Dr GRADIMIR V. MILOVANOVIĆ

# NUMERIČKA ANALIZA

## III deo

345679

Naučna knjiga

# NUMERIČKA ANALIZA
# III DEO

Dr GRADIMIR V. MILOVANOVIĆ

# NUMERIČKA ANALIZA

III DEO

Naučna Knjiga

BEOGRAD, 1988.

Dr Gradimir V. Milovanović
NUMERIČKA ANALIZA, III deo

Izdavač:
IRO „Naučna knjiga"
Beograd, Uzun-Mirkova 5

Recenzenti:
*Prof. dr Petar M. Vasić*
*Prof. dr Dobrilo Tošić*

Za izdavača:
*Dr Blažo Perović*

Urednik:
*Nikola Dončev*

Tehnički urednik:
*Gordana Krstić*

Korice:
*Miloš Majstorović*

Tiraž: 1000 primeraka

ISBN 86-23-20079-9

Štampa: GRO „Prosveta" - Niš

# Sadržaj

# Predgovor

Ova knjiga predstavlja III deo autorovog udžbenika NUMERIČKA ANALIZA. Prva dva dela su, takodje, izašla u izdanju Naučne knjige iz Beograda. Kao osnov za izradu rukopisa ove knjige poslužila je ranija autorova knjiga: NUMERIČKA ANALIZA - Diferencijalne i integralne jednačine, Institut za dokumentaciju zaštite na radu "Edvard Kardelj", Niš, 1981. Knjiga je podeljena u dve glave, koje su označene kao osma i deveta, s obzirom da prva dva dela sadrže sedam glava. Organizacija knjige je je ista kao i organizacija prvog i drugog dela. Naime, glave su podeljene na poglavlja, a poglavlja na odeljke. Numeracija objekata (definicija, teorema, formula i sl.) u okviru jednog odeljka izvršena je pomoću tri broja od kojih prvi ukazuje na poglavlje, drugi na odeljak, a treći na redni broj tog objekta u tom odeljku. Na taj način je uspostavljena jednoznačna numeracija objekata u okviru jedne glave. Poslednje poglavlje u svakoj glavi predstavlja spisak citirane i korišćene literature.

Osma glava je posvećena približnim metodima za rešavanje običnih diferencijalnih jednačina (Cauchyev problem i konturni problemi).

U devetoj glavi se obradjuju metodi za rešavanje linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina, metodi za rešavanje linearnih integralnih jednačina, kao i projekciono-varijacioni metodi za rešavanje linearnih operatorskih jednačina na Hilbertovim prostorima.

Na kraju knjige dat je pregled zadataka iz numeričke analize sa ispitnih rokova na Elektronskom fakultetu u Nišu za period od 1973. do 1977. godine. Zadaci sa ispita posle 1977. godine mogu se naći i knjizi: G.V. Milovanović i M.A. Kovačević: ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ NUMERIČKE ANALIZE, Naučna knjiga, Beograd, 1988 (II izdanje).

Knjiga je prvenstveno namenjena studentima tehničkih i prirodno-matematičkih fakulteta, na kojima se predaje ova naučna disciplina. Autor se nada da će knjiga biti od koristi i svima onima koji u svojoj praksi koriste numeričke metode.

Svima onima koji su na neki način pomogli u toku izrade rukopisa, autor se najtoplije zahvaljuje.

U Nišu, 28. 9. 1988. Gradimir V. Milovanović

GLAVA 8

# Približno rešavanje običnih diferencijalnih jednačina

## 8.1. PRIBLIŽNI ANALITIČKI METODI ZA REŠAVANJE CAUCHYEVOG PROBLEMA

U ovom poglavlju razmatraćemo približne analitičke metode za rešavanje običnih diferencijalnih jednačina sa datim početnim uslovima. Ovakav problem se naziva Cauchyev problem. U drugom i trećem poglavlju ove glave razmatraćemo numeričke metode za rešavanje Cauchyevog problema. Četvrto poglavlje biće posvećeno rešavanju konturnih problema kod običnih diferencijalnih jednačina.

### 8.1.1. Uvodne napomene i egzistencija rešenja

Najveći deo izlaganja biće posvećen rešavanju Cauchyevog problema za diferencijalne jednačine prvog reda oblika

$$(1.1.1) \qquad y' = f(x,y), \quad y(x_o) = y_o.$$

Metodi koji se koriste za rešavanje navedenog problema mogu se uopštiti u tom smislu da budu primenljivi za rešavanje Cauchyevog problema za sistem jednačina prvog reda

$$(1.1.2) \qquad \begin{array}{l} y_i' = f_i(x;y_1,\ldots,y_m) \\ y_i(x_o) = y_{io} \end{array} \qquad (i=1,\ldots,m).$$

Napomenimo da je u ovom slučaju potrebno sistem jednačina

(1.1.2) predstaviti u vektorskom obliku

$$\vec{y}' = \vec{f}(x,\vec{y}), \quad \vec{y}(x_o) = \vec{y}_o, \tag{1.1.3}$$

gde su

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad \vec{y}_o = \begin{bmatrix} y_{1o} \\ \vdots \\ y_{mo} \end{bmatrix}, \quad \vec{f}(x,\vec{y}) = \begin{bmatrix} f_1(x;y_1,\dots,y_m) \\ \vdots \\ f_m(x;y_1,\dots,y_m) \end{bmatrix}.$$

Od interesa je i rešavanje Cauchyevog problema za diferencijalne jednačine višeg reda. Primetimo, medjutim, da se ovaj problem može svesti na prethodni. Naime, neka je data diferencijalna jednačina reda $m$

$$y^{(m)} = f(x;y,y',\dots,y^{(m-1)}) \tag{1.1.4}$$

sa početnim uslovima

$$y^{(i)}(x_o) = y_{io} \qquad (i=0,1,\dots,m-1). \tag{1.1.5}$$

Tada se, supstitucijama

$$z_1 = y, \quad z_2 = y', \dots, \quad z_m = y^{(m-1)},$$

jednačina (1.1.4) sa uslovima (1.1.5), svodi na sistem

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2, \\ z_2' &= z_3, \\ &\vdots \\ z_{m-1}' &= z_m, \\ z_m' &= f(x;z_1,z_2,\dots,z_m), \end{aligned}$$

sa uslovima

$$z_i(x_o) = z_{io} = y_{i-1,o} \quad (i=1,\dots,m).$$

Iz standardnih kurseva matematičke analize, koji obradjuju obične diferencijalne jednačine, poznato je da se većina jednačina ne može integraliti pomoću elementarnih funkcija u konačnom obliku. Medjutim, u praksi, najčešće, nije ni potrebno takvo rešenje, pa se iz tih razloga pristupa približnom rešavanju.

Metodi za približno rešavanje mogu biti analitički i numerički.

Posmatrajmo, na primer, diferencijalnu jednačinu

$$y' = 2xy + \frac{1}{1+x^2}$$

Opšte rešenje ove jednačine je

$$y = e^{x^2}\int \frac{e^{-x^2}}{1+x^2}\,dx + Ce^{x^2},$$

gde je C proizvoljna konstanta, dok je rešenje koje zadovoljava uslov $y(x_0)=y_0$ dato sa

$$y = e^{x^2}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{-t^2}}{1+t^2}\,dt + y_0 e^{x^2-x_0^2}.$$

Primenjujući numeričku integraciju na integral u poslednjoj formuli, dobićemo numeričko rešenje za datu jednačinu.

Pre nego što predjemo na izučavanje približnih metoda za rešavanje diferencijalnih jednačina, razmotrićemo neke probleme vezane za egzistenciju i jedinstvenost rešenja diferencijalnih jednačina. Pri ovome biće nam potrebno sledeće uopštenje Banachovog stava (teorema 1.2.1 iz treće glave).

<u>Teorema 1.1.1.</u> Ako je X Banachov prostor, $T:X\to X$ neprekidni operator, i ako $A=T^n$ predstavlja kontrakciju, tada jednačina

$$Tu = u$$

ima jedno i samo jedno rešenje.

Dokaz. Neka je a nepokretna tačka operatora A, tj. neka je $Aa=a$. Konstruišimo niz $\{A^k u_o\}_{k\in N_o}$, gde $u_o \in X$. Kako je A kontrakcija važi

$$a = \lim_{k\to+\infty} A^k u_o .$$

S druge strane, zbog neprekidnosti operatora T imamo

$$Ta = \lim_{k\to+\infty} A^k T u_o .$$

S obzirom da je A kontrakcija (videti definiciju 1.2.1 iz 3. glave) iz

$$\| A^k Tu_o - A^k u_o \| \le q \| A^{k-1} Tu_o - A^{k-1} u_o \| \le \dots \le q^k \| Tu_o - u_o \| \quad (0 \le q < 1)$$

sleduje

$$\lim_{k\to+\infty} \| A^k Tu_o - A^k u_o \| = 0 ,$$

tj. $Ta=a$.

Kako je svaka nepokretna tačka operatora T, nepokretna i u odnosu na kontrakciju $T^n$, to iz teoreme 1.2.1 (3. glava) izlazi da operator T ima jednu i samo jednu nepokretnu tačku, koja je rešenje jednačine $Tu=u$.

Napomenimo da navedena teorema važi i u slučaju kada T zadovoljava zahtevane uslove na nekom zatvorenom delu $D(\subset X)$, ukoliko $T:D \to D$.

Predjimo sada na pitanje egzistencije i jedinstvenosti rešenja diferencijalnih jednačina.

Neka je $D = \{(x,y) \mid |x-x_o| \le \alpha,\ |y-y_o| \le \beta\}$.

Definicija 1.1.1. Funkcija $(x,y) \mapsto f(x,y)$ zadovoljava Lipschitz-ov uslov po y u oblasti D, ako postoji nenegativna konstanta L takva da je

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1-y_2| ,$$

za svako $(x,y_1)$ i $(x,y_2)$ iz D.

Primetimo da funkcija f zadovoljava Lipschitzov uslov, ako $\frac{\partial f}{\partial y}$ egzistira na D i ako je ograničen. Zaista, na osnovu Lagrangeove teoreme o srednjoj vrednosti imamo

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = (y_1 - y_2)\,\frac{\partial f(x,c)}{\partial y}\,,$$

gde je c izmedju $y_1$ i $y_2$, odakle, pod pretpostavkom

$$\frac{\partial f}{\partial y} \leqq L \qquad (\forall (x,y)\in D)\,,$$

sleduje

$$|f(x,y_1 - f(x,y_2)| \leqq L|y_1-y_2|\,.$$

Sledeća teorema daje uslove za egzistenciju jedinstvenog rešenja Cauchyevog problema (1.1.1).

Teorema 1.1.2. Neka su ispunjeni uslovi:

$1^o$ f neprekidna funkcija na D i $|f(x,y)| \leqq M$;

$2^o$ f zadovoljava Lipschitzov uslov na D;

$3^o$ $h \leqq \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$.

Tada u $I=[x_o-h,\ x_o+h]$ postoji jedinstveno rešenje Cauchyevog problema (1.1.1).

Dokaz. Integracijom (1.1.1) dobijamo

$$y(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(t,y(t))dt\,. \tag{1.1.6}$$

U prostoru C(I) uočimo njegov zatvoreni deo A za koji je $\max\limits_{x\in I} |y(x)-y_o| \leqq \beta$ i definišimo preslikavanje T pomoću

$$Ty = y_o + \int_{x_o}^{x} f(t,y(t))dt \qquad (y\in A)\,.$$

Primetimo da je ovo preslikavanje neprekidno.

Dokažimo, najpre, da $T$ preslikava $A$ u $A$.

Neka $x \in I$ i $y \in A$ $(\subset C(I))$. Tada je očigledno $Ty \in C(I)$. Štaviše, zbog uslova $1^\circ$ i $3^\circ$, imamo

$$|Ty-y_o| = \left|\int_{x_o}^{x} f(t,y(t)dt\right| \leqq M|x-x_o| \leqq Mh \leqq \beta,$$

tj. $Ty \in A$.

Dokažimo sada da je neki stepen preslikavanja $T$ kontrakcija. Neka $y_1, y_2 \in A$. Tada je za $x \in I$ na osnovu uslova $2^\circ$,

$$|Ty_1-Ty_2| = \left|\int_{x_o}^{x} (f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))dt\right|,$$

tj.

$$|Ty_1-Ty_2| \leqq L\left|\int_{x_o}^{x} |y_1(t) - y_2(t)|dt\right|$$

$$\leqq L|x-x_o|\max_{t\in I}|y_1(t) - y_2(t)|,$$

odakle dalje sleduje

$$|T^2y_1 - T^2y_2| \leqq L^2\frac{|x-x_o|^2}{2}\|y_1 - y_2\|,$$

ali i

$$(1.1.7) \qquad |T^ny_1 - T^ny_2| \leqq L^n\frac{|x-x_o|^n}{n!}\|y_1 - y_2\|,$$

gde je $\|y\| = \max_{t\in I}|y(t)|$.

Uzimajući maksimum (po $x \in I$) leve i desne strane u nejednakosti (1.1.7), dobijamo

$$\|T^ny_1 - T^ny_2\| \leqq \frac{L^nh^n}{n!}\|y_1 - y_2\|.$$

Kako se može izabrati broj $n$ dovoljno veliki, tako da je

$$\frac{(Lh)^n}{n!} < 1,$$

zaključujemo da je $T^n$ kontrakcija.

S obzirom da je A zatvoreni skup u C(I), iz prethodnog sleduje da su svi uslovi za primenu teoreme 1.1.1 zadovoljeni, na osnovu koje zaključujemo da integralna jednačina (1.1.6), tj. Cauchyev problem (1.1.1) ima jedinstveno rešenje.

Ovim je dokaz teoreme završen.

Sličan rezultat se može dokazati i za opštiji slučaj, tj. za Cauchyev problem (1.1.3).

Neka je $G = \{(x,y) \mid |x-x_o| \leq \alpha,\ \| y-y_o\| \leq \beta\}$, gde je $\|\cdot\|$ norma vektora u $R^m$ (videti odeljak 4.1.6).

Teorema 1.1.3. Neka je funkcija $f: R \times R^m \to R^m$ na G neprekidna i $\| f(x,y)\| \leq M$. Sem toga, neka $f$ zadovoljava Lipschitzov uslov, tj. neka je

$$\|\vec{f}(x,\vec{y}_1) - \vec{f}(x,\vec{y}_2)\| \leq L\| \vec{y}_1 - \vec{y}_2\|$$

za svako $(x,\vec{y}_1)$ i $(x,\vec{y}_2)$ iz G. Tada Cauchyev problem (1.1.3) ima jedinstveno rešenje u oblasti

$$|x - x_o| \leq \min(\alpha, \frac{\beta}{M}).$$

Primer 1.1.1. Posmatrajmo problem

$$(1.1.8) \qquad y' = y^{1/3}, \quad y(0) = 0 .$$

Lako se pokazuje

$$|f(x,y)| = |y^{1/3}| \leq 1 \qquad (0 \leq x \leq 1, \quad |y| \leq 1).$$

Kako $f$ ne zadovoljava Lipschitzov uslov po $y$, jer

$$\frac{|f(x,y_1) - f(x,y_2)|}{|y_1 - y_2|} = \frac{|y_1^{1/3} - y_2^{1/3}|}{|y_1 - y_2|} = \frac{1}{|y_1^{2/3} + y_1^{1/3}y_2^{1/3} + y_2^{2/3}|}$$

može postati proizvoljno veliko kada su $y_1$ i $y_2$ dovoljno mali, na osnovu teoreme 1.1.2 zaključujemo da problem (1.1.8) nema jedinstveno rešenje. Primetimo, medjutim, da je za svako $a \in [0,1]$ funkcija

$$x \mapsto y_a(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le a), \\ \left(\frac{2}{3}(x-a)\right)^{3/2} & (a < x \le 1) \end{cases}$$

rešenje datog problema.

Teorema 1.1.4. Ako je $(x,y) \mapsto f(x,y)$ analitička funkcija u $(x_o,y_o)$ tada za $\delta$ dovoljno malo postoji jedinstveno rešenje $x \mapsto y(x)$ koje je analitičko za $x_o - \delta \le x \le x_o + \delta$ i koje zadovoljava Cauchyev problem (1.1.1). Ako je $f$ analitička za svako $x$ i $y$, tada je svako rešenje problema (1.1.1) analitičko.

## 8.1.2. Taylorov metod

Taylorov metod spada u grupu približnih metoda za rešavanje Cauchyevog problema

$$y' = f(x,y), \quad y(x_o) = y_o, \tag{1.2.1}$$

koji daju rešenje u analitičkom obliku.

Neka je funkcija $(x,y) \mapsto f(x,y)$ analitička u tački $(x_o,y_o)$. Tada na osnovu teoreme 1.1.4, postoji jedinstveno rešenje $x \mapsto y(x)$ koje je analitičko u $x_o$. Drugim rečima, $y$ ima u okolini $x_o$ izvode proizvoljnog reda pa je

$$y(x) = y(x_o) + (x-x_o)y'(x_o) + \frac{1}{2!}(x-x_o)^2 y''(x_o) + \dots \tag{1.2.2}$$

Na osnovu (1.2.1) možemo izračunati potrebne izvode $y^{(i)}(x_o)$ $(i=1,2,\dots)$. Naime, imamo redom

$$y(x_o) = y_o,$$

$$y'(x_o) = f(x_o,y_o),$$

$$y''(x_o) = \left[\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{x=x_o,y=y_o}$$

$$= \frac{\partial f(x_o,y_o)}{\partial x} + f(x_o,y_o)\frac{\partial f(x_o,y_o)}{\partial y}, \text{ itd.}$$

Primer 1.2.1. Za problem

$$(1.2.3) \qquad y' = x^2 + y^2 , \quad y(0) = 1,$$

sukcesivnim diferenciranjem dobijamo

$$\begin{aligned}
y' &= x^2 + y^2 , & y_o' &= x_o^2 + y_o^2 = 1 ,\\
y'' &= 2x + 2yy' , & y_o'' &= 2x_o + 2y_oy_o' = 2 ,\\
y''' &= 2 + 2yy'' + 2y'^2 , & y_o''' &= 2 + 2y_oy_o'' + 2y_o'^2 = 8 ,\\
y^{IV} &= 2yy''' + 6y'y'' , & y_o^{IV} &= 2y_oy_o''' + 6y_o'y_o'' = 28 ,
\end{aligned}$$

gde smo stavili $y_o^{(i)} = y^{(i)}(x_o)$.

Zamenom dobijenih vrednosti u (1.2.2) dobijamo

$$y(x) = 1 + x + 2\frac{x^2}{2!} + 8\frac{x^3}{3!} + 28\frac{x^4}{4!} + \dots ,$$

tj.

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 + \dots .$$

## 8.1.3. Metod neodredjenih koeficijenata

Za razliku od Taylorovog metoda, ovde rešenje problema (1.2.1) tražimo u obliku

$$(1.3.1) \qquad y(x) = a_o + a_1(x-x_o) + a_2(x-x_o)^2 + \dots ,$$

gde nepoznate koeficijente $a_k$ $(k=0,1,\dots)$ formalno odredjujemo iz uslova da (1.3.1) zadovoljava problem (1.2.1). Očigledno je $a_o=y_o$.

Primer 1.3.1. Metodom neodredjenih koeficijenata rešimo problem (1.2.3). Kako je $x_o=0$ i $y_o=1$ imamo

$$y(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

i

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots ,$$

odakle zamenom u (1.2.3) dobijamo

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\dots = x^2+(1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots)^2 ,$$

tj.

$$(a_1-1)+(2a_2-2a_1)x+(3a_3-1-2a_2-a_1^2)x^2+(4a_4-2a_3-2a_1a_2)x^3+\dots = 0 .$$

Iz poslednjih jednakosti sleduje

$$a_1=1,\ a_2=a_1=1,\ a_3=\tfrac{1}{3}(1+2a_2+a_1^2)=\tfrac{4}{3},\ a_4=\tfrac{1}{4}(2a_3+2a_1a_2)=\tfrac{7}{6},\ \text{itd.}$$

Dakle,

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 + \dots .$$

## 8.1.4. Picardov metod sukcesivnih aproksimacija

Kao što je poznato iz odeljka 8.1.1, Cauchyev problem

$$(1.4.1) \qquad y' = f(x,y), \quad y(x_o) = y_o$$

se može formulisati i u integralnom obliku

$$y(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(t,y(t))dt .$$

Picardov metod sukcesivnih aproksimacija sastoji se u generisanju niza funkcija $\{y^{[s]}(x)\}_{s\in N_o}$ pomoću iterativnog procesa

$$(1.4.2) \qquad y^{[s+1]}(x) = Ty^{[s]}(x) \qquad (s=0,1,\dots),$$

gde je operator T definisan pomoću

$$Ty(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(t,y(t))dt .$$

Najčešće se uzima $y^{[o]}(x)=y_o$, mada je bolje uzeti, na primer, neki konačan odsečak Taylorovog razvoja traženog rešenja.

Pod uslovima iz teoreme 1.1.2, iterativni proces (1.4.2) konvergira ka jedinstvenom rešenju $x\mapsto y(x)$ problema (1.4.1), tj. važi $\lim\limits_{s\to+\infty} y^{[s]}(x)=y(x) \quad (x\in I)$.

Sledeća teorema daje ocenu greške kod Picardovog metoda.

Teorema 1.4.1. Neka su ispunjeni uslovi teoreme 1.1.2 i neka se niz $\{y^{[s]}(x)\}_{s\in N}$ generiše pomoću (1.4.2) polazeći od $y^{[o]}(x)=y_o$. Tada je za svako $x\in I$

$$|y^{[s]}(x) - y(x)| \leqq ML^s \frac{|x-x_o|^{s+1}}{(s+1)!} \qquad (s=0,1,\ldots). \tag{1.4.3}$$

Dokaz. Uvedimo oznaku $e_s(x)=|y^{[s]}(x)-y(x)| \quad (x\in I)$. Kako je

$$y^{[s+1]}(x) - y(x) = T(y^{[s]}(x) - y(x))$$

imamo

$$e_{s+1}(x) \leqq \left| \int_{x_o}^{x} |f(t,y^{[s]}) - f(t,y)|dt \right| ,$$

tj.

$$e_{s+1}(x) \leqq L\left| \int_{x_o}^{x} e_s(t)dt \right| , \tag{1.4.4}$$

s obzirom da $f$ zadovoljava Lipschitzov uslov.

S druge strane, na osnovu Lagrangeove formule imamo

$$e_o(x)=|y^{[o]}(x)-y(x)|=|y(x_o)-y(x)|=|y'(\xi)|\cdot|x-x_o| , \tag{1.4.5}$$

gde je $\xi$ neka tačka izmedju $x_o$ i $x$. Kako je $|y'(\xi)| = |f'(\xi,y(\xi))| \leqq M$ (uslov $1^o$ u teoremi 1.1.2), iz (1.4.5) sleduje

$$e_o(x) \leqq M|x-x_o|.$$

Polazeći od poslednje nejednakosti, na osnovu (1.4.4) sukcesivno nalazimo

$$e_1(x) \leqq L\left|\int_{x_o}^{x} e_o(t)dt\right| \leqq ML\left|\int_{x_o}^{x}|t-x_o|dt\right| = ML\,\frac{|x-x_o|^2}{2!},$$

$$e_2(x) \leqq L\left|\int_{x_o}^{x} e_1(t)dt\right| \leqq ML^2\left|\int_{x_o}^{x}\frac{(t-x_o)^2}{2!}dt\right| = ML^2\,\frac{|x-x_o|^3}{3!},$$

$$\vdots$$

$$e_s(x) \leqq ML^s\,\frac{|x-x_o|^{s+1}}{(s+1)!},$$

čime je dokaz teoreme završen.

Primetimo da iz (1.4.3) sleduje

$$\lim_{s\to+\infty}|y^{[s]}(x)-y(x)| = 0 \qquad (x\in I).$$

<u>Primer 1.4.1</u>. Primenimo Picardov metod na rešavanje problema iz primera 1.2.1.

Neka je $y^{[o]}(x)=1$. Tada je

$$y^{[1]}(x) = 1+\int_o^x (t^2+1)dt = 1+x+\frac{1}{3}x^3,$$

$$y^{[2]}(x) = 1+\int_o^x (t^2+(1+t+\frac{1}{3}t^3)^2)dt$$

$$= 1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4+\frac{2}{15}x^5+\frac{1}{63}x^7,$$

itd. Primetimo da se aproksimacija $y^{[2]}(x)$ poklapa sa Taylorovim razvojem u prva tri člana. Ocenimo sada grešku ove aproksimacije pomoću (1.4.3). Kako je funkcija $(x,y)\mapsto f(x,y)=x^2+y^2$ definisana i neprekidna za svako $(x,y)\in R^2$, to za $\alpha$ i $\beta$ možemo izabrati proizvoljne brojeve. Uzmimo, na primer, $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$. Tada je

$$D = \{(x,y) \mid |x| \leqq \tfrac{1}{2},\ |y-1| \leqq \tfrac{1}{2}\},$$

$$M = \max_{(x,y)\in D} |f(x,y)| = (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{3}{2})^2 = \tfrac{5}{2},$$

$$L = \max_{(x,y)\in D} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = 2\cdot\frac{3}{2} = 3 .$$

S obzirom na nejednakost $h \leqq \min(\alpha, \frac{\beta}{M}) = \frac{1}{5}$, izaberimo $h=0.2$. Tada je, saglasno (1.4.3), za svako $x\in I=[-0.2,0.2]$

$$|x^{[2]}(x)-y(x)| \leqq \frac{5}{2}\cdot 3^2\ \frac{|x|^3}{6} = 3.75|x|^3,$$

tj.

$$\max_{x\in I} |y^{[2]}(x) - y(x)| \leqq 3.75\cdot(0.2)^3 = 0.03 .$$

Ocena greške po formuli (1.4.3) u mnogim slučajevima može biti komplikovana. Jedan praktični kriterijum za prekidanje iterativnog procesa (1.4.2) je

$$|y^{[s+1]}(x) - y^{[s]}(x)| \leqq \varepsilon \qquad (x\in I),$$

gde je $\varepsilon$ unapred zadata tačnost.

Picardov metod sukcesivnih aproksimacija može se primeniti i na sistem jednačina (1.1.3), predstavljajući prethodno ovaj sistem u integralnom obliku

$$\vec{y} = \vec{y}_o + \int_{x_o}^{x} \vec{f}(t,\vec{y})dt ,$$

gde je

$$\int_{x_o}^{x} \vec{f}(t,\vec{y})dt = \left[ \int_{x_o}^{x} f_1\, dt \ \cdots \int_{x_o}^{x} f_m\, dt \right]^T .$$

Tada je Picardov metod dat pomoću

$$\vec{y}^{[s+1]} = \vec{y}_o + \int_{x_o}^{x} \vec{f}(t,\vec{y}^{[s]})dt \qquad (s=0,1,\ldots),$$

gde se za $\vec{y}^{[o]}$ može uzeti, na primer, $\vec{y}_o$.

Primer 1.4.2. Primenimo Picardov metod sukcesivnih aproksimacija na Cauchyev problem

$$\text{(1.4.6)}\qquad \begin{aligned} y' &= xy + z, & y(0) &= 0 \\ z' &= y + xz, & z(0) &= 1. \end{aligned}$$

Stavimo

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} xy + z \\ y + xz \end{bmatrix}, \quad \vec{y}(0) = \vec{y}_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Polazeći od $\vec{y}^{[o]} = \vec{y}_o$, dobijamo

$$\vec{y}^{[1]} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_o^x (t\cdot 0+1)dt \\ \int_o^x (0+t\cdot 1)dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 1 + \frac{1}{2}x^2 \end{bmatrix},$$

$$\vec{y}^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_o^x (t\cdot t+(1+\frac{1}{2}t^2))dt \\ \int_o^x (t+t(1+\frac{1}{2}t^2)\,dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \frac{1}{2}x^3 \\ 1 + x^2 + \frac{1}{8}x^4 \end{bmatrix},$$

$$\vec{y}^{[3]} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_o^x (t + \frac{1}{2}t^3) + 1 + t^2 + \frac{1}{8}t^4)dt \\ \int_o^x (t+\frac{1}{2}t^3+t(1+t^2+\frac{1}{8}t^4))dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^5 \\ 1+x^2+ \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{48}x^6 \end{bmatrix},$$

itd. Primetimo da se za $\vec{y}^{[0]}$ može uzeti bolja aproksimacija nego što je $\vec{y}_0$. Naime, kako iz (1.4.6) sleduje

$$y'(0) = 1 \quad \text{i} \quad z'(0) = 0\,,$$

to se može uzeti

$$\vec{y}^{[0]} = \begin{bmatrix} y(0) + y'(0)x \\ z(0) + z'(0)x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Oblast primene Picardovog metoda teorijski je mnogo šira nego kod Taylorovog metoda, s obzirom da se ne zahteva uslov analitičnosti funkcije $f$. Medjutim, veliki nedostatak ovog metoda, koji ga često čini praktično neprimenljivim, sastoji se u potrebi za izračunavanjem sve komplikovanijih integrala (sa porastom broja iteracija $s$).

Jednu modifikaciju Picardovog metoda, kod koje je eliminisan problem izračunavanja komplikovanih integrala, dao je K. Orlov ([27]) i ona se sastoji u konstrukciji niza $\{\overset{*}{y}^{[s]}\}_{s\in N}$ pomoću

$$\overset{*}{y}^{[s+1]} = y_0 + \int_{x_0}^{x} \overline{f(t,\overset{*}{y}^{[s]})}^{(s+1)}\, dt \qquad (s=0,1,\ldots),$$

polazeći od $\overset{*}{y}^{[0]} = y_0$. Simbol $\overline{f(x,y^{[s]})}^{(s+1)}$ označava da funkciju $f$ treba razviti u Taylorov red po stepenima od $x-x_0$ i pri tome zadržati samo prvih $s+1$ članova. Jasno je da ovaj postupak zahteva analitičnost funkcije $f$ u okolini $x=x_0$, $y=y_0$.

<u>Primer 1.4.3</u>. Neka je dat Cauchyev problem

$$y' = 1 + x^3y^2 - x^{13}y\,, \qquad y(0) = 0\,.$$

Primenom modifikovanog Picardovog metoda dobijamo redom

$$y_0 = 0\,, \qquad \overset{*}{y}^{[0]} = 0\,;$$

$$f(x,\overset{*}{y}^{[0]}) = 1\,, \quad \overline{f(x,\overset{*}{y}^{[0]})}^{\,1} = 1, \quad \overset{*}{y}^{[1]} = \int_0^x dt = x\ ;$$

$$f(x,\overset{*}{y}^{[1]}) = 1 + x^5 - x^{14}, \quad \overline{f(x,\overset{*}{y}^{[1]})}^{\,2} = 1 + x^5,$$

$$\overset{*}{y}^{[2]} = \int_0^x (1 + t^5)dt = x + \frac{1}{6}x^6\ ;$$

$$f(x,\overset{*}{y}^{[2]}) = 1 + x^3(x+\frac{1}{6}x^6)^2 - x^{13}(x+\frac{1}{6}x^6)$$

$$= 1 + x^5 + \frac{1}{3}x^{10} - x^{14} + \frac{1}{36}x^{15} - \frac{1}{6}x^{19},$$

$$\overline{f(x,\overset{*}{y}^{[2]})}^{\,3} = 1 + x^5 + \frac{1}{3}x^{10},$$

$$\overset{*}{y}^{[3]} = \int_0^x (1 + t^5 + \frac{1}{3}t^{10})dt = x + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{33}x^{11}.$$

## 8.2. LINEARNI VIŠEKORAČNI METODI

U ovom poglavlju počinjemo razmatranje metoda za numeričko rešavanje Cauchyevog problema za diferencijalne jednačine prvog reda. Dve opšte klase takvih metoda su:

a) Linearni visekoračni metodi,

b) Metodi Runge-Kutta.

Prva klasa metoda poseduje osobinu linearnosti za razliku od metoda Runge-Kutta kod kojih se povećavanje reda metoda ostvaruje uvodjenjem nelinearnosti. Zajednički "predak" ove dve klase je Eulerov metod, koji pripada i jednoj i drugoj klasi metoda.

Prvi odeljak u ovom poglavlju je posvećen Eulerovom metodu, dok se u ostalim odeljcima razmatra opšta klasa linearnih višekoračnih metoda. Metodi Runge-Kutta se razmatraju u trećem poglavlju.

U novije vreme pojavio se i čitav niz metoda, tzv. hibridnih metoda, koji koriste dobre karakteristike navedenih osnovnih klasa metoda.

## 8.2.1. Eulerov metod

Eulerov metod je najprostiji numerički metod za rešavanje Cauchyevog problema

(2.1.1) $$y' = f(x,y), \quad y(x_o) = y_o \, ,$$

i bazira se na približnoj jednakosti

$$y(x) \approx y(x_o) + (x-x_o)y'(x_o),$$

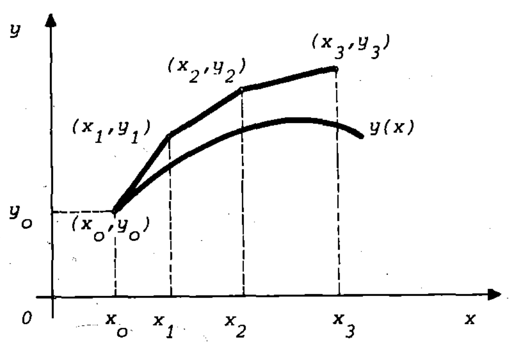
koja se svodi na

(2.1.2) $$y(x) \approx y(x_o) + (x-x_o)f(x_o,y_o) \, ,$$

s obzirom na (2.1.1). Ako sa $y_1$ označimo približnu vrednost za $y(x_1)$, na osnovu (2.1.2) imamo

$$y_1 = y_o + (x_1-x_o)f(x_o,y_o) \, .$$

U opštem slučaju, za proizvoljan skup tačaka $x_o < x_1 < x_2 < \ldots$, približne vrednosti za $y(x_n)$, u oznaci $y_n$, možemo




Sl. 2.1.1

odrediti pomoću

(2.1.3) $$y_{n+1} = y_n + (x_{n+1} - x_n)f(x_n, y_n) \qquad (n=0,1,\ldots).$$

Poslednja formula definiše Eulerov metod, čija je geometrijska interpretacija data na Sl. 2.1.1.

Poligonalna linija $(x_o,y_o) - (x_1,y_1) - (x_2,y_2) - \ldots$ poznata je kao Eulerov poligon*.

Najčešće se tačke $x_n$ biraju ekvidistantno, tj. $x_{n+1} - x_n = h = \mathrm{const}(>0)$ $(n=0,1,\ldots)$ i u tom slučaju (2.1.3) se svodi na

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \qquad (n=0,1,\ldots).$$

Primenimo sada Eulerov metod na rešavanje model-problema†

(2.1.4) $$y' + Ay = 0\,, \quad y(0) = y_o \qquad (A = \mathrm{const})$$

na segmentu $[0,1]$.

Segment $[0,1]$ podelimo na N podsegmenta dužine $h = \frac{1}{N}$, tako da je $|Ah| < 1$ i $x_n = nh$ $(n=0,1,\ldots,N)$. Prema Eulerovom metodu imamo

$$y_{n+1} = y_n + h(-Ay_n) \qquad (n=0,1,\ldots),$$

tj.

$$y_{n+1} = (1-Ah)y_n \qquad (n=0,1,\ldots).$$

Iz poslednje diferencne jednačine sleduje

$$y_n = (1-Ah)^n y_o = (1-Ah)^{x_n/h} y_o \qquad (n=1,2,\ldots).$$

S druge strane, tačno rešenje problema (2.1.4) je dato sa $y(x)=y_o e^{-Ax}$, odakle je

$$y(x_n) = y_o e^{-Ax_n}.$$

Kako je, pri $|Ah| < 1$,

---

* *Naziva se i Euler-Cauchyev poligon.*

† *Problem (2.1.4) se naziva model-problem, s obzirom da se koristi za testiranje karakteristika numeričkih metoda.*

$$
\begin{aligned}
(1-Ah)^{x_n/h} &= \exp\left(\frac{x_n}{h}\log(1-Ah)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{x_n}{h}(Ah+\frac{1}{2}A^2h^2+O(h^3))\right) \\
&= \exp(-Ax_n)\exp(-\tfrac{1}{2}A^2hx_n)\exp(O(h^2)) \\
&= \exp(-Ax_n)\cdot(1-\tfrac{1}{2}A^2hx_n+O(h^2))(1+O(h^2)) \\
&= \exp(-Ax_n)\cdot(1-\tfrac{1}{2}A^2hx_n)+O(h^2),
\end{aligned}
$$

imamo

$$y_n = y_o(1-\tfrac{1}{2}A^2hx_n)\exp(-Ax_n) + O(h^2),$$

dok je odgovarajuća greška data sa

$$e(x_n) = y(x_n) - y_n = \tfrac{1}{2}A^2hy_ox_n\exp(-Ax_n) + O(h^2) .$$

Dakle, $e(x_n)\to 0$, kada $h\to 0$, pri čemu ovu konvergenciju treba shvatiti u smislu da $x_n(=nh)$ ostaje konstantno kada $h\to 0$. Da ne bi došlo do zabune pišemo

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ x_n=nh=\text{const}}} e(x_n) = 0 .$$

Problemu konvergencije biće posvećen odeljak 8.2.3.

## 8.2.2. Opšti linearni višekoračni metod

U ovom i narednim odeljcima ovog poglavlja razmatraćemo jednu opštu klasu metoda za rešavanje Cauchyevog problema

$$(2.2.1) \qquad y' = f(x,y), \quad y(x_o) = y_o \qquad (x_o \leqq x \leqq b),$$

pretpostavljajući pritom da funkcija $f$ ispunjava uslove kao u teoremi 1.1.2, što obezbedjuje jedinstveno neprekidno-diferencijabilno rešenje $x\mapsto y(x)$ problema (2.2.1).

Ako segment $[x_o,b]$ podelimo na $N$ podsegmenta dužine $h=\frac{b-x_o}{N}$, dobijamo niz tačaka $\{x_n\}$ odredjen sa

$$x_n = x_o + nh \qquad (n=0,1,\ldots,N).$$

Neka $\{y_n\}$ označava niz približnih vrednosti rešenja problema (2.2.1) u tačkama $x_n$ i neka je $f_n \equiv f(x_n,y_n)$. Pred nama se postavlja problem odredjivanje niza $\{y_n\}$. Za rešavanje ovog problema razradjen je veliki broj metoda. Jedan od ovih metoda je i Eulerov metod koji je razmatran u prethodnom odeljku. Kod Eulerovog metoda niz $\{y_n\}$ se izračunava rekurzivno pomoću

(2.2.2) $$y_{n+1} - y_n = hf_n \quad (n=0,1,\ldots),$$

pri čemu postoji linearna veza izmedju $y_n$, $y_{n+1}$ i $f_n$. U opštem slučaju za izračunavanje niza $\{y_n\}$ mogu se koristiti složenije rekurentne relacije, nego što je (2.2.2). Medju metodima, koji proističu iz ovih relacija, važnu ulogu igraju metodi kod kojih postoji linearna veza izmedju $y_{n+i}$, $f_{n+i}$ $(i=0,1,\ldots,k)$ i oni čine klasu tzv. linearnih višekoračnih metoda*.

Opšti linearni višekoračni metod može se predstaviti u obliku

(2.2.3) $$\sum_{i=o}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=o}^{k} \beta_i f_{n+i} \quad (n=0,1,\ldots),$$

gde su $\alpha_i$ i $\beta_i$ konstantni koeficijenti odredjeni sa tačnošću do na multiplikovanu konstantu. Da bismo obezbedili njihovu jednoznačnost uzećemo $\alpha_k=1$.

Ako je $\beta_k=0$, kažemo da je metod (2.2.3) otvorenog tipa ili da je eksplicitan; u protivnom metod je zatvorenog tipa ili implicitan.

U opštem slučaju (2.2.3) predstavlja nelinearnu diferencnu jednačinu, s obzirom da je $f_{n+i} \equiv f(x_{n+i}, y_{n+i})$.

Za odredjivanje niza $\{y_n\}$, primenom metoda (2.2.3) potrebno je poznavanje startnih vrednosti $y_i$ $(i=0,1,\ldots,k-1)$. Kako nam je unapred poznata jedino vrednost $y_o$, poseban problem u primeni višekoračnih metoda (2.2.3) predstavlja odredjivanje ostalih startnih vrednosti. Ovom problemu biće posvećen poseban odeljak.

Pod pretpostavkom da su poznate startne vrednosti $y_i(i=0,1,\ldots,k-1)$, kod eksplicitnih metoda direktno se izračunavaju $y_k$, $y_{k+1},\ldots,y_N$ pomoću

* *Na engleskom: multistep method.*

$$y_{n+k}=h\sum_{i=0}^{k-1}\beta_i f_{n+i}-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i y_{n+i}\quad (n=0,1,\ldots,N-k).$$

Medjutim, kod implicitnih metoda za odredjivanje vrednosti $y_{n+k}$ treba rešiti jednačinu

$$(2.2.4)\qquad y_{n+k}=h\beta_k f(x_{n+k},y_{n+k})+\phi,$$

gde je

$$\phi=h\sum_{i=0}^{k-1}\beta_i f_{n+i}-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i y_{n+i}.$$

Kada je $(x,y)\mapsto f(x,y)$ nelinearna funkcija koja zadovoljava Lipschitzov uslov po $y$ sa konstantom $L$, jednačina (2.2.4) se može rešiti iterativnim procesom

$$(2.2.5)\qquad y_{n+k}^{[s+1]}=h\beta_k f(x_{n+k},y_{n+k}^{[s]})+\phi\quad (s=0,1,\ldots),$$

polazeći od proizvoljne vrednosti $y_{n+k}^{[o]}$, ako je

$$h|\beta_k|L<1.$$

Uslov dat ovom nejednakošću obezbedjuje konvergenciju iterativnog procesa (2.2.5).

Za metod (2.2.3) definišimo linearni diferencni operator $L_h : C^1[x_o,b]\to C[x_o,b]$ pomoću

$$(2.2.6)\qquad L_h[y]=\sum_{i=0}^{k}\left[\alpha_i\, y(x+ih)-h\beta_i\, y'(x+ih)\right].$$

Neka funkcija $g\in C^\infty[x_o,b]$. Tada se $L_h[g]$ može predstaviti u obliku

$$(2.2.7)\qquad L_h[g]=C_o g(x)+C_1 hg'(x)+C_2h^2g''(x)+\ldots,$$

gde su $C_j\,(j=0,1,\ldots)$ konstante, koje ne zavise od $h$ i $g$.

Definicija 2.2.1. Linearni višekoračni metod (2.2.3) ima red $p$ ako je u razvoju (2.2.7)

$$C_o=C_1=\ldots=C_p=0\quad \text{i}\quad C_{p+1}\neq 0.$$

Razvijanjem funkcija $x\mapsto g(x+ih)$ i $x\mapsto g'(x+ih)$ u Taylorov red u okolini tačke $x$, lako se dobija (2.2.7). Za konstante $C_j$ dobija se redom

$$C_o = \alpha_o + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k,$$

$$\text{(2.2.8)} \quad C_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + k\alpha_k - (\beta_o + \beta_1 + \ldots + \beta_k),$$

$$C_j = \frac{1}{j!}(\alpha_1 + 2^j\alpha_2 + \ldots + k^j\alpha_k) - \frac{1}{(j-1)!}(\beta_1 + 2^{j-1}\beta_2 + \ldots + k^{j-1}\beta_k)$$

$$(j=2,3,\ldots).$$

Primer 2.2.1. Za k=2, konstruišimo implicitni metod oblika (2.2.3) koji ima maksimalni red i koji sadrži jedan proizvoljan parametar. Neka je $\alpha_o=a$ proizvoljan parametar i $\alpha_2=1$. Nepoznate koeficijente $\alpha_1$, $\beta_o$, $\beta_1$, $\beta_2$ odredimo iz uslova da se dobije maksimalni red, tj. iz uslova $C_o=C_1=C_2=C_3=0$. Rešavanjem sistema jednačina

$$C_o = a + \alpha_1 + 1 = 0,$$

$$C_1 = \alpha_1 + 2 - (\beta_o + \beta_1 + \beta_2) = 0,$$

$$C_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 4) - (\beta_1 + 2\beta_2) = 0,$$

$$C_3 = \frac{1}{6}(\alpha_1 + 8) - \frac{1}{2}(\beta_1 + 4\beta_2) = 0$$

dobijamo

$$\alpha_1 = -(1 + a), \quad \beta_o = -\frac{1}{12}(1 + 5a), \quad \beta_1 = \frac{2}{3}(1 - a),$$

$$\beta_2 = \frac{1}{12}(5 + a),$$

tj. metod (2.2.3), u ovom slučaju, postoje

$$\text{(2.2.9)} \quad y_{n+2} - (1+a)y_{n+1} + ay_n = \frac{h}{12}[(5+a)f_{n+2} + 8(1-a)f_{n+1} - (1+5a)f_n].$$

Kako je

$$C_4 = \frac{1}{4!}(\alpha_1 + 16) - \frac{1}{3!}(\beta_1 + 8\beta_2) = -\frac{1}{24}(1 + a),$$

$$C_5 = \frac{1}{5!}(\alpha_1 + 32) - \frac{1}{4!}(\beta_1 + 16\beta_2) = -\frac{1}{360}(17 + 13a)$$

zaključujemo sledeće:

1° Ako je $a \neq -1$ ($\Rightarrow C_4 \neq 0$), metod (2.2.9) je trećeg reda;

2° Ako je $a = -1$ ($\Rightarrow C_4 = 0$ i $C_5 \neq 0$), metod (2.2.9), tj. metod

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n),$$

je četvrtog reda. Primetimo da poslednja formula predstavlja Simpsonovo pravilo (videti odeljak 7.2.3).

Primedba 2.2.1. Umesto koeficijenata $C_j$ u nekim slučajevima lakše je operisati sa koeficijentima $D_j$ koji se javljaju u razvoju $L_h[g]$ (u okolini tačke $x+th$)

$$L_h[g] = D_0 g(x+th) + D_1 hg'(x+th) + D_2 h^2 g''(x+th) + \ldots$$

S obzirom na jednakosti

$$\begin{aligned} C_0 &= D_0, \\ C_1 &= D_1 + tD_0, \\ &\vdots \\ C_j &= D_j + tD_{j-1} + \ldots + \frac{t^j}{j!} D_0 \qquad (j=2,3,\ldots) \end{aligned}$$

zaključujemo da važi ekvivalencija

$$C_0 = C_1 = \ldots = C_p = 0 \Leftrightarrow D_0 = D_1 = \ldots = D_p = 0 .$$

Takodje,

$$C_0 = C_1 = \ldots = C_p = 0 \Rightarrow D_{p+1} = C_{p+1} \text{ i } D_{p+2} = C_{p+2} - tC_{p+1} .$$

Formule za koeficijente $D_j$, analogno formulama (2.2.8), su

$$\begin{aligned} &D_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k, \\ (2.2.10) \qquad &D_1 = -t\alpha_0 + (1-t)\alpha_1 + (2-t)\alpha_2 + \ldots + (k-t)\alpha_k - (\beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_k), \\ &D_j = \frac{1}{j!}\,(-t)^j\alpha_0 + (1-t)^j\alpha_1 + \ldots + (k-t)^j\alpha_k \\ &\qquad - \frac{1}{(j-1)!}\,(-t)^{j-1}\beta_0 + (1-t)^{j-1}\beta_1 + \ldots + (k-t)^{j-1}\beta_k \\ &\qquad\qquad (j=2,3,\ldots) . \end{aligned}$$

Za $t=0$ formule (2.2.10) se svode na (2.2.8). Podesnim izborom parametra $t$, formule (2.2.10) mogu se u izvesnim slučajevima znatno uprostiti.

### 8.2.3. Konvergencija višekoračnih metoda

Neka je $x \mapsto y(x)$ tačno rešenje problema (2.2.1) i $\{y_n\}$ niz približnih vrednosti ovog rešenja u tačkama $x_n = x_o + nh$ $(n=0,1,\ldots,N)$ dobijen primenom metoda (2.2.3), sa startnim vrednostima $y_i = s_i(h)$ $(i=0,1,\ldots,k-1)$.

<u>Definicija 2.3.1</u>. Za linearni višekoračni metod (2.2.3) se kaže da je konvergentan ako je za svako $x \in [x_o, b]$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ x-x_o=nh}} y_n = y(x)$$

i ako za startne vrednosti važi $\lim\limits_{h\to 0} s_i(h) = y_o$ $(i=0,1,\ldots,k-1)$.

Linearni višekoračni metod (2.2.3) se može okarakterisati prvim i drugim karakterističnim polinomom koji su dati respektivno pomoću

$$\text{(2.3.1)} \qquad \rho(\xi) = \sum_{i=o}^{k} \alpha_i \xi^i \quad \text{i} \quad \sigma(\xi) = \sum_{i=o}^{k} \beta_i \xi^i .$$

<u>Definicija 2.3.2</u>. Za linearni višekoračni metod se kaže da je konzistentan ako ima red $p \geq 1$.

Uslov konzistencije može se iskazati jednakostima

$$\sum_{i=o}^{k} \alpha_i = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{i=o}^{k} i\alpha_i = \sum_{i=o}^{k} \beta_i$$

ili pomoću karakterističnih polinoma (2.3.1)

$$\text{(2.3.2)} \qquad \rho(1) = 0 \quad \text{i} \quad \rho'(1) = \sigma(1) .$$

Ovaj uslov je neophodan za konvergenciju metoda (2.2.3), na šta ukazuje sledeću heuristički argument.

Pretpostavimo da $y_n \to y(x)\,(\neq 0)$, kada $h \to 0$ i $x-x_o=nh=\text{const}$. Tada za fiksirano $k$, imamo takodje $y_{n+i} \to y(x)$ $(i=0,1,\ldots,k)$, tj.

$$y(x) = y_{n+i} + O(h) \qquad (i=0,1,\ldots,k).$$

Kako je

$$\sum_{i=o}^{k} \alpha_i y(x) = \sum_{i=o}^{k} \alpha_i y_{n+i} + \sum_{i=o}^{k} \alpha_i\, O(h),$$

tj.

$$y(x)\sum_{i=o}^{k} \alpha_i = h\sum_{i=o}^{k} \beta_i\, f_{n+i} + O(h),$$

iz poslednje jednakosti, pri $h \to 0$, sleduje $\sum_{i=o}^{k} \alpha_i = \rho(1) = 0$, s obzirom da je $y(x) \neq 0$.

Kako $y \in C^1[x_o,b]$, imamo

$$\frac{y_{n+i} - y_n}{ih} \to y'(x) \qquad (i=1,\ldots,k),$$

tj.

$$y_{n+i} - y_n = ihy'(x) + O(h^2) \qquad (i=1,\ldots,k),$$

kada $h \to 0$ $(x-x_o=nh=\text{const})$. Tada je

$$\sum_{i=o}^{k} \alpha_i y_{n+i} - \sum_{i=o}^{k} \alpha_i y_n = h\sum_{i=o}^{k} i\alpha_i y'(x) + O(h^2),$$

tj.

$$h\sum_{i=o}^{k} \beta_i f_{n+i} - y_n\rho(1) = hy'(x)\rho'(1) + O(h^2). \tag{2.3.3}$$

S druge strane, kako je $\rho(1)=0$ i $f_{n+i} \to f(x,y(x))$ $(h \to 0,\ nh=x-x_o)$, iz (2.3.3), prelaskom na graničnu vrednost, sleduje

$$f(x,y(x))\sigma(1) = y'(x)\rho'(1).$$

Na osnovu poslednje jednakosti zaključujemo da $x \mapsto y(x)$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu (2.2.1) ako i samo ako je $\rho'(1)=\sigma(1)$, što predstavlja drugi uslov u (2.3.2).

Kao što je ranije napomenuto uslov konzistencije je potreban za konvergenciju metoda (2.2.3). Medjutim, može se pokazati da ovaj uslov nije dovoljan.

Na osnovu (2.3.2) zaključujemo da kod konzistentnih metoda, prvi karakteristični polinom ima nulu $\xi=+1$. Ovu nulu nazivamo glavnom nulom i označavamo je sa $\xi_1$. Ostale nule $\xi_2,\ldots,\xi_k$ polinoma $\rho$ nazivamo sporednim nulama i o njima uslov konzistencije ne pruža nikakvu informaciju. Medjutim, sporedne nule bitno utiču na konvergenciju metoda (2.2.3). Naime, kako se diferencijalna jednačina prvog reda (2.2.1), primenom metoda (2.2.3), zamenjuje diferencnom jednačinom k-tog reda, to se pored rešenja koje pri $h\to 0$ treba da konvergira ka tačnom rešenju jednačine (2.2.1) mogu javiti i rešenja koja divergiraju, tzv. "parazitna rešenja".

Posmatramo jedan trivijalan problem

(2.3.4) $$y' = 0\,, \qquad y(0) = 0\,,$$

čije je rešenje $y(x)\equiv 0$. Primena metoda (2.2.3) na problem (2.3.4) dovodi do diferencne jednačine

(2.3.5) $$y_{n+k} + \alpha_{k-1}y_{n+k-1} + \ldots + \alpha_o y_n = 0\,.$$

Pretpostavimo da su nule $\xi_1,\ \xi_2,\ldots,\xi_k$ karakterističnog polinoma $\rho$ realne i različite. Tada je rešenje diferencne jednačine (2.3.5) koje zadovoljava uslov $y_i\to y(0)=0$ $(i=0,1,\ldots,k-1)$, kada $h\to 0$, dato sa

$$y_n = h(C_1\xi_1^n + C_2\xi_2^n + \ldots + C_k\xi_k^n)\,,$$

gde su $C_i$ $(i=1,\ldots,k)$ proizvoljne konstante i $\xi_1=1$.

Da bi metod (2.2.3) bio konvergentan potrebno je da $y_n\to 0$ $(h\to 0,\ x=nh=\text{const})$.

Kako je

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ x=nh}} h\xi_i^n = x\lim_{n\to+\infty}\frac{\xi_i^n}{n} = 0 \Leftrightarrow |\xi_i| \leqq 1 \quad (i=1,\ldots,k),$$

zaključujemo da metod (2.2.3) divergira ako postoji bar jedno $\xi_i$ takvo da je $|\xi_i| > 1$.

Razmotrimo sada slučaj kada je nula $\xi_i$ višestruka reda $m(>1)$. Tada ovoj nuli, u rešenju diferencne jednačine (2.3.5), odgovara član

$$h(C_{1i} + C_{2i}n + \dots + C_{mi}n^{m-1})\xi_i^n .$$

S obzirom na ekvivalenciju

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ x=nh}} hn^s\xi_i^n = x \lim_{n\to+\infty} n^{s-1}\xi_i^n = 0 \Leftrightarrow |\xi_i| < 1 \qquad (s \geq 1),$$

zaključujemo da metod (2.2.3) divergira ako je $|\xi_i| \geq 1$.

Slično bi se mogao ispitati i slučaj kada je neka nula polinoma $\rho$ kompleksna.

Navedeno razmatranje sugeriše sledeću definiciju.

Definicija 2.3.3. Za linearni višekoračni metod se kaže da je nula-stabilan ako prvi karakteristični polinom nema nule sa modulom većim od jedinice i ako su sve nule sa modulom jedan proste.

Dakle, nula-stabilnost metoda obezbedjuje da "parazitna rešenja", o kojima je prethodno bilo reči, teže nuli kada $h \to 0$.

Teorema 2.3.1. Potrebni i dovoljni uslovi za konvergenciju linearnog višekoračnog metoda su konzistencija i nula-stabilnost.

Dokaz ove veoma važne teoreme može se naći, na primer, u [2].

Primer 2.3.1. Posmatrajmo Eulerov metod

$$y_{n+1} - y_n = hf_n \qquad (n=0,1,\dots). \tag{2.3.6}$$

Ovde je $k=1$ i

$$C_o = \alpha_o + \alpha_1 = -1 + 1 = 0 ,$$

$$C_1 = \alpha_1 - (\beta_o + \beta_1) = 1 - (1 + 0) = 0 ,$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\alpha_1 - \beta_1 = \frac{1}{2}\cdot 1 - 0 = \frac{1}{2} ,$$

odakle zaključujemo da je red ovog metoda $p=1$, tj. da je metod konzistentan. U ovom slučaju konzistentnost povlači i nula-stabilnost, s obzirom da je $\xi_1=1$ jedina nula polinoma $\xi\mapsto\rho(\xi) = \xi - 1$.

Dakle, Eulerov metod je konvergentan. Primenom ovog metoda na problem

$$(2.3.7) \qquad y' = x^2 + y , \quad y(1) = 1 \qquad (1 \leq x \leq 2.5),$$

sa korakom $h=0.1$, dobijen je niz približnih vrednosti rešenja $\{y_n\}$ koji je dat u tabeli 2.3.1 (druga kolona). S obzirom da je tačno rešenje datog problema dato sa

$$y(x) = 6e^{x-1} - x^2 - 2x - 2 ,$$

radi uporedjenja, u šestoj koloni ove tabele date su tačne vrednosti rešenja $y(x_n)$ $(n=0,1,\ldots,15)$.

Primer 2.3.2. Metod

$$(2.3.8) \qquad y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{3}(3f_{n+1} - 2f_n) \qquad (n=0,1,\ldots)$$

nije konzistentan, jer je

$$C_o = \alpha_o + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 - 1 + 1 = 0 ,$$

$$C_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - (\beta_o+\beta_1+\beta_2) = -1 + 2\cdot 1 - (-\frac{2}{3} + 1) = \frac{2}{3} \neq 0 .$$

Inače, ovaj metod je nula-stabilan ($\rho(\xi)=\xi^2-\xi$, $\xi_1=1$, $\xi_2=0$). Primenjujući ga na rešavanje problema (2.3.7) dobija se niz $\{y_n\}$ koji dat u trećoj koloni tabele 2.3.1. Za startnu vrednost $y_1$ je uzeto tačno rešenje, tj. $y_1=y(x_1)$.

Tabela 2.3.1

| $x_n$ \ $y_n$ | Metod (2.3.6) | Metod (2.3.8) | Metod (2.3.10) | Metod (2.3.11) | $y(x_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.0 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 |
| 1.1 | 1.200000 | 1.221026 | 1.221026 | 1.221026 | 1.221026 |
| 1.2 | 1.441000 | 1.330795 | 1.485679 | 1.488308 | 1.488416 |
| 1.3 | 1.729100 | 1.445806 | 1.802980 | 1.809423 | 1.809153 |
| 1.4 | 2.071010 | 1.574667 | 2.180643 | 2.189278 | 2.190948 |
| 1.5 | 2.474111 | 1.719080 | 2.627090 | 1.649598 | 2.642328 |
| 1.6 | 2.946522 | 1.880343 | 3.151622 | 3.137695 | 3.172713 |
| 1.7 | 3.497174 | 2.059772 | 3.764511 | 3.956209 | 3.792516 |
| 1.8 | 4.135892 | 2.258726 | 4.477106 | 3.741659 | 4.513246 |
| 1.9 | 4.873481 | 2.478614 | 5.301946 | 8.976315 | 5.347619 |
| 2.0 | 5.721829 | 2.720894 | 6.252883 | -10.766107 | 6.309691 |
| 2.1 | 6.694012 | 2.987076 | 7.345218 | 87.756825 | 7.414996 |
| 2.2 | 7.804413 | 3.278724 | 8.595857 | -369.34432 | 8.680702 |
| 2.3 | 9.068854 | 3.597458 | 10.023474 | 1788.7931 | 10.125780 |
| 2.4 | 10.504474 | 3.944955 | 11.648703 | -8357.1615 | 11.771200 |
| 2.5 | 12.131212 | 4.322954 | 13.494334 | 39390.867 | 13.640134 |

Primer 2.3.3. Razmotrićemo sada metod

$$(2.3.9)\quad y_{n+2}-(1+a)y_{n+1}+ay_n=\frac{h}{2}[(3-a)f_{n+1}-(1+a)f_n]\quad (n=0,1,\ldots).$$

Kako je $C_o=C_1=C_2=0$, $C_3=\frac{1}{12}(5+a)$, $C_4=\frac{1}{24}(9+a)$, zaključujemo da je metod konzistentan, s obzirom da je njegov red $p=2$ $(a\neq-5)$ i $p=3$ $(a=-5)$. Za ispitivanje nula stabilnosti konstruišimo prvi karakteristični polinom

$$\rho(\xi)=\xi^2-(1+a)\xi+a=(\xi-1)(\xi-a).$$

Kako je $\xi_1=1$ i $\xi_2=a$ izlazi da je metod nula-stabilan ako je $-1\leq a<1$, dok je za $a<-1$ ili $a\geq 1$ nula-nestabilan. Dakle, za $-1\leq a<1$ metod je konvergentan.

Metod (2.3.9) za $a=0$ i $a=-5$ se svodi na

$$(2.3.10)\quad y_{n+2}-y_{n+1}=\frac{h}{2}(3f_{n+1}-f_n)\qquad (n=0,1,\ldots)$$

i

$$(2.3.11)\quad y_{n+2}+4y_{n+1}-5y_n=\frac{h}{2}(8f_{n+1}+4f_n)\qquad (n=0,1,\ldots)$$

respektivno. Prvi od njih je konvergentan, a drugi divergentan. U četvrtoj i petoj koloni tabele 2.3.1 dati su rezultati dobijeni primenom ovih metoda na problem (2.3.7) sa korakom h=0.1, pri čemu je uzeto $y_1=y(x_1)$.

U primenama od interesa su samo konvergentni višekoračni metodi.

Jedno interesantno pitanje koje se može postaviti u vezi sa višekoračnim metodima je sledeće: Koji je maksimalni red metoda za dato k, a da pri tome metod bude nula-stabilan? Odgovor na ovo pitanje daje sledeća teorema, koju navodimo bez dokaza.

Teorema 2.3.2. Za fiksirano k, nula-stabilan metod može imati najviši red k+1 ako je k neparno i k+2 ako je k parno.

Definicija 2.3.4. Nula-stabilan k-koračni metod koji ima red k+2 naziva se optimalni metod.

Može se pokazati da kod optimalnog metoda sve nule polinoma $\rho$ leže na jediničnom krugu.

Primer 2.3.4. Simpsonovo pravilo

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n)$$

je optimalan metod, jer je k=2 i p=4 (=k+2). Nule karakterističnog polinoma $\rho(\xi)=\xi^2-1$ su $\xi_1=1$ i $\xi_2=-1$.

Primer 2.3.5. Konstruišimo optimalni metod za k=4. S obzirom da se u ovom slučaju sve nule polinoma $\rho$ nalaze na jediničnom krugu, možemo staviti

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = -1, \quad \xi_3 = e^{i\theta}, \quad \xi_4 = e^{-i\theta} \quad (0 < \theta < \pi).$$

Tada je

$$\rho(\xi) = \xi^4 - 2a\xi^3 + 2a\xi^2 - 1, \tag{2.3.12}$$

gde smo stavili $a=\cos\theta$. Na osnovu (2.3.12) imamo $\alpha_0=-1$, $\alpha_2=2a$, $\alpha_3=-2a$, $\alpha_4=1$. Koko je potreban uslov $p = k + 2 = 6$, to iz uslova

$D_o=D_1=\ldots=D_6=0$, gde su koeficijenti $D_j$ dati pomoću (2.2.10), sleduje[†]

$$\beta_o = \beta_4 = \frac{1}{45}(14+a), \qquad \beta_1 = \beta_3 = \frac{1}{45}(64-34a),$$

$$\beta_2 = \frac{1}{15}(8-38a).$$

Konstanta greške ovog metoda je

$$C_7 = D_7 = -\frac{16+15a}{1890} \qquad (-1<a<1).$$

Za $a=\frac{4}{19}$, ovaj metod se svodi na Quadeov metod

$$y_{n+4} - \frac{8}{19}(y_{n+3}-y_{n+1}) - y_n = \frac{6h}{19}(f_{n+4}+4(f_{n+3}+f_{n+1})+f_n).$$

Dve važne klase konvergentnih višekonačnih metoda koje se sreću u primenama su:

1° Metodi kod kojih je $\rho(\xi) = \xi^k - \xi^{k-1}$;

2° Metodi kod kojih je $\rho(\xi) = \xi^k - \xi^{k-2}$.

Eksplicitni metodi prve klase nazivaju se Adams-Bashfortovi, a implicitni Adams-Moultonovi. Slično, eksplicitni metodi druge klase nose naziv Nystromovi metodi, dok se odgovarajući implicitni metodi nazivaju generalisani Milne-Simpsonovi.

Naravno, postoje metodi koji ne pripadaju ovim klasama.

Na kraju ovog odeljka dajemo pregled konzistentnih metoda za k=1,2,3, pri čemu su date i vrednosti za red p i konstantu greške $C_{p+1}$. Svi navedeni metodi imaju najveći mogući red. Naime, slobodni parametri a i b, koji se javljaju u formulama za koeficijente $\alpha_i$ i $\beta_i$, ne mogu se izabrati tako da red bude veći od datog, a da pri tome metod bude nula-stabilan.

† *U formulama (2.2.10) pogodno je uzeti t=2.*

1. Eksplicitni metodi

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| k=1 | $\alpha_0=-1$<br>$\alpha_1=1$ | $\beta_0=1$ | p=1 | $C_{p+1}=\frac{1}{2}$ |
| k=2 | $\alpha_0=a$<br>$\alpha_1=-(1+a)$<br>$\alpha_2=1$ | $\beta_0=-\frac{1}{2}(1+a)$<br>$\beta_1=\frac{1}{2}(3-a)$ | p=2 | $C_{p+1}=\frac{1}{12}(5+a)$ |
| k=3 | $\alpha_0=-b$<br>$\alpha_1=a+b$<br>$\alpha_2=-(1+a)$<br>$\alpha_3=1$ | $\beta_0=\frac{1}{12}(5+a+5b)$<br>$\beta_1=\frac{1}{3}(-4-2a+2b)$<br>$\beta_2=\frac{1}{12}(23-5a-b)$ | p=3 | $C_{p+1}=\frac{1}{24}(9+a+b)$ |

2. Implicitni metodi

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| k=1 | $\alpha_0=-1$<br>$\alpha_1=1$ | $\beta_0=\frac{1}{2}$<br>$\beta_1=\frac{1}{2}$ | p=2 | $C_{p+1}=-\frac{1}{12}$ |
| k=2 | $\alpha_0=a$<br>$\alpha_1=-(1+a)$<br>$\alpha_2=1$ | $\beta_0=-\frac{1}{12}(1+5a)$<br>$\beta_1=\frac{2}{3}(1-a)$<br>$\beta_2=\frac{1}{12}(5+a)$ | p=3<br>$(a\neq-1)$ | $C_{p+1}=-\frac{1}{24}(1+a)$ |
| | | | p=4<br>$(a=-1)$ | $C_{p+1}=-\frac{1}{90}$ |
| k=3 | $\alpha_0=-b$<br>$\alpha_1=a+b$<br>$\alpha_2=-(1+a)$<br>$\alpha_3=1$ | $\beta_0=\frac{1}{24}(1+a+9b)$<br>$\beta_1=-\frac{1}{24}(5+13a-19b)$<br>$\beta_2=\frac{1}{24}(19-13a-5b)$<br>$\beta_3=\frac{1}{24}(9+a+b)$ | p=4 | $C_{p+1}=-\frac{1}{720}(19+11a+19b)$ |

### 8.2.4. Izbor startnih vrednosti

Kao što je ranije napomenuto, kod primene linearnih više-koračnih metoda na rešavanje problema (2.2.1), potrebno je poznavanje startnih vrednosti $y_i=s_i(h)$, takvih da je $\lim_{h\to 0} s_i(h)=y_0$ $(i=1,\ldots,k-1)$. Naravno, ovaj problem se postavlja kada je $k>1$.

Ako je metod (2.2.3) reda p, tada očigledno startne vrednosti $s_i(h)$ treba birati tako da je

$$s_i(h) - y(x_i) = O(h^{p+1}) \quad (i=1,\dots,k-1),$$

gde je $x \mapsto y(x)$ tačno rešenje problema (2.2.1).

U ovom odeljku navešćemo jednu klasu metoda za odredjivanje potrebnih startnih vrednosti.

Pretpostavimo da je funkcija f u diferencijalnoj jednačini (2.2.1) dovoljan broj puta diferencijabilna. Tada na osnovu Taylorovog metoda imamo

$$y(x_o+h)=y(x_o)+hy'(x_o)+\frac{h^2}{2!}y''(x_o)+\dots+\frac{h^p}{p!}y^{(p)}(x_o)+O(h^{p+1}).$$

Poslednja jednakost ukazuje na to da se može uzeti

$$s_1(h)=y(x_o)+hy'(x_o)+\frac{h^2}{2!}y''(x_o)+\dots+\frac{h^p}{p!}y^{(p)}(x_o),$$

s obzirom da je tada $s_1(h)-y(x_1)=O(h^{p+1})$ $(x_1=x_o+h)$. Isti postupak se može primeniti i na odredjivanje ostalih startnih vrednosti. Naime, u opštem slučaju, imamo

$$s_i(h)=y(x_{i-1})+hy'(x_{i-1})+\frac{h^2}{2!}y''(x_{i-1})+\dots+\frac{h^p}{p!}y^{(p)}(x_{i-1}) \quad (i=1,\dots,k-1),$$

pri čemu za $y(x_{i-1})$ uzimamo $s_{i-1}(h)$.

Taylorov metod u svetlu linearnih višekoračnih metoda se može tretirati kao generalizacija Eulerovog metoda, u smislu korišćenja viših izvoda. Prirodno se može postaviti pitanje da li se mogu konstruisati metodi koji bi u navedenom smislu bili generalizacija implicitnih višekoračnih metoda. Takvi metodi postoje i oni zajedno sa Taylorovim metodom čine klasu metoda Obreškova. Opšti oblik ovih metoda je

$$\alpha_1 y_{n+1}+\alpha_o y_n = \sum_{i=1}^{r} h^i(\beta_{1i}y_{n+1}^{(i)}+\beta_{oi}y_n^{(i)}) \quad (r\geq 2),$$

gde su $\alpha_1$, $\alpha_o$, $\beta_{1i}$, $\beta_{oi}$ $(i=1,\dots,r)$ konstantni koeficijenti.

Na primer, za r=2 i r=3 imamo

(2.4.1) $$y_{n+1}-y_n=\frac{h}{2}(y'_{n+1}+y'_n)-\frac{h^2}{12}(y''_{n+1}-y''_n)$$

i

$$y_{n+1}-y_n = \frac{h}{2}(y'_{n+1}+y'_n) - \frac{h^2}{10}(y''_{n+1}-y''_n) + \frac{h^3}{120}(y'''_{n+1}+y'''_n). \tag{2.4.2}$$

Primedba 2.4.1. Metodi (2.4.1) i (2.4.2) su četvrtog i šestog reda respektivno.

Sem napred navedenih metoda, za odredjivanje startnih vrednosti $s_i(h)$ $(i=1,\ldots,k-1)$ mogu se koristiti i metodi Runge-Kutta, koji će biti razmatrani u poglavlju 8.2.

Primer 2.4.1. Da bismo za rešavanje Cauchyevog problema

$$y' = x^2+y, \quad y(1) = 1 \qquad (1\le x \le 1.5) \tag{2.4.3}$$

primenili metod

$$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n) \tag{2.4.4}$$

potrebno je naći startne vrednosti. Uzmimo $h=0.1$.

S obzirom da je ovaj metod trećeg reda, za odredjivanje startnih vrednosti $y_1=s_1(h)$ i $y_2=s_2(h)$ možemo iskoristiti Taylorov metod za $p=3$.

Iz (2.4.3) sleduje

$$\begin{aligned} y' &= x^2 + y, \\ y'' &= 2x + y' = 2x + x^2 + y, \\ y''' &= 2 + y'' = 2 + 2x + x^2 + y. \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Kako je $y(1)=1$, $y'(1)=2$, $y''(1)=4$, $y'''(1)=6$, na osnovu

$$s_1(h) = y(1)+hy'(1) + \frac{h^2}{2!}y''(1) + \frac{h^3}{3!}y'''(1),$$

imamo

$$s_1(0.1) = 1+0.1\cdot 2+\frac{0.01}{2}\cdot 4 + \frac{0.001}{6}\cdot 6 = 1.221 .$$

Uzimajući za $y(1.1)$, vrednost $s_1(0.1)$, imamo

$y(1.1) \approx 1.221$, $y'(1.1) \approx 2.431$, $y''(1.1) \approx 4.631$, $y'''(1.1) \approx 6.631$.

Tada je

$$s_2(0.1) = 1.221+0.1\cdot 2.431 + \frac{0.01}{2}\cdot 4.631 + \frac{0.001}{6}\cdot 6.631 \approx 1.48836.$$

Tabela 2.4.1

| $x_n$ | $y_n$ | $f_n$ | $\Delta f_n$ | $\Delta^2 f_n$ |
|---|---|---|---|---|
| 1.0 | 1.00000 | 2.00000 | | |
| | | | 0.43100 | |
| 1.1 | 1.22100 | 2.43100 | | 0.06636 |
| | | | 0.49736 | |
| 1.2 | 1.48836 | 2.92836 | | 0.07311 |
| | | | 0.57047 | |
| 1.3 | 1.80883 | 3.49883 | | 0.08098 |
| | | | 0.65145 | |
| 1.4 | 2.19028 | 4.15028 | | |
| 1.5 | 2.64125 | | | |

Dakle, sada imamo potrebne startne vrednosti

(2.4.6) $$y_o = 1, \quad y_1 = 1.221, \quad y_2 = 1.48836 .$$

Primenom metoda (2.4.1) možemo odrediti tačnije startne vrednosti, s obzirom da je ovaj metod četvrtog reda. Zaista, iz (2.4.1) i (2.4.5) sleduje

$$y_1 - 1 = \frac{0.1}{2}(1.1^2 + y_1 + 1^2 + 1) - \frac{0.01}{12}(2\cdot 1.1 + 1.1^2 + y_1 - (2\cdot 1 + 1^2 + 1)),$$

tj. $y_1 \doteq 1.2210253$, pri čemu se ova vrednost poklapa sa tačnim rešenjem (videti tabelu 2.3.1) na prvih pet decimalnih mesta. Slično bismo mogli odrediti i $y_2$.

Primenimo sada metod (2.4.4) na rešavanje problema datog sa (2.4.3), koristeći startne vrednosti (2.4.6). Radi lakšeg računanja, metod (2.4.4) možemo predstaviti u obliku

$$\Delta y_{n+2} = h(f_{n+2} + \frac{1}{2}\Delta f_{n+1} + \frac{5}{12}\Delta^2 f_n).$$

U našem slučaju je, $f_n = x_n^2 + y_n$.

U tabeli 2.4.1 dati su pregledno dobijeni rezultati, pri čemu su svi medjurezultati zaokrugljeni na pet decimalnih mesta.

Primedba 2.4.2. Adams-Bashfortov metod (2.4.4) može se dobiti integracijom drugog Newtonovog interpolacionog polinoma drugog stepena. Ako se koristi polinom trećeg stepena dobija se metod

$$y_{n+4}-y_{n+3}=\frac{h}{24}(55f_{n+3}-59f_{n+2}+37f_{n+1}-9f_n).$$

## 8.2.5. Analiza grešaka

Neka je $x\mapsto y(x)$ tačno rešenje problema (2.2.1) i $\{y_n\}$ niz približnih vrednosti ovog rešenja u tačkama $x_n=x_o+nh$ $(n=0,1,\dots,N)$ dobijen primenom metoda (2.2.3) sa datim startnim vrednostima.

Definicija 2.5.1. Veličina $e_n=y(x_n)-y_n$ se naziva ukupna diskretizaciona greška u tački $x=x_n$ $(n=0,1,\dots,N)$.

Definicija 2.5.2. Veličina $T_{n+k}$ odredjena sa

$$T_{n+k}=L_h[y]_{x=x_n}=\sum_{i=o}^{k}[\alpha_i y(x_{n+i})-h\beta_i y'(x_{n+i})], \tag{2.5.1}$$

naziva se lokalna greška odsecanja, metoda (2.2.3), u tački $x_{n+k}\in[x_o,x_N]$.

Primetimo da u definiciji lokalne greške odsecanja učestvuje tačno rešenje $x\mapsto y(x)$ problema (2.2.1). Ova greška je lokalna u sledećem smislu. Pretpostavimo da $y_{n+i}\equiv y(x_{n+i})$ $(i=0,1,\dots,k-1)$, tj. da ne postoje greške u veličinama $y_{n+i}$ $(i=0,1,\dots,k-1)$ i tada primenimo metod (2.2.3) na odredjivanje $y_{n+k}$.

Pod navedenim lokalnim pretpostavkama može se pokazati da je

$$T_{n+k}=(1-h\beta_k F_{n+k})(y(x_{n+k})-y_{n+k}),$$

gde je $F_{n+k}=\dfrac{\partial f(x_{n+k},C_{n+k})}{\partial y}$ i $C_{n+k}$ tačka izmedju $y_{n+k}$ i $y(x_{n+k})$.

Naime, kako je tada na osnovu (2.2.3)

$$y_{n+k}-h\beta_k f(x_{n+k},y_{n+k})=\sum_{i=o}^{k-1}[h\beta_i f(x_{n+i},y(x_{n+i}))-\alpha_i y(x_{n+i})]$$

imamo

$$T_{n+k} = y(x_{n+k}) - y_{n+k} - h\beta_k(f(x_{n+k},y(x_{n+k}))-f(x_{n+k},y_{n+k})),$$

odakle primenom Lagrangeove teoreme sleduje prethodna formula.

Dakle, lokalna greška odsecanja (2.5.1) je proporcionalna grešci $y(x_{n+k})-y_{n+k}$. U slučaju kada je metod (2.2.3) eksplicitan ($\beta_k=0$) imamo $T_{n+k}=y(x_{n+k})-y_{n+k}$.

Ako je $x\mapsto y(x)$ tačno rešenje problema (2.2.1) dovoljan broj puta diferencijabilno lokalna greška odsecanja se može predstaviti u obliku

$$(2.5.2) \qquad T_{n+k} = C_{p+1}\, h^{p+1} y^{(p+1)}(x_n) + O(h^{p+2}),$$

gde je p red metoda (2.2.3). Član $C_{p+1}\, h^{p+1}\, y^{(p+1)}(x_n)$ se naziva glavni član lokalne greške odsecanja, dok se koeficijenat $C_{p+1}$ naziva konstanta greške.

Interesantno je postaviti pitanje da li se (2.5.2) može predstaviti u obliku

$$(2.5.3) \qquad T_{n+k} = C_{p+1}\, h^{p+1} y^{(p+1)}(x_n+\Theta h) \qquad (0<\Theta<k),$$

što bi bilo analogno ostatku kod Taylorove formule. Odgovor na ovo pitanje nije potvrdan u opštem slučaju. Naime, ako definišemo tzv. influencnu funkciju G pomoću

$$(2.5.4) \qquad G(t) = \sum_{i=0}^{k} [\alpha_i (i-t)_+^p - p\beta_i (i-t)_+^{p-1}],$$

gde je

$$(2.5.5) \qquad z_+ = \frac{1}{2}(z+|z|) = \begin{cases} z & (z\geqq 0) \\ 0 & (z<0) \end{cases},$$

može se dokazati formula (videti, na primer, [19])

$$(2.5.6) \qquad T_{n+k} = \frac{h^{p+1}}{p!} \int_0^k G(t) y^{(p+1)}(x_n+th)\,dt.$$

Pod uslovom da G(t) ne menja znak na $[0,k]$, primenom teoreme o srednjoj vrednosti odredjenih integrala, formula (2.5.6) se može predstaviti u obliku (2.5.3). U opštem slučaju važi ocena

(2.5.7) $$|T_{n+k}| \leqq h^{p+1} G\, Y_n,$$

gde su

(2.5.8) $$Y_n = \max_{x \in [x_n, x_{n+k}]} |y^{(p+1)}(x)| \quad \text{i} \quad G = \frac{1}{p!} \int_0^k |G(t)|\,dt.$$

U nejednakosti (2.5.7) $Y_n$ se može zameniti sa veličinom

(2.5.9) $$Y = \max_{x \in [x_o, x_N]} |y^{(p+1)}(x)|.$$

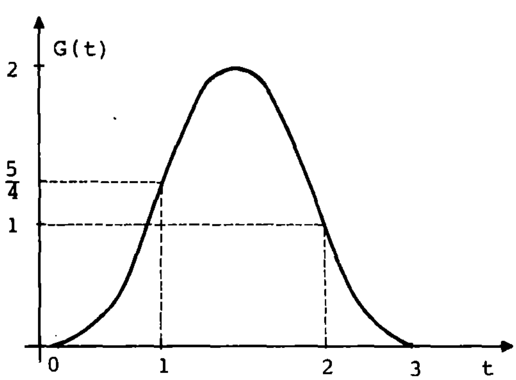
Primer 2.5.1. Za metod (2.4.4) odredićemo influencnu funkciju. Na osnovu (2.5.4) imamo

$$G(t) = [-3\cdot\tfrac{5}{12}(0-t)_+^2] + [-3(-\tfrac{16}{12})(1-t)_+^2]$$
$$+ [(-1)(2-t)_+^3 - 3\cdot\tfrac{23}{12}(2-t)_+^2] + [1\cdot(3-t)_+^3],$$

odakle, s obzirom na (2.5.5), sleduje

$$G(t) = \begin{cases} \frac{5}{4}t^2 & (0 \leqq t \leqq 1), \\ -4 + 8t - \frac{11}{4}t^2 & (1 < t \leqq 2), \\ (3-t)^3 & (2 < t \leqq 3). \end{cases}$$

Grafik ove funkcije prikazan je na Sl. 2.5.1.




Sl. 2.5.1

Funkcija G je neprekidna na segmentu [0,3]. Štaviše njen izvod

$$G'(t) = \begin{cases} \frac{5}{2}t & (0 \leqq t \leqq 1), \\ 8 - \frac{11}{2}t & (1 < t \leqq 2), \\ -3(3-t)^2 & (2 < t \leqq 3) \end{cases}$$

takodje je neprekidna funkcija na segmentu [0,3].

Kako $G(t)$ ne menja znak na [0,3], lokalna greška odsecanja kod metoda (2.4.4), primenjenog na problem (2.4.3), se može predstaviti u obliku

$$T_{n+3} = C_4 h^4 y^{IV}(x_n + \theta h) \qquad (0 < \theta < 3),$$

gde je $C_4 = G = \frac{1}{3!}\int_0^3 G(t)dt = \frac{3}{8}$.

Kako iz poslednje jednakosti u (2.4.5) sleduje $y^{IV} = y'''$, imamo $y''' = 6$, $y^{IV} = y''' = \frac{6}{e}e^x$, s obzirom da je $y'''(1) = 6$. Dakle,

$$T_{n+3} = \frac{9}{4e}h^4 e^{x_n + \theta h} \qquad (0 < \theta < 3).$$

Na primer, ako se traži rešenje na segmentu [1,1.5], kao u primeru 2.4.1, za lokalnu grešku odsecanja važe nejednakosti

$$0 < T_{n+3} < \frac{9\sqrt{e}}{4}h^4$$

Nadjimo sada vezu izmedju ukupne diskretizacione greške i lokalne greške odsecanja, pod pretpostavkom da postoji $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Ako jednakost

$$\text{(2.5.10)} \qquad \sum_{i=o}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=o}^{k} \beta_i f(x_{n+i}, y_{n+i})$$

oduzmemo od jednakosti

$$\sum_{i=o}^{k} \alpha_i y(x_{n+i}) = h \sum_{i=o}^{k} \beta_i y'(x_{n+i}) + T_{n+k},$$

dobijamo

$$\sum_{i=o}^{k} \alpha_i (y(x_{n+i}) - y_{n+i}) = h \sum_{i=o}^{k} \beta_i (f(x_{n+i}, y(x_{n+i})) - f(x_{n+i}, y_{n+i}))$$

$$+ T_{n+k},$$

tj.

(2.5.11) $$\sum_{i=o}^{k} \alpha_i e_{n+i} = h \sum_{i=o}^{k} \beta_i F_{n+i} e_{n+i} + T_{n+k},$$

gde je $F_{n+i} = \dfrac{\partial f(x_{n+i}, c_{n+i})}{\partial y}$ $(i=0,1,\ldots,k)$ i $c_{n+i}$ tačka izmedju $y_{n+i}$ i $y(x_{n+i})$.

Ako startne vrednosti $y_o$, $y_1, \ldots, y_{k-1}$ sadrže greške $e_o$, $e_1, \ldots, e_{k-1}$ respektivno, na osnovu (2.5.11) (za n=0) zaključujemo da na grešku $e_k$ pored navedenih grešaka utiče i lokalna greška odsecanja $T_k$. U opštem slučaju, $e_{n+k}$ zavisi od $e_n$, $e_{n+1}, \ldots, e_{n+k-1}$ i od lokalne greške odsecanja $T_{n+k}$.

Odredjivanje granice za ukupnu diskretizacionu grešku, u opštem slučaju je vrlo komplikovano.

Ne upuštajući se u dokaz, daćemo granice za ukupnu diskretizacionu grešku kod eksplicitnih višekoračnih metoda, kod kojih je†

(2.5.12) $$\alpha_i \leq 0 \ (i=0,1,\ldots,k-1), \ \alpha_k = 1, \ \sum_{i=o}^{k} \alpha_i = 0.$$

Neka su : L Lipschitzova konstanta za f (po argumentu y), Y i G definisani pomoću (2.5.9) i (2.5.8) respektivno, p red metoda,

$$B = \sum_{i=o}^{k-1} |\beta_i| \quad \text{i} \quad \delta = \max(|e_o|, |e_1|, \ldots, |e_{k-1}|).$$

Tada je

(2.5.13) $$|e_n| \leq [\delta + (x_n - x_o) h^p G Y] \exp(LB(x_n - x_o)).$$

† *Za metode sa osobinom (2.5.12) kaže se da pripadaju klasi A*

Dokaz ove nejednakosti (kao i nekih srodnih) može se naći u [19].

U dosadašnjoj analizi nismo razmatrali uticaj grešaka zaokrugljivanja, koje se javljaju u procesu računanja. Naime, umesto niza $\{y_n\}$, koji zadovoljava (2.5.10), pri praktičnom računanju dobijamo niz zaokrugljenih vrednosti $\{\tilde{y}_n\}$, za koji je

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \tilde{y}_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f(x_{n+i}, \tilde{y}_{n+i}) + R_{n+k},$$

gde je $R_{n+k}$ odgovarajuća greška zaokrugljivanja.

Ako stavimo $\tilde{e}_n = y(x_n) - \tilde{y}_n$, istim postupkom kojim smo izveli (2.5.11), dobijamo diferencnu jednačinu

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \tilde{e}_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i F_{n+i} \tilde{e}_{n+i} + \Phi_{n+k}, \tag{2.5.14}$$

gde je $\Phi_{n+k} = T_{n+k} - R_{n+k}$.

Pod pretpostavkom da je $|R_{n+k}| \leqq Rh^{q+1}$, za grešku $\tilde{e}_n$ važi ocena

$$|\tilde{e}_n| \leqq \left[\delta + (x_n - x_o)(h^p GY + Rh^q)\right] \exp(LB(x_n - x_o)),$$

koja se za R=0 svodi na (2.5.13).

Dobijene ocene za $|e_n|$ i $|\tilde{e}_n|$ su veoma grube i praktično su neprimenljive za odredjivanje koraka h iz uslova da ukupna greška u tački $x_n$ bude manja od unapred zadate vrednosti $\varepsilon$.

Primer 2.5.2. Nadjimo ograničenje za ukupnu diskretizacionu grešku kod Eulerovog metoda primenjenog na model problem

$$y' = Ay, \quad y(0) = 1 \qquad (A < 0),$$

pod pretpostavkom da greške zaokrugljivanja ne postoje.

Kako je $p=1$, $G(t) = -t \, (t \in [0,1])$, $G = \frac{1}{2}$, $L = |A|$, $B = 1$, $x_o = 0$, $y_o = 1 \, (\Rightarrow \delta = 0)$, na osnovu (2.5.13), imamo

$$|e_n| \leqq \frac{1}{2} x_n hY e^{|A| x_n}, \tag{2.5.15}$$

gde je $x_n = nh$ i $Y = \max_{x \in [o, x_N]} |A^2 e^{Ax}| = A^2$.

Pokazaćemo sada da se u ovom konkretnom slučaju može dobiti mnogo bolje ograničenje, nego što je (2.5.15). S obzirom na pretpostavku o nepostojanju grešaka zaokrugljivanja, na osnovu (2.5.11), imamo

$$e_{n+1} = (1+Ah)e_n + T_{n+1} \qquad (F_n = A),$$

gde je $T_{n+1} = \frac{1}{2} h^2 y''(x_n + \theta h)\,(0 < \theta < 1)$. Kako je $e_0 = 0$ iz poslednje diferencne jednačine sleduje

$$e_n = \sum_{i=1}^{n} (1+Ah)^{n-i} T_i . \tag{2.5.16}$$

Neka je $h$ izabrano tako da je $1+Ah > 0$, tj. $h < -\frac{1}{A}$. Tada, s obzirom na nejednakost $|T_{n+1}| \leqq \frac{1}{2} h^2 Y$, iz (2.5.16) sleduje

$$|e_n| \leqq \frac{1}{2} h^2 Y \sum_{i=1}^{n} (1+Ah)^{n-1} = \frac{1}{2} h^2 Y \frac{(1+Ah)^n - 1}{Ah} . \tag{2.5.17}$$

Korišćenjem nejednakosti (videti [24, str. 36])

$$(1+x)^n \leqq 1 + \frac{nx}{1+(1-n)x} \qquad \left(-1 < x < \frac{1}{n-1};\ n=2,3,\ldots\right),$$

na osnovu (2.5.17) dobijamo

$$|e_n| \leqq \frac{1}{2}\, \frac{x_n h Y}{1-(n-1)Ah}, \tag{2.5.18}$$

što je, evidentno, znatno strožije od (2.5.15).

Uzmimo konkretan slučaj $A=-4$, $h=0.2$, $x_N = 1$.

Kako je $y_n = (1+Ah)^n = 0.2^n$, $x_n = nh = 0.2n$ $(n=0,1,\ldots,5)$, $y(x_n) = e^{Ax_n} = e^{-4x_n}$, imamo

$$e_n = y(x_n) - y_n = e^{-0.8n} - 0.2^n,$$

$$|e_n| \leqq 0.32ne^{0.8n} = g_1(n) \qquad \text{(na osnovu (2.5.15))},$$

$$|e_n| \leqq \frac{1.6n}{4n+1} = g_2(n) \qquad \text{(na osnovu (2.5.18))},$$

Uporedjenja radi, u tabeli 2.5.1 su date vrednosti za $e_n$, $g_1(n)$, $g_2(n)$ $(n=0,1,\ldots,5)$.

Tabela 2.5.1

| n | $x_n$ | $e_n$ | $g_1(n)$ | $g_2(n)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.0 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 1 | 0.2 | 0.249 | 0.712 | 0.320 |
| 2 | 0.4 | 0.162 | 3.170 | 0.356 |
| 3 | 0.6 | 0.083 | 10.582 | 0.369 |
| 4 | 0.8 | 0.039 | 31.402 | 0.376 |
| 5 | 1.0 | 0.018 | 87.357 | 0.381 |

## 8.2.6. Numerička stabilnost

Jedan od glavnih problema u primeni višekoračnih metoda je izbor veličine koraka h. U odeljku 8.2.3 razmatrali smo problem konvergencije višekoračnih metoda. Naime, tada smo definisali konzistenciju i nula-stabilnost, kao dve važne i neophodne osobine koje garantuju konvergenciju metoda u smislu definicije 2.3.1, tj. kada $h \to 0$, $n \to +\infty$, $nh = \text{const}$. Medjutim, situacija se menja kada za h uzmemo fiksiran pozitivan broj. Pri ovome je potrebno uvesti zahtev da se ukupna diskretizaciona greška (uključujući i grešku zaokrugljivanja) na stabilan način prostire kroz računski proces. Dakle, treba razmatrati promenu greške $\tilde{e}_n$ kada n raste. Stoga posmatrajmo jednačinu (2.5.14).

Da bismo mogli uporedjivati karakteristike različitih višekoračnih metoda uvedimo pretpostavke

(2.6.1) $$\frac{\partial f}{\partial y} = A \qquad (A = \text{const})$$
i
$$\Phi_n = \Phi \qquad (\Phi = \text{const}).$$

Tada se (2.5.14) svodi na jednačinu

$$\sum_{i=o}^{k} (\alpha_i - Ah\beta_i)\tilde{e}_{n+i} = \Phi,$$

čije je opšte rešenje odredjeno sa

$$(2.6.2) \qquad \tilde{e}_n = \sum_{i=1}^{k} C_i r_i^n - \frac{\Phi}{Ah\sigma(1)},$$

gde su $C_i$ proizvoljne konstante i $r_i$ nule karakterističnog polinoma

$$(2.6.3) \qquad \pi(r,\bar{h}) = \sum_{i=o}^{k} (\alpha_i - \bar{h}\beta_i) r^i = \rho(r) - \bar{h}\sigma(r) \qquad (\bar{h}=Ah),$$

za koje smo pretpostavili da su medjusobno različite.

Polinom $\pi(r,\bar{h})$ se naziva polinomom stabilnosti.

<u>Definicija 2.8.1.</u> Ako za dato $\bar{h}$ sve nule $r_i$ polinoma $\pi(r,\bar{h})$ ispunjavaju uslov $|r_i| < 1$ $(i=1,\dots,k)$, tada kažemo da je linearni višekoračni metod apsolutno stabilan za dato $\bar{h}$; u protivnom kažemo da je apsolutno nestabilan. Ako je metod apsolutno stabilan za svako $\bar{h}\in(\alpha,\beta)$, interval $(\alpha,\beta)$ nazivamo intervalom apsolutne stabilnosti.

Uslov stabilnosti $|r_i| < 1$ $(i=1,\dots,k)$ obezbedjuje da se greška $\tilde{e}_n$ ne povećava kad n raste, čak i u slučaju kada je neka od nula $r_i$ višestruka. Interval apsolutne stabilnosti zavisi samo od koeficijenata metoda. Medjutim, odgovarajuća vrednost za h, za koju je metod apsolutno stabilan, zavisi od A $(\bar{h}=hA)$, gde je A dato pomoću (2.6.1). Mada $\frac{\partial f}{\partial y}$ nije konstantno u opštem slučaju† prethodno razmatranje ne gubi od značaja, s obzirom da se za A može uzeti neka srednja vrednost izvoda $\frac{\partial f}{\partial y}$ na dovoljno malom podsegmentu $\Delta_j\in[x_o,b]$. Naime, segment $[x_o,b]$, na kome tražimo rešenje diferencijalne jednačine, podelimo na niz podsegmenata $\Delta_j$ i na svakom od njih odredimo vrednost za $A(=A_j)$. Na taj način, dobićemo na svakom podsegmentu maksimalno dozvoljenu vrednost za h.

Kako je $\pi(r,0)=\rho(r)$, zaključujemo da se za $\bar{h}=0$, nula $r_i$ poklapa sa nulom $\xi_i$ polinoma $\rho$. Dakle, $r_i=r_i(\bar{h})\to\xi_i$ $(i=1,\dots,k)$, kada $\bar{h}\to 0$. Može se pokazati da su $r_i$ neprekidne funkcije od $\bar{h}$. Ako

† *Pretpostavka (2.6.1) važi samo ako je $f(x,y)=Ay+g(x)$, gde je g proizvoljna neprekidna funkcija*

je p red linearnog višekoračnog metoda, nije teško pokazati i asimptotsku jednakost

$$r_1 = \exp(\bar{h}) + O(\bar{h}^{p+1}) \qquad (\bar{h} \to 0), \tag{2.6.4}$$

iz koje sleduje da je za dovoljno malo pozitivno $\bar{h}$, $r_1 > 1$, što znači da je svaki metod apsolutno nestabilan za takvo $\bar{h}$. Može se postaviti pitanje da li za konvergentan metod (konzistentan i nula-stabilan) postoji interval apsolutne stabilnosti. Odgovor na ovo pitanje nije potvrdan. Na primer, optimalni metodi (videti odeljak 8.2.3) nemaju interval apsolutne stabilnosti.

Moguće je uvesti i drugi koncept numeričke stabilnosti, po kome bismo kontrolisali relativnu grešku.

S obzirom da je opšti Cauchyev problem, za koji važi pretpostavka (2.6.1),

$$y' = Ay + g(x), \quad y(x_o) = y_o,$$

gde je $g$ proizvoljna neprekidna funkcija, imamo

$$y = y_o e^{A(x-x_o)} + \phi(x), \tag{2.6.5}$$

gde smo stavili

$$\phi(x) = e^{Ax} \int_{x_o}^{x} g(x) e^{-Ax} dx.$$

S druge strane, član u izrazu (2.6.2), koji odgovara nuli $r_1$, je

$$C_1 r_1^n = C_1 e^{n\bar{h}} + O(\bar{h}^{\,p+1}) = C_1 e^{A(x_n-x_o)} + O(\bar{h}^{p+1}),$$

s obzirom na jednakost (2.6.4). Ako pretpostavimo da je nula $r_1$ dominantna u odnosu na ostale, tj. da je $|r_1| > |r_i|$ $(i=2,\ldots,k)$, na osnovu poslednje jednakosti i jednakosti (2.6.5) zaključujemo da greška $\tilde{e}_n$ i tačno rešenje (2.6.5) na sličan način rastu (opadaju), kada $n$ raste. Drugim rečima, relativna greška ostaje ograničena, kada $n$ raste. Na ovaj način dolazimo do nove definicije stabilnosti.

Definicija 2.6.2. Ako za dato $\bar{h}$ nule polinoma (2.6.3) ispunjavaju uslov $|r_1| > |r_i|$ $(i=2,\dots,k)$, tada kažemo da je linearni višekoračni metod relativno stabilan za dato $\bar{h}$; u protivnom kažemo da je relativno nestabilan. Ako je metod relativno stabilan za svako $\bar{h}\in(\alpha,\beta)$, onda ovaj interval nazivamo intervalom relativne stabilnosti.

Primer 2.6.1. Kod Simpsonovog pravila

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n),$$

polinom stabilnosti je

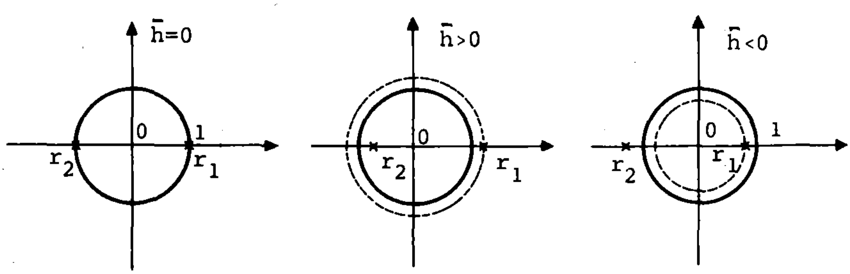
$$\pi(r,\bar{h}) = r^2 - 1 - \frac{\bar{h}}{3}(r^2 + 4r + 1) = (1-\frac{\bar{h}}{3})r^2 - \frac{4}{3}\bar{h}r - (1+\frac{\bar{h}}{3}).$$

Ovaj metod je apsolutno nestabilan za svako $\bar{h}$.

Pokazaćemo sada da ovaj metod ima interval relativne stabilnosti. Posmatrajmo sada slučaj kada je $\bar{h}$ dovoljno malo. Tada je, s obzirom na (2.6.4), $r_1=1+\bar{h}+O(\bar{h}^2)$. Kako $r_2\to-1$ $(\bar{h}\to 0)$, mora biti $r_2=-1+\gamma\bar{h}+O(\bar{h}^2)$, pa iz uslova $\pi(r_2,\bar{h})=0$ nalazimo $\gamma = \frac{1}{3}$, tj. $r_2 = -1 + \frac{1}{3}\bar{h} + O(\bar{h}^2)$. Dakle, za dovoljno malo $\bar{h}$, imamo

$$r_1 \simeq 1 + \bar{h} \quad \text{i} \quad r_2 \simeq -1 + \frac{1}{3}\bar{h}.$$

Položaj ovih nula, u odnosu na jedinični krug u ravni r, za $\bar{h}=0$, $\bar{h}>0$, $\bar{h}<0$ prikazan je na Sl.2.6.1.




Sl. 2.6.1

Kako je za $\bar{h}>0$, $r_1>1$, a za $\bar{h}<0$, $r_2<-1$, zaključujemo da je u posmatranom slučaju, metod apsolutno nestabilan. Kako je medjutim, $|r_1|>|r_2|$ za $\bar{h}>0$, izlazi da metod ima interval relativne stabilnosti koji je oblika $(0,\beta)$. Direktnim uporedjivanjem tačnih izraza za $r_1$ i $r_2$ može se pokazati da je $\beta=+\infty$.

S obzirom da se transformacijom $r\mapsto z = \frac{r-1}{r+1}$ krug $|r|<1$ iz r-ravni, preslikava na oblast Re $z<0$ u z-ravni, problem ispitivanja apsolutne stabilnosti višekoračnih metoda se može svesti na ispitivanje da li je polinom Q, dat pomoću

$$Q(z) = (1-z)^k\{\rho(\tfrac{1+z}{1-z}) - \bar{h}\sigma(\tfrac{1+z}{1-z})\},$$

Hurwitzov. O Hurwitzovim polinomima videti [26].

Primer 2.6.2. Za metod $y_{n+2} - y_n = \frac{h}{2}(f_{n+1} + 3f_n)$, imamo

$$\pi(r,\bar{h}) = r^2 - \tfrac{1}{2}\bar{h}r - (1 + \tfrac{3}{2}\bar{h})$$

i

$$Q(z) = (1-z)^2\Big[(\tfrac{1+z}{1-z})^2 - \tfrac{1}{2}\bar{h}(\tfrac{1+z}{1-z}) - (1+\tfrac{3}{2}\bar{h})\Big],$$

tj.

$$Q(z) = -\bar{h}z^2 + (4 + 3\bar{h})z - 2\bar{h}.$$

Polinom Q je Hurwitzov ako $\bar{h}\in(-\frac{4}{3},0)$, što znači da je interval apsolutne stabilnosti za dati metod $(-\frac{4}{3},0)$.

Iz prethodnog razmatranja možemo zaključiti da se veličina koraka h, kod primene nekog metoda mora izabrati tako da se $\bar{h}=Ah$ nalazi u intervalu apsolutne ili u intervalu relativne stabilnosti metoda.

Na kraju napomenimo da su u pogledu numeričke stabilnosti bolji metodi sa većim intervalom stabilnosti. U tom pogledu su, na primer, implicitni metodi znatno bolji od odgovarajućih eksplicitnih metoda. Ilustracije radi navešćemo interval apsolutne stabilnosti $(\alpha,0)$ za Adamsove metode (eksplicitne i implicitne).

Tabela 2.6.1

| | Adams-Bashfortovi metodi | | | | Adams-Moultonovi metodi | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| p | 1 | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $\alpha$ | -2 | -1 | $-\frac{6}{11}$ | $-\frac{3}{11}$ | $-\infty$ | -6 | -3 | $-\frac{90}{49}$ |

## 8.2.7. Prediktor–korektor metodi

Kao što smo ranije videli, implicitni metodi imaju niz prednosti nad eksplicitnim (viši red, bolja numerička stabilnost), medjutim, njihova primena na rešavanje Cauchyevog problema

$$y' = f(x,y), \quad y(x_o) = y_o$$

zahteva rešavanje nelinearne jednačine

$$y_{n+k} = h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}) + \phi_n, \tag{2.7.1}$$

gde je $\phi_n = h \sum_{i=o}^{k-1} \beta_i f_{n+i} - \sum_{i=o}^{k-1} \alpha_i y_{n+i}$, po $y_{n+k}$ u svakom koraku, pri čemu su vrednosti $y_{n+i}$ $(i=0,1,\ldots,k-1)$ poznate. Kao što je napomenuto u odeljku 8.2.2 jednačina (2.7.1) se može rešiti iterativnim procesom

$$y_{n+k}^{[s+1]} = h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[s]}) + \phi_n \quad (s=0,1,\ldots), \tag{2.7.2}$$

koji konvergira pod uslovom da je

$$h < \frac{1}{L|\beta_k|}$$

gde je L Lipschitzova konstanta za f.

Početna vrednost $y_{n+k}^{[o]}$ može se odrediti korišćenjem nekog eksplicitnog metoda, koji tada nazivamo prediktor. Implicitni metod (2.7.1) nazivamo korektor. Metod dobijen ovakvom kombinacijom nazivamo prediktor-korektor metod.

Za odredjivanje $y_{n+k}$, iterativni proces (2.7.2) treba primenjivati sve dok ne bude ispunjen uslov

$$\left| y_{n+k}^{[s+1]} - y_{n+k}^{[s]} \right| < \varepsilon,$$

gde je $\varepsilon$ dozvoljena greška, obično reda lokalne greške zaokrugljivanja. Tada se za $y_{n+k}$ može uzeti $y_{n+k}^{[s+1]}$. Pri ovakvom postupku, karakteristike metoda su iste sa karakteristikama korektora pri čemu prediktor može biti čak i nula-nestabilan.

Medjutim, ovakva način se najčešće ne primenjuje u praksi, s obzirom da zahteva veliki broj izračunavanja vrednosti funkcije f po jednom koraku i uz to je ovaj broj promenljiv od koraka do koraka. Da bi se smanjio ovaj broj izračunavanja, broj iteracija u (2.7.2) se fiksira. Dakle, uzima se samo $s=0,1,\ldots,m-1$. U ovom slučaju, karakteristike prediktor-korektor metoda zavisiće ne samo od karakteristika korektora, već i od karakteristika prediktora.

Prethodno uvedimo neka označavanja. Naime, neka P označava primenu prediktora, C primenu korektora i E jedno izračunavanje vrednosti funkcije f. Na primer, ako $y_{n+k}^{[0]}$ izračunavamo pomoću prediktora, zatim izračunavamo $f_{n+k}^{[0]} \equiv f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[0]})$ i najzad primenimo korektor za izračunavanje vrednosti $y_{n+k}^{[1]}$, imali bismo postupak označen sa PEC. Ako sada izračunavamo $f_{n+k}^{[1]} \equiv f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[1]})$ i ponovo primenimo korektor za izračunavanje vrednosti $y_{n+k}^{[2]}$, imamo postupak koji se označava sa PECEC, ili kraće $P(EC)^2$. Ako iterativni proces (2.7.2) primenimo m puta, tj. sa $s=0,1,\ldots,m-1$, tada imamo $P(EC)^m$. Pri ovome smo izračunali $y_{n+k}^{[m]}$, dok je poslednja izračunata vrednost za $f_{n+k}$, $f_{n+k}^{[m-1]} \equiv f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[m-1]})$.

Dalji postupak primene prediktor-korektor metoda može ići na izračunavanje $y_{n+k+1}^{[0]}$ pomoću prediktora. Medjutim, pre ovog koraka može se izračunati nova vrednost funkcije $f_{n+k}^{[m]} \equiv f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[m]})$, što se označava sa $P(EC)^m E$. Dakle, u primeni prediktor-korektor metoda postoje dva načina $P(EC)^m$ i $P(EC)^m E$. Interesantno je napomenuti da im se karakteristike numeričke stabilnosti bitno razlikuju (što je m manje).

Pretpostavimo sada da su prediktor i korektor definisani pomoću karakterističnih polinoma

$$\bar{\rho}(\xi) = \sum_{i=0}^{k} \bar{\alpha}_i \xi^i, \qquad \bar{\sigma}(\xi) = \sum_{i=0}^{k-1} \bar{\beta}_i \xi^i$$

i

$$\rho(\xi) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \xi^i, \qquad \sigma(\xi) = \sum_{i=0}^{k} \beta_i \xi^i$$

respektivno. Tada su načini $P(EC)^m$ i $P(EC)^m E$ redom definisani sa

$$y_{n+k}^{[o]} + \sum_{i=0}^{k-1} \bar{\alpha}_i y_{n+i}^{[m]} = h \sum_{i=0}^{k-1} \bar{\beta}_i f_{n+i}^{[m-1]},$$

$$\left.\begin{aligned} f_{n+k}^{[s]} &= f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[s]}) \\ y_{n+k}^{[s+1]} + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i y_{n+i}^{[m]} &= h\beta_k f_{n+k}^{[s]} + h \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i f_{n+i}^{[m-1]} \end{aligned}\right\} \quad (s=0,1,\ldots,m-1),$$

i

$$y_{n+k}^{[o]} + \sum_{i=0}^{k-1} \bar{\alpha}_i y_{n+i}^{[m]} = h \sum_{i=0}^{k-1} \bar{\beta}_i f_{n+i}^{[m]},$$

$$\left.\begin{aligned} f_{n+k}^{[s]} &= f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[s]}) \\ y_{n+k}^{[s+1]} + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i y_{n+i}^{[m]} &= h\beta_k f_{n+k}^{[s]} + h \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i f_{n+i}^{[m]} \end{aligned}\right\} \quad (s=0,1,\ldots,m-1),$$

$$f_{n+k}^{[m]} = f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[m]}).$$

Neka je red prediktora $\bar{p} \geq 0$, red korektora $p \geq 1$. Analizom lokalne greške odsecanja prediktor-korektor metoda može se doći do sledećeg zaključka (videti [19]):

$1^o$ Ako je $\bar{p} \geq p$, lokalna greška odsecanja je ista kao kod korektora;

$2^o$ Ako je $\bar{p} = p-q$ $(0 < q \leq p)$, lokalna greška odsecanja je

- ista kao kod korektora za $m \geq q+1$,
- istog reda kao kod korektora (ali ne i identična) za $m=q$,
- oblika $Kh^{p-q+m+1} + O(h^{p-q+m+2})$ za $m \leq q-1$.

Razmotrićemo sada posebno slučaj kada je $\bar{p}=p$.

Može se postaviti pitanje da li se glavni član lokalne greške odsecanja može oceniti bez upotrebe viših izvoda. Odgovor na ovo pitanje daje Milneovo pravilo.

Neka su $C_{p+1}$ i $\bar{C}_{p+1}$ konstante greške za korektor i prediktor respektivno. Tada je

$$\bar{C}_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x_n) \approx y(x_{n+k})-y_{n+k}^{[o]} \quad \text{(za prediktor)}$$

i

$$C_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x_n) \approx y(x_{n+k})-y_{n+k}^{[m]} \quad \text{(za korektor)},$$

odakle oduzimanjem dobijamo

$$(\bar{C}_{p+1} - C_{p+1})h^{p+1}y^{(p+1)}(x_n) \approx y_{n+k}^{[m]} - y_{n+k}^{[o]} .$$

Dakle, za korektor imamo

$$C_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x_n) \approx \frac{C_{p+1}}{\bar{C}_{p+1}-C_{p+1}}(y_{n+k}^{[m]} - y_{n+k}^{[o]}),$$

pa se vrednost $y_{n+k}^{[m]}$ koja se dobija primenom korektora može modifikovati (korigovati) na vrednost $\hat{y}_{n+k}^{[m]}$, gde je

$$\hat{y}_{n+k}^{[m]} = y_{n+k}^{[m]} + \frac{C_{p+1}}{\bar{C}_{p+1} - C_{p+1}}(y_{n+k}^{[m]} - y_{n+k}^{[o]}).$$

Slično prethodnom, za prediktor imamo

$$\text{(2.7.3)} \qquad \bar{C}_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x_n) \approx \frac{\bar{C}_{p+1}}{\bar{C}_{p+1} - C_{p+1}}(y_{n+k}^{[m]} - y_{n+k}^{[o]}).$$

Vrednost za $y_{n+k}^{[o]}$ ne može se direktno modifikovati pomoću (2.7.3), s obzirom da se u tom momentu ne zna vrednost za $y_{n+k}^{[m]}$.

Kako je, medjutim,

$$\bar{C}_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x_n) = \bar{C}_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x_{n-1})+0(h^{p+2})$$

$$\approx \frac{\bar{C}_{p+1}}{\bar{C}_{p+1} - C_{p+1}}(y_{n+k-1}^{[m]} - y_{n+k-1}^{[o]}),$$

za modifikovanu vrednost prediktora može se uzeti

$$\hat{y}_{n+k}^{[o]} = y_{n+k}^{[o]} + \frac{\bar{C}_{p+1}}{\bar{C}_{p+1} - C_{p+1}}(y_{n+k-1}^{[m]} - y_{n+k-1}^{[o]}).$$

Postupak modifikacije simbolički označavamo sa M, tako da ranije posmatrani načini $P(EC)^m$ i $P(EC)^m E$, sa upotrebom navedenih modifikacija postaju

$$PM(EC)^m M \quad \text{i} \quad PM(EC)^m ME.$$

Primer 2.7.1. Uzmimo Eulerov metod ($\bar{p}=1$) kao prediktor i trapezno pravilo ($p=2$)

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n)$$

kao korektor sa brojem iteracija $m=2$. Tada $P(EC)^2E$ ima oblik

$$y_{n+1}^{[o]} - y_n^{[2]} = hf_n^{[2]},$$

$$\left.\begin{aligned} f_{n+1}^{[s]} &= f(x_{n+1}, y_{n+1}^{[s]}) \\ y_{n+1}^{[s+1]} - y_n^{[2]} &= \frac{h}{2}(f_{n+1}^{[s]} + f_n^{[2]}) \end{aligned}\right\} \quad (s=0,1),$$

$$f_{n+1}^{[2]} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{[2]}).$$

S obzirom da je $q=p-\bar{p}=1$ i $q+1=m$, na osnovu prethodnog, imamo da je lokalna greška odsecanja prediktor-korektor metoda ista kao kod korektora.

Primenom ovog metoda na rešavanje Cauchyevog problema (2.4.3) sa $h=0.1$ dobijamo rezultate koji su dati u tabeli 2.7.1. Prikazali smo vrednosti koje se dobijaju posle primene prediktora, kao i vrednosti koje se dobijaju nakon dvosruke korekcije pomoću korektora. U poslednjoj koloni tabele data je relativna greška $r_n = (y_n^{[2]} - y(x_n))/y(x_n)$ izražena u procentima (procentualna greška). Tačno rešenje problema je dato sa $y(x)=6e^{x-1}-x^2-2x-2$.

Tabela 2.7.1

| $n$ | $x_n$ | $y_n^{[o]}$ | $y_n^{[2]}$ | $r_n(\%)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.0 | 1.0000 | 1.0000 | 0.00 |
| 1 | 1.1 | 1.2000 | 1.2215 | 0.04 |
| 2 | 1.2 | 1.4647 | 1.4895 | 0.07 |
| 3 | 1.3 | 1.7825 | 1.8110 | 0.10 |
| 4 | 1.4 | 2.1611 | 2.1936 | 0.12 |
| 5 | 1.5 | 2.6090 | 2.6460 | 0.14 |

Primer 2.7.2. Za prediktor uzmimo Adams-Bashforthov metod

$$\text{P:}\quad y_{n+1}-y_{n+3}=\frac{h}{24}(5f_{n+3}-59f_{n+2}+37f_{n+1}-9f_n),$$

čiji je red $p=4$ i konstanta greške $\bar{C}_5=\frac{251}{720}$, a za korektor Adams-Moultonov metod

$$\text{C:}\quad y_{n+3}-y_{n+2}=\frac{h}{24}(9f_{n+3}+19f_{n+2}-5f_{n+1}+f_n),$$

čiji je red, takodje, $p=4$, a $C_5=-\frac{19}{720}$. S obzirom da je korektor trokoračan, a prediktor četvorokoračan, kod formiranja prediktor-korektor metoda treba u korektoru povećati $n$ za jedinicu i time usaglasiti broj koraka. Daćemo sada algoritam za PMECE.

Kako je

$$\frac{\bar{C}_5}{\bar{C}_5-C_5}=\frac{251}{270}\quad\text{i}\quad\frac{C_5}{\bar{C}_5-C_5}=-\frac{190}{270}$$

na osnovu prethodnog imamo sledeći algoritam:

$$\text{P:}\quad y_{n+4}^{[o]}-\hat{y}_{n+3}^{[1]}=\frac{h}{24}(5\hat{f}_{n+3}^{[1]}-59\hat{f}_{n+2}^{[1]}+37\hat{f}_{n+1}^{[1]}-9\hat{f}_{n}^{[1]}),$$

$$\text{M:}\quad \hat{y}_{n+4}^{[o]}=y_{n+4}^{[o]}+\frac{251}{270}(y_{n+3}^{[1]}-y_{n+3}^{[o]}),$$

$$\text{E:}\quad \hat{f}_{n+4}^{[o]}=f(x_{n+4},\hat{y}_{n+4}^{[o]}),$$

$$\text{C:}\quad y_{n+4}^{[1]} - \hat{y}_{n+3}^{[1]} = \frac{h}{24}(9\hat{f}_{n+4}^{[0]} + 19\hat{f}_{n+3}^{[1]} - 5\hat{f}_{n+2}^{[1]} + \hat{f}_{n+1}^{[1]}),$$

$$\text{M:}\quad \hat{y}_{n+4}^{[1]} = y_{n+4}^{[1]} - \frac{19}{270}(y_{n+4}^{[1]} - y_{n+4}^{[0]}),$$

$$\text{E:}\quad \hat{f}_{n+4}^{[1]} = f(x_{n+4}, \hat{y}_{n+4}^{[1]}).$$

## 8.2.8. Primena višekoračnih metoda na sisteme jednačina i jednačine višeg reda

Kao što je navedeno u odeljku 8.1.1 sistem diferencijalnih jednačina prvog reda (1.1.2) se može predstaviti u vektorskom obliku (1.1.3), tj. u obliku

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(x,\vec{y}), \quad \vec{y}(x_o) = \vec{y}_o. \tag{2.8.1}$$

Linearni višekoračni metodi, koje smo do sada razmatrali, mogu se formalno generalisati na vektorski oblik

$$\sum_{i=o}^{k} \alpha_i \vec{y}_{n+i} = h \sum_{i=o}^{k} \beta_i \vec{f}_{n+i}, \tag{2.8.2}$$

gde je $\vec{f}_{n+i} = \vec{f}(x_{n+i}, \vec{y}_{n+i})$, a zatim se kao takvi mogu primeniti na rešavanje Cauchyevog problema (2.8.1). Pri ovome skoro sve osobine višekoračnih metoda mogu se formalno preneti na metod (2.8.2).

Primer 2.8.1. Primenimo Eulerov metod

$$\vec{y}_{n+1} - \vec{y}_n = h\vec{f}_n$$

na rešavanje diferencijalne jednačine drugog reda

$$y'' = 2y(1+y^2),$$

sa uslovima $y(0)=1$ i $y'(0)=2$.

Ako stavimo $y'=z$, data jednačina se svodi na sistem

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= 2y(1+y^2) \end{aligned} \tag{2.8.3}$$

sa uslovima $y(0)=1$ i $z(0)=2$. Tada primenom Eulerovog metoda na sistem jednačina (2.8.3) dobijamo

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hz_n \\ z_{n+1} &= z_n + 2hy_n(1+y_n^2) \end{aligned} \qquad (n=0,1,\dots),$$

gde su $y_o=1$ i $z_o=2$.

S obzirom na važnost izbora koraka integracije $h$, ovde ćemo se posebno zadržati na problemu numeričke stabilnosti.

Slično kao i u odeljku 8.2.6 može se razmatrati apsolutna i relativna stabilnost metoda (2.8.2). Pri ovome pretpostavka (2.6.1) zamenjuje se pretpostavkom da je Jacobieva matrica za f konstantna, tj.

$$W(\vec{f}(x,\vec{y})) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}} = A,$$

gde je A konstantna kvadratna matrica reda $m$. Takodje, za vektor greške $\vec{\phi}_n$ pretpostavljamo da je konstantan. Analogon veličine $\bar{h}$, je sada $\bar{h}=\lambda h$, gde je $\lambda$ proizvoljna sopstvena vrednost matrice A. Kako u opštem slučaju matrica A može imati kompleksne sopstvene vrednosti to je ovde umesno, umesto intervala stabilnosti, uvesti oblast stabilnosti u kompleksnoj ravni $\bar{h}$.

Definicija 2.8.1. Za linearni višekoračni metod (2.8.2) kažemo da je apsolutno stabilan u oblasti D kompleksne ravni ako, za svako $\bar{h}\in D$, sve nule $r_i$ polinoma $\pi(r,\bar{h})$, definisanog pomoću (2.6.3), ispunjavaju uslov $|r_i| < 1$ $(i=1,\dots,k)$.

Definicija 2.8.2. Za linearni višekoračni metod (2.8.2) kažemo da je relativno stabilan u oblasti D kompleksne ravni ako, za svako $\bar{h}\in D$, nule polinoma (2.6.3) ispunjavaju uslov $|r_1| > |r_i|$ $(i=2,\dots,k)$.

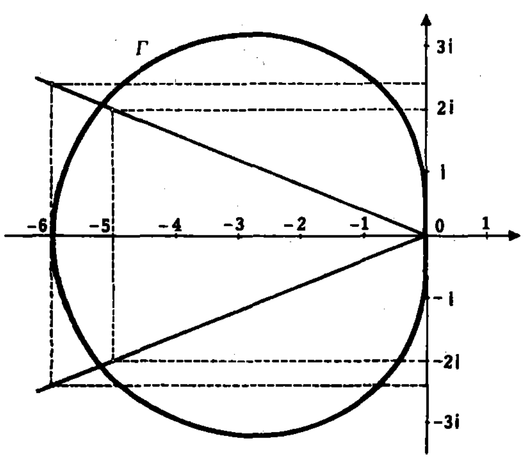
Korak integracije $h$, treba birati tako da $\bar{h}=\lambda h\in D$, gde je $\lambda$ bilo koja sopstvena vrednost matrice A. Naravno, rezonovanje, vezano za promenu koraka u toku integracije, koje je dato u odeljku 8.2.6 ostaje i ovde u važnosti.

Analizirajmo apsolutnu stabilnost Adams-Moultonovog metoda

$$\vec{y}_{n+2} - \vec{y}_{n+1} = \frac{h}{12}(5\vec{f}_{n+2} + 8\vec{f}_{n+1} - \vec{f}_n),$$

čiji skalarni analogon ima interval apsolutne stabilnosti (-6,0) (videti tabelu 2.6.1).

Nije teško uočiti da će granica oblasti apsolutne stabilnosti $\Gamma$ (Sl. 2.8.1) biti definisana parametarski pomoću jednakosti




Sl. 2.8.1

$$x(\theta) = 6(4\cos\theta - \cos 2\theta - 3)/g(\theta),$$

$$y(\theta) = 6(14\sin\theta - \sin 2\theta)/g(\theta),$$

$$g(\theta) = 45 + 32\cos\theta - 5\cos 2\theta,$$

koje sleduju iz

$$\bar{h}(\theta) = \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})} = \frac{12(e^{2i\theta} - e^{i\theta})}{5e^{2i\theta} - 8e^{i\theta} - 1} = x(\theta)+iy(\theta).$$

Da bismo primenili ovaj metod na rešavanje, na primer, diferencijalne jednačine

$$y'' + 20y' + 115y = 0$$

sa nekim unapred zadatim početnim uslovima, treba jednačinu svesti na sistem jednačina prvog reda. Standardnim postupkom dobijamo ekvivalentni sistem

$$z_1' = z_2,$$
$$z_2' = -116z_1 - 20z_2,$$

za koji je Jacobieva matrica

$$W = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -116 & -20 \end{bmatrix}$$

i čije su sopstvene vrednosti $\lambda_{1,2} = -10 \pm 4i$ .

Dakle, u ovom slučaju, imamo

$$\bar{h}_{1,2} = h\lambda_{1,2} = h(-10 \pm 4i).$$

Ako se $h$ izabere tako da $\bar{h}_1$ i $\bar{h}_2$ pripadaju oblasti $D(=\mathrm{int}\,\Gamma)$ metod će biti apsolutno stabilan. Na primer, ako je $h=0.5 \Rightarrow \bar{h}_{1,2} = -5 \pm 2i\,(\in D)$, dok za $h=0.6$ vidimo da $\bar{h}_{1,2} = -6 \pm 2.4i$ ne pripada oblasti $D$, tj. za takvo $h$ metod nije apsolutno stabilan.

Razmotrimo sada klasu problema oblika

$$y'' = f(x,y), \; y(x_o) = y_{oo}, \; y'(x_o) = y_{1o}.$$

Za rešavanje ovakvih problema na segmentu $[x_o, b]$, mogu se koristiti direktno linearni višekoračni metodi oblika

$$\sum_{i=o}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h^2 \sum_{i=o}^{k} \beta_i f_{n+i}, \tag{2.8.4}$$

gde su $\alpha_k = 1$ i $|\alpha_o| + |\beta_o| > 0$.

Za metod (2.8.4) definiše se linearni operator $L_h : C^2[x_o,b] \to C[x_o,b]$ pomoću

$$L_h[y] = \sum_{i=1}^{k} [\alpha_i y(x+ih) - h^2\beta_i y''(x+ih)].$$

Ako $g \in C^\infty[x_o,b]$, korišćenjem Taylorovog razvoja, imamo

$$L_h[h] = C_o y(x) + C_1 hy'(x) + \ldots + C_i h^i y^{(i)}(x) + \ldots ,$$

gde su

$$C_o = \alpha_o + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k ,$$

$$C_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + k\alpha_k ,$$

$$C_2 = \frac{1}{2!}(\alpha_1 + 2^2\alpha_2 + \ldots + k^2\alpha_k) - (\beta_o + \beta_1 + \ldots + \beta_k) ,$$

$$C_i = \frac{1}{i!}(\alpha_1 + 2^i\alpha_2 + \ldots + k^i\alpha_k)$$

$$- \frac{1}{(i-2)!}(\beta_1 + 2^{i-2}\beta_2 + \ldots + k^{i-2}\beta_k) \quad (i=3,4,\ldots).$$

<u>Definicija 2.8.3.</u> Za metod (2.8.4) kaže se da ima red $p$, ako je

$$C_o = C_1 = \ldots = C_p = C_{p+1} = 0 \quad \text{i} \quad C_{p+2} \neq 0.$$

Koeficijent $C_{p+2}$ se naziva konstantna greška, a član $C_{p+2}h^{p+2}y^{(p+2)}(x_n)$ glavni član lokalne greške odsecanja u tački $x_{n+k}$.

<u>Definicija 2.8.4.</u> Ako je red metoda $p \geq 1$ kaže se da je metod konzistentan.

Primetimo da je metod konzistentan ako i samo ako je $\rho(1)=\rho'(1)=0$ i $\rho''(1)=2\sigma(1)$, gde su polinomi $\rho$ i $\sigma$ definisani kao u odeljku 2.8.3. Dakle, polinom $\rho$ ima dvostruku nulu $\xi=1$. Stavimo $\xi_1=\xi_2=1$.

<u>Definicija 2.8.5.</u> Metod (2.8.4) je nula-stabilan ako polinom $\rho$ nema nula sa modulom većim od jedan i ako su sve nule sa modulom jedan najviše višestrukosti dva.

Neka su $r_1$ i $r_2$ nule polinoma

$$\pi(r,h) = \rho(r) - \bar{h}\sigma(r) \qquad (\bar{h}=h^2A)$$

koje odgovaraju nulama $\xi_1$ i $\xi_2$ $(\xi_1=\xi_2=1)$.

Definicija 2.8.6. Ako za dato $\bar{h}$ sve nule polinoma $\pi(r,\bar{h})$ zadovoljavaju uslov $|r_i| \leq 1$ $(i=1,\ldots,k)$, za metod (2.8.4) se kaže da je apsolutno stabilan za takvo $\bar{h}$. Ako je, medjutim, $|r_i| \leq \min(|r_1|,|r_2|)$ $(i=3,\ldots,k)$ kaže se da je za takvo $\bar{h}$ metod relativno stabilan.

Od metoda iz klase (2.8.4) najviše su u upotrebi metodi

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = h^2 f_{n+1}$$

i

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = \frac{h^2}{12}(f_{n+2} + 10f_{n+1} + f_n). \tag{2.8.5}$$

Prvi od njih je drugog reda $(C_0=C_1=C_2=C_3=0,\ C_4=\frac{1}{12})$, dok je drugi četvrtog reda $(C_i=0\ (i=0,1,\ldots,5),\ C_6=-\frac{1}{120})$. Metod (2.8.5) poznat je kao metod Numerova.

## 8.3. METODI RUNGE-KUTTA

U prethodnom poglavlju razmatrani su linearni višekoračni metodi za rešavanje Cauchyevog problema za obične diferencijalne jednačine prvog reda. Red ovih metoda se može povećati, kako smo videli, povećavanjem broja koraka. Medjutim, ukoliko se žrtvuje linearnost koju poseduju ovi metodi, moguće je konstruisati jednokoračne metode sa proizvoljno visokim redom.

U specijalnom slučaju, kada je funkcija f u diferencijalnoj jednačini $y' = f(x,y)$ dovoljan broj puta diferencijabilna, moguće je, takodje, konstruisati jednokoračne metode višeg reda, kakav je, na primer, Taylorov metod (videti odeljak 8.1.2).

U ovom poglavlju razmatraćemo jednu posebnu klasu eksplicitnih jednokoračnih metoda koja je poznata kao klasa metoda Runge-Kutta.

## 8.3.1. Uvod

Posmatrajmo, kao i ranije, Cauchyev problem za diferencijalnu jednačinu prvog reda

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{3.1.1}$$

i opšti eksplicitni jednokoračni metod oblika

$$y_{n+1} - y_n = h\Phi(x_n, y_n, h), \tag{3.1.2}$$

gde je h korak integracije.

Definicija 3.1.1. Metod (3.1.2) je reda p ako je p najveći ceo broj za koji važi

$$y(x+h) - y(x) - h\Phi(x,y(x),h) = O(h^{p+1}),$$

gde je $x \mapsto y(x)$ tačno rešenje problema (3.1.1).

Definicija 3.1.2. Metod (3.1.2) je konzistentan ako je $\Phi(x,y,0) = f(x,y)$.

Primetimo da je Taylorov metod specijalan slučaj opšteg metoda (3.1.2). Naime, kod Taylorovog metoda reda p imamo

$$\Phi(x,y,h) = \Phi_T(x,y,h) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{h^i}{(i+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f(x,y). \tag{3.1.3}$$

U specijalnom slučaju, kod Eulerovog metoda imamo da je $\Phi(x,y,h) = f(x,y)$.

Neka je

$$D = \{(x,y,h) \mid x_o \leq x \leq b, \quad |y| < +\infty, \quad 0 \leq h \leq h_o\} .$$

Teorema 3.1.1. Neka funkcija $\Phi$ ispunjava uslove:

$1^o$ Neprekidna u oblasti D;

$2^o$ $|\Phi(x,y,h)-\Phi(x,\bar{y},h)| \leq M\ |y-\bar{y}|$ za svako $(x,y,h)$, $(x,\bar{y},h)\in D$.

Metod (3.1.2) je konvergentan (u smislu definicije 2.3.1) ako i samo ako je konzistentan.

Dokaz ove teoreme može se naći, na primer u[12].

Ovo poglavlje biće posvećeno metodima Runge-Kutta, koji čine specijalnu klasu eksplicitnih jednokoračnih metoda. Analiza ovih metoda je znatno teža, nego što je kod linearnih višekoračnih metoda, zbog odsustva linearnosti. U novije vreme razvijaju se i implicitni metodi Runge-Kutta, koji nad klasičnim eksplicitnim metodima imaju izvesne prednosti u pogledu numeričke stabilnosti.

## 8.3.2. Klasični metodi Runge-Kutta

U ovom odeljku razmatraćemo jednu specijalnu klasu metoda, oblika (3.1.2), koju je 1895. godine predložio C.Runge ([30]). Kasnije, ovu klasu metoda razvili su W.Kutta ([18]) i K.Heun ([13]).

Kao što ćemo kasnije videti, svi ovi metodi sadrže slobodne parametre. S obzirom na vreme u kome su se pojavili ovi metodi, slobodni parametri su birani tako da se dobiju što jednostavnije formule za praktično računanje. Medjutim, ovakve vrednosti parametra ne obezbedjuje optimalne karakteristike posmatranih metoda. U daljem tekstu ove metode zvaćemo klasičnim.

Opšti eksplicitni metod Runge-Kutta ima oblik

$$y_{n+1} - y_n = h\Phi(x_n,y_n,h), \tag{3.2.1}$$

gde su

$$\Phi(x,y,h) = \sum_{i=1}^{m} c_i k_i,$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x,y), \\ k_i &= f(x+a_i h,\ y+b_i h) \\ a_i &= \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij},\quad b_i = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j \end{aligned} \qquad (i=2,\ldots,m). \tag{3.2.2}$$

Primetimo da iz uslova konzistencije metoda (3.2.1) sleduje $\sum_{i=1}^{m} c_i = 1$.

Nepoznate koeficijente koji figurišu u ovom metodu, odredjujemo iz uslova da metod ima maksimalni red. Pri ovome, koristimo sledeću činjenicu: Ako se $\Phi(x,y,h)$, razvijeno po stepenima od h, može predstaviti u obliku

$$\Phi(x,y,h) = \Phi_T(x,y,h) + O(h^p),$$

gde je $\Phi_T$ definisano pomoću (3.1.3), tada je metod (3.2.1) reda p.

Prethodno nadjimo razvoj $\Phi_T(x,y,h)$ po stepenima od h. Korišćenjem Mongeovih oznaka za parcijalne izvode imamo

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial y}\right) f = f_x + ff_y = F$$

i

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial y}\right) F = G + f_y F,$$

gde smo stavili $G=f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy}$. Tada iz (3.1.3) sleduje

$$\Phi_T(x,y,h) = f + \frac{1}{2} hF + \frac{1}{6} h^2 (G + f_y F) + O(h^3). \tag{3.2.3}$$

Razmotrićemo sada samo metode Runge-Kutta, čiji je red $p \leq 3$. Pokazuje se da je za dobijanje metoda trećeg reda dovoljno uzeti m=3. U tom slučaju, formule (3.2.2) se svode na

$$\begin{aligned} \Phi(x,y,h) &= c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3, \\ k_1 &= f(x,y), \\ k_2 &= f(x+a_2 h,\ y+b_2 h), \\ k_3 &= f(x+a_3 h,\ y+b_3 h) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} a_2 &= \alpha_{21},\quad b_2 = \alpha_{21} k_1, \\ a_3 &= \alpha_{31} + \alpha_{32},\quad b_3 = \alpha_{31} k_1 + \alpha_{32} k_2. \end{aligned}$$

Razvijanjem funkcije $k_2$ u Taylorov red, u okolini tačke

$(x,y)$, dobijamo

$$k_2 = f + a_2Fh + \frac{1}{2} a_2^2Gh^2 + O(h^3).$$

Kako je

$$b_3 = \alpha_{31}k_1+\alpha_{32}k_2 = \alpha_{31}f+\alpha_{32}(f+a_2Fh+\frac{1}{2} a_2^2Gh^2) + O(h^3)$$

imamo

$$b_3 = a_3f+a_2\alpha_{32}Fh+O(h^2) \quad i \quad b_3^2 = a_3^2f^2+O(h).$$

Razvijanjem funkcije $k_3$ u okolini tačke $(x,y)$ i korišćenjem poslednjih jednakosti imamo

$$k_3 = f+a_3Fh+\frac{1}{2}(2a_2\alpha_{32}Ff_y+a_3^2G)h^2 + O(h^3).$$

Najzad, zamenom dobijenih izraza za $k_1,k_2,k_3$ u izrazu za $\Phi(x,y,h)$ dobijamo

$$\Phi(x,y,h)=(c_1+c_2+c_3)f+(c_2a_2+c_3a_3)Fh$$
$$+(c_2a_2^2G+2c_3a_2\alpha_{32}Ff_y+c_3a_3^2G)\frac{h^2}{2}+O(h^3).$$

Poslednja jednakost dozvoljava konstrukciju metoda za $m=1,2,3$.

Slučaj $m=1$. Kako je $c_2=c_3=0$ imamo

$$\Phi(x,y,h) = c_1f + O(h^3).$$

Upoređjivanjem sa (3.2.3) dobijamo

$$\Phi_T(x,y,h)-\Phi(x,y,h) = (1-c_1)f+\frac{1}{2}hF+\frac{1}{6}h^2(G+f_yF)+O(h^3),$$

odakle zaključujemo da se za $c_1=1$, dobija metod

$$y_{n+1} - y_n = hf_n,$$

čiji je red $p=1$. S obzirom da je ovo Eulerov metod mi vidimo da on pripada i klasi metoda Runge-Kutta.

Slučaj $m=2$. Ovde je $c_3 = 0$ i

$$\Phi(x,y,h) = (c_1+c_2)f + c_2a_2Fh + \frac{1}{2} c_2a_2^2Gh^2 + O(h^3).$$

Kako je

$$\Phi(x,y,h) - \Phi_T(x,y,h) = (c_1+c_2-1)f + (c_2a_2-\frac{1}{2})Fh +$$
$$+\frac{1}{6}\left[(3c_2a_2^2-1)G-f_yF\right]h^2+O(h^3),$$

zaključujemo da se pod uslovima

$$c_1 + c_2 = 1 \quad i \quad c_2a_2 = \frac{1}{2}, \tag{3.2.4}$$

dobija metod drugog reda sa jednim slobodnim parametrom. Naime, iz sistema jednakosti (3.2.4) sleduje

$$c_2 = \frac{1}{2a_2} \quad i \quad c_1 = \frac{2a_2-1}{2a_2},$$

gde je $a_2(\neq 0)$ slobodan parametar. Dakle, sa m=2 imamo jednoparametarsku familiju metoda

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \frac{h}{2a_2}((2a_2-1)k_1+k_2), \\ k_1 &= f(x_n,y_n), \\ k_2 &= f(x_n+a_2h,y_n+a_2k_1h). \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

U specijalnom slučaju, za $a_2=\frac{1}{2}$, dobijamo Euler-Cauchyev metod

$$y_{n+1}-y_n = hf(x_n+\frac{1}{2}h,\ y_n+\frac{1}{2}hf(x_n,y_n)).$$

Slično, za $a_2=1$, dobijamo tzv. poboljšan Euler-Cauchyev metod

$$y_{n+1}-y_n = \frac{h}{2}\Big[f(x_n,y_n) + f(x_n+h,\ y_n+hf(x_n,y_n))\Big].$$

O geometrijskoj interpretaciji dobijenih metoda videti, na primer, [3].

<u>Slučaj m=3.</u> Kako je

$$\Phi(x,y,h) - \Phi_T(x,y,h) = (c_1+c_2+c_3-1)f+(c_2a_2+c_3a_3-\frac{1}{2})Fh +$$
$$+\Big[(c_2a_2^2+c_3a_3^2-\frac{1}{3})G + (2c_3a_2\alpha_{32}-\frac{1}{3})Ff_y\Big]\frac{h^2}{2}+O(h^3),$$

zaključujemo da su za dobijanje metoda trećeg reda dovoljni uslovi

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 1, \\ c_2a_2 + c_3a_3 &= \frac{1}{2}, \\ c_2a_2^2 + c_3a_3^2 &= \frac{1}{3}, \\ c_3a_2\alpha_{32} &= \frac{1}{6}. \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

S obzirom da imamo četiri jednačine sa šest nepoznatih, izlazi da, u slučaju m=3, imamo dvoparametarsku familiju metoda Runge-

Kutta. Može se pokazati da medju metodima ove familije ne postoji ni jedan metod čiji je red veći od tri.

U specijalnom slučaju, kada je $a_2 = \frac{1}{3}$ i $a_3 = \frac{2}{3}$, iz (3.2.6) sleduje $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = 0$, $c_3 = \frac{3}{4}$, $\alpha_{32} = \frac{2}{3}$. Dakle dobili smo metod

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} - y_n &= \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3),\\
k_1 &= f(x_n, y_n),\\
k_2 &= f(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3}k_1),\\
k_3 &= f(x_n + \frac{2h}{3}, y_n + \frac{2h}{3}k_2),
\end{aligned}
$$

koji se u literaturi sreće kao Heunov metod.

Za $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 1$ ($\Rightarrow c_1 = c_3 = \frac{1}{6}$, $c_2 = \frac{2}{3}$, $\alpha_{32} = 2$) dobijamo metod

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} - y_n &= \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3),\\
k_1 &= f(x_n, y_n),\\
k_2 &= f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1),\\
k_3 &= f(x_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2),
\end{aligned}
$$

koji je najpopularniji medju metodima trećeg reda sa stanovišta ručnog izračunavanja.

U slučaju kada je m=4, dobijamo dvoparametarsku familiju metode četvrtog reda. Naime, ovde se, analogno sistemu (3.2.5), javlja sistem od 11 jednačina sa 13 nepoznatih.

Sada navodimo, bez dokaza, metod Runge-Kutta četvrtog reda

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} - y_n &= \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),\\
k_1 &= f(x_n, y_n),\\
k_2 &= f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1),\\
k_3 &= f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2),\\
k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3),
\end{aligned}
\tag{3.2.7}
$$

koji se u primenama tradicionalno najviše koristi.

Primer 3.2.1. Primenom metoda (3.2.7), sa korakom h=0.1, na rešavanje Cauchyevog problema

$$y' = x^2 + y, \quad y(1) = 1 \qquad (1 \leq x \leq 1.5),$$

dobijaju se rezultati koji su sredjeni u tabeli 3.2.1.

Tabela 3.2.1

| $x_n$ | $y_n$ | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.0 | 1.000000 | 2.000000 | 2.202500 | 2.212625 | 2.431262 |
| 1.1 | 1.221025 | 2.431025 | 2.665076 | 2.676779 | 2.928703 |
| 1.2 | 1.488416 | 2.928416 | 3.197337 | 3.210783 | 3.499494 |
| 1.3 | 1.809152 | 3.499152 | 3.806610 | 3.821982 | 3.960251 |
| 1.4 | 2.187762 | 4.147762 | 4.497650 | 4.515145 | 4.889276 |
| 1.5 | 2.638806 | | | | |

Primedba 3.2.1. Ako funkcija f ne zavisi od y, metod (3.2.7) se svodi na Simpsonovo pravilo.

Od metoda četvrtog reda često se koristi i tzv. Gillova varijanta ([9]) kod koje se slobodni parametri odredjuju tako da se smanji potreban memorijski prostor kod realizacije metoda na računskim mašinama. Ušteda memorijskog prostora je, medjutim, takva da se njen efekat primećuje tek kod odgovarajućeg vektorskog metoda kada se primeni na rešavanje velikog sistema diferencijalnih jednačina. Potreban memorijski prostor za rešavanje sistema od M jednačina je 3M+q (q ne zavisi od M), u poredjenju sa 4M+q kod opšteg metoda Runge-Kutta četvrtog reda.

Gillova varijanta ima oblik:

$$\begin{aligned}
y_{n+1} - y_n &= \frac{h}{6}(k_1+(2-\sqrt{2})k_2+(2+\sqrt{2})k_3+k_4),\\
k_1 &= f(x_n, y_n),\\
k_2 &= f(x+\frac{h}{2},\ y_n+\frac{h}{2}k_1),\\
k_3 &= f(x_n+\frac{h}{2},\ y_n+(\sqrt{2}-1)\frac{h}{2}k_1+(1-\frac{\sqrt{2}}{2})h\,k_2),\\
k_4 &= f(x_n+h,\ y_n-\frac{\sqrt{2}}{2}h\,k_2+(1+\frac{\sqrt{2}}{2})hk_3).
\end{aligned}$$

Pri programskoj realizaciji ([23]) koristi se sledeći algoritam:

$n := 0,\ Q_o := 0,\ x := x_o,$

(*) $Y_o := y_n,\ G_1 := h\,f(x,Y_o),\ Y_1 := Y_o + \frac{1}{2}(G_1 - 2Q_o),$

$Q_1 := Q_o + 3[\frac{1}{2}(G_1 - 2Q_o)] - \frac{1}{2}G_1,\ G_2 := h\,f(x+\frac{h}{2}, Y_1),$

$Y_2 := Y_1 + (1-\sqrt{1/2})(G_2 - Q_1),$

$Q_2 := Q_1 + 3[(1-\sqrt{1/2})(G_2 - Q_1)] - (1-\sqrt{1/2})G_2,$

$G_3 := h\,f(x+\frac{h}{2}, Y_2),\ Y_3 := Y_2 + (1+\sqrt{1/2})(G_3 - Q_2),$

$Q_3 := Q_2 + 3[(1+\sqrt{1/2})(G_3 - Q_2)] - (1+\sqrt{1/2})G_3,$

$G_4 := h\,f(x+h, Y_3),\ Y_4 := Y_3 + \frac{1}{6}(G_4 - 2Q_3),$

$Q_4 := Q_3 + 3[\frac{1}{6}(G_4 - 2Q_3)] - \frac{1}{2}G_4,$

$y_{n+1} := Y_4,\ Q_o := Q_4,$

Ako je $x \geq b$, kraj algoritma.

$x := x+h,\ n := n+1,$

Preći na (*).

U slučaju kada greške zaokrugljivanja nebi bile prisutne, imali bismo $Q_4=0$, što jasno skoro uvek nije tačno. Aproksimativno $Q_4$ je srazmerno greški zaokrugljivanja u vrednosti $Y_4$ (tj. $y_{n+1}$), koja je akumulirana na n-tom koraku integracije. Uzimanjem $Q_4$ kao $Q_o$, u sledećem koraku se kompenzira uticaj grešaka zaokrugljivanja.

<u>Primedba 3.2.2.</u> Neka $\bar{p}(m)$ označava maksimalni mogući red metoda (3.2.1). Tada je

$$\begin{aligned} \bar{p}(m) &= m && (m=1,2,3,4) \\ &= m-1 && (m=5,6,7) \\ &= m-2 && (m=8,9) \\ &\leq m-2 && (m=10,11,\ldots). \end{aligned}$$

Za razliku od linearnih višekoračnih metoda, metodi Runge-Kutta ne zahtevaju poznavanje startnih vrednosti (sem $y(x_0)=y_0$, koja, inače, definiše Cauchyev problem), ali su za praktičnu primenu znatno komplikovaniji, s obzirom da zahtevaju m izračunavanja vrednosti funkcije f u svakom koraku. Kao što je napomenuto u odeljku 8.2.4, metodi Runge-Kutta mogu se uspešno primenjivati i za dobijanje startnih vrednosti za linearne višekoračne metode.

### 8.3.3. Analiza grešaka

U ovom odeljku ukazaćemo samo na neke osnovne rezultate vezane za analizu grešaka kod metoda Runge-Kutta.

Definicija 3.3.1. Veličina $T_{n+1}$ odredjena sa

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\Phi(x_n, y(x_n), h),$$

naziva se lokalna greška odsecanja opšteg jednokoračnog metoda (3.1.2), u tački $x_{n+1}$, pri čemu je $x\mapsto y(x)$ tačno rešenje problema (3.1.1).

Pod pretpostavkom da je $y_n=y(x_n)$ (lokalna pretpostavka) važi jednakost

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1},$$

što je isto kao i kod linearnih višekoračnih metoda.

Analogon izrazu (2.5.2), kod nelinearnih jednokoračnih metoda, je

$$T_{n+1} = \psi(x_n, y(x_n))h^{p+1} + O(h^{p+2}), \tag{3.3.1}$$

gde funkcija $(x,y)\mapsto\psi(x,y)$ na komplikovan način zavisi od x i y.

Primer 3.3.1. Odredimo funkciju $\psi$ za metod (3.2.5).

Kako je

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= y(x_{n+1})-y(x_n)-h\Phi(x_n,y_n,h)\\ &= h\big(\Phi_T(x_n,y_n,h)-\Phi(x_n,y_n,h)\big)\\ &= \frac{1}{6}h^3\,[(1-\frac{3}{2}a_2)G+f_yF]_{x=x_n,\,y=y(x_n)}+O(h^4)\end{aligned}$$

neposredno dobijamo

$$\psi(x,y) = \frac{2-3a_2}{12} G + \frac{1}{6} f_y F.$$

Jedan praktičan način za ocenu lokalne greške odsecanja zasniva se na Richardsonovoj ekstrapolaciji. Naime, ako želimo da ocenimo lokalnu grešku odsecanja $T_{n+1}$ u tački $x=x_{n+1}$ za metod reda $p$, pored vrednosti $y_{n+1}$ izračunate pomoću $y_n$ sa korakom $h$, izračunavamo i odgovarajuću vrednost $\bar{y}_{n+1}$ pomoću $y_{n-1}$ sa korakom $2h$. Tada, s obzirom na (3.3.1) imamo

$$\begin{aligned} y(x_{n+1})-\bar{y}_{n+1} &= \psi(x_{n-1},y(x_{n-1}))(2h)^{p+1}+0(h^{p+2}) \\ &= \psi(x_n,y(x_n))h^{p+1}\,2^{p+1} + 0(h^{p+2}) \\ &= 2^{p+1}(y(x_{n+1})-y_{n+1}) + 0(h^{p+2}), \end{aligned}$$

odakle je

$$T_{n+1} \simeq \frac{y_{n+1} - \bar{y}_{n+1}}{2^{p+1} - 1}.$$

Dobijena ocena se često koristi za kontrolu dužine koraka $h$. Naime, ako je ocena za $T_{n+1}$ takva da je veća od neke unapred dozvoljene vrednosti (tolerancije) $\varepsilon$, korak $h$ treba smanjiti.

U cilju dobijanja ocene za $|T_{n+1}|$, M.Lotkin ([21]) je uveo pretpostavku o ograničenosti funkcije $f$ i njenih parcijalnih izvoda na skupu

$$Q = \{(x,y) \mid x_o \leqq x \leqq b, \quad |y| < +\infty\}.$$

Naime, za svako $(x,y)\in Q$ pretpostavio je uslove

$$|f(x,y)| < M \quad \text{i} \quad \left|\frac{\partial^{i+j} f(x,y)}{\partial x^i \, \partial y^j}\right| < \frac{N^{i+j}}{M^{j-1}} \quad (i+j\leqq p),$$

gde su $M$ i $N$ pozitivne konstante i $p$ red metoda. Na taj način je, za metod (3.2.5), dobio ocenu

$$|T_{n+1}| < \frac{1}{3} MN^2 h^3 (|2-3a_2| + 1), \tag{3.3.2}$$

a za metod (3.2.7)

$$|T_{n+1}| < \frac{73}{720} MN^4 h^5.$$

Odgovarajuće ograničenje za lokalnu grešku odsecanja kod opšteg metoda trećeg reda dao je A. Ralston ([28]).

Jedan od načina za odredjivanje slobodnih parametara u metodima Runge-Kutta zasniva se na minimizaciji granice za lokalnu grešku odsecanja. Tako na primer, u slučaju p=2, iz (3.3.2) sleduje $a_2 = \frac{2}{3}$, tj. dobija se metod

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{4}(f(x_n, y_n) + 3f(x_n + \frac{2}{3}h,\ y_n + \frac{2}{3}hk_1)).$$

Na kraju, navodimo ograničenje za ukupnu diskretizacionu grešku $e_n (=y(x_n)-y_n)$, pod pretpostavkom da nam je ograničenje za lokalnu grešku odsecanja poznato. Naime neka je

$$|T_{n+1}| \leqq Kh^{p+1}.$$

Tada je

$$|e_n| \leqq \frac{Kh^p}{L}(e^{L(x_n - x_o)} - 1),$$

gde je L Lipschitzova konstanta za funkciju f po argumentu y.

Primetimo da i ovde, kao i kod linearnih višekoračnih metoda, granica za ukupnu diskretizacionu grešku ima red za jedinicu niži, nego što je red granice za lokalnu grešku odsecanja.

## 8.3.4. Numerička stabilnost

Slično kao kod linearnih višekoračnih metoda, analizu numeričke stabilnosti sprovodimo na jednačini

$$y' = Ay, \quad y(x_o) = y_o \qquad (A=\text{const}).$$

Neka je $x \mapsto y(x)$ tačno rešenje datog problema i $\{\tilde{y}_n\}$ niz numeričkih vrednosti rešenja dobijen primenom metoda Runge-Kutta sa greškom zaokrugljivanja $R_{n+1}$. Tada iz

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = h\Phi(x_n, y(x_n), h) + T_{n+1}$$

i

$$\tilde{y}_{n+1} - \tilde{y}_n = h\Phi(x_n, \tilde{y}_n, h) + R_{n+1},$$

sleduje

$$\tilde{e}_{n+1} - \tilde{e}_n = h(\Phi(x_n, y(x_n), h) - \Phi(x_n, \tilde{y}_n, h)) + \Phi_{n+1}, \tag{3.4.1}$$

gde su

$$\tilde{e}_n = y(x_n) - \tilde{y}_n \quad \text{i} \quad \Phi_{n+1} = T_{n+1} - R_{n+1}.$$

Razmotrićemo samo slučaj metoda Runge-Kutta kod kojih je $p = m \leq 4$. Tada korišćenjem izraza (3.2.1) i (3.2.2) sa $f(x,y) = Ay$ i ignorisanjem člana $\Phi_{n+1}$ (kao i kod linearnih više-koračnih metoda), na osnovu (3.4.1) dobijamo

$$\tilde{e}_{n+1} - \tilde{e}_n = \tilde{e}_n(\bar{h} + \frac{1}{2}\bar{h}^2 + \ldots + \frac{1}{p!}\bar{h}^p),$$

tj.

$$\tilde{e}_{n+1} - r_1 \tilde{e}_n = 0, \tag{3.4.2}$$

gde smo stavili

$$r_1 = 1 + \bar{h} + \frac{1}{2}h^2 + \ldots + \frac{1}{p!}\bar{h}^p \qquad (\bar{h} = Ah)$$

Kako je rešenje jednačine (3.4.2) odredjeno sa

$$\tilde{e}_n = c_1 r_1^n \qquad (c_1 \text{ proizvoljna konstanta}),$$

da bismo obezbedili da $\tilde{e}_n \to 0$ $(n \to +\infty)$ potreban je uslov $|r_1| < 1$. Ovo je uslov apsolutne stabilnosti. O relativnoj stabilnosti kod metoda Runge-Kutta nema smisla govoriti.

S obzirom da je za $\bar{h} > 0$, $r_1 > 1$, zaključujemo da interval apsolutne stabilnosti ne može da sadrži pozitivni deo realne ose. Iz uslova $-1 < r_1 < 1$ možemo naći interval apsolutne stabilnosti, koji ima oblik $(\alpha, 0)$, gde je $\alpha < 0$. Tako nalazimo

| | | |
|---|---|---|
| za $p = m = 1$ | interval | $(-2,0)$, |
| $= 2$ | | $(-2,0)$, |
| $= 3$ | | $(-2.51,0)$, |
| $= 4$ | | $(-2.78,0)$. |

Primetimo da svi metodi kod kojih je $p = m (\leq 4)$ imaju isti interval apsolutne stabilnosti.

## 8.3.5. Primena na rešavanje sistema jednačina

Sva analiza data u prethodnim odeljcima može se formalno preneti i na vektorski oblik metoda Runge-Kutta

$$\vec{y}_{n+1} - \vec{y}_n = h\vec{\Phi}(x_n, \vec{y}_n, h),$$

gde su

$$\vec{\Phi}(x, \vec{y}, h) = \sum_{i=1}^{m} c_i \vec{k}_i,$$

$$\vec{k}_1 = \vec{f}(x, \vec{y}),$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{k}_i = \vec{f}(x+a_i h,\ \vec{y} + \vec{b}_i h) \\[2ex] a_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}, \quad \vec{b}_i = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \vec{k}_j \end{array}\right\} \quad (i=2,\ldots,m),$$

koji se koristi za rešavanje Cauchyevog problema za sistem diferencijalnih jednačina prvog reda

$$\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}), \quad \vec{y}(x_o) = \vec{y}_o.$$

<u>Primer 3.5.1</u>. Posmatrajmo sistem od dve jednačine

$$y' = f_1(x,y,z), \quad z' = f_2(x,y,z)$$

sa početnim uslovima $y(x_o)=y_o$, $z(x_o)=z_o$. Analogon metodu (3.2.7) je metod

$$\vec{y}_{n+1} - \vec{y}_n = \frac{h}{6}(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4),$$

gde su

$$\vec{k}_1 = \vec{f}(x_n, \vec{y}_n), \quad \vec{k}_2 = \vec{f}(x_n + \frac{h}{2},\ \vec{y}_n + \frac{h}{2}\vec{k}_1)$$

$$\vec{k}_3 = \vec{f}(x_n + \frac{h}{2},\ \vec{y}_n + \frac{h}{2}\vec{k}_2), \quad \vec{k}_4 = \vec{f}(x_n + h,\ \vec{y}_n + h\vec{k}_3)$$

i

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}, \quad \vec{y}_n = \begin{bmatrix} y_n \\ z_n \end{bmatrix}, \quad \vec{f}(x, \vec{y}) = \begin{bmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \end{bmatrix}.$$

Na kraju napomenimo da je program RKGS (iz 1130 Scientific Subroutine Package (1130-CM-02X) firme IBM) za rešavanje sistema diferencijalnih jednačina prvog reda sačinjen na osnovu Gillove varijante metoda Runge-Kutta četvrtog reda (O programskoj realizaciji metoda za rešavanje diferencijalnih jednačina na FORTRAN jeziku, pored pomenutog priručnika, videti ([23]).

## 8.4. NUMERIČKO REŠAVANJE KONTURNIH PROBLEMA

Ovo poglavlje je posvećeno rešavanju konturnih (graničnih) problema kod običnih diferencijalnih jednačina. Za razliku od Cauchyevog problema, gde su uslovi koji odredjuju partikularno rešenje diferencijalne jednačine dati u jednoj tački, kod konturnih problema uslovi se zadaju najmanje u dve tačke. Mi ćemo razmatrati samo konturne probleme kod kojih su uslovi dati u dve tačke. Jasno je da konturni problemi imaju smisla samo kod diferencijalnih jednačina čiji red nije niži od dva. U našem razmatranju zadržaćemo se samo na konturne probleme kod diferencijalnih jednačina drugog reda.

### 8.4.1. Uvodne napomene

Za diferencijalnu jednačinu drugog reda, konturni problem se može definisati na sledeći način: Naći rešenje jednačine

(4.1.1) $$F(x,y,y',y'') = 0 \qquad (a \leq x \leq b),$$

koje zadovoljava tzv. konturne uslove

(4.1.2) $$\begin{aligned} &\phi_1(y(a),y'(a)) = 0, \\ &\phi_2(y(b),y'(b)) = 0. \end{aligned}$$

U specijalnom slučaju, ako su jednačina (4.1.1) i uslovi (4.1.2) linearni, imamo tzv. linearni konturni problem

(4.1.3) $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$,

(4.1.4) $\alpha_o y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \quad \beta_o y(b) + \beta_1 y'(b) = B$,

gde su funkcije $p,q,f$ neprekidne na $[a,b]$ i $\alpha_o, \alpha_1, A, \beta_o, \beta_1, B$ date konstante, pri čemu je

$$|\alpha_o| + |\alpha_1| > 0 \quad \text{i} \quad |\beta_o| + |\beta_1| > 0 .$$

Ako je $A=B=0$, za uslove (4.1.4) kažemo da su homogeni. Ako je $f(x) \equiv 0$ i ako su uslovi (4.1.4) homogeni, odgovarajući problem nazivamo homogeni konturni problem.

Ako definišemo linearne operatore $L$, $G_a$, $G_b$ pomoću

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y,$$

$$G_a[y] = \alpha_o y(a) + \alpha_1 y'(a), \quad G_b[y] = \beta_o y(b) + \beta_1 y'(b),$$

konturni problem (4.1.3)-(4.1.4) možemo predstaviti u obliku

(4.1.5) $L[y] = f(x) \quad (a \leq x \leq b), \quad G_a[y] = A, \quad G_b[y] = B$ .

Stavimo

$$D = \begin{vmatrix} G_a[y_1] & G_a[y_2] \\ G_b[y_1] & G_b[y_2] \end{vmatrix},$$

gde su $y_1$ i $y_2$ dva linearno nezavisna rešenja jednačine $L[y]=0$. Lako se može dokazati sledeće tvrdjenje:

<u>Teorema 4.1.1</u>. Ako je $D \neq 0$, konturni problem (4.1.5) ima jedinstveno rešenje za proizvoljne vrednosti A i B. U slučaju, kada je $D=0$, konturni problem, u opštem slučaju, nema rešenje. Samo za odredjene vrednosti A i B, konturni problem može imati beskonačno mnogo rešenja.

Takodje, za homogeni problem ($f(x) \equiv 0$, $A=B=0$) može se dokazati:

<u>Teorema 4.1.2</u>. Ako je $D\neq 0$, postoji jedinstveno (trivijalno) rešenje $y \equiv 0$. Netrivijalna rešenja postoje ako i samo ako je $D=0$.

Problem nalaženja netrivijalnih rešenja homogenog konturnog problema naziva se problem sopstvenih vrednosti.

U opštem slučaju, kod konturnih problema mogu nastati sledeća tri slučaja:

$1^\circ$ postoji jedinstveno rešenje;

$2^\circ$ postoje više rešenja (ili beskonačno mnogo);

$3^\circ$ ne postoje rešenja.

U poredjenju sa Cauchyevim problemom, konturni problemi se češće javljaju u primenama u tehnici, medjutim, njihovo rešavanje je znatno teže.

U ovom poglavlju razmatraćemo neke od približnih metoda za rešavanje konturnih problema za jednačine drugog reda, pretpostavljajući pri tome uvek egzistenciju jedinstvenog rešenja.

U opštem slučaju približni metodi za rešavanje konturnih problema mogu se klasifikovati u tri grupe:

$1^\circ$ Diferencni metodi;

$2^\circ$ Metodi pogadjanja;

$3^\circ$ Projekciono-varijacioni metodi.

U ovom poglavlju razmatraćemo metode iz prve dve grupe, dok ćemo projekciono-varijacione metode, zbog svojih specifičnosti, razmatrati u posebnoj glavi.

U ovom poglavlju razmatraćemo metode iz prve dve grupe, dok ćemo projekciono-varijacione metode, zbog svojih specifičnosti, razmatrati u posebnoj glavi.

S obzirom da se jednačine višeg reda mogu svesti na sistem jednačina prvog reda, to se konturni problemi mogu razmatrati i u obliku

$$N[\vec{y}] = \vec{y}' - \vec{f}(x,\vec{y}) = \vec{0} \qquad (a \le x \le b), \tag{4.1.6}$$
$$\vec{g}(\vec{y}(a),\ \vec{y}(b)) = \vec{0},$$

gde su $\vec{y}$, $\vec{f}$, $\vec{g}$ n-dimenzionalni vektori. U specijalnom slučaju, linearni konturni problemi se mogu posmatrati u obliku

$$\vec{y}' - A(x)\vec{y} = \vec{h}(x) \qquad (a \le x \le b), \qquad B_a\vec{y}(a) + B_b\vec{y}(b) = \vec{\beta},$$

gde su $\vec{y}$, $\vec{h}$, $\vec{\beta}$ n-dimenzionalni vektori i $A(x)$, $B_a$, $B_b$ matrice reda $n$.

## 8.4.2. Diferencni metodi

Diferencni metodi ili metodi konačne razlike za rešavanje konturnih problema sastoje se u aproksimaciji izvoda pomoću konačnih razlika, pri čemu se rešavanje konturnog problema svodi na rešavanje sistema diferencnih jednačina.

Neka je dat konturni problem

$$y'' - f(x,y,y') = 0 \qquad (a \le x \le b), \tag{4.2.1}$$

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \tag{4.2.2}$$

Segment $[a,b]$ podelimo na $N+1$ podsegmenata dužine $h = \frac{b-a}{N+1}$, tako da je $x_n = a+nh$ $(n=0,1,\ldots,N+1)$. U tačkama $x_n$ $(n=1,\ldots,N)$ diferencijalnu jednačinu (4.2.1) aproksimirajmo pomoću

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} = f\left(x_n, y_n, \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}\right) \quad (n=1,\ldots,N). \tag{4.2.3}$$

Jasno je da smo, pri ovome, iskoristili formule za numeričko diferenciranje

$$y'(x_n) = \frac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2h} + O(h^2), \quad y''(x_n) = \frac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{h^2} + O(h^2).$$

Kako je, zbog (4.2.2), $y_o=A$ i $y_{N+1}=B$, problem odredjivanja niza približnih vrednosti rešenja konturnog problema u tačkama $x_n$ $(n=1,\ldots,N)$, svodi se na rešavanje sistema (4.2.3) od N jednačina sa N nepoznatih, koji je, u opštem slučaju, nelinearan.

Ukoliko, umesto konturnih uslova (4.2.2) imamo opštije uslove (4.1.4), tada za aproksimaciju izvoda u tačkama a i b, koristimo formule

$$
(4.2.4)\qquad
\begin{aligned}
y'(a) &= y'(x_o) \simeq \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_o}{2h},\\
y'(b) &= y'(x_{N+1}) \simeq \frac{3y_{N+1} - 4y_N + y_{N-1}}{2h},
\end{aligned}
$$

kod kojih je greška reda $O(h^2)$. Tada se konturni uslovi (4.1.4) približno svode na

$$
(4.2.5)\qquad
\begin{aligned}
\alpha_o y_o + \alpha_1 \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_o}{2h} &= A,\\
\beta_o y_{N+1} + \beta_1 \frac{3y_{N+1} - 4y_N + y_{N-1}}{2h} &= B.
\end{aligned}
$$

Ako sistemu jednačina (4.2.3) pridodamo jednačine (4.2.5) problem nalaženja niza $y_o, y_1, \ldots, y_{N+1}$ se svodi na rešavanje sistema od N+2 jednačine sa isto toliko nepoznatih.

Umesto formula (4.2.4), za aproksimaciju konturnih uslova (4.1.4), često se koriste formule manje tačnosti

$$
y'(a) \simeq \frac{y_1 - y_o}{h} \quad \text{i} \quad y'(b) \simeq \frac{y_{N+1} - y_N}{h},
$$

kod kojih je greška reda $O(h)$.

U slučaju kada je jednačina (4.2.1) linearna, diferencni metod nas dovodi do sistema linearnih jednačina, čija je matrica trodijagonalna. Sledeći odeljak biće posvećen rešavanju ovog problema, dok će u odeljku 8.4.4 biti razmatran jedan iterativni diferencni metod za rešavanje konturnih problema sa nelinearnom diferencijalnom jednačinom.

Rešavanje opšteg konturnog problema (4.1.6), pomoću diferencne aproksimacije

$$N_h[\vec{y}_n] = \frac{1}{h}(\vec{y}_n - \vec{y}_{n-1}) - \vec{f}(x_n - \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(\vec{y}_n + \vec{y}_{n-1})) = \vec{0},$$

$$\vec{g}(\vec{y}_o, \vec{y}_{N+1}) = \vec{0},$$

gde je $n=1,\ldots,N+1$, razmatrao je H.B. Keller (videti [17], [15]).

Opštu teoriju diferencnih metoda za rešavanje konturnih problema oblika (4.1.6) razvili su H.B. Keller i A.B. White u radu [16].

### 8.4.3. Diferencni metod za linearne konturne probleme

Neka je jednačina (4.2.1) linearna, tj. neka ima oblik

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{4.3.1}$$

Tada je odgovarajuća diferencna aproksimacija

$$L_h[y_n] = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + p_n \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + q_n y_n = f_n, \tag{4.3.2}$$

gde su $p_n = p(x_n)$, $q_n = q(x_n)$, $f_n = f(x_n)$ i $n=1,\ldots,N$.

Operator $L_h$, definisan pomoću (4.3.2), predstavlja jednu diferencnu aproksimaciju diferencijalnog operatora L. Pretpostavljajući da $y \in C^4[a,b]$, nije teško pokazati da je u tačkama $x_n$ $(n=1,\ldots,N)$

$$L_h[y_n] - L[y] = O(h^2),$$

što znači da je $L_h$ aproksimacija drugog reda za L.

Predjimo sada na rešavanje sistema jednačina (4.3.2). Ako uvedemo smene

$$a_n = 1 - \frac{h}{2}p_n, \quad b_n = h^2 q_n - 2, \quad c_n = 1 + \frac{h}{2}p_n,$$

(4.3.2) se može predstaviti u obliku

(4.3.3) $$a_n y_{n-1} + b_n y_n + c_n y_{n+1} = h^2 f_n \quad (n=1,\ldots,N).$$

Neka su konturni uslovi $y_o=A$ i $y_{N+1}=B$. Pred nama se postavlja problem rešavanja sistema linearnih jednačina

(4.3.4) $$T\vec{y} = \vec{d},$$

gde su

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \quad \vec{d}= \begin{bmatrix} h^2 f_1 - Aa_1 \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_N - Bc_N \end{bmatrix}, \quad T= \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & b_N \end{bmatrix}.$$

Matrica sistema (4.3.4) je trodijagonalna. Za rešavanje ovog sistema pogodno je izvršiti faktorizaciju matrice T u obliku T=LR (videti formule (1.2.5) u odeljku 4.1.2), a zatim sukcesivno rešiti trougaone sisteme jednačina $L\vec{z}=\vec{d}$ i $R\vec{y}=\vec{z}$. Ovakav metod je poznat kao metod faktorizacije†. Kako je ovaj metod u suštini zasnovan na Gaussovoj eliminaciji, to se on može ekvivalentno iskazati kroz sledeći eliminacioni postupak:

Jednakost $y_o=A$ predstavimo u obliku

(4.3.5) $$y_o = L_o y_1 + K_o,$$

gde su $L_o=0$ i $K_o=A$. Pomoću (4.3.5) eliminišimo $y_o$ iz jednačine $a_1y_o+b_1y_1+c_1y_2=h^2f_1$, koja je dobijena iz (4.3.3) za n=1. Tada dobijamo

$$y_1 = L_1 y_2 + K_1,$$

gde su

$$L_1 = \frac{-c_1}{b_1 + a_1 L_o} \quad \text{i} \quad K_1 = \frac{h^2 f_1 - a_1 K_o}{b_1 + a_1 L_o}.$$

Navedeni postupak eliminacije nepoznatih može se nastaviti za n=2,...,N. Naime, ako u (4.3.3) stavimo

† *U ruskoj literaturi metod faktorizacije se vrlo često sreće kao metod progonki.*

$$y_{n-1} = L_{n-1}y_n + K_{n-1}$$

dobijamo

(4.3.6) $$y_n = L_n y_{n+1} + K_n,$$

gde su

(4.3.7) $$L_n = \frac{-c_n}{b_n + a_n L_{n-1}} \quad \text{i} \quad K_n = \frac{h^2 f_n - a_n K_{n-1}}{b_n + a_n L_{n-1}} .$$

Posle N eliminacionih koraka imamo

(4.3.8) $$y_N = L_N y_{N+1} + K_N.$$

Kako je $y_{N+1}=B$, to na osnovu poslednje jednakosti izračunavamo $y_N$. Na dalje, korišćenjem (4.3.6), za $n=N-1,\dots,1$, izračunavamo redom $y_{N-1},\dots,y_1$.

Dakle, metod faktorizacije se sastoji u sledećem:

$1^o$ Polazeći od $L_o=0$ i $K_o=A$, pomoću formula (4.3.7), za $n=1,\dots,N$ izračunavaju se koeficijenti $L_n$ i $K_n$;

$2^o$ Izračunava se niz $\{y_n\}$ pomoću

$$y_{N+1} = B,$$

$$y_n = L_n y_{n+1} + K_n \qquad (n=N,\dots,1).$$

Ukoliko su, umesto uslova $y_o=A$ i $y_{N+1}=B$, dati uslovi

$$y_o - \alpha y_1 = A \quad \text{i} \quad y_{N+1} - \beta y_N = B,$$

navedeni postupak treba modifikovati u sledećem smislu:

Kod izračunavanja koeficijenata $L_n$ i $K_n$ treba poći od $L_o=\alpha$ i $K_o=A$.

Kako je na osnovu datog konturnog uslova $y_{N+1}-\beta y_N=B$, a na osnovu (4.3.8) $y_N-L_N y_{N+1}=K_N$, zaključujemo da je

$$y_{N+1} = \frac{B + \beta K_N}{1 - \beta L_N} .$$

Ostali članovi niza $\{y_n\}$ izračunavaju se na isti način kao u $2^o$.

Opširnije o metodu faktorizacije može se naći, na primer, u [17], [18], [19]. Dva osnovna svojstva ovog metoda su mali broj aritmetičkih operacija pri njegovoj realizaciji (u odnosu na druge metode rešavanja sistema linearnih jednačina) i slaba osetljivost na numeričke greške (greške zaokrugljivanja se ne akumuliraju). Poslednja činjenica je prisutna ako je sistem jednačina (4.3.3) dobro uslovljen. Jedan dovoljan kriterijum dobre uslovljenosti (videti [10] ) je da postoji $\delta > 0$ tako da je

$$|b_n| \geqq |a_n| + |c_n| + \delta .$$

Primer 4.3.1. Nadjimo približno rešenje jednačine

$$y'' - 2xy' - 2y = -4x,$$

koje zadovoljava konturne uslove

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 1 + e \approx 3.7183 .$$

Uzmimo h=0.2, tj. $x_n=nh=0.2n$ $(n=0,1,\dots,5)$. Kako je $p_n=-2x_n$, $q_n=-2$, $f_n=-4x_n$, imamo

$$a_n = 1+0.04n, \quad b_n = -2.08, \quad c_n = 1-0.04n, \quad h^2 f_n = -0.032\, n.$$

Tada je

$$L_n = \frac{1-0.04n}{2.08-(1+0.04n)L_{n-1}} \quad \text{i} \quad K_n = \frac{0.032n+(1+0.04n)K_{n-1}}{2.08-(1+0.04n)L_{n-1}} .$$

Rezultati dobijeni primenom metoda faktorizacije dati su u tabeli 4.3.1. U poslednjoj koloni tabele date su vrednosti tačnog rešenja $(y=x+\exp(x^2))$.

Tabela 4.3.1

| $n$ | $x_n$ | $L_n$ | $K_n$ | $y_n$ | $y(x_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.0 | 0. | 1. | 1. | 1. |
| 1 | 0.2 | 0.4615 | 0.5154 | 1.2436 | 1.24081 |
| 2 | 0.4 | 0.5817 | 0.3824 | 1.5778 | 1.57351 |
| 3 | 0.6 | 0.6160 | 0.3749 | 2.0379 | 2.03333 |
| 4 | 0.8 | 0.6152 | 0.4122 | 2.6997 | 2.69648 |
| 5 | 1.0 | | | 3.7183 | 3.71828 |

Razmotrimo sada diferencne aproksimacije za diferencijalne jednačine date u Sturm-Liouvilleovom obliku.

Ako jednačinu (4.3.1) pomnožimo sa $r(x)=\exp(\int p(x)dx)$, tada se ona svodi na Sturm-Liouvilleov oblik

$$rL[y] = (ry')' + \bar{q}y = \bar{f}, \tag{4.3.9}$$

gde su $\bar{q}(x)=r(x)q(x)$ i $\bar{f}(x)=r(x)f(x)$.

Primer 4.3.2. Za jednačinu

$$L[y] = y'' - \frac{1}{x}y' + 2y = x^2$$

integracioni faktor (množilac) je $r(x)=\exp(-\int\frac{dx}{x}) = \frac{1}{x}$, pa je Sturm-Liouvilleov oblik

$$\frac{1}{x}L[y] = (\frac{1}{x}y')' + \frac{2}{x}y = x\,.$$

Kod rešavanja konturnih problema sa jednačinom u Sturm-Liouvilleovom obliku javlja se problem aproksimacije diferencijalnog izraza

$$M[y] = (ry')'\,. \tag{4.3.10}$$

S obzirom da je $M[y] = r(x)y'' + r'(x)y'$ može se koristiti, kao i ranije, diferencna aproksimacija

$$M_h[y_n] = r(x_n)\,\frac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{h^2} + r'(x_n)\,\frac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2h}\,,$$

pri čemu je u tačkama $x_n$ $(n=1,\ldots,N)$, $M[y]-M_h[y_n]=O(h^2)$.

Medjutim, za aproksimaciju diferencijalnog operatora (4.3.10) češće se koriste sledeće dve aproksimacije

$$M_h^{(1)}[y_n] = \frac{1}{h^2}\{r_{n+1/2}(y_{n+1}-y_n)-r_{n-1/2}(y_n-y_{n-1})\},$$

$$M_h^{(2)}[y_n] = \frac{1}{2h^2}\{(r_{n+1}+r_n)(y_{n+1}-y_n)-(r_n+r_{n-1})(y_n-y_{n-1})\},$$

pri čemu je $r_s \equiv r(x_o+sh)$ $(s\in Z)$.

Do prve aproksimacije $M_h^{(1)}[y_n]$ dolazimo aproksimacijom izvoda pomoću centralne razlike. Naime, imamo

$$M[y] \approx \frac{1}{h}(r_{n+1/2}y'_{n+1/2} - r_{n-1/2}y'_{n-1/2}),$$

tj.

$$M[y] \approx \frac{1}{h}\{r_{n+1/2}\frac{y_{n+1}-y_n}{h} - r_{n-1/2}\frac{y_n-y_{n-1}}{h}\},$$

dok se $M_h^{(2)}[y_n]$ dobija iz $M_h^{(1)}[y_n]$ aproksimacijom $r_{n+1/2}$ i $r_{n-1/2}$ sa $\frac{1}{2}(r_{n+r}+r_n)$ i $\frac{1}{2}(r_n+r_{n-1})$ respektivno.

Nije teško pokazati (videti, na primer, [34] ) da je u tačkama $x_n$ $(n=1,\ldots,N)$ pri $r,y \in C^4[a,b]$

$$M_h^{(i)}[y_n] - M[y] = 0(h^2) \qquad (i=1,2),$$

tj. da su obe diferencne aproksimacije reda dva.

Korišćenjem izraza za $M_h^{(1)}[y_n]$, diferencijalna jednačina (4.3.9) se svodi na

$$M_h^{(1)}[y_n] + \bar{q}_n y_n = \bar{f}_n \qquad (n=1,\ldots,N),$$

tj.

(4.3.11) $$a_n^{(1)}y_{n-1} + b_n^{(1)}y_n + c_n^{(1)}y_{n+1} = h^2\bar{f}_n \quad (n=1,\ldots,N),$$

gde su $\bar{q}_n \equiv \bar{q}(x_n)=r_n q_n$, $\bar{f}_n \equiv \bar{f}(x_n)=r_n f_n$ i

$$a_n^{(1)}=r_{n-1/2},\quad b_n^{(1)}=h^2\bar{q}_n-(r_{n+1/2}+r_{n-1/2}),\quad c_n^{(1)}=r_{n+1/2}.$$

Kako je $c_n^{(1)}=a_{n+1}^{(1)}$ zaključujemo da je matrica sistema jednačina (4.3.11) simetrična. Ako je, osim ovoga, matrica pozitivno definitna, prethodno izloženi metod faktorizacije se može modifikovati u smislu korišćenja metoda kvadratnog korena (videti odeljak 4.2.4).

Na kraju primetimo da integracioni faktor r za svodjenje jednačina na Sturm-Liouvilleov oblik, nije uvek mogućno odrediti u konačnom obliku. Medjutim, za dovoljno malo h egzistira tzv. diskretni integracioni faktor, tj. takvo $r_n$ da aproksimacija $r_n L_h[y_n]$ daje simetričnu matricu. Naime, kako je

$$h^2 r_n L_h[y_n] = r_n(1-\frac{h}{2}p_n)y_{n-1} + r_n(h^2 q_n - 2)y_n$$
$$+ r_n(1+\frac{h}{2}p_n)y_{n+1} \qquad (n=1,\ldots,N),$$

to iz uslova simetričnosti matrice sistema

$$r_n(1+\frac{h}{2}p_n) = r_{n+1}(1-\frac{h}{2}p_{n+1})$$

dobijamo rekurentnu relaciju za $r_n$

$$r_{n+1} = \frac{1+\frac{h}{2}p_n}{1-\frac{h}{2}p_{n+1}} r_n \qquad (n=0,1,\ldots,N-1),$$

pri čemu se može uzeti, na primer, $r_o=1$.

## 8.4.4. Iterativni diferencni metod

Razmotrimo problem rešavanja nelinearne diferencijalne jednačine

$$y'' = f(x,y,y') \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

sa linearnim konturnim uslovima

$$\alpha_o y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \qquad \beta_o y(b) + \beta_1 y'(b) = B.$$

Kao što smo videli u odeljku 8.4.2, diferencni metod dovodi do sistema nelinearnih jednačina (4.2.3), sa uslovima (u najprostijem slučaju)

$$G_o[y_n] \equiv \alpha_o y_o + \alpha_1 \frac{y_1 - y_o}{h} = A, \quad G_{N+1}[y_n] \equiv \beta_o y_{N+1} + \beta_1 \frac{y_{N+1}-y_N}{h} = B.$$

Jedan od načina za rešavanje ovakvog sistema jednačina je korišćenje metoda proste iteracije

$$
(4.4.1)\qquad \left.\begin{aligned} y_{n+1}^{(k+1)} - 2y_n^{(k+1)} + y_{n-1}^{(k+1)} &= h^2 f_n^{(k)} \\ G_o[y_n^{(k+1)}] &= A \\ G_{N+1}[y_n^{(k+1)}] &= B \end{aligned}\right\} \quad (k=0,1,\ldots),
$$

gde je

$$
f_n^{(k)} \equiv f\left(x_n, y_n^{(k)}, \frac{y_{n+1}^{(k)} - y_{n-1}^{(k)}}{2h}\right).
$$

Na ovaj način, rešavanje problema se svodi na rešavanje sistema linearnih jednačina na svakom koraku $k$, pri čemu se za startovanje iterativnog procesa (4.4.1) usvajaju početne vrednosti $y_n^{(o)}$ $(n=0,1,\ldots,N+1)$. Zahvaljujući specijalnom obliku ovog sistema jednačina, može se naći eksplicitni oblik za $y_n^{(k+1)}$.

Potražimo rešenje u obliku

$$
(4.4.2)\qquad y_n^{(k+1)} = z_n + w_n,
$$

gde su

$$
(4.4.3)\qquad z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1} = h^2 f_n^{(k)}, \quad G_o[z_n] = 0, \quad G_{N+1}[z_n] = 0
$$

i

$$
(4.4.4)\qquad w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1} = 0, \quad G_o[w_n] = A, \quad G_{N+1}[w_n] = B.
$$

Nije teško uočiti da ako postoje $z_n$ i $w_n$ takvi da zadovoljavaju (4.4.3) i (4.4.4) respektivno, to će $y_n^{(k+1)}$, odredjeno sa (4.4.2), biti rešenje sistema (4.4.1).

Iz (4.4.4) sleduje $w_n = C_1 + C_2 n$, gde konstante $C_1$ i $C_2$ treba odrediti iz uslova

$$
G_o[w_n] = \alpha_o w_o + \alpha_1 \frac{w_1 - w_o}{h} = \alpha_o C_1 + \frac{\alpha_1}{h} C_2 = A,
$$

$$
G_{N+1}[w_n] = \beta_o w_{N+1} + \beta_1 \frac{w_{N+1} - w_N}{h} = \beta_o (C_1 + (N+1)C_2) + \frac{\beta_1}{h} C_2 = B .
$$

Ako je

$$(4.4.5)\qquad \Delta = \frac{1}{h}[\alpha_o\beta_o(b-a) + \alpha_o\beta_1 - \alpha_1\beta_o] \neq 0,$$

iz poslednjeg sistema jednačina sleduje

$$C_1 = \frac{1}{h\Delta}(A(\beta_1+(b-a)\beta_o)-\alpha_1 B) \quad \text{i} \quad C_2 = \frac{1}{\Delta}(\alpha_o B-\beta_o A).$$

Kako se problem (4.4.3) može predstaviti kao sistem linearnih jednačina

$$(4.4.6)\qquad \begin{bmatrix} -2+\gamma & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & -2+\delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_1^{(k)} \\ f_2^{(k)} \\ \vdots \\ f_N^{(k)} \end{bmatrix}$$

gde su $\gamma=\alpha_1/(\alpha_1-h\alpha_o)$ i $\delta=\beta_1/(\beta_1+h\beta_o)$, rešenje $z_n$ je očigledno linearna kombinacija veličina $h^2 f_i^{(k)}$ $(i=1,\dots,N)$, tj. ima oblik

$$z_n = h^2 \sum_{i=1}^{N} g_{in} f_i^{(k)},$$

gde su $g_{in}$ koeficijenti koje treba odrediti. Primetimo da je matrica sistema (4.4.6) trodijagonalna i simetrična. Njeni nenulti elementi su

$$a_{11} = -2+\delta, \quad a_{nn} = -2 \ (n=2,\dots,N-1), \quad a_{NN} = -2+\delta,$$

$$a_{n,n+1} = a_{n+1,n} = 1 \quad (n=1,\dots,N-1).$$

Ako sa D označimo determinantu ove matrice, a sa $A_{in}$ kofaktore odgovarajućih elemenata $a_{ij}$, nije teško primetiti da je $g_{in}=$ $=A_{in}/D$. Takodje, lako se uočava da je $g_{in}=g_{ni}$.

Na osnovu

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij}a_{nj} = D\delta_{in},$$

gde je $\delta_{in}$ Kroneckerova delta, u našem konkretnom slučaju pri proizvoljnom $i\in\{1,\dots,N\}$, za $n=1,\dots,N$ dobijamo redom

$$(4.4.7)\qquad (-2+\gamma)g_{i1} + g_{i2} = \delta_{i1}$$

$$(4.4.8)\qquad g_{i,n-1} - 2g_{i,n} + g_{i,n+1} = \delta_{in} \quad (n=2,\dots,N-1),$$

$$(4.4.9)\qquad g_{i,N-1} + (-2+\delta)g_{iN} = \delta_{iN}.$$

Za odredjivanje $g_{in}$ dovoljno je pretpostaviti rešenje u obliku

$$g_{in} = Cin + Di + En + F \quad (i \leq n),$$

gde su C, D, E, F zasad nepoznati koeficijenti. Zbog simetrije imamo

$$g_{in} = Cni + Dn + Ei + F \quad (i \geq n).$$

Na osnovu (4.4.7), za $i=1$ dobijamo $\gamma(C+E)-(1-\gamma)(D+F)=1$, a za $i \geq 2$, $(\gamma C-(1-\gamma)E)i+\gamma D-(1-\gamma)F=0$, odakle sleduje

$$\gamma C = (1-\gamma)E, \quad \gamma D = (1-\gamma)F, \quad E-D = 1.$$

Stavimo sada $i=n$ u (4.4.8). Tada dobijamo $E-D=1$. Primetimo da za $i\neq n$ pretpostavljeno rešenje zadovoljava jednačinu (4.4.8).

Najzad, na osnovu (4.4.9), za $i\leq N-1$, dobijamo

$$(C+(1-\delta)(CN+D))i + (E+(1-\delta)(EN+F)) = 0,$$

a za $i=N$

$$(CN+D)(1+(1-\delta)N) + 1 + (1-\delta)(EN+F) = 0,$$

odakle sleduje

$$(1+(1-\delta)N)C+(1-\delta)D=0, \quad (1+(1-\delta)N)E+(1-\delta)F=0, \quad E-D=1.$$

Dobijene jednakosti za nepoznate koeficijente mogu se predstaviti u obliku

$$\begin{aligned}(1+(1-\delta)N)C + (1-\delta)D &= 0,\\ \gamma C - (1-\gamma)D &= 1-\gamma,\\ (1-\gamma)E &= \gamma C,\\ (1-\gamma)F &= \gamma D.\end{aligned}$$

Kako je, zbog (4.4.5),

$$\Delta_1 = -(1+(1-\delta)N)(1-\gamma)-\gamma(1-\delta) = \frac{\gamma\delta h^2}{\alpha_1\beta_1}\Delta \neq 0 ,$$

dobijamo

$$C = -\frac{(1-\delta)(1-\gamma)}{\Delta_1},\quad D = \frac{(1-\gamma)(1+(1-\delta)N)}{\Delta_1},\quad E = -\frac{\gamma(1-\delta)}{\Delta_1},$$

$$F = \frac{\gamma(1+(1-\delta)N)}{\Delta_1},$$

pa je

$$g_{in} = \frac{1}{\Delta_1}((1-\gamma)i+\gamma)(1+(1-\delta)(N-n)) \qquad (i \leqq n),$$

tj.

$$g_{in} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\alpha_1}{h} - \alpha_o i\right)\left(\frac{\beta_1}{h} + \beta_o(N+1-n)\right) & (i \leqq n), \\ \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\alpha_1}{h} - \alpha_o n\right)\left(\frac{\beta_1}{h} + \beta_o(N+1-i)\right) & (i \geqq n). \end{cases}$$

Na osnovu prethodnog imamo

$$y_n^{(k+1)} = C_1 + C_2 n + h^2 \sum_{i=1}^{N} g_{in} f_i^{(k)} .$$

O problemu konvergencije ovog iterativnog metoda i analizi grešaka može se naći u [2 ].

Primer 4.4.1. Uzimajući h=0.2 nadjimo približno rešenje konturnog problema

$$y'' = 2+y^2,\quad y(0) = y(1) = 0.$$

Kako je $N=4$; $\alpha_o=1$, $\alpha_1=0$, $A=0$, $\beta_o=1$, $\beta_1=0$, $B=0$; $y_o=y_5=0$, $f_n=2+y_n^2$, $x_n=nh=0.2n\,(n=0,1,\ldots,5)$, imamo $\Delta=5$, $C_1=C_2=0$,

$$g_{in} = \begin{cases} \frac{1}{5}i(n-5) & (i \leq n), \\ \frac{1}{5}n(i-5) & (i \geq n), \end{cases}$$

(4.4.10) $$f_i^{(k)} = 2+(y_i^{(k)})^2, \quad y_n^{(k+1)} = h^2 \sum_{i=1}^{4} g_{in} f_i^{(k)}.$$

Vrednosti koeficijenata $f_{in}$ date su u tabeli 4.4.1.

Tabela 4.4.1

| i \ n | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | -0.8 | -0.6 | -0.4 | -0.2 |
| 2 | -0.6 | -1.2 | -0.8 | -0.4 |
| 3 | -0.4 | -0.8 | -1.2 | -0.6 |
| 4 | -0.2 | -0.4 | -0.6 | -0.8 |

Za početno rešenje $y^{(o)}$ izaberimo funkciju $y^{(o)}=x(x-1)$ koja je rešenje problema

$$y'' = 2, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Tada je za n=1,2,3,4

$$y_n^{(o)} = x_n(x_n-1)=0.2n(0.2n-1).$$

Ove vrednosti su navedene u tabeli 4.4.2. Korišćenjem formula (4.4.10) dobijamo niz vrednosti za $y_n^{(k)}$ $(n=1,2,3,4;\ k=1,\ldots)$. U tabeli 4.4.2 navedene su vrednosti za prve dve iteracije.

Tabela 4.4.2

| n | $x_n$ | $y_n^{(o)}$ | $f_n^{(o)}$ | $y_n^{(1)}$ | $f_n^{(1)}$ | $y_n^{(2)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.2 | -0.16 | 2.0256 | -0.1633 | 2.0267 | -0.1635 |
| 2 | 0.4 | -0.24 | 2.0576 | -0.2456 | 2.0603 | -0.2459 |
| 3 | 0.6 | -0.24 | 2.0576 | -0.2456 | 2.0603 | -0.2459 |
| 4 | 0.8 | -0.16 | 2.0256 | -0.1633 | 2.0267 | -0.1635 |

Primetimo da je $|y_n^{(2)} - y_n^{(1)}| < 10^{-3}$ $(n=1,2,3,4)$. Ukoliko ova tačnost zadovoljava potrebe, možemo uzeti $y_n \approx y_n^{(2)}$.

Na kraju razmotrimo klasu konturnih problema oblika

(4.4.11) $$y'' = f(x,y), \quad y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Pretpostavljajući podelu segmenta $[a,b]$ na N+1 podsegmenata dužine $h=\frac{b-a}{N+1}$, primenimo na (4.4.11) linearni višekoračni metod (2.8.4)

(4.4.12) $$\sum_{i=o}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h^2 \sum_{i=o}^{k} \beta_i f_{n+i} \quad (n=0,1,\ldots,N+1-k).$$

Kako je $y_o=y(a)=A$, $f_o=f(a,A)$, $y_{N+1}=y(b)=B$, $f_{N+1}=f(b,B)$, (4.4.12) predstavlja sistem od N+2-k jednačina sa N nepoznatih $y_1,\dots,y_N$. Da bi bio ispunjen uslov N+2-k=N treba uzeti k=2, tj. metod (4.4.12) treba biti dvokoračan. Najčešće se za ovu svrhu koristi metod Numerova (2.8.5). U tom slučaju sistem jednačina (4.4.12) se može predstaviti u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \frac{h^2}{12} \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 10 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_o - \frac{h^2}{12} f_o \\ 0 \\ \vdots \\ y_N - \frac{h^2}{12} f_{N+1} \end{bmatrix}.$$

S obzirom da je $f_n \equiv f(x_n,y_n)$, poslednji sistem jednačina je, u opštem slučaju, nelinearan i za njegovo rešavanje se može koristiti neki iterativni metod, na primer, metod Newton-Kantorovića (videti odeljak 5.2.2).

Primer 4.4.2. Primenom metoda Numerova sa h=1/2 na konturni problem

$$y'' = 16(x^2+y-1), \quad y(-1) = y(1) = -\frac{1}{8}$$

dobijamo sistem linearnih jednačina

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \frac{16}{48} \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1-3/4 \\ y_2-1 \\ y_3-3/4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/12 \\ 0 \\ -1/12 \end{bmatrix},$$

odakle je

$$y_1 = 0.625, \quad y_2 = 0.875, \quad y_3 = 0.625.$$

## 8.4.5. Metod pogadjanja

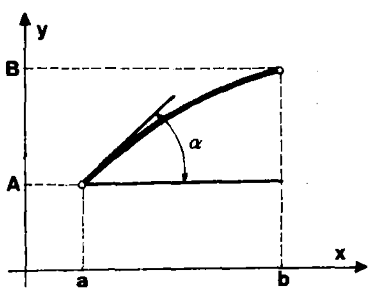
Posmatrajmo nelinearan konturni problem

$$\begin{aligned} & y'' = f(x,y,y') \qquad (a \le x \le b), \\ & y(a) = A, \quad y(b) = B. \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

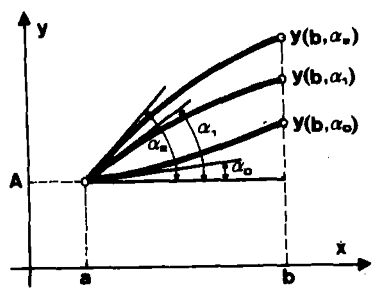
Metod pogadjanja za rešavanje ovog problema sastoji se u nalaženju ekvivalentnog Cauchyevog problema

$$\text{(4.5.2)} \qquad \begin{aligned} & y'' = f(x,y,y') \qquad (a \leqq x \leqq b), \\ & y(a) = A, \ y'(a) = \operatorname{tg} \alpha . \end{aligned}$$

Naime, treba odrediti $\alpha$ tako da se rešenje problema (4.5.2) poklapa sa rešenjem problema (4.5.1) (videti sl.4.5.1). Neka je $x \mapsto y(x,\alpha)$ rešenje Cauchyevog problema (4.5.2). Menjajući ugao




Sl. 4.5.1




Sl. 4.5.2

$\alpha$ menja se rešenje ovog problema (Sl.4.5.2) i za x=b dobija se niz vrednosti rešenja $y(b,\alpha_0)$, $y(b,\alpha_1)$, itd. Nas interesuje samo ono rešenje za koje je

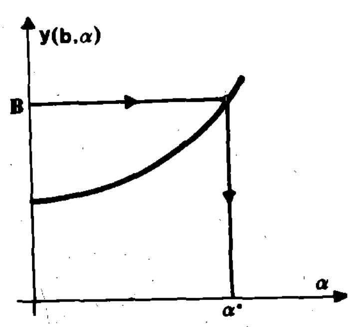
$$y(b,\alpha) = B.$$

Takvo $\alpha$ označimo sa $\alpha^*$ (videti Sl. 4.5.3).

Dakle, problem se svodi na rešavanje jednačine

$$\text{(4.5.3)} \qquad F(\alpha)=y(b,\alpha)-B=0.$$

U opštem slučaju, funkcija F nije zadata analitički, već je odredjena pomoću algoritma za rešavanje problema




Sl. 4.5.3

(4.5.2). O rešavanju Cauchyevog problema bilo je reči u poglavljima 8.1, 8.2 i 8.3.

Za rešavanje jednačine (4.5.3) mogu se koristiti različiti metodi.

Na primer, kod metoda polovljenja intervala (odeljak 5.1.5), izaberemo $\alpha_o$ i $\alpha_1$, tako da je $F(\alpha_o)F(\alpha_1) < 0$, a zatim stavimo $\alpha_2 = (\alpha_o + \alpha_1)/2$ i izračunamo $F(\alpha_2)$. Sledeću vrednost za $\alpha$ izračunavamo pomoću

$$\alpha_3 = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) & (F(\alpha_1)F(\alpha_2) < 0), \\ \\ \frac{1}{2}(\alpha_o + \alpha_2) & (F(\alpha_1)F(\alpha_2) > 0). \end{cases}$$

Proces izračunavanja se nastavlja sve dok ne bude, na primer, ispunjen uslov $|F(\alpha_n)| \leqq \varepsilon$, gde je $\varepsilon$ unapred zahtevana tačnost.

Slično, kod metoda sečice (odeljak 5.1.4), sa unapred izabranim $\alpha_o$ i $\alpha_1$ izračunavamo niz $\{\alpha_n\}$ pomoću

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{F(\alpha_n)}{F(\alpha_n) - F(\alpha_{n-1})}(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Metod pogadjanja može postati numerički nestabilan ako rešenje $x \mapsto y(x,\alpha)$ bitno zavisi od parametra $\alpha$, tj. ako je $\left|\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right| \gg 1$. U takvim slučajevima pogodno je izvršiti linearizaciju problema (4.5.1) u sledećem smislu.

Neka je poznata izvesna dva puta neprekidno-diferencijabilna funkcija $x \mapsto y_o(x)$ koja zadovoljava konturne uslove iz (4.5.1), tj. $y_o(a)=A$, $y_o(b)=B$ i koja grubo aproksimira tačno rešenje problema (4.5.1). Ako stavimo

$$y(x) = y_o(x) + z(x)$$

i pretpostavimo da je funkcija $f$ diferencijabilna, na osnovu Taylorove formule imamo

$$f(x,y,y') = f(x,y_o,y_o') + \frac{\partial f(x,y_o,y_o')}{\partial y} z + \frac{\partial f(x,y_o,y_o')}{\partial y'} z' + O(z^2+z'^2),$$

odakle, odbacivanjem poslednjeg člana na desnoj strani i zamenom u (4.5.1) dobijamo

$$\bar{z}'' + p(x)\bar{z}' + q(x)\bar{z} = r(x), \quad \bar{z}(a) = \bar{z}(b) = 0, \tag{4.5.4}$$

gde su

$$p(x) = -\frac{\partial f(x,y_0,y_0')}{\partial y'}, \quad q(x) = -\frac{\partial f(x,y_0,y_0')}{\partial y}, \quad r(x) = f(x,y_0,y_0') - y_0''.$$

Rešavanjem linearnog konturnog problema (4.5.4) nalazimo "popravku" $\bar{z}$, odakle je nova aproksimacija rešenja

$$y_1(x) = y_0(x) + \bar{z}(x).$$

Primetimo da je $y_1 \not\equiv y$, što je posledica od $z \not\equiv \bar{z}$.

Navedeni postupak, koji se često naziva Newtonov metod, može se nastaviti uzimanjem nove aproksimacije $y_1$, umesto $y_0$, itd.

## 8.4.6. Redukcija linearnog konturnog problema na Cauchyev problem

U ovom odeljku razmotrićemo jedan relativno jednostavan postupak za redukciju linearnog konturnog problema na Cauchyev problem.

Posmatrajmo konturni problem

$$L[y] = f(x), \quad y(a) = A, \quad y(b) = B, \tag{4.6.1}$$

gde je linearni diferencijalni operator $L$ definisan pomoću

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y,$$

a $p,q,f$ date neprekidne funkcije na $[a,b]$.

Rešavanje ovog problema može se svesti na rešavanje dva Cauchyeva problema:

$$L[y_1] = f(x), \quad y_1(a) = A, \quad y_1'(a) = 0 \tag{4.6.2}$$

i

$$L[y_2] = 0, \quad y_2(a) = 0, \quad y_2'(a) = 1. \tag{4.6.3}$$

Za tačku x=b, na osnovu (4.6.2), možemo dobiti $y_1(b)$, a na osnovu (4.6.3) vrednost za $y_2(b)$. Kako zbog linearnosti problema (4.6.1) možemo staviti

$$y(x) = y_1(x) + Cy_2(x),$$

to za x=b imamo $y(b)=B=y_1(b)+Cy_2(b)$, pa je rešenje konturnog problema (4.6.1) dato sa

$$y(x) = y_1(x) + \frac{B-y_1(b)}{y_2(b)}y_2(x),$$

pretpostavljajući pritom da je $y_2(b) \neq 0$.

Posmatrajmo sada opštiji konturni problem

$$L[y]=f(x), \quad \alpha_o y(a)+\alpha_1 y'(a)=A, \quad \beta_o y(b)+\beta_1 y'(b)=B \tag{4.6.4}$$

i potražimo njegovo rešenje u obliku

$$y(x) = Cu(x) + v(x), \tag{4.6.5}$$

gde je C zasad proizvoljna konstanta, u netrivijalno rešenje jednačine $L[u]=0$ i v partikularno rešenje nehomogene jednačine $L[v]=f(x)$.

Da bi funkcija y, definisana sa (4.6.5), zadovoljavala prvi konturni uslov u (4.6.4) za svako C, tj. da je

$$(\alpha_o u(a) + \alpha_1 u'(a))C + (\alpha_o v(a) + \alpha_1 v'(a)) = A,$$

potrebni i dovoljni uslovi su sledeće jednakosti

$$\begin{aligned} &\alpha_o u(a) + \alpha_1 u'(a) = 0, \\ &\beta_o v(a) + \beta_1 v'(a) = A. \end{aligned} \tag{4.6.6}$$

Odredimo sada konstantu C tako da rešenje (4.6.5) zadovoljava konturni uslov u tački x=b. Dakle, iz

$$(\beta_o u(b) + \beta_1 u'(b))C + (\beta_o v(b) + \beta_1 v'(b)) = B$$

sleduje

$$C = \frac{B-(\beta_0 v(b)+\beta_1 v'(b))}{\beta_0 u(b)+\beta_1 u(b)},$$

pri čemu smo pretpostavili da je $\beta_0 u(b)+\beta_1 u'(b)\neq 0$.

Primedba 4.6.1. Uslovi (4.6.6) su ispunjeni, na primer, ako je

$$u(a)=\alpha_1 m, \quad u'(a)=-\alpha_0 m \quad (m=\text{const}\neq 0)$$

i

$$v(a) = \frac{A}{\alpha_0}, \quad v'(a) = 0 \quad (\text{ako je } \alpha_0\neq 0)$$

ili

$$v(a) = 0, \quad v'(a) = \frac{A}{\alpha_1} \quad (\text{ako je } \alpha_1\neq 0).$$

Na kraju ovog odeljka izložićemo jedan metod ([22]) za rešavanje konturnog problema

$$(4.6.7) \quad y''+q(x)y=f(x), \quad y'(a)=\alpha y(a)+A, \quad y'(b)=\beta y(b)+B,$$

gde su $q$ i $f$ date neprekidne funkcije na $[a,b]$.

Ovaj metod se zasniva na odredjivanju funkcija $u$ i $v$ tako da je rešenje diferencijalne jednačine prvog reda

$$(4.6.8) \qquad y' = u(x)y + v(x),$$

istovremeno i rešenje posmatranog konturnog problema. Diferenciranjem (4.6.8) dobijamo diferencijalnu jednačinu drugog reda

$$(4.6.9) \qquad y'' = (u'+u^2)y+(uv+v').$$

Ako stavimo

$$(4.6.10) \qquad u'+u^2=-q(x) \quad \text{i} \quad v'+uv=f(x),$$

jednačina (4.6.9) se svodi na jednačinu konturnog problema (4.6.7). S druge strane, stavljajući $x=a$ u (4.6.8) i uporedjivanjem sa datim konturnim uslovom u tački $x=a$, dobijamo

$$(4.6.11) \qquad u(a) = \alpha \quad \text{i} \quad v(a) = A.$$

Dakle, (4.6.10) i (4.6.11) definišu Cauchyev problem za sistem od dve jednačine prvog reda

$$\begin{aligned} u' &= -u^2 + q(x) \\ v' &= f(x) - uv \end{aligned} \qquad (u(a)=\alpha, \quad v(a)=A),$$

iz kojih se, nekim od metoda integracije može naći $u(b)$ i $v(b)$. Tada iz (4.6.8) za $x=b$, tj. iz

$$y'(b) = u(b)y(b) + v(b)$$

i datog konturnog uslova

$$y'(b) = \beta y(b) + B,$$

pod pretpostavkom $u(b)\neq\beta$, sleduje

$$\text{(4.6.12)} \quad y(b) = \frac{v(b)-B}{\beta-u(b)}, \qquad y'(b) = \frac{\beta v(b) - Bu(b)}{\beta - u(b)}.$$

Na ovaj način dati konturni problem je sveden na Cauchyev problem za jednačinu drugog reda

$$y'' + q(x)y = f(x)$$

sa uslovima (4.6.12).

Primetimo da je početni uslov, u ovom slučaju, dat u krajnjoj tački segmenta integracije, tj. u tački $x=b$. Integraciju treba sprovesti ka tački $x=a$, tj. sa "negativnim" korakom, što znači da u odgovarajućim formulama za numeričku integraciju umesto $h$ treba uzeti $-h$.

## 8.4.7. Problem sopstvenih vrednosti

U ovom odeljku razmatraćemo rešavanje konturnog problema sa sopstvenim vrednostima oblika

$$\text{(4.7.1)} \quad \frac{d}{dx}(p(x)y') + \lambda q(x)y = f(x)y \qquad (a \leq x \leq b),$$

$$\text{(4.7.2)} \qquad y(a) = y(b) = 0.$$

Naime, daćemo dva metoda za numeričko odredjivanje netrivijalnih rešenja konturnog problema (4.7.1) - (4.7.2). Pri ovome pretpostavljamo da $p\in C^1[a,b]$, $q,f\in C[a,b]$ i $p(x)>0$, $q(x)>0$, $f(x)\geqq 0$ $(x\in[a,b])$.

1. Diferencni metod za odredjivanje sopstvenih vrednosti konturnog problema (4.7.1) - (4.7.2) zasniva se na podeli segmenta $[a,b]$ na $N+1$ podsegmenata dužine $h = \frac{b-a}{N+1}$, tako da su deone tačke $x_n=a+nh$ $(n=0,1,\dots,N+1)$, i aproksimaciji izvoda odgovarajućim diferencama.

Ako stavimo $p_s\equiv p(x_o+sh)$ $(s\in R)$, $q_n\equiv q(x_n)$, $f_n\equiv f(x_n)$, na rezultat iz odeljka 8.4.3, problem (4.7.1) - (4.7.2) se može svesti na algebarski problem sopstvenih vrednosti

$$\frac{1}{h^2}\{p_{n+1/2}(y_{n+1}-y_n)-p_{n-1/2}(y_n-y_{n-1})\}+\lambda q_n y_n=f_n y_n \qquad (n=1,\dots,N)$$

sa $y_o=y_{N+1}=0$.

Neka su $\lambda_k$ i $\lambda_k^h$ sopstvene vrednosti diferencijalnog i odgovarajućeg diferencnog problema respektivno, i neka su, pritom, poredjane po veličini, tj. neka je

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \dots \quad \text{i} \quad \lambda_1^h \leqq \lambda_2^h \leqq \dots .$$

Razmotrimo sada model-problem $(p(x)\equiv 1,\ q(x)\equiv 1,\ f(x)\equiv 0)$

$$(4.7.3) \qquad y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

čije su tačne sopstvene vrednosti $\lambda_k=k^2\pi^2$ $(k=1,2,\dots)$, a odgovarajuće sopstvene funkcije $w_k=\sin k\pi x$ (videti [25]).

Odgovarajući diferencni analogon je

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + \lambda y_n = 0 \qquad (n=1,\dots,N),$$

$$y_o = y_{N+1} = 0,$$

tj.

$$y_{n+1} - (2-\lambda h^2)y_n + y_{n-1} = 0 \qquad (n=1,\dots,N),$$

$$y_o = y_{N+1} = 0.$$

Rešenje poslednje jednačine je dato sa

$$y_n = C_1\mu_1^n + C_2\mu_2^n,$$

gde su $\mu_1$ i $\mu_2$ koreni karakteristične jednačine

$$\mu^2 - (2-\lambda h^2)\mu + 1 = 0. \tag{4.7.4}$$

S obzirom da je $\mu_1\mu_2=1$, tj. $\mu_2=\mu_1^{-1}$, imamo

$$y_n = C_1\mu_1^n + C_2\mu_1^{-n}. \tag{4.7.5}$$

Iz uslova $y_o=y_{N+1}=0$ sleduje

$$C_1 + C_2 = 0,$$

$$C_1\mu_1^{N+1} + C_2\mu_1^{-(N+1)} = 0 .$$

Za egzistenciju netrivijalnog rešenja ovog sistema jednačina potreban i dovoljan uslov je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \mu_1^{N+1} & \mu_1^{-(N+1)} \end{vmatrix} = \mu_1^{-(N+1)} - \mu_1^{N+1} = 0 ,$$

tj.

$$\mu_1 = \exp\frac{k\pi i}{N+1} \quad (k=0,1,\dots,2N+1).$$

Najzad, na osnovu (4.7.4) dobijamo

$$\lambda_k^h = \frac{2}{h^2}\left(1 - \cos\frac{k\pi}{N+1}\right) = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi}{2(N+1)} . \tag{4.7.6}$$

Ako u (4.7.5) stavimo $C_1=-C_2=\frac{1}{2i}$, dobijamo odgovarajuće sopstvene funkcije diferencnog analogona

$$w_n^k=\frac{1}{2i}\left(\exp\left(\frac{ink\pi}{N+1}\right)-\exp\left(-\frac{ink\pi}{N+1}\right)\right)=\sin\frac{nk\pi}{N+1}.$$

Na osnovu (4.7.6) zaključujemo da su sopstvene vrednosti $\lambda_1^h,\ldots,\lambda_N^h$ medjusobno različite. Isti zaključak važi i za odgovarajuće sopstvene funkcije $w_n^1,\ldots,w_n^N$, koje čine potpun sistem sopstvenih funkcija, s obzirom da je posmatrani problem ekvivalentan sa problemom sopstvenih vrednosti za matricu reda N.

Dokazaćemo sada da je $\lambda_k^h$ aproksimacija za $\lambda_k$, čiji je red dva, tj. da je $\lambda_k^h-\lambda_k=0(h^2)$ $(k=1,\ldots,N)$.

Kako je $h=\frac{1}{N+1}$ i $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+0(x^4)$, iz (4.7.6) sleduje

$$\lambda_k^h=\frac{2}{h^2}\left(1-1+\frac{1}{2}(k\pi h)^2+0(h^4)\right)=k^2\pi^2+0(h^2),$$

tj.

$$\lambda_k^h=\lambda_k+0(h^2).$$

<u>Primedba 4.7.1.</u> Za dovoljno veliko N važi

$$\frac{\lambda_N^h}{\lambda_N}=\frac{4}{\pi^2N^2h^2}\sin^2\frac{\pi N}{2(N+1)}=\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{N+1}{N}\right)^2\sin^2\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{N+1}\right)\sim\frac{4}{\pi^2}.$$

<u>Primer 4.7.1.</u> Odredimo približno najmanju sopstvenu vrednost konturnog problema

$$\frac{d}{dx}\left((1+x^2)\frac{dy}{dx}\right)+\lambda y=0,\quad y(-1)=y(1)=0, \tag{4.7.7}$$

korišćenjem diferencne aproksimacije

$$\frac{1}{h^2}\left[(1+(x_n+\tfrac{h}{2})^2)(y_{n+1}-y_n)-(1+(x_n-\tfrac{h}{2})^2)(y_n-y_{n-1})\right]+\lambda y_n=0, \tag{4.7.8}$$

kod koje je greška u rešenjima $y_n$, a takodje i u vrednostima za $\lambda$, reda $0(h^2)$.

Uzmimo $h=\frac{2}{3}$. Na osnovu datih konturnih uslova imamo $y_o=y_3=0$. Korišćenjem činjenice da je rešenje problema (4.7.7) parna funkcija (takodje, diferencna aproksimacija poseduje osobinu simetričnosti), zaključujemo da je $y_1=y_2$, što znači da je za odredjivanje tražene sopstvene vrednosti dovoljno uzeti samo jednu jednačinu iz (4.7.8). Na primer, za $x_1=-1/3$, imamo

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2[(1+0)(y_2-y_1) - (1+(\tfrac{2}{3})^2)(y_1-y_0)] + \lambda y_1 = 0,$$

tj.

$$\left(\lambda - \frac{13}{4}\right)y_1 = 0 .$$

Poslednja jednačina ima netrivijalno rešenje ($y_1\neq 0$) ako je $\lambda = \frac{13}{4} = 3.25$ .

Radi dobijanja tačnije vrednosti $\lambda$ uzmimo manji korak h, na primer $h=\frac{2}{5}$. U tom slučaju, imamo $y_0=y_5=0$, $y_1=y_4$, $y_2=y_3$. Iz (4.7.8), za n=1 i n=2 (tj. $x_1=-\frac{3}{5}$ i $x_2=-\frac{1}{5}$) sleduje

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2[(1+\tfrac{4}{25})(y_2-y_1) - (1+\tfrac{16}{25})(y_1-y_0)] + \lambda y_1 = 0,$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2[(1+0)(x_3-x_2) - (1+\tfrac{4}{25})(y_2-y_1)] + \lambda y_2 = 0,$$

tj.

$$\left(\lambda - \frac{35}{2}\right)y_1 + \frac{29}{4}y_2 = 0 ,$$

$$\frac{29}{4}y_1 + \left(\lambda - \frac{29}{4}\right)y_2 = 0 .$$

Ovaj sistem jednačina ima netrivijalna rešenja ako i samo ako je

$$\begin{vmatrix} \lambda - \frac{35}{2} & \frac{29}{4} \\ \frac{29}{4} & \lambda - \frac{29}{4} \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{99}{4}\lambda + \frac{1189}{16} = 0 ,$$

tj. ako je $\lambda=\lambda_1\approx 3.50$ ili $\lambda=\lambda_2\approx 21.25$. Za najmanju sopstvenu vrednost, u ovom slučaju, se dobija $\lambda_1\approx 3.50$.

Dakle, za najmanju sopstvenu vrednost smo dobili pri $h_1 = \frac{2}{3}$, $\lambda_1^{(1)}=3.25$, a pri $h_2 = \frac{2}{5}$, $\lambda_1^{(2)}=3.50$. Richardsonovom ekstrapolacijom možemo dobiti tačniju vrednost. Naime, kako je greška pri odredjivanju ovih sopstvenih vrednosti reda $O(h^2)$, ekstrapolacijom dobijamo

$$\bar{\lambda}_1 = \lambda_1^{(2)} + \frac{\lambda_1^{(2)} - \lambda_1^{(1)}}{\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 - 1} \approx 3.64.$$

2. Metod superpozicije za odredjivanje sopstvenih vrednosti konturnog problema sastoji se u konstrukciji funkcije $x \mapsto y(x,\lambda)$ koja zadovoljava (4.7.1) i početne uslove

(4.7.9) $$y(a,\lambda) = 0, \quad y'(a,\lambda) = 1,$$

a zatim se rešava jednačina

(4.7.10) $$\Phi(\lambda) = y(b,\lambda) = 0.$$

Drugim rečima, najpre se rešava Cauchyev problem definisan sa (4.7.1) i (4.7.9), pri čemu je $\Phi(\lambda)$ njegovo rešenje u tački $x=b$.

Jednačina (4.7.10) se, u opštem slučaju rešava iterativno nekim od metoda za rešavanje nelinearnih jednačina. Pri ovome iterativna funkcija metoda ne sme da sadrži izvode od $\Phi$. Takvi su, na primer, metod sečice, metod regula-falsi, Steffensenov metod, metod polovljenja intervala, itd.

Primenu metoda superpozicije ilustrovaćemo na odredjivanje sopstvenih vrednosti model-problema (4.7.3).

Ako stavimo $y'=z$, jednačina model-problem (4.7.3) se svodi na sistem

$$\vec{y}\,' = A\vec{y},$$

gde su $\vec{y} = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$ i $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix}$.

Segment $[0,1]$ podelimo na N+1 podsegmenata dužine $h=\frac{1}{N+1}$, tako da su deone tačke $h_n=nh\,(n=0,1,\ldots,N+1)$. Sa $y_n$ i $z_n$ označimo približne vrednosti od $y$ i $z$ u tački $x_n$.

Pri primeni metoda superpozicije, za konstrukciju funkcije $x\mapsto y(x,\lambda)$ iskoristićemo trapeznu formulu†, koja daje

$$\vec{y}_{n+1}-\vec{y}_n=\frac{h}{2}A(\vec{y}_n+\vec{y}_{n+1}), \tag{4.7.11}$$

gde je $\vec{y}_n=[y_n\ \ z_n]^T$, pri čemu je početni uslov $\vec{y}_o=[y_o\ \ z_o]^T=[0\ \ 1]^T$.

Nas interesuje vrednost $y_{N+1}$, s obzirom da je $\Phi(\lambda)=y(1,\lambda)\approx y_{N+1}$. Približne sopstvene vrednosti, u oznaci $\lambda_k^h$, odredićemo iz uslova $y_{N+1}=0$.

Pokazaćemo sada da se, u ovom konkretnom slučaju, vrednost $y_{N+1}$ može analitički eksplicitno odrediti.

Na osnovu (4.7.11) imamo

$$\vec{y}_{n+1}=\frac{1}{1+\frac{\lambda h^2}{4}}\,(I+\frac{h}{2}A)^2\,\vec{y}_n,$$

tj.

$$\vec{y}_{N+1}=\frac{1}{(1+\frac{\lambda h^2}{4})^{N+1}}(I+\frac{h}{2}A)^{2N+2}\,\vec{y}_o. \tag{4.7.12}$$

Kako je

$$A^{2k}\,\vec{y}_o=(-1)^k\begin{bmatrix}0\\ \lambda^k\end{bmatrix}\quad \text{i}\quad A^{2k+1}\,\vec{y}_o=(-1)^k\begin{bmatrix}\lambda^k\\ 0\end{bmatrix},$$

primenom binomne formule nalazimo

$$(I+\frac{h}{2}A)^{2N+2}\vec{y}_o=\sum_{k=o}^{N+1}\binom{2N+2}{2k}\left(\frac{h}{2}\right)^{2k}(-1)^k\begin{bmatrix}0\\ \lambda^k\end{bmatrix}$$
$$+\sum_{k=o}^{N}\binom{2N+2}{2k+1}\left(\frac{h}{2}\right)^{2k+1}(-1)^k\begin{bmatrix}\lambda^k\\ 0\end{bmatrix}.$$

† *Implicitni linearni jednokoračni metod*

Na osnovu (4.7.12) i poslednje jednakosti dobijamo

$$y_{N+1} = \frac{1}{\left(1+\frac{\lambda h^2}{4}\right)^{N+1}} \sum_{k=0}^{N} \binom{2N+2}{2k+1} \left(\frac{h}{2}\right)^{2k+1} (-1)^k \lambda^k ,$$

što se uvodjenjem smene $\frac{h\sqrt{\lambda}}{2} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ svodi na

$$y_{N+1} = \frac{h}{2} \cdot \frac{\sin(N+1)\theta}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} .$$

Iz uslova $\Phi(\lambda) \approx y_{N+1} = 0$ dobijamo $(N+1)\theta_k = k\pi$ $(k=1,\dots,N)$, tj.

(4.7.13) $$\lambda_k \approx \lambda_k^h = \frac{4}{h^2} \operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{2N+2} \quad (k=1,\dots,N).$$

Na primer, za N=2 (h=1/3) imamo

$$\lambda_1 \approx 36\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} = 12, \quad \lambda_2 \approx 36 \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3} = 108 .$$

Na osnovu (4.7.13) vidimo da je

$$\lambda_k^h = k^2\pi^2 + O(h^2),$$

tj. da je, i u ovom slučaju, greška reda $O(h^2)$.

## 8.5. LITERATURA


1. I.Babuška, M.Prager, V.Vitasek: Numerical processes in differential equations. Wiley (Interscience), New York, 1966.
2. I.S.Berezin i N.P.Židkov: Metodi vychislenií II. G.Izd. Fiz-Mat. Lit., Moskva, 1960.
3. M. Bertolino: Numerička analiza. Naučna knjiga, Beograd,1977.
4. J.C. Butcher: *Coefficients for study of Runge-Kutta integration processes*. J. Austral. Math. Soc. 3(1963), 185-201.
5. J.C. Butcher: *Implicit Runge-Kutta processes*. Math. Comp. 18(1964), 50-64.
6. J.C. Butcher: *On the convergence of numerical solutions to ordinary differential equations*. Math. Comp. 20(1966), 1-10.

7. L. Collatz: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1963.

8. B.P. Demidovič, I.A. Maron, È.Z. Shuvalova: Chisleniye metody analiza. G. Izd. Fiz.-Mat. Lit., Moskva, 1962.

9. S. Gill: *A process for the step-by-step integration of differential equations in an automatic computing machine.* Proc. Camb. Phil. Soc. 47(1951), 96-108.

10. S.K. Godunov, V.S. Ryaben'kiĭ: Raznostnye shemy. Nauka, Moskva, 1973.

11. G.Hall and J.M. Watt, eds.: Modern numerical methods for ordinary differential equations. Charendon Press, Oxford, 1976.

12. P. Henrici: Discrete variable methods in ordinary differential equations. John Wiley & Sons, London, 1962.

13. K. Heun: *Neue Methode zur approximativen Integration totaler Differentialgleichungen einer unabhängigen Veränderlichen.* Z. Math. Phys. 45 (1900), 23-38.

14. F.B. Hildebrand: Introduction to numerical analysis. McGraw-Hill, New York, 1974.

15. H.B. Keller: *Accurate difference methods for linear ordinary differential systems subject to linear constraints.* SIAM J. Numer. Anal. 6 (1969), 8-30.

16. H.B. Keller and A.B. White: *Difference methods for boundary value problems in ordinary differential equations.* SIAM J. Numer. Anal. 12(1975), 791-802.

17. H.B. Keller: *Accurate difference methods for nonlinear two-point boundary value problems.* SIAM J. Numer. Anal. 11(1974), 305-320.

18. W. Kutta: *Beitrag zur näherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen.* Z. Math. Phys. 46(1901), 435-453.

19. J.D. Lambert: Computational methods in ordinary differential equations. John Wiley & Sons, London, 1973.

20. H. Levy and F. Lessman: Finite difference equations. London, 1959.

21. M. Lotkin: *On the accuracy of Runge-Kutta's method.* M.T.A.C. 5(1951), 128-132.

22. P.C. Lu: *Method of chasing - A russian idea.* Mech. Eng. News. 14 (1977), 8-11.

23. G.V. Milovanović i Dj.R. Djordjević: Programiranje numeričkih metoda na FORTRAN jeziku. Institut za dokumentaciju zaštite na radu "Edvard Kardelj", Niš, 1979.

24. D.S. Mitrinović (saradnik P.M. Vasić): Analitičke nejednakosti. Gradjevinska knjiga, Beograd, 1970.

25. D.S. Mitrinović i J.D. Kečkić: Jednačine matematičke fizike. Gradjevinska knjiga, Beograd, 1972.

26. D.S. Mitrinović i D.Ž. Djoković: Polinomi i matrice. ICS, Beograd, 1975.

27. K. Orlov: *Jedna metoda aproksimacije za integraljenje diferencijalnih jednačina.* Glas Srpske Akad. Nauka 163(1934).

28. A. Ralston: *Runge-Kutta methods with minimum error bounds.* Math. Comp. 16(1962), 431-437.

29. A. Ralston: A first course in numerical analysis. McGraw-Hill, New York, 1965.

30. C. Runge: *Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen.* Math. Ann. 46(1895), 167-178.

31. A.A. Samarskiĭ: Teoriya raznostnyh skhem. Moskva, 1977.

32. J. Stoer, R. Bulirsch: Einführung in die Numerische Mathematik II. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

33. D.Dj. Tošić: Uvod u numeričku analizu. Naučna knjiga, Beograd, 1982.

34. D.M. Young and R.T.Gregory: A survey of numerical mathematics. Vol. I and II. Addison-Wesley, Reading, 1973.

GLAVA 9

# Približno rešavanje linearnih operatorskih jednačina

## 9.1. METODI ZA REŠAVANJE PARCIJALNIH JEDNAČINA

U ovom poglavlju razmotrićemo nekoliko metoda za rešavanje linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina, prvenstveno drugog reda. Najpre ćemo ukratko opisati Fourierov metod razdvajanja promenljivih koji se primenjuje za rešavanje jedne specijalne klase problema, pri čemu se problem svodi na obične diferencijalne jednačine. Rešenje problema se dobija u obliku reda.

U daljem izlaganju obradićemo opšti numerički metod, tzv. metod mreža, sa posebnim osvrtom na neke konkretne tipove jednačina.

### 9.1.1. Uvod

Opšti oblik linearne parcijalne jednačine drugog reda od dva argumenta je

(1.1.1) $$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G,$$

gde su A,B,C,D,E,F,G date funkcije, koje su neprekidne u izvesnoj oblasti S ravni xOy. Oblast S je obično definisana kao unutrašnjost neke krive Γ. Naravno, oblast S može biti kako konačna, tako i beskonačna. Tipičan problem koji se postavlja je nalaženje dva puta neprekidno-diferencijabilnog rešenja $(x,y)\to u(x,y)$ koje zadovoljava jednačinu (1.1.1), kao i izvesne uslove na krivoj (konturi) $\Gamma$.

Linearne parcijalne jednačine drugog reda mogu biti klasifikovane kao eliptičke, paraboličke ili hiperboličke jednačine u zavisnosti od ponašanja koeficijenata A,B,C u (1.1.1). Naime, neka je $\bar{D} = AC - B^2$.

Ako je u datoj oblasti S:

1° $\bar{D} > 0$, jednačina (1.1.1) je eliptičkog tipa;

2° $\bar{D} = 0$, jednačina (1.1.1) je paraboličkog tipa;

3° $\bar{D} < 0$, jednačina (1.1.1) je hiperboličkog tipa.

U slučaju kada $\bar{D}$ menja znak, jednačina (1.1.1) je mešovitog tipa.

Primer 1.1.1. Laplaceova jednačina

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1.1.2}$$

je eliptičkog tipa, jer je $A=C=1$, $B=0$, tj. $\bar{D}=AC-B^2=1>0$.

Primer 1.1.2. Jednačina provodjenja toplote

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

je paraboličkog tipa, jer je $\bar{D}=(-a^2)0 - 0^2 = 0$.

Primer 1.1.3. Talasna jednačina

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

je hiperboličkog tipa, jer je $\bar{D}=(-c^2)1 - 0^2=-c^2 < 0$.

Primer 1.1.4. Kod jednačine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

imamo $\bar{D} = y$, pa je ona mešovitog tipa u oblasti $S=\{(x,y)|\ 0<x<1, -1<y<1\}$. Medjutim, u oblasti $S'=\{(x,y)|\ 0<x<1,\ 0<y<1\}$ jednačina je eliptičkog tipa.

U izvesnim prostijim slučajevima moguće je naći rešenje parcijalne jednačine (1.1.1) koje zadovoljava izvesne konturne uslove. Na primer, tzv. Dirichletov problem za Laplaceovu jednačinu (1.1.2), sa $u(x,y)=s(x,y)$, $(x,y)\in\Gamma$, gde je $s$ data neprekidna funkcija, može biti rešen kada je, recimo, $\Gamma$ kružnica $x^2+y^2=r^2$. Tada se rešenje može iskazati pomoću tzv. Poissonove integralne formule

$$u(x,y) = \frac{r^2-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{s(re^{i\phi})}{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\phi)}\,d\phi,$$

gde su $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$.

U opštem slučaju nije moguće analitički rešiti jednačinu (1.1.1). Za specijalnu klasu problema, jedan analitički metod, koji daje rešenje u obliku reda, dat je u sledećem odeljku. U preostalim odeljcima ovog poglavlja izlažemo opšti numerički metod, tzv. metod mreža, koji predstavlja uopštenje diferencnog metoda sa kojim smo se upoznali kod konturnih problema za obične diferencijalne jednačine. Primenom metoda mreže problem rešavanja linearnih parcijalnih jednačina se, u opštem slučaju, svodi na sistem linearnih algebarskih jednačina. Ukoliko se "korak mreže" smanjuje broj jednačina u odgovarajućem sistemu se povećava. Prirodno je očekivati da će tačnost rešavanja biti povećana uzimanjem manjeg koraka, tj. korišćenjem "finije" diskretizacije. Medjutim, u tom slučaju, pored toga što dobijamo sisteme od velikog broja jednačina, takvi sistemi su, po pravilu, slabo uslovljeni, tako da je izbor koraka mreže dosta važan problem, pri praktičnoj realizaciji metoda.

zadovoljava jednačinu (1.1.1), kao i izvesne uslove na krivoj (konturi) $\Gamma$.

Linearne parcijalne jednačine drugog reda mogu biti klasifikovane kao eliptičke, paraboličke ili hiperboličke jednačine u zavisnosti od ponašanja koeficijenata A,B,C u (1.1.1). Naime, neka je $\bar{D} = AC - B^2$.

Ako je u datoj oblasti S:

1° $\bar{D} > 0$, jednačina (1.1.1) je eliptičkog tipa;

2° $\bar{D} = 0$, jednačina (1.1.1) je paraboličkog tipa;

3° $\bar{D} < 0$, jednačina (1.1.1) je hiperboličkog tipa.

U slučaju kada $\bar{D}$ menja znak, jednačina (1.1.1) je mešovitog tipa.

Primer 1.1.1. Laplaceova jednačina

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1.1.2}$$

je eliptičkog tipa, jer je $A=C=1$, $B=0$, tj. $\bar{D}=AC-B^2=1>0$.

Primer 1.1.2. Jednačina provodjenja toplote

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

je paraboličkog tipa, jer je $\bar{D}=(-a^2)0 - 0^2 = 0$.

Primer 1.1.3. Talasna jednačina

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

je hiperboličkog tipa, jer je $\bar{D}=(-c^2)\cdot 1 - 0^2=-c^2 < 0$.

Primer 1.1.4. Kod jednačine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

imamo $\bar{D}=y$, pa je ona mešovitog tipa u oblasti $S=\{(x,y)\mid 0<x<1,\ -1<y<1\}$. Medjutim, u oblasti $S'=\{(x,y)\mid 0<x<1,\ 0<y<1\}$ jednačina je eliptičkog tipa.

U izvesnim prostijim slučajevima moguće je naći rešenje parcijalne jednačine (1.1.1) koje zadovoljava izvesne konturne uslove. Na primer, tzv. Dirichletov problem za Laplaceovu jednačinu (1.1.2), sa $u(x,y)=s(x,y)$, $(x,y)\in\Gamma$, gde je $s$ data neprekidna funkcija, može biti rešen kada je, recimo, $\Gamma$ kružnica $x^2+y^2=r^2$. Tada se rešenje može iskazati pomoću tzv. Poissonove integralne formule

$$u(x,y)=\frac{r^2-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{s(re^{i\phi})}{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\phi)}\,d\phi,$$

gde su $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$.

U opštem slučaju nije moguće analitički rešiti jednačinu (1.1.1). Za specijalnu klasu problema, jedan analitički metod, koji daje rešenje u obliku reda, dat je u sledećem odeljku. U preostalim odeljcima ovog poglavlja izlažemo opšti numerički metod, tzv. metod mreža, koji predstavlja uopštenje diferencnog metoda sa kojim smo se upoznali kod konturnih problema za obične diferencijalne jednačine. Primenom metoda mreže problem rešavanja linearnih parcijalnih jednačina se, u opštem slučaju, svodi na sistem linearnih algebarskih jednačina. Ukoliko se "korak mreže" smanjuje broj jednačina u odgovarajućem sistemu se povećava. Prirodno je očekivati da će tačnost rešavanja biti povećana uzimanjem manjeg koraka, tj. korišćenjem "finije" diskretizacije. Medjutim, u tom slučaju, pored toga što dobijamo sisteme od velikog broja jednačina, takvi sistemi su, po pravilu, slabo uslovljeni, tako da je izbor koraka mreže dosta važan problem, pri praktičnoj realizaciji metoda.

### 9.1.2. Fourierov metod razdvajanja promenljivih

U ovom odeljku razmatramo jedan prost metod za rešavanje specijalne klase linearnih parcijalnih jednačina drugog reda, pod odredjenim početnim i konturnim (graničnim) uslovima. Ovaj metod se dosta koristi u inženjerskoj praksi, a zasniva se na razdvajanju promenljivih pri čemu se problem svodi na rešavanje običnih diferencijalnih jednačina. Metod je poznat kao Fourierov metod razdvajanja promenljivih. Primenom ovog metoda dobijamo analitičko rešenje u obliku Fourierovog reda po sopstvenim funkcijama dobijenog linearnog konturnog problema za obične diferencijalne jednačine drugog reda.

Fourierov metod razdvajanja promenljivih ne može biti primenjen na opštu jednačinu (1.1.1). Tipičan zadatak na koji je primenljiv ovaj metod je parcijalna jednačina oblika

$$(1.2.1)\qquad A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = D(x)\frac{\partial u}{\partial x} + E(y)\frac{\partial u}{\partial y} + (F_1(x) + F_2(y))u$$

sa početnim uslovima

$$(1.2.2)\qquad u(x,o) = f(x), \qquad u_y(x,o) = g(x),$$

i konturnim uslovima

$$(1.2.3)\qquad \alpha_o u(o,y) + \alpha_1 u_x(o,y) = 0, \qquad \beta_o u(a,y) + \beta_1 u_x(a,y) = 0,$$

gde su $f$ i $g$ date funkcije i $\alpha_o$, $\alpha_1$, $\beta_o$, $\beta_1$, a date konstante.

Pretpostavimo da se rešenje problema (1.2.1)-(1.2.2)-(1.2.3) može predstaviti u obliku proizvoda dve funkcije, od kojih je jedna samo funkcija od $x$, a druga samo od $y$, tj.

$$(1.2.4)\qquad u(x,y) = X(x)Y(y)\ .$$

Tada je

$$A(x)X''Y + C(y)XY'' = D(x)X'Y + E(y)XY' + (F_1(x) + F_2(y))XY ,$$

tj.

$$A(x)\frac{X''}{X} - D(x)\frac{X'}{X} - F_1(x) = -(C(y)\frac{Y''}{Y} - E(y)\frac{Y'}{Y} - F_2(y)) .$$

Iz poslednje jednačine sleduje

$$(1.2.5) \qquad A(x)X'' - D(x)X' - (F_1(x) + \lambda)X = 0$$

i

$$(1.2.6) \qquad C(y)Y'' - E(y)Y' - (F_2(y) - \lambda)Y = 0 ,$$

gde je $\lambda$ konstanta. Pri ovome, konturni uslovi (1.2.3) se svode na

$$(1.2.7) \qquad \alpha_o X(o)+\alpha_1 X'(o) = 0, \quad \beta_o X(a) + \beta_1 X'(a) = 0 .$$

Na osnovu Sturm-Liouvilleove teorije zaključujemo da problem (1.2.5)-(1.2.7) ima beskonačno mnogo sopstvenih vrednosti $\lambda_n (n=1,2,\ldots)$ za koje postoje netrivijalna rešenja (sopstvene funkcije) $X_n$ $(n=1,2,\ldots)$.

Sa $Y_n$ označimo opšte rešenje jednačine (1.2.6) koje odgovara vrednosti $\lambda=\lambda_n$. Ako su $Y_{1n}$ i $Y_{2n}$ dva linearno nezavisna partikularna rešenja jednačine (1.2.6) pri $\lambda=\lambda_n$, tada je

$$Y_n(y) = C_n Y_{1n}(y) + D_n Y_{2n}(y) ,$$

gde su $C_n$ i $D_n$ proizvoljne konstante.

Funkcije $Y_{1n}$ i $Y_{2n}$ odredimo tako da su ispunjeni uslovi

$$(1.2.8) \qquad Y_{1n}(o)=1, \quad Y'_{1n}(o)=0 \quad \text{i} \quad Y_{2n}(o)=0, \quad Y'_{2n}(o)=1 .$$

Kako je $u_n(x,y)=X_n(x)(C_n Y_{1n}(y)+D_n Y_{2n}(y))$ rešenje problema (1.2.1)-(1.2.3), na osnovu principa superpozicije, imamo da je i funkcija $u$, definisana sa

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(x)(C_n Y_{1n}(y) + D_n Y_{2n}(y))$$

takodje rešenje ovog problema. Da bi ovo rešenje zadovoljavalo početni uslov (1.2.2), na osnovu (1.2.8) zaključujemo da mora biti

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n X_n(x) \quad \text{i} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} D_n X_n(x),$$

čime je problem odredjivanja konstanti $C_n$ i $D_n$ sveden na razvijanje funkcija $f$ i $g$ u red po sopstvenim funkcijama $X_n$.

Dakle, Fourierov metod razdvajanja promenljivih se svodi na nalaženje sopstvenih vrednosti i sopstvenih funkcija konturnog problema (1.2.5)-(1.2.7), rešavanje Cauchyevog problema za jednačinu (1.2.6) sa uslovima (1.2.8) i najzad, razvijanje funkcija $f$ i $g$ u red po sopstvenim funkcijama konturnog problema (1.2.5)-(1.2.7).

Primer 1.2.1. Nadjimo rešenje sledećeg problema za talasnu jednačinu (jednačina žice koja treperi)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

$$(1.2.9) \qquad u(0,t) = u(a,t) = 0,$$

$$u(x,0) = x(a-x), \quad u_t(x,0) = 0 \qquad (0 \leq x \leq a),$$

gde su $a$ i $c$ konstante.

Ako stavimo $u(x,t)=X(x)T(t)$, iz (1.2.9) sleduje

$$(1.2.10) \qquad X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0) = X(a) = 0,$$

$$T'' + \lambda c^2 T = 0.$$

Sopstvene vrednosti i sopstvene funkcije problema (1.2.10) su

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2} \quad \text{i} \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{a} \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Nadalje, rešavajući Cauchyeve probleme

$$T''_{1n} + \lambda_n c^2 T_{1n} = 0, \quad T_{1n}(0) = 1, \quad T'_{1n}(0) = 0,$$

$$T''_{2n} + \lambda_n c^2 T_{2n} = 0, \quad T_{2n}(0) = 0, \quad T'_{2n}(0) = 1,$$

dobijamo

$$T_{1n}(t) = \cos\frac{n\pi c}{a}t, \quad T_{2n}(t) = \frac{a}{n\pi c}\sin\frac{n\pi c}{a}t.$$

Najzad, razvojem funkcija $f(x)=x(a-x)$ i $g(x)=0$ $(0 \leq x \leq a)$, u Furierov red po funkcijama $X_n = \sin\frac{n\pi x}{a}$, nalazimo

$$C_{2n} = 0, \quad C_{2n-1} = \frac{8a^2}{(2n-1)^3\pi^3}, \quad D_n = 0 \quad (n=1,2,\ldots),$$

tj.

$$u(x,t) = \frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{a}\cos\frac{(2n-1)\pi ct}{a}.$$

### 9.1.3. Metod mreža

Neka je data linearna parcijalna diferencijalna jednačina

$$Lu = g \tag{1.3.1}$$

i neka se u oblasti $D$ ograničenoj krivom $\Gamma$ $(D=\text{int}\Gamma)$ traži ono njeno rešenje koje na krivoj $\Gamma$ zadovoljava dati konturni uslov. Medju jednačinama oblika (1.3.1) tretiraćemo uglavnom jednačine koje se javljaju u fizici i tehnici, tzv. jednačine matematičke fizike. Opšti konturni (linearni) uslov predstavljaćemo u obliku

$$Ku = s \quad ((x,y)\in\Gamma). \tag{1.3.2}$$

Jednačinu (1.3.1) sa konturnim uslovom (1.3.2) možemo predstaviti u operatorskom obliku

$$Au = f, \tag{1.3.3}$$

gde su linearan operator A i f dati sa

$$Au \equiv \begin{cases} Lu & ((x,y)\in D), \\ Ku & ((x,y)\in \Gamma) \end{cases}$$

i

$$f \equiv \begin{cases} g(x,y) & ((x,y)\in D), \\ s(x,y) & ((x,y)\in \Gamma). \end{cases}$$

Rešenje $u:D\to R$, jednačine (1.3.3), može se tretirati kao element izvesnog normiranog prostora $U_o$. U našim razmatranjima uzećemo da je $U_o=C(D)$ (prostor neprekidnih funkcija na D).

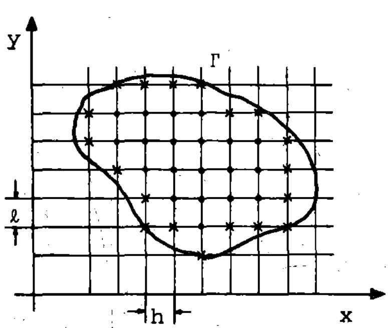
Osnovni metod za numeričko rešavanje jednačine (1.3.1) je metod mreža (diferencni metod). U primeni ovog metoda, najpre, treba izabrati diskretan skup tačaka $D_h$, koji pripada oblasti $\bar{D}(=D\cup\Gamma)$. Skup $D_h$ naziva se mreža. Najčešće se, u primenama, za mrežu uzima familija paralelnih pravih

$$x_i = x_o + ih \qquad (i=0,\pm1,\pm2,\ldots),$$

$$y_j = y_o + j\ell \qquad (j=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

Tačke preseka ovih pravih nazivaju se čvorovi mreže, a veličine h i $\ell$ koraci mreže, pri čemu se obično uzima da $\ell$ zavisi od h, tj. $\ell=\ell(h)$ (najčešće je $\ell=rh$ ili $\ell=rh^2$, gde je r data konstanta).

Dva čvora mreže $D_h$ nazivaju se susednim ako su udaljena po x- ili y- osi, samo za jedan korak. Ako sva četiri susedna čvora nekog čvora pripadaju oblasti $\bar{D}$, onda se taj čvor naziva unutrašnjim.



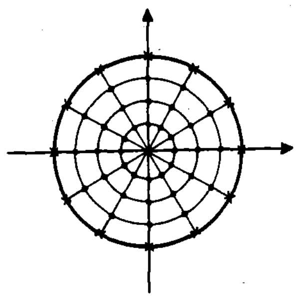
Sl.1.3.1

Skup unutrašnjih čvorova (na Sl.1.3.1 označeni tačkom .) čini tzv. mrežnu oblast i označava se sa $D_h^*$. Čvorovi kod kojih bar jedan od susednih čvorova ne pripada $D_h^*$ nazivaju se graničnim čvorovima.

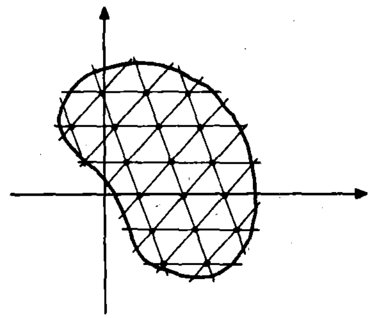
Skup graničnih čvorova (na Sl.1.3.1 označeni sa ×)

naziva se granicom mrežne oblasti i označava sa $\Gamma^*$.

Pored navedene pravougaone mreže u upotrebi su i drugi oblici mreža; na primer, kao na Sl. 1.3.2 i Sl. 1.3.3.



Sl. 1.3.2



Sl. 1.3.3

Sa $U_h$ i $F_h$ označimo normirane prostore funkcija definisanih na mreži $D_h$.

Posle konstrukcije mreže $D_h$, potrebno je izvršiti diskretizaciju jednačine (1.3.3) u obliku

$$A_h u^{(h)} = f^{(h)} \tag{1.3.4}$$

gde je $A_h$ linearan diferencni operator koji preslikava $U_h$ u $F_h$.

Funkcija $u^{(h)}$ ($\in U_h$), koja je rešenje jednačine (1.3.4), daje tablicu približnih vrednosti rešenja jednačine (1.3.3) u čvorovima mreže. Označimo sa $[u]_h$ ($\in U_h$) funkciju koja odredjuje tablicu tačnih vrednosti rešenja jednačine (1.3.3) na mreži $D_h$.

Funkcije definisane na mreži $D_h$ obično se nazivaju mrežne funkcije.

Norma u prostoru $U_h$ treba biti takva da aproksimira normu prostora $U_o$ u sledećem smislu

$$\lim_{h\to 0} \| v^{(h)} \|_{U_h} = \| v \|_{U_o} \qquad (\forall v \in U_o),$$

gde je $v^{(h)}(x,y)=v(x,y)$ kada $(x,y)\in D_h$. U tom slučaju kažemo da su norme u prostorima $U_h$ i $U_o$ saglasne.

Jednačinu (1.3.4) u daljem radu zvaćemo diferencnom šemom. Diferencna šema treba biti tako konstruisana da je ispunjen uslov konvergencije

$$\| u^{(h)} - [u]_h \|_{U_h} \to 0 \qquad (h \to 0). \tag{1.3.5}$$

Ukoliko je, za dovoljno malo h,

$$\| u^{(h)} - [u]_h \|_{U_h} \leq Ch^k \qquad \text{(C-konstanta)},$$

kažemo da je konvergencija reda $k$.

Problem konstrukcije konvergentne diferencne šeme može se svesti na dve etape:

$1^o$ Aproksimacija jednačine (1.3.3);

$2^o$ Provera stabilnosti dobijene šeme.

Neka je $\delta f^{(h)}$ definisano pomoću

$$\delta f^{(h)} = A_h[u]_h - f^{(h)}. \tag{1.3.6}$$

Naime, $\delta f^{(h)}$ predstavlja ostatak u jednačini (1.3.4) koji se dobija pri zameni $u^{(h)}$ sa $[u]_h$.

<u>Definicija 1.3.1</u>. Diferencna šema (1.3.4) aproksimira rešenje jednačine (1.3.3), ako $\| \delta f^{(h)} \|_{F_h} \to 0$, kada $h \to 0$.

Ako je, za dovoljno malo h,

$$\| \delta f^{(h)} \|_{F_h} \leq C_1 h^k \qquad (C_1 - \text{konstanta}) \tag{1.3.7}$$

kažemo da je aproksimacija reda $k$.

<u>Definicija 1.3.2</u>. Ako postoji $h_o > 0$ takvo da za $h < h_o$ i svako $f^{(h)} \in F_h$, diferencna šema (1.3.4) ima jedinstveno rešenje, pri čemu je

(1.3.8) $$\| u^{(h)} \|_{U_h} \leq C_2 \| f^{(h)} \|_{F_h} \qquad (C_2 \text{ - konstanta}),$$

kažemo da je ova šema stabilna.

Teorema 1.3.1. Ako diferencna šema (1.3.4) aproksimira rešenje jednačine (1.3.3) i ako je stabilna, tada je uslov konvergencije (1.3.5) ispunjen. Štaviše, ako je aproksimacija reda $k$, tada je i konvergencija istog reda.

Dokaz. Neka je $h < h_o$. Zamenimo u jednačini (1.3.4), $f^{(h)}$ sa $-\delta f^{(h)}$ $(\in F_h)$. Tada je na osnovu (1.3.6),

$$A_h(u^{(h)} - [u]_h) = -\delta f^{(h)}.$$

Na dalje, zbog uslova stabilnosti imamo

$$\| u^{(h)} - [u]_h \|_{U_h} \leq C_2 \| \delta f^{(h)} \|_{F_h},$$

gde je $C_2$ konstanta koja se javlja u nejednakosti (1.3.8).

Najzad, iz poslednje nejednakosti i nejednakosti (1.3.7) sleduje

$$\| u^{(h)} - [u]_h \|_{U_h} \leq (C_1 C_2) h^k,$$

čime je dokaz teoreme završen.

## 9.1.4. Aproksimacija diferencijalnog operatora

Aproksimacija jednačine (1.3.3) pomoću (1.3.4) zahteva rešavanje dva problema:

1° Aproksimacija diferencijalnog operatora $L$ jednačine (1.3.1) pomoću diferencnog operatora $L_h$;

2° Aproksimacija konturnog uslova (1.3.2).

U ovom odeljku bavićemo se rešavanjem prvog problema.

Jedan jednostavan način za aproksimaciju operatora $L$ pomoću diferencnog operatora sastoji se u zameni izvoda odgovarajućim diferencama u unutrašnjim čvorovima mreže $D_h$, pri čemu pretpostavljamo da je rešenje $(x,y\mapsto u(x,y)$ dovoljan broj puta diferencijabilno.

Za čvor $(x_i,x_j)\in D_h$ koristićemo oznaku $(i,j)$. Aproksimacije izvoda pomoću diferenci zasnivaju se na sledećim jednakostima

(1.4.1) $$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(i,j)} = \frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h} - \frac{h}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i,j)} + O(h^2),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(i,j)} = \frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h} + \frac{h}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i,j)} + O(h^2),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(i,j)} = \frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2h} - \frac{h^2}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{(i,j)} + O(h^4),$$

(1.4.2) $$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i,j)} = \frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2} - \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{(i,j)} + O(h^4).$$

Često se koristi i aproksimacija

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{(i,j)} = \frac{p_{i+1/2,j}(u_{i+1,j}-u_{i,j})-p_{i-1/2,j}(u_{i,j}-u_{i-1,j})}{h^2},$$

kod koje je greška $O(h^2)$.

Slične jednakosti važe i za izvode po drugom argumentu $y$.

Za aproksimaciju mešovitog izvoda $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ koristi se sledeća aproksimacija

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)_{(i,j)} \approx \frac{1}{2\ell}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(i,j+1)} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(i,j-1)}\right\}$$

$$\approx \frac{1}{4h\ell}\{u_{i+1,j+1}-u_{i-1,j+1}-u_{i+1,j-1}+u_{i-1,j-1}\} = L_h u^{(h)}$$

Razvijanjem $u_{i\pm1,j\pm1}$ po Taylorovoj formuli oko tačke $(i,j)$ dobijamo

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)_{(i,j)} = L_h u^{(h)} - \frac{1}{6}\left(h^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y} + \ell^2\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y^3}\right)_{(i,j)} + O(h^4+\ell^4).$$

Primer 1.4.1. Posmatrajmo Cauchyev problem za jednačinu prvog reda

$$(1.4.3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = g(x,y) & (-\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq y \leq Y), \\ u(x,0) = s(x) & (-\infty < x < +\infty), \end{cases}$$

koji se može predstaviti u obliku (1.3.3) stavljajući

$$Au \equiv \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial x} & (-\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq y \leq Y), \\ u(x,0) & (-\infty < x < +\infty), \end{cases}$$

$$f \equiv \begin{cases} g(x,y) & (-\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq y \leq Y), \\ s(x) & (-\infty < x < +\infty). \end{cases}$$

Za mrežu $D_h$ izaberimo skup tačaka $(x_i, x_j)$ takvih da je

$$x_i = ih, \quad y_j = j\ell \quad (i=0,\pm 1,\ldots;\ j=0,1,\ldots,N;\ N = \left[\frac{Y}{\ell}\right]).$$

Neka je $\ell = rh$ (r=const. Tada je $[u]_h = \{u(x_i, x_j)\}$ tablica rešenja $u(x,y)$ u tačkama mreže $D_h$.

Kod najprostije diferencne šeme za problem (1.4.3) može se uzeti

$$(1.4.4)\qquad A_h u^{(h)} = \begin{cases} \dfrac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{rh} - \dfrac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} & (i=0,\pm 1,\ldots;\ j=0,1,\ldots,N-1), \\ u_{i,o} & (i=0,\pm 1,\ldots), \end{cases}$$

$$(1.4.5)\qquad f^{(h)} = \begin{cases} g(ih, j\ell) & (i=0,\pm 1,\ldots;\ j=0,1,\ldots,N-1), \\ s(ih) & (i=0,\pm 1,\ldots). \end{cases}$$

Diferencna jednačina koja u ovom slučaju aproksimira datu diferencijalnu jednačinu, može se predstaviti u obliku

$$(1.4.6) \qquad u_{i,j+1} = (1-r)u_{i,j} + ru_{i+1,j} + rh\, g(ih,jrh).$$

S obzirom da je $u_{i,o}=s(ih)$ $(i=0,\pm1,\ldots)$, primenom (1.4.6) moguóno je redom izračunati vrednosti rešenja $u^{(h)}$ u tačkama mreže na pravama $y=\ell$, $y=2\ell$, itd.

U cilju ilustracije rezultata iz prethodnog odeljka odredimo red aproksimacije za diferencnu šemu odredjenu sa (1.4.4)-(1.4.5).

Neka je u prostoru $F_h$ norma uvedena pomoću

$$\| f^{(h)} \|_{F_h} = \max_{i,j} |g_{i,j}| + \max_{i} |s_i|,$$

gde je $g_{i,j}=g(ih,j\ell)$, $s_i=s(ih)$.

Pretpostavimo da rešenje $u$, problema (1.4.3), ima ograničene druge parcijalne izvode. Na osnovu (1.4.1) i (1.4.4) imamo

$$(1.4.7) \qquad A_h[u]_h = \begin{cases} \left[\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{rh}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{h}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_{(i,j)} + 0(h^2) \\ \\ u_{i,o} \end{cases}$$

S obzirom na jednakost (1.3.6), iz (1.4.7) sleduje

$$\delta f^{(h)} = \begin{cases} \dfrac{h}{2}\left[r\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_{(i,j)} + 0(h^2) \\ \\ 0\,, \end{cases}$$

odakle, zbog pretpostavke o ograničenosti drugih izvoda, zaključujemo da postoji konstanta C takva da je

$$\| \delta f^{(h)} \|_{F_h} \leq Ch\,,$$

što znači da se radi o aproksimaciji prvog reda.

Što se tiče stabilnosti, može se pokazati (videti [9] ) da je za $r \leqq 1$ posmatrana diferencna šema stabilna.

Primer 1.4.2. Razmotrimo Cauchyev problem za jednačinu provodjenja toplote$^{\dagger}$

(1.4.8)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(x,t) & (|x| < +\infty, \quad 0 \leqq t \leqq T), \\ u(x,0) = s(x) & (|x| < +\infty). \end{cases}$$

Mrežu $D_h$ izaberimo na isti način kao u prethodnom primeru. Korišćenjem aproksimacija

$$u_t(x_i,t_j) \approx \frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\ell} \quad \text{i} \quad u_{xx}(x_i,t_j) \approx \frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}$$

(1.4.8) se svodi na

(1.4.9)
$$A_h^{(1)} u^{(h)} = f^{(h)},$$

gde su

$$A_h^{(1)} u^{(h)} = \begin{cases} \dfrac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\ell} - a^2 \dfrac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2} \\ u_{i,o} \end{cases}$$

i

$$f^{(h)} = \begin{cases} g(ih,j\ell) \\ s(ih) \, . \end{cases}$$

Ako se za aproksimaciju izvoda iskoriste formule

$$u_t(x_i,t_{j+1}) \approx \frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\ell} \quad \text{i} \quad u_{xx}(x_i,t_{j+1}) \approx \frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}}{h^2}$$

† *Poseban slučaj difuzione jednačine*

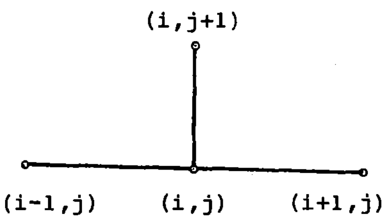
dobija se diferencna šema

(1.4.10) $$A_h^{(2)}u^{(h)} = f^{(h)},$$

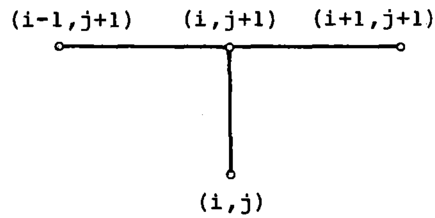
gde je

$$A_h^{(2)}u^{(h)} = \begin{cases} \dfrac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\ell} - a^2 \dfrac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} \\ u_{i,o}\,. \end{cases}$$

Grafički prikaz čvorova koji učestvuju u diferencnim šemama (1.4.9) i (1.4.10) dat je na Sl. 1.4.1 i 1.4.2 respektivno.




Sl. 1.4.1




Sl. 1.4.2

Neka je $\ell=rh^2$ ($r$=const). Suštinska razlika diferencnih šema (1.4.9) i (1.4.10) sastoji se u tome što je prva od njih eksplicitna, a druga implicitna. Naime, kod šeme (1.4.9), polazeći od $u_{i,o}=s(ih)$ $(i=0,\ 1,\ldots)$, pomoću

$$u_{i,j+1}=(1-2ra^2)u_{i,j}+ra^2(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})+rh^2g(ih,jrh^2)\ ,$$

možemo direktno odrediti $u_{i,1}$ $(i=0,\pm 1,\ldots)$, a zatim na isti način $u_{i,2}$ $(i=0,\pm 1,\ldots)$, itd. Kod druge šeme, medjutim, nije mogućno na ovaj način odrediti vrednosti $u_{i,j}$, već je potrebno rešavati sistem linearnih jednačina. Jasno je da ukoliko želimo postići veću tačnost u rešavanju, treba uzeti dovoljno malo $h$ ("gušću" mrežu), što s druge strane dovodi do sistema sa velikim brojem jednačina. Za rešavanje ovakvih sistema koriste se relaksacioni metodi (videti poglavlje 4.3).

Dakle, primena, implicitne šeme je znatno teža nego primena eksplicitne. Medjutim, u pogledu stabilnosti implicitna šema ima bolje karakteristike.

Neka je norma u $F_h$ uvedena kao u prethodnom primeru. Obe od navedenih diferencnih šema imaju red aproksimacije dva. Dokažimo to, na primer, za šemu (1.4.9). Na osnovu (1.4.2) i analogona od (1.4.1) (za izvod po drugoj promenljivoj) imamo

$$A_h^{(1)}[u]_h = \begin{cases} \left[\dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{h^2}{2}\left(r\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{a^2}{6}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^4}\right)\right]_{(i,j)} + O(h^4) \\ \\ u_{i,o}\,, \end{cases}$$

tj.

$$\delta f^{(h)} = \begin{cases} \dfrac{h^2}{2}\left[r\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{a^2}{6}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^4}\right]_{(i,j)} + O(h^4) \\ \\ 0\,. \end{cases}$$

Dakle,

$$\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} = O(h^2),$$

pri čemu smo pretpostavili da je

$$Q(u) = \left| r\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{a^2}{6}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^4}\right| < C \qquad (C \text{ - konstanta}).$$

Primetimo da se u slučaju kada je $g(x,t) \equiv 0$, može dobiti viši red aproksimacije. Naime, kako je $u_t = a^2 u_{xx}$, diferenciranjem dobijamo $u_{tt} = a^4 u_{xxxx}$. Tada je

$$Q(u) = a^4 \left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\left(r - \frac{1}{6a^2}\right)\right|,$$

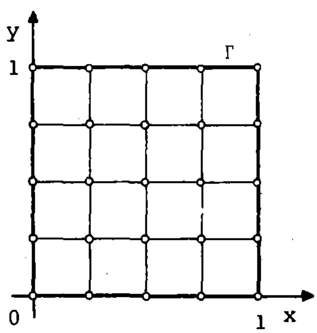
odakle zaključujemo da je za $r = \dfrac{1}{6a^2}$, $Q(u) = 0$, tj.

$$\| \delta f^{(h)} \|_{F_h} = O(h^4).$$

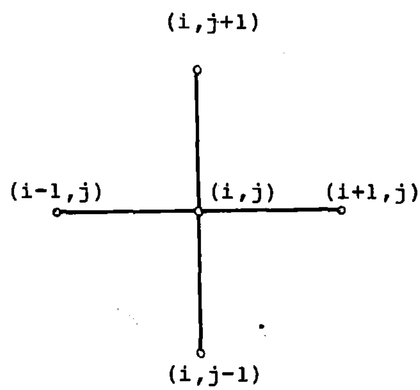
Primer 1.4.3. Razmotrimo konturni problem za Poissonovu jednačinu

$$(1.4.11) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x,y) & ((x,y)\in D), \\ \\ u(x,y) = s(x,y) & ((x,y)\in \Gamma), \end{cases}$$

gde je D kvadrat $\{(x,y) \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$ sa granicom $\Gamma$ (videti Sl. 1.4.3).




Sl. 1.4.3




Sl. 1.4.4

Izaberimo mrežu $D_h$ kod koje je $\ell=h$ i $h=\frac{1}{n}$ $(n\in N)$. Na Sl. 1.4.3 je uzeto n=4. Standardna diferencna šema za rešavanje problema (1.4.11) je $A_h u^{(h)} = f^{(h)}$, gde su

$$A_h u^{(h)} = \begin{cases} \dfrac{1}{h^2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}) \\ \\ u_{i,j}\ , \end{cases}$$

$$f^{(h)} = \begin{cases} g(ih,jh) \\ \\ s(ih,jh)\ . \end{cases}$$

Nije teško pokazati da je

$$\delta f^{(h)} = \begin{cases} \dfrac{h^2}{12}\left[\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right]_{(i,j)} + O(h^4) \\ \\ 0\,. \end{cases}$$

Na Sl. 1.4.4 prikazan je raspored čvorova koji učestvuju u ovoj diferencnoj šemi.

Jedan opštiji način za konstrukciju diferencnih šema je metod neodredjenih koeficijenata. Ovaj metod se zasniva na direktnoj aproksimaciji diferencijalnog operatora. Naime, oko čvora $(i,j)$, koji označavamo indeksom o, izaberimo N čvorova označavajući ih redom sa $1,\ldots,N$. U čvoru k, vrednost funkcije u označimo sa $u_k$.

Pod pretpostavkom da je funkcija $(x,y)\mapsto u(x,y)$ $n+1$ puta diferencijabilna, razvijemo je po Taylorovoj formuli u okolini čvora $(i,j)$ (sa indeksom o) i odgovarajuće izraze za $u_k$ zamenimo u linearnoj kombinaciji

$$L_h u_o = \sum_{k=o}^{N} c_k u_k\,,$$

gde su $c_k$ zasad neodredjeni koeficijenti. Tada imamo

$$L_h u_o = \sum_{k+m\leq n} \gamma_{km}\left(\frac{\partial^{k+m} u}{\partial x^k \partial y^m}\right)_o + R\,,$$

gde je $\gamma_{km}$ linearna kombinacija koeficijenata $c_k$, a $R=O(h^{n+1})$ odgovarajući ostatak.

Koeficijente $\gamma_{km}$ biramo tako da se $L_h u_o$ poklapa sa diferencijalnim izrazom $Lu$ u tački $(i,j)$ do odredjenog reda.

<u>Primer 1.4.4</u>. Jedna aproksimacija biharmonijskog operatora

$$Lu = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$$

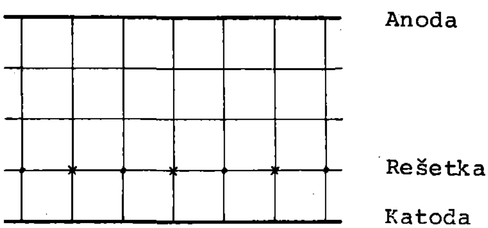
je

$$L_h u^{(h)} = u_{i+2,j}+u_{i,j+2}+u_{i-2,j}+u_{i,j-2}+2(u_{i+1,j+1}+u_{i-1,j+1}$$

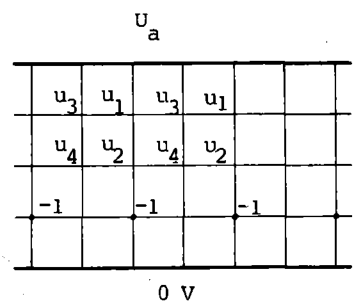
$$+ u_{i-1,j-1}+u_{i+1,j-1})-8(u_{i+1,j}+u_{i,j+1}+u_{i-1,j}+u_{i,j-1})$$

$$+ 20\,u_{i,j}\,.$$

<u>Primer 1.4.5</u>. Elektrodni sistem jedne elektronske cevi prikazan je na Sl. 1.4.5. Potencijal katode je 0 V, a rešetke -1 V. Pretpostavljajući da je ovaj elektrodni sistem beskonačne dužine, odredićemo minimalni potencijal anode da bi potencijal u tačkama rešetke označenim sa × bio pozitivan.




Sl. 1.4.5




Sl. 1.4.6

S obzirom da je raspodela potencijala odredjena Laplaceovom jednačinom $u_{xx}+u_{yy}=0$, konstrukcijom mreže kao na Sl. 1.4.6 i diferencnom aproksimacijom ove jednačine dobijamo sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned}
U_a + 2u_3 + u_2 - 4u_1 &= 0\,,\\
u_1 + 2u_4 - 1 - 4u_2 &= 0\,,\\
U_a + 2u_1 + u_4 - 4u_3 &= 0\,,\\
2u_2 + u_3 + u_5 - 4u_4 &= 0\,,\\
u_4 - 2 - 4u_5 &= 0\,.
\end{aligned}$$

Za $u_5=0$ V, tj. $u_4=2$ V, iz dobijenog sistema jednačina sleduje

$$U_a = \frac{132}{35} \approx 3.8 \text{ V} .$$

Primer 1.4.6. Metodom mreža izračunajmo približno najmanju sopstvenu vrednost konturnog problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \lambda u = 0$$

$$u(r,z) = 0 \quad ((r,z)\in\Gamma),$$

gde je $\Gamma$ pravougaonik definisan jednačinama $z=-1$, $z=1$, $r=4$, $r=6$. Za diferencnu aproksimaciju date diferencijalne jednačine može se uzeti

$$u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + \frac{r_{i+1/2}}{r_i} u_{i+1,j} + \frac{r_{i-1/2}}{r_i} u_{i-1,j}$$
$$-(4-\lambda h^2)u_{i,j} = 0 ,$$

sa istim korakom h po koordinatama r i z, pri čemu je $(r_i,z_j) = (4+ih,-1+jh)$. Uzimajući $h=1$ dobijamo $(4-\lambda\cdot 1)u_{1,1}=0$, tj. $\lambda=\lambda_1=4$.

Neka je sada $h=\frac{2}{3}$. Odgovarajući sistem jednačina je

$$u_1 + \frac{15/3}{14/3}u_2 - (4-\lambda\tfrac{4}{9})u_1 = 0 ,$$

$$u_2 + \frac{15/3}{16/3}u_1 - (4-\lambda\tfrac{4}{9})u_2 = 0,$$

gde smo, zbog simetrije, uzeli $u_{1,1}=u_{1,2}=u_1$, $u_{2,1}=u_{2,2}=u_2$. Manja vrednost za parametar $\lambda$, pri kome ovaj sistem ima netrivijalno rešenje je $\lambda=\lambda_2\approx 4.495$.

Primenom Richardsonove ekstrapolacije dobijamo tačniju vrednost za traženu sopstvenu vrednost

$$\lambda = 4.495 + \frac{0.495}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1} \approx 4.89.$$

## 9.1.5. Aproksimacija konturnih uslova

Kao što je napomenuto u prethodnom odeljku konstrukcija diferencne šeme zahteva aproksimaciju konturnog uslova (1.3.2), tj. uslova

$$Ku = s \qquad ((x,y)\in\Gamma). \tag{1.5.1}$$

Naime, neophodno je ovaj uslov aproksimirati nekim uslovom koji je definisan na granici mrežne oblasti $\Gamma^*$.

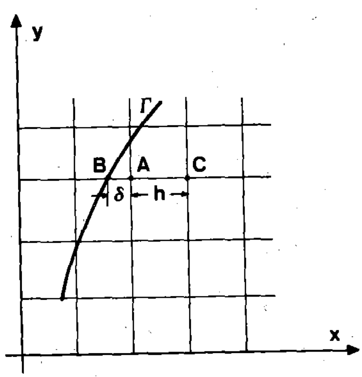
Pod uslovom (1.5.1) podrazumevaćemo, u opštem slučaju, skup uslova

$$K_i u = s_i \qquad ((x,y)\in\Gamma_i) \qquad (i=1,\ldots,m),$$

gde je $\Gamma_i$ deo krive $\Gamma$.

Najjednostavniji konturni uslovi su oni kod kojih je $Ku=u$, tzv. konturni uslovi prve vrste. Jedan praktičan način koji se koristi za aproksimaciju konturnih uslova prve vrste predložio je L. Collatz i on se sastoji u sledećem:

Neka je graničnom čvoru A najbliža tačka sa konture $\Gamma$, tačka B i neka je njihovo rastojanje $\delta$ (videti Sl.1.5.1).




Sl. 1.5.1

Na osnovu vrednosti funkcije u tačkama B i C, linearnom interpolacijom dobijamo

$$u(A)\approx u(B)+\frac{u(C)-u(B)}{h+\delta}\,\delta = \frac{hs(B)+\delta u(C)}{h+\delta}. \tag{1.5.2}$$

Nije teško pokazati da je greška, koja se čini pri ovoj aproksimaciji, drugog reda u odnosu na h, tj. da je

$$u(A)=\frac{hs(B)+\delta u(C)}{h+\delta}+0(h^2).$$

Dakle, aproksimacija konturnog uslova (1.5.1), u ovom slučaju, se sastoji u definisanju jednačina oblika (1.5.2) za svaki granični čvor.

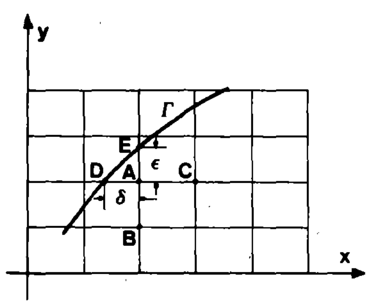
Korišćenjem više graničnih čvorova mreže $D_h$, moguće je dobiti tačnije aproksimacije, nego što je (1.5.2). Na primer, za rešavanje Poissonove jednačine

$$u_{xx}+u_{yy}=g(x,y)$$

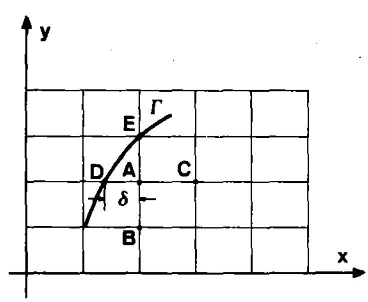
sa konturnim uslovom prve vrste (prvi konturni problem ili Dirichletov problem), Miceladze je koristio sledeću aproksimaciju (videti Sl. 1.5.2)

$$u(A)\approx\frac{\varepsilon}{\varepsilon+\delta}\cdot\frac{hs(D)+\delta u(C)}{h+\delta}+\frac{\delta}{\varepsilon+\delta}\cdot\frac{hs(E)+\varepsilon u(B)}{h+\varepsilon}-\frac{\delta\varepsilon h\,g(A)}{2(\varepsilon+\delta)},$$

kod koje je greška trećeg reda u odnosu na $h$. Na Sl. 1.5.3




Sl. 1.5.2




Sl. 1.5.3

prikazan je slučaj kada je $\varepsilon=h$ i $u(E)=s(E)$.

Razmotrimo sada slučaj kada je

$$\text{(1.5.3)}\qquad Ku=\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\qquad((x,y)\in\Gamma),$$

gde su $\alpha$ i $\beta$, u opštem slučaju funkcije od $x$ i $y$ i takve da je $\alpha^2+\beta^2>0$ i $\frac{\partial u}{\partial n}$ izvod funkcije $u$, u pravcu normale na $\Gamma$, ka unutrašnjosti oblasti D. Za $\alpha\equiv 0$ imamo tzv. konturni uslov druge vrste. Odgovarajući konturni problem naziva se Neumanov problem.

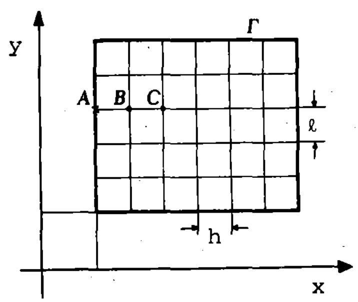
Ukazaćemo sada na dva načina za aproksimaciju konturnog uslova sa operatorom K definisanim sa (1.5.3).

$1^{\circ}$ Neka je kontura $\Gamma$ sastavljena od odsečaka pravih, paralelnih koordinatnim osama i neka je mreža $D_h$ konstruisana kao na Sl. 1.5.4. Tada se izvod u tački A može aproksimirati, na primer, pomoću

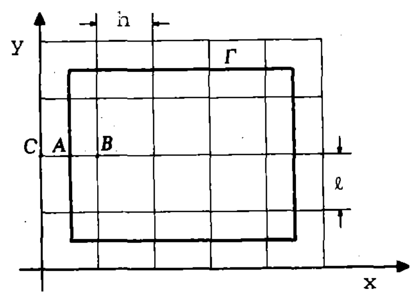
$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \simeq \frac{u(B) - u(A)}{h},$$

pri čemu je greška reda $O(h)$. Dakle, aproksimacija konturnog uslova (1.5.3), u ovom slučaju je

$$(Ku)_A \simeq (K_h u^{(h)})_A = \alpha(A)u(A) + \beta(A)\,\frac{u(B) - u(A)}{h}.$$




Sl. 1.5.4




Sl. 1.5.5

Tačnija aproksimacija (greška $O(h^2)$) se može dobiti uzimajući u obzir i vrednost funkcije u u tački C. Naime, ta aproksimacija je

$$(Ku)_A \simeq (K_h u^{(h)})_A \simeq \alpha(A)u(A) + \beta(A)\,\frac{-3u(A) + 4u(B) - u(C)}{2h}.$$

$2^{\circ}$ Jedan od načina za aproksimaciju konturnih uslova oblika (1.5.3) sa povišenom tačnošću zasniva se na korišćenju fiktivnih čvorova. Naime, konstruišimo mrežu pomerenu za $\frac{h}{2}$ i $\frac{\ell}{2}$ po osama x i y respektivno, tj. takvu mrežu da kontura $\Gamma$ prolazi kroz srednje tačke izmedju čvorova (videti Sl. 1.5.5). Čvorovi koji su van oblasti $D=\mathrm{int}\Gamma$ zvaćemo fiktivnim čvorovima. S obzirom da se izvod u tački A može aproksimirati korišćenjem formule sa centralnom razlikom

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_A = \frac{u(B) - u(C)}{h} + 0(h^2),$$

a vrednost funkcije pomoću formule

$$u(A) = \frac{1}{2}(u(B) + u(C)) + 0(h^2),$$

imamo

$$(Ku)_A \simeq (K_h u^{(h)})_A = \frac{\alpha(A)}{2}(u(B)+u(C)) + \frac{\beta(A)}{h}(u(B)-u(C)),$$

gde je

$$(Ku)_A - (K_h u^{(h)})_A = 0(h^2).$$

## 9.1.6. Problem stabilnosti diferencnih šema

U odeljku 9.1.3 dali smo definiciju stabilnosti diferencnih šema i ukazali na važnost ove osobine. Naime, problem stabilnosti diferencnih šema je usko povezan sa problemom konvergencije. Nestabilna diferencna šema je veoma osetljiva na greške zaokrugljivanja koje se javljaju u procesu rešavanja diferencnog problema, tako da se može dobiti rešenje koje se bitno razlikuje od rešenja postavljenog diferencijalnog problema. Zato problem stabilnosti zaslužuje poseban tretman. Ne upuštajući se dublje u teoriju stabilnosti, ovde ćemo analizirati stabilnost diferencnih šema u odnosu na početne uslove i u vezi s tim daćemo tzv. spektralne uslove stabilnosti.

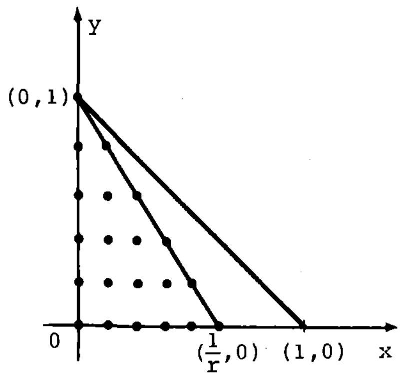
U primeru 1.4.1 ukazano je da je diferencna šema

$$A_h u^{(h)} = f^{(h)}, \tag{1.6.1}$$

definisana pomoću (1.4.4) i (1.4.5), za rešavanje Cauchyevog problema (1.4.3) stabilna kada je $r=\ell/h \leq 1$. Sada ćemo dokazati da je za $r>1$, šema (1.6.1) nestabilna.

Pretpostavimo da je $g(x,y) \equiv 0 (\Rightarrow g(ih,j\ell) \equiv 0)$, $Y=1$, a korak $h$ izabran tako da tačka $(0,1)$ pripada mreži $D_h$, tj. da je $N=\frac{1}{\ell}=\frac{1}{rh}$ ceo broj (videti sl.1.6.1). Tada se (1.4.6) svodi na

(1.6.2) $$u_{i,j+1} = (1-r)u_{i,j} + ru_{i+1,j} \qquad (r=\frac{\ell}{h}=\text{const}).$$




Sl. 1.6.1

Primetimo da za $j+1=N$, vrednost $u_{o,j+1} (=u_{o,N})$, koja predstavlja rešenje $u^{(h)}$ u tački $(0,1)$, na osnovu (1.6.2) se izračunava pomoću vrednosti $u_{o,j}$ i $u_{1,j}$ u tačkama mreže $(0,1-\ell)$ i $(h,1-\ell)$. Na dalje, ove vrednosti se izračunavaju pomoću vrednosti $u_{o,j-1}$, $u_{1,j-1}$, $u_{2,j-1}$ u tačkama mreže $(0,1-2\ell)$, $(h,1-2\ell)$, $(2h,1-2\ell)$, itd. Dakle, možemo zaključiti da se vrednost $u_{o,N}$ dobija na osnovu vrednosti $u_{i,o}$ u tačkama $(0,0)$, $(h,0)$, $(2h,0)$,...,$(Nh,0)$, koje sve leže na segmentu

$$0 \leq x \leq Nh = \frac{h}{\ell} = \frac{1}{r}$$

prave $y=0$, na kojoj je, inače, dat početni uslov $u(x,0)=s(x)$.

Na osnovu prethodnog zaključujemo da rešenje $u_{o,N}$ u tački $(0,1)$ dobijeno pomoću (1.6.2) ne zavisi od vrednosti funkcije $x\mapsto s(x)$ u tačkama koje leže van segmenta $[0,\frac{1}{r}]$.

S druge strane, rešenje problema (1.4.3) (sa $g(x,y)\equiv 0$) može se naći jednostavno i ono je oblika $u(x,y)=s(x+y)$, što znači da je $u(x,y)=\text{const}$ na svakoj karakteristici $x+y=\text{const}$. Dakle, $u(0,1)=u(1,0)=s(1)$, odakle zaključujemo da za $r>1$ konvergencija diferencne šeme (1.6.1), na smislu (1.3.5), u opštem slučaju, ne postoji, jer se tada tačka $x=1$ nalazi izvan segmenta $[0,\frac{1}{r}]$.

Ne narušavajući ograničenost drugog izvoda funkcije $s$, tj. rešenja $u(x,y)=s(x+y)$, može se izvršiti promena $s$ u tački $x=1$ i njenoj okolini, takva da se odrazi na rešenje $u(0,1)$, a da aproksimacija, u smislu definicije 1.3.1, ostane u važnosti. Tada bi, na osnovu teoreme 1.3.1, iz aproksimacije i stabilnosti sledila i konvergencija diferencne šeme (1.6.1). Medjutim, kako za $r>1$ nije ispunjen uslov konvergencije, zaključujemo da šema (1.6.1) za $r>1$ nije stabilna.

Izložićemo sada Neumanov metod za ispitivanje stabilnosti diferencnih šema, koji daje spektralne uslove stabilnosti.

Neka su u prostorima $U_h$ i $F_h$ uvedene norme pomoću

$$\|u^{(h)}\|_{U_h}=\max_{i,j}|u_{i,j}|,\quad \|f^{(h)}\|_{F_h}=\max_{i,j}|g_{i,j}|+\max_{i}|s_i|$$

i neka $J$ označava skup svih mogućnih vrednosti indeksa $j$.

Uslov stabilnosti (1.3.8) se tada može svesti na

$$\max_m|u_{m,k}|\leqq C_2(\max_{i,j}|g_{i,j}|+\max_i|s_i|)\qquad (\forall k\in J) \tag{1.6.3}$$

koji mora biti ispunjen pri proizvoljnim vrednostima $g_{i,j}$ i $s_i$. Naravno, u posebnom slučaju, uslov (1.6.3) mora biti ispunjen sa $g_{i,j}\equiv 0$ i proizvoljno $s_i$, tako da se svodi na

$$\max_m|u_{m,k}|\leqq C_2\max_i|s_i|\qquad (\forall k\in J) \tag{1.6.4}$$

Uslov (1.6.4) mora biti ispunjen za proizvoljnu ograničenu funkciju $x\mapsto s(x)$, i naziva se uslov stabilnosti šeme (1.6.1) u odnosu na promenu početnih uslova. U daljem tekstu umesto oznake $i$ za prvi indeks koristićemo $m$, dok će $i$ označavati $\sqrt{-1}$.

Ako u (1.6.4) specificiramo $s_i$ tako da je

$$u_{m,o}=s_m=e^{i\alpha m}\qquad (m=0,\pm1,\ldots),$$

gde je $\alpha$ realan parametar, dobijamo potrebne spektralne uslove stabilnosti. Naime, tada rešenje homogenog diferencnog problema tražimo u obliku

(1.6.5) $$u_{m,k} = \lambda^k e^{i\alpha m},$$

gde je $\lambda$, u opštem slučaju, funkcija od $\alpha$ i $h$, tj. $\lambda=\lambda(\alpha,h)$. Kako je $\max\limits_m |u_{m,k}|=|\lambda|^k$, uslov (1.6.4) se svodi na uslov $|\lambda|^k < C_2$ $(\forall k\in J)$, što je ispunjeno, za dovoljno malo $h$, ako je

(1.6.6) $$|\lambda| \leq 1 + \varepsilon,$$

za bilo koju malu pozitivnu vrednost $\varepsilon$. U slučaju kada $\lambda$ ne zavisi od koraka mreže spektralni uslov (1.6.6) se svodi na

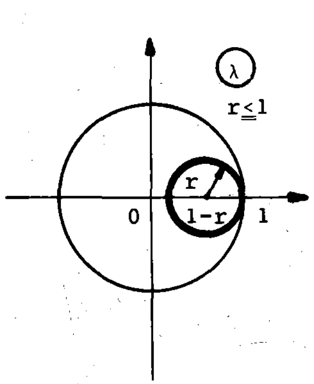
(1.6.7) $$|\lambda(\alpha)| \leq 1 .$$

Razmotrimo nekoliko primera.

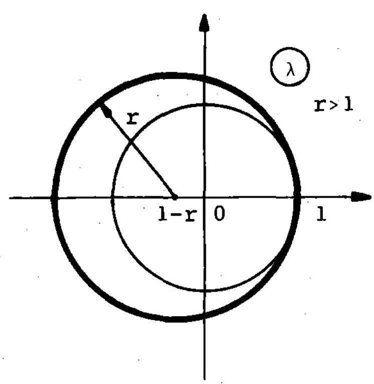
<u>Primer 1.6.1.</u> Za diferencnu šemu (1.6.1), zamenom (1.6.5) u (1.6.2) dobijamo

$$\lambda(\alpha) = 1 - r + re^{i\alpha} ,$$

što u kompleksnoj ravni $\lambda$ predstavlja kružnicu sa centrom u tački $\lambda=1-r$ i poluprečnikom $r$. Uslov (1.6.7) je ispunjen ako je $r \leq 1$ (slika 1.6.2), a nije ako je $r>1$ (slika 1.6.3).




Sl. 1.6.2




Sl. 1.6.3

Primer 1.6.2. Za eksplicitnu šemu (1.4.9) dobijamo

$$\frac{\lambda-1}{\ell} - a^2\,\frac{e^{-i\alpha}-2+e^{i\alpha}}{h^2} = 0,$$

tj.

$$\lambda(\alpha) = 1-4ra^2\sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad (r=\ell/h^2).$$

Pri promeni $\alpha$, lako je uočiti da važi $1-4ra^2 \leqq \lambda \leqq 1$, što znači da je za stabilnost neophodno da je

$$1 - 4ra^2 \geqq -1,$$

tj. $r \leqq \frac{1}{2a^2}$.

Kod implicitne šeme (1.4.10) imamo

$$\frac{\lambda-1}{\ell} - a^2\lambda\,\frac{e^{i\alpha}-2+e^{-i\alpha}}{h^2} = 0,$$

tj.

$$\lambda(\alpha) = \frac{1}{1+4ra^2\sin^2\frac{\alpha}{2}} \qquad (r=\ell/h^2).$$

Ova šema je stabilna za svako $r$, jer je uvek ispunjen uslov (1.6.7).

## 9.1.7. Diferencne šeme razdvajanja

Kod rešavanja nestacionarnih višedimenzionalnih problema matematičke fizike vidno mesto zauzimaju tzv. diferencne šeme razdvajanja. Ideju za konstrukciju ovakvih šema izložićemo na rešavanju Cauchyevog problema

$$(1.7.1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = Bu & ((x,y)\in D,\quad 0<t\leqq T), \\[2ex] u(x,y,0)=s(x,y) & ((x,y)\in D), \end{cases}$$

gde je $B$ operator po prostornim koordinatama $x$ i $y$, a $s:D\to R$

data funkcija. Pretpostavimo da je

$$Bu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} .$$

Po koordinatama x i y izaberimo kvadratnu mrežu sa korakom h, tako da dobijemo mrežnu oblast $D_h^*$. Definišimo indeksni skup I pomoću $I=\{(i,j) \mid (x_i,y_j)\in D_h^*\}$. Po vremenskoj koordinati t uzimamo korak $\ell$, gde je $\ell=[\frac{T}{N}]$ $(N\ell \leq T<(N+1)\ell)$.

Pretpostavimo sada da nam je poznato rešenje problema (1.7.1) u trenutku $t=t_k=k\ell$, tj. da nam je poznata vrednost $u(x,y,t_k)$, koju ćemo kraće označavati sa $u^k$. Tada, po Taylorovoj formuli imamo

$$(1.7.2)\qquad u^{k+1} = u^k + \ell \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=t_k} + O(\ell^2)$$

$$= (I + \ell B)u^k + O(\ell^2),$$

gde je I identički operator. Razdvojimo sada operator B na $B_1 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ i $B_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, tako da je $B=B_1+B_2$. U tom slučaju problem (1.7.1) se raspada na dva problema

$$(1.7.3)\qquad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = B_1 v \qquad (t_k \leq t \leq t_{k+1}) \\ v(x,y,t_k) = u(x,y,t_k) \end{cases}$$

i

$$(1.7.4)\qquad \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = B_2 w \qquad (t_k \leq t \leq t_{k+1}) \\ w(x,y,t_k) = v(x,y,t_{k+1}). \end{cases}$$

Teorema 1.7.1. Važi jednakost $w^{k+1}=u^{k+1}+O(\ell^2)$.

Dokaz. Slično kao u dokazu jednakosti (1.7.2) imamo

$$v^{k+1} = (I + \ell B_1)v^k + O(\ell^2)$$

i

$$w^{k+1} = (I + \ell B_2)w^k + O(\ell^2),$$

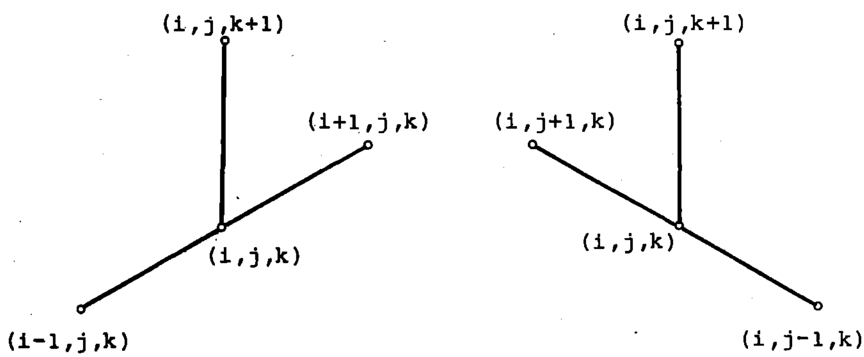
odakle, s obzirom na (1.7.4) i (1.7.3), sukcesivno sleduje

$$\begin{aligned} w^{k+1} &= (I + \ell B_2)v^{k+1} + O(\ell^2) \\ &= (I + \ell B_2)(I + \ell B_1)v^k + O(\ell^2) \\ &= (I + \ell B_2)(I + \ell B_1)u^k + O(\ell^2) \\ &= [I + \ell(B_1+B_2)]u^k + \ell^2 B_2 B_1 u^k + O(\ell^2) \\ &= (I + \ell B)u^k + O(\ell^2) = u^{k+1} + O(\ell^2). \end{aligned}$$

Teorema 1.7.1 pokazuje da se rešenje dvodimenzionalnog problema (1.7.1) može dobiti sa tačnošću $O(\ell^2)$ na osnovu sukcesivnog rešavanja jednodimenzionalnih problema (1.7.3) i (1.7.4).

Razmotrimo sada konstrukciju eksplicitnih i implicitnih diferencnih šema za rešavanje problema (1.7.3) i (1.7.4).

<u>$1^{\circ}$ Eksplicitne šeme.</u> Izaberimo raspored čvorova kao na slici 1.7.1.




Sl. 1.7.1

Tada su odgovarajuće diferencne aproksimacije za (1.7.3) i (1.7.4) redom

$$(1.7.5)\quad \left\{\begin{array}{l} v_{ij}^{k+1} - v_{ij}^{k} = \ell\,\Lambda_{xx}(v_{ij}^{k}) \\ \\ v_{ij}^{k} = u_{ij}^{k} \end{array}\right. \qquad ((i,j)\in I,\ k\in K)$$

i

$$(1.7.6)\quad \left\{\begin{array}{l} w_{ij}^{k+1} - w_{ij}^{k} = \ell\,\Lambda_{yy}(w_{ij}^{k}) \\ \\ w_{ij}^{k} = v_{ij}^{k+1} \end{array}\right. \qquad ((i,j)\in I,\ k\in K),$$

gde je $K=\{0,1,\dots,N-1\}$ i

$$\Lambda_{xx}(v_{ij}^{k}) = \frac{1}{h^2}(v_{i+1,j}^{k} - 2v_{i,j}^{k} + v_{i-1,j}^{k}),$$

$$\Lambda_{yy}(w_{ij}^{k}) = \frac{1}{h^2}(w_{i,j+1}^{k} - 2w_{i,j}^{k} + w_{i,j-1}^{k}).$$

Na osnovu prethodnog može se konstruisati jednostavan algoritam za rešavanje problema (1.7.1)

$k:=0$, $u_{ij}^{k}:=s(ih,jh)$ $\quad((i,j)\in I)$;

(*) Ako je $k=N$ kraj izračunavanja.

$v_{ij}:=u_{ij}^{k} + \ell\Lambda_{xx}(u_{ij}^{k})$ $\quad((i,j)\in I)$;

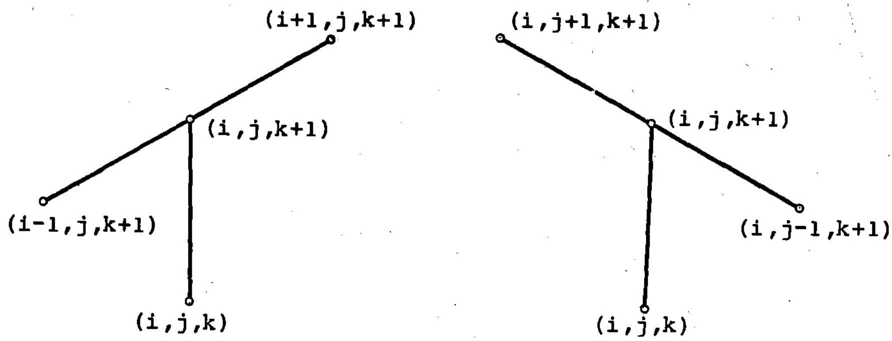
$u_{ij}^{k+1}:=v_{ij} + \ell\Lambda_{yy}(v_{ij})$ $\quad((i,j)\in I)$;

$k:= k + 1$;

Preći na (*).

2° Implicitne šeme. Izaberimo sada raspored čvorova kao na slici 1.7.2.

Tada dobijamo sledeće diferencne aproksimacije




Sl. 1.7.2

$$(1.7.7)\quad \begin{cases} v_{ij}^{k+1} - v_{ij}^{k} = \ell\Lambda_{xx}(v_{ij}^{k+1}) \\ \\ v_{ij}^{k} = u_{ij}^{k} \end{cases} \qquad ((i,j)\in I,\ k\in K),$$

$$(1.7.8)\quad \begin{cases} w_{ij}^{k+1} - w_{ij}^{k} = \ell\Lambda_{yy}(w_{ij}^{k+1}) \\ \\ w_{ij}^{k} = v_{ij}^{k+1} \end{cases} \qquad ((i,j)\in I,\ k\in K).$$

U ovom slučaju algoritam za rešavanje problema (1.7.1) je znatno složeniji, nego prethodno izloženi, jer na svakom vremenskom sloju (za svako k) treba rešavati sistem linearnih jednačina. Taj algoritam se može formulisati na sledeći način:

$k:=0,\ u_{ij}^{k}:=s(ih,jh) \qquad ((i,j)\in I);$

(*) Rešiti sistem linearnih jednačina

$v_{ij} - \ell\Lambda_{xx}(v_{ij}) = u_{ij}^{k} \qquad ((i,j)\in I);$

Rešiti sistem linearnih jednačina

$$u_{ij}^{k+1} - \ell\Lambda_{yy}(u_{ij}^{k+1}) = v_{ij} \qquad ((i,j)\in I);$$

k:=k+1;

Ako je $k < N$ preći na (*);

Kraj izračunavanja.

U pogledu stabilnosti diferencne šeme (1.7.7) i (1.7.8) su mnogo bolje od eksplicitnih šema (1.7.5) i (1.7.6). Naime, za stabilnost šema (1.7.5) i (1.7.6) potreban je uslov $\ell \leqq \frac{1}{2}h^2$, dok u slučaju implicitnih šema (1.7.7) i (1.7.8) nema nikakvih ograničenja za $\ell$ i $h$.

## 9.1.8. Diferencne šeme za jednačine hiperboličkog tipa

U ovom odeljku razmatraćemo talasnu jednačinu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{1.8.1}$$

sa početnim uslovima

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \qquad (0 < x < b) \tag{1.8.2}$$

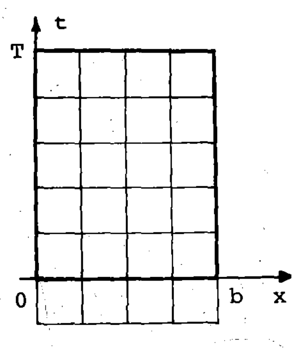
i konturnim uslovima

$$u(0,t) = \Phi(t), \quad u(b,t) = \psi(t) \qquad (t \geqq 0). \tag{1.8.3}$$

Potražićemo rešenje u pravougaoniku (slika 1.8.1)

$$P = \{(x,t) \mid 0<x<b,\ 0<t<T\}.$$

Izaberimo mrežu $D_h$, tako da je $h=b/N$ i $x_i=(i-1)h$ $(i=1,2,\ldots,N+1)$ na x-osi, a $\ell=T/M$ i $t_j=j\ell$ $(j=0,1,\ldots,M)$ na t-osi.




Sl. 1.8.1

Korišćenjem aproksimacije (1.4.2), jednačina (1.8.1) se može aproksimirati pomoću

(1.8.4) $$u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}-\frac{1}{r^2}(u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1})=0,$$

gde smo stavili $r=a\ell/h$.

Na osnovu prve jednakosti u (1.8.2) imamo

(1.8.5) $$u_{i,o}=f(x_i)=f_i.$$

Uvodjenjem fiktivnog sloja $j=-1$, drugi početni uslov u (1.8.2) može se jednostavno aproksimirati pomoću

(1.8.6) $$u_t(x_i,0)=g(x_i)=g_i\approx\frac{u_{i,1}-u_{i,-1}}{2\ell}.$$

Ako u (1.8.4) stavimo $j=0$ i imajući u vidu (1.8.5) dobijamo

$$f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}-\frac{1}{r^2}(u_{i,1}-2f_i+u_{i,-1})=0,$$

odakle, s obzirom na (1.8.6), sleduje

$$u_{i,1}=\ell g_i+f_i+\frac{1}{2}r^2(f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}),$$

tj.

(1.8.7) $$u_{i,1}=\ell g_i+(1-r^2)f_i+\frac{1}{2}r^2(f_{i+1}+f_{i-1}).$$

S druge strane, iz (1.8.4) sleduje

(1.8.8) $$u_{i,j+1}=\frac{1}{r^2}(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})-u_{i,j-1}+2(\frac{1}{r^2}-1)u_{i,j}.$$

Najzad, na osnovu konturnih uslova (1.8.3) imamo

(1.8.9) $$u_{1,j}=\Phi(t_j)=\Phi_j \quad \text{i} \quad u_{N+1,j}=\Psi(t_j)=\Psi_j.$$

Dakle, na osnovu jednakosti (1.8.5), (1.8.7), (1.8.8), (1.8.9) jednostavno se nalaze približna rešenja datog problema u čvorovima mreže $D_h$, koji pripadaju pravougaoniku P (videti sl. 1.8.1).

Primer 1.8.1. Posmatrajmo jednačinu (1.8.1) sa a=2, početnim uslovima

$$u(x,0) = x(4-x), \quad u_t(x,0) = 0 \qquad (0 < x < 4)$$

i konturnim uslovima

$$u(0,t) = 0, \quad u(4,t) = 0 \quad (t \geq 0).$$

Neka je T=6, N=4, r=1, tj. $h = b/N = 1$, $\ell = rh/a = 0.5$. Oblast u kojoj se traži rešenje je pravougaonik $P = \{(x,t) \mid 0 < x < 4, 0 < t < 6\}$, a mreža $D_h$ ima čvorove $(x_i, t_j) = (i-1, 0.5j)$, $i = 1,2, \ldots,5$; $j = 0,1,\ldots,12$.

Na osnovu prethodno izloženog postupka dobijaju se sledeći numerički rezultati:

Tabela 1.8.1

| j \ i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.00 | 3.00 | 4.00 | 3.00 | 0.00 |
| 1 | 0.00 | 2.00 | 3.00 | 2.00 | 0.00 |
| 2 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 3 | 0.00 | -2.00 | -3.00 | -2.00 | 0.00 |
| 4 | 0.00 | -3.00 | -4.00 | -3.00 | 0.00 |
| 5 | 0.00 | -2.00 | -3.00 | -2.00 | 0.00 |
| 6 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 7 | 0.00 | 2.00 | 3.00 | 2.00 | 0.00 |
| 8 | 0.00 | 3.00 | 4.00 | 3.00 | 0.00 |
| 9 | 0.00 | 2.00 | 3.00 | 2.00 | 0.00 |
| 10 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 11 | 0.00 | -2.00 | -3.00 | -2.00 | 0.00 |
| 12 | 0.00 | -3.00 | -4.00 | -3.00 | 0.00 |

Analizirajmo sada stabilnost šeme (1.8.4) u odnosu na promene početnih uslova. Tada imamo

$$e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha} - \frac{1}{r^2}(\lambda - 2 + \frac{1}{\lambda}) = 0,$$

tj.

$$\lambda^2 - 2(1 - 2r^2\sin^2\frac{\alpha}{2})\lambda + 1 = 0.$$

Kako je $\lambda_1\lambda_2=1$ i diskriminanta ove jednačine

$$D(\alpha) = 4r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}(r^2\sin^2\frac{\alpha}{2} - 1),$$

lako se može zaključiti da su spektralni uslovi stabilnosti ispunjeni ako je $r \leq 1$.

Zaista, ako je $r > 1$, postoji $\alpha$ takvo da je diskriminanta $D(\alpha)$ pozitivna (Takve vrednosti za $\alpha$ su u okolini $\alpha = \pi$). U tom slučaju koreni $\lambda_1$ i $\lambda_2$ su realni, i zbog uslova $\lambda_1\lambda_2 = 1$, jedan od njih mora biti unutar, a drugi van jediničnog kruga, tako da spektralni uslovi nisu zadovoljeni. Za $r < 1$, diskriminanta je negativna za svako $\alpha$, tako da su koreni konjugovano kompleksni i leže na jediničnoj kružnici. Slično, za $r=1$ koreni leže na jediničnoj kružnici, pri čemu su konjugovano kompleksni ili se poklapaju (kada je $D(\lambda) = 0$).

## 9.2. PRIBLIŽNO REŠAVANJE INTEGRALNIH JEDNAČINA

Ovo poglavlje biće posvećeno metodima za približno resavanje linearnih integralnih jednačina Fredholmovog i Volterraovog tipa. Tako ćemo obraditi metod sukcesivnih aproksimacija, zatim metod zasnovan na primeni kvadraturnih formula, i na kraju metod zamene jezgra integralne jednačine degenerisanim jezgrom. U poslednjem slučaju, pokazaćemo kako se egzaktno rešiti integralna jednačina sa degenerisanim jezgrom.

## 9.2.1. Uvod

U ovom odeljku, najpre, dajemo klasifikaciju integralnih jednačina, a zatim, primenom Banachovog stava o nepokretnoj tački, dokazujemo egzistenciju rešenja.

Jednačina

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt, \tag{2.1.1}$$

gde su $f$ i $K$ poznate funkcije, $y$ nepoznata funkcija i $\lambda$ numerički parametar, naziva se Fredholmova integralna jednačina druge vrste.

Funkcija $K$ naziva se jezgro integralne jednačine (2.1.1). U našim razmatranjima pretpostavljaćemo uvek da je jezgro definisano i neprekidno na $D=\{(x,t)\,|\,a \leq x \leq b,\ \ a \leq t \leq b\}$.

Volterraova integralna jednačina druge vrste ima oblik

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt. \tag{2.1.2}$$

Primetimo da se Volterraova jednačina može tretirati kao Fredholmova sa jezgrom $K_1$, koje je definisano pomoću

$$K_1(x,t) = \begin{cases} K(x,t) & (t \leq x), \\ 0 & (t > x). \end{cases}$$

Medjutim, jezgro $K_1$ je prekidna funkcija ukoliko je $K(x,x) \not\equiv 0$.

Ako je $f(x) \not\equiv 0$, jednačine (2.1.1) i (2.1.2) se nazivaju nehomogenim, a u slučaju kada je $f(x) \equiv 0$ odgovarajuće jednačine su homogene.

Integralna jednačina oblika

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt = 0$$

naziva se Fredholmova integralna jednačina prve vrste, dok se jednačina oblika

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt = 0$$

naziva Volterraova integralna jednačina prve vrste.

Integralne jednačine kod kojih je bar jedna od granica integrala beskonačna, ili kod kojih jezgro ima singularitete u oblasti integracije, nazivamo singularnim jednačinama. Na primer, Abelova jednačina

$$f(x) + \lambda \int_0^x \frac{x(t)}{(x-t)^s} dt = 0 \qquad (0 < s < 1)$$

je singularna integralna jednačina. Takodje, jednačina

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^{+\infty} \cos xt\, y(t)dt$$

je singularna.

Na osnovu Banachovog stava o nepokretnoj tački može se dokazati sledeća teorema.

Teorema 2.1.1. Fredholmova integralna jednačina (2.1.1), gde su K i f neprekidne funkcije, ima jedno i samo jedno neprekidno rešenje pod uslovom

$$(2.1.3) \qquad |\lambda| < \frac{1}{M(b-a)},$$

gde je $M = \max_{x,t\in[a,b]} |K(x,t)|$.

Dokaz. Definišimo preslikavanje $T: C[a,b] \to C[a,b]$ pomoću

$$Ty = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt.$$

Kako je za svako $y_1, y_2 \in C[a,b]$

$$|Ty_1 - Ty_2| = |\lambda|\cdot|\int_a^b K(x,t)(y_1(t)-y_2(t))dt|$$

$$\leq |\lambda|M\int_a^b |y_1(t)-y_2(t)|dt$$

$$\leq |\lambda|M(b-a)\max_{t\in[a,b]}|y_1(t)-y_2(t)|$$

imamo

$$\|Ty_1 - Ty_2\| \leq |\lambda|M(b-a)\|y_1 - y_2\|,$$

gde je $\|\cdot\|$ standardna norma u prostoru $C[a,b]$.

Dakle, $T$ je kontrakcija ako je ispunjen uslov (2.1.3). U tom slučaju, postoji jedna i samo jedna funkcija $y(\in C[a,b])$ takva da je $Ty=y$ i ona je jedinstveno rešenje integralne jednačine (2.1.1).

Ovim je dokaz teoreme završen.

Dakle, ako su ispunjeni uslovi ove teoreme, niz funkcija $\{y_n\}_{n\in N}$ definisan pomoću

$$y_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)y_{n-1}(t)dt \quad (n=1,2,\ldots), \tag{2.1.4}$$

konvergira ka jedinstvenom rešenju jednačine (2.1.1) za proizvoljno $y_o\in C[a,b]$.

Teorema 2.1.2. Volterraova integralna jednačina (2.1.2), kod koje su $K$ i $f$ neprekidne funkcije za $a\leq t\leq x\leq b$ i $\lambda$ proizvoljan parametar, ima jedinstveno neprekidno rešenje.

Dokaz ove teoreme sličan je dokazu prethodne teoreme i teoreme 1.1.2 iz odeljka 8.1.1. Naime, ovde treba dokazati da postoji prirodan broj $m$ takav da je operator $T^m$ kontrakcija, pri čemu je operator $T:C[a,b]\to C[a,b]$, u ovom slučaju, definisan pomoću

$$Ty = f(x) + \lambda\int_a^x K(x,t)y(t)dt.$$

U našem daljem razmatranju, osnovni problem koji ćemo tretirati je nalaženje rešenja nehomogenih integralnih jednačina pri datoj vrednosti parametra $\lambda$. Sem navedenog problema, od interesa je i problem nalaženja sopstvenih vrednosti i sopstvenih funkcija jezgra K, tj. nalaženja takvih vrednosti parametra $\lambda$, pri kojima homogene jednačine imaju netrivijalna rešenja. Ova netrivijalna rešenja homogenih jednačina nazivamo sopstvenim funkcijama jezgra.

Pri svim razmatranjima u ovom poglavlju pretpostavljaćemo neprekidnost funkcija f i K.

## 9.2.2. Metod sukcesivnih aproksimacija

Metod sukcesivnih aproksimacija za rešavanje Fredholmove integralne jednačine (2.1.1) zasniva se na primeni jednakosti (2.1.4), pri čemu se uzima $y_o(x)=f(x)$.

Ako definišemo niz funkcija $\{\bar{y}_k\}_{k\in N}$ pomoću

$$
(2.2.1)\qquad
\begin{aligned}
\bar{y}_o(x) &= y_o(x) = f(x),\\
\bar{y}_k(x) &= \int_a^b K(x,t)\bar{y}_{k-1}(t)dt \qquad (k=1,2,\ldots),
\end{aligned}
$$

tada se (2.1.4) može predstaviti u obliku

$$
(2.2.2)\qquad y_n(x) = \sum_{k=o}^{n} \lambda^k \bar{y}_k(x) \qquad (n=1,2,\ldots),
$$

koji se naziva Neumanov razvoj.

Na osnovu teoreme 2.1.1, niz $\{y_n\}_{n\in N}$ konvergira ka tačnom rešenju jednačine (2.1.1) ako je ispunjen uslov (2.1.3). Sledeća teorema daje ocenu greške približnog rešenja $y_n(x)$.

<u>Teorema 2.2.1</u>. Neka su ispunjeni uslovi $|f(x)| \leqq F$ $(a \leqq x \leqq b)$ i $q=M|\lambda|(b-a)<1$ $(M= \max\limits_{x,t\in[a,b]} |K(x,t)|)$. Tada je, za svako n N i svako $x\in[a,b]$,

$$
|y_n(x) - y(x)| \leqq \frac{Fq^{n+1}}{1-q}.
$$

Dokaz. Na osnovu učinjenih pretpostavki, korišćenjem jednakosti (2.2.1) nalazimo redom

$$|\bar{y}_o(x)| \leqq F, \quad |\bar{y}_1(x)| \leqq MF(b-a), \quad |\bar{y}_2(x)| \leqq M^2F(b-a)^2, \ldots,$$

tj.

$$|\bar{y}_k(x)| \leqq M^kF(b-a)^k \qquad (k=0,1,\ldots),$$

odakle sleduje

$$|y_n(x)-y(x)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda^k \bar{y}_k(x) \leqq F \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = \frac{Fq^{n+1}}{1-q}.$$

Metod sukcesivnih aproksimacija može se primeniti i za rešavanje Volterraove jednačine (2.1.2). Niz funkcija $\{\bar{y}_k\}_{k\in N}$ u ovom slučaju, definiše se pomoću

$$\bar{y}_o(x) = f(x),$$

$$\bar{y}_k(x) = \int_a^x K(x,t)\bar{y}_{k-1}(t)dt \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Tada se n-ta aproksimacija rešenja može predstaviti, takodje u obliku (2.2.2). Za odgovarajuću grešku aproksimacije važi

$$|y_n(x) - y(x)| \leqq \frac{Fq^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{q}{n+2}} \qquad (n+2>q),$$

gde su q, M, F definisani isto kao u teoremi 2.2.1.

### 9.2.3. Primena kvadraturnih formula

U cilju rešavanja Fredholmove jednačine (2.1.1) uzmimo kvadraturnu formulu

$$(2.3.1) \qquad \int_a^b F(x)dx = \sum_{j=1}^{n} A_jF(x_j) + R_n(F),$$

gde su apscise $x_1,\ldots,x_n$ iz $[a,b]$, $A_j$ težinski koeficijenti koji ne zavise of $F$ i $R_n(F)$ odgovarajući ostatak.

Ako u (2.1.1) stavimo redom $x=x_i$ $(i=1,\ldots,n)$, imamo

$$y(x_i) = f(x_i)+\lambda \int_a^b K(x_i,t)y(t)dt \qquad (i=1,\ldots,n),$$

odakle primenom kvadraturne formule (2.3.1) sleduje

$$y(x_i) = f(x_i)+\lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K(x_i,x_j)y(x_j)+\lambda R_n(F_i) \tag{2.3.2}$$

gde je $F_i(t)=K(x_i,t)$ $(i=1,\ldots,n)$. Odbacivanjem članova u kojima se pojavljuje ostatak kvadraturne formule, na osnovu (2.3.2) dobijamo sistem linearnih jednačina

$$Y_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} Y_j = f_i \qquad (i=1,\ldots,n), \tag{2.3.3}$$

gde smo stavili $f_i=f(x_i)$ i $K_{ij}=K(x_i,x_j)$, a sa $Y_i$ označili približne vrednosti od $y(x_i)$.

Sistem (2.3.3) se može predstaviti i u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda A_1K_{11} & -\lambda A_2K_{12} & \ldots & -\lambda A_nK_{1n} \\ -\lambda A_1K_{21} & 1-\lambda A_2K_{22} & & -\lambda A_nK_{2n} \\ \vdots & & & \\ -\lambda A_1K_{n1} & -\lambda A_2K_{n2} & & 1-\lambda A_nK_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix},$$

Rešavanjem dobijenog sistema linearnih jednačina po $Y_1,\ldots,Y_n$, približno rešenje jednačine (2.1.1) se može predstaviti u obliku

$$\tilde{y}(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K(x,x_j)Y_j. \tag{2.3.4}$$

<u>Primer 2.3.1</u>. Nadjimo približno rešenje integralne jednačine

$$y(x) = e^x - \int_0^1 xe^{xt}y(t)dt, \tag{2.3.5}$$

primenom Simpsonove kvadraturne formule

$$\int_0^1 F(t)dt \approx \frac{1}{6}(F(0) + 4F(1/2) + F(1)).$$

Kako je $\lambda=-1$, $f(x)=e^x$, $K(x,t)=xe^{xt}$, $x_1=0$, $x_2=1/2$, $x_3=1$, $A_1=A_3=1/6$, $A_2=2/3$, sistem jednačina (2.3.3) se, u ovom slučaju, svodi na

$$Y_1 = 1,$$

$$(1 + \frac{1}{3}e^{1/4})Y_2 + \frac{1}{12}e^{1/2}Y_3 = e^{1/2} - \frac{1}{12},$$

$$\frac{2}{3}e^{1/2} Y_2 + (\frac{e}{6} + 1)Y_3 = e - \frac{1}{6},$$

odakle je

$$Y_1 = 1, \quad Y_2 \approx 1.00003, \quad Y_3 \approx 0.99958.$$

Na osnovu (2.3.4) imamo

$$\tilde{y}(x) = e^x - \frac{x}{6}(1 + 4.00012\, e^{x/2} + 0.99958\, e^x).$$

Primetimo da je tačno rešenje jednačine (2.3.5) $y(x)=1$.

Predjimo sada na odredjivanje približnog rešenja Volterraove jednačine (2.1.2) na segmentu $[a,b]$. U tom cilju, izaberimo korak $h$ i ekvidistantne tačke $x_i$ $(i=0,1,\ldots,n)$ tako da je $x_i=a+ih$ $(i=0,1,\ldots,n;\ x_n \leq b < a+(n+1)h)$. Takodje, izaberimo kvadraturnu formulu zatvorenog tipa sa ekvidistantnim čvorovima

$$\int_{x_0}^{x_k} F(x)dx = \sum_{i=0}^{k} A_{ki}F(x_i) + R_{k+1}(F), \tag{2.3.6}$$

gde su $A_{ki}$ odgovarajući težinski koeficijenti i $R_{k+1}(F)$ ostatak. Na primer, možemo izabrati uopštenu trapeznu ili uopštenu Simpsonovu formulu (videti odeljak 7.2.4).

Ako u (2.1.2) stavimo $x=x_k$ i primenimo formulu (2.3.6) dobijamo

$$\begin{aligned} &Y_0 = f_0, \\ &Y_k - \lambda \sum_{i=0}^{k} A_{ki}K_{ki}Y_i = f_k, \quad (k=1,\ldots,n), \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

pri čemu smo, kao i kod rešavanja Fredholmove jednačine, zanemarili ostatak kvadraturne formule i uveli ista označavanja.

Sistem jednačina (2.3.7) se jednostavno rešava, s obzirom da je njegova matrica donje trougaona.

Izloženi metod za približno rešavanje integralnih jednačina često se naziva metod kvadraturnih formula.

### 9.2.4. Metod zamene jezgra integralne jednačine degenerisanim jezgrom

Jezgro Fredholmove integralne jednačine se naziva degenerisanim ako se može predstaviti u obliku

$$K(x,t) = \bar{K}(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(t), \tag{2.4.1}$$

gde su $\{a_1,\ldots,a_n\}$ i $\{b_1,\ldots,b_n\}$ linearno nezavisni skupovi neprekidnih funkcija na $[a,b]$.

Integralna jednačina sa degenerisanim jezgrom

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \bar{K}(x,t) y(t)\,dt \tag{2.4.2}$$

može se jednostavno rešiti na sledeći način.

Zamenom (2.4.1) u (2.4.2) dobijamo

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \int_a^b b_k(t) y(t)\,dt, \tag{2.4.3}$$

tj.

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x), \tag{2.4.4}$$

gde smo stavili

$$C_k = \int_a^b b_k(t) y(t)\,dt \qquad (k=1,\ldots,n).$$

Da bismo odredili konstante $C_k$ $(k=1,\ldots,n)$, zamenimo (2.4.4) u (2.4.3). Tada dobijamo

$$\sum_{k=1}^{n} [C_k - \int_a^b b_k(t)\Big(f(t) + \lambda \sum_{j=1}^{n} C_j a_j(t)\Big)dt] a_k(x) = 0,$$

odakle, zbog linearne nezavisnosti funkcija $a_k$ $(k=1,\ldots,n)$, sleduje

$$C_k - \int_a^b b_k(t)\Big(f(t) + \lambda \sum_{j=1}^{n} C_j a_j(t)\Big)dt = 0 \quad (k=1,\ldots,n),$$

tj.

$$C_k - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_{kj} C_j = f_k \qquad (k=1,\ldots,n), \tag{2.4.5}$$

gde smo stavili

$$A_{kj} = \int_a^b a_j(t) b_k(t)dt, \quad f_k = \int_a^b b_k(t) f(t)dt \quad (k=1,\ldots,n). \tag{2.4.6}$$

Sa $D(\lambda)$ označimo determinantu sistema jednačina (2.4.5), tj.

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11} & -\lambda A_{12} & \cdots & -\lambda A_{1n} \\ -\lambda A_{21} & 1-\lambda A_{22} & & -\lambda A_{2n} \\ \vdots & & & \\ -\lambda A_{n1} & -\lambda A_{n2} & & 1-\lambda A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Pod pretpostavkom da je $D(\lambda) \neq 0$, sistem (2.4.5) ima jedinstveno rešenje. Rešavanjem ovog sistema, u tom slučaju, i zamenom dobijenih vrednosti za $C_1,\ldots,C_n$ u (2.4.4) dobijamo rešenje integralne jednačine (2.4.2).

S obzirom da je $D(0)=1$, zaključujemo da determinanta $D(\lambda)$ ne može biti identički jednaka nuli, već je $D(\lambda)$ algebarski polinom ne višeg stepena od $n$. Prema tome, $D(\lambda)$ se može anulirati za najviše $n$ vrednosti parametra $\lambda$, koje nazivamo sopstvenim vrednostima jezgra $\bar{K}$. Napomenimo da je rezolventa jednačine (2.4.2) (ili jezgra $\bar{K}$) data sa

$$R(x,t;\lambda) = \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)},$$

gde je

$$D(x,t;\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & a_1(x) & \cdots & a_n(x) \\ b_1(t) & 1-\lambda A_{11} & & -\lambda A_{1n} \\ \vdots & & & \\ b_n(t) & -\lambda A_{n1} & & 1-\lambda A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Primedba 2.4.1. Ako je $D(\lambda)\neq 0$, rešenje (2.4.4) se može predstaviti u obliku

$$y(x) = f(x) - \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda) f(t)dt.$$

Jedan metod za rešavanje jednačine (2.1.1) zasniva se na aproksimaciji jezgra K pomoću degenerisanog jezgra $\bar{K}$, tako da se umesto jednačine (2.1.1) rešava, prethodno izloženim postupkom, jednačina

$$\bar{y}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \bar{K}(x,t)\bar{y}(t)dt. \tag{2.4.7}$$

Prirodno je očekivati da će rešenje ove jednačine biti blisko rešenju jednačine (2.1.1) ukoliko je aproksimacija jezgra K pomoću degenerisanog jezgra $\bar{K}$ dovoljno dobra. Pre nego što damo ocenu za grešku, navodimo tri standardna načina za aproksimaciju jezgra K.

1° Razvoj u stepeni red. Ovaj način je primenljiv ako je jezgro $(x,t)\mapsto K(x,t)$ analitička funkcija po argumentu $x$ ili argumentu $t$ u dovoljno širokoj okolini odsečka $[a,b]$. Pretpostavimo da je K analitička funkcija po argumentu $t$ u okolini tačke $c\in[a,b]$ koja obuhvata segment $[a,b]$, tj. u oblasti $|t-c|<r$, gde je $r>b-c$. Na primer, za $c=(a+b)/2$ treba da je $r>(b-a)/2$.

Na osnovu učinjene pretpostavke, jezgro $K(x,t)$ se može razviti u stepeni red

$$K(x,t) = K(x,c) + \Big(\frac{\partial}{\partial t}K(x,c)\Big)(t-c) + \frac{1}{2!}\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}K(x,c)\Big)(t-c)^2 + \dots$$

koji je konvergentan u oblasti $|t-c|<r$. Primetimo da su koeficijenti ovog razvoja funkcije samo od $x$. Uzimajući konačan broj prvih članova razvoja dobijamo aproksimaciju

$$K(x,t) \approx \bar{K}(x,t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\Big(\frac{\partial^k}{\partial t^k}K(x,c)\Big)(t-c)^k,$$

pri čemu je $\bar{K}$ degenerisano jezgro.

Slično se postupa i u slučaju kada je K analitička funkcija od $x$.

Primer 2.4.1. Neka je data integralna jednačina

$$y(x) = \sin x + \int_0^1 (1-x\cos xt)y(t)dt.$$

Jezgro $K(x,t)=1-x\cos xt$ je analitička funkcija u odnosu na oba argumenta (u oblasti $|x|<+\infty$ i $|t|<+\infty$), pa se može razviti u potencijalni red, na primer, u okolini $t=c=0$. Tada imamo

$$K(x,0) = 1-x, \quad \frac{\partial}{\partial t}K(x,0) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}K(x,0) = x^3,$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3}K(x,0) = 0, \quad \frac{\partial^4}{\partial t^4}K(x,0) = -x^5, \text{ itd.},$$

pa je

$$K(x,t) = 1-x+\frac{1}{2}x^3t^2 - \frac{1}{24}x^5t^4 + \dots .$$

Primetimo da smo do ovog razvoja mogli doći prostije razvojem funkcije $\cos xt$ po stepenima od $xt$, tj.

$$K(x,t) = 1 - x\{1 - \frac{1}{2}(xt)^2 + \frac{1}{24}(xt)^4 - \dots\} .$$

Uzmimo

$$\bar{K}(x,t) = 1 - x + \frac{1}{2}x^3t^2,$$

tj.

$$a_1(x) = 1-x, \quad a_2(x) = x^3, \quad b_1(t) = 1, \quad b_2(t) = \frac{1}{2}t^2 .$$

Odgovarajuća jednačina sa degenerisanim jezgrom je

$$\bar{y}(x) = \sin x + \int_0^1 (1-x+\frac{1}{2}x^3t^2)\bar{y}(t)dt.$$

Na osnovu (2.4.4) rešenje ove jednačine ima oblik

$$\bar{y}(x) = \sin x + C_1(1-x) + C_2x^3,$$

gde su $C_1$ i $C_2$ rešenja sistema jednačina (2.4.5). Korišćenjem formula (2.4.6) nalazimo redom

$$A_{11} = \int_0^1 (1-t)\cdot 1dt = \frac{1}{2}, \quad A_{12} = \int_0^1 t^3\cdot 1dt = \frac{1}{4},$$

$$A_{21} = \int_0^1 (1-t)\cdot\frac{1}{2}t^2dt = \frac{1}{24}, \quad A_{22} = \int_0^1 t^3\cdot\frac{1}{2}t^2dt = \frac{1}{12},$$

$$f_1 = \int_0^1 1\cdot\sin t\,dt = 1 - \cos 1 \approx 0.459697,$$

$$f_2 = \int_0^1 \frac{1}{2}t^2\sin t\,dt = \sin 1 + \frac{1}{2}\cos 1 - 1 \approx 0.1116225,$$

pa iz sistema (2.4.5) sleduje $C_1 \approx 1.00307$ i $C_2 \approx 0.16736$, tj.

$$\bar{y}(x) \approx \sin x + 1.00307(1-x) + 0.16736\,x^2 . \tag{2.4.8}$$

2° Razvoj u Fourierov red. Pretpostavimo da se $K(x,t)$ može razviti po argumentu $t$ u uniformno konvergentan Fourierov red

$$K(x,t) = \frac{1}{2}A_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k(x)\cos\frac{2k\pi}{b-a}t + B_k(x)\sin\frac{2k\pi}{b-a}t ,$$

gde su

$$A_k(x) = \frac{2}{b-a}\int_a^b K(x,t)\cos\frac{2k\pi}{b-a}t\,dt, \quad B_k(x) = \frac{2}{b-a}\int_a^b K(x,t)\sin\frac{2k\pi}{b-a}t\,dt.$$

Za odgovarajuću aproksimaciju (u degenerisanom obliku) može se uzeti konačan odsečak Fourierovog reda.

Slično se postupa i u slučaju kada se $K(x,t)$ može razviti po $x$ u Fourierov red.

3° Interpolacioni metod. Na segmentu $[a,b]$ izaberimo $n$ interpolacionih čvorova $t_1,t_2,\dots,t_n$ i konstruišimo, na primer, Lagrangeov interpolacioni polinom za jezgro $K$. Dakle, imamo

$$K(x,t) \approx \bar{K}(x,t) = \sum_{k=1}^{n} K(x,t_k)\frac{\omega(t)}{(t-t_k)\omega'(t_k)},$$

Metod degenerisanog jezgra se oslanja na tvrdjenju sledeće teoreme koja daje ocenu greške rešenja.

Teorema 2.4.1. Neka je $R(x,t;\lambda)$ rezolventa jednačine (2.4.7) i neka postoje pozitivne konstante $M$ i $m$ takve da je

$$\int_a^b |R(x,t;\lambda)|dt < M, \quad \int_a^b |K(x,t)-\bar{K}(x,t)|dt<m, \quad |\lambda|m(1+|\lambda|M) < 1.$$

Tada jednačina (2.1.1) ima jedinstveno rešenje $x\mapsto y(x)$ i pri tome važi

$$(2.4.9) \qquad |\bar{y}(x) - y(x)| \leqq \frac{F|\lambda|m(1+|\lambda|M)^2}{1-|\lambda|m(1+|\lambda|M)} \qquad (a \leqq x \leqq b),$$

gde je $F = \max\limits_{a\leqq x\leqq b}|f(x)|$.

Dokaz. Pretpostavimo da jednačina (2.2.1) ima ograničeno rešenje $y$, tj. da je

$$\sup_{a\leqq x\leqq b}|y(x)| = Y < +\infty.$$

Neka je, dalje, $\bar{y}$ rešenje jednačine (2.4.7). Ako definišemo funkcije $g$ i $h$ pomoću

$$(2.4.10) \qquad g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b (K(x,t) - \bar{K}(x,t))y(t)dt,$$

$$h(x) = g(x) - f(x),$$

imamo

$$y(x) = g(x) + \lambda \int_a^b \bar{K}(x,t)y(t)dt$$

i

$$y(x) - \bar{y}(x) = h(x) + \lambda \int_a^b \bar{K}(x,t)(y(t) - \bar{y}(t))dt,$$

odakle sleduje

$$(2.4.11) \qquad y(x) = g(x) - \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda)g(t)dt$$

i

$$(2.4.12) \qquad y(x)-\bar{y}(x) = h(x) - \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda)h(t)dt.$$

Na osnovu (2.4.10) imamo

$$|g(x)| \leq |f(x)| + |\lambda| \int_a^b |K(x,t) - \bar{K}(x,t)|\cdot|y(t)|dt$$

$$\leq F + |\lambda| m Y = G,$$

a na osnovu (2.4.11)

$$|y(x)| \leq |g(x)|+|\lambda| \int_a^b |R(x,t;\lambda)|\cdot|g(t)|dt \leq G(1+|\lambda|M),$$

odakle nalazimo

$$Y \leq (F + |\lambda| m Y)(1+|\lambda|M),$$

tj.

$$Y \leq \frac{F(1+|\lambda|M)}{1-|\lambda|m(1+|\lambda|M)}, \tag{2.4.13}$$

što znači da je rešenje $x\mapsto y(x)$ zaista ograničeno za svaku ograničenu funkciju $f$. Ova činjenica ukazuje na to da vrednost za $\lambda$, data uslovom teoreme, ne može biti sopstvena vrednost jezgra $K$, što dalje znači da jednačina (2.2.1) ima jedinstveno rešenje. Zaista, ako bi $\lambda$ bila sopstvena vrednost jezgra $K$, kojoj odgovara sopstvena funkcija $x\mapsto y_s(x)$ (sa tačnošću od multiplikativne konstante), tada nehomogena jednačina (2.2.1) ne bi imala jedinstveno rešenje. Naime, ako je $x\mapsto y(x)$ jedno njeno rešenje to će onda i funkcija $x\mapsto y(x)+cy_s(x)$, gde je $c$ proizvoljna konstanta, biti takodje njeno rešenje. Naravno, ovakvo jednoparametarsko rešenje može se izborom konstante $c$, učiniti većim od bilo koje date konstante $Y$, što je u kontradikciji sa (2.4.13).

Da bismo dokazali nejednakost (2.4.9) primetimo da na osnovu (2.4.10) i datog uslova u teoremi imamo

$$|h(x)| \leq |\lambda| mY.$$

S druge strane, na osnovu (2.4.12) imamo

$$|y(x)-\bar{y}(x)| \leq |h(x)| + |\lambda| \int_a^b |R(x,t;\lambda)|\cdot|h(t)|dt,$$

odakle, na osnovu prethodnog, sleduje

$$|y(x)-\bar{y}(x)| \leq |\lambda| mY(1+|\lambda| M).$$

Najzad, poslednja nejednakost i nejednakost (2.4.13) daju (2.4.9).

Pored nejednakosti (2.4.9), za ocenu greške koja se čini kod primene ovog metoda, koristi se još jedna nejednakost koja daje ocenu za normu greške $\|\bar{y}-y\|$ u izabranom funkcionalnom prostoru X.

Neka je $K(x,t)=\bar{K}(x,t)+E(x,t)$. Za $\lambda=1$, sa $R_K(x,t)$ i $R_{\bar{K}}(x,t)$ označimo rezolvente od K i $\bar{K}$ respektivno. Nadalje sa $\|K\|$, $\|\bar{K}\|$ i $\|E\|$ označimo norme operatora sa odgovarajućim jezgrima K, $\bar{K}$ i E. Može se pokazati da je

$$\|\bar{y}-y\| \leq (1+\|R_K\|)(1+\|R_{\bar{K}}\|)\|E\|\cdot\|f\|, \tag{2.4.14}$$

gde je

$$\|R_K\| \leq \frac{\|K\|}{1-|\lambda|\cdot\|K\|} \quad \text{i} \quad \|R_{\bar{K}}\| \leq \frac{\|\bar{K}\|}{1-|\lambda|\cdot\|\bar{K}\|}.$$

Na primer, ako je X prostor neprekidnih funkcija imamo

$$\|K\| = \max_{a\leq x\leq b} \int_a^b |K(x,t)|\,dt, \quad \|f\| = \max_{a\leq x\leq b}|f(x)|.$$

Ako je, medjutim, X prostor $L^2$ imamo

$$\|K\| \leq \Big(\int_a^b\int_a^b K(x,t)^2\,dx\,dt\Big)^{1/2}, \quad \|f\| = \Big(\int_a^b f(x)^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

Primenom formule (2.4.11) ocenimo normu greške u prostoru $L^2$ za rešenje (2.4.8).

Kako je

$$\|K\| \leq \Big(\int_0^1\int_0^1 (1-x\cos xt)^2\,dx\,dt\Big)^{1/2}$$

$$= (2\cos 1 - \frac{1}{8}\cos 2 + \frac{1}{16}\sin 2 - \frac{5}{6})^{1/2} < 0.6 ,$$

$$\|\bar{K}\| \leq \left(\int_0^1\int_0^1 (1 - x + \frac{1}{2}x^3t^2)\,dx\,dt\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{5}{14}} < 0.6 ,$$

$$\|E\| \leq \left(\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{576}x^{10}t^8\,dx\,dt\right)^{1/2} = \frac{1}{72\sqrt{11}} < 4.2\cdot 10^{-3},$$

$$\|f\| = \left(\int_0^1 \sin^2 x\,dx\right)^{1/2} = \frac{1}{2}(2 - \sin 2)^{1/2} < 0.523,$$

i $\lambda=1$, $\|R_K\| \leq 1.5$, $\|R_{\bar{K}}\| \leq 1.5$, imamo

$$\|\bar{y} - y\| < (1+1.5)\cdot(1+1.5)\cdot 4.2\cdot 10^{-3}\cdot 0.523 < 0.014.$$

## 9.3. PROJEKCIONO-VARIJACIONI METODI

U ovom poglavlju razmatraćemo neke klase približnih analitičkih metoda, tzv. projekciono-varijacionih metoda, za rešavanje linearnih operatorskih jednačina u Hilbertovom prostoru. Kao primeri jednačina pojaviće se obične i parcijalne diferencijalne jednačine sa odredjenim konturnim uslovima, kao i neke integralne jednačine. Najveću pažnju posvetićemo varijacionom pristupu u rešavanju problema, uz poseban naglasak na Ritzov metod. Takodje, daćemo i osnovne principe opšteg projekcionog metoda, tzv. metoda momenata, i ukazati na neke specijalne slučajeve ovog metoda, kakvi su, na primer, Galerkinov metod, metod najmanjih kvadrata, i metod poklapanja ili metod kolokacije kako se često naziva.

## 9.3.1. Uvod

Neka je data linearna operatorska jednačina

$$(3.1.1) \qquad Au = f$$

na realnom, separabilnom† Hilbertovom prostoru X.

Pretpostavimo da jednačina (3.1.1) ima jedinstveno rešenje $u_0$ i neka je konstruisana funkcionela $F:X \to R$, koja dostiže minimum jedino u tački $u=u_0$. Tada se problem rešavanja jednačine (3.1.1) može zameniti ekvivalentnim problemom minimizacije funkcionele F. Metodi zasnovani na ovoj ideji, nazivaju se varijacionim. U našem izlaganju zadržaćemo se samo na Ritzovom metodu, koji se široko primenjuje za rešavanje konturnih problema, kako kod običnih diferencijalnih jednačina, tako i kod parcijalnih jednačina. Važnu primenu nalazi i kod integralnih jednačina.

Navešćemo sada neke definicije i teoreme, koje se odnose na linearne operatore u Hilbertovom prostoru (opširnije videti, na primer, [1], [3],[23]).

Neka je A linearan ograničeni operator na X.

<u>Definicija 3.1.1</u>. Za operator $A^*$, definisan na X, kaže se da je adjungovan operatoru A, ako je za svako $u,v \in X$

$$(Au,v) = (u,A^*v).$$

<u>Teorema 3.1.1</u>. Adjungovan operator $A^*$ je linearan i ograničen operator, pri čemu je $\|A^*\| = \|A\|$.

---

† *Metrički prostor se naziva separabilnim, ako u njemu postoji najviše prebrojiv svuda gust podskup.*

Definicija 3.1.2. Ako je $A^* = A$, tj.

$$(Au,v) = (u,Av) \qquad (\forall\, u,v\in X),$$

za operator A se kaže da je sebi adjungovan.

Teorema 3.1.2. Ako je A sebi adjungovan operator, tada je

$$\|A\| = \sup_{\|u\|=1} |(Au,u)|.$$

Za operator A, koji je sebi adjungovan, uvodi se pojam gornje i donje granice pomoću

$$M_A = \sup_{\|u\|=1} (Au,u) \quad \text{i} \quad m_A = \inf_{\|u\|=1} (Au,u). \tag{3.1.2}$$

Primetimo da se tada, norma može predstaviti u obliku

$$\|A\| = \max(|M_A|,|m_A|).$$

Takodje, iz (3.1.2) sleduje

$$m_A\|u\|^2 \le (Au,u) \le M_A\|u\|^2 \qquad (\forall\, u\in X). \tag{3.1.3}$$

Definicija 3.1.3. Sebi adjungovan operator A naziva se pozitivan ili pozitivno definisan (definitan) ako je $m_A > 0$.

Na osnovu (3.1.3) zaključujemo da je kod pozitivnog operatora $(Au,u)=0$ ako i samo ako je $u=\theta$. Nije teško pokazati da pozitivan operator A ima inverzan operator $A^{-1}$, za koji je

$$\|A^{-1}\| \le \frac{1}{m_A}.$$

Napomenimo da jednačina (3.1.1) sa pozitivnim operatorom A ima jedinstveno rešenje za svako $f\in X$.

Sledeća definicija ne zahteva ograničenost operatora.

Definicija 3.1.4. Linearan operator A definisan na nekom svuda gustom podskupu $D(\subset X)$, naziva se simetričnim, ako je za svako $u,v\in D$

$$(Au,v) = (u,Av).$$

Primetimo da je sebi adjungovan operator specijalan slučaj simetričnog operatora. Naime, on je ograničeni simetrični operator, kod koga je $D=X$. Napomenimo da se D, kao oblast definisanosti operatora A označava sa $D(A)$, a odgovarajući skup vrednosti operatora A sa $R(A)$.

U daljem tekstu razmotrićemo dva izuzetno važna primera. Prvi primer se odnosi na konturne probleme kod običnih diferencijalnih jednačina, a drugi na probleme kod parcijalnih jednačina.

Primer 3.1.1. Neka je operator A definisan na skupu dvaput neprekidno diferencijabilnih funkcija na $[a,b]$ koje se anuliraju u krajnjim tačkama, tj. na

$$D(A) = \{y \mid y\in C^2[a,b],\ y(a) = y(b) = 0\},$$

pomoću

$$Ay = -\frac{d}{dx}(py') + qy,$$

gde su

$$p\in C^1[a,b],\ q\in C[a,b],\ p(x) \geqq p_o > 0,\ q(x) > 0 \quad (x\in[a,b]).$$

Lako je pokazati da je operator A linearan.

Posmatrajmo $D(A)$ kao podskup u $L^2(a,b)$. Može se pokazati da je $D(A)$ svuda gust u prostoru $L^2(a,b)$ (videti, na primer [1] ).

Neka je u $L^2(a,b)$ uveden skalarni proizvod na standardan način

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx \qquad (f,g\in L^2(a,b)).$$

Operator A je simetričan. Zaista, za proizvoljno $y,z\in D(A)$, imamo

$$(Ay,z) = \int_a^b [-\frac{d}{dx}(py') + qy]zdx$$

$$= -py'z\Big|_a^b + \int_a^b py'z'dx + \int_a^b qyzdx$$

$$= (-py'z + pyz')\Big|_a^b + \int_a^b [-\frac{d}{dx}(pz') + qz]ydx,$$

tj.

$$(Ay,z) = (y,Az) .$$

Dokazaćemo sada da je operator A pozitivno definisan, u tom smislu da postoji konstanta $\gamma > 0$, takva da je

(3.1.4) $$(Ay,y) \geqq \gamma\|y\|^2 \qquad (\forall y\in D(A)).$$

Kako je, za proizvoljno $y\in D(A)$,

$$(Ay,y) = -\int_a^b (py')'ydx + \int_a^b qy^2dx$$

$$= -py'y\Big|_a^b + \int_a^b py'^2dx + \int_a^b qy^2dx$$

$$\geqq \int_a^b py'^2dx$$

i $p(x) \geqq p_o > 0$ za svako $x\in[a,b]$, imamo

(3.1.5) $$(Ay,y) \geqq p_o \int_a^b y'^2dx .$$

S druge strane, kako je $y(a)=0$, korišćenjem Cauchyeve nejednakosti imamo

$$|y(x)|^2 = \left(\int_a^x y'dt\right)^2 \leqq (x-a)\int_a^x y'^2dt \leqq (x-a)\int_a^{\frac{a+b}{2}} y'^2dt$$

za svako $x\in[a, \frac{1}{2}(a+b)]$, odakle integracijom dobijamo

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} y^2dx \leqq \frac{1}{8}(b-a)^2 \int_a^{\frac{a+b}{2}} y'^2dx .$$

Analognu nejednakost možemo dobiti i za segment $[\frac{1}{2}(a+b),b]$, pa zaključujemo da važi

$$\int_a^b y^2dx \leqq \frac{1}{8}(b-a)^2 \int_a^b y'^2dx .$$

Ova nejednakost može se poboljšati. Naime, može se pokazati da je najbolja konstanta $1/\pi^2$ (umesto 1/8).

Korišćenjem poslednje nejednakosti, iz (3.1.5) sleduje

$$(Ay,y) \geqq \frac{8p_o}{(b-a)^2}||y||^2,$$

tj. (3.1.4) sa $\gamma = \dfrac{8p_o}{(b-a)^2} > 0.$

<u>Primedba 3.1.1</u>. Za pozitivnost operatora A iz prethodnog primera, uslov $q(x) > 0\,(x\in[a,b])$ nije neophodan. Naime, neka je $\min q(x) = q_o$. Tada je, na osnovu prethodnog,

$$(Ay,y) = \int_a^b py'^2dx + \int_a^b qy^2dx$$

$$\geqq \left(\frac{8p_o}{(b-a)^2} + q_o\right) ||y||^2,$$

što znači da se može uzeti

$$\gamma = \frac{8p_o}{(b-a)^2} + q_o > 0.$$

Primetimo da $q_o$ može biti i negativno.

Primedba 3.1.2. Uslov (3.1.4) obezbedjuje egzistenciju inverznog operatora. Zaista, ako je $Ay=\theta$, iz (3.1.4) sleduje $y=\theta$.

Primedba 3.1.3. Ako je operator A iz primera 3.1.1 definisan na skupu

$$D_1(A) = \{y | y \in C^2[a,b],\ y'(a) = y'(b) = 0\},$$

tada je on takodje simetričan i pozitivno definisan na $D_1(A)$.

Primer 3.1.2. Neka je G ograničena otvorena oblast dvodimenzionalnog euklidovog prostora sa deo po deo glatkom granicom $\Gamma$ i neka je $q$ neprekidna funkcija na $\bar{G}=G \cup \Gamma$. Neka je, dalje, $X=L^2(G)$ i $D(A)$ skup funkcija $u$, koje zadovoljavaju uslove:

$1^\circ$ $u$, $u_x$, $u_y$ neprekidni na $\bar{G}$;

$2^\circ$ $u_{xx}$, $u_{xy}$, $u_{yy}$ neprekidni u $G$ i pripadaju $L^2(G)$;

$3^\circ$ $u(x,y)=0$, kada $(x,y) \in \Gamma$.

Operator A definisan na D(A), pomoću

$$Au = -\Delta u + qu = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + qu ,$$

poseduje osobinu simetričnosti, pri čemu je

$$(Au,v) = \iint_G (u_x v_x + u_y v_y + quv)\, dG .$$

Neka je $q_0=\min q(x,y)$. Korišćenjem nejednakosti (videti [17])

$$\|u\|^2 = \iint_G u^2 dG \leqq \left(\frac{2P}{\pi L}\right)^2 \iint_G (u_x^2 + u_y^2)\, dG ,$$

gde je P površina oblasti G i L dužina luka krive $\Gamma$, dobijamo da je $(Au,u) \geqq \gamma \|u\|^2$, gde je

$$\gamma = \left(\frac{\pi L}{2P}\right)^2 + q_0 .$$

Dakle, operator je pozitivno definisan na D(A), ako je $q_0$ takvo da je zadovoljen uslov $\gamma > 0$.

## 9.3.2. Varijacioni prilaz u rešavanju operatorskih jednačina

U cilju rešavanja jednačine (3.1.1), definišimo funkcionelu $F:X\to R$ pomoću

(3.2.1) $$F(u) = (Au,u) - 2(u,f) .$$

Teorema 3.2.1. Neka je $A$ pozitivan operator. Da bi $u_0\in X$ bilo rešenje jednačine (3.1.1), potrebno je i dovoljno da funkcionela $F$ ima najmanju vrednost za $u=u_0$.

Dokaz. Neka $u,v\in X$ i $t\in R$. Tada je

(3.2.2) $$\begin{aligned} F(u+tv) &= (A(u+tv),u+tv) - 2(u+tv,f) \\ &= F(u) + 2t(Au-f,v) + t^2(Av,v), \end{aligned}$$

s obzirom na jednakost $(Av,u)=(v,Au)=(Au,v)$.

Neka je $u=u_0$ rešenje jednačine (3.1.1). Tada iz (3.2.2), za $t=1$, sleduje

(3.2.3) $$F(u_0+v) = F(u_0) + (Av,v) \geq F(u_0).$$

Kako se proizvoljna tačka $w\in X$ može predstaviti u obliku $w=u_0+v$, na osnovu (3.2.3) zaključujemo da $F$ postiže najmanju vrednost u tački $u_0$.

Pretpostavimo sada obrnuto. Naime, neka $F$ postiže najmanju vrednost za $u=u_0$, tj. neka je $F(u_0+tv)\geq F(u_0)$ za svako $t\in R$ i svako $v\in X$. Posmatrajmo funkciju $h$, definisanu sa

$$h(t) = F(u_0+tv) = F(u_0)+2t(Au_0-f,v) + t^2(Av,v).$$

Kako, po pretpostavci, funkcija $h$ postiže najmanju vrednost za $t=0$, zaključujemo da mora biti $(Au_0-f,v)=0$, odakle, zbog proizvoljnosti tačke $v$, sleduje da je $u_0$ rešenje jednačine (3.1.1).

Ovim je dokaz teoreme završen.

Definicija 3.2.1. Za niz $\{u_n\}_{n\in N}$ kažemo da je minimizirajući za funkcionelu $F$, ako je

$$\lim_{n\to+\infty} F(u_n) = \min F(u) .$$

Teorema 3.2.2. Ako je A pozitivan operator, svaki minimizirajući niz $\{u_n\}_{n\in N}$ konvergira ka rešenju jednačine (3.1.1).

Dokaz. Ako u (3.2.3) stavimo $v=u_n-u_o$, gde je $u_o$ rešenje jednačine (3.1.1), dobijamo

$$F(u_n) = F(u_o) + (A(u_n-u_o), u_n-u_o).$$

Kako je, na osnovu teoreme 3.2.1, $F(u_o)=\min F(u)$ i kako je niz $\{u_n\}_{n\in N}$ minimizirajući, imamo $F(u_n) \to F(u_o)$ $(n\to+\infty)$, tj.

$$(3.2.4) \qquad (A(u_n-u_o),u_n-u_o) \to 0 \qquad (n\to+\infty).$$

Ako stavimo $u=u_n-u_o$, iz (3.1.3) sleduje

$$\| u_n-u_o\|^2 \leqq \frac{1}{m_A}(A(u_n-u_o),u_n-u_o),$$

što zajedno sa (3.2.4) daje $u_n\to u_o$ $(n\to+\infty)$.

## 9.3.3. Ritzov metod

U ovom odeljku razmotrićemo Ritzov metod za približno rešavanje jednačine (3.1.1), koji je zasnovan na minimizaciji funkcionele (3.2.1). Pri ovome pretpostavljamo da je operator A pozitivan.

U prostoru X izaberimo proizvoljan sistem linearno nezavisnih vektora $\{v_k\}_{k\in N}$, kompletan u tom smislu da u prostoru X ne postoji nijedan vektor $v\neq\theta$, koji je istovremeno ortogonalan sa svim vektorima $v_k (k=1,2,\ldots)$.

Uzimajući $B_n=\{v_1,\ldots,v_n\}$ za bazu, konstruišimo n-dimenzionalni podprostor $X_n=L(B_n)$ i u njemu potražimo tačku $u_n$ u kojoj funkcionela F, definisana sa (3.2.1), ima najmanju vrednost. S obzirom da svako $u\in X_n$ ima reprezentaciju

(3.3.1) $$u = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k,$$

problem odredjivanja tačke $u=u_n$ u kojoj $F$ postiže najmanju vrednost svodi se na odredjivanje koeficijenata $c_k$ $(k=1,\dots,n)$ iz uslova da funkcija $\Phi$, definisana sa

$$\Phi(c_1,\dots,c_n) = F\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k v_k\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_i c_k (Av_i, v_k) - 2\sum_{k=1}^{n} c_k (v_k, f),$$

postiže najmanju vrednost na $R^n$. Kako funkcija $\Phi$ ima neprekidne parcijalne izvode u svim tačkama prostora $R^n$, to je najmanja vrednost funkcije $\Phi$ istovremeno i minimum ove funkcije. Tada, iz uslova

$$\frac{\partial\Phi}{\partial c_k} = 0 \qquad (k=1,\dots,n),$$

dobijamo sistem linearnih algebarskih jednačina

(3.3.2) $$\sum_{i=1}^{n} (Av_i, v_k) c_i = (v_k, f) \qquad (k=1,\dots,n).$$

Da bismo dokazali da sistem (3.3.2) ima jedinstveno rešenje, dovoljno je dokazati da odgovarajući homogeni sistem

(3.3.3) $$\sum_{i=1}^{n} (Av_i, v_k) c_i = 0 \qquad (k=1,\dots,n)$$

ima samo trivijalna rešenja $c_i=0$ $(i=1,\dots,n)$.

S obzirom da se sistem jednačina (3.3.3) može predstaviti u obliku

$$\Big(A\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i\Big),\ v_k\Big) = 0 \qquad (k=1,\dots,n)$$

zaključujemo da je vektor $Av$, gde smo stavili $v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ ($c_i$ su rešenja sistema (3.3.3)), ortogonalan sa svim vektorima $v_k$ $(k=1,\dots,n)$. Štaviše, tada je vektor $Av$ ortogonalan sa svim vektorima iz $X_n$, pa i sa vektorom $v$. Zbog pretpostavke o pozitivnosti operatora $A$, iz $(Av,v)=0$ sleduje $v=\theta$, što daje $c_i=0$ $(i=1,\ldots,n)$, s obzirom da su vektori $v_1,\ldots,v_n$ linearno nezavisni.

Dakle, za odredjivanje približnog rešenja jednačine (3.1.1)

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k,$$

treba prethodno rešiti sistem linearnih jednačina (3.3.2).

Prethodno navedeni rezultati važe i u opštijem slučaju. Pretpostavimo da je u jednačini (3.1.1) operator $A$ simetričan i definisan na skupu $D(A)$ svuda gustom u $X$. Na dalje, neka je $A$ pozitivno definisan u smislu (3.1.4). Tada, očigledno, postoji $A^{-1}$ i jednačina

$$Au = f \tag{3.3.4}$$

ima jedinstveno rešenje za svako $f\in R(A)$.

Pod navedenim uslovima, tvrdjenja teorema 3.2.1 i 3.2.2 ostaju u važnosti, s tim što sada funkcionelu $F:D(A)\to R$, treba minimizirati na $D(A)$.

Kod primene Ritzovog metoda, sistem linearno nezavisnih vektora $\{v_k\}_{k\in N}$ treba izabrati tako da $v_k\in D(A)$ i da je ovaj sistem kompletan u $D(A)$, u tom smislu da za svako $u\in D(A)$ i svako $\varepsilon>0$ postoje prirodan broj $n$ i vektor $v\in X_n$ ($X_n$ lineal nad bazom $\{v_1,\ldots,v_n\}$) takvi da je

$$(A(v-u),v-u) < \varepsilon. \tag{3.3.5}$$

Na osnovu (3.1.4) i poslednje nejednakosti dobijamo

$$\| v - u\|^2 < \frac{\varepsilon}{\gamma},$$

odakle, s obzirom da je $\varepsilon$ proizvoljno, sleduje da svako $u\in D(A)$ pripada i adherenciji od $X_n$, tj. $X_n$ je svuda gust u $D(A)$.

Dokažimo sada konvergenciju niza približnih rešenja $\{u_n\}$ koji se dobija primenom Ritzovog metoda na rešavanje jednačine (3.3.4).

Kako je $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots \subset D(A)$, imamo

$$\min_{u \in X_1} F(u) \geq \min_{u \in X_2} F(u) \geq \ldots \geq \min_{u \in X_n} F(u) \geq \ldots \geq \min_{u \in D(A)} F(u),$$

tj.

$$F(u_1) \geq F(u_2) \geq \ldots \geq F(u_n) \geq \ldots \geq F(u_o), \tag{3.3.6}$$

gde je $u_o$ rešenje jednačine (3.3.4).

Za proizvoljno malo $\varepsilon > 0$ izaberimo $m$ i $v \in X_m$ tako da je

$$(A(v-u_o),\ v-u_o) < \varepsilon. \tag{3.3.7}$$

S druge strane, na osnovu (videti (3.2.3))

$$F(v) = F(u_o) + (A(v-u_o), v-u_o)$$

za $v=u_m$ i nejednakosti (3.3.7) imamo

$$F(u_m) < F(u_o) + \varepsilon,$$

odakle je, s obzirom na (3.3.6),

$$F(u_o) \leq F(u_n) \leq F(u_m) < F(u_o) + \varepsilon \qquad (\forall n \geq m).$$

Iz poslednjih nejednakosti sleduje konvergencija niza $\{u_n\}_{n \in N}$.

## 9.3.4. Neke primene Ritzovog metoda

Posmatrajmo konturni problem za linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda u Sturm-Liouvilleovom obliku

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u = g(x), \tag{3.4.1}$$

$$u(a) = A, \quad u(b) = B.$$

Pod pretpostavkom da je

$$p \in C^1[a,b], \quad q,g \in C[a,b], \quad p(x) \geq p_o > 0, \quad q(x) > 0 \qquad (x \in [a,b]),$$

moguće je Ritzovim metodom naći približno rešenje konturnog problema (3.4.1).

Uvodjenjem smene $u=y+z$, gde je

$$z(x) = A + \frac{B - A}{b - a}(x - a),$$

konturni problem (3.4.1) se svodi na problem

$$(3.4.2) \qquad -\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = f(x), \quad y(a) = y(b) = 0,$$

gde je

$$f(x) \equiv \frac{d}{dx}(p(x)z') - q(x)z - g(x)$$

$$\equiv \frac{B - A}{b - a}(p'(x) - q(x)(x-a)) - Aq(x) - g(x).$$

Definisanjem operatora $A$ na skupu $D(A)$, kao u primeru 3.1.1, rešavanje problema (3.4.2) se svodi na rešavanje operatorske jednačine

$$(3.4.3) \qquad Ay = f .$$

S obzirom da je operator $A$ simetričan i pozitivan na svuda gustom skupu $D(A)$ u $L^2(a,b)$, jednačina (3.4.3) se može rešavati minimizacijom funkcionele

$$(3.4.4) \qquad F(y) = (Ay,y) - 2(y,f) = \int_a^b (py'^2 + qy^2 - 2fy)dx .$$

Primedba 3.4.1. Jednačina (3.4.2) je Eulerova jednačina za funkcionelu (3.4.4).

Kao što je napomenuto u prethodnom odeljku, kod primene Ritzovog metoda, sistem bazisnih funkcija $\{v_k\}_{k\in N}$ treba da ispunjava uslov kompletnosti u $D(A)$. Da bi ovaj uslov bio ispunjen, funkcije $v_k$ je dovoljno izabrati tako da se za svako $y\in D(A)$ i svako $\varepsilon > 0$ može naći linearna kombinacija (sa konačnim $n$)

$$z(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k v_k(x),$$

takva da je

$$\max\{|z(x)-y(x)|,\ |z'(x)-y'(x)|\} < \varepsilon \qquad (\forall x\in[a,b]).$$

Tada je uslov oblika (3.3.5) ispunjen. Zaista, imamo

$$(A(z-y),z-y) = \int_a^b \left(p(z'-y')^2 + q(z-y)^2\right)dx < M\varepsilon^2,$$

gde smo stavili $M = \int_a^b (p(x)+q(x))dx \ (< +\infty)$.

Sistemi bazisnih funkcija, koji ispunjavaju prethodni uslov i koji se najčešće koriste kod primene Ritzovog metoda su

$$1^\circ \quad v_k(x) = (x-a)^k(b-x) \qquad (k=1,2,\ldots);$$

$$2^\circ \quad v_k(x) = \sin\frac{k\pi}{b-a}(x-a) \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Primer 3.4.1. Primenom Ritzovog metoda odredićemo približno rešenje konturnog problema

$$(3.4.5) \qquad u'' - (1+x^2)u + x(1+x^2) = 1, \quad u(-1) = -1, \ u(1) = 1.$$

Smenom $u=y+z$, gde je $z(x)=x$, dati konturni problem se svodi na problem (3.4.2), gde su

$$p(x) = 1, \ q(x) = 1+x^2, \ f(x) = -1.$$

Izaberimo sistem funkcija $v_k(x)=1-x^{2k}$ $(k=1,2,\ldots)$. Neka je $n=2$, tj. neka približno rešenje tražimo u obliku

$$y_2(x) = c_1(1-x^2) + c_2(1-x^4).$$

Primenom operatora $A = -\frac{d^2}{dx^2} + (1+x^2)$ na $v_1$ i $v_2$ dobijamo

$$Av_1 = 2 + (1+x^2)(1-x^2) = 3 - x^4,$$

$$Av_2 = 12x^2 + (1+x^2)(1-x^4) = 1 + 13x^2 - x^4 - x^6.$$

Kako je

$$(Av_1,v_1) = \frac{136}{35}, \quad (Av_1,v_2) = (v_1,Av_2) = (Av_2,v_1) = \frac{208}{45},$$

$$(Av_2,v_2) = \frac{3104}{495}, \quad (v_1,f) = -\frac{4}{3}, \quad (v_2,f) = -\frac{8}{5},$$

sistem (3.3.2) postaje

$$\frac{17}{7}c_1 + \frac{26}{9}c_2 = -\frac{5}{6},$$

$$13c_1 + \frac{194}{11}c_2 = -\frac{9}{2},$$

odakle dobijamo $c_1 \approx -0.3217$ i $c_2 \approx -0.01805$.

Dakle, približno rešenje konturnog problema (3.4.5) je

$$u_2(x)=y_2(x)+z(x) \approx -0.3398+x+0.3217x^2+0.01805x^4.$$

Primedba 3.4.2. Kod rešavanja opštijeg konturnog problema

$$-\frac{d}{dx}(py') + qy = f,$$

$$\alpha y(a) + y'(a) = 0, \quad \beta y(b) + y'(b) = 0$$

treba minimizirati funkcionelu

$$F(y) = \int_a^b (py'^2+qy^2-2fy)dx-\alpha p(a)y(a)^2+\beta p(b)y(b)^2.$$

Ritzov metod se može primeniti i na rešavanje konturnih problema kod parcijalnih diferencijalnih jednačina. Ilustrujmo to na jednom primeru.

Primer 3.4.2. Odredimo približno rešenje Laplaceove jednačine u oblasti $G=\{(x,y)\,|\,x>0,y>0,x+y<1\}$, koje zadovoljava uslov

$$u(x,y) = x^2 + y^2 \qquad ((x,y)\in\Gamma),$$

gde je $\Gamma$ granica oblasti G.

Uvodjenjem smene $u=w+x^2+y^2$, ovaj problem se svodi na

$$Aw = -\Delta w = 4, \quad w(x,y) = 0 \qquad ((x,y)\in\Gamma).$$

Osobine operatora A date su u primeru 3.1.2. Izaberimo sistem funkcija

$$v_1=xy(1-x-y),\quad v_2=x^2y(1-x-y),\quad v_3=xy^2(1-x-y),\dots$$

i potražimo rešenje za n=3, tj. u obliku

$$w_3(x,y) = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3.$$

Prethodno izračunajmo integral

$$I_{km} = \iint_G x^k y^m(1-x-y)\,dxdy \qquad (k,m\in N).$$

Sukcesivnom integracijom nalazimo

$$I_{km} = \int_0^1 \int_0^{1-x} x^k y^m[(1-x)y^m-y^{m+1}]dxdy = \frac{1}{(m+1)(m+2)}\int_0^1 x^k(1-x)^{m+2}dx,$$

$$I_{km} = \frac{k!m!}{(k+m+3)!} \qquad (k,m\in N).$$

Kako je

$$Av_1 = 2(x+y),\quad Av_2 = 2(x^2+y^2)+6xy-2y,\quad Av_3=2(x^2+y^2)+6xy-2x,$$

imamo redom

$$(Av_1,v_1) = 2(I_{21}+I_{12}) = \frac{1}{90},\quad (Av_1,v_2) = 2(I_{31}+I_{22}) = \frac{1}{252},$$

$$(Av_1,v_3) = 2(I_{22}+I_{13}) = \frac{1}{252},\ (Av_2,v_1) = \frac{1}{252},$$

$$(Av_2,v_2) = 2(I_{41}+I_{23}) + 6I_{32} - 2I_{22} = \frac{1}{504},$$

$$(Av_2,v_3) = 2(I_{32}+I_{14}) + 6I_{23} - 2I_{13} = \frac{1}{840},$$

$$(Av_3,v_1) = \frac{1}{252},\quad (Av_3,v_2) = \frac{1}{840},$$

$$(Av_3,v_3) = 2(I_{32}+I_{14}) + 6I_{23} - 2I_{22} = \frac{1}{840}.$$

Takodje je,

$$(v_1,f) = 4I_{11} = \frac{1}{30},\quad (v_2,f) = 4I_{21} = \frac{1}{90},\quad (v_3,f) = 4I_{12} = \frac{1}{90},$$

pa sistem linearnih jednačina (3.3.2) postaje

$$\frac{1}{90}c_1 + \frac{1}{252}c_2 + \frac{1}{252}c_3 = \frac{1}{30},$$

$$\frac{1}{252}c_1 + \frac{1}{504}c_2 + \frac{1}{840}c_3 = \frac{1}{90},$$

$$\frac{1}{252}c_1 + \frac{1}{840}c_2 + \frac{1}{504}c_3 = \frac{1}{90},$$

odakle, zbog simetrije, sleduje $c_2=c_3$. Stavljajući u prve dve jednačine ovog sistema $c_3=c_2$, dobijamo

$$c_1 + \frac{5}{7}c_2 = 3, \quad c_1 + \frac{4}{5}c_2 = \frac{14}{5}$$

odakle je $c_1 = \frac{14}{3}$ i $c_2 = -\frac{7}{3}$.

Dakle, približno rešenje datog konturnog problema je

$$\begin{aligned} u_3(x,y) &= x^2 + y^2 + w_3(x,y) \\ &= x^2 + y^2 + \frac{7}{3}xy(1-x-y)(2-x-y). \end{aligned}$$

Ritzov metod ima važnu primenu kod odredjivanja sopstvenih vektora i sopstvenih vrednosti operatora $A:X \to X$. Naime, ovde se Ritzov metod primenjuje na nalaženje netrivijalnih rešenja jednačine $(A-\lambda I)u=\theta$, gde je I identički operator u X. U ovom slučaju sistem (3.3.2) postaje

$$\sum_{i=1}^{n} [(Av_i,v_k)-\lambda(v_i,v_k)]c_i = 0 \qquad (k=1,\ldots,n),$$

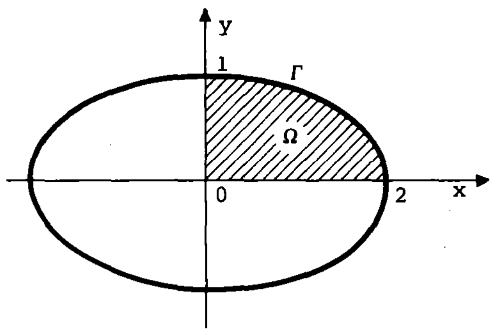
koji ima netrivijalna rešenja ako i samo ako je

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} (Av_1,v_1)-\lambda(v_1,v_1) & \ldots & (Av_1,v_n)-\lambda(v_1,v_n) \\ (Av_2,v_1)-\lambda(v_2,v_1) & & (Av_2,v_n)-\lambda(v_2,v_n) \\ \vdots & & \\ (Av_n,v_1)-\lambda(v_m,v_1) & & (Av_n,v_n)-\lambda(v_n,v_n) \end{vmatrix} = 0 .$$

Vrednosti parametra $\lambda$ pri kojima je $D(\lambda)=0$ uzimaju se kao približne sopstvene vrednosti operatora A.

Primer 3.4.3. Neka je kontura $\Gamma$ eliptičke membrane (Sl.3.4.1) definisana jednačinom

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 .$$




Sl. 3.4.1

Primenom Ritzovog metoda odredićemo približno prve tri sopstvene vrednosti ove membrane†, tj. sopstvene vrednosti operatora A, definisanog na $L^2(G)$, pomoću

$$Au=-\Delta u=-(u_{xx}+u_{yy}) ,$$

gde je $G=\text{int}\,\Gamma$. Osobine operatora A date su u primeru 3.1.2 ($q=0$). Za bazisne funkcije uzećemo

$$v_1(x,y)=x^2+4y^2-4, \quad v_2(x,y)=x^2v_1(x,y), \quad v_3(x,y)=y^2v_1(x,y) .$$

Prethodno izračunajmo integral

$$I_{km} = \frac{1}{\pi} \iint\limits_G x^{2k}y^{2m}dxdy = \frac{4}{\pi} \iint\limits_\Omega x^{2k}y^{2m}dxdy .$$

Prelaskom na polarne koordinate $x=2r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, a zatim smenom $\sin^2\theta=t$, poslednji integral postaje

$$I_{km} = \frac{2^{2k+1}}{\pi(k+m+1)} \int_0^1 t^{m-1/2}(1-t)^{k-1/2}dt = \frac{2^{2k+1}}{\pi(k+m+1)}B(m+\tfrac{1}{2},k+\tfrac{1}{2}) ,$$

gde je B beta funkcija. U tabeli 3.4.1 date su vrednosti integrala $I_{km}$ za $0 \leq k+m \leq 4$ .

Kako je $(u,v)=\iint\limits_G uv\,dxdy$, pomoću vrednosti $I_{km}$ nalazimo skalarne proizvode $(Av_i,v_k)$ i $(v_i,v_k)$ $(i,k=1,2,3)$. Na primer,

---

† *Sopstvene funkcije (oscilacije) eliptičke membrane mogu se egzaktno predstaviti pomoću Mathieuovih funkcija, ali je takva reprezentacija veoma komplikovana.*

Tabela 3.4.1.

| k \ m | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 1/2 | 1/4 | 5/32 | 7/64 |
| 1 | 2 | 1/3 | 1/8 | 1/16 | |
| 2 | 4 | 1/2 | 3/20 | | |
| 3 | 10 | 1 | | | |
| 4 | 28 | | | | |

$$(Av_1,v_1) = \iint_G (-10)(x^2+4y^2-4)dxdy = -10\pi(I_{10}+4I_{01}-4I_{00}) = 40\pi ,$$

$$(v_1,v_1) = \pi(I_{20}+16I_{02}+16I_{00}+8I_{11}-8I_{10}-32I_{01}) = \frac{32\pi}{3} .$$

Na taj način dobijamo karakterističnu jednačinu za približno odredjivanje prve tri sopstvene vrednosti operatora A:

$$D(\lambda) = 4\pi \begin{vmatrix} 10-\frac{8}{3}\lambda & \frac{20}{3}-\frac{4}{3}\lambda & \frac{5}{3}-\frac{1}{3}\lambda \\ \frac{20}{3}-\frac{4}{3}\lambda & \frac{46}{3}-\frac{8}{5}\lambda & \frac{5}{6}-\frac{2}{15}\lambda \\ \frac{5}{3}-\frac{1}{3}\lambda & \frac{5}{6}-\frac{2}{15}\lambda & \frac{47}{24}-\frac{1}{10}\lambda \end{vmatrix} = 0 ,$$

Uvodjenjem smene $\lambda=5(1-z/2)$, poslednja jednačina se svodi na jednačinu

$$6z^3 + 73z^2 + 124z - 96 = 0 ,$$

odakle rešavanjem nalazimo prve tri sopstvene vrednosti

$$\lambda_1 \simeq 3.569, \quad \lambda_2 \simeq 12.045, \quad \lambda_3 \simeq 29.803 .$$

Primedba. Ako uzmemo n=2 u Ritzovom metodu dobićemo grublje aproksimacije za prve dve sopstvene vrednosti. Naime, tada imamo karakterističnu jednačinu

$$\begin{vmatrix} 10-\frac{8}{3}\lambda & \frac{20}{3}-\frac{4}{3}\lambda \\ \frac{20}{3}-\frac{4}{3}\lambda & \frac{46}{3}-\frac{8}{5}\lambda \end{vmatrix} = 0 ,$$

tj. jednačinu $\frac{28}{5}\lambda^2 - 88\lambda + 245 = 0$, odakle je

$$\lambda_1 \approx 3.616 \quad \text{i} \quad \lambda_2 \approx 12.098.$$

## 9.3.5. Metod momenata

Neka su X i Y Banachovi prostori, A linearan operator definisan na $D(A) \subset X$ i sa vrednostima u $R(A) \subset Y$. Projekcioni metod za rešavanje jednačine

$$(3.5.1) \qquad Au = f \qquad (f \in R(A))$$

zasniva se na zameni ove jednačine, jednačinom

$$(3.5.2) \qquad P_n(Au_n - f) = 0 ,$$

korišćenjem dva niza potprostora $\{X_n\}_{n\in N}$ i $\{Y_n\}_{n\in N}$ $(X_n \subset D(A)$, $Y_n \subset Y)$ i linearnog operatora (projektora) $P_n : Y \to Y_n$ koji zadovoljava uslove

$$P_n^2 = P_n \quad \text{i} \quad P_nY = Y_n \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Kao približno rešenje jednačine (3.5.1) uzima se rešenje jednačine (3.5.2) $u_n$ $(\in X_n)$.

Na dalje, pretpostavimo da su prostori X i Y Hilbertovi i $(\cdot,\cdot)$ skalarni proizvod u Y.

U D(A) i Y izaberimo nizove linearno nezavisnih vektora $\{v_k\}_{k\in N}$ i $\{w_k\}_{k\in N}$ respektivno. Prvi od njih nazivamo koordinatnim, a drugi projekcionim. Za podprostore $X_n$ i $Y_n$ uzmimo lineale nad $\{v_1,\ldots,v_n\}$ i $\{w_1,\ldots,w_n\}$ respektivno, a za $P_n$ operator ortogonalnog projektovanja (ortoprojektor Y na $Y_n$).

Lema 3.5.1. Za svako $w \in Y$ jednakost

$$(3.5.3) \qquad P_n w = 0$$

i sistem jednakosti

$$(3.5.4) \qquad (w, w_k) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n)$$

su ekvivalentni.

Dokaz. Pretpostavimo da važi (3.5.3). Tada je, zbog jednakosti $w_k = P_n w_k$ $(k=1,\ldots,n)$,

$$(w,w_k) = (w,P_n w_k) = (P_n w,w_k) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n).$$

Pretpostavimo sada obrnuto, tj. neka važe jednakosti (3.4.5). S obzirom da $P_n w \in Y_n$, imamo

$$P_n w = \sum_{k=1}^{n} a_k w_k,$$

pa je

$$\|P_n w\|^2 = \Big(P_n w, \sum_{k=1}^{n} a_k w_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} a_k (P_n w, w_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k (w,w_k) = 0 ,$$

tj. (3.5.3), čime je dokaz završen.

Na osnovu dokazane leme, jednačina (3.5.2) je ekvivalentna sistemu jednačina

$$(3.5.5) \qquad (Au_n - f, w_k) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n).$$

Kako $u_n \in X_n$, to znači da je za njegovo odredjivanje potrebno naći koeficijente $c_k$ $(k=1,\ldots,n)$ u razvoju

$$(3.5.6) \qquad u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i .$$

Zamenom (3.5.6) u (3.5.5) dobijamo sistem jednačina za nalaženje koeficijenata $c_k$ $(k=1,\ldots,n)$

$$(3.5.7) \qquad \sum_{i=1}^{n} (Av_i, w_k) c_i = (f, w_k) \qquad (k=1,\ldots,n).$$

Izloženi metod se naziva metod momenata ili metod Galerkina-Petrova. Izborom nizova $\{v_k\}$ i $\{w_k\}$ dobijamo različite metode. Ne upuštajući se u analizu pojedinih metoda navešćemo neke od njih koji se najviše koriste u praksi.

Neka je $X=Y$ i $w_k=v_k$ $(k=1,\ldots,n)$. Tada se sistem jednačina (3.5.7) svodi na

$$\sum_{i=1}^{n} (Av_i,v_k)c_i = (f,v_k) \qquad (k=1,\ldots,n). \tag{3.5.8}$$

Ovaj metod se naziva metod Galerkina ili metod Bubnov-Galerkina. Primetimo da je sistem (3.5.8) ekvivalentan sa sistemom (3.3.2) kod Ritzovog metoda, ali je ovde operator $A$ proizvoljan.

Ako uvedemo vektor-ostatak $r_n=Au_n-f$, tada se (3.5.8) svodi na uslov ortogonalnosti vektora $r_n$ sa svim vektorima $v_k$ $(k=1,\ldots,n)$, tj.

$$(r_n,v_k) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n).$$

Ako izaberemo $w_k=Av_k$ $(k=1,\ldots,n)$ dobijamo metod najmanjih kvadrata. Tada se (4.5.7) svodi na

$$\sum_{i=1}^{n} (Av_i,Av_k)c_i = (f,Av_k) \qquad (k=1,\ldots,n).$$

U ovom slučaju imamo

$$(r_n,Av_k) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n).$$

Primetimo da se pri ovako odredjenom $u_n$ minimizira funkcionela

$$F(u) = \| Au - f \|^2$$

na skupu $X_n$.

Na osnovu (3.5.2) zaključujemo da rešenje $u_n$ ne zavisi od izbora koordinatnog i projekcionog niza vektora, već samo od podprostora $X_n$ i $Y_n$. Naime, važi sledeća teorema.

<u>Teorema 3.5.1</u>. Neka su $B_1=\{v_1',\ldots,v_n'\}$ i $B_2=\{w_1',\ldots,w_n'\}$ sistemi linearno nezavisnih vektora iz $D(A)$ i $Y$ respektivno, takvi da je $L(B_1)\equiv X_n$ i $L(B_2)\equiv Y_n$. Neka je, u ovom slučaju, sistem jednačina

$$\sum_{i=1}^{n} (Av_i',w_k')b_i = (f,w_k') \qquad (k=1,\ldots,n) \tag{3.5.9}$$

analogon sistemu (3.5.7). Tada važe tvrdjenja:

$1^{\circ}$ U pogledu egzistencije (i jedinstvenosti) rešenja, sistemi (3.5.7) i (3.5.9) su ekvivalentni.

$2^{\circ}$ Ako je skup $\{\bar{c}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ jedinstveno rešenje sistema (3.5.7), tada je

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i v_i' , \tag{3.5.10}$$

gde je skup $\{\bar{b}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ rešenje sistema (3.5.9).

Dokaz. Tvrdjenje $1^{\circ}$ sleduje iz činjenice da je egzistencija (i jedinstvenost) rešenja svakog od navedenih sistema uslovljena egzistencijom (i jedinstvenošću) rešenja $u_n (\in X_n)$ jednačine (3.5.2). S obzirom da je leva i desna strana jednakosti (3.5.10) rešenje jednačine (3.5.2), zaključujemo da važi tvrdjenje $2^{\circ}$.

Na osnovu tvrdjenja teoreme 3.5.1 zaključujemo da transformacije koordinatnog i projekcionog niza, koje očuvavaju podprostore $X_n$ i $Y_n$, ne menjaju rešenje $u_n$. Medjutim, sa numeričkog stanovišta, pomenute transformacije su korisne, s obzirom da se njima može uticati na stabilnost sistema linearnih jednačina. Naime, treba odabrati takve nizove $\{v_k\}_{k\in N}$ i $\{w_k\}_{k\in N}$ da je matrica sistema (3.5.7) dobro uslovljena.

Ne upuštajući se u probleme vezane za izbor pomenutih nizova, kao ni u dalju analizu metoda momenata, navešćemo dva primera koji ilustruju primenu Galerkinovog metoda.

Primer 3.5.1. Metodom Galerkina odredimo približno rešenje konturnog problema

$$z'' - z'\cos x + z\sin x = \sin x ,$$

$$z(-\pi) = z(\pi) = 2 .$$

Smenom $z=y+2$, dati problem se svodi na problem homogenim konturnim uslovima

$$y'' - y'\cos x + y\sin x = -\sin x ,$$

$$y(-\pi) = y(\pi) = 0 .$$

Uzmimo $X=Y=L^2(-\pi,\pi)$, $A=\dfrac{d^2}{dx^2} - \cos x\dfrac{d}{dx} + \sin x$,

$D(A) = \{y \mid y\in C^2[-\pi,\pi],\ y(-\pi) = y(\pi) = 0\}$,

$v_1 = \sin x$, $v_2 = \cos x + 1$, $v_3 = \sin 2x$, $v_4 = \cos 2x - 1$.

Kako je

$Av_1 = -\sin x - \cos 2x$, $Av_2 = \sin x - \cos x + \sin 2x$,

$Av_3 = -\frac{1}{2}\cos 4 - 4\sin 2x - \frac{3}{2}\cos 3x$,

$Av_4 = -\frac{1}{2}\sin x - 4\cos 2x + \frac{3}{2}\cos 3x$,

$f = -\sin x$,

sistem jednačina (3.5.8) postaje

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

odakle je $c_1 = \frac{8}{7}$, $c_2=c_3=0$, $c_4 = -\frac{2}{7}$, tj.

$$z_4 = y_4 + 2 = 2 + \frac{8}{7}\sin x + \frac{4}{7}\sin^2 x.$$

Primetimo da je tačno rešenje datog konturnog problema

$$z = e^{\sin x} + 1 .$$

<u>Primer 3.5.2.</u> Rešimo integralnu jednačinu

$$y(x) = x + \int_{-1}^{1} xty(t)dt$$

metodom Galerkina uzimajući za bazisne funkcije Legendreove polinome, tj. $v_k(x)=P_{k-1}(x)$ $(k=1,2,\ldots)$. Neka je $X=Y=L^2(-1,1)$, operator $A$, definisan na $D(A)=C[-1,1]$ pomoću

$$Ay = y - \int_{-1}^{1} xty(t)dt$$

i neka je $n=3$. Kako je

$$v_1 = 1\,, \qquad v_2 = x\,, \qquad v_3 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\,,$$

$$Av_1 = 1\,, \qquad Av_2 = \frac{1}{3}x\,, \qquad Av_3 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

i $f(x)=x$, sistem jednačina (3.5.8) postaje

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix},$$

odakle dobijamo $c_1=0$, $c_2=3$, $c_3=0$, tj. $y_3(x)=3x$.

Na kraju navedimo još jedan metod za približno rešavanje jednačine (3.5.1). Neka su $X$ i $Y$, kao što smo na početku odeljka pretpostavili, Banachovi prostori. U $D(A)$ izaberimo koordinatni niz vektora $\{v_k\}_{k\in N}$, a za projekcioni niz $\{w_k\}_{k\in N}$ linearne funkcionele definisane na $Y$ ($w_k$ su dakle, elementi konjugovanog prostora $Y^*$). Prema ovom metodu, koeficijenti u približnom rešenju

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i,$$

odredjuju se iz sistema jednačina

$$w_k\Big(A\sum_{i=1}^{n} c_i v_i\Big) = w_k(f) \qquad (k=1,\ldots,n),$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{n} c_i w_k(Av_i) = w_k(f) \qquad (k=1,\ldots,n). \tag{3.5.11}$$

Razmotrićemo sada jedan specijalan slučaj ovog metoda, koji se naziva metod poklapanja ili metod kolokacije.

Neka je $Y=C[a,b]$ i neka su funkcionele $w_k$: $C[a,b]\to R$ definisane pomoću

$$w_k(y) = y(x_k),$$

gde je $\{x_1,\ldots,x_n\}$ zadat sistem čvorova na $[a,b]$. Za rešavanje konturnog problema

$$y'' + py' + qy = f, \quad y(a) = y(b) = 0,$$

gde su $p,q,f$ date neprekidne funkcije na $[a,b]$, pomoću metoda poklapanja uzimamo $X=Y=C[a,b]$, $D(A)=\{y\,|\,y\in C^2[a,b],\ y(a)=y(b)=0\}$, $Ay=y''+py'+qy$. Za koordinatni niz možemo uzeti, na primer,

$$v_k(x) = (x-a)(b-x)x^{k-1} \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Izborom različitih čvorova $x_k$ $(k=1,\ldots,n)$ na segmentu $[a,b]$, sistem (3.5.11) postaje

$$Ay|_{x=x_k} = f(x_k) \qquad (k=1,\ldots,n),$$

tj.

$$\text{(3.5.12)} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i[v_i''(x_k)+p(x_k)v_i'(x_k)+q(x_k)v_i(x_k)]=f(x_k) \qquad (k=1,\ldots,n).$$

Primer 3.5.3. Neka je dat konturni problem

$$y'' +(1 + x^2)y + 1 = 0, \quad y(-1) = y(1) = 0.$$

Izborom bazisnih funkcija $v_1=1-x^2$ i $v_2=x^2(1-x\ )$ i čvorova $x_1=0$ i $x_2=\frac{1}{2}$ i rešavajući sistem jednačina (3.5.12) dobijamo

$$y_2(x) \cong 0.957(1-x^2) - 0.022x^2(1-x^2).$$

Primedba 3.5.1. Metod kolokacije može se formalno dobiti iz metoda momenata uzimajući za projekcioni niz funkcije $w_k(x)=\delta(x-x_k)$ $(k=1,\ldots,n)$, gde je $\delta$ Diracova funkcija.

# 9.4. LITERATURA

1. S. Aljančić: Uvod u realnu i funkcionalnu analizu. Gradjevinska knjiga, Beograd, 1968.

2. I. Babuška, M. Prager, V. Vitasek: Numerical processes in differential equations. Wiley (Interscience), New York, 1966.

3. S.K. Berberian: Introduction to Hilbert space. Chelsea Publ. Comp., New York, 1976.

4. I.S. Berezin i N.P. Zhidkov: Metody vychisleniĭ II. Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit., Moskva, 1960.

5. L. Collatz: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1963.

6. L.M. Delves and J. Walsh, eds.: Numerical solution of integral equations. Clarendon Press, Oxford, 1974.

7. B.P. Demidovich, I.A. Maron, È.Z. Shuvalova: Chisleniiye metody analiza. Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit., Moskva, 1962.

8. M.K. Gavurin: Lekciĭ po metodam vychisleniĭ. Nauka, Moskva, 1971.

9. S.K. Godunov i V.S. Ryaben'kiĭ: Raznostnye skhemy, Nauka, Moskva, 1973.

10. R.F. Harrington: *Matrix methods for field problems*. Proc. IEEE 55 (1967), 136-149.

11. F.B. Hildebrand: Introduction to numerical analysis. McGraw Hill, New York, 1974.

12. L.V. Kantorovich i G.P. Akilov: Funkcional'nyĭ analiz. Nauka, Moskva, 1977.

13. M.A. Krasnosel'ski, G.M. Vainikko, P.P. Zabreĭko, Ya.B. Rutitskiĭ, V.Ya. Stetsenko: Priblizhennoe reshenie operatornyh uravneniĭ. Nauka, Moskva, 1969.

14. V.I. Krylov, V.V. Bobkov, P.I. Monastyrnyi: Vychislitel'nye metody II. Nauka, Moskva, 1977.

15. I.I. Lyashko, V.L. Makarov, A.A. Skorobogat'ko: Metody vychisleniĭ. Vishcha Shkola, Kiev, 1977.

16. G.V. Milovanović i Dj.R. Djordjević: Programiranje numeričkih metoda na FORTRAN jeziku. Institut za dokumentaciju zaštite na radu "E. Kardelj", Niš, 1981.

17. D.S. Mitrinović (saradnik P.M.Vasić): Analitičke nejednakosti. Gradjevinska knjiga, Beograd, 1970.

18. D.S. Mitrinović i J.D. Kečkić: Jednačine matematičke fizike. Gradjevinska knjiga, Beograd, 1972.

19. A. Ralston: A first course in numerical analysis. McGraw Hill, New York, 1965.

20. A.A. Samarskii: Teoriya raznostnyh skhem. Nauka, Moskva, 1977.

21. J. Stoer, R. Bulirsch: Einführung in die Numerische Mathema - tik II. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

22. G. Strang, G.J. Fix: An analysis of the finite element method. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1973.

23. B.Z. Vulikh: Vvedenie v funkcional'nyi analiz. Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit., Moskva, 1958.

24. D.M. Young and R.T. Gregory: A survey of numerical mathematiccs. Vol. II. Addison-Wesley, Reading, 1973.

## ZADACI SA PISMENIH ISPITA*

**OI (7. VI 1973.)**

**1.1.** Funkciju $x \to f(x) = x^4$ aproksimirati algebarskim polinomom drugog stepena na segmentu $[0,2]$

1° srednjekvadratnom aproksimacijom i odrediti veličinu najbolje aproksimacije;

2° Lanczosovom ekonomizacijom pomoću Čebiševljevih polinoma i naći maksimalno odstupanje.

**1.2.** Date su nesingularne matrice $A$ i $X_0$. Neka je $F_0 = I - X_0A$ ($I$ jednačina matrica) i $X_0$ takva matrica da je $\|F_0\| < q < 1$.

1° Dokazati jednakost

$$A^{-1} = (I + F_0 + F_0^2 + \dots)X_0;$$

2° Ispitati konvergenciju iterativnog procesa za nalaženje inverzne matrice od $A$

$$X_{k+1} = (3I - X_kA(3I - X_kA))X_k \qquad (k = 0,1,\dots).$$

**1.3.** Izvesti formulu Čebiševljevog tipa

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\cos x\,dx = A(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)) + R_3(f),$$

a zatim primenom ove formule približno izračunati

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{3+x^2}\,dx.$$

**1.4.** Dat je sistem jednačina

$$F_1(x,y) = x^2 + y^3 + x - 1.441 = 0,$$

$$F_2(x,y) = x^3 + y^2 + y - 2.411 = 0.$$

Polazeći sa $x^{(0)} = 0$ i $y^{(0)} = 1$, odrediti $x^{(2)}$ i $y^{(2)}$ primenom

1° Newtonovog metoda;

2° modifikovanog Newtonovog metoda.

---

*) Na Elektronskom fakultetu u Nišu, numerička analiza se predaje počev od školske 1971/72. godine, najpre u okviru predmeta OBRADA INFORMACIJA (VII i VIII semestar), a zatim kroz dva predmeta NUMERIČKA ANALIZA I (VII semestar) i NUMERIČKA ANALIZA II (VIII semestar). Ovde su dati ispitni zadaci iz ovih predmeta za period juni 1973 - april 1977, pri čemu su korišćene skraćenice OI, NAI i NAII za odgovarajuće predmete.

1.5. Data je diferencijalna jednačina $y' + (1 + \epsilon e^{-2x})\, y = 1$, gde je $\epsilon$ realni parametar, takav da je $|\epsilon| \ll 1$. Odrediti rešenje ove jednačine u obliku

$$y(x) = y_0(x) + \epsilon y_1(x) + \epsilon^2 y_2(x) + \dots,$$

pri čemu je $y_0(0) = 1$.

**OI (7. IX 1973.)**

2.1. U skupu polinoma ne višeg stepena od petog aproksimirati funkciju $x \to f(x) = x^6$ na segmentu $[-1, 1]$ mini–max metodom i odrediti maksimalno odstupanje.

2.2. Funkciju $x \to f(x) = \dfrac{x+13}{x+1}$ aproksimirati Lagrangeovim interpolacionim polinomom trećeg stepena uzimajući za čvorove interpolacije tačke čije su apscise 0, 1, 2, 3. Na osnovu toga približno izračunati $f(1.5)$ i naći grešku aproskimacije za $x = 1.5$. Takođe, primenom Aitkenovog postupka izračunati $f(1.5)$.

2.3. Dat je Cauchyev problem $y' = x - y$, $y(0) = 2$.

$1^0$ Metodom sukcesivnih aproksimacija naći prve tri iteracije;

$2^0$ Eulerovim metodom sa $h = 0.5$ približno izračunati $y(2)$.

2.4. Dat je iterativni proces

$$(1) \qquad B_{k+1} = B_k(2I - AB_k) \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

za nalaženje $A^{-1}$, gde je $B_1$ data matrica.

$1^0$ Dokazati da je proces (1) analogan Newtonovom metodu za izračunavanje recipročne vrednosti datog broja;

$2^0$ Ako se uvede $C_k = I - AB_k$, dokazati da je $C_k = C_1^{2^{i-1}}$.

$3^0$ Dokazati da je dovoljan uslov za konvergenciju iterativnog procesa (1) da sopstvene vrednosti matrice $C_1$ leže u jediničnom krugu.

2.5. Ako u nekom krugu sa centrom u koordinatnom početku jednačina

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = 0$$

ima jedinstven prost koren $x = \xi$, primenom teoreme Königa dokazati da je

$$(1) \qquad \xi = -\frac{a_0}{a_1} - \frac{a_0^2 a_2}{a_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}} - \frac{a_0^3 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix}} - \dots$$

Primenom (1) izračunati koren jednačine

$$1 - 5x + \frac{9}{2!}x^2 - \frac{13}{3!}x^3 + \frac{17}{4!}x^4 - \ldots = 0$$

sa jednom tačnom decimalom.

**OI (7.X 1973.)**

3.1. Za dati skup podataka $(x_i, f_i)$:

$$\{(-2, 2.75), (-1,2), (0,1), (1,4), (2,28), (3,128)\}$$

naći interpolacionu funkciju primenom Pronyevog metoda.

3.2. Neka se za nalaženje prostog korena $x = a$ jednačine $f(x) = 0$ koristi iterativni proces

$$(1) \qquad y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0,1,\ldots).$$

Ako proces (1) konvergira ka rešenju a, dokazati da je

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - a}{(y_k - a)(x_k - a)} = \frac{f''(a)}{f'(a)} \text{ i } \lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - a}{(x_k - a)^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}\right)^2,$$

pretpostavljajući pritom da je funkcija f dvaput neprekidno – diferencijabilna u okolini korena $x = a$.

3.3. Izvesti kvadraturnu formulu

$$\int_0^1 f(x)\,dx \cong \sum_{k=0}^{n} \left(A_k f^{(k)}(0) + B_k f^{(k)}(1)\right),$$

čiji je algebarski stepen tačnosti pet. Korišćenjem dobijene formule približno izračunati

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$$

i naći odgovarajuću grešku aproksimacije.

3.4. Dat je sistem linearnih jednačina $A\vec{x} = \vec{b}$ i iterativni proces

$$(1) \qquad \vec{x}_{k+1} = (I + DA)\vec{x}_k - D\vec{b} \qquad (k = 0,1,\ldots),$$

gde je D neka nesingularna matrica.

1° Kakav uslov treba da ispunjavaju sopstvene vrednosti matrice DA, da bi proces (1) bio konvergentan za proizvoljni početni vektor $\vec{x}_o$,

2° Dokazati da proces (1) konvergira rešenju datog sistema, ako je zadovoljen uslov iz 1°.

3.5. Data je funkcija f, pomoću

$$f(x)=e^{-x^2/2}\int_0^x e^{t^2/2}dt.$$

Naći asimptotski razvoj ove funkcije i odrediti koliko članova ovog asimptotskog razvoja treba uzeti da bi se dobila maksimalna tačnost za x = 10.

OI (17. I 1974.)

4.1. Funkciju $x \to f(x) = \sqrt{1+x^2}$ na segmentu [0,1] aproksimirati funkcijom $x \to \phi(x) = ax + b$ primenom

1° srednje–kvadratne aproksimacije;
2° mini–max aproksimacije.

4.2. Odrediti $C_1, C_2, C_3$ tako da kvadraturna formula

$$\int_{-1}^{+1} p(x) f(x)\, dx \cong C_1 f(-1) + C_2 f(0) + C_3 f(1)$$

ima algebarski stepen tačnosti tri, uzimajući za težinsku funkciju

1° $p(x) = 1$; 2° $p(x) = (1-x^2)^{1/2}$; 3° $p(x) = (1-x^2)^{-1/2}$.

4.3. Odrediti funkciju h, tako da iterativni proces

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + h(x_k)\left(\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right)^2 \quad (k = 0,1,\ldots)$$

za nalaženje prostog korena jednačine f (x) = 0, ima red konvergencije tri, a zatim naći asimptotsku konstantu greške ovog procesa.

4.4. Odrediti kvadratnu matricu X trećeg reda koja zadovoljava jednačinu

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} X^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4.5. Data je diferencijalna jednačina $xy' = 2x-y$, sa početnim uslovom $y(1) = 2$.

1° Metodom sukcesivnih aproksimacija naći $y_k(x)$ ($k = 1,2,3$).

2° Eulerovim metodom naći $y(2)$, uzimajući za korak integracije $h = 1/2$.

OI (29 III 1974.)

5.1. Funkciju $x \to f(x) = \sin x$ na segmentu $[0, \pi/2]$ aproksimirati funkcijom $x \to \Phi(x) = ax + b$ srednje–kvadratnom aproksimacijom sa težinom

$1^o$ $p(x)=1$;  $2^o$ $p(x)=x$.

5.2. Jednačina $f(x)=0$ ima koren $x=a$, čiji je red višestrukosti $p$, i neka se za njegovo određivanje koristi iterativni proces

$$x_{k+1}=x_k-p\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (k=0,1,\ldots).$$

Odrediti red konvergencije i asimptotsku konstantu greške ovog procesa, pretpostavljajući da $f\in C^{p+1}[a-h,a+h]$ $(h>0)$.

5.3. Na rešavanje sistema linearnih jednačina $A\vec{x}=\vec{b}$, predstavljenog u obliku $\vec{x}=B\vec{x}+\vec{\beta}$, primenjen je metod proste iteracije

$$\vec{x}^{(k)}=B\vec{x}^{(k-1)}+\vec{\beta} \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Ako je $\|B\|<1$, dokazati

$1^o$ $\vec{x}^{(k)}=B^k\vec{x}^{(o)}+(I+B+\ldots+B^{k-1})\vec{\beta}$;

$2^o$ $\|\vec{x}-\vec{x}^{(k)}\|\le\|B\|^k\,\|\vec{x}^{(o)}\|+\dfrac{\|\vec{\beta}\|\cdot\|B\|^k}{1-\|B\|}$ ($\vec{x}$ – tačno rešenje sistema).

5.4. Za izračunavanje integrala

$$\int_a^b (x-a)(b-x)f(x)\,dx$$

izvesti Gaussovu kvadraturnu formulu algebarskog stepena tačnosti pet.

5.5. (1.5.)

**OI (23. IV 1974.)**

6.1. Neka je a pozitivan koren jednačine $e^x-ex-1=0$. Funkciju $x\to f(x)=e^x$ na segmentu $[o,a]$ aproksimirati pomoću algebarskog polinoma prvog stepena koristeći

$1^o$ mini-max aproksimaciju;
$2^o$ srednje-kvadratnu aproksimaciju.

6.2. Izvesti asimptotski razvoj za $f(x)=\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$.

6.3. Izvesti Gaussovu kvadraturnu formulu

$$\int_o^1\sqrt{x}\,f(x)\,dx=A_1f(x_1)+A_2f(x_2)+R_2(f).$$

6.4. (4.4.).

6.5. (1.4.)

OI (6. VI 1974.)

7.1. Funkciju $x \to f(x) = x^6$ na segmetnu $[0,2]$ aproksimirati kvadratnim trinomom
1° srednje–kvadratnom aproksimacijom,
2° postupkom ekonomizacije.

7.2. Izvesti kvadraturnu formulu oblika

$$\int_0^h f(x)\,dx \cong h\,(af_0 + bf_1) + h^2(cf_0' + df_1'),$$

gde su $f_0 = f(o)$ i $f_1 = f(h)$, a zatim proceniti grešku ove približnė formule i rezultat iskoristiti za poboljšanje tačnosti ekstrapolacijom prema granici.

7.3. (3.2.).

7.4. Odrediti red višekoračnih metoda

1° $y_{n+2} - y_n = 2hf_{n+1}$;

2° $y_{n+4} - y_n = \frac{4h}{3}(2f_{n+3} - f_{n+2} + 2f_{n+1})$,

a zatim ispitati koji je od ovih metoda konzistentan, koji je nula–stabilan, a koji konvergentan.

Takođe, odrediti konstante $a_0, a_1, a_2, a_3$ tako da metod

$$a_3\,y_{n+3} + a_2\,y_{n+2} + a_1\,y_{n+1} + a_0 y_n = hf_{n+2}$$

ima najveći mogući red i ispitati konvergenciju dobijenog metoda.

OI (7. IX 1974.)

8.1. Izvesti formulu za rešavanje diferencijalne jednačine $y' = f(x,y)$ u obliku

(1) $$y_{n+1} = ay_n + h\,(by_n' + cy_{n-1}') + h^2\,(dy_n'' + ey_{n-1}'')$$

i proceniti grešku. Koeficijente a,b,c,d,e odrediti iz uslova da je formula (1) tačna za $y = 1, x-x_n, (x-x_n)^2, (x-x_n)^3, (x-x_n)^4$.

8.2. Funkciju $x \to \sin x$ na segmentu $[0, \pi]$ aproksimirati kvadratnim trinomom
1° srednje–kvadratnom aproksimacijom;
2° mini–max aproksimacijom.

8.3. Dokazati da iterativni proces

$$x_{k+1} = x_k - cf(x_k) \qquad (k = 0,1,\ldots)$$

za određivanje prostog korena jednačine $f(x) = 0$, gde c može zavisiti od f i $x_k$, ima linearnu konvergenciju, izuzimajući slučaj $c = 1/f'(x_k)$.

8.4. (2.4.).

**OI (7. X 1974.)**

9.1. Pokazati kako bi se primenom metoda najmanjih kvadrata skup tačaka (1,60), (2,30), (3,20), (4,15) aproksimirao funkcijom $x \to y = a\,e^{bx}$.

9.2. (6.2.).

9.3. Odrediti parametre a,b,c,d tako da kvadraturna formula

$$\int_0^h y(x)\,dx = ay_0 + by_1 + cy_0'' + dy_1'' + R(y)$$

ima algebarski stepen tačnosti tri, pri čemu su $y_0 = y(0)$ i $y_1 = y(h)$, a zatim odrediti ostatak $R(y)$, pretpostavljajući da je funkcija y dovoljan broj puta neprekidno-diferencijabilna na $[0,h]$.

9.4. Data je diferencijalna jednačina $y'' + y + \epsilon y^3 = 0$, gde je $|\epsilon| \ll 1$. Metodom malog parametra odrediti ono partikularno rešenje $y_p(x)$, za koje je $y_p(0) = 1$ i $y_p'(0) = 0$.

**OI (23. XII 1974.)**

10.1. Izvesti Gaussovu kvadraturnu formulu oblika

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2) f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{3} A_k f(x_k) + R_3(f).$$

10.2. Funkciju $x \to f(x) = \arcsin x$ razviti po Čebiševljevim polinomima prve vrste $T_n(x)$.

10.3. Pokazati da funkcija $x \to \Phi(x) = x - \dfrac{2ff'}{2f'^2 - ff''}$ određuje iterativni proces $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ trećeg reda za nalaženje prostog korena jednačine $f(x) = 0$.

**OI (17. I 1975.)**

11.1. Neka je P polinom stepena n sa različitim nulama $x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Dokazati jednakost

$$P'(x) = \sum_{i=1}^{n} P'(x_i)\,L_i(x)^2,$$

gde je $L_i(x) = \dfrac{P(x)}{P'(x_i)(x - x_i)}$.

11.2. Funkciju $x \to f(x) = \cos x$ na segmentu $[0, \pi/2]$ aproksimirati funkcijom $x \to \Phi(x) = ax + b$ srednje–kvadratnom aproksimacijom.

11.3. Dat je sistem jednačina

$$\exp(x^2 + y^2) = 3,$$
$$x + y - \sin(3(x+y)) = 0.$$

Konstruisati Newtonov metod za rešavanje ovog sistema.

11.4. Za izračunavanje integrala

$$\int_0^2 \sqrt{x(2-x)}\, f(x)\, dx$$

izvesti Gaussovu kvadraturnu formulu algebarskog stepena tačnosti pet.

OI (26. V 1975.)

12.1. Funkciju $x \to f(x) = e^x$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ aproksimirati pomoću srednje–kvadratne aproksimacije linearnom funkcijom $x \to \Phi(x) = ax + b$.

12.2. Za izračunavanje integrala

$$\int_{-1}^{1} (1 + x) f(x)\, dx$$

izvesti Gaussovu kvadraturnu formulu algebarskog stepena tačnosti tri i naći odgovarajući ostatak.

12.3. Izračunati vrednost determinante n-tog reda

$$D_n(a) = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & & 0 & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & a \end{vmatrix}$$

u zavisnosti od parametra a.

12.4. Pokazati da iterativna formula

$$x_{k+1} = x_k \frac{(n-1)x_k^n + (n+1)a}{(n+1)x_k^n + (n-1)a} \qquad (k = 0, 1, \dots),$$

koja se koristi za izračunavanje vrednosti $\sqrt[n]{a}$ $(a > 0)$, ima red konvergencije tri. Odrediti asimptotsku konstantu greške ovog procesa.

OI (25. IX 1975.)

13.1. Funkciju f, datu pomoću $f(x) = |x|$, na segmentu $[-1,1]$ aproksimirati srednje–kvadratnom aproksimacijom pomoću polinoma petog stepena i naći veličinu najbolje aproksimacije.

13.2. Izračunati integral

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

razlažući podintegralnu funkciju u stepeni red i koristeći sedam članova razvoja. Oceniti grešku.

13.3. (5.2.).

13.4. Gaussovim metodom eliminacije rešiti sistem jednačina:

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 &= 3,\\
2x_1 + 6x_2 - 7x_3 - 10x_4 &= -2,\\
-x_1 - x_2 + 5x_3 + 9x_4 &= 14,\\
-3x_1 - 5x_2 + 15x_4 &= -6.
\end{aligned}$$

OI (24. XI 1975.)

14.1. Funkciju $x \mapsto f(x) = \sin^2 x$ aproksimirati polinomom drugog stepena na segmentu $[-\pi/2, \pi/2]$ srednje–kvadratnom aproksimacijom.

14.2. Ispitati konvergenciju metoda proste iteracije primenjenog na sistem jednačina

$$x = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}y + \frac{1}{9}, \; y = 2x + \frac{1}{3}y - \frac{4}{3}.$$

14.3. Za iterativni proces $x_{k+1} = \sqrt{2+x_k}$ $(k = 0,1,\ldots)$, sa $x_0 = 0$, odrediti red konvergencije i asimptotsku konstantu greške.

14.4. (1.3.).

NAI (14. II 1976.)

15.1. Na osnovu veze između operatora $E$, $\Delta$, $\nabla$ izvesti prvu i drugu Newtonovu interpolacionu formulu.

15.2. Niz $x_1, x_2, \ldots$ formira se pomoću rekurentne formule

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\cos x_k \quad (k = 0,1,\ldots),\; x_0 = 1.$$

1° Ispitati konvergenciju ovog niza;

2° Kakva je geometrijska interpretacija dobijenog rezultata;

$3^o$ Na koji se način može ubrzati konvergencija datog niza.

15.3. Polinom $x \mapsto 1 - (x/5)^2 + (x/5)^4 - (x/5)^6$ $(x \in [-1,1])$ aproksimirati polinomom drugog stepena primenom postupka ekonomizacije i odrediti grešku aproksimacije.

15.4. Newton–Cotesove formule za numeričku integraciju. Izvesti posebno Simpsonovu formulu i odrediti grešku.

OI (13. III 1976.)

16.1. Naći Lagrangeov interpolacioni polinom $P_2$ za funkciju f, definisanu pomoću $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ uzimajući za interpolacione čvorove tačke $x_o = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$. Odrediti funkciju $\Phi$ u jednakosti

$$f(x) - P_2(x) = \Phi(\xi)\, x(x-1)(x-2) \quad (0 < \xi < 2),$$

kao i $\max\limits_{\xi \in [0,2]} |\Phi(\xi)|$.

16.2. Za funkciju $x \mapsto f(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2$ naći srednje–kvadratnu aproksimaciju oblika $x \mapsto \Phi(x) = ax+b$ sa težinom $p(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ na segmentu $[-1,1]$.

16.3. Primeniti metod Newton–Kantorovića na rešavanje sistema jednačina

$$x = x^2 + y^2, \quad y = x^2 - y^2.$$

Startujući sa $(x_o, y_o) = (0.8, 0.4)$, naći $(x_1, y_1)$.

16.4. Odrediti koeficijente $A_i$ $(i = 1,2,3,4)$ i grešku $R(f)$ u kvadraturnoj formuli

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = A_1 f(-1) + A_2 f(1) + A_3 f'(-1) + A_4 f'(1) + R(f),$$

tako da je ona tačna za polinome ne višeg stepena od trećeg.

OI (7. IV 1976.)

17.1. Neka je $I_k = \int_o^{\pi} \frac{\cos k\theta - \cos k\phi}{\cos\theta - \cos\phi}\, d\theta$ (k ceo broj).

Pokazati da $I_k$ zadovoljava diferencnu jednačinu

$$I_{k+2} - 2\cos\phi\, I_{k+1} + I_k = 0$$

i početne uslove $I_o = 0, I_1 = \pi$. Izračunati $I_k$.

17.2. U formuli za približnu integraciju

$$\int_o^1 f(x)\,dx = A_o f(0) + A_1 f(1) + A_2 f'(0) + A_2 f'(1)$$

odrediti težine $A_i (i = 0, 1,2,3)$ i oceniti grešku.

17.3. Izvršiti ekonomizaciju rada

$$\log(1+x) \cong x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \quad (0 < x < 1)$$

i oceniti grešku.

17.4. (5.2.).

**NAII (16. VI 1976.)**

18.1. Za linearni dvokoračni metod

$$(1) \qquad y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{12}(5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n)$$

naći red p i konstantu greške $C_{p+1}$. Ako je metod (1) konvergentan, naći intervale apsolutne i relativne stabilnosti.

18.2. Metodom Galerkina naći približno rešenje konturnog problema

$$y'' - 2xy' + 2y = x; \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 1.$$

Za bazisne funkcije uzeti $u_o = ax$, $u_1 = x^2 + bx$, $u_2 = x^3 + cx$, gde konstante a,b,c treba odrediti.

18.3. Data je parcijalna diferencijalna jednačina

$$u_t - u_{xx} = 0 \qquad (0 \leq x \leq 1 \ ; 0 \leq t \leq T),$$

sa uslovima $u(0,t) = u(1,t) = 0 \ (0 < t < T)$, $u(x,0) = 1 \ (0 \leq x \leq 1)$.

1° Naći rešenje ovog problema Fourierovim metodom;

2° Uzimajući da je $Nh = 1$ i $r = l/h^2$, naći diferencnu aproksimaciju datog problema u obliku

$$u_{n\,j+1} = Au_{n\,j} + Bu_{n-1\,j} + Cu_{n+1,\,j}, \qquad u_{o,\,j} = u_{N,\,j} = 0, \ u_{n,\,o} = 1$$

i predstaviti njeno rešenje u obliku konačnog Fourierovog reda;

3° Upoređivanjem dobijenih rezultata, dokazati da rešenje diferencne aproksimacije konvergira ka tačnom rešenju datog problema ako su ispunjeni spektralni uslovi za stabilnost.

**18.4. Diferencnim metodom sa istim korakom h po koordinatama, izračunati približno najmanju sopstvenu vrednost problema**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \lambda u = 0, \quad u|_\Gamma = 0,$$

**gde je $\Gamma$ kontura kvadrata $z = 1, z = -1, r = 4, r = 6$. Računati sa $h = 1$ i $h = 2/3$, a zatim primeniti Richardsonovu ekstrapolaciju.**

NAI (18. VI 1976.)

19.1. Dokazati da su operatori

$$\Delta(1+\frac{1}{2}\Delta)/(1+\Delta),\quad \nabla(1-\frac{1}{2}\nabla)/(1-\nabla),\qquad \mu\delta$$

ekvivalentni, razvijajući ih po stepenima od E.

Na osnovu prethodnog, naći razvoj operatora $\mu\delta$ po stepenima od $\Delta$ i po stepenima od $\nabla$.

19.2. Na rešavanje sistema linearnih jednačina

$$x=\frac{3}{4}x+y-\frac{7}{4},\quad y=-x+\frac{3}{4}y+\frac{3}{2}$$

primenjuju se metod proste iteracije i Gauss–Seidelov metod. Ispitati konvergenciju ovih procesa.

19.3. Odrediti koeficijente A,B,C i grešku R (f) u kvadratnoj formuli

$$(1)\qquad \int_0^{2h} x^a f(x)\,dx=(2h)^{a+1}(Af_0+B\Delta f_0+C\Delta^2 f_0)+R(f)\qquad (a>-1),$$

tako da je ona tačna za polinome najvišeg mogućeg stepena.

Po formuli (1) približno izračunati

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\qquad (p,q>0).$$

U specijalnom slučaju naći $B(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$.

19.4. Izvesti dovoljne uslove za konvergenciju iterativnog procesa

$$x_{k+1}=F(x_k)\qquad (k=0,1,\ldots).$$

Koja je od funkcija $F_i$ ($i=1,2,3$), datih pomoću

$$F_1(x)=e^{-cx},\ F_2(x)=\frac{cx+e^{-cx}}{c+1},\quad F_3(x)=\frac{cx^2+e^{-cx}}{cx+1},$$

pogodna za rešavanje jednačine $xe^{cx}=1$ ($c>0$)? Šta se može reći o redu konvergencije?

NAI (22. IX 1976.)

20.1. Operatore D i $D^2$ razviti po stepenima od $\delta$.

20.2. Ako je $\vec{x}$ rešenje jednačine $\vec{x} = B\vec{x} + \vec{\beta}$ $(B = B_1 + B_2)$ i ako je $\|B\| \leq q < 1$, dokazati nejednakost

$$\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\| \leq \frac{\|B_2\|}{1 - \|B\|} \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)}\| \quad (k \in N),$$

gde se niz $\{\vec{x}^{(k)}\}$ generiše pomoću Gauss–Seidelovog metoda

$$\vec{x}^{(k)} = B_1 \vec{x}^{(k)} + B_2 \vec{x}^{(k-1)} + \vec{\beta} \quad (k = 1,2,\ldots).$$

20.3. Odrediti koeficijente A,B,C i ostatak R(f) u formuli za numeričku integraciju

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = A\left(f(a) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) + Bf'(a) + Cf'(b) + R(f)$$

tako da je ona tačna za polinome najvišeg mogućeg stepena. Sukcesivnom zamenom $(a,b) = \left(\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\right)$ $(i = 1, \ldots, m)$ u (1), naći kompozitnu formulu za $\int_0^1 f(x)\,dx$ i oceniti grešku.

20.4. (6.1.).

**NAII (24. IX 1976.)**

21.1. (9.4.).

21.2. U zavisnsoti od parametra a ispitati nula–stabilnost i red linearnog dvokoračnog metoda

$$y_{n+3} + a(y_{n+2} - y_{n+1}) - y_n = \frac{1}{2}(3 + a)h(f_{n+2} + f_{n+1}).$$

21.3. Dat je Cauchyev problem

$$(1) \qquad \begin{aligned} &u_t - u_{xx} = 0 \quad (|x| < +\infty;\, 0 < t < T),\\ &u(x,0) = \psi(x) \quad (|x| < +\infty), \end{aligned}$$

gde je $\psi$ poznata funkcija. Uzimajući za čvorove tačke $(i-1,j)$, $(i,j)$, $(i+1,j)$, $(i,j+1)$ i $r = l/h^2$, naći diferencnu aproksimaciju

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}$$

za problem (1), a zatim u zavisnosti od parametra r odrediti red aproksimacije i ispitati spektralne uslove za stabilnost.

21.4. Rešiti integralnu jednačinu

$$f(x) = \sin x + \int_0^1 (1 - x \cos xt) f(t)\, dt$$

metodom degenerisanog jezgra. Koristiti najmanje tri člana Taylorovog razvoja.

NAI (2. X 1976.)

22.1. Odrediti red konvergencije i asimptotsku konstantu greške iterativnog procesa

$$x_{k+1} = x_k \frac{x_k^3 + 2a}{2x_k^3 + a} \qquad (k = 0,1,\ldots)$$

za nalaženje korena jednačine $x^3 - a = 0$ $(a \neq 0)$.

22.2. Razviti operator $h^{-1}J$ po stepenima od: $1^\circ$ E; $2^\circ$ $\Delta$; $3^\circ$ $\nabla$; $4^\circ$ $\delta$ i $5^\circ$ hD.

22.3. Funkciju $x \to f(x) = x^4$ aproksimirati polinomom drugog stepena na segmentu $[0,1]$: a) srednje kvadratnom aproksimacijom sa težinom $p(x) = x(1-x)$. b) mini max metodom i naći najveće odstupanje.

22.4. Odrediti $A_i$, $x_i$ $(i = 1,2,3)$ i $R(f)$ u Gauss–Hermiteovoj formuli

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2} f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{3} A_i f(x_i) + R(f).$$

Primenom formule (1) približno izračunati integral $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t} dt$ i oceniti grešku.

NAII (3. X 1976.)

23.1. Izvesti opštu formulu Runge–Kutta drugog reda oblika

$$(1) \qquad y_0 = Y,\ y_{n+1} = y_n + h(A(a)k_1 + B(a)k_2) \qquad (n = 0,1,\ldots,N-1),$$

gde su

$$k_1 = f(x_n, y_n) \text{ i } k_2 = f(x_n + ah, y_n + ahk_1) \qquad (0 < a < 1),$$

za rešavanje Cauchyevog problema $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = Y$.

Primenom formule (1), za slučaj $A(a) = B(a)$, odrediti $y(2)$ za problem $y' = \frac{y}{x} - y^2$, $y(1) = 1$, uzimajući $h = 0{,}5$.

23.2. Metodom Ritza, odrediti prve dve sopstvene vrednosti i odgovarajuće sopstvene funkcije graničnog problema

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = y(1) = 0$$

i uporediti ih sa tačnim vrednostima.

Za bazisne funkcije uzeti $v_k(x) = x^k(1-x)$ $(k = 1,2)$.

23.3. Koristeći metod mreža sa $h = l = \frac{\pi}{4}$, naći približno rešenje problema

$$u_{tt} - u_{xx} = 0;\ u(x,0) = x(\pi - x),\ u_t(x,0) = 0;\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

za $t \leqslant \pi$.

23.4. Konstruisati optimalni višekoračni metod četvrtog reda.

**NAII (4. XII 1976.)**

24.1. Odrediti red i konstantu greške dvokoračnog metoda

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = \frac{h^2}{12}(f_{n+2} + 10f_{n+1} + f_n).$$

Primenom ovog metoda, sa $h = 1/2$, rešiti konturni problem

$$y'' = 16(x^2 + y - 1), \quad y(-1) = y(1) = -\frac{1}{8}.$$

23.2. Neka je $\Gamma$ kontura osmougaonika, čija su temena redom tačke $(1/2, 0)$, $(1/2, 1)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(-1,2)$, $(-1,1)$, $(-1/2,1)$, $(-1/2,0)$. Metodom mreža, sa korakom $h = 1/2$, naći u oblasti int $\Gamma$ rešenje konturnog problema $u_{xx} + u_{yy} = -1$, $u_\Gamma = 0$.

24.3. Korišćenjem Simpsonove kvadraturne formule u tri tačke, približno rešiti integralnu jednačinu

$$f(x) + \int_0^1 xe^{xt} f(t)\,dt = e^x.$$

24.4. Fourierovim metodom razdvajanja promenljivih rešiti problem

$$u_{tt} - u_{xx} = 0;\ u(x,0) = x(\pi - x),\ u_t(x,0) = 0;\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$

**NAI (5. XII 1976.)**

25.1. (6.2.).

25.2. Ispitati konvergenciju Gauss–Seidelovog metoda primenjenog na sistem jednačina $\vec{x} = B\vec{x} + \vec{\beta}$, gde su

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 11/4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

**26.3. (10.3.).**

**25.4.** Koristeći se Gauss–Čebiševljevom kvadraturnom formulom, dokazati formulu

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{ax}}{(1-x^2)^{1/2}}\,dx = \frac{\pi}{3}\left(1 + 2\cosh\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) + R,$$

gde je R ostatak koji treba odrediti.

**25.5.** Postupkom ekonomizacije aproksimirati polinom P, definisan pomoću $P(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi x}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi x}{2}\right)^4$ $(x \in [-1,1])$, polinomom drugog stepena i odrediti grešku aproksimacije.

**NAII (11. II 1977.)**

**26.1.** Za dvokoračni metod $y_{n+2} - \frac{3}{2} y_{n+1} + \frac{1}{2} y_n = \frac{h}{2} f_{n+2}$ odrediti red p i konstantu greške $C_{p+1}$. Ako je metod konvergentan, naći intervale apsolutne i relativne stabilnosti. Proceniti grešku $|y(x_5) - y_5|$, gde je $y(x_n)$ tačno rešenje problema $y' = -3y$, $y(0) = 1$ u tački $x_n = nh$, a $y_n$ odgovarajuće numeričko rešenje dobijeno sa korakom $h = 0.1$. Startnu vrednost $y_1$ odrediti po Eulerovom metodu.

**26.2.** Metodom faktorizacije rešiti kontrolni problem

$$y'' = 16(x^2 + y - 1); \quad 8y(-1) + y'(-1) = 1, \quad 8y(1) - 2y'(1) = 3,$$

uzimajući $h = 1/3$.

**26.3. (18.3.).**

**26.4.** Korišćenjem kvadratne mreže sa korakom $h = 1/2$ odrediti približno rešenje problema

$$u_{xx} + u_{yy} - u = 1 + x^2, \quad u_\Gamma = 0,$$

gde je $\Gamma$ kontura petougaonika sa temenima u $(-1, -1), (1, -1), (1, 0), (0, 1/2), (-1, 0)$. Za aproksimaciju konturnih uslova koristiti metod L. Collatza.

**NAI (12. II 1977.)**

**27.1.** Izraziti operator $D^2$ po stepenima od $\delta$ i na osnovu toga izvesti petotačkastu formulu za drugi izvod funkcije f čije su vrednosti date u ekvidistantnim tačkama sa korakom h.

**27.2.** Dokazati da se na rešavanje sistema linerarnih jednačina

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \tfrac{1}{4}x_3 &= 1, \\ \tfrac{1}{2}x_1 + x_2 - \tfrac{1}{4}x_3 &= \tfrac{3}{2}, \qquad (1) \\ \tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + x_3 &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

može primeniti Gauss–Seidelov metod. Polazeći od $\vec{x}^{(o)} = [1 \;\; 1.5 \;\; -1.5]^T$ odrediti $\vec{x}^{(2)}$. Proceniti potreban broj iteracija k, tako da važi $\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\|_E \leq 10^{-3} \| \vec{x}^{(o)} - \vec{x}\|_E$, gde je $\vec{x}$ tačno rešenje sistema (1).

**27.3.** Dat je sistem jednačina

$$x^2 - y^2 + 1 = 0, \quad x + y - 5 = 0.$$

Uzimajući $x^{(o)} = y^{(o)} = 1$, odrediti $x^{(2)}$ i $y^{(2)}$ primenom: a) metoda Newton–Kantorovića; b) modifikovanog metoda Newton–Kantorovića.

**27.4.** Sa težinskom funkcijom $x \to p(x) = \sqrt{x(1-x)}$, na segmentu $[0,1]$, odrediti:

$1^o$ Prva tri člana niza ortogonalnih polinoma $\{Q_k\}$;

$2^o$ Najbolju srednjekvadratnu aproksimaciju u skupu polinoma ne višeg stepena od drugog za funkciju $x \to \sqrt{x}$;

$3^o$ Koeficijente $A_1, A_2, x_1, x_2$ i grešku u kvadratnoj formuli Gauss-ovog tipa

$$\int_o^1 p(x)\, f(x)\, dx = A_1\, f(x_1) + A_2\, f(x_2) + R_2(f).$$

**NAII (21. III 1977.)**

**28.1.** Za linearni dvokoračni metod

$$y_{n+2} - (1+a)\, y_{n+1} + a y_n = \frac{1}{2} h\, ((3-a) f_{n+1} - (1+a) f_n)$$

odrediti red p i konstantu greške $C_{p+1}$, a zatim ispitati nula stabilnost u zavisnosti od parametara a. Ako je $a = -5$ konstruisati influencnu funkciju $s \to G(s)$ i odrediti granicu za lokalnu grešku odsecanja kada se ovaj metod primeni sa korakom $h = 1/4$ na rešavanje problema

$$y' = x y^{1/2}, \quad y(o) = 1 \quad (0 \leq x \leq 2).$$

Da li na granicu za lokalnu grešku odsecanje utiče nula nestabilnost?

**28.2.** Primenom metoda Runge Kutta četvrtog reda sa korakom h, odrediti niz $y_n$ za problem $y' = Ay$, $y(x_o) = y_o$, gde je A konstanta takva da je $|Ah| \leq 2$. Ako je $x \to y(x)$ tačno rešenje datog problema, dokazati formulu

$$|y(x_n) - y_n| \leq \begin{cases} |y_o| \dfrac{A^5 h^4}{120} (x_n - x_o)\, e^{Ah\,(x_n - x_o)} & (A \geq 0), \\[2ex] |y_o| \dfrac{|A|^5 h^4}{120} (x_n - x_o) & (A < 0) \end{cases}$$

**28.3.** (18.4.).

NAI (22. III 1977.)

29.1. (4.4.).

29.2. Operator $(1+E)^{1/2}$ razviti po stepenima od $\Delta$ i na osnovu toga izvesti Simpsonovu formulu za numeričku integraciju.

29.3. (16.3.).

29.4. Funkciju $x \to f(x) = \cos \pi x$ aproksimirati algebarskim polinomom drugog stepena na segmentu $[-1, 1]$ srednje–kvadratnom aproksimacijom sa težinom $p(x) = 1 - |x|$.

29.5. Izvesti potrebne i dovoljne uslove za konvergenciju Gauss–Seidelovog metoda.

NAI (24. IV 1977.)

30.1. Neka jednačina $f(x) = 0$ ima koren $x = a$ višestrukosti $p$ i neka se za njegovo određivanje koristi iterativni proces

$$x_{k+1} = x_k - q\,\frac{f(x_k)}{f'(x_k) - g(x_k)} \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

gde je uvedena oznaka $g(x) = f(x)\, f''(x)/f'(x)$. Pri proizvoljnom $p$, odrediti red konvergencije ovog procesa za $q = 1$. Šta je sa redom konvergencije kada je $p = 1$ i $q = 1/2$.

30.2. Operator $\Delta$ razviti po stepenima od $\delta$, zaključno sa članom koji sadrži $\delta^7$.

30.3. (1.3.).

30.4. Za funkciju $x \to f(x) = x^2(1-x^2)$, na segmentu $[-2, 2]$, naći algebarski aproksimacioni polinom drugog stepena korišćenjem:

$1^{\circ}$ Prvog Newtonovog interpolacionog polinoma sa interpolacionim tačkama $x_0 = -1/2$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 3/2$;

$2^{\circ}$ Srednje–kvadratne aproksimacije sa težinom $p(x) = 2/\sqrt{4-x^2}$;

$3^{\circ}$ Ekonomizacije.

NAII (26. IV 1977.)

31.1. U zavisnosti od parametra $b$ odrediti red dvokoračnog metoda

$$y_{n+2} + (b-1)\, y_{n+1} - b y_n = \frac{1}{4} h\, [(b+3)\, f_{n+2} + (3b+1)\, f_n].$$

Za maksimalni red metoda ispitati njegovu nula stabilnost. Ilustrovati divergenciju metoda za $b = -1$ primenom na problem $y' = y$, $y(0) = 1$ i rešavajući dobijenu diferencnu jednačinu uzimajući za početne vrednosti $y_0 = 1$, $y_1 = 1$.

31.2. Ritzovim metodom sa trigonometrijskim bazisom $\{1, \cos x, \sin x\}$, rešiti konturni problem $y'' + y + 1 = 0$, $y(0) = y(\pi/2) = 0$.

31.3. (23.3.).

31.4. (21.4.).