ГЛАС

XXI

КРАЉЕВСКА СРПСКА АКАДЕМИЈА

ГЛАС

XXI

ОДГОВОР НА НЕКОЛИКО ПИТАЊА ИЗ НАУКЕ

О

БЕСКОНАЧНО МАЛИМ КОЛИЧИНАМА

ОД

Дим. Нешића

ПРОФЕСОРА ВЕЛИКЕ ШКОЛЕ

У БЕОГРАДУ

У српској краљевској државној штампарији

1890

ОДГОВОР НА НЕКОЛИКО ПИТАЊА ИЗ НАУКЕ

о

БЕСКОНАЧНО МАЛИМ КОЛИЧИНАМА.

1. Лајбницова инфинитезимална метода оснива се на принципу, да се ∞ мале количине наспрам коначних, као и ∞ мале количине виших редова наспрам ∞ малих количина нижих редова могу и смеју занемарити. Тај принцип може се и овако исказати: две количине, којих количник тежи јединици, смеју се у инфинитезималним рачунима једна другом смењивати. Према томе онај, који се држи те методе, треба да је вазда у стању разазнати, ког су инфинитезималног реда оне количине, које се у његовом рачуну јављају, како би на тај начин знао, које количине у току рачуна он сме занемаривати или које количине он сме једну другом смењивати.

У овој расправи намеран сам да одредим инфинитезимални ред извесних количина, које се у теорији кривих линија често јављају. Сам начин одређивања са свим је елементаран, јер за његово разумевање довољни су први основи науке о ∞ малим количинама. Те основе ја ћу пре свега да изложим.

2. Две ∞ мале количине u и v каже се да су ∞ мале количине истог реда, кад при ∞-ом умаљавању

истих њин количник $\frac{u}{v}$ тежи одређеној и коначној граници. Ако тај количник тежи нули, онда се каже да је u ∞ мало наспрам v, а ако исти количник расте ∞, онда се каже, да је u ∞ велико наспрам v, или v ∞ мало наспрам u.

У рачунима увек се јављају више ∞ малих количина, које једна од друге зависе. Једна од њих сматра се као главна и зове се главна ∞ мала количина или ∞ мала количина првог реда.

Ако је x главна ∞ мала количина а u друга нека ∞ мала количина и ако је:

$$\lim \frac{u}{x^m} = a, \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

где је a одређена и коначна количина, а m ма какав цео или разломљен број, онда се u зове ∞ мала количина m-ог реда. Из обрасца (1) следује:

$$\frac{u}{x^m} = a + \alpha,$$

где α тежи нули, кад x тежи нули. Одавде следује:

$$u = x^m (a + \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

у ком је обрасцу исказан општи тип ∞ малих количина m-ог реда. Ако је $m = 1$, онда је:

$$u = x \; (a + \alpha)$$

дакле првог реда.

3. Ако су u и u' m-ог и n-ог реда, онда је

$$\frac{u}{u'} = \frac{x^m \; (a + \alpha)}{x^n \; (a' + \alpha')} = x^{m-n} \, \frac{a + \alpha}{a' + \alpha'} \quad \ldots\ldots (3)$$

Ако је сад $m > n$, онда ће кад x тежи нули и $\frac{u}{u'}$ тежити нули. Дакле је u ∞ мало наспрам u' и тако стоји:

Од две ∞ мале количине она, која је вишег реда, јесте ∞ мала наспрам друге.

Нека су u, u', u'' редом m-ог, n-ог, r-ог, реда и $m < n < r$. Онда је;

$$u + u' + u'' = x^m (a + \alpha) + x^n (a' + \alpha') + x^r (a'' + \alpha'').$$

Одавде следује:

$$\frac{u + u' + u''}{x^m} = (a + \alpha) + x^{n-m} \; (a' + \alpha') + x^{r-m} \; (a'' + \alpha'') \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Кад x тежи нули, леви количник тежи коначној граници a. Дакле:

Збир више ∞ малих количина јесте ∞ мала количина истог реда са оним сабирком, који је најнижег реда.

Нека су u и u' m-ог и n-ог реда. Из једначине

$$\frac{u \, u'}{x^{m+n}} = \frac{u}{x^m} \, \frac{u'}{x^n} \quad \ldots\ldots, (5)$$

види се, да леви количник тежи коначној граници, кад x тежи нули, јер услед претпоставке десни чиниоци теже коначним границама. Дакле:

Производ двеју ∞ малих количина m-ог и n-ог реда јесте $(m + n)$-ог реда.

Ова се теорема даје раширити и на производ од ма колико чинилаца.

Нека су u и u' m-ог и n-ог реда, и $m > n$. Из једначине:

$$\frac{u}{u'} = x^{m-n} \frac{a + \alpha}{a' + \alpha'} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

следује:

Да је количник двеју ∞ малих количина m-ог и n-ог реда $(m-n)$-ог реда.

Ако се место x изабере као главна ∞ мала количина друга нека y, која је са x истог реда, онда ће све остале количине бити наспрам y истог реда ког су биле наспрам x.

Нека је на пр. u m-ог реда наспрам x. Из једначине:

$$\frac{u}{y^m} = \frac{u}{x^m}\left(\frac{x}{y}\right)^m$$

види се, да леви количник тежи коначној граници, јер десни чиниоци теже услед претпоставке коначним границама. Дакле је u и наспрам y m-ог реда.

За ∞ велике количине важи слично ономе, што је казано за ∞ мале количине у N-ма 2 и 3.

4. Кад количник $\frac{u}{v}$ двеју променљивих u и v које могу бити ∞ мале, коначне или ∞ велике количине, тежи јединици, онда је њина разлика $u-v$ наспрам њих ∞ мала. И обратно ако је разлика

количина u и v наспрам једне од њих ∞ мала, онда је она ∞ мала и наспрам друге, и количник $\frac{u}{v}$ тежи јединици.

Јер ако је:

$$lim \frac{u}{v} = 1,$$

онда је:

$$\frac{u}{v} = 1 + \alpha$$

где α тежи нули. Одавде следује:

$$\frac{u-v}{v} = \alpha,$$

дакле је $u-v$ ∞ мало наспрам v. Даље је:

$$\frac{u-v}{u} = \frac{v}{u} \cdot \frac{u-v}{v} = \frac{v}{u} \cdot \alpha,$$

дакле је $u-v$ и наспрам u ∞ мало. Обратно ако је:

$$\frac{u-v}{v} = \alpha,$$

где α тежи нули, онда је:

$$\frac{u}{v} = 1 + \alpha \text{ и } lim. \frac{u}{v} = 1,$$

$$\text{и} \quad \frac{u-v}{u} = \frac{v}{u}\,\frac{u-v}{v} = \frac{v}{u} \cdot \alpha$$

5. Граници, којој тежи количник $\frac{u}{v}$ тежиће и количник $\frac{u'}{v'}$ ако је само

$$\lim \frac{u}{u'} = 1 \text{ и } \lim \frac{v}{v'} = 1 \quad . \; . \; . \; (7)$$

или што је свеједно, ако је само разлика бројилаца u и u' наспрам њих као и разлика именилаца v и v' наспрам њих ∞ мала,

Јер из идентичне једначине

$$\frac{u}{v} = \frac{u'}{v'} \cdot \frac{v'}{v} \cdot \frac{u}{u'}$$

следује:

$$\lim \frac{u}{v} = \lim \frac{u'}{v'} \lim \frac{v'}{v} \lim \frac{u}{u'} \cdot$$

Дакле је услед предпоставке под (7)

$$\lim \frac{u}{v} = \lim \frac{u'}{v'} \cdot$$

6. Граница, којој тежи збир количина једног и истог знака: $u_1, u_2, u_3, \ldots u_m$, кад њин број расте ∞, а оне се саме у исто доба ∞ умаљавају, истоветна је са границом, којој тежи збир количина $v_1, v_2, v_3 \ldots v_m$, ако је само:

$$\lim \frac{u_1}{v_1} = 1, \; \lim \frac{u_2}{v_2} = 1, \; . \; . \; . \; . \lim \frac{u_m}{v_m} = 1 \; \cdot (8)$$

или што је свеједно, ако је само разлика између сваке количине првог и одговарајуће јој количине другог низа наспрам њих ∞ мала.

Јер вредност разломка:

$$\frac{u_1 + u_2 + u_3 + \cdot \cdot \cdot + u_m}{v_1 + v_2 + v_3 + \cdot \cdot \cdot + v_m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

налази се вазда између најмањег и највећег од ових разломака:

$$\frac{u_1}{v_1}, \; \frac{u_2}{v_2}, \; \frac{u_3}{v_3}, \; . \; . \; . \; \frac{u_m}{v_m} \cdot$$

Пошто ови разломци услед предпоставке под (8) теже јединици, то је онда то исто случај и са разломком под (9). Дакле је:

$$\lim \frac{u_1 + u_2 + u_3 + \cdot \cdot \cdot + u_m}{v_1 + v_2 + v_3 + \cdot \cdot \cdot + v_m} = 1$$

или:

$$\lim (u_1 + u_2 + u_3 + \cdot \cdot \cdot + u_m) =$$
$$\lim (v_1 + v_2 + v_3 + \cdot \cdot \cdot + v_m)$$

Ако чланови збира $u_1 + u_2 + u_3 + \cdot \cdot \cdot + u_m$ неби били сви једног и истог знака. онда би тај збир требало разложити на више делимичних збирова тако, да су чланови сваког појединог збира једног и истог знака. За тим би требало доказати теорему за сваки делимични збир посебице, одакле би после лако следовало, да она вреди и за целокупни збир.

7. Теореме у N-ма 5 и 6. служе као основа инфинитезималном рачуну. На основу прве теореме смемо, при тражењу границе количнику двеју ∞ малих количина. одузети или додати бројиоцу и имениоцу количине. које су наспрам њих ∞ мале. Или што је свеједно смемо сменити бројиоца и имениоца двема новим количинама, ако само количници између првих количина и оних, којима их смењујемо, теже

јединици или другаче: ако су само разлике између првих количина — бројилац и именилац — и оних којима их смењујемо, наспрам њих ∞ мале.

На основу теореме *N*-ре 6. смемо, при тражењу границе збиру ∞ многих и ∞ малих количина, променити поједине сабирке за количине, које су наспрам њих ∞ мале. Или што је свеједно смемо поједине сабирке сменити другим количинама, ако само количник између сваког сабирка и количине, којом га смењујемо, тежи јединици, или још другаче ако је само разлика између сваког сабирка и количине којом га смењујемо, наспрам њих ∞ мала.

8 Из тригонометрије познато је, да је, кад лук x тежи нули,

$$\lim \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim \frac{tg\, x}{x} = 1.$$

Дакле су лук, његов синус и његова тангента истог реда (*N*-ра 2) дакле првог, ако је лук првог реда. Разлика између две и две од тих количина наспрам њих је дакле ∞ мала (*N*-ра 4.) и оне се у инфинитезималним рачунима смеју једна другом смењивати.

Пошто је $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{1}{2}x$, то је разлика између јединице и косинуса ∞ малог лука другог реда, ако је лук првог, четвртог ако је лук другог и т. д. Према томе и разлика између јединице и синуса лука, који тежи $\frac{1}{2}\pi$, јесте ∞ мала количина другог реда, ако је комплеменат лука првог реда. Даље разлика косинуса двају лукова — углова — првог реда као и разлика синуса двају лукова,

који теже $\frac{1}{2}\pi$ и чији су комплементи првог реда, јесте бар другог реда. Из обрасца:

$$tg\, x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = \frac{\sin x\,(1 - \cos x)}{\cos x} = \frac{2 \sin x \cdot \sin^2 \frac{1}{2}x}{\cos x}$$

види се да је разлика између тангенте и синуса трећег реда, ако је т. ј. лук првог, шестог ако је лук другог реда и т. д.

Пошто се лук x налази између $\sin x$ и $tg\, x$ и пошто је:

$$tg\, x - \sin x = (tg\, x - x) + (x - \sin x),$$

то је јасно, да бар једна од десних разлика мора бити истог реда са левом разликом — дакле трећег ако је x првог реда — а друга истог или можда вишег реда. Но лако је помоћу тригонометријских редова за $\sin x$ и $tg\, x$ доказати, да су обе те разлике десно тачно трећег реда, ако је т. ј. лук x првог реда.

Али то се исто може лако доказати и без припомоћи поменутих редова на начин који иде. Тако је најпре

$$\sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}, \quad 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} < x \cos \frac{x}{2}$$

$$\sin x < x \cos \frac{x}{2}, \quad x - \sin x > 2\, x \sin^2 \frac{x}{4}\,.$$

Даље је.

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \, tg \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2},$$

или по смени количине $tg \frac{x}{2}$ мањом $\frac{x}{2}$:

$$\sin x > x \cos^2 \frac{x}{2}, \quad \sin x > x \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right)$$

$$\text{и } x - \sin x < x \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Дакле је најзад:

$$2 x \sin^2 \frac{x}{4} < x - \sin x < x \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Одавде се види, да је разлика између лука и његовог синуса доиста трећег реда, ако је т. ј. лук x првог.

Кад у обрасцу:

$$tg \, x = \frac{2 \, tg \frac{1}{2} x}{1 - tg^2 \frac{x}{2}}$$

сменимо $tg \frac{x}{2}$ мањом количином $\frac{x}{2}$, бројилац постаје мањи а именилац већи, и за то је:

$$tg \, x > \frac{x}{1 - \frac{x^2}{4}} \text{ и } tg \, x - x > \frac{\frac{1}{4} x^3}{1 - \frac{1}{4} x^2}.$$

Како је $tg \, x - x < tg \, x - \sin x$, то је:

$$\frac{x^3}{4 - x^2} < tg \, x - x < tg \, x - \sin x.$$

Дакле је $tg \, x - x$ трећег реда.

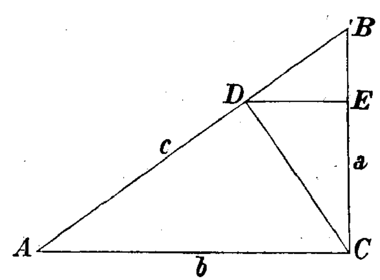
Пошто је разлика између лука и његовог синуса трећег реда, то је онда то исто случај и са разликом између лука и његове тетиве.

9. Ако су a, b и c стране, а A, B и C угли једног троугла, онда је:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Одавде се види, да кад су угли A, B и C коначни, стране a, b и c морају бити у исти мах или коначне или ∞ мале истог реда, или пак ∞ велике истог реда. Али другачије стоји ствар кад у троуглу има и ∞ малих углова.

10. Узмимо најпре да је дат правоугли троугао $A\,B\,C$, сл. 1. где је хипотенуза c главна ∞ мала количина и угао A првог реда. Пошто је:



Сл. 1.

$$\frac{b}{c} = \cos A \text{ и } \lim \frac{b}{c} = 1,$$

то је катета b првог реда.

Пошто је даље

$$a = c \cdot \sin A,$$

то је катета a, што је према ∞ малом углу A, другог реда, јер је $\sin A$ истог реда са A (N-ра 8).

Обратно ако је хипотенуза c првог а катета a другог реда, супротни угао A мора бити првог реда, јер је:

$$\sin A = \frac{a}{c} \cdot$$

Ако из темена C правоуглог троугла спустимо управну CD на хипотенузу, биће

$$CD = b. \sin A, \; BD = a. \cos B = a. \sin A;$$

дакле је CD другог а BD трећег реда. Ако из D спустимо управну DE на катету a биће:

$$DE = BD. \cos A, \quad BE = BD. \sin A;$$

дакле је DE трећег а BE четвртог реда и т. д.

Ако је угао A првог реда, а хипотенуза c коначна, онда из

$$b = c. \cos A, \quad a = c \sin A$$

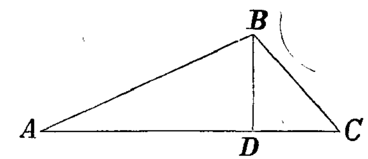
следује, да је катета b коначна а катета a, што је према ∞ малом углу A, првог реда. Из

$$c - b = c\,(1 - \cos A) = 2. c. \sin^2 \tfrac{1}{2} A$$

види се, да је разлика страна, које захватају ∞ мали угао, трећег реда, ако је хипотенуза c првог реда; а другог реда, ако је хипотенуза c коначна. Дакле:

Кад пројектујемо једну коначну праву у другу праву, која са првом гради угао првог реда, разлика између прве праве и њене пројекције јесте другог реда.

11. Узмимо сад да је дат један косоугли троугао, сл. 2 у коме је страна BC ∞ мала наспрам AB. Права BD стоји управно на AC. Пошто је услед предпоставке $\frac{BC}{AB}$ ∞ мало то је онда то исто случај и са:



Сл. 2.

$$\frac{BD}{AB} = \sin A$$

јер је $BD < BC$. Дакле је $\sin A$ па с' тога и сам угао A ∞ мали. Пошто је разлика страна AC и AB мања од стране BC, а ова је опет ∞ мала наспрам AB, то је онда разлика страна AC и AB такође ∞ мала наспрам AB, а услед тога и наспрам AC и количник $\frac{AC}{AB}$ тежи јединици (N 4) Из обрасца:

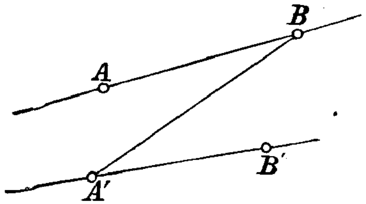
$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sin B}{\sin C}$$

види се, да и количник синуса углова, што су наспрам AC и AB мора тежити јединици. Дакле:

Кад је једна страна каквог троугла ∞ мала наспрам једне од осталих двеју, она је ∞ мала и наспрам друге и угао наспрам ње јесте ∞ мали. Осим тога количник тих осталих двеју страна као и количник синуса углова наспрам њих тежи јединици.

Пошто је угао A ∞ мали, то онда стране AB и AC морају тежити истом граничном положају, па било да је теме A непокретно или пак покретно.

12. Ако се при кретању праве AB (сл 3) тачке A и B једна другој ∞ приближавају и ако су притом одстојања тачака A' и B' од тачака A и B наспрам AB ∞ мала, онда ће права $A'B'$ тежити истом граничном положају, коме тежи права AB.

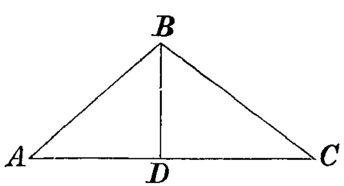


Сл, 3

Јер пошто је AA' наспрам AB ∞ мало, то је (N-ра 11) угао ABA' ∞ мали, и осим тога количник дужина $A'B$ и AB тежи јединици. Но онда, пошто услед предпоставке $\frac{BB'}{AB}$ тежи нули, мора тежити нули и $\frac{BB'}{A'B}$. Угао $BA'B'$ тежи дакле нули па дакле и угао правих AB и $A'B'$, јер је тај угао $= BA'B' - ABA'$. Праве AB и $A'B'$ теже дакле истом граничном положају.

13. Ако су у троуглу ABC (сл. 4). угли A и C првог реда; онда из:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \quad \cdots \quad (1)$$



Сл. 4

следује да су стране AB, BC и AC једног и истог реда. Даље из $BD = AD.\ tg\,A = CD\ tg\,C$

следује:

$$\lim \frac{AD}{CD} = \lim \frac{tg\ C}{tg\ A} = \lim \frac{C}{A}\,.$$

Дакле комади AD и CD, на које тачка D дели AC теже да постану изврнуто сразмерни налеглим углима A и C. Из:

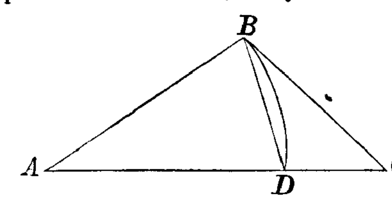
$$\left.\begin{aligned} AB - AD &= 2\ AB \sin^2 \tfrac{1}{2} A \\ BC - CD &= 2\ BC \sin^2 \tfrac{1}{2} C \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (2)$$

следује:

$$(AB + BC) - AC = 2\left\{AB \sin^2 \tfrac{1}{2} A + BC \sin^2 \tfrac{1}{2} C\right\} \quad \cdot\ \cdot \quad (3)$$

Ако је једна страна на пр. AC коначна, онда морају и остале две бити коначне, јер су угли A и C првог реда, па дакле и суплеменат угла B. Из последње једначине види се, да је тада разлика између збира страна, што су наспрам ∞ малих углова, и треће стране другог реда. Ако је AC првог реда а услед тога и остале две, онда је поменута разлика трећег реда.

14. Ако је најзад у троуглу ABC (сл. 5.) угао A првог реда као и стране AB и AC, које га захватају, онда збир осталих двају углова тежи π. Ако количник страна AB и AC па дакле и количник синуса супротних углова C и B тежи граници различној од јединице, онда један од тих углова мора тежити нули а други π. Јер кад



Сл. 5.

то неби било, него би ти угли тежили другим од o и π различним границама, онда пошто су те границе суплементи и по томе њини синуси једнаки. количник синуса углова B и C тежио би јединици. А то је противно претпоставци.

Ако ли количник страна AB и AC тежи јединици па дакле и количник синуса супротних углова C и B, онда да би смо знали, шта ће бити са углима B и C, треба посебице разматрати ова три случаја:

a. Нека су AB и AC првог а њина разлика другог реда. Пренесимо на AC комад $AD=AB$, па ће $CD = AC - AB$ бити другог реда. Због

$$BD = 2\, AB \sin \tfrac{1}{2} A$$

BD је другог реда. Из

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 - 2\, BD.\, CD \cos BDC \cdot (1)$$

види се, да је и BC другог реда. Јер кад A тежи нули, сечица BD тежи дирки, која је у D на кружни лук BD повучена, као својој граници. Дакле угао BDC тежи $\frac{\pi}{2}$ а његов косинус нули. Сад кад поделимо последњу једначину са производом $BD.\, CD$, који је четвртог реда, добићемо:

$$\frac{BC^2}{BD.CD} = \frac{BD}{CD} + \frac{CD}{BD} - 2 \cos BDC \cdot \cdot (2)$$

Прва два члана десно теже коначним границама, јер су BD и CD истог другог реда, а трећи тежи нули. Дакле је $\overline{BC}^2$ четвртог а BC другог реда.

тежи нули. Дакле је $\overline{BC}^2$ четвртог а BC другог реда.
Што се тиче углова DBC и C, границе којима они теже зависе од тога, у каквој размери стоје супротне стране према страни BC.

b. Ако су опет AB и AC првог а њина разлика између првог и другог реда, онда је BD опет другог реда. Али је сада $CD=AC-AB$ нижег реда од другог. Страна BC као највећа у троуглу BDC јесте истог реда са CD и њин количник тежи јединици (N 11.) јер разлика тих двеју страна јесте наспрам њих ∞ мала за то, што је та разлика мања од треће стране BD, која је другог реда. То се у осталом дознаје и из једначине (1).

Из обрасца:

$$\sin C = \frac{BD \sin BDC}{BC}$$

види се да угао C тежи нули, услед чега угао DBC мора тежити $\frac{1}{2}\pi$ а угао $B=ABC$ граници π.

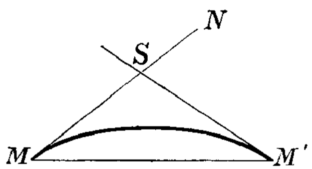
c. Ако су напослетку AB и AC првог реда, а њина разлика CD вишег од другог реда, онда из

$$\sin DBC = \frac{CD \sin BDC}{BC}$$

следује, да угао DBC тежи нули. Но онда угао C тежи $\frac{1}{2}\pi$ јер тој граници тежи угао BDC. Исто тако и угао $B=ABC$, тежи $\frac{1}{2}\pi$.

Ако би угао A био m-ог реда, требало би при горњем умовању сменити, 2 са $m+1$. Осим тога треба као резултат горњих умовања напоменути истину: да кад год количник двеју страна, које захватају ∞ мали угао, тежи јединици, трећа је страна ∞ мала наспрам њих за ма колико m.

15. Ми ћемо од сада увек предпостављати, да је ∞ мали лук MM' (сл. 6) свуда испупчен. Из саме дефиниције диркине следује, да су угли $SMM'=M$, $SM'M=M'$ које тетива гради са диркама повученим кроз крајеве лука ∞ мали. Услед тога је и спољни угао $NSM=M+M'$ дирака, који се зове додирни угао лука, ∞ мали. У осталом доцније ће се непосредно доказати, да је додирни угао ∞ малог лука у опште узев истог реда с' њиме и потоме ∞ мали, одакле ће опет следовати, да су и угли M и M' такође ∞ мали.



Сл. 6.

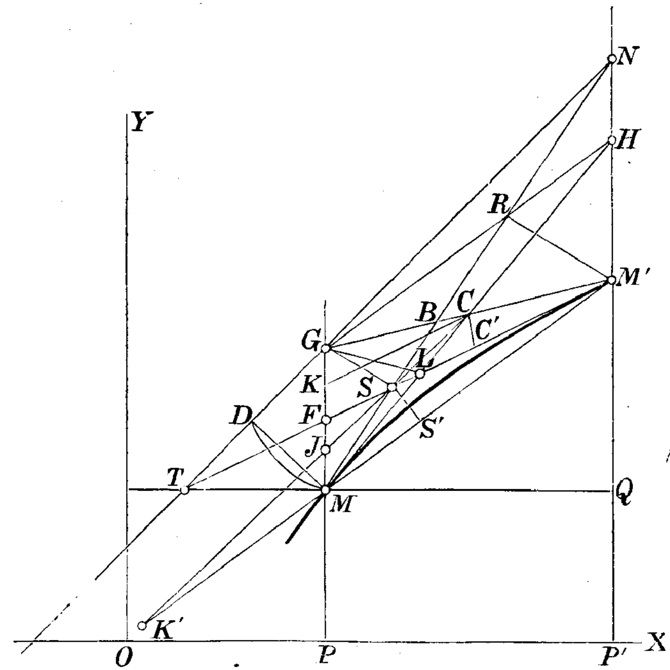
Као познату ствар напомињемо (тригон. N 47.) да количници:

1. Између збира $MS+M'S$ дирака и тетиве MM'.
2. Између лука и тетиве, и
3. Између збира дирака и лука, теже јединици.

Одатле следује да су све те три количине истог реда, и да је разлика између ма које две наспрам њих ∞ мала.

16. Нека је (сл. 7) MM' ∞ мали лук, MS и $M'S$ дирке, повучене кроз његове крајеве и S пресек дирака. Ми ћемо узети, што је слободно да при ∞-ом умањавању лука, угао M остаје вазда већи од угла M'. То је случај онда, кад кривина лука од M ка M' вазда опада.

Повуцимо кроз M и M' ординате MP и $M'P'$ и нека је N пресек продужене дирке MS и продужене ординате $M'P'$. Повуцимо кроз M паралелну са x-ом осом, и нека су T и Q њени пресеци са продуженом



Сл. 7.

дирком $M'S$ и ординатом $M'P'$. Вежимо T са N и нека су G и F пресеци праве NT и продужене дирке $M'S$ са продуженом ординатом MP. Повуцимо GH паралелно са тетивом MM' и нека је H пресек праве GH и продужене ординате $M'P'$. Вежимо за тим M са H и M' са G и нека су L и C пресеци праве MH, а S и B пресеци праве MN са правима $M'T$ и $M'G$. Повуцимо даље GS, GL и CS и продужимо CS до пресека J и K' са MF и продуженом тетивом MM'. Спустимо најзад $M'R$ управно на MN. Угле на слици означимо овако: $NMM'=M$, $MM'T=M'$, $M'TN=\alpha$; $MNT=\beta$, $MNM'=GMN=N$.

Пре свега напомињемо, да је $\alpha+\beta=M+M'$ и да x-*оси* и y-*оси* можемо дати такав положај, да је угао NMQ већи од угла $MNM'=N$.

Ми ћемо сматрати лук MM' као ∞ малу количину првог реда, услед чега је то исто случај и са његовом тетивом. Из троугла $MM'Q$ (сл. 7.) следује:

$$(1)\quad \frac{MQ}{MM'}=\cos M'MQ,\qquad (2)\quad \frac{M'Q}{MM'}=\sin M'MQ,$$

а из троугла NMQ:

$$(3)\quad \frac{NQ}{MQ}=tg\ NMQ,\qquad (4)\quad \frac{MN}{MQ}=\frac{1}{\cos NMQ}$$

Пошто се, кад лук тежи нули, угао $NMQ=\frac{1}{2}\pi-N$ не мења, и пошто угао $M'MQ$ остаје коначан, јер тежи углу NMQ, то из ових образаца следује, да су MQ, $M'Q$, NQ и MN првог реда. Пошто су тетива и лук MM' првог реда, то је онда то исто случај, и са збиром $MS+M'S$ дирака (N 15).

У троуглу $M'RN$ угли остају коначни, и не мењају се, и за то су (N 9) супротне стране $M'R$, NR и $M'N$ истог реда и то вишег од првог, јер је:

$$M'R=MM'\ \sin M.$$

вишег реда од првог.

17 Што је год додирни угао NSM' лука MM' већи наспрам лука, т. ј. што је год већи количник:

$$\frac{NSM'}{\text{лук } MM'},$$

тим је већа и кривина лука MM'. Граница којој тежи тај количник, кад лук MM' тежи нули, зове се *кривина линије у самој тачци* M. О том количнику може се претпоставити:

1. Бројилац је истог реда, са имениоцем дакле првог и количник тежи коначној граници.

2. Бројилац је вишег реда од имениоца и количник тежи нули. и

3. Бројилац је нижег реда од имениоца и количник је ∞ велики.

Ми ћемо узети, да стоји прва предпоставка, и гледаћемо да докажемо, да су угли $SMM'=M$ и $SM'M=M'$ истог реда са углом $NSM'=M+M'$ дакле првог, и да осим тога количник тих углова тежи јединици.

Пре свега јасно је, да бар један од углова M и M' мора бити првог реда, јер је њин збир $M+M'=NSM'$ првог реда. Према томе је угао $M>M'$ првог реда. Због $M>M'$ такође је и $M'S>MS$. Из обрасца:

$$M'S=\frac{MM'\ \sin M}{\sin\ (M+M')}$$

види се, да је $M'S$ првог реда. А из образаца:

$$M'N=\frac{M'S\sin\ (M+M')}{\sin\ N},\quad MT=\frac{MS\ \sin\ (M+M')}{\cos\ (N+\alpha+\beta)}$$

види се да је $M'N > MT$. Јер угао N мањи је од $\frac{\pi}{4}$ и за то је $\cos N > \sin N$. Али како је разлика између $\cos N$ и $\sin N$ коначна, а између $\cos N$ и $\cos(N+\alpha+\beta)$ ∞ мала, то је и $\cos(N+\alpha+\beta) > \sin N$. У осталом је $M'S > MS$. Из образаца:

$$\overline{MN}^2 = \overline{MM'}^2 + \overline{M'N}^2 + 2\ MM'\ M'N \cos(N+M)$$

$$\overline{M'T}^2 = \overline{MM'}^2 + \overline{MT}^2 + 2\ MM'.\ MT \sin(N+M)$$

види се опет, да је $MN > M'T$. Али како је $MS < M'S$, то је онда

$$MN - MS > M'T - M'S \text{ или } NS > ST$$

Одатле опет следује, да је $\alpha > \beta$, и за то је α првог реда. Како је $\alpha+\beta = M+M'$ и $\alpha > \beta$ као и $M > M'$, то је онда $\alpha > M'$ и $M > \beta$.

Из троуглова MNG и $MM'N$ следује:

$$MG = \frac{MN \sin\beta}{\sin(N+\beta)}, \qquad M'N = \frac{MN \sin M}{\sin(N+M)}$$

а одавде:

$$M'N - MG = MN \left\{ \frac{\sin M}{\sin(N+M)} - \frac{\sin\beta}{\sin(N+\beta)} \right\}$$

или после простог свођаја:

$$M'N - MG = \frac{MN \sin N \sin(M-\beta)}{\sin(N+M) \sin(N+\beta)}.$$

Дакле је $M'N > MG$. Најзад из образаца:

$$NG = \frac{MN \sin N}{\sin(N+\beta)}, \qquad MM' = \frac{MN \sin N}{\sin(N+M)}$$

види се, да је $NG > MM'$. Као што се из свега овога види, пресек правих NT и MM′ лежи на оној страни, како је на слици назначено. Из горњих образаца за M′N и MT види се, да је M′N другог а MT бар другог реда. У троуглима MGT и MFT сви су угли коначни и због тога су (N. 9), FT, GT, MF и MG истог реда са MT, дакле бар другог.

У троуглу MM′G страна MG јесте ∞ мала наспрам MM′. На основу N. 11 угао MM′G јесте ∞ мали и количник страна MM′ и M′G тежи јединици. M′G је дакле првог реда. Пошто угао MM′G тежи нули а $GMM' = N+M$ граници N, то угао MGM′ тежи граници $\pi - N$. На основу N. 11. количник између ма које две од дужина $MM' = GH$, MH, MN, M′G, M′F, M′T, NG и NT тежи такође јединици. Све су те дужине дакле првог реда. Половине дијагонала M′G и MH у паралелограму MM′HG такође су првог реда, и њин количник тежи јединици.

Из троуглова M′NM и M′NT следује:

$$\frac{MN}{M'N} = \frac{\sin(N+M)}{\sin M}, \qquad \frac{NT}{M'N} = \frac{\sin(N+\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$$

одакле с' обзиром на $\alpha+\beta = M+M'$:

$$\frac{\sin M}{\sin\alpha} = \frac{NT \sin(N+M)}{MN \sin(N+M+M')}.$$

Дакле количник углова M и α тежи јединици и α је дакле првог реда, што већ знамо.

Ако из N са NM као полупречником опишемо лук MD између кракова NM и NT и повучемо тетиву MD. добијамо троугао MTD. Пошто су сви угли тога троугла коначни, то су онда и његове стране једног и истог реда. Дакле је TD т. ј. разлика дужина NT и NM истог реда са MT, дакле барем другог. То се у осталом дознаје и из троугла MNT и помоћу синусног правила. Из обрасца:

$$\sin \mathrm{M} - \sin \alpha = \frac{\sin \alpha \left\{ \mathrm{NT} \sin (\mathrm{N}+\mathrm{M}) - \mathrm{MN} \sin (\mathrm{N}+\mathrm{M}+\mathrm{M}') \right\}}{\mathrm{MN}. \sin (\mathrm{N}+\mathrm{M}+\mathrm{M}')}$$

дознаје се сада лако, да је разлика углова M и α барем другог реда. Због $\beta - \mathrm{M}' = \mathrm{M} - \alpha$ и разлика углова β и M' јесте барем другог реда.

18. Из троугла FGT следује:

$$\mathrm{FG} = \frac{\mathrm{FT} \sin \alpha}{\sin (\mathrm{N}+\beta)}$$

Одавде се види, да је FG за јединицу вишег реда од FT, па дакле и од TG, MG, MT и MF. Из троугла M'FG следује:

$$\frac{\mathrm{FG}}{\sin \mathrm{FM'G}} = \frac{\mathrm{M'G}}{\sin (\mathrm{N}+\mathrm{M}+\mathrm{M}')}$$

Одавде се види, да је угао FM'G за јединицу нижег реда од FG, дакле бар другог. Исто тако из троугла BM'S дознаје се, да је M'B првог реда, да количник између M'B и M'S тежи јединици, и нај-

зад да је BS истог реда са углом FM'G дакле бар другог.

Кад повучемо CK паралелно са M'F и продужимо до пресека са MG, онда је $\mathrm{FK}=\mathrm{GK}=\frac{1}{2}\mathrm{FG}$ за јединицу вишег реда од MG и MF. И сад из обрасца:

$$\mathrm{ML} = \frac{\mathrm{MC.MF}}{\mathrm{MK}}$$

види се, да је ML првог реда. А из обрасца:

$$\mathrm{CL} = \frac{\mathrm{ML.FK}}{\mathrm{MF}}$$

види се опет, да је CL другог реда, услед чега количник дужина M'C и M'L мора тежити јединици. Пошто смо горе видели, да и количник полудијагонала M'C и MC тежи јединици, то онда дакле и количник дужина MC и M'L тежи јединици. Али како је MC—ML=LC другог реда, то онда и количник дужина ML и M'L тежи јединици (N. 7.) па дакле и количник супротних углова у троуглу MLM'. Ти су дакле угли истог и то првог реда, као што ћемо мало ниже видети.

Кад се из M' као средишта са M'C као полупречником опише лук између кракова CM' и LM' и повуче тетива тога лука, која је бар трећег реда, онда се дознаје лако, да је разлика M'L—M'C другог реда. Из троугла GMC дознаје се опет да је разлика MC—GC=MC—M'C бар другог реда. Према томе је M'L—MC=M'L—ML—LC бар другог реда, па дакле и M'L—ML, јер је LC другог реда.

У троуглу MFL MF јесте ∞ мало наспрам ML и за то количник између FL и ML тежи јединици (N 11). Исто тако у троуглу FGL FG јесте ∞ мало наспрам FL и за то количник између FL и GL тежи јединици. На тај начин дужине M'C=GC, M′L, ML, FL и GL јесу све првог реда и количник између ма које две тежи јединици. Пошто дакле количник дужина, M′L и GL тежи јединици, то је онда то исто случај и са синусима супротних углова код G и M′ у троуглу M′GL. Пошто је угао LGM′ ∞ мали, јер је то случај са спољним углом FLG (N. 11.) то је онда угао LGM′ истог реда са углом LM′G, дакле бар другог.

19. Из троугла MFS следује:

$$\frac{MF}{MS} = \frac{\sin\,(M+M')}{\sin\,(N+\alpha+\beta)}; \qquad \frac{MF}{FS} = \frac{\sin\,(M+M')}{\sin\,N};$$

$$\frac{MS}{FS} + \frac{\sin\,(N+\alpha+\beta)}{\sin\,N}.$$

Дакле је MF, а услед тога и MG за јединицу вишег реда од MS и FS и количник последњих двеју дужина тежи јединици.

Пошто је разлика страна MS и GS у троуглу MGS мања од стране MG, а ова ∞ је мала наспрам MS, то је онда и разлика страна MS и GS ∞ мала наспрам MS, па дакле (N. 4.) и наспрам GS. Према томе је GS истог реда са MS па дакле и са FS и количник ма које две од тих трију дужина тежи јединици.

Пошто је MG за јединицу вишег реда од MS и FS, па дакле и од GS, а FG опет за јединицу вишег

реда од MF и MG (N. 18), то је онда FG за две јединице вишег реда од MS, FS и GS. Из обрасца:

$$\sin\,FSG = \frac{FG\,\sin\,GFS}{GS}$$

види се, да је угао FSG другог реда, док су међутим угли GFS и FGS коначни, јер угао GFS=N$+\alpha+\beta$ тежи коначној граници N, а други FGS коначној граници $\pi-$N.

Из троугла M′GS, где су M′G и M′S првог реда, следује:

$$\sin\,M'GS = \frac{M'S\,\sin\,FSG}{M'G},$$

одакле се види, да је и угао M′GS другог реда.

Угли GBM и GSM јесу првог реда. Пошто је њина разлика, то јест угао M′GS другог реда, то онда њин количник, па дакле и количник њиних синуса тежи јединици. Услед тога и количник страна GS и GB у троуглу GBS мора тежити јединици. Из обрасца:

$$\frac{BS}{GS} = \frac{\sin\,M'GS}{\sin\,GBS}$$

види се, да је BS за јединицу вишег реда од GS па дакле и од GB. Најзад помоћу троугла MBG дознаје се лако, да и количник дужина GB и MB такође тежи јединици и да је MG за јединицу вишег реда од MB и GB.

Из досадањега види се дакле, да су дужине:

MS, FS, GS, GB и MB све једног и истог реда, и да количник између ма које две тежи јединици.

Из троуглова MFM′ и GFM′ следује:

$$\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{M'F}} = \frac{\sin \mathrm{M'}}{\sin \mathrm{FMM'}} \qquad \frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{M'F}} = \frac{\sin \mathrm{FM'G}}{\sin \mathrm{FGM'}}$$

одакле:

$$\frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{MF}} = \frac{\sin \mathrm{FM'G}}{\sin \mathrm{M'}} \cdot \frac{\sin \mathrm{FMM'}}{\sin \mathrm{FGM'}} .$$

Одавде се види, да је угао, FM′G за јединицу вишег реда од угла M′. Но како је угао CSM′=CK′M′+M′, а како угао CK′M′ неможе очевидно бити нижег реда од угла CMM′ па дакле ни од M′, то је онда угао FM′G за јединицу вишег реда и од угла CSM′, па дакле и од спољнег угла GCS.

Из троугла CSM′ следује сада:

$$\mathrm{CS} = \frac{\mathrm{M'C} \sin \mathrm{FM'G}}{\sin \mathrm{CSM'}} .$$

Дакле смо доказали, да је CS другог реда. Ако из C спустимо CC′ управно на M′F, онда из правоуглих троуглова CSC′ и CLC′ дознаје се, да су SC′ и LC′ другог реда, услед чега је и SL барем другог реда.

Пошто је разлика дужина ML и MS мања од SL, дакле барем другог реда то је онда (N. 4) MS такође првог реда и количник између MS и ML тежи јединици. Из троугла MSL а помоћу синусног правила дознаје се сада лако, да је угао SML бар другог а угао SLM првог реда Услед тога су првог реда и угли LMM′ и LM′M=M′, као што смо то у (N. 18) наговестили. Првог су реда очевидно и угли GCS, CSM′, CLM′ и GCL. Но онда из обрасца:

$$\sin \mathrm{FM'G} = \frac{\mathrm{CL} \sin \mathrm{CLM'}}{\mathrm{M'C}}$$

следује, да је угао FM′G другог реда. Помоћу троуглова MM′G, FM′G, MTG, FTG, FTM и BSG лако се сада дознаје, да су MG, MF, MT, FT, GT и BS другог а FG трећег реда.

Разлика дужина M′S и M′L јесте једнака SL, дакле барем другог реда. Ако разлику дужина ML и MS, која је мања од SL, дакле такође барем другог реда, означимо са ε, то онда сабирањем једначина:

$$\mathrm{M'S} - \mathrm{M'L} = \mathrm{SL}, \qquad \mathrm{ML} - \mathrm{MS} = \varepsilon$$

добијамо:

$$\mathrm{M'S} - \mathrm{M'L} + \mathrm{ML} - \mathrm{MS} = \mathrm{SL} + \varepsilon$$

или:

$$\mathrm{M'S} - \mathrm{MS} = \mathrm{M'L} - \mathrm{ML} + \mathrm{SL} + \varepsilon .$$

У N-ри 18. ми смо доказали, да је разлика M′L—ML барем другог реда. Дакле је услед последње једначине и разлика M′S—MS бар другог реда. Према томе количник између MS и M′S тежи јединици. Из обрасца:

$$\frac{\sin \mathrm{M}}{\sin \mathrm{M'}} = \frac{\mathrm{M'S}}{\mathrm{MS}}$$

види се, да количник углова M и M′ тежи јединици.

Из обрасца:

$$\frac{\sin M - \sin M'}{\sin M'} = \frac{M'S - MS}{MS}$$

види се, да је и разлика углова M и M' такође бар другог реда. Но у N-ма 20 и 21. доказаћемо, да је разлика углова M и M' па дакле и разлика страна M'S и MS тачно другог реда.

20. Из слике 7) видимо, да је:

$$M = NMQ - M'MQ, \qquad M' = M'MQ - M'TQ.$$

Одавде следује:

$$tg\, M = \frac{tg\, NMQ - tg\, M'MQ}{1 + tg\, NMQ.\ tg\, M'MQ}$$

$$tg\, M' = \frac{tg\, M'MQ - tg\, M'TQ}{1 + tg\, M'MQ.\ tg\, M'TQ}.$$

Али како је:

$$tg\, NMQ = \frac{NQ}{MQ}, \quad tg\, M'MQ = \frac{M'Q}{MQ}, \quad tg\, M'TQ = \frac{M'Q}{TQ},$$

то је онда:

$$tg\, M = \frac{\frac{NQ}{MQ} - \frac{M'Q}{MQ}}{1 + \frac{NQ.\ M'Q}{MQ^2}} = \frac{MQ\ (NQ - M'Q)}{MQ^2 + NQ.\ M'Q}$$

$$tg\, M' = \frac{\frac{M'Q}{MQ} - \frac{M'Q}{TQ}}{1 + \frac{M'Q^2}{MQ.\ TQ}} = \frac{M'Q\ (TQ - MQ)}{M'Q^2 + MQ.\ TQ}.$$

Одавде због:

$$NQ = M'N + M'Q, \quad TQ = MT + MQ, \quad \overline{MM'}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{M'Q}^2$$

добијамо:

$$tg\, M = \frac{MQ.\ M'N}{MM'^2 + M'Q.\ M'N},$$

$$tg\, M' = \frac{M'Q.\ MT}{MM'^2 + MQ.\ MT}.$$

Одавде следује:

$$\frac{tg\, M}{tg\, M'} = \frac{MQ.\ M'N\ (MM'^2 + MQ.\ MT)}{M'Q.\ MT\ (MM'^2 + M'Q.\ M'N)} \text{ и}$$

$$tg\, M - tg\, M' =$$

$$\frac{tg\, M' \,\{ MM'^2 (MQ.M'N - M'Q.MT) - M'N.MT\ (M'Q^2 - MQ^2) \}}{M'Q.MT\ (MM'^2 + M'Q.MT)} \quad (1)$$

Ми смо нашли, да је разлика M—M' бар другог реда, услед чега је то исто случај и са разликом $tg\, M - tg\, M'$. Пошто је у обрасцу (1) десни именилац петог реда, то онда израз у извијеној загради бројоца мора бити бар шестог реда. Други члан тога израза т. ј.

$$M'N.MT\ (M'Q^2 - MQ^2)$$

јесте шестог реда и положан је, јер је почев од једног извесног тренутка па на даље вазда $M'Q > MQ$. Пошто је сад $tg\, M > tg\, M'$, то онда први члан у извијеној загради бројоца мора бити положан и већи од другог члана те заграде. Тај први члан јесте дакле шестог реда и према томе израз:

$$MQ.M'N - M'Q.MT \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \quad (2)$$

који је положан, јесте 4-ог реда. Ово се лако и непосредно доказује, као што ћемо у N-ри 21 видети. Оба члана у извијеној загради под (1) јесу дакле шестог реда, а тако исто и цео израз у тој загради. Да је то истина показаћемо у N-ри која долази.

21. Помоћу образаца (сл. 7.):

$$\frac{M'N}{MM'} = \frac{sin\ M}{sin\ N}, \qquad \frac{MT}{MM'} = \frac{sin\ M'}{cos\ (N+M+M')}$$

добијамо:

$$MQ.\ M'N - M'Q.MT =$$

$$\frac{MQ.MM'\ sin\ M}{sin\ N} - \frac{M'Q\ \ MM'\ \ sin\ M'}{cos\ (N+M+M')}$$

Одавде с' обзиром на обрасце:

$$MQ = MM'\ sin\ (N+M), \qquad M'Q = MM'\ cos\ (N+M)$$

добијамо даље:

$$MQ.M'N - M'Q.MT =$$

$$\frac{MM'^2\ sin\ (N+M)\ sin\ M}{sin\ N} - \frac{MM'^2\ sin\ M'\ cos\ (N+M)}{cos\ (N+M+M')} =$$

$$= MM'^2 \{ sin\ M.\ sin\ (N+M).\ cos\ (N+M+M') -$$

$$sin\ M'.\ sin\ N.\ cos\ (N+M) \} : sin\ N.\ cos\ (N+M+M')$$

Узимајући у помоћ обрасце:

$$\sin (N + M) - \sin N = 2 \cos \left(N + \frac{M}{2}\right).\ \sin \frac{M}{2}$$

$$\sin M = 2 \sin \frac{M}{2} . \cos \frac{M}{2} ;$$

$$\cos (N + M) - \cos (N + M + M') =$$

$$2.\ \sin \left(N + M + \frac{M'}{2}\right) \sin \frac{M'}{2},$$

добијамо даље:

$$MQ.\ M'N - M'Q.\ MT =$$

$$= MM'^2 \{2.\ sin\ M.\ sin \frac{M}{2}\ cos \left(N + \frac{M}{2}\right).\ cos\ (N + M + M') +$$

$$sin\ N\ [sin\ M\ cos\ (N + M + M') - sin\ M'\ cos\ (N + M)]\} :$$

$$sin\ N.\ cos\ (N + M + M')$$

или најзад:

$$MQ.\ M'N - M'Q.\ MT =$$

$$= MM'^2 \{4.\ sin^2 \frac{M}{2}.\ cos \frac{M}{2}\ cos \left(N + \frac{M}{2}\right) cos\ (N + M + M)$$

$$- 4\ sin \frac{M}{2}.\ sin \frac{M'}{2}.\ cos \frac{M}{2}.\ sin\ N\ sin \left(N + M + \frac{M'}{2}\right) +$$

$$sin\ N\ cos\ (N + M)\ (sin\ M - sin\ M')\} :$$

$$sin\ N.\ cos\ (N + M + M').$$

Прва два члана у извијеној загради јесу другог реда и њина је разлика положна и такође другог реда, јер њин количник не тежи јединици већ количини $cotg^2$ N. Пошто је трећи члан у извијеној загради положан и барем другог реда, то је онда цео израз у извијеној загради другог реда.

Према томе је израз:

$$MQ\,M'N - M'Q\,MT$$

4 реда. Кад се последња једначина подели са једначином;

$$M'N.\,MT = \frac{MM'^2.\,\sin M.\,\sin M'}{\sin N \cos (N + M + M')},$$

онда се из нове једначине дознаје, да количник:

$$\frac{MQ.\,M'N - M'Q.\,MT}{M'N.\,MT}$$

тежи коначној и положној граници:

$$\cos^2 N - \sin^2 N + \sin N.\,\cos N.\,\lim \frac{\sin M - \sin M'}{\sin M.\,\sin M'} =$$

$$\cos 2\,N + \frac{1}{2} \sin 2\,N.\,\lim \frac{\sin M - \sin M'}{\sin M.\,\sin M'}\,.$$

Сад ћемо тек моћи доказати, да је разлика у извијеној загради обрасца (1) N-ре 20 6-г реда. Зарад тога треба само доказати, да количник чланова те разлике тежи граници различној од јединице. Тај количник може се овако написати:

$$\frac{M'Q^2 + MQ^2}{M'Q^2 - MQ^2} \cdot \frac{MQ.\,M'N - M'Q.\,MT}{M'N.\,MT}$$

И сад је лако наћи, да је граница овог количника израз:

$$\frac{1}{\cos 2N}\left\{\cos 2N + \frac{1}{2}\sin 2\,N.\,\lim \frac{\sin M - \sin M'}{\sin M.\,\sin M'}\right\} =$$

$$1 + \frac{1}{2}\,tg\,2\,N.\,\lim \frac{\sin M - \sin M'}{\sin M.\,\sin M'}\,.$$

Овај је израз различан од јединице. Према томе израз у извијеној загради обрасца (1) N-ре 20. јесте 6-г реда, а цео бројилац тога обрасца 7-г реда. Пошто је именилац 5-г реда, то је онда $tg\,M - tg\,M'$ другог реда. На тај начин доказали смо важну истину: *разлика углова, које гради тетива ∞ малог лука 1-г реда са диркама повученим кроз крајеве лука, та разлика јесте другог реда.*

22. Ако (сл. 7.) из S спустимо SS′ управно на тетиву MM', то онда из троуглова MS'S и M′S'S следује:

$$MS' = MS.\,\cos M,\quad M'S' = M'S.\,\cos M',$$

одакле:

$$MS - MS' = 2\,MS.\,\sin^2\frac{1}{2}M,\quad M'S - M'S' = 2\,M'S\,\sin^2\frac{1}{2}M'.$$

Сабирањем ових једначина добијамо:

$$MS + M'S - MM' = 2\left\{MS.\,\sin^2\frac{1}{2}M + M'S.\,\sin^2\frac{1}{2}M'\right\}$$

Дакле је разлика између збира дирака и тетиве ∞ малог лука првог реда трећег реда. Пошто је лук MM′ мањи од збира дирака а већи од тетиве, то су онда и разлике између збира дирака и лука и између лука и тетиве бар трећег реда.

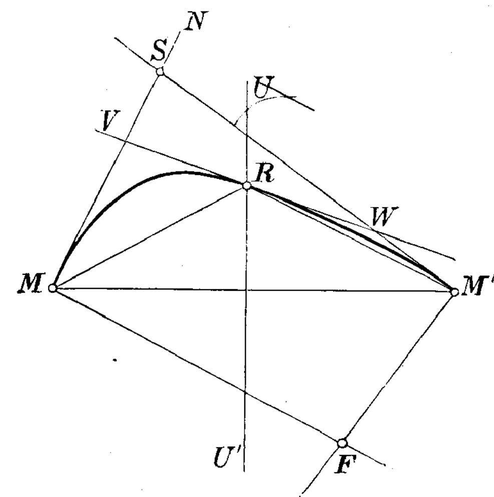
Из правоуглог троугла MRM′ дознаје се, да је управна M′R спуштена са једног луковог краја на дирку повучену кроз други његов крај другог реда. То исто вреди очевидно увек и онда, кад права M′R не стоји управно на дирци MS, већ гради с њоме ма какав коначан угао т. ј. такав који не тежи нули, кад лук MM′ тежи нули. Из истог троугла следује,

$$MM' - MR = 2\, MM' \sin^2 \frac{1}{2} M.$$

Дакле је разлика између тетиве и њезине пројекције у дирци, повученој кроз један његов крај, трећег реда. Но како је разлика између лука и тетиве бар трећег реда, то је онда трећег реда и разлика између лука MM′ и MR. Дакле је разлика између ∞ малог лука првог реда и његове пројекције у дирци, повученој кроз један његов крај 3-ћег реда.

Најзад напомињемо још ово. Пошто је додирни угао NSM′ лука MM′ једнак збиру углова M и M′, а разлика је овиh другог реда, то је онда и разлика између половине додирног угла лука MM′ и сваког од углова M и M′ другог реда.

23. Нека је (сл. 8) MM′ ∞ мали лук првог реда MS и M′S дирке повучене кроз његове крајеве M и M′ и S пресек дирака. Нека су даље MF и M′F нормале тачака M и M′ и F њин пресек.



Сл. 8.

Из троугла MFM′ следује:

$$\frac{MF}{\sin MM'F} = \frac{M'F}{\sin M'MF} = \frac{MM'}{\sin NSM'},$$

$$\text{или због } MM'F = \frac{1}{2}\pi - M';$$

$$M'MF = \frac{1}{2}\pi - M; \quad NSM = M + M':$$

$$\frac{MF}{\cos M'} = \frac{M'F}{\cos M} = \frac{MM'}{\sin(M + M')} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Пошто и сада предпостављамо, да је угао MFM′ истог реда са луком MM′ дакле првог, то последњи количник под (1) тежи коначној граници. Услед тога и нормале MF и M′F теже истој коначној граници а њин количник тежи јединици. Разлика тих нормала јесте дакле наспрам њих ∞ мала (Н. 4). Та је разлика трећег реда, као што се то види из обрасца:

$$\mathrm{MF} - \mathrm{M'F} = \frac{\mathrm{M'F}\,(cos\,\mathrm{M'} - cos\,\mathrm{M})}{cos\,\mathrm{M}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

или :

$$\mathrm{MF} - \mathrm{M'F} = \frac{2\,\mathrm{M'F}.\ sin\,\frac{1}{2}\,(\mathrm{M} + \mathrm{M'}).\ sin\,\frac{1}{2}(\mathrm{M} - \mathrm{M'})}{cos\,\mathrm{M}} \cdot (2$$

Кад лук MM' тежи нули, т. ј. кад тачка M' тежи — непокретној — тачци M, угао MFM'=NSM=M+M' тежи нули и према томе нормала MF′ тежи положају нормале MF као својој крајњој граници. Али ми видесмо мало час да и дужине нормала MF и MF' теже једној и истој дужини к о својој крајњој граници. Одатле следује, да ће пресек F нормала тежити једној тачци C, што је на непокретној нормали MF, као својој граници. Ако сад из F кад средишта опишемо два круга са MF и M'F као полупречницима, онда ће први од тих кругова дирати лук MM' у тачци M а други у тачци M'. Заједничка граница тих кругова јесте круг, коме је C средиште а MC полупречник. Лако је наћи вредност тога полупречника. Јер понајпре је :

$$\mathrm{MC} = lim\,\mathrm{MF}.$$

Даље из троугла MFM' следује :

$$\mathrm{MF} = \frac{\mathrm{MM'}.\ cos\,\mathrm{M'}}{sin\,(\mathrm{M} + \mathrm{M'})}.$$

Према томе је :

$$\mathrm{MC} = lim\,\mathrm{MF} = lim\,\frac{\mathrm{MM'}.\ cos\,\mathrm{M'}}{sin\,(\mathrm{M} + \mathrm{M'})}$$

или :

$$\mathrm{MC} = lim\,\frac{\text{лука MM'}}{\mathrm{M} + \mathrm{M'}},$$

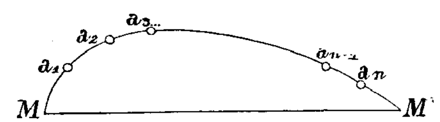
јер је слободно сменити тетиву њеним луком, пошто је њина разлика наспрам њих ∞ мала, и јер је из истоветног разлога слободно сменити sin (M + M') са (M + M'). Дакле је полупречник поменутог граничног круга једнак изврнутој кривини линије у тачци M. Обратно та је кривина једнака изврнутом полупречнику тога круга, дакле тим већа што је полупречник тог круга мањи, а тим мања што је полупречник већи. Тај круг зове се *круг кривине* за тачку M дате линије, и као што се види, његова кривина служи као мерило њене кривине у тачци M. Средиште тога круга зове се *средиште кривине*, а његов полупречнхк зове се *полупречник кривине* за тачку M. У осталом кривина једног круга, свуда је иста ; она је једнака количнику између додирног — или средишног — угла и њему одговарајућег кружног лука, па био овај ∞ мали или не. А тај количник једнак је опет изврнутом полупречнику.

24. Ми смо до сада предпостављали, да је додирни угао ∞ малог лука MM′ истог реда са луком т. ј. првог, и нашли смо, да је тада полупречник кривине за тачку M коначан. Ако је додирни угао вишег реда од лука, онда је полупречник кривине за тачку M :

$$\mathrm{MC} = lim\,\frac{\text{лука MM'}}{\mathrm{M} + \mathrm{M'}}$$

∞ велики и круг кривине за тачку M прелази у дирку MS. Ако ли је додирни угао нижег реда од лука, онда је полупречник кривине за тачку M једнак нули, и круг кривине своди се на једну тачку. Но треба приметити, да је додирни угао у опште узев истог реда са луком и да се само у изузетним случајевима т. ј. само код по неких тачака дате линије може десити, да је додирни угао вишег или нижег реда од лука. Према томе и полупречник кривине јесте у опште узев коначан и од нуле различан. У осталом да је додирни угао ∞ малог лука у опште узев истог реда с њиме, може се доказати и на начин, који иде.

Узмимо (сл. 9) да је MM′ коначан лук. Обележимо на истом n тачака: $a_1, a_2, a_3 \ldots a_{n-1}, a_n$, чији број n ми ћемо узети да расте ∞. Означимо са α_1,



Сл. 9.

$\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n, \alpha_{n+1}$ додирне угле $(n+1)$ лукова Ma_1, $a_1 a_2, a_2 a_3, \ldots a_{n-1}a_n, a_nM'$, а са $s_1, s, s_3, \ldots s_n$, s_{n+1}, дужине тих лукова. Кад би сад при ∞-ом рашћењу броја n разломци:

$$\frac{\alpha_1}{s_1}, \frac{\alpha_2}{s_2}, \frac{\alpha_3}{s_3}, \ldots \frac{\alpha_n}{s_n}, \frac{\alpha_{n+1}}{s_{n+1}}$$

тежили сви нули или сви расли ∞, онда би то исто морало бити и са разломком:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n + \alpha_{n+1}}{s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n + s_{n+1}}$$

Али је именилац овог разломка једнак луку MM′ а бројилац је једнак додирном углу лука MM′, ако је само лук MM′ свуда испупчен. А ово последње може се увек постићи, ако се само лук MM′ узме довољно мали. Према томе последњи разломак јесте коначан и од нуле различан и шта више сталан. Разломци:

$$\frac{\alpha_1}{s_1}, \frac{\alpha_2}{s_2}, \frac{\alpha_3}{s_3}, \ldots \frac{\alpha_n}{s_n}, \frac{\alpha_{n+1}}{s_{n+1}}$$

не могу дакле при ∞-ом рашћењу броја n сви тежити нули или сви расти ∞. И како тај закључак стоји па био лук MM′ ма колико мали, то је онда јасно, да количник између додирног угла и одговарајућег му ∞ малог лука може само код по неких тачака линије тежити нули или расти ∞. То значи додирни угао и одговарајући му ∞ мали лук јесу у опште узев једног и истог реда.

25. Вратимо се слици 9 и предпоставимо, да је коначни лук MM′ тачкама $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}$, a_n подељен на $(n+1)$ једнаких и ∞ малих лукова првог реда. Ако је s дужина сваког од тих лукова, онда је дужина целог лука:

$$MM' = (n+1)\,s,$$

одакле се види да је $\frac{1}{n+1}$ па дакле и $\frac{1}{n}$ ∞ мала количина првог реда. Ако означимо са $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n, \alpha_{n+1}$ додирне угле поменутих $(n+1)$ лукова и ако предпоставимо, што је слободно, да кривина лука MM′ идући од M ка M′ све једнако опада, онда ће додирни угли α с лева на десно све једнако опадати. При том ћемо предпоставити, да су додирни угли свију (n + 1) лукова 1-ог реда, дакле да је полупречник кривине свуда коначан. Ако означимо са $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdot \cdot \cdot \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n$ разлике између два и два узастопна додирна угла α, биће:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \varepsilon_1, \alpha_2 - \alpha_3 = \varepsilon_2, \alpha_3 - \alpha_4 = \varepsilon_3,$$

$$\ldots \alpha_n - \alpha_{n+1} = \varepsilon_n,$$

одакле се добија сабирањем:

$$\alpha_1 - \alpha_{n+1} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$$

Ако најмању од количина ε означимо са ε' а највећу са ε'', онда је:

$$n\varepsilon' < \alpha_1 - \alpha_{n+1} < n\varepsilon''.$$

Кад би сад стојало то, да је разлика додирних углова двеју половина једног ∞ малог лука првог реда, вишег реда од другог, онда би количине ε_1, $\varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ па дакле и ε' и ε'' биле вишег реда од другог. Па пошто је $\frac{1}{n}$ првог реда, то би онда разлика додирних углова α_1 и α_{n+1} била вишег реда од првог, дакле наспрам њих ∞ мала. Услед тога тада би био:

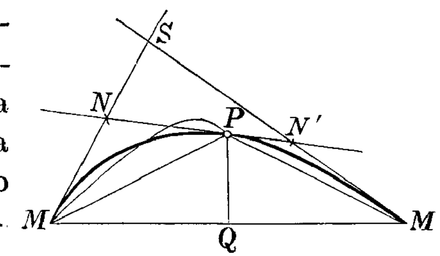
$$lim \frac{Ma_1}{\alpha_1} = lim \frac{a_n M'}{\alpha_{n+1}},$$

то ће рећи тада би полупречник кривине за тачку M био једнак полупречнику кривине за тачку M′. И пошто овај закључак стоји, па узели ми место M′

као крајњу тачку лука и ма коју другу тачку, то би онда полупречник кривине за ма коју тачку коначног лука MM′ остао исти и лук MM′ био би кружни лук. Ако дакле лук MM′ није кружни лук, онда количине ε не могу бити вишег реда од другог. Овим је доказано: *да је разлика додирних углова двеју половина ∞ малог лука 1-ог реда, другог реда.*

Може се десити, да полупречник кривине за тачку M′ буде једнак полупречнику кривине за тачку M и онда, кад MM′ није кружни лук. Али тада кривина лука од M ка M′ донекле расте а после опада или обратно, или што је све једно тада полупречник кривине донекле опада а после расте или обратно Али ми то при овом умовању нисмо предпоставили.

26. Што је год кривина лука једне и исте дужине већа, тим је мања његова тетива. Исто тако лук описан над тетивом једне и исте дужине тим је већи, што је год кривина лука већа. Лако је дознати, да кад кривина лука од M ка M′ опада (сл. 10) леви угао M мора увек бити већи од десног M′. Нека је PQ управна подигнута у средини Q тетиве MM′ и NN′ дирка у тачци P, у којој та управна сече лук. Ако десну полуслику обрнемо око PQ дотле, докле она не поклопи леву, тетива M′P поклопиће тетиву MP. Осим тога лук M′P пашће у унутрашњост лука MP, услед чега ће и дирке M′N′, PN′ пасти у унутрашњост троугла MNP. Јер кад то неби било, него би лук M′P по обртању заузео положај као



Сл. 10

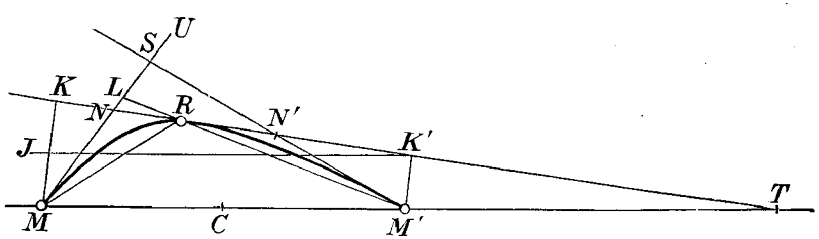
нпр. на слици онда би то значило. да један лук десно од P може бити већи од лука лево од P а описаног над тетивом једнаке дужине. Али то не може бити, јер кривина лука од M ка M' узели смо да опада Пошто је на тај начин угао NMP већи од угла $N'M'P$, то је онда јасно, да је и $M > M'$.

Пошто је у слици 8 где смо узели да кривина од M ка M' опада,

$$M'MF = \frac{\pi}{2} - M,\quad MM'F = \frac{\pi}{2} - M',$$

то је онда $M'MF < MM'F$ и због тога $M'F < MF$. Ако се сад лук $MM' \infty$ умањава, па било да се тачка M тачци M' или M' тачци M приближава, онда ће количник нормала MF и $M'F$ тежити јединици (N. 23), али тако, да је при томе $M'F$ вазда мање од MF. Ако кривина од M ка M' расте, онда је вазда $M'F > MF$.

27. Нека је (сл. 11.) R средина ∞ малог лука MM', N, N' и T тачке, у којима кроз R повучена



Сл. 11.

дирка NT сече крајње дирке MS, $M'S$ и продужену тетиву MM'. Нека су даље MK, $M'K'$ управне спуштене из M и M' на дирку NT, $K'J$ паралелна са те-

тивом MM' и L тачка, где продужена тетива $M'R$ сече дирку MS. Угле на слици означимо овако:

$$RMM' = \alpha,\ RM'M = \beta,\ NMR = \gamma,\ NRM = \gamma',\ N'M'R = \delta,$$

$$N'RM' = \delta',\ SNN' = N,\ SN'N = N',\ KTM = KK'J = T,$$

$$SMM' = M,\ SM'M = M'.$$

Пошто узимамо, да кривина лука од M ка M' опада то је:

$$N > N',\ \gamma > \gamma' \text{ и } \delta' > \delta.$$

Али је и $\gamma' > \delta'$. Јер како кривина од R ка M' опада, а од R ка M расте, то се онда лук RM' од дирке NT спорије удаљава него ли лук RM. Ако сад кроз R повучемо управну на дирку NT и око те управне обрнемо десну полу слике, докле она не поклопи леву полу, онда ће лук RM' пасти између дирке NT и лука RM. Очевидно ће и тетива RM' пасти између дирке NT и тетиве RM.

Пошто су N и N' првог реда, то су γ и δ', првог реда, а такође и γ', јер је $\gamma > \gamma' > \delta'$. Да је и δ првог реда видећемо мало после. Тетиве MR и $M'R$ јесу првог реда и њина је разлика бар 3-ег реда, за то што је разлика између сваке од њих и одговарајућег јој лука бар 3-ег реда. Из обрасца:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{M'R}{MR}$$

види се, да су α и β истог и то првог реда, јер је њин збир т. ј. угао $LRM = \gamma' + \delta'$ првог реда. Даље је због $M'R > MR$ и $\alpha > \beta$.

Из обрасца:

$$\sin\alpha - \sin\beta = \frac{\sin\beta\,(M'R - MR)}{MR}$$

види се, да је и разлика углова α и β бар 3-ег реда. Даље из

$$N = \gamma + \gamma', \quad N' = \delta + \delta'$$

следује:

$$N - N' = (\gamma - \delta) + (\gamma' - \delta').$$

Пошто је сад $N - N'$ 2-ог реда (N. 25) и $\gamma - \delta > \gamma' - \delta'$, то је и $\gamma - \delta$ 2-ог реда. Услед тога је (N. 4) и δ првог реда. Из

$$M = \alpha + \gamma, \quad M' = \beta + \delta$$

следује:

$$M - M' = \alpha - \beta + \gamma - \delta.$$

Како је сад $\alpha - \beta$ бар 3-ег а $\gamma - \delta$ другог реда, то је онда и $M - M'$ 2-ог реда. *И тако је поново доказано, да су угли M и M' оба првог а њина разлика другог реда (N. 20).*

28. За управну $M'R$ (сл. 7) нашли смо:

$$M'R = MM'.\sin M.$$

Одавде занемарив количине 3-ег реда добијамо:

$$M'R = \frac{1}{2}(M + M').\ \text{лук}\ MM.'$$

Дакле управна спуштена с једног краја ∞ малог лука 1-ог реда на дирку повучену кроз његов други крај, та управна једнака је половини производа из лука и

његовог додирног угла. Количина при томе занемарена јесте 3-ег реда.

Вратимо се слици 11. Из правоуглог троугла JKK' следује:

$$KJ = MK - M'K' = MM'.\sin T$$

На основу мало час доказане теореме јесте:

$$MK = \frac{1}{2}N.\ \text{лук}\ MR, \quad M'K' = \frac{1}{2}N'.\ \text{лук}\ M'R,$$

одакле:

$$KJ = \frac{1}{2}(N - N').\ \text{лук}\ MR.$$

Дакле је KJ 3-ег реда. Даље је:

$$\sin T = \frac{KJ}{MM'}$$

Дакле угао, који тетива ∞ малог лука 1-ог реда гради са дирком повученом кроз средину лука јесте другог реда.

Из правоуглог троугла $MK'T$ следује:

$$M'T = \frac{M'K'}{\sin T}$$

Дакле је $M'T$ коначна дужина.

Ако из средине C тетиве MM' спустимо управну на дирку NT, та је управна очевидно 2-ог реда. То је исто случај и са управном, која је из средине R лука спуштена на тетиву као и са управном, која је у средини C тетиве на ову подигнута и продужена до дирке NT или до лука MM'.

Тачка T (сл. 11), у којој дирка NT сече продужену тетиву MM', мора бити десно од M' као на слици. Јер пошто би у противном случају било:

$$\gamma' = \alpha - \mathrm{T}, \quad \delta' = \beta + \mathrm{T}$$

то би онда због $\gamma' > \delta'$ требало да је

$$\alpha - \beta > 2\mathrm{T}.$$

Но то не стоји, јер је $\alpha - \beta$ бар 3-ег а 2T другог реда. Из образаца:

$$\gamma' - \alpha = \mathrm{T}, \quad \beta - \delta' = \mathrm{T}$$

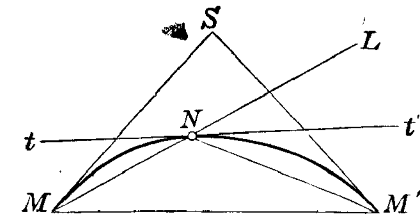
следује:

$$\gamma' - \delta' = 2\mathrm{T} + \alpha - \beta.$$

Дакле је $\gamma' - \delta'$ другог реда. Пошто је то исто и са $\gamma - \gamma'$ и $\delta' - \delta$, то онда помоћу прве две од последњих трију једначина дознајемо, да су и $\gamma - \alpha$ и $\beta - \delta$ 2-ог реда. Помоћу треће опет једначине дознајемо, да су $\gamma - \delta'$ и $\gamma' - \delta$ другог реда и т. д. На кратко разлика између ма која два од 6 углова: $\alpha, \beta, \gamma, \gamma', \delta\, \delta'$ јесте 2-ог реда сем разлике $\alpha - \beta$, која је бар трећег реда.

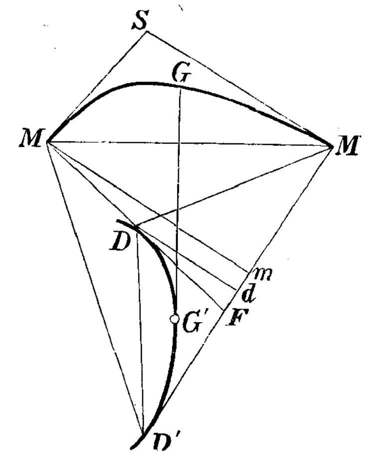
Разлика MK — M'K' очевидно је положна. То се види и из обрасца MK — M'K = MR $\sin\gamma'$ — M'R. $\sin\delta' = (\sin\gamma' - \sin\delta')$ MR — $\sin\delta$ (M'R — MR). Најзад напомињемо, да тачка, у којој дирка паралелна са тетивом MM' дира лук, лежи лево од R. Лако је такође увидети, да кад се у средини C тетиве MM' на ову подигне управна, да онда тачка, где та управна сече лук, мора лежати десно од R.

29. Нека је (сл. 12) MM' ∞ мали лук првог реда и MNM' уписани угао. Ако кроз N повучемо дирку tt', угао LNM' биће разложен на два дела. Један од њих t'NM' разликују се од половине додирног угла лука M'N за количину која је 2-ог реда (N. 22). Други t'NL = tNM разликује се од половине додирног угла лука MN за количину која је такође другог реда. Дакле сам угао LNM' разликује се од половине додирног угла целог лука MM' за количину, која је другог реда. Према томе тај угао, па дакле и његов суплеменат т. ј. уписани угао MNM' може се сматрати као сталан уз погрешку, која је другог реда.



Сл. 12.

30. Кад свакој од узастопних тачака линије MM' (сл. 13) одредимо круг кривине, онда линија, која постаје из средишта тих кругова, зове се *еволута* линије MM'. Нека је DD' еволута, а D и D' средишта кривине за M и M'. Полупречници кривине — или нормале — морају дирати еволуту. Јер кад лук MM тежи нули, то ће исто бити случај и са углом MFM', па дакле и са углима D'DF и DD'F, које еволутина тетива DD' гради са нормалама MF и M'F. Ако кривина линије од M ка M' опада, онда полупречник кривине идући



Сл. 13.

од M ка M' расте и еволута има од прилике онакав положај као на слици. Кад се тачка M тачци M' ∞ приближава, онда нормале MF и M'F расту а кад се обратно тачка M' тачци M ∞ приближава, онда нормале опадају.

Комад DD' еволутиног лука, који одговара комаду MM' дате линије, мора бити од нуле различан и коначан. Јер кад би лук DD' био једнак нули, лук MM' био би кружни лук. А кад би лук DD' био ∞ онда би средиште кривине D' било ∞ далеко и по томе последњи елеменат лука MM' и њему одговарајући додирни угао неби били истог реда.

Ако сад узмемо да је лук MM' ∞ мали првог реда, онда је истог реда и угао MFM', па дакле (N. 24) и еволутин лук DD' и његова тетива. Такође су првог реда и угли D и D' у троуглу DD'F и њина је разлика другог реда. То исто вреди и за стране DF и D'F.

Лако је доказати да је еволутин лук једнак разлици оних полупречника кривине, који тај лук дирају у његовим крајним тачкама. Зарад тога предпоставимо најпре, да је лук MM' (сл. 13) ∞ мали првог реда. Ако из M и D спустимо управне Mm и и Dd на нормалу M'D', добићемо:

$$M'D' = M'm + md + dD'$$

или:

$$M'D' = MM' \sin M' + MD . \cos (M + M') + DD' \cos \alpha$$

где је $\alpha = \sphericalangle DD'F$. Пошто је разлика између MD и MD $\cos (M + M')$ другог а разлика између DD' и DD'. $\cos \alpha$ трећег реда, то је даље:

$$M'D' = MM' . \sin M' + MD - \varepsilon + DD' - \delta,$$

где је ε другог а δ трећег реда. Пошто је даље разлика између еволутиног лука DD' и његове тетиве бар 3-ег реда, то је даље:

$$M'D' = MD + \text{лук } DD' + MM' \sin M' - \varepsilon - \delta' - \delta,$$

где је δ' бар трећег реда. Дакле је најзад:

$$M'D' = MD + \text{лук } DD'$$

уз погрешку, која је другог реда.

Предпоставимо сада на против, да је лук MM' (сл. 13) коначан, па га разложимо помоћу тачака M_1, M_2, . . . M_{n-1} на n једнаких и ∞ малих лукова првог реда. Број $\frac{1}{n}$ јесте дакле ∞ мали првог реда Повуцимо нормале тачака M, M_1, M_2, . . . M_{n-1}, M' и тачке, у којима оне дирају еволуту означимо са D, D_1, D_2, . . . D_{n-1} D'. На основу мало час доказаног јесте

$$M_1D_1 = MD + \text{лук } DD_1 + \varepsilon_1$$

$$M_2D_2 = M_1D_1 + \text{лук } D_1D_2 + \varepsilon_2$$

$$M_3D_3 = M_2D_2 + \text{лук } D_2D_3 + \varepsilon_3$$

. . . .

$$M_{n-1}\, D_{n-1} = M_{n-2}\, D_{n-2} + \text{лук } D_{n-2}D_{n-1} + \varepsilon_{n-1}$$

$$M'D' = M_{n-1}\, D_{n-1} + \text{лук } D_{n-1}\, D' + \varepsilon_n.$$

Сабирањем ових једначина добијамо:

$$M'D' = MD + \text{лук } DD_1 + \text{лук } D_1D_2 + \ldots$$

$$+ \text{лук } D_{n-2}\, D_{n-1} + \text{лук } D_{n-1}D' + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n.$$

или пошто је:

$$\text{лук } DD_1 + \text{лук } D_1D_2 + \text{лук } D_2D_3 + \ldots +$$

$$\text{лук } D_{n-1}\, D' = \text{лук } DD'$$

онда је и:

$$M'D' = MD + \text{лук } DD' + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$$

Ако најмању од количина ε означимо са ε', а највећу са ε'' биће:

$$n\varepsilon' < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n < n\varepsilon''.$$

Пошто су све количине ε другог а $\frac{1}{n}$ првог реда, то су онда $n\varepsilon'$ и $n\varepsilon''$ првог реда па дакле и $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$. Дакле је разлика коначних количина $M'D'$ и $MD +$ лук DD' ∞ мала или $=$ нули. И према томе је:

$$M'D' - MD = \text{лук } DD'.$$

И тиме је горње тврђење оправдано.

Замислимо сад, да је у еволутиној тачци D' утврђен један крај конца, чија је дужина једнака полупречнику кривине $M'D'$. Ако исти конац омотамо око еволутиног лука DD', па га затим почев од D држимо затегнута у правцу еволутине дирке MD, други крај тог конца мораће због последње једначине, пасти у тачку M. Ако сад исти конац будемо одмотавали држећи га вазда затегнута, његов крај M описаће линију MM'. Јер ако је GG' један од оних положаја, у које конац поступно долази, биће:

$$GG' = MD + DG'.$$

Дакле је дужина GG' једнака полупречнику кривине, који дира еволуту у D'. Услед тога тачка G мора лежати на линији MM'. Као што се дакле види, линија MM' постаје одмотавањем еволутиних лукова,

и за то је еволути и дато то име. Сама линија MM' зове се *еволвента*.

Примедба. Пошто је:

$$M'D' = MD + \text{лук } DD', \quad \text{лук } DD' < DF + D'F$$

то је онда $M'F < MF$. Из троугла $MM'F$ следује сада, да је:

$$\frac{\pi}{2} - M < \frac{\pi}{2} - M' \text{ или } M > M'.$$

Дакле је поново доказано, што смо више пута тврдили да је, кад кривина лука од M ка M' опада угао M вазда већи од угла M'.

31. Круг кривине, који одговара буди којој тачци дате линије, и дира и сече дату линију у додирној тачци. Да је то истина увиђа се овако. Круг кривине и дата линија имају у заједничкој тачци једнаку кривину (N. 23); али од додирне тачке десно и лево, кривина круга остаје стална, докле се међутим кривина дате линије мења. И због тога почев од додирне тачке обе се линије растају. Ако кривина линије почев од додирне тачке опада, она се од дирке спорије удаљава него ли круг кривине, и за то линија мора лежати између дирке и круга кривине. Ако ли кривина дате линије почев од додирне тачке расте, она се од дирке наглије удаљава, него ли круг кривине, и за то тада круг кривине мора лежати између дирке и дате линије. Пошто сад код ма које тачке линијне, њена кривина опада, кад се од те тачке удаљавамо на једну а расте, кад се од ње удаљавамо на противну страну, то онда линија с једне стране поменуте тачке мора лежати ван круга

кривине, а с друге стране исте тачке она мора лежати у унутрашњости круга кривине. Дакле, као што се види, круг кривине у опште узев доиста и дира и сече дату линију у заједничкој или додирној тачци. Ми рекосмо у опште узев, јер код тачака, где је кривина линије максимум или минимум, кривина линије и лево и десно од тих тачака или вазда опада или вазда расте. Услед тога линија лежи с обе стране таквих тачака или ван круга кривине или у његовој унутрашњости. Тако на пр. кривина елипсе на крају велике осе јесте максимум и елипса лежи с обе стране те тачке ван круга кривине. На крају мале осе кривина елипсе јесте минимум и елипса лежи с обе стране те тачке у унутрашњости круга кривине. У свакој другој тачци круг кривине и дира и сече елипсу.

Да круг кривине и дира и сече дату линију, може се и овако доказати. Вратимо се слици 13, код које се предпоставља, да кривина линије од M ка M' опада а од M' ка M расте. С обзиром на ту слику имамо:

$$M'D + \text{лук } DD' > M'D', \quad M'D' = MD + \text{лук } DD',$$

одакле

$$M'D > MD$$

Дакле M' лежи ван круга кривине за тачку M. Даље је:

$$MD' < MD + \text{лук } DD', \quad M'D' = MD + \text{лук } DD'$$

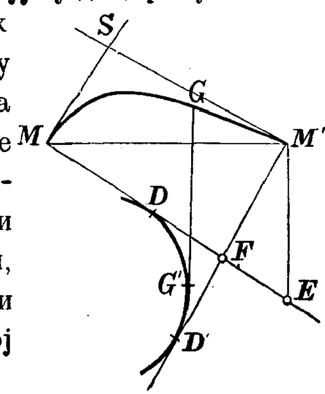
одакле:

$$MD' < M'D'.$$

Дакле тачка M лежи у унутрашњости круга кривине за тачку M'.

Овим је доказано то, да кад кривина дате линије с једне стране буди које тачке њене опада или расте, да онда линијне тачке, које су с те стране, леже ван круга кривине или у његовој унутрашњости. Пошто сад, као што већ горе напоменусмо, кривина линије код буди које тачке њене G с једне стране опада а с друге расте, то ће и линија с једне стране тачке G лежати ван круга кривине за тачку G, а с друге стране исте тачке, она ће лежати у унутрашњости тога круга. Круг ће дакле у тачци G сећи дату линију.

32. У прошлој N-ри ми смо видели, да круг кривине и сече и дира дату линију у додирној тачци. И он је између свију ∞ многих кругова, што дирају дату линију у истој тачци, једини, који има ту особину. Да би смо се о томе уверили, треба нам само доказати, да сваки други круг, који дира дату линију у истој тачци, лежи с обе стране те тачке или ван криве линије или у њеној унутрашњости.



Сл. 14.

Зарад тога узмимо најпре (сл. 14) да кривина линије од M ка M' опада. Узмимо на нормали MD тачку E, која је даље од M него D. Кроз тачку F, која је узета на нормали MD између D и E, повуцимо још једну дирку на еволуту DD' линије MM' и означимо са D' додирну тачку на еволути, а са M' пресек те дирке са линијом MM'. Пошто кривина линије од M ка M' опада, то је (N. 27):

$$M'F < MF, \quad \text{одакле} \quad EF + M'F < ME,$$

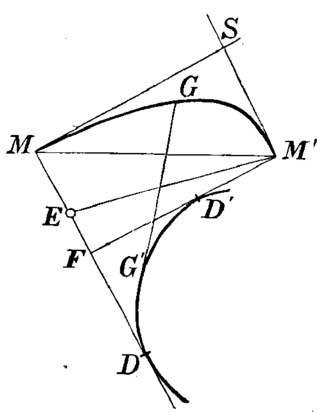
дакле тим пре :

$$M'E < ME.$$

Тачка M' лежи дакле у унутрашњости круга описаног из E са полупречником ME. Тај круг дира линију у тачци M. То, што је доказано за M', вреди и за сваку другу тачку лука MM'. На тај начин доказали смо ово :

Кад је полупречник једног круга K, који дату линију дира у ма којој тачци њеној G, већи од полупречника кривине за ту тачку, онда линијне тачке, што су с оне стране тачке G, на коју страну кривина опада, морају лежати у унутрашњости круга K. Но то тим пре мора вредити за линијне тачке, што су на противној страни тачке G. Јер на ту страну кривина линије расте, док међутим кривина круга K остаје стална.

Узмимо сад (сл. 15), да кривина линије од M ка M' расте. Узмимо на нормали MD између M и D тачку E и кроз тачку F, која је узета између D и E, повуцимо дирку на еволуту линије MM'. Нека је D' додирна тачка на еволути а M' пресек те дирке са линијом MM'. Пошто сад кривина од M ка M' расте,



Сл. 15.

то је (N. 27) $M'F > MF$

одакле $M'F - EF > ME$,

дакле због : $M'E > M'F - EF$

тим пре $M'E > ME$.

Тачка M' лежи дакле сад ван круга описаног из E

са полупречником ME. То што вреди за M', вреди и за сваку другу тачку лука MM'. На тај начин доказано је ово : Кад је полупречник једног круга K, који дира дату линију у ма којој тачци њеној G, мањи од полупречника кривине за тачку G, онда линијне тачке, што су с оне стране тачке G, на коју страну кривина расте, морају лежати ван круга K. Ово тим пре вреди за линијне тачке на противној страни, од G. Јер на ту страну кривина линије опада, док међутим кривина круга K остаје стална. И тиме је тврђење у почетку ове N-ре доказано.

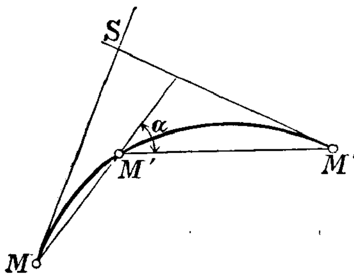
Напоменимо још, да круг K не може никад пролазити између дате линије и њеног круга кривине. Јер ако кривина линије од G ка M' опада а од G ка M расте као на слици 14, онда (N. 31) круг кривине за тачку G лежи у унутрашњости лука GM'. Ако је сад полупречник круга K већи од полупречника кривине за тачку G, онда на основу горе доказаног луци GM' и GM леже у унутрашњости круга K. Што се тиче оног дела круга кривине, који је лево од G, и он очевидно лежи у унутрашњости круга K. Као што се види, круг K не пролази ни лево ни десно од G између линије и њеног круга кривине. На сличан начин доказује се иста ствар и за онај случај, кад је полупречник круга K мањи од полупречника кривине за тачку G.

На тај начин дознаје се, да је од свију ∞ многих кругова, који дирају дату линију у тачци G, круг кривине онај, који је у тој тачци дира најприсније.

33. Круг кривине за тачку M дате линије јесте граница, којој тежи круг, што пролази кроз M и

још две линијне тачке M′ и M″, кад се ове две тачке тачци M ∞ приближавају.

Да би се о томе уверили, вежимо (сл. 16.) M′ са M и M″ и означимо са s лук MM′M″ а са α спољни угао тетива MM′ и M′M″. Даље опишимо кроз M, M′ и M″ један круг и означимо са σ његов лук MM′M″. Пошто је средишни угао кружног лука σ једнак 2α то је полупречник тога круга једнак.



Сл. 16.

$$\frac{\sigma}{2\alpha}.$$

Ако додирни угао линијног лука s означимо са a, онда је полупречник кривине за тачку M дате линије једнак

$$lim\frac{s}{a}.$$

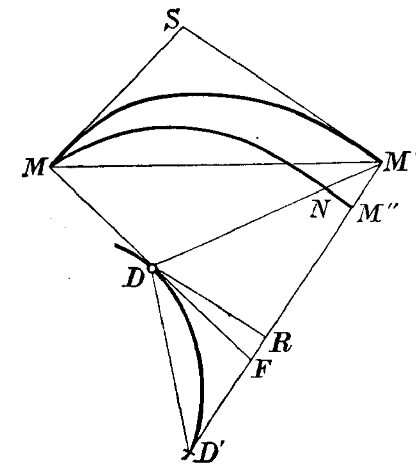
Разлика лукова s и σ јесте наспрам њих ∞ мала. Пошто је даље на основу N-ре 28 разлика између α и $\frac{1}{2}$ a или што је свеједно између 2α и a наспрам њих ∞ мала, то је онда (N. 5):

$$lim\frac{\sigma}{2\alpha} = lim\ \frac{s}{a}.$$

Дакле граница, којој тежи полупречник кроз M M′ и M″ описаног круга, кад се тачке M′ и M″ тачци M ∞ приближавају, једнака је полупречнику кривине за тачку M.

Исто се тако лако доказује, да је круг кривине и граница круга, који дира дату линију у тачци M и пролази кроз још једну ∞ блиску тачку M′.

34 Нека је (слика 17). MM′ ∞ мали лук првог реда, чија кривина узећемо да опада идући од M ка M′. Ми ћемо да тражимо ког је реда одстојање тачке M′ од круга кривине за тачку M. Нека је MM″ круг кривине за тачку M дате линије, и нека су MD и M′D′ полупречници кривине, који дирају еволуту DD′ у тачкама D и D′. Вежимо D са M′ и означимо са N пресек праве DM′ и круга кривине a са M″ пресек праве M′ D′ и круга кривине Спустимо најзад из D управну DR на M′D′. Комад M′N јесте одстојање тачке M′ од круга кривине



Сл. 17.

Из правоуглог троугла M′DR, где је DR другог реда, следује, да је другог реда и угао DM′R. Даље је:

$$M'N = M'D - ND$$

или због ND = MD:

$$M'N = M'D - MD = M'D - MD + \text{лук } DD' - \text{лук } DD'.$$

Одавде због $M'D' = MD + \text{лук } DD'$:

$$M'N = M'D + \text{лук } DD' - M'D'.$$

Одавде с обзиром на то, да је разлика између лука DD' и његове тетиве бар трећег реда, следује:

$$M'N = M'D + DD' - M'D' + \varepsilon$$

где је ε бар трећег реда.

Из правоуглих троуглова DD'R и M'DR следује

$$DD' - D'R = 2\,DD'.\ \sin^2 \frac{1}{2}\,DD'R,$$

$$M'D - M'R = 2\,M'D.\ \sin^2 \frac{1}{2}\,DM'R$$

одакле сабирањем:

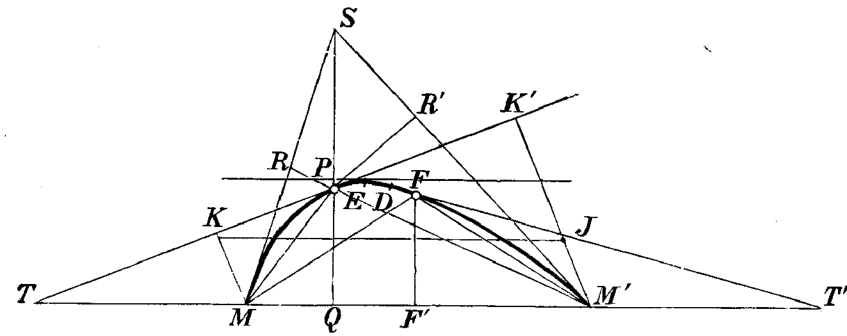
$$M'D + DD' - M'D' = 2 \left\{ DD'.\ \sin^2 \frac{1}{2}\,DD'R + M'D.\ \sin^2 \frac{1}{2}\,DM'R \right\}.$$

Први члан у загради јесте трећег а други четвртог реда, и потоме је леви трином трећег реда. Сад кад погледамо на последњи за M'N добивени израз, онда видимо, да је M'N трећег реда. Из троугла NM'M'', где је угао код M' другог реда, док међутим сваки од остала два тежи $\frac{\pi}{2}$, следује, да је и M'M'' трећег а NM'' петог реда.

Ако кроз M' повучемо једну праву у ма ком правцу, али тако да она гради са тетивом MM' коначан угао, онда комад те праве ограничен луком MM' и кругом кривине за тачку M јесте очевидно опет трећег реда.

Ако су MM' и MM'' ма какве две линије, које се дирају у тачци M, онда се каже, да је њин додир у тој тачци додир n-ог реда, ако је $\frac{M'N}{MM'}$ ∞ мала количина n-га реда. На тај начин додир између једне линије и њеног круга кривине јесте додир другог реда.

35. Нека су (сл. 18) MM'∞ мали лук првог реда, MS, M'S дирке повучене кроз његове крајеве M и M',



Сл. 18.

SQ управна спуштена из S на тетиву MM', P и Q пресеци управне са луком и тетивом MM', PT дирка кроз P, и T њен пресек са продуженом тетивом MM'. Нека су даље D средина лука MM', E додирна тачка дирке паралелне са његовом тетивом, DT' дирка кроз D и T' њен пресек са продуженом тетивом MM'. Нека је најзад F' средина тетиве MM', FF' управна на тетиву и F њен пресек са луком MM'. Угле на на слици означимо као што иде:

$$PMM' = \alpha,\ PM'M = \beta,\ PMS = \gamma,\ MPK = \gamma'$$

$$PM'S = \delta,\ M'PK' = \delta'.$$

Ми узимамо да кривина лука од M ка M′ опада. Из правоуглих троуглова MSQ и M'SQ следује:

$$MQ = MS.\ cos\,M, \quad M'Q = M'S\ cos\,M',$$

одакле се види, да су MQ и M'Q првог реда и MQ<M'Q. Разлика ових дужина јесте другог реда, јер је

$$M'Q - MQ = M'S.\ cos\,M' - MS.\ cos\,M$$

или због $M'S = \frac{MS.\ sin\,M}{sin\,M'}$:

$$M'Q - MQ = \frac{MS.\ sin\,(M - M')}{sin\,M'}.$$

Из образаца:

$$MP^2 = MQ^2 + PQ^2 \quad M'P^2 = M'Q^2 + PQ^2$$

види се, да су MP и M'P првог реда и MP < M'P. Из једначине одузимањем ових добивене дознаје се, да је разлика M'P — MP другог реда, услед чега је и разлика лукова M′P и MP такође другог реда. Пошто је та разлика једнака двогубом луку DP, то је лук DP другог реда Пошто је M'P > MP, то је и $\alpha > \beta$. Из обрасца:

$$\frac{sin\,\alpha}{sin\,\beta} = \frac{M'P}{MP},$$

види се, да су угли α и β истог и то првог реда, јер је њин збир R'PM′ првог реда (N. 29). Разлика тих углова јесте другог реда, јер је:

$$sin\,\alpha - sin\,\beta = \frac{sin\,\beta\,(M'P - MP)}{MP}$$

На начин сличан оном у N-ри 22 налазимо, да је:

$$MP + M'P - MM' = 2\left\{MP.\ sin^2\frac{M}{2} + M'P.\ sin^2\frac{M'}{2}\right\}.$$

Дакле је разлика између збира тетива MP, M′P и тетиве MM′ трећег реда. Али у N-ри 22 видели смо, да је и разлика између збира дирака MS, M'S и тетиве MM' такође трећег реда. *Одатле следује, да је разлика између* ∞ *малог лука првог реда и његове тетиве тачно 3-ег реда.*

36. Из троуглова MPS, M'PS (сл. 18) следује:

$$\frac{MP}{SP} = \frac{cos\,M}{sin\,\gamma}, \quad \frac{M'P}{SP} = \frac{cos\,M'}{sin\,\delta},$$

и одатле:

$$\frac{sin\,\gamma}{sin\,\delta} = \frac{M'P.\ cos\,M}{MP.\ cos\,M'},$$

Одавде се види, да количник углова γ и δ, који су првог реда, тежи јединици Разлика $\gamma - \delta$ јесте положна и другог реда јер је:

$$sin\,\gamma - sin\,\delta = \frac{sin\,\delta\,(M'P\ cos\,M - MP\ cos\,M')}{MP.\ cos\,M'}$$

$$= \frac{sin\,\delta\,\{(M'P - MP)\ cos\,M + MP\ (cos\,M - cos\,M')\}}{MP\ cos\,M'}.$$

Из обрасца:

$$PS = \frac{MP.\ sin\,\gamma}{cos\,M}$$

види се, да је PS другог реда. Ако из P спустимо PR и PR' управно на дирке MS и M'S, добијамо два правоугла троугла SPR и SPR', у којих су угли код P једнаки M и M'. Из тих троуглова следује:

$$RS = PS.\ \sin M, \quad R'S = PS.\ \sin M', \quad PR = PS.\ \cos M,$$

$$PR' = PS.\ \cos M'.$$

Дакле су RS и R'S трећег реда и RS > R'S, а PR и PR' јесу другог реда и PR' > PR. Из ових образаца следује:

$$RS - R'S = 2\ PS.\ \cos \frac{M + M'}{2}.\ \sin \frac{M - M'}{2}.$$

$$PR' - PR = 2\ PS.\ \sin \frac{M + M'}{2}.\ \sin \frac{M - M'}{2}.$$

Дакле је разлика дужина RS и R'S четвртог а дужина PR' и PR петог реда.

Ако из M и M' спустимо на дирку PT управне MK и M'K', добијамо два правоугла троугла MKP и M'K'P. Из њих и из троуглова MPR и M'PR' следује:

$$PR = MP.\ \sin \gamma, \quad MK = MP.\ \sin \gamma'. \quad PR' = M'P.\ \sin \delta,$$

$$M'K' = M'P.\ \sin \delta'.$$

Одавде се види, да је PR > MK, PR' < M'K' а већ смо нашли да је

$$PR' - PR = M'P.\ \sin \delta - MP.\ \sin \gamma.$$

петог реда. Даље је:

$$M'K' - MK = M'P.\ \sin \delta' - MP.\ \sin \gamma'.$$

Стављајући $\sin \delta' - \sin \delta = \varepsilon_1$, $\sin \gamma - \sin \gamma' = \varepsilon_2$, где су ε_1 и ε_2 другог реда, добијамо даље:

$$M'K' - MK = M'P\ (\sin \delta + \varepsilon_1) - MP\ (\sin \gamma - \varepsilon_2)$$

$$= (M'P.\ \sin \delta - MP.\ \sin \gamma) + (\varepsilon_1\ M'P + \varepsilon_2\ MP)$$

Одавде се види, да је разлика M'K'— MK положна и трећег реда. Одатле следује очевидно то, *да дирка PT мора сећи продужену тетиву MM' лево од M* као што је на слици назначено. Кад из K повучемо KJ паралелно са тетивом MM', добијамо правоугли троугао KK'J помоћу којег се лако дознаје, да је угао T = K'TM' другог реда. Пошто дирка DT' повучена кроз средину D лука — сече продужену тетиву MM' десно од M', то је онда јасно, *да додирна тачка E дирке паралелне са тетивом MM' мора лежати између P и D*.

Пошто је додирни угао лука DE једнак углу T' = DT'T, то је лук DE другог реда. Пошто су даље тетиве MF и M'F једнаке, то је онда разлика лукова MF и M'F т. ј. двогуби лук DF трећег реда, због чега је лук EF другог реда. *Дакле је тачка* F *ближа средини* D *лука него ли тачци* E.

37. Пошто је разлика углова γ и γ' као и углова α и γ' другог реда, то је онда и разлика углова α и γ барем другог реда, услед чега њин количник мора тежити јединици. Из троуглова MPS и MPQ следује:

$$PS = \frac{MP.\ \sin \gamma}{\cos M}, \quad PQ = MP\ \sin \alpha$$

одакле:

$$\frac{PS}{PQ} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha.\ \cos M}.$$

Количник дужина PS и PQ тежи дакле јединици и њина је разлика бар трећег реда, као што то следује из обрасца:

$$PS - PQ = \frac{PQ\,(\sin \gamma - \sin \alpha.\ \cos M)}{\sin \alpha.\ \cos M}$$

$$= \frac{PQ\,(\sin \gamma - \sin \alpha. + 2 \sin \alpha.\ \sin^2 \frac{1}{2} M)}{\sin \alpha \cos M}$$

Дакле дужине PS и PQ могу се сматрати као једнаке уз погрешку, која је бар трећег реда.

НАПОМЕНА

Са питањима, која се у овој расправи претресају, бавио се и Charles Ruchonnet у свом делу «exposition géométrique des propriétés générales des courbes.» Али сам за то дознао тек пошто сам овај рад академији пријавио. И тада сам дуго премишљао, да ли да свој рад тргнем натраг или не. И ја сам се најзад одлучио на последње, јер сам се из поменутог дела, које сам лане преко Gerolda набавио, уверио, да моје методе нису исте са методама поменутог писца. То колебање, да ли да свој рад тргнем натраг или не, један је узрок, што он није раније штампан. Други је узрок, што сам мислио да овом раду накнадно додам још понеке ствари, са којима сам се дуго бавио, али са којима на жалост још нисам сасвим на чисто. На послетку напомињем, да сам по неке ствари од истог писца позајмио и од чести на свој начин изложио.