера и интеграција, Хилбертови проблеми, хипотеза континуума, Клајнове групе, Канторова и Дедекиндова учења и друго. Међутим, свега овог и даље нема у Петровићевој писаној речи. Донекле, ову празнину попуњавао је млади Јован Карамата објављивањем својих течајева који су успешно заменили Петровићева скрипта.[33]

Према неким наводима из 1938. и 1953. године, Петровићево обраћање генерацијама студената математике (1894–1938) било је прихваћено од колега у Математичком семинару као дело велике снаге и упорности усамљеног научника огромног доприноса, талентованог предавача. „Петровић је у Србији био дуго једини професор чисте математике Филозофског факултета, па је према томе, стицајем околности, морао заступати целокупну математику. На тај начин у области наставе он је играо улогу „лекара целокупне медицине“ у срезу. Таква улога би у потпуности окупирала просечног професора, али Петровић, са својим оригиналним талентом, није могао остати у положају „среског математичара“.[34] А његови студенти са којима је градио своје литографисане књиге, шта су они понели од свог професора? Сигурно много, што показују потоњи резултати у математичким наукама у српском народу. Један студент математике, чије име остаје непознато, при крају овог периода Петровићевих књига, записао је следеће: „Али таквог уметника – предавача (М. Петровића – пр. пр.) никада нисам имао прилике да слушам. Предавајући теорију функција и интеграцију диференцијалних једначина помоћу редова, *елеганшно, вешшо, језтровишо*, али *јасно* и *прецизно*, *као да је све шо срасло с њим*, будио је уметно студенту неодољиву жељу за продубљивањем разних области математике. Зрачило је из њега стваралаштво које је слушаоцу развијало осећање за финесе математике као Сунце раст биља. То је уродило плодом. За релативно кратко време придонели су његови ученици доста напретку математике.“[35]

Крајем 1940. године др Драгослав С. Митриновић, професор београдских гимназија пожелео је да ради на биографији Михаила Петровића. Том приликом од професора је добио наслове свих течајева (семестрална предавања, како их је Петровић звао) која је предавао на Филозофском факултету од 1894. до 1938. године (одлазак у пензију). Доносимо у целости овај навод.[36]

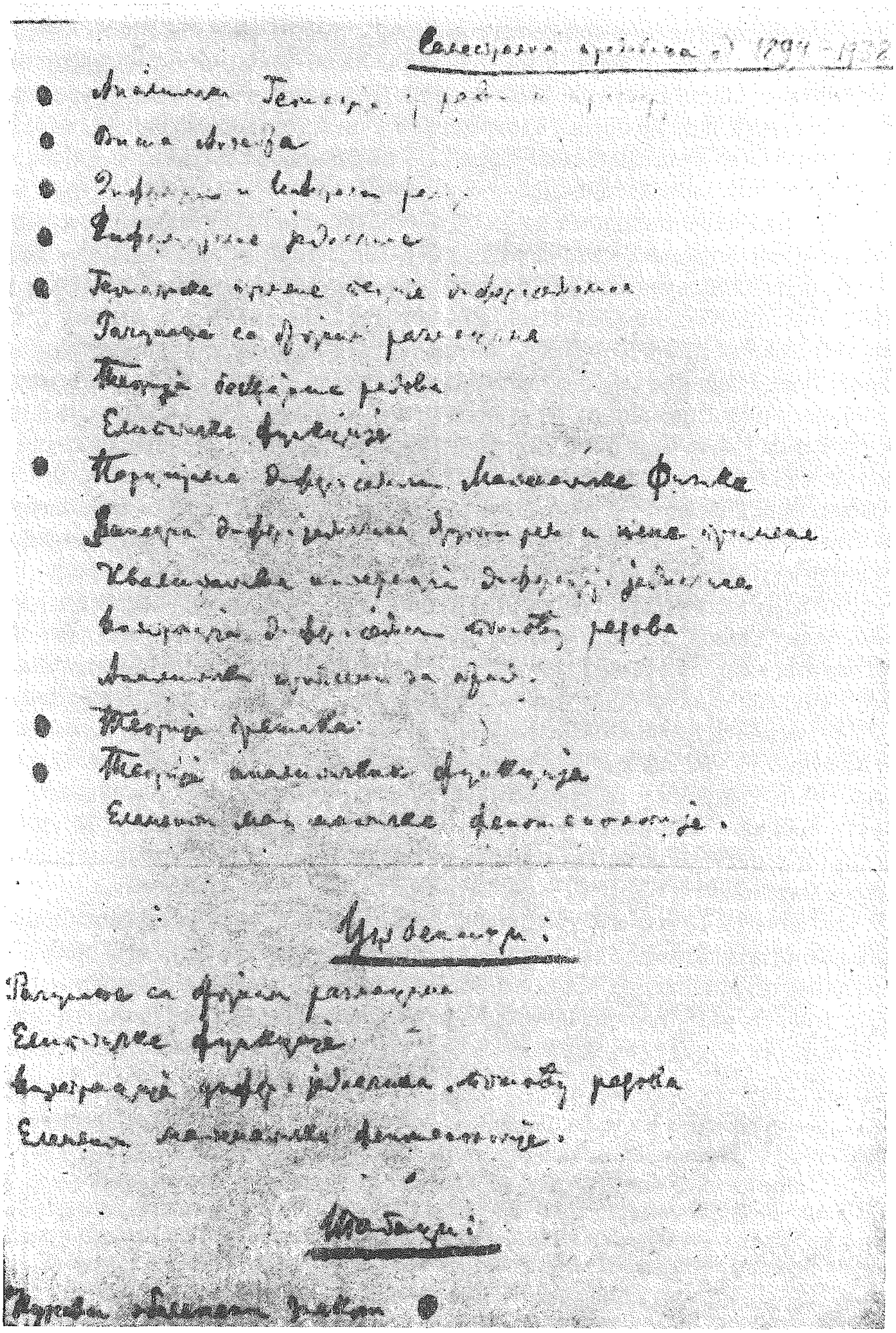
предавање професора Картана одржано 27. фебруара 1940. у Француском институту у Београду.

[33] Нпр. Ј. Карамата, *Дедекиндови пресеци – Теорија ирационалних бројева*, Удружење студената математике, Београд, 1934, стр. 60; *Елеменшарна шеорија множина*, Удружење студената математике, Београд, 1935, стр. 64. Ово је насигурно прва теорија скупова у српској математичкој књижевности.

[34] А. Билимовић, наведено.

[35] Аноним (иницијал В), *Сшуденши машемшике о професору Михаилу Пешровићу*, Удружење студената математике на Београдском универзитету, Математички весник, **5–6**, Београд, 1939, стр. 62–63.

[36] Д. С. Митриновић, *Прилози за биографију Михаила Пешровића*, Мат. весник **12** (1960), **1–2**, стр. 143–175.



Семестрална предавања од 1894 – [illegible]

- ● Аналитичка геометрија у [illegible]
- ● Виша алгебра
- ● Диференцијални и интегрални рачун
- ● Диференцијалне једначине
- ● [illegible]
- Рачунање са бројним размацима
- Теорија бескрајних редова
- Елиптичке функције
- ● Парцијалне диференцијалне математичке физике
- [illegible]
- Квалитативна интеграција диференцијалних једначина
- Интеграција диференцијалних помоћу редова
- [illegible]
- ● Теорија [illegible]
- ● Теорија аналитичких функција
- Елементи математичке феноменологије.

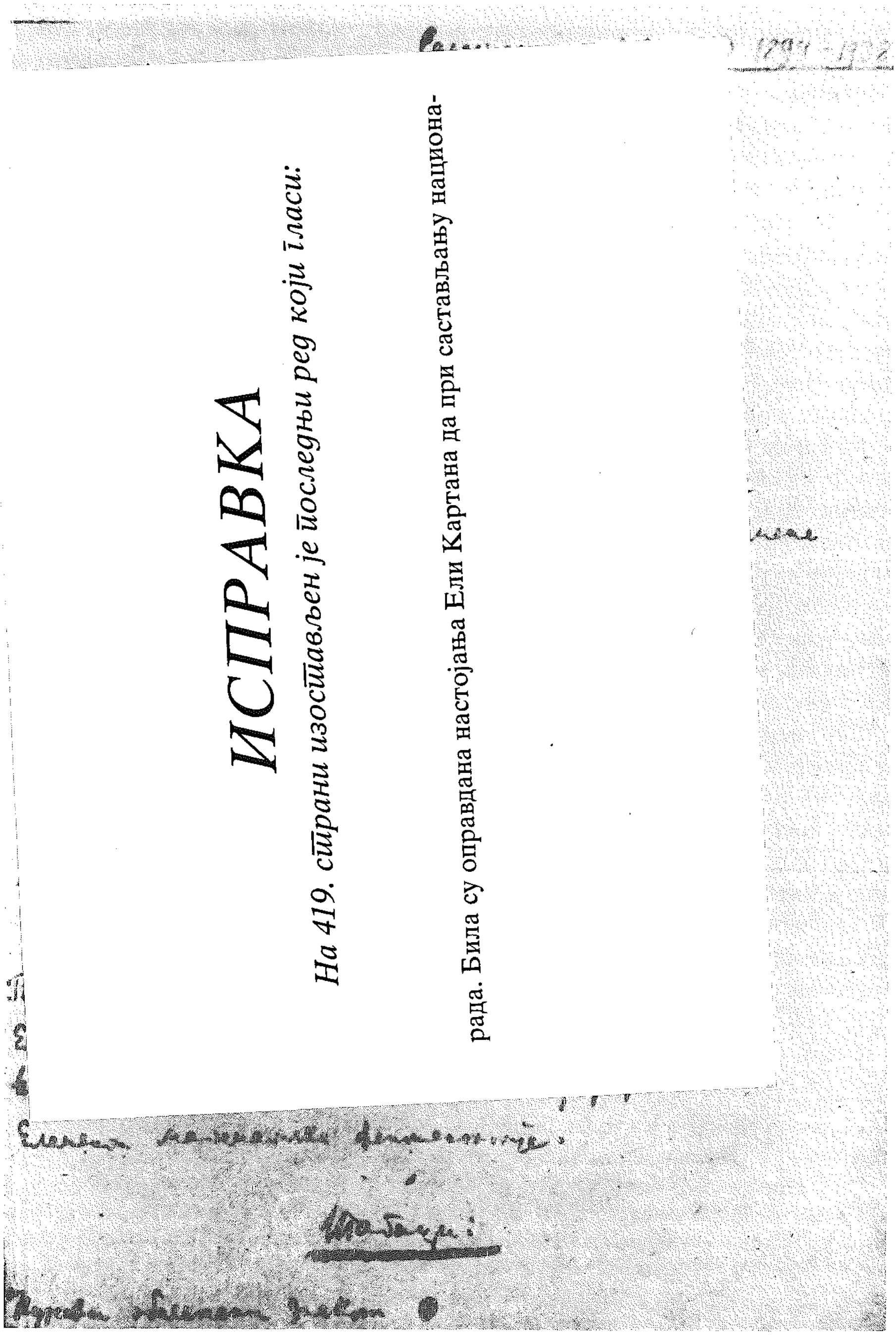
Уџбеници:

Рачунање са бројним размацима
Елиптичке функције
Интеграција диференцијалних једначина помоћу редова
Елементи математичке феноменологије.

[illegible]

[illegible] ●

Аутограф Петровићевог рукописа с његовим семестралним предавањима (течајеви) на Филозофском факултету од 1894. до 1938. године (Математички весник 12 (1960), стр. 171)



ИСПРАВКА

На 419. страни изостављен је последњи ред који гласи:

рада. Била су оправдана настојања Ели Картана да при састављању национа-

Аутограф Петровићевог рукописа с његовим семестралним предавањима (течајеви) на Филозофском факултету од 1894. до 1938. године (Математички весник 12 (1960), стр. 171)

Семестрална предавања М. Петровића
1894–1938.

Аналитичка геометрија у равни и простору
Виша алгебра
Диференцијални и интегрални рачун
Геометријске примене теорије диференцијалних једначина
Рачунање са бројним размацима
Теорија бескрајних редова
Елиптичке функције
Парцијалне диференцијалне једначине математичке физике
Линеарна диференцијална једначина другог реда и њене примене
Квалитативна интеграција диференцијалних једначина
Интеграција диференцијалних једначина помоћу редова
Аналитички проблеми за обраду
Теорија грешака (Београд, 1930)
Теорија аналитичких функција
Елементи математичке феноменологије

Неоспорно, овде Петровић није био потпуно прецизан, већ је по сећању наводио наслове својих течајева. Овде сигурно треба издвојити течајеве *Аналитички проблеми за обраду*, *Квалитативна интеграција диференцијалних једначина* и *Рачунање са бројним размацима*, који су били јачине *надградње* ван програма додипломских предавања. Занимљиво је нагласити да Петровић помиње течај *Елементи математичке феноменологије*, што се по први пут дознаје. Његова књига под истим насловом објављена 1911. године, сигурно је изазвала велико интересовање, те је тако и дошло до течаја из математичке феноменологије. Колико је познато, течај је могао трајати до почетка Првог великог рата.

Последње деценије радног века (1929–1939) Петровић је пришао објављивању научних монографија и универзитетских уџбеника у високој штампи. Дошло је време да себе искаже у неколико научних књига, да покаже потпуно нове резултате. Поред овога, циљао је да учини извесну синтезу свог рада у двема главним областима у којима је стварао: аналитичка теорија диференцијалних једначина и директно пручавање решења диференцијалних једначина. Тако су настале монографије: *Intégrales premières à restrictions*, Paris 1929, p. 50 и *Intégration qualitative des équations différentielles*, Paris 1931, p. 58. За ове књиге Српска краљевска академија сматрала је да их треба објавити на страном језику, у страном свету. Београд је желео да се похвали, да укаже на сву озбиљност научног рада својих људи, а такође и да чује похвале великог света. Петровићеви париски пријатељи, професори Пикар, Пенлеве, Борел, Адамар, Монтел и други, били су радосни и узнемирено поносни да је тај дечак Michel Petrovitch из малене земље на Балкану, дошао до овакве афирмације научног лне историје математике уврсти Петровићеве резултате у састав француске математике.[37]

Поред ових књига, које су имале веома успелу научну презентацију, Петровић је објавио и два веома значајна дела: *Феноменолошко пресликавање*, Београд, 1933, стр. 244 и *Један диференцијални алгоритам и његове примене,* Београд, 1936, стр. 240 која се у овој књизи *Сабраних дела Михаила Петровића* и објављује.

Сигурно да су ове четири књиге чиниле част Универзитету у Београду и Српској краљевској академији. Њихова је појава дефинитивно потврдила, да је у Београду настало ново доба у математичким наукама и да из те средине треба тек очекивати нове и јаче резултате. У некој метафори поменуте монографије су печат свему оном што је Петровић започео далеке 1894. године и ево, дошло до потпуног сјаја. Србија је чврсто закорачила на пут математичких наука са којег до данашњих дана не силази. Напротив, све га више продужује и шири.

Као што је речено, у овим делима Петровић доноси нове резултате, објекте истраживања, али излаже и „причу", прави синтезу урађеног. Ово је највише чинио због извесних изоштравања резултата које сада жели да умрежи са резултатима других математичара. Данас је то велики подстицај и наук о моралу у науци, којег су многи следили.[38] Најјачи пример у овим Петровићевим настојањима, свакако је случај са његовим радовима у аналитичкој теорији диференцијалних једначина, када накнадно сазнато саопштење математичара Апелроа и Лагутинског ставља на прво место.

При учесталом објављивању дела, нормално је било да се Петровић и понавља. Сама жеља аутора и одреднице синтезе тражили су осврт на урађено. Међутим, могуће је посумњати да се Петровић у овој последњој, а полетној деценији радног века окренуо старим темама и препричавао их. За новине било је касно, приближавао се 70-ој, а није ни хтео. Ево шта о томе мисли Миодраг Томић: „Петровић никада није гонио ствар до праизвора, он је прелазио на друге проблеме. Зато постаје скоро кобно за њега што своје благо није умео да цени и што је често жртвовао лепоти, и не само лепоти већ и брзини публиковања, прави смисао открића која је често само наслућивао. И његово име, које је тако изненада блеснуло у теорији диференцијалних једначина, почиње да тамни. А он, нажалост, наставља брзо да ради на периферним проблемима, да расипа свој лепи таленат, да прелази од једног проблема на други, и да, најзад, *понавља старе резултате*".[39]

---

[37] Е. Картан, наведено у белешци 32. Ово се назире и у раду Михаила Петровића *Француска математика*, Летопис Матице српске, **307** (1926) **3**, стр. 207–220.

[38] Присетимо се сличних поступака Милоша Радојчића у геометријској теорији аналитичких функција, па ћемо добити праву слику о професору Петровићу и младим математичарима који су га окруживали.

[39] М. Томић, наведено, стр. 19–20.

***Михаило Пешровић** у друшшву колеге **Николе Н. Салшикова**; снимак начињен у 1934. години од нейознашог аушора.*

Од доласка на Универзишеш у Београду йочешком 1922. године йрофесор Салшиков, угледни руски машемашичар са йризнашим оригиналним резулшашима, много је йомогао у сређивању насшаве шеоријске машемашике на Филозофском факулшешу, развоју и јачању научног рада. Пошшовао је йрофесора Пешровића и знашно дойринео да се његово дело не заборави и йравилно оцени.

Најзад, у оваквим околностима нужде, а средина је од њега још тражила, жеље и обавезе нису тамниле, а већ је пристизала старост, дошло је време да Петровић напусти литографисане књиге. Године проведене у настави дале су му право и успео је да све појединости рашчисти и утврди крајњи садржај течајева. Почео је да објављује своје штампане универзитетске уџбенике: *Рачунање са бројним размацима*, Београд, 1932, стр. 196; *Елиптичке функције*, Београд, 1937, стр. 132 и *Интеграција диференцијалних једначина помоћу редова*, Београд, 1938, стр. 220. Књиге су дочекане радошћу студената. Ето нам правих књига, записали су ови млади људи на папирима свог Удружења. Колеге у Математичком семинару Филозофског факултета славили су ове Петровићеве принове и исказивали дивљење професоровој снази и умећу. Када је у јубиларној 1938. години професор Никола Салтиков бираним речима представљао Петровићево дело, није заборавио да помене овај веома важан догађај у Петровићевој Школи. „Најзад, појавила су се 1938. год. предавања на београдском Универзитету под насловом: *Интеграција диференцијалних једначина помоћу редова.* Објављивање ове књиге било је најлепше примљено од стране колега г. професора Михаила Петровића и од његових ученика. Ова књига је најбољи израз особитог талента једног предавача, који се у њој потпуно испољава. У свакој се реченици у овој књизи осећа велика снага и дубока мисао писца, који се показао као велики мајстор своје струке. Али и у другим својим књигама, мада су оне посвећене осталим математичким теоријама, професор г. Михаило Петровић увек придаје много пажње диференцијалним једначинама. Тако се у штампаним предавањима 1932. год. под насловом *Рачунање са бројним размацима*, трећи одељак бави применом бројних размака на диференцијалне једначине. Писац овде проучава међусобно упоређивање диференцијалних једначина, које је играло важну улогу и у другим његовим радовима. У исто време се испитују квалитативно први интеграли диференцијалне једначине са осцилаторним интегралима, системи симултаних једначина, а и размаци за интеграле парцијалних диференцијалних једначина. [40]

У послератном периоду и поред објављених књига Тадије Пејовића и Јована Карамате, поменути уџбеници Михаила Петровића често су консултовани и користили се све до средине 50-их година.

2

Као што је на почетку овог поговора наведено, у овој књизи *Сабраних дела Михаила Петровића* изложене су две Петровићеве књиге: *Рачунање са бројним размацима* и *Један диференцијални алгоритам и његове примене.* Овај избор није случајан. У показаном следу развоја Петровићевих универ-

---

[40] Н. Салтиков, *Научни рад професора др М. Петровића*, Удружење студената математике на Београдском универзитету, Математички весник, **5–6**, Београд, 1939, стр. 1–8.

зитетских књига и научних дела, оне представљају целину из простог разлога што су у потпуности оригиналне и допуштају научни осврт. Поред овога, више резултата из једне и друге књиге међусобно је повезано, нарочито у области диференцијалних једначина и математичке анализе. На пример, за функцију y одређену Лаплас-Абеловим интегралом

$$\int_a^b ue^{tx}dx, \quad u = u(t) > 0$$

Петровић налази

$$\Delta_n(y) = a^n + \theta(x)(b^n - a^n),$$

за свако $n \in N$, где је $\theta(x)$ једна функција која је $0 \leq \theta(x) \leq 1$ и

$$\Delta_n(y) = \frac{1}{y}\frac{d^n y}{dx^n}.$$

Ове књиге носе тежину научних монографија и омогућавају да се назре прави ауторов портрет научника. Професор је успео да поред наведених универзитетских књига, које су у многим срединама и земљама међу собом сличне, овим двема монографијама искаже потпуно своја оригинална истраживања новим језиком који је настао од интервала и алгоритма $\Delta_n(y)$. Био је смео предавач и заљубљеник у младост која надолази, веровао је својим студентима и млађим колегама да ће интервале и алгоритам $\Delta_n(y)$ прихватити и даље, временом, примењивати и развијати. Тако се и десило, нарочито у првој деценији после Другог великог рата.

Међу математичарима на Филозофском факултету, интервали и алгоритам имали су тада тежину специјалистичких курсева, који данас владају и чине суштину математичких студија на универзитетима света. То је оно право, када се професор обраћа слушаоцима својим истраживањима, новим резултатима и постављањем нових проблема. На табли су исписани његови резултати – покушаји са упутствима о надградњи. Где би био крај београдској школи математике, да је Петровић могао овако да ради од првих дана на Великој школи! Да обичан курс алгебре, калкулуса и анализе препусти кандидатима да сами уче уз присуство млађих професорових колега, а да од професора слушају нова сазнања у науци која он ствара и разрађује, да дознају како се ради на литератури и како се саставља научна расправа. Поменути начин у историји математике познат је од давнина, јавља се веома рано и траје, од Питагориних апостола па до данашњих дана. Рецимо, то је био случај са специјалистичким курсевима Вајерштраса, Шварца, Кронекера на Берлинском универзитету или Пикара и Адамара у Паризу. Нажалост, Петровић је својим интервалима и алгоритмом $\Delta_n(y)$ ово започео знатно доцније.

*

Школске 1927/28. године Михаило Петровић је започео течај *Рачунање са бројним размацима* за студенте математике Филозофског факултета у Београду. У прво време циљ му је био да у сажетом облику изнесе своје раније резултате из неједнакости које је успешно примењивао у алгебри и анализи, а посебно у директном проучавању решења диференцијалних једначина. Убрзо је Петровић саставио уџбеник за овај течај под истим називом *Рачунање са бројним размацима* који је објављен 1932. године. Ако се детаљно проуче Петровићеве странице и распореде проблеми које је обрађивао, тада је једноставно утврдити да се ова књига заснива на *два основна резултата.*

ПРВИ РЕЗУЛТАТ. – Некако, у исто време када објављује предавања *Рачунање са бројним размацима,* у првом броју тек покренутог часописа математичара Београдског универзитета – Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, Петровић објављује један рад под насловом *О једном функционелу*, где поред осталог излаже и неједнакост

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + (n-1)f(0),$$

где је $f(x)$ једна конвексна функција у размаку $I = [0, a)$ и

$$x_i \in [0, a), \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \in [0, a), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

У ствари, у овој расправи Петровић се користио својим ранијим радовима о аритметичкој и геометријској средини,[41] да би најзад у монографији, коју овде анализујемо, дошао до теореме.

Нека је $f(x)$ једна позитивна конвексна функција у размаку (*a*, *b*). Ако су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ низ позитивних бројева и њихов збир $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ из размака (*a*, *b*), онда важи неједнакост

$$(**) \qquad f(\mu_n) \le M_n \le \frac{f(n\mu_n) + (n-1)f(0)}{n},$$

где је

$$\mu_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \quad M_n = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$

Овде се запажа да Петровић сада износи и доњу границу неједнакости и тиме окончава рад на овом значајном проблему.

Као што је поменуто, ова неједнакост (**) доминира Петровићевом књигом. За различите случајеве функције $f(x)$ које испуњавају поменуте

---

[41] M. Petrovitch, *Théoreme sur la moyenne arithmétique de quantités positives*, L'Enseignement math., Genève 1916, t. 18, **3–4**, pp. 163–176; M. Petrovitch, *Relations d'inégalité entre les moyennes arithmétiques et geometriques*, CR **163** (1916), 4, pp. 81–84.

услове у датом размаку (a, b), професор излаже више различитих неједнакости којим анализује цео проблем у којем се она јавља. Такав је чест случај са функцијом $f(x) = x^k$ за $k = 2, 3, 4$. На пример, да би се за $a, b, c \in R^+$ показало да је

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \lambda(a + b + c),$$

где је $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \lambda < 1$, односно

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + \theta(\sqrt{3} - 1)), \quad 0 \leq \theta < 1$$

може се узети функција $f(x) = x^2$ и добити тражени резултат.

Крајем 50-их професор Драгољуб Марковић анализује овај Петровићев рад и с правом научника предлаже да се неједнакост (**) назове ***Пеӣровићева неједнакосӣ*** (***Inégalité de Michel Petrovitch***) и тако на папирима науке остане трајно записано.[42] Марковић је Петровићевим путем показао неколико нових теорема за случај

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i,$$

где највише расправља о постојању горње и доње границе неједнакости (**), као и о условима за саму функцију $f(x)$. Овде наводимо један исправан Марковићев суд: „Упоређивањем резултата види се да се за исту функцију $f(x)$ граница Петровића мери помоћу величине Σx, док се граница Јенсена мери помоћу величине $\frac{1}{m}\Sigma x$. И док се вредност $\frac{1}{m}\Sigma x$ аутоматски налази у интервалу (x_1, x_m), дакле у интервалу конвергенције, дотле се за величину Σx, то мора посебно нагласити“.[43]

У време стогодишњице рођења Михаила Петровића (1868–1968), професор Петар Васић детаљно проучава Петровићеву неједнакост и указује да је она била полазиште за нека доцнија истраживања страних математичара.[44] Васић посматра само десну страну неједнакости (**), односно неједнакост (*) и показује да је румунски математичар Поповици 1944. године дошао до исте Петровићеве неједнакости (*) и то за случај „пондерисаних средина“.[45] У истим настојањима П. Васић анализује Гатијеву неједнакост,[46] као и поменуте теореме Драгољуба Марковића.

---

[42] Д. Марковић, *Поводом једне неједнакосӣи М. Пеӣровића*, Весник Друштва мат. и физ. НР Србије, **11** (1959), стр. 45–53.

[43] Д. Марковић, исто, стр. 47.

[44] P. Vasić, *Sur une inégalité de M. Petrovitch*, Споменица Михаила Петровића, Београд, 1968, стр. 129–134.

[45] T. Popoviciu, *Les fonctions convexes*, Actualitée 992, Paris 1944.

[46] S. Gatti, *Sul massimo di in indice di anormalità*, Metron **18** (1956), pp. 181–188.

Вредно је нагласити, да је једно уопштење Петровићевог резултата за конвексне функције дао Јован Карамата,[47] и да је Миодраг Томић у својим првим научним радовима, при геометријском разматрању (конструкцији) тежишта конвексних функција, био упознат са Петровићевом неједнакости.[48] У новије време неједнакостима код конвексних функција бавио се професор Милосав Марјановић са веома успелим и оригиналним разматрањима.[49]

У публикацијама професора Драгослава С. Митриновића налазимо податак да је Јанош Ацел био упознат са Петровићевим радом на размацима, а да се сам професор Митриновић најшире бавио Петровићевим неједнакостима, које је својим оригиналним приступом изложио на више места, а нарочито у познатим његовим монографијама о неједнакостима објављеним у земљи и иностранству.

ДРУГИ РЕЗУЛТАТ. – У диференцијалним једначинама Петровић је зарана започео рад на локалном проучавању решења диференцијалних једначина са становишта аналитичке теорије функција (резултати у његовој докторској дисертацији, 1894), као и директног проучавања решења диференцијалних једначина (квалитативна интеграција). Ове области у Петровићево доба биле су веома савремене, а он се снагом своје воље трудио да што више овој начуној области допринесе новог. При овоме, трагао је за новим методама, практичним поступцима, како их је он називао. Тако је 1898/99. године дошао на идеју увођења *упоредивих диференцијалних једначина* у циљу уоквиравања интегралних кривих у одређене бројне размаке, које даље користи. Дакако, дошао је до своје ***Методе упоредивих диференцијалних једначина*** коју је током времена усавршавао. У оквирима својих животних начела, а која је пренео и у науку, Петровић ниједним детаљем не помиње да је то његова метода и да се она показала веома корисним и била видно запажена од Пикара, Пенлевеа, Фукса, Валенберга и других угледних математичара. А када је методу преносио другима, својим ученицима, и тада се није хтео похвалити.[50] Он је просто скривао право лице својим резултатима.

Како је Петровић поступио у монографији *Рачунање са бројним размацима*? Пре свега, позива се на један свој ранији рад из 1899. године, где је изложио основну теорему, односно упутство о формирању упоредивих диференцијалних једначина.

---

[47] J. Karamata, *Sur une inégalité relative aux fonctoins convexes*, Publ. math. de L'Université de Belgrade, **1** (1932), pp. 145–147.

[48] М. Томић, *Gauss-ов став о тежишту и његова примена*, Весник Друштва мат. и физ. НР Србије, **1** (1949), 1.

[49] М. Марјановић, *Конвексне и конкавне функције и кореспондентне неједнакости*, Настава математике **40** (1994), **1–2**, стр. 1–11.

[50] Нпр. докторска дисертација Симе Марковића као и један његов рад о једначини $y'^2 + y^2 = f(x)$ заснивају се на методама Михаила Петровића.

„Нека је дата једначина $y' = F(x,y,f)$, где је f функција од x која фигурише у F. Нека је (x_0,y_0) тачка у којој су функције F и њен извод $\frac{\partial F}{\partial f}$ одређени, коначни, непрекидни и не мењају знак и за коју се овај парцијални извод не анулира. Увек се могу изабрати две функције $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ које испуњавају следеће услове.

1) Оне су одређене, коначне и непрекидне у неком довољно малом интервалу од $x = x_0 - a_1$ до $x = x_0 + a_2$ (a_1 и a_2 су две позитивне константе).

2) У овом је интервалу

$$\lambda(x) < f(x) < \mu(x).$$

Ако се са u и v означе интеграли једначина

$$u' = F(x,u,\lambda), \quad v' = F(x,v,\mu),$$

који за $x = x_0$ узимају вредност $u_0 = v_0 = y_0$, функције u и v су одређене, коначне и непрекидне у довољно малом интервалу од $x = x_0 - b_1$ до $x = x_0 + b_2$ (b_1 и b_2 су две позитивне константе).

Два интервала $(x_0 - a_1, x_0 + a_1)$ и $(x_0 - b_1, x_0 + b_2)$ имају увек један заједнички интервал $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$ који је различит од нуле.

За сваку вредност x из интервала $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$ интеграл y једначине $y' = F(x,y,f)$ који за $x = x_0$ узима вредност $y = y_0$ је одређен, коначан, непрекидан и налази се између одговарајућих интеграла u и v, тј.

$$u < y < v.$$[51]

У књизи *Рачунање са бројним размацима* Петровић сада наводи опширнији облик ове теореме са многим појединостима. Ова теорема изложена је на странама 152–154 ове књиге.

Овом методом Петровић исказује више нових теорема и примера. Она доминира целим поглављем о диференцијалним једначинама. Рецимо, исти поступак је применио код квалитативног испитивања првих интеграла диференцијалних једначина и друго.

На Петровићеве резултате овог типа највише пажње усредсредио је професор Милорад Бертолино. У импозантном броју расправа бавио се Бертолино методом упоредивих диференцијалних једначина, примењивао је и пооштравао Петровићева казивања.[52] Оно што је у Бертолиновом раду најбитније и корисно за ово издање Петровићеве књиге, а што је започео још 1958. године, јесте истицање научној јавности да је Петровићева метода упоредивих диференцијалних једначина оригинално Петровићево дело и да се са том методом, тј. *диференцијалним неједначинама* први јавља у науци. Наиме, уста-

---

[51] M. Petrovitch, *Sur une manière d'ètendre de théorème de la moyenne aux équations différentielles du premier ordre,* Math. Ann., t. **54**, 1899.

[52] Најбоље погледати Бертолинову библиографију у његовој књизи *Диференцијалне једначине*, Београд, 1980.

лило се мишљење у науци, да метода диференцијалних неједначина припада руском математичару Чаплигину (1919. г.),[53] што је Бертолино веома прецизно, коректно и аргументовано на више места у земљи и на страним научним скуповима, доказао да то није тачно и да приоритет припада Михаилу Петровићу.

У овим настојањима који су уродили плодом, за један од последњих радова о овом приоритету, професор Бертлино је записао: „ После објављивања овога чланка аутор је (1971) са Д. Трифуновићем, утврдио да је основну Чаплигинову лему о диференцијалној неједнакости првог реда у општијем облику дао Пеано још 1886. Петровићева варијанта са

$$f_1 < f < f_2$$

задржава, међутим, свој приоритет, јер Пеано и Чаплигин су доказивали варијанту са

$$\frac{dv}{dx} - f(x,v) > 0.$$

Прецизније (видети чланак Бертолино М. и Трифуновић Д.: *Sur le théorème fondamental de S. A. Čapligin sur l'intégralité différentialle du premier ordre*, Math. balkanica 1971, pp. 11–18) ово откриће дошло је на подстицај D. Willet-a (Salt Lake City, Utah), који је у свом реферату (Math. Reviews, 1970, 3017) реферишући о једном раду М. Бертолина, навео без коментара у списку литературе и следећи рад G. Peana: *Sull'integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordire*, Atti della Reale Accad. delle Sci. di Torino, vol. 21, A. 1886, pp. 677–685.“ [54]

Оно што је потпуно ново у књизи *Рачунање са бројним размацима* јесте Петровићев прилаз интервалној аритметици. Као равноправно образованом научнику у математичким и физичким наукама,[55] Петровић је запазио да се при математичкој обради многих чињеница у техници, физици, хемији, ... сусреће са проблемом извршавања најелементарнијих аритметичких алгоритама са *нетачним вредностима*. Како је нетачан податак редовито задат неким размаком, то је било нужно да професор образује у најелементарнијем облику аритметику размака. Трајно ће остати записано Петровићево питање: „Ако се нека вредност x у техници нетачно познаје и задата је својим толерантним пољем

$$x = a^{\pm\substack{\alpha\\ \beta}}$$

како одредити, рецимо x^2 или $\sqrt{x}$“? По речима и мишљењу професора̄ Радивоја Кашанина, који је изузетно волео овакве проблеме, овде је Петровић

---

[53] С. А. Чаплыгин, *Основания нового приближенного интегрирования дифер. ур.,* Собрание соч. I, Москва 1948.

[54] М. Бертолино, наведено, стр. 248–249.

[55] Наглашавамо да је Михаило Петровић у Паризу равноправно студирао и математику и физику и стекао две дипломе о завршеним студијама ових наука.

започео рачун са размацима. То је било после Првог великог рата. А када је крајем 20-их дошао до симетричног и асиметричног облика интервала помоћу параметара

$$-1 \leq \omega \leq +1, \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

био је на правом путу „да изгради читав рачун са размацима" (Р. Кашанин).

Тако је и било. Прво је дефинисао симетричан и асиметричан облик размака преко линеарног рачунског представника размака, а да доцније искаже основне пропозиције о функцији једног и више размака. Све је ово Петровић у првом делу монографије коректно изложио и донео више занимљивих примера. Примери су из разних области (алгебра – полиноми, геометрија, ...) веома корисни и за разне потребе употребљиви. Посебно наглашавамо Петровићеву деоницу о коришћењу рачуна са размацима у теорији грешака. Овде пратимо Петровићево излагање и присећамо се његових течајева и студија из теорије грешака,[56] у којима се у рудиментарном облику назиру делови *Обраде резултата мерења, Планирање експеримента* и других области које су 60-их (па и данас) доминирале у овом делу примењене математике. При овоме, Петровић није заборавио да користи размаке и у делу „машинске грешке", нарочито када расправља о грешкама које чине аналогне рачунске машине којима се служио у Математичком заводу Филозофског факултета.[57] Поменимо на овом месту, да је то професору било веома битно, јер је и сам конструисао аналогни рачунар (1897). Његов хидроинтегратор био је први рачунар овог типа у свету који решава ширу класу диференцијалних једначина на принципу кретања течности.[58]

Историја математике својим методама бави се питањима: ко је и када први извршио било коју аритметичку операцију на размацима. Када је неки бројевни размак по први пут степенован, или из размака одређиван квадратни корен, или два размака помножио или сабрао? Дознавање ових чињеница садржи пуно тешкоћа и временски се протеже од првих цивилизација. Сетимо се само приближних метода старих Египћана за налажење квадратног корена или Архимедове процене броја $\sqrt{3}$ или броја π. У новије време (18. век), код Лагранжове теореме за коначни прираштај наилазимо на асиметричан интервал

$$\xi = a + \theta(b - a), \quad 0 < \theta < 1$$

који је настао из неједнакости $a < \xi < b$.

---

[56] Нпр. Петровићева *Елементарна теорија грешака* из 1930. године или студија *О утицају нетачних података на резултате квантитативних хемијских анализа*, Глас, књ. LXVII, Београд, 1903, стр. 69–151.

[57] Слично професору Робинсону са Единбуршког универзитета, који је 1913. године основао Математичку лабораторију (нумеричка анализа, рачунари, математички апарати и др), Петровић је почетком овог века у свом кабинету у Капетан Мишином здању окружен рачунарима, махом аналогног типа, номографима и другим справама за практичне прорачуне.

[58] О рачунарима Михаила Петровића погледати књигу Д. Трифуновић, *Проучавање моделовања у делу Михаила Петровића*, Нови Сад, 1975, стр. 399.

Начин на који Петровић долази до симетричног и асиметричног облика размака посредством функције параметара размака, потпуно је оригинално професорово дело. И данас ово наводе признати раденици у интервалној математици,[59] доказујући да се исказан Петровићев прилаз интервалу $x = [a,b]$ $(a,b \in R)$ $< a \leq x \leq b >$, који је настао између 1928. и 1932. године, налази знатно доцније, 1958. године код математичара Сунаге.[60] Не само ово. Мишљења смо да Петровићу припада приоритет у интервалној аритметици и алгебри (I, +, •). „Рачун са интервалима је развијен током последњих двадесет година са наглим развојем рачунара. Почеци интервалне аритметике датирају од 1958–1959. године. Тада су Т. Сунага[61] и Р. Е. Мур[62] користећи интервале по први пут успели да ограниче прецизно the round-off error у рачунару путем дигиталног компјутера. Можда би госпођа Јанг, цитирана од Р. Е. Мура,[63] требала бити третирана као оснивач интервалне аритметике, коју је увела у операције, не са интервалима, већ са изабраним скуповима реалних бројева (many-valued quantites).“[64] Овако размишљају наши математичари, да би скромно у маниру нашег света, указали да првенство припада Михаилу Петровићу. „Али, чак пре Јангове, југословенски математичар Михаило Петровић је држао курс *Рачунање са бројним размацима* на Београдском универзитету. Под истим насловом објавио је и књигу 1932. године у Београду.“ Они даље наглашавају да им је циљ „да представе Михаила Петровића као једног од пионира интервалне математике, с обзиром на то да начуна јавност није добро упозната са његовим радом на пољу интервалне аритметике. – Михаило Петровић је сигурно био један од првих који је приметио важност и значај интервалног рачуна.“[65]

Неоспорно, Михаило Петровић је први у науци један интервал степеновао, логаритмовао и друго, или два и више интервала сабирао и множио. Било би веома корисно отворити простор идеји, да се први део Петровићеве монографије *Рачунање са бројним размацима*, а то значи дефиниција интервала помоћу функције $f(\lambda)$, $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$, (ω, θ) и све пропозиције функције са једним и више интервала, искажу савременим језиком математике. Ово урадити на страном језику исто онако, како је пионир интервалне математике код нас

---

[59] Lj. Petković, Ž. Mitrović, M. Petković, *Contribution of Petrović to Development of Interval Arithmetic*, Freiburger Intervall-Berichte 8 (1981), pp. 37–41.

[60] T. Sunaga, *Theory of an interval algebra and its applications to numerical analysis*, RAAG Memoirs **2** (1958), pp. 29–46.

[61] T. Sunaga, наведено, стр. 32.

[62] R. E. Moore, *Automatic error analysis in digital computation*, LMSD–48421, Lockeed Missiles and Space Co. Palo Alto. California 1959.

[63] R. E. Moore, *Interval analysis*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J. 1966.

[64] R. C. Young, *The algebra of many-valued quantities, Math. Anal* ***104*** *(1931), pp. 260–290.*

[65] Исто под 59.

– Жарко Митровић урадио у уводном делу своје књиге.[66] Оваква једна невелика публикација страном свету науке одсликала би и указала на пионирски рад Михаила Петровића. Није касно и научна јавност очекује ову дефинитивну оцену.

Петровићеви интервали како их је изложио у књизи *Рачунање са бројним размацима* нису у додиру са савременим кретањима у интервалној математици. Ова област науке припада данас нумеричкој анализи и рачунарству. Али, оно што је Петровић исказао о интервалима крајем 20-их и почетком 30-их година, заслужује сваку пажњу данашњих посленика интервалне математике.

Рад на пољу интервалне математике у нашој земљи започео је у 1976. години са радовима Жарка Митровића и његовом докторском дисертацијом. Ето трентука када једно скривено, заборављено дело Михаила Петровића избија у план научних темеља младих математичара савремених стремљења. Митровић је упознао М. Петровићево дело, оваплотио га и савременим језиком математике извео на прави пут добијајући завидне резултате.[67] А читава школа ове науке око Електронског факултета у Нишу, са неуморним Љиљаном и Миодрагом Петковићем и њиховим значајним резултатима, потврђују да је наука у вечитом споју старог и новог.[68]

Они раније поменути жути и потамнели табаци Петровићевих предавања на Универзитету у Београду с почетка овог века, добијају у оваквим људима прави смисао настанка, постојања и прегалаштва. Онај студент, чије име не можемо сазнати, као да је предсказао будућност научног дела Михаила Петровића, када записује следеће речи на крају пута свог професора (1938. година): „Путуј игумане, не брини за манастир“.[69]

*

Дело *Један диференцијални алгоритам и његове примене* Петровић је завршио почетком јесени 1935. године. У Академији природних наука Српске краљевске академије (СКА) изложио је 21. октобра исте године ова своја истраживања. Као што је то био обичај, присутним члановима Академије Петровић је сажето, али свеобухватно, приказао свој рад. Према записнику са седнице Академије не може се утврдити шта је Петровић излагао и како се дебата развијала. Сигурно је изложио дефиницију диференцијалног алгоритма

---

[66] Ž. M. Mitrović, *Prilozi teoriji intervalnog računa i njenoj primeni*, Publ. Elektortehn. fak.. **601** (1977), str. 58.

[67] Исто.

[68] M. S. Petković, *Bibliography of Yugoslav authors on interval mathematics, Nis 1996, p. 5.*

[69] Исто као под 35.

$$\Delta_n(y) = \frac{1}{y}\frac{d^n y}{dx^n},$$

за функцију $y = f(x)$ која је непрекидна и n-пута диференцијабилна; показао поједина његова својства, затим скицирао неколико битних теорема. Посебно је указао на примене овог алгоритма у геометрији, механици, на физичке проблеме. Како је овој седници присуствовао и Антон Билимовић, тада дописни члан СКА, сигурно се Петровић захвалио свом колеги чије је резултате унео у своју монографију. Наиме, када излаже примену алгоритма $\Delta_2(y)$ на кинематичке проблеме, Петровић се *по први и једини пут користи векторима* и то тако, што је ову деоницу у целости преузео од професора Билимовића. На почетку одељка *Кинематички проблеми* Петровић је дословно записао: „По усменом саопштењу проф. А. Билимовића“. Веома значајан податак у оцртавању Петровићевог односа према новинама у науци. И када је дошао тренутак да се новинама користи, позвао је на сарадњу друго лице, професора Билимовића.

Петровићевом излагању присуствовали су: Богдан Гавриловић, на дужности председника СКА, Милутин Миланковић, на дужности секретара Академије природних наука СКА, Никола Салтиков и други. Приметимо да је Петровићево излагање пратио и професор Љубљанског универзитета Јосип Племељ, дописни члан СКА и филозоф Бранислав Петронијевић. Убрзо, ово Петровићево дело објавила је Академија 1936. године у серији Посебна издања (књ. CXI), Природњачки и математички списи (књ. 30) на 235 страна у 8°.

Одјек Петровићевог диференцијалног алгоритма у научном свету није био завидан, јер је Српска краљевска академија Петровићеву монографију објавила ћириличним српским писмом, те је била недоступна светској јавности. Можда је по среди и нешто друго. Академија наука је Петровићу увек објављивала на француском језику дела која је он желео. То је случај са монографијама *Intégrales premières à restrictions* (Paris 1929), *Intégrations qualitative des équations différentielles* (Paris 1931) и другим. Свакако, да су то примери када је сâм Петровић желео да страни научни свет упозна његова научна дела и искаже суд и све остало што прати научни рад. То су случајеви када је Петровић био апсолутно сигуран у своје резултате.

У случају диференцијалног алгоритма Петровић је поступио обратно. Желео је прво да упозна своју средину, да монографија зачне живот на националном терену. Доцније, допунама и прерадом, да исту објави на страном језику и тако оде у велики свет науке. Петровић је знао да алгоритам $\Delta_n(y)$ по први пут он уводи у науку и било му је потребно да цео подухват „одстоји“, како би дошао до крајњег излаза, резултата који ће неоспорно бити вредан пажње.

По изласку ове књиге, Драгослав С. Митриновић се потрудио да светску јавност упозна овим Петровићевим делом. Митриновић, као млад човек, жељан активности и резултата, волео је ово да ради. Тако је у Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (FdM, B. 62, S. 1184–1185) објавио довољно информативан приказ књиге, како би научна јавност била упозната да је у Београду дефинисан алгоритам $\Delta_n(y)$ и да је о њему написана читава монографија. И поред тога, што Митриновићев реферат не садржи критички тон и без коментара је, јер у то време реферативни часопис FdM није то ни практиковао (био је на нивоу научних вести, чисте информације са неким изузецима), овде доносимо у нашем преводу поменути реферат: „Поступак назначен са $\Delta_n(y)$ који се односи на n-ти извод функције y, тј.

$$\Delta_n(y) = \frac{1}{y}\frac{d^n y}{dx^n},$$

развија правила за добијање Δ_n у различитим случајевима задатих функција. Функционал Δ_n појављује се непосредно и на природан начин код многих проблема анализе и њене примене. На пример, његова особина ка једноставном поступку при трансформацији обичних диференцијалних једначина. Даље је показано да постоји веза између знака и апсолутне вредности $\Delta_n(y)$ с једне стране и положаја нула, максимума, минимума, асимптотских вредности, општег понашања, осцилаторног карактера, фреквенције осцилација итд. функције y с друге стране. Овај однос олакшава квалитативно испитивање реалног решења диференцијалних једначина било којег реда и води ка општем исказу о понашању интегралних кривих. Поступак омогућава различите примене на питања из геометрије, кинематике, динамике и математичке физике.“

Поред овога, Митриновић је у својим расправама наводио Петровићеву монографију, њоме се служио наглашеном жељом да се о њој што више сазна. Тако је 1938. године у раду *Неколико ставова о Riccati-евој диференцијалној једначини* навео ову Петровићеву књигу иако се њоме није користио у излагању.[70]

Да ли су ова Митриновићева настојања у FdM и у другим радовима побудила нека интересовања, да ли се неко из света науке темељније користио алгоритмом Δ_n, није познато. И после Другог светског рата ова монографија имала је исту судбину са неким изузецима у нашој средини. Можда је по среди и случај у науци када се познате чињенице преносе са једног језика на други и цела ствар доводи у услове искључиво „научне економичности“, а не оригиналних прилога. У некој аналогији са преношењем скаларног облика у векторски, односно тензорски, може се посматрати и положај Петровићевог диференцијалног алгоритма. Већ познате чињенице (нпр. теореме), које су изворно Петровићевог порекла, исказују се помоћу алгоритма $\Delta_n(y)$. Ово се најбоље уочава код решавања диференцијалних једначина и сијасет процена у анализи.

У свему наведеном изузетак су поједини радови професора Ивана Бандића. Наиме, обај београдски математичар под великим утицајем Драгослава С. Митриновића крајем 50-их користи се алгоритмом $\Delta_n(y)$ у својој доктор-

---

[70] Глас, књ. CLXXXI, стр. 169–236.

ској дисертацији, као и у више радова објављених у Загребу[71] и Београду.[72] Рецимо, Бандић је посматрао квазихомогене диференцијалне једначине првог реда у односу на y и y' и трансформације једначине на други облик. При овоме, аутор се користи Петровићевим алгоритмом и то следећим својствима:

$$\begin{aligned}&\Delta_1(u_1u_2)=\Delta_1(u_1)+\Delta_1(u_2),\\ &\Delta_1\left(\frac{u_1}{u_2}\right)=\Delta_1(u_1)-\Delta_1(u_2),\\ &\Delta_1(u^n)=n\Delta_1(u),\qquad \Delta_2(u)=\Delta_1'(u)+\Delta_1^2(u).\end{aligned}$$

Важно је овде поменути да је Бандић кренуо и даље у развоју алгоритма Δ_n. Он показује, и употребљава, да се диференцијални алгоритам може проширити и на функције са више аргумената увођењем *парцијалног диференцијалног алгоритма*, тј. релативног извода.

Нека је $u=u(x_1,x_2)$; парцијалан релативан извод првог реда је

$$\Delta_1(u)_{x_k}=\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x_k},\quad k=1,2.$$

Ако је x_2 функција од x_1, тада је

$$\nabla_1(u)_{x_1}=\frac{1}{u}\frac{du}{dx_1}=\frac{1}{u}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}x_2'\right),$$

одакле је

$$\nabla_1(u)_{x_1}=\Delta_1(u)_{x_1}+\Delta_1(u)_{x_2}\cdot x_2',\quad \text{итд.}$$

Имајући у виду да је диференцијални алгоритам Петровић први дефинисао, да је пружио оригиналан допринос пространој математичкој анализи, неопходно је покушати открити када је и како дошао на идеју да алгоритам искаже јавности. То је, уосталом, и задатак историје математике, да открива настанак научних идеја, њен развитак и све последице.

Осим неколико изузетака, када решава диференцијалне једначине помоћу квадратура (интеграбилне класе), Петровић је знатан труд уложио у директно проучавање решења диференцијалних једначина. Овде је постигао завидне реузлтате, виђене и коришћене од света науке и објављене у најугледнијим часописима. Када је ово радио и испитивао разне особине, својства и понашање решења диференцијалних једначина (нуле, полови, осцилаторност

---

[71] Нпр. M. Bandić, *On a recurrent linear differential equation of second order*, Glasnik mat.-fiz. i astr. **12** (1957), **3**.

[72] Нпр. М. Бандић, *О једној класи диференцијалних једначина првог реда,* Весник Друштва мат. и физ. НР Србије, **10** (1958), стр. 95–104; и тамо даље.

и сл.), запазио је да му је неопходно доћи до „неког помоћног алата“ који ће знатно олакшати и убрзати рад на такозваној квалитативној интеграцији диференцијалних једначина. Он је добро знао да се вазда у анализи и калкулусу користи однос $y'/y, y \neq 0$, јер је веома употребљив, а то је његово $\Delta_1(y)$, те поставља питање проучавања општег релативног извода $y^{(n)}/y$, односно $\Delta_n(y)$. Ово је Петровићу одмах показало да се свака хомогена линеарна диференцијална једначина

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0,$$

може исказати обликом

$$\Delta_n(y) + a_1\Delta_{n-1}(y) + a_2\Delta_{n-2}(y) + \ldots + a_n = 0,$$

а то је значило много у његовом труду. Овим је професор отворио нове могућности трансформације и свођења анализе особина решења диференцијалних једначина на потпуно непознате услове у науци. Петровићева помисао на алгоритам нарочито се огледа у директном проучавању решења биномних диференцијалних једначина која је веома рано започео. Када је 4. новембра 1895. члан Француског института Емил Пикар саопштавао у Парискої академији наука Петровићев рад о овим једначинама, запазио је да се млади математичар користи релативним изводом $y^{(n)}/y$ и да је на добром путу да овај метод даље развија и усавршава. И стварно, Петровић је веома често употребљавао овај облик извода, да би у 1935. години дошао до читаве монографије. Рецимо, у 1927. години доказује следећу теорему.

„Ниједна диференцијална једначина

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \varphi(x)y = 0$$

не може имати као решење целу функцију $G(x)$ нулте врсте.“[73] Овде је Петровић користио облик целе функције $G(x)$ у облику производа Вајерштрасових фактора (u_n), а доказ теореме свео на испитивање особина релативног извода $\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2}$, односно $\Delta_2(y)$.

И код многих теорема о Рикатијевој диференцијалној једначини у целости је увидео корист овог алгоритма.[74]

Када алгоритмом Δ_n испитује својства функције (нуле, асимптотско понашање и др), Петровић показује прави смисао овог новог функционала, његову ширину у применама, као потпуно нов приступ овом делу анализе. Поменимо један пример. На питање, када ће функција $y = f(x)$, непрекидна и диференцијабилна у размаку (a, b), имати само једну нулу, Петровић одговара

---

[73] M. Petrovitch, *Théorème sur l'équation de Riccati*, Publ. math. de l'Univ. de Belgrade, 4 (1935), pp. 169–180.

[74] Исто као под 70 и 73.

теоремом: „У сваком размаку (a,b), у коме је релативан извод $\Delta_2(y)$ непрестано позитиван, ниједна од одговарајућих му функција $y=f(x)$ не може имати више од једне нуле".[75]

Како је и шта Петровић излагао у овој књизи? Знајући да је потпуно оригиналан у дефиницији и показаним својствима алгоритма $\Delta_n(y)$, он је и у другим деловима књиге користио само своје *раније* резултате. Из ових разлога у књизи је веома незнатно навођена литература страних математичара. Само у случајевима, а они су ретки, када се као пример узима нека чињеница коју сада Петровић решава и анализује посредством Δ_n. Ово је општа карактеристика професорове монографије и велика је штета што поред сваке деонице није навео извор, своју расправу и где је објавио. Једноставно, прелазио је преко тога, сигурно из очите скромности, а покадкад и из немарности у цитирању. Мишљења смо, да је ово запажање подстакло неколицину математичара да пишу и исказују суд, како се Петровић већ у поодмаклим годинама понавља. Наш је став супротан и доводи до оних методолошких регула које потврђују праву оригиналност једног дела. А то је Петровић са диференцијалним алгоритмом у потпуности постигао. Илустрације ради, наводимо само један пример као репрезентацију општег Петровићевог поступка у књизи. При проучавању Рикатијеве диференцијалне једначине, Петровић је *раније* дошао до теореме:

„За сваку интеграбилну једначину

$$y' = y^2 + f(x)$$

постоји по један неограничен низ функција променљиве x

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$$

таквих да је и свака једначина

$$y' = y^2 + (f(x) + \lambda_k(x))$$

такође интеграбилна, и то без икаквих додатних квадратура".[76] А сада у књизи, при налажењу рекурентних веза за функције λ_k и y_k, он доказ своди на анализу диференцијалног алгоритма и цео овај ранији поступак поједностављује и отвара нова питања. Као што смо навели, овакав ауторов поступак налазимо у целој књизи.

А у првом делу студије, када дефинише алгоритам и излаже његова својства и особине, Петровић је потпуно нов. Овде се професор показао правим мајстором, указао на читав рудник из којег се и данас може понешто добити и тако доћи до нових резултата.[77] Професор Милош Радојчић, међу најбољим Петровићевим ученицима, није случајно записао: „У Петровићевом научном

---

[75] Видети стр. 256 ове књиге.

[76] Видети стр. 294 ове књиге.

[77] Погледати М. Томић, наведено под 31.

раду истиче се уопште разноликост тема и богатство идеја. Може се рећи да се његово научно стварање одликује особито мноштвом оригиналних идеја, којима се утврђују нове везе у математици више него исцрпљивањем последица које се из једне идеје пружају. Гдекојим својим радом створио је он полазну тачку истраживања за друге математичаре. Он сам, богат замислима, радо је препуштао другима, у нас и на страни, да оберу плодове с дрвета које је пронашао он."[78] На многим местима могу се потврдити ове Радојчићеве речи. Као пример, покажимо Петровићево трагање за важношћу дистрибутивне особине алгоритма према операцији сабирања. За две непрекидне и диференцијабилне функције $u(x)$ и $v(x)$ у размаку (a,b), Петровић је запазио да је

$$\Delta_1(uv) = \Delta_1(u) + \Delta_1(v),$$

те поставља себи задатак да изнађе све потребне и довољне услове да производ искаже у облику збира $(uv = u + v)$ и тако добије

$$\Delta_1(u+v) = \Delta_1(u) + \Delta_1(v).$$

Прво је доказао следећу теорему.

„Да би алгоритам Δ_n имао за u и v дистрибутивну особину, потребно је и довољно да u буде интеграл диференцијалне једначине

$$\frac{d^n u}{dx^n} + f(x)u^2 = 0,\text{“}^{79}$$

да би у другом делу потпуно исказао све услове под којима важи

$$\Delta_1(u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_k) = \Delta_1(u_0) + \Delta_1(u_1) + \Delta_1(u_2) + \ldots + \Delta_1(u_k).^{80}$$

*

Изложене две монографије у овој књизи *Сабраних дела Михаила Петровића* припадају прошлости математичких наука у српском народу. Оне су потпуно оригинално дело Михаила Петровића настало 30-их година нашег доба када је научни живот у математичким наукама постизао најјаче резултате између два рата, али и отворио нове просторе за будући рад, научно стваралаштво које и данас траје. Математичким писмом, језиком, терминологијом и методологијом, као и нивоом постигнутих резултата, оне у потпуности одсликавају један период математике на Универзитету у Београду. Неоспорно, данашњим „алатом" математичке анализе и алгебре, оне би се „модерније",

---

[78] М. Радојчић, *Михаило Петровић*, Наука и природа 2 (1949), 2, стр. 117–120.

[79] Видети стр. 206 ове књиге.

[80] Петровић се овде користио једним ранијим радом *Продукти једнаки збиру својих чинилаца*, Глас, књ. CXVI, Београд, 1925, стр. 1–9.

јасније и прецизније написале, али њихова суштина, Петровићево дело, остало би исто.

У овом времену настајања универзитетских уџбеника и монографија приближавао се радни спокој овој изузетној личности наше науке. Колеге са Универзитета, сва научна јавност, хитала је да испољи велику захвалност Михаилу Петровићу за сва добра која је учинио и заорао. У једном предлогу београдских математичара споменуто је и ово: „... Наш Факултет, Универзитет, Држава и читава ова земља, дужни су да дају највеће признање и захвалност професору Михаилу Петровићу. Као израз овог поштовања потписани имају част да предложе професора Михаила Петровића за почасног доктора математике Београдског универзитета“.[81]

У овим данима славе, у присуству колега из Математичког завода Филозофског факултета, који је 1938. године добио име ***Завод Михаила Пет̄ровића за т̄еоријску мат̄емат̄ику***, чланова Српске краљевске академије и њеног председника Александра Белића, као и других званичника, Михаило Петровић је био збуњен, али и срећан што види разбујало дело које је започео далеке 1894. године. Дубоко скроман и одан својим једноставним начелима живота, успео је да проговори само једну реченицу: „Бог је сведок да свему овоме нисам крив“. Као да је из њега проговорио др Никодим Петровић, професор Београдске богословије, професоров отац, који га је учио и спремао у духу и лепоти скромних београдских грађанских породица друге половине 19. века.

---

[81] Архив Србије, БУ, 1108.

ДЕЛИМИЧАН ПРЕГЛЕД ПЕТРОВИЋЕВИХ ТЕОРЕМА О ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОМ АЛГОРИТМУ $\Delta_n(y)$*

ТЕОРЕМА 1. – Да би алгоритам Δ_n имао за $u(x)$ и $v(x)$ дистрибутивну особину, потребно је и довољно да $u(x)$ буде интеграл диференцијалне једначине

$$\frac{d^n u}{dx^n} + f(x)u^2 = 0$$

(стр. 206).

ТЕОРЕМА 2. – Алгоритам Δ_n изражава се као полином n-тог степена по вредностима

$$\Delta_1, \Delta_1', \Delta_1'', \ldots, \Delta_1^{(n-1)},$$

а сви коефицијенти тога полинома су позитивни цели бројеви (стр. 212).

ТЕОРЕМА 3. – Извод по x, ма кога реда p, алгоритма Δ_n изражава се као полином по вредностима

$$\Delta_1, \Delta_1', \Delta_1'', \ldots, \Delta_1^{(k+p-1)},$$

а коефицијенти таквог полинома увек су цели бројеви, позитивни или негативни (стр. 213).

ТЕОРЕМА 4. – Итерација реда p, тј. функција y_p, изражава се као рационална функција ограниченог броја елемената

$$\Delta_1(y),\ \Delta_1'(y),\ \Delta_1''(y), \ldots$$

а коефицијенти те рационалне функције су цели бројеви (стр. 214).

---

[*] Теореме се доносе у оригиналном и веродостојном препису из Петровићеве књиге. У загради се наводи страна, где се теорема налази у књизи.

ТЕОРЕМА 5. – Најопштија функција z за коју је

$$\Delta_2(z) = \Phi(x),$$

где је

$$\Phi(x) = \frac{1}{v}[2\Delta_1^2(v) - \Delta_2(v)] + b - a,$$

јесте

$$z = [\Delta_1(u) - \Delta_1(v)]u$$

(стр. 227).

ТЕОРЕМА 6. – Кад је извод $\Delta_n(y)$ рационална функција од x, која тежи коначној вредности $\lambda \neq 0$, када $x \to \infty$, онда најопштија униформна функција y, што одговара таквоме $\Delta_n(y)$, облика је

$$y = R_1(x)\,e^{r_1 x} + R_2(x)\,e^{r_2 x} + \ldots + R_n(x)\,e^{r_n x},$$

где су $R_1, R_2, \ldots, R_n$ рационалне функције, а $r_1, r_2, \ldots, r_n$ корени биномне једначине

$$r^n + \lambda = 0$$

(стр. 239).

ТЕОРЕМА 7. – Кад је $x = \alpha$ нула m-тог реда за функцију y, израз

$$(x - \alpha)^n \Delta_n(y)$$

тежи за $x = \alpha$ једноме целом позитивном броју који има за вредност

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$$

(стр. 244).

ТЕОРЕМА 8. – Да би извод $\Delta_n(y)$ функције y изражене редом

$$y = \Sigma A_k (x - \alpha)^k,$$

а која има вредност $x = \alpha$, као своју нулу m-тога реда, био за $x = \alpha$ коначан и од нуле различан, потребно је и довољно да поред тога што је

$$A_0 = A_1 = \ldots = A_{m-1} = 0, \quad A_m \neq 0$$

буду још и

$$A_n = A_{n+1} = \ldots = A_{n+m-1} = 0, \quad A_{n+m} \neq 0.$$

Вредност $\Delta_n(y)$ за $x = \alpha$ тада је

$$\Delta_n(y) = \frac{(n+m)!}{m!}\frac{A_{n+m}}{A_m}$$

(стр. 246).

ТЕОРЕМА 9. – Кад извод $\Delta_2(y)$ остаје коначан и непрекидан за свако x у размаку (a, b), нуле свих одговарајућих им функција y, што леже у томе размаку, просте су (стр. 254).

ТЕОРЕМА 10. – Кад две функције, које имају заједничких нула, имају један исти извод Δ_2, њихов је количник сталан број (стр. 255).

ТЕОРЕМА 11. – У сваком размаку (a, b) у коме је извод $\Delta_2(y)$ непрестано позитиван, ни једна од одговарајућих му функција y не може имати више од једне нуле (стр. 256).

ТЕОРЕМА 12. – Ако је у размаку (a, b) непрестано

$$-\Delta_2(z) < -\Delta_2(y) < -\Delta_2(u),$$

функција y имаће у томе размаку најмање онолико нула колико их има z, а највише онолико колико их има u пошто се овај број повећа са 2 (стр. 261).

ТЕОРЕМА 13. – Растојање између две узастопне нуле функције y, чији извод $\Delta_2(y)$ лежи између два негативна броја $-M$ и $-N$, налази се по својој дужини између два броја

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{\sqrt{N}}$$

(стр. 267).

ТЕОРЕМА 14. – Кад две реалне непрекидне функције имају један исти извод Δ_2, а поред тога имају и једну заједничку реалну нулу, оне имају и један исти извод Δ_1 (стр. 319).

ТЕОРЕМА 15. – Кад за једну функцију y, коначну и непрекидну у једноме размаку (a, b) вредности x (као и њени изводи y' и y''), други релативни извод $\Delta_2(y)$ никако не премаша у томе размаку вредност

$$-\left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^2,$$

функција y бар једанпут мења у (a, b) свој знак пролазећи кроз нулу (стр. 320).

ЛИТЕРАТУРА

У изложеним монографијама Михаила Петровића цитиране литературе нема или је незнатно наведена. То се у потпуности и очекивало, јер су изложени резултати изворно оригинално Петровићево дело. Тако, у првој монографији *Рачунање са бројним размацима* литературе уопште нема, док у другој *Један диференцијални алгоритам и његове примене* наведено је око 20 наслова страних истраживача (математичари, физичари, механичари). Ови наводи, дакако, не односе се на Петровићев уведен диференцијални алгоритам $\Delta_n(y)$, већ су цитирани као извори из којих је наш математичар изналазио проблеме и решавао их другачије помоћу свог алгоритма, а тиме учинио и извесне допуне проблемима. На пример, помињу се резултати А. Кнезера о асимптотском понашању интеграла линеарне хомогене диференцијалне једначине другог реда које Петровић преноси у нове облике користећи свој алгоритам $\Delta_2(y)$ и при томе исказује нова својства решења.

Ову литературу доносимо скупно са назнаком стране на којој је наведена.

HALPHEN G., *Sur une nouvelle classe d'équatins différentielles linéaires inteegrables,* Comp. rendus de l'Acad. des Sciences de Paris, t. CI, 1886, pp. 1238 (240)

APPELL P., *Sur une classe d'équations différentielles linéaires binomes à coefficients algébriques,* Comp. rendus de l'Acad. des Sciences de Paris, t. XCVII, Nº du 20 Janv. 1882 (241)

APPELL P., , Annales de l'École Normale Superieure, 2-me série, t. XII, 1883, pp. 9–46 (241)

APPELROT-LAGOUTINSKI, Communications à la Société mathematique du Moscou, Recueil math. t. 23, 1902; t. 27, 1909; t. 32, 1924 (327)

BUHL A., *Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent par quadratures*, Nouvelles Annales de Math., 1909, pp. 337–354 (344)

DAVIDOGLOU A., *Sur les zéros réels des intégrales réelles des équations linéaires troisième ordre,* Comp. rendus de l'Acad. des Sciences de Paris, t. CXXX, 1900, pp. 399–401 (252)

DAVIDOGLOU A., *Sur une application de la méthode des approximations successives*, Comp. rendus de l'Acad. des Sciences de Paris, t. CXXX, 1900, pp. 1241–1243 (253)

DAVIDOGLOU A., *Sur les intégrales périodiques des équations différentielles binomes*, Comp. rendus de l'Acad. des Sciences de Paris, t. CXXXIII, 1901, p. 582–584 (251)

DARBOUX G., *Sur une propriété relative aux équations linéaires*, Comp. rendus de l'Acad. des Sciences de Paris, t. XCIV, 1882, pp. 1456 (227)

DARBOUX G., *Leçons sur la théorie génèrale des surfaces*, II partie, Paris 1899, p. 196 (227)

KNESER A., *Untersuchungen über die reelen Nullstellen der Integrale linearer Differentiel Gleichungen,* Math. Annalen, Bd. 42, 1893, s. 400–435 (275)

KNESER A., *Asymptotische Darstellungen bei linearen Differential Gleichungen*, Math. Annalen, B. 46, 1897, s. 383–399 (279)

LERCH M.[1] *Asymptotische Linien auf einem geraden Konoid,* Verein. Böhm. Mathematiker, Prag 1921, s. 47 (346)

PETROVICH M., *Sur l'équation differentielle linéaire du second ordre,*[2] Bull. de la Société math. de France, t. XXV, 8–9, 1897, pp. 221–235 (315)

ПЕТРОВИЋ М., *Једна особина линеарних диференцијалних једначина*[3], Српска краљевска академија, Глас, књ. XCIX, 1922, стр. 1–6 (293)

CHILDE F. G., Messenger of Math. 1889–1890, pp. 155–164 (225)

SPITZER S., *Studien über die Integration linearer Differential Gleichungen*, Wien 1860, s. 44, 63, 111 (203, 230, 231, 232)

SPITZER S., , Wien 1862, Zweite Vorsetzung, s. 100 –102 (246)

STURM J., *Sur les équations linéaires du second ordre*, Journal de math. pures et appliquées, t. I, pp. 160 (283)

STURM J., *Sur une classe d'équations à differences partielles*, Journal de math. pures et appliquées, t. I, p. 373 (283)

---

[1] Поменимо, да је Лерх (Matías Lerch, 1860–1922) први страни математичар који је сарађивао са математичарима у обновљеној Србији (Српска краљевска академија, Годишњак за 1888. г. и Глас, књ. XI (1899)).

[2] Петровић је за ову расправу саставио и њен сажетак за Годишњак СКА (11 (1897), стр. 149), а о томе писало је и београдско Дело (17, 1898, стр. 519). Hamburger je у FdM, B. 28, s. 284 дао приказ ове Петровићеве расправе.

[3] Владимир Варићак је у FdM, B. 48, S. 515–516 опширно изложио овај Петровићев рад.

О ОВОМ ИЗДАЊУ

У овој књизи *Сабраних дела Михаила Петровића* задржани су оригинални наслови дела *Рачунање са бројним размацима* и *Један диференцијални алгоритам и његове примене*. Међутим, наслов целе књиге је *Интервална математика – Диференцијални алгоритам.* Прва тематска целина насловљена је ***Интервална математика*** и она покрива дужи ауторов период у раду на неједнакостима, још од 1896, па до појаве овог дела у 1932. години. Ово је учињено и намером да се Петровићевим истраживањима у алгебри размака додели савремни назив и тиме укаже да је у овој области науке, данас веома актуелној у нумеричкој анализи и рачунарству, ако не први, оно бар међу првима, Михаило Петровић започео рад на структурама (I, +, •), где је I скуп интервала $[a,b]$ $(a,b \in R)$ са особином $a \leq x \leq b$.

Други део наслова ове књиге ***Диференцијални алгоритам*** настао је у намери да се изворни наслов дела *Један диференцијални алгоритам и његове примене* скрати, али и задржи његова суштина.

Математичко писмо (симболика) у Петровићевом делу је у целости задржано. Оно је у потпуности класично и савременом читаоцу не причињава никакве тешкоће. Петровићево писмо садржи неколико мањих одступања која се могу једноставно запазити и допунити, јер су очигледна. На пример, Петровић размак обележава са (a, b) и то је за њега увек затворен интервал. Није водио рачуна о томе, када је интервал отворен, полузатворен или полуотворен. Значи, и овде се уочава позната професорова особина, да не води рачуна о потребним и довољним условима, нема прецизности, строгости у исказу. „Петровић никада није гонио ствар до праизвора“.[1] Рецимо, код симетричног и асиметричног облика, интервални параметри ω и θ увек су

$$-1 \leq \omega \leq +1, \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

иако има приличан број случајева када је $\omega \in (-1,+1]$ или $\theta \in [0,1)$. Свакако, корисник књиге ово ће сам запазити. Можда смо и намерно оставили

---

[1] М. Томић, *Математичке науке*, САНУ и развој науке и уметности у Срба, књ. 1, Београд, 1989, стр. 13–34.

Петровићев размак само у облику (a, b) да бисмо и данас читајући Петровића осетили изворну лепоту математичара који се журио у чину стваралаштва без вођења бриге о многим детаљима. Овај случај са Петровићевим интервалима сигурно служи као пример потврде суда академика Миодрага Томића: „Проста природа Петровићевих резултата тражила је и дубља објашњења.... А он, нажалост, наставља *брзо* да ради на периферним проблемима“.[2]

У оба дела ове књиге изложено је дело Михаила Петровића у оригиналном и веродостојном препису. Приређивач је строго поштовао ауторову стилску особеност, методичност и саму методологију излагања. Било је више могућности да се Петровићево излагање измени и прилагоди данашњем уобичајеном математичком језику. Рецимо, цео уводни део о диференцијалном алгоритму $\Delta_n(y)$ или о размацима, могао се исказати новим језиком структура који доводи до једне теорије. Нешто слично урађено је у уводном делу једне новије књиге.[3] Од овога се одустало, те се Петровићеве обе монографије излажу веродостојним преношењем њиховог првог оригиналног издања из 1932, одностно 1936. године.

И у терминологији је све задржано. Није ништа мењано иако је за то било више прилика. Рецимо, за *решење* диференцијалне једначине Петровић употребљава реч *интеграл* диференцијалне једначине; за диференцијални алгоритам $\Delta_n(y)$ често користи синониме: алгоритам, релативан извод или само извод, а чак на једном месту и функционал, као што се овим изразом и професор Драгослав С. Митриновић користио у приказивању Петровићеве књиге.[4]

При редиговању текста учињене су исправке очигледних штампарских грешака уочене од самог професора Петровића и приређивача овог издања. Једине интервенције у тексту настају усаглашавањем са важећим правописним нормама. Рецимо, једначење сугласника по звучности, писање великих слова, растављање речи и друго. Неписање сугласника „ј“ посебно је редиговано (нпр. геометриски = геометријски), као и случајеви: н.пр. = нпр., т.ј. = тј., и.т.д. = итд.

Наглашавања у тексту задржана су у изворном облику, као и навођење стране литературе у спуштеницама. Такође, и имена страних научника писана су изворно како их је Петровић наводио.

Поменимо на крају да се први део у овој књизи *Рачунање са бројним размацима* јавља у значењу трећег издања, јер је 1969. године „Грађевинска књига“ из Београда исту књигу издала поводом стогодишњице рођења Михаила Петровића (1868–1968). Редактори овог издања били су математичари др Милорад Бертолино и др Петар Васић, поштоваоци и истраживачи Петровићевог дела. Ово издање је урађено на предлог професора Драгослава С. Митриновића који је и написао уводну биобиблиографску студију о Михаилу Петровићу.

---

[2] Исто.

[3] Ž. M. Mitrović, *Prilozi teoriji intervalnog računa i njenoj primeni*, Publ. Elektrotehn. fak. **601** (1977), str. 58.

[4] FdM, B. 58, S. 1185.

У прилогу ове књиге *Сабраних дела Михаила Пет̄ровића* изложене су још неке појединости које треба да олакшају рад на коришћењу књиге. Тако су скупно изложене најбитније теореме о диференцијалном алгоритму $\Delta_n(y)$, затим скупна литература којом се Петровић користио, као и *Ре̄ист̄ар личних имена.*

РЕГИСТАР ЛИЧНИХ ИМЕНА

САДРЖАЈ

РАЧУНАЊЕ СА БРОЈНИМ РАЗМАЦИМА

Први одељак

БРОЈНИ РАЗМАЦИ У ЕЛЕМЕНТАРНИМ РАЧУНИМА

Други одељак

БРОЈНИ РАЗМАЦИ У ИНФИНИТЕЗИМАЛНОМ РАЧУНУ

Трећи одељак

БРОЈНИ РАЗМАЦИ ЗА ИНТЕГРАЛЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

ЈЕДАН ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ АЛГОРИТАМ И ЊЕГОВЕ ПРИМЕНЕ

Први одељак

РЕЛАТИВНЕ ВРЕДНОСТИ ИЗВОДА И ЊЕГОВЕ МЕЂУСОБНЕ ВЕЗЕ

Други одељак

ФУНКЦИЈЕ ДЕФИНИСАНЕ АЛГОРИТМОМ Δ_n

Трећи одељак

ВЕЗЕ ИЗМЕЂУ ОСОБИНА ФУНКЦИЈЕ И ЊЕНИХ ИЗВОДА Δ_n

Четврти одељак

АНАЛИТИЧКЕ ПРИМЕНЕ АЛГОРИТМА Δ_n

Пети одељак

ЛЕТИМИЧНИ ПОГЛЕД НА КОНКРЕТНЕ ПРИМЕНЕ АЛГОРИТМА Δ_n

ПРИЛОЗИ

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ
САБРАНА ДЕЛА
Књига 8

ИНТЕРВАЛНА МАТЕМАТИКА – ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ АЛГОРИТАМ

Прво издање, 1997. година

Издавач

Завод за уџбенике и наставна средства
Београд, Обилићев венац 5

Ликовни уредник

АИДА СПАСИЋ

Графички уредник

ДУШАН МИЛОСАВЉЕВИЋ

Коректори

СОФИЈА БОШКОВИЋ
ТАТЈАНА ЗОРИЋ
ЗОРИЦА БАЧКОВИЋ

Обим: 28 $^1/_2$ штампарских табака

Формат: 17 × 24 cm

Тираж: 500 примерака

Рукопис предат у штампу августа 1997. године.

Штампање завршено септембра 1997. године.

Штампа

БИГЗ, Београд

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

519.6

ПЕТРОВИЋ, Михаило Н.
Интервална математика – диференцијални алгоритам / Михаило Петровић ; приредио Драган Трифуновић. – [1. изд.]. – Београд : Завод за уџбенике и наставна средства, 1997 (Београд : БИГЗ). – 454 стр. : илустр. ; 24 cm. – (Сабрана дела / Михаило Петровић ; књ. 8)

Тираж 500. – Садржај: Рачунање са бројним размацима ; Један диференцијални алгоритам и његове примене. – Стр. 407–438: Петровићеви интервали и диференцијални алгоритам / Д. [Драган] Трифуновић. – Библиографија: стр. 442–443. – Регистар.
ISBN 86-17-05888-9

517.2:510.5
а) Нумеричка анализа б) Диференцијални рачун – Алгоритми
ИД=56803596

9 788617 346773

ISBN 86-17-05888-9

К. Б. 34677