С. Ј. ЛУРЈЕ

АРХИМЕД

ПРОСВЕТА - БЕОГРАД

ПРОСВЕТА

С. Ј. ЛУРЈЕ

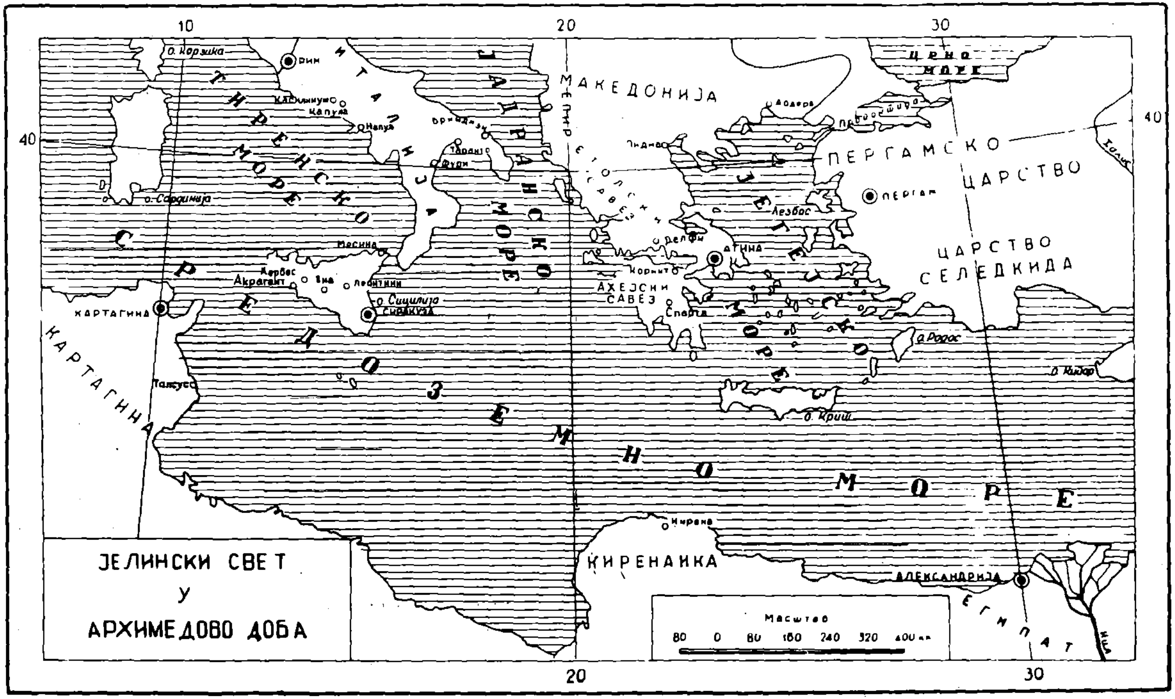
АРХИМЕД

ПРОСВЕТА
ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ СРБИЈЕ
БЕОГРАД 1952

Наслов оригинала
С. Я. ЛУРЬЕ
АРХИМЕД

Превео с руског
НИКОЛА ТОМИЧИЋ

Редактор
Б. ШЕВАРЛИЋ


ЈЕЛИНСКИ СВЕТ
У
АРХИМЕДОВО ДОБА
МАКЕДОНИЈА
ЕПИР
ПЕРГАМСКО ЦАРСТВО
ЦАРСТВО СЕЛЕДКИДА
ЦРНО МОРЕ
ИТАЛИЈА
ТИРЕНСКО МОРЕ
ЈАДРАНСКО МОРЕ
ЈЕГЕЈСКО МОРЕ
СРЕДОЗЕМНО МОРЕ
АХЕЈСКИ САВЕЗ
КАРТАГИНА
КИРЕНАИКА
ЕГИПАТ
Рим
Капуа
Напуљ
Тарент
Месина
Акрагант
о. Сицилија
Сиракуза
Картагина
о. Корзика
о. Сардинија
Атина
Делфи
Коринт
Спарта
Пергам
Лезбос
о. Родос
о. Крит
Кирена
Александрија
Нил
Масштаб
80 0 80 160 240 320 400 км
10
20
30
40

ГЛАВА ПРВА

ЈЕЛИНИСТИЧКА ГРЧКА У ДОБА ДЕТИЊСТВА И МЛАДОСТИ АРХИМЕДОВЕ

„Тиранија, та ужасна и гнусна беда, обавезна је свом пореклу само тиме што су људи престали да осећају потребу за закон и право који би били општи и једнаки за све. Неки људи, неспособни да здраво мисле, сматрају да су узроци појаве тирана други, и да се људи лишавају слободе без икакве кривице с њихове стране, само зато, што су подвргнути насиљу истакнутог тиранина. Међутим, то је грешка... Чим нестане из срца народног потребе за један закон и једно право за све, на место закона и права долази појединац. И заиста, како би другачије могла неограничена власт да доспе у руке појединаца? Такав човек, који би хтео да уништи право и укине општи закон, који би наумио да одузме ова блага од народа, он сам од њих многих, морао би бити од гвожђа. Ако је он пак од крви и меса, и саграђен као и остали људи, он, разуме се, није у стању то да уради. Али ако је потреба за закон и право који би били једнаки за све и без тога нестала, онда такав човек може да узме неограничену власт. Стога неки људи не виде тиранију чак и онда када је она већ настала“.

Тако карактерише непознат нам по имену филозоф крајем V века стање које је настало у његово време и достигло потпуни развој у Архимедово доба, у III в. до н. е. Уместо мноштва потпуно самосталних градских општина са демократским уређењем, басен Средоземног Мора се услед економских услова ујединио у неколико великих држава од којих је сваком управљао неограничени монарх; овом су се монарху обично већ за живота указивале божанске почасти.

Такве државе биле су Египат са главним градом Александријом, где су владали Птолемеји, који су себе сматрали за наследнике античких египатских „божанствених" фараона; Сирија са главним градовима Антиохијом и Селеукијом где су владали Селеукиди; Македонија, где су владали Антигониди. Таква једна монархиска држава али мање размере била је држава у Источној Сицилији — Сиракуза, где се родио Архимед.

Сачувале су се у оно време и пређашње државе-градови са њиховим демократским апаратом, нарочито на копну Грчке; али разуме се, сачувати на неко дуже време стварну независност налазећи се у суседству са таквим колосима као што су Египат, Сирија и Македонија, било је немогуће. Како саопштава Плутарх, сва богатства спартанске државе и њених грађана скупа, била су много мања од имања једног дворанина сириског цара...

Не треба мислити да су сви монарси тог времена били окорели злочинци и бесавесни ниткови. Истина, неограничена власт их је кварила, али ипак, неки од њих су се можда искрено заносили културом класичног доба. За остале је овај „занос" био само модна фразеологија којом су облачили своја стремљења да олакшају ширење свог политичког и економског утицаја. Тако, декрете о установљењу пређашње слободе и независности Грчке издају македонски владар Полисперхонт, македонски цареви Антигон и Деметрије Полиоркет, а затим и египатски цареви Птолемеј I Сотер и Птолемеј II Филаделф. У одговор на то грађани грчких градова одају „ослободиоцима Јеладе" божанске почасти, пишу у њихову част химне и . . . дозвољавају им да држе у њиховим градовима гарнизоне и управитеље. Како примећује један од највећих историчара јелинизма, Вилкен, слобода и независност Јеладе постали су монета за поткусуривање у међусобној борби частољубивих монарха. Међутим то се није дешавало само зато што монарси нису давали реалан смисао својим декретима, већ и стога што се робовласничка демократија изживела: Грци, принуђени да се помире са економском потребом насталог прелома, изгубили су сваку потребу за слободу и политичку независност и нису умели више да се њима користе; у томе је филозоф кога смо горе цитирали био потпуно у праву.

Такво стање било је тек први корак на путу деградације грчког полиса. Тада још никоме није падало напамет да ће ускоро настати време када ће на чело Грчке стати још циничнија римска власт, када ће „јадне Грке" (graeculi) сматрати само као људе друге врсте, као природан објекат за експлоатацију од стране римских зеленаша, када ће становништво читавих грчких држава, потпуно лојално и покорно Риму, које с њим не води никакав рат, бити продавано у ропство због неплаћених обавезних дугова римским зеленашима или прексмерне порезе римским закупцима државних прихода. Никоме још није падало напамет да слобода и аутономија грчких градова могу добити такав изглед, да ће бити потребна нарочита дозвола римског императора да би се организовала подела хлеба становништву или организовала пожарна екипа у грчком граду. У епоси коју разматрамо грчке државе су се још лишавале само права да воде самосталну спољну политику; у унутрашњим муниципалним пословима били су још потпуно слободни, само ако нису вршили масовно ослобођење робова, поновну поделу земље, укидање дугова и друге мере које би претиле друштвеном поретку, т. ј. на првом месту сигурности послова крупних трговаца и зеленаша.

Ако је на тај начин од слободе и аутономије грчких градова класичног доба остала само сенка, јелинско друштво је, с друге стране, учинило велики корак напред у правцу космополитизма. У класичној епоси грађанин грчке државе односио се са нескривеним презиром према странцима који би на овај или онај начин доспели у грађанску средину, а тим више према онима који су се уселили у земљу као инострани насељеници — метеци, чак и ако су ови „странци" били такви исти Грци из другог града-државе, удаљеног једно десетак километара. Однос према „варварима", тј. не-Грцима, био је још презривији: за Грке су сматрали да су створени за слободни живот, „варваре" — са унапред одређеном судбином да робују. Таква учења проповедао је на пример Аристотел, који је дао своме васпитанику Александру Македонском савет, да се, налазећи се у Азији, понаша према Грцима као према млађим друговима (ἡγεμονικῶς), а према варварима као деспот према робовима (δεσποτικῶς). Тада дворски астроном египатских Птолемеја, близак Архимедов друг Ератостен, осуђује у једном од својих дела Аристотела због тих речи и хвали Александра што није применио савет свог учитеља: људе не треба делити на Грке и варваре, него на добре и подле, а добрих људи има доста и међу варварима. Тако на пример, по његовом мишљењу, Индуси и Бактријци одликују се високим моралним особинама, а Римљани и Картагињани имају изврсно државно уређење. Бесумње, дворски научник излаже у овим речима званично Птолемејево гледиште.

Истина, у држави Птолемеја ми налазимо официјелну поделу на „Македонце“, „Грке“, „Египћане“, али то су само преживели термини који карактеришу у основи поделу на сталеже: међу „Грцима“ и „Персијанцима“ налазимо немало Египћана и Јевреја. Богат човек који се облачи грчки и који усвоји грчки културни изглед, већ тиме постаје Грк. У том погледу врло је интересантан један александриски папирус који је дошао до нас, а у коме пише: „Египћани... треба да се иселе из Александрије... не треба спречавати оне Египћане који долазе да добију образовање, трговачким пословима и ради прегледа знаменитости града. Исељавању подлежу само Египћани који говоре египатски, који су одевени на египатски начин и држе египатске националне обичаје, „туђе културним људима“. Овај космополитизам одговарао је интересима јелинских владика: они су морали да управљају огромним монархијама насељеним људима најразличитије националности; за своје блиске људе и управитеље они су хтели да истичу најсигурније и њима најпреданије, а истовремено најспретније и најспособније. Свака „варварофобија“, свако национално изузимање и национално непријатељство само би сметало њиховој политици, везивало би им руке, јер би таква политика нарушавала нормални пословни живот јелинских градова

Сиракуза, у којој се родио Архимед, била је један од најкосмополитскијих градова Грчке. Сву источну половину острва Сицилије насељавали су Грци. Овде су се насеља Грка-Дорана мешала с насељем Грка-Јоњана. У класичној епохи нетрпељивост између Дорана и Јоњана била је врло оштра. Сад се појавио општегрчки језик, којне, књижевни језик целе Грчке, настао из античког. Истина, широке масе становништва и даље су говориле својим дијалектима, а дорски дијалекат, са његовим за грчке интелектуалце, чудним звучањем, ушао је у моду услед своје егзотичности и простонародности, „буколичности“; уосталом, и Архимед је писао на дорском дијалекту. Али у дорском дијалекту продрло је много јонских речи, оштра разлика између дијалеката је настала, и од пређашње нетрпељивости између Дорана и Јоњана није остало скоро ни трага. У младим Архимедовим годинама западни део Сицилије је припадао Картагињанима. На улицама Сиракузе могло се видети мноштво Картагињана; они су јако утицали на културу Сицилије. Већ је Аристотел, а за њим и Архимедов друг Ератостен, сматрао картагинско државно уређење за образац достојан подражавања. Организацију трговине у Картагинској држави и картагинску војну технику Сицилија је темељито изучавала и усвајала. Али нарочито усхићење изазивао је картагински систем организације крупног плантажног сеоског газдинства, јер је и у Сицилији такво газдинство било широко распрострањено. У Картагини је постојала теоретска литература по овом питању, врло популарна у Грчкој, (на пример Махонова дела), која је послужила као извор аналогим радовима сиракуског тиранина Хијерона. Колики је био велики утицај Картагине у ово време види се из тога, што у далеком Риму песник Плаут пише читаве чинове своје комедије „Феничанин" (Poenulus) на картагинском језику још једно време након смрти Архимедове; очигледно је међу Римљанима било доста људи који су разумели картагински. С друге стране, картагинска држава имала је сама по себи јаке космополитске црте: у картагинској војсци служили су Грци, Гали, Италици, Либијци и Нумиђани.

Нису била мање многобројна и утицајна у Сицилији ни италиска племена. Један од значајних градова источне Сицилије — Месина — налазио се у доба Архимедова детињства у рукама италиског племена Мамертинаца; Брути, Лукани, Кампанци и Самнићани били су чести гости у Сиракузи. Већ у ово време је још значајнији био у Сицилији утицај моћног Рима. На бази трговачких веза читав низ латинских речи ушао је у грчки језик Сицилије — libra (фунта), uncia (унција), salinum (сланик), итд. Најзад у самој Сицилији живела су страна племена, Сикули и Сикани, који су се у то време већ прилично асимилирали са грчким становништвом.

Али крај свег тог космополитизма сицилиски Грци осећали су се пре свега Грцима и најближи су им били Грци са Балканског Полуострва. Грчка историја и књижевност VI—IV в. била је њихова историја и књижевност, Грци класичне епохе — њихови преци. На књижевности ове славне епохе, пре свега на Хомеру, васпитавали су се сицилиски Грци од раног детињства. То је био један од узрока што су Сиракужани, притешњени са двеју страна од Римљана и Картагињана, у раном детињству Архимедову позвали у помоћ из Грчке Пира, и поред његових аутократских навика. Они су били спремни да и Картагињане и Римљане и Сикуле сматрају себи равнима утолико, уколико су ови усвојили грчку културу и грчки лик: у противном су то били „варвари".

У таквој се средини, око 287 г. до н. е., родио у породици математичара и астронома Фидије син Архимед. Фидија очевидно није био богат човек, јер је његов рођак, касније тиранин Сиракузе Хијерон, био у оно време, на основи датих извора, сиромашан, обичан грађанин. Томе одговара и образовање које је добио Архимед. Ништа нам не говори о томе да се Архимед бавио филозофијом или лепом књижевношћу. Међутим, богати и виђени људи оног доба давали су својој деци свестрано образовање у чијем је средишту било учење филозофије и књижевности, а математику су учили само толико, колико је то било потребно ради филозофије. Већ Аристотел поводом тога каже: „Нема ничег недостојног за једног слободног човека у томе што ће учити неке слободне науке до извесне границе, али исувише усрдно њихово изучавање до потпуног савршенства... чини тело и људски разум неспособним за дела доброчинства". И заиста, Архимедов друг Ератостен бави се сем математике и филозофијом и изучавањем књижевности, и сам је писао стихове. Обрнуто, античке занатлије посвећивале су од раног детињства децу у тајне своје науке и училе их само томе послу, али зато до потпуног савршенства. Тако је баш био васпитан Архимед: њега су, изгледа, учили само математичким наукама. Уосталом, што се он интересовао само њима и савладао их до совршенства није био узрок само начин васпитања, него и његова генијалност и душевна препозиција.

Архимедов рођак Хијерон борио се у Пировим одредима који су стигли 280 г. са грчког копна у помоћ својим италиским и сицилиским земљама, притешњеним с једне стране Римом, с друге, Картагином. Хијерон се у овом рату тако одликовао да је после Пировог одласка натраг у Грчку успео да приграби апсолутну власт у Сиракузи. Појмљиво је да то није могло остати без утицаја на материјално стање његових блиских рођака. Можда је баш ова промена у судбини пружила Архимеду могућност да крене на дуже време у једно од средишта тадашње образованости ради завршетка свог образовања.

Међу таквим средиштима најважнија су била Атина и Александрија; мањи значај је имао Пергам у Малој Азији.

У области филозофије и лепе књижевности Атина, тај „универзитет Јеладе", у то време не само да није уступала новом средишту — Александрији, него га је и превазилазила. Али у области астрономије, метематике, филологије и медицине Атина је била принуђена да без речи уступи прво место Александрији. Није чудо што Архимеда, док је Ератостен одлазио на дуже време да учи у Атини, услед добијеног образовања и услед природних наклоности Атина није могла да привлачи, и он је одмах кренуо у Александрију.

Али он је стигао у Александрију добивши већ добру математичку основу у очевој кући. Каква је била та основа? По којим уџбеницима се спремао Архимед? На ово питање, изгледа, можемо одговорити са потпуном сигурношћу. Нешто пре Архимедова рођења изашао је курс геометрије који је одмах потиснуо и бацио у засенак све курсеве геометрије који су се појављивали до овог времена. Овај курс је био тада последња научна новина, и Архимед се касније стално позивао на њега у свим својим радовима. То су Еуклидови „Елементи". Ето зашто нам је ради разумевања и унутрашње грађе и оформљења Архимедових радова неопходно да се нешто детаљније задржимо на Еуклиду и његовим радовима.

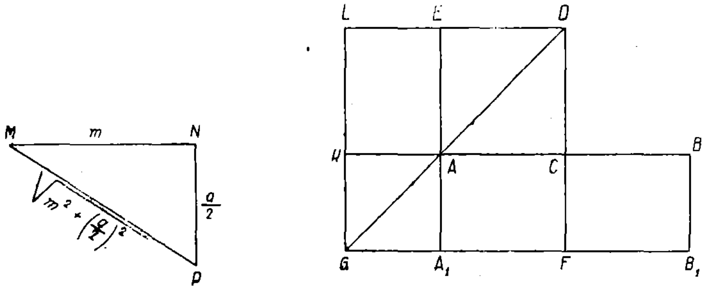
ГЛАВА ДРУГА

ЕУКЛИДОВИ „ЕЛЕМЕНТИ“ И „КОНИЧНИ ПРЕСЕЦИ“

Још давно пре појаве грчких држава наука античког Истока је савладала читав низ математичких грана. Египћани и Вавилонци умели су да решавају задатке из једначина првог и другог степена, из једнакости и сличности троуглова, из аритметичке и геометриске прогресије, задатке о одређивању површина троуглова и четвороуглова, запремине паралелопипеда и т. д. Они су знали тачно обрасце за одређивање збира квадрата наизменичних бројева почевши од 1, запремине цилиндра, конуса, пирамиде и чак зарубљене пирамиде, ма да нам до сада није јасно како су до ових образаца дошли. Употребљавали су они приближне обрасце, на пример за одређивање површине круга, а Вавилонци свакојаке таблице (таблице производа, реципрочних величина, квадрата, кубова, таблице решења за кубну једначину типа $x^3 + x^2 = n$ и т. д.). Али је карактеристично за ову староисточну математику било то, што су се тада пре свега интересовали да пронађу или одгонетну ма којим начином правилно решење и да пронађу начин за његово памћење и практичну примену. До нас нису стигли ни у једном старо-источном споменику докази ове или оне математичке поставке; ми имамо само готове рецепте за решавање задатака: „узми то и то“, „уради то и то“. Ови рецепти су прелазили са поколења на поколење; нова поколења научника налазила су рецепте за решавање нових задатака, али како су дошла до њих, остала је њихова професионална тајна.

Грци из прве половине V в. једва да су бар донекле проширили круг питања којима се бавила математика Истока. Али правац њихових интересовања био је потпуно други:

њих је пре свега узбуђивало питање одакле су узета ова, на изглед тако проста, и истовремено тако неочекивана решења, како доказати да су та решења тачна, како установити да ли су у свим случајевима она тачна, а ако нису, у којима нису. Елементи који су бесумње карактерисали већ најстарије математичке радове Грка били су: постулати-поставке које се, као непосредно очигледне, предлажу да се приме на веру (αἰτήματα), докази (ἀποδείξεις), решење задатака (λύσεις) и одређивање услова при којима дато решење има смисао и остаје тачно (διορισμοί). Сходно основном начину мишљења код Грка, водећа математичка дисциплина код њих је била геометрија. Изузимајући најобичније, „непосредно очигледне" аритметичке задатке, они су гледали да сва математичка питања реше геометриски: уместо прои-



Сл 1

звод говорили су „површина", уместо производ броја са истим бројем — „квадрат" (изрази који су се сачували до нашег доба). Графичка, геометриска интерпретација израза, као што је

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2,$$

не може да нас задиви јер је таква интерпретација обична у нашој школи. Интересантнији је антички поступак решавања квадратне једначине

$$x^2 + ax = m^2$$

Задатак се формулисао овако: датом отсечку AB (једнаком a) додати такав правоугаоник који би, имајући као сувишак квадрат (исте висине с њим), био једнак датом квадрату (са страном m).

Овај се задатак решава овако (сл. 1): отсечак AB (= a) дели се напола у тачки C. У тачки C повлачи се нормала

CD, једнака AC, и конструктивно додаје квадрат AEDC. Сем тога конструише се правоугли троугао, чија је једна катета $MN = m$, друга $NP = \frac{a}{2}$. Од тачке D одмери се према тачки C отсечак DF, једнак хипотенузи MP, из F повлачи се права FG, паралелна AB, до пресека са продужетком дијагонале AD у тачки G; ABB_1A_1 је тражени правоугаоник. Заиста, конструишемо квадрат KA и правоугаоник LA.

DF је као страна квадрата DFGL по конструкцији једнака

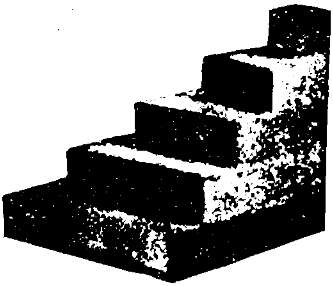
$$MP = \sqrt{m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2};$$

значи површина овог квадрата једнака је $m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$. CD је, као страна квадрата AEDC по конструкцији једнака $\frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$; површина квадрата AEDC једнака је $\left(\frac{a}{2}\right)^2$. Површина слике LGFCAE, такозваног г н о м о н а, очевидно је једнака квадрату DFGL мање квадрат $AEDC = m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = m^2$. Али правоугаоник KALE једнак је правоугаонику CBB_1F; стога је г н о м о н једнак правоугаонику KBB_1G.

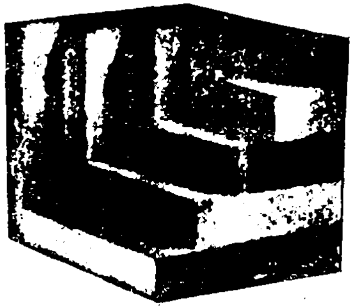
И тако је над отсечком $AB = a$ конструисан правоугаоник ABB_1A_1 који је, кад му се дода квадрат KGA_1A исте висине с њим, једнак по површини m^2, што је и требало доказати.

С друге стране грчки геометри су захтевали да све предложене конструкције буду остварљиве, а како су геометриски инструменти наслеђени са Истока били лењир (κανών) и шестар (διαβήτης), захтевало се да се они могу остварити помоћу шестара и лењира.

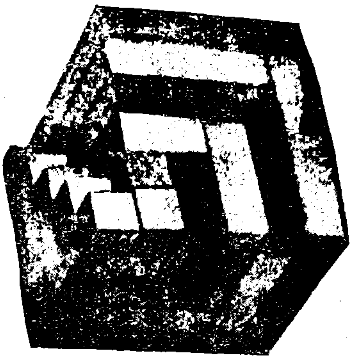
Што се тиче, уосталом, геометриских задатака, једно од најзначајнијих открића Грка V в. било је доследно примењивање метода геометриских места (τόποι). На пример, ако тражена тачка треба да лежи да датом растојању d од дате тачке A, онда ће њен τόπος' бити круг пречника d са средиштем у A. Ако се тражи да тачка лежи на растојању k од праве MN, онда ће њен τόπος' бити права, паралелна MN и на растојању k. Ако се захтева да тражена тачка удово-



a



b



c

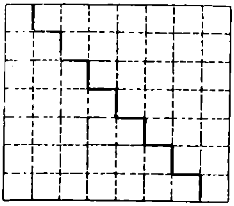
Геометриско сабирање утростученог реда

љава и једном и другом од постављених услова, онда она мора да лежи на пресеку обеју тачака.

У V в. писци математичких дела још нису гледали у читаоцу строгог критичара који их вреба, прати сваки њихов корак и који је спреман да се ухвати за сваку њихову грешку. Они су писали за ужи круг својих ученика и пријатеља, навикнутих на њихово излагање мисли. Њихов основни циљ је био да покажу како су дошли и како се уопште може доћи до овог или оног закључка, да развију код својих читалаца математичку интуицију и способност да проверавају нађена решења. За њих је било довољно то да њихови ученици схватају шта они желе да кажу. Тако, на пример, Талет, који је живео још у VI в. доказивао је, како каже предање, теорему, да пречник дели круг на два једнака дела, тако да је пречник линија која у свим деловима има један те исти правац (χώρησις) ка средишту. Када би пречник у некој тачки избио на горњу половину круга, онда би он у овој тачки имао прво правац навише, а затим наниже и према томе не би био једна права линија. Из истих разлога он не би могао да избије и у доњу половину круга; према томе он дели круг на два једнака дела. Такво расуђивање, разуме се, није ни јасно нити строго, али је оно што је писац хтео да каже, разумљиво.

На веће тешкоће наилазили су грчки геометри код доказивања образаца за површине круга и елипсе и за запремину пирамиде, купе и лопте. Овде је требало поћи од таквих постулата који, како примећује Архимед, „ни из далека нису могли свима да изгледају очигледни“, и то: да се свака линија састоји из „тачака“, тачније, праволиниских отсечака необично мале дужине; да стављајући праве линије безброј пута једну на другу добијамо равну површину, а стављајући равни безброј пута једну на другу да добијемо тело. На основи таквих постулата круг је многоугаоник са необично великим бројем страна, купа је пирамида са многоугаоником у основи, који има бесконачно много страна, лопта — полиедар са необично великим бројем роглјева итд. На основи истог постулата смело се тврди да су две пирамиде једнаких основа и висина једнаке. И доиста: ако се свака пирамида „састоји“ из необично великог броја равних многоугаоника који се смањују, и који су положени један на други, онда је сваки многоугаоник у једној од пирамида, једнак одговарајућем многоугаонику друге пирамиде, који се налази на истој висини; а ако је тако, онда је и „збир“ свих многоугаоника који се налазе у једној пирамиди једнак „збиру“ оних у другој, па према томе једнаке су и запремине пирамида. Није тешко разбити паралелопипед на три пирамиде које би имале једнаке основе и једнаке висине с паралелопипедом. Према томе, запремина пирамиде једнака је трећини запремине призме са једнаком основом и висином, а то значи да је ова запремина једнака трећини производа површине основе и висине. Под таквим претпоставкама исто је тако лако доказати да је површина круга, тј. многоугаоника с бесконачно много страна, једнака половини производа његовог обима и полупречника, а обим лопте, тј. полиедра с бесконачно много страна, — трећини производа његове површине и полупречника; за круг се сматрало да се састоји из необично узаних троуглова, а лопта из необично уских пирамида, са врховима у средишту круга или лопте, и са висинама једнаким полупречнику.

Елипсу су проучавали већ стари Египћани и нема сумње да су за њу знали већ и Грци у V в., али не као за конични пресек, већ као за „спљоштени круг“. То се види из четврте поставке Архимедова дела „О коноидама и сфероидама“, где се као основна особина елипсе још сматра да је она геометриско место тачака које деле ординате круга у одређеном односу. Са таквом дефиницијом није тешко одредити површину елипсе. Круг и елипса се „с а с т о ј е“ из ордината, тесно збијених међусобно; свака ордината круга односи се према односној ординати елипсе, као m : n; како се у пропорцијама збир првих чланова односи према збиру других као сваки поједини први члан према сваком поједином другом, то се „збир“ ординате елипсе, тј. њена површина, односи према „збиру ордината круга тј. према његовој површини, као n : m, или мала осовина елипсе према великој. Ето зашто, кад Архимед у предговору „Квадратуре параболе“ (в. стр. 95) каже да су површину елипсе (елиптичког сегмента) раније налазили „полазећи од једва дозвољених претпоставки“, можемо бити сигурни да он мисли баш на ово решење, код којег се елипса разматра као збир „свих њених ордината“.



Сл 2

Можемо претпоставити да су се истим методама решавали у то време и задаци сумирања неких спадајућих прогресија. Ми сада знамо да су већ стари Вавилонци знали да сумирају не само аритметичку и геометриску прогресију, него и ред $a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \ldots$ Као што ћу доказати на другом месту, сумирање редова $1 + 2 + 3 + \ldots$ и $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots$ вршило се у то време прегледним геометриским путем (сл. 2 и табл. 3). Ако узмемо сваки од квадрата претстављених на сл. 2 за 1, онда се ниже од криве линије налазе: у горњем реду 1 квадрат, у другом 2, у трећем 3 итд., пред нама је збир $1 + 2 + 3 \ldots + n$. Изнад криве линије налази се слика исте величине, а обе заједно претстављају правоугаоник са странама n и $n + 1$. Површина целог правоугаоника је $n(n + 1)$, а свака од степенастих слика $\frac{n(n+1)}{2}$. Толики је збир реда $1 + 2 + 3 \ldots + n$. На сличан начин је претстављена на датој таблици степенаста пирамида. Ако узмемо за 1 сваку коцку од којих је она састављена, онда је у горњем слоју 1 таква коцка, у другом слоју која има двапут већу ширину и дужину, 2×2 такве коцке, у трећем слоју који има трипут већу дужину и ширину, 3×3 такве коцке, а свега $1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2$ коцки. Ако саставимо три такве степенасте пирамиде на начин претстављен на табл. 3b и 3c, онда ћемо добити: а) паралелопипед са странама n, n и $n + 1$ коме је озго додато још b) степенасто тело које има висину 1, а основицу степенасту фигуру претстављену на сл. 2. Њена површина, као што видимо, једнака је $\frac{n(n+1)}{2}$. Тако је запремина целог овог тела,

$$n^2(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2},$$

а запремина сваке степенасте пирамиде, тј. збир реда $1^1 + 2^2 + 3^2 \ldots + n$, трипут је мањи, или је

$$\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

Из чувеног Зенонова парадокса (средина V в. до н. е.) може се закључити да су се већ његови противници бавили сумирањем реда $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots$ и бавили се питањем шта би се добило када би се то сумирање наставило до бесконачности. Еуклидово решење овог задатка за „ма како велики" број чланова, наводи нас на помисао да су његови претходници-атомисти долазили до закључака да бисмо при настављању овог реда до његовог краја, дошли до таквог резултата да је разлика између 1 и збира чланова овог реда једнака једној најмањој недељивој величини; а пошто се у свету чула једна најмања недељива величина при сабирању са коначним бројем може занемарити, може се у свету чула збир чланова овог реда сматрати да је једнак јединици. Исто се тако, на основи Архимедова сабирања реда $a+2a+3a+4a\ldots$ и $a^2+(2a)^2+(3a)^2\ldots$ и прелаза на границу у вези с њим, (в. стр. 131 и сл.) може, изгледа, доћи до закључка да су његови претходници — атомисти изучавали овај збир и у случају када је број чланова n неограничено велики; тада се у обрасцу $S_n = \frac{(na)^2 + na}{2}$ може занемарити члан првог степена упоредо са квадратом, па ћемо добити $S_n = \frac{(na)^2}{2}$; у обрасцу

$$S_n = \frac{2(na)^3 + 3(na)^2 + na}{6}$$

квадратни члан и члан првог степена могли би се на исти начин занемарити упоредо са кубним, и добити

$$S_n = \frac{(na)^3}{3},$$

тј. кад се степенасти троугао, услед необично ситних степена у свету чула, претвара у троугао, квадрат са страном na биће једнак двама троуглима са респективно једнаком основицом и висином, а када се степенаста пирамида услед необично ситних степена у свету чула претвори у пирамиду, онда ће коцка са страном na бити једнака трима пирамидама са респективно једнаком основицом и висином.

Не можемо се овде задржавати око спора који се био разбуктао у V в. по питању овог метода примитивног интеграљења. Указаћу само на то да је најдоследнији и најбоље замишљен математички систем који је био постављен на овом принципу изванредно малих честица, био систем Демокрита из Абдере, који је живео у другој половини V в., и његових следбеника — атомиста.

Не треба мешати атомизам као *ф и з и ч к о у ч е њ е*, са *м а т е м а т и ч к о м* теоријом атомиста. По мишљењу Демокритову атом претставља општу честицу масе најразличитијег облика, која у себи *н е м а п р а з н и н е*, већ је потпуно чврста; стога се атом не може расећи или поделити никаквим инструментом, али потенцијално, у мислима, он се разуме се може поделити. Атоми не морају бити баш необично мали. Између атома налазе се местимичне празнине. Ови физички атоми могу се (само у мислима, у претстављању, теориски) поделити на недељиве честице — *амере*. Ови амери имају минимални простор, немају облика, немају ни горњег, ни доњег, ни предњег, ни задњег дела итд.; амери се не могу делити чак ни у мислима. Ето, на тимамерима је изграђена математичка теорија атомиста.

Служећи се особеношћу метода недељивих величина, Демокрит је, како је касније указивао Архимед, нашао да је запремина пирамиде једнака трећини производа основице и висине. Можемо бити сигурни да је он знао већ горе наведену формулу за однос површине круга и његова обима (она је била позната његовом савременику Хипократу са Хиоса), и за однос запремине лопте према њеној површини (образац за површину лопте није му био још познат, њега је први открио Архимед).

Овај начин интеграљења разуме се није био довољно строг с математичког гледишта, и код недовољно пажљивог његова коришћења могло се доћи до грубих грешака. Узмимо такав пример: нека се троугао, сходно указаном принципу атомиста, састоји из тесно збијених правих, паралелних са једном од катета. Свака таква права пресећи ће другу катету и хипотенузу у по једној тачки. Ако се површина троугла састоји из таквих правих, онда ће се ова катета и хипотенуза састојати из тачака. Али је јасно да је једнак број таквих тачака и на катети и на хипотенузи, јер је њихов број једнак броју паралелних правих. Излази да је катета равна хипотенузи. Противници атомиста истицали су читав низ таквих приговора; многе од њих су атомисти врло убедљиво побијали; у другим случајевима то је било теже.

Атомистичко учење, по коме су основа читаве природе атоми — најмање недељиве честице материје које се крећу по закону неопходности, без икаквог мешања било каквих виших сила и без икаквог унапред одређеног циља, изгледало је идеолозима аграрне аристократије крајње безбожничко и анархиско. Почетком IV в. атинска демократија је претрпела пораз; настала је општа интелектуална реакција и аристократска идеологија је загосподарила. Бесконачни по броју и у принципу исте вредности међу собом, атоми, крећући се у простору и образујући свет по општим и за све једнаким законима, као да су давали идеолошку основу демократској држави с њеним многобројним грађанима, који су у принципу исте вредности међу собом, и који управљају државом на основи општих и за све једнаких закона. У епоси, у којој су на чело државе долазиле поједине снажне личности које су се ослањале на најбогатије и утицајне грађане и управљале државом по свом нахођењу, на такво се учење почело гледати као на штетно и антидржавно. Платон, који је створио основу за идеалистичку филозофију јелинистичке епохе, не само да је у својим делима водио жестоку борбу са материјализмом, него је скупљао где је само могао Демокритова дела и спаљивао их. Платонов ученик Аристотел написао је низ дела из области филозофије изучавања природе, чији је основни циљ оповргавање материјализма и пре свега Демокритовог атомизма. Резултат овог енергичног рада био је тај да су Демокритова дела била постала ретка и тешко се могла наћи. Широки кругови читалачке публике знали су о њима само из говора идеалистичких филозофа; њих су читали само у ужем кругу Демокритових следбеника и епикурејаца, блиских атомистима.

Нарочито је лака и убедљива била борба са атомистима у области математике, јер овде претпоставке атомиста заиста „нису имале у математици неопходну очевидност" и доводиле су понекад до погрешних закључака. Последња реч математике V в. било је откриће ирационалних, неизмерљивих величина, док с тачке гледишта атомистичке математике никакве неизмерљиве величине не могу да постоје, јер је недељивост општа мера за све величине. Разлози које су истицали математичари идеалистичког табора изгледали су непобитни, па је математика атомиста брзо изишла из моде и била пала у заборав.

Нова математика је израсла на пољу помамне, жестоке борбе с материјализмом; зато су начини аргументације у њој били потпуно други него у математици V в. Математичар овог времена не гледа више у читаоцу свог друга и ученика који му безусловно верује, кога он жели да уведе у најскровитије методе проналажења и доказа математичких решења. Не, математичар ове епохе гледа на читаоца као на опрезног противника, спремног да се ухвати за сваку грешку, за свако произвољно или лоше формулисано пишчево тврђење. Тај писац је најмање спреман да дели са читаоцем тајне свог дела — како је он дошао до ове или оне мисли; откуд је узео ово или оно решење; читалац то не треба да зна. Важно је сатерати читаоца путем ланца силогизама у ћошак и приморати га, хтео он то или не, да призна, да је решење које му се предлаже, ма откуд га писац узео, једино могућно и правилно.

Није чудо што су отада писци математичких књига црпли своју аргументацију из праксе кривично-судског поступка. Кривични злочинац, иступајући са одбраном пред судом, не може да рачуна на неко нарочито поверење слушалаца. Ако он просто исприча како се десила ствар, нико му неће поверовати; он мора детаљно да анализира пред публиком слику злочина какву износе тужиоци и да докаже да је она већ према одвијању догађаја немогућа, апсурдна. Примера за овакву врсту аргументације има колико год хоћете међу античким судским говорима. Тако поступа и антички математичар. Ја, каже он, тврдим да је величина А једнака В. Ви ми, разуме се, не верујете и сматрате да је А веће или мање од В. Допустимо за тренутак да је А веће од В (argumentum a contrario — доказ супротног). Допустивши овакву претпоставку, ми стварамо од ње низ логичких закључака и у резултату долазимо до немогућног, апсурдног закључка. На пример у пропорцији, у којој је леви однос већи од јединице, а десни мањи, у троуглу чија је катета већа од хипотенузе, итд. Сада ја допуштам да је А мање од В. Ова претпоставка такође доводи до апсурда. Ови апсурдни закључци су могли доћи само зато што је дата претпоставка нетачна. Значи, А не може бити већи од В ни мање од В, и тако остаје само један закључак — да је А једнако В, а то се и тражило. Такав начин аргументације назива се reductio ad absurdum (довођење до бесмислице).

У т и ц а ј а д в о к а т с к е п р а к с е и к р а с н о р е ч и в о с т и с о ф и с т а и м а о ј е в а ж н е п о з и т и в н е р е з у л т а т е: аргументација је постала строжија, основана на правилним и тачним, научно беспрекорним дефиницијама. Математика је престала да буде везана са одређеним филозофским, моралним или политичким системом: њени закључци постали су о п ш т е о б а в е з н и з а с в е љ у д е.

Ипак, начин reductio ad absurdum, тај начин доказа, услед којег постају излишне било какве „недовољно очевидне“ претпоставке, као што је претпоставка о постојању недељивих честица, и који доводи до непобитних закључака, има два битна недостатка.

Прво, будући добро оруђе ради проверавања и доказивања резултата унапред познатог или погођеног, он не ваља за проналажења нових, још непознатих решења.

Друго, овај метод пре збуњује читаоца него што развија његов ум. Читалац не зна одакле се створило изненада ово решење и одакле ће он узети такво решење у другим случајевима. Он не добија ни иоле јасну слику узајамне везе између појединих истина.

У многим својим деловима ова нова геометрија се у суштини мало у чему разликује од математике V в.: исте поставке, основане тобож на очевидности, исте теореме, исти резултати из истих теорема. Али свакојака израчунавања величина ових или оних линија, површина и тела под утицајем идеалистичке филозофије прелазе из геометрије у уџбенике примењене аритметике — логистике; геометрија сада учи само о односима разних величина, а не и о њиховом мерењу.

У вези с тим нарочити значај добија учење о пропорцијама. Пошто се не препоручује одређивање величине траженог отсечка, површине или запремине, мора се прибећи проналажењу врло сложених односа међу величинама, а то се постиже мењањем пропорција. Навешћемо овде најважније од ових промена, али уместо грчких, које даје Еуклид, даћемо овде, да би читаоцу било згодније, касније латинске називе.

1. Узајамна промена средњих чланова — permutando.

Ако се има

$$a : b = c : d,$$

онда се има и

$$a : c = b : d.$$

2. Обртање размера — convertendo.

Ако се има

$$a : b = c : d,$$

онда се има и

$$b : a = d : c.$$

3. Образовање збирова — componendo.

Ако се има

$$a : b = c : d,$$

онда се има и

$$(a + b) : b = (c + d) : d.$$

4. Образовање разлика — dividendo.

Ако се има

$$a : b = c : d,$$

онда се има и

$$(a - b) : b = (c - d) : d.$$

5. Ut omnes ad omnes, ita unus ad unum (као што се имају сви чланови према свима, исто тако се има и један према једноме).

Ако се има

$$a : b = c : d = e : f = g : h,$$

онда се има и

$$a : b = (a + c + e + g) : (b + d + f + h).$$

Оштро размимоилажење између старе и нове математике почињало је тамо где је стара математика била принуђена да постулише недељиве, веома мале елементе. Ту и прибегава нова математика ка reductio ad absurdum.

Притом математичари IV и III в. нису усвојили за основу свог расуђивања Демокритово растављање на елементе, од којих је сваки веома мали, него посебну методу коју је применио Демокритов следбеник софиста Антифонт, који је живео у другој половини V в. Средњевековни јеврејски научник XV в. Алфонсо, у својој књизи „О квадратури круга“,[1]) саопштава нам следеће о овој методи:

„Антифонт је уписивао у круг праволиниску слику (има се у виду правилан многоугаоник. — С. Л.), после чега је делио сваки лук који је налегао на сваку страну слике, напола. Затим је везивао крајеве сваког лука тетивом. Он је настављао тако са сваким луком док није дошао до закључка да је путем дељења дошао до оних честица

[1]) Ово сам први пут објавио у својој књизи „Теорија бесконачно малих величина код старих атомиста“ L., 1935, стр. 150.

из којих се састоји како права, тако и обим круга. Међутим, као што рече Аристотел, то долази у супротност са основним поставкама геометрије јер, сходно овим основним поставкама, линија се не састоји из тачака, и величине могу бити дељиве до бесконачности".

И тако је Антифонт наивно сматрао, као и касније, крајем XII в., Скалигер (в. стр. 219), да се путем поступног удвајања броја страна уписаног многоугла може на крају доћи до обима круга и тачно одредити дужина обима и површина круга. Разуме се, овде се није радило о проналажењу, приближног обима круга путем цртања многоугла који би се на око поклопио са обимом. Антифонт говори о томе, да удвајање треба да траје дотле док истраживач не дође "до оних минималних честица од којих се састоји како права тако и обим", и њему није могло бити нејасно да су ове честице лежале далеко иза границе до које допире око.

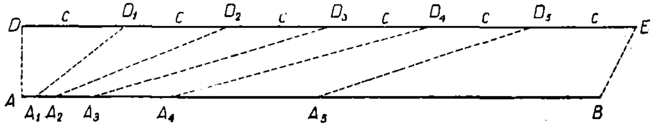
Какав је критеријум требало да има истраживач да би тврдио како је после низа поступних израчунавања већ дошао до ових честица? Мени се чини као највероватније да је он удвајао број страна не само уписаног, него и описаног многоугла и настављао са овом операцијом дотле, док не би нашао да су обим (или површине) истоимених уписаних и описаних многоуглова међусобно једнаки[1]; ово је требало да служи као доказ да је истраживач дошао до таквог многоугла, чија је свака страна честица круга и која се према томе потпуно поклапа с кругом. Ако је ова моја претпоставка тачна, онда новина коју је касније унео Архимед у „метод исцрпљивања", која се састојала у томе да се за криву узима не само доња него и горња граница, састављене из отсечака праве линије, није била његов изум, него развој наивног софистичког начина Антифонтова.

Међутим, овај поступак тражења горње и доње границе изгледа да до Архимеда није имао примене. Од Антифонта је било позајмљено само поступно удвајање броја страна уписаног многоугла с циљем, како је он говорио, да се „исцрпе" или „истроши" (δαπανᾶν) читава површина у кругу. Уместо сабирања елемената од којих је сваки био мањи ма од ког коначног броја (како је поступао Демокрит), сада,

[1] Због недовољне тачности античког рачунања ово поклапање могло је настати сразмерно брзо.

после Антифонта, сабирају елементе од којих је први — коначна никако мала величина, а следећи се смањује по одређеном принципу, док на крају не постану мањи ма од ког коначног броја (обично је сваки следећи елеменат мањи од претходног двапут или „више него двапут"). Даље доказују путем reductio ad absurdum да површина, ограничена кривом, није ни већа ни мања од одређене величине, при чему ради доказа другог дела овакве теореме не прибегавају описаном многоуглу, већ једноставно обрћу пропорцију добивену код доказа другог дела.

Примера ради размотримо укратко доказ да се површине кругова односе као квадрати њихових пречника, који се налази у Еуклидовим „Елементима" (књ. XII, ст. 2). За



Сл. 3

основу свог доказа Еуклид узима ст. 1, књ. X: „Ако су дате две неједнаке величине и ако ми од веће одузмемо половину или више од половине, и од добивеног резултата одузмемо половину или више од половине, и наставимо тај процес даље, онда ћемо у остатку добити величину која је мања од дате мање величине". Ма да доказ ове помоћне теореме и није доказ ad absurdum у правом смислу речи, ипак претставља типично обилажење атомистичког доказа, када је коначан резултат унапред познат. Писац полази од основне аксиоме ове нове геометрије: *свака величина кад се слаже сама са собом, раније или касније постаће већа ма од које дате коначне величине*. Нека је дата (сл. 3) величина AB: треба доказати да ће се, ако се од ње одузме половина или више, од тог остатка половина или више итд. на крају добити остатак, мањи ма од које дате величине c. Ради доказа ове теореме прибегава се овом обилазном начину: отсечак c додаје се сам себи дотле, док се добије отсечак DE, већи од AB. Сада одузмимо од AB половину или више, од остатка половину или више итд. и наставимо овај процес толико пута, колико се c садржи у E. Није тешко увидети да ће, кадгод одузимамо такве делове од AB, а од DE сваки пут одузимамо по c, од AB остати мањи отсечак него од DE, тако да ће, кад од DE остане c, од AB остати мањи отсечак од c.

На основу ове леме Еуклид доказује (сл. 4) основну теорему.

Нека су дата два круга ABCD и EZHG. Треба доказати да је

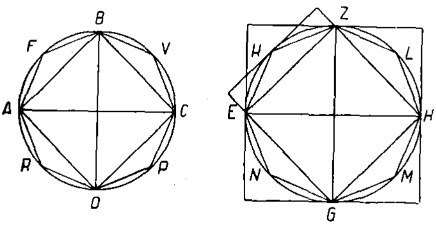
$$ABCD : EZHG = BD^2 : ZG^2.$$

Нека то није тачно, тада се има

$$BD^2 : ZG^2 = ABCD : S,$$

где је S или мање или веће од EZHG.

Претпоставимо у почетку да је S мање од EZHG. Упишимо у круг EZHG квадрат. Његова површина је једнака



Сл. 4

вршине правоугаоника,
једнака је половини по-
Површина овог троугла
угао са врхом на кругу.
квадрата равностран тро-
сваком страном уписаног
га. Конструишимо над
половине површине кру-
па је дакле она већа од
саног око круга EZHG,
половини квадрата опи-
конструисаног на истој страни квадрата, као што је показано на слици. Дакле, његова површина је већа од половине површине кружног отсечка. А површина четири таква троугла, конструисана на свима странама квадрата већа је од половине читаве разлике између површине круга и површине описаног квадрата. Ако над сваком страном тако насталог уписаног многоугла опет конструишемо на исти начин троугао, поново ће бити додата површина која је већа од половине остале разлике између површине круга и површине уписаног многоугла. На основи поменутог ст. 1 књ. X, овај процес може да се настави дотле, док разлика између уписаног многоугла и обима не постање мања од разлике између S и кружне линије. Тада ће се показати да је овај уписани многоугао O_2 већи од S. Упишимо сада у круг ABCD много-

угао O_1 сличан многоуглу O_2. Површине сличних многоуглова односе се као квадрати пречника кругова описаних око њих, па се стога има

$$O_1 : O_2 = BD^2 : ZG^2. \tag{1}$$

Али ми смо претпоставили да се има

$$\text{круг } ABCD : S = BD^2 : ZG^2, \tag{2}$$

отуд

$$O_1 : O_2 = \text{кр. } ABCD : S, \tag{3}$$

или, мењајући узајамно места средњим члановима пропорције (permutando),

$$O_1 : ABCD = O_2 : S \tag{4}$$

Али је површина многоугла O_1 мања од површине описаног круга ABCD, а O_2, као што смо малочас показали, веће је од S. И тако је именитељ левог односа < 1, а десног $\wedge 1$, што је апсурд. Значи S не може бити, као што смо претпоставили, мање од EZHG.

Сада претпоставимо да је S веће од EZHG.

Тада, обрћући (convertendo) размеру (2), добијамо

$$S : ABCD = ZG^2 : BD^2. \tag{5}$$

Нека се има

$$S : ABCD = EZHG : x, \tag{6}$$

или, permutando,

$$S : EZHG = ABCD : x.$$

Уколико је сходно претпоставци $S > EZHG$, очигледно је $x < ABCD$.

Али из (5) и (6) се добија однос

$$ZG^2 : BD^2 = EZHG : x.$$

Отуд, сходно (1),

$$O_2 : O_1 = EZHG : x,$$

permutando,

$$O_2 : EZHG = O_1 : x.$$

На основи горњег доказа, површина се многоугла, при сталном удвајању броја страна, може направити већом ма од ког x (ако је $x < ABCD$, а то је доказано). И тако је $O_2 < EZHG$, а $O_1 > x$, што је такође немогуће.

Значи S није ни веће ни мање од EZHG, па према томе оно је једнако EZHG, што је и требало доказати.

Код таквог доказивања морају се у дату криву уписивати многоугли, повећавајући број њихових страна дотле, док површина између многоуглова и криве не постане најмања, док се она не „исцрпи“. Стога је таква метода и добила назив метода исцрпљивања. Њеним оснивачем сматрају математичара платонске школе Еудокса.

Лако се можемо уверити у велика општа преимућства ове нове методе. Овде се први пут у основу инфинитезималног рачуна уводи појам континуума место збира „недељивих“ величина недоступних чулима, тј. место по суштини метафизичке претпоставке, истраживач оперише са низом коначних величина које се непрекидно смањују по одређеном закону. Излишно је говорити какав је огроман утицај извршила ова нова метода на садашњу математику. Али адвокатски начин излагања и скривање од читаоца еуристичке процедуре која доводи до решења, имали су као резултат то, да је само искључиво даровит читалац могао да разуме да се ради о променљивој величини која се све више и више приближава граници. Појам „границе“ античка математика уопште није уводила и празнина између последњег од узетих коначних чланова реда и границе остајала је, захваљујући методи reductio ad absurdum, ничим непопуњена. Новом методом геометрија није обогаћена ниједном новом истином; ради тачног доказа сваке поставке, доказане путем не-строге математике атомиста, изнова се понављала дуга и досадна процедура исцрпљивања.

Сав овај велики рад у области геометрије, који су извршили математичари идеалистичких филозофских школа у IV в. и који се истовремено заснивао на математици атомиста V в., био је сажет и систематски изложен у Еуклидовим „Елементима“ (Στοιχεῖα). Еуклидов рад садржао је мало оригиналног; у теориско-методолошкој области он се заснивао углавном на Еудоксовим истраживањима. Али се његова књига одликовала изузетном строгошћу и подроб-

Архимед. Једна од античких биста за коју се сматра да претставља Архимеда

ношћу; овде је било сакупљено све што је било битно у радовима Еуклидових претходника. Ето зашто је Еуклидова књига брзо истиснула све геометриске „Елементе“, који су пре ње важили; када се, на пример, Архимед позива на „Елементе“ не помињући писца, он увек мисли на Еуклида. Као што су, када је Хомер постао песник par excellence и када су говорили просто „песник“ (ὁ ποιητής), увек имали у виду Хомера, тако су и изразом ὁ στοιχειωτής, „творац Елемената“, почели означавати Еуклида. У Еуклидовој књизи налазили су се, ако хоћете, и филозофски правац и уметничка потпуност: њен крајњи циљ и резултат било је истраживање правилних полиедара који су играли тако видну улогу у Платоновом учењу о идејама,изложеном у „Тимеји“.

Али је постојао низ проблема чије решење није захтевало ради свог доказивања, ни недопуштене претпоставке о недељивим величинама, ни метод исцрпљивања; међутим, ови проблеми нису могли бити решени помоћу шестара и лењира. Заиста, помоћу шестара и лењира могу бити решени само задаци који се своде на једначине првог и другог степена, а током V в. грчка геометрија поставила је већ низ задатака који су се сводили на једначине трећег и вишег степена.

Такви задаци били су — да не говоримо о квадратури круга која се не може решити ни помоћу једначина виших степена са коначним бројем чланова — удвајање коцака („делски проблем“) и трисекција угла, најмодернија питања у геометрији друге половине V в. Сви покушаји да се реше сви задаци помоћу примењиваних до тада такозваних равних (ἐπίπεδοι) геометриских места (кругова и правих) нису доводили никаквом резултату. Ради решења ових задатака креће се двоструким путем: с једне стране, путем проналаска геометриских инструмената сложенијих од шестара, с друге стране — у вези развоја стереометрије — путем п р о с т о р н и х (στερεοί) геометриских места, тј. место пресека линија (правих са кружним) тражи се пресек п о в р ш и н а (равних са цилиндричним, конусним и лоптастим) и на тај начин се долази и до проналаска пресечених к р и в и х д р у г о г р е д а.

Справе за цртање сложенијих кривих употребљавају се и у наше време; сетимо се само прибора за цртање елипсе, који се помиње у свим основним уџбеницима, заснованог на њеној особини да је збир жижних растојања сваке њене тачке једнак сталној величини (великој осовини).

Антички геометри увели су читав низ таквих прибора. Ја ћу се овде задржати само на једном прибору који је изумео Архимедов друг Ератостен, за изналажење двеју средњих пропорционала (μεσότητες) између две дате величине, јер се на овај задатак своди већ поменути задатак удвајања коцки. Заиста, задатак удвајања коцки своди се на геометриско решавање једначине

$$\frac{x^3}{a^3}=\frac{2}{1},$$

а то је посебан случај једначине

$$\frac{x^3}{a^3}=\frac{m}{n}$$

Ако претпоставимо да се има

$$\frac{m}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{n}, \tag{1}$$

тј. ако тражимо две средње пропорционале y и z између m и n, онда ћемо имати

$$\frac{m}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{n}=\frac{m}{n}, \tag{2}$$

али на основи (1) је

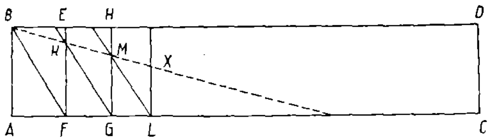
$$\frac{m}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{n}=\frac{m^3}{y^3}=\frac{m}{n}=\frac{x^3}{a^3}, \tag{3}$$

отуда је

$$\frac{m}{y}=\frac{x}{a},$$

што се и тражило.

Ератостен је саградио (сл. 5) прибор „месолаб" (тј. „ловац средњих величина"), који се састојао из три равна правоугла троугла ма којих размера; један од њих је био учвршћен, а остала два су се кретала десно и лево по паралелним каналима BD и AC (по горњем се кретала катета, по доњем њено супротно теме). Нанесимо на вертикалној ка-



Сл 5

тети, једног од покретних троугла оздо отсечак LX тако, да се има $AB : LX = m : n$. Сада ћемо кретати оба покретна троугла дотле, док се тачке K и M пресека катете једног троугла са хипотенузом наредног, не нађу на једној правој са B и X. Тада се из сличности $\triangle$ BFA и $\triangle$ KFG добија

$$\frac{AB}{KF} = \frac{AF}{FG} = \frac{BK}{KM}.$$

Али из сличности $\triangle$ BFK и $\triangle$ KMG следи

$$\frac{BK}{KM} = \frac{KF}{MG},$$

одакле се добија

$$\frac{AB}{KF} = \frac{KF}{MG}.$$

Исто тако на основи сличности $\triangle$ KFG и $\triangle$ MGL излази

$$\frac{KF}{GM} = \frac{FG}{GL} \quad \frac{KM}{MX}.$$

Али из сличности $\triangle$ KMG и $\triangle$ MXL је

$$\frac{KM}{MX} = \frac{MG}{XL},$$

одакле следи

$$\frac{AB}{KF} = \frac{KF}{MG} = \frac{MG}{XL},$$

па према томе, на основи горе доказаног, излази

$$\frac{MG^3}{XL^3} = \frac{AB}{XL} = \frac{m}{n},$$

што је и требало доказати.

Кад је страна XL једнака ивици дате коцке, а AB једнако 2 XL, отсечак MG биће очевидно страна удвојене коцке.

До Ератостена примењивао се једноставнији инструменат. Задатак се сводио на конструкцију отсечка дате дужине који лежи између линија (правих или кружних), при чему његов наставак мора да пролази кроз дату тачку. Ради конструкције обележавали су на лењиру две тачке чије је растојање било једнако датоме; затим су полагали једну тачку на прву од двеју линија, другу тачку на другу линију и кретали лењир (тако да обе тачке остају на овим линијама) дотле, док лењир не прође кроз дату тачку. Тада се задатак удвајања коцке сводио без тешкоће на конструкцију отсечка дате дужине који лежи између две узајамно нормалне праве, а чији наставак пролази кроз дату тачку. Овај начин зове се у грчкој науци νεῦσις („сагибање"); ми ћемо наићи на њега код Архимеда.

Међутим, карактеристично је за грчки геније, да се Грци нису зауставили на таквом начину практичног решавања тешких математичких питања, него су тежили да их уопште и истражују, сводећи их на геометриска места и њихов пресек. При томе се морало поћи другим путем, путем изучавања п р о с т о р н и х (в. стр. 27) г е о м е т р и с к и х м е с т а.

Подаци о Архити, питагорејском математичару са почетка IV в. показују нам[1] да су се првобитно ови задаци заиста решавали путем конструисања равних, цилиндра и конуса који се међу собом секу, и томе слично. Међутим, кад тих конструисања Архитови следбеници — Менехмо и Еудокс — уверили су се да се при пресеку ових површина

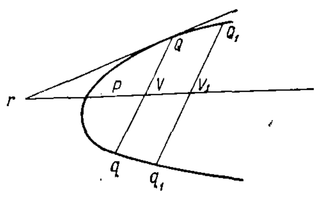
---

[1]) Архита је решавао задатак удвајања коцке (налажење двеју средњих пропорционала), путем тражења тачке пресека конуса, цилиндра и тора (тј. тела које постаје обртањем круга око тангенте на његовој периферији).

добија неколико одређених типова кривих, и да се стога, ако се изуче особине ових кривих, гломазан поступак конструисања тела може заменити конструисањем ових кривих према одређеним правилима. Уколико су ове криве настале међусобним пресеком тела оне су добиле назив п р о с т о р н и х (στερεοί) геометриских места.

Све различите криве добијене на тај начин могу се добити кад се три типа конуса пресеку равном, нормалном према његовој производиљи. Криву која се добија као пресек тупоуглог конуса (т. ј. конуса са тупим углом у врху при осовинском пресеку), назвали су „пресек тупоуглог конуса"; слично томе и друге две криве су биле назване „пресек правоуглог конуса" и „пресек оштроуглог конуса". Тако назива ове пресеке и Архимед. Већ после Архимеда (вероватно први пут у „Коничним пресецима" Аполонија Пергамског, који су дошли до нас) „пресек тупоуглог конуса" добио је назив хиперболе, „пресек правоуглог конуса" назив параболе, „пресек оштроуглог конуса" назив елипсе. Архимед још не зна ове нове називе.

Средином IV в. посветио је коничним пресецима посебну књигу Платонов друг Менехмо, затим је Аристеј написао пет књига о „Просторним местима" и најзад је Еуклид, упоредо са „Елементима", написао још „Коничне пресеке", где је сажео све урађено до њега из ове области; његова књига је постала класична. На њу се обично позива Архимед.



Сл. 6

Архимед не понавља доказе онога, што су већ урадили његови претходници, него се позива на њих. Из ових позивања видимо шта је већ било сопственост науке пре изласка Еуклидове књиге; ово је врло важно ради правилне оцене властитих Архимедових заслуга. Набројмо најважније од ових основних закључака науке до Архимеда.

З а п а р а б о л у (сл. 6): Пречник параболе PV дели њену тетиву Qq, паралелну тангенти на крају P пречника, напола.

2. Ако на крају Q тетиве Qq повучемо тангенту QT до пресека са пречником у T, онда је PV = PT.

3. Ако две тетиве QVq и $Q_1V_1q_1$, паралелне тангенти у тачки P, секу пречник у тачкама V и V_1, онда се има

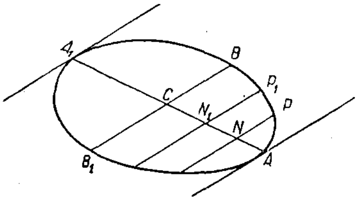
$$PV : PV_1 = QV^2 : Q_1 V_1^2.$$

Лако је увидети да ова једначина претставља основну једначину параболе дату у виду пропорције

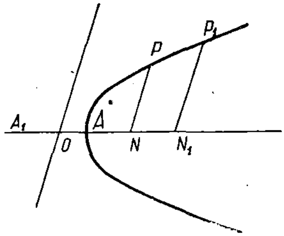
$$px = y^2.$$

За елипсу (сл. 7):

Однос квадрата ординате према производу односних отсечака пречника стална је величина, једнака односу квадрата полупречника (или пречника):



Сл. 7



сл. 8

$$\frac{PN^2}{AN \cdot A_1N} = \frac{P_1 N_1^2}{AN_1 \cdot A_1N_1} = \frac{CB^2}{CA^2}$$

т. ј. у нашим симболима (узимајући тачку A за кòрдинатни почетак:

$$\frac{y^2}{x(2a-x)} = \frac{b^2}{a^2},$$

што је лако довести у каноничан облик

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Аналого за хиперболу (сл. 8):

$$\frac{PN^2}{AN \cdot A_1 N} = \frac{P_1 N_1^2}{AN_1 \cdot A_1N_1},$$

т. ј. у нашим симболима (узимајући A за кординатни почетак)

$$\frac{y^2}{x(2a+x)} = c \text{ (const)}.$$

Ову једначину није тешко довести у облик на који смо навикли:

$$\frac{(x + a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{c} = 1$$

Међутим, ни Архимед ни његови претходници нису имали још претставу о хиперболи као о јединственој кривој која се састоји из двеју грана; зато они још нису могли да претставе количник у горњој пропорцији као однос квадрата полупречника хиперболе.

Полазећи од ових поставки Менехмо, Аристеј и Еуклид дали су складно учење о коничним пресецима. Ми не можемо да се задржавамо дуже на овом питању; указаћу као на пример на то, да су њима већ биле познате особине елипсиних жижа. За нас је важно само то, што су поново нађене криве биле одмах искоришћене као просторна геометриска места, а сем тога, за строжије научно решавање проблема удвајање коцке и трисекције угла. Већ је Менехмо доказао да се решење задатка удвајања коцке (или што је исто, тражење двеју средњих пропорционала) помоћу горе описаних инструмената, уствари своди на тражење тачке пресека параболе и равностране хиперболе[1]). Задатак трисекције угла такође се сводио на конструкцију отсечка дате дужине, који лежи између двеју нормалних правих, а чији наставак пролази кроз дату тачку; ова конструкција се остваривала подесним померањем лењира. Сада је, исто као код случаја удвајања коцке, доказано да се уствари ова конструкција своди на тражење тачке пресека круга са равностраном хиперболом.

Да би читалац имао претставу како се изводе слични докази, навешћемо као пример ово резоновање (сл. 9).

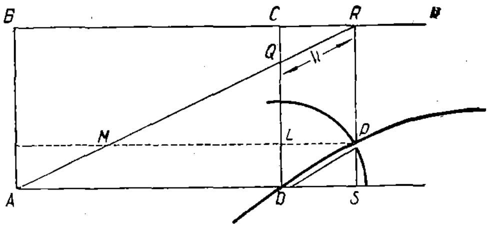
Нека су дате две узајамно нормалне праве CD и BK. Треба конструисати отсечак дате дужине k између ових правих тако, да његово продужење прође кроз дату тачку A. Претпоставимо да је такав отсечак конструисан; нека права на којој се он налази сече CD у тачки Q, а BK у тачки R. Спустимо из A нормале AB и AD на BK и CD; добићемо

---

[1]) Очевидно је да свака кубна једначина $Ax^2+Bx^2+Cx+D=0$ може бити претстављена као пресек параболе $y=Ax^2+Bx+C$ са равностраном хиперболом $xy+D=0$ или на други сличан начин, па се означени задаци своде на кубне једначине.

правоугаоник ABCD. Повуцимо DP паралелно AR и RP паралелно CD. Нека се ове праве секу у тачки P. У паралелограму DPRQ, очигледно je DP = QR = k.

Јасно је да P лежи на кругу са средиштем у D и са полупречником k.



Сл. 9

Из сличности троуглова ABR и QCR (dividendo et permutando) излази

$$\frac{BR}{BC} = \frac{AR}{AQ}. \tag{1}$$

Из сличности троуглова ARS и AQD, пак

$$\frac{AR}{AQ} = \frac{RS}{QD} = \frac{AB}{RP}. \tag{2}$$

Из (1) и (2)

$$\frac{BR}{BC} = \frac{AB}{RP},$$

или

$$BR \,.\, RP = AB \,.\, BC;$$

али то је једначина равностране хиперболе са средиштем и координатним почетком у датој тачки B, јер је ми можемо изразити нашом симболиком овако:

$$xy = \text{const (AB и BC су сталне величине)}.$$

Према томе, тачка P лежи такође на равностраној хиперболи са средиштем у B, што значи на пресеку равностране хиперболе са средиштем у B и круга полупречника k са средиштем у D.

Као што смо видели, Еуклид није укључио у своје „Елементе" учење о коничним пресецима. Ово се не може објаснити као случајност; идеалистички филозофи су ову област сматрали за недостојну „математике, чији је циљ приближити човека божанству". И поред тога што је Менехмов рад угледао света већ 360—350 г., Аристотел, у делима која су до нас дошла, нигде ниједном речју не помиње коничне пресеке. Платон је поводом већ поменутих радова Архита и Менехма, који су покушавали да сведу удвајање коцке „на примену инструмената и механизама, месографа помоћу којих су цртали криве и налазили њихове пресеке", приметио: „Помоћу таквих решавања нестаје и пропада благо геометрије, која се враћа натраг ка чулним стварима. При томе она нас не уздиже, не доводи нас у однос са вечитим и бестелесним идејама, у додиру са којима је бог увек бог..." Платон је негодовао против њих зато што они „упропашћују и руше благо геометрије, јер се она притом удаљује од бестелесних ствари које се достижу умом, ка опипљивим, и користи тела која имају потребу за примену оруђа ружних заната". Касније платоничар Плутарх не налази бољег комплимента за Архимеда него да каже да он „у својим доказима *ступа у спор са материјом*."

Међутим, наука није могла без ових метода јер су оне претстављале једину могућност кретања напред и долажења до нових открића. На Платонову забрану, као што видимо, нису се обазирали чак ни његови пријатељи и ученици; међутим, они су брижљиво издвајали νεῦσις и коничне пресеке од „чисте" математике. Ето зашто се није нашло места у Еуклидовим „Елементима" за ове одељке.

На овим уџбеницима и на овим гледиштима васпитавао је отац Архимеда од детињства. Оно што се односило на ове „механичке" делове математике још више се односило на саму механику: механика се третирала као практична наука („ἐμπειρία τις") која служи искључиво примени и која нема ничег заједничког са високом чистом науком која осветљава човечију душу. Ма како интересантне, ма како плодне биле ове области, Архимеда су научили да гледа на њих као на разоноду између посла, а не као на права математичка занимања која су се често сводила било на усвајање онога што су претходници већ урадили, и на решавање разних појединачних задатака ради примене у пракси већ пронађених поставки, било на конструисање досадних и једноличних доказа по методи исцрпљивања, ради строгог доказивања поставки које су већ раније нађене методом недељивих величина, или су одређене емпириски.

Утицај овог васпитања осећа се у читавој каснијој научној делатности Архимедовој. Архимед, овај најгенијалнији механичар-проналазач, написао је само једно дело из примењене механике; у осталим његовим делима нема ниједног описа механизма, из њих је брижљиво уклоњено све што има карактер примене, није описан ниједан прибор за решења оних, „νεῦσις“, о којима смо већ горе говорили.

Да ли су заиста одговарале ове поставке на којима је од детињства васпитаван, природном душевном расположењу Архимедовом? У то се може увелико сумњати. Небески глобус, који је он направио и на коме су се могла пратити не само кретање звезда, него и помрачења, и кога је покретала вода, машина коју је он пронашао за поливање египатских поља, читав низ сложених ратних машина, све нам то даје право да од њега створимо лик инжењера-проналазача, који је бесумње већ од детињства испољавао нарочиту генијалност у области т е х н и к е. Међутим, васпитање које је добио приморавало га је да угушује у дубини душе ове живе тежње, идући путем који је уобичајен у идеалистичкој математичкој науци. Уверен сам да нећемо моћи, ако не оценимо у довољној мери ове особености душевног расположења Архимедова, правилно да схватимо ни онај особени пут развоја којим је пошао у области чисте математике.

АЛЕКСАНДРИСКИ МУЗЕЈ

У доба када је Архимед савладао математику толико, да му је ради даљег усавршавања било потребно да оде у иностранство, његов рођак Хијерон постигао је бесумње већ највишу неограничену власт у држави; то није могло да не утиче и на материјално стање Фидијеве породице. За блиског рођака управљача Сиракузе такво путовање, ма да је у оно време изискивало велике расходе, није претстављало никакве тешкоће. Архимедово поље интересовања било је ограничено математиком; никаквих интересовања за филозофију и хуманитарне науке уопште, уколико се може судити на основу сведочанстава која су до нас дошла, он није имао. Иако је главно културно средиште Грчке била у то време Атина, највећи астрономи и математичари тог времена — Ератостен и Конон — живели су у Александрији. Разумљиво је да је, он отишао у Александрију; може се претпоставити да га је његов отац, који је и сам био астроном, спремао не само за математику, него и за астрономију. Као што ћемо видети, живо интересовање и дубоко познавање астрономије карактеристични су за Архимеда у току читавог његовог живота.

Научници чијем је кругу пришао Архимед груписали су се око Александриског музеја. Од најстаријих времена грчки монарси имали су обичај да окупљају у свом двору најистакнутије песнике и научнике. Ови научници не само да су непосредно служили потреби двора (лекари, инжењери, песници и музичари, организатори свечаности итд.), него су уздизали и међународни значај и популарност државе. С друге стране, песници и музичари су од најстаријих времена стварали нарочите религиозне савезе за такмичење у певању и музици. Такви савези (као на пример у Милету) обично су имали за своје врховне покровитеље богове — заштитнике уметности — Аполона, Музе, Харите. Исти такви религиозни савези лекара постојали су при храмовима бога медицине Ескулапа.

Такав тип установе, али у огромној размери, организовао је Птолемеј I Сотер у Александрији. Са правне стране то је било религиозно братство при храму Музе, али на његову структуру имала је велики утицај Платонова академија. Уосталом, Александриски музеј није привукао у своје редове никакве истакнуте филозофе: средиште филозофских радова остала је као и раније Атина. Али све остале гране науке и уметности биле су овде заступљене врло богато. „Док су специјалне науке (Einzelwissenschaften) овде постигле бујан расцват, филозофија је овде венула" (Hirzel).

Идеја која је лежала у основи организације Музеја била је веома хумана: скупити у Александрији велике, истакнуте научнике, ослободити их свих животних брига, дати им на расположење максимално слободно време и на тај начин омогућити им да се баве чим ко жели, без икаквог притиска ма са чије стране. Чувени научници, окупљени са разних крајева света, живели су у храму Музе потпуно на царевом издржавању; они су заједно ручавали и ти ручкови били су праћени научним беседама о најразличитијим темама. Озбиљан научни рад већ и тада је захтевао велике расходе: историчарима и књижевницима била је потребна добра библиотека; астрономима, физичарима, природњацима и географима — сложени инструменти и скупоцене експедиције. За све ове потребе дарежљиво се издавао новац из царске благајне. Тако, географ и математичар Ератостен, о коме ћемо касније подробније говорити, измерио је Земљин полупречник на основу астрономских посматрања која су се вршила у Родосу, Александрији и Сијени; за ово су била потребна огромна средства и њих је дао александриски двор.

Али најскупоценији део Музеја била је библиотека. Нешто куповином, нешто преписивањем, овде су биле сабране скоро све грчке књиге почев од Хомера. Низ научника бавио се исправљањем текста књига и његовим коментарисањем. При томе је била допуштена велика слобода: чак и у Хомеровим поемама, које су код Грка имале значај светог писма, ови научници су допуштали себи не само да исправљају грешке, него и да одбацују читаве стихове, као фалсификоване[1]). Они су сматрали да је могуће чак сумњати у то да је Хомер био писац ових поема: неки од александриских научника сматрали су да су „Илијаду" и „Одисеју" писали разни писци. Истим слободним духом прожети су радови лекара Херотила који је радио у Музеју. Он је иступио против у то време уобичајене претставе, по којој се човечја душа налази у срцу или дијафрагми; он је открио да је орган мишљења мозак — средиште разгранатог живчаног система, да су крвни судови напуњени крвљу, а не као што су до њега мислили — ваздухом. Он је дошао до ових закључака секцирајући људске лешеве; пре њега се нико није одлучио на таква секцирања, — то се сматрало хуљењем. У истом Александриском музеју била су учињена сјајна открића из области физике, астрономије и математике, о којима ћемо касније говорити.

Добија се утисак високог расцвата науке и пуне слободе научне мисли. Али то је само површан утисак.

У овој епоси расцват науке је имао крајње једностран карактер. У области низа хуманитарних наука, на пример историје, филозофије, осећа се отсутност оригиналних радова, млитавост мисли и декаденција. У класичној епоси наука је била производ стваралаштва прилично широких група становништва; борба између класа и група одразила се у борби међу научним груписањима, и у овој непрекидној борби рађала се научна мисао. Сада је наука, као и све остале гране друштвеног живота, добила дворски карактер, развијајући се под заштитом царства. Није чудо што се сада принципијелне противуречности у основи бришу; уколико се још наставља спор између различитих струја, он је посвећен питањима која немају великог општег значаја. Ми, на пример, ништа не чујемо о томе да је неко од научника Музеја спроводио у својим делима материјалистичке погледе, да је на пример у Музеју радио неко од епикурејских научника. Уколико су нам позната гледишта научника Музеја, сви су они били на платоничарским, академским позицијама стојицизма. У низу области ове позиције су чиниле немогућним даљи прогрес науке. Као што ћемо видети, баш најистак-

---

[1]) Други су услови били у Пергамској научној школи која је конкурисала Музеју и оријентисала се према Риму: цар Атал I наредио је да се казни „граматичар" Дафид због недовољног поштовања према Делфиском оракулу и Хомеру!

нутији научници у низу питања, која нису тесно везана са материјалистичким гледиштем, враћају се у суштини на позиције Демокрита, али се при томе трагови позајмљивања бришу. Демокритова гледишта се прерађују и тако прилагођују, да би се по могућству отстраниле противуречности између њих и основних претпоставки идеалистичке филозофије; разуме се, то није увек успевало. Већина пак александриских научника уопште није читала Демокрита и упознавала се са његовим гледиштима и открићима једино из тенденциозног избора, његовог излагања и критике код Аристотела и његових следбеника, и поред тога што су у Александриској библиотеци, с обзиром на њену изузетну снабдевеност, постојале, разуме се, сва Демокритова дела. Тако, системи примитивног интеграљења које је примењивао Демокрит, били су блиски сличним системима које је касније примењивао Архимед; међутим, Архимед се, као што ћемо касније видети, упознао са математичким радовима Демокритовим тек много касније, по повратку из Александрије у Сицилију.

Нећу тиме да кажем да су Птолемеји забрањивали да се у Музеју изучава Демокрит и други материјалисти, или да су Демокритова дела чувана у неком нарочитом тајном одељку библиотеке. За то није било потребе. Као што смо већ говорили у првој глави, сва је несрећа баш у томе што су људи већ одвикли од слободног мишљења, што су се од детињства учили да управљају мисао одређеним током, који су одобравале старешине, и сами су се старали да истрчавају напред, погађајући мисао оних који су имали власт. Илуструјем ову мисао са неколико примера из живота Музеја.

Жена Птолемеја III Еуергета који је управљао у Египту од 247 г., била је кћи киренског цара, Береника, и играла је велику улогу у управљању земљом и, изгледа, држала је мужа под папучом. Она је била обећана Еуергету још као дете и била је једина наследница киренског престола, али њена мајка сматрајући непожељним да Кирена и Египат дођу у једне руке, одлучила је да уда кћер за свога љубавника Деметрија. Тада је Береника, видећи да се њени частољубиви планови руше, још као петнаестогодишња девојка властитим рукама заклала Деметрија. Управник библиотеке Музеја Калимах, сматрао је за свој дуг да у својим песмама прослави ово убиство. Ускоро после ступања Еуергета на престо, он је морао да крене у поход на Сирију. Његова жена Береника дала је на дар боговима своју косу да би код њих измолила срећан повратак мужа. Али се по повратку Еуергета установило да је Береничина коса нестала из храма. Према античким појмовима, онај који постане господар косе ма ког човека може, врачајући на њој, да му нанесе велику штету па чак и смрт; није чудо што је нестанак косе изазвао Еуергетов бес. У то време у Музеју је радио Конон са Самоса који је, на основи изјаве тако угледног сведока као што је био његов друг Архимед, — био највећи астроном и математичар тог времена. Конон је нашао излаз из створене ситуације: он је изјавио да су Береничину косу пренели богови на небо, да ново сазвежђе које је он установио на небу и јесте Береничина коса. Већ је поменути песник Калимах написао поводом овог случаја фину песму, опевајући ово претварање косе моћне царице у сазвежђе.

Овај случај није био јединствен: како подвлачи један од највећих познавалаца александриске литературе — Зуземил — и друге Калимахове химне пуне су политичких алузија, препуне подхалимским слављењем Птолемеја и чланова његове породице, у непосредном и посредном виду; „богови којима су ове химне посвећене често су само маска за слављење владајућег монарха под видом бога“. Четврту Калимахову химну наручио је непосредно цар; осталих пет „у сваком случају служило је интересима овог цара и његове политике“.

Исти карактер носило је и стваралаштво другог песника Музеја — Теокрита из Сиракузе. Он је у почетку свакојако покушавао да придобије расположење низа богатих и моћних људи; затим чини покушај да задобије милост монарха свог родног града, већ поменутог Хијерона; он посвећује Хијерону своју XVI идилу. Али од тога није ништа испало, јер Теокрит, опевајући борбу са Картагином, није схватио стварне политичке намере Хијеронове. Тада се песник одлучује да потражи срећу код Птолемеја II Филаделфа. У својој XIV идили[1]) он описује како заљубљени напушта своју неверну драгану да би ступио у војску цара Филаделфа; идила се завршава слављењем овог цара. Ово ласкање је имало успеха и Теокрит је био позван у Музеј. После овога он пише низ идила које садрже провидно ласкање Филаделфу, Арсиноји и Береники; у XVII идили под видом бракова Кроноса и Реје и Зевса и Хере, он говори о браку Филаделфа

---

[1]) Бројеви Теокритових идила не одговарају хронолошком реду.

са Арсинојом. „Тако далеко, — примећује Зуземил, — није ишао чак ни Калимах“.

При свој финоћи ове александриске поезије она се не може друкчије назвати него изрођавајућом. Узалуд бисмо тражили на александриском двору политичку комедију у стилу Аристофанову или трагедију у стилу Еурипидову, које су под маском мита расправљале најватренија питања политичког и моралног карактера. У овој епоси нећемо наћи чак ни еротичне поезије у стилу Архилоха или Сапфоа, у којима се огледају снажна и дубока љубавна преживљавања. У Музеју влада спор између два правца: једни, као Аполоније Рођанин, сматрају да је основни задатак песника да пишу велике поеме, други (Калимах, Теокрит), сматрају да је епос преживео свој век и да треба писати мале фине стварчице. У томе су последњи имали безусловно право: оне непосредне наивне перцепције ствари и епске мирноће која је била потребна за писање епских поема у Хомеровом стилу, нису се могле више наћи при александриском двору. Али и идиле александриских песника, претрпане дубоком митолошком ученошћу, са одмереним модним осећањима и одабраним језиком лица, која говоре на вештачком, „народном“, дорском дијалекту, лишене су сваке снаге и сваког животног осећања. Много свежији утисак остављају на нас натуралистичке сцене Херонде, писане истим модерним дорским дијалектом, али су и оне лишене било каквог печата генија, да не говоримо већ о томе да код њих не изостају ласкања Птолемејима.

Истина, јелинистичка математика и астрономија биле су у бољем положају. Овде су и у јелинистичкој епоси били постигнути значајни успеси. Ово се објашњава делимично необичним развојем војништва, тим што је ради војничких усавршавања била потребна солидна математичка, механичка и техничка основа, а за трговачку и ратну морнарицу солидно познавање астрономије. Али астрономија и математика доживљавале су свој последњи каснији расцват; после поколења Ератостена и Архимеда ми овде не налазимо више нове интересантне идеје, и ове науке брзо опадају.

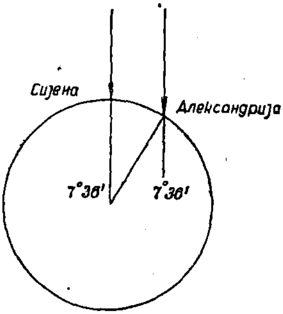
Усто се не сме мислити да су се математичке науке могле оградити кинеским зидом од савременог политичког живота и да су атмосфера улагивања као и добијање новчане помоћи од државе могле да остану без утицаја на ове науке. Ми смо већ видели како је највећи астроном и математичар тог времена Конон нашао да је обавезан да открије на небу отсечену косу владајуће царице. Све до смрти он је био пре свега дворски човек, па тек онда научник: умирући (око 230 г.), он оставља највеће своје дело „Астрономију" у седам књига, у наслеђе цару Еуергету.

С друге стране, у она времена стручњаци из појединих наука претстављали су пре изузетак него правило, и једва да су такве специјализације биле потстицане озго. Следећи Аристотеловом завету, научници су се старали да истовремено раде и на филозофији, и на поезији, и на математичким наукама. Сјајни пример такве свестраности је најближи Архимедов друг Ератостен; баш у писму упућеном њему, Архимед открива, као што ћемо касније видети, најскровитије тајне своје науке. Ератостен из Кирене био је Архимедов вршњак, али је умро касније од њега јер је доживео 80 година. Његови учитељи били су филозофи Аристон и Аркесилај, стоици, који су раскинули са својом филозофском школом услед неких размимоилажења, граматичар Лисаније из Кирене, песник Калимах. Хуманитарне науке учио је у Атини, где је, узгред, један од његових учитеља (упоредо са већ поменутим филозофима) био и уметник Апелес. Око 245 године био је позван у Александрију за васпитача престолонаследника, будућег Птолемеја IV Филопатора. Истовремено је вршио дужност директора библиотеке, чије се место ослободило после смрти његовог учитеља Калимаха.

Из Ератостенове епиграме која је дошла до нас, видимо да је он био прави дворјанин. Епиграма претставља приношење жртве храму „бога Птолемеја", тј. покојног цара Птолемеја I. У њој се Ератостен растапа у ласкању и владајућем Птолемеју III Еуергету и свом ученику, будућем цару. Његово друго дело носило је чак наслов „Арсиноја" — тако се звала царица-удовица, жена Птолемеја II Филаделфа.

Написао је Ератостен и низ филозофских дела. Са његовом филозофском делатношћу била су везана и његова космополитска гледишта, о којима смо већ говорили. Затим, он је написао расправе „О добру и злу", „О богатству и сиромаштву", „О вештини живети без жалости", „О томе да сваки песник тежи да забавља, а не да учи читаоца". Све су то теме, најтешње повезане са савременошћу и актуелном политиком, и нема сумње да је дворски научник одговарао на ова питања онако, како је то било у интересу његових покровитеља. Он је написао и дело из историје књижевности („О античкој комедији"), и из хронологије („Хронографија“, „Олимписки победиоци“), и из граматике; писао је и песме (на пример, „Поводом смрти Хесиодове“, „Еригона“, „Хермес“). Све му то није сметало да буде један од највиђенијих географа (он је написао „Географију“ и дело „О ветровима“) и истакнути астроном. Он је написао књиге „О мерењу Земље“, „О мерењу Сунца“, „О распореду звезда“, „О распореду Зодијакових знакова“.

Ради мерења Земљине величине била су изабрана два места прилично удаљена једно од другог, која су се, како се тада мислило, налазила на истом меридијану: једно — Александрија, друго — далеко на југу — Сијена. Посматрања су вршена у подне, на дан летњег солстиција (најдужег дана) (сл. 10). Казаљка сунчаног часовника (гномона) није бацала у то време никакву сенку у Сијену, а у Александрији је дужина сенке одговарала углу од 7° 36′ између вертикале и сунчаног зрака ($\frac{1}{50}$ целог круга). Услед једнакости



Сл. 10

унакрсних углова (све сунчане зраке Ератостен је узимао као паралелне међусобно), средишњи угао између Земљиних полупречника који иду ка Сијени и Александрији, такође је морао бити једнак 7° 36′; значи растојање од Александрије до Сијене, једнако 785 км., износи $\frac{1}{50}$ периферије екватора; према томе, периферија екватора једнака је 39 250 км., а пречник — 12 625 км. Отступање његово од стварне дужине Земљине осовине износи свега око 75 км.

У делу „О мерењу Сунца“ Ератостен је долазио до закључка да је Сунце 27 пута веће од Земље и да је отстојање Земљино од Сунца 5 104 000 км.

Ми ћемо се још дотаћи ових мерења кад будемо говорили о мерењима ове врсте која је извршио Архимед. Пређимо сада на математичка дела Ератостенова. Овде се само у области теорије простих бројева интересовања Архимедова, колико нам је познато, нису поклапала са интересовањима Ератостеновим. Овој области припада најпознатије математичко дело Ератостеново (Κόσκινον — „решето“), у коме је он дао најпростији начин састављања таблица простих бројева.

Остали математички радови Ератостенови бавили су се питањима која су одушевљавала и Архимеда. То је пре свега дело „О коничним пресецима“, којима је и Архимед посветио већи део својих радова, и дело „О мерењима“ (Καταμετρήσεις). Најзад, дело „О средњим вредностима“ (Περὶ μεσοτήτων) највероватније је било посвећено тражењу једне, две или више средњих пропорционала, помоћу којих су се, као што смо већ говорили, решавали чувени задаци удвајања коцке и трисекције угла.

Питање о тражењу двеју средњих пропорционала интересовало је частољубивог Ератостена још од почетка његове научне делатности: на ово питање се своди чувени „делски проблем“ удвајање коцке, над којим су ломили копља сви велики математичари тога времена. Још као престолонаследников васпитач, Ератостен је нашао решење овог проблема помоћу справе „месолаба“, коју је сам изумео и конструисао, а о којој смо напред говорили. Ово га је толико одушевило да је, као што смо већ говорили (стр. 44), сматрао за потребно да учини захвалну посету највишем дворском божанству Птолемеју I. Ератостен је посветио његовом храму мраморни стуб на коме је био претстављен „месолаб“, дат геометриски доказ правилности решења, и уклесан епиграм, у коме је Ератостен охоло супротстављао себе својим претходницима; овде се између осталог, каже:

> Не старај се да схватиш цилиндрових пресека начин доста тежак
> као Архита, и не покушавај конус тројако да пресечеш
> заједно са Менехмом; ако линије крива облика
> нацрта Еудокс божанствени, не следуј ни за њим.

Ова полемика са претходницима била је детаљније изложена у главном програмском философском делу Ератостеновом „Платоник“ (Πλατωνικός). Бесумње, да су баш одавде позајмили Плутарх и други каснији аутори вест о ставу Платонову према методу „геометриских места у простору“, који су увели Архита, Менехмо и Еудокс. Овде је Ератостен цитирао Платоново гледиште (в. стр 36), на основи кога нас математика, узимајући за доказе теорема опипљива тела трију димензија, сргава у несталан свет, место да нас подиже увис и доводи „у додир са вечитим и бестелесним идејама, којима се бави и само божанство“. Из тога се, како је Еартостен цитирао ова места, може, изгледа, закључити да је он према овим Платоновим гледиштима имао симпатије[1]); не тежи он узалуд у свом епиграму да одврати читаоца и од конструкције тела која се секу и од конструкције пресека „линија крива облика“ које се добијају као конични пресеци. Али шта да се ради онда са делским проблемом и проблемом трисекције угла који се, према речима самог Ератостена, „нису могли решити логичним и конструктивним путем“? Ератостен је нашао овакав компромис: забрањујући, изгледа, методу геометриских места у простору, он је препоручивао методу νεῦσις, јер код доказа правилности решења, добивених методом νεῦσις, могло се у потпуности користити пресецима кругова и правих линија. Разуме се, с гледишта математичке строгости то је начин која који крије главу под крило, јер, као што смо већ горе говорили, примењујући приборе такве врсте, ми скривеним путем налазимо тачке пресека кривих другог реда; нису узалуд савременици сматрали ово Ератостеново дело теориски недовољно основаним.

Справе за извршење νεῦσις биле су нађене одавно пре Ератостена, — у најбољем случају његова справа је била нешто простија и погоднија од других. Сам Ератостен се поносио само тиме што његови претходници, описавши теориски како треба да дејствују сличне справе, нису покушали да их конструишу и примене на делу, док је он остварио и применио свој „месолаб“. Принципијелне пак новине у његовој справи није било.

У „Платоници“ много се говорило и о пропорцијама, о хармонији, о музици. Ми знамо какав је велики значај имало у Платоновској филозофији учење о пропорцијама и музици; према Платоновом мишљењу ове науке су училе грађане дисциплини, показивале им да је „геометриска“ једнакост, кад сваки заузме одговарајуће место у друштву, виша од „аритметичке“ када су у друштву сви једнаки. Бесумње, да је и овде Ератостен ишао Платоновим стопама.

Можда се осим тога, и куриозна полемика Ератостенова са Архимедом налазила у истом делу. О овоме је касније писао Страбон: „Зар није интересантно да је Ератостен, иако математичар, одрицао да призна принцип који је Архимед истакао у свом делу „О телима која пливају“, — наиме то, да

---

1) Можда је зато и добио надимак „други Платон“ или „нови Платон“.

површина сваке течности која је у стању мира, узима облик површине лопте са средиштем у Земљином средишту, ма да овај закључак треба да усвоји сваки ко се ма колико разуме у математици?“ Као што ћемо видети, ова Архимедова теорема претстављала је строго математички закључак из Демокритова става, по коме су сва тела тешка и теже ка Земљином средишту. Јасно је да Ератостен, као математичар, није оспоравао правилност овог логичког закључка, него правилност саме претпоставке о тежњи свих тела ка Земљином средишту, против које је устајао већ Аристотел, који је делио тела на тешка и лака, при чему свако тежи не ка Земљином средишту, него свом природном месту (οἰκεῖος τόπος): ватра и ваздух — горе, вода — средини, Земља — доле. На тај начин, и овде је Ератостен, заузимајући у интересу чистоте идеалистичке филозофије Аристотелово гледиште, иступао не само против Демокрита, него, као што ћемо видети, и против ближих му по времену научника — Стратона и Архимеда.

И најзад, баш у овом делу се највероватније налазила интересантна Ератостенова полемика са Демокритом и Епикуром. Заиста, већ a priori је немогуће било сумњати у то да овај сјајни дворјанин, престолонаследников васпитач, ма да је био један од највећих астронома и математичара антике, ипак и у својим математичким радовима није себи допуштао ништа што би могло да навуче на њега незадовољство његових заштитника; између осталог, њему су биле туђе ма какве манипулације са недељивим у математици, које су биле забрањене с гледишта идеалистичке филозофије, коју је он усвојио од школских година и која је била одобрена озго.

Познато нам је да, према мишљењу Демокритову, тачке и линије нису могле бити потпуно непросторне, јер се из тачака састављају просторне линије, а из линија — просторне површине. Пошто је одређивање линија као простог збира тачака доводило до чисто математичких тешкоћа, Епикур се изражавао унеколико другачије: „Тачка мери дужину линије са неким нарочитим, једино њој својственим начином“, т. ј. линија није прости збир тачака; њена дужина је нека функција броја ових тачака (понекад су тачке распоређене гушће, понекад ређе). Ератостен је иступио и против овог и против другог гледишта да тачка нема никакву просторност; стога се из тачака не саставља, као што мисли Демокрит, нити се њима мери, како мисли Епикур, дужина линије. Па ипак се просторна тачка креће („тече“), и као резултат овог кретања непросторне тачке појављује се просторна линија. Ово је било, очевидно, неко тајанствено, недокучиво логици (ἀδιανόητον), али га је било потребно примити као чињеницу осведочену огледом.

Ако се заједно са Демокритом и Епикуром сматра да се пространа тела састоје из пространих недељивих честица — материјалних линија и материјалних тачака, испашће да је материјализам у праву, да је као основа свега иманентна материја без душе. Ако се допусти да је просторна материја постала кретањем непросторне која се налази ван ње, а према томе нематеријалне идеалне тачке, духовне суштине, испашће да је у праву идеализам који тврди да је „демиург“ нематеријалан и да се налази ван материјалног света. Ето зашто се у овој магловитој „недокучивој логици“, концепцији давао тако велики начелан значај у идеалистичкој филозофији.

Такво је гледиште заузимао Ератостен. Већи ствараоци, математичари и физичари су инстинктивно осећали да је стварни прогрес у природним наукама био у оној епоси могућ само на основи атомистичких наука, али се то радило опрезно, кришом, при чему се код Демокритових ставова умртвљава сва њихова материјалистичка суштина.

У том погледу необично је поучна делатност Стратона из Лампсака; његова дела (или његових ученика), бесумње је изучавао Архимед[1]. Стратон је био сколарх (руководилац) перипатетске школе коју је основао Аристотел, од 287 до 268 год. Његов задатак је био да продуби Аристотелово учење не са филозофске, него са природно-научне стране, која је била најслабије место Аристотелова система. Ради тога он је морао да позајми низ поставки из науке атомиста; добила се оригинална синтеза из учења Аристотела и Демокрита.

Као што смо рекли Аристотел је сматрао да постоје апсолутно лака и апсолутно тешка тела. Апсолутно лаким телима је својствено да теже увис, апсолутно тешким да теже доле. Кретање једних и других спречава средина; стога, уко-

---

[1]) 1893 г. Дилс је наново открио Стратона показавши да је предговор „Пнеуматике“ Херона (који је живео око почетка наше ере) само извадак из Стратонова дела „О празнини“.

лико је средина мање густине, лакше падају тешка тела доле а лака се пењу увис. Са Аристотелова гледишта силу треба употребити не само ради тога да бисмо покренули тело, већ и ради тога да то кретање траје: ако тело које се креће не гурамо непрекидно, оно ће раније или касније да се заустави чак кад не постоји отпор средине и трења; ова је сила управно сразмерна маси тела. У природи не може уопште да постоји никаква празнина, као ни дејство на растојању.

Обрнуто, Демокрит је сматрао да су сва тела тешка, т. ј. да сва теже средишту васионе. Али притом чвршћа тела, која имају већу специфичну тежину, савлађују лакша тела и одбацују их натраг; стога се и добија утисак као да ова теже увис. Разумљиво је да гушћа средина савлађује лакша тела у већој мери, него ређа средина; стога се тела крећу увис („заостају") тим брже, уколико је гушћа средина. Употребљавати силу треба само зато да би се извело тело из стања мира или променио правац кретања; покретно тело кретаће се истом брзином бесконачно ако не буде савладано отпором средине или трења. Између свака два атома постоји мала празнина. Велике празнине постоје само у простору између космоса, у „међусвету"; у унутрашњости космоса могу се добити веће празнине само вештачки и оне нису дугог века.

Стратон се одрекао делова Аристотеловог учења који су највише кочили науку: он није признавао постојање апсолутно лаких тела, сматрао је да су сва тела тешка, а тежњу лаких тела да иду увис објашњавао је, као и атомисти, тиме што их одбацују увис тежа тела. Он је приговарао Аристотеловој теорији по којој не постоје празнине, и заједно са Демокритом је сматрао да су сваке две најмање честице материје одвојене једна од друге малом празнином; ако се добро промисли, ово означује усвајање атомистичке структуре материја, ма да Стратон такав закључак explicite није чинио. Уколико се говори о нашем свету, он је као и Демокрит, сматрао да се овде веће празнине могу изазвати само вештачки. Разлика је била само у томе што је по Демокриту узрок брзог попуњавања већих празнина било дејство на растојању — тежња честица елемената једне другој; по Стратону пак, у празнину су одмах тежила са свију страна свакојака, а не само једнородна тела („страх од празнине", horror vacui). То је био бесумње прогрес, упоредо са Демокритом.

Али с друге стране, Стратон је заједно са Аристотелом сматрао да се покренуто тело мора зауставити чак и кад нема отпора, јер сила која покреће тело ускоро „престаје или исцрпљује се“.

Већ је Дилс показао да је Стратонов ученик, чувени астроном Аристарх са Самоса, који је радио у Александриском музеју, у многоме заступао Демокритово гледиште, идући трагом свог учитеља. На пример, у његовој теорији вида понављају се карактеристични Демокритови изрази. Ми ћемо обратити пажњу само на једно Аристархово учење, карактеристично за математику атомиста. Како саопштава Архимед у свом „Броју пешчаних зрнаца“ („Псамит“), Аристарх је учио да се „кружна линија по којој се Земља креће око Сунца односи према даљинама звезда некретница, као средиште лопте према њеној површини“. Архимед, који није читао дела атомиста и није знао њихову математику био је у недоумици, и ово је учење сматрао за потпуну глупост: „Јасно је да то не може бити; пошто средиште лопте нема никакве величине, треба сматрати да не може бити никакав однос између њега и површине лопте“. Са гледишта Еудоксове и Еуклидове геометрије, ово је заиста глупост, али не са гледишта математике атомиста, по којој средиште није било без „икакве“ величине, него је било изванредно мало; оно је било „амера“, најмања математичка величина. Од Аристотелова коментатора Темиста познато нам је да су атомисти тврдили баш ово о средишту круга: „Немогуће је поделити круг на два једнака полукруга, али ће се при сечењу, средиште увек присајединити било једној, било другој половини, и учиниће ову већом“. Како касније сведочи Витрувије, Аристарх је био један од најобразованијих људи и најбољи математичар свог доба. Он не би рекао такву глупост да је стајао на позицији Еудокса; очевидно је он познавао позиције Демокрита и Епикура и пришао њима, ма да о томе није отворено говорио, што је и довело у заблуду Архимеда који није познавао математику атомиста.

У „Броју пешчаних зрнаца“ Архимед саопштава следеће о Аристарху: Аристарх Самљанин написао је дело које садржи низ (нових) хипотеза. Као закључак из његових претпоставки излази, да је свет много већи од онога којег смо ми горе усвојили, јер он учи да звезде некретнице и Сунце остају непокретни, а да се Земља окреће око Сунца по кружној путањи у чијем се средишту налази Сунце... Код таквог схватања, докази који се дају на основи посматрања одговараће његовим претпоставкама".

Приметимо да ова теорија, како указује Архимед, није била произвољна претпоставка, него закључак на основи посматрања и математичких прорачуна Аристархових. „Овде се он смело уздигао над ограниченошћу античких писаца, изнад њихових уских погледа, који су господарили и касније, све до Коперника и Галилеја. Не само да је прешао на Хелиоцентрички систем, него је проширио све наше претставе о васиони. Сунце је звезда некретница као и све остале звезде које видимо на небу (привидно дневно кретање Сунца и звезда је, према томе, резултат обртања Земље око осовине). Око Сунца обилази Земља (као и остале планете). Ако замислимо да је земљина путања велики круг на лопти, онда сву ову лопту, упоређујући је са небеском сфером, треба сматрати као тачку". Тако карактерише Аристарха познати историчар астрономије Гулч, и можемо се само чудити што неки астрономи (на пример, проф. Н. И. Иделсон у својој брошури о Копернику, која је недавно изишла) без икаквих основа занемарују Аристарха.

Али у једноме Гулч није у праву. Аристарх није био први који је проширио нашу претставу о васиони. Место јединог ограниченог света, са Земљом у центру (старо гледиште кога се држао касније и Аристотел), већ је Демокрит постулисао бесконачни број космоса, у сваком од којих се периферискa тела крећу око средишта; једним од таквих космоса је сматрао он и наш. Истина, Демокрит је насупрот Аристарху сматрао да се у средишту нашег космоса не налази Сунце, него Земља, али саму помисао да је Сунчев систем само ништавни део васионе, позајмио је Аристарх од Демокрита. И сама идеја да се наш свет сматра атомом, „тачком", у поређењу са васионом, могуће да му је дошла од Демокритових претстава о другим световима, где поједини атоми имају величину читавог нашег космоса.

И тако видимо да је Аристарх био под још већим утицајем атомизма него његов учитељ Стратон, ма да није исповедао атомизам непосредно и отворено. Карактеристично је да је стојик Клеант оптуживао Аристарха за безбожништво зато: што је „покренуо са места срце васионе", што Аристарх, и поред изванредне једнакости и убедљивости његове теорије, није нашао ниједног следбеника не само у Александрији, него и у читавом свету, изузимајући једино Селеука из Селеукије на Тигру. Из Ератостенових астрономских радова видимо да овај последњи ниуком случају није био Аристархов следбеник.

Таква је била научна атмосфера у којој је имао да ради млади математичар Архимед по доласку у Александрију. Није узалуд филозоф - скептик Тимон из Флиунта, који је живео у оно време и путовао по свету, рекао о Музеју:

У Египту разних племена, отхрањују легионе
Књижних мољаца, који воде бесконачне препирке
У птичјем кавезу муза...

„Пуж“. Машина за заливање поља
коју покреће роб — пигмеј
Фреска из Помпеје

ГЛАВА ЧЕТВРТА

ПОЧЕТАК АРХИМЕДОВЕ НАУЧНЕ ДЕЛАТНОСТИ

Да је Архимед стигавши у Александрију зажелео да иде оним утапканим путем којим су ишли остали математичари, он би урадио ово:

1) поткрепио би истине које су открили математичари V—IV в. помоћу метода недељивих величина, доказујући их методом исцрпљивања,

2) разрадио би оне области из математике које не траже примитивно интегралење, на пример, теорију бројева,

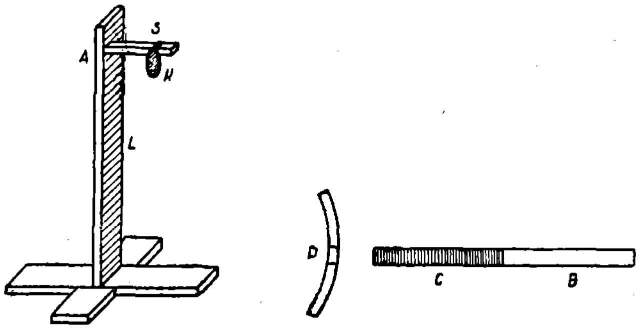
3) бавио би се астрономским посматрањима, усвајајући стари Аристотелов геоцентрични систем и

4) писао би стихове и филозофске анализе; ту је било најлакше поласкати монарху, подржати његову политику и на тај начин створити себи дворску каријеру.

Овим путем, као што смо видели, ишли су Архимедови другови и колеге Конон и Ератостен. Међутим, Архимед је тако велики и оригинални мислилац да се одрекао да их у томе следи. Он није имао никакву жељу за дворску каријеру, па му није била ни потребна: као близак рођак сиракушког монарха он је и без тога имао обезбеђена сва животна блага, кад би само тежио за њима. Усто Хијерон је био човек сасвим друге природе него Птолемеји, и како нам изгледа, ласкање на његовом двору није било у моди. Архимед није добио од детињства свестрано аристократско васпитање; његов отац, астроном, посветио га је само у тајне својих наука и само се за те науке интересовао он читавог живота. Очигледно да он није имао никаквог интересовања за филозофска расуђивања и песничко стваралаштво, ма да, као што ћемо видети, он изгледа није био лош версификатор.

До нас није дошло ниједно астрономско дело Архимедово и ми не знамо да ли је он заступао геоцентрично или хелиоцентрично гледиште. Али, као што смо већ говорили, нама је добро познато да се он са нарочитим интересовањем односио према Аристарховом систему који је официјална филозофија проклела. Да ли је Архимед прихватио овај систем? Не заборавимо да овај систем није уживао официјално одобрење и да је стога тешко очекивати да је Архимед, опрезан и коректан, живећи у условима дворског музеја, отворено иступао у његову заштиту (касније се тако исто и Кавальери није одлучио да отворено иступи у заштиту тог истог учења које је Коперник поново истакао). Довољно је, међутим, и то да се Архимед у своме делу „Број пешчаних зрнаца" позива на Аристарха; као што смо видели, њему остаје несхватљиво једно од Аристархових гледишта, у духу математике атомизма (стр. 50), али он не одбацује услед тога цео Аристархов систем, већ гледа да овом гледишту да такав смисао да оно не противуречи основама Еуклидове математике. „Треба претпоставити да је Аристарх имао у виду следеће: пошто ми обично сматрамо да је земља средиште света, онда (он и тврди, да) се Земља исто тако односи према ономе што ми називамо космосом, као сфера, по чијем се једном великом кругу по Аристарховој претпоставци креће Земља, према оној сфери на којој се налазе некретнице звезде". Архимед примећује да треба само схватити тако овај, с математичког гледишта, сумњиви израз, па ће сви Аристархови закључци основани на астрономским посматрањима, сачувати своју снагу. Дабоме, ово Архимедово тумачење је очигледно натезање, јер и сам Аристарх није сматрао Земљу за средиште нашег космоса и стога се није могао тако ни изразити, *али ово ново тумачење било је потребно Архимеду баш ради тога да спасе Аристархову теорију* у целини, обезбедивши је од напада савремених математичара. И одмах затим, у читавом осталом делу књиге, Архимед израчунава обим васионе, узимајући за основу *Аристархову теорију*, истина с напоменом: „чак иако је свет толико велики, колико замишља Аристарх, сферу некретница звезда..." Да Архимед није узимао озбиљно ову теорију, он би је просто занемарио, узевши за основу Аристотелов систем света. С друге стране, узимајући у обзир оне дворске услуге на којима смо се подробно задржали у претходној глави, мора се доћи до закључка да се Архимед и поред потпуног саосећања према Аристарховом систему, није могао одређеније изразити. Стога је могуће претпоставити да је генијални Архимед у души признавао Аристархову теорију.

Приликом одређивања Сунчева пречника Архимед је, као што касније саопштава у свом „Броју пешчаних зрнаца“, био ближи Аристарху који је сматрао да је овај пречник једнак $\frac{1}{720}$ Зодијака, него своме оцу, астроному Фидији, који је сматрао да је Сунце отприлике $1\frac{1}{2}$ пут мање. При решавању овог питања испољиле су се специфичне способности Архимедове за механику — он је пронашао посебну справу (сл. 11) за израчунавање Сунчева пречника,



Сл 11

чији је опис дат у истом делу. Ову справу је реконструисао А. Чвалина (в. библиогр. преглед, № 127), при чему он даје овакво објашњење уз Архимедов опис: „У тачки А (сл. 11, а) вертикално постављење пречаге L утврђује се у висини очију хоризонталан лењир који има подеоке; дуж њега може да клизи лествица S за коју је чврсто утврђен округли котур K, који стога при кретању летвице остаје увек на истој висини са А. Ако рано ујутру, када се Сунце налази још на хоризонту и није толико јако да се на њега не може гледати, ставимо око у тачку А, а котур K доведемо на такво растојање да он потпуно заклања пред оком Сунчев котур, онда, знајући пречник котура K и растојање AK, може се одмах наћи и привидни пречник сунца γ. Архимед је притом био потпуно свестан колико је тешко оценити посматрачка отступања. Извор отступања треба пре свега тражити у томе што око заузима уствари извесну запремину у простору, док се код огледа оно узима за тачку. Затим у томе, што је немогуће постићи потпуно поклапање котура К са Сунчевим котуром. Архимед се и овде користи методом која је потпуно аналога методи исцрпљивања. У почетку он приближује котур оку са доста великог растојања, док Сунчев котур не ишчезне иза котура К. Пошто се растојање АК узима притом као прилично мање него оно које би било код тачног поклапања привидних котурова, у резултату се добија горња граница γ. Поправка код величине зенице није потребна јер отступање дејствује у смислу увећавања променљиве величине. При другом мерењу Архимед удаљује котур од ока док Сунчев котур не постане видљив иза котура К. У овом случају је очевидно потребно да се узме у обзир размера зенице. Архимед је припремио две танке цилиндричне шипке: белу В и црну С. Последњу он ставља пред саму зеницу Р у правцу оптичке осе ока (сл. 11, б.), а белу шипку смешта одмах иза црне на истој оси. Ако је шипка тања од пречника зенице, онда ће В бити видљиво, у противном случају — невидљиво. Калибрујући шипке Архимед налази величину зенице.

Добио је за горњу границу $\frac{1}{656}$ $(0^\circ\ 32'\ 9'')$, а за доњу $\frac{1}{800}$ Зодијака $(0^\circ\ 27')$, тј. Аристархов резултат испао је прилично тачан $\left(\frac{1}{720}\right)$, а резултат који је добио Архимедов отац $\left(\frac{1}{1080}\right)$ премален. Архимед поносно подвлачи да је тај резултат добивен помоћу механичке справе (ὀργανικῶς). У стварности ове границе су $32'\,5''$ и $31'\,5''$, тако да се Архимедов резултат одликује изванредном тачношћу.

У Архимедовим астрономским радовима испољила се његова љубав за сложена израчунавања. Како саопштава један каснији писац он одређује не само даљину од Земље до Сунца, него и „даљину од Земље до Месеца, од Месеца до Венере, од Венере до Меркура, од Меркура до Сунца, од Сунца до Марса, од Марса до Јупитера, од Јупитера до Сатурна и од Сатурна до сфере звезда некретница“. Он одрeђује такође пречник Месеца.. Тит Ливије назива Архимеда „ненадмашним посматрачем неба и звезда“.

Архимед очевидно потпуно усваја од оца схватања у астрономији; па ипак он не даје у овој области нека истакнута открића која би се сачувала у сећању савременика. С друге стране, он је учинио и низ грешака; у неким случајевима су већ савременици запажали нетачност његових израчунавања. Тако, Архимед израчунава обим Земљиног екватора (у „Броју пешчаних зрнаца“) на 3 000 000 стадија (461 000 км); овај број је 12 пута већи од броја који је добио Ератостен, који је врло близак стварном. Тако исто је однос пречника Сунца према пречнику Месеца по његовом мишљењу 30 : 1; у стварности он је 10 пута већи. Даљину од Земље до Сунца Архимед процењује на 5 млрд. стадија, тј. 785 млн. км. Стварна даљина је 150 млн. км. Архимед је нетачно одредио трајање сунчане године за коју је добио 365 дана, и поред тога што је, на основи, отприлике у то време (238 г. до н. е.) извршених астрономских израчунавања, египатски свештенички колегијум донео званичну одлуку по којој је трајање сунчане године било утврђено на 365 и 1/4 године. Чувени астроном Хипарх примећује касније: „Из мојих посматрања излази да су разлике у дужини године веома незнатне, а што се тиче сунчевих обилазака изгледа ми да смо се Архимед и ја у нашим посматрањима и из њих изведеним закључцима преварили за 1/4 године“.

Ако се узме у обзир генијалност и прецизност Архимедова мишљења, ове чињенице ће бити још једна потврда, да се астрономијом занимао Архимед у најранијој епохи своје деланости, још за време његовог боравка у Александрији. Потпуно је разумљиво да је Фидија хтео да има у своме сину свог настављача и спремао је Архимеда за астронома; за њега је геометрија била само помоћна наука за астрономију. Стога је Архимед и почео са радом на астрономији, али га је његова природна склоност приморала да врло брзо пређе на друга занимања — на занимање механиком.

И заиста, Архимед се и у астрономији истакао пре света проналажењем сложених механичких инструмената. Ми смо већ говорили о справи за мерење Сунчева пречника; много већу славу је донела Архимеду т. зв. „сфера“ тј. небески глобус на чији опис сада прелазимо.

Цицерон, познаник Марцела, праунука оног Марцела који је 212 год. препустио Сиракузу пљачки и после Архимедова убиства однео оданде „сферу“ коју је овај саградио, прича у својој књизи „De republica“ у тону неусиљеног светског брбљања следеће:

„Сећам се како сам једном заједно са Гајем Сулпицијем Галом, једним од најученијих људи наше отаџбине,... био у гостима код Марка Марцела... и Гал га је замолио да донесе чувену „сферу“, једини трофеј којим је Марцелов прадеда зажелео да украси свој дом после заузећа Сиракузе, града пуног блага и чудеса. Често сам слушао како су причали о тој „сфери“ коју су сматрали као Архимедово ремек-дело, и морам признати да на први поглед нисам нашао у њој ничег нарочитог. Показало се да је другу „сферу“ коју је Архимед направио, Марцел посветио храму Доброчинства; ова је „сфера“ била куд и камо популарнија и имала је много импозантнији изглед. Међутим, када нам је Гал почео са бесконачном ученошћу да објашњава сав систем овог дивног дела, принуђен сам био да дођем до закључка да је овај Сицилијанац био обдарен генијем, којег, рекло би се, човечија природа не може да достигне. Гал нам је испричао да је „сферу“, сличну оној другој „сфери“, тј. у облику пуне лопте, пронашао први Талет из Милета, направивши њен први модел; да је затим Еудокс Книђанин, Платонов ученик, претставио на површини „сфере“ различита сазвежђа откривена на небеском своду... Али, додао је он, да би се претставило Сунце, Месец и пет небеских тела која ми називамо луталицама (планетама), морало се одрећи „сфере“ као пуне лопте, помоћу које се не могу претставити њихова кретања, и измислити „сфера“ потпуно другог типа. Генијалност Архимедова проналаска била је у оној вештини да сједини у једном систему и оствари помоћу обртног кретања тако разнолика кретања разних небеских тела. Када је Гал покретао „сферу“ могло се пратити како при сваком обрту Месец уступа место Сунцу на Земљином хоризонту, слично ономе како му он уступа место и свакодневно на небу; као и на небу могло се посматрати помрачење Сунца, како Месец постепено тоне у Земљину сенку...“

Из других података сазнајемо да су се на овој „сфери“ могле посматрати Месечеве мене, кретања планета, помрачење Сунца и Месеца, да је она била направљена од бакра и да ју је стављао у покрет за око неприметни покретач, који се налазио у унутрашњости „сфере“, очевидно водени покретач. Архимед је придавао овом проналаску тако велики значај да је написао посебну књигу „О из-ради небеске „сфере", која до нас није дошла — једину књигу из области технике коју је он написао.

Постоји и низ других података на основу којих се може закључити да су у овом раном стадијуму развоја, Архимеда највише интересовала питања механике.

У корист тога говори и општи ток развоја његова стваралаштва и хронолошки ред његових дела.

И заиста, већ у најранијем његовом делу из математике,[1]) у расправи „О квадратури параболе", постоје позивања на његове радове из механике („О полугама" и „О равнотежи равних површина"). Стога имамо потпуно право да тврдимо да су Архимеда, већ у периоду првог боравка у Александрији, необично занимала математичка питања. Није он узалуд још у Египту пронашао, или боље рећи усавршио, „пужа" (κοχλίας) — изврсну машину за поливање поља, која је имала велики пољопривредни значај у Египту, где кише скоро нема и где се сва пољопривреда заснива на вештачком наводњавању. Писац I в. до н. е. Диодор, који је добро знао Египат, саопштава: „Обале Нила које се заливају поплавама и које су добро наводњене, доносе богату и разнолику жетву. Нил таложи овде после сваке поплаве нови слој муља, и становници могу лако да заливају читаво острво помоћу машине коју је саградио Архимед, која, по свом облику има назив пужа".[2]) Овај писац се подробније дотиче „пужа" приликом описивања искоришћавања рудника у Шпанији: „Рудари често наилазе на подземне реке; они се боре са њиховим брзим током, скрећући их у косе ровове... Задивљује то што они успевају да исцрпљују до краја сву воду помоћу египатских машина, које је пронашао Архимед Сиракужанин за време његовог путовања у Египат. Поступним преливањима они подижу ову воду до улаза у окно и исушивши окна, раде тамо потпуно удобно. Ова машина је била тако генијално конструисана да су се помоћу ње могле исцрпсти огромне количине воде: без те-

---

[1]) Хронолошки ред Архимедових дела одређује се само на основи позивања у неким од ових дела на друга; у другим случајевима, обрнуто, на основу ових или оних тврђења у једном делу могу се донети закључци да његово друго дело у то време још није могло да изиђе. Руководећи се овим критеријумима ми и распоређујемо Архимедова дела у различите периоде његовог живота.

[2]) Опис Архимедова „пужа" кога покреће роб (на карикатури — пигмеј), дошао је до нас на једној фресци из Помпеје (в. таблу 5). Његову конструкцију објаснио је на основи ове слике, Ђаконо (в. библиогр. именик, N⁰=117).

шкоће се могла читава река извући из Земљине дубине на њену површину. Али, разуме се, не треба се само за то дивити Архимедову генију; ми смо му обавезни за многе још веће проналаске, познате широм света".

Ми смо већ видели са каквим се оштрим негодовањем понео Платон зато што су се Архита, Еудокс и Менехмо усудили да примењују механичке справе за решавање геометриских проблема. Разуме се да се Платон са још већим негодовањем и презрењем морао односити према томе што су се филозофи непосредно бавили механиком. „Оснивачи (механике), каже Плутарх понављајући очигледно Ератостенове речи, били су Еудокс и Архита, који су геометрији дали разнолик и интересантан садржај, занемарујући због практичних и технички важних примена ове науке њене споредне и недоступне проблеме за графичко претстављање... Платон их зато није признавао". Тако исто се морао негативно односити према механици и Аристотел, судећи по целокупном правцу његове научне делатности: механика није наука већ „занатлиска вештина" (ἐμπειρία), достојна роба и сувишна за филозофију и познавање творца.[1]) Дело „Механички проблеми" које се приписује Аристотелу, не припада му. Међутим, ученици Платона и Аристотела усуђивали су се да се у овим питањима не сложе са својим учитељима, јер идеалистичка филозофија није забрањивала механику, као што је то било са атомизмом и материјализмом уопште; на њу су гледали само као на разоноду, да прође време, можда и интересантну, али која нема ничег заједничког са правом науком. „После Платона, — саопштава Плутарх, — механика се, избачена из геометрије, оделила од ње и дуго време је била занемарена у теориској науци, поставши само једна од помоћних практичних грана војне вештине".

У античко доба, како сазнајемо из Проклова коментара о Еуклиду, механика се делила на следеће гране:

1. ὀργανοποιική — вештина израде машина чији је један део βελοποιικά — вештина израде војних машина.

2. Израда сфера, тј. глобуса и модела који претстављају кретање небеских тела.

Овим гранама бавио се Архимед читавог живота.

---

[1]) В. Њутнову примедбу (у предговору „Philosophie naturalis principia mathematica", изд. 1687 г.): „Антички... су правили између механике и геометрије ту разлику, што су све што је тачно приписивали последњој, све мање тачно — првој".

3. θαυματοποιική — вештина израде механичких играчака — њоме се Архимед, као што нам је познато, уопште није бавио.

Али што се тиче Платонова друга, Архите из Таренте, о коме смо већ говорили, познато нам је да је он израдио механичку звечку и механичког голуба, направљеног од дрвета, који је могао да лети. На основи описа овог механичког голуба, који је до нас дошао, може се закључити да је Архита знао да ваздух има тежину и да тежи из места већег притиска ка месту мањег притиска. Ми ћемо се вратити на то питање када буде реч о хидростатичким радовима Архимедовим. Приметимо засад да је укључење израде механичких играчака у систем науке одговарало оном карактеру разоноде за време одмора којим је била обележена механика оног времена. Уосталом, ове играчке су играле улогу прибора за експеримент у механици.

4. αηχανική у властитом смислу, тј. теорија тежишта, полуге, паралелограма, силе итд. можемо бити сигурни да су, ако не Демокрит, а оно његови најближи следбеници — атомисти, не само знали шта је тежиште, него су га знали и да нађу математичким путем. Заиста, изучавајући Архимедове теорије тежишта, ми се убеђујемо да му је унапред познато не само где се налази тежиште сваке фигуре, него и да метод исцрпљивања који он примењује, претставља само преиначење у новом духу метода недељивих величина, у циљу да се обиђу „неочевидне претпоставке" на основи којих се свака линија, слика и тело састоје из недељивих честица, које су биле неусвојиве за Еудоксову математику. Из ових Архимедових доказа јасно је да су његови претходници, који су се ослањали на механику атомиста, растављали паралелограм, да би нашли његово тежиште, на „материјалне" праве линије, паралелне једној од његових страна; уколико се средиште тежине сваке такве „линије" налази у њеној средини, може се сматрати да је сва тежина такве праве усретсређена у њеној средини; тада се средиште читавог система мора налазити на средњој линији. Али тај исти паралелограм може се раставити на материјалне праве линије, паралелне другој од његових страна, и на исти начин доказати да се тежиште мора налазити на средњој линији, паралелној другој страни паралелограмовој; значи, оно лежи на пресеку ових двеју средњих линија.

Тако исто се и троугао растављао на низ „материјалних" правих, паралелних основици; тежиште сваке такве „праве“ налази се у њеној средини, а тежиште целог троугла на правој која спаја ове средине. Резонујући као и у претходном случају долазимо до закључка да се тежиште налази на пресеку средњих линија; одавде већ није тешко закључити, елементарно геометриским путем, да се оно налази на 1/3 дужине средње линије, рачунајући од основице.

Како су дефинисали атомисти само појам „тежиште“, није нам познато. Први пут наилазимо на такву дефиницију у стоичкој физици почетка III в. Стоичка физика имала је мало оригиналан, више компилативан карактер; стога, ако у стоичкој физици налазимо необично интересантно усхићење Архимедовим учењем о тежишту, постоји много основа да се мисли, да су стоици просто позајмили ово учење из науке раније епохе. Анализа Херонове „Механике“ (1, 24), која је наш једини извор (I в. до н. е.), не противуречи овој претпоставци. Овде Херон говори о стоику Посидонију као своме претечи, при чему се, као што се види из општег контекста, Посидоније сматра као претеча Архимедов; стога Херон очевидно не мисли овде на чувеног стоика Посидонија из Анамеје, Цицеронова учитеља, него Посидонија из Александрије који је живео почетком III в. Ево шта каже Херон: „Стоик Посидоније је одредио тежиште помоћу природног (физичког) закона. Он је рекао: „Средиште тежине и равнотеже је тачка која има ту особину да се тежина, која се окачи за ту тачку, подели на два једнака дела“. Стога су Архимед и његове присталице у механици испитали поједине случајеве овог закона и истакли разлику између тачке вешања и тежишта“. Одавде видимо пре свега да је Посидоније посматрао само онај случај када се тежиште поклапало са тачком ослонца, и није видео да је за равнотежу довољно да се тежиште и тачка вешања налазе на једној вертикали; овај пропуст је исправио Архимед.

С друге стране, потребно је истаћи грубу грешку: вертикална раван која пролази кроз тежиште дели тело, по мишљењу Посидонијевом, не на два дела која су уравнотежена (ἰσορροποῦντα), него на два дела која су једнака по тежини (ἴσα, ἰσοβαρῆ).

Грешка, карактеристична за површни дилетантизам стоицизма.[1])

---

[1]) Могло би се, разуме се, помислити да је по среди просто нетачност арапског превода Херона и да је сам Посидоније говорио не о једнакости површина, него о једнакости статичких момената. И заиста, ако један од највећих специјалиста из историје математике Гулч (Hultsch)

Пређимо сада на закон полуге.

Полуга је била једно од најстаријих оруђа које је извело човека из беспомоћног првобитног стања. Овај загонетан механизам помоћу којег се може мањом силом дизати већи терет изгледао је првобитном човеку као нешто чудесно, натприродно. Човек је видео два низа паралелних појава: велики крак полуге који описује велики лук, и мали крак који описује истовремено мали лук, при чему се оба исечка које описују краци полуге, слични један другоме. Овај аналоги низ појава везан је међусобно осовином полуге. Дејствујући на један крак полуге, може се изазвати аналого дејство и другог крака, и постићи резултат који далеко премашује човечју снагу.

Одавде је првобитни човек могао доћи и до општег закључка: ако имамо два аналога низа и на овај или онај начин их повежемо међусобно, можемо, дејствујући на један низ, да изазовемо дејство другог, који далеко премашује људске снаге. На исти начин расуђује аустралиски врач желећи да изазове кишу: он узима две аналоге појаве — облак и кишу, с једне стране, гомилу кречњака којој је дат облик облака, и млаз воде из суда — с друге стране. Међу обема појавама успоставља се веза помоћу нарочитих формула врачања. После тога врач полива гомилу кречњака водом, и то по његовом мишљењу треба да изазове кишу из облака. Ова првобитна наука носи назив симпатичке магије.

До Архимеда учење о полузи сачувало је низ црта ове симпатичке магије.

Ово наивно примитивно прилажење полузи као натприродној појави налазимо још у „Механичким проблемима“, тј. у делу које је писано свега неколико десетина година пре Архимеда. Ово се дело раније погрешно приписивало Аристотелу; у данашње време њега исправно сматрају за пери-

---

допушта себи да двапут, 1878 г., преводи у свом издању VIII књиге Папове, реч ἰσοῤῥοποῦντα (који су у равнотежи) речима „aequali pondere“ (исте тежине“ стр. 1030, 27; 1032, 20), онда је таква грешка средњевековног арапског преводиоца била више него природна. Али ми видимо да компилатор Херон позајмљује не само ово тумачење, него и низ поставки у којима се оно примењује на делу: кретање по стрмој равни, налажење тежишта троугла, превртање камења помоћу полуге. Стога треба сматрати да је стоичка механика заиста правила такву грешку и да они задаци из Херонова уџбеника, у којима је насупрот другим деловима те исте књиге овај принцип примењен, потичу из исте Посидонијеве књиге.

патетичку компилацију Стратонове епохе, када је у Аристотелово учење продрло већ низ атомистичких елемената.

Ту ми читамо: „Из онога што настаје сходно природном току ствари, код нас изазива дивљење све оно, чије узроке не можемо да докучимо. Из онога пак што произилази супротно природном току ствари нас поражава све што се вештачки ствара за добро људи. Та у многим случајевима природа поступа супротно нашој користи. Природне појаве увек настају по једном те истом реду, док је човеку корисно једно, други пут друго. Ако треба да извршимо нешто упркос природном току ствари, ово се показује као тешко, везано са препрекама, и захтева вештину. Стога ми и називамо онај део вештине која нам помаже у борби са таквом врстом препрека, „сналажљивошћу" (μηχανή). Ствар стоји онако како је рекао песник Антифонт:

Са вештином ми побеђујемо природу,
Када она хоће да победи нас.

У такву врсту задивљујућих ствари спадају они случајеви када мање савлађује веће, када ствар мале тежине сама покреће велике тежине, и све оно што ми називамо м е х а н и к о м. Најважније од свих питања механике јесте питање полуге. На први поглед изгледа бесмислено да мања сила покреће већи терет и усто чак помоћу још већег увећавања његове тежине: тај исти терет који не можемо да покренемо без помоћи полуге, сасвим лако ћемо покренути ако му додамо још тежину саме полуге...

„О с н о в н и у з р о к с в и х с л и ч н и х п о ј а в а ј е — к р у г".

Одмах затим писац нашироко и са усхићењем размишља о чудесним особинама круга (ова размишљања су, можда, црпена из магичне или полумагичне псеудонаучне литературе) и наставља: „Ето зашто нема ничег парадоксалног у томе што је круг први узрок свих чуднијих појава. Заиста, све што се запажа на теразијама, своди се на круг, све што се запажа на полузи, своди се на теразије, а све што се уопште односи на механичко кретање своди се на полугу".

Из примедаба Демокритових и Платонових види се да је у њихово време закон полуге био већ добио вид математичке зависности (једнакост момената). Али карактеристична преживелост м а г и ч к и х претстава и код Демокрита и у „Механичким проблемима" је у томе, што овде веза између нападних тачака сила и тачке ослонца н и ј е безусловни услов дејства закона полуге, и што је основна полазна тачка античке механике с л и ч н о с т међу исечцима, одн. троуглима који постају као резултат померања кракова полуге. У истим „Механичким проблемима„ полуга се често појављује просто као нека магична, натприродна сила, скривена скоро иза сваке појаве: кад писац не може да објасни дејство неке машине, на пример котура или клина, он се задовољава голом изјавом да је ту скривена полуга, не објашњавајући како ова полуга дејствује.

Ми се задржавамо подробно на овом питању зато што је у историји науке, под утицајем идеалистичке филозофије, до последњих година преовлађивала тежња да се стварање научне механике, засноване на математици, приписује питагорејцима, Аристотелу и перипатетицима, а да се ништи Архимедова улога, под изговором да је крив због простог circulus vitiosus-a (Max).

Размотримо разлоге који се истичу у одбрану овог гледишта.

Већ је поменути Архита „први пут написао систематску расправу из механике, основану на математичким принципима“ (Лаерције Диоген). Стратон је, о коме смо такође већ говорили, написао књигу „О металним механизмима“. Одавде се може само закључити да су ови научници давали математичко тумачење неким механичким појавама, на основи неких механичких закона; закључити на основи тога да су они већ дали математичку основу закону полуге немогуће је. А то је невероватно: кад би они дали такав доказ ми бисмо га нашли у „Механичким проблемима“ који су изишли у III в., док међутим у њима налазимо само полумагично дечје блебетање.

Али тврде да је тобож већ Аристотел дао првобитни израз закона о одржању енергије па чак и принципа могућих померања. Притом, трпају на једну гомилу и стварна Аристотелова дела и каснију компилацију — „Механичке проблеме“. Размотримо појединачно и једно и друго.

У Аристотела (у делу „О небу“) налазе се само следеће опаске:

1) „За равнотежу је потребно да на тежину окачену о крај сваког крака, делује иста сила“ (то се може разумети само у том смислу да силе sic!, које дејствују на оба краја полуге морају у случају равнотеже да буду једнаке

једна другој. Тако су и схватили Аристотела у средњем веку).

2) „Мањи и лакши тег произвешће веће кретање ако на њега делује иста сила... Брзина мањег тела односи се према брзини већег, као веће према мањем".

То је све. Мислим да се одавде може извести само један закључак. Свакако да је Аристотел, као и његови претходници, знао за математичку формулацију закона полуге, али оно што ми називамо моментом, он је називао силом. Полазећи затим од пропорционалности дужине крака брзине кретања његова краја, он је сматрао да је сила једнака производу тега (масе) и брзине: m v. Ова незгодна терминологија господарила је у средњем веку; њени остаци сачували су се и до наших дана: и у нашим уџбеницима носи још кинетичка енергија $\frac{mv^2}{2}$ назив „живе силе". Овде не може бити ни речи о каквом закону одржања енергије или принципу могућих померања.

Пређимо на „Механичке проблеме". Ми смо већ видели да расуђивања писца овог дела, на којима он заснива закон полуге, имају магички карактер. Исти карактер носи и његов други, недовољно разумљив, доказ закона полуге. „Природно кретање односи се према природноме, као противприродно према противприродноме". Очигледно је и за њега, као и за Аристотела, појам „силе" истоветан са нашим појмом „момента". „Под утицајем једне те исте силе, више ће се померити онај од покретних терета који је даљи од тачке ослонца". Али у овом делу налази се још један израз који је пружао истраживачима извесну основу да тобоже у Аристотелу виде претечу данашње научне механике: „Уколико је терет даљи од тачке ослонца полуге, тим лакше ће он покренути полугу; узрок: тачка која се налази даље од средишта описаће (за исто време) већи лук". Овде се, ако хоћете, може наћи у зачетку мисао, да се добитак у сили изједначује с губитком на путу, а одавде је тобож, близу до закона одржања енергије. Али зар није једноставније сматрати да писац „Проблема", који доста тешко мисли, просто констатује чињеницу која је дата у огледу, да једно исто напрезање руке, стављене на крај једног крака полуге, подиже терет, окачен на крај другог крака, на тим веће растојање, што је дужи овај крак; па према томе, што је дужи крак, лакше је померити терет на једнако растојање, тим је мањи за то потребан напор руке[1]). Али чак и ову скромну мисао ми не смемо да припишемо Аристотелу, јер је писац „Механичких проблема“, као што сам показао у свом чланку „Демокритова механика“, сем Аристотела компилирао најразличитије изворе, између осталог и атомистичке.

Напоменимо још да сви писци који су живели пре Архимеда прилазе полузи с гледишта д и н а м и к е, тј. изучавају неуравнотежену полугу, полугу у к р е т а њ у. У науци, која је у то доба била у стању почетног развоја, такво прилажење није могло да да ништа сем збрке и разочарења.

Пре него што се вратимо на Архимеда, обратимо пажњу још на једну карактеристичну особину доархимедовске механике. Од доба Еудокса била су категорички забрањена у м а т е м а т и ч к и м радовима свака инфинитезимална излагања. Али је механика већ од доба Платонова била оглашена не за науку, него за практичну ἐμπειρία, која је имала за циљ „не да узвиси душу до света идеја и до творца“, него да саопшти одређена практична искуства. Стога се није могло ништа приговорити против примене метода бесконачно малих величина у механици, ако је само она олакшавала да се усвоји градиво и нађу нова решења. И заиста, као што смо већ видели, ми можемо на основи Архимедова начина налажења тежишта да изведемо закључак да су до њега тежишта налазили помоћу атомистичког растављања облика. Атомистичке методе примењивале су се чак и у перипатетичкој механици.

Тако се у „Механичким проблемима“, за објашњење чињенице да се у воденом виру сва тела одвлаче у средину,

---

1) Сматрамо да је сасвим недопустив покушај да се у овоме види како је Аристотел, макар и примитивно, формулисао закон могућих померања. Он је произвољан не само зато што писцу ни на крај памети није да уноси услов идеалних веза и бесконачно малих померања. Принцип могућих померања захтева да у случају равнотеже збир радова које врше силе за свако могуће померање система, потчињеног идеалним везама, буде једнак нули, тј. у случају који нас интересује, да радови које врше силе које дејствују на крају сваке полуге (или, што је исто, да производи ових двеју сила и елементарног померања крајева полуге), буду једнаки један другом. Међутим, код писца „Механичких проблема“ неопходан услов за равнотежу је једнакост самих сила. Затим, на оном месту „Проблема“ које нас интересује, уствари се и не помиње померање. Истина овде се говори о томе да ће тачка описати већи лук, да ће се више померити, али се притом позива на речено у глави I, а у овој глави писац употребљавајући исти израз: „описујући већи круг“, увек додаје још: „за једнако време“, тј. има у виду не померање, него брзину.

вир растављао на низ концентричних „атомских" кругова изванредно мале дебљине. Тако исто се практични уџбеник механике Херона Александриског, који је састављен приближно у I в. н. е., ослања не само на Архимеда, већ и на перипатетичку (Стратон и др.) и стоичку (Посидоније Александриски) литературу. Стога, уколико ми налазимо овде размишљања карактеристична за атомистичку науку, она имају бесумње као непосредне изворе перипатетичка и стоичка гледишта у механици. За објашњење дејства клина, овде се клин раставља на изванредно велики број атома-клинова који имају заједничку висину са великим клином. На исти начин се и ударац разбија на атоме ударце, „најмање од свих познатих удараца", како се изражавао Херон.

Стигавши у Александрију, Архимед се бесумње бацио на сву ову књижевност из теориске механике, тако блиске његовим научним стремљењима. Он је дошао до закључка да се поставке и механичке методе могу применити и код решавања оних чисто математичких задатака, који се не могу решити начинима елементарне геометрије, али да зато треба преиначити механику у тачну, строго математичку науку, чије би теореме биле логички закључак малобројних, потпуно очевидних поставки. И заиста, најоригиналнија Архимедова метода, која је давала најбоље резултате, при решавању геометриских задатака који су захтевали инфинитезимално извођење, примењивали су они при свом постављању з а к о н а п о л у г е.

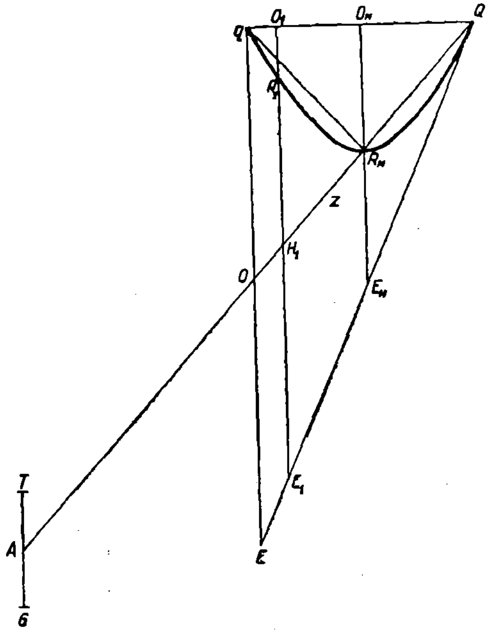
У чему је тајна ових решења? Свима је позната прича о војнику који је учио шкртицу бабу да кува чорбу од секире. Пошто је домаћица додала у чорбу месо и кромпир, ова је заиста испала врло укусна, али се секира није скувала већ је лежала на дну шерпе; она се могла без сваке штете склонити.

Исто је било и са Архимедовом методом полуге: она се није могла применити а да се површина слике не растави на необично мале елементе, т. ј. без инфинитезималног поступка, а кад би се применио инфинитезимални поступак, који је забрањивала Еудоксова школа, могло би се лако проћи и без полуге.

Ствар је очевидно у томе, што Архимед није нашао ни трагове инфинитезималног поступка у м а т е м а т и ч к о ј литератури коју је проучавао — код Еудокса, Менехма, Аристеја, Еуклида и др.; он је био потпуно избачен и Архимед

Архимед. Једна од античких биста за коју се сматра да претставља Архимеда

чак није знао да он постоји. Али, изучавајући ниску, примењену науку — механику, он је наилазио на овај поступак на сваком кораку и видео је до каквих сјајних открића нових чињеница доводи механика — пре свега при налажењу тежишта. Стога је он решио да пренесе механичке методе у геометрију, не схватајући јасно да ствар није у механици него у чисто математичком инфинитезималном поступку, који она примењује. „Ненаучност“ пак самог овог поступка ниуколико није плашила Архимеда јер га је Еуклидова школа, коју је он солидно прошао, научила до савршенства вештини, да ма који закључак, добијен „без научног доказа, на основи недовољно очевидних поставака“, претвара у строго математички доказ; то се радило помоћу методе исцрпљивања (применом reductio ad absurdum).



Сл. 12

Да би читаоцу било јасно како је Архимед примењивао закон полуге на решавање геометриских задатака, навешћу решење задатка о налажењу површине параболичног сегмента, које се налазило у његовом писму Ератостену, а које он посматра овде само као претходну радњу која захтева потврду помоћу строгог доказа (сл. 12).

Већ је раније било доказано да је у параболи

$$E_1O_1 : O_1R_1 = Qq : qO_1 \qquad (1)$$

и да је према томе, $E_M R_M = R_M O_M$, јер је $QO_M = O_M q$

Али

$$Qq : qO_1 = QO : OH_1, \tag{2}$$

те је

$$E_1O_1 : O_1R_1 = QO : OH_1. \tag{3}$$

Сада Архимед додаје QO на отсечак OA, једнак QO; тада је

$$E_1O_1 : O_1R_1 = OA : OH_1 \tag{4}$$

Уколико је

$$E_M R_M = R_M O_M \; ; \; O_1 H_1 = H_1 E_1 \tag{5}$$

имамо

$$qO = OE \tag{6}$$

Затим Архимед посматра праву AQ као полугу, а параболични сегмент $qR_M Q$ и троугао qEQ као две материјалне плочице положене једна на другу. За даље решавање он примењује методу математике атомиста, тј. посматра и сегмент $qR_M Q$ и троугао qEQ као да се сваки састоји од необично великог броја материјалних правих линија, паралелних qE и тесно прилубљених једна уз другу. Из параболичне плочице он узима произвољну праву R_1O_1 из броја ових материјалних правих, и преноси је у тачку A тако, да она заузме положај GT и да тачка A буде тежиште. Затим он доказује да су елеменат параболичног сегмента $qR_M Q$ — права O_1R_1 пренета у положај GT, — и односни елеменат троугла QEq — права O_1E_1, задржана на свом месту — у равнотежи. За то је потребно и довољно да краци AO и OH_1 полуге AH_1 буду обрнуто пропорционални теретима TG и E_1Q_1. Уколико је $CT = O_1R_1$, из односа (4) следује

$$E_1O_1 : TG = AO : OH_1 . \tag{7}$$

Према томе овај је услов испуњен и тегови ће се узајамно уравнотежити. Али E_1O_1 је произвољно узет елеменат троугла QEq; јасно је да ће, оно што је тачно за E_1O_1 и R_1O_1 једнако TG, бити тачно и ма за који елеменат, тј. ма за који отсечак праве, паралелан qE и који се налази између Qq и QE, и његовог дела који се садржи у параболичном сегменту $qR_M Q$. И тако, свака таква права у троуглу qEQ биће у равнотежи са односном правом у параболичном сегменту, ако се последња пренесе у тачку А. Ми можемо да раставимо све параболичне сегменте на праве паралелне qE, да их пренесемо све у тачку А. Према томе ће цео параболични сегмент, пренет у тачку А, бити у равнотежи са целим троуглом који је остао на свом месту.

Али QO је средња линија qEQ, јер је на основи (6), $qO = OE$; значи, тежиште троугла лежи у тачки Z, за коју је

$$OZ = \frac{1}{3}\ OQ = \frac{1}{3}\ AO,$$

јер није само Архимед доказао, него је још и пре њега на основи атомистичких метода било доказано да тежиште троугла лежи на 1/3 средње линије (в. стр. 62).

Можемо сматрати да је тежина читавог троугла EqQ усретсређена у његовом тежишту, у тачки Z. Али, као што смо видели, троугао EqQ, који је остао на свом месту, биће уравнотежен са параболичним сегментом $QR_M q$ пренетим у тачку А. Отуда се, на основи закона полуге, тежина параболичног сегмента $qR_M Q$ према тежини троугла EqR има као $OZ : AO = 1 : 3$.

Али се површине хомогених равних тела односе као њихове тежине, па значи, да је површина параболичног сегмента једнака 1/3 површине троугла qEQ.

Троугао QqO, који са троуглом QEq има заједничку основицу а двапут мању висину, једнак је по површини половини троугла QEq; троугао $QR_M q$, који са троуглом QqO има заједничку основицу и висину двапут мању, једнак је по површини половини троугла QqO. И тако је

$$\Delta\ QR_M\ q = \frac{1}{4}\ \Delta\ EQq,$$

одакле је површина параболичног сегмента једнака 4/3 површине троугла $QR_M q$, уписаног у овај сегмент тако, да се његова висина поклапа са висином параболе.

У каснијем Архимедовом делу које је дошло до нас, ово решење се даје као претходно, еуристичко, које ће постати научно тек пошто се добијени закључак потврди методом исцрпљивања помоћу reductio ad absurdum. Може се мислити да је Архимед разрађивао ове „механичке" методе већ у ранијој епохи своје делатности, с тим да би их, доказавши своје механичке претпоставке строго математичким путем, укључио у свој систем математике.

Пошто су ове методе имале, као што сте се уверили, као полазне тачке закон полуге и учење о тежиштима, прва Архимедова брига била је да дâ строго математичко тумачење ових закона.

Са њему својственом генијалном интуицијом Архимед је одмах схватио да је, при тадашњем стању динамике, немогуће кренути даље од неоснованих фантазија и произвољних претпоставки. Стога се он начелно ограничава на изучавање закона равнотеже: налажење тежишта и анализу уравнотежене и непокретне полуге. Тако Архимед постаје оснивач нове науке — статике.

Прва књига дела „О равнотежи равних тела или о тежиштима равних тела“, које је дошло до нас у две књиге, посвећена је питањима теориске механике. Ова прва књига је Архимедово дело које је најраније до нас дошло. Постулат и првих седам теорема ове књиге посвећени су баш теорији двокраке полуге (теразијама); остали део је посвећен налажењу тежишта троугла, паралелограма и трапеза.

На чему заснива Архимед закон о полузи?

У свом излагању он истиче следеће постулате: „Потребни су нам (αἰτοῦμεϑα), тј. ставимо овакве предуслове (постулате)[1]:

1. Једнаке тежине, које се налазе на једнаким растојањима (од тачке ослонца), у равнотежи су, а једнаке тежине које се налазе на неједнаким растојањима, нису у равнотежи, али превага бива на страни оне тежине, која се налази на већем растојању.

2. Ако два тега који се налазе на одређеном растојању држе равнотежу један другоме, и ако једноме од ових тегова нешто додамо, онда тегови више неће бити у равнотежи, него ће претегнути страна оног тега који је повећан.

3. Ако се на исти начин одузме нешто од једног тега, тегови неће бити у равнотежи, него ће претегнути онај од којег није ништа одузето.

---

[1]) „Да ли се овде говори о полузи која је сама по себи лишена масе и чији се крајеви непосредно поклапају са тежиштима обешених слика, тако да се добија лабилна равнотежа, или се говори о осовини, о чијим су крајевима обешени на концу тегови, тако да се добија стабилна равнотежа, остаје у овом Архимедовом делу потпуно неразјашњено“. (В Штајн).

4. Ако се једнаке и сличне равне слике поклапају при полагању једне на другу, поклопиће се и њихова тежишта (τὰ κέντρα τῶν βαϑέων).

5. У неједнаким али сличним сликама тежишта су слично распоређена.

6. Ако су две величине, које се налазе на извесном растојању, у равнотежи, онда су у равнотежи и две њима једнаке величине које се налазе на истим растојањима (под величинама овде Архимед разуме линије, равни и тела. — С. Л.).

7. Ако је ивица неке слике испупчена свуда у исту страну онда се тежиште мора налазити у унутрашњости слике.

Ови постулати су потпуно аналоги по облику постулатима који су узимани у основу античке геометрије, чак и те исте Еуклидове геометрије. С гледишта античког схватања аксиоматике они треба да претстављају очигледне истине. Међутим, није тешко уочити да шести постулат не претставља никакву очевидну истину. Заиста, кад би се превео на обичан језик, овај би постулат гласио: ако би се терет са једног крака полуге заменио другим теретом исте масе и са тежиштем на истој вертикали, равнотежа се не би покварила. Није тешко запазити да овај ни из далека очевидан постулат implicite садржи у себи тврђење о једнакости статичких момената оба тега. Узмимо за пример најпростији случај: материјална тачка масе M, која се налази на растојањуL од тачке ослонца, замењена је двема материјалним тачкама са масом M/2 свака, од којих се једна налази на растојању $L + l$ од тачке ослонца, друга на растојању $L - l$. Тада су масе оба терета једнаке и тежишта се поклапају Али у овом случају очевидно су и моменти једнаки, јер је

$$ML = \frac{M}{2}(L + l) + \frac{M}{2}(L - l)$$

Пошто се свака слика може претставити у виду мноштва парова честица, од којих се једна налази десно од вертикале која пролази кроз тежиште, а друга лево, на истом растојању, то се овај закључак може применити ма на која два равна терета са истом масом и истим тежиштем.

На тај начин ово тврђење није очевидно: ми бисмо могли са истим правом да узмемо за постулат оно што се показује као коначан циљ доказа — једнакост момената терета разнокраке полуге. Истина, поставка коју је усвојио Архимед, утолико је једноставнија[1].

И тако, Архимед тежи да своје расуђивање заснује на аксиомама, како је то у математици оног времена захтевала, ако можемо тако да се изразимо, научна пристојност; уствари он уноси у основу свог расуђивања чињеницу о једнакости збира момената заснованих на експерименту.

Уосталом, суштина питања се састоји у томе што у делу које разматрамо уопште није дата дефиниција најважнијег појма — појма тежишта. Очигледно је ову дефиницију Архимед већ дао у књизи „О теразијама" или „О полугама" (Περί ζυγῶν). Уколико се може судити на основи позивања на ово дело, овде су били дати постулати и опште теореме учења о тежиштима, којих нема у делу које је до нас дошло, као и, вероватно, теореме о тежиштима тела (пирамиде, купе, обртног параболоида и т. д.). Као што видимо из указивања Папа који је живео у III в. до н. е., указивања која потврђује теорема 4 разматраног дела „О равнотежи" и теорема 6 дела „О квадратури параболе", Архимед је разумео под тежиштем тачку која има особину да остаје у равнотежи кад се за њу обеси тело без обзира на положај који му је дат. „Ово је закон полуге у теорији тежишта" — читамо код Папа[2]). — Сазнаћеш основне поставке које се доказују помоћу ове теорије, ако прочиташ Архимедово учење о равнотежи". У делу „О квадратури параболе" Архимед каже да је ова поставка д о к а з а н а код њега на другом месту — Очигледно у делу „О полугама".

Као што је речено горе, већ је до Архимеда стоик Посидоније дефинисао тежиште као тачку која има особину да тело дели на два једнака дела (тачније, који имају једнаке моменте), кад се кроз тачку повуче вертикална раван.

---

[1]) Први пут је указао на начелну неубедљивост Архимедова расуђивања, Мах (в. библиогр. именик, № 49), али он неправично осуђује Архимеда за circulus vitiosus: ако се усвоји Архимедова аксиома, све остало л о г и ч к и настаје из ње. Чвалина (в. библиогр. именик № 41), усвајајући у општем „Маха", даје овакву, потпуно несхватљиву примедбу: „Код Архимеда се закон полуге формулисао на овај начин: полуга је у равнотежи ако су терети обрнуто сразмерни квадратима (!) кракова". Ово је највероватније грешка преводиоца (оригинала немам).

[2]) Књига VIII, глава 8.

Како саопштава Херон (у својој „Механици")[1]), Архимед и његова школа су продубили ову поставку истичући разлику између тежишта и тачке ослонца. Заиста, Архимед је схватио да је у већини случајева немогуће фактички окачити тело о тежиште: тако вешање тела може се извршити само у м и с л и м а (κατ'επίνοιαν) како се изражава Пап;[2]) Но ради практичног налажења тежишта треба кроз тачке ослонца повлачити вертикалне равни, вешајући тело у разним положајима и тражити тачку пресека таквих равни.

Све ове особености: 1) само схватање тежишта, 2) д о к а з о његовом постојању и 3) начин његовог налажења помоћу тачке ослонца — карактеристичне су код расуђивања о тежишту, које се налази код Папа. Пошто и сам Пап оштро супротставља оригиналне делове свог рада овом „опште познатом" делу и указује на Архимеда и на Херонову „Механику", као на његове изворе, и пошто се и у Хероновој „Механици" не налазе таква расуђивања, можемо с пуним правом да сматрамо да су ова расуђивања позајмљена од Архимеда и да их стога овде дамо.

„Нека је дата вертикална раван ABCD, управљена према средишту васионе, камо је управљено све што има тежину. Нека је AB права, паралелна равни по којој ми ходамо (водоравна). Ако ставимо неко тело које има тежину на праву AB тако да раван ABCD у наставку пресеца тело, и ако га померамо, онда ће раније или касније тело стећи такав положај да ће престати да се љуља и неће падати. Ако, поставивши на тај начин тело, замислимо да је раван ABCD продужена, она ће поделити тело на два уравнотежена дела, који ће претстављати неку врсту теразија са тачком ослонца у равни. Померимо сада терет тако да он додирује AB другим делом своје површине. После низа клаћења он ће опет заузети такав положај да ће бити непокретан чак и када га не подржавамо, и неће пасти. Ако поново замислимо раван ABCD као продужену, она ће поново поделити терет на два дела која су међусобно у равнотежи и мораће се сећи са равни о којој смо горе говорили, која такође дели терет на два уравнотежена дела. Заиста, ако друга раван не пресече прву она ће у целини полазити кроз један од уравнотежених делова, и стога једни те исти делови које образује друга раван и биће и неће бити у равнотежи, што је немогуће.

---

1) Књига I, глава 24.

2) Стр. 1030, ред 12.

Замислимо сада да је права AB, вертикална према равни по којој ходамо, управљена друкчије: према средишту васионе (т. ј. вертикална). Нека се, слично горе размотреном случају, терет налази у тачки A, тако да му права AB служи као ослонац. Ако праву AB, пошто тело дође у равнотежу, продужимо, онда ће један њен део проћи кроз тело. Замислимо да је отсечак прве унутар тела сачувао свој положај (у односу на тело), а да је само тело положено на праву AB другим делом своје површине и да је дошло у равнотежу. Ја тврдим да ће се права AB, ако је сада продужимо, пресећи са првим отсечком у телу. Заиста, ако се она не пресече (у телу), моћи ће се кроз обе ове праве повући равни које се не секу једна с другом у телу, тако да ће свака од њих сећи тело на делове, који се истовремено и налазе и не налазе у равнотежи један према другоме, што је немогуће. Значи, да ће се те праве сећи у телу. Тако исто ће се наставак праве AB, ако се тело стави у неке друге положаје на A и дође у равнотежу, пресећи са горе поменутим отсечцима, који пролазе кроз тело. Одавде је јасно да ће се све праве, које су у мислима повучене на начин који смо указали, пресећи у једној те истој тачки. Ова се тачка и зове тежиште. Јасно је ако замислимо да је тег обешен о тежиште, да се он неће клатити, него ће непокретно задржати ма који положај који му дамо. Заиста, свака раван, повучена кроз ову тачку, делиће терет на два дела која су међусобно у равнотежи, тако да тело неће имати никаквог разлога да мења положај".

Тако је Архимед доказивао да тежиште има наведену особину, али то још не значи да га је он тако дефинисао. Потпуно је могуће да је Архимед дефинисао тежиште као тачку која има особину да се равнотежа не поремети ако се у њу пренесу све тачке терета — особину од које је касније полазио Херон[1]). Тада у читавом току расуђивања нема никаквих логичких недостатака, али ни сам поступак преношења свих тачака па, ни могућности постојања тежишта у наведеном смислу, није нешто очевидно. Ово је опет експериментална чињеница само протумачена; ми се на огледу можемо уверити само у то, да се равнотежа неће пореметити приликом замене једног тега другим, ма како малим по величини, али једнаким му по тежини и стављеним у област тежишта.

---

[1]) Глава 36, књ. II његове „Механике".

Усвојивши горе наведене постулате Архимед пре свега доказује три обрнуте теореме, које непосредно проистичу из њих (теорема 1—3). Интересантнија од њих је теорема 4: „Ако две једнаке величине имају различита тежишта, онда заједничко тежиште лежи на средини праве која спаја ова тежишта“. Ова теорема је само резултат двеју теорема, које се очигледно налазе у делу о полугама: прво, овде се узима као доказано да ово заједничко тежиште лежи негде на правој која спаја два терета („оно, да тежиште лежи на правој AB било је већ доказано“). Друго, овде се сматра познатим да ће систем бити у равнотежи при преношењу тачке ослонца у тежиште, а ова је теорема, као што смо видели, била највероватније доказана исто тамо (стављање тачке ослонца у тежиште — то је изузетан случај вешања о тачку која се налази у истој вертикали са тежиштем). Примивши ове две поставке Архимед доказује без икакве тешкоће, путем reductio ad absurdum, да тежиште може бити само у средини.

У теореми 5 узимају се три међу собом једнаке величине, које леже на једној правој и које су подједнако удаљене једна од друге. Из претходне теореме је очевидно да се тежиште овог система поклапа са тежиштем средње величине. Отуд је очевидно да ће, ма колико имали једнаких и равномерно распоређених величина које леже на једној правој, њихово заједничко тежиште лежати на средини ове праве (на основу теореме 5).

После ових лема Архимед доказује основну теорему (теорему 6): Самерљиве величине, постављене од тачке ослонца полуге на растојања обрнуто пропорционална њиховој тежини, у равнотежи су“.

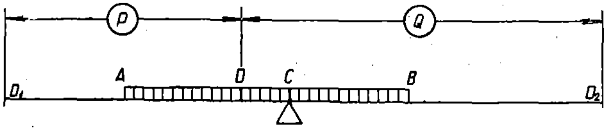
Овај доказ је колико прост толико и фини. Нека k буде заједничка мера теретима P и Q, и нека се k налази у P m пута, а у Q — n пута. Поделимо полугу, тј. праву AB која спаја тежишта терета, у тачку C у односу n :m (на n јединица и m јединица) и у тачки D у односу m : n (на m јединица и n јединица). Треба доказати да ће полуга бити у равнотежи при премештању тачке ослонца у C. Одложимо лево од A отсечак AD_1, једнак AD (сл. 13), а десно од B отсечак BD_2, једнак BD. Тада, очигледно, D_1A, има m јединица дужине, AD — m јединица дужине, AC — n јединица дужине, BD — n јединица дужине, CB — m јединица дужине, BD_2 — n јединица дужине.

Полуга AB једнака је $m+n$ јединица дужине.

Права D_1D_2 једнака је $D_1A+AB+BD_2=2m+2n$ јединица дужине.

Отсечак $CD_2=CB+BD_2=m+n$ јединица дужине.

На тај начин тачка C је средина дужи D_1D_2. Поставимо на свакој јединици дужине терет $\frac{k}{2}$. Тежиште свих ових терета, постављених на отсечку D_1D, биће, на основи теореме 5, тачка A; њихова заједничка дужина једнака је $2m \cdot \frac{k}{2}=mk=P$. Значи, сходно постулату 6, са овим теретима може се заменити терет P, а да се равнотежа не поквари. Исто тако тежиште свих ових терета, постављених на отсечку DD_2, биће тачка B; њихова заједничка тежина је једнака $2n \cdot \frac{k}{2}=nk=Q$. Значи, сходно постулату 6, са овим теретима може се заменити терет Q, а да се равнотежа не поремети.



Сл 13

Али на основи теореме 5, тежиште целога система лежаће у средини дужи D_1D_2, т. ј. у тачки C, што је требало доказати.

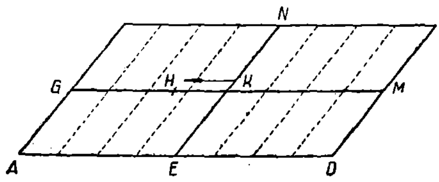
У теореми 7 овај се доказ примењује, по познатом Еуклидовом шаблону, и код случаја несамерљивих величина. У оном месту дела о равнотежи које смо размотрили, реч је само о праволинијској полузи. Али су Архимеду били добро познати закони криволинијске полуге; о овој полузи Архимед очевидно говори у свом изгубљеном делу „О теразијама“. Код Херона (I, 33) читамо: „Архимед је доказао да је и у овом случају однос терета обрнуто пропорционалан растојањима“. Исто тако, говорећи о изузетном случају криволинијске полуге, о равнотежи терета обешених о два концентрична круга, Херон (II, 7) додаје: „То је доказао Архимед у свом делу о равнотежи“.

Пређимо на питање тежишта.

Задаци проналажења тежишта интересовали су Архимеда првенствено као геометра — они су му давали материјал за сјајне прераде и доказе. Њихов значај није велики за историју механике. Стога ћу се дотаћи овде само најпростијих задатака, задатака о тражењу тежишта паралелограма и троугла, да би окарактерисао основне разлике између Архимедових доказа и доказа његових претходника, о којима смо већ говорили (стр. 62).

Теорема 9 гласи да тежиште паралелограма лежи на правој која спаја средине супротних страна.

Ради доказа ове теореме узима се лажна претпоставка да тежиште не лежи на овој правој, него се налази у тачки H (сл. 14). Свака од половина стране AD (AE и ED) дели се на толико међу собом једнаких делова, да сваки од њих буде мањи од KH, и кроз њих се повлаче праве, паралелне бочним странама. Добија се низ подударних паралелограма. Тежиште целе слике лежи на правој која спаја тежишта двају средњих паралелограма, а сходно постулату 7 (стр. 73), тежиште испупчене слике лежи у њеној унутрашњости и према томе тежиште не може да се налази у тачки H, ма какво било мало растојање од средње линије до H. Према томе тежиште треба да лежи на средњој линији EN, па дакле и на средњој линији GM, значи на њиховом пресеку или на пресеку дијагонала (теорема 10).



Сл. 14

На тај начин је решење очевидно познато још до почетка доказа, и Архимед тежи да сведе на апсурд свако друго решење. Ко је упознат са општом методом конструкције аналогих доказа код Еуклида и Архимеда, тај зна да ова решења претстављају обилазак атомистичког инфинитезималног поступка: растављајући паралелограм на вертикалне дужи, које су већ било које задате величине, Архимед га уствари раставља на недељиве величине, али у коначном решењу отстрањује све што има атомистички карактер. У механици до Архимеда паралелограм се очевидно просто растављао на „материјалне“ линије паралелне једној од бочних страна; уколико се тежиште сваке такве „линије“ налази у њеној средини, може се сматрати да је сва тежина такве дужи усретсређена у њеној средини; тада тежиште читавог система треба да се налази на средњој линији итд. (стр. 73).

Све речено може се скоро дословце поновити и за теорему 8 — о тежишту троугла. И овде се, као што смо говорили (стр. 73), троугао првобитно раставља на низ „материјалних“ дужи, паралелних основици. Архимедов задатак је био само да реконструише ово решење, да би оно задовољило захтеве строгости. Он је поступио исто као и у случају паралелограма, учинивши претпоставку да се тежиште не налази на средњој линији, и применивши затим reductio ad absurdum.

У вези с реченим било би врло важно установити шта је Архимед подразумевао под тежиштем равне слике: да ли је он имао у виду тела у облику плочице са врло малом дебљином (тада би се тежиште налазило на средини дебљине), или пак апстрактне слике граничног типа. Код Херона (I, 24) читамо следеће: „Нико не мисли да пориче да уствари тежиште могу да имају само тела. Ако пак говоре да и геометриске фигуре (треба разумети — нематеријалне), равне и телесне, имају неко одређено тежиште, онда је (смисао овог израза) довољно објаснио Архимед“. Говорећи (у расправи „О теразијама“) о тежишту геометриских слика, Архимед је очевидно мислио на идеална, нематеријална тела.

У најтешњој вези с Архимедовим учењем о тежишту налазила се и његова теорија о подели терета између ослонца; стога је врло вероватно да је његова књига „О ослонцима“ која до нас није дошла, била написана у ранијој епохи његове научне делатности, можда већ у Александрији.

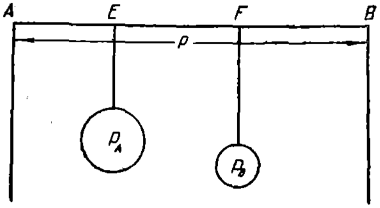
Наводећи низ правила поделе терета између ослонца, Херон у својој „Механици“ каже: „Архимед је већ указао на начин решења таквих задатака у књизи која се зове „Књига о ослонцима“. Одавде можемо закључити да она теорија о подели терета између ослонаца, коју ми налазимо на овом месту Херонове „Механике“, књиге која има компилативни карактер, у општим цртама потиче од Архимеда. Само се карактеристична грешка која потиче, као што смо већ говорили (стр. 73—74), од стоичке механике, и која се састоји у томе што се терет подједнако распоређује међу ослонцима, независно од њиховог распореда, не може приписати Архимеду. Отстранивши ове очигледне глупости из Херонова расуђивања, добићемо у основним цртама Архимедову теорију. Заиста, у 26-ој глави Херонове „Механике“ читамо: („Из Архимедове књиге) ми испуштамо оно што је неопходно за друге ствари, и у датом случају искористићемо само оно што се односи на квантитативно мерење, како је то потребно за оне који уче. При томе је опште приступање овако. Нека је дата ма каква количина стубова на којима леже греде, при чему је стање оптерећења односно двају крајњих стубова једнако или није једнако; нека се греде померају за један од ових ослонаца или оба одједном; нека најзад растојање између стубова буде једнако или неједнако; треба сазнати какав терет долази на сваки од стубова. Пример: нека је дата дугачка греда чија је тежина равномерно распоређена; нека је носе људи распоређени на истим растојањима један од другог дуж греде и на њеним крајевима; нека један или оба краја стрче; треба сазнати каква тежина долази на сваког човека...“

Херон почиње са случајем када је греда са подједнако распоређеном тежином подупрта на крајевима и у произвољним тачкама на њеној дужини. Он размишља овако: кад би се исекла греда над сваким ослонцем, отсечци греде и даље би лежали на ослонцима и не би се извршило никакво премештање. Према томе, мисли он, ако се расече греда над сваким ослонцем, терет ће бити распоређен као и раније (мишљење, разуме се, нетачно, јер уствари услед сечења узајамни однос унутрашњих сила у греди биће потпуно други). Сада више није тешко решити задатак. Ако, на пример, имамо ослонце A, B, C, D, K, L, а тежина дела греде између A и B једнака је P_A између B и C једнака P_B, између C и D једнака P_C ..., а између K и L једнака P_K, онда ће ослонац A носити терет $\frac{P_A}{2}$, ослонац B — терет $\frac{P_A}{2} + \frac{P_B}{2}$, ослонац C = терет $\frac{P_B + P_C}{2}$ и т. д., и најзад, ослонац L — тег $\frac{P_K}{2}$.

У стварности је овај задатак у свом општем виду статички потпуно неодређен и Хероново решење које потиче очигледно од Архимеда, засновано, као што смо видели, на погрешној претпоставци, претставља само једну занимљивост.

Интересантнији је случај када греда почива на два ослонца али један њен крај није подупрт. Херон расматра овај случај у глави 27, и углавном расуђује правилно. Нека, на пример имамо два ослонца A и B, нека део греде који слободно виси лево од ослонца A има тежину P_A, а део који се налази између ослонаца A и B — тежину P_B. Тада ће терет P_A који виси лево од ослонца A уравнотежити њему једнак терет P_A левог дела отсечка греде, који лежи десно од ослонца A. Сав овај терет, једнак $2P_A$, мора да издржи ослонац A. Остаје тежина десног дела отсечка греде који лежи између ослонаца и који је ближи левој страни ослонца B; он је очевидно једнак $P_B - P_A$. Треба овај терет распоредити између оба ослонца.

Довде Херон размишља потпуно правилно. Али се овде испољава кобна заблуда у коју је, као што смо видели, Херона увео стојик Посидоније, а којој није било места код Архимеда. Херон заборавља на закон полуге и распоређује терет $P_B - P_A$ подједнако између оба ослонца, а не обрнуто пропорционално растојању тежишта овог терета од ослонца. За доказ ове поставке он замишља да је у тачки где се завршава отсечак тежак P_A и где почиње отсечак $P_B - P_A$, постављен још и стуб C; у овом случају се терет $P_B - P_A$, разуме се, распоређује равномерно између стуба B и C. Затим он претпоставља да је стуб C узет у обзир и да се његов терет аутоматски преноси на стуб A — нетачна претпоставка, основана на погрешном Посидонијевом правилу. Код Архимеда се овде бесумње говори о распореду терета $P_B - P_A$ обрнуто пропорционално растојању тежишта од ослонаца, али га је Херон погрешно разумео.



Сл. 15

То се види и стога што Херон, разматрајући дејство на ослонце тегова, који су обешени у различитим тачкама подједнако тешке греде ослоњене на крајевима, неочекивано поступа потпуно правилно, размештајући тегове по закону полуге. Тако за случај претстављен на сл. 15, где је тежина греде P, тежина тегова P_1 и P_2, а ослонци M и N, Херон даје овакво решење (у преводу на нашу симболику): на ослонац M долази

$$\frac{P_1 \cdot EB}{AB} + \frac{P_2 \cdot FB}{AB} + \frac{P}{2},$$

на ослонац N долази

$$\frac{P_1 \cdot AE}{AB} + \frac{P_2 \cdot AF}{AB} + \frac{P}{2}.$$

Тако исто правилно поступа Херон (одн. Архимед) одређујући тег за сваки ослонац код случаја троугла подупртог у трима теменима. Ако треба наћи терет изазван тежином самог троугла,[1]) Херон поступа овако. Он сматра да је терет P стављен у тежиште троугла, тј. на средњу линију, на 1/3 њене дужине рачунајући од основице. Овај терет P он распоређује на оба краја средње линије. Добија се терет од 1/3 P на темену и од 2/3 P на основици средње линије, (на основи закона полуге). Терет од 1/3 на основици средње линије, тј. у средини основице троугла распоређује се затим подједнако између два краја ове основице. На сваки долази 1/3. P. Добија се правилан закључак: ма какав био троугао, подупрт у теменима, његови ослонци носе подједнаки терет. Ако је на било коју тачку троугла подупртог у трима теменима стављен терет, онда, ради поделе терета на три ослонца, Херон предлаже, идући разуме се за Архимедом, следеће правилно решење (гл. 39), које дајемо у данашњим симболима. Тачка на којој лежи терет спаја се са једним од троуглових темена, а дуж која их спаја продужује се до пресека са супротном страном троугла. Нека је терет једнак P и нека његова тачка ослонца дели повучену дуж у односу m : n (рачунајући од темена), тада ће на врх ове дужи доћи терет $\frac{nP}{m+n}$ на основицу $\frac{mP}{m+n}$. Нека сад дуж коју смо повукли дели основицу троугла у односу $k : l$. Тада ће на један од њених крајева пасти терет $\frac{lmP}{(m+n)(k+l)}$, на други $\frac{kmP}{(m+n)(k+l)}$.

Овде налазимо код Архимеда бесумње поступке данашње механике. Заиста, ова теорема очигледно даје исти резултат при повлачењу дужи ка било коме од трију врхова. Извршимо ли овај поступак у општем облику за три темена, затим сведемо добивене изразе и скратимо, добићемо Чевову теорему.

Резимирајући оно о чему смо говорили, морамо пре свега указати на то да нас велико интересовање за механику које је Архимед испољио већ за време боравка у Александрији, нагони да сматрамо за нетачно Плутархово тврђење, којим приказује Архимеда, према својим симпатијама, као идеалистичког филозофа, присталицу чисте апстрактне математике, као човека који се односи према ме-

[1]) Књига II, глава 38.

ханици са охолим потцењивањем као према примењеној, потпуно практичној дисциплини, као човека који се бави њоме само ради разоноде. Обрнуто, Архимед чини све да би што више зближио „чисту“ математику са механиком: с једне стране он изнова конструише сву теориску механику по обрасцу Еуклидове геометрије са њеним постулатима и теоремама које из њих логички настају; с друге стране он покушава да решава чисто геометриске задатке помоћу закона полуге и учења о тежишту.

Као што ћемо се касније уверити, ствар је у томе што је читава Архимедова пажња у области математике била поклоњена баш оним главама, где је било неопходно интеграљење, забрањено у идеалистичкој филозофији; он је најмање био спреман да се задовољи са тражењем строгих доказа за поставке које су већ дате у V и IV в. Један од главних путева који је он пронашао за напредак у овој области, било је баш математичко доказивање закона полуге и његова примена у геометриским доказима.

Ми смо већ видели да су оба ова покушаја у суштини била неуспела. Постулати унети у основу теориске механике припадали су баш оном броју „недовољно очевидних поставки“, с којима се Архимед, као што ћемо видети, борио у области чисте математике; она поставка коју је доказивао Архимед — да су терети на полузи обрнуто пропорционални дужини њених кракова, истину говорећи, није мање очевидна, него постулат који он притом узима без доказа, — да два тела исте тежине, обешена о тежиште, могу да замене једно друго на полузи, а да се не поремети равнотежа.

Али, и кад би се ово доказивање у теориској механици показало математички потпуно исправно, идеја примене принципа механике на решавање чисто геометриских проблема не би могла да се оправда: методе узете из механике само зато су давале нове закључке у геометрији, што је код њих било допуштено и примењивало се примитивно интеграљење атомистичке математике, забрањене у чистој геометрији. Довољно је било само допустити примену ових метода у геометрији, па да се лако открије читав низ нових истина у учењу о површинама и запреминама, не користећи се полугама и тежиштима. Истина, Архимед се, са својим одређеним мишљењем техничара одликовао генијалном виртуозношћу баш у примени ових метода, заснованих на механици, али, пошто су оне садржале инфинитезималне елементе, он их није могао у овом облику применити код математичких доказа, већ само у еуристичким циљевима, ради налажења нових решења, које је затим требало доказати путем строге методе исцрпљивања.

Обогаћен овим разноликим научним искуством, са ново откривеним математичким хоризонтом пред собом, Архимед се вратио у родну Сиракузу.

ГЛАВА ПЕТА

АРХИМЕД У СИРАКУЗИ

Архимед се вратио у родни град као велики научник светске класе. Као монарховом рођаку у Сиракузи му је био осигуран сјајан друштвени положај, имање и слободно време, које му је омогућавало да се потпуно посвети научним радовима; усто у Сиракузи није било оне специфичне дворске атмосфере која је, као што смо видели, остављала свој одвратни траг на рад песника и научника. Миран научни рад условљен је био и спољним приликама; захваљујући умешној спољној политици Хијерона, Сиракуза је у доба првог Пунског рата уживала у миру (264—241) и користила све благодети неутралне, незараћене државе; тако исто мирно и повољно стање имала је она и у раздобљу између првог и другог Пунског рата.

У оно време постојао је у кругу математичара (у сваком случају међу највећим математичарима Музеја) интересантан обичај, који је касније, у XVII — XVIII в. поново ушао у моду. Када је неко од математичара успевао да открије и докаже нову математичку истину, он је, пре него што би публиковао доказе ове истине, саопштавао своје поставке без доказа највећим математичарима Музеја. Само младим математичарима, чија имена још нису била позната, могао се одмах саопштити доказ, не дајући им могућност да сами испробају своју снагу на новом проблему. Разуме се, највећа част је припадала ономе који је први предложио и доказао нову истину; стога је била највећа брука за оног математичара који је предлагао своју теорему за доказивање, а затим би се показало да ни он сам није нашао њен доказ.

Тако је, на пример, Архимед имао обичај да нове истине које је открио шаље, пре него што би их публиковао, Конону, једном од највећих савремених математичара, да би их овај доказао. О томе сазнајемо из писма које је Архимед упутио после смрти Конона Доситеју, младом талентованом Кононовом ученику. Ово је писмо било написано знатно касније и претставља предговор делу „О спиралама“.

„Архимед жели добро здравље Доситеју. Већи део теореме које сам послао Конону и доказе за које молиш у сваком писму да ти пошаљем, налазе се већ у мојим радовима које ти је упутио Хераклид. У књизи коју ти сад шаљем налазе се још неколико доказа. Немој се чудити што сам исувише одуговлачио публиковање ових доказа. Разлог је тај што сам хтео прво да упознам са овим теоремама људе који се баве математиком, а који би прво хтели да покушају сами да их докажу. Јер многе геометриске теореме које на први поглед изгледају необично тешке, на крају налазе успешно коначно решење. Али Конон је умро пре него што је успео да одвоји време да би се бавио овим теоремама. Да се то није десило он би нашао решење свих ових проблема, јасно би их доказао, и сем тога, обогатио би геометрију и властитим открићем. Та ја добро знам да је он имао необичан математички дар и усто био изузетно учен. И ето, протекло је много година од Кононове смрти, а нисам чуо ништа о томе да се неко латио да реши један од ових задатака. Стога ћу овде редом набројати све теореме које сам предложио Конону, а нарочито две од њих које су ме навеле на неправилан закључак; нека то буде застрашујући пример како људи, који тврде да тобож знају да докажу све оно што предлажу другима да реше, а не прилажу властито решење ових питања, морају на крају крајева да се увере да су се лаћали да докажу оно што је немогуће доказати“.

Затим Архимед набраја теореме које је послао за решење Конону (разуме се, без доказа). То је део оних теорема које су касније ушле у дело „О лопти и цилиндру“, „О коноидама и сфероидама“ (обе теореме о параболоиду), „О спиралама“. За нас су интересантне само ове Архимедове примедбе: „Следећа теорема била је нетачна ево зашто: ако се лопта расече са равни, нормално према једном од њених пречника, на два неједнака дела, онда ће однос већег отсечка према мањем бити једнак квадрату односа веће површине према мањој... Такође није тачна ни последња теорема коју сам предложио за доказивање, и то: ако је пречник лопте подељен у таквом односу да је квадрат већег дела трипут већи од квадрата мањег дела, и ако кроз тачку дељења повучемо раван нормалну према пречнику, и расечемо њоме лопту, онда ће тело слично већем од ових отсечака лопте, бити највеће од свих отсечака који имају с њим једнаку површину". Као што ћемо видети из друге књиге дела „О лопти и цилиндру", Архимед је заиста касније сам увидео нетачност и једног и другог закључка и дао тачна решења и за запремину лоптиног отсечка и за услове при којима он има максималну величину. Морамо притом подвући, а то се види из његових примедаба да ниједан математичар коме је он предложио за доказивање своје теореме, није уочио ове грешке. Међутим, Архимед је сматрао за потребно да јавно, у делу намењеном широким потребама, каже о својим грешкама, додавши томе још овакву неповољну алузију на свој рачун: „Нека то буде застрашујући пример како људи, који тврде да тобож знају да докажу све оно што предлажу другима, а не прилажу властита решења, морају на крају крајева да се увере да су се лаћали да докажу оно што је немогуће доказати". То је пример ретког научног поштења и објективности Архимедове. Што се тиче комплимента на рачун Конона, нама је већ тешко да судимо да ли је Архимедово тврђење: „Да је Конон био жив он би нашао решење свих ових проблема и јасно би их доказао", објективна оцена овог истакнутог претходника или просто галантност, уобичајена у научним круговима оног времена.

О истом обичају да се саопштавају садржаји теорема без доказа највећим математичарима, до публиковања ових доказа, сведочи почетак писма Ератостену „О методи доказа теорема помоћу механике". Одавде сазнајемо да су све теореме које се налазе у овом делу биле прво послане Ератостену „као озбиљном научнику и истакнутом философу, за кога и математичка питања не престављају тешкоћу кад има са њима посла"; Ератостен очевидно није нашао ова решења: „Архимед жели Ератостену добро здравље. Ја сам ти раније послао неке теореме које сам пронашао, при чему сам ти саопштио само закључке, с предлогом да ти сам нађеш доказе које ти засада нисам саопштио".

Из свега овог материјала је потпуно очигледно да је Архимед био у оно време опште призната величина, члан математичког Олимпа, који је био на равној нози са Кононом и Ератостеном који су били на челу математичке науке; са Кононом је он усто одржавао и лично пријатељство. Са Доситејем, вољеним и талентованим Кононовим учеником, (који је заузео његову катедру, како бисмо ми рекли), Архимед се дописивао после Кононове смрти, али као корифеј науке са млађим колегом (он му не предлаже за доказивање своја открића него му одмах саопштава доказе).

Међутим, као академски математичар великог ауторитета, он се одлучује (истина веома опрезно) да уведе у науку начине позајмљене из механике, не плашећи се да удари по свему што се сматрало у математичким круговима као леп тон.

Као што сам већ говорио, математичко доказивање које је увео Архимед у механику не може да нас задовољи. Може се сматрати да је оно или њему самоме изгледало недовољно исправно, или је сумњао да ово ново увођење може одмах да убеди његове колеге. Стога се он у најранијим својим делима из геометрије, у делу „О квадратури параболе", не задовољава „механичким" доказом теореме о површини параболичног сегмента, него даје упоредо још и строго геометриски доказ. У каснијим пак делима, изузев само писма Ератостену, на „механичке" доказе више уопште не наилазимо, ма да из овог писма сазнајемо да је Архимед и у нешто касније време долазио до својих решења помоћу механике. Он је очевидно дошао до закључка да је механичка метода недовољно строга, и стога је при коначној обради својих дела уклонио све њене трагове.

Ова је метода у сваком случају садржала у себи начин који је био категорички забрањен у математици од Euклидова времена: то је интеграљење које су примењивали атомисти, састављање тела од „равни" (т. ј. од тела која имају бесконачно малу дебљину), а равни од „линија" (т. ј. од равни које имају бесконачно малу ширину). У свом личном раду Архимед је, као што смо говорили, примењивао ову методу позајмљену из радова из механике које је он користио; али већ у првом раду, у коме он отворено иступа са својом „механичком" методом, он брижљиво и пажљиво отстрањује све трагове овог интеграљења, уводећи место њега доказе Еудоксовом методом исцрпљивања с применом reductio ad absurdum.

Међутим, ако упоредимо доказе овог типа у Еуклидовим „Елементима" и код Архимеда, уверићемо се да ови докази носе печат генијалности Сиракужанинове: у његовим рукама ови докази су добили много очигледнији и убедљивији карактер. У свом обичном облику доказ методом исцрпљивања састоји се у томе што се, незнано откуд, узима готово решење, а затим се његова тачност утврђује чисто догматски; доказује се да оно не може бити ни веће ни мање од ове готове величине. Усвајајући такву казуистичку аргументацију млади математичар није могао на основи таквог решавања да разјасни себи чак ни то, да је реч о променљивој величини која се све више и више приближава граници; стога метода исцрпљивања није проширивала његов математички видокруг. Упоредо са старом методом исцрпљивања Архимед примењује нову модификацију старог Антифонова система (стр. 21); он не само да уписује степенасту праволиниску слику у криву чију површину одређује, него је и описује око ње; затим он доказује да је површина уписане слике увек мања од неке величине S (коју је он унапред налазио, помоћу „не строге" атомистичке методе, као површину траженог отсечка), а да је површина описане увек већа од те исте величине S. Затим он помера обе праволиниске слике све док се не поклопе међусобно, као и са криволиниском сликом чију површину тражимо. Разуме се, он и ово не чини отворено и нитде не каже да ове праволиниске слике теже криволиниској као граници. Место свега тога он доказује да разлика између обеју праволиниских слика може бити сведена до те мере да буде м а њ а м а о д к о ј е з а д а т е в е л и ч и н е, рецимо D. Сада треба претпоставити да је површина криволиниске слике већа од S за неку дату величину D, и она ће очевидно бити већа од површине описане праволиниске слике; затим треба претпоставити да је површина криволиниске слике мања од S за D, и она ће очевидно бити мања од површине уписане праволиниске слике, јер је сва разлика између површина ових праволиниских слика мања од D. Ако тражена површина није ни већа ни мања од S, онда је она очевидно једнака S. Приметимо, да Архимед и овај доказ не даје једном за увек, него га стално понавља за сваки поједини случај. Али у сваком случају, ма како далека била Архимедова метода од данашњег рачуна с границама, он је уводио горњу и доњу границу које се приближују једна другој и на тај начин је, истина несвесно, доводио читаоца до п о ј м а г р а н и ц е. У томе је његова огромна заслуга и значај.

Да би читаоцу било јасно каквим се проблемима бавио сам Архимед у овој епохи, допустићу себи да цитирам предговоре његовим делима овог времена: „Квадратура параболе“ и књизи „О лопти и цилиндру“.

„Архимед жели добро здравље Доситеју. Сазнавши да је мој бивши друг Конон умро, и да си као ја био близак њему, а усто да си познавалац геометрије, одлучио сам, и поред све моје жалости изазване губитком не само друга него и изврсног математичара, да ти ипак пошаљем писмо које сам мислио да пошаљем Конону, и да ти пошаљем у њему геометриску теорему којом се досад нико није бавио, а које сам се сада латио. Ја сам је прво нашао помоћу механике а затим сам је доказао и геометриски. Неки геометричари ранијих времена покушали су да докажу да се може наћи површина ограничена правим линијама, која би била једнака датом кругу или датом кружном отсечку; затим су они покушавали да нађу квадратуру површине која се налази између пресека оштроугле купе (тј. елипсе, в. горе стр. 30) и праве линије, при чему су допуштали себи да полазе од једва допуштених претпоставки. Стога је већи део научника дошао до закључка да они нису решили ове задатке. Али нисам ништа чуо о томе да је било ко од мојих претходника покушао да нађе квадратуру отсечка, ограниченог правом линијом и пресеком правоугле купе (т. ј. параболе, в. горе стр. 30). Данас сам ја нашао решење овог задатка и у овоме раду показујем да је сваки отсечак, ограничен правом линијом и пресеком правоугле купе, једнак (по површини) четири трећине троугла који има исту основицу и висину као и отсечак. За доказ ове особине ја примењујем следећу претпоставку: вишак за који већа од двеју неједнаких површина надмашује мању, може постати већи ма од које дате ограничене површине, ако се додаје сам себи. Ранији геометричари користили су се овом претпоставком и помоћу ње доказивали да се кругови односе као квадрати, а лопте као кубови њиховог пречника. Да је свака пирамида трећина призме која има исту основицу као пирамида и с њом једнаку висину, да је свака купа трећина ваљка који има исту основицу као и купа и с њом једнаку висину, они су доказивали примењујући претпоставку сличну претходној. Уствари је, сваки од доказа ових теорема био примљен исто као кад се они не би користили овом претпоставком (тј. усвајање ове очевидне претпоставке није учинило њихове доказе мање сигурним у очима научника. — С. Л.). Био бих задовољан кад би се моје дело које се сада публикује подвргло истој оцени као и поменуте теореме. Стога сам брижљиво обрадио свој доказ и шаљем ти га; ја доказујем ову поставку прво помоћу механичке методе, а затим геометриски. Дајем као увод своме делу неколико елементарних теорема о коничним пресецима, корисних за доказ моје теореме. Буди здрав".

Такав предговор садржи прво његово дело „О квадратури параболе". Ускоро после овог дела он шаље истом Доситеју своје ново дело „О лопти и цилиндру", у чијем предговору примећује: „Прошлог пута послао сам ти своја истраживања која сам успео да завршим у оно време, између осталог и доказ да је површина отсечка ограниченог пресеком правоугле купе и праве, једнака четири трећине троугла који има исту основицу и висину као и отсечак. По отпреми овог писма нашао сам и друге важне теореме и разрадио њихове доказе. И то: прво, да је површина сваке лопте четири пута већа од површине њеног великог круга; друго, да је површина сваког лоптиног отсечка једнака површини круга чији је полупречник једнак дужи која спаја теме отсечка са једном од тачака на кружној основици отсечка; затим, да је цилиндар чија је основица једнака великом кругу лопте, а висина пречнику лопте, сам (тј. по запремини — С. Л.) један и по пут већи од ове лопте, а његова површина (укључујући површине горње и доње основице — С. Л.) један и по пут већа од површине лопте. Разуме се, ова тела су имала увек ове особине али су оне остале непознате свим геометричарима; нико од њих није чак ни приметио да су ова тела међусобно самерљива. Стога могу без лажног стида да ставим ова истраживања упоредо са Еудоксовим теоремама о телима, — с теоремама за које се сматра да увелико надмашују све остале, — и то, да је пирамида једнака трећини призме, а купа трећини ваљка који има исту основицу и висину... Разуме се, и ове особине су тела увек имала, па ипак тачно је то да су оне остајале непознате свима чувеним геометричарима који су живели до Еудокса, и нико од њих није их открио.

Сваки који се разуме у овој ствари може да провери тачност мојих открића. Како би било лепо да су она учињена још за време док је Конон био жив! Мислим да би он боље него ико могао да их разуме и да да праведну оцену". Ова иступања дају нам јасну слику знаменитог сиракуског математичара. Он сазнаје о смрти свог најближег друга и вероватно учитеља. Али жалост за покојником ни за тренутак га не спречава да настави свој рад. Наука пре свега. У том погледу за Архимеда је најважније што је изгубио најбољег и најпозванијег сабеседника и критичара, с којим се он, између осталог, одлучио да подели мишљење о новом открићу које је учинио. Али он сазнаје да је Конон оставио спремног и способног ученика и он му одмах шаље дело које је било намењено Конону. Архимед зна да је успео да учини важна открића и радује се томе; али је он далеко од сваке сујете. Он даје у основним цртама ток развоја науке о квадратурама и кубатурама у последњем столећу и потпуно објективно обележава место које припада његовим проналасцима у низу ових значајних открића.

С друге стране, из овог предговора видимо какве нове задатке стављa Архимед преда се, из области квадратура и кубатура.

Површине праволиниских слика, круга и његових делова биле су нађене још у V в.; затим су ови обрасци били потврђени строгом методом исцрпљивања. Тако исто је још Демокрит нашао запремину призме, ваљка, пирамиде и купе, али његови докази нису били изведени строгим атомистичким методама. Строге доказе ових теорема методом исцрпљивања дао је Еудокс. Приметимо узгред, као што видимо из другог предговора наведеног овде, да Архимед још ништа не зна о математичким Демокритовим радовима, него искључиво Еудоксу приписује заслугу за откриће теорема о запремини пирамиде и купе, сматрајући да ова открића „далеко надмашују сва остала". Касније ће он сам исправити ову грешку. То није случајност. Демокрит је био забрањен; у идеалистичкој науци, идући за Платоном, постојало је правило, да се његово име не помиње чак ни тамо где је то било потребно, међутим скоро за свако ново откриће у области природних наука и математике морало се непосредно или посредно обраћати на Демокрита. Нарочито често користе овај или онај део Демокритова учења платоничари и питагорејци, и ко зна колико нам је великих Демокритових открића постало познато у унакаженом облику и под туђим именом.

Већ је Архимедовим претходницима било познато да се запремине лопти односе као кубови њихових полупречника, као што им је био познат и однос запремине лопте према њеној површини, али налажење ове површине, тј. налажење односа ове површине према површини великог круга, била је још ствар будућности.

Ето зашто је Архимед морао да усретсреди своју пажњу на квадратуре коничних пресека, на налажење површине и запремине лопте и, најзад, на тела која постају обртањем коничних пресека око осовине. За постизање тог циља био је потребан преглед и продубљивање учења о коничним пресецима, што су, као што смо видели, већ пре њега систематски изложили Менехмо, Аристеј и Еуклид.

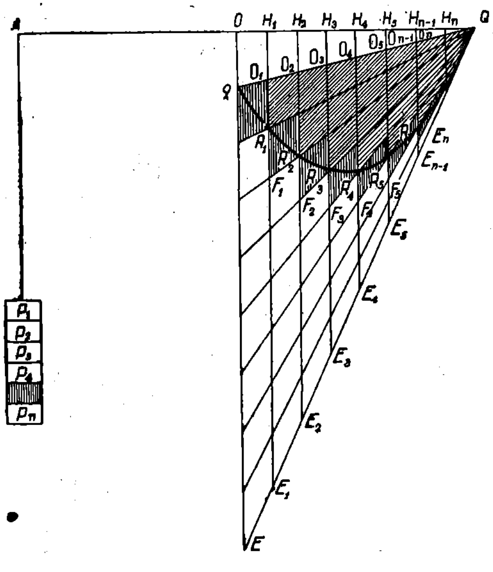
Као што знамо, Архимед је за налажење решења примењивао методе атомиста, али васпитан на Еудоксовим принципима и иступајући пред александриским научницима, он категорички подвлачи строгост своје методе, која по његовом мишљењу не треба да наиђе на приговоре чак ни најстрожијих чувара нове потпуно научне методе. Он се ограђује од „једва допуштених" претпоставки оних претходника (тј. атомиста и њихових следбеника), чији закључци нису добили признање науке; он не мисли, добоме, на Демокрита, чије радове, као што смо видели, још није познавао, него на платоничаре, који су у математици усвојили Демокритову методу. Сам Архимед полази од претпоставке која није наишла на приговор ниједног математичара, да „вишак", за који већа површина премаша мању, може постати већи ма од које дате ограничене површине, ако се сам себи додаје. И у „Квадратури параболе" и у „Лопти и цилиндру" и касније у делу „О спиралама" ова се аксиома ставља испред доказа. Заиста, као што смо видели, на овој се претпоставци заснивала чувена теорема која је постала основа методе исцрпљивања: „Ако се од вишка којим већа површина премаша мању, одузме више од половине, од добивеног остатка одузме поново више од половине итд., онда се на крају крајева може добити остатак који ће бити мањи ма од које дате ограничене површине". Прво јавно Архимедово иступање на овом попришту било је налажење квадратуре параболе. Он се користи овим случајем да би упознао учену публику и са својом новом „механичком" методом решавања геометриских задатака. Али никако не желећи да навуче на себе тужбу да је недовољно строг, он при публиковању мења изглед ове методе, отстрањујући из ње атомистичко састављање површина од линија, које је он узео из механике.

Да би практично схватили у чему се састојало ово чишћење „механичких" начина доказивања од „једва убедљивих“ (атомистичких) претпоставки, упоредимо нов, такође „механички“, доказ теореме о површини параболичног сегмента, који се налази у „Квадратури параболе“, са горе наведеним (стр. 69) „механичким“ доказом, који је Архимед примењивао ради властитих потреба, и о коме смо сазнали из његових писама Ерастостену.

У првобитном доказу, познатом из овог писма, површине како троугла, тако и параболичног сегмента који се налази у њему, сматране су да се с а с т о ј е из изванредно великог броја „материјалних“ дужи које чврсто належу једна на другу, и које су паралелне осовини параболе. Претпоставка да се тело с а с т о ј и из таквих дужи је, како касније каже Архимед, „постулат с којим се није лако сложити“. Стога у свом делу намењеном за публиковање, Архимед више не дели троугао и параболу на изванредно велики број линија, него посматра известан ограничен број т р а п е з а са једнаким висинама. Поделивши страну троугла, паралелну осовини параболе, на једнаке делове, и спојивши добијене тачке са супротним теменом троугла, он добија две зупчасте изломљене линије: једну која обухвата параболу, другу коју обухвата парабола. Како ће Архимед даље доказивати унапред је јасно: знајући унапред (он је то нашао атомистичком методом) да је површина параболичног отсечка једнака трећини површине троугла, он ће доказивати да је површина изломљене линије која обухвата, увек већа од трећине површине целог троугла, а површина оне која је обухваћена — увек мања од његове трећине; затим ће доказати да разлика у површини између обухватне и обухваћене изломљене линије може бити произвољно мала, и најзад ће помоћу reductio ad absurdum показати да површина параболичног отсечка не може бити ни већа ни мања од трећине површине троугла, па према томе да је једнака трећини ове површине.

Баш се овако доказује у делу „О квадратури параболе“. Самом доказу (став. 14—15) претходе две групе лема. Прва група (став 1—5) садржи неколико теорема о параболи, потребних за доказивање основне теореме; од њих се оне које је већ Еуклид доказао у својим „Коничним пресецима“ (став. 1—3), дају без доказа, а остале се доказују на веома елегантан мајсторски начин помоћу претварања пропорција. Друга група (став. 6—13) претставља низ веома елементарних теорема које се односе на теорију полуге, чији се основни смисао своди на принцип: што се даље од ослонца окачи један те исти терет, тим је већи противтерет потребан да би се овај уравнотежио.

Ради доказивања основне теореме обеси се параболични сегмент (сл. 16) о један крак равнокраке полуге тако, да осовина параболе пада вертикално, да један од крајева његове основе Q упире у крај крака, а да се други q налази у истој вертикали са тачком ослонца O полуге. O овај исти крак обеси се троугао, коме као једна страна служи већ поменута основица параболичног сегмента Qq, као друга — вертикала која у свом наставку пролази кроз O, као трећа — дирка QE на параболи у тачки Q. Основицу Qq делимо на n једнаких делова: qO_1, O_1O_2, O_2O_3, ..., O_nQ, и кроз тачке деления O_1, O_2, O_3, ..., O_n повлачимо вертикалне праве до пресека са краком полуге у тачкама H_1, H_2, H_3, ..., H_n, са параболом у тачкама R_1, R_2, R_3, ..., R_n и са тангентом QE на параболи у тачкама E_1, E_2, E_3, ..., E_n. Повуцимо низ правих QR_1, QR_2, QR_3, ..., QR_n до пресека са вертикалом qE.



Сл. 16

Сада као и у првобитном доказивању, уравнотежимо троугао EqO са теретом обешеним у тачци A. Али за разлику од првог, „атомистичког" доказа, Архимед пре свега не говори ништа о томе да терети P_1, P_2, P_3, ..., обешени у A претстављају елементе параболичног сегмента qR_MQ, пренесене на ново место, и да баш сваки елемент параболичног сегмента по преношењу у A уравнотежује односни елемент троугла QqE; друго, сада ови терети P_1, P_2, P_3, ... не уравнотежују „линије" у троуглу, тј. елементе бесконачно мале ширине, него елементе троугла неке произвољно узете коначне ширине — трапезе EO_1, E_1O_2 итд. који су остали на својим местима; разуме се, Архимед стално претставља себи P_1, P_2, P_3, ..., као исте елементе параболе, само пренете на ново место, али да би остао доследан строгости он не може о томе да говори. Сада су P_1, P_2, P_3, просто неки терети, који ће, обешени у тачци А, слично уравнотежити трапезе EO_1, E_1O_2 итд., који су остали на својим местима.

Лако је видети да је услед тога Архимедов доказ изгубио очигледност и добио карактер неког експеримента. Само уколико сам „експериментатор" стално мења изглед „атомистичког" доказа, може бити сигуран да ће на крају крајева доћи до жељеног резултата. И тако, за непосредну очигледну убедљивост више нема потребе; стога више нема потребе узимати за полугу теразија АО средњу линију; сада он узима за полугу другу праву.

Као и у првобитном доказу (стр. 69, једначине (1), (2), (3), (4)), Архимед полази од једначина

$$OA : OH_1 = QO : OH_1 = Oq : qO_1 = E_1O_1 : O_1R_1,$$

али пошто праву O_1R_1 не сме више да сматра као елеменат параболичног сегмента, а O_1E_1 — као елеменат троугла, он, полазећи од тога да су површине трапеза EO_1 и FO_1, који имају једнаке висине, пропорционалне збиру њихових основица, па значи и основицама E_1O_1 и O_1R_1, замењује раније бесконачно мале елементе E_1O_1 и O_1R_1 коначним елементима — трапезима EO_1 и FO_1:

$$OA : OH_1 = \text{трап. } EO_1 : \text{трап. } FO_1.$$

Пошто су ОА и OH_1 — краци полуге, одавде се види да ће трапез FO_1, кад се пренесе тако да се његово тежиште нађе на истој вертикали са А, уравнотежити трапез EO_1, чије ће тежиште бити пренето на вертикалу која пролази кроз H_1; уствари његово тежиште лежи негде између вертикала ОЕ и H_1E_1 и у тачци А њега уравнотежује тег P_1. И тако је уствари десни крак мањи од OH_1, а да би трапез FO_1, налазећи се на крају левог крака, уравнотежио трапез EO_1, мора се повећати десни крак; према томе је

$$\text{трап. } FO_1 > P_1 . \tag{1}$$

На исти начин ћемо добити:

$$\text{трап. } F_1O_2 > P_2; \text{ трап. } F_2O_3 > P_3; \ldots \tag{2}$$

Али праве E_1O_1 и O_1R_1 су основице не само трапеза EO_1 и FO_1, него и трапеза E_1O_2 и R_1O_2. Очевидно су и њихове површине пропорционалне њиховим основицама, тј.

$$OA : OH_1 = \text{трап. } E_1O_2 : \text{трап. } R_1O_2 .$$

Одавде се види да ће трапез R_1O_2, кад се пренесе тако да његово тежиште дође у A, уравнотежити трапез E_1O_2, чије ће тежиште бити пренето на вертикалу која пролази кроз H_1; уствари пак, његово тежиште лежи негде између вертикала H_1E_1 и H_2E_2 и у тачци A њега ће уравнотежити терет P_2. И тако је уствари десни крак већи од OH_1, а да би трапез R_1O_2 који се налази на крају левог крака уравнотежио трапез EO_1, десни крак се мора смањити; према томе је

$$\text{трап. } R_1O_2 < P_2 . \tag{3}$$

Упоређујући (2) са (3), добићемо

$$\text{трап. } F_1O_2 > P_2 > \text{трап. } R_1O_2 \tag{4}$$

Исто тако ћемо доказати да је

$$\text{трап. } F_2O_3 > P_3 > \text{трап. } R_2O_3 \text{ итд.}$$

Али P_1, P_2, P_3, ... уравнотежују редом елементе троугла EqQ, а $P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$ сав троугао EqQ; према томе, као што је то доказано у делу „О равнотежи равних тела“,

$$P_1 + P_2 + P_3 + \ldots = \frac{1}{3} \Delta EqQ.$$

Сабирајући члан по члан горе наведених неједнакости добићемо

$$\text{трап. } FO_1 + \text{трап. } F_1O_2 + \text{трап. } F_2O_3 >$$

$$\frac{1}{} \text{ троугла } EqQ > \text{трап. } R_1O_2 + \text{трап. } R_2O_3 + \text{трап. } R_3O_4 + \ldots$$

После тога Архимед, према показаном рецепту, врло опширно доказује, да разлика између збира у левом делу једначине и збира у десном делу једначине може бити учињена ма како малом: сваки од трапеза који је на нашем цртежу осенчен вертикалним цртама, помера се тако да налегне на праву qQ; добија се да је њихов збир (тј. тражена једнакост између два збира обухваћених и обухватних трапеза) једнак површини троугла qQF, а ова површина може бити узета ма како мала при подели Qq на довољно велики број делова. Затим се већ по шаблону доказује да површина параболичног сегмента, која лежи између ова два збира, не може бити ни већа ни мања од 1/3 површине троугла qQE, па према томе је једнака њој.

Потребно је упозорити да смо различито сенчење цртежа применили ми, а не Архимед; он уопште ни једном речју не даје на знање да је збир површина трапеза у левом делу једначине — површина ограничена изломљеном линијом која обухвата параболични сегмент, а збир површина трапеза у десном делу једначине — површина ограничена изломљеном линијом, уписаном у параболични сегмент, и да према повећавању броја зубаца обе ове изломљене линије теже заједничкој граници — параболичном сегменту. Чак и такве алузије на метод атомиста изгледале су недовољно строге и биле су у противуречности са добрим тоном у математици, који је захтевао да научник не доводи ученика до решења и не разјашњава му уопште методе у тражењу решења, него да га помоћу низа чудотворних поступака, за које се не зна одакле су му пале напамет, али су зато потпуно строги, принуди да прими његове закључке као логички неизбежне.

Начелно тврђење, изнето у предговору овог дела, да се он не користи „једва допустивим“ претпоставкама атомиста него да узима за основу (стр. 94, 95) претпоставку коју су прихватили сви корифеји математике, — Архимед на тај начин потпуно оправдава; при коначном доказу да површина сегмента није ни већа ни мања од 1/3 Δ EqQ (ст. 16), он се намерно позива на ову претпоставку у њеном каноничном облику и тек затим јој даје облик: „Вишак површине сегмента изнад 1/3 Δ EqQ, може се учинити већим од EQq, кад се стално додаје сам себи. Стога се може наћи такав део троугла EqQ, који ће бити мањи од указаног вишка површине сегмента изнад 1/3 $\triangle$ EqQ“.

Ако је Архимед на овај начин брижљиво уништио све трагове атомистичких метода из својих радова, он ипак није могао бити уверен у то да ће његова нова „механичка" метода решења, заснована на закону полуге, бити благонаклоно примљена од стране званичне математике. А пошто није хтео ради пропаганде нове методе да стави под удар своје ново откриће, којим се он, као што смо видели, поносио, он у истом делу даје и друго извођење површине параболичног сегмента, засновано на чисто геометриским претпоставкама.

На основи зависности, коју је извео Архимед у помоћним лемама о параболи, он доказује да ће, ако упишемо у параболични сегмент троугао чији се врх поклапа са врхом параболичног сегмента, и ако над сваком страном овог троугла конструишемо поново троугао чији се врх поклапа са врхом сегмента који је ограничен овом троугловом страном, и ако наставимо овај процес даље, сваки нови троугао бити једнак 1/8 претходног, па према томе, површина свих слика конструисаних на првом троуглу да ће бити једнака 1/4 површине овог троугла, а површина свих слика конструисаних на овим сликама једнака 1/4 површине тих слика итд. Затим би Архимед морао доказати да је збир чланова бесконачне опадајуће прогресије

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots = \frac{4}{3}.$$

Али такав доказ захтевао је у оно време примену атомистичке методе (в. стр. 15). Зато он иде обилазним путем, доказујући да се збир произвољног броја чланова ове прогресије разликује од 4/3 највише за 1/3 последњег члана.

Он доказује ову поставку (у преводу на наше ознаке) овако: нека имамо ред чланова A, B, C, D, ..., Z, где је сваки наредни једнак 1/4 претходног.

Тада је

$$B + C + D + \ldots Z + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{3}D + \ldots + \frac{1}{3}Z =$$

$$= \frac{4}{3}B + \frac{4}{3}C + \frac{4}{3}D + \ldots + \frac{4}{3}Z. \qquad (1)$$

Али је

$$\frac{4}{3}B = \frac{1}{3}A;$$

$$\frac{4}{3}C = \frac{1}{3}B;$$

$$\frac{4}{3}D = \frac{1}{3}C$$

итд., одакле је

$$B + C + D + \ldots + Z + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{3}D + \ldots + \frac{1}{3}Z =$$

$$= \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C + \ldots + \frac{1}{3}Y \qquad (2)$$

Одузимајући од обе стране једначине опште чланове

$$\frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{3}D + \ldots + \frac{1}{3}Y,$$

добићемо

$$B + C + D + \ldots + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{1}{3}A, \qquad (3)$$

или, додајући и једној и другој страни једначине по A,

$$A + B + C + D + \ldots + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A.$$

Ако је $A = 1$, $B = \frac{1}{4}$, $C = \left(\frac{1}{4}\right)^2$ и т. д., добијамо

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{3}.$$

Потпуно је јасно да се овако елегантно, вештачко решење може наћи само кад се унапред зна резултат.

С нашег гледишта сада остаје само да се констатује да $\frac{1}{3}$ Z или $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ при довољном увећавању броја чланова прогресије може бити учињено мањим ма од које дате величине да би се дошло до закључка да је збир чланова ове прогресије једнак 4/3. Архимед је принуђен да иде другим, нама већ добро познатим шаблонским путем, рачунајући прво да је овај збир већи, а затим мањи од 4/3 ма за коју дату величину, и доводећи читаоца у оба случаја до апсурда.

Пређимо сад на дело „О лопти и цилиндру" које је, као што смо већ говорили, изишло одмах после дела „О квадратури параболе". И ова књига почиње са низом аксиома, дефиниција и лема. Пошто ће Архимед морати да разматра круг, кружни исечак и обртне површине као границе слика и тела ограничених правим линијама и равнима, он мора да дâ дефиницију слика испупчених са једне стране и да постулише да је права најкраће растојање између двеју тачака, а да је од испупчених слика уписана увек мања од описане; стога је обим многоугла описаног око круга — већи, а уписаног — мањи. Као што смо већ подвлачили, разматрање два низа променљивих величина — горњег и доњег, — који теже једној истој граници (у овом случају многоугаоника у п и с а н о г у круг и о п и с а н о г око њега), и приближавање њихово једног другоме тако да разлика постане произвољно мала, преставља властиту Архимедову новину, засновану на развоју мисли софиста Антифонта; његови непосредни претходници увек су се бавили само једном величином која тежи граници. Архимед зато доказује да се, ако су дате две неједнаке величине ма како блиске једна другој, увек могу наћи таква два отсечка праве, да однос већег према мањем буде мањи од односа ових величина. Понављајући затим извођење првог дела горе наведеног (стр. 23) предл. 2, XII Еуклидове књ. о томе да разлика између површине уписаног многоугла и круга може бити учињена, при довољном повећању броја страна многоугла, мања ма од које дате величине, он се не задовољава позивањем на Еуклида, него допуњује ову теорему другом која показује да разлика између површина у п и с а н о г и о п и с а н о г многоугла може бити учињена мањом ма од које дате величине.

Затим Архимед прелази на одређивање површине омотача ваљка и купе. Атомистичким методама ови су се задаци решавали необично просто. Уколико се обим основе сматрао као многоугао са врло великим бројем страна од којих је свака једнака недељивој величини, ваљков омотач се добивао као збир необично уских правоугаоника, а купин омотач као збир необично уских троуглова. Површина призмина омотача једнака је производу обима основице и висине, а пирамидина — половини производа обима основице и производиље; ови су се обрасци примењивали без даљег доказа на ваљак и купу. Разуме се да овај поступак атомиста Архимед није могао да прихвати, он га замењује описивањем и уписивањем у ваљак (одн. купу) призама (одн. пирамида) са поступним увећавањем броја страна основице дотле, док разлика између уписане и описане слике у основици не постане мања ма од које дате величине. Резултат је унапред познат и писац треба само да докаже путем reductio ad absurdum да тражена површина не може бити ни већа ни мања од ове величине. При томе се, изражавајући се на језику данашње алгебре, обрасцу за површину омотача купе $\pi r l$ да је облик $\pi\left(\sqrt{rl}\right)^2$, тј. она се сматра једнака површини круга чији је полупречник средња пропорционала између полупречника основице купе r и производиље l. Тако исто и Архимедов образац за површину омотача зарубљене купе одговара нашем обрасцу $\pi\left[\sqrt{(r_1+r_2)\,l}\right]^2$.

Наведимо први део доказа за површину омотача купе, као један од најтипичнијих примера Архимедове reductio ad absurdum (у нашим ознакама).

Нека је површина купине основице R, њен полупречник r, производиља l, средња пропорционала између r и l нека је једнака m. Нека је M површина круга са полупречником m, а S површина купина омотача. Треба доказати да је $S = M$.

Нека S није равно M, тада је оно или веће или је мање од M. Нека је $S > M$.

Око круга M описаћемо и у круг M уписати многоугле сличне један другом, тако да однос између њихових површина буде мањи од односа $S : M$. Око круга R ћемо описати и у круг R уписати многоугле сличне првим двама, а око купе — пирамиде које имају ове многоугле за основице.

Нека је површина многоугла описаног око R једнака R_1, а описаног око M једнака M_1, нека површина многоугла уписаног у R буде једнака R_2, а уписаног у M једнака M_2; нека површина омотача описане пирамиде буде једнака S_1. Тада имамо:

$$R_1 : M_1 = r^2 : m^2 = r : l = R_1 : S_1,$$

одатле је

$$M_1 = S_1 .$$

Али према услову је

$$M_1 : M_2 < S : M,$$

па је тим пре

$$S_1 : M_2 < S : M .$$

Али је немогуће да буде: $S_1 > S$, а $M_2 < M$; према томе први однос има већи бројитељ и мањи именитељ него други; стога он није мањи него је већи од другог. Према томе је неједнакост $S > M$ немогућа.

На исти начин Архимед доказује да је и $S < M$ немогуће; значи да је $S = M$, што је и требало доказати.

Најважније основне теореме у овом делу су теореме о површини и запремини лопте и лоптиног отсечка. Интеграљење коме Архимед посредно прибегава изванредан је приказ његовог генија, јер оно одговара у нашим ознакама интеграљењу

$$4\pi r^2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi ,$$

до ког Архимед фактички долази тражећи границу збира реда

$$\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} + \ldots,$$

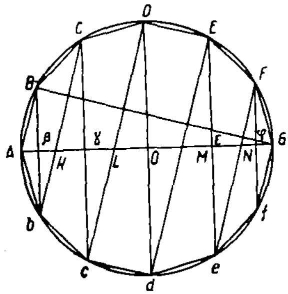
где је 2n — број страна многоугла који тежи ка ∞ [1]).

Али пређимо на ово изузетно фино Архимедово решење. Овде ћемо навести само његово решење за лопту јер је ње-

[1]) В. напред, стр. 105, примедба 1.

гово решење за лоптин отсечак у начелу истоветно са овим решењем.

Архимед уписује у круг правилан многоугао са парним бројем страна 2n и повлачи помоћне линије, показане на сл. 17. Затим он обрће сав цртеж око пречника AG, као осовине. Лако је видети да се обртањем многоугла добијају две купе ABb и GFf и низ зарубљених купа BbCc, CcDd итд. а обртањем круга — лопта. Праве Bb, Cc, Dd и т. д. паралелне су међу собом као што су паралелне међу собом и праве bC, cD, dE итд.



Сл 17

На основи сличности троугла $A\beta B$ и ABG добијамо

$$B\beta : \beta A = GB : BA$$

Али (такође из сличности троуглова) имамо односе:

$$B\beta : \beta A = \beta b : \beta K = C\gamma : \gamma K : \ldots = f\varphi : \varphi G.$$

Ut omnes ad omnes, ita unus ad unum (в. стр. 21, став 5), то јест

$$\frac{B\beta + \beta b + C\gamma + \gamma c + \ldots + F\varphi + \varphi f}{A\beta + \beta K + K\gamma + \gamma L + \ldots + N\varphi + \varphi G} = GB : BA,$$

или уколико је $B\beta + \beta b = Bb$, $C\gamma + \gamma c = Cc$ и т. д.

$$(Bb + Cc + Dd + \ldots + Ff) : AG = GB : BA. \qquad (1)$$

Али површина тела које се добија обртањем многоугла биће, према обрасцима које је извео Архимед, а који одговарају (в. стр. 103) $\pi r l$ за површину омотача сваке купе и $\pi (r_1 + r_2) l$ за површину омотача сваке зарубљене купе, збир следећих површина: купе ABb $= \pi \cdot AB \cdot B\beta$.[1]),

---

[1]) Архимед формулише овај образац (и слично њему следеће) овако: „Круг чији је полупречник средња пропорционала између AB и $B\beta$ (симбол π није му познат). Лако је видети да је

$$B\beta = r \sin BO\beta = r \sin \frac{\pi}{n},$$

$$C\gamma = r \sin CO\gamma = r \sin \frac{2\pi}{n},$$

итд., а да је збир

$$2\,B\beta + 2\,C\gamma + 2\,DO + \ldots = 2\,r\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} + \ldots\right);$$

према томе Архимед своди овај задатак на сумирање овог реда кад n тежи ∞

зарубљене купе Bb Cc $= \pi \cdot BC\,(B\beta + C\gamma) = \pi AB\,(B\beta + C\gamma)$,
зарубљене купе Cc Dd$= \pi \cdot CD\,(C\gamma + DO) = \pi\, AB\,(C\gamma + DO)$ итд.
купе FfG $= \pi \cdot FG \cdot F\varphi = \pi \cdot AB \cdot F\varphi$.

После свођења налазимо да је тражена површина једнака

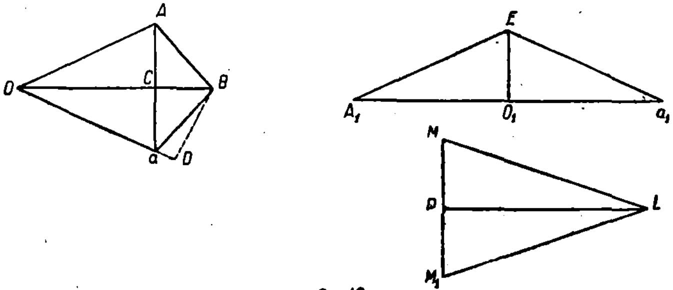
$$\pi \cdot AB\,(2\,B\beta + 2\,C\gamma) + 2\,DO + \ldots + 2\,F\varphi) =$$
$$= \pi \cdot AB\,(Bb + Cc + Dd + \ldots Ff). \qquad (2)$$

Али на основи пропорције (1) је

$$AB\,(Bb + Cc + Dd + Ff) = GB \cdot AG,$$

одакле је површина траженог тела једнака $\pi \cdot GB \cdot AG$, па према томе она је мања од $\pi \cdot AG^2$ (или $4\pi r^2$).

Сада Архимед описује многоугао око круга и расуђујући на исти начин доказује да је површина обртног тела, сличног ономе којег смо размотрили горе, али не више упи-



Сл. 18

саног него описаног око лопте, већа од $\pi . AG^2$ (или $4\pi\, r^2$). Уколико је напред већ било доказано да се разлика између површина ових тела може учинити мањом ма од које дате величине, Архимед доказује путем reductio ad absurdum на основи нама познатог шаблона, да површина лопте не може бити ни већа ни мања од $\pi . AG^2$, па да је према томе једнака овој величини (т. ј. $4\pi\, r^2$).

Израчунавање обима лопте засновано је на леми која даје образац за запремину тела састављеног од две купе са заједничком основицом; ово тело Архимед назива „просторним ромбом“ (сл. 18). Архимед доказује да је запремина просторног ромба OABa једнака запремини купе EA_1a_1, чија је површина основице (круг са полупречником A_1O_1) једнака површини омотача OAa једне од купа које образују просторни ромб, а чија је висина EO_1 једнака нормали BD спуштеној из темена друге купе која образује просторни ромб BAa на производиљу прве купе.

Ми дајемо овде у целини овај Архимедов доказ да бисмо показали каквим је гломазним геометриским поступцима морао прибегавати да би изразио на језику геометрије оно што ми без икакве тешкоће радимо помоћу алгебарских трансформација (в. стр. 11); касније ми то нећемо више радити него ћемо Архимедова решења преводити на језик наше алгебре. С нашег гледишта дати задатак се своди на доказ да је запремина просторног ромба једнака $\frac{\pi \, . \, Oa \, . \, AC \, . \, BD}{3}$.

Ми бисмо ово доказивали овако:

Запремина купе OAa једнака је $\frac{\pi \cdot aC^2 \cdot OC}{3}$

Запремина купе ABa једнака је $\frac{\pi \cdot aC^2 \cdot CB}{3}$

Запремина целог тела једнака је $\frac{\pi \cdot aC^2}{3}(OC + CB) =$

$= \frac{\pi \cdot aC \cdot aC \cdot OB}{3}$

Али из сличности троуглова OaC и OBD ($\angle BOD$ — је заједнички; оба су правоугла) имамо

$$Oa : aC = OB : BD,$$

одакле је

$$aC \, . \, OB = Oa \, . \, BD;$$

према томе је

$$\frac{\pi \cdot aC \cdot aC \cdot OB}{3} = \frac{\pi \cdot aC \cdot Oa \cdot BD}{3},$$

што је и требало доказати.

Али збир OC + CB добија геометриско значење ако се конструише трећа помоћна купа MM_1L са основицом (круг полупречника MP), једнаком основици просторног ромба (кругу полупречника AC), и с висином PL, једнаком OC + + CB, т. ј. читавој висини просторног ромба OB. Затим се јако гломазним путем доказује да је ова помоћна купа једнака збиру купа са висинама OC и CB, тј. просторном ромбу.

Архимед је већ претходно доказао да се запремина просторног ромба односи према запремини једне од купа које га сачињавају, као висина овог ромба према висини купе. Значи,

$$(\text{ромб } OABa) : (\text{конус } ABa) = OB : CB. \qquad (1)$$

Уколико се запремине купа једнаких основица односе као висине,

$$(\text{конус } MM_1L) : (\text{конус } ABa) = PL : CB. \qquad (2)$$

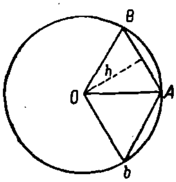
Али је PL по конструкцији једнако OB; значи, у овим двема пропорцијама једнака су три члана; према томе једнаки су и четврти, т. ј.

$$(\text{ромб } OABa) = (\text{купа } LMM_1).$$

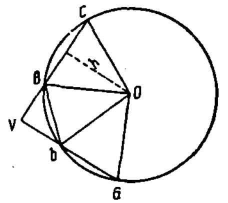
Затим, $Aa = MM_1$, а површина омотача купе OAa једнака је површини основице купе EA_1a_1; према томе је

$$(\text{осн. купе } EA_1a_1) : (\text{осн. купе } LMM_1) = (\text{бочна површ. купе } OAa) : (\text{осн. купе } OAa) = Oa : aC = OB : BD = LP : EO_1.$$

Добијамо да су код купа EA_1a_1 и LMM_1 површине основица обрнуто пропорционалне висинама EO_1 и LP, па према томе да су ове купе једнаке. Али, сходно (3), запремина купе MM_1L једнака је запремини ромба OABa; значи, и ромб OABa једнак је по запремини купи EA_1a_1, што је и требало доказати.



Сл 19



Сл 20

Доказавши ову теорему Архимед може већ да пређе на теорему о запремини лопте (сл. 19). Као што је било показано на сл. 17, он обрће многоугао ABCDEFG уписан у круг око осовине AG. Полупречницима, повученим из средишта, круг се дели на исечке AOB, BOC, COD и т. д. и проучавају се тела која настају обртањем троугла уписаног у сваком исечку. Од обртања троугла ABO и OFG постају просторни ромбови, од обртања осталих троуглова, на пример BOC, постају тела са површином зарубљене купе. Ако ову зарубљену купу допунимо до пуне купе са теменом у V, онда ће запремина тела које постаје обртањем Δ BOC бити једнака разлици запремина просторног ромба VCOc и просторног ромба VBOb (сл. 20).

На основи претходне леме запремина просторног ромба који постаје обртањем Δ ABO, једнака је запремини купе која има површину купе ABb и висину h једнаку нормали спуштеној из O (темена једне од купа која образује просторни ромб) на површину друге.

Такав исти доказ за тело које постаје обртањем троугла BOC, услед његове елементарности а истовремено крајње гломазности, превешћемо на језик данашњих термина.

Запремина просторног ромба VCOc једнака је површини омотача купе VCc $\times \frac{h}{3}$.

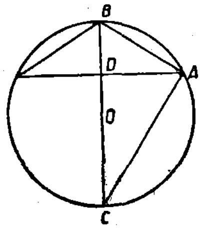
Запремина просторног ромба VBOb једнака је површини омотача купе VBb $\times \frac{h}{3}$.

Запремина траженог тела једнака је, као што смо видели, разлици ових запремина, т. ј. (површ. омотача купе VCc мање површ. омотача купе VBb) $\times \frac{h}{3}$, или површини омотача зарубљене купе BCbc $\times \frac{h}{3}$.

Ради налажења запремине целог обртног тела треба сабрати све ове запремине. Добићемо: површину целог тела $\times \frac{h}{3}$.

Исто се доказује и за тело описано око лопте, а затим, нама познатим шаблоном, доказује се да обим лопте не може бити ни већи ни мањи од производа њене површине и трећине висине, спуштене из средишта на површину лопте, т. ј. на трећину полупречника, или

$$4\pi R^2 \times \frac{R}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$



Сл. 21

Полазећи истим путем Архимед добија обрасце и за лоптин исечак. Површина лоптиног отсечка (или исечка, што је исто) једнака је површини круга чији је полупречник производиља купе која има заједничко теме и заједничку основицу са отсечком. Преводећи овај Архимедов израз на језик наше алгебре, добићемо (сл. 21):

Површина лоптиног отсечка једнака је $\pi \cdot AB^2$.

Али из правоуглог троугла ABC

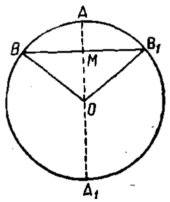
$$AB^2 = CB \cdot BD.$$

Означивши BC са 2R, а BD са H, добићемо: површина лоптиног отсечка (или исечка) једнака је

$$\pi CB \cdot BD = 2\pi RH$$

Запремину лоптиног исечка добијамо на исти начин као и запремину лопте; излази да је она једнака производу површине исечка и трећине полупречника, или $\frac{2}{3}\pi R^2H$.

Друга књига дела „О лопти и ваљку" посвећена је више посебним питањима. Важан је и интересантан став II о запремини лоптиног отсечка (сл. 22). Он је врло загонетан: „Ако је BAB_1 лоптин отсечак, BB_1 пречник основице отсечка, O средиште лопте и AA_1 њен пречник који дели BB_1 на пола у тачци M, онда је запремина отсечка једнака запремини купе која има исту основицу као и отсечак и чија се висина x налази из пропорције (преводим на језик наших геометриских симбола):



Сл. 22

$$x : AM = (OA_1 + A_1M) : A_1M$$

Очигледно да је

$$x = \frac{H(3R - H)}{2R - H}$$

Нећу да наводим овде помоћне цртеже и сложена геометриска излагања Архимедова. По суштини ствар се овде своди на израчунавање запремине средишне купе

$$\frac{\pi (2RH - H^2)(R - H)}{3} \text{ из запремине исечка } \frac{2\pi R^2H}{3}$$

Као резултат израчунавања добиће се израз

$$\frac{\pi H^2(3R - H)}{3},$$

аналого геометриском изразу који је добио Архимед[1]).

---

[1]) Заиста, квадрат BM (полупречник основице отсечка) једнак је $AM \cdot A_1M$ [полутетива — је средња пропорционала између пречникових отсечака или $H(2R - H)$].

Можемо да напишемо наш израз у облику

$$\frac{\pi H \cdot H(2R - H)\ 3R - H)}{3(2R - H)} \quad \text{или} \quad \frac{\pi}{3} BM_2 \frac{H(3R - H)}{2R - H}$$

На основи овог обрасца Архимед хоће да реши задатак: поделити раван са лоптом тако да површине или запремине делова стоје међу собом у датом односу (m : n).

Први случај (са односом површина) не претставља велике тешкоће. За нас је интересантан други случај са односом запремина. Два настала отсечка имају заједничку основицу B_1B са полупречником BM, а пошто је запремина отсечка, као што смо видели изражена обрасцем

$$\frac{\pi}{3} BM^2 \cdot \frac{H(3R-H)}{2R-H},$$

где је $\frac{\pi}{3}$ BM^2 — стални множитељ, онда је очевидно да је

$$\frac{H(3R-H)}{2R-H} : \frac{H_1(3R-H_1)}{2R-H_1} = m : n$$

(H и H_1 су висине двају отсечака).

Елиминујући из ових једначина H_1 (Архимед ради то на врло сложен геометриски начин), добићемо једначину

$$H^3 - 3H^2R + \frac{4\,m}{m+n} R^3 = 0,$$

т. ј. кубну једначину.

Уствари и Архимед добија ову једначину, али је он изражава у облику пропорције. Заиста она може да се напише у облику

$$H^3 - 3H^2R + 4R^3 - 4R^3 + \frac{4m}{m+n} R^3 = 0,$$

или

$$(R + H)\,(4R^2 - 4RH + H^2) = \left(4 - \frac{4m}{m+n}\right) R^3,$$

или

$$(R+H)\,(2R-H)^2 = \frac{4\,n\,R}{m+n}.$$

Ако 2R—H означимо са $\underline{x}$, а $\frac{4\,nR}{m+n}$ са C, добићемо

$$(3R - x) \,.\, x^2 = C \,.\, R^2,$$

или

$$(3R - x) : C = R^2 : x^2.$$

Према томе, задатак се своди на следеће: дати отсечак (3R) поделити на два дела (3R — x и x) тако да се један од делова (3R — x) односи према датом отсечку (C), као дата површина (R^2) према квадрату другог дела (x^2).

Полазећи другим, геометриским путем, Архимед своди задатак баш на ово питање, и у томе је сав његов значај. Он одлично зна да се задатак ове врсте не може решити помоћу шестара и лењира, али је он могао, као што су то радили његови савременици — Ератостен и други, да се задовољи решењем датог задатка помоћу нарочитих справа (νεῦσις) или путем пресецања коничних пресека. Међутим, он неће то да ради, него гледа у овом задатку само посебни случај општег задатка

$$\frac{C-x}{C_1}=\frac{C_2^2}{x^2},$$

т. j., уствари посебан случај решења **кубне једначине у општем облику**. Дошавши до овог закључка, он примећује: „Ако приђемо задатку у овом општем облику, онда он захтева доризам (тј. одређивање граничних вредности, између којих он има решење); у датом пак посебном случају нема потребе за диоризам (т. j. задатак има решење за све вредности параметра). Анализу и синтезу задатка даћу на крају“.

Нејасно је шта значи последња примедба, јер у делу „О кругу и цилиндру“, које је дошло до нас, нема никаквог решења овог задатка. Тог решења није било ни у античким примерцима ове књиге. Како саопштава Архимедов коментатор Еутокије, који је живео у VI в. н. е., Дионисодор и Диокле, од којих је први живео нешто касније од Архимеда, а други — сто година касније, нису нашли у Архимедовом делу, које се проучава, решење овог задатка и закључили су, „да је Архимед обећао али није испунио своје обећање“, па су стога сами додали решење овог задатка. „Али ја сам, — примећује Еутокије, — као резултат неуморних трагања нашао у једној старинској књизи доказ за неколико теорема; истина, оне су услед мноштва грешака биле недовољно јасне и имале су пуно грешака у цртежима, али су у својој основи садржале оно што сам ја тражио; усто, биле су писане делом на дорском наречју, којим је писао Архимед; затим, у њима је примењивана терминологија која је постојала у најстарије време, као на пример, „пресек правоуглог конуса“ за параболу“ и т. д. Одмах затим Еутокије наводи решење које је нашао у овој књизи, а које по његовом мишљењу, припада самом Архимеду. Овде се овај задатак решавао помоћу двају просторних геометриских места, т. ј. путем налажења тачке пресека параболе и равностране хиперболе.

Еутокије је мислио да је он нашао изгубљену страну поменутог дела и у томе се с њим слажу истраживачи нашег доба — Хајберг и Хес. Међутим, мени ова претпоставка изгледа нетачна из ових разлога:

1) Ако се Архимед и позива у својим делима (на решавање геометриских задатака помоћу нарочитих справа) или на решавања помоћу пресека коничних пресека, нигде се ови начини не примењују за добијање решења задатака, него само за доказивање постојања и могућности решења, ради диоризма.

2) Еутокије је утврдио да расуђивања о математичком стилу и језику, које је он нашао у „старинској књизи", припадају Архимеду, али нигде не говори да је нашао дело „О кругу и цилиндру", у коме би се налазило и ово решење. Да је он нашао примерак дела „О кругу и цилиндру" са овим доказом који недостаје, он не би доказивао посредним путем да одломак припада Архимеду.

Стога нема разлога да се сумња у Дионисодорове и Диоклеове напомене, да рукописи дела „О лопти и ваљку" нису имали ово решење. Ми смо већ видели да Платон сматра решавања такве врсте начелно недозвољеним у математици; истина, Архимедови претходници и савременици често су их примењивали, али Архимед, очевидно, није пошао њиховим стопама. Потпуно осуство таквих решења у Архимедовим делима показује да је он свесно избегавао таква, у његово време модерна решавања, сматрајући да су недовољно строга. Али у делима као што су „Писма друговима" Архимед сматра да је могуће и потребно говорити и о недовољно строгим путевима који су га довели до овог или оног решења; могуће је да је из таквог „писма" и узето решење о коме говори Еутокије.

Вратимо се, међутим, на Архимедово опште решавање кубне једначине. Нама је сада познато да су стари Вавилонци решавали кубну једначину. Интересантно је упоредити ово решавање са Архимедовим да бисмо стекли уверење о дубокој начелној разлици између староисточне и грчке математике.

Старовавилонског математичара интересовало је пре свега налажење бројних решења кубних једначина, која се срећу у пракси. У том циљу он је поступио овако. Нашавши начин да сваку врсту кубне једначине сведе на облик

$$x^3 + x^2 = m,$$

он је, не тражећи решење ове једначине, саставио таблични преглед за сва цела решења за x (он је разуме се давао редом вредности за x, а налазио m, а не обрнуто; стога није морао да решава једначину).

Потпуно другачије поступа Архимед. Он тежи да сведе појединие случајеве кубне једначине на један општи облик, али не ради налажења бројних решења: грчка се геометрија уопште није бавила налажењем бројних решења. Њега интересују начелна питања: могућност уопштавања проблема, постојање решења, могуће граничне вредности (диоризам) итд. Овај се диоризам своди на налажење највећих могућих решења за $x^2 (C - x)$; Архимед је долазио до тачног решења да је таква највећа вредност

$$x = \frac{2}{3} C$$

Ради овог закључка му је и било потребно „нестрого" решење помоћу коничних пресека, јер је на тај начин могао претходно да нађе да се криве, о којима се горе говорило, додирују у тачци $x = 2/3\, C$,
кад је

$$C_2^2 \cdot C_1 = \frac{4}{27} C^3.$$

Ако је, с друге стране, $C_2^2 \cdot C_1 < \frac{4}{27} C^3$, онда, како он доказује, постоје два стварна корена. Код случаја са лоптом, јасно је да је услов за постојање стварних корена задовољен; јер израз који одговара у овом случају $C_2^2 \cdot C_1$, износи $\frac{n}{m+n} \cdot 4R^3$; потребно је само да буде

$$\frac{n}{m+n} \cdot 4R^3 \leqslant \frac{4}{27} (3R)^3 \text{ или } 4R^3,$$

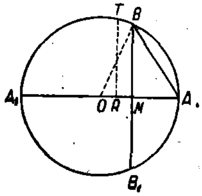
што је увек тачно.

Теореме 5—7 књиге II дела „О лопти и ваљку" представљају с нашег гледишта елементарне алгебарске вежбе са обрасцима за лоптин отсечак (конструисати лоптин отсечак једнак једном датом лоптином отсечку и сличан другоме, или који има површину једнаку површини једног лоптиног отсечка, а сличан другоме и т. д.). Разлика је само у томе што је Архимед принуђен да решава ове задатке геометриским путем, што решење чини знатно сложенијим. Први од ових задатака сводио се на кубну једначину и стога се не може решити помоћу шестара и лењира; веран своме принципу да не даје „нестрога решења" помоћу „убацивања отсечка" (νεῦσις) или пресека кривих, Архимед констатује да се задатак своди на тражење двеју средњих пропорционала, али не даје конструкцију решења. Решења су праћена диоризмима, тј. одређивањем граничних вредности при којима је могуће решење задатка.

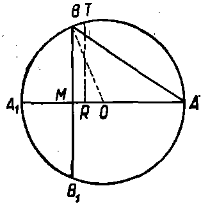
За нас су интересантнија два последња става књиге II. У првом од њих се доказује да је приликом поделе лопте на два неједнака отсечка однос запремина ових отсечака мањи од односа квадрата њихових површина и већи од односа $1\frac{1}{2}$ степена њихових површина (или, како се изражава Архимед, мањи од двоструког односа и већи од његовог $1\frac{1}{2}$ дела). Овим доказом Архимед је исправио своје нетачно тврђење у писму Конону (стр. 87, 88), да се тобож запремине лоптиних отсечака односе као квадрати њихових површина. За нас је ова теорема интересантна зато што је овде Архимед први пут увео у математичку науку појам разломљеног степена.

Још интересантнија је последња теорема: „Од свих лоптиних отсечака са једнаком површином, полулопта има највећу запремину". И овде Архимед исправља своје нетачно тврђење у истом писму Конону, да тобож највећу запремину има онај отсечак који је постао поделом лоптина пречника у односу 3 : 1. За нас је интересантно то што се овде задатак своди на тражење максимума, т. ј. на чувени изопериметриски задатак. Истина, опште усвојено гледиште да је изопериметриски проблем први пут поставио Архимед нетачан је. Из Филопоновог коментара сазнајемо да је већ Демокрит доказивао, да од свих полиедара са једнаком запремином најмању површину има лопта. Додуше, начин његова доказа непознат нам је. Познат нам је само доказ ове теореме који је дао Зенодор, један од најближих Архимедових следбеника.

Задатак о отсечку Архимед решава на следећи начин (у преводу на нашу алгебарску терминологију).



Сл. 23



Сл. 24

Ми смо напред (стр. 119 и след.) видели како је Архимед доказао да је површина лоптиног отсечка ABB_1 једнака површини круга пречника AB. На сл. 23 и 24 претстављена су оба могућа случаја; када је отсечак мањи од полулопте (лево) и кад је он већи од полулопте (десно). У оба случаја је

$$AB^2 = AM^2 + BM^2,$$

али у првом је $BM > AM$, и стога је

$$AB^2 > 2\,AM^2,$$

у другом пак случају је $BM < AM$, и стога је

$$AB^2 < 2\,AM^2.$$

У првом случају је

$$AB^2 < 2AO^2$$

(као квадрат стране која лежи наспрам оштрог угла), значи да је

$$2AO^2 > AB^2 > 2AM^2,$$

или

$$AO > \frac{AB}{\sqrt{2}} > AM.$$

У другом случају је

$$AB^2 > 2\,AO^2$$

(као квадрат стране која лежи наспрам тупог угла), значи да је

$$2\,AO^2 < AB^2 < 2\,AM^2,$$

или

$$AO < \frac{AB}{\sqrt{2}} < AM.$$

Другим речима, ако на пречник AA_1 нанесемо од A отсечак AR, једнак $\frac{AB}{\sqrt{2}}$, онда ће тачка R у оба случаја лежати између M и O; а ако је то тако, онда је полутетива RT, нормална у оба случаја на AA_1, већа од BM.

Али је

$$BM^2 + AM \cdot A_1M,$$
$$RT^2 = AR \cdot A_1 R,$$

одакле је

$$AR \cdot A_1 R > AM \cdot A_1M.$$

Ставивши

$$AM = h, AO = r, AR = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{A_1 A \cdot h}}{\sqrt{2}} = \sqrt{rh,}^{1)}$$

добићемо

$$\sqrt{rh}\ (2r - \sqrt{rh}) > h\,(2r - h),$$
$$\sqrt{rh}\,(2r - \sqrt{rh}) + rh > h\,(2r - h) + rh,$$
$$2r\sqrt{rh} > h\,(3\,r - h),$$
$$\frac{2\pi\, rh\sqrt{rh}}{2} > \frac{2\pi\, h^2\,(3r - h)}{3}.$$

или

$$\frac{2\pi\,(\sqrt{rh}\,)^3}{3} > \frac{2\pi h^2\,(3r - h)}{3}.$$

Десна страна неједнакости је запремина лоптиног отсечка када је полупречник лопте r а висина сегмента h; његова површина је $2\pi rh$. Лева страна неједнакости је запремина полулопте пречника $\sqrt{rh}$; њена површина је:

$$2\pi\,(\sqrt{rh}\,)^2 = 2\pi\, rh$$

Ова полулопта је један од лоптиних отсечака који има исту површину $2\pi rh$. Али по запремини он је већи од сваког другог отсечка такве исте површине, омотача, што је и требало доказати.

Резимирајмо ову главу.

И у доба када је писао ранија математичка дела, за Архимедово стваралаштво је карактеристичан и даљи занос за

---

1) Катета AB је средња пропорционала између хипотенузе A_1A и належлог отсечка AM (јер је $\Delta\ A_1BA$ правоугли пошто му је основица пречник).

механику и механичке методе решавања геометриских задатака. Он почиње своју математичку делатност, изгледа од тога што се у делу које је потпуно обрађено и намењено широј јавности, отворено служи методом решавања чисто геометриских задатака помоћу механике. Истина, из ове механике су отстрањена сва атомистичка размишљања и системи, али је већ само увођење механике у геометриске проблеме после категоричких забрањивања Платона, надахњивача каснијих активних радника Александриског Музеја, било бесумње революционарни чин; Архимед је очевидно у овој епохи био уверен да је његов закон полуге доказан по свим правилима тадашње математике, помоћу reductio ad absurdum, као и све друге геометриске теореме. Стога је он сматрао да је позивање на овај закон у геометриском делу логички беспрекорно; а претпоставка, по којој се тело окачено о полугу може, не нарушавајући равнотежу, да замени ма којим другим које има исту масу и исто тежиште, изгледала му је у оно време очигледна као ма која аксиома у геометрији. Али у другом погледу Архимед је испољио већу строгост и педантност него његови савременици: не само да није допуштао доказе и решења која су произлазила из атомистичког растављања величина на изванредно мале елементе приступачне чулима, него је полазио од принципа да се геометричар може позивати само на радње које се врше помоћу шестара и лењира: налажење пресека кривих или „уметање" отсечака дате дужине између две криве играли су код њега скоро исту улогу коју и у Еуклидовим „Елементима" претпоставка да је задатак решен.

Да се његов занос за механику није охладио и у ово време, јасно је из следећег. Ако дело „О квадратури параболе" садржи позивања на прву књигу дела „О равнотежи равни" и ако је према томе, писано после ње, и друга се књига дела „О равнотежи равни" на неколиким местима ослања на основне закључке из књиге „О квадратури параболе", узимајући их као доказане. Значи, ово је дело изишло у Сиракузи тек после појаве првих Архимедових геометриских дела.

Разуме се, при томе се мора подвући да је занос за механику отишао у други план, уступивши место чисто геометриским интересовањима. Сва садржина ове књиге своди се на налажење тежишта параболичног отсечка и отсечка параболе који се налази између две паралелне тетиве; само решење је дато строгом методом поступног исцрпљивања (све мањи троуглови), без поделе слике на елементе и њихова преношења на други крак полуге. Док се у I књизи дела „О равнотежи" писац углавном бавио питањима механике, овде је његово интересовање бесумње усретсређено углавном на чисто геометриска питања. Како по садржини,тако и по методама доказивања ова је књига уствари само допуна делу „О квадартури параболе".

С друге стране, баш у овој књизи се може први пут запазити појачано Архимедово интересовање за математику израчунавања која се у идеалистичкој филозофији, па према томе и у званичној математици сматрала као „логистичка", т. ј. као ниска примењена наука, достојна робова. Тако, у једном од ставова ове књиге која обилује бројним подацима, Архимед решава питање, с нашег гледишта чисто алгебарски, у коме је геометриски облик само спољашњи: „Ако су AB, CB, DB, EB четири отсечка који се налазе у непрекидној пропорцији и који су поређани од највећег до најмањег, и ако се EB односи према разлици AB и EB као неки отсечак ZH према три петине разлике између AB и DB, и ако се затим 2 AB+4 CB+6 DB+3 EB односи према 5AB+1O CB+1O DB+5EB као неки отсечак HO према разлици између AB и DB, онда је отсечак ZO (тј. збир отсечака ZH + HO) једнак двема петинама AB".

Најзад је значајан Архимедов резултат у овој епохи његова стваралаштва увођење појма **разломљеног степена** и постављање и срећно решење **изопериметриског проблема**.

АРХИМЕД И ДЕМОКРИТ

Из прве књиге дела „О лопти и ваљку“ несумњиво смо утврдили (стр. 93), да Архимед, у време када је оно написано, још није познавао Демокритова дела. Иначе он не би могао тврдити да је „извесне теореме које увелико надмашују све остале“, о запремини пирамиде и купе, први открио Еудокс и да „ниједан од истакнутих геометричара који су живели до Еудокса није знао за њих и није их открио“. У „Писму Ератостену о механичком методу решавања геометриских задатака“ Архимед исправља ову грешку са њему својственом отвореношћу и честитошћу:

„Пошто мислим (као што сам већ говорио) да сам озбиљан научник и истакнут филозоф..., сматрао сам да је умесно, да ти у истој књизи изнесем и објасним нарочити метод који ће ти послужити као добро помоћно средство за решавање неких математичких питања помоћу механике. По мом дубоком уверењу овај начин је исто тако користан и за доказивање теорема: многе су ми чињенице први пут постале јасне захваљујући механичком методу, али их је затим требало доказати геометриски, јер метод на који указујем (ἀποδειξεις) не даје строге доказе. Јасно је да је лакше наћи строг доказ пошто се претходно помоћу овог метода дошло до извесне оријентације у питањима, него га наћи без такве оријентације. Ето зашто и у оном случају када се говори о теоремама, чији је строги доказ први нашао Еудокс, — и то, да је купа трећина ваљка, а пирамида — трећина призме, које имају исту основицу и исту висину — приличну улогу треба приписати и Демокриту који је први дао ову теорему за поменута тела без строгог доказа (ἀπόδειξις). Ја се и сам налазим у истом положају, јер сам теореме које сад публикујем пронашао раније истим методом; одлучио сам да писмено изложим овај метод, делом зато што сам раније већ говорио о њему и не бих хтео да кажу да су то биле празне речи, а делом и зато што по мом уверењу, овим чиним доста велику услугу математици: сматрам да ће многи моји савременици или следбеници бити у стању, пошто се упознају са овим методом, да нађу нове теореме које ја још нисам смислио".

Мислим да ће читаоцу бити јасно кад прочита ово писмо да је Архимед упознао Демокритова дела први пут тек после публиковања прве књиге „О лопти и ваљку", које је Архимед послао после смрти Кононове из Сиракузе у Александрију. Значи он још није знао о Демокритовим математичким делима, док је био у Александрији. Тешко је претпоставити да их није било у Александриској библиотеци; пре би се могло рећи да му нико од његових колега није указао на Демокритова дела у којима се налазе и ствари које су интересантне за математичара. Заиста, оно што знамо о Архимеду искључује могућност да је он, идући трагом филозофа-идеалиста бојкотовао Демокритова дела због његове „безбожности"; случај са Аристархом показује да се Архимед не би обазирао ни на какве препреке да је нашао нешто интересантније за своју науку.

Пронашавши у Сиракузи Демокритове математичке радове, Архимед се бесумње похлепно бацио на њих. Заиста, он се нашао овде код извора оног „атомистичког" интеграљења које је с тешкоћом и по деловима морао да обнавља на основу појединих наговештаја и метода употребљених у делима из области механике, која су написали његови претходници. Истина, Архимед је од детињства знао да нема веће јереси ни већег греха пред великом математичком науком, него (чак и у еуристичком циљу) „састављати" тело из равни, равни из линија, линије — из тачака. Већ је Платон категорички изјављивао у „Законима": „Што се тиче односа линија и површина према телима или линија према површинама, зар ми, Јелини, не сматрамо да их је могуће мерити једне другима? Али то никако и ни на какав начин није могуће". О томе истом, али много јасније речено могао је Архимед да прочита и у Аристотеловом делу „О небу": „Постулирајући недељива тела, Демокрит и Леукип морају доћи до противуречности са математичким основама... Најмање отступање од истине у даљем току расуђивања повећава се десетине хиљада пута, као на пример, ако неко каже да постоји минимална величина: увођење најмање величине потреса најосновније математичке принципе". Ова полемика је основни тон и у коментарима о Аристотелу и у чувеној античкој „Историји математике" Еудема Рођанина. Као што смо видели, у овој полемици је учествовао и онај исти Ератостен коме је била упућена ова посланица коју разматрамо. Ова полемика је била чак и на заласку антике формулисана у виду принципа: „Све научне системе истините су само утолико, уколико нису засноване на претпоставкама да се непрекидно састоји од недељивих величина".

И ето, наишавши на Демокритову књигу у којој он сигурно није очекивао да нађе ништа сем штетних и досадних филозофских идеја које су га слабо интересовале, Архимед налази овде баш оно што је тражио и што му је недостајало у математици: растављање математичких величина на елементе и оперисање са спојевима ових елемената. При томе он открива да оне геометриске теореме за које сматра да су највећа и најгенијалнија математичка открића — налажење запремине купе и ваљка — није нашао Еудокс, него тај исти Демокрит.

Истина, Архимед није могао као добар математичар да мисли, да се могу узети као строги и коначни докази (ἀποδείξεις) који су позајмљени од атомиста, а који су му били познати из механике и које је нашао у чистом, логичнијем и убедљивијем облику код Демокрита. Али је он добро знао, такође на основи свог великог математичког искуства, да се ови строги докази обично изграђују на занатлиски начин по једноликим шаблонима, помоћу reductio ad absurdum и да, нашавши нестрого решење, засновано на „једва допустивим" претпоставкама механичког, тј. „атомистичког" карактера, више није тако тешко сваки поступак овог решења претворити по одређеном шаблону у строг доказ, уколико је „оријентација у питању већ стечена". Архимед је из свог искуства знао да је довољно само наћи такав нестроги доказ, па да главни део буде већ урађен[1]). Није слу-

---

[1]) „Спровођење доказа путем метода исцрпљивања на основи претходног решења, добијеног без помоћи овог метода, није била с Архимедова гледишта озбиљна научна заслуга, већ обичан технички метод који је он познавао до савршенства" (В. Штајн).

чајно да његове колеге, којима је слао само изводе из својих теорема не указивајући пут којим је до њих дошао, обично нису могле да нађу доказе ових теорема и да су чекале Архимеда да их он реши. Ево зашто он у посланици подвлачи да је „нестрог“ метод користан не само за налажење решења него „у истој мери и за налажење строгог доказа теорема“, јер је „лакше наћи строг доказ пошто се помоћу овог метода стекне извесна оријентација у питањима“. Он никако не мисли да пољуља ауторитет такве опште признате главе нове математичке школе као што је Еудокс, али, изјављујући да у учињеним Еудоксовим открићима “не мала улога припада Демокриту“, подвлачи тиме значај оних „механичко-атомистичких“ метода решавања математичких проблема које је он нашао, према којима су се еснафски математичари оног времена бесумње односили са неповерењем и сумњом.

Право рећи, писмо Ератостену је лекција и наравоученије правцу који је владао у математици, на челу са истим Ератостеном. Досада Архимед нигде није ни речју поменуо забрањене методе интеграљења које су примењивали атомисти. Он се покаткад задовољава скромном пропагандом увођења у геометрију доказа заснованих на закону полуге — такође доста смелог с гледишта тадашње математике. Прочитавши Демокрита он се уверио да се помоћу ових забрањених „атомистичких“ метода може саградити дивна зграда математике, разуме се, под условом да ће одмах затим њена фасада бити обрађена помоћу строгог метода исцрпљивања. „Ја сам ти слао своја открића (такав је стварни смисао писма Ератостену) ради тога да ти сам покушаш да нађеш њихове доказе. Ти то ниси урадио. Сада, дабоме, могу ти без даљег размишљања упутити своја решења, али од тога неће бити велике користи. Ти си озбиљан научник и филозоф и добар математичар па се стога не вређај за истину. Ти ниси могао и нећеш моћи да решаваш слична питања зато што не поседујеш онај златан кључ[1]) који отвара сва математичка врата. Ја бих могао да сачувам у тајности овај златан кључ, али нећу то да радим јер сам уверен да тиме чиним велику услугу математици; сматрам да ће многи математичари нашег и будућег времена, бити у стању да налазе све нове и нове теореме пошто се упознају са овим методом“.

[1]) Израз који припада Бонавентури Каваљерију.

Такво откривање завесе и разобличавање тајне математичког стварања било је бесумње право нарушавање тадање математичке етикеције, али за Архимеда су интереси истине и њему драге науке били изнад свега. Међутим, прави револуционарни чин, права непристојност с гледишта ове етикеције било је то што Архимед у овој посланици излаже као нешто што се само по себи разуме, основе математике атомиста, не трепнувши оком, без икаквих правдања и извињења. Баш исто као и Демокрит он раставља ваљак, купу или лопту на изванредно танке листиће — кружиће. Затим он доказује потребно му стање за један од кружића, онда примећује да његов закључак мора бити тачан ма за који кружић, и најзад, пошто се по његовом мишљењу тело састоји из таквих кружића и у целини је попуњено њима (συμπληρωθέντος), он одмах доноси закључак и за целину. По његовим речима, и раван се тако исто састоји (συγκείμενος), из линија. Не почиње он узалуд ово писмо позивањем на Демокрита.

Истина, ова се претпоставка узета од атомиста, примењује овде само у првом стадијуму — ради налажења претходних решења без строгог доказа. Али с гледишта тадашњих схватања није се могло уопште ни у једном делу рада позвати на овакву концепцију као на опште усвојену истину, без икаквих приговора и извињења, јер су против ње били усмерени сви математички радови оног времена (укључујући, као што смо видели, дела самог адресата писма — Ератостена). Та Архимед је могао рећи: „допустимо засад да се тело састоји из равни", или „ствар се дешава тако као кад би се тело састојало из равни", или „налажење решења је знатно олакшано ако се учине претпоставке које не одговарају стварности" и т. сл. Ништа од тога овде ми не налазимо. Израз — „П о ш т о с е троугао ΓΖΑ с а с т о ј и од дужи, ограничених обимом троугла ΓΖΑ, а параболични сегмент од дужи које се налазе у сегменту ΑΒΓ", — има потпуно аподиктички облик. Овде је потпуно исто стање ствари као и у питању о хелиоцентричном учењу Аристарха Самљанина. Архимед га ставља у основу својих рачунања, не говорећи ништа како се према њему односи. Дакле, хипотеза атомисте је корисна и поред свих школских предрасуда и протеста који она мора да изазове код васпитаног читаоца, па је треба искористити; она је недовољно убедљива, па дакле, закључке који су помоћу ње изведени треба проверити другим, убедљивијим начином.

Начелни приговор Ератостенов против Демокритовог начина изражавања, против састављања линија од тачака, површина од линија, овде се на тај начин, просто занемарује.

Не сме се тврдити да је посланица Ератостену писмо, које, насупрот другим Архимедовим радовима, има интимни карактер. Тачно је да је она намењена ужем кругу читалаца него његова друга дела, или како се Архимед изражава, — намењена „озбиљном научнику и филозофу" за кога атомистичка јерес не претставља саблазан. Али то не значи да је пред нама властито писмо писано с намером да га Ератостен прочита и уништи. „Писмо" је у овом случају само књижевни облик; Архимед и сам каже у предговору да жели овим писмом да пружи „велику услугу математици, и жели да се с његовим методом упознају многи математичари садашњице и будућности". Према томе, то није приватно писмо, него манифест, агитационо дело које почиње са помињањем огромних Демокритових заслуга и које и даље излаже, уствари, метод који је он основао. Усто треба имати у виду и то да ни друга Архимедова дела, по самој својој садржини, такође нису намењена најширем кругу читалаца.

Ово нам писмо пружа могућност да схватимо структуру доказа неких теорема које се налазе у Архимедовим делима. Његова решења на први поглед изгледају као неки оглед; после низа нама несхватљивих трансформација и манипулација, незнано одакле узетих и с каквим циљем, изненада добијамо тачан и непобитан закључак. Али треба само наћи односни доказ по методу атомиста па ће сваки потез Архимедова решавања постати схватљив.

Занимљиво је да, по иронији судбине (ако не због лукавства непријатеља атомиста) од Архимедових дела која су нам позната, научници из епохе рађања интегралног рачуна (XVII и почетак XVIII в.) нису знали баш за „Писмо Ератостену". Тек је 1906 г. приватни доцент Петроградског универзитета, Пападопуло-Керамеј, нашао у библиотеци једног јерусалимског манастира неки каснији хришћански текст, писан на пергаменту, са којег је био избрисан стари грчки текст из X в. Услед свог математичког незнања као и незнања историје наука заснованих на математици Пападопуло се заинтересовао само за горњи хришћански текст, а из доњег, избрисаног, који се и поред тога могао без велике тешкоће прочитати, навео је у каталогу Јерусалимске библиотеке само мали цитат. Ипак је чувеном данском историчару математике Хајбергу овај цитат био довољан да одреди, да је избрисан текст био Архимедов. Хајберг је успео да га прочита у потпуности и да га изда. Од Архимедових дела која су се овде налазила најинтересатније је „Посланица Ератостену“ коју је први пут публиковао Хајберг.

Према томе математичарима XVII и XVIII в. ово дело није ни могло бити познато, али треба њима на част рећи да су правилно одредили, учећи друга Архимедова дела, да се Архимед користио за налажење својих решења методом недељивих величина, али га је само скривао од читаоца.

Овај начин Архимедова доказивања приказаћемо касније када будемо разматрали његово извођење збира реда $1^2+2^2+3^2$... (стр. 132). Сада ћемо се задржати нешто детаљније на „Писму Ератостену, или, како су га скраћено називали људи античког доба, „Ефод“ или „Ефодик“ („Метод“).

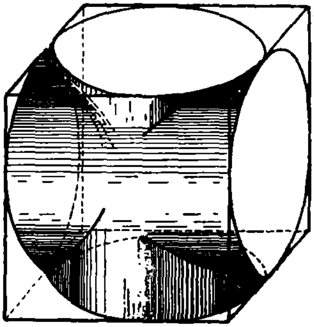
У предговору овог дела, чији крај на жалост није до нас дошао, Архимед набраја оне проблеме које је он у два претходна писма предложио Ератостену да реши, и који су сада претстављали садржај разматране књиге. У првом од ових писама Архимед је предлагао Ератостену да докаже теореме које су се односиле на области које је он први открио, на тела која настају обртањем коничних пресека. Већ у писму Конону, о коме смо напред говорили, Архимед му предлаже да докаже да је отсечак обртног параболоида, који настаје пресеком нормалним према осовини, $1\frac{1}{2}$ пут већи од купе исте основице и исте висине, а да се запремине двају отсечака обртног параболоида, који настају пресецима паралелним један другоме, али не нормалним према осовини, односе као квадрати осовина. Те исте задатке је Архимед задао и Ератостену; али он није овде додао још и теорему о томе да је запремина обртне елипсоиде једнака 2/3 запремине ваљка описаног око њега, и да тежиште параболоида лежи на његовој осовини, на 1/3 растојања од основице.

Друго писмо Ератостену садржало је предлог да се реше два задатка: 1) одредити запремину тела које образују два ваљка уписана у коцку, од којих један има осовину паралелну основици, други — осовину паралелну бочној страни (сл. 25)[1]. 2) У праву призму квадратне основице

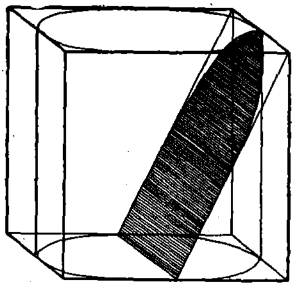
[1]) Решење овог интересантног задатка није се сачувало у окрњеном примерку „Ефода“ који је дошао до нас

уписан је ваљак. Кроз ивицу горње основице призме и кроз средиште њене доње основице повучена је раван која отсеца део ваљка. Треба доказати да је запремина овог дела ваљка 1/6 запремине целе призме (сл. 26).

Са Архимедова гледишта оба ова задатка су занимљива стога што се показује да су тела која су ограничена цилиндричним површинама једнака телима која су ограничена равнима (на тај начин имамо овде стереометриско упоређење са чувеним Хипократовим месецима и квадратуром параболе). За нас је занимљив други задатак стога што је то једини задатак од свег Архимедовог наслеђа који се решава искључиво путем недељивих величина, без икакве примене механике (закона полуге), док се у свим другим случајевима растављање на недељиве примењује само ради преношења тела на други крак полуге, као што се то радило у задацима механике. Појава таквог решења (теорема 14) у делу које почиње са указивањем на Демокритове заслуге у одређивању запремина тела, није случајно: у овом случају ми имамо бесумње пред собом метод који је непосредно позајмљен од Демокрита. Дајемо решење овог занимљивог задатка.

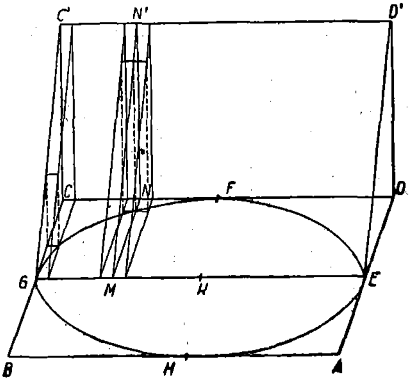


Сл. 25

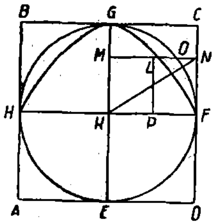


Сл. 26

Сл. 27,б претставља једну од квадратних основица призме ABCD; HGFE — је основица ваљка. Кроз EG и кроз ивицу C^1D^1 друге основице (дато на цртежу 27,а) која лежи изнад стране CD и која је њој паралелна, повучена је раван. На тај начин се од целе призме отсеца тространа призма $GECDC^1D^1$ једнака очигледно половини четворостране призме која такође има основицу GECD и, према томе, једнака 1/4 целе призме. Сада Архимед уписује у полукруг GOFE параболу са осовином KF (на сл. 27,б дата је само грана GLF ове параболе). Ово је необично важан и занимљив начин: овде је парабола само помоћна крива која се конструише само ради тога да се тражена запремина сведе аналитичким путем на површину параболе, већ познату читаоцу. Сада ћемо проучавати ма коју од „свих хоризонталних правих“, од којих су састављени како правоугаоник EGCD, тако и круг и параболични сегмент; ако кроз такву праву MN повучемо вертикалну раван (в. сл. 27, а), она ће отсећи: 1) уространој призми — један од међусобно једнаких правоуглих троуглова једнаких и са основицом MN, из којих је састављена



Сл. 27a



Сл. 27b

ова призма, 2) у отсеченом делу ваљка — један од међу собом неједнаких правоуглих троуглова из којих је састављен овај део ваљка. Нека права MN редом сече параболу, круг и страну квадрата у тачкама L, O и N. Апсциса параболе, помножена њеним параметром MN, једнака је квадрату њене ординате:

$$MN \cdot NL = NF^2,$$

одакле је

$$\frac{MN^2}{MN \cdot NL} = \frac{MN^2}{NF^2},$$

или

$$MN : NL = MN^2 : NF^2 = MN^2 : LP^2 .$$

Образујмо у оба дела пропорције однос првог према разлици првог и другог члана (dividendo et permutando):

$$MN : ML = MN^2 : (MN^2 - LP^2),$$

$$MN : ML = MN^2 : (MN^2 - MK^2) = MN^2 : (KO^2 - MK^2) = \\ = MN^2 : MO^2 .$$

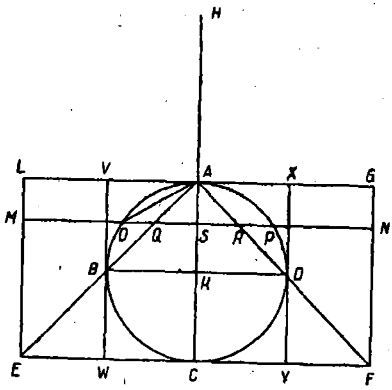
Али с в а к и од правоуглих троуглова из којих је с а с т а в љ е н сав отсечени део призме (сл. 27-а), сличан је с в а к о м е правоуглом троуглу из којих се с а с т о ј и сав отсечени део ваљка па се према томе њихове површине односе као квадрати односних катета (као $MN^2 : MO^2$). Али, као што смо видели, истовремено је

$$MN^2 : MO^2 = MN : ML,$$

тј. сваки од правоуглих троуглова из којих се састоји отсечени део призме односи се према сваком од правоуглих троуглова из којих се састоји отсечени део ваљка, као свака од свих правих из којих се састоји правоугаоник EGCD, према свакој од свих правих из којих се састоји параболични сегмент. „Сваки према свакоме, као све према свему"; значи, и с в и правоугли троуглови из којих се састоји отсечени део призме, тј. и с а в о т с е ч е н и д е о п р и з м е, тако се односе према с в и м правоуглим троугловима из којих се састоји отсечени део цилиндра, тј. према ч и т а в о м о т с е ч е н о м д е л у в а љ к а, као све праве из којих се састоји правоугаоник EGCD, тј. с а в п р а в о у г а о н и к EGCD, према свим правим из којих се састоји параболични сегмент, тј. п р е м а ц е л о м п а р а б о л и ч н о м с е г м е н т у. Али нама је већ познато да је површина параболичног сегмента једнака 2/3 површине правоугаоника EGCD: значи, и запремина отсеченог дела ваљка једнака је 2/3 запремине отсеченог дела призме који је једнак 1/4 запремине целе призме. Према томе запремина отсеченог дела ваљка једнака је 1/6 запремине целе призме.

Све остале теореме које се налазе у „Писму Ератостену", решавају се прво помоћу полуге, а затим помоћу метода исцрпљивања (ова последња решења нису сачувана у рукопису, али она за нас не претстављају већи интерес); стога је место ових теорема дато неколико лема из механике, које су доказане у делу „О равнотежи равни". Само теорема о томе, да тежиште купе лежи на 1/4 њене висине, на коју се овде позива Архимед, није доказана ни у једном делу које је до нас дошло; овај доказ се очевидно налазио у једном од изгубљених његових дела.

Архимед почиње, са добро познатом његовим читаоцима теоремом о површини параболичног сегмента, као обрасцем механичког метода, да би они могли упоредити оба метода доказивања. Овај доказ из „Ефода“ дат је горе (стр. 69 и след.). Затим следује теорема о запремини лопте, такође добро позната његовим читаоцима из дела „О кругу и цилиндру“. Овде се (упореди малочас разматрани задатак) конструише купа, лопта и ваљак (сл. 28); произвољна хоризонтална раван (чији је траг MOPN) отсеца од сваког од ових тела по елеменат — по круг различите величине са пречницима MN, OP, QR. Показује се следеће: ако се кружни елементи лопте и купе који су настали једним истим пресеком, пренесу на крај H другог крака полуге (A тачка ослонца, CA = AH), а односни елеменат ваљка остави на месту, они ће се уравнотежити. Познајући однос дужине кракова (2 : 1), и знајући да је запремина купе једнака трећини запремине ваљка, није више тешко наћи и запремину лопте; предлажем читаоцу да изведе то сам. Затим Архимед говори, сасвим у духу Демокрита, да је запремина лопте једнака запремини купе чија је основица једнака површини лопте, а висина њеном полупречнику, и већ одатле одређује површину.



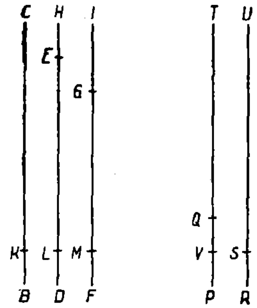
Сл. 28

Нећемо се задржавати на осталим задацима који се налазе у „Ефоду“. Сматрам да је читалац већ у довољној мери разумео механички метод из ова два примера. Указаћу само на то да је карактеристична црта овог метода, као и горе размотреног (стр. 128) задатка који је решен помоћу метода недељивих величина, као што је тачно приметио Хес, замена непосредног интеграљења елемената који састављају тражену површину или запремину, другим интеграљењем, чији је резултат унапред познат. Као оруђе за такву замену у датом случају је полуга.

Пре него што пређемо на два идућа велика Архимедова дела, „О спиралама“ и „О коноидима и сфероидима“, размотримо методе које је применио Архимед код сумирања редова

$$a+2a+3a+4a+\ldots+na,$$
$$a^2+(2a)^2+(3a)^2+(4a)^2+\ldots+(na)^2,$$

јер су они необично типични за реконструкцију математике атомиста коју је он примењивао. Као што смо говорили, у овој математици се први ред сумирао сасвим просто: слагала су се два једнака степенаста троугла (в. сл. 2) и добијао се троугао са странама na и (n+1)a, тј. површина сваког таквог троугла била је једнака $\frac{(na)^2 + na}{2}$, а код врло великог n могла се величина na занемарити према $(na)^2$, и добијао се резултат $\frac{(na)^2}{2}$.



Сл. 29

У „геометриској алгебри“, којој је ударен темељ у аритметичким књигама Еуклидових „Елемената“, општим изразима за бројеве, чији се симболи јављају код нас као слова a, b, c, итд. одговарали су отсечци правих и с а м о отсечци правих. Стога се Архимед, веран принципима Еудоксове школе, одриче да претстави јединицу квадратима из којих се састоји степенасти троугао. Он претставља (сл. 29) сваку величину отсечком праве односне дужине, затим продужује сваки отсечак до величине највећег. Сем највеће величине na, он добија (ако се преведе на наш алгебарски језик) низ збирова који одговарају појединим отсечцима цртежа: (n—1)a, и a; (n—2)a и 2a; (n—3)a и 3a све до a и (n—1)a затим он додаје још na (O и na). Таквих дужи је n + 1, свака има дужину na; значи да је њихов збир једнак na (n + 1), или n (n + 1)a. Али збир додатака додатих отсечцима, да би се ови изједначили са највећим од њих, баш је једнак самим отсечцима; значи сума отсечака једнака је

$$S=\frac{n(n+1)a}{2}=\frac{n^2a+na}{2};$$

Јасно је да је ова сума

$$S>\frac{n^2a}{2}.$$

Означивши $n+1$ са m, добићемо

$$S=\frac{(m-1)\,ma}{2}=\frac{m^2a-ma}{2},$$

одакле је

$$S<\frac{m^2a}{2},\ \text{или}\ S<\frac{(n-1)^2a}{2},$$

И тако смо добили горњу и доњу границу, после чега се методом reductio ad absurdum може већ доказати да се, код довољног смањења a, разлика између S и $\frac{n^2a}{2}$ може учинити мањом ма од које унапред дате величине.

И на овом примеру је лако видети да је Архимедов метод куд и камо непрегледнији и куд и камо неприроднији од старог метода, али овде је задатак тако прост да то не пада у очи.

Друго је са редом

$$a^2+(2a)^2+(3a)^2+\ldots+(na)^2$$

Овде је старо решење просто као и за ред $a+2a+$ $+3a+\ldots$, само што се место два степенаста троугла слажу тростепенасте пирамиде (в. табл. 3). А када Архимед мора и у овом случају да претстави величине отсечцима правих, а не коцкама, извођење постаје тако сложено да мора отворено да призна да има готов одговор (добијен, дабоме, унапред путем метода недељивих) и да према њему подешава своје решење.

У почетку све иде добро. Као и у првом задатку и овде се сви отсечци допуњују таман до величине највећег. Али сада ови отсечци не претстављају величине, него квадрате величина; стога се при слагању и дизању на квадрат два отсечка који имају на цртежу дужину a и $(n-1)a$, а у збиру na, не добија више само $a^2+[(n-1)a]^2$, него још и удвостручен производ. Добија се

$$\begin{aligned}
(na)^2 &= (na)^2 &&= (na)^2\\
(na)^2 &= [a+(n-1)a]^2 &&= a^2+2a\,(n-1)a+[(n-1)a]^2,\\
(na)^2 &= [2a+(n-2)a]^2 &&= (2a)^2+2\cdot(2a)\,(n-2)a+\\
& &&\quad +[(n-2)a]^2,\\
&\text{— — — — — — — — — — — —}\\
(na)^2 &= [(n-1)a+a]^2 &&= [(n-1)\,a]^2+2\,(n-1)a\cdot a+a^2,\\
(na)^2 &= (na)^2 &&= (na)^2.
\end{aligned}$$

Слажући, добијамо:

$$(n+1)(na)^2 = 2\,[a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \ldots + (na)^2] +$$
$$+ 2\,[a \cdot (n-1)a + 2a \cdot (n-2)a + 3a\,(n-3)a + \ldots + (n-1)a \cdot a].$$

Овде се Архимед зауставља у недоумици. Нејасно је шта треба чинити са последњим сабирком који задаје главобољу. Али је он путем метода недељивих унапред одредио да се као резултат сабирања трију степенастих пирамида добија тело које се састоји из паралелопипеда са странама na, na и (n + 1)a и „степенастог троугла", чија је површина основице једнака $n\,(n+1)a^2$, а запремина при висини a једнака је $n\,(n+1)a^3$. И тако је цела запремина трију степенастих пирамида са квадратном основицом:

$$n^2(n+1)a^3 + \frac{n\,(n+1)a^3}{2}.$$

Разуме се, уколико Архимед претставља свако a као праволиниски отсечак, он не добија куб него квадрат и зна да мора добити:

$$3[a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \ldots + (na)^2] =$$
$$= n^2\,(n+1)\,a^2 + \frac{n\,(n+1)\,a^2}{2}.$$

„Остаје, — примећује он, — да се докаже да израз који сам добио има исту вредност као и овај израз". Одредимо из оба израза $n^2\,(n+1)\,a^2$, и упоредимо добивене вредности (тражени збир $a^2+(2a)^2+(3a)^2$ означимо краткоће ради са S). Треба да добијемо

$$n^2\,(n+1)\,a^2 = 3\,S - \frac{n\,(n+1)\,a^2}{2}.$$

Добили смо

$$n^2\,(n+1)a^2 = 2\,S +$$
$$+ 2\,[a\,.\,(n-1)a + 2a\,.\,(n-2)a + 3a\,.\,(n-3)a \ldots + (na)^2],$$

одакле се, пошто се одузме други израз од првог, мора добити

$$S = \frac{n\,(n+1)\,a^2}{2} + 2\,[a \cdot (n-1)\,a + 2a \cdot (n-2)\,a +$$
$$+ 3a\,.\,(n-3)a + \ldots + (n-1)\,a\,.\,a].$$

Али у тачност ове једначине уверићемо се кад саберемо следеће изразе:

$a^2 = a^2,$
$(2a)^2 = 2a^2 + 2 \cdot a^2,$
$(3a)^2 = 3a^2 + 2(2a^2 + a^2),$
$(4a)^2 = 4a^2 + 2(3a^2 + 2a^2 + a^2),$
— — — — — — — — — — — — — — —

$$(na)^2 = na^2 + 2[(n-1)a^2 + (n-2)a^2 + \ldots + a^2)]$$

$$S = \frac{n(n+1)a^2}{2} + 2[(n-1)a^2 + 2(n-2)a^2 + 3(n-3)a^2 + \ldots + (n-1)a^2].$$

што је и требало доказати.

Према томе је,

$$3 S_n = n^3 a^2 + n^2 a^2 + \frac{n^2 a^2}{2} + \frac{na^2}{2}.$$

Упоредо са овом тачном вредношћу за S налазимо код Архимеда и граничну вредност овог израза:

$$3 S_n > n^3 a^2.$$

Као што смо видели (стр. 16) то је, кад се пренесе у трећу димензију (n^3a^3) — запремина трију пирамида са ивицом основице и висином na, које су се могле сматрати као граница степенастих пирамида при необично малом a.

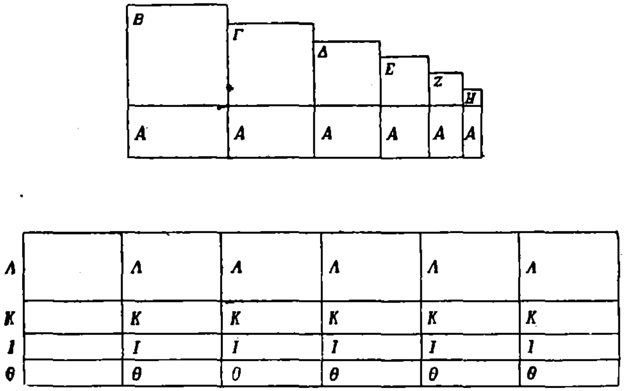
На сличан начин доказује Архимед да је

$$3 S_{n-1} < n^3 a^2.$$

Из других теорема које се налазе у овим делима, највећег начелног значаја је, можда, став из II дела „О коноидима и сфероидима" (Сл. 30).

„Ако је низ дужи (тј. отсечака правих) једнак међу собом, ако се свакој од њих приложи нека површина која као вишак има квадрат (в. горе, стр. 11 и след.), док су стране ових фигура које прелазе једна другу, веће једна од друге за исту величину, једнаку најмањој од ових страна; ако је, с друге стране, дат низ површина у истом броју као и први, при чему свака од других површина једнака је по величини највећој од првих, однос њиховог збира према збиру првих површина биће мањи него однос праве, једнаке збиру стране највећег од превазилазећег једног над другим правоуглом и једне од двеју једнаких страна, према правој једнакој збиру 1/3 стране највећег од превазилазећих један над другим правоугаоницима и половине једне од страна које су међу собом једнаке“ (исто тако је формулисана и доња граница).

Намерно сам дао ову теорему како ју је формулисао аутор, да би се читалац могао уверити колико је несхватљив за нас, који смо навикли на алгебарске ознаке, језик Еуклидове геометриске алгебре, и зашто морамо, штедећи време и пажњу читаоца, обично да преводимо ове несхватљиве фор-



Сл. 30

мулације на наш математички језик. Тако, површина „која има као вишак квадрат“, значи, као што смо видели, да се у правоугаонику чија је једна страна a стална, а друга x променљива величина, конструише над последњом квадрат, па је према томе површина целе слике која се састоји из правоугаоника и квадрата једнака $ax+x^2$. У целини, ова пропорција би се изразила у нашим ознакама овако:

$$\frac{n\,[b\cdot na+(na)^2]}{[ba+a^2]+[b\cdot 2a+(2a)^2]+[b\cdot 3a+(3a)^2]+\ldots+[b\cdot na+(na)^2]} < \frac{b+na}{\frac{b}{2}+\frac{na}{3}}$$

До овога Архимед долази на следећи начин. Сумирајући

$$b\,.\,a+b\,.\,2a+b\,.\,3a+\ldots+b\,.\,na,$$

он, сходно горе наведеној теореми (стр. 131), добија (множећи обе стране неједнакости са b)

$$\frac{bn^2a}{2} < ba+b\cdot 2a+b\cdot 3a+\ldots+b\cdot na$$

Сумирајући затим

$$a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \ldots + (na)^2,$$

он, на основи на истом месту наведене теореме, добија

$$\frac{n^3 a^2}{3} < a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \ldots + (na)^2.$$

После сабирања десних и левих страна неједнакости добија се

$$\frac{n^3 a^2}{3} + \frac{bn^2 a}{2} < [ba + a^2] + [b \cdot 2a + (2a)^2] + \ldots + [bna + (na)^2].$$

одакле се већ лако долази до тражене неједнакости (бројитељ и именитељ леве стране скраћују се са n^2 a).

Ако елементарне сабирке који улазе у ово разматрање не сматрамо за слике, него за тела која имају минималну висину a, као што се то радило у атомистичкој математици, онда ћемо морати као што смо напред говорили (стр. 132), да заменимо a у десним странама ових неједнакости са a^2, а a^2 са a^3; у последњој неједнакости на левој страни добићемо

$$\frac{(na)^3}{3} + \frac{b\,(na)^2}{2}.$$

Означивши променљиву na са x, можемо ради прегледности да преведемо цео овај поступак на језик наших ознака (примењујући знак $\int dx$);добићемо

$$\int_0^x bx dx = \frac{bx^2}{2}.$$

или $$\int_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3},$$

одакле $$\int_0^x (x^2 + bx)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{bx^2}{2}$$

Исто тако би се могло доказати да је

$$\frac{n\,[d \cdot na - (na)^2]}{[d \cdot a - a^2] + [d \cdot 2a - (2a)^2] + [d \cdot 3a - (3a)^2] + \ldots + [d \cdot na - (na)^2]} < \frac{d - na}{\frac{d}{2} - \frac{na}{3}}$$

У оба случаја, ако за збир узмемо не n чланова, него n — 1 члан, знак $<$ промениће се у $>$. На тај начин ћемо добити горњу и доњу границу, после чега се методом reductio ad absurdum може већ доказати да ће се, при довољном смањивању a знак неједнакости претворити у знак једнакости. Као што ћемо видети, међутим, даље (стр. 154 и след.), Архимед не користи образац са негативним знаком код a^2, ма да му је на изглед био неопходан.

На овај општи облик своде се све основне теореме у књизи „О коноидима и сфероидима", уколико се не могу свести на простији облик $\int bxdx$ или $\int x^2dx$. Да ли смо у праву да на основи тога тврдимо да је Архимед пронашао и примењивао општи алгоритам за решавање степенастог реда до другог степена? Мислим да би то било нетачно јер је примењивање овог „општег алгоритма" имало код Архимеда стихијски и несвесни карактер; он се нигде не одриче ради ове методе других разноврсних метода интеграљења, нигде је не издваја нити истиче њен универзални значај. Први је схватио значај ове методе Каваљери, који је подвукао и истакао на прво место своју „теорију апсциса" са њеним „свим апсцисама", „свим квадратима апсциса", „свим остацима апсциса" и т. д. Тек отада се интеграљење појављује као самостални алгоритам.

И поред свега, не сме се, дабоме, потцењивати значај Архимедова открића.

Пређимо сада на поједина Архимедова дела, која припадају овом добу. Дело „О спиралама" (буквално: „О линијама пужастог облика" — Περί κογχοειδῶν) посвећено је налажењу површине завоја спирале, која је касније названа Архимедова спирала. То је спирала чији радијус-вектор (т. ј. права повучена из почетка (средишта) спирале до ма које тачке њене периферије) има један крај причвршћен за тај почетак, док се други крај обрће (као стрелица на часовнику) око овог почетка, при чему дужина радијус-вектора стално расте сразмерно повећању овог угла. Другим речима, једначина ове спирале је[1])

$$\rho = n\varphi$$

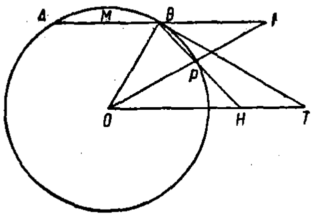
Дефиниција ове спирале, која се налази у предговору ове књиге, нарочито је занимљива, јер се по њој види да

[1]) Или (у Декартовим координатима)

$$x^2 + y^2 = n^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg}^2 \frac{y}{x}$$

је Архимед био и остао пре свега механичар. Овде је први пут у историји математике дата механичка дефиниција постанка спирале, као криве коју описује у равни тачка, која се равномерно креће дуж праве, док ова права врши истовремено равномерно обртање око тачке. Овде Архимед први даје јасну дефиницију појмова: „Равномерно праволиниско кретање", равномерно обртно кретање" и „слагање" ових кретања .

Површина која је ограничена почетним радијусом и завојем спирале (т. ј. путем који пређе крај радијус-вектора за време његовог првог, другог и т. д. потпуног обрта око осовине). Архимед назива првом површином, другом површином и т. д., а површину круга, чије је средиште почетак спирале, и чији је полупречник једнак по дужини радијус-вектору на крају сваког завоја, Архимед назива првим кругом, другим кругом и т. д.



сл. 31

Као и у другим својим књигама, и овде Архимед даје пре основних теорема неколико помоћних лема. Од њих највећи начелан значај имају три леме, посвећене νεῦσις , т. ј. као што смо већ говорили, уметању између две линије отсечка дате дужине, чији продужетак пролази кроз дату тачку.

Тако, Архимед доказује (сл. 31) да је, када је дата тетива AB у датом кругу и нормала OM, повучена из средишта круга O на ову тетиву, увек могуће повући полупречник OP тако да после његова продужења и пресека са тетивом AB у тачци F буде

$$PF : PB > BM : MO. \qquad (1)$$

Повлачимо ради тога из средишта O праву OT, паралелну AB, и из B праву, нормалну према OB, до пресека са OT у тачки T. Тада су троуглови OMB и OBT, са узајамно нормалним странама, слични, отуд

$$BM : MO = OB : BT. \qquad (1)$$

Узимамо произвољну дужину d која задовољава неједнакост

$$OB : d > BM : MO. \qquad (2)$$

Између круга и праве OT **умећемо отсечак** PH **дужине** d, **тако да продужење** PH **падне** у B. Тада ћемо на основи сличности троуглова OPH и BPF добити

$$PF : PB = OP : PH = OP : d \qquad (3)$$

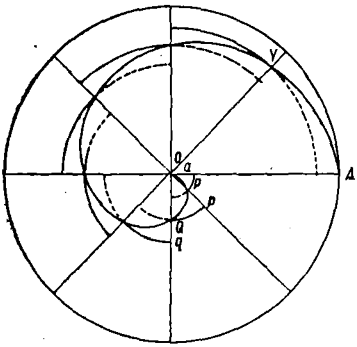
Али је $OP = OB$, као полупречници круга, те се, значи, има

$$PF : PB = OB : d \qquad (4)$$

Према томе, на основи (2) нашли смо такву тачку P, да је

$$PF : PB > BM : MO.$$

Као што видимо, у овим лемама је примењен неортодоксни, забрањен метод, νεῦσις, али он није примењен као начин решавања, него само ради испитивања задатка, ради доказивања да постоји решење.



Сл. 32

Као што смо већ рекли, основни циљ дела је налажење површине ограничене спиралом и почетном правом. Као карактеристику метода Архимедових радова довољно је узети само теорему о површини првог завоја, која је, како доказује Архимед, једнака 1/3 површине првог круга. Поделивши круг на n међусобно једнаких отсечака и повукавши кроз тачке дељења полупречнике, Архимед одређује односне радијус-векторе: првом полупречнику радијус-вектор једнак O, другом — једнак a, трећем — једнак 2a, четвртом једнак 3a и т. д. Кроз крајеве ових радијус-вектора пролази тражена спирала. Повуцимо сада из O као из средишта, кроз крајеве радијус-вектора, кружне луке до њиховог пресека са суседним полупречницима (сл. 32). Отсечци који настају у правцу супротном кретању стрелица на часовнику од ових тачака на спирали, образују изломљену линију која се састоји од лукова и отсечака полупречника претстављених пуном линијом која је **описана** око спирале, а отсечци, који настају у правцу кретања стрелице на часовнику од ових тачака на спирали, претстављају исто изломљену линију, али уписану у спирали; она се састоји од лукова и отсечака полупречника извучених тачкицама. Површина првог описаног сектора једнака је $\frac{\pi a^2}{n}$, површина другог $\frac{\pi (2a)^2}{n}$, трећег $\frac{\pi (3a)^2}{n}$ и т. д. све до последњег, n-тог, чија је површина $\frac{\pi (na)^2}{n}$. Износећи ван заграде $\frac{\pi}{n}$ и сабирајући, добијамо површину, ограничену описаном изломљеном линијом:

$$\frac{\pi}{n}\left[a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \ldots + (na)^2\right].$$

Али овај низ (низ квадрата природних бројева) Архимед је, као што смо видели сабирао и долазио до закључка да је

$$n^3a^2 < 3[a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \ldots + (na)^2]$$

или

$$\frac{\pi n^2 a^2}{3} < \frac{\pi}{n}\left[a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \ldots + (na)^2\right].$$

Ако сада узмемо уписане секторе, онда је површина првог од њих такође једнака $\frac{\pi a^2}{n}$, другог $\frac{\pi (2a)^2}{n}$ и т. д.; али је тих сектора мање: њих нема n, него n — 1; добићемо збир реда

$$\frac{\pi}{n}\left[a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \ldots + (n - 1)a^2\right],$$

за који ће, као што је напред показано, важити једнакост

$$n^3 a^2 > 3\left\{a^2 + (2a)^2 + \ldots + [(n - 1)a]^2\right\}$$

или $$\frac{\pi n^2 a^2}{3} > \frac{\pi}{n}\left\{a^2 + (2a)^2 + \ldots + [(n - 1)a]^2\right\}$$

На основи ових неједнакости Архимед доказује познатим начином, да површина завоја не може бити ни већа ни мања од $\frac{\pi (na)^2}{3}$ (т. ј. једнака је трећини површине круга чији је полупречник na, тј. трећини површине круга), уколико се разлика између

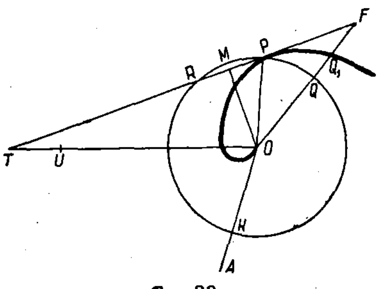
$$\frac{\pi}{n}[a^2 + (2a)^2 + \dots + (na)^2]$$

и

$$\frac{\pi}{n}\left\{a^2 + (2a)^2 + \dots + [(n -)\ 1a]^2\right\}$$

једнака πna^2, може учинити мањом од ма које дате величине при довољно великом n и довољно малом a. Међутим, Архимед не уводи множилац $\frac{\pi}{n}$, јер оперише са пропорцијама.

Од других теорема задржаћемо се само на једној (сл. 33) у којој се примењује горе наведени νεῦσις[1]). Ако се ма у којој тачци P првог завоја повуче дирка на завојници, а из средишта O подигне нормала према радијус-вектору OP до пресека са дирком у тачки T, а затим се из средишта O опише полупречником OP круг, до пресека са почетним полупречником у тачки K, онда је дирка OT једнака луку KP.



Сл. 33

Путем reductio ad absurdum Архимед доказује да OT не може бити ни веће ни мање од кружног лука KRP. Нека је OT веће од лука KRP. На основи горе наведене леме можемо увек наћи такав полупречник OQ да је после његова продужења до пресека са сечицом TRP у тачки F

$$FQ : PQ > \frac{1}{2} PR : OM$$

одакле је, услед сличности троуглова OTP и OMP,

$$FQ : PQ > PO : OT$$

или

$$FQ : PQ = PO : OU$$

где тачка U лежи између O и T и узета је тако да је $OU > \smile KRP$.

---

[1]) Као и у другим случајевима код Архимеда, не ради решавања конструкцијом, него само ради анализе задатка као остварљиве могућности.

Изменимо места средњим члановима:

$$FQ : PO = PQ : OU,$$

онда је

$$FQ : PO < \smile PQ : \smile KRP$$

(јер је $PQ < \smile PQ$, а OU, по претпоставци је, $> \smile KRP$).

Одакле, componendo [образујући збирове чланова сваког односа (в. стр. 20 и след.)],

$$FO : QO < \smile KRQ : \smile KRP.$$

Али у спирали су лукови сразмерни радијус-векторима; према томе је

$$FO : QO < OQ_1 : OP.$$

Уколико су други чланови QO и OP међу собом једнаки, $FO < OQ_1$, а то је немогуће.

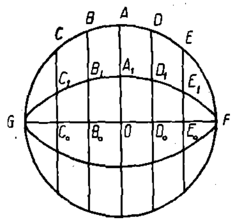
На сличан начин доказује Архимед да OT не може бити ни мање од лука KRP. Значи

$$\smile KRP = OT$$

Крајња извештаченост овог решења и резултата који је неочекивано произилазио изазвали су протесте каснијих математичара, почев од Папа који је живео у III в. н. е., па до данас. Већ је Пап исправно указао да се ова теорема може доказати путем „равних" геометриских места, без примене „просторних" места ма у ком виду (пресеци коничних пресека или νεῦσις), и усто непосредним путем, не користећи reductio ad absurdum. Пап је чак показао како се то може урадити. На основи исправне Хесове претпоставке, вештачко и недовољно прегледно Архимедово решење пре је резултат тога што је он и у овом случају нашао решење путем метода недељивих, па тек онда нама познатим шаблоном подесио сваки његов потез према језику старог метода. Хес је чак покушао да установи ток његових мисли, али је, природно, тај покушај произвољан.

Пређимо сада на једно од најзначајнијих Архимедових дела, на дело „О коноидима и сфероидима". У овој области Архимед је, изгледа, био пионир; ништа није познато о томе да се ма ко пре њега бавио телима која постају обртањем сегмената коничних пресека око њихових осовина. Архимед је морао сам да измисли и терминологију за ова тела. Као што смо видели, параболу Архимед назива „пресеком правоуглог конуса"; сходно томе обрнути параболоид назвао је „правоуглим коноидом"; хиперболу (тачније, сваку од грана хиперболе) назвао је" пресеком тупоуглог конуса"; сходно томе назвао је обртни хиперболоид „тупоуглим коноидом". Па ипак, Архимед не назива обртни елипсоид „оштроуглим коноидом", ма да је елипсу називао „ пресеком оштроуглог конуса". Елипсоид постао обртањем елипсе око њене веће осовине, он назива „издуженим сфероидом", т. ј. „издуженим лоптастим телом"; елипсоид постао обртањем елипсе око њене мање осовине, он назива „спљоштеним сфероидом", т. ј. „спљоштеним лоптастим телом". Могуће је да је Архимед измислио (или усвојио од претходника) ове последње називе још у раној епохи свог стваралаштва, а затим их више није хтео мењати ради складности читавог његовог система. Ми сво већ рекли да се у V в. елипса, очевидно, сматрала с гледишта атомиста, као круг у коме је свака ордината која га састављa смањена у једном истом односу; сходно томе се и обртни елипсоид мора сматрати као издужена или спљоштена лопта, а не као производ обртања коничног пресека. Отуд су и ти називи.

Да је Архимеду била блиска ова „атомистичка" концепција елипсе види се из става 4 разматраног дела. Овде он доказује да се површина круга чији је пречник већа осовина елипсе, односи према површини елипсе, као већа осовина елипсе према мањој. Доказивање се изводи по свим правилима Еуклидова метода исцрпљивања (в. стр. 23) без карактеристичног за Архимеда упоредног увођења доње и горње границе. Али је интересантна Архимедова примедба: „Пошто су с в е л и н и ј е у кругу (паралелне малој осовини елипсе, т. ј. ординате) п о д е љ е н е у истој размери", исти однос имају и троуглови и трапези, ограничени овим линијама (GCC_0 и GC_1C_0, CBC_0B_0 и $C_1B_1C_0B_0$, BAB_0O и $B_1A_1B_0O$ и т. д.), на које се и растављају многоуглови уписани у елипсу и круг, а пошто збир ових троуглова и трапеза и сачињава ове многоуглове, исти је однос и између ових многоуглова. Али полупречник круга, који је једнак половини велике елипсине осовине, и мала полуосовина елипсе (AO и A_1O) један су од таквих парова односних ордината; значи, површине многоуглова односе се као велика осовина према малој.



Сл. 34

Затим, путем reductio ad absurdum доказује се да и однос површине круга према површини елипсе не може бити ни већи ни мањи од односа површине ових многоуглова, па према томе, он је једнак овом односу.

И тако, сав доказ је изведен у духу математичке строгости: безброј ордината од којих се састоје круг и елипса замењене су троугловима и трапезима крајње ширине, примењен је аналогичан доказ (reductio ad absurdum). Али као полазна тачка не служи антички облик једначине елипсе као коничног пресека:

$$\frac{y^2}{x(2a-x)}=\frac{b^2}{a^2}, \tag{1}$$

него особина елипсине ординате, формулисана у духу атомиста:

$$y : y_1 = b : a \tag{2}$$

Разуме се, Архимеду није било тешко да упореди особину круга са једначином елипсе (1): „Квадрат нормале спуштене на пречник једнак је производу пречникових отсечака", т. ј.

$$y_1^2 = x(2a-x), \tag{3}$$

а на основи упоређивања једначине (1) и (3) он би одмах добио (2):

$$\frac{y^2}{y_1^2}=\frac{b^2}{a^2}.$$

Ипак, Архимед би у овом случају сачувао било какво указивање на све ове трансформације, а не би рекао: „пошто су ове дужи подељене у истом односу", јер таква подела није особина елипсе која је дефинише кад се о њој говори као о коничном пресеку.

Али, вратимо се на терминологију коју Архимед даје у почетку свог истраживања. „Конус, кога описују праве, најближе пресеку тупоуглог конуса" Архимед назива „обухватним конусом". „Најближе праве" — то су, разуме се, асимптоте хиперболе; реч је о конусу који настаје обртањем асимптоте око осовине. Растојање од темена овог конуса до темена обртног хиперболоида, Архимед назива „отсечком који се примиче осовини", и т. сл. Ако су осовине двају сфероида сразмерне једна другој, Архимед назива такве сфероиде сличним.

Као што ћемо видети из предговора делу „О спиралама", Архимед је пронашао теореме о запремини отсечка обртног параболоида већ у раној епохи своје делатности, о чему он говори већ у писму Конону, т. ј. до изласка његовог првог геометриског дела „О квадратури параболе“, написаног већ после Кононове смрти. Што се тиче теорема посвећених запремини обртног хиперболоида и елипсоида, до њих је Архимед дошао у доба које разматрамо, као што се види из предговора овом делу, упућеног Кононовом ученику Доситеју.

„Шаљем ти у овој књизи своје доказе теорема које нису биле у досада послатим ти књигама. Сем тога, шаљем ти доказе неких теорема које сам пронашао касније, јер и поред низа поновних покушаја морао сам се раније одрећи од њиховог доказивања — са толико великим тешкоћама је било то скопчано. Стога ове доказе нисам објавио заједно са осталима. Али, кад сам се касније латио њих са још већом усрдношћу, успео сам да решим оно што је до тада за мене било несавладљиво“.

У уводу своје књиге Архимед даје следеће леме из области теорије коничних пресека:

1) У обртном параболоиду је сваки пресек са равни, паралелном осовини, парабола, слична параболи од које постаје параболоид.

2) У обртном хиперболоиду је сваки пресек са равни, паралелном осовини, хипербола, слична хиперболи од које постаје хиперболоид.

3) У обртном хиперболоиду је сваки пресек са равни која пролази кроз теме асимптотског конуса, хипербола, која није слична хиперболи од које постаје хиперболоид.

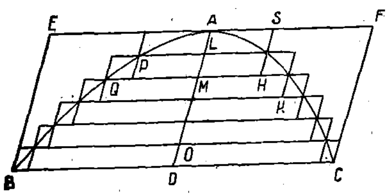
4) У сваком сфероиду је пресек са равни паралелном осовини, елипса, слична елипси од које постаје сфероид.

Архимед не даје доказе ових лема, али примећује: „Докази свих ових поставки су очевидни“ (φανεροί).

Ова примедба не може а да не изазове чуђење. Све ове поставке нимало нису очигледне, нарочито трећа. Ова примедба не може да значи ни да су оне биле већ доказане у Еуклидовим „Елементима коничних пресека“, јер Архимед у таквим случајевима отворено указује на то. Сматрам да би било правилно упоредити ову Архимедову примедбу са изјавом Архимедовог биографа Хераклида, коју је случајно сачувало предање. Одавде сазнајемо да су чувеног писца „Коничних пресека“ Аполонија Пергамског окривили за плагијат: тобож су његови „Конични пресеци“ само измењени „Конични пресеци“ Архимедови, које овај није успео да објави; тобож је Аполоније присвојио себи Архимедово дело.

О томе ћемо говорити касније (стр. 178) када будемо говорили о узајамним односима Архимеда и Аполонија. Засад узмимо у обзир само то да је Архимед, очевидно, спремао публикацију властитих „Коничних пресека" које, из нама непознатих разлога, није објавио (ниједан антички писац се не позива на ово дело); потпуно је могуће да је Архимед, пишући дело „О сфероидима и коноидима" хтео да укључи ове леме у своје „Коничне пресеке", те је стога сматрао да не треба да дâ њихове доказе.

Од осталих лема које претходе основним теоремама, најзанимљивије су у овом делу 8-ма и 9-та. Овде је показано како се налазе кружни пресеци конуса, када су дати елиптички пресек конуса и његово теме које лежи у равни која пролази кроз осовину а стоји нормално на равни пресека. Другим речима, сваки прав конус са елипсом у основици може се увек сматрати као конус са кругом у основици.



Сл. 35

Основни задатак књиге је налажење запремине отсечка обртног параболоида, хиперболоида и елипсоида. Архимед показује да ова запремина зависи само од површине основице отсечка и његове висине, и не зависи од величине угла између основице отсечка и осовине елипсе. Да би се нашла запремина, у свако од наведених тела (сл. 35) уписује се и око њега описује степенасто тело, састављено од низа ваљака положених један на други, правих или косих, јер се њихове осовине поклапају са осовинама обртних тела. Висине ових ваљака а једнаке су међу собом и свака је једнака $\frac{1}{n}$ висине целог тела. Лако је уверити се да је први описани ваљак (рачунајући од темена обртног тела) једнак првоме уписаноме, други — другом и т. д., али да последњи од описаних ваљака нема одговарајућег у уписаном степенастом телу. Пошто су висине ваљка међусобно једнаке, њихове запремине се односе као квадрати полупречника њихових основица, т. ј. као квадрати ордината.

Али квадрати ордината се односе:

1) у параболи — као апсцисе које им одговарају, т. ј. сразмерни су

$$a, 2a, 3a, 4a, \ldots, na;$$

2) у хиперболи — као производи апсциса које им одговарају и збира апсцисе и осовине b, т. ј. сразмерни су

$$a. (b+a),\ 2a. (b+2a),\ 3a. (b+3a) \ldots,\ na. (b+na),$$

или $b.a+a^2,\ b.2a+(2a)^2,\ b.3a+(3a)^2, \ldots,\ b.na+(na)^2$;

3) у елипси — као производи односних отсечака пречника d

$$a \cdot (d-a),\ 2a \cdot (d-2a),\ 3a \cdot (d-3a), \ldots, na\ (d-na),$$

или $d.a-a^2,\ d.2a-(2a)^2,\ d.3a-(3a)^2, \ldots,\ d.na-(na)^2$.

Разлика између запремине описаног и уписаног тела једнака је једном ваљку, који належе на основицу отсечка; код довољно великог n она може бити произвољно смањена. Али степенаста тела претстављају горњу и доњу границу односних обртних тела; према томе, на основи напред доказаног (стр. 132) запремина ваљка у који је уписан обртни параболоид, односи се према запремини обртног параболоида, као

$$n^2 : \frac{n^2 a}{2} = 2 : 1,$$

а пошто је запремина купе која има исту основицу и исту висину као и ваљак једнака трећини запремине ваљка, запремина обртног параболоида једнака је $\frac{3}{2}$ — запремини ове купе.

На тај начин може се из образаца за односна степенаста тела наћи у обртноме елипсоиду и хиперболоиду однос запремине ових тела према запремини ваљка који је око њих описан.

Међутим, потребно је указати на то, да се Архимед користи само обрасцем за збир реда $ba+a^2$, $b \cdot 2a+(2a)^2$ итд., а образац за збир реда

$$d.a-a^2,\ d.2a-(2a)^2, \ldots$$

не изводи и њиме се не користи. Он конструише низ правоугаоника са странама $\frac{d}{2}+h$ и $2h$ (где је d — велики пречник елипсе, а h пречников отсечак од средишта до основице сегмента), одузима од сваког од њих гномон (в. стр. 12) површине

$$d \,.\, a - a^2, \; d \,.\, 2a - (2a)^2, \ldots$$

и добија у резултату низ правоугаоника чија се ширина смањује када низ а, 2а, 3а, . . . расте. Сабирање површина гномона замењује се налажењем збира површина ових правоугаоника, који већ добија облик

$$c \,.\, a + a^2, \; c \,.\, 2a + (2a)^2, \ldots$$

т. ј. облик обрасца којим се он користио ради добијања запремине хиперболоида; према томе за посебни образац за елипсоид нема потребе. На овом примеру видимо са каквим је за нас несхватљивим тешкоћама имао посла грчки геометар услед непостојања алгебарских ознака и претставе о негативном броју.

ГЛАВА СЕДМА

АРХИМЕД НА ХИЈЕРОНОВОМ ДВОРУ. РИМ И КАРТАГИНА

Сматрајући да је бављење механиком и уопште разним практичним наукама незахвалан посао, Архимед је поклонио сву своју пажњу геометрији, оној научној грани, чија лепота и преимућство немају ништа заједничког са задовољењем практичних потреба. Ова се знања не могу упоредити са другим, ј е р с е у с в о ј и м д о к а з и м а с у к о б љ а в а ј у с а м а т е р и ј о м. У читавој геометрији се не могу наћи тежи и озбиљнији задаци, који би усто били дати у простијем и прегледнијем облику, него што је то учињено у Архимедовим делима. Неки виде у овоме доказ његова талента; други су мишљења да је упорним радом урађено оно што свакоме изгледа да је учињено лако, без напора. Понекад не можеш сам да дођеш до доказа ради решења задатка, али је довољно прибећи Архимедовим делима, па да одједном дођеш до закључка да си га сам могао решити; тако је прав и кратак пут којим он долази до доказа.

Архимед је био тако генијалан, поседовао је тако сјајан ум и створио тако велика богатства у области теоретске науке, да није хтео да задржи за себе ма и једно од дела о конструкцији машина којима је стекао себи име и славу.

„Нема основа да се не верује ономе што причају о њему: да га је геометрија привлачила као нека сирена која се настанила у његовом дому; стога је заборављао и на храну и на пиће и запостављао сваку бригу о телу. Ако су га приморавали да иде у купатило, он је тамо цртао на пе-

пелу огњишта геометриске слике, а на властитом телу намазаном уљем, прстом је повлачио линије, — толико је био занешен овом науком, и у толикој мери је био обузет страшћу према Музама. Али, ма да је учинио толико дивних открића, он је молио своје рођаке и пријатеље да на његовом гробу не буде представљено ништа сем лопте уписане у ваљак и натписа који би указивао колико је пута описано тело веће од уписаног. Међутим њега и његов град (уколико је то зависило од Архимеда) учинило је непобедивим баш његово дубоко познавање механике".

У претходним главама ми смо се у довољној мери упознали са Архимедом да би схватили шта је у овим Плутарховим речима књижевни шаблон, а шта — историска истина. То, што се овде износи о Архимедовој расејаности, прича се у сличним изразима и о Талету, и о Демокриту. Талет, задубљен у научно размишљање није приметио како је пао у јаму; Демокрит, заузет филозофским питањима није приметио да је поред њега привезан бик који риче итд. Дабоме не може се порицати да је расејаност — потпуно природна особина човека који је свом душом задубљен у научна размишљања, али присуство књижевног шаблона чини ове приче потпуно сумњивим, тим пре што се из Плутархова израза „нема основе да се не верује" итд. види да је и међу његовим савременицима и претходницима било таквих који нису веровали овим причама.

Очигледно је међутим да и сам Плутарх није читао нити је могао разумети Архимедове математичке радове; у противном он не би могао да каже да је „довољно прибећи Архимедовим делима па да се одмах дође до убеђења да би човек могао сам да реши тај задатак"; обрнуто, вештачка Архимедова решења, добивена незнано откуда и незнано којим путем (читаоцу се саопштава само доказ!), пре изазивају код читаоца осећање властите немоћи и дивљење, а никако „убеђење да би могао да реши и сам". На то су обратили пажњу такви научници као што је Њутнов учитељ Бароу и Лајбниц којима, разуме се, нико не може да пориче математички дар. Не примећује узалуд Таке, познати геометричар XVII в.: „Архимеда више хвале него што га читају, више се усхићују њиме него што га разумеју". Само у врло мало случајева може се учинити пут којим Архимед води читаоца „раван и кратак"; у већини случајева тај пут је веома кривудав и читалац остаје запањен кад одједном примети да га је овај пут неочекивано довео до циља (то је подвукао исти Бароу). Плутархова примедба омогућује нам да се још једном уверимо да Плутарх често говори не о томе какав је био Архимед, већ какав би требало по његовом мишљењу да буде идеални научник.

И чињеница да Архимед није изложио ни у једном од својих дела (изузев, уосталом, књигу о конструкцији небеског глобуса) своја открића из области практичне технике, као и што је наредио да се на његовом надгробном споменику нацрта само геометриска теорема, — све то подједнако говори у најбољем случају о томе да је Архимед био задојен предрасудама оне учене средине у којој је он морао да живи, и да се стидео својих наклоности за технику. Интересантно је да у другој Архимедовој карактеристици која је дошла до нас у делу ал-Јалил ас-Сијзи-а, арабљанског математичара X—XI в. н. е., а које, бесумње, потиче такође из античког извора, нема ни трага од овог презрења према занимању практичном механиком: „Архимед је стекао код Грка највишу славу у геометрији; ни пре ни после њега није било никог који би се могао упоредити са овим изврсним геометричарем, као што није било никог ко би се са истом усрдношћу бавио практички корисним стварима. Захваљујући изузетној снази свог ума он је изумео оруђа и инструменте за војне сврхе“.

Да би се схватио истински Архимедов душевни лик, мора се узети у обзир да је дело, које смо сада разматрали, „О коноидима и сфероидима“ било, изгледа, последње Архимедово геометриско дело. Његови каснији радови посвећени су: 1) рачунским проблемима и проблемима израчунавања приближних бројних вредности, тј. „логистици“, нижој примењеној науци са гледишта античких људи, јер је задатак праве науке био да се налазе односи запремина, површина и отсечака, а не њихова права величина; 2) математичким играма и 3) хидростатици. Све су то, с гледишта научника оног времена, — „примењене“ науке „ради забаве“. Може ли се претпоставити да је научник, заљубљен у теориску науку и презирући примењене науке, одједном, у најбољим годинама прекинуо да се бави овим омиљеним наукама и у целини се посветио њему мрској „механици“? Друго је кад би овај изузетни занос теоретским наукама долазио од васпитања; а Архимед је у дубини душе био пре свега инжењер-виртуоз.

Док је у претходној епохи свог живота Архимед посвећивао своја дела својим колегама из Александриског музеја — Конону, Ератостену, Хераклиду, Доситеју, сада он посвећује своја дела сиракуским монарсима Хијерону и Гелону. Појава књиге о математичкој игри „стомахијон" такође показује да сада он постаје у већој мери практички стваралац. И најзад, како чувена Архимедова механичка открића, тако и његов рад на хидростатици најтешње су повезани са потребама сиракуских монарха.

Ево шта још читамо код Плутарха:

„Архимед је једном писао своме рођаку и пријатељу, цару Хијерону, да се ма којом силом може подићи ма који терет. У непоколебљивом поверењу које је придавао снази свог доказа он је, како се прича, рекао да би прешао на другу Земљу, кад би ова постојала, и са ње би померио са места нашу. Задивљен Хијерон почео га је молити да на делу докаже овај проблем и да покрене неко велико тело малом силом. Архимед је наредио да се смести на царску теретну галију која је с тешком муком помоћу многих руку била извучена на обалу, велика посада, да се стави на њу обичан терет, и, севши на неком растојању, покрећући мирно руком крај машине са мноштвом чекрка, почео је без икаквих напрезања да привлачи к себи галију тако тихо и равно, као да је ова пловила по мору. Запањен тиме, цар је оценио важност механике и замолио је Архимеда да сагради за њега свакојаке машине и оружје за опсаду, које би служиле како за заштиту, тако и за напад при ма каквој опсади".

Прича о галији која је померена с места помоћу Архимедових машина стигла је до нас у неколико верзија које делимично противурече једна другој. Тако, у коментару Еуклидових „Елемената" Прокло саопштава да је ову галију саградио Хијерон за цара Птолемеја; да је нису могли свући са обале ма да су упрезали у њу читаво становништво Сиракузе, али је Архимед измислио такве машине помоћу којих је Хијерон могао сам да је одгурне у воду без ичије помоћи. Убедивши се у то Хијерон је узвикнуо: „Захтевам да се отсада Архимеду верује у све што изусти". По питању какав је био механизам помоћу којег је Архимед покренуо галију, античка сведочанства се такође разилазе: по једнима је то полиспаст, по другима — полуга, по трећима — преношење помоћу зупчаника, по четвртима — завртањ.

Хијерон II и његова жена Филистида.
Скулптура у Британском музеју и портрети
на сиракушком новцу.

Могуће да је то уствари била сложена машина с применом различитих полуга; у сваком случају сва ова прича садржи јако преувеличавање.

Саопштивши о овом Архимедовом проналаску Плутарх се, који је био близак Платоновој школи, побојао очевидно да читалац, не дај боже, заиста не помисли да се Архимед озбиљно заносио овом примењеном техником, недостојном мудраца-идеалиста, док је истовремено сам истицао да је Архимед „у својим доказима ступао у спор са материјом“. Стога он сматра за потребно да дода: „Али Архимед није придавао значај свим овим машинама... Он је гледао у њима само просту геометриску игру којом се он бавио за време одмора и то у већини случајева на захтев цара Хијерона, јер га је тај владар непрестано убеђивао да не примењује свој таленат на чисто теоретске ствари, него на предмете који се изучавају огледом, и да своја размишљања учини мање више приступачним разумевању широких маса, примењујући их на опште корисне ствари“.

Ова Плутархова правдања не могу а да нас не потсете на изврсне Плехановљеве речи у његовом делу „Прилог питању развоја монистичког погледа на историју“[1]): поменувши проналаске које је учинио Архимед док су Сиракузу опседали Римљани, Плутарх сматра за потребно да оправда проналазача. Филозофу свакако не приличи да се бави таквим стварима, расуђује он, али Архимеда правда изузетност у којој се налазила његова отаџбина. Сада не сматрамо да је срамота — сасвим обрнуто! — да човек употреби на делу своје способности за механичке проналаске, а Грци су (или, ако хоћете, Римљани), као што видите, гледали на то сасвим друкчије...

Грчко и римско друштво било је, као што је познато, робовласничко. У таквом друштву сав физички рад, сва производња пада на робове. Слободан човек *се стиди* таквог рада, и стога, природно, настаје презрив однос чак и према најважнијим проналасцима који се тичу производних процеса, па између осталог и према механичким проналасцима. Ето зашто Плутарх није гледао на Архимеда, као што ми сада гледамо на Едисона“.

Морамо се сложити са Плехановим да ово место код Плутарха, које разматрамо, уствари не говори ништа о лич-

---

[1]) Дела, т. VII, стр. 166—167.

ним Архимедовим наклоностима, већ је карактеристично само за гледиште о занимању механиком, која је преовладала у античком друштву (а пре свега међу Платоновим следбеницима), које је бесумње, делио и сам Плутарх, будући платоничар. Ако је Архимедов прелаз од занимања геометријом на механику одговарао интересима Хијеронова двора, — то још не значи да делатност инжењера није одговарала такође и унутрашњим Архимедовим душевним одликама.

Појава највећег дела из касније епохе Архимедова стваралаштва — његовог дела „О телима која пливају“ — такође је у традицији повезана са потребама Хијеронова двора. Цар Хијерон је наручио мајстору да направи круну која је морала бити од чистог злата. Када је поруџбина била готова, Хијерон се поплашио да га је мајстор преварио и да је заменио део добијеног злата сребром. Он се обратио Архимеду с молбом да одреди, не кварећи круну, колико је потрошио за њу злата а колико сребра: Архимед није одмах нашао решење. Али, када се одмах затим купао у купатилу њему је изненада синуло решење овог задатка помоћу потапања круне у воду. Го, потрчао је из купатила кући, вичући целим путем: „Нашао сам! Нашао!“ („еурека, еурека!“). То је још једна варијанта исте анегдоте о Архимедовој расејаности.

Сасвим је могуће да се задатак о круни, као и принцип да се „ма који терет може покренути ма којом силом“, налазио у једном Архимедовом делу које није сачувано, писаном у облику писма Хијерону. Могуће је да је у овом делу био употребљен израз („нашао сам“, „открио сам“), чест код Архимеда. То је могло да дâ повод за анегдоту о Хијероновој круни, обрађену по шаблону античких анегдота.

Сем расејаности, сем одвратности према свему практичном, античка биографска књижевна традиција је сматрала за обавезну особину великог научника аполитичност: велики научник је далеко од свајих политичких група и стоји по страни од политичких партија. Само кад његовој отаџбини прети смртна опасност он се лаћа оружја и стаје на њену заштиту. Архимед је тобож само зато снабдевао цара Хијерона изврсним својим машинама, у доба још дубоког мира и са Римом и Картагином, што је техника била његова најомиљенија разонода, као и зато што га је за то стално молио Хијерон.

Чињенице историске стварности не слажу се са овим шематским Архимедовим ликом. Архимед је био рођак и друг владара Сиракузе Хијерона и Гелона; као човек изванредног ума и као родољуб своје отаџбине он се није могао не интересовати питањима спољне политике јер је с њима била у вези независност и само постојање сиракуске државе. После Хијеронове смрти 215 г. и ступања на престо његовог непунолетног унука Хијеронима, Архимед је заједно са осталим угледним људима који су били блиски Хијероновом дому, стекао бесумње велики утицај, и 212 г. ми га заиста видимо не само у улози војног инжењера, него и у улози генијалног организатора одбране.

Као што показују историске чињенице, пред сваког политичког радника и уопште мисаоног грађанина Сиракузе, стајала је у оно време дилема: Рим или Картагина. Сиракуза је била исувише мала и слаба држава да би могла покушати да игра самосталну улогу у борби двају колоса. Овде се стално боре две странке — римска и картагинска; после Хијеронове смрти, 215 г., велики утицај добија римска странка, али ускоро затим, ступањем на престо Хијеронима, припадници римске странке удаљују се са власти и фактички руководиоци државе постају Ханибалови опуномоћеници. Може се сматрати да је овој влади био близак и Архимед. Нова влада води енергичну и доследну политику. Сиракуза склапа чврст савез с Картагином и почиње ратна дела̂ња против Рима. Сиракуза покушава да привуче у савез, у који је сем Картагине и Сиракузе улазила већ и водећа држава грчког копна Македонија, на челу са Филипом V, и Египат. Као што смо видели, чини се покушај да се у борби против Рима уједини јелинистички свет. 214 г. у Сиракузи поново долази на власт римска странка, олигархиска странка „имућних људи“, али не задуго. Кратко време после тога на власт поново долази картагинска, демократска странка. Почиње последња борба с Римом: римска опсада Сиракузе и изврсна одбрана града коју је организовао Архимед. О свему томе ћемо говорити подробно касније.

Изгледа ми да не може бити сумње у то да је Архимед био не само обичан сиракушки родољуб, него, као и сав Хијеронов дом, одлучни присталица картагинске странке. Чак и легенда о Архимедовој смрти, и поред римске цензуре, сачувала је успомену о пламеној мржњи научника према Римљанима: када је римски војник повукао Архимеда Марцелу, расејани старац на први мах чак није ни схватио шта се с њим дешава, али када се окренуо и видео да га вуче Римљанин викнуо у бесу: „Нека ми неко од мојих сабораца да било какво од мојих оружја!" Чувши то поплашени Римљанин га је убио (Диодор). Познати немачки историчар Леншау је показао после пажљивог изучавања Хијеронове политике, да је та политика била од самог почетка задојена симпатијама према Картагини. Хијерон је већ 264 г. схватио да права опасност прети Сиракузи не од Картагине, него од Рима, и, поред увреда које је Картагина нанела Сиракузи, стао је на страну Картагињана и сјединио се с њима. Само победе Рима, отпадање низа сицилиских градова и бесна агитација римске странке у Сиракузи приморали су га да прекине рад против Рима и да фактички дође у полувазални однос према њему. Али какво је било његово лично расположење види се из тога што је после 241 г., када се Картагина нашла у необично тешком стању услед устанка најамника, и када су Римљани покушали да искористе то стање, Хијерон помогао Картагину свим могућим средствима. Истина, он је и даље одржавао добре односе са Римом и слао тамо скупоцене поклоне[1]), али је такве исте поклоне слао у Египат и на Родос. За Хијерона је карактеристична политика подмићивања и улагивања, — она је омогућавала његовој држави да се богати и ужива мир у ова тешка времена.

И у исто време Архимед гради за Хијерона изврсне и скупоцене ратне машине и одбранбена постројења. Против кога су намење ове машине? Картагина је била у то време у опадању; тада још нико није могао предвидети да ће се кроз 15—20 година појавити млади Ханибал. Усто Картагина није имала у то време никаквих поседа нити интереса на Сицилији. А Римљани су у то време покорили сву Италију, већи део Сицилије, Корзику и Сардинију и „свакоме је човеку било јасно да они испољавају жељу да помогну онима које је задесила опасност само ради тога да би прикрили своје агресивне намере, док уствари теже да освоје Сицилију" (Диодор).

1) На основи тога што Хијеронов наследник Хијероним захтева касније да Римљани врате ове „поклоне", јасно је да су они били резултат непосредног или посредног изнуђивања, или су имали карактер зајма.

Архимедове машине су грађене само против Римљана, и Архимед је морао знати против кога он кује своје страшно оружје.

Нас овде не интересује политика Сиракузе, већ Архимед. Стога, морамо одговорити на питање зашто су најбољи претставници грчке културе и науке претпостављали Картагину Риму.

Картагина је била једна од многих држава која се мало чиме истицала у културном погледу, али веома цењена јелинизована земља. При раскопавању овде су нашли низ предмета грчке уметности високе уметничке технике. Никаква оштра граница између семитизма и јелинизма није постојала: из картагинских надгробних споменика, приложених овој књизи, јасно се види, како семитски стил у израдама једног истог доба поступно прелази у јелински. У Картагини је изашао низ изврсних научних радова, на пример, Ханонови и Химилконови из области географије и Махонови из пољопривреде. Последња књига је била необично популарна у Грчкој; као што смо већ рекли, она је послужила као главни извор многобројних дела о пољопривреди, која је написао Архимедов пријатељ и рођак, сиракушки цар Хијерон. У списку познатих питагорејских филозофа које наводи Јамблих, нема ниједног Римљанина, него четири Картагињана. Један од њих — Милтијад — био је код Грка популарни образац нормалног живота и добročинства. Још познатији су били картагински стоички филозофи Херил и Клитомах-Хаздрубал, који су касније прешли из Картагине у Атину и задивили Атињане својим изврсним талентима. Чак је Делфиска пророчица нашла за сходно да потврди високе особине картагинске филозофије (в. стр. 160). Картагинско државно уређење сматрало се у Грчкој филозофији обрасцем, њега је величао већ Аристотел и Архимедов старији друг Ератостен (истина, последњи је то радио упоредо са римским уређењем). Картагинска интелигенција је имала грчка имена и носила се на грчки начин.

Један од најистакнутијих претставника ове картагинске интелигенције био је Ханибал. То је био један од најобразованијих људи свога доба, писац у оно време чувеног дела о преуређењу Мале Азије. Одлично је познавао стране језике. Његови најближи људи били су чувени књижевници оног времена — Силен и Сосил из Лакедемоније. И поред свих покушаја непријатеља да га оцрне, његова изузетна хуманост у вођењу ратова, верност датој речи и уговору усхићивале су све грчке историчаре његовог доба.

Ми смо већ истакли за александриске научнике карактеристичан космополитизам чији је главни пророк био Архимедов друг Ератостен. По њиховом мишљењу Јелин је не само човек грчке крви, него и сваки ко је стекао грчко образовање. Стога је појмљиво што је Картагина у очима Архимеда и његових другова била, без обзира на национални састав њених грађана, јелинистички град.

Друго је Рим. И поред ниског културног ступња у III в., римски напредни кругови су гледали на Грке са охолим презрењем варвара. Не чујемо ништа о научницима или филозофима у Риму који би играли неку већу улогу у светској науци или филозофији тог времена. Римски песник Плаут, који је извртао грчке комедије на римски начин, сам назива себе варварином (Philemon finxit, Plautus vortit barbare).

Свакоме је било појмљиво да је римско освајање Сиракузе значило немилосрдну експлоатацију све до потпуног осиромашења и разарања овога града, као и потпуни културни пад. У ратовима овог времена Римљани су испољавали грубост и вероломство, који нису имали себи равног у свој античкој историји. Тако су у Риму 214 г. били немилосрдно побијени таоци грчких градова Таренте и Фурије, лажно окривљени за покушај бекства. То је изазвало талас немира у грчком свету и јачање картагинске странке. Тај исти Марцел који је касније опсађивао Сиракузу, склопио је исте године уговор са опседнутим градом Касилинумом у Кампањи. Становницима је било одобрено да напусте град и оду у Капују. Али чим су изишли из града, Марцел је погазио уговор, напао их и све побио. На исти начин је Марцел приредио 213 г., погазивши уговор, општи крвави покољ становника сицилиског града Ене; тако је поступио са Бруђанима и Фабије Максим по заузећу Таренте, док ниједном становнику није учињено на жао када су Таренту освојили Картагињани. Нечувеном суровошћу одликовало се обрачунавање са становницима сицилиског града Леонтина, освојеног на јуриш. Клаудије Нерон је наредио да се глава убијеног Хаздрубала баци под ноге његовог брата Ханибала.

Као што видимо из античких података, ови поступци Римљана били су предмет разговора и негодовања у целом грчком свету. Усто су они били један од узрока свргнућа римске странке у Сиракузи 214 г. Док је римска агитација наилазила на симпатију углавном у кругу богатих завереника, народне масе су свуда саосећале са Картагињанима и прелазиле на њихову страну.

Како су се односили према Риму и Картагини широки кругови грчке интелигенције овог времена, види се још из следећег. Упоређујући најбољег претставника грчке историографије у доба Пунских ратова Филина и најбољег претставника римске историографије — Фабија Пиктора, Полибије сматра потпуно природним, „с гледишта животних и идејних интереса једног и другог", што су обојица „заљубљени" — први у Картагину, други у Рим. „Тако је на основи својих идејних гледишта и симпатија Филин налазио да су сви поступци Картагињана разумни, дивни и великодушни, док је Римљанима приписивао потпуно супротне црте". Није мање поучан и став Делфиског пророчишта. Делфиско пророчиште је увек разглашавало најкукавичније и најпомирљивије групе грчке интелигенције и увек је било на страни оног који је био јачи и имао већи успех. За време грчко-персиских ратова оно је било на страни Персијанаца, у доба кад су Грчку освајали Македонци оно је било на страни Филипа и Александра, када је Рим постао најмоћнија држава, оно је прешло на страну Рима. Али сигурна и потпуна победа Рима над Картагином, која се приближавала, запањила је чак и Делфе. Након неколико година после Архимедове смрти, после победе Римљана над Картагињанима, десила се у Јадранском Мору страшна подводна ерупција вулкана и земљотрес, после чега се појавило између Фере и Ферасије ново острво. Делфиско пророчиште је протумачило ове страшне догађаје који наговештавају беду, као испољавање Аполоновог гнева због победе Римљана над Картагињанима. Било је објављено овако „старинско" божанско претсказаније (Римљани су убрајали себе у потомке старих Тројанаца, док су Картагињани били по националности Феничани):

Пошто потомци Тројанаца одрже победу
Над Феничанима, страшне ће се ствари десити у природи:
Муња ће се градом камења срушити на таласе,
На мору ће се изненада појавити острво, непознато људима.
Такво ће се десити чудо: јер ће лошији људи
Грубом снагом руку одржати победу над бољима.

И, дабоме, сваки је културни Грк разумео да су „лоши људи“ — Римљани, а „бољи“ — Ханибал.

Интересантно да је (бесумње још пре ових догађаја) делфиско свештенство нашло за сходно да потврди и високи значај картагинске филозофије. Како је саопштавао касније познавалац античке литературе император Јулијан, бог је „посведочио мудрост Феничана“, рекавши:

„И Феничанима су увелико познати путеви блажених“.

У светлости ових чињеница биће нам потпуно разумљиво Архимедово понашање: иступивши активно на страни Картагињана, он се борио и за отацбину и за „демократију“ и за општегрчку ствар. Шта више, кад размотримо у идућој глави Архимедово дело које се односи на његову полемику са Аполонијем Пергамским, моћи ћемо донети вероватну претпоставку да су у његовом научно-књижевном стваралаштву питања светске политике нехотично одиграла извесну улогу.

Опис машина које је Архимед пронашао биће дат у последњој глави, где ћемо говорити о њиховој практичној примени. Засада ћемо указати на њихове основне типове. То су пре свега катапулте, антички топови, који су бацали на велику даљину олово и камење различите величине, од огромних блокова до малих комада; затим, то су машине снабдевене висећим балванима „кљуновима“ у чијим је специјалним жљебовима комађе олова и камења. Пошто би се ови „кљунови“ покренули ка означеном месту, они би се помоћу нарочитих котура превртали и избацивали на непријатеља камење. Од других машина спуштали су се на ужету „ждралови кљунови“ који су помоћу нарочитих механизама дохватали кљун непријатељских лађа, подизали их и, дрмајући и њихајући, уништавали их. Ове машине су претстављале комбинацију котура, чекрка и зупчаника; вероватно да су били примењени и опруга и водени покретач.

Све је ово скупоцено наоружање Хијерон спремао постепено Архимедовом помоћу, у току дугог раздобља од завршетка I пунског рата (241 г.) до своје смрти 215 г. Што се лојалним и предусретљивим вазалом приказивао Хијерон према римској власти, што је скупоценије поклоне и мито слао у Рим, све је дубља и непомирљивија била мржња Хијеронова и његових пријатеља, међу њима и Архимедова, према римским освајачима, све страшније се оружје ковало у Сиракузи ради одбијања Римљана у тренутку када коначно збаце маску и почну са освајањем последње слободне државе у сфери Апенинског Полуострва.

Ови политички трзаји и немири нису ни за минут зауставили научни рад великог истраживача, али је тај рад добио практичнији, примењивији правац.

ГЛАВА ОСМА

КАСНИЈИ АРХИМЕДОВИ РАДОВИ

При описивању Архимедове „сфере“ ми смо већ рекли да се она највероватније покретала воденим покретачем, тј. био је искоришћен притисак воде збијене у затвореном простору. Врло је могуће да је такву врсту покретача применио Архимед при конструисању неких својих ратних машина. Заиста, низ играчака и справа које су изумели Архимедови претходници Архита, Стратон и други, покретале су се помоћу сабијене воде и сабијеног ваздуха.

Већ се до Демокрита покушавало да се принципу еластичности да теориска основа. На основи експеримената долазили су до закључака да је течност еластична и, када је сабијена, да тежи да се шири, да се она при загревању шири а при хлађењу скупља. Ради објашњења ових појава полазили су од хипотезе о атомистичкој структури тела: између атома постоје размаци, празнине; атоми, ватре или топлоте раздвајају основне атоме тела када доспеју у ове празнине, услед чега повећавају запремину тела; при хлађењу ови атоми ватре излазе из тела, основни се атоми зближавају било зато што „слично тежи сличноме“, како је мислио Демокрит, било зато што се „природа плаши празнине“, како је мислио Стратон, — и тело се скупља.

Довољно је употребити ова хидростатичка размишљања са „геометриском хидростатиком“, која се налази у Архимедовом делу „О телима која пливају“ (Περὶ τῶν ὀχουμένων), које је написано у епоси коју проучавамо, да бисмо се уверили да имамо посла са начелним преломом првостепене важности: уместо полуспекулативних, полуемпириских расуђивања, наилазимо овде на складни ланац математичких доказа који логички произлазе из неколиких претпоставки.

Таква претпоставка је аксиома по којој се, при равномерном и непрекидном распореду честица течности, мање притиснута честица истискује више притиснутом и по којој свака појединa честица течности трпи притисак течности која је распоређена изнад ње.

Непосредни з а к љ у ч а к из ове аксиоме је теорема по којој је површина сваке течности сфера са средиштем у Земљином средишту (на тај начин је лоптасти облик Земље за Архимеда већ очевидна чињеница). Заиста, кад површина течности не би била сферна, онда би честице течности које се налазе на истом растојању од средишта Земље трпеле разне притиске, те стога не би остајале у равнотежи, већ би се кретале дотле док површина течности не би заузела сферни облик.

На основи истих претпоставака долази се даље до закључка да тела која имају исту специфичну тежину као и течност у коју су потопљена не могу да избијају изнад површине течности, него ће се држати на самој површини не тонући дубље.

Заиста, кад би тело избијало изнад површине течности, онда би слој течности који се налази испод тела трпео већи притисак, него слој течности који се налази на истом отстојању од средишта на неком другом месту. А то значи да ће се течност покренути и да се неће умирити све дотле док тело потпуно не потоне у течност и док притисак на све тачке једног те истог слоја течности не постане једнак. Али чим тело потоне у течност и наступи равнотежа, нестаће више разлога да се тело потопи дубље у воду.

На исти начин се лако доказује да ће тело, које има мању специфичну тежину него течност у коју је оно потопљено, тежити навише док не буде потопљено само једним делом, док би други део вирио изнад површине воде; само у том случају ће притисак на различите тачке једног те истог слоја течности бити једнак; на оном месту где се налази тело, отстојање од површине до посматраног слоја биће, истина, веће него на другим местима, али ће зато специфична тежина бити у односној мери мања, па према томе, свуда ће бити исти притисак. Такође је очигледно да, замењујући део течности телом к о ј е п л и в а, нећемо нарушити равнотежу нити изменити притисак на слој течности који се налази испод тела, а то је могућно само у случају кад је тежина тела једнака тежини делимично иститиснуте течности која се налази испод површине течности. Као закључак ове теореме је следећа теорема: тело чија је специфична тежина мања од специфичне тежине течности, тежи, кад је потопљено у течност, навише, силом која је једнака разлици између тежине течности, исте запремине као тело, и тежине самог тела. Заиста, ако неко тело плива на површини течности, онда његов део потопљен у течност тежи навише, као и свако тело лакше од течности, а његов део који се налази у ваздуху, тежи очевидно наниже. Пошто тело које плива остаје у резултату непокретно, очевидно је да је тежња оног дела које је потопљено у течност да избије навише, једнака тежњи наниже, тј. тежини оног дела који се налази у ваздуху. Али тежина дела који се налази у ваздуху једнака је разлици између тежине читавог тела које плива и тежине његовог подводног дела, а као што смо видели, тежина свег тела које плива једнака је тежини течности која је по запремини једнака његовом делу који је потопљен. Према томе потисак делова који су потопљени (раван тежини дела који се налази у ваздуху) једнак је р а з л и ц и   и з м е ђ у   т е ж и н е   т е ч н о с т и   к о ј а   ј е   п о   з а п р е м и н и   ј е д н а к а   п о т о п љ е н о м   д е л у   и   т е ж и н е   о в о г   д е л а. Ово је очевидно тачно за свако тело потопљено у течност.

Ова теорема има огроман начелни значај. Потисак тела, тј. ова разлика, очевидно је утолико већа уколико је већа специфична тежина течности у коју се тело потапа. Ово и јесте Демокритов принцип који је потпуно супротан Аристотеловом принципу, по коме се тело потопљено у течност креће утолико брже, уколико је мања специфична тежина ове течности. Врло је могуће да је и у овом случају, као и у случају одређивања запремине пирамиде, Архимед, не познајући Демокрита, самостално дошао до истог закључка као и он.

Ова истоветност гледишта Архимедова и Демокритова остала је у данашњој науци необележена услед недовољно дубоког познавања Демокритова наслеђа. Али античким људима то није могло да не падне у очи; није узалуд Ератостен, који се, као што смо видели, борио против атомизма, сматрао потребним да и у овом случају иступи против теорије која је противуречила Аристотеловој концепцији.

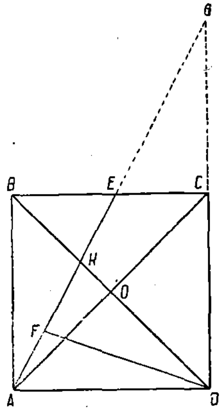
Као што смо већ истакли горе (стр. 47), Ератостен као математичар није могао да оспори тачност Архимедових доказа. Бесумње, он није оспоравао сам доказ, него аксиому која је била у његовој основи, на основи које су сва тела тешка и сва теже Земљином средишту, а не „своме природном месту“(οἰκετος τόπος), како је тврдио Аристотел, а за њим, очигледно, Ератостен.

Полазећи од исте аксиоме Архимед показује да свако тело са већом специфичном тежином него течност, губи при потапању у ову течност од своје тежине онолико колико је тешка њиме истиснута течност, тј. течност његове запремине.

Нека је тежина тела a + b, тежина једнаке му запремине воде b. Замислимо сада тело које је лакше од воде, чија је тежина једнака b, док је тежина њему једнаке запремине воде a+b. Спојимо оба тела. Заједно она теже (a+b)+b = = a+2b; тежина једнаке им запремине воде b+(a+b) = = a+2b. Сада сједињено тело тежи таман толико колико и запремина воде њиме истиснута, па према томе плива и налази се у стању равнотеже. Али друго, лако тело, тежи навише, као што смо видели, силом једнаком разлици између тежине течности његове запремине и његове властите тежине, тј. силом (a+b) — b = a. Према томе лако тело тежи навише силом a, и у резултату настаје равнотежа; ово је могуће само у оном случају ако тешко тело тежи наниже истом силом a, па је према томе његов губитак у тежини једнак b, тј. ако је оно изгубило у тежини онолико колико тежи њему једнака запремина течности.

Пре него што пређемо на групу дела из области „логистике“ (аритметике израчунавања), задржимо се на занимљивом Архимедовом делу посвећеном салонској игри „стомахијон“, која је вероватно била једна од разонода сиракушког двора. Из овог дела био је раније познат само један мали одломак у арапском преводу. Пошто су у нешто каснијем добу сваки тешки задатак називали „Архимедовим задатком“, сматрали су да се дело о „стомахијону“ називало „Архимедовим“ у овом преносном смислу, јер су сматрали немогућним да се Архимед бави таквим ситницама као што је теорија салонске игре. Међутим, у рукопису са оригиналним Архимедовим делима, којег је пронашао 1906 г. Пападопуло Керамеј, а публиковао Хајберг (в. стр. 125), сачуван је и почетак „стомахијона“, тако да нема никаквих сумњи у оригиналност овог дела.

Игра „стомахијон“ састоји се у томе што треба сложити 14 плочица од слонове кости тако да оне у целини образују квадрат; разуме се, то се могло постићи различитим начинима. Архимед је пре свега скренуо пажњу на то да у неким случајевима плочице само привидно попуњавају квадрат, „ивице плочица не леже на истој правој али се толико мало разликују од ње да је за око то неприметно“; ови случајеви такође подлежу изучавању јер се и у овом случају задатак сматра решеним.



Сл. 36

На пример, ако кроз квадрат ABCD (сл. 36) повучемо праву AE која спаја теме A са средином E њему супротне стране BC, а затим отсечак AK праве AE од темена A до пресека са дијагоналом BD поделимо напола у тачки F, добија се утисак да је $\triangle$ AFD $= \triangle$ FKD и да се један од њих може заменити другим. Уствари пак, ако дужи AE и CD продужимо до пресека у тачки G, онда је

$$\angle AKD = \angle AGD + \angle GDB \qquad (1)$$

Али у $\triangle$ ACG страна CG, једнака страни квадрата, мања је од стране AC (дијагонале квадрата) па је према томе

$$\angle GAC < \angle AGD \qquad (2)$$

с друге стране је

$$\angle CAD = \angle GDB \qquad (3)$$

Стога, сабирајући члан по члан (2) и (3), добијамо:

$$\angle GAC + \angle CAD < \angle AGC + \angle CDB,$$

или, на основи (1) је

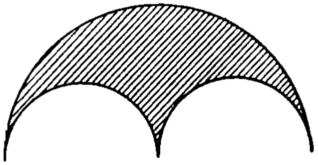
$$\angle GAD < \angle AKD$$

Према томе $\triangle$ AFD није једнак $\triangle$ FKD.

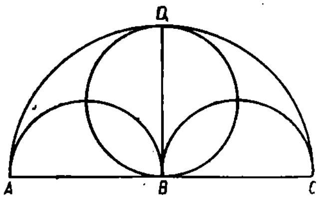
Други одломак који је дошао до нас посвећен је доказу да је однос површине сваке од 14 плочица „стомахијона“ према површини целог квадрата рационалан.

Ово је дело карактеристичан образац тога како јасан и научно изграђен ум научника уме да нађе строго логичну везу и међу чињеницама које изгледају на први поглед засноване на стицају случајности.

„Књига лема“ која нам је сачувана у арапском преводу претставља, изгледа, избор из различитих Архимедових дела извршен у касније време. Навешћемо из овог зборника



Сл. 37



Сл. 38

два задатка која припадају типу математичких разонода и која су блиска типу „стомахијона“.

1) Наћи површину „крзнарског ножа“ (ἄρβηλος). Површина крзнарског ножа који се примењивао за сечење и чишћење коже претстављала је слику ограничену трима полукруговима који су се додиривали, а чија средишта леже на истој правој (сл. 37). Архимед доказује да је површина крзнарског ножа једнака површини круга чији је пречник нормалан на заједничкој правој која спаја средишта датих кругова и полази од тачке додира двају мањих кругова до пресека са већим (сл. 38).

Заиста је

$$AC^2 = (AB+BC)^2 = AB^2+BC^2+2AB\cdot BC.$$

Али је

$$AB\cdot BC = DB^2,$$

одатле је

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,DB^2,$$

тј.

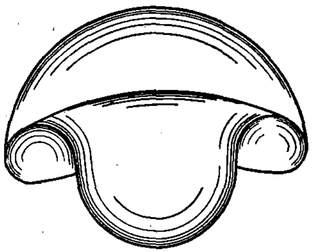
$$\frac{\pi}{8}\,AC^2 = \frac{\pi}{8}AB^2 + \frac{\pi}{8}\,BC^2 + \frac{\pi}{4}\cdot DB^2,$$

или

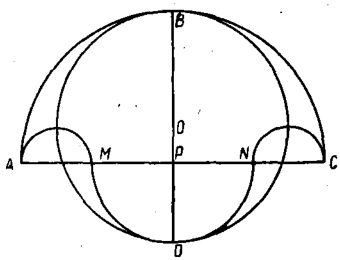
$$\frac{\pi}{8}\,AC^2 - \frac{\pi}{8}\,AB^2 - \frac{\pi}{8}\,BC^2 = \frac{\pi}{4}\cdot DB^2.$$

Леви део ове једначине је површина крзнарског ножа, а десни — површина круга пречника DB, што је и требало доказати.

2) Римски сланик (σάλινον) има облик полулопте са жљебом унаоколо у облику чвора и поклопцем у облику полулопте (сл. 39). Претстављен у пројекцији на раван он



Сл. 39



Сл. 40

изгледа као на приложеном цртежу (сл. 40). Ову пројекцију Архимед назива σάλινον („римски сланик").

Докажимо да је површина тражене слике једнака површини круга пречника BD.

$$AN^2 = (PN+AP)^2 = PN^2+AP^2+2PN\cdot AP,$$
$$AN^2+AM^2 = PN^2+AP^2+2PN\cdot AP+AM^2.$$

Замењујући у претпоследњем члану AP са PN+AM, добићемо

$$AN^2+AM^2 = PN^2+AP^2+2PN\ (PN+AM)+AM^2 =$$
$$= PN^2+AP^2+2PN^2+2PN\cdot AM+AM^2 =$$
$$= AP^2+2PN^2+(PN+AM)^2 =$$
$$= 2\,(AP^2+PN^2).$$

Али је

$$BD = BP+PD = AP+PN = AN,$$

Споменици античко-јелинистичке уметности. Израђевине од теракота

одакле је

$$BD^2 + AM^2 = 2AP^2 + 2PN^2,$$

или

$$2AP^2 + 2PN^2 - AM^2 = BD^2,$$

тј.

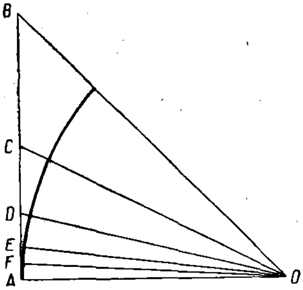
$$\frac{\pi}{2} AP^2 + \frac{\pi}{2} PN^2 - \frac{\pi}{4} AM^2 = \frac{\pi}{4} BD^2.$$

Овде је леви део површина сланика, а десни — површина круга пречника BD, што је и требало доказати. Архимед пролази без множења обе стране једначине са $\frac{\pi}{4}$ јер се служи пропорцијама.

Дело „О мерењу круга", као и други радови ове епохе, изузев „О телима која пливају" које смо горе разматрали, не обогаћује неким већим знањем, него пре може да служи као образац виртуозног владања рачунском техником („логистиком"). Размажени алгебарским ознакама, таблицама коренова, логаритама итд. ми, на жалост, нисмо у стању да покажемо оно усхићење за ову грану Архимедових радова, које је она заслужила. Теорема којом почиње ово дело, да је површина круга једнака површини правоуглог троугла чија је једна катета једнака обиму, а друга — полупречнику, претставља прераду у новом духу старе теореме математике атомиста. У овој математици круг се, као „бесконачноугаоник" (као „свуда-угао", како се изражавао Демокрит), природно, сматрао као збир уских троуглова са теменима у средишту, чије су се висине произвољно мало разликовале од полупречника. Збир површина свих ових троуглова једнак је ,очевидно, површини оног троугла о коме говори Архимед. Али Архимед није могао тако да расуђује. Он претпоставља да је површина круга већа или мања од површине поменутог троугла за неку коначну величину. Описујући и уписујући многоугле и узастопно удвајајући број њихових страна он показује, према горе размотреном шаблону, немогућност и једне и друге претпоставке.

Основна теорема ове књиге је доказ да је однос обима ма ког круга према његовом пречнику мањи од $3\frac{1}{7}$, и већи од $3\frac{10}{71}$.

У ту сврху се примењује метод који смо већ били принуђени да постулишемо за Антифонта: број страна уписаног и описаног многоугла узастопно се удваја, дужине обима описаног и уписаног многоугла изједначују се међусобно. Али Архимед, разуме се, не мисли да наставља овај поступак све дотле док се обими описаног и уписаног многоугла не изједначе: он упоређује ове обиме само ради о д р е ђ и в а њ а о т с т у п а њ а, ради одређивања с т е п е н а т а ч н о с т и добијеног резултата. То је његова прва велика заслуга.



Сл 41

Налажење обима многоугла са бројем страна 2n није лична Архимедова заслуга: тај обим је знао да нађе Антифонт[1]). Али је Архимед упростио и рационализовао цртеж и, изгледа, добио резултат путем простијих и тачнијих израчунавања. Уместо да црта низ описаних многоуглова, он наноси полустране описаних многоуглова на једну те исту дирку (сл. 41). Заиста, нека је AB половина стране описаног n-тагаоника; треба само поделити угао BOA на пола и повући бисектрису OC, па ћемо добити отсечак AC, једнак полустрани описаног 2n-угаоника. Поделивши затим на пола $\angle$ COA и повукавши бисектрису OD, добићемо отсечак AD једнак полустрани описаног 4n-угаоника итд.

Нека је AB полустрана описаног шестоугаоника, а према томе угао BOA — трећина правог. Тада се има

$$OA : AB = \sqrt{3} : 1 > 265 : 153 \tag{1}$$

$$OB : AB = 2 : 1 = 306 : 153. \tag{2}$$

Откуд је Архимед узео приближну вредност 265 : 153 за $\sqrt{3}$, није нам познато: или су је израчунали већ његови претходници, или је он сам извео ово израчунавање у једном од изгубљених аритметичких дела; Архимед само даје готов резултат без икаквих објашњења.

[1]) В. стр. 21.

За одређивање дужине полустране 12-угаоника AC, 24-угаоника AD итд. Архимед користи теорему: бисектриса дели основицу на делове пропорционалне бочним странама:

$$OB : OA = BC : CA.$$

$$(OB+OA) : OA = (BC+CA) : CA,$$

$$(OB+OA) : OA = BA : CA.$$

$$(OB+OA) : BA = OA : CA.$$

Али сабирајући (1) и (2) добијамо

$$(OB+OA) : BA = (265+306) : 153 = 571 : 153.$$

Према томе је

$$OA : CA = 571 : 153, \qquad (3)$$

или

$$OA = 571 \text{ део}, \quad CA = 153 \text{ дела}.$$

Да бисмо одредили однос $OC : CA$, узмимо у обзир да је OC хипотенуза троугла OAC, чије су катете CA и OA, па је према томе

$$OC^2 = CA^2 + OA^2.$$

Али је из (3)

$$OA^2 + CA^2 = (571^2 + 153^2) \text{ делова},$$

$$OC^2 = (571^2 + 153^2) \text{ делова}$$

$$OC^2 : CA^2 = (571^2 + 153^2) : 153^2 = 349\,450 : 23\,409,$$

на основи чега Архимед одмах пише

$$OC : CA > 591\frac{1}{3} : 153$$

Како Архимед извлачи квадратни корен из 349 450, није нам познато.

Примењујући тај исти начин и код даљег удвајања броја страна, он добија за полустрану 24-угаоника

$$OA : DA > 1162\frac{1}{8} : 153,$$

$$OD : DA > 1172\frac{1}{8} : 153$$

где је $1172\frac{1}{8}$ квадратни корен из $1\ 373\ 943\frac{33}{64}$; Архимед и у овом случају не објашњава како је извучен овај корен.

Прелазећи на полустрану AE 48-угаоника, Архимед добија

$$OA : EA > 2334\frac{1}{4} : 153,$$

$$OE : EA > 2339\frac{1}{4} : 153,$$

а за полустрану OF 96-угаоника:

$$OA : AF > 4673\frac{1}{2} : 153.$$

Али је однос полупречника OA према пулустрани 96-угаоника једнак односу пречника према целој страни 96-угаоника; значи, однос пречника према целом обиму је

$$> 4673\frac{1}{2} : (153 \times 96) > 4673\frac{1}{2} : 14\,688$$

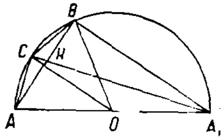
Према томе је однос обима 96-угаоника према пречнику

$$< 14688 : 4673\frac{1}{2} < 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{1}{7}.$$

Лако је видети из цртежа да Архимед овде даје правило за поступно налажење

$$\operatorname{ctg}\alpha, \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}, \ldots$$

Ради одређивања доње границе (сл. 42) Архимед почиње од стране уписаног n-угаоника AB. Ако се споји тачка B са супротним крајем A_1 пречника AA_1 добићемо правоугли троугао. Ако поделимо $\angle AOB$ на пола и повучемо бисектрису OC, онда ће страна AC бити очевидно, страна 2n-угаоника. Али, повукавши CA_1, уверићемо се да ће се притом и $\angle AA_1B$ поделити на пола (јер $\angle AA_1B = \frac{1}{2} \angle AOB$, а $\angle AA_1C = \frac{1}{2} AOC$); Према томе и кад делимо угао код A_1 на пола увек добијамо страну многоугаоника са удвострученим бројем страна.



Сл. 42

Троугли ACA_1 и ACK су слични, јер је $\angle CAK = \angle BA_1C$, пошто належу на исти лук CB, а $\angle BAC = \angle CA_1A$ и према томе, $\angle CAK = \angle CA_1A$; $\angle ACA_1$ — је заједнички. Према томе се има

$$CA_1 : AC = AC : CK = AA_1 : AK \qquad (1)$$

Али A_1C је бисектриса $\angle BA_1A$; према томе се има (permutando),

$$AA_1 : AK = A_1B : BK; \qquad (2)$$

из (1) и (2) ut omnes ad omnes, ita unus ad unum:

$$CA_1 : AC = (AA_1 + A_1B) : (AK + BK),$$

$$CA_1 : AC = (AA_1 + A_1B) : AB,$$

одакле је, код случаја шестоугаоника

$$CA_1 : AC = (2 + \sqrt{3}) : 1$$

итд.

Истим путем као и у случају са описаним 96-угаоником добијамо за уписани 96-угаоник да је однос обима према пречнику

$$> (66 \times 96) : 2017 \frac{1}{4} > 6336 : 2017 \frac{1}{4} > 3 \frac{10}{71}$$

И овде се стално мора извлачити корен из врло великих бројева, али Архимед не објашњава како он то ради.

Лако је видети да су величине које он поступно добија

$$\operatorname{cosec} \alpha., \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2}, \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{4}, ..$$

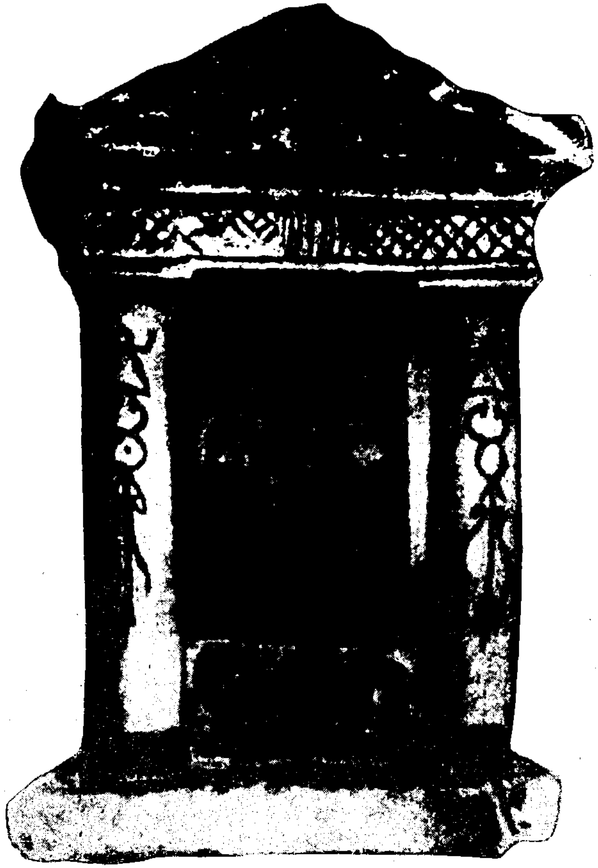
Граница отступања очевидно је једнака

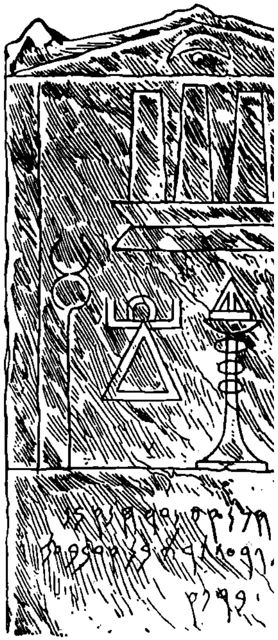
$$3\frac{1}{7} - 3\frac{10}{71} = \frac{1}{497} \approx 0.002.$$

За практичко скретање Архимедове научне делатности у овој епохи карактеристичан је повећан интерес за рачунску технику, логистику, и за питање о писању и именовању великих бројева с њом у вези. Ми смо већ из дела о мерењу круга видели да је Архимед мајсторски владао вештином извлачења квадратних корена из многоцифрених бројева.

Велика заслуга Архимедова био је нов систем ознака за вишецифрене бројеве. Грчки систем писања бројева није био положајни. У положајним системима једна иста цифра има различиту бројну вредност у зависности од положаја: тако, у нашем десетном систему цифра, рецимо 6, означује број „6", ако стоји на првом месту с десна, „60" — ако стоји на другом месту с десна, „600", ако је на трећем итд. У старовавилонском шездесетном систему иста је цифра 6 означавала број „6" ,ако је стајала на првом месту с десна, „360", ако је стајала на другом месту, „21600" — ако је стајала на трећем месту итд. Обрнуто, у грчкој нумерацији свака цифра има увек одређену вредност независну од места које она заузима: α — је увек 1, δ — увек је 4, $\varkappa$ — увек је 20, o — увек 70, ϱ — увек 100, ν — увек 400 итд. Употреба десетног система за бројеве мање од јединице довела је до открића десетних разломака, који старим Грцима нису били познати; међутим, стари Вавилонци рачунали су већ са шездесетним разломцима, потпуно аналогим нашим десетним.

Тешко је претпоставити да Архимеду и његовим савременицима није била позната ова вавилонска нумерација, примењивана већ 2000 година до н. е. Међутим, Грци све до наше ере нису никад примењивали шездесетни систем, делимично можда зато што га је било тешко спојити са грчким начином писања бројева, али углавном, бесумње, услед његове инертности. Међутим, Архимед је (или његови прет-





Картагински надгробни спомениц у Палерму)

ходници) усвојио вероватно од истих Вавилонаца метод потписивања бројева при рачунским радњама: без обзира на апсолутну вредност бројних знакова он их распоређује по десетним класама, потписујући знак једне те исте класе један испод другог.

Грчки систем израчунавања приближавао се положајном утолико што су Грци имали различите називе за бројеве само до једне миријаде, тј. 10 000, а даље су већ рачунали са миријадама. Највећи број који је могао бити изражен на тај начин био је „миријада миријада", тј. 100 милиона. Бављење астрономијом приморало је Грке да имају посла с растојањима која су захтевала, да би била изражена, кудикамо веће бројеве. Овим питањима је била посвећена Архимедова књига „Основи аритметике" (ἀρχαί), која није сачувана; како сазнајемо из популарног Архимедовог дела „Број пешчаних зрнаца", она је била посвећена „именовању бројева". Кратак резиме „Основа" које нису сачуване дат је у поменутој популарној књизи.

Као пример „бесконачно великог" броја у грчком фолклору и животу био је од најстаријих времена број пешчаних зрнаца. Аристофан чак употребљава у шали нарочити назив за такав број: „Песаксот" (ψαμμακόσιοι). Назив Архимедовог дела — „Псамит", које ми нетачно преводимо — „Број пешчаних зрнаца", има исти смисао што и „песаксот".

Ово дело по својој форми такође је блиско Архимедовим делима намењеним дворској разоноди. Оно је посвећено цару Гелону, који је управљао заједно са Хијероном, и има изглед парадокса. На основи општег грчког мишљења, број пешчаних зрнаца је највећи од свих могућих бројева; већи број се не може замислити. Архимед доказује да је то нетачно: ако чак повећамо број постојећих у свету зрнаца песка толико да она заузму цео свет, и онда њихов број неће бити највећи од свих могућих бројева. Ради тога Архимед треба пре свега да одреди максималну величину света. При томе он полази, као што смо већ говорили од хелиоцентричног система Аристарха Самљанина, рачунајући да је пречник целог света отприлике онолико пута већи од пречника Сунчаног система, колико је пута овај пречник већи од пречника Земље. Већ је Аристарх био нашао да је Сунце

једнако отприлике $\frac{1}{720}$ великог круга Сунчаног система;

Архимед је експерименталним путем нашао угао под којим се види Сунце: овај угао је већи од $\frac{1}{164}$ правог и мањи од $\frac{1}{120}$ правог (тј. већи од $0^\circ\ 33'$ и мањи од $0^\circ\ 45'$); отуд следи да је пречник Сунца већи од стране хиљадуугаоника, уписаног у велики круг Сунчаног система. Али пречник Сунца је мањи од 30 Земљиних пречника, а пречник Земље је мањи од 1 000 000 стадија (157 000 км). Из ових односа добијамо да је пречник Сунчаног система мањи од „сто миријада стадија" (тј. мањи од 10 000 000 000 стадија=1 570 000 000 км) с друге стране зрно мака не садржи више од 10 000 зрнаца песка, а ширина прста — не више од ширине 40 зрна мака.

Да бисмо нашли однос величине света према величини зрна песка, морамо имати посла с бројевима који немају назива на грчком језику. Али Архимед је већ измислио систем назива за ове бројеве у својим „Основима аритметике". У књизи коју разматрамо он упознаје укратко читаоца са овим системом.

Бројеви за које у језику постоји назив, бројеви до „миријаде миријада" (или до 10^8) он назива бројевима „првог реда" *или* „прве октаде" („осмице"); назив „осмице" показује да је Архимед већ усвајао $10\,000 \times 10\,000$ као 10 на осмом степену, ма да још није створио појам степена. Бројеве од 10^8 до 10^6 он назива бројевима „другог реда", или „друге октаде", од 10^{16} до 10^{24} — „трећег реда" итд. прелазећи све употребне бројеве закључно до „миријадно-миријадног" или 100-милионитог реда који обухвата бројеве од $10^{8 \cdot 10^8 - 1}$ до $10^{8 \cdot 10^8}$. Овим се бројем завршава први период. Други период, такође растављен на „редове", простире се од $10^{8 \cdot 10^8}$ до $(10^{8 \cdot 10^8})^2$ итд. Највећи број који се може изразити овим путем биће последњи број „миријадно-миријадног" реда „миријадно-миријадног" периода, тј. $(10^{8 \cdot 10^8})^{10^8}$. Ако изразимо ове резултате нашим цифрама онда ће већ последњи број **п р в о г** периода бити изражен јединицом са 800 000 000 нула, а последњи од свих бројева биће изражен јединицом са 80 трилиона нула!

Уосталом, за задатак који је поставио Архимед не само да нема потребе да се пређе граница првог периода, него се може задовољити са првих осам од 100 милиона редова овог периода: број пешчаних зрнаца на свету излази да је мањи од 10 000 000 јединица осмог реда првог периода ($= 10^{63}$).

Два последња Архимедова дела — „О мерењу круга“ и „О именовању бројева“ — наметнула су му (мислим да смо у праву да то тврдимо) енергичну полемику са другим великим математичаром јелинистичке епохе — Аполонијем из Перге. Стога пре него што пређемо на последње од свих сачуваних дела која се приписују Архимеду, биће целисходно да се овде задржимо на Аполонију и на његовом спору са Архимедом; могуће је да је овај спор имао политичку основу.

Према рачуну данашњих научника, заснованом на различитим примедбама античких писаца, Аполоније из Перге (у М. Азији) родио се отприлике 262 г., тј. био је млађи од Архимеда за 20—25 година. Не знамо да ли је он живео у Александрији истовремено са Архимедом или је стигао тамо тек после одласка Архимеда у Сиракузу. У сваком случају он је дуго живео у Александрији, при чему су његови другови по раду били, како саопштавају антички писци, „Еуклидови ученици“. Из његових дела се види да је он добро познавао радове и научну преписку поменутих Конона, Никотела из Кирене и других корифеја математичке науке. Главно Аполонијево дело било је „Конични пресеци“ у осам књига; ова је књига остала све до новог доба основно класично дело из области коничних пресека, као и Еуклидова књига из области елементарне геометрије. Она је брзо истиснула све радове о коничним пресецима који су постојали пре ње, а који стога нису ни сачувани.

Занимљива црта Аполонијева животописа била је његова присност са пергамским двором и самим пергамским царем Аталом I, који је владао од 241 до 197 г.

До Атала I Пергамско Царство које се налазило у северозападном углу М. Азије, налазило се у вазалној потчињености Селеукида. Атал I је успео да се ослободи ове зависности, да нанесе Селеукидима страшан пораз и да постане један од најмоћнијих владара тадашњег света. Главно оружје за ово јачање било је његово з б л и ж е њ е с а Р и м о м.

На челу грчких држава које су се зближиле међу собом у овом последњем часу грчке слободе, ради заједничког отпора Риму, била је Македонија са њеним царем Филипом V, Ханибаловим савезником, и Ахејски савез. Ово уједињење симпатисали су такође најутицајнији кругови као и најбољи претставници образованости у Александрији и Сиракузи; међутим страх од моћног Рима спречавао је

Птолемеје да иступе против Римљана па их је потстицао да подржавају с њим добре односе. Као што ћемо касније видети, у Сиракузи се водила отворена борба између грчко-картагинске и римске странке.

Природно је да оне мале државе које су до тог времена биле непријатељи главних руководилаца грчке коалиције или су трпели од њих, траже заштиту од Рима. Тако је на страну Рима ступио Етолиски савез, главни непријатељ Ахејског савеза: отворено је ступио на страну Рима и Атал I Пергамски, непријатељ Филипа V Македонског и Селеука III Сиранина. Атал и његови наследници водили су понизну политику према Риму (тако је Атал I послао у Рим златан венац у тежини 246 фунти). Аталова флота и војска војују заједно са Римљанима и наносе низ осетних удараца Филипу V. Римљани су умели да цене ову помоћ. По речима У. Вилкена, истакнутог стручњака за историју јелинизма, верност савезу склопљеном са Римом била је узрок процвата Пергама у скорим деценијама; али с друге стране, необична преданост Риму била је узрок што је Пергам изгубио политичку независност.

Доста важним узроком зближења Пергама са Римом била је економска супротност између Пергама и Александрије. То је и био један од узрока који су побудили Атала да створи у Пергаму друго средиште грчке културе, које је покушало да се надмеће с Александријом. Као и Хијерон Сиракужанин, и сам Атал је био писац: он је написао низ дела географске и природно-научне садржине. Он је скупио у свом двору истакнуте филозофе и научнике, као на пример, филозофа Антигона из Кариста и Неанта млађег. У Пергаму је основана и изврсна математичка школа, чији су истакнути претставници били Филонид из Ефеса, Еудем и Аполоније. У прогањању слободоумности у Пергамској школи већ смо говорили (стр. 39, прим. 1).

Аполоније је провео већи део свог живота у Александрији; али као што сазнајемо из предговора I књиге његових „Коничних пресека", провео је знатно време и у Пергаму, у присном друштву с математичарем Еудемом. Прве три књиге свог рада Аполоније је посветио Еудему. Остале је посветио цару Аталу I; то потпуно потврђује претпоставку да је Аполоније провео последњи део свог живота на пергамском двору.

Као што смо већ говорили (стр. 146), по изласку на свет „Коничних пресека" Аполонија су оптужили за плагијат;

тобож је ово дело било само прерада Архимедових „Коничних пресека" који нису објављени.

Ова оптужба је бесумње била бесмислена. Сам Аполоније, као што видимо из предговора у појединим књигама његовог дела, никад није издавао свој рад за властито оригинално откриће, него је скромно изјављивао да је само систематски средио открића својих претходника, дајући њиховим закључцима универзалнији карактер; у оним случајевима када је он сам нешто открио, он је то брижљиво бележио. Данашња критика је показала да је Аполоније пре био склон да умањује него да увеличава своје заслуге: и новом доследном терминологијом и јасноћом излагања и дивним књижевним грчким језиком он далеко надмашује Архимеда. С друге стране, Архимед као генијални мислилац није имао ни жеље, ни смисла да подробно излаже оно што су пре њега урадили други и да пише уџбенике; свако његово дело — то је извештај о његовом новом открићу. Бесумње је да сам Архимед није могао да узима учешћа у овој оптужби о Аполонијевом плагијату; о томе говори сав тон предговора у његовим делима. Сукоб су највероватније раздували већ поменути Хераклид и други Архимедови пријатељи и једномишљеници из политичких побуда: можда су у Аполонију видели пре свега присталицу Атала, тј. присталицу римске странке.

У сваком случају између Архимеда и Аполонија није било другарских односа. Архимед који је одржавао живу преписку са истакнутим математичарима свог доба и који их стално помиње у својим делима ниједном није поменуо Аполонија, највећег од савремених му математичара.

С друге стране Аполоније је по свој прилици енергично полемисао о последњим Архимедовим радовима. Изгледа да је у одговор на Архимедово дело „Мерење круга" он издао дело са полемичним сатиричним насловом „Средство за убрзавање порођаја" (Ὠκυτόκιον); код налажења π он је пошао потпуно другим путем него Архимед и добио је тачнију вредност. Он је одбацио нова имена за бројеве које је предложио Архимед као необична, која исувише иступају од уобичајене употребе речи. Сматрао је да је потпуно излишно давати имена бројевима уопште и показао је да се употребом обичних речи могу означити бројеви који далеко надмашују све што се може претставити. Рачунајући са октадама које је измислио Архимед он супротставља обично рачунање миријадама. Његов систем је у основи исти који примењујемо и ми, али нашој хиљади, сходно особеностима грчког језика одговара „миријада" (10 000): док у нашем рачуну има у свакој класи три разреда (јединице, десетице, стотине), у његовом рачуну свака класа има четири разреда (јединице, десетице, стотине, хиљаде). Миријаду миријада ($10\,000^2$) он назива „дуплом миријадом", $10\,000^3$ — „троструком миријадом" итд. Аполоније је овде такмичећи се са Архимедом испољио изузетну виртуозност у радовима са бројевима и дао опште правило за изложиоце у радовима са миријадама.

Ако је „Средство за убрзавање порођаја" имало сатиричну оштрицу управљену против Архимеда, онда је, вероватно, био у праву Гулч кад је на основи почетних речи Архимедовог „Задатка о биковима" (чији је рукопис први пут нашао и публиковао Лесинг 1773 г.), закључио да је овај „Задатак" имао у виду Аполонија, јер његове почетне речи имају сатиричан тон[1]). Такав исти начин је применио чувени Еугемер у своме „Светом натпису", који је тобож издао Зевс у доба када је био цар никад не постојеће државе Панхеје. Архимед је тобоже нашао старински натпис у коме се налазио задатак о израчунавању које задаје главобољу. У рукописима који су сачувани овај задатак има наслов који не припада Архимеду: „Задатак који је Архимед, нашавши у натпису, упутио ради решења александриским математичарима, у писму адресованом Ератостену Киређанину". Затим следују стихови писани епским јонским језиком:

Колико у Сунца крава и бикова има, израчунај странче,
    Напрегнувши ум, ако ти је заиста својствена мудрост.
Колика се стока истерује у долине Сицилије влажне?
    Шарена стада је имао сјајан бог,
На броју четири: од њих је једно — као снег бело било,
    Код других се црним преливом белесала масна вуна,
Мрко је треће стадо, шарено — четврто. У сваком
    Стаду био је велики број племенитих бикова.
Овако ћеш израчунати бикове: да би нашао број бело-снежних
    Од црних одузми половину и трећину[2])

---

[1]) Оригиналност овог дела, уосталом, оспоравају неки научници.

[2]) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Тако су писали Египћани а за њима и Грци број $\frac{5}{6}$ $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$, служећи се само разломцима са бројитељем 1. Тако исто су место $\frac{9}{20}$, говорили и писали $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ је претстављало $\frac{7}{12}$ и т. д. У

Додај им затим све мрке (узми све то у обзир!)
Четвртина броја црних бикова једнака је петини
Шарених бикова, ако им се дода број мрких.
Број шарених, најзад (оних који су преостали),
Био је једнак шестини и седмини бело-снежних,
Ако им се додају сви мрки бикови.
А ако зажелиш краве да израчунаш, добићеш ево шта:
Број белих крава једнак је трећини са четвртим делом
Целог црног стада (без икакве грешке).
Број црних крава једнак је четвртини
Шареног стада, ако томе делу додамо и пети део
Оних које су с биковима пасле заједно на истој ливади[1]).
Збир шарених крава био је једнак по броју
Петом делу са шестим делом мрког стада.
Број мрких крава једнак је половини од трећине
Заједно са седмином броја белог стада.[2])

Иако се већ из речи: „Ако имаш везе са мудрошћу, постарај се да напрегнеш свој разум и израчунаш број бикова“, може видети доброћудан потсмех на адресу непријатеља, ипак овај први део задатка, чак и при отсуству алгебарских ознака и познавања алгебарских трансформација, није претстављао нешто нарочито тешко, ма да је захтевао израчунавања која изазивају главобољу, но у којима се Аполоније показао добар мајстор. С нашег гледишта овај се задатак своди на систем од 7 једначина са 8 непознатих:

$$u = \frac{5}{6} x + y,$$

$$x = \frac{9}{20} z + y,$$

$$z = \frac{13}{42} u + y,$$

$$u' = \frac{7}{12}(x + x'),$$

$$x' = \frac{9}{20}(z + z'),$$

Архимедово време већ се почело употребљавати означавање усвојено код нас (само што се бројитељ писао доле, а именитељ горе), а у „старинском“ натпису био је природно примењен и стари начин писања.

[1]) Тј. број црних крава био је једнак $\frac{9}{20} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$ целог шареног стада (бикова и крава заједно).

[2])

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{13}{42}$$

$$z' = \frac{11}{30}(y + y'),$$

$$y' = \frac{13}{42}(u + u').$$

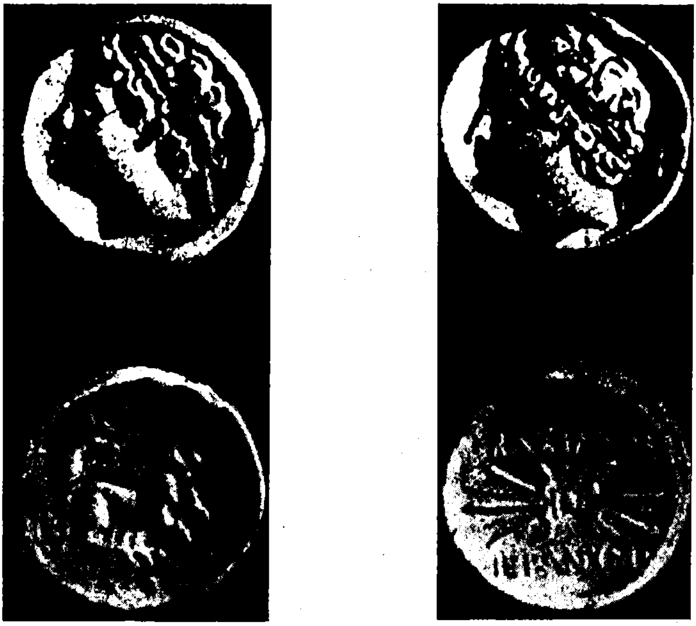
То је најстарији познати нам задатак из неодређене анализе; при решавању овог система једначина добијају се као најмање вредности бројеви који се могу потпуно претставити и који су прегледни; највећи од њих, u, једнак је 10 366 482, а у целом стаду било је 50 389 073 глава.

Међутим, овом делу задатка додат је још и други у коме су дати услови под којима је задатак нерешив за античког математичара, са потпуно непрегледним бројевима који се не дају претставити:

Ако израчунаш колико је тамо свега било стоке,
Колико је на ливадама пасло меснатих бикова,
Колико крава музара и колико од сваке боје,
Нико те више неће назвати незналицом,
Али и у мудраце те неће убројити,
Ако усто не израчунаш и различите навике бикова:
Ако се помешају црни бикови са белим стадом,
Они ће у пољу заузети прави квадрат
Ширине једнаке дужини, и ова безбројна маса
Попуниће читаво поље Тринакије.
Ако се пак покупе заједно сви мрки и шарени
(А остали ће засебно пасти,
Или је исто ако им дођу и сви остали),
Тако да у предњем реду стане један, а затим
У сваком даљем реду све више, имаће фигура,
Коју сви они попуњују, три стране:[1])
Умеш ли све то да нађеш и духовним погледом
Да обухватиш величину стада и другима да пренесеш,
Гордо корачај напред, китећи се великом победом:
Знај да си, превазишавши друге, по мудрости први ти.

Овај други део задатка, по свој прилици, не може се решити средствима античке математике и у сваком случају доводи до бројева који се не могу претставити цифрама или „измерити“ применом метода које предлаже

[1]) Другим речима, збир белих и црних бикова претставља квадратни број; општи број бикова је троугласти број; број мрких бикова заједно са шаренима — исто троугласт број [(тј. 1+2+3..., в. напред, стр. 18)].

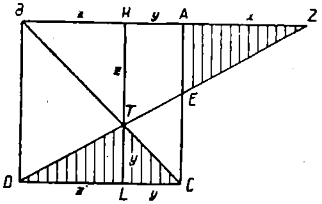


Хијерон и Хијероним. Портрети на новцу Сиракузе

Аполоније. На основи Вурмовог израчунавања, целокупан број стоке изражава се у овом случају бројем који има 206 545 децимала, тј. да би се само записао тај број требало би 60 страница петита.

Ето зашто је умесно гледати на овај други део као на потсмех над Аполонијем: „Мислио си да ме надмашиш у вештини рачунања. Оно што си урадио у своме „Ὠκυτόκ'ον“, није још права мудрост. А дед реши овај задатак, па сам спреман отворено да признам да си ме победио“.

Такође је веома занимљиво мало Архимедово дело „О седмоуглу“, за које се сазнало тек 1927 г. из Шојева превода са арапског превода Табит ибн Кураха (в. стр. 213). Делу је била придодата ова лема (сл. 43):



Сл 43

Квадрат ABCD пресечен је правом DE тако да њен продужетак до пресека са продужетком стране AB у тачки Z образује △ EAZ, једнак троуглу DTC (T — тачка пресека праве DE са дијагоналом BC, TL — висина △ DTC). Докажимо да је

$$\left.\begin{array}{l} DC : AZ = AZ : DL, \\ LT : DL = DL : (LT + AZ). \end{array}\right.$$

Заиста, из једнакости троуглова DTC и AEZ излази

$$AZ \cdot AE = DC \cdot TL$$

или

$$\frac{AE}{TL} = \frac{DC}{AZ}. \qquad (1)$$

△AEZ је сличан △ TLD (они су правоугли, а и углови AZE и TDC су им једнаки као унакрсни), одакле следи

$$\frac{AE}{TL} = \frac{AZ}{DL}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) се добија

$$\frac{DC}{AZ} = \frac{AZ}{DL}.$$

Продужимо TL до пресека са AB у тачки K. Тада ће на основи сличности троуглова DLT и TKZ бити

$$\frac{LT}{DL}=\frac{LT}{KT}=\frac{DT}{TZ}=\frac{DL}{KZ}=\frac{DL}{KA+AZ}=\frac{DL}{LT+AZ},$$

што је и требало доказати.

Означимо DL са z, AZ са x, LT са y. Тада ће наше једначине изгледати овако

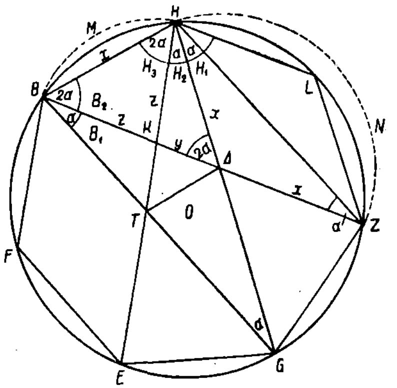
$$\frac{z+y}{x}=\frac{x}{z};\quad \frac{y}{z}=\frac{z}{y+x}.$$

Лако је видети да је у овој леми био примењен νεῦσις и то практички неостварљив. Обичан (посматран горе) νεῦσις врло је просто остварити. Лако је кретати праволинијски отсечак тако да његови крајеви клизе по двема линијама дотле док његов продужетак не доспе у дату тачку (в. стр. 30); али, да би се права DE обртала око тачке D док њен продужетак не образује △ AEZ, једнак △ DTC, треба извршити низ проба, вршећи сваки пут мерења. На неприхватљивост овог решења упозорили су већ арапски математичари. Тако, ал-Јалил ас-Сијзи (951—1024) примећује у свом делу „О конструкцији седмоугла уписаног у круг“: „Ово лажно решење треба нарочито да негирају они који захтевају геометриску тачност код конструкција. Мора се доћи до закључка да је помоћна конструкција са којом нас упознаје Архимед тежа него сама основна теорема, а сам метод решења није леп. Ова уводна теорема не даје јасну претставу о практичком остваривању решења и лишена је потребног доказа. Теже је поделити праву у таквом односу, него поделити круг на седам једнаких делова... Не може постојати добар доказ ове теореме без примене коничних пресека“...

Усто Архимед никада не примењује νεῦσις ради р е ш е њ а з а д а т к а, него само ради и з н а л а ж е њ а р е ш е њ а. Овде је таква иста загонетка као и код случаја Еутокијевог решења задатка поделе лопте на два дела, чије запремине стоје у датом односу (стр. 112); ипак се не може сумњати да ово решење заиста припада Архимеду. Могуће је међутим да је арапски преводилац Табит испустио неке начелно важне напомене; не сме се заборавити да је Архимедов рукопис дошао до њега, по његовим властитим речима, у врло унакаженом стању.

Ова лема је омогућавала Архимеду да конструише седмоугаоник, под претпоставком да је νεῦσις у леми испуњен и да су нађени отсечци x, y, z.

На праву BZ (сл. 44) наносе се редом три отсечка поменута у леми: $BK = z$, $KA = y$, $AZ = x$. Из A као средишта описујемо круг ZNK полупречником $AZ = x$; из K као средишта описујемо круг BMH полупречником $BK = z$; тачку пресека ових кругова H спајамо са B и Z. Око $\triangle BHZ$ описујемо круг. BH је тада страна седмоугла уписаног у овај круг. Повуцимо HAG, HKE, BTG, TA. Означимо уписани угао BGH који лежи насупрот стране BH, са α. Тада је BZH као налегли на истом луку такође једнак α; угао H_1 (в. цртеж) такође је, услед једнакости AZ и AH, једнак α. Значи,



Сл. 44

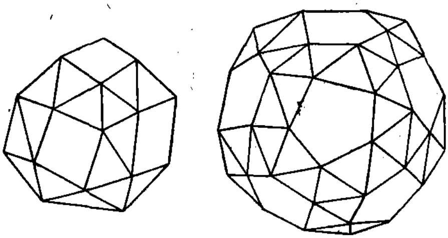
дуж ZG је такође једнака реченој страни BH, јер и на њу належе уписани угао α. Тада је и угао B_1 који належе на GZ једнак α. $\triangle AHK$ је сличан $\triangle ZHK$ јер им је $\angle K$ заједнички а по услову је $y : z = z : (y+x)$ (на основу леме) значи: $\angle H_2$ такође је једнак α, па је према томе дуж EG такође једнака страни BH. $\triangle BKT = \triangle HKA$ ($\angle HKA = \angle BKT$, $\angle H_2 = \angle B_1 = \alpha$, $HK = BK$ по конструкцији); значи, и $\triangle BHT = \triangle BHA$, одакле је $\angle B_2 = \angle H_3$, $\angle B_2 + \angle B_1 = \angle H_3 + \angle H_2$; $BT = AH = x$, а $KT = KA = y$.

Најзад је $\triangle KHA$ сличан $\triangle AHT$ јер им је $\angle H_2$ заједнички, а $(z+y) : x = x : z$ по услову (на основи леме).

Према томе је $\angle HTA = \angle HAK = 2\alpha$ као спољашњи угао у $\triangle HAZ$. Даље је $\angle H_3 = 2\alpha$ (као унакрсни угао са углом HTA), $\angle B_2 = \angle H_3 = 2\alpha$ (јер је $\triangle BKH$ по конструкцији равностран). Према томе односни лукови BE и HZ на које належу ови уписани углови двапут су већи од лука који обухвата речена страна BH, тј. у сваки од њих могу се уписати по две стране једнаке BH. Према томе смо конструисали правилни седмоугао.

Ово необично лепо али и необично вештачко решење добијено је, бесумње, како исправно претпоставља Тропке, обрнутим путем: Архимед је претпостављао да је седмоугао конструисан и доказивао је да се отсечци дијагонала односе како је то горе показано. Али примена νεῦσις и то у тако несавршеном облику, остаје несхватљива[1]).

Остаје нам још само да кажемо неколико речи о два Архимедова дела која нису сачувана, а која изгледа, припадају овој епохи. То је пре свега дело „О полиедрима".



Сл. 45

Поред пет правилних полиедара које је проучио већ Платонов ученик Теетет, а који су касније ушли у Еуклидово дело, Архимед је доказао постојање још 13 полуправилних полиедара који су ограничени равностраним и равноуглим многоуглима који међусобно нису једнаки: то је октаедар који је ограничен са четири правилна троугла и четири квадрата, три различита 14-едра (први је ограничен са 8 троуглова и 6 квадрата; други — са 6 квадрата и 8 шестоугаоника, трећи — са 8 троуглова и 6 осмоугаоника) итд. На сл. 45 претстављен је 38-едар, ограничен са 32 правилна троугла и 6 квадрата, и 92-едар, ограничен са 80 троуглова и 12 петоуглова.

Што се тиче других дела која нису сачувана, највећим губитком треба сматрати Архимедово оптичко дело „Катоптрика".

Римски архитекта Витрувије који је живео два столећа касније упознаје нас са основним питањима о којима се расправља у овој књизи:

„Зашто у равним огледалима предмети задржавају своју природну величину, а смањују је у испупченим и повећавају у издубљеним; зашто се леви делови предмета виде десно и обрнуто; када ликови у огледалу нестају а када се појављују; зашто издубљена огледала пале поднет им труд,

[1]) Узевши x = a, добићемо за z

$$z^3+2\,az^2 - a^2\,z - a^3=0.$$

Ове се једначине лако решавају пресеком двеју кривих 2-ог реда (на пример, параболе и равностране хиперболе); природно је било очекивати да ће Архимед указати на то; као што смо видели, арапски математичари су сматрали да је примена коначних пресека неопходна.

када се поставе према Сунцу; зашто се на небу види дуга; зашто понекад изгледа да на небу има два једнака Сунца, и много другог сличног, о чему се прича у великом Архимедовом тому“.

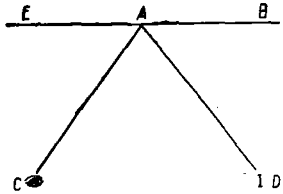
Судећи по томе Архимедов је круг интересовања у овој књизи био необично широк; како познајемо тачност Архимедовог научног метода, можемо бити сигурни да би се наше претставе о научној оптици античких људи из основа измениле кад би се нашла ова књига.

Из цитата који су сачувани познато је да је Архимед излагао овде и резултате посматрања предмета који се виде у води: уколико су дубље потопљени утолико их видимо већима. Архимед је бацао у суд са водом прстен да би изучио појаве рефракције светлости.

Говорећи о рефракцији у атмосфери, Теон Александриски примећује да је „у овом случају Архимед врло тачно објаснио повећавање услед рефракције“.

Архимед је у овом истом делу доказивао да је у огледалу угао под којим светлост пада једнак углу одбијања; овај је доказ случајно сачуван у схолији псеудоеуклидове „Катоптрике“.

Оно је имало за Архимеда карактеристичну форму reductio ad absurdum (сл. 46).



Сл. 46

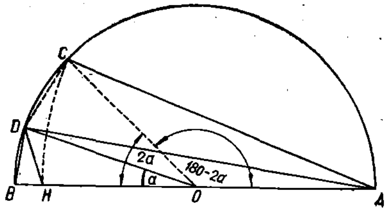
Нека је EB равно огледало, C око, D предмет који се види. Нека је $\angle$ CAE = a, $\angle$ DAB = b. Претпоставимо да a није једнако b. Тада је оно или веће или мање од b. Нека је a $>$ b. Сместимо сад око у тачку D, а посматран предмет у тачку C. Пошто је по нашој претпоставци угао одбијања већи од упадног, добијамо b $>$ a. Али као што смо видели, a $>$ b, а то је немогућно. Такође је немогућна и обрнута претпоставка; значи, a = b. Лако је видети да овај доказ има за претпоставку аксиому: ако предмет и око замене места, око ће видети предмет као и пре премештања. Међутим, таква аксиома сама по себи није очевидна.

Архимедова „Катоптрика“ била је врло популарна у старо доба и послужила је очигледно као извор легенде, да је Архимед тобож спалио римску флоту помоћу запаљивих огледала која је он пронашао. Ми ћемо се на овој легенди задржати подробно касније (стр. 209), она служи као потврда да је Архимед у својој „Катоптрици" изучавао запаљива стакла и огледала.

Арапски математичари Абул-вафа и Ел-Бируни (у књизи „О налажењу тетива круга", за коју смо први пут сазнали 1910—1911 г.), саопштавају чињеницу која је све поразила: чувену теорему за одређивање површине троугла из страна

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

познату нам из радова Херона Александриског и која се приписивала њему (њу су увек називали „Херонова теорема"), излази да је пронашао Архимед у његовој „Књизи кругова". Херон је и у овом случају испао само компилатор. У истој књизи је био решен задатак налажења висина у троуглу из трију страна; овде се налазила такође „Архимедова лема" која је била врло популарна код арапских математичара, која је, како је показао Тропке (в. Библиогр. именик бр. 114), у извесној мери наговештавала ставове данашње тригонометрије.



Сл. 47

Ова лема гласи (сл. 47): ако се $\angle$ BAC који се налази између AB и тетиве AC подели тетивом AD напола, и ако се затим на пречник AB нанесе отсечак AH = AC, онда је

$$OB \cdot BH = BD^2.$$

Ова се лема доказује овако: Δ DAC једнак је Δ DHA, јер су углови BAD и DAC, као и стране CA и AH, једнаки међу собом по претпоставци, а страна DA је заједничка. Значи, и DH = DC. Али је DC = DB, одакле је DH = DB, па према томе је Δ DBH равностран.

Али у том случају је Δ DBH сличан Δ DBO: оба су равнострана, а угао при основици DBO је заједнички, па се према томе има

$$HB : BD = BD : DO,$$

или

$$BD^2 = HB \cdot DO = HB \,.\, BO.$$

Ако узмемо да је полупречник 1, а $\angle$ DOB означимо са α, онда је

$$\angle DAB = \frac{\alpha}{2},\ BD = 2 \sin \frac{\alpha}{2}, HB = AB - AH =$$

$$= AB - AC = 2 - 2 \sin (90 - \alpha) = 2 - 2 \cos \alpha,$$

одакле је

$$4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} 2 (1 - \cos \alpha),$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha).$$

Такав облик ће добити овај образац у преводу на језик данашње тригонометрије.

БОРБА С РИМОМ. АРХИМЕДОВА СМРТ

Ми смо већ напред указали на то зашто су сиракушка влада и сиракушка интелигенција, између осталог и Архимед, у борби између Римљана и Картагињана симпатисали ове последње. Док је још успех био на страни Картагињана, а до коначног исхода било још далеко, Хијеронова политика била је кулминација дипломатске мудрости: Сицилија није била позорница ратних догађаја, Рим јој је био непосредни сусед, до Картагине није било далеко. Стога је најпаметније било удовољавати Рим путем мита које је овај изнуђивао и изјавом лојалности, а потајно саосећати и потпомагати Картагину. Али крајем Хијеронове владавине ситуација код Картагињана, и поред победе код Кане, почела се погоршавати, те су најпроницљивији људи видели да победа Картагињана није била више сигурна. Изгледа да су се тасови на теразијама уравнотежили, те је мали тег, бачен на једну или другу страну — такав тег је могла да буде Сиракуза са својом војском — могао да одлучи исход рата. Хијеронов син Гелон који је заједно с њим управљао (онај исти Гелон коме је Архимед посветио своје дело „Број пешчаних зрнаца“), припремао је, како се говорило, уз тајну сарадњу Хијерона, отворено ступање на страну Картагињана. После његове смрти остао је наследник престола малолетни Хијеронов унук Хијероним. Хијерон је био болестан и осећао је да ће скоро умрети; он је разумео да би Хијероним постао у том случају играчка у рукама различитих дворских група и да би настало доба тешке унутрашње борбе. Сада је Сиракуза морала да ступи било на једну било на другу страну. Хијеронов дом и сиракушка интелигенција били су на страни Картагине; странка богатих људи, блиска двору и економски заинтересована за победу Рима, агитовала је за присаједињење Риму.

Могуће је да је Хијерон, предосећајући баш ове догађаје, одлучио да се одрекне престола и да у завештању прогласи Сиракузу демократском републиком; на тај начин он би сву одговорност за даље догађаје пребацио на народ. Међутим, он је на крају крајева био принуђен да одустане од ове намере.

Заиста, 216 г., одмах после Хијеронове смрти, настала је међусобна борба. Хијероним је, као и сав Хијеронов дом, саосећао с Картагињанима, али је он још био малолетан и нико није узимао у обзир његово гледиште. Велики утицај стиче странка богатих људи, на челу са неким Фрасоном, која је симпатисала Римљанима. Ови људи заузимају непријатељски став према Картагини и воде издајничке преговоре с Римом.

Пошто је Хијероним био ватрени присталица Картагине организује се завера против његова живота.

Међутим, ова је политика изазвала негодовање интелигенције и народних маса. Хијероним се проглашује пунолетним. Настаје преврат: Фрасон и његови пријатељи се уклањају. У својству стварних управљача Хијероним приближава себи мужеве својих сестара Андранодора и Зојипа, вође Картагинске странке. Нова влада шаље своје посланике Ханибалу; Ханибал са своје стране чини вешт политички потез: он шаље као посланике у Сиракузу два брата — Хипократа и Епикида.

Хипократ и Епикид рођени су од Картагињанки, али су припадали једној од чувених и популарних сиракушких кућа: њихов је деда био прогнан из Сиракузе и бежао је у Картагину; био је један од истакнутих присталица картагинске оријентације. Као синови Сиракужанина Хипократ и Епикид су задржали сиракушко поданство. Становници Сиракузе и картагинска странка која је сада руководила њима, дочекала је браћу раширених руку; они постају чланови савета и главни саветници младога цара, стојећи фактички на челу сиракушке владе.

И тако је коцка била бачена. Као што смо већ рекли Сиракуза је, док је још изгледало да ће Рим бити савладан и без помоћи Сиракузе, водила лукаву дипломатску игру, и остајући по страни рата, штедела је своје снаге и извлачила све користи које падају у удео неутралној држави. Сада, када се положај Картагине погоршао, Сиракужани иступају као напредни борци за јелинизам против претстојеће римске експлоатације и римског варварства. Македонски цар Филип V већ је стао на страну Картагине (уговор који је Филип закључио 215 године са Картагином сачуван је). Сада су Хијероним и његови саветници забринути око привлачења Александрије у ову коалицију да би се против Рима сјединила најутицајнија култура и економска средишта јелинског света.

Сазнавши о новој политичкој оријентацији Сиракузе, Римљани шаљу овамо своје посланике. Али Сиракужани чак нису ни покушали да сакрију своја саосећања према Картагини и примили су римске посланике врло хладно. Затим Сиракуза шаље посланике у Картагину и Картагињани им обећавају власт над целом Сицилијом у случају победе.

После тога Сиракужани објављују Риму ултиматум, захтевајући да им се врате сви „дарови" које је Римљанима дао Хијерон. Одмах затим полази Зојип са млађом царевом браћом у Алексанрију да би привукао на своју страну Птолемеје. Између сиракушког царског двора и Птолемеја било је присно пријатељство; стога је подухват обећавао успех. Међутим, прорачунавши ситуацију, александриска влада није се усудила да ступи на Ханибалову страну, ма да је наизглед задржала пријатељске односе с њим. Ствар је у томе што је и у Александрији постојала неслога као и у Сиракузи. Најбољи претставници дворског друштва и интелигенције, као на пример Ератостен, мање или више саосећали су с Картагином. Аристотелово слављење картагинске државе у IV в. могло се још сматрати отприлике као слављење скитских закона, као аполитички занос егзотиком. Сада, у другој половини III в., у доба напрегнуте борбе Картагине и низа грчких држава са Римом, отворено Ератостеново величање картагинског уређења као најбољег од свих постојећих, па било и упоредо са римским, морало се сматрати као политички испад. С друге стране Аполонијева близина пергамском цару Аталу I и његови одласци у двор овог цара морали су се посматрати као права политичка демонстрација: као што смо видели Пергам је отворено подржавао Рим.

Бесумње, Аполоније није био сам; у Александрији је било довољно присталица Рима. Још више је било кратковидих људи којима је изгледало да римска агресија у Египту не стоји на дневном реду и који су, ма да саосећајући с Картагином, сматрали да је лудо и опасно упадати у сукоб између Рима и Картагине. Стога је посланство у Александрији остало без успеха.

Незадовољни дипломатским демаршима, Сиракужани почињу у пролеће 214 г. ратне припреме. Цар Хијероним одлази у Леонтине која се налазила у близини граница римских поседа; Хипократ креће према граници са војском од две хиљаде људи. Али у то време тајни римски агент у Сиракузи Диномен успева да организује у Леонтинима убиство цара Хијеронима. Хипократ је био принуђен да се хитно врати у Сиракузу како би се супротставио даљем јачању утицаја римске странке.

Отворено ратно иступање Сиракузе на страни Картагине нису непосредно провоцирали Римљани: и поред свег саосећања с Картагином, Сиракужани су могли још дуго да сачувају политику неутралности, не бацајући Риму отворено изазивање. Баш ова околност је и условила јачање римске странке. Успело се да буду убијени вође картагинске странке Андранодор и Темист као и царева браћа.

Али у то време су стигле у Сиракузу прве вести о зверским обрачунавањима Римљана у грчким градовима. Присталице картагинске странке који су успели да се очувају нису пропустили да искористе негодовање сиракушког друштва. Хипократ и Епикид иступају у народној скупштини са захтевом да се обнови политика отворене борбе с Римом; њих бирају за стратеге уместо убијених. Али је и римска странка сачувала још утицај: богаташ Аполоније захтева отворено иступање на страни Римљана.

У то време је стигла вест да Римљани прилазе Леонтинима који су улазили у сферу сиракушког утицаја. Хипократ и Епикид полазе у помоћ Леонтинима; то је одлично користило присталицама римске странке, услед изузетног утицаја Хипократа у народној скупштини; после њихова одласка настају масовна хапшења и конфискације у редовима картагинске странке.

Према току ратних догађаја Хипократ је морао да упадне на римску територију и да нанесе Римљанима озбиљне губитке; како Сиракуза још није била формално у ратном стању с Римом, римски војсковођа Марцел је затражио, узимајући у обзир политичку ситуацију у Сиракузи, да Леонтињани изруче Хипократа. Сиракушка влада, која је сада била потпуно у рукама римске странке, не само да се слаже са римским захтевом да се изручи Хипократ, него још и одређује награду за његову главу. Међутим, у леонтинском народу је била тако јака мржња према Римљанима, да су Леонтињани одбили да изруче Хипократа.

Ипак Хипократ није успео да задржи притисак двеју римских армија, од којих је на челу једне био већ поменути Марцел, а друге — Апије Клаудије. Хипократ је побегао у Хербес, а Леонтине је заузео Марцел, који је приредио овде дивљи, нечовечни погром, праћен масовним убијањем мирног становништва. Сиракушка је пак влада дотерала у свом улагивању дотле да је упутила своју војску у Хербес, у помоћ Римљанима; али познајући добро расположење народних маса у Сиракузи, браћа Хипократ и Епикид *су изишли у сусрет сиракушкој војсци и поред свих одвраћања аристократских војсковођа, од којих је један био Диномен, Хијеронимов убица, убедили су војнике да се одрекну похода.*

Када је вест о страшном погрому у Леонтинима стигла у Сиракузу, настала је отворена експлозија негодовања против Римљана. Официри и полицајци су с муком успевали да задрже масе од отвореног устанка. Затим су се са бојног поља вратили Хипократ и Епикид; у својим говорима у народној скупштини они су сликовито описали нечовечне злочине Римљана у Леонтинима и оптуживали своје аристократске колеге по стратегији да су поступили као агенти Рима. Диномен је покушао да пође већ опробаним путем — да организује Хипократово убиство, али од тога није ништа испало. Стратези — присталице римске странке, били су кажњени; сва власт је била предата Хипократу и Епикиду.

Нови покољ мирног становништва у Ени који су ускоро извршили Римљани, није могао а да не изазове у сиракушком друштву нову експлозију непријатељства према Риму. Били су одбијени сви предлози Римљана учињени у одговор на заузимање раније владе; био је заплењен бојни брод са пет јарбола (пентера) са римским посланицима; народне масе су једва задржане од злочина — убиства римских посланика.

После тога је римска флота под заповедништвом Марцеловим и сувоземна војска под заповедништвом Апија Клаудија кренула на Сиракузу и опсела је. Схватајући да Сиракуза неће одолети Римљанима властитим снагама, Хипократ је још од доласка Римљана упутио у Картагину посланство молећи за помоћ. У пролеће 213 г. искрцао се у Сицилији картагински војсковођа Химилкон с великом војском. Хипократ је предао управу над градом своме брату Епикиду а сам је са 10 000 пешака и 500 коњаника кренуо у сусрет Химилкону који је већ успео да заузме Акрагант. И поред тога што је Марцел пресекао Хипократу пут и нанео његовој војсци тежак пораз, Хипократ је успео да се пробије до Акраганта и да се сједини са Химилконом; они се спремају заједнички за поход на Сиракузу.

Ми смо се задржали тако подробно на свим овим чињеницама политичке и војне историје Сиракузе зато што се оне обично излажу у нашој литератури са римског гледишта, у изопаченом тенденциозном тумачењу римских историчара[1]).

Али вратимо се на опседнуту Сиракузу. Да би се паралисовала настала моћна антиримска коалиција, биле су потребне хитне одлучне мере и Римљани су дошли под зидове Сиракузе потпуно опремљени. На бродовима се налазио велики број војника опробаних у борби и ратне машине, а међу њима циновска машина самбука.

Већ је у то време рат био у приличној мери рат машина, рат технике; Римљани су показали, однезши већ 260 г. победу на мору над Картагињанима, захваљујући „вранама", нарочитим мостовима са кукама, који су се могли пребацивати, да они нису новајлије у овом послу.

О даљим догађајима читаоци ће се упознати непосредно из живог причања Полибијева, који је живео нешто касније

---

[1]) Тако на пример у предговору приватног доцента И. Ј. Тимченка, књиге Н. Најберга „Ново Архимедово дело" (Одеса, 1909) даје се оваква „политичка слика" Архимедове делатности: „У жељи да приграби власт у своје руке, војсковођа Хипократ ступа у додир са Картагином и да би удовољио своје савезнике наређује да се убије велики број Римљана око сицилиског града Леонтини (sic!). Тада су Римљани одлучили да заузму Сиракузу". То је све.

Ми се овде не бавимо нити мислимо да се бавимо питањем да ли је римско освајање Сиракузе „прогресивна" или „регресивна" појава. Дајемо Архимедову биографију и нас само интересује како су људи његовог круга реаговали на догађаје који су се дешавали. Баш с гледишта ових људи излажемо догађаје од 216—212 г.

У излагању пак самих чињеница идемо трагом Карштета, који се никако не може оптужити за пристрасност према Картагињанима: његово презирање Картагињања, као и Семита, провлачи се у сваком реду његове књиге.

од ових догађаја, и Плутархова у његовој биографији Марцеловој:

„Спремивши металне мреже, бацачка оружја и све остало потребно за опсаду, Римљани су се надали да ће захваљујући многобројним радницима завршити припрему у току пет дана и затим напасти непријатеља. Али су притом заборавили на Архимедову вештину, нису узели у обзир да је понекад један талентован човек у стању да учини више него мноштво руку. Сад су се они убедили у то у пракси... Архимед је припремио унутар града, као и против оних који су нападали с мора, таква заштитна средства, да се браниоци нису морали трудити око непредвиђених радова у случају неочекиваних начина напада: код њих је унапред било припремљено све за одбијање непријатеља у сваком случају... На сваком римском броду људи су били наоружани луковима, праћкама и малим копљима ради протеривања непријатеља који је нападао са врхова стена. Усто су Римљани скинули код осам бродова са пет јарбола (пентера) весла, код једних с десне стране, код других с леве, повезали по два брода бочном страном која је лишена весала, и веслајући само на спољним странама, почели су довозити до градских зидина такозване самбуке...

Кад је све то било готово, Римљани су се спремили да јуришају на утврђења градског зида. Међутим и Архимед је са своје стране спремио машине које су могле да избацују гранате ма на које жељено растојање. Непријатељи су били још далеко од града када је Архимед почео из својих великих далекометних бацачких машина да напада њихове бродове са таквим мноштвом тешких граната и стрела, да они никако нису могли да се сачувају од њих и били су немоћни и неефикасни. Када је Архимед примећивао да гранате падају исувише далеко, иза линије непријатељских бродова, он је употребљавао мање машине према потребном растојању. То је изазвало такав ужас међу Римљанима да нису били у стању да се крећу напред. Стога је Марцел, не знајући шта да ради, био принуђен да води своје бродове на јуриш ноћу, без галаме, неприметно за непријатеља. Али када су се приближили обали на растојању пушчаног домета, Архимед је применио друго припремљено ратно лукавство против оних који су се борили са непријатељских бродова. По његовом наређењу били су пробушени у зиду многобројни отвори у висини човечјег раста, који су били широки отприлике као шака. Иза ових пушкарница он је сместио стрелце и бацаче граната; они су непрекидно гађали непријатељску флоту и на тај начин онемогућавали сва залагања римских војника. Овим начином, без обзира да ли је непријатељ био далеко или се налазио под самим градским зидинама, Архимед не само да је спречавао остварење свих њихових планова, него је убијао већи део нападача. Само што би Римљани почели да уперују према граду своје самбуке, опседнути би одмах пуштали у дејство своје машине, које су се налазиле унутар градских зидина, а које су до тада биле незапажене од непријатеља. Када их је требало ставити у дејство оне су се подизале изнад бастиона и истурале своје кљунове далеко унапред од градских утврђења. Једне су носиле камење тешко не мање од десет таланта (четвртина тоне), друге — комаде олова. Чим би се самбуке приближиле зидовима, опседнути би, попуштајући помоћу ужета чекрке за које су били обешени кљунови ових машина, окретали исте удесно и улево — онамо где је била потреба; затим би се отварале резе и из кљуна је падало на самбуку камење које је разбијало не само машину него и брод на коме је она смештена, излажући великој опасности војнике који су се на њој налазили. Сиракужани су располагали и другим машинама; када би се приближили непријатељски бродови покривени нарочитим металним мрежама ради заштите од стрела које су бацане кроз отворе у зидовима, тада су баш ове машине избацивале камење такве величине да су се они који су се налазили на кљуну брода морали спасавати бекством.

Сем тога по Архимедовој наредби спуштала се гвоздена шапа привезана за ланце; машиниста који је управљао кљуном машине као крмом брода захватао је овом шапом кљун брода и затим би спуштао доле други крај машине који се налазио унутар градских зидина. Он је подизао на тај начин кљун брода у ваздух и стављао брод нормално према крми, а затим би учврстио непокретно основицу машине те су се шапа и ланац одвајали помоћу ужета. Непосредни резултат тога је био тај да су се бродови било окретали на бок, било потпуно изврталии; још чешће су се бродови (јер су кљунови падали са великих висина у море) потпуно потапали и пунили водом, на ужас оних који су се тамо налазили. Марцел се нашао у врло тешкој ситуацији; захваљујући Архимедовим проналасцима сви су се његови планови рушили. Губици Римљана били су огромни, а опседнути су исмевали све њихове покушаје. Међутим и он је, ма да је био јако љут, допуштао себи шале на рачун проналазака великог геометричара: „Овај је човек, — говорио је он, — одлучио да напоји наше бродове морском водом до пијаног стања, а ударцима штапа охоло прогања са пијанке наше самбуке, као недостојне његовог друштва". Тако се завршила опсада Сиракузе с мора.

Апије се нашао са војском у исто тако тешком положају и стога се потпуно одрекао јуриша. И заиста Римљани су, налазећи се још далеко од града, јако страдали од Архимедових бацачких машина, јер су Сиракужани имали спремно мноштво бацачког оружја, одличног и прецизног у гађању. То је и схватљиво јер је већ и Хијерон дао за њих средства, а Архимед их је изумео и мајсторски их саградио. И тако, када су се Римљани приближавали граду, једне су од њих, као што сам већ рекао, непрекидно гађали кроз отвор у зиду, наносили им губитке те нису могли да наставе са нападом; други, који су се надали да се пробију под заштитом металних мрежа, гинули су под ударцима камења и балвана који су падали одозго. Сиракужани су наносили много зла Римљанима са оним шапама од машина о којима смо већ говорили: ове шапе су подизале војнике у пуном наоружању и бацале их доле.

Најзад се Апије вратио с друговима у логор и одржао тамо саветовање са трибунима на коме су једногласно одлучили да испитају сва могућа средства али да напусте наду да заузму Сиракузу на јуриш; поступили су сходно овој одлуци.

Тако су у току осам месеци остали Римљани под зидинама града и није било тог лукавства или храброг поступка пред којим би се они зауставили. Али јуришати нису се више ниједном усудили. Таква је чудесна снага једног човека, једног талента умешно примењеног на било какав посебан посао. Тако и сада: располажући тако огромним снагама, сувоземним и поморским, Римљани су се надали да ће са првим јуришем заузети град и они би то и урадили кад би неко извукао из средине Сиракужана тог јединог старца. Али је он постојао и Римљани се чак нису одлучивали да јуришају".

Полибије је писао само кратко време после описаних догађаја и био је уопште познат као тачан, трезвен и озбиљан историчар; стога морамо да сматрамо ову причу, изузев реторична улепшавања и мала преувеличавања, као историску истину, нешто стилизовану у тежњи да се велики

Ханибал. Скулптура

човек супротстави обичној маси. Само се причи о бродовима извученим из воде гвозденим шапама и стављеним вертикално према крми, не може веровати... такав резултат без помоћи механичког мотора не може се постићи. Могло се у најбољем случају говорити о томе да се кљун брода, захваћен шапом, нешто подизао изнад површине воде.

Сличне приче налазимо и код каснијих писаца — код Ливија и Плутарха; навешћемо овде Плутархово причање услед његове живахности и живописности.

„Марцел је кренуо на Сиракузу са целом војском... Марцел је нападао и с копна и с мора... Марцел је командовао над 60 пентера, пуних свакојаког оружја и стрела. Он је наредио да се повежу међусобно осам великих бродова, наместио је на њих машину за опсаду и прилазио је с њоме зидинама надајући се успеху услед обимних и брижљивих припрема као и због славе свог имена. Али све су то биле ситнице за Архимеда и његове машине...

Цар Хијерон је у своје време оценио значај механике и замолио Архимеда да сагради за њега свакојаке машине и справе за опсаду које би служиле како за заштиту тако и за напад код било какве опсаде... Сада су ове машине добро дошле Сиракужанима, а заједно са њима и њихов проналазач.

Када су Римљани опсели град са двеју страна, Сиракужани су се поплашили. Сваки је од страха ћутао јер се није надао да страшној сили може одолети.

Баш тада је Архимед пустио у покрет своје машине. На непријатељску пешадију падале су различите стреле које је он избацивао као и камење огромне величине, са шумом и страшном брзином. Апсолутно ништа није могло да поднесе снагу њихових удараца; они су обарали оне које су погађали и проређивали њихове редове. На мору су се изненада подизали над бродовима балвани, искривљени као рог. Једни од њих су ударали неке бродове одозго и снагом удараца потапали их. Други су гвозденим шапама или кљуновима сличним ждраловим, хватали бродове за кљунове, подизали их вертикално у ваздух, стављали брод на крму и затим (макнувши куку) потапали...; усто је брод био подизан високо изнад површине мора и висећи у ваздуху љуљао се на разне стране на ужас околине, пружајући страшну слику, док не би сва посада била збачена или побијена... Још самбука, машина коју је Марцел поставио на неколико бродова и приводио зидинама..., не би стигла да приђе зиду када би отуда излетео камен тежином од десет таланта, за њим други, трећи. Камење је падало на машину са страшним шумом и снагом, разбијало је њен труп, кидало гвоздене прутове и уништавало везе, тако да Марцел не знајући шта да ради одлучи да хитно отплови с флотом и нареди пешадији да отступи...

Они су успели да се одмакну на велико растојање, али су их стреле стизале, погађале оне који су отступали, тако да су имали велике губитке у пешадији. Многи бродови су им били разбијени док они нису били у стању да нанесу непријатељу било какво зло; већи део Архимедових машина стајао је иза зидина. Изгледало је као да се Римљани боре с боговима; њих је стизало зло за злом, а они међутим нису видели непријатеља!

Марцел је ипак успео да избегне опасност. Он се шалио са својим техничарима и механичарима и говорио је: „Можда да прекинемо борбу са математичарем Бријарејом? Он избацује наше бродове седећи мирно на обали и бацајући на нас одједном толико стрела, оставља за собом митске дивове са сто руку". Заиста сви остали Сиракужани били су као тело Архимедових машина, једино је он био душа која је све покретала, свим управљала... Римљани су на крају постали такве кукавице да су, приметивши да се над зидом креће парче ужета или балван, викали: „Ево, ево је!" и, мислећи да ће Архимед да управи на њих неку машину, бежали. Видећи то Марцел је прекинуо сваку борбу и нападање"...

•

Покушајмо да оценимо сва ова саопштења да би правилно схватили улогу и став Архимеда у тешким догађајима времена које нас интересује. Ми смо већ видели да је борба Рима с Картагином била најтешње повезана са борбом странака у самој Сиракузи; према Картагини су се оријентисале дворске групе и демократска, народна странка; према Риму — богаташи, тачније неке групе богаташа које су биле економски заинтересоване за зближење са Римом; њима су бесумње биле блиске и доста велике групе простог народа које су тежиле да пошто пото избегну отворен рат и које су се надале да ће успети да сачувају неутралност до његовог исхода. Припремајући техничку базу за борбу с Римљанима Архимед је, пријатељ и рођак царске породице, дворски математичар и механичар, иступао у моменту жестоке борбе странака дабоме не као незаинтересовани научник који би искористио згодан случај за организацију експеримената из механике, него као активни радник картагинске странке. Свакоме је било јасно да је склоп његових машина и справа био у најтешњој вези са општим планом војне одбране Сиракузе; тек оценивши своје и непријатељске снаге, топографију сиракуских утврђења, општи план одбране и т. д., могао је Архимед правилно да израчуна распоред отвора на зиду, далекометност и радијус дејства пронађених машина, тежину граната и т. д. Архимед је био према томе ако не руководилац сиракушког војног савета, а оно његов члан, а ако се узме у обзир малолетство Хијеронима и родбинска веза Архимедова са владајућим домом, можемо бити сигурни да је у крајњем случају 215—214 г. био један од његових политичких руководилаца.

Архимедове машине могле су да заштите град само од непријатељских јуриша, али нису могле да спасу опседнуте од глади. Ето зашто су већ почетком 213 г. Сиракужани послали, као што смо видели, у Картагину посланство с молбом да им се помогне, а сада из дана у дан очекивали долазак у град Химилкона и Хипократа.

У пролеће 212 г. сазнали су Химилкон и Хипократ да су Римљани успели да освоје од изнурених Сиракужана (вероватно захваљујући помоћи издајица у самом граду) сиракушко утврђење Хексапиле и они пожурише у Сиракузу где су их са таквим нестрпљењем очекивали. Њима су се присаједињавале велике масе мештана — Сикула, од којих је Химилкон образовао помоћну војску. Савезници су успели да продру у велико пристаниште Сиракузу, али њихови напади на оне који су опседали град били су одбијени. Усто је срећа помогла Римљане: у картагинском табору је избила епидемија куге којој је подлегла читава војска и Хипократ. Сада је положај опседнутих био безнадежан а капитулација — само питање времена.

Са нашом оценом Архимедове улоге у описаним догађајима потпуно се поклапа и прича о Архимедовој смрти[1]).

У истој биографији Марцеловој Плутарх прича како је Марцел најзад успео да упадне у град услед издаје сиракушких грађана, припадника римске странке. Заузеће Сиракузе као и других градова који су пали у руке Римљана,

---

[1]) Античка слика (фреска из Херкуланума), која претставља Архимедову смрт, и њено тумачење које је дао Винтер (Библиогр. именик, № 40), у време кад сам писао ову књигу нису ми још били доступни.

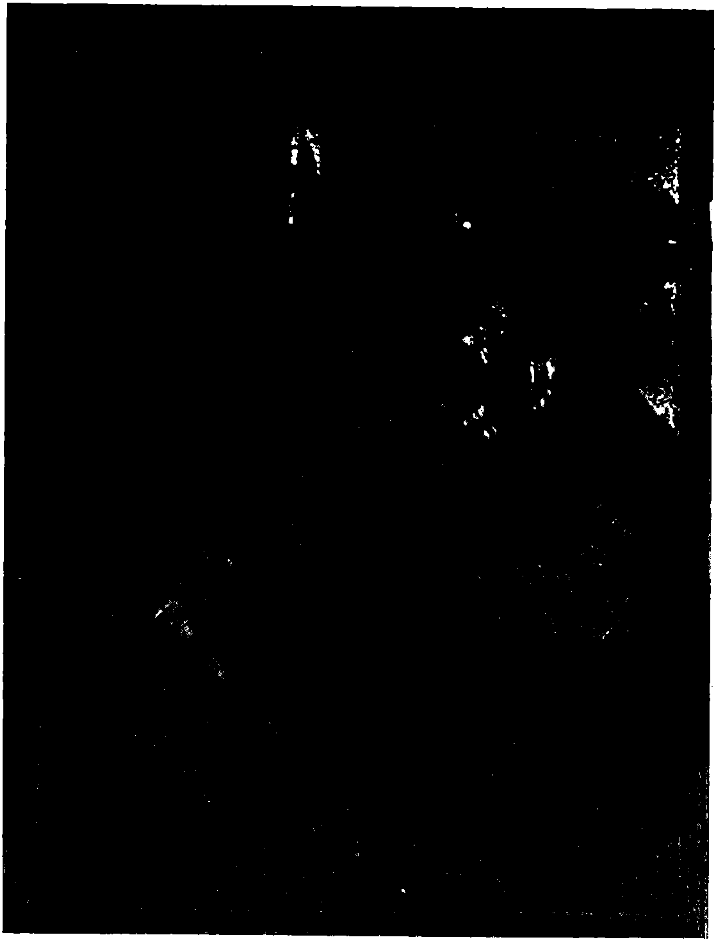
било је праћено невероватним свирепостима, убиствима, пљачкама и насиљем. Међу убијенима био је и Архимед.

Плутарх је живео под римском влашћу користећи се помоћи римских магната[1]). Он је необично забринут да не компромитује Рим у очима културних људи и да не изазове незадовољство својих господара. Свирепости с којима је праћено заузеће Сиракузе, очевидно су се дуго памтиле и приписивале Римљанима у грех. Стога Плутархова прича има апологетски карактер. Друге војсковође, каже он, не само да нису смеле да се супротставе зверству војника, него су их још бодрили. Међутим Марцел само што није заплакао гледајући како се руши и разара град. Он је једини од свих војсковођа имао храбрости да забрани војницима убијање, силовање и поробљавање слободних људи. Али војници га нису слушали. После ових уводних речи, Плутарх примећује :

„Ништа тако није огорчило Марцела као Архимедова смрт. У време заузимања Сиракузе овај се филозоф налазио сам у свом стану удубљен у посматрање неких геометриских слика. Задубљен свим умом и осећањима у ова размишљања, он није обратио пажњу на шум и вику Римљана који су јурили по целом граду и чак није знао да је град већ у њиховој власти. Одједном је у његовој кући искрсао пред њим римски војник са захтевом да одмах пође с њим Марцелу. Али Архимед је одбио да пође с њим пре него што заврши са доказивањем математичког проблема кога је разматрао. Разјарен Римљанин је истргао мач из корица и убио га. По речима других пред Архимедом се појавио војник с мачем да би га убио. Али га је Архимед упорно молио да сачека један минут да не би задатак којим се бавио остао нерешен; војник коме није било стало до овог доказа, пробо га је својим мачем. Према трећој причи Архимед је већ ишао сам Марцелу, носећи у сандуку математичке инструменте — сунчани сат, небески глобус и угломере за мерење величине Сунца. Војници који су га срели мислили су да је у сандуку злато и убили га да би присвојили његово благо. Али и поред свих размимоилажења сви се историчари слажу у томе да је Марцел био јако огорчен његовом смрћу; он се према убици понео са одвратношћу као према човеку који је извршио богохул-

---

[1]) В. мој предговор преводу „Изабраних биографија Плутарха", Лењинград, Соцекгиз, 1941.



Архимедова смрт

ство; он је пронашао Архимедове рођаке и показао према њима свестрано поштовање".

Сличну причу налазимо и код римског историчара Валерија Максима. И он пре света подвлачи да је Марцел наредио да се поштеди генијални математичар, да је убиство било извршено без Марцеловог знања. Од овог писца потиче Архимедова изрека, тако често понављана: „Noli turbare circulos meos" („Не дирај моје кругове"). „Сматрајући да ове речи вређају моћ победиоца, војник му је отсекао главу и Архимедова крв је попрскала његов научни рад".

Зверска свирепост Римљана према побеђеним противницима добро нам је позната из већ наведених примера. Између осталог добро нам је позната из догађаја у Леонтинима и Ени и зверска свирепост Марцела, победиоца Сиракузе.

Кад је Марцел наредио да се побију невине жене и деца у побеђеним градовима, како ли је морао да поступи са руководиоцем „бунтовног отпора" Римљанима у граду који је са Римљанима закључио уговор и „вероломно" га нарушио, са човеком који је нанео Римљанима толико осетних удараца, уништио мноштво римских војника и много бродова, био узрок одуговлачења рата и очајања у римској војсци? Да је Марцел просто убио овог штетног старца, не подвргнувши га тешким мукама, то би већ с његове стране био акт изузетне великодушности за једног Римљанина.

Заиста било би наивно тражити код Римљана III в. неко нарочито поштовање према апстрактној грчкој науци. С гледишта римске водеће аристократије оног времена научник или песник био је човек нижег порекла, нешто као занатлија, или чак будала. Нису узалуд римски аристократи Метели одговорили на духовите стихове Невија, највећег римског песника III в.:

„Даће Метели по њушци Невију песнику"
(Dabunt malum Metelli Naevio poetae).

А то је био римски песник-патриота, писац тада чувеног спева о Пунском рату. Што се тиче грчких филозофа, њихово се стваралаштво сматрало штетним мудровањем; њих су често просто протеривали из Рима. Како ли су морали да се понесу према „филозофу", који се борио с Римом и нанео му небројена зла?

Друга је ствар друга половина II и први век. Грчка је мода постепено овладала у Риму, а нераздвојни део ове моде било је истицање поштовања према апстрактној науци. Свакојаки дилетанти великог положаја као што је Цицерон, сматрали су да је неопходно не само прокламовати поштовање према филозофији и науци, него и савладати неке врхове науке да би се „са лакоћом могло дотаћи у разговору свега, са изгледом познаваоца“. Свирепо убиство највећег грчког математичара, бацило је, разуме се, мрљу на једну од најславнијих страница римске прошлости, на историју Пунских ратова.

Архимедов издавач вер-Еке, исправно запажа поводом тога:

„Римски се народ увек интересовао пре свега за вештину управљања и војне послове, али је увек био далек од математичких шпекулација. Чак је астрономија била у Риму чисто физичка наука, а геометрија се овде никад није уздигла изнад нивоа обичне геодезије. И Архимедова дела нису сачувана захваљујући римској цивилизацији: Римљани изгледа нису познавали Архимедова дела, и уопште тачне науке нису ничим обавезне Римљанима“.

С друге стране Римљани су, као што је познато, били мајстори у фабриковању занимљивих историских прича апологетског карактера. Историска критика је показала да је сва стара римска историја, укључујући епоху царева, — у основи измишљотина која има за циљ да прослави знатно порекло и знатну прошлост римског народа, не заснивајући се ни на каквим историским чињеницама. Са истим апологетским циљем измишљена је и пакосна карактеристика Ханибала и низ мрачних црта из његове биографије.

Дирљива прича о Архимедовој смрти припада категорији прича о расејаном научнику који не примећује шта се око њега дешава; усто она је до нас дошла у низу верзија супротних једна другој.[1]) Зар стога нисмо у праву да на основи свих горе упоређених чињеница гледамо у овој причи апологетску измишљотину која је имала за циљ да заташка праве околности родољубиве Архимедове смрти и тиме улепша римску прошлост?

Шта више, може се сматрати да Архимед није случајно предан забораву и да је свака успомена на њега избрисана код сиракушких Грка који су се за његова живота заносили његовим делима и поносили се њиме као највећим од свих

[1]) Трагови родољубиве антиримске верзије сачувани су у препричавању Диодора код Цецеа.

суграђана. Не сме се заборавити да је са гледишта римских власти његовог времена, Архимед био највећи државни непријатељ; Архимедови рођаци могли су се старати о његовој сахрани и подићи му споменик — према античким схватањима то је била верска обавеза коју чак ни Римљани нису могли да спрече; али сваки други ко би покушао да јавно потсећа на Архимеда, навукао би на себе оптужбу да је политички несигуран. Тиме је најлакше објаснити што се успомена на Архимеда тако брзо угасила у Сиракузи.

Ево шта каже о томе Цицерон у својим „Тускуланским беседама“:

„За време свог боравка на Сицилији ја сам се са радозналошћу распитивао о Архимедовом гробу у Сиракузи. Али се показало да су овдашњи људи тако мало знали о томе да су чак тврдили да од његовог гроба тобож није остало ни трага. Међутим ја сам наставио са трагањем таквом усрдношћу, да сам најзад успео да пронађем његов надгробни споменик између трња и чичака. Успео сам да пронађем захваљујући неколиким стиховима за које сам знао да морају бити урезани на овом споменику, као и захваљујући цртежу лопте и ваљка који се морао налазити изнад ових стихова. Изишавши из сиракушке капије нашао сам се у пустари покривеној многобројним гробовима; пажљиво сам гледао на све стране и одједном сам спазио мали стуб чији се врх издизао из коприва; на њему су били претстављени лопта и ваљак које сам тражио. Одмах сам рекао претставницима Сиракузе који су ме пратили да је пред нама бесумње Архимедов надгробни споменик. И заиста, чим су позвали људе да исеку коров и да нам прокрче пут, и чим смо се приближили овом стубу, видели смо у његовом подножју натпис. Део уклесаних стихова могао се још прочитати, све остало је сатрло време. И тако, један од најславнијих градова Грчке, који је некада дао свету толико научника, није више знао чак ни где се налази гробница најгенијалнијег његовог грађанина, све док се није појавио човек из малог града Арпина да би им показао тај гроб!“

АРХИМЕД У ИСТОРИЈИ МАТЕМАТИКЕ

Архимед је врло тежак писац. Такав он изгледа нама, такав је морао изгледати и античким људима. Што се Плутарх усхићује јасноћом Архимедових доказа, тиме што он води читаоца „најкраћим и најправијим путем“ до закључка, то само сведочи, као што смо већ рекли, о томе да он, не разумејући се ништа у математици, није никад читао Архимеда и само даје лик идеалног научника. Чак је Виета (у XVI в.) нашао за сходно да примети да је он са тешкоћом и не одмах схватио неке Архимедове доказе; писац „Анализе бесконачно малих“ — Бујо (Bouillaud) — који је писао у XVII в., — признао је чак да многе Архимедове доказе није ни разумео; Таке, који је писао у истом веку, тврдио је да „Архимеда многи хвале и диве се њиме, али је мало њих који га читају и разумеју“; Фонтенел је 1722 г. називао Архимедова размишљања „дугачким и тешким за разумевање“; најзад, овој се примедби придружио у XIX веку Либри, аутор „Историје математичких наука у Италији“.

Што ми данас можемо помоћу научног апарата да читамо Архимеда без већих тешкоћа ништа не говори. Архимедова дела, онаква каква су нам сачувана у рукописима, морају да изискују тешкоће код читања. Једна од тих тешкоћа постоји само за нас, друге су постојале и за античког читаоца. За нас пре света претставља тешкоћу Архимедова „геометриска алгебра“, непостојање подесне алгебарске симболике на коју смо ми научили; томе треба додати још и то да је у низу случајѐва Архимед добијао своја решења атомистичком методом, а затим је преводио сваки потез овог решења на језик метода исцрпљивања. Стога нам је необично тешко услед отсуства руководеће нити, да пратимо ток пишчевих мисли. Морамо све његове ставове преводити на термине данашње алгебре; тиме решење постаје не само прегледније и сажетије, него смо и у могућности, примењујући ознаке x и y за променљиве величине, a b, c... за сталне a_1 и a_2, b_1 и b_2 за симетричне, да лакше схватимо циљ коме Архимед тежи. Међутим, такав превод на језик алгебре није увек довољно лак и прост; стога издања као што је Хесово, где је овај посао већ извршен, увелико олакшавају да се разуме Архимед.

Други низ тешкоћа је постојао и за античког читаоца, који је навикао на геометриску алгебру и добро је познавао. Архимед је био оригинални геније, он се никад није бавио, слично Еуклиду и Аполонију, препричавањем и подвлачењем резултата оног што су већ други урадили. Он се задовољава кратким позивањем на своја и туђа дела: „Као што је то доказано у Елементима“, „Као што је то било доказано“ итд., не наводећи никад тачно које то место својих или туђих дела има у виду; ако се узме у обзир да многа од ових дела нису сачувана (нека су нестала још у античка времена) биће нам јасно зашто је покаткад тако тешко разумети Архимеда. Обраћајући се, као геније, у својим делима стручњацима - математичарима, Архимед види и у читаоцу постојање такве математичке интуиције којом је и сам располагао; стога он често просто изоставља елементарније карике свог ланца логичних закључака, понекад чак допушта себи да се позове на обичне теореме које ће доказати тек у даљем излагању итд. То је морало правити тешкоћу чак и античком читаоцу - стручњаку; стога се већ одмах после Архимедове смрти почело са коментарисањем и тумачењем његових дела, при чему су тумачи убацивали изостале карике, на основи властитих домишљања. Тако на пример, став 4 књ. II „О лопти и ваљку“ завршава се речима: „Анализа и синтеза оба задатка даће се на крају“, али ми не налазимо у овој књизи ни на какву анализу и синтезу. И ето, читав низ математичара (на пример, Дионисодор који је живео нешто после Архимеда, Диокле, који је живео у II—I в. до н. е. и др.) предлажу своје реконструкције изосталих делова. Овај рад на допуњавању и тумачењу Архимеда најзад је, на истеку античке историје, у VI в. н. е., закључио Еутокије, чији се коментари обично придодају Архимедовим делима. Па ипак, овај коментар и ова употпуњавања изосталог нису за нас још довољна, те низ научника новог доба, почев од Мавролика и Командина, који су живели у XVI в., па до научника XX в. Хајберга, Хеса и вер-Екеа, настављају са овим допуњавањем и коментаром.

Помоћу готове алгебарске транскрипције и ових коментара ми се доста лако сналазимо у Архимедовим радовима. У сасвим другом положају бисмо се нашли да немамо тога. Писац ове књиге је искусио то када је преводио и тумачио „Геометрију недељивих" од Каваљериа, за коју се неисправно сматра де је мрачна и нејасна само зато што никад није била преведена нити тумачена. Ова је књига писана потпуно Архимедовим стилом, али кудикамо лакше и простије од његових дела, па ипак је превођење и тумачење ове књиге било праћено великим губитком рада и времена.

Огромна већина античких писаца не-математичара који су писали о Архимеду и дивили му се, није читала његова дела, али је на основи мишљења стручњака знала да је он највећи од свих математичара који су икад живели; с друге стране њима је добро била позната улога коју је он одиграо при опсади Сиракузе. Око Архимедовог имена брзо се почео кристалисати низ легенди. Већи део ових легенди имао је вероватно родољубив и антиримски карактер, али такве приче (изузев наведене на стр. 155) до нас из појмљивих разлога нису доспеле. Када су заборавили Архимеда као политичког радника, и када се о њему сачувала успомена као о математичару и механичару - чаробњаку, владајућим римским круговима ишло је у рачун да потпомажу ширење ових легенди, придајући им значај потребан Римљанима. Ове легенде су се стварале према обичним шаблонима: до крајности расејан научник, који стално мисли само на своју науку и не види шта се пред његовим носем дешава, који се гади свега практичног и који је далеко од политике јер је заинтересован само у доказивању правилности својих теориских поставки. Али се показује да је овај чудак најмоћнији међу људима јер је један генијални ум јачи од хиљаду руку. Против машина које је изумео Архимед немоћне су све војсковође.

За ову легенду која живи својим животом и богати се све новим и новим чињеницама карактеристично је да уништење непријатељске флоте помоћу машина није изгледало довољно живописно и чудесно. Причале су се још поразније ствари: како је старац Архимед мирно седећи на столици и окрећући полако неку дршку, лагано кретао по суву огроман брод са пет јарбола, пун људи. У делу о налажењу специфичне тежине легуре, Архимед је, може се мислити, употребио израз који се среће и у другим делима: „Нашао сам“; одавде изгледа настаје анегдота о расејаном научнику који изишавши из купатила, потпуно го трчи улицама и виче: „Нашао сам! Нашао сам!“

Најзад у свом делу „Катоптрика“ Архимед говори о запаљивим стаклима и огледалима. Таква стакла и огледала већ су одавно привлачила пажњу атинског простог народа; већ у V в. фантазира Стрепсијад у Аристофановим „Облацима“ како ће помоћу запаљивог стакла растопити оптужницу која је састављена против њега и написана на воску. Ни Архимедови савременици нити људи који су живели у наредним вековима после њега, ништа не знају о томе да је Архимед спалио римску флоту помоћу запаљивих огледала. Први пут о томе читамо код Лукијана (II в. н. е.) и Галена (III в.), али се и овде пре говори о стрелама обавијеним запаљивом кучином, о „грчкој ватри“, а не о запаљивим огледалима. Међутим Антемије који је живео у VI в. н. е. говори о томе да је Архимед запалио римску флоту помоћу запаљивих огледала као о опште познатој чињеници; у одломку свог дела „О парадоксима механике“, који је сачуван, он подробно развија како је Архимед до тога дошао. Он сматра да Архимед није могао да примени за ту сврху издубљено параболично огледало јер би то огледало морало бити неизмерно велико, и долази до закључка да је Архимед постигао повољан резултат, помоћу комбинација од 24 равних огледала[1]).

Занимљиво је да се ова легенда показала нарочито живахна и активна у ново време. Када је 1548 г. публиковао Хонгава латински превод са арапског превода дела непознатог античког писца „О запаљивом огледалу у облику издубљене параболе“,[2]) у њему су одмах видели изгубљено

---

[1]) Чак и у наше време налазе се још проналазачи који предлажу да се савремена непријатељска војна техника (тенкови, артилерија, бојнице) униште на тај начин што ће се на њих концентрисати сунчани зраци помоћу издубљених огледала или комбинација равних огледала. Начелна немогућност да се створе проналасци такве врсте добро је приказана у књизи Г. Г. Сљусарева „О могућем и немогућем у оптици“ (Изд. Акад. Наука СССР, М.—Л., 1944), чије упознавање може да одврати ауторе таквих проналазака од узалудног губљења времена и снаге.

[2]) Antiqui scriptoris de speculo comburante concavitatis parabolae, ex arabika latine vertit Gon-

Архимедово дело. 1551 г. написао је Оронт Фине (Orontus Finaeus) посебну анализу,[1]) посвећену овом питању, у коме се слаже са закључцима Антемија. 1632 г. посвећује овом питању посебан рад чувени италијански математичар Кавальери.[2]) Полазећи од дела које се приписује Архимеду, он изучава чисто геометриски одбијање светлости од параболичних, елиптичних и хиперболичних огледала, критикује „Архимеда“ итд. Најзад 1646 г. Кирхер[3]) а 1747 г. Бифон покушавају да даду експериментално проверавање „Архимедових открића“. На тај начин је легенда о Архимеду, ма како то било чудно, дала обилне научне плодове.

Пређимо сада од легенде о Архимеду на сцену научне улоге његових дела. Архимед је још за живота био признат као велики научник, класик математичке науке. Доба Архимеда и Аполонија било је кулминација грчке геометрије; после њих математика почиње брзо да опада. Монографије и посебна истраживања замењују се „Елементима“, ми бисмо рекли „универзитетским уџбеницима“, који резимирају све што су открили поједини велики математичари. Такви „универзитетски уџбеници“ били су Еуклидови „Елементи“ и Аполонијеви „Конични пресеци“; у овим књигама било је врло мало властитог, али су у њима јасно и појмљиво систематизоване тековине математичке науке. Математичари првих генерација после Архимеда, ако већ нису дали нека чувена открића, били су у сваком случају довољно интелигентни и компетентни да у оригиналу читају дела великих математичара и сналазе се у њима; такав је био, на пример, Гемин, који је живео у I в. до н. е. Научници наредних поколења обично се задовољавају проучавањем „Елемената“, првенствено ради примене. У оно време појављују се уџбе-

---

gava, Lovanii, 1548. Ово ретко дело ја немам; стога не могу судити на основи чега се оно приписује Архимеду. Обично се сматра да оно није могло да припада Архимеду јер се у њему помиње Аполоније; као што смо видели, овај разлог је недовољан.

[1]) De speculo ustorio ignem ad propositam distantiam generante, Parisiis, 1551.

[2]) Lo Specchio Ustorio, ovvero Trattato delle settione coniche e alcuni loro mirabili effetti intorno al lume, caldo, freddo, suoni e molto ancora. Bologna, Ferroni, 1632.

[3]) Ath. Kircherus. Ars magna lucis et umbrae in decem libros digesta. Romae, 1646 (књига X, задатак IV).

ници много нижег ранга него што су Еуклидове и Аполонијеве књиге. То је на пример дело Херона који је живео око почетка н. е.; његове су књиге примењеног карактера и понекад су без строгих доказа. Понекад су решења код њега дата по египатском обрасцу у облику рецепата, без икаквих доказа. Једини крупни самостални математички мислилац свог времена (ја не мислим овде на Птолемеја и његове претходнике — астрономе) био је Пап који је живео у III в. н. е.; „Математичка енциклопедија" („Collectiones") коју је он написао прилично је несређено дело које је и математички зборник и курс историје математике, — па ипак она садржи низ нових и оригиналних открића.

Међутим постоје монографски радови, чије познавање сматра не само Пап но и сви писци из епохе опадања безусловно обавезним упоредо са познавањем Еуклидових и Аполонијевих курсева; то су Архимедова дела. Арапски математичари само понављају мишљење математичара касније антике када примећују: „Морају се безусловно изучити сва дела изврсног Архимеда, чак и најбезначајнија" (ал-Јалил ас-Сијзи X в. н. е.). Иако ови каснији писци не разумеју увек Архимеда (тако Херон, као што смо видели на стр. 81 и сл., брка једнакост момента и једнакост маса и тименишти читаво Архимедово учење о ослонцима), ипак сматрају за себе обавезним његово темељито познавање као класика математике и увелико преписују његове доказе чак и у случајевима када не помињу његово име (на пример, случај „Херонове теореме" за одређивање површине троугла из трију страна.)

После Папа грчка математика брзо изумире. Римљани уопште нису имали смисла за теоретске науке; у њиховим се рукама геометрија претвара у примењену геодезију која се задовољава приближним резултатима.[1]) Према исправној примедби вер-Екеа, данашња математика није њима обавезна баш ничим. У V в. н. е. у Источној Империји, у вези са последњом варницом „паганске" мудрости уопште, запажао се и последњи процват математичке науке. У Атини се отвара математичка школа којом руководи Прокло, коментатор Еуклида; Еутокије пише за његово време изврстан коментар о Архимеду, о коме смо већ говорили напред.

[1]) В. Рудио (Библиогр, именик, № 86): „Нема народа који би тако мало био расположен према научним математичким размишљањима, као што су Римљани". Чланак Kenneth Scott, Roman Opposition to Scientific Progress (Classical Journal, 29, 1933/34, стр. 615 и сл.) ја немам.

529 г. император Јустинијан затвара ову школу као „паганску гадост“. Међутим већ се 531 г. морало прибећи помоћи „паганских“ математичара: изгорела је саборна црква Св. Софије и требало ју је доградити. Њени градитељи Антемије из Лидије и Исидор Милећанин били су у своје време истакнути математичари и темељито су проучавали Архимеда; са Антемијевом расправом о огледалима упознали смо се већ напред. Касније опадање математичке науке брзо напредује; по традицији се наставља преписивање у манастирима неких Архимедових рукописа, али њихов садржај више никоме није разумљив. Већи део Архимедових дела пропао је у ово време у европским државама.

Док се у земљама грчко-римске културе математика налазила у стању дубоког опадања и застоја, од IX в. почиње њен нов процват у средиштима арабљанске културе.[1]) Економске потребе ових великих светских трговачких средишта и потпуно отсуствовање свакојаких филозофских и црквених забрана нарочито су повољно утицали на обнављање грчке науке и на даљи њен развој код Арабљана. Овде се преводе и изучавају стваралаштва класика грчке науке, одавно заборављених у њиховој отаџбини. И овде једно од првих места припада Архимеду. Већ је око 900 г. Ишак Ибн Хунан, син и ученик чувеног арапског математичара Хунана Ибн Ишака, превео под очевим надзором на арапски језик Архимедово дело „О лопти и ваљку“, које је код Арабљана постало нарочито популарно. Отприлике у исто време Табит Ибн Курах из Багдада (836—901), превео је „Мерење круга“ и низ других Архимедових дела; познати арабљански математичар Алмохтасо абил Хасан дао им је своје коментаре. У овај зборник ушле су и „Леме“, чији грчки оригинал није сачуван, касније ће, 1657 и 1661 г., ове „Леме“ бити преведене[1]) са арабљанског на латински, и овај ће арабљански текст остати једини извор за упознавање теорема које се овде налазе, а које је пронашао Архимед.

---

[1]) Ја се овде не дотичем питања индиске математике јер до сада остаје спорно да ли се она развијала самостално или под грчким утицајем. Овде је већ 471 г. н. е. Арјабхата нашао вредност за π, много тачније него Архимед, одредивши обим 384-угаоника (3, 1416). Међутим он није ништа ново унео у Архимедов метод, па се стога може сматрати да му је Архимедов метод био познат, тим пре што је Индусима била позната и Архимедова „нетачна вредност за π“ $3\frac{1}{7}$

[2]) 1657 г. Гревс и Форстер у Лондону, 1661 г. — Аврам Ехелски у Флоренцији

Архимед. Једна од античких биста за коју се сматра да претставља Архимеда

Табит ибн Курах превео је такође са грчког мало Архимедово дело „О седмоуглу“, које се често помиње и код каснијих арабљанских писаца. По његовим речима рукопис овог дела дошао је до њега у необично лошем стању: он је био ишаран бесмисленим грешкама при писању, теореме и цртежи су били измешани. Стога, примећује он, сређивање и превод рукописа задали су му много посла; као што смо већ говорили, можемо сматрати да је он извршио свој задатак не баш беспрекорно.

Грчки рукопис дела „О седмоуглу“ досад није нађен; Табитов превод остаје наш једини извор. Овај превод постао је први пут познат тек 1927 г. у немачком преводу Шоја (Schoy). Исти Шој публиковао је 1926 г. ал-Јалил ас-Сијзијево (951—1024) дело, у коме је овај дао критичку анализу овог Архимедовог решења и предложио своје, боље решење (стр. 184).

Проучавање ал-Кухијево које је изишло у X в. и посвећено Архимедовом делу „О лопти и ваљку“, показује дубоко улажење пишчево у Архимедово стваралаштво. Он решава овде три задатка: 1) конструисати лоптин отсечак сличан једном датом лоптином отсечку и једнак другом датом лоптином отсечку; 2) конструисати лоптин отсечак сличан једном датом лоптином отсечку и по површини једнак другом датом отсечку, и 3) конструисати лоптин отсечак једнак једном датом отсечку и по површини једнак другом датом отсечку. Прва два задатка су 5 и 6 препозиција II књиге „О лопти и ваљку“; трећи, најсложенији, измислио је сам ал-Кухи. Он га решава потпуно у духу грчке науке — налажењем тачке пресека двају „просторних места“, равностране хиперболе и параболе.

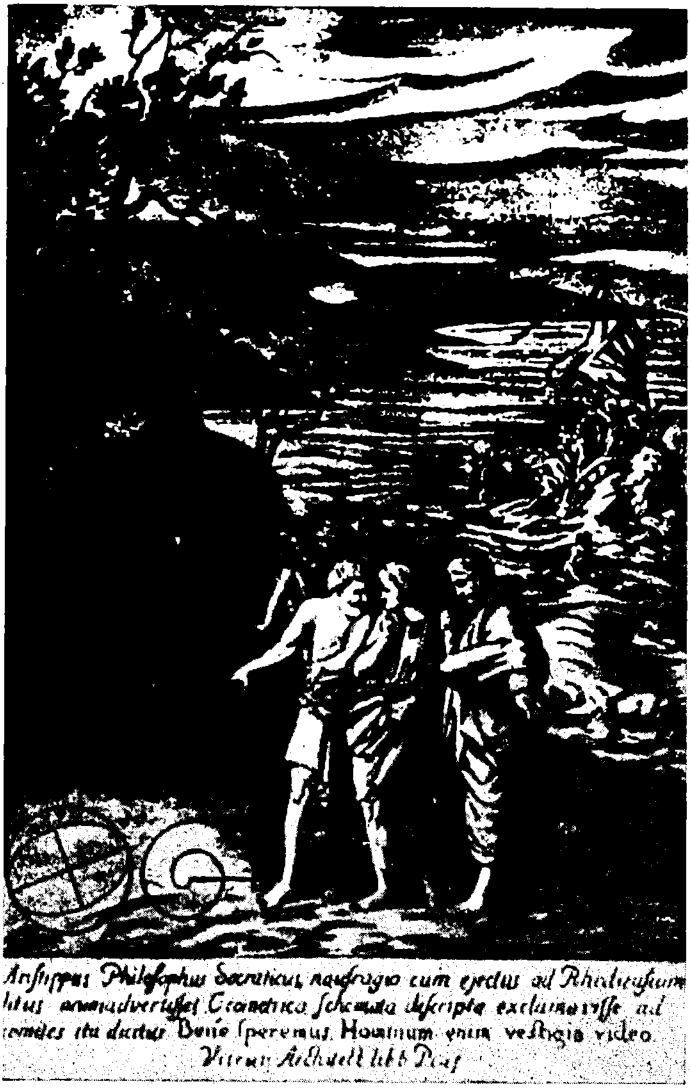
Ал-Махани, који је живео у XI в., посветио је свој рад четвртој књизи, коју смо анализирали напред (стр. 115 и сл.) (поделити лопту помоћу равни тако да настали лоптини отсечци стоје међу собом у датом односу). Као што смо видели, при решавању овог задатка добија се кубна једначина; ал-Махани доводи је на „канонични“ облик $x^3 + ax^2 + bx = c$, али не успева да нађе корене ове једначине.

Ал-Бируни је посветио своје дело („Књига налажења тетива у кругу“) низу различитих задатака, делимично блиских задацима који се налазе у „Лемама“, узетим од Архимеда. Ту је дат, као Архимедов, задатак налажења поврхине троугла из трију страна, за који су раније сматрали да га је решио Херон.

Можда је, међутим, најчувенији арапски научник, са гледишта које нас интересује, био Ибн-ал-Хајтам који је живео у Египту око 1000 г. Из његовог дела видимо да су Арабљани не само у потпуности усвојили наслеђе грчких математичара, између осталих Архимеда, него су одабрали од њих и развили све што је могло користити њиховом учењу о бесконачно малим и алгебарској симболици, т. ј. за учење математичких грана чије су основе Арабљани примили од Индуса, а не од Грка. Упоредо са развијеном алгебарском симболиком ми налазимо код Ибн-ал-Хајтама и инфинитезималне поступке своје врсте. Док је Архимед сумирао ред $1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots$, овај научник сумира већ ред $1^4 + 2^4 + 3^4 \ldots$ Ма да Арабљани нису познавали Архимедово дело „О коноидима и сфероидима", Ибн-ал-Хајтам нашао је запремину обртног параболоида (на други начин него Архимед). Он је тачно нашао и запремину тела које постаје обртањем параболиног отсечка око тетиве која га везује: то је чувено „параболично вретено"; обично се слава за откриће његове запремине нетачно приписује Кеплеру. Ибн-ал-Хајтам је написао и рад о квадратури круга (налажење π), које се заснива на Архимедовом „Мерењу круга".

Док су арабљански научници учинили толико много да се очува Архимедово наслеђе[1]) и наставе радови у правцу који је раније обележен, европска математичка наука налазила се још, као што смо рекли, у таквом беспомоћном стању детета, да се овде није могло ни помишљати не само на даљи развој Архимедових идеја, него ни на просто схватање онога што је он написао. За људе овога доба Архимед је чаробњак-математичар античког доба, упола фантастичан, то је скоро заједничка именица, коме су спремни били да припишу ма који математички задатак-досетку. О њему знају углавном од Арабљана; ово се може закључити на основи тога што се његово име у XIII—XIV в. често наводи у изобличеном виду, карактеристичном за Арабљане — Archimenides. Тако се у рукописима Јордана Неморарија (око

[1]) Већи део арабљанских рукописа до сада још нису проучили нити превели европски научници. Стога можемо рачунати да дело о седмоуглу није последње које је Архимед објавио и да ћемо убудуће доћи и до низа других његових дела.



Фронтиспис једног од ранијих Архимедових издања

1220 г.) појављује дело „Archimenidis de curvis superficiebus, које је бесумње преведено са арабљанског и нема ништа заједничког са правим Архимедом. Тако исто се енглески математичар Тома Брадвардин који је издао око 1325 г. дело о изопериметриским сликама, позива на тог истог Архименидеса; међутим овде се без икаквих властитих додатака излажу резултати истраживања Зенодора на исту тему, а онај задатак са изопериметриским сликама (полулопта — највећи од лоптиних отсечака), које је истраживао Архимед, овде баш изостаје. Заиста, шта се може очекивати од математичара овог времена, када су они (као на пример Боеције) одређивали површину троугла као производ половине основице и бочне стране?

Разуме се, то не искључује појаву да су поједини ученици Арабљана показивали познавање античке математике. Тако, стоји усамљен домикикански калуђер Вилхелм Мербеке који је живео у папском двору у Витербоу и који је већ 1296 г. објавио први превод Архимеда са грчког на латински (грчки језик је тада знало на западу само неколико људи, док је латински био језик целокупне науке оног времена). Овај превод који је нестао у XVI в. и кога је поново нашао у Ватикану 1884 г. В. Роже, био је извршен у журби. Мербеке преводи реч по реч не удубљујући се у смисао и, бесумње, у низу случајева није разумео грчки текст; па ипак такав превод је могао да учини само човек који се мање више разуме у античкој математици. Оцена чувеног Роџера Бекона („Овај Вилхелм не зна ништа честито ни у наукама ни у језику“) једва да је била непристрасна.

Али то није изузетак. Из дела италијанског математичара Николе Кузанског који је у средини XIV в. превео на латински Архимедово дело „О мерењу круга“, сазнајемо да је пре њега владало међу математичарима убеђење да је Архимед нашао тачну вредност за π, једнаку 3 1/7[1]). Г. Пејербах (1423—1461) и његов ученик Региомонтан (И. Милер из Кенигсберга, 1468 г.) знају већ и за Архимедову и индиску вредност за π и разумеју да су обе величине само приближне. Региомонтан користи већ нов превод Архимеда, који је извршио 1447 г. по налогу Папе Николе I Јакоб Кремонски и лично га копира, при чему исправља низ грешака и уводи у њ варијанте из другог грчког рукописа.

[1]) Јоанес Кампанус који је живео у VIII в. и Алберт Саксонски (1390 и др.) такође су сматрали да је тачна вредност $3\frac{1}{7}$

Ипак он тврди у свом приступном предавању о арабљанском астроному Алфрагану, који је одржао 1461 г. у Падови, да је тобож Архимед, доказавши да је спирала испод дирке једнака дужини односног лука, тим самим нашао и тачно решење задатка о обиму круга, т. ј. дао тачну вредност за π.

У вези с тим поучна је и ова особеност математике XV и XVI в.: када у вези нових друштвених потреба почиње брзи процват технике, механике и хидростатике, па према томе и математике, за научнике овог времена Архимедов пут изгледа исувише тежак; они иду својим примитивним путем, а од Архимеда узимају само готове резултате или обичнија и разумљивија решења. Тако се мислило, не без разлога, да је Леонардо да Винчи, нашавши (1482—1487 г.) средиште пирамиде ,полазио од готовог резултата Архимедова, ма да није од њега позајмио доказе.

Међутим потражња превода Архимеда стално расте. Крајем XV в. у Енглеској се појављује први штампани текст Архимеда, без латинског превода, што је најчудније; то је енглеско издање „Псамита" без ознаке писца и године; у свом делу „De expetendis et fugiendis rebus", које је изишло у Венецији, Георг Вала даје 1501 г. превод Архимедова рукописа, који је њему припадао; 1503 г. појављује се прво штампано издање старог латинског превода „Квадратуре параболе" и „Мерења круга" који је извршио Мербеке. Издао га је математичар и астроном Лукас Гаурикус (Lucas Gauricus); овај је превод остао скоро непознат и није имао никакав утицај на савремену науку. Тек је 1544 г. изишао у Базелу превод Архимеда, који је дао Т. Гешоф (Gechauff) који је одмах стекао велики одјек међу математичарима и открио нову епоху у науци. То је било прво штампано издање целокупног грчког текста Архимеда са Еутокијевим коментаром и латинским преводом.

Скоро истовремено са Гешофом прихватио се издања превода Архимеда тако велики и оригинални математичар као што је био Никола Тартаља. Његов је превод изишао у Венецији 1543 г. Тартаља је прештампао горе речено издање Гаурикуса, додавши му још превод дела „О равнотежи равних тела" и „О телима која пливају". Нажалост, он је из лажног самољубља навео да је тобож он сам извршио превод на основи полутрулог рукописа који се тешко читао, а који је он нашао; уствари он је само преписао стари Мербекеов превод.

Услед Архимедове популарности која је нагло расла Тартаља је 1551 г. издао у Венецији још и италијански превод дела „О телима која пливају“. Овај први превод Архимеда на „lingua volgare“ показује колико се проширио круг читалаца Архимедових дела, нарочито оних за чије читање није потребна већа математичка спрема.

Таква дела су била пре свега баш дела „О равнотежи равних тела“ и „О телима која пливају“, које је први штампао Тартаља. Највише су на њима радили два издавача античких математичара, Мавролико и Командино, који су се највише прославили. 1576 г. изишла су „Opuscula mathematica“ од Мавролика (његов латински превод Архимеда изишао је тек 80 година после његове смрти, 1685 г. у Палерму). Колико је Мавролико био компетентан у питањима која смо проучавали у наведеним Архимедовим делима, види се по томе што је у Архимедовим рукописима допунио изостављене доказе теореме: средиште обртног параболоида лежи на трећини висине, рачунајући од основице; сем тога у свој превод Архимеда он је унео властито истраживање „О тежишту на основи Архимеда“. Двема Архимедовим књигама „О равнотежи равних слика“ (у његовом преводу ово је дело подељено у три књиге) он је сам додао четврту: „О равнотежи тела“ — прво истраживање посвећено овом питању у ново време. Из овог дела стичемо уверење да је Мавролико не само мајсторски савладао Архимедов метод исцрпљивања, него и мајсторски стварао у истом правцу: као што је Архимед уписивао у круг све мање и мање троугле, конструисане над странама многоугла, он уписује у лопту све мање и мање тетраедре. Савременици су чак дали Мавролику надимак „други Архимед“.

Као преводилац и тумач Архимеда још познатији је био Командино. Он је издао 1558 г. у Венецији превод Архимедових дела „О мерењу круга“, „О спиралама“, „О квадратури параболе“, „О коноидима и сфероидима“, „Псамит“, са опширним коментарима. 1565 г. издао је у Болоњи превод дела „О телима која пливају“ и „О равнотежи равних слика“, такође с коментарима; и он додаје своју „Књигу о тежишту тела“. Он већ отступа од Архимеда у духу новог времена; он не користи доказе у којима се полази од супротног, задовољавајући се размишљањима по аналогији. Занимљиво је следеће. У преводу дела „О телима која пливају“ који је дао Мербеке, изостаје доказ теореме: ако кружни отсечак плива у води он ће заузети такав положај да ће се његова осовина поклопити са Земљиним полупречником. Командино је сам додао овај доказ. Када је 1906 г. био нађен грчки текст овог дела (в. стр. 125), показало се да се Командинова допуна потпуно поклапа са текстом Архимедове теореме, — толико је он продро у Архимедове мисли.

Ова иста Архимедова дела привлачила су на себе главну пажњу и научника крајем XVI в. Тако је 1586 г. издао Холанђанин Симон Стевин своје „Основе хидростатике", које су се потпуно заснивале на Архимедовом делу које је он одлично схватио, и биле његов наставак. Он тачно копира шему Архимедова дела „О телима која пливају" са његовим дефиницијама и постулатима из којих се логички изводи све што даље следи. Он развија учење о телима која пливају у Архимедовом духу. Тако на пример, у допуну Архимедових закључака, он је показао да је притисак на округлу плочицу која је потопљена у воду тако да није паралелна са њеном површином, једнак тежини воденог косог ваљка, при чему средиште притиска на њу лежи на пресеку њене површине и нормале спуштене на њу из тежишта ваљка.

Међутим, на више места је ово дело уперено против Архимеда. Не помињући Архимедово име, писац води полемику са његовом формалном реторичном и непрактичном шемом. Као што смо видели (стр. 163), Архимед доказује да површина воде мора имати облик сфере. Поводом тога Стевин примећује у постулату VI: „Познато је да површина воде има облик сфере... Али усвајање овог става необично би отежало наредне доказе, не пружајући никакву корист. У циљу упрошћења, узимамо стога да је површина воде — раван". Архимед је утврдио да је притисак течности која се налази у стању мировања једнак у свим тачкама; у противном би се течност кретала из места већег притиска ка месту мањег притиска, док не дође у стање мировања. Са Стевиновог гледишта већ сам закључак да ће течност раније или касније доћи у стање мировања, уопште није нешто што се само по себи разуме; стога он додаје допунски постулат: „Вечито кретање", perpetuum mobile, немогуће је. Најзад, као исправку у Архимедовим расуђивањима, он уводи такав фактор, као што је тежина ваздуха.

Карактеристично је такође упрошћење које је он унео у Архимедов метод исцрпљивања. Он једном заувек постулише, као што касније чини Њутн: „Величине чија је ме-

Архимед и његови ученици. Снимљено са Рафаелове слике ђусобна разлика мања ма од које дате величине, једнаке су међусобно“.

Велико интересовање побуђује у овој епохи и „запаљива огледала“, чији се проналазак приписује по традицији Архимеду. Оронт Фине (Orontus Finaeus) издаје специјалну књигу посвећену овом питању (в. стр. 210, примедбу 1) у којој се слаже са Антемијевим закључцима (в. стр. 209); то је онај исти Фине који је, као и чувени филолог J. Скалигер (J. Scaliger, Nova Cyclometrija, Lejden, 1592), сматрао да се може наћи тачна вредност за π.

Основу озбиљног и темељитог рада на математичким делима Архимедовим положио је велики оснивач данашње алгебре Виет. Ми смо већ указали на оне изванредне тешкоће на које су наишли у почетку научници који су се отргли од античке школске традиције, нарочито у оним случајевима када је Архимед налазио доказ путем атомистичког метода, а затим је преводио на аналоги; у овом случају читалац не може уопште да сагледа смисао и циљ доказа, а да не говоримо већ о томе да геометриска алгебра антике уопште није прегледна и да је тешка за разумевање. Виет је одлучио да проучи метод или „канон“ доказа таквих теорема па је издвојио доказе до којих се дошло методом геометриске алгебре у засебан курс „Effectionum geometricarum canonica recensio“, који је изишао 1593 г. Ми смо већ говорили (стр. 88) о нарочитим тешкоћама Архимедових доказивања теореме о једнакости субтангенте и односног лука спирале. Виет се у почетку није могао снаћи у њему и сматрао је да је Архимедов доказ о једнакости криве и праве линије, на изглед парадоксалан, нетачан и заснован на логичкој грешки. Али је касније издао посебно дело „О спиралама“ у коме признаје да је погрешио и диви се Архимедовом доказу. Виет је био непосредни следбеник Архимедов и у примењивању νεῦσις на решавање једначина 3-ег степена и задатка трисекције угла, као и у одређивању вредности броја π, коју је он не само нашао тачније од Архимеда, него и први дао у виду бесконачног производа; [1]) он је нашао π са тачношћу од 9 децимала. Још већу тачност је постигао његов савременик ван-

---

[1]) $\pi = \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}\cdots}$

Румен (van-Roomen, Adrianus Romanus). У одговору на Скалигеров покушај да нађе тачну[1]) вредност π он издаје своју „Апологију Архимеда против Скалигера", где даје грчки текст Архимедова дела „О мерењу круга", латински превод, коментар и десет дијалога, у којима по свим правилима сколастике доказује да је немогуће наћи тачну вредност за π. У другој књизи, у „Методу многоуглова" (Methodus polygonorum), која је изишла у Лувену 1593 г., ван-Румен даје вредност за π са 15 децимала, израчунату Архимедовим методом.

Почетком XVII в. пажњу научника скреће првенствено друга група Архимедових дела. У вези практичних потреба избијају у први план проблеми израчунавања површина и запремина. Тешко је рећи да ли је у праву Олшки када тврди да су се атомистички методи решавања таквих задатака сачували у усменој традицији техничара и архитекта; пре би се могло рећи да су научници XVII в. или добили ова решења у наследство од Арабљана ,или самостално дошли до њих, дешифрујући њима неразумљива решења која се налазе код Архимеда. Уосталом, не сме се заборавити да је Архимедов „Ефод" био непознат до 1906 г., а да је у свим осталим Архимедовим делима атомистички метод био обавијен велом и прерађен у апагогичне доказе.

Пред научницима XVII в. било је неколико путева: 1) сматрати да је Архимед знао атомистички метод, али га је крио од читаоца; 2) сматрати да је апагогичан метод Архимедов, и поред све његове тачности, недовољно прегледан и убедљив и да га стога треба заменити новим; 3) поступати тако, како су поступали са светим писмом, тј. давати Архимедовој аргументацији онај смисао кога она није имала, тумачећи је у смислу метода недељивих.

Овим путем је пошао Кеплер. Његова „Стереометрија буради за вино" која је изишла 1615 г. имала је, као што се види из наслова, практичан циљ. Њеном првом делу Кеплер је дао наслов „Архимедова стереометрија". Он овде даје низ теорема из Архимедовог дела „О лопти и ваљку", али у необично упрошћеном тумачењу. Он признаје да је Архимед користио метод посредног доказивања, али, по Кеплеровом мишљењу, Архимеда треба овако разумети: треба сматрати као да се круг састоји (velut) од онолико честица,

---

[1]) Скалигер је уверавао да је већ обим 12-угаоника уписаног у круг, већи од обима самог круга.

колико у њему има тачака, тј. од бесконачног броја честица. Ако крајеве сваке од ових честица повежемо са средиштем, добићемо низ троуглова са теменима у средишту итд. Тела претстављају „равни од којих је постало тело" (plana corporata, тј. збир низа равни, положених једна на другу: ваљак од кругова, правилан паралелопипед од квадрата). Стога се запремина ваљка односи према запремини уписаног у њ паралелопипеда, као површине њихових основица. Једном речи, свуда се одбацује метод исцрпљивања и замењује се методом бесконачно малих.

Разуме се да је такво тумачење у стилу „хармоничних" тумачења светог писма — право насиље над Архимедом, и Александар Андерсон је био у праву када је 1616 г. изјавио у своме делу „Молба за ослобођење Архимеда" („Vindiciae Archimedis) да Кеплер фалсификује Архимеда. Међутим, Кеплер је, занемарујући Архимедов метод доказивања, погодио његов еуристички метод; стога он успева да нађе у „Supplementa ad Archimedem" запремину многих тела која Архимед није проучио, у већини сасвим тачно.

Истим духом одише Архимедово издање које је приредио Давид Рево (Davidus Rivaltus) а које је изишло 1615 г. у Паризу „са новим доказима и коментарима" (novis demonstrationibus commentariisque illustrata). Овде су у целини дате само тезе теорема а докази су скраћени и уопштени. Треба рећи, као што се види из навода у „Геометрији недељивих" да се баш овим Архимедовим текстом користио чувени математичар Бонавентура Каваљери (1590—1647).

Једва бисмо могли навести још којег научника који би тако дубоко и темељито познавао Архимеда као Каваљери. Каваљери је још у младости, упоредо са Аполонијем, Папом и Птолемејем, проучио и Архимеда. О томе сведочи тако компетентан судија као Галилеј, који га у својим писмима назива „новим Архимедом" и „супарником Архимедовим". Проучавајући доследно све Архимедово наслеђе, Каваљери допуњује доказе који су изостављени, стара се да замени Архимедове доказе простијим. Радећи на „Лопти и ваљку", он проналази нове доказе ради налажења запремине купе, строге као и у Архимеда, али простије; радећи на „Сфероидима и коноидима", он налази запремину новог тела, tympanum hiperbolicum, елиптичног хиперболоида, за који Архимед није ни знао. Он је пронашао такође и простије рачунање квадратуре параболе, а радећи на спиралама, он је, по својим властитим речима „кренуо много даље од Архимеда" не само зато што је на нов начин решио квадратуру параболе, него што је пронашао нове теореме. Он одмах за Архимедом примењује законе статике на решавање геометриских задатака, али притом не полази само од тела код којих је материја подједнако распоређена, него постулише тела чија се специфична тежина мења по неком одређеном закону. Изучавајући одмах за Архимедом хидростатику, конструише нову машину „хидраконтистериу" и пише две расправе из хидраулике. Најзад прелазећи од истраживања о запаљивим огледалима која се приписују Архимеду, он изучава жижне особине коничних пресека.

Али, разуме се, најважније од свега тога је „Геометрија недељивих" која даје нове методе интеграљења на основи Архимедових радова. Ми се овде, појмљиво, не можемо задржавати подробније на развоју учења о квадратурама код Каваљерија и његових следбеника; за то би требало писати књигу.[1]) Навешћемо овде само то да је Каваљери, супротно његовим претходницима и следбеницима, одлично схватао, да је метод исцрпљивања давао потпуно доказане резултате који се не могу оспоравати, што он сам, са његовим методом недељивих, није успео да постигне. Али с друге стране, Каваљери је врло добро осећао, да Архимедов метод није плодоносан, да је вештачки, непрегледан, те се стога не одликује непосредном убедљивошћу; Каваљери је тежио да свуда, где је то само могуће, замени Архимедове доказе правим доказима, а кад му код једног случаја (при одређивању запремине пирамиде) то није пошло за руком, сматрао је то за велики недостатак свог система. Па ипак, видећи да његов метод није довољно убедљив, он сматра за сходно да својој последњој књизи „Геометрији" придода још и доказе својих теорема more Archimedeo. Нажалост, Каваљери још није могао доћи до Архимедовог „Ефода" из којег би се уверио да је и сам Архимед налазио своја решења помоћу атомистичког метода, сматрајући га прегледнијим и плоднијим.

Врло велики утицај имао је Архимед и на математичко стваралаштво двају Каваљеријевих савременика — Холан-

[1]) В. мој предговор у преводу Каваљеријеве „Геометрије" (Москва, 1940). Мој чланак: „Ејлер и његова „израчунавања нула" (у зборнику „Ејлер", изд. Акад. Наука, 1936); „Њутнови претходници у философији бесконачно малих" (у зборнику „Исак Њутн", изд. Акад. Наука, 1943).

ђанина Хајгенса (1654) и Енглеза Броункера. Као што смо већ говорили, Архимед је налазио квадратуру параболичног отсечка уписујући у њега многоутлу праволиниску слику, удвајајући узастопно број њених страна. Он је показивао да је сваки нови додатак површини овог многоутла мањи од 1/4 претходног додатка, те је тако добијао као горњу границу за површину параболичног сегмента

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots$$

Хајгенс је применио овај исти начин за налажење површине кружног отсечка. Он доказује теореме: разлика између површине (resp. обима) круга и површине (resp. обима) уписаног правилног 2n-угаоника већа је од 1/3 разлике између површина (resp. обима) уписаних правилних 2n-угаоника и n-угаоника; разлика између површине круга и 2/3 површине описаног правилног многоутла већа је од 1/3 површине уписаног правилног истоименог многоутла итд. Хајгенс је овим начином добио за π ред, који опада много брже него код Архимеда (већ за 60-угаоник он је нашао овим начином 9 тачних децимала!). Броункер је применио овај исти Архимедов начин за налажење квадратуре хиперболичног отсечка. Међутим, Хајгенс и Броункер били су последњи Архимедови следбеници у овом питању: „Од Уолиса, место метода уписаних и описаних многоуглова основни задатак је постао проналажење аналитичких израза за однос обима круга према пречнику, услед чега су стари Архимедови методи били избачени“ (Рудио).

Хајгенс је (као уосталом и Паскал) наследио од Архимеда и статички метод интеграљења (помоћу налажења тежишта) и теорему о особини спиралне субтангенте.

На тај начин су Хајгенс, Стевин, Торичели, Ферма, Паскал и др. били Архимедови следбеници. Па ипак, резултат изласка Каваљеријеве књиге и дела ових његових савременика био је такав какав је Каваљери најмање могао очекивати: постепено престаје изучавање Архимедових дела као основног руковођења при усавршавању у математици и механици, све више су склони да гледају у њему поштовану реликвију. Математичари овог новог времена жудно теже да прошире оквире геометрије, обогативши је новим истинама; вреди ли петљати се са заморним доказима исцрпљивања, када се све може доказати тако просто методом недељивих? Архимед постаје симбол реакције у математици; Кавальеријева књига постаје застава око које се групишу сви којима је тежак гломазан поступак исцрпљивања. „Доле Архимед, живео Каваљери!“ постаје борбени поклич ове епохе. Тако, друг и савременик Каваљеријев, Торичели, примећује: Каваљеријев метод је заиста научни начин доказивања, јер увек иде правим путем својственим самој природи. Жао ми је античке геометрије (тј. Архимедове геометрије), која је... нашла тако мало истина, које се тичу одређивања величине тела, оставивши ово злосрећно убоштво у наслеђе нашем веку“. Тако је Ферма налазио $\int x dx$ у $\int x^2 dx$, као што смо видели, на Архимедов начин, али општи образац

$$\int_0^x x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

изводи он помоћу просте аналогије; Архимедов метод исцрпљивања са reductio ad absurdum он уопште не примењује ма да се односи према њему са великим поштовањем као према реликвији достојној поштовања. Он једном заувек изјављује: „У свим се случајевима згодно може применити и Архимедов начин доказивања са reductio ad absurdum, помоћу описаних и уписаних слика“. Ова примедба ни издалека није тачна за све случајеве и јасно је да сам Ферма није покушао да је провери: међу случајевима које је он проучавао постоје и интеграли са двоструким граничним прелазом (чији интегранд или која од граница теже бескрајности), где би било тешко провести такав доказ.

Као Ферма поступа и Паскал; он се задовољава априорним у низу случајева нетачним тврђењем, да се тобож „све што је доказано путем недељивих може доказати и Архимедовим методом“, ослобађајући се на тај начин заувек да даје строге доказе својим поставкама.

Тако су Каваљери, Ферма и Паскал ставили у руке математичара ново оружје; Архимедове књиге престају да буду приручни уџбеници математике — њих стављају у архиву. Таке (A. Tacquet), који је био упоран присталица Архимедових метода и који је у својој књизи „Cylindricorum et annularium liber“, која је изишла 1651 г., захтевао да се свака геометриска поставка доказује методом исцрпљивања, принуђен је са жалошћу да примети: „Sed illum plures laudant quam legunt; admirantur plures quam intelligunt". („Људи више хвале Архимеда него што га читају; више има оних који му се диве него оних који га схватају"). Ова примедба се налази у књизи „Елементи геометрије равни и простора, са додатком неколико Архимедових теорема". Међутим сам Таке није предложио никакав нов алгоритам граничног прелаза, а метод исцрпљивања (како је примењивао већ и сам Архимед, што је уосталом Такеу било непознато) био је неплодан за стваралачки математички рад. Такеова књига није могла никога да занесе и убеди, јер није доносила ништа ново од начелног интереса за људе овог бурног периода; она је само давала доказ методом исцрпљивања за неке кубатуре нађене већ методом недељивих.

Архимед и његова наука одлазили су у прошлост, и тешко да је била случајност што је баш Таке написао прву (после античких писаца) историју математике: „Historica narratio de ortu et progressu matheseos". Такве се књиге обично пишу када се завршава читава епоха у историји људске мисли и када се може сумирати рачун свега што је учињено.

Епоха револуционарне борбе са Архимедом морала се ускоро завршити и требало је да настане време када ће се Архимед моћи оценити објективније. Такво објективно прилажење Архимеду карактеристично је за енглеске научнике. Они се не препиру око тога који је метод бољи — Архимедов метод исцрпљивања или нови метод бесконачно малих. Темељито изучавање Архимеда доводи их до правилног закључка (који је 1906 г. потпуно потврђен захваљујући проналаску „Ефода"!), да је и сам Архимед примењивао за налажење својих теорема метод недељивих. У XXVII лекцији овог универзитетског курса у Кембрицу (који је похађао између осталих и Њутн) Бароу је приметио да Архимеда одају решења која предлаже и да она показују какву је анализу употребљавао („quod ipsum satis prodit ac arguit qualem is analysin usurpavit"); другачије, каже Бароу, „било би потпуно непојмљиво како је Архимед могао путем огромног броја сабирања, дељења, пермутација и претварања пропорција, лишених логичног циља, да дође до тачног закључка. Веран резултат код таквих претпоставки могао би бити само ствар случаја, а не логичких размишљања и искуства, али би притом било несхватљиво зашто је случај увек изводио Архимеда на прави пут".

Стога Бароу, издајући 1675 г. у Лондону свој латински превод Архимеда сматра могућним, не придржавајући се тачно оригиналног текста, излагати својим речима његове реченице, скраћивати доказе и замењивати их својим. Кроз још три године, 1679 г., Бароу издаје своју „Лекцију, у којој се Архимедове теореме о лопти и ваљку излажу методом недељивих". Бароу је узео у обзир и „Леме", публиковане 1657 и 1661 г.

Уолис је, као издавач, пошао више научним путем. Он издаје 1676 г. оригинални грчки текст „Псамита" и „Мерења круга" са Еутокијевим коментарима, новим латинским преводом и својим примедбама. Он је необично високо уздизао Архимеда, овако га оцењујући: „Као човек изврсне проницљивости, он је положио прве темеље скоро свих открића, чијим се развојем поноси наш век". Међутим, он се није могао сложити с Архимедовим методом решавања геометриских питања. Као и Бароу он долази до закључка да је Архимед „намерно крио метод својих решавања". То је, примећује он, разуме се најбољи начин да се избегну прекори и примедбе читалаца; али сам Уолис није хтео да иде Архимедовим примером. Дабоме, примећује Уолис, било би паметније кад би и он једноставно истицао и доказивао поједине ставове, уместо да излаже сав свој метод; он би на тај начин избегао прекоре и примедбе, али не би могао припремити терен за даљи успех математике.

Каква иронија судбине! У време када је Уолис учинио овај приговор Архимеду, још није био нађен његов „Ефод", и Уолис није могао да зна да, поричући Архимеда, он скоро дословце понавља његове властите речи: „Нашао сам за сходно да изложим у овој књизи мој метод... користан и за доказивање теорема... Лакше је наћи строг доказ пошто се помоћу овог метода стекне оријентација у питањима... Теореме које сад публикујем ја сам раније нашо помоћу овог метода и одлучио сам да га изложим писмено... јер, како сам убеђен, чиним тиме велику услугу математици: многи моји савременици или следбеници моћи ће да нађу нове теореме којих се ја нисам сетио, упознавши се са овим методом".

Нажалост, Архимедова нада се није испунила: у епохи бурног пораста математичке науке његов „Ефод" остао је да лежи под зеленом чојом. Да је он нађен три столећа раније, уштедело би се много времена и енергије потрошених на некорисне преписке.

Почетком XVIII в. Архимедове књиге коначно престају да буду приручним курсем математике. Довољно је прегледати регистар уз IV том „Лекција из историје математике" од М. Кантора, да би се уверили да од тог времена Архимеда изучавају само историчари математике. Нов систем погодних алгебарских ознака и трансформација и нов алгоритам за рад на бесконачно малим величинама размазили су ново поколење математичара и учинили их да тешко примају како гломазну тако и незграпну геометриску алгебру антике, тако и гломазни и незграпни метод исцрпљивања. Строгост нових инфинитезималних метода постигнута је не враћањем на метод исцрпљивања него другим, новим путем.

Истина, Лежандр (Legendre) је издао 1812 г. своје „Éléments de géometrie", у којима даје изнова право старом методу исцрпљивања, не уносећи у њ скоро никакве измене; он га чак назива Архимедовим методом (као што видимо сада из „Ефода", овај назив није нимало згодан). Али је Лежандрова књига прожета инертним реакционарним духом и, према примедби Канторовој, „није одговарала захтевима оног времена, које јој је постављала филозофска критика".

Према томе, Архимед је одиграо огромну улогу у историји математике и у јелинистичко-римској епохи (Гемин, Херон, Пап), и у средњем веку (арабљански математичари), и у XVII в., у једном од најсјајнијих периода бурног процвата математике.

Читање Архимеда донеће, разуме се, и у наше време своју корист не само код вежби млађих математичара; оно може да наведе стваралачког математичара на низ нових, начелно интересантних мисли. Али гломазно научно оформљење принуђује математичара нашег времена да прилази Архимеду као интересантној реликвији прошлости: то је дивна камена секира, коју је виртуозно израдио уметник-дивљак, а не добро наоштрена оштрица угодног данашњег ножа, израђеног у фабрици водећи рачуна о свим потребама данашњице.

Овај нови, историски прилаз Архимеду звучи већ у оцени Пејраровог превода Архимеда, коју је дао Даламбер у Француској академији наука: „Архимеду ће се сачувати углед једног од највећих генија који су се икад посветили математици... И поред преимућства нових метода, које увиђају сви геометричари, сваки математичар треба да се интересује каквим је оригиналним путевима и дубоким размишљањима могао Архимед да постигне тако сложене резултате".

БИБЛИОГРАФСКИ ИМЕНИК

I ИЗДАЊА АРХИМЕДОВИХ ТЕКСТОВА

И СТАРИ ЛАТИНСКИ ПРЕВОДИ

1. Θεώρημα ᾧ κέχρηται ἐν τῷ Ψαμμίτῃ Ἀρχιμήδης (Оксфорд, крај XV века).

2. Campani viri clarissimi Tetragonismus, id est circuli quadratura, Romae edita cum additionibus G a u r i c i; Archimedis Syracusani Tetragonismus; de quadratura circuli secundum Boetium, Venetiis, 1503.

3. Archimedis opera, quae quidem exstant omnia, nunc primum et graece et Latine edita; adjecta sunt Eutocii Ascalonitae in eosdem Archimedis libros commentaria, item graece et latine, nunquam antea excusa. Basileae, Jos. Hervagius, 1544 (превео T h o m a s G e c h a u f f t V e n a t o r i u s).

4. P a s c h a s i i H a m e l i i regii mathematici commentarius in Archimedis Syracusani praeclari mathematici librum de numero arenae. Lutetiae, 1557.

5. Archimedis opera nonnulla a F e d. C o m m a n d i n o nuper in latinum conversa et commentariis illustrata. Venetiis, 1553.

6. Archimedis de iis quae vehuntur in aqua libri duo, a F e d. C o m m a n d i n o restituti et illustrati, Eiusdem F. C o m m a n d i n i liber de centro gravitatis solidorum. Bononiae, 1565.

7. G u i d i U b a l d i in duos Archimedis aequeponderantium libros paraphrasis, scholiis illustrata. Pisauri. 1588.

8. In Archimedis Circuli Dimentionem expositio et analysis. Apologia pro Archimede ad clarissimum Josephum Scaligerum, Oruntium Finaeum et Reymarum Ursum in decem dialogos distincta. Authore A d r i a n o R o m a n o. Wurceburgi, 1597.

9. Archimedis opera quae exstant, novis demonstrationibus commentarisque illustrata, per D a v. R i v a l t u m a F l e u r a n t i o Caenomanus. Paris, 1615.

10. Archimedis opera mechanicorum libri, Apollonii Pergaei conicorum et Sereni de sectione cylindri. Lutetiae 1636 (ed. Mersenne).

11. Lemmata Archimedis apud Graecos et Latinos jampridem deside — rata, e vetuste codice M. S. arabico, a Johanno Gravio traducta; et nunc primum cum arabum scholis publicata, revisa et pluribus mendis expurgata a Samuelle Forster. Londini, 1657.

12. Apollonii Pergaei conicorum libri V, VI, VII, paraphraste Abalphato Asphahanensi, nunc primum editi. Additus in calce Archimedis assumptorum liber ex codicibus arabicis M. SS. Abrahamus Ecchellensis Maronita latinos reddidit, Jo. Alfonsus Borellius notas adjecit. Florentiae, 1661.

13. Elementa geometriae planae et solidae quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata, auctore Andrea Tacquet. Ed. tertia correctior Antwerpiae, 1672.

14. Admirandi Archimedis Syracusani monumenta omnia mathematica quae exstant, ex traditione D. Fr. Maurolci. Panormi, 1685.

15. Archimedis opera, Apollonii Pergaei conicorum libri IV, Theodosii spherica, methodo nova illustrata et succincte demonstrata. Londini, 1675 (издање Barrow).

16. Archimedis Syracusani Arenarius et Dimensio circuli, Eutocii Ascalonitae in hanc commentarius, cum versione et notis. Oxonii, 1676 (издање Wallis).

17. Archimedis quae supersunt omnia, cum Eutocii Ascalonitae commentariis, ex versione Josephi Torelli Veronensis, cum nova versione latina. Oxonii, 1792.

18. Lessing G. E. Beiträge zur Geschichte und Literatur. Braunschweig, 1773 (на стр. 421 и сл. — прво издање Архимедова задатка о воловима).

19. Suter H. Ein Fragment aus Archimedes Stomachion. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, IX, 1899, стр. 491 и сл.

20. В. № 63, 110, 112, 114.

21. Archimedes opera omnia cum commentariis Eutocii ed J. L. Heiberg, I-III. Leipzig, Teubner, 1880-81; 2 изд., т. I, 1910; t. II, 1913 (основно издање текста).

II. НАЈБОЉИ АРХИМЕДОВИ ПРЕВОДИ НА НОВЕ ЈЕЗИКЕ

22. Peyrard F. Oeuvres d'Archimède, traduites littéralement avec un commentaire. Paris, 1807 (непотпуно издање); 2 изд. 1894.

23. Archimedes von Syrakus vorhandene Werke, aus dem Griechischen übersetzt und mit erläuternden und kritischen Anmerkungen begleitet von E. Nizze. Stralsund, 1824.

24. Heath T. L. The works of Archimedes edited in modern notations, with introductory chapters Cambridge, 1897. Ауторизовани немачки превод са пишчевим исправкама и допунама на основу рукописа нађеног 1906 г. Archimedes Werke. Mit modernen Bezeichnungen herausgegeben und mit einer Einleitung versehen von Sir Thomas Heath. Deutsch von Dr. Fritz Kliem. Berlin, 1914.

25. Ver Eecke Paul. Les oeuvres complètes d'Archimède traduites du grec en français avec une introduction et des notes. Paris—Bruxelles, 1921.

26. Czwalina A. Archimedes Uebersetzungen mit Kommentar. 5 издања. Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Leipzig, 1922—1925.

III. ОДАБРАНА ЛИТЕРАТУРА О АРХИМЕДУ

1. Заједнички радови о Архимеду

В. пре свега заједничке курсеве историје математике (Кантора, Мари-а, Либри-а, Бретшнајдера, Хинтера, Ханкела, Лорија, Неселмана, Танерија, Цајтена и др.), горе № 21 (Хајбергов предговор III т.), № 24 и 25, као и:

28. Mazzucheli J. M. Notizie intorno alla vita di Archimède. Brescia, 1737.

29. Gutenacker J. Das Grabmal des Archimedes, ein Beitrag zur Charakteristik dieses grossen Mathematikers. Würzburg, 1833.

30. Heiberg J. L. Quaestiones Archimedeae. Inest de Arenae numero libellus. Hauniae, 1879 (најважније дело о Архимеду).

31. Heiberg J. L. Ueber den Dialekt des Archimedes. Jahrbuch für Philologie, Suppl. V. XIII, стр. 543 и сл. Interpolationen in den Schriften des Archimedes, исто, стр. 566 и даље.

32. Heiberg J. L. Neue Studien zu Archimedes. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Hist. — litt. Abteilung,[1]) XXXVI, 1889, Supplementheft.

33. Susemiht F. Geschichte der griechischen Literatur in der Alexandrinerzeit, t. I, стр. 723—733, Leipzig, 1891.

34. Becker H. Die geometrische Entwicklung des Infinitesimalbegriffs im Exhaustionbeweise bei Archimedes (26 стр.). Insterburg, 1894.

35. Hultsch F. Чланак „Archimedes" у Pauly-Wissowa, Real- Encyclopädie der klassischen Altertumswissenschaften, т. II, 1895, стр. 507—539.

35a. Bahntje H. Quaestiones Archimedeae. Diss. 1903.

[1]) Отсада ћу Zeitschrift für Mathematik und Physik, historisch-litterarische Abteilung обележавати скраћено ZfMPh.

36. Favaro A. Archimede. Genova, 1912.

37. Midolo P. Archimede e il suo tempo. Siracuse, 1912.

38. Heiberg J. G. Le rôle d'Archimède dans le développement des sciences exactes. Scientia, т. XX, 1916.

39. Heath Th. L. Archimedes (Pioneers of Progress, Men of Science), 58 стр., 1 слика. London, Society for promoting Christian Knowledge, 1920.

40. Winter Franz. Der Tod des Archimedes (82 Winckelmanns Programm der arcshäologischen-Gesellschaft zu Berlin). 24 стр, 1 илуст., Berlin, W. de Gruyter, 1924.

41. Czwalina A. Archimedes (Mech.-phys. Bibliothek, 64), 47 стр. Leipzig, Teubner, 1925.

42. Speiser A. Klassische Stücke der Mathematik. Zürich, O. Fussli, 1925.

43. Loria Gino. Archimede. La scienza che domino Roma. (I curiosi della natura). 72 стр., Milano, 1925.

44. Kliem Fr. und Wolff G. Archimedes. 143 стр., 64 слика, 3 табл., Berlin, 1927.

45. Shoen, Harriet H. Archimedes, the reconstruction of a personality. Scripta mathematica, 2, 1934, стр. 261—4, 342—7.

46. Wieleitner H. Das Fortleben der Archimedischen Infinitesimalmethoden bis zum Beginn des 17 Jahrhunderts; insbesondere über Schwerpunktbestimmungen. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, B. I, 1931, стр. 201—220.

2. ИСТРАЖИВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ АРХИМЕДОВИХ ДЕЛА

„О једнакости равних слика", „О полугама"

47. Dühring E. Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik, Berlin, 1873, стр. 1—12, 61 і сл.

48. Vailati. Atti della Accademia di Torino, 32, 1897, стр. 742—758; Atti del Congresso Internationale di Science Storiche, Roma, 1904, v. XII. Scritti, стр. 497—502.

49. Mach E. Die Mechanik in ihrer Entwicklung. Leipzig, 1904, стр. 1—17, 33—34, 85—87, 107—110 и др.

50. Duhem P. Les origines de la statique, Paris, 1905, стр. 1—12, 61—98.

51. Juel C. Kgl. Danske Vid. Forh. Kjobenhavn, 1914, № 5—6, стр. 421—441.

52. Stein W. Der Begriff des Schwerpunktes bei Archimedes. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, B. I, 1930, стр. 221—224.

53. Lenzen V. F. Archimedes' Theory of the Lever. Isis, t. XVII, 1932, стр. 288—289.

54. Reimann Dora. Historische Studien über E. Mach's Darstellung der Entwickelung des Hebelsatzes. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, B. 3, 1936, стр. 554—592.

„О небеском глобусу"

55. Hultsch F. ZfMPh., B. XXII, 1877, стр. 106 и сл.

56. Curtze M. Jahresbericht für Mathematik, B. XI, 1877, стр. 186 и сл.

57. Tannery P. Revue de philologie, t. XVII, 1893, стр. 213 и сл.

„О лопти и цилиндру"

58. Zeuthen H. Bibliotheca Mathematica, 1893, стр. 97 и сл.

59. Zeuthen H. Die Lehre von Kugelschnitten im Altertum, стр. 235 и сл.

„О коноидима и сфероидима", „Квадратура параболе"

60. Heiberg J. L. ZfMPh., XXV, (1880), стр. 58 и сл.

61. Zeuthen H. Die Lehre von Kugelschnitten im Altertum, стр. 416, 447, 408 и др.

„Ефод"

62. Schmidt Wilh. Archimedes Ephodikon. Bibliotheca Mathematica, B. I, стр. 13 и сл.; B. III, стр. 143 и сл.

63. Heiberg J. L. Eine neue Schrift des Archimedes. Hermes, B. XLII, 1907, стр. 235—297. Руски превод овог чланка в. № 121.

64. Heiberg J. L. und Zeuthen H. Eine neue Schrift des Archimedes. Uebersetzung und Kommentar. Bibliotheca Mathematica, 3 Folge, B. VII, 1907, стр. 321—363.

65. Heiberg J. L. Geometrical Solutions Derived from Mechanics. Chicago, 1909.

66. Reinach Th. Un traité de géometrie inédit d'Archimède. Revue générale de sciences pures et appliquées, 1907 (од 30 новембра и 15 децембра).

67. Heat T. L. The „Method" of Archimedes. Cambridge, 1912.

68. Arendt F. Bibliotheca Mathematica, 3 Folge, B. XIV, 1915, стр. 295 и сл.

69. Ruffini E. H. Il Metodo di Archimede e le origini dell'analisi infinitesimale nell'antichita. Roma, 1926.

70 Lambossy. Archimède... Le Traité de la méthode. Bulletin de la Société Fribourgeoise des sciences naturelles, 29, 1929, стр. 20—39.

„О спиралама"

71. Junge. Die Spirale des Archimedes. Zeitz, 1826.

72. Lehmann Fr. X. Die archimedische Spirale mit Rücksicht auf ihre Geschichte. Gymn. Programm, Freiburg, 1862.

73. Scherling Ch. Die archimedische Spirallinie. Gymn. - Programm, Lübeck, 1865.

74. Tannery. Bulletin des sciences mathématiques, 2 sér. VIII, 1, 1884, стр. 107 и сл.

75. Tannery P. Bulletin des sciences mathématiques, 3 sér. I, 1895, стр. 265—271.

„О телима која пливају". Писмо Хијерону (Хијеронова круна)

76. Thurot Ch. Recherches historique sur le principe d'Archiméde. Revue archéologique, 1869.

77. Gerland E. Zur Geschichte der Erfindung des Aräometers. Annalen der Physik und Chemie, N. F., B. I, 1877, стр. 150 и сл.

78. Heiberg J. L. Mélanges Graux. Paris, 1884, стр. 691 и сл.

79. Hultsch F. Litterarisches Centralblatt, 1884, стр. 851 и сл.

80. Bosmans H. Guillaume de Moerbecke et le traité des corps flottants d'Archimède. Revue des questions scientifiques, avril 1922.

81. Lambassy P. Archimède. Le traité des corps flottants. Bulletin de la Société Fribourgeoise des sciences naturalles, 29, 1929, стр. 20—39.

„Мерење круга"

82. Tannery P. Sur la mesure du cèrcle d'Archimède. Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 2 sér. I, стр. 226—253; IV, 1882, стр. 313—337.

83. Hultsch F. Die Näherungswerte irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes. Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1893, стр. 367—428.

84. Weissenborn Hermann. Die Berechnung des Kreisumfanges bei Archimedes und Pisano. Berliner Studien für classische Philologie, B. XIV, 3, 1894, стр. 32.

85. Hultsch F. Zur Kreismessung des Archimedes. ZfMPh., 1894, стр. 121—161.

86. Rudio Fr. Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung. Berlin, Teubner, 1906 (в. №№ 122, 125).

87. Hoppe Edm. Die zweite Methode des Archimedes zur Berechnung von π Archiv für Geschichte der Naturwissenschaften, 9, 1922, 104—107.

88. Czwalina Arthur. Berechnung von Quadratwurzeln bei den Griechen, Archiv für Geschichte der Mathematik, 10, 1927, стр. 334—335.

89. Vogel K. Näherungswerte des Archimedes für $\sqrt{}$ Jahresberichte der deutschen Mathematikervereinigung, 14, 5—8, 1932, стр. 152 и сл.

90. Müller C. Wie fand Archimedes die von ihm gegebenen Näherungsverte von 3. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik. B. 2, 1932, стр. 281—285.

91. Töplitz O. Исто, стр. 286—290.

92. Hofmann J. E. Ueber die Annäherung der Quadratwurzeln bei Archimedes und Heron. Jahresberichte der deutschen Mathematikervereinigung, 43, 1934, стр. 187—210.

„Псамит“

93. Rigaud Steph. P. On the Arenarius of Archimedes. Oxford, 1837.

94. Chasles, Michel. Eclaircissement sur le traité „De numero arenae“ d'Archimède. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 1842 (séance du 11 avril).

95. Hultsch F. ZfMPh., B. XXVII, 1882, стр. 58 и сл.

96. Czwalina A. Eine physikalische Präzisionsmessung des Archimedes. Archiv für Geschichte der Mathematik, 10, 1928, стр. 464—466.

„Задатак о воловима“

97. В. горе, № 18.

98. Hermann G. De Archimedis problemate bovino. Lipsiae, 1828.

99. Cantor M. ZfMPh., B. XXIV, 1879, стр. 169 и сл.

100. Amthor. ZfMPh. B. XXV, 1880, стр. 156 и сл.

101. Krumbiegel B. ZfMPh., B. XXV, 1880, стр. 121 и сл.

102. Tannery P. Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 2 sér. III, 1881, стр. 369 и сл.

103. Tannery P. Bulletin des sciences mathématiques, 2 sér., VIII, 1, 1884, стр. 107 и сл.

„Стомахион"

104. Oldham R. D. The loculus of Archimedes. Nature, 117, 1926. стр. 337. Види и № 19.

„Леме"

105. Heiberg I. L. Philologus, B. XLIII, 1887, стр. 483 и сл.

„Катоптрика"

106. Peyrard F. Le miroir ardent d'Archimède. Paris, 1807.

107. Rome A. Notes sur passages des catoptriques d'Archimède, conservés par Théon d'Alexandrie. Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 52, 1932, стр. 30—41 (Резиме у Isis-у, B. XIX, 1933, стр. 523).

108. Loria, Gino. Les miroirs ardents d'Archimède. Isis, 20, 1934, стр. 441.

„Књига кругова". Дело о седмоуглу"

109. Suter H. Bibliotheca Mathematica, 3 Folge, B. VII 1906/7 стр. 100.

110. Suther H.. Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise von Al-Biruni. Bibliotheca Mathematica, 3 Folge, B. XI, 1910/11, стр. 12—26, 39.

111. Schoy C. Graeco-Arabische Studien nach mathematischen Handschriften der Vizekönigl. Bibliothek zu Kairo, als Festgruss zum 79. Geburtstag des Herrn. Prof. J. L. Heiberg, Kopenhagen, dargestellt. Isis, B. VIII, 1926, стр. 21—40.

112. Schoy C. Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen... Al-Biruni, dargestellt nach Al-Qanun Al-Mas'udi. Hannover, 1927, стр. 74—84.

113. Tropfke J. Zur Geschichte der Mathematik. Siebeneckkonstruktion des Archimedes... Zeitschrift des mathematisch-naturwissensch. Unterrichts. 59, 1928, стр. 195 и сл.

114. Tropfke J. Archimedes und die Trigonometrie. Archiv zur Geschichte der Mathem., Naturwiss. und Technologie, B. X, 1926, стр. 423 и сл.

115. Miller G. A. Archimedes and trigonometry, 67, 1928, стр. 555, стр. 423 и сл.

116. Tropfke J. Die Siebeneckabhandlung des Archimedes. Osiris, B. I, 1936, стр. 636—651.

Машина κοχλίας

117. Jacono L. Notizie degli scavi, Roma, 1927, стр. 81—89, табл. IX (в. горе, стр. 67).

РЕГИСТАР

САДРЖАЈ

ЛУРЈЕ
АРХИМЕД

*

С руског превео
НИКОЛА ТОМИЧИЋ

Редактор
Б. М. ШЕВАРЉИЋ

Коректор
НАДЕЖДА САВИЋ

*

Штампано ћирилицом у 3000 примерака.
Штампање завршено 30. VI. 1952 године,
у граф. предузећу „Вук Караџић“,
погон „Просвета“, Београд
Ђуре Ђаковића 21