МАТЕМАТИЧКА БИБЛИОТЕКА

ИЗДАЊА ЗАВОДА ЗА ИЗДАВАЊЕ УЏБЕНИКА СР СРБИЈЕ

| | Цена |
|---|---|
| *З. Мамузић* | |
| Комбинаторика | 10,00 |
| *Колектив аутора* | |
| Увођење младих у научни рад, III | 5,20 |
| *М. В. Клочков* | |
| Једно очигледно средство у настави геометрије и тригонометрије | 3,40 |
| *Д. С. Митриновић* | |
| Индукција. Биномна формула. Комбинаторика | 4,20 |
| *Р. Ж. Ђорђевић, Р. Р. Јанић, Р. П. Лучић, Д. Ђ. Тошић, П. М. Васић* | |
| Математичке олимпијаде средњошколаца у СССР | 16,50 |
| *Д. С. Митриновић и Д. Ц. Б. Марш* | |
| Приручник за такмичења средњошколаца у математици, I — Проблеми из елементарне теорије бројева | 5,50 |
| *Д. С. Митриновић, П. М. Васић, Р. Ж. Ђорђевић, Р. Р. Јанић* | |
| Приручник за такмичења средњошколаца у математици, II — Геометријске неједнакости | 10,80 |
| *С. Турајлић, Д. Цветковић, И. Лазаревић* | |
| Математичке олимпијаде средњошколаца у Чехословачкој, Мађарској и Румунији | 14,80 |
| *М. С. Попадић* | |
| Приручник за такмичења средњошколаца у математици, III — Конгруенције | 18,00 |
| *М. Бертолино, Р. Ж. Ђорђевић, Б. Ињатовић, Р. Р. Јанић, Д. Ђ. Тошић* | |
| Задаци из математике са пријемних испита на факултетима | 15,00 |
| *С. Б. Прешић* | |
| Елементи математичке логике | 16,20 |
| *Колектив аутора* | |
| Енциклопедија елементарне математике за ученике школа другог ступња, I део | 23,80 |
| *Колектив аутора* | |
| Енциклопедија елементарне математике за ученике школа другог ступња, II део | 26,00 |
| *Колектив аутора* | |
| Михаило Петровић: Човек — филозоф — математичар | 22,00 |

**ЦЕНА 22. — ДИНАРА**



МАТЕМАТИЧКА БИБЛИОТЕКА

38



# МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

## ЧОВЕК, ФИЛОЗОФ МАТЕМАТИЧАР

**ЗАВОД ЗА ИЗДАВАЊЕ УЏБЕНИК**
**СОЦИЈАЛИСТИЧКЕ РЕПУБЛИКЕ СР**
**БЕОГРАД**

# МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ

## ЧОВЕК, ФИЛОЗОФ, МАТЕМАТИЧАР

У редакцији
Др Д. С. МИТРИНОВИЋА

ЗАВОД ЗА ИЗДАВАЊЕ УЏБЕНИКА
СОЦИЈАЛИСТИЧКЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ
БЕОГРАД

МАТЕМАТИЧКА БИБЛИОТЕКА

Едиција Катедре за математику Електротехничког факултета
Универзитета у Београду



*Универзитет у Београду финансијски је помогао објављивање ове књиге*

Мих. Петровић

*Посвећено*

***МИХАИЛУ ПЕТРОВИЋУ АЛАСУ***

***поводом стогодишњице његова рођења***

# САДРЖАЈ

МАТЕМАТИЧКА БИБЛИОТЕКА, 38 (1968), 7—32.

Др *Драгослав С. Митриновић*

# ЖИВОТ МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

**Ако би се поставило питање која је била најснажнија личност међу српским математичарима, без двоумљења би се могло рећи: Михаило Петровић. Он је знатно утицао на развој наше науке и културе као научник и професор Универзитета у Београду, као учесник у поларним експедицијама и плодни путописац егзотичних крајева на земљиној кугли. Петровић није само национални великан кога је српски народ избацио из своје средине, већ он и у међународним релацијама представља лепо име.**

**По неподељеном признању Петровић је највећи српски математичар и његово стваралачко дело заслужује да се свестрано и критички проучи.**

Рођен је 6. маја 1868. године у Београду, где је свршио основну и средњу школу. Природно-математички одсек Велике школе у Београду завршио је 1889. године. Исте године отишао је у Париз и тамо је, после припремања од годину дана, положио пријемни испит у школи École Normale Supérieure, у којој је остао све до 1894. године. За то време завршио је на Faculté des sciences у Паризу: лисанс математичких наука (1892), лисанс физичких наука (1893) и докторат математичких наука (јуна 1894).

Период студија Михаила Петровића у Паризу пада у време када је француска математичка наука достизала једну од својих кулминационих тачака. Његови професори су били: Poincaré, Darboux, Picard, Hermite, Painlevé, Appell, Tannery, Boussinesq, Koenigs, Lippmann — све славна имена не само француске већ и светске науке.

Своју докторску тезу: *Sur les zéros et les infinis des intégrales des équations différentielles algébriques* (Paris 1894, 109 p.) одбранио је пред комисијом коју су сачињавали: Hermite (председник комисије), Picard и Painlevé (испитивачи). Резултати до којих је Петровић дошао у тези одмах су запажени и неке од ових

Picard je унео у свој уџбеник: *Traité d'Analyse,* t. III, deuxième édition, Paris, 1908, p. 378 — 381.

Одмах по положеном докторском испиту Михаило Петровић је изабран за редовног професора Велике школе у Београду. Почетком 1905. године донет је Закон о универзитету, по коме је Велика школа укинута а сви професори стављени на располагање. По прописима тога Закона, министар просвете поставио је првих осам редовних професора Универзитета у Београду, међу којима је био и Михаило Петровић.

Половину столећа, од 1894. до 1943. године Михаило Петровић неуморно и предано спремао је наставне и научне кадрове за математику.

Као професор Велике школе и Универзитета у Београду одржао је шеснаест разних курсева, од којих је неке понављао готово из године у годину. Било је школских година када је сам држао све курсеве из математике.

Михаило Петровић волео је свој наставнички позив. Његова предавања одликовала су се једноставношћу и она су привлачила студенте.

Петровић је имао строго мерило које је пренео и на своје ученике и тиме је у знатној мери допринео да настава математике у нашој средњој школи заузме лепо место.

За сваки курс Петровић је издао скрипта или уџбеник. При крају своје каријере одржао је и неке специјалне курсеве којима је хтео упутити слушаоце у проблематику из аналитичке теорије диференцијалних једначина.

Под утицајем Михаила Петровића формиран је читав низ научних радника на математичком пољу. Из теоријске математике код Михаила Петровића докторирали су: Младен Берић[1)], Сима Марковић[2)], Тадија Пејовић[3)], Радивоје Кашанин[4)], Јован

[1)] *Фиīураīиивни йолиīони диференцијалних једначина йрвоīа реда и њихова веза са особинама иншеīрала.* Брањена 1912. Београд, 1913, 8°, 99.

[2)] *Ойшша Riccati-ева једначина йрвоīа реда.* Брањена 1913. Београд, 1914, 8°, 88.

[3)] *Нови случајеви иншеīрабилишеша једне важне диференцијалне једначине йрвоīа реда.* Брањена 6. II 1923, 8°, 23.

[4)] *О аналишичким облицима мулшиформних функција.* Брањена 20. XI 1924. Београд — Земун, 1925, 8°, 36.



Карамата[1)], Милош Радојчић[2)], Драгослав Митриновић[3)], Данило Михњевић[4)], Константин Орлов[5)], Петар Музен[6)] и Драгољуб Марковић[7)].

Петровић се радовао научном успеху својих ученика и није им наметао област у којој ће они вршити истраживања. У периоду Петровићевог делања запажени су, у другим областима науке, многобројни случајеви спутавања научног рада, па је утолико значајније што је он давао подстрека за научни рад.

Године 1932. Математички институт Универзитета у Београду, на иницијативу Михаила Петровића и Милутина Миланковића, покреће часопис на иностраним језицима *Publications mathématiques de l'Université de Belgrade.* До 1941. године изишло је седам књига.

Наведени часопис био је круна успеха Михаила Петровића. То је у ствари био часопис његове школе. Преко тог часописа наши математичари могли су се као колектив представити светској јавности.

Као млад човек, 1900. године Петровић је постао редован члан Српске академије наука. У Одељењу природних наука ове Академије он је живо учествовао у раду. На седницама Одељења приказао је велики број расправа својих или својих ученика. Ови радови штампани су у Гласу Српске академије наука.

Петровић је један од иницијатора публикације *Bulletin de l'Académie des sciences mathématiques et naturelles de Belgrade.* У овој публикацији штампани су на иностраним језицима изводи из радова који су објављени у Гласу. У серији математичко-физичких наука наведене публикације, у периоду од 1933. до 1941.

[1)] *О једној врсши īраница сличних одређеним иншеīралима.* Брањена 22. III 1926. Београд — Земун, 1926, 8°, 65.

[2)] *Аналишичке функције йредсшављене конверīеншним низовима алīебарске функције.* Брањена 30. I 1928, 8°, 32.

[3)] *Исшраживања о једној важној диференцијалној једначини йрвоī реда.* Брањена 24. X 1933. Београд, 1935, 8°, 40.

[4)] *Сшрукшура йарцијалних једначина са дашим иншеīралима карактерисшика.* Брањена 21. III 1934. Глас САН, Београд, 1935, 165, стр. 231—319.

[5)] *Арийшешичке и аналишичке йримене машемашичких сйекшара.* Брањена 6. XII 1934. Београд, 1935, 8°, 68.

[6)] *О базама нейрекидних функција.* Брањена 22. IV 1937. Глас САН, Београд, 1939. 178, стр. 87—126.

[7)] *Границе корена алīебарских једначина.* Брањена 25. III 1938. Глас САН, Београд, 181, стр. 115—130.

објављено је седам књига које већим делом садрже расправе припадника школе Михаила Петровића.

Петровић је био члан више иностраних академија наука и члан многобројних научних друштава. Учествовао је на више међународних математичких конгреса и држао предавања на иностраним универзитетима.

17. новембра 1939. промовисан је за почасног доктора филозофије Београдског универзитета.

Петровић је био плодан научни радник. Прва његова расправа објављена је 1894. године у издању Академије наука у Паризу. Од тада па све до смрти 1943. године он је стално и систематски радио и објавио близу 250 радова од којих су 12 посебна научна дела. Расправе је штампао у земљи и иностранству, на српском и француском језику.

Петровићеве расправе могу се разврстати у следеће области: аритметика, неједнакости, полиноми, функције комплексне промењиве, диференцијалне једначине, интегрални рачун и општа феноменологија.

Михаило Петровић имао је интуиције, проналазио је интересантне проблеме за проучавање и често им давао елегантна решења. Он је имао много идеја, па није стизао да их до танчина обради. Стога се проучавањем његових расправа, нарочито из области диференцијалних једначина, могу наћи идеје за нова истраживања. Зато нове генерације наших математичара треба да проучавају Петровићеве расправе јер ће се овим не само усавршавати, већ се могу инспирисати за нова сопствена истраживања.

Петровић није био само професор и научник, већ је био и алас и стручњак за питања риболова, због чега је добио своје популарно име Мика-Алас. Постао је стварно рибарски калфа 1888. године, а нешто касније положио је испит за рибарског мајстора. Имао је своју рибарску дружину и када је одлазио у риболов потпуно се понашао као професионални алас.

Петровић је такође био страстан путник у егзотичне крајеве света и путописац. Године 1931. и 1933. боравио је као члан једне научне експедиције у Северној поларној области, а 1935. године у Јужној поларној области.

Српска књижевна задруга објавила му је књиге: *Кроз Поларну Област* (1932), *У царству гусара* (1935), *Са океанским рибарима* (1935), *По забаченим острвима* (1936), *Роман јегуље* (1940).



# ПРИЛОЗИ

## 1. НАСТАВНИ РАД М. ПЕТРОВИЋА

### Семестрална предавања од 1894. до 1938.[1]

* Аналитичка геометрија у равни и простору.
* Виша алгебра.
* Диференцијални и интегрални рачун.
* Геометријске примене теорије диференцијалних једначина.
Рачунање са бројним размацима.
Теорија бескрајних редова.
Елиптичке функције.
* Парцијалне диференцијалне једначине математичке физике.
Линеарна диференцијална једначина другог реда и њене примене.
Квалитативна интеграција диференцијалних једначина.
Интеграција диференцијалних једначина помоћу редова.
Аналитички проблеми за обраду.
* Теорија грешака (Београд, 1930).
* Теорија аналитичких функција.
Елементи математичке феноменологије.

### Уџбеници

Елементи математичке феноменологије (Београд, 1911, 774 стр.).
Рачунање са бројним размацима (Београд, 1932, 193 стр.).
Елиптичке функције (Београд, 1937, 128 стр.).
Интеграција диференцијалних једначина помоћу редова (Београд, 1938, 221 стр.).

### Табаци

Курсеви обележени знаком *.

[1] М. Петровић је давао рукописе својих предавања за скрипта Удружењу студената математике Универзитета у Београду. Он је водио строгу евиденцију о својим публикацијама и на основу ње дао је Д. С. Митриновићу наведени попис скрипата. Универзитетска библиотека »Светозар Марковић« има само неке од ових скрипата, што је за жаљење.

Поред ауторизованих скрипата, Удружење студената математике издало је и нека скрипта која су по предавањима Михаила Петровића саставили студенти. И она су данас ретка као што је случај и са ауторизованим скриптама.

## 2. ИЗ РАЗГОВОРА СА МИХАИЛОМ ПЕТРОВИЋЕМ

Имао сам са Михаилом Петровићем честе састанке у његовом стану или винограду. Разговори су се углавном односили на математику. Али смо узгред додиривали и друга питања. Овде ћу изнети нека његова мишљења, која су данас више или мање актуелна.

1. Повео се разговор о одличним ученицима. Према Петровићу постоје две врсте одличних ученика. Једни су у стању да прилежно науче све што им наставник предаје. Шта више, у стању су да понове скоро сваку реч наставника. Ван тога они се ни за шта не интересују. Такви ученици на испитима ипак одлично пролазе. Другу врсту сачињавају стварно одлични ученици, који имају више знања од оних првих. Ова врста одличних ученика студира предмет користећи се литературом, док јој предавања служе само као оквир и подстицај за рад. На испиту ова врста одличних ученика оставља гори утисак него прва и овде испит не тече глатко, тако да се успех оцењује мањим поеном. На основу стеченог искуства Петровић је закључио да се научни радници и добри средњошколски наставници развијају првенствено из друге врсте одличних ученика.

2. У доба антисемитских прогона у Европи, у годинама пред II Светски рат, интервенисали су код Петровића његови другови и колеге из иностранства са молбом да на Универзитет у Београду дођу неки инострани математичари. На ово је професор Петровић одговорио негативно. У вези са овим, Петровић ми је говорио да је он мишљења да је врло важно имати на универзитетима наше кадрове и да не треба поновити грешку која је учињена са пријемом на Универзитет емиграције после Октобарске револуције. Овако је професор Петровић објаснио долазак ове емиграције. Тадашње Министарство иностраних послова обавестило је Универзитет да се известан број професора из Русије налази привремено у Југославији и да би они могли да одрже известан број предавања која би финансирало Министарство иностраних послова. На ово је Михаило Петровић одговорио, као шеф математичке катедре, да ће ускоро његови ученици моћи да прихвате универзитетске курсеве из математике и да нису потребни никакви страни професори за математику. Ово је био и општи став Универзитета, како ми је рекао Петровић. Касније су професори — гости постали контрактуални професори на буџету Министарства иностраних послова. Петровић ми је тврдио да су и овом приликом са Универзитета указали на опасност за развој наших кадрова, али им је одговорено да финансирање контрактуалних професора нема никакве везе са редовним буџетом Универзитета, и да се њихова радна места сматрају као ванредна. А затим су једне године, око 1930, контрактуални професори пребачени на буџет Министарства просвете односно Универзитета. И тако су се обистинила Петровићева страховања за домаће кадрове, јер у периоду од 1931—1941. наш научни кадар није могао да добије места која су му по квалификацијама припадала. Пред II Светски рат било је југословенских математичара са већим бројем научних радова, који нису могли постати чак ни асистенти.



Какви су били изгледи за развој нашег научног кадра у то време показује једна репортажа, објављена у *Политици* од 8. V 1938, поводом пензионисања Михаила Петровића. У тој репортажи, која је написана на основу података датих од Математичког института Универзитета у Београду (односно од Петровића), стоји између осталог:

— Петнаест доктора математичких наука које је створио Институт активно и са успехом раде на својој науци, и поред свега тога што неколицина њих имају да раде сасвим друге послове као гимназиски наставници, послове који не остављају довољно времена и не дају великих могућности за научни рад. Може се замислити колика је чиста љубав тих младих научника за своју науку кад се узме у обзир да је они имају да обрађују потпуно незаинтересовано, без икаква изгледа да ће такав рад допринети њиховој службеној каријери и омогућити им улазак у Универзитет, где су сва места попуњена, а иначе их је врло мало.

— Са колико незаинтересованости раде они на науци види се из тога што, на пример, на самом Београдском универзитету... асистент[1] за математику, који је на томе месту већ више од десет година и за кога нам је речено да има све квалификације за ванредног професора, — ни до данас, опет из буџетских разлога, није могао постати ни доцент Универзитета. Један млађи гимназиски наставник[2], доктор математичких наука, са великим бројем самосталних радова и научних новина публикованих у издањима наших и страних академија наука, — поред

[1] др Милош Радојчић
[2] др Драгослав С. Митриновић

свих својих квалификација за универзитетског наставника, нема за овај мах никаквих изгледа да као такав дође на Универзитет.

3. Дискутовали смо једном приликом о друштвеним обзирима, па ми је професор Петровић испричао овај случај. Један Петровићев колега[1]), професор, хтео је да постане академик, па је интервенисао преко другог да га Петровић предложи. Петровић је био мишљења да тај професор нема услова да буде академик, али ипак то није хтео отворено да каже да се односи не би покварили. Написао је реферат са материјалом који му је кандитат за академика дао и предложио га је за академика. Али Петровић не само да није гласао[2]) за овог кандидата, већ је упозорио и своје другове и пријатеље на реферат који је написао и потписао не по своме уверењу већ да би сачувао друштвене односе. И овај кандидат није изабран. Али Петровићев став не бисмо смели да следимо. Напротив.

4. Једно мишљење Михаила Петровића, које је увек актуелно. Он је мислио да на Универзитету сваких десет година треба поново вршити изборе свих наставника. Ево његовог аргумента. 1905. године, приликом претварања Велике школе у Универзитет, известан број наставника са Велике школе није примљен на Универзитет. Међутим, они најслабији који су отпали 1905, успели су да дођу на Универзитет касније, јер, како рече проф. Петровић, ти најслабији су били упорни и витални мада у стручном и научном погледу нису задовољавали. Тако је у току дужег или краћег времена стицајем околности дошао на Универзитет известан број ових људи који се, по Петровићевом мишљењу, могу са Универзитета одстранити само ако се изврше поновни, објективни и строги избори.

5. У више махова дискутовали смо Петровић и ја о нашим математичарима. Интересантно је његово мишљење о тзв. векторској школи Београдског универзитета, како су каткада себе називали професори: Миланковић, Билимовић и Жардецки. Овом приликом не желим да ово мишљење потпуно изнесем, већ ћу навести један интересантан детаљ у вези с тим. У нашој дискусији о тематици у радовима проф. Билимовића, Петровић је говорио да он, Петровић, не сматра као научни рад давање векторског облика познатим резултатима, али да и

[1]) др Никола Салтиков

[2]) Гласање је било тајно.



такви радови имају интереса са методске стране. Слично мишљење је имао за геометријске интерпретације познатих резултата. Петровић је знао да се за њега говорило, баш у Математичком институту, да „не види простор". Уосталом, ако би ово и било тачно, Петровић не би био први аналиста који је „слабо видео простор". Шта више, то је карактеристична црта аналиста високог ранга. Такав је, на пример, био велики научник Hermite (1822—1901), француски математичар.

6. За потребе научних истраживања професора М. Миланковића предузет је у Астрономској опсерваторији у Београду, током 1928. и 1929. године, замашан и заморан посао да се, узимајући за основу Le Verrier-ов рад, прераде рачуни секуларних промена астрономских елемената Земљине путање, узевши у обзир вредности маса планета познатих до 1928. године. Посао је био организован овако. Станимир Фемпл, тада асистент, и ја, тада студент, независно један од другог, имали смо да извршимо наведене рачуне. Фемпл је приступио рачунању не трансформирајући претходно Le Verrier-ове обрасце, док сам ја најпре извршио неке трансформације које су омогућиле да рачунање иде нешто брже него код Фемпла. Обојица смо радили потпуно самостално и независно. За овај посао довољно је било знање које један студент стекне за прве две године студија, али је била потребна гвоздена самодисциплина и воља у раду. Фемпл и ја завршили смо овај заметни посао и предали га проф. Мишковићу, преко кога нам је и био додељен, и то не само рачуне — него и методику рада. Касније је проф. Мишковић објавио у Гласу САН (књига 143, 1931, стр. 91—118) расправу под насловом: „*О секуларним неједначинама астрономских елемената Земљине путање*". У тој расправи проф. Мишковић је изнео рачуне Фемпл—Митриновић пропративши их историјатом овог проблема, али он није уопште навео ауторе тих заметних рачуна. Проф. Миланковић, који је такође знао за ауторе ових рачуна, назвао их је „Мишковићеви рачуни"[1]) (видети његов

[1]) Проф. Миланковић користио је рачуне Фемпл—Митриновић, али је њиховим ауторима делимично одао признање тек 1952. године (видети: М. Миланковић, *Успомене, доживљаји и сазнања из година 1909. до 1944*, САН, Посебна издања, књига 195, 1952, стр. 230). Проф. Миланковић каже на наведеном месту: „Не штедећи себе, а ни своје помоћнике, међу којима је изабрао најспособније, Митриновића и Фемпла, Мишковић ми већ крајем новембра 1929. предаде у руке готова израчунавања секуларних промена

чланак *Астрономска теорија секуларних варијација климе*, Глас САН 143, 1931, стр. 25—90).

Ја сам о овом случају обавестио Петровића тек 1938. године. Он је био револтиран због овог поступка и после његове енергичне интервенције, проф. Мишковић, у једној од својих расправа (Глас 178, 1939, стр. 21—29), у којој нисам имао никаква удела, написао је: „Пре шест година објављени су резултати првог дела рачуна секуларних промена астрономских елемената Земљине путање. У том рачунском раду, који је трајао скоро пуне три године, помогли су ме у знатној мери др Драгослав Митриновић и Станимир Фемпл, тада асистенти Астрономске опсерваторије."

Проф. Мишковић је био присиљен интервенцијом Михаила Петровића, да наведе тек после шест година ауторе тзв. „*Мишковићевих рачуна*". То доказује како је Михаило Петровић био енергичан у случајевима када се радило о исправљању једне неправде.

7. На конкурс за професора Велике школе осим Петровића јавио се и Петар Вукићевић који је 29. септембра 1894. положио докторски испит на Универзитету у Берлину са тезом из теорије диференцијалних једначина: *Die Invarianten der linearen homogenen Differentialgleichungen n-ter Ordnung*, Berlin, 1894, 42 S..

Једном приликом у разговору са писцем овог чланка Петровић је изјавио:

»Вукићевић, после неуспеха на конкурсу, није се више бавио научним радом. Да ја нисам био изабран, вероватно да би се то и са мном догодило«.

8. Немачки математичар H. Schwarz на једном интернационалном конгресу математичара изјавио је да у његовим радовима нема никаквих грешака. На то му је М. Петровић одговорио: »Код мене, напротив, у сваком раду има грешака.«

9. У École normale supérieure Петровићу је, поред осталих, предавао J. Tannery, познати методичар. Његова предавања ни

---

астрономских елемената Земљине путање извршена за временски интервал од минулих 600 хиљада година".

Иначе, у ранијим својим публикацијама проф. Миланковић је ове рачуне везивао искључиво за име В. Мишковића. Видети, на пример:

М. Миланковић, *Основи небеске механике*, Београд, 1947, стр. 86;

М. Миланковић, *Астрономска теорија климатских промена и њена примена у Геофизици*, Београд, 1948, стр. 111.



М. Петровић ни његови другови нису пажљиво слушали. Тек касније, више година по завршетку студија, Петровић је увидео да је Tannery предавао интересантне ствари и кајао се због непажње из ђачког доба.

10[1]. М. Петровић није имао повољно мишљење о научном доприносу Богдана Гавриловића. О вредности радова Милутина Миланковића имао је резервисано мишљење и стављао је Миланковићу примедбе на некритичну употребу математичког апарата у расправама. Свог професора Димитрија Нешића сматрао је за талентованог методичара, али са мало знања. Петровић је имао лепо мишљење о Љубомиру Клерићу, а врло неповољно о Мијалку Ћирићу о коме је често са хумором причао.

11. По избору за професора Велике школе М. Петровићу су поверaване важне функције. Он је био члан Главног просветног савета, референт за средњошколске уџбенике из математике, члан Комисије за професорске испите, изасланик на вишим течајним испитима итд. Међутим, више година пре почетка I светског рата Петровић је успео да се постепено ослободи свих наведених функција. Поводом тога, он је говорио:

— Имао сам да изаберем између мира и борбе са писцима. Одрекао сам се за свагда да будем референт уџбеника, јер су писци тврдоглави. Тако сам имао слободног времена за научни рад.

— Као изасланик на вишим течајним испитима у гимназијама предлагао сам, са детаљним образложењем, разне реформе у школи. Међутим, сазнао сам, да реферате нико не чита. Стога се убудуће нисам прихватао јаловог посла.

— На професорским испитима одбио сам да учествујем, јер би било незгодно да ми кандидат падне на испиту, када је из материје већег обима већ положио испит. А таквих случајева је било.

12. У почетку свога научног рада Петровић је отишао до Painlevéа и питао га је за мишљење о једном свом раду. Painlevé му је рекао да резултати добијени у раду немају интереса и да

---

[1] Можда ће бити стављени приговори што су наведена мишљења овде објављена. Али историја науке не може се заснивати на култу романсираних личности као што је Милутин Миланковић то учинио у својим списима о себи и Михаилу Петровићу. Видети: М. Миланковић: *Успомене, доживљаји и сазнања из година 1909. до 1944*, Београд, 1952, 322 стр.

би требало радити на питањима која му је прецизирао. Петровић је послушао Painlevéa и није послао чланак за Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris. После извесног времена Петровић је отишао до Goursata и питао га за мишљење о једном новом резултату до кога је дошао. Goursat му је рекао да овај резултат нема интереса и да треба обрађивати баш питања за која је Painlevé изјавио да нису од интереса.

У вези са овим Петровић је говорио:

»Захваљујући Painlevéy један леп резултат није ми објављен у Comptes rendus. Међутим, из супротних гледишта Painlevéa и Goursata извукао сам поуку да човек треба да ради по своме укусу и нахођењу«.

Петровић се држао наведеног гледишта и никоме није наметао област у којој ће научно радити.

13. На почетку Петровићеве професорске каријере за набавку књига буџетом је била одређивана позиција на личност, а не на катедре и институте као што је то сада случај. Петровић је причао да му је Мијалко Ћирић, професор математике Велике школе, уступао за рибе цео свој кредит. Тако је Петровић увек имао доста кредита за набавку књига. Захваљујући Б. Гавриловићу и М. Петровићу, библиотека Математичког семинара била је снабдевена главним часописима и класичним делима. Ова библиотека изгорела је приликом ослобођења Београда 1944. године.

## 3. ПИСМА М. ПЕТРОВИЋА ИЗ ДОБА СТУДИРАЊА У ПАРИЗУ

Почетком октобра 1889. М. Петровић је отишао на студије у Париз. Из периода 1889—1891. сачувано је више његових писама. Сва ова писма упућена су другу Паји[1]. У овим писмима често са лепим хумором Петровић је забележио интересантна запажања.

Овде се доносе нека писма из 1889—1890. без икаквих правописних или других измена.

[1] То није Павле Поповић, школски друг М. Петровића, некадашњи професор књижевности на Универзитету у Београду.



Париз 8. окт. 89

Драги Пајо,

Синоћ испратих деду, па сада дође на ред да ти пишем. Нећу ти писати како ми је сад и како се осећам у оваквим приликама, у оваквоме свету, овако одвојен од куће од које се никад нисам одвајао и која је за мене увек била место у коме сам био сретан и задовољан, — нећу ти о томе писати, једно зато да ти не досађујем казивањем онога што и сам у напред знаш: друго, зато, што сам се ја некад смејао Марку, кад ми је у писмима туговао; и најзад за то, да ти не изгледам малодушан какав у овој прилици нисам.

Боље ће бити да ти причам нешто стварније и практичније: Како смо путовали од Београда до Париза, и са каквим друштвом.

Као што знаш, из Београда смо пошли са Ристом Попадићем и Гавром Сињановићем. До Беча путовали смо мирно, странци су целога пута спавали, и ја нисам на њих ни обраћао пажњу. У Бечу смо преноћили, провели 1 дан, па сутра дан отишли на станицу одакле полази влак за Минхен. Таман ми у станицу, а пред нас из небуха — као да је с неба пао — бану Ђура антиквар са неким џаком на леђима. Замисли само: Попадић са његовом врећом (видео си да је пртљаг понео у врећи), Гавра са скрханом ногом, Ђура са оноликим трбухом напред, и са џаком на леђима — и Париз! Ама не би изабрао лепше друштво за Париз, па да си га свећом тражио, као Диоген људе!

Попадићев је посао био уз пут, да се свађа са сваким, са киме би друштво имало посла; да се цењка са кафеџијама, трговцима, сарафима, благајницима, келнерима, итд. и да метнувши фес на главу (путовао је једнако са великим турским фесом), стане на врата од купеа, те да својим изгледом плаши путнике, да не улазе у њихов купе. Ако иоле познајеш Попадића, вероваћеш ми да је он све ово извршавао тако, да би од њега бегао и попустио му и сам ђаво, а камо ли плашљиве и нервозне Швабе; ови су га увек сматрали за Турчина, и бегали из нашег купеа као ђаво од крста (Ваљда знаш да Шваба и Турчин никако не могу заједно путовати, због турске прљавштине).

Ћопави Гавра истина није носио врећу, али је он сам врећа. Од његовог друштва имали смо ту вајду, што смо га увек морали скинути из вагона и гурати у вагон кад се пење.

Но, најоригиналнији и најинтересантнији од свију био је Ђура антиквар. Знаш већ каквог га је бог дао; путовао је обријан и са наочарима које су му од натраг биле везане канапом. Но ипак он је био најсретнији од свију нас; деду су свуда сматрали за Влаха због дугачке косе и говора; Попадића за Турчина по изгледу и фесу, а Гавру за Бугарина. Али Ђуру су сматрали свуда за баварског „фетера" и све док није проговорио, добро је пролазио. Но оно што је најсмешније код њега било, то је споразумевање са Швабама. Кад хоће у кафани што да поручи, он зове келнера пред себе, мете своје наочари, веже их од натраг, премери келнера од главе до пете, као оно мене Вујић у гимназији, опсује му мајку швапску (разуме се на српском) па онда поручује. Али како поручује! Он слушао код нас Швабе како говоре исквaрено српски, па мисли ако и он тако говори, сваки ће га Шваба разумети. »Напрдај српски, ето ти швабећи«, мудрује Ђура. Срећа само, те зна по неку Немачку реч, те Шваба тек од прилике види шта ође да му се донесе. Да си био у Штрасбургу оно вече које смо ми ту провели, било би ти доста смеја за годину дана.

Ето такво ти је од прилике било друштво са којим сам био сретан путовати »колико да је човек слободнији, и колико четворе очи више виде но двоје«.

Што се тиче моје садашње околине, могу ти казати да сам задовољан, а да би ми на против, страшно тешко било да сам остао у Немачкој. Нема овде оне утегнутости, церемонија и глупих обичаја, које сам за оно неколико дана што сам у Немачкој провео — имао прилике да видим. Овде ти је све некако природно, лако, без икакве натегнутости и церемонија. Код Шваба ти је као законом прописано како треба да ти је држање у тој и тој прилици, како треба држати нож, а како виљушку кад једеш итд., док код Француза све то иде онако како је најлакше и најприродније, као и све друге ствари. Па чак можеш се овде и носити како год хоћеш; никоме нећеш пасти у очи и имати због тога каквих неприлика.

Ово што сам ти казао, само је један утисак који сам ја осетио прошавши кроз Немачку и дошавши у Француску; то може и бити само први утисак и више ништа; али мени је баш то мило што је први утисак тако леп, а како ми изгледа и оправдаће се.

Задовољи се Пајо и са овим, јер заиста ти не би ни имао за сад шта друго писати, ако нисам рад да будем досадан својим туговањем и да ти пишем о оном што те не занима и што те се не тиче. Док се будем боље известио о мојој школи, и док будем боље познао своју околину, писаћу ти више.

А сад прими најискренији поздрав од твога друга и исписника

*Мике* . . .

Париз 16/5 нов. 89.

Драги мој Пајо,

Прво и прво да те замолим да ово писмо не дође ником у руке, и да га или исцепаш кад прочиташ, или га добро склони, а видећеш сад зашто. Но прво да ти јавим шта ти имам јавити.

Твоје писмо примио сам, и искрено ти кажем да ме је много обрадовало. Умео си лепо одабрати све оно о чему би ја и желео да ми један искрен пријатељ пише, а то је: не много философирања, већ да ми да верну и праву слику онога, што ме интересује, за шта сам радознао, и што сам истина оставио, али о чему и дању и ноћу мислим. Само молим те да ми увек овако пишеш.

Добио сам данас писмо од Паје Шапчанина. Писмо је писао болан и преболан: сво му лице отекло, ослабио, малаксао и киван на цео свет, као што ми пише у писму, и као што би се видело из писма, и да ми није казао. Предаје у свих седам разреда, и одра се предавајући. Иначе ми не јавља ништа, већ само држи песимистичке лекције.

О мени пак да ти кажем за сад укратко ово: данас сам ишао са сином моје газдарице, који је свршио École normale supérieure директору те школе. Примио нас је врло лепо, и казао ми је ово: по закону у школу



могу ући само Французи, али има начина да и ја уђем у ту школу. Само за то треба да наш посланик у Паризу упути једну молбу франц. министру спољних послова, овај министру просвете, који ће тражити мишљење од управе школе, а ово ће бити у моју корист. То је једно; друго је то, што морам да полажем пријемни испит као и остали ученици и без кога се не улази ни у једну стручну школу овде. Испит се полаже на лето, а у школу улазим до године. Зато ове године морам се трудити за испит, који је врло озбиљан, и постарати се да ми не прође ова година ни у шта. Немој о овоме говорити ништа код моје куће, док ти ја не пишем.

Ја, казао ми је и то, да ћу ићи у школу као интерн, бићу као у касарни, и никаква се разлука неће правити између мене и француских ђака. Као што видиш за сад могу бити потпуно задовољан и прионути са вољом на посао.

А сад да ти кажем оно што ми је управо главно, и што ти пишем за то, што си ми ти једини пријатељ у Београду, на кога се могу у овоме ослонити. Ако ми можеш учинити ово што те молим, учини; ако не, нема никакве замерке, јер знам да би мени било врло тешко да учиним ово, за шта тебе молим. Свакако уверен сам, да ако буде зависило од твоје предусретљивости, а не буде других тешкоћа, учинићеш ми ово. Ево у чему је ствар.

Ствар се тиче темата. Седим ја тако пре неки дан па философирам: мајку му, кад сам лане дигао муле 30 цес., а није ме коштало много муке, за што да не покушам и ове године па да зарадим ако не коња, а оно бар какав алов, или лапташ. Време је истина кратко; али кад би се прионуло својски, можда би се још могло истерати што год. Вајкао сам се и тамо и овамо; али кад сам помислио да ми је ствар позната но она лањска, решио сам ово: ако се будем известио о књигама, и ако будем видео да још има могућности да се изради до рока, хоћу да покушам, па ако упали — уживај, а ако не — исцепај, па ником ништа. Темат је: пол и полара код кривих линија.

Данас сам питао овог мог нормалца да ми каже шта о тој ствари, и да ме упути где ћу да читам. Изненадио сам се кад ми је казао оно што сам и сам мислио, а то је: да му је познат пол и полари само код линија другог степена: круга, елипсе, параб. и хиперб., а да му је сасвим непознато питање о полу и полари код кривих линија у опште. Истина казао ми је да ће о томе потражити што год, и да ће ми казати што год зна (а ја сам му казао да један мој брат ради тезу о томе питању), али на то се не могу ослонити. И као што видиш Пајо, овамо-онамо па опет на твој врат.

Пријатељска и велика услуга, за коју те молим, ова је:

Да се састанеш — како год за најзгодније нађеш — или са Капетановићем, или са Богданом Гаврил. или са Нешићем — а знам да ће ти сва тројица радо одговорити на сва питања, — па да им кажеш: да један твој пријатељ, предавач из унутрашњости, почео да ради темат; али како није са свим начисто како га треба радити, и да би желео знати ово:

1. Тражи ли се да се третира питање о полу и полари кривих линија у опште, или само линија другог степена?

2. Начин третирања питања: које ствари отприлике треба обухватити тематом, и на шта нарочиту пажњу обратити? У чему треба да се огледа оригиналност писца?

3. Којим књигама треба да се служи, и нарочито: којим француским књигама.

4. Хоће ли се обраћати велика пажња на слике; треба ли ове да су одвојене од текста, или у самом тексту?

Од велике би важности било за мене кад би ми одговоре саопштио баш онако исто као што их чујеш.

Пајо! Ја знам добро колико сам те овим натоварио, али ипак ти кажем: да те ово ни као друга не обавезује да учиниш, већ само ако не будеш нашао да у томе нема великих тешкоћа: и ако ми пишеш да ми ниси могао ово учинити, ја ћу знати да просто није било могуће.

Али, ако се будеш известио о овоме, онда молим те — кад ми будеш писао, јави ми и ово:

Какав је тачан наслов темата, који је крајњи рок за израду, јеси ли чуо да га још ко ради — а нарочито Коста Стојановић, и још шта будеш знао о томе.

Питања, за која сам те молио да се известиш код професора, то су питања на која има право сваки да се извести код професора, и која нису ни мало непоштена. И Пајо, ако будеш у стању да се о њима известиш, до мене неће зависити да темат буде до рока готов; само треба што више хитати, јер је време врло кратко, и ако за неколико дана не добијем одговора, морам сасвим одустати. Ако ти пак није могуће да ово учиниш, пиши ми одмах и изведи ме из неизвесности. Само у сваком случају постарај се, да нико, али апсолутно нико, о овоме ништа не зна.

Ако ко случајно буде дознао за ово, извести ме одмах.

А сад молим те да ме извинеш што ти овако пишем, без икакве форме и са оваквим рукописом; али ово ти пишем после поноћи; и у највећој хитности. Писаћу ти боље док будем на чисто.

Поздрав од твога

*Мике*

Париз 2 Дец. 89

Драги Пајо,

Излишно је да ти захваљујем на љубави и готовости да ми учиниш оно, за шта сам те молио. До душе Нешићеви одговори нису ништа, али за мене су врло важни у толико, што сам из њих видео да се ствар тиче линија другог степена, а не кривих уопште. Пренеразио сам се кад сам видео какав је намћор Нешић, и још у оваквој ствари, где му је просто дужност да упути ђака, и где се не тражи да он олакша израду и да смањи труд ђаку, већ само да га изведе из забуне и да му колико-толико да правац. И то још Нешић, кога толики сматрају за финог и љубазног човека, готовог увек да обавести свога ђака! Мислим да се рад овакве врсте не састоји у томе, што ћу ја набавити каталог какве књижаре, претурати по њему, и двоумити два месеца: да ли да узмем ову или ону књигу; бојим се да неће бити у њој довољно материјала; па сам бадава платио и т. д., а међу тим могао сам узети много јефтинију, а у којој је то питање боље разрађено, и т. д.



Али нека иде до ђавола; казао ми је оно што ми је било главно, а за оно друго допунићу сам. Материјала сам већ скупио довољно, са планом сам начисто, и ма да је време врло кратко, држим да ћу га израдити до Божића. Да ли ће упалити незнам; али кад се сетим да је упалило лане кад је било мање вероватноће, храбрим се. Свакако неће ми бити од штете и дангубе јер ми те ствари требају и иначе за испит, и морао би их и без овога посла опширно разрадити.

Али, Пајо, кад будем почео писати имаћу неких тешкоћа, које долазе отуда што нисам учио ни читао нацртну геометрију на српском. Те су тешкоће у томе, што незнам српске изразе за многе и многе ствари у нацртној геометрији. Мислио сам у први мах да ти пошаљем једну групу тих израза на француском, па да их упоредиш са српским, и да ми их преведеш. Али ово би био велики труд, (а и доста велики безобразлук од мене), и мислио сам да би се томе могло најлакше овако помоћи: кад би ти могао да ми набавиш пројективну геометрију — Капетановићеве табаке — од принципа двојних знакова, двојних размера и т. д. па до краја, и то или да ми узмеш под кирију за једно 10—15 дана, па да му платим колико год тражи, или да ми је купиш. Мојима сам код куће писао да ти даду паре колико треба, па ако будеш набавио, подај мојима код куће да ми је пошаљу, и то овако: табаке да увежу на два конца унакрст да не испадају; за тим две траке од хартије унакрст, и на једној од њих адреса; чика Станко црквењак нека ти однесе у пошту, где ће се премерити и платити. (Немој да се смејеш што овако цепидлачим.)

У осталом ако би ти било лакше да запишем на артији све ове изразе које не знам на српском, па да ти Капетановић изабележи називе српске, јави ми. Само да ти кажем ово што једнако имам на уму кад год ти пишем о своме послу, а то је: да врло добро знам колико су ово жртве које иштем од тебе сад у овоме времену, кад имаш највише посла у школи, као што сам и ја лане имао; али да све чиме те теретим важи само у томе случају ако можеш да удесиш да те не кошта много муке. Да имам више пријатеља и другова, па да их молим наизменице за ове ствари, најбоље би било; овако сав терет пада на тебе једнога. А жао би ми било да баталим посао, кад сам већ набавио књиге и накупио доста материјала за ово неколико дана. У осталом више те нећу терати догод не израдим посао, кад ћу ти га послати па да га предаш где треба.

Мојима код куће и иначе никоме не говори ништа.

О себи и својим пословима немам ти чега новог писати. Ако си био скоро код моје куће, ваљда су ти казали шта сам писао да треба радити да би ушао у школу. Као интерн ући ћу на лето, пошто издржим испит, а посећиваћу часове чим буде израђено све што треба у Београду и овде ради дозволе. Не знам да ли је деда предузео штогод по оном што сам му писао; не пишу ми апсолутно ништа о томе.

На околину сам се већ сасвим привикао и кад већ не могу имати све оно што сам у Београду имао, задовољавам се и са овим. Друштва немам, али ми за ову годину и не треба, а кад пређем у школу имаћу зацело другова каквих желим. Време проводим читајући, учећи, шврљајући и зијајући по Паризу. За ових месец и по дана доста сам га искрстарио.

Пише ли ти што Пајо Шапчанин? Мени написа једно писмо шта ли је, па ту и тутило.

А сад Пајо у здрављу остај ти тамо учећи за испите, а ја овамо радећи овај посао који сам почео. Кад будем свршио известићу те, и послати га да га предаш. А дотле au revoir!

С поздравом твој

*Мика*

Париз 23/11 Дец. 89

Драги Пајо,

Толико сам заузет око ове ствари коју радим, да ти не могу ни о чему другом писати. Ја сам те једанпут за свагда молио да ме известиш за све док не будем свршио са овим.

Ствар напредује и скоро је свршена, тако да ћу ти послати одавде око нашег Божића да је предаш. Табаке сам примио и велика ти хвала; али ми нису ништа вајдили, јер о поларама нема у њима ни помена. Са друге стране опет добро је то, што сам се сам сетио за све изразе што су ми требали, и само ми је остао један, за који те молим ако га знаш да ми одмах јавиш, како не бих због тога одлагао преписивање. Ствар је у томе што незнам како Капетановић назива српски: figures polaires réciproques и polaires réciproques. О овоме се можеш известити из својих прибележака ако их имаш. Молим те, Пајо, погледај у прибелешке одмах чим добијеш ово писмо, па ми одмах напиши само 2—3 речи и пошаљи, како бих могао одмах преписивати на чисто.

Ако би ти било могуће да ми пошаљеш још и дефиницију хармонијских полова и полара, врло би добро учинио; али ми ово није толико важно као прво, и немој због њега одлагати.

Јави ми у исти мах да ли, кад ти будем слао ствар, да ти упутим преко школе или право кући, у коме ми случају пошаљи тачну адресу.

Поздрав и велико хвала од твога

*Мике*

Париз Први дан Божића 89

Драги Пајо,

Послах ти данас темат да га предаш у школи. Мислим да ће стићи за времена. Чим га примиш, молим те исправи га лепо, да не буде савијен, па однеси у школу, заједно са овом ковертом на којој је мото и у којој је име »писца«. Предати секретару или, ако овога не можеш да нађеш, фамулузу, а кажи да ти га је послао један друг из унутрашњости. Церемонија при предавању нема никаквих: просто унесеш код секретара и предаш му. Ја сам лане, не стигавши да предам 31 Дец. предао га 1 Јан. рано ујутру фамулузу, који га је метнуо на секретарово место и казао овоме да је темат јуче дошао.



Само те молим да незна нико.

Пази само молим те да при предавању не заборавиш што год; предати треба табаке, три картона са сликама и коверту.

Две ноћи како не спавам због тога полаког преписивања, с којим сам задоцнио не знајућ како да преведем оне изразе за које сам те питао. Моји код куће знам да се страшно љуте што им толико дуго не пишем; али шта ћу им. Ноћас и сутра да се испавам, па ћу им писати.

Пардон за овако писање, али опомени се да сам сањив и бунован, и да једва чекам да се изврндупим у кревет.

Ако би случајно одоцнио за седам дана може се удесити са фамулузом, па да им каже да је дошао раније, али га није предао. Ако треба зато пара, узми од моје куће. Молим те јави ми да си предао.

Велики поздрав, хвала ти.

Твој *Мика*

Париз 21/9 Јан. 90.

Драги Пајо,

Дозволи ми да те замолим још и за ову пријатељску услугу, после свију оних што си ми их већ учинио. Да бих одмах знао шта је са темом, кажи мојима да ми телеграфишу истога дана, ако темат буде награђен, а ако не, не говори ништа, већ ми јави писмом да се покријем ушима па да ћутим. У случају ако би ми имали добру вест јавити, нека ми телеграфишу на овај начин:

Petrovitch 13, 2ue Brezin, Paris. Druga. 360.

Друга означује да је друга награда, ако је трећа они нека означе: Tretcha; ако је прва нека метну: Прва, али само јасно и разговетно. 360 значи суму награде у динарима; ако буде други број нека метну њега. Молио бих те да им ти напишеш депешу на парчету артије у овом облику као што сам ти написао, па да им даш да телеграфишу. Само нека гледају да ми одмах испрате. Ако не добијем никакву депешу до 15. до подне, сматраћу да сам одбијен, што ми у осталом не би ни било чудо, јер се такви темати не раде за месец дана. Реч кошта — мислим 30 п. д[1]).

После неколико дана; ако будеш стигао, молио бих те да ми пишеш, како је било о Св. Сави, ко је и какву беседу у школи говорио, како су остали темати и тд., или ако то не бих могао, да ми пошаљеш једне наше новине, у којима би то било. Ако буде шта било од темата, пиши ми, како је деда био задовољан, да ли је био у школи као лане, и да ли је очекивао да ће и ове године бити оно исто што и лане.

И опет те молим, опраштај за све, па и за овако писање, и прими поздрав од твог

*Мике*

---

1) На овом конкурсу М. Петровић је добио II награду (видети чланак: Д. Трифуновић: *Школовање М. Петровића*, Математичка библиотека, свеска 32 (1967), 137—150.

## 4. ГИМНАЗИЈСКЕ УСПОМЕНЕ МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

Петровић, као пензионисани професор Универзитета у Београду, на следећи начин описао је своје школовање[1]:

— Кад би вам неко од негдашњих ученика Прве београдске гимназије рекао да је у Капетан-Мишиној згради провео пуних педесет и пет година, не променивши за све то време ни занимање, ни своју чиновничку каријеру, ви бисте га гледали са неверицом, питајући се да ли је тако шта могућно. Па ипак је не само могућно него је одиста тако и било, и то баш са писцем ових редака, који је у зграду ушао почетком школске године 1878/79. као ученик првог разреда гимназије, а из ње изашао школске године 1937/38. као пензионисани редован професор Београдског универзитета, без промене локала, са једним прекидом за време школовања на страни, после свршене Велике школе, опет у истој згради.

— Може се замислити колико је ту морало бити и драгих и немилих успомена, на таквом калеидоскопу личности и догађаја који су се ређали за време дуже од пола столећа, и у приликама које су се за то време низале једна за другом. Време само собом пречишћава успомене, гасећи оне што остављају слабији траг, па кад се оживљавају успомене као ове овде, кад се из даљине посматра оно што се дешавало пре више од пола века, немиле успомене долазе у задњи ред; у први ред истичу се оне што су пријатне и драге, а нарочито кад се нема склоности ка песимизму и не гледа кроз црне наочаре.

— Од тих драгих успомена нашег нараштаја једне су везане за школске другове, а друге за ондашње њихове наставнике у Првој гимназији. О друговима, од којих је њих неколицина још у животу, не мисли се овде говорити појединачно. Судбина нам је доделила разне улоге у животу и ми смо се по свршеном школовању разишли сваки на своју страну, састајући се с времена на време, обавештавајући се један о другоме и претресајући заједничке старе успомене. Тај нараштај није земљи дао ниједног државника, али је дао професоре универзитета, књижевнике, правнике, дипломате, лекаре и журналисте. Једна чињеница, запажена и код других нараштаја гимназиста, испољила се и код нас: оно што је друг давао од себе као гимназист и

[1] *Споменица о сторогишњици Прве мушке гимназије у Београду*, (1839—1939), Београд, стр. 293—301.



оно што је дао на свом пољу рада кад је свршио школу и стао на ноге, није увек било у сагласности и сразмерности. Понеки од нас, од којих су наставници били дигли руке, а и сами другови им предсказивали да од њих неће бити никад ништа, постали су доцније оно што се није могло од њих очекивати: одлични књижевници, првокласни журналисти и др. Обрнуто, од оних са самим одличним оценама није увек испадало оно што им се предсказивало да ће бити, и они су у животу остављали траг много слабији но они на које се мало рачунало.

## 5. ЈЕДНА АНЕГДОТА О МИХАИЛУ ПЕТРОВИЋУ

### Узбуна у манастиру[1]

Мика је 1908. године радио тежу расправу »Sur une classe remarquable de séries entières«[2], коју је спремао за Међународни математички конгрес у Риму те године. На ту је расправу много полагао. Радећи је, наишао је на неке тешкоће, или, како се он обично изражавао на »неке горогане«, које су му сметале да дође до решења, какво је он желео. Ни одлазак у виноград на неколико дана, ни дужи риболов нису га могли разведрити и цео даљи ток рада био је застао на мртвој тачци. Осећао се мучно, што је код њега у таквим пословима обично бивало врло ретко и краткотрајно. Чак се решавао да због тога и не иде на заказани конгрес. Ипак се најзад одлучио да за неко време промени цели београдски амбијент. Он оде у манастир Манасију, поневши собом сав материјал по томе питању. Тамо је по целе дневи тумарао по околини и шуми, бацајући за по који тренутак погледе и на тај свој рад.

Једне ноћи, око једног сата по поноћи, пробуди га нека страховита узбуна у манастиру. Цика, лупа, ларма, неартикулисани гласови, ломљава, јурњава — чинило се да су разбојници напали на манастир. Сви калуђери и сва послуга дигла се да оружјем брани манастир. Чуле су се и пушке. Мика се био јако препао тога, брзо је устао, обукао се, и почео паковати своје ствари да се враћа кући, непрестано прислушкујући шта се збива

[1] Миланковић — Михаиловић: *Мика Алас*, Београд 1946 (стр. 93 и 94).

[2] *Atti del IV Congresso internazionale dei matematici*, vol. II, sezione I: Analizi, Roma 1909, p. 36—43.

на »бојном пољу«. Најзад је чуо усклик: »Убили смо лопова! . . .« »Ево га мртвог! . .« Кад је одшкринуо врата, чуо је бравуре калуђера и послуге, ко је од њих какву вештину применио у тој борби. Кад је Мика упитао »Шта је то било?« одговорили су му: »Убили смо лисицу . . . дошла и почела да нам коље живину!« — Тај догађај имао је толиког утицаја на Мику да му се у тренутку кад је чуо први весели усклик »разведрило«, како ми је доцније причао, нашао је решење и још те исте ноћи до сванућа завршио тај рад, који га је дуго мучио. Тако је он са особитим задовољством отишао на конгрес.

Ево скраћене верзије ове Петровићеве расправе:

Полином

$$f_p(z) = \sum_{i=0}^{p} a_i z^i \tag{1}$$

зваћемо $\Omega$-полином ако за свако $n\,(\leqslant p)$ полином

$$f_n(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i \tag{2}$$

има све нуле реалне.

Потражимо који су потребни и довољни услови да би полином био $\Omega$-полином. Упоредо са полиномом $f_n(z)$ посматрајмо полином

$$g_n(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}. \tag{3}$$

Полином $g_n(z)$ може се дефинисати помоћу рекурентне релације

$$\begin{aligned} g_n(z) &= z g_{n-1}(z) + a_n, \\ g_0(z) &= a_0. \end{aligned} \tag{4}$$

Крива

$$y = g_n(z) \tag{5}$$

није ништа друго до крива

$$y = z g_{n-1}(z), \tag{6}$$

за коју је $z$-оса померана за дуж $-a_n$ наниже или навише паралелно самој себи, према томе да ли је $a_n > 0$ или $a_n < 0$. Ако се конструишу криве (5) једна за другом, полазећи од кривих

$$y = g_{n-1}(z), \tag{7}$$



без тешкоће се закључује следеће:

1° Ако се пође од кривих

$$y = g_1(z) \quad \text{и} \quad y = g_2(z),$$

при чему последња испуњава једино услов $a_1^2 - 4a_0 a_2 \geqslant 0$, и ако крива (7) сече своју $z$-осу у $n-1$ тачака, крива (5) сече своју $z$-осу у $n$ реалних тачака ако и само ако је померање $a_n$ њене $z$-осе мање или једнако од најмањег померања $\xi_n$ које треба да се изврши у назначеном смеру, зависно од знака $-a_n$, да би ова крива додирнула криву (6);

2° Ако је $a_n < \xi_n$, крива (5) сече своју нову осу у $n$ реалних различитих тачака; ако је $a_n = \xi_n$, те тачке ће такође бити реалне али нису све различите;

3° У случају када померање $-a_{n-1}$ има своју највећу могућну вредност, померање $-a_n$ које се односи на следећу криву могућно је само у једном смеру, позитивном или негативном, према томе да ли тачки додира криве (7) са својом $z$-осом одговара минимум или максимум функције (7);

4° Ако $z$-оса која одговара кривој (7) додирује ову криву у више тачака од којих су неке минимуми а друге максимуми, ниједно померање $-a_n$ није могућно.

Означимо са $\Delta_n(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ дискриминанту полинома (3) и посматрајмо алгебарску једначину по $x$:

$$\Delta_n(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, x) = 0 \tag{8}$$

чији реални корени по $x$ дају величине померања $-a_n$ $z$-осе криве (7) да би она додиривала криву (5).

Тада две прве једначине $\Delta_n = 0$, које одговарају случајевима $n=3$ и $n=4$, после уклањања очигледног заједничког решења $x=0$, постају

$$27 a_0^2 x + (4a_1^3 - 18 a_0 a_1 a_2) = 0,$$

$$\begin{aligned} 256 a_0^3 x^2 &+ (144 a_0 a_1^2 a_2 - 192 a_0^2 a_1 a_3 - 128 a_0^2 a_2^2 - 27 a_1^4)\, x \\ &+ (144 a_0^2 a_2 a_3^2 + 18 a_1^3 a_2 a_3 + 16 a_0 a_2^4 - 6 a_0 a_1^2 a_3^2 \\ &\qquad - 80 a_0 a_1 a_2^2 a_3 - 4 a_1^2 a_2^3) = 0. \end{aligned}$$

Ако са $\lambda_n$ означимо најмањи позитивни корен једначине (8) и са $\mu_n$ најмањи по апсолутној вредности негативни корен исте једначине, очигледно је да је највеће позитивно померање $\xi_n$ једнако $\lambda_n$ и да је највеће негативно померање $\xi_n$ једнако $\mu_n$.

Дакле, долази се до следећег става.

**Став 1.** *Да би полином $f_p(z)$ био $\Omega$-полином, потребно је и довољно:*

1° *да важи неједнакост*

$$a_1^2-4a_0a_2>0;$$

2° *да сваки коефицијент $a_n$ $(2<n\leqslant p)$ буде садржан између две одговарајуће вредности $\lambda_n$ и $\mu_n$.*

У граничном случају $\lambda_n$ и $\mu_n$ могу имати заједничку вредност 0: у том случају једино $a_n=0$ испуњава услове постављеног проблема.

У једном $\Omega$-полиному не могу постојати два узастопна коефицијента који су једнаки нули. Такође не постоји коефицијент који је једнак нули и који се налази између два коефицијента истога знака. Сви коефицијенти испуњавају услов

$$(n-1)\,a_{n-1}^2-2\,na_na_{n-2}>0 \tag{9}$$

до кога се долази полазећи од чињенице да извод реда $n-2$ функције $f_n(z)$ има обе нуле реалне.

Задржимо се сада на интересантном специјалном случају када су сви коефицијенти $a_i$ позитивни. Претходни став тада добија облик:

**Став 2.** *Да би $f_p(z)$ био $\Omega$-полином, потребно је и довољно да коефицијент $a_n$ буде мањи или једнак најмањем позитивном корену $\lambda_n$ алгебарске једначине* (8) *и то за свако $n$ од 2 до $p$.*

Пустимо сада да $p$ неограничено расте тако да $f_p(z)$ увек буде један $\Omega$-полином: $f_p(z)$ ће имати за границу један ред

$$\Omega(z)=\sum_{i=0}^{+\infty}a_iz^i \tag{10}$$

који је конвергентан у целој равни променљиве $z$ и чије су све нуле (њих је бесконачно много) реалне и негативне и има значајну особину да свака алгебарска једначина

$$\sum_{i=0}^{m}a_iz^i=0$$

има све корене реалне и негативне.



Довољно је доказати да ред (10) конвергира за све вредности $z$. Ово се доказује директно, на пример, помоћу неједнакости

$$a_n<\frac{a_0}{n^n}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^n \tag{11}$$

која се добија ако се са $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ означе апсолутне вредности негативних корена алгебарске једначине $g_n(z)=0$, искористе везе

$$\frac{a_n}{a_0}=\xi_1\xi_2\cdots\xi_n, \quad \frac{a_1}{a_0}=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$$

и неједнакост између аритметичке и геометријске средине бројева $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

На основу ова два резултата Петровић је доказао још неке резултате које ћемо формулисати без доказа.

**Став 3.** *Свака функција $\Omega(z)$ је производ једне целе функције рода нула и једне експоненцијалне функције облика $Ae^{az}$, где је $A=a_0$, $a=\dfrac{a_1}{a_0}$.*

**Став 4.** *Коефицијенти $a_n$ сваког $\Omega(z)$-реда задовољавају неједнакост*

$$a_n<\frac{a_0\beta^n\exp(-\alpha n^2)}{n!},$$

*где је*

$$\alpha=\frac{1}{2}\log 2,\quad \beta=\frac{a_1\sqrt{2}}{a_0}.$$

## 6. О ЈЕДНОМ ПЕТРОВИЋЕВОМ РАДУ

Петровић је 1938. године рекао да му је најбоље оно што је дао у почетку свога стварања — његова докторска теза, и једна расправа из диференцијалних једначина на крају његове каријере. Дакле, и једно и друго из диференцијалних једначина. Реч је овде о расправи: *Théorèmes généraux sur les équations différentielles algébriques* (Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, **6—7** (1937/1938), 290—325). Међутим, када сам 1938. године читао у коректури овај чланак указао сам Петровићу да су резултати до којих је он дошао познати још од

1902. и да их је он сâм у потпуности цитирао 1936. у својој књизи: *Један диференцијални алгоритам и његове примене* (Београд 1936) на стр. 146—149. Ово је Петровић примио прилично узнемирено и преда мном саставио примедбу која је на крају чланка и објављена. У новом чланку[1]: *Addition au Mémoire sur les équations différentielles algébriques* (Publications de l'Institut mathématique de Belgrade, **1** (1947), 1—4) Петровић је признао приоритет руским математичарима Лагутинском и Апелроту.

Интересантно би било са психолошке стране проучити како је дошло до тога да Петровић објави као свој резултат оно што је две године раније јасно изложио као резултат Лагутинског и Апелрота у једној од својих књига.

Ваља навести да референти у реферативним журналима нису ставили примедбу да Петровићев резултат није оригиналан.

## ЗАКЉУЧАК

Поводом стогодишњице рођења Михаила Петровића много је написано и још више усмено казано. Међутим, само по изузетку дате су критичне оцене на Петровићеве научне доприносе појединим областима математике. Сувише се инсистира, али не поткрепљује доказима, да је Петровић посебно оригиналан у феноменологији и у нумеричким спектрима. Међутим, потврђује се све више да су његови резултати из теорије полинома, диференцијалних једначина и неједнакости не само и данас актуелни већ да они служе као полазна тачка за разне генерализације.

Остаје да се испитају значај, дубина и утицај Петровићевих резултата у светској математици. То могу да учине они који сами доприносе развоју математичких наука, а никако они који изучавају Петровићеву биографију а уз то се активно не баве научним радом у областима у којима је Петровић стварао.

[1]) Због избијања рата 1941. овај чланак изишао је из штампе неколико година после смрти Михаила Петровића.

МАТЕМАТИЧКА БИБЛИОТЕКА, 38 (1968), 33—38.

*Драгоје Тодоровић*

# ПРАВИ ДАТУМ РОЂЕЊА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

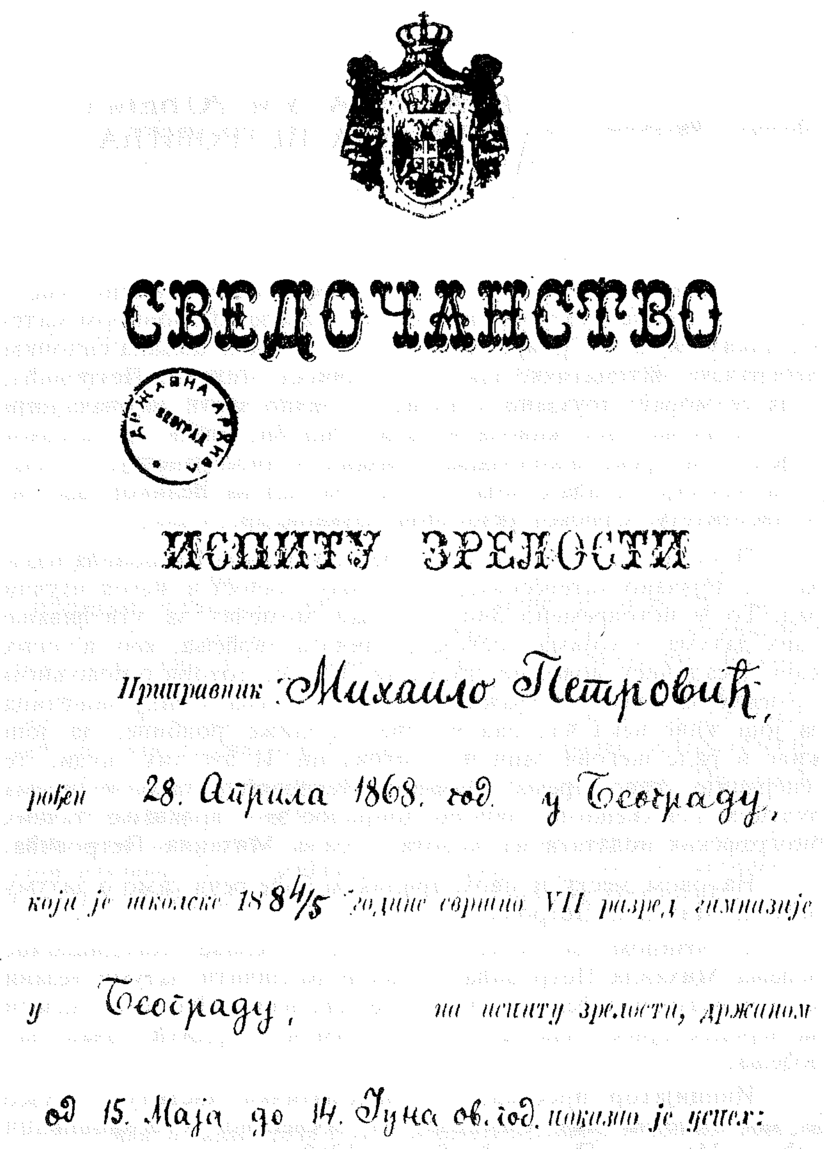
Кад је у питању личност која представља изузетно име у историји српске културе, личност коју називамо пиониром математичких наука у Србији, личност која је представљала синоним Београдске математичке школе — личност Михаила Петровића, онда се морају поуздано утврдити и тачно знати најзначајнији датуми из његовог живота и рада. Они би, почев од његовог рођења, па преко школовања у земљи и иностранству, обухватили важније догађаје везане за његов рад на Великој школи, Универзитету, Српској академији наука и др.

Прослава стогодишњице рођења Михаила Петровића изазвала је појачано интересовање за његову личност и његов научни рад. То је истовремено био повољан моменат за утврђивање оних датума о којима постоје различита тврђења, као и оних који досад нису довољно проучени. Кад се говори о повољном моменту за оваква истраживања, онда се има у виду чињеница да још живе неки чланови његове најближе родбине, да још живе и раде његови ђаци и поштоваоци. И дуг тих људи, те генерације, како према Михаилу Петровићу, тако и према будућим покољењима, био би допринос за утврђивање тачних биографских података из живота и рада Михаила Петровића.

На овом месту и овом приликом биће речи само о датуму рођења Михаила Петровића.

С обзиром да су се приликом прославе стогодишњице рођења Михаила Петровића појавили различити датуми везани за дан његовог рођења, потребно је, анализирајући исте, указати на веродостојност извора а самим тим и утврдити тачан дан рођења.

Иницијатор прославе — Математички институт — узео је као почетни дан Симпозијума посвећеног стогодишњици рођења Михаила Петровића 8. мај 1968. године.



СВЕДОЧАНСТВО

ДРЖАВНА АРХИВА БЕОГРАД

ИСПИТУ ЗРЕЛОСТИ

Приправник Михаило Петровић,

рођен 28. Априла 1868. год. у Београду,

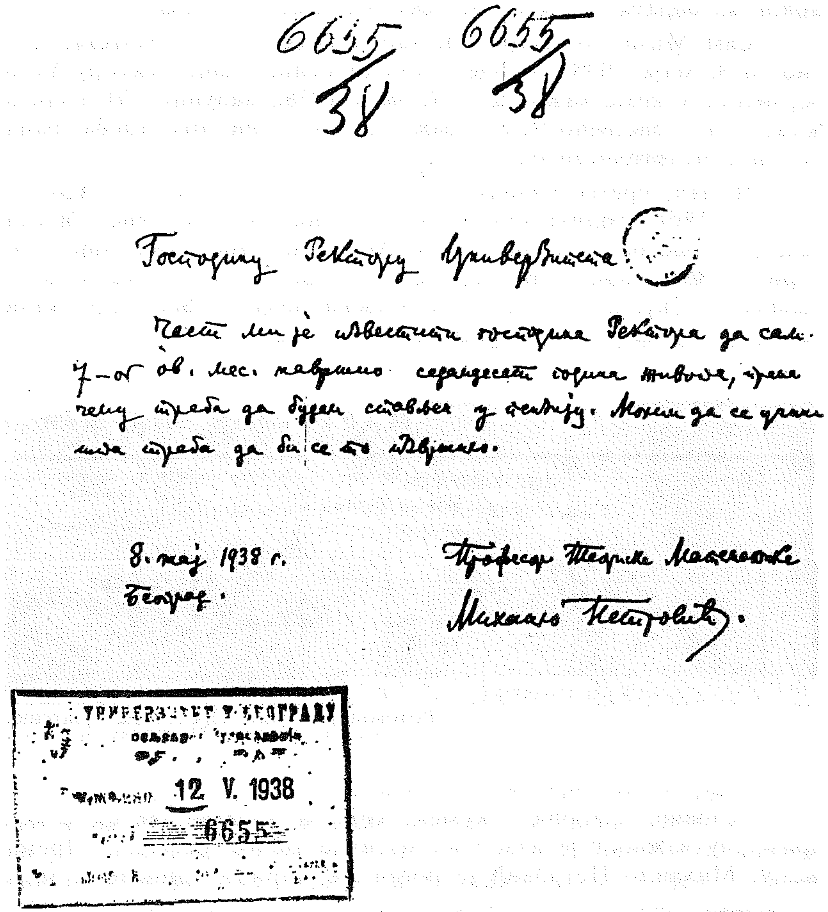
који је школске 188⁴/₅ године свршио VII разред гимназије

у Београду, на испиту зрелости, држаном

од 15. Маја до 14. Јуна ов. год. показао је успех:



Да ли је тај дан узет као годишњица рођења, то није наглашено, али га је тако требало разумети. Пренето на стари календар то би значило да се Михаило Петровић родио 25. априла 1868. године, јер је разлика између старог и новог календара у овом веку 13 дана.



6655/38 6655/38

Господину Ректору Универзитета

Част ми је известити господина Ректора да сам 7-ог ов. мес. навршио седамдесет година живота, према чему треба да будем стављен у пензију. Молим да се учини шта треба да би се то извршило.

8. мај 1938 г. Београд.

Професор Теоријске Математике Михаило Петровић.

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

12 V. 1938

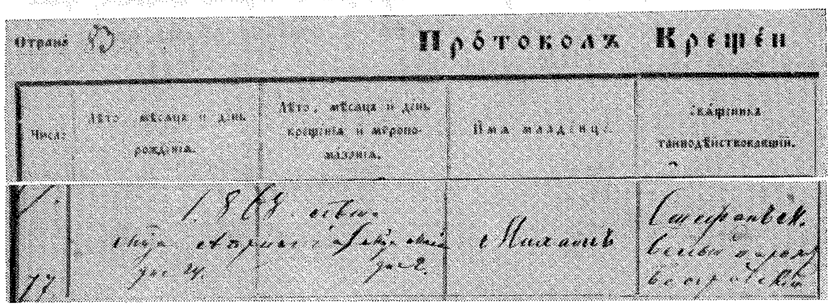
6655

Фотокопија — Обавештење Михаила Петровића ректору Универзитета да је напунио 70 година живота.

У Сведочанству о испиту зрелости, издатом Михаилу Петровићу од стране директора "Краљевско српске гимназије у Београду" под бр. 27 од 15. јуна 1885. године, стоји да је Михаило Петровић рођен 28. априла 1868. године,[1] што преведено на нови календар значи да датум његовог рођења треба сматрати 10. мај 1868. године, јер је разлика између старог и новог календара у прошлом веку износила 12 дана.

Сам Михаило Петровић, као професор Универзитета, упутио је 8. маја 1938. године писмено обавештење ректору Универзитета у коме каже да је 7. маја 1938. напунио 70 година живота и следствено томе тражи да се учини што треба ради његовог пензионисања[2].

Најзад, према Изводу из матичне књиге рођених, издатом 8. маја 1968. године од стране Скупштине општине Савски венац у Београду, стоји да је Михаило Петровић рођен 24. априла 1868. године. Из Књиге крштених, страна 83/I која се налази у Скупштини општине Савски венац у Београду, види се да је тај датум 24. април 1868. године.




Фотокопија стране Протокола крштених

Који је од ових датума тачан?

Основни, изворни документ који за податке ове врсте има примарну важност је извод из матичне књиге рођених. Према њему, Михаило Петровић је рођен 24. априла, односно 6. маја

[1]) Архив Србије, Министарство просвете, Ф XXV, 207, 1894. година.

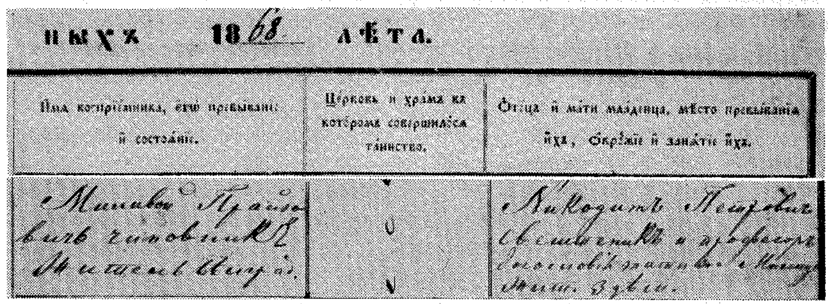
[2]) Архив Србије, Београдски универзитет, бр. 6655, 1938. година.



1868. године по новом календару. Откуда онда, питамо се, онај датум (28. април 1868. године) у Сведочанству о завршеном испиту зрелости? Зна се такође да је и сведочанство званична исправа, додуше званична првенствено кад су у питању подаци који се односе на оцене успеха, али се зна да и општи подаци о ученику такође морају бити веродостојни и унети на основу докумената. Како је дошло до тога да се појави ова разлика од четири дана? Да ли је у питању немарност професора, или је погрешка била последица нечег другог — тешко је поуздано и са сигурношћу данас утврдити. Остаје чињеница да је то други датум везан за рођење Михаила Петровића, да је то такође датум из прошлог века и датум са једног званичног документа, додуше за утврђивање података ове врсте секундарног кад постоји основни, онај из матичне књиге рођених.

Све друге разлике у одређивању датума рођења Михаила Петровића не односе се на разлике у изворима већ у рачунању.

Сам Михаило Петровић, кад обавештава ректора да треба учинити што је потребно за његово пензионисање, због тога




у који је уведен Михаило Петровић

што је 7. маја 1938. године навршио 70 година живота, потврђује да је рођен 24. априла, односно 6. маја 1868. године. Он у том документу тачно пише да је „навршио" 70 година живота 7. маја 1938. године, а не каже да је рођен 7. маја 1868, јер је он врло добро знао да разлика између старог и новог календара у XX веку износи 13 дана. Према томе, дан стогодишњице његовог рођења може бити само 7. мај 1968. године, наравно, узимајући као датум његовог рођења 24. април, односно 6. мај 1868. године. Двестогодишњица његовог рођења биће 8. маја 2068. године, јер ће у идућем веку разлика између старог и новог календара износи 14 дана.

Значи, разлика је често долазила отуда што се датум његовог рођења мешао са годишњицама везаним за његово рођење.

Према томе, држећи се извора којима данас располажемо, Михаило Петровић је рођен 1868. године, 24. априла по старом, односно 6. маја по новом календару.

*Примедба Редакционої одбора*

У часопису *Математика в школе* 1968, № 2, стр. 92—93 у рубрици: *Математический календарь на* 1967/68 *учебный год* објављена је следећа информација:

7 мая — 100 лет со дня рождения сербского математика, члена Сербской АН Михайло Петровича (1868—1943). Петрович родился в Белграде, окончил Парижскую Нормальную школу, был профессором математики в Белграде. Основные работы Петровича относятся к теории функций комплексного переменного, обыкновенным дифференциальным уравнениям, теории рядов и философии математики (см.: „*Реферативный журнал*", 1956, №. 1; 1957, №. 3; 1963, №. 10).

МАТЕМАТИЧКА БИБЛИОТЕКА, 38 (1968), 39—43.

*Милан Ђоковић*

# ФРАГМЕНТИ СЕЋАЊА НА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

Моја генерација, која је матурирала и уписала се на факултет пред крај треће деценије овога века, знала је за Михаила Петровића још у гимназијским клупама. „Математичаре" је привлачио велики углед тога имена у читавом свету а идеју о величини његовог угледа добијали су из дневне штампе. „Нематематичари" су били под утиском једне занимљиве и динамичне личности у пуном смислу речи, о којој се и говори и пише. Кроз Београд су, у то време, кружиле многе анегдоте о Мики Аласу. О његовом рибарењу и дружењу са дунавским аласима. О професору који са висина једне многима недостижне и скоро тајанствене науке силази међу обичне људе и с њима разговара свакодневним језиком. О друштву „Суз" у које се није могло лако да уђе и о којем се, зато, ваљда, много причало. Петровић је и сам доприносио својој популарности објављујући у празничним бројевима „Политике" врло занимљиве нематематичке чланке о путовањима која су обичним читаоцима личила на смеле авантуре људи не само изузетне научне радозналости него и изузетно храброга срца; затим чланке о севдалијама старога кова и Циганима-примашима који су умели да одврну славине нашој познатој фантазији за весела лудовања на пријатељским седељкама. Та чудна спрега између високе науке и свакодневног живота надахњивала је и младе људе симпатијама за Аласову демократичну личност.

Испуњен таквим симпатијама, ја сам једнога пролећног дана као млад новинар зазвонио на малој кући Косанчићевог венца која се у својој околини истицала једноставношћу и господственом строгошћу. Испред мене је ишла препорука мога професора Павла Поповића, школског друга и једног од најинтимнијих пријатеља Петровићевих. Зато су се врата лако отворила, зато сам био примљен без оног обавезног устезања пре него што се развеже разговор, зато сам на првом кораку био уверен да ћу свој новинарски задатак обавити успешно.

Стао сам испред човека средњег раста, кратке проседе косе и кратких проседих бркова. Фотографије на којима сам га пре тога видео чинило ми се да само подсећају на овај лик чији је шарм управо у томе што на њему све живи и свакотренутно се мења а фотографија хвата цигло једну нијансу међу многима. И не само то. Има људи које *видиште* тек кад проговоре. А професор Петровић је имао толико присности у боји гласа да ме је првом речи ослободио сваке нелагодности у сусрету с једном величином.

— Изволите. Седите. Сигурно сте за кафу. А имам и добру ракију. Једна чашица може уз разговор. Ужичани имају обичај да кафу и ракију не одвајају једну од друге. Ако нисмо Ужичани, зашто не бисмо прихватили тај добар обичај?

Онда ме је некако професорски погледао седећи право за својим писаћим столом и рекао:

— Чујем да још нисте дипломирали. А већ пишете. Добро је што пишете. Али школа пре свега. Видим да и Паја очекује од вас да што пре дипломирате. Не отежите са испитима. После ће бити времена за све.

Овај почетак у малој радној соби чији прозори гледају на Саву само тренутно је зазвучао тоном савета, па је, одмах затим, добио боје срдачности која брише велике разлике у годинама и још веће разлике у друштвеном положају.

Чинило ми се као да настављамо стари разговор. И све су речи сад биле натопљене интимношћу и поверењем.

Политички живот тога тренутка био је испуњен тензијама тешких противуречности између личне диктатуре на престолу и узапћене демократије. На Београдском унверзитету међу студентима стално је или било бурно или се спремала бура демонстрација против режима.

Петровић као да је све што се збива сводио на питање етике. Он је с једне стране видео слободне људе а с друге стране аморалне слуге власти. Говорио је отворено. Речи је мерио, али не зато да не каже до краја шта мисли него зато управо да до краја своју мисао искаже, да не остане никакве сумње. Његове оцене су имале нечег катонски неумитног. Нарочито није тражио нијансе у процењивању држања појединаца



из јавног живота. За лоше поступке имао је само недвосмислено лоше оцене. У његовој интерпретацији речи као што су *йошшење* и *часш* постајале су синоними правог човека и он је без двоумљења ломио мач над главама појединаца који по његовом схватању нису могли да се сврстају у ту категорију.

Као новинар у том сусрету нисам успео. Петровић није хтео да одговори ономе што је лист у коме сам радио тражио од њега.

— То не! Ни сад ни други пут!... Али ако хоћете приватно, моја врата су вам отворена. Само се јавите.

Био је одлучан. И ја сам одмах осетио да је његово *не* дефинитивно.

После тога је између нас створено, ако могу рећи, пријатељство и продужило се неколико година.

Сусрети на улици, у шетњи, а неколико пута и у кафани били су, мислим, довољни да смем рећи *йознавао сам іа*, макар колико био свестан да су га његови ученици из моје генерације морали познавати много боље.

Што сам већ рекао и што ћу још рећи сигурно да није ни приближна слика приватнога Петровића, али је, свакако, и то нека црта која говори о њему и коју, претпостављам, треба сачувати од заборава.

Ја га нисам видео како се гласно смеје. Само сам запамтио његов отмени смех уснама и очима. Тако сам видео да се смеју неки угледни сеоски домаћини на које би Петровић врло личио да је навукао гуњ. Испод његове привидне питомости пробијала је бескомпромисна чврстина. Испод једноставности, на изглед, искуством у дружењу откривала се врло сложена природа. Испод научничког мира крио се страсни немир једног интелектуалца који уме да поштује туђе назоре али који не одступа од својих уверења. А умео је да буде и жесток. И сасвим сам разумео кад је са жестином реаговао на помен једног познатог публицисте који је у Солуну, Првог светског рата, довео у сумњу његов, Петровићев, патриотизам због неких сплетака око бившег престолонаследника Ђорђа. Мишићи су му на лицу заиграли и изговорио је тешку реч, пуну презира и неопозиву, против оних који су у стању за љубав рачунице и каријере да прљају људе. Кажем, ту моралну побуну сам разумео и чинило ми се да Петровић може само тако да реагује. Али ми се, другом приликом, учинило мало необично кад се повела реч о једном опет угледном човеку који је зажелео да дође на вечеру „сузоваца“ и некако успео да буде позван. Понесен неконтролисаним расположењем, у једном тренутку док су Микини прсти дрхтали на виолинској жици, тај човек је дохватио са стола чашу и треснуо њом о велико кафанско огледало. Причајући о томе, Петровић није могао, ни после неколико година, да савлада своју жестину:

— И с њим је тада било свршено! Први и последњи пут! Никад више неће моћи да крочи тамо где ми седимо! Ми уживамо. А кад уживамо не ломимо намештај.

Дакле, не само онда кад му је озлеђено етичко него и онда кад му је неко повредио естетско осећање он је кидао за увек с таквим човеком и није могло бити ни говора о помирењу.

На жалост, ја сам само једанпут имао задовољство да присуствујем састанку „сузоваца“ али сам дубоко осетио колико је то што се тамо дешавало била и потребна и чиста радост тих људи. Доживео сам ту прилику да се смејем људским глупостима док се читају огласи из дневне штампе. Да слушам народну музику која је у суштини била „циганска“ али оплемењена укусом високо културних људи. Да чујем неколико варијаната кола „кокоњеште“ и неодољиво смешну пародију „Марсељезе“ односно онакву „Марсељезу“ какву свирају Цигани из Мељака приликом дочека пријатеља из Француске. Да присуствујем, једном речи, сасвим необичној седељци људи који имају врло рафиновано осећање за хумор и фолклор, да се утопим у атмосферу скоро дечачке радости којој се предају те седе главе с највишим научним титулама.

На крају . . . Последњи наш сусрет.

Још ми је у свежем сећању тмурно после подне кад сам дошао у посету нашем великом глумцу Добрици Милутиновићу, коме сам, под окупацијом, понекад навраћао да разменимо вести и утиске и кад ми је, још с врата, Добрица рекао:

— Вратио се Мика Алас. Видео сам га. Али . . .

Добричино крупно и светло око је за тренутак изгубило сјај. Оборио је главу и додао:

— Не знам. Волео бих да нисам у праву. То није онај човек.Једе га нека бољка.



Заиста, ко би могао и претпоставити да ће бескомпромисни Михаило Петровић оставити заробљеничке жице и заменити их, рекао бих, још неподношљивијим жицама сплетеним око сваке куће београдске, да га зло није натерало!

Добрица је узео на себе и ми смо се, убрзо, тих дана, нашли утроје. Одмах сам се, у себи, на жалост, сложио с Добричиним утиском. Некадашња радост приликом сусрета с тим изванредним човеком сад се претворила у болно осећање да, у свем што нас притиска и што нам прети данас, неко, кога тако много волимо, можда не очекује *сутра* као ми остали.

После смо ишли сами улицом, из Душанове, турском калдрмом, уз Капетан-Мишину. Било је прохладно. Однекуд је допрло једно оштро „Halt!“ Чуо се бат чизама. Људи су хитали да што пре стигну кући, капије су се опрезно затварале а главе се брзо повлачиле с прозора. Стари наш, весели Дорћол, био је јадан и пуст као ограђено двориште казамата кад затвореници оду натраг у ћелије.

Повијен, мрк, са уздржаном тугом у гласу говорио је . . . ни о оном што је некад било ни о оном што јесте, него о слободи која ће доћи. Говорио је једноставно као да са математичком прецизношћу зна да ће ова ужасна и на изглед непобедива сила бити претворена у прах и пепео. И, ваљда зато што је желео да не буде патетичан, он је слободу помињао у кругу малих ствари, малих радости. Зажелео је, кад дођу ти дани, да одемо у Пешту и слушамо како свирају мађарски Цигани . . . У страшним тренуцима, кад се над њима наднесе велика несрећа, људи, обично, и говоре о малим стварима које су некад волели и које би желели да опет виде и доживе после олује.

А на сахрани, док сам стајао испред кафане „?“ за време опела у цркви, нисам могао да се одбраним од мисли да нема ужасније смрти од оне која дође у ропству. Човек какав је, увек, био Михаило Петровић, бескомпромисан у љубави према својој земљи и слободи, морао је, осећајући како се смрт приближава, да истовремено осети силан бол што му је судбина свирепо доделила да заклопи очи као сужањ у свом родном Београду.

МАТЕМАТИЧКА БИБЛИОТЕКА, 38 (1968), 45—60.

*Дивна Ђурић-Замоло*

# ДОМ МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

Кућа др Михаила Петровића на Косанчићевом Венцу „лежала је баш на самој ивици савског брега и, са те висине, гледала на Саву и на Дунав, на оне две реке на којима је, . . . , Мика провео многе дане свога живота.“ [1] Др Милутин Миланковић, чије смо речи цитирали, вероватно је схватао да је љубав према овим рекама Михаило Петровић посисао још са мајчиним млеком, јер је ту рођен, у дединој старој приземној згради, са широким погледом на реке.

Према казивању Миланковића, Петровић је стару дедину кућу много волео: „Са болом у души гледао је наш Мика како пијуци руше стари дедовски дом, али се морао покорити жељи осталих чланова своје породице, мајке, сестре и зета, са којима је живео у заједници“. На старим панорамама Београда са разгледница виде се на простору садашње куће ниске грађевине, од којих је једна она у којој је рођен Мика Алас (сл. 1). Овде је провео детињство и младост и одавде још као ђак одлазио на реке, од којих се до краја живота није одвајао.

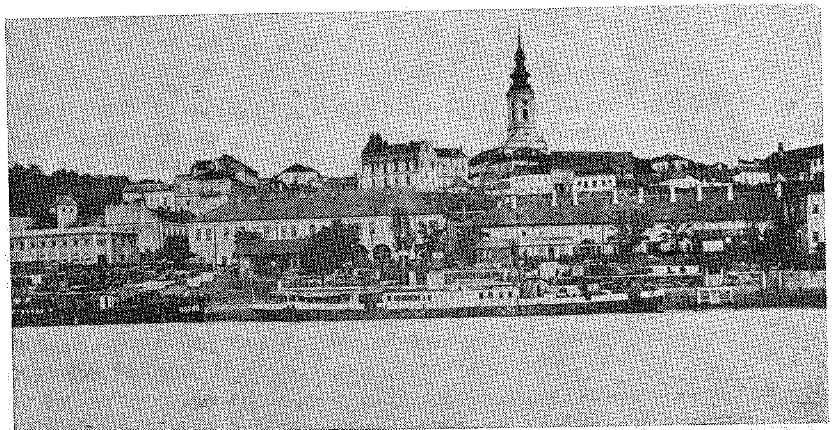
Из сачуваног протокола регулације за нову кућу види се, да је стара кућа већ лежала на регулационој линији. Одавде се такође види да се у стару кућу улазило из дворишта, јер зграда није заузимала целу површину плаца, већ је на страни према Калемегдану био улаз у двориште ширине 1,5 m. Ова кућа је тада била на бр. 26, али је нова кућа саграђена и преко плаца бр. 24, који је био широк свега 4 m и имао зграду повучену од регулационе линије за око 2,5 m. [2]

---

[1] Милутин Миланковић и Јеленко Михаиловић, *Мика Алас, белешке о животу великог математичара Михаила Петровића*, Београд, Космос, 1946, стр. 15

[2] Протокол одређене регулације и нивелације за Косанчићев венац бр. 24 и 26 (Музеј града Београда — Ур. 6499 и 6500)

Кућа на Косанчићевом венцу налазила се у старом српском крају Београда, близу Варош-капије, конака кнегиње Љубице и Саборне цркве, а уз зграду Митрополије (сл. 2). Улица је добила име још 1872. г.[3], тако да је то једна од ретких београдских улица, која је своје име сачувала скоро сто година. Овај крај је исто тако један од ретких крајева, где је сачувана атмо-



Сл. 1 — Панорама Београда посматрана са леве обале Саве око 1900. г. Десно од Саборне цркве виде се старе зграде на Косанчићевом венцу, међу којима је и стара кућа Михаила Петровића (*Музеј їрада Беоїрада* — Ур. 1303, разгледница)

сфера старог Београда и где нове зграде нису успеле да продру. Постоји данас сасвим оправдана жеља и намера да се Косанчићев венац и сачува, а додатним ниским објектима и зеленилом учини још привлачнијим и атрактивнијим. Предлажући да се Косанчићев венац сачува и уреди на адекватан начин, двојица наших архитеката пишу: „Овај крај одише неком специјалном атмосфером, која је сама по себи вредност, коју треба сачувати — заштитити. Можда је то последица реминисценција на догађаје и збивања која су се одиграла у овом крају, где је започето стварање самосталне државе младог грађанског друштва после вишевековног ропства“.[4]

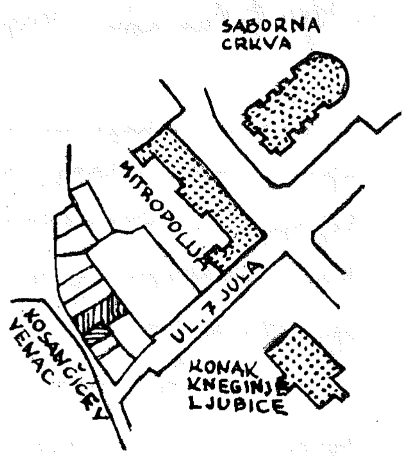
[3] Данило Радојевић, *Беоїрад и њеїове улице*, Београд, Туристичка штампа, 1966, стр. 202

[4] Бранислав Миленковић и Зоран Петровић, *Косанчићев венац*, Архитектура Урбанизам 21, 1963, стр. 24



У Музеју града Београда чува се документација о изградњи куће Михаила Петровића, која и данас постоји на Косанчићевом венцу бр. 22. Према овој документацији види се да је Петровић био сопственик тога имања и куће, што значи наследник дединог имања.

Први документи потичу из 1910. г., а датирани су 9. и 13. марта. То су протоколи одређене регулције и нивелације за плацеве онда на бројевима 24 и 26, на којима је нова кућа сазидана. Протоколи су одвојено дати за један и за други плац. Онај на бр. 24 био је широк свега 4,05 m, док је на бр. 26 био ширине 10,09 m. Мишљења смо да је приликом регулације плац бр. 24 придодат бр. 26, јер са тако малим лицем није могао даље опстати. Стара зграда била је на регулационој линији, што може имати двојако значење: или је зидана после извршене регулације овог краја, или регулациона линија није мењана, већ је остала на стању пре 1867. г. У протоколима регулације назначено је да је ова регулациона линија одређена 1906. г. Нивелација се такође није морала вршити, јер је калдрма већ била на нивелети, осим што се крај према Калемегдану морао насути за 30 cm.[2]




Сл. 2 — Ситуациони план блока зграда из 1867. г., међу којима су шрафирани плацеви, на којима је 1912. г. саграђена нова кућа Михаила Петровића (Исечак из плана *Емилијана Јосимовића*)

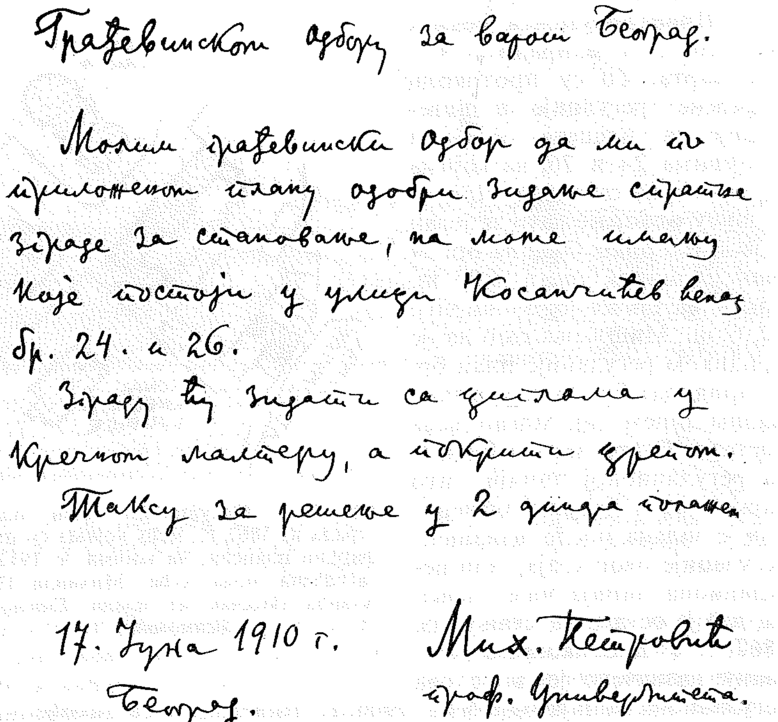
На дан 17. јула 1910. г. Михаило Петровић, проф. Универзитета, подноси молбу за зидање куће Грађевинском одбору за варош Београд. Молбу пише својеручно, мастилом, широким рукописом (сл. 3):

„Молим Грађевински одбор да ми по приложеном плану одобри зидање спратне зграде за становање, на моме имању које постоји у улици Косанчићев венац бр. 24 и 26.

Зграду ћу зидати са циглама у кречном малтеру, а покрити црепом.

Таксу за решење у 2 динара полажем".

Молбу Петровић изгледа није одмах предао, јер је у Грађевинском одбору заведена тек после 11 дана, 28. јуна, а већ два дана касније, 30. јуна, Грађевински одбор на својој седници


Грађевинском одбору за варош Београд.

Молим грађевински одбор да ми по приложеном плану одобри зидање спратне зграде за становање, на моме имању које постоји у улици Косанчићев венац бр. 24. и 26.

Зграду ћу зидати са циглама у кречном малтеру, а покрити црепом.

Таксу за решење у 2 динара полажем.

17. Јуна 1910 г. Београд.

Мих. Петровић проф. Универзитета.

Сл. 3. — Факсимил молбе за зидање куће Михаила Петровића (*Музеј їрада Беоїрада* — Ур. 6501)

доноси мишљење: „Дозволити подизање зграде по приложеном плану". Одмах, 2. јула, послати су позиви суседима да дођу 5. јула и потпишу према прописима изјаве, да немају ништа против зидања куће њиховог суседа др Петровића.[5] Из овога

[5] Молба за зидање куће Михаила Петровића, на којој су на стр. 2, 3 и 4 изјаве суседа и мишљење Грађевинског одбора (Музеј града Београда — — Ур. 6501)



поступка може се донети занимљив закључак: Грађевински одбор, у време највеће сезоне, био је веома брз и ефикасан.

Међутим, из за сада непознатих разлога, настаје застој у поступку око подизања зграде од скоро два месеца, јер изјаве суседа које су тражене још 2. јула, датиране су 20. августа. Прву изјаву дао је члан Београдског духовног суда, прота Љуб. М. Петровић, јер је један од Петровићевих суседа била Митрополија. Пошто се Љуб. Петровић позива на решење Духовног суда од 20. августа, према коме је он одређен да прегледа планове зграде, може се закључити да је овај сусед крив за поменути застој. Претпоставимо да је Духовни суд већ имао летњи распуст када је добио позив или је имао неке примедбе чији су узроци у међувремену отклоњени. Истога дана дао је изјаву и други сусед, Јованка Хаџи-Јефтић, а одмах сутрадан 21. августа, Грађевинско одељење Управе града Београда донело је решење [6] којим се одобрава извршење грађевине. Ово је решење 22. августа спроведено Грађевинском одбору Суда Општине београдске да га уручи молиоцу, који је на овоме акту потписао 25. августа изјаву: „Примио сам план и решење по овом акту. Михаило Петровић" [7].

Због изгубљена два летња месеца вероватно да грађевински радови нису могли почети 1910. г., већ тек следеће 1911. г., чиме се може протумачити и датум задњег сачуваног документа, молбе Мих. Петровића Грађевинском одбору Суда Општине београдске да се изврши преглед завршене зграде (сл. 4):

„Моја ново-подигнута кућа у улици Косанчићев венац бр. 26 довршена је.

С тога молим Одбор да изволи у смислу чл. 23 грађев. закона извршити потребан преглед".

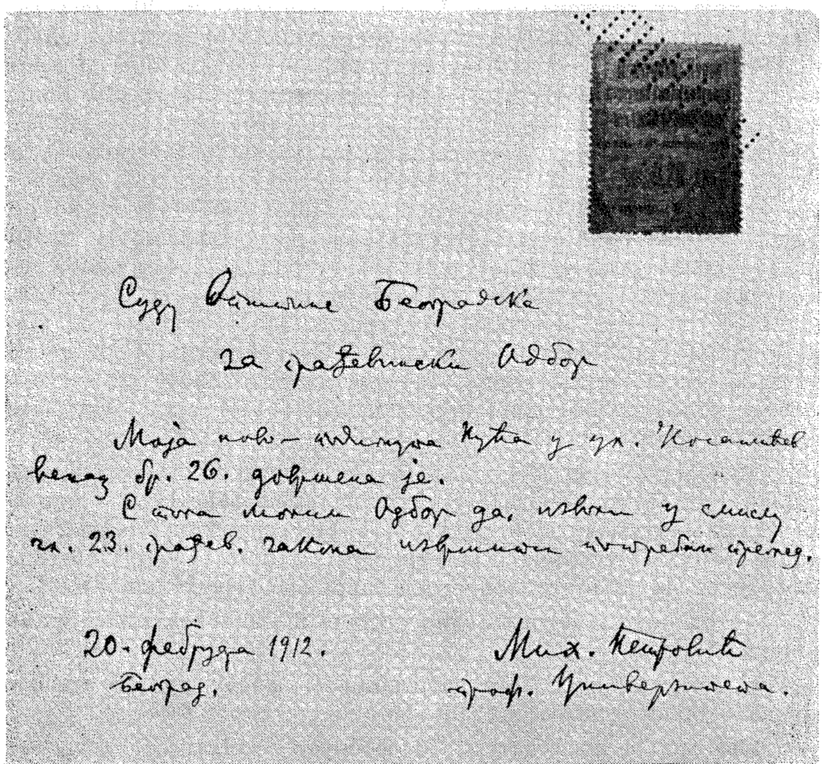
Ова молба носи датум: 20. фебруар 1912. г.

„При зидању нове куће", каже Миланковић [1], „било је често размимоилажења у мишљењима о томе како да се она сазида и опреми". Михаило Петровић није волео луксуз у стану, већ патријархалан начин живота. „Па као што, ваљда никад у животу,

[6] Решење Грађевинског одбора УГБ да се кућа Михаила Петровића може зидати (Музеј града Београда — Ур. 6502)

[7] Акт Грађевинског одељења Грађевинском одбору да решење о зидању куће Михаила Петровића спроведе сопственику (Музеј града Београда — Ур. 6502)

није обукао фрак, смокинг или реденгот, нити метнуо на главу цилиндар, тако се енергично одупро да се његова соба патоше паркетом и снабде савременим намештајем и конфором; само у једноставно опремљеној соби осећао се он као код своје куће“.[1]



Суду Општине Београдске
за грађевински Одбор

Моја ново-подигнута кућа у ул. Косанчићев венац бр. 26. довршена је.
С тога молим Одбор да, изволи у смислу чл. 23. грађев. закона извршити потребан преглед.

20. фебруара 1912.
Београд.

Мих. Петровић
проф. Универзитета.

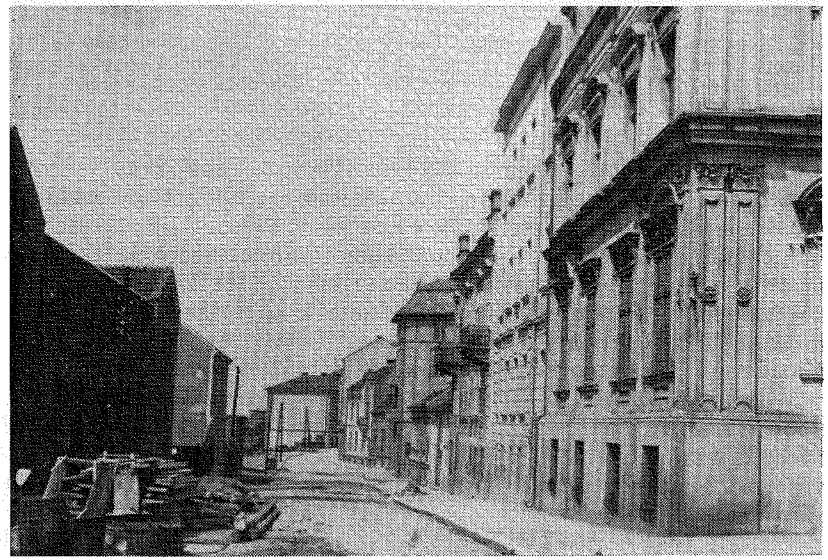
Сл. 4 — Факсимил молбе за преглед завршене нове куће Михаила Петровића (*Музеј їрада Беоїрада* — Ур. 6504)

Пошто је волео реке и велики део живота провео у риболову и са рибарима, желео је да и кућа добије обележје овог његовог дела живота. Тражио је да се на улазним вратима споља изреже рељеф шарана, који се сачувао до наших дана.

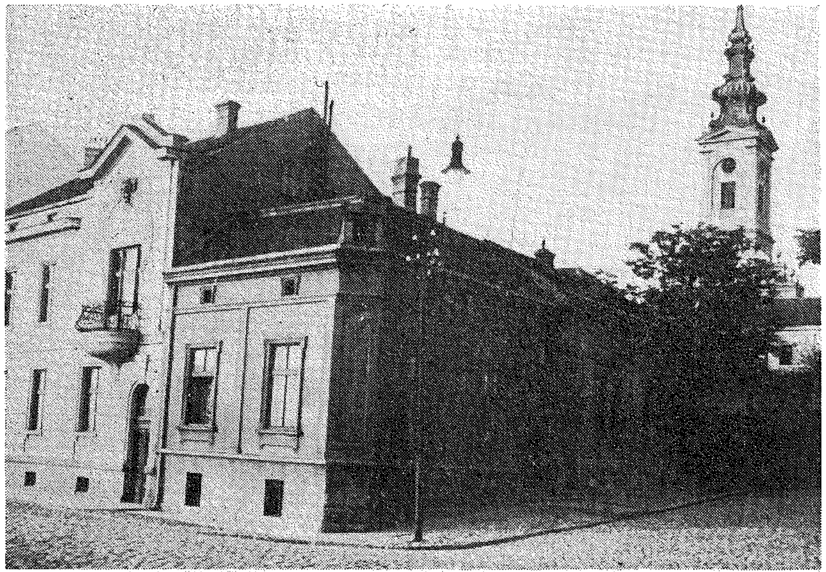
На сликама 5, 6 и 7 најбоље се види како је нова кућа изгледала у панорами Београда, у панорами улице и у блоку суседних зграда око 1930. г., из кога су се времена фотографије сачувале.



Сл. 5 — Панорама Београда посматрана са леве обале Саве око 1925. г. Десно од Саборне цркве истиче се нова кућа Михаила Петровића (*Музеј їрада Беоїрада* — Ур. 1310, разгледница)



Сл. 6 — Косанчићев венац (парна страна десно) око 1930. г. У средини фотографије види се нова кућа Михаила Петровића (*Музеј їрада Беоїрада* — Ур. 6507; фото *Јеремија Сшанојевић*)



Сл. 7 — Угао Косанчићевог венца (лево) и улице 7 јула (десно) око 1930 г. Сасвим лево је кућа Михаила Петровића, а сасвим десно Саборна црква (*Музеј іраgа Беоірагда* — Ур. 6508; фото *Јеремија Сшанојевић*)

Желели бисмо рећи и неколико речи о пројектанту куће, архитекти Петру Бајаловићу, дугогодишњем професору нацртне геометрије Техничког факултета у Београду. Рођен у Шапцу 1876 г. Бајаловић је са двадесет и две године дипломирао на Великој школи у Београду, а затим наставио студије на Техничкој високој школи у Карлсруе-у. После стицања и друге дипломе 1904. г. Бајаловић се вратио у Београд и већ 1906. г буде примљен за професора Техничког факултета, где се убрзо истакао као одличан педагог. Осим педагошким радом Бајаловић се бавио и пројектовањем, а значајнија су му дела: Српски павиљон на Међународној изложби у Риму 1911—1912. г., конаци у манастирима Каленић и Љубостиња, Правни факултет и Коларчев универзитет у Београду[8].

[8] Енциклопедија ликовних уметности, Загреб, Лексикографски завод, 1960, књ. I, Бајаловић Петар.



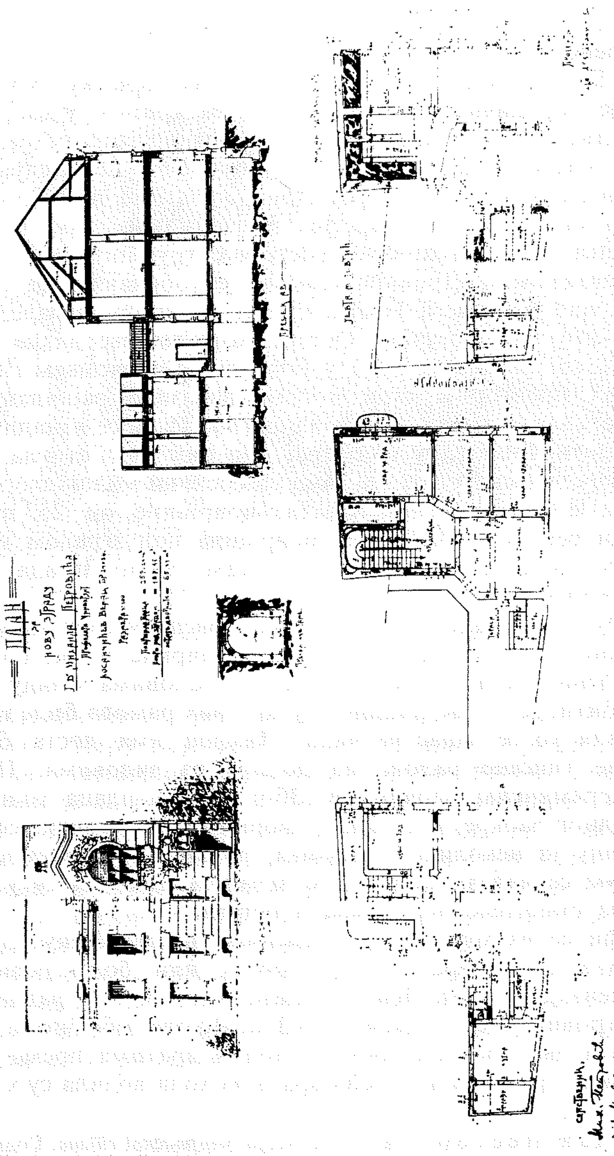
Према арх. Богдану Несторовићу[9] временски решење основе стамбене зграде Михаила Петровића долази у четврту фазу еволуције београдског стана, у период на почетку XX века. Тип куће је породична стамбена зграда са крилом у дворишту, решена у два нивоа. Решење је несиметрично што се огледа и на фасади зграде. Крајем XIX века уводи се у Београду водовод, а са њим и нови елементи стана: купатило и WC, чије се инсталације увозе из иностранства. Кујна такође добија воду, па су решења таква да се ове просторије групишу, што је случај и код стана М. Петровића. Такође је уобичајено да се ове просторије, као и соба за млађе, сместе у крилу зграде, како је учињено и у овом случају. Остава, која почиње да се јавља уз кухињу, овде је још решена у подруму. Груписањем главних и споредних просторија стан постаје изразито рашчлањен на групу за боравак и групу за домаћинство. Иако се канализација почела уводити 1905. г., у овај крај још није била стигла, јер је пројектом предвиђена септичка јама на средини малог дворишта.

Зграда је зидана на плацу мале површине од 253 m², па иако је стан решен у два нивоа, површина под зградом износи 187 m², тако да је за двориште остало само 66 m². Зграда је узидана са обе стране (сл. 8).

У кућу се улазило са улице кроз дрвену улазну капију, на крајњој десној страни фасаде. Ходник је ширине 1,5 m, а зидови су му ограђени доста скромно гипсаним радовима у виду рамова. Може бити да су површине унутар ових рамова биле некада осликане, али то се данас не види. Плафон има доста богато профилисане гипсане радове на додиру са зидовима. Под је поплочан керамичким плочицама. Због облика плаца ходником се после једног заокрета излази у двориште. Из ходника се лево прилази стану уз неколико степеника, до којих су врата за подрум. Подрум се налази под целом зградом, тако да су у делу испод крила смештене перионица и остава.

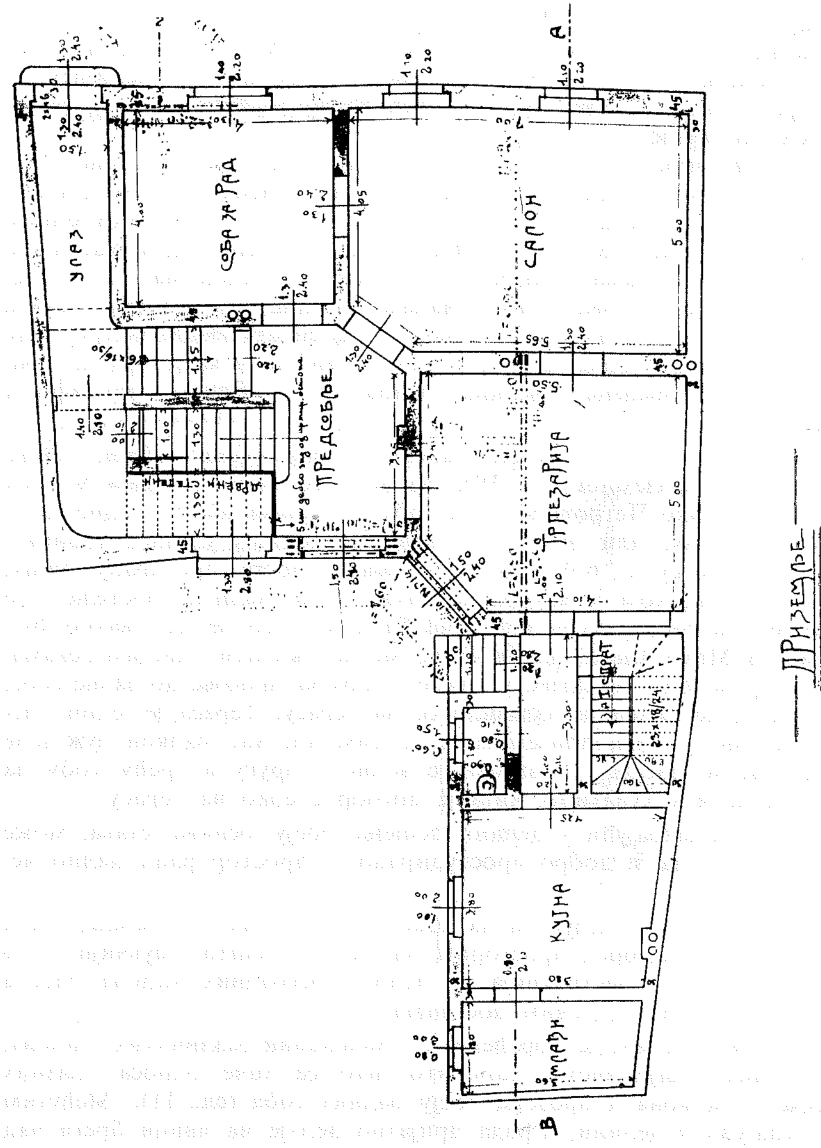
Пењући се из ходника уз степенице према стану улазило се кроз друга улазна врата у предсобље, или боље рећи хол мањих димензија (сл. 9). Лево од улаза у хол била је радна соба зета М. Петровића, величине 4,0 × 4,3 m. До ове собе био је салон 7,0 × 5,0 m са два прозора према улици и вратима према холу, радној соби и трпезарији. Трећа врата из хола водила су у трпе-

[9] Б о г д а н  Н е с т о р о в и ћ, *Еволуција беоірадскоі сшана*, Годишњак Музеја града Београда, књ. II, 1955, стр. 247—266




Сл. 8 — План за кућу Михаила Петровића на Косанчићевом венцу: основе подрума, приземља и спрата, пресек и изглед (*Музеј града Београда* — Ур. 6498)






Сл. 9. — Основа приземља куће Михаила Петровића (*Музеј града Београда* — Ур. 6498, детаљ)

зарију 5,0 × 5,5 m, осветљену из дворишта. Из трпезарије се излазило у крило зграде и то прво у ходник 1,2 × 3,3 m из кога се силазило у двориште, прилазило споредном степеништу за спрат, улазило у WC и у кухињу. Кухиња је имала везу са собом за млађе.

Из хола, одмах десно од улазних врата, полазе лепе дрвене степенице за спрат, чија је храстова дрвена ограда сачувана скоро неоштећена до наших дана, што није случај ни са једним другим елементом зграде. Плафон изнад степеништа, као и сви плафони у собама, обрађени су гипсаним радовима уз зидове. У угловима зидова подеста налазе се нише, вероватно некада за смештај скулптура. Степенице су на спрату имале полукружни завршетак са оградом, испод које је видљива међуспратна конструкција обрађена гипсаним радовима у облику триглифа и метопа.

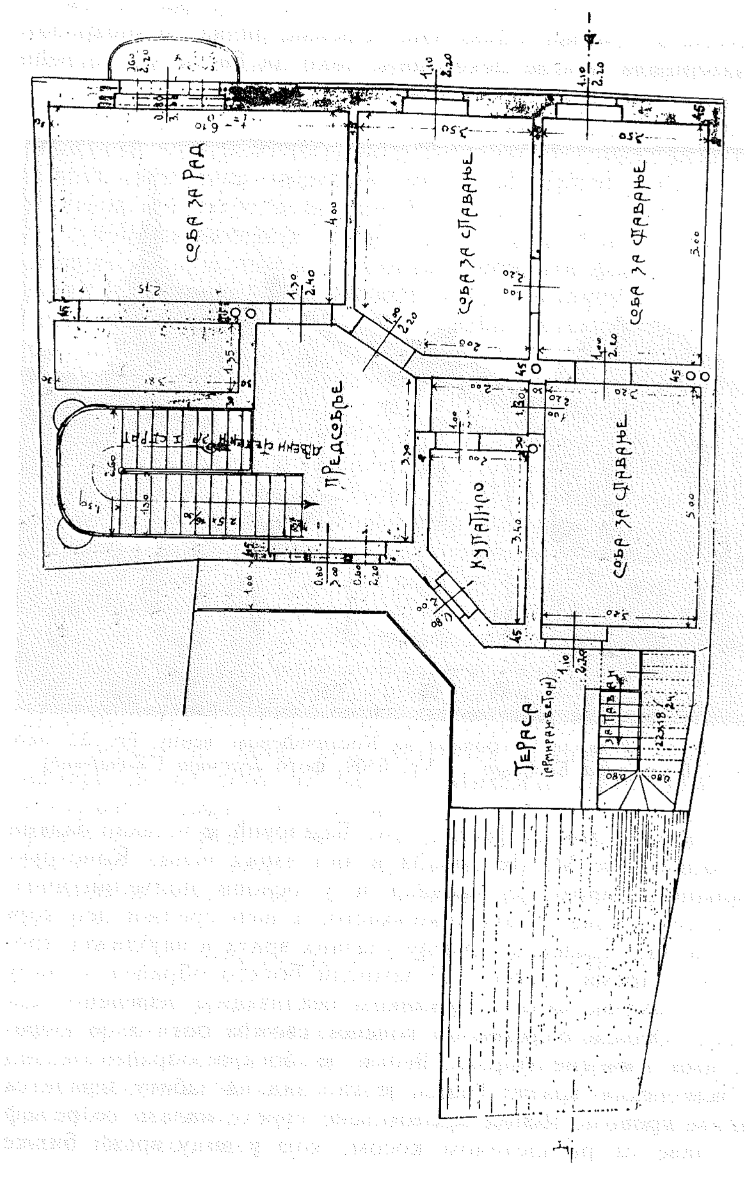
На спрат се стизало такође у предсобље — хол, нешто шире од приземног (сл. 10). Из њега се лево улазило у собу за рад Мике Петровића. Ова соба се налази изнад радне собе у приземљу, али је од ње већа за ширину улазног ходника. Димензије су јој 6,0 × 4,0 m, а има и доста пространу нишу, 1,3 × 3,8 m, која је вероватно служила за смештај постеље. То је једина соба у кући која има балкон, што је вероватно био захтев Мике Аласа, да би боље могао уживати у својим рекама. Из предсобља се затим улазило у собу за спавање до радне собе, у мали дегажман и излазило се на терасу. Тераса је једним делом изнад крила приземља, а другим иде као балкон дуж целе дворишне фасаде. Дегажман је водио у другу и трећу собу за спавање и у купатило, чији је прозор гледао на терасу.

Посматрајући у целини решење обеју основа стана, може се уочити да је добро простудирано, а простор рационално искоришћен.

Пошто је међуспратна конструкција изнад приземља била дрвена, а распоред просторија на спрату нешто друкчији него у приземљу, конструкција је испод преградних зидова спрата била ојачана гвозденим носачима.

Фасада зграде обрађена је у мешавини различитих стилова, а решење није чисто, нарочито што се тиче односа улазних врата, балкона и прозора обеју радних соба (сл. 11). Међутим гледајући у целини, зграда пријатно делује на ивици брега над Савом и допуњава и данас освежавајући старински амбијент






Сл. 10 — Основа спрата куће Михаила Петровића (*Музеј ӣрада Беоӣрада* — Ур. 6498, детаљ)

Косанчићевог венца. У сваком случају у решењу фасаде тежило се за новим и неуобичајеним. Она је асиметрична, са употребом нових материјала и нове декорације, тако да би се могло рећи да су у решењу превагнули елементи сецесије.

Сл. 11 — Кућа Михаила Петровића на Косанчићевом венцу бр. 22 око 1930. г. (*Музеј града Београда* — Ур. 6509; фото *Јеремија Станојевић*)

Као главни мотив фасаде арх. Бајаловић је истакао балкон испред радне собе М. Петровића и зид изнад њега. Конструкција балконске плоче је масивна и у основи полуелиптична. Завршава се с доње стране шкољкасто, а њен средњи део који прелази на зид приземља између улазних врата и најближег прозора, био је према првобитној замисли богато обрађен у виду букета са тракама, што је приликом реализације изведено једноставније. Ограда балкона од кованог гвожђа богато је обрађена и има извијене форме. Веома је богато обрађен и зид изнад балконских врата. Решен је као зид на забату зграде са двоводним кровом. Испод преломљене стрехе налази се рељеф женске главе са расплетеном косом, која у виду врежа биљке



пузавице покрива део фасадног зида. Испод врежа је полукружно поље које обухвата балконска врата, покривено квадратним керамичким плочицама у распореду црвено-жутог шаховског поља. Овај главни део фасаде има дакле све облике сецесије, па су елементи сецесије и шаховски распоређене плочице, које чине реминисценцију на слично обрађене делове фасада наших манастира моравске школе, Лазарице и Каленића, чији је конак пројектовао Бајаловић.

Улазна капија је на пројекту такође била богатије обрађена но што је изведена. Остали елементи фасаде су скромни: венац испод таванских прозора, шира истакнута трака која се ломи око прозора на спрату, слабо истакнут спратни венац, два плитка пиластра с једне и друге стране два једнака прозора на спрату, конзолице испод гредица под прозорима приземља и др.

Данас се ова зграда налази у веома лошем стању. Малтер на фасади је опао скоро педесет отсто, али се балкон, плочице и рељеф главе још држе. Двориште пружа нарочито ружну слику, јер је прљаво и пуно непотребних ствари. Иако мало, да је чисто свакако би лепо деловало, пошто је поплочано великим каменим плочама. У згради сада станује укупно шест породица. У приземљу су две породице, а на спрату три сустанара и један подстанар. Завршетак степеница на спрату није онакав какав је некада био. Степенице не улазе слободно у предсобље на спрату, већ су на врху степеница постављена врата и зид који дели простор степеништа од простора предсобља.

Зграда је данас под заштитом државе, а пошто постоји намера да се соба за рад др Михаила Петровића претвори у његову спомен собу, мораће се уложити велики труд и велика финансијска средства да зграда добије поново онакав изглед какав је имала, када је у њој живео, радио и умро наш велики научник и диван човек др Михаило Петровић, популарни Мика Алас.

## ПРИМЕДБЕ РЕДАКТОРА ОВЕ КЊИГЕ

Професор Д. С. Митриновић обратио се Госпођи Марији Ж. Перић, сестри Михаила Петровића, писмом у коме ју је обавестио о овој књизи и тражио дозволу за прештампавање три уџбеника Михаила Петровића. На то писмо Митриновић је добио одговор који због интересантности објављујемо у целини. Писмо гласи:

Марија Ж. Перић, рођ. Петровић
Bahnhofstrasse, 8868 Oberurnen
Kanton Glarus, Švajcarska 19. јуни 1968.

Поштовани Господине Професоре,

Примила сам Ваше цењено писмо од 15. јуна 1968. на коме Вам се најлепше захваљујем.

Врло ми је драго било Ваше обавештење да ће Математичка библиотека, којом Ви руководите, ускоро објавити једну књигу о мом незаборавном брату Михаилу Петровићу. Посебно ме радује што се међу коауторима књиге налазе тако еминентне личности као што сте Ви, академик Д. Недељковић, проф. Е. Стипанић и остали.

Не знам да ли је Г-ђи инж. арх. Д. Замоло познато да је пројектовање и извршење радова терасе и дела куће у дворишту, извршио лично проф. Миланковић.

Прихватам предлог да се као помоћни универзитетски уџбеници штампају књиге Михаила Петровића и то:

1. Рачунање са бројним размацима,
2. Елиптичке функције и
3. Интеграција диференцијалних једначина помоћу редова.

Посебно ме радује Ваше уверење да би ове књиге и данас биле од велике користи студентима и другим научним радницима. Такође Вам се захваљујем на спремности да напишете увод за ове књиге, на чијој сте изради својевремено и сами узели активно учешће.

Уз најтоплије поздраве и најлепше жеље.

Марија Ж. Перић, с. р.

МАТЕМАТИЧКА БИБЛИОТЕКА, 38 (1968), 61—86.

Др *Душан Недељковић*

# ЕТАПЕ И ПЕРСПЕКТИВЕ ПРИРОДНЕ ФИЛОЗОФИЈЕ МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

## 1.

У својој књизи *Aperçu de la philosophie contemporaine en Yougoslavie*, 1934, истакли смо значај „оригиналне научне филозофије" коју је знаменити математичар Михаило Петровић градио и изградио у својој академској беседи *Математичка теорија о дејству узрока*, 1900, француској књизи *La mécanique des phénomènes fondée sur les analogies*, Париз, 1906, своме волуминозном делу *Елементи математичке феноменологије*, Београд 1911, својој другој француској књизи *Mécanismes communs aux phénomènes disparates*, Paris, 1921. и најзад у својој четвртој књизи *Феноменолошко пресликавање*, Београд 1933. Ту смо покушали да са гледишта самога аутора резимирамо његову нову феноменолошку доктрину о природи, истакавши да: „Он елиминише све супстанцијалистичке појмове гравитације, афинитета, виталне силе итд., и посматра само елементе аналогија који сачињавају аналогне законе различитих слојева исте глобалне реалности. Проникнути у оно што је аналого и заједничко у диспаратним феноменима (физичким, хемијским, биолошким, економским, друштвеним, итд.), разликовати у њему аналошке групе, одредити у овим групама типичне и апсолутне математичке схеме и формуле, који су само делови више целина и који, компликујући се извесним специјалним карактеристикама и параметрима, могли би математички објаснити свеколику мноштвену реалност ствари, — то је задатак који је Петровић поставио преда се оснивајући своју математичку феноменологију — ту занимљиву доктрину која замењује посебне природне законе општим схемама које се односе према посебним природним законима као целина према деловима које поставља..."[1]

[1] *Aperçu de la philosophie contemporaine en Yougoslavie*, Beograd 1934, str. 35—36.

Аутор ми је једном приликом касније саопштио да се слаже са оваквим мојим крајње сажетим приказом, али је и приметио да га је зачудило кад је видео да сам прешао преко механичких основа његове феноменологије. Одговорио сам му да то не би била јака страна, већ пре ограниченост његове концепције, у којој би се, што се тиче интерпретације, могао као и у самој квантној механици, на пример, наћи и друкчији пут тумачења осим онога што га пружа класична механика, а којим његова концепција показује тенденције да се покрива потпуним механицизмом. Увек и са млађим колегама присан и духовит одговорио ми је да би без Декарта и класичне механике некако осећао да у својој математичкој феноменологији губи чврсто тле под ногама. Рекао сам му да је то свакако тачно, али је тачно и да је сама његова математичка феноменологија један од моћних оригиналних и донекле изграђених путева да се не само то већ и сама феноменологија превазиђе, на што је он слегао раменима и сумњајући али и одобравајући допуштао са: „Можда“ . . . „Има и тога“.

2.

Али док смо овако у *Aperçu*-у, припремљеном за VIII Међународни филозофски конгрес у Прагу 1934, на коме ће се филозофија оштро сукобити са немачким и италијанским филозофским претставницима фашистичке идеологије, остајали при само отвореним перспективама бројних нових погледа и схватања савремене филозофије у Југославији, па и на само отвореној перспективи нове и напредне аналошке математичке феноменологије Михаила Петровића, — дотле смо после ослободилачког рата и револуције морали се позабавити и тиме чиме се, каквим све ограничењима ове перспективе затварају, те смо у својој књизи *Наша филозофија у борби за социјализам*, Београд 1952, констатовали да се идејно нова Петровићева научна и филозофска перспектива затвара „аналошким феноменолошким механицизмом“[2], те таквим својим ограничењем стоји на линији оног механицизма који је од Ламетрија остао типичан за свеколику, управо уско класну грађанску идејну ограниченост.

[2]) *Наша филозофија у борби за социјализам*, изд. Српског филозофског друштва, Београд 1952, стр. 39.



Међутим, како би Хегел рекао, закон је кретање свега коначног да своју границу укида и превазилази, и постаје бесконачним, па је и закон развојног кретања свеколике савремене епистемологије, па и саме Петровићеве аналошке математичке феноменологије управо укидање и превазилажење механицистичке ограничености, као што смо то покушали да покажемо у студијском огледу који смо Петровићевој појави и лику посветили у серији историјских и критичких студијских огледа „Мисао данас“.[3])

Ту смо приметили да је његова аналошка математичка феноменологија стала већ са његовом француском књигом *Механизми заједнички диспаратним појавама*, 1921, у ред оних врхунских дела савремене природне филозофије и епистемологије, која су најчешће управо са механицистичких позиција чинила напоре и пружала противуречне нове путеве да се управо сâм механицизам превазиђе. Јер, ово његово дело је ушло у чувену Алкaнову „Нову научну библиотеку“ међу таква водећа дела као што су, с једне стране, *Механичка концепција живота* Џона Леба или *Елементи биолошке филозофије* Феликса Ледантека, с друге стране, *Трансформизам и искуство* Етијена Рабоа, с треће стране *Научни идеал* Пјера Бутруа и, с четврте, *Судбина звезда* Сванта Аренијуса. А управо за ова тад врхунска епистемолошка дела узета у целини заједно са Петровићевим карактеристично је то да представљају оне противуречне токове савремене епистемологије у којима би данашња мисао многих водећих научника уједно да одржи, али и продуби, укине и превазиђе већ у многоме стереотипизовано и вулгаризовано механицистичко гледање и објашњавање природног, друштвеног и мисаоног кретања.

Као управо типичне примере оваквог парадоксалног кретања и развитка савремене епистемологије узели смо и упоредили нове концепције истакнутог француског биолога Етијена Рабоа и нашег математичара Петровића. И видели смо да, док Рабо води борбу за проучавање самог објективног „процеса“ а противу свих теоријских идола, па и противу механицистичког, у чијој се коначној основној перспективи и бори, — дотле Михаило Петровић, све и непрекидно, као и Рабо, истичући да се увек ради само о „дескрипцији тока еволуције“ и „напредовању про-

[3]) „Политика“, 11. јун 1961, стр. 19.

цеса“[4], супротно Рабоу отворено полази како у физичким и хемијским, тако и у биолошким, психолошким, економским и историјским појавама управо од њихових претпостављених механизама да ова аналогијама прошири на свеколико шаренило природних, друштвених и психичких појава и тако их узајамно повеже, али баш тиме и зато да и нехотице саму њихову механичност од круте прво чини гипкијом, а затим ублажава и превазилази у многим правцима.

За овакав свој развитак је Петровић био предодређен не само својом широком научном изградњом уједно математичара и физичара природњака, и не само живим својим универзалним духовним интересом за све науке од природних и техничких до друштвених, и не само својим стваралачким везивањем за отварање нових перспектива новим научним методама, као што су биле онда у своме зачетку аналошке методе и методе моделовања, већ и потребом уједно својом интимном и свога времена да се отклањају границе које су затварале ове перспективе и да се остварују нови широки и дубоки синтетички и интеграциони захвати и погледи; и у томе је код нас са Јованом Цвијићем несумњиво био у појединим својим научним прилозима као и у целини своје аналошке математичке феноменологије један од најистакнутијих носилаца данашњих револуционарних преокрета природних, техничких, друштвених и филозофских наука који се обављају битно интеграцијом у којој се превазилазе бројне ограничености једна за другом.

Тако у посебним својим стваралачким истраживањима, предњачећи, започне ли Петровић у математичкој анализи своја испитивања интеграције диференцијалних једначина, неће он стати док је преко функција одређених редовима коначно не приведе примени и механичкој интеграцији. И обратно, пошавши од спектралне методе која се користи у хемијској анализи, он замишља аналогу математичку спектралну методу којом се решавају бројна математичка питања и заснива нове гране математичких испитивања и дисциплина. И многи његов научни рад од рачунских машина надаље одјекнуо је у свету најчешће баш тиме што је њиме имала да буде оборена још једна граница више између природних, техничких и математичких наука и

[4]) *Елементи математичке феноменологије*, изд. Српске академија наука, Београд 1911, стр. 769.



отворена још једна аналошка перспектива више њихове плодне интеграције.

Али и у целини са његовим *Елементима математичке феноменологије*, 1911, имале су најзад да буду оборене и све ове границе и да се најпрецизније природне, друштвене, психолошке и историјске науке интегришу са математиком у својој научној „дескрипцији тока еволуције“, захваљујући таквој новој Петровићевој, како он вели, „Природној филозофији“, која ће математичким симболизмом његове аналошке феноменолошке уједно анализе и синтезе повезати и прецизно одредити сву безмерну разноликост појава свеопштег „тока еволуције“.

А у овоме јесте он и остаје заслужни пионир нашега времена које је захтевало за постизање нових целовитих и дубинских захвата да се пође још неиспитаним путевима нових аналошких метода и метода моделовања. То нам сам он и нехотице каже првом реченицом свога француског општег филозофског дела *Механизми заједнички диспаратним феноменима*, 1921, саопштавајући да је у својој математичкој феноменологији пошао од чувеног става гласовитог енглеског физичара Вилијама Томсона: „Разумети један феномен јесте моћи установити његов механички модел“.

Али је Петровић од овога учинио такође и један одсудан корак даље који је и донео његову „математичку феноменологију“, односно његову нову „Природну филозофију“ тиме што је он на најопштије логичко односно методолошко питање Џона Стјудета Мила како доћи до најмањег могућег броја ставова које претпоставља и из којих следи стварни природни поредак, одговорио: „Свести мноштво феномена на исти процес, на исти тип механизма“.

Из овога се види да тиме што је природни процес уопште схватио само као механички, Петровић је повео своју нову аналошку и моделску математичку феноменолошку типологију једностраним путевима механицизма односно формалне логике, али није он зато мање, истакнимо то овде такође, морао да аналошки, моделски и типолошки решава проблеме математичког „пресликавања“ тј. новог математичког аналошког феноменолошког формулисања самих битних дијалектичких супротности којима се сам процес у својој основи збива, као што то сами собом показују и сами конкретни примери које он обрађује.

Тако на своме наглашено механицистичком путу Петровић у својој „Природној филозофији" аналошке математичке феноменологије испитује аналогије диспаратних појава да би у њиховим аналошким језгрима откривао типове заједничких модела који треба да повезују све диспаратне појаве од физичких и хемијских до друштвених и психичких свеопштег „тока еволуције" у природи, друштву и људском мишљењу и стварању. „Такве аналогије, истицао је Петровић, пружају оне метафоре којима се често служе разне гране наука као и обичан свакодневни говор. Сетимо се, на пример, упоређивања овог или оног феномена и бујице чија разорна сила расте са препреком која јој се противстави. Феномени који су различити по својој природи (механички, физички, физиолошки, друштвени итд.) а који се састоје у лаганој осцилацији између два краја супротна стања, често се упоређују са ритмичким кретањем клатна, са плимом и осеком или са перисталтичким покретима у организму".[4a)]

И уочимо да као овде супротности напона и отпора, осцилационог кретања клатна, плиме и осеке или перисталтичких органских покрета, тако су управо дијалектичке супротности основа на којој се Петровић труди да аналошки и математички постави свеколико ткиво своје феноменолошке природне филозофије која би обухватила свеколики „ток еволуције" од механичких и физичких до друштвених и психичких утврђујући „аналошке групе", „језгра" и „моделе" за сваки ступањ тога развитка, али и картезијански сводећи сложеније и више на простије и ниже, и тиме све на најниже механичко, и тиме теоријски у својим општим тумачењима остајући заробљен једностраношћу механицизма, док су у основи његових испитивања остајале конкретне дијалектичке супротности које су позивале на нова и даља аналошка дијалектичка продубљивања и свестранија, целовитија сагледавања и овладавања природним појавама од механичких и физичких до друштвених и психичких у нераздвојној целини њихове узајамне дијалектичке повезаности и условљености, у којој би постајало јасно да у целокупном природном „току развоја" свако кретање у својој суштини и заметку је самокретање које после низа квалитативних скокова у данашњем развитку друштва и човека остварава и скоковит прелаз из света нужности и свет слободе.

[4a)] *loc. cit.*



Јер, окупљајући једну за другом, сваку „аналошку групу" диспаратних појава од механичких до психичких и одређујући њено „аналошко језгро", Петровић истиче: „Аналошка језгра преображавају сличности у односе једнакости", и то у своме каснијем делу *Феноменолошко пресликавање*, 1933, разрађује посебним одељком, те би сва његова математичка феноменологија имала да путем аналогија и у њима одређених типова улога и типова механизама изједначи сложеније и више биолошке, друштвене и психичке појаве, процесе и развитке са њима аналогим простијим и нижим аналогим механичким и физичким појавама и процесима у самом њиховом заједничком и типичном механичком моделу, па тако коначно закључи и свеопшту механичност.

Али ако су данас са кибернетиком аналошке методе и методе моделовања у испитивању феномена, механичких или не, постале изванредно плодне и омиљене стваралачке методе на многим правцима и пољима природних, техничких и друштвених наука, Михаило Петровић ипак ни међу бројним математичарима својим ученицима и следбеницима, констатовали смо ми подједнако пре тридесет и пре десет година, није нашао ни једног јединог непосредног настављача своје ултра-механицистички оријентисане математичке феноменологије, и питали смо се зашто? И одговорили смо да нам изгледа да је то било, с једне стране, управо због саме бесплодности његовог наопаког ултра-механицистичког смера, а, с друге, што је он управо као такав у конкретним својим анализама показивао и доказивао управо супротно ономе што је у своме почетном и основном смеру хтео.

Овоме би у ширем историјском и критичком расматрању требало додати да се слично десило и са Хегеловом одредбом свеопштег „тока еволуције" дијалектичком законитошћу спиралног кретања, која је имала да коначно учврсти његов објективни идеализам, а у открићима и аргументима класика марксизма, од Маркса и Енгелса до Лењина, на чињеницама показивала и доказивала управо супротно саму чињеничку дијалектичност кретања и развоја природе, људскога друштва и мишљења.

А овоме пак би се морало додати још и то да је револуционарни скок и развитак природних, техничких и друштвених наука наметнуо им хитна испитивања међупојединачних односа и закона од атома и њихових честица до личности у друштву и са њима наметнуо аналошке методе моделовања уз употребу теорије релативности и теорије вероватноће у савлађивању специјалних проблема пред којима су стајале, не сетивши се ни првог Хегеловог уопштеног дијалектичког модела спирале за свеопшти „ток еволуције", нити пак механицистичког модела феноменолошког механизма, али чињенички и принципијелно потврђујући конкретну дијалектичку законитост и модел спиралности свеопштег „тока еволуције" као што су их потврђивали и конкретни елементи саме Петровићеве аналошке природне филозофије, иако почетно и у основи феноменолошки и механицистички усмерене и ограничене.

Јер, као што смо то истакли пре више година у сажетом студијском огледу о мисли Михаила Петровића, мора се такође приметити да попут свих савремених револуционарних научних тековина и његова аналошка природна филозофија, упркос својој апстрактној и једностраној механицистичности и феноменологичности, наставља оне напоре око конкретног дијалектичког сагледавања свеопштег „тока развоја" као спиралног уздизања од нижих вишим ступњевима, који се јављају и све шире у наукама проверавају и учвршћују најчешће без икакве везе са филозофским погледима Хегела, Маркса, Енгелса или Лењина. Ако поближе погледамо, она је „диспаратним" назвала у ствари различите ступњеве на спирали развитка природних појава од механичких и физичких, преко хемијских и биолошких, до друштвених, историјских и психичких, па кад је хтела да то „диспаратно" сведе на „механичко" као „заједничко", све више ступњеве и врсте кретања на најнижи, механички ступањ, она је пошла од онога што је на разним ступњевима карактеристично, типско а хомолого и тад код одговарајућих аналогих група појава разних развојних ступњева природног тока развитка откривала као хомологе и суштинске најчешће баш у самим супротностима и противуречностима саме дијалектичке елементе или моменте динамичке структуре односно аналошког језгра или типа као модела тих појава.

А све то потврђује Лењинову реч из *Материјализма и емпириокритицизма* о карактеру научно-техничке револуције нашега доба да савремена „физика рађа дијалектички материјализам".



## 3.

И није нимало случајно што управо ових последњих година не само совјетски и пољски научници откривају посебни значај аналошких метода и концепција аналошких група, језгара и типова Петровићеве природне филозофије, него и неки наши, и то први пут сложно и одсудно на трећем, опатијском научном скупу „Маркс и савременост" 1965. године природњаци, математичари и филозофи, Дамњановић, Стипанић, Курепа, Седмак, Млађеновић, Недељковић и други, расправљајући у својим саопштењима и још више у дискусијама управо о аналошким методама и методама моделовања и кибернетике као најплоднијим и битно дијалектичким и у томе се ослањајући не само на Енгелсову *Дијалектику природе*, већ и на пионирске резултате Петровићевих *Елемената математичке феноменологије* из 1911.

Тако као млади биолог Звонимир Дамјановић у своме саопштењу *Енгелсово тумачење закона природног одабирања, као принципа дијалектике природе* хоће да истакне „*општи* склад Енгелсових и Марксових погледа са нама савременом науком", он сâм данашњи уопште узет предмет наука карактерише Петровићевом аналошком формулацијом, истичући значај конкретног дијалектичког приступа управо таквом предмету, „за ширину научног погледа, за високи степен апстракције и уопштавања, за приступ природи, техници, друштву и човеку, као скупном предмету, као аналошкој групи фактора".[5] А кад треба да коначно данас после Дарвина и Ешбиа покуша да најсвестраније и најкритичније формулише закон природног одабирања као битно закона покушаја и грешке, он ће то изриком учинити не само речима већ и конкретном мишљу Петровићеве природне филозофије и науке аналогија, пишући: „Принцип покушаја и грешке, принцип природног одабирања, афирмисао се у савременој науци као основни принцип еволуције, не само еволуције врста, него и еволуције сазнања, као аксиоматски основ оног најшире схваћеног процеса који је Михаило Петровић означио као *универзалну еволуцију*. Метода научне аналогије, теорија феноменолошког пресликавања, коју је Петровић први формулисао, кибернетика отвара пред нама величанствену панораму општег кретања и развоја, јединство у разноликости, дијалек-

---

[5] *Маркс и савременост*, III, Београд 1965, стр. 29.

тику у природи и друштву, а нарочито дубоко јединство мишљења и природе, јединство општих закона који владају у ове две области“.[6]

Сасвим слично истакнути млади математичар др Ернест Стипанић, проучавајући у своме саопштењу Енгелсово мишљење да је „филозоф-дијалектичар“ Декарт са промењљивим величинама математику у целини довео на подручје дијалектике и осврћући се на то шта је све битног на тој линији настало у развитку математике уопште а схватања простора посебно до данас, истиче; „Занимљиво је овде подвући да је наш истакнути математичар Михаило Петровић, пре више од шездесет година, користио фазни простор за квантитативну и квалитативну анализу појава у својој математичкој феноменологији. Он уочава дескриптивни систем од *n* елемената, а уређен комплекс вредности од *n* кореспондентних параметара зове фигуративном тачком дескриптивног система. На тај начин дескрипцију појаве своди на опис кретања фигуративне тачке у простору од *n* димензија и истиче да се: Проблем математичке феноменологије... своди на проблем кретања у полидимензионалном простору и решава се у свим својим најразноврснијим облицима и варијантама генерализацијом метода којима се решава проблем кретања у обичном простору“.[7]

Тако је Петровићева аналошка природна филозофија управо као битно дијалектичка почела да заузима место које јој и припада у данашњем револуционарном преокрету природних, техничких и друштвених наука, али је сасвим природно побуђивала да оне ограничености које је у себи носила, с једне стране, механицизам и, с друге, феноменологизам и позитивизам, дођу у саопштењима и још више у дискусији овог великог научног скупа до својих, ту и тамо, појачаних израза. Зато је проф. Стипанић с правом у дискусији истакао чињеницу да се у математичким моделима пресликавања природно дијалектички преокреће тако да се и модел као слика може пресликавати на сам предмет или оригинал, а самим тим и проверавати, а то оповргава подједнако апстракционизам како вулгарног механицизма тако и сваког позитивистичког феноменологизма, а потврђује конкретно дијалектичке погледе теорије одржавања. А да

[6] *ibid.*, стр. 33—34.

[7] *op. cit.*, стр. 111—112.



управо ово покаже, он сасвим укратко резимира сам систем поступака аналошких метода природне филозофије Михаила Петровића овим речима: „У дискусији о математичким моделима наглашено је да је реч о извесном пресликавању, односно тачније о пресликавању предмета или оригинала на његову слику. Међутим, није истакнуто инверзно пресликавање наиме, слике на оригинал, слике на предмет. — Модели настају на бази уочавања сличности или истоветности међу диспаратним фактима или феноменима. На основу тога ствара се аналошка група феномена или факата, односно аналошко језгро, како је то већ пре шездесет година истакао Михаило Петровић у *Математичкој феноменологији.* Аналошко језгро чини подлогу математичком моделу појаве, стања или процеса, односно математичком моделирању појава или феномена. Значи, полази се од реалних појава и процеса, и врши се пресликавање на аналошко језгро као заједничку слику диспаратних факата, односно свих оних који су обухваћени једном аналошком групом. Када се ова слика преноси на реалну појаву, врши се инверзно пресликавање. Ту је извор снази предвиђања путем математичких модела, односно снази истраживања теоријских модела уопште“.[8]

Овим је сасвим парадоксално али непобитно сама реална и делатна дијалектичка структура аналошких закључивања и моделовања Петровићеве природне филозофије побијала апстрактну једностраност сваког феноменологизма, позитивизма или механицизма, а потврђивала битно конкретно, делатно и стваралачко дијалектичко учење о сазнавању као делатном и стваралачком теоријском и практичном одражавању, па је, после расматрања на основу тога неколиких ситуација у развитку данашњих наука, проф. Стипанић могао закључити: „Мени се чини да марксистичка дијалектика, као теорија сазнања, даје најадекватније одговоре од свих могућих теорија сазнања на општа теоријско-спознајна питања имплицирана наведеним и њима сличним питањима“.[9]

А ова критичка расматрања су се морала коснути и неких који су на својим научним пољима усвајали уједно конкретне дијалектичке и Петровићеве аналошке методе, па је непосредно у дискусији на њих одговорио чак и др Дамјановић овим

[8] *ibid.*, стр. 425.

[9] *ibid.*, стр. 526.

речима: ,,У ономе што сам раније рекао мислим да је у извесном смислу имплициран одговор на питање које је др Стипанић поставио. Јер, онај механизам о коме је говорено, у ствари је повратна спрега и узајамно пресликавање између два физичка процеса, а математички модел се јавља као симболична слика заједничког хомоморфног механизма за оба ова процеса“.[10] И овде је очигледан напор да се, и уз помоћ кибернетике, уђе у саму делатну дијалектичку суштину Петровићевих и уопште савремених, толико делотворних метода аналогије и моделовања и савладају једностраности, ограничености и тешкоће савременог механицистичког и феноменологистичког биолошког третирања живих бића само ,,живим системима“, — и очигледна искрена Дамјановићева реч на крају: ,,Иначе, потпуно се слажем са основном интенцијом, нарочито са закључком, којег је изнео др Стипанић на крају свога излагања“.[11]

А овај дијалог је само верна слика веома сложене и плодне дискусије која се у многим правцима и са многих страна на овом научном скупу обавила и у којој су се савлађивале многе владајуће методолошке једностраности и ограничености, па и оних које су сметале делотворнијем коришћењу Петровићеве аналошке природне филозофије и нарочито марксистичке материјалистичке дијалектике које су све више заузимале место које им припада у данашњем револуционарном методолошком преокрету математичких, природних, техничких, друштвених и филозофских наука. Са тим се водила борба за отклањање и ограничености саме Петровићеве аналошке мисли, са којима се некада у својим погледима и сам Петровић, хтео или не хтео, ипак носио, као што се водила борба и за отклањање оних ограничености једностраних догматичких узимања саме материјалистичке дијалектике, противу којих су се и сами класици марксизма борили. Феноменологистичка и механицистичка љуштура, која је у *Елементима математичке феноменологије*, 1911, хтела да пружи једну нову природну филозофију као затворен систем једног новог универзалног аналошког симболичког математичког језика попут некадашње Лајбницове ,,Универзалне карактеристике“, пукла је и ослободила истраживачки отворени систем Петровићевих аналошких метода, група, језгара, модела,

[10]) *ibid.*, стр. 526—527.

[11]) *ibid.*, стр. 527.



типова итд. да плодно и убедљиво повезује чак и резултате кибернетике са основама конкретних дијалектичких анализа, синтеза и интеграција, ослобођених сваке догматичке љуштуре. Тако су се делатно и дијалектички укључивале оригиналне компаративне методе аналогије, пресликавања и моделовања Петровићеве природне филозофије у истраживачка и стваралачка расматрања и дискусију опатијског научног скупа пре неколико година, као што се, са позивом на Петровића или не, укључују и морају даље критично и самокритично укључивати у данашњи бурни стваралачки и револуционарни развитак наука и филозофије.

4.

Зато, кад је приређивач издања у ,,Српској књижевној задрузи“ значајног Петровићевог научног и филозофског тестаментарног дела *Метафоре и алегорије*, 1967, млади математичар Драган Трифуновић недавно у своме предговору писао да је Петровић у својој математичкој феноменологији ,,остао сам без ученика“,[12] то више није било сасвим тачно, јер ако заиста нико није ни до данас усвојио сам апстрактни систем аналошког алгоритамског симболизма Петровићеве математичке феноменологије у његовој целини, у његовој механистичности и феноменологистичности као једини и јединствени универзални језик и систем јединствене природне филозофије, не почињу затс мање користити већ многи природњаци, математичари и филозофи неке битне тековине Петровићевих оригиналних погледа и метода аналогије и моделовања, на која су упућени свеколиким данашњим револуционарним дијалектичким методолошким преокретом уопште, а кибернетичким посебно.

Али то што се објективно са Петровићевом оригиналном мишљу и делом збива у револуционарном методолошком развитку науке и филозофије нашега времена, збивало се већ и у самом његовом делу, док је оно било још само у његовим рукама. О томе, и без обухватања на овој линији богате генезе његове истраживачке и стваралачке мисли од проналазака његових управљачких рачунских машина крајем прошлог века до последњег његовог рада *Електричне аналогије* 1941. из техничке

[12]) *Метафоре и алегорије*, изд. Српска књижевна задруга, Београд, 1967, стр. 17.

феноменологије, непобитно и речито говори већ и сама његова последња књига *Метафоре и алегорије*, коју од 1939. до 1942. пише у неколико наврата, прекидан другим светским ратом и фашистичким заробљеништвом које ће му смрт ускорити, али не и спречити га да у ово своје дело унесе и последње, заиста тестаментарне своје мисли и погледе.

У њ је он узео из ранијих својих дела опште и неке битне ставове и примере који су износили погледе, перспективе и методе његове нове природне филозофије аналогије и моделовања, али их је и допунио таквим новим одељцима и расматрањима којима је образовао закључно своје ново дело окренуто укључивању делотворних тековина његове оригиналне мисли у револуционарни преокрет и напредак свеколиког духовног живота, од филозофског и научног, преко књижевног и уметничког, до свакодневног, и зато дело писано и написано за издања Српске књижевне задруге.

Супротно ма каквом математизму који би се затварао у једнострану апстрактност ма каквог алгоритамског симболизма, ова књига се већ првим својим одељцима сасвим конкретно и широко, и сасвим изрично отвара уједно „обичном животу, поезији и науци" да тамо на изванредном обиљу конкретних случајева укаже на природно и нужно коришћење аналошког изражавања и схватања у животу и књижевности, и унесе нову светлост и нове сазнавалачке и стваралачке методолошке могућности филозофски и научно уопштених аналошких пресликавања, моделовања, закључивања, предвиђања и стварања.

Ту ће у овом новом конкретном смеру и на овом најопштијем плану Петровић, полазећи од живота и књижевности, разликовати пре свега метафоре и алегорије, пишући: „Кад Виктор Иго упоређује породицу са кристалом људске заједнице, а друштво са течношћу, то је метафора; кад каже да зуб времена нагриза не само материју него и људска схватања, или да живот тече као помамна река, са опасним вртлозима и четрнтијама, или да клица сумње још није пустила своје жиле, или кад бедуин из Сахаре каже да продаје воду, али не продаје извор (одаје тајну, али не приказује од кога ју је сазнао), то су алегорије... Алегорија изражава нешто што се збива, док метафора исказује нешто што постоји. Метафоре и алегорије имају и своје специјалније облике у којима се употребљавају у нарочитим приликама. То су симболи, амблеми и параболе, од



којих се прва два облика употребљавају у метафоричком, а трећи у алегоријском".[13]

Али, разуме се, Петровић није могао да на овоме остане већ се даље питао: „Какав би био прави, дубљи смисао метафора и алегорија, и зашто се оне тако радо, тако често и готово на свакоме кораку употребљавају, и у обичноме говору, и у књижевности, и у науци?"[14] Оваквим питањем се он очигледно трудио да своју математичку феноменологију широко укључи у свеколико сазнавалачко и стваралачко аналошко закључивање, предвиђање и моделовање у животу, уметности и науци, па је даље писао и одговарао: „На питање се обично даје овакав прост одговор: оне пружају један изврстан начин за кратко и сликовито изражавање чињеница, за које би, без њих, често требало мноштво речи да би се изразило оно што се има у виду. Али то није све, и одговор је непотпун"...[15].

Зато ће га Петровић допунити, с једне стране, тиме што ће истаћи да су оне *субјективно* један од законитих облика људскога сазнања, духа и свести, пишући: „Метафоре и алегорије имају много дубљи смисао и дубљи корен у људској свести: оне одговарају једној инстинктивној и неодољивој потреби духа, која се испољава у свима фазама развића свести... да једне чињенице пресликава на друге, бар привидно схватљивије или изразитије, у циљу било да се учине разумљивијим, изразитијим или улепшаним", али ће допунити и тиме да овај аналошки облик сазнавања и представљања *објективно* почива битно на „чињеницама" и самој њиховој „суштини", пишући: „Пресликавање је основано на сличности између разноврсних чињеница, које могу немати никакве међусобне везе, али имају нечега неоспорно сличнога у својој суштини, што чини да оне личе једна на другу и да по таквој сличности једна чињеница не само да подсећа на другу, већ да се и у обичном животу, и у поезији, и у науци једна замењује другом".[16]

Али ни на овоме Петровић неће овде остати, него ће учинити још један одсудан корак даље ка објективно научној и стваралачкој суштини аналошких метода пресликавања, предвиђања и моделовања, пишући: „Али и то још није све... Таква

13) *ibid.*, стр. 21—22.
14) *ibid.*, стр. 22.
15) *loc. cit.*
16) *loc. cit.*

сличност се састоји у стварној егзистенцији заједничких појединости у разноразним чињеницама; ове чине да се сличност претвара у истоветност у погледу тих појединости. Свака метафора и алегорија има ових у својој суштини, међу чињеницама које везује; она је један нарочити израз егзистенције таквих појединости. И онда, кад се из њих извуче све што је заједничко и дође до онога што је у чињеницама истоветно, појављује се по један апстрактан тип чињеница, у коме саставци губе свако специфично конкретно значење и своде се на нешто опште и апстрактно, што се може везати за најразноразније објекте, без обзира на конкретну природу ствари, а да при том задрже у себи могућност за позитивне логичне дедукције и предвиђања. Тиме метафоре и алегорије улазе у пространу област позитивне науке и ту су чиниле и чине драгоцене услуге“.[17]

Тако, пошавши овога пута од метафора и алегорија из живота и књижевности и набрајајући их на стотине и хиљаде, Петровић укључује своју аналошку природну филозофију у бурни развитак самог стваралачког аналошког пресликавања, предвиђања и моделовања уопште, којим је између осталог окарактерисан револуционарни преокрет делатног дијалектичког развитка методологије природних, техничких, друштвених и филозофских наука, као и мишљења уопште у животној пракси и уметности.

И као што се овде сасвим природно окрећу леђа једностраности сваког математизма, тако и самој једностраности сваког механицизма, јер, иако истиче изванредан значај и плодност „механистичког пресликавања“ које се „остварава помоћу механичких модела“[18] на пољу физичких наука, Петровић усваја да на разним ступњевима развитка света „владају закони сасвим друкчије врсте“ и да је погрешно сводити на механичке оне који то нису, као што су биолошке, физиолошке, друштвене, економске, етичке, естетичке итд., пишући: „То се сводило на извештачено механистичко објашњење свега и свачега, натегнуто, неприродно и лишено сваке логичке основице, осим неке овлашне и недовољне сличности. Довољно је подсетити на поменута некадашња ијатрихемичарска објашњења физиолошких појава елементарним законима механичке равнотеже и кретања... Такав је био и познати злосретни покушај да се доктрина еволуције,

---

[17]) *ibid.*, стр. 23.

[18]) *ibid.*, стр. 82—83.



онаква каква важи за органски свет, пренесе на литерарне врсте у књижевности; или да се економске појаве сведу искључиво на игру цифара које не знају ни за што друго до за неумитне законе бројева“.[19]

Али овде окрећући леђа и сваком феноменологизму, бива реч „о таквим општим појмовима као што је појам типских улога и типских чињеница које се могу привезати за носиоце улога најразноврснијих интимних природа“ разних ступњева природног развитка ствари од механичких до психичких да се „типским улогама“, „аналошким језгрима“ или „моделима“ и „предвиђањима“ помоћу захвата вертикално у саму чисту логику ствари самога свеопштег природног „тока развитка“ са истом научном егзактношћу са којом математичке науке то чине општим појмовима бројева и поредака, а да је сваком ступњу природног развитка природних појава остала нетакнута сама њему својствена „интимна природа“ његових специфичних законитости и да је од њих релативно „независно“ учињен овај продор аналошког пресликавања, закључивања, предвиђања и моделовања у „чисту логику ствари“, или како Петровић вели: „Чињеница, које произилазе из сарадње таквих улога у њиховој продукцији, потпуно су независне од интимне природе онога у чему се спољно приказују. Њихово предвиђање, основано на чистој логици ствари, онако исто поузданој као што су и закључци о бројевима и порецима, потпуно је оправдано и тачно и за материјалан и за импондерабилан свет чињеница“.[20]

Заостатак феноменологистичности је овде остао још само у подвлачењу „потпуне независности“ нових аналошких типова, језгара или модела који својим општим одредбама обједињују специфичне законитости или природе неколиких разних ступњева развитка природних појава, уместо да сагледа њихову само релативну дијалектичку независност али и исту такву зависност која природно овде постоји између аналошки развојно заједничког, општег, групног, типског, суштинског, с једне, и специфичне и конкретне „интимне природе“, с друге стране.

Али овде је наглашено и оно што је супротно овом феноменологистичком заостатку, а то је да се аналошким пресликавањем, закључивањем и моделовањем захвата у саму „чисту

---

[19]) *ibid.*, стр. 170.

[20]) *ibid.*, стр. 171.

логику ствари", као што ће у следећем излагању речи да захвата у саму „типску суштину" (а не само у феноменологистички феномен!) „тока развоја", пишући: „Метафора и алегорија изражавају непосредно понеку запажену или наслућену сличност међу диспаратним бићима, чињеницама или догађајима. Кад се таква сличност у мислима пречисти и сведе на такав облик да се њена типска суштина може привезати за који било од посматраних случајева, добија се пречишћено језгро сличности које више не води рачуна о интимној конкретној природи бића, чињеница и догађаја, из којих је апстраховано. Језгро спаја међу собом све то и даје му једно исто типско обележје... Кад се алегоријски каже да је освајачка бујица необуздане хорде то исто што и водена бујица која руши све на шта наиђе, очевидно се не мисли да те две ствари тиме што се међу собом пореде имају чега год заједничког по својој конкретној природи. Алегорија казује само то, а што је неоспорно тачно: да се ту, и код освајачке и код водене бујице ради о једном интензивном импулзивном фактору који јача са препонама што му се стављају насупрот".[21]

Дотле Петровић стиже у ослобођавању своје нове аналошке методе пресликавања, предвиђања и моделовања од једностраности математизма, механизма и феноменологизма у своме предсмртном, тестаментарном делу *Метафоре и алегорије* којим би да их широко унесе у општи начин стваралачког аналошког мишљења, предвиђања и моделовања нашега времена, и ту по навици третирајући све појаве само хоризонтално као диспаратне и без њихове природне и нужне треће и четврте димензије у ступњевитом моделу дијалектичког спиралног кретања свеопштег природног „тока развоја", до чијег сагледавања му у његовој природној филозофији беше иначе толико стало.

5.

Али, кад је реч о овом последњем, морамо на крају приметити да се и овоме он на свој начин беше приближавао у једном свом ранијем делу које је по своме покушају слично овоме последњем, то је *Феноменолошко пресликавање* из 1933.

Јер, ако је својом академском беседом *О математичкој теорији активности узрока* 1900. године Петровић обележио

[21]) *ibid.*, стр. 174.



прву етапу постављања основних принципа своје природне филозофије као математичке феноменологије, а волуминозним својим делом *Елементи математичке феноменологије* из 1911. другу етапу формулисања строгим математичким симболизмом основне црте самог њеног система, онда је трећу етапу несумњиво обележио делом *Феноменолошко пресликавање* у 1933. години, у којем је пре свега, како вели, „нарочито избегнут математички начин излагања" и сваки „математички апарат", и тражен начин да се методама и принципима његове аналошке феноменолошке природне филозофије обухвати и расветли свеколики револуционарни преокрет природних и техничких наука од лорда Келвина до Ајнштајна, а с тим да се у њ систематски укључе његове методе и принципи аналогије, пресликавања, предвиђања и моделовања, а што се тиче самих новоуведених апстракција, за њих Петровић на крају *Увода* додаје да: „Не би било тешко све уведене апстракције *математизовати* и тиме их учинити прецизнијим и потпунијим".[22] Овде математичко није више ни „основно" ни „битно", о чему већ говори и сâм наслов који је од *Елемената математичке феноменологије* постао само *Феноменолошко пресликавање*.

Овде се, међутим, још једна пренаглашеност, једностраност и ограниченост — механицизам — претходних етапа принципијелно отклања такође, и „механичко пресликавање" ограничава на механичке појаве. Том приликом се Петровић враћа на сâм историјат свеколике ове проблематике уједно методологије и природне филозофије од Декарта, преко Ернеста Маха, до Деброља и Хајзенберга, да покаже да се он управо критички према Маховом механицистичком протезању механичког пресликавања на све појаве укључује у свеколики савремени филозофски и научни, методолошки и принципијелни развитак аналошког захватања суштинâ и целине „развојног тока" природних појава на пољу природних наука, пишући: „Још Декарт је казао да треба тежити томе да се природне појаве представе и објасне „*per figuras et par mouvement*". То је и дало повода ономе што Мах назива „Механистичком Митологијом", која је покушавала да све што се дешава у свету материјалних факата, сведе на појаве равнотеже и кретања материјалних система. — Међутим, модерне физичке концепције, као што су, на пример,

[22]) *op. cit.* стр. 12.

оне у таласној Механици Деброљија и Хајзенберга, показују да је то немогућно чак и за мноштво појава материјалне природе. То ће утолико пре бити случај и за пространи свет импондеробилних појава, где се могућност или немогућност тога не може ни доказивати".[23]

И указујући на то како његова аналошка природна филозофија природно израста из свеколиког револуционарног искуства аналошког пресликавања, предвиђања и моделовања савремене природне науке од Ома, Ломеа, Максуела, Вилијама Томсона, Липмана, Хелмхолца, Болцмана, Кирхофа, Хајзанберга, Гарбаса, Еверса или Лоренца, до Рикатија, Говија, Дутера, Пјера Кирија, Ајнштајна, Деброљија, и толиких других и како га доследно обједињује и своди на најмањи број најопштијих метода и принципа, систематски превазилазећи пре свега механицистичке математичким аналогијама и моделима. „И саме по себи, пише он, независно од услуга које могу чинити као водиље у појединим истраживањима, математичке аналогије имају свој нарочити филозофски интерес. Велики проблем Природне Филозофије, чије решење је идеално, асимптотички циљ свих наука, и које се састоје у томе да се све оно, што се мора претпостављати ради разумевања природних појава, као и број пропозиција, које обухватају све што се у Природи дешава, сведе на што је могуће мању меру, постаје у толико приступачнији и утолико више олакшан, уколико буде већи број запажених аналогија међу диспаратним појавама".[24]

А логички и методолошки пут који нужно води од аналошког пресликавања, предвиђања и моделовања у природним и друштвеним наукама оваквој природној филозофији као нужној њиховој интеграцији и проблематски увек имплицираној основи Петровић оцртава језиком саме савремене теоријске или математичке физике на нивоу апстракције математичких аналогија, следећим речима: „Очевидно је, пре свега, да све што доприноси груписавању појава по њиховим механизмима, законима њиховога тока и математичким релацијама међу факторима који у тим механизмима играју одређене улоге, доприноси, у исто време, и томе да се приђе за који корак ближе поменутоме асимтотноме циљу. Математичке аналогије које једној маси диспаратних

[23]) *op. cit.*, стр. 85.
[24]) *ibid.*, стр. 74.



појава дају један исти, заједнички тип, једно су од најмоћнијих средстава за такво приближавање томе циљу. Ослобођавајући из једне аналошке групе оно што је њоме обухваћеним појавама заједничко, што их спаја, што им, поред све диспаратности, даје један исти тип, математичке аналогије доводе до једне опште теорије те групе појава, у којој конкретна природа, њихова као и појединих фактора у њима није прецизирана, нити игра какву улогу, а која се, међутим, спецификовањем те конкретне природе своди на специјалне теорије појединих од тих појава и, на тај начин, обухвата једну масу, на први поглед разнородних теорија, без икакве међусобне везе. То чини могућним груписавање појава у типове, по математичким аналогијама што постоје међу њима, а тиме и редукцију недогледнога броја диспаратних појава на ограничен број типова, које је довољно проучити, па да, тиме, и појаве, из којих су они апстраховани, буду проучене. Јасно је, према томе, да ће се бити врло близу горњем идеалном циљу, кад појаве буду груписане и подведене под опште шеме на чије ће проучавање бити, тада, редукован основни проблем Природне Филозофије".[25]

И цело ово дело *Феноменолошко пресликавање* пружа нов покушај методолошке и филозофске систематизације самог методолошког револуционарног преокрета данашњих, претежно узетих природних наука управо методама аналошког пресликавања, предвиђања и моделовања; и у покушају овога дела, на овој трећој етапи развитка Петровићеве филозофске мисли, критичком према математизму и механицизму, израстају феноменологистичка пренаглашеност, једностраност и ограниченост до такве неочекиване мере да се у закључку Петровићева феноменологија смело и парадоксално поставља изрично чак и као нова „научна митологија". У последњој глави, под насловом *Митологија факата*, Петровић разматра развитак свеколиког људског сазнавања као „митског пресликавања", које почиње ступњем древне верске антропоморфне митологије, наставља ступњем развитка механистичког пресликавања рационалне и небеске механике као „механистичке митологије" која је у Лапласово доба, како

[25]) *ibid.*, стр. 74—75.

Петровић критички вели, „била узела маха и била у моди и тамо где јој нимало није било места",[26] и која се на данашњем ступњу математичким феноменолошким пресликавањем превазилази у „феноменолошку митологију", или како Петровић вели: „Антропоморфистичка митологија уступа место, прво оној коју је Мах назвао *механистичком митологијом*, која све што се може пресликава на свет појава равнотеже и кретања, а ова затим *феноменолошкој митологији* која све своди на комбинације апстрактних типова улога и манифестација њихове сарадње и која ће, несумњиво, у своје време обухватити целокупан свет фактора приступачан људскоме сазнању и људској изражљивости".[27]

И у овој феноменолошкој митологији сами нови непознати типови улога, као што је нов тип улога Ајнштајновог релативистичког времена ступају као нова непозната научна божанства која преображавају научни поглед на свет, или како Петровић вели: „Типови улога понављају се, у свету људски схватљивих и изражљивих факата, у разноврсним својим међусобним комбинацијама и у бескрајно разноврсним својим спољним облицима који су само видљиве слике невидљиве закулисне игре феноменолошких улога, божанства своје врсте. Скуп тих типова је ограничен, као што је ограничен и скуп античких митолошких божанстава. И ко може знати на какве ће нове концепције и непознате факте навести какав нов тип улога о коме се данас ништа и не слути! А какве хоризонте отвара проналазак какве нове феноменолошке улоге, најочитије показује нова, до најновијег времена непозната *улога времена* у свету *материјалних факата, релативистичка улога четврте димензије у материјалној васиони*".[28]

Али сасвим неочекивано после ступња феноменолошког пресликавања и „феноменолошке митологије" долази још и ступањ релативистичког пресликавања и „релативистичке митологије", и то долази управо појавом „непознате улоге времена у свету материјалних факата, релативистичке улоге четврте ди-

[26] *ibid.*, стр. 226.
[27] *ibid.*, стр. 228.
[28] *ibid.*, стр. 229.



мензије у материјалној васиони", која (ваљда својом „игром феноменолошке улоге, божанства своје врсте"!) парадоксално и противуречно управо специјалном и општом теоријом релативности до, како сâм Петровић на крају каже, „апсолутне физичке реалности", а самим тим, ваљда, и до укидања сваке „феноменологичности", „митологичности" и „божанствености".

Јер, иако под насловом, по смислу и духу супротном *Релативистичка митологија*, Петровић показује како управо новим научним „релативистичким пресликавањем" почиње да се укида сама некадања митологичност апсолутног времена новим конкретнијим моделом посебног релативног времена као четврте димензије простора, пишући: „Релативистичко пресликавање даје за данас крајњу слику о свету факата, у низу слика до којих је редом и поступно долазила људска свест у непрекидном, све оштријем и све дубљем посматрању света, и све суптилнијим анализирањем онога до чега доводи непосредно опажање. Њему је дало повода приписивање једне сасвим нове улоге времену, које је дотле било ничим неограничен фактор на који ништа и ни на који начин не може утицати, потпуно независан од онога што бива и онога што се дешава. По новој концепцији то није случај: време је у зависности од свега тога, а његова улога у свету материјалних факата изражена је начином на који његове промене утичу на факте што се дешавају у обичноме тродимензионалном простору. Непосредна последица такве концепције је то, да не постоји никакав апсолутан систем репераже мерљивих елемената у томе простору, тако да би посматрачи, посматрајући факте у различним приликама, на пример у различним кретањима, запажали један исти факт променљив са тим приликама. — Какве промене уноси та нова улога у људско запажање и схватање материјалних факата? Има ли у томе запажању и схватању чега апсолутног, независног од посматрача и од прилика у којима се посматра? — Та су питања створила једну врсту научне митологије факата која се из основе разликује од свих дотадашњих митологија, у којој нестаје свих и механистичних и феноменолошких антитета чијом би се закулисном игром стварали материјални факти, и у којој су ти ентитети смењени чисто геометриским ентитетима у четвородимензионалном простору. — По релативистичкој слици, време и простор су компоненте једнога истог четири-димензионалног ентитета, топохроничног простора... Улога, одвајкада придавана времену, мења се из основе. То више није, по својој улози, независан, самосталан, ничим нерегулисан фактор на који ништа и ни на који начин не може утицати. То је само четврта компонента једног прозаичног тетракомплексног ентитета, која нема своју самосталну егзистенцију и чији се ефекти испољавају само у заједници са ефектима осталих трију компонента".[29]

А кад на основу опште теорије релативности Петровић разлаже како се топохронично-метрички простор одређује са четрнаест величина и кад закључи: „Факти пресликани на тај простор не зависе више ни од посматрача, ни од материјалног садржаја области у којој се овај креће, ни од система еталонаже. Свака таква слика изражава по једну *айсолуйну физичку реалносш*",[30] зар није ту свака митологичност ишчезла пред једним коренито обухватним моделом чију дијалектичку конкретност он назива „апсолутном физичком реалношћу", значи самом супротношћу свакоме феноменологизму? Није ли то сасвим аналог случај ономе кад Петровић, говорећи о самом стварном „механистичком пресликавању" механичких појава, много феноменологистички инсистира на томе да се ту аналогије односе „не на интимне механизме појава", а, међутим, напротив, кад говори о самом моделу узетом у целини, он ће природно противуречно писати: „Кретање система, што саставља модел, и појединости у којима се састоји њиме пресликана појава, често имају толико заједничких црта, да се помоћу модела могу и схватити најважније појединости на оригиналу, и на њему предвиђати нови факти које су после имали само да провере дубље посматрање и експеримент".[31]

Тако се и на овој трећој етапи свога развоја пионирска и истраживачка Петровићева мисао креће у противуречностима и превазилажењима својих противуречности и са тим у превазилажењима својих ограничености и тешкоћа својих и науке свога времена, са којима се упорно борио он, који је у основи свега видео само борбу разних и супротних фактора и, на пример, писао: „Мноштво појава свих конкретних врста асимилира се борби фактора, чије околности, завршетак и епилог илуструју оно што се у појави има у виду. Равнотеже и кретања материјалних тела сматрају се као ефекти контрабалансирања механичких сила у међусобној борби, а при чему је та борба стегнута у границе механичких веза. Ефекти те борбе испољавају се у геометриским и кинематичким појединостима равнотеже и кретања. Борба афинитета хемиских елемената, у одређеним топлотним, светлосним и електричним приликама, под одређеним притиском, има као перипетије сам ток хемиске реакције, са свим његовим кинематичким појединостима",[32] итд. Ово, као и остала његова дела, својим кретањем и својим садржајем пуно је конкретних дијалектичких расматрања и резултата и зато борба и превазилажење многих тешкоћа и ограничености.

[29]) *ibid.*, стр. 230—231.
[30]) *ibid.*, стр. 235.
[31]) *ibid.*, стр. 228.



А овим делом је његова аналошка природна филозофија тако прошла трећу етапу свога развитка, који ће, као што смо видели, у тестаментарном, предсмртном његовом делу *Мешафоре и алеїорије* забележити и четврту, последњу своју етапу, на којој више неће бити ни речи о некој митологији толико се сваки митологизам, тј. феноменологизам беше превазишао у самом закључку треће етапе сам се генетички разлажући на древни антропоморфни, механицистички, математичко-феноменологистички и релативистички, и са овим последњим се укидајући.

Толико је буран дијалектички развитак Петровићеве аналошке природне филозофије, верна слика револуционарног развитка нових метода аналогије и моделовања савремене науке и филозофије данашњице, у њиховом револуционарном преокрету.

Али и толико је разноликих, развојних и дубинских отворених и пређених нових методолошких и принципијелних перспектива његове аналошке и све конкретније и критичније природне филозофије која се све присније укључује и уткива у општу

[32]) *ibid.*, стр. 214.

данашњу која се гради и, видимо, наставља са самим даљим истраживачким и стваралачким радом и развитком данашњих природних, техничких, друштвених и филозофских наука.

Тако, да на крају сагледамо у целини и оценимо улогу и значај Петровићеве аналошке природне филозофије, мораћемо се послужити њеним новим и битним основним методолошким принципом и критеријумом, и рећи да је њена „типска улога" у свему и битно, суштински аналога револуционарним и стваралачким улогама и новим тековинама природних филозофија таквих наших најистакнутијих научника и филозофа претходних револуционарних епоха модернога доба, као што су Драгишић и Петрић, Руђер Бошковић, Доситеј, Његош и Урош Миланковић, Никола Тесла и Божидар Кнежевић, — стваралачким улогама и новим тековинама које се могу само даље истраживачки, стваралачки, критички и самокритички развијати, као што се и развијају.

МАТЕМАТИЧКА БИБЛИОТЕКА, 38 (1968), 87—92.

Др *Ернест Стипанић*

# МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ, МАТЕМАТИЧАР И ФЕНОМЕНОЛОГ

Михаило Петровић (1868—1943), професор математике, преко четири деценије на Великој школи и Универзитету у Београду, члан низа домаћих и иностраних Академија наука и научних друштава, професор више иностраних универзитета и активни учесник на многим међународним научним скуповима математичара, на пространом пољу своје ванредно плодне научне активности, рељефно је испољио, у преко 250 својих радова, објављених у домаћим и иностраним научним часописима, у издањима академија наука, универзитета и научних друштава, одлике оштроумног и креативног математичара и оригиналног филозофа природе.

Математичар снажне интуиције, у чијем се математичким истраживањима испољавало јединство погледа, идеја и метода, Петровић је, релативно једноставним средствима класичне математичке анализе, долазио брзо до нових и значајних резултата у многим диспаратним областима математике, откривајући неочекиване везе између диспаратних математичких факата.

У домену класичне алгебре од трајне вредности су његови резултати који се односе на неке проблеме из теорије полинома, односно из теорије алгебарских једначина. То су у првом реду проблеми расподеле нула у равни комплексне промењиве за полиноме, а исто тако и извесна уопштења тих проблема који се тичу функција дефинисаних степеним редовима.

Створио је оригиналну теорију нумеричких спектара и спектралну рачунску методу, применивши их у решавању конкретних проблема алгебре, аритметике, интегралног рачуна и теорије функција. Његова спектрална метода оцењена је као врло оштроуман начин аритметизације аналитичких проблема, а његова тежња да аритметизује што шири скуп проблема, па и по цену великог броја аритметичких операција, практично неизводљивих у доба када још нису постојале електронске машине, као сигуран знак да је својим нумеричким спектрима превазишао своје време.

Значајни су његови радови који се односе на проблеме евалуације одређених интеграла, на теореме о средњим вредностима, врло важним за математичку теорију, затим на низ проблема из опште теорије функција, у којима се рељефно оцртава Петровић као аналиста дубоког смисла да уочи важне проблеме које имплицира математичка анализа и да им оригиналним средствима и методама нађе решења.

Но, иако је стварао и радио у многим областима математике, Петровић је посебну наклоност имао према диференцијалним једначинама. Бројни су његови прилози теорији диференцијалних једначина. Својим радовима из теорије квалитативне интеграције диференцијалних једначина заузима истакнуто место међу математичарима који су развијали ту теорију и дали јој значајне прилоге. У вези са диференцијалним једначинама и њиховим применама су и његови радови у геометрији, механици и другим наукама. За њега су оне увек биле, у првом реду, математичко средство проучавања разноврсних појава у природи и друштву. Такво гледање на диференцијалне једначине, а у вези са тим и на улогу математике у истраживањима природе, Петвовић је формирао на изворима и традицијама славне француске математичке школе, деценијама изграђиване од Лагранжа, Лапласа, Фуријеа, Кошија, Поанкареа, Пикара, Апела, Дарбуа, Ермита и других. Оно је отворило пут његовој математичкој и општој феноменологији, као грани Природне филозофије.

Своја гледања на улогу и примену математичких метода и идеја у истраживањима природе и друштва, Петровић је мисаоно најдубље и најшире изразио у својој феноменологији, коју је изградио у низу својих дела, а нарочито у делима *Елементи математичке феномонологије* (Београд, 1911) и *Феноменолошко пресликавање* (Београд, 1933).* И управо та дела сврставају Петровића међу истакнуте математичаре-мислиоце који су били визионари нових токова у развитку науке и филозофије. Зато није случајно Петровић дошао у својој феноменологији до експлицитне констатације: „да ће се математика будућности распрострти на све што има могућност потпуног апстраховања од конкретних носилаца и садржину која је, тако апстрахована до крањих граница могућности, ипак приступна позитивним логичким дедукцијама. Математика бројева, величина и поретка била би тада само једна пространа област тако проширене математике која би, по природи ствари, продирала и у остале области где год за то буде било могућности, тј. где се међу апстрахованим појединостима буде налазило и таквих које би се везивале за бројеве, величине и поретке... А несумњиво је да се математика будућности неће састојати искључиво у формирању једначина и неједначина и у израчунавањима. Тај моћни и суптилни инструмент људске логике, у случајевима кад за то буде имао подесну основицу, даваће одговоре не само на питање *колико*, већ и на питање *како*. То се већ и данас може донекле видети, на пример, у модерној теорији апстрактних скупова...“. И површан поглед на развитак математике у последње три деценије, као и на ванредно динамичан продор метода модерне математике у скоро сва научна истраживања, довољан је да бисмо стекли представу колико су визионарске биле наведене Петровићеве констатације.

* За Петровићеву феноменологију од великог је значаја и дело које је оставио у рукопису, а које је недавно издала Српска књижевна задруга под насловом *Алегорије и метафоре*.



Разни *математички модели* — са којима има много заједничког Петровићево *аналошко језгро* односно његов *феноменолошки тип факата*, као скуп $F$ заједничких појединости, уочених са становишта $S$, између диспаратних факата и до крајњих граница апстрахованих — у разним ситуацијама апстрактно-научних и техничких истраживања играју данас битну улогу, па управо те чињенице највише побуђују интерес за Петровићеву феноменологију и подстичу да се испитају *могућности* њене *актуализације* на бази метода и идеја математике у *савременом* развитку, као и на бази њених примена; на пример: на бази метода и идеја теорије вероватноће и математичке статистике и њихових примена у разним природним и друштвеним наукама, где нарочито долазе у обзир стохастички модели; на бази метода и идеја нееуклидских геометрија у вези са релативистичком механиком, као и на бази других метода и идеја модерне математике, посебно оних које пружају апстрактна алгебра и математичка логика са својим применама у теорији аутомата и у инструменталној математици уопште.

Ако је реч о истраживањима која се односе на разне типове математичких структура, истраживањима толико карактеристичним за савремене токове свих грана математике, онда је основно запитати се не би ли Петровићева идеја *аналошког* *језгра* односно *феноменолошког типа факата* и *феноменолошког пресликавања* уопште, могла наћи у тим истраживањима плодотворне примене? Јер као што се *аналошко језгро* односно *феноменолошки тип факата* $F$ добија са становишта $S$ апстраховањем из конкретних диспаратних појава односно факата $P_j$ $(j=1, 2, 3, \ldots, n)$, слично се тако апстраховањем скупова $E_j$ $(j=1, 2, 3, \ldots, n)$ добија на пример, група $G$, као алгебарска структура, када се одређеним аксиомима фиксира операција $\oplus$ која је дефинисана на диспаратним скуповима $E_j$. Аналогно се може казати ако су у питању и друге математичке структуре. Готово се идентичне ситуације јављају, на пример, и у питањима која се односе на истраживања у вези са разним математичким финитним и инфинитним просторима.

Слично је и када су у питању разни аксиоматски системи. Скуп $O$ основних (полазних) појмова и основних (полазних) ставова у једном аксиоматском систему $A$ је „аналошко језгро" односно „феноменолошки тип факата" скупа $D$ диспаратних појмова и ставова који као целина образују теорију $T$, на коју се односи аксиоматски систем $A$. И док се, шематски посматрано, „феноменолошко пресликавање" скупа $D$ на скуп $O$ припремало и постепено остваривало најчешће путевима дуге историјске и научне еволуције теорије $T$, дотле се „инверзно феноменолошко пресликавање" скупа $O$ на скуп $D$ остварује апстрактно-математичком и логичком дедукцијом теорије. Примера за ово има доста. Најмаркантнији су, можда, разни аксиоматски системи који се тичу аритметике, алгебре и геометрије. Добро је познато, на пример, како је текла историјска и научна еволуција појма реалног броја и какве је тешкоће тај појам стварао почев од оног доба кад су Питагорејци наслутили ирационалан број, па преко Еудоксове-геометријске теорије реалног броја, све до друге половине XIX столећа, када су Кантор и Дедекинд створили беспрекорно прецизну теорију реалног броја, односно кад је Хилберт 1900. године, у свом познатом систему аксиома, такорећи, сумирао дуговековни конструктивни процес аритметике реалних бројева. Слична је у том погледу, можда још изразитија, ситуација када је реч о Еуклидовом односно Хилбертовом систему аксиома геометрије, или када је реч о системима аксиома нееуклидских геометрија.

Посебан интерес за Петровићеву феноменологију могу побудити идеје и методе *кибернетике*, „науке о општим принципима управљања, о средствима управљања и њиховом коришћењу у техници, друштву и живим организмима". То нарочито важи ако је у питању теоријска кибернетика, као математичка наука која широко користи аналогије и математичко моделирање. „У изгледу је да ће, кад једном буде како треба разрађен, феноменолошки инструмент, као и математички, имати ту моћ да за нас мисли и доводити до резултата тешко приступних или неприступних обичном умовању" — писао је Петровић, пре више од тридесет година, и даље: „А не треба губити из вида да један од сигурних путева за ту разраду води преко феноменолошког пресликавања факата по њиховим заједничким појединостима и преко апстракција онакве врсте каквима је створен и усавршен данашњи математички апарат. Такво пресликавање је у исто време, и један поуздан пут за увођење математичког апарата у области у којима му је данас забрањен улазак".



Петровићева феноменологија базира се имплиците на принципу јединства материјалног света, јер се, у крајњој линији, само тако може објаснити егзистенција аналошког језгра диспаратних појава односно феноменолошког типа факата. Он недвосмислено истиче да математичке аналогије „нису случајности, већ да имају своје подлоге и дубљег разлога у егзистенцији нечег заједничког у самој суштини појава и њихових механизама". Отуда истоветност математичких релација за квалитативно различите процесе. Уопште узев, Петровић својом феноменологијом математичким теоријама и појмовима прилази као апстрактним шемама и објектима који своју подлогу имају у појавама и процесима реалног света. Гносеолошке и опште филозофске импликације таквих ставова, који се врло често могу сусрести у свим Петровићевим феноменолошким радовима, прихватљиве су за научну материјалистичку филозофију. Треба посебно нагласити да они садрже довољно елемената који подстичу на разраду принципа детерминизма и категорија случајности и нужности. Наведени Петровићеви ставови, и многи други у његовој феноменологији, с обзиром на савремено математичко моделирање природних и друштвених појава, као и људског мишљења, и с обзиром на опште филозофске импликације тог моделирања дају озбиљног повода и основа за истраживања у вези могуће улоге Петровићеве феноменологије у решавању проблема, данас актуелних у природној филозофији.

Петровићева феноменологија, богатством антиципација идеја и метода савремене науке и природне филозофије, све више скреће пажњу на себе и обавезује сваког ко озбиљно проучава развитак математичких наука и природне филозофије, нарочито ако је у питању тај развитак код нас.

Многи Петровићеви радови, научним методама, идејама и резултатима, које садрже, инспирисали су, и још увек инспиришу, стваралачки рад бројних математичара у нашој земљи и ван ње. Читавим током своје дугогодишње научне и наставне активности, он је непосредно утицао на развитак математичких наука код нас и на развитак њихове наставе, нарочито када је у питању Београдски универзитет. У кругу универзитета створио је математички центар из којег су, под непосредним утицајем његовог стваралачког, научног и педагошког рада, потекли бројни математичари који су се афирмисали у науци и настави. Тако је Петровић огромно допринео стварању научних и наставних кадрова из области математичких наука код нас.

На крају, можемо подвући да Петровићева стогодишњица рођења подстиче и обавезује да се свестрано проучи његов научни опус који је оставио у наслеђе нашој и светској науци.

МАТЕМАТИЧКА БИБЛИОТЕКА, 38 (1968), 93—96.

Др *Драгослав С. Митриновић*

# О ЈЕДНОЈ НЕЈЕДНАКОСТИ

Нека је $\alpha$ реалан број и нека је $0<\theta<\pi/2$. Ако су $z_1, \ldots, z_n$ комплексни бројеви који испуњавају услове

$$\alpha-\theta \leqslant \arg z_k \leqslant \alpha+\theta \qquad (k=1, \ldots, n),$$

тада важи неједнакост

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \geqslant (\cos\theta) \sum_{k=1}^{n} |z_k| . \tag{1}$$

Колико нам је познато, неједнакост (1) појавила се први пут у математичкој литератури 1917. године у Петровићевом чланку [1] и то за партикуларни случај $\alpha=\theta=\pi/4$. М. Петровић је доказао општи случај неједнакости (1) тек 1933. године у чланку [2], и том приликом применом ове неједнакости извео је неке неједнакости за интеграле.

Неједнакост (1) наведена је у Караматиним књигама [3] и [4] које су објављене 1949. и 1950. године респективно.

У [3] је такође доказана неједнакост

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \geqslant (\cos\theta)\int_a^b |f(x)|\,dx,$$

где је $f$ комплексна интеграбилна функција, дефинисана за $a\leqslant x\leqslant b$ и $-\theta\leqslant \arg f(x)\leqslant\theta$ $(0<\theta<\pi/2)$.

У чланку [5], који је објављен 1963. године, амерички математичар Wilf поново је доказао неједнакост (1) и по свему изгледа да он није знао за Петровићев резултат, мада је он јасно приказан у часопису *Jahrbuch über die Fortschrite der Mathematik* **46** (1920—1924), 104. Wilf је применио неједнакост (1) на један проблем који се односи на полиноме.

Генерализације неједнакости (1) у Hilbert-овом и Banach-овом простору дали су у чланку [6], 1966, Diaz и Metcalf. Ове резултате уопштио је затим југословенски математичар С. Курепа [7].

У књизи [8] налази се следећа варијанта неједнакости (1) за $\theta=\pi/2$:

Ако сваки комплексан број $z_k$ $(k=1, \ldots, n)$ има особину да је $z_k \neq 0$ и $\alpha \leqslant \arg z_k < \alpha+\pi$, тада се њихов збир $z_1+\cdots+z_n$ не може анулирати.

Marden-ова књига [8] објављена је 1949. године, али извор овог резултата није наведен.

У књигама [9] и [10] наведен је Ђоковићев доказ неједнакости (1) који гласи:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| &= \left|e^{-i\alpha}\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \\ &\geqslant \mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha}\sum_{k=1}^{n} z_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} z_k \cos(-\alpha+\arg z_k) \\ &\geqslant (\cos\theta)\sum_{k=1}^{n} |z_k|.\end{aligned}$$

Историјат неједнакости (1) је леп пример из кога се види да неки заборављени резултат може понекад изазвати нова плодна истраживања ако се поново открије.

*

Петровић је имао изражени смисао за теорију неједнакости и он је из те области објавио више расправа. Штета је што неједнакостима није посветио више пажње.

Године 1932. Петровић је објавио књигу *Рачунање са бројним размацима*, која има 193 стране. То су у ствари предавања која је он држао први пут школске 1931—1932. године на Универзитету у Београду, а затим их поновио још неколико пута следећих година.



Наведена књига представља монографију о неједнакостима и то прву на свету. Касније, 1934. године, Hardy, Littlewood i Pólya објавили су монографију *Inequalities* која је преведена на руски [11]. Преводилац ове књиге (стр. 10 превода) каже да до појаве те књиге у светској математичкој литератури није било монографије посвећене неједнакостима. Преводиоцу свакако није била позната Петровићева монографија, када је првенство приписао другима.

Корисно је дубље и систематски проучити Петровићеве резултате из неједнакости, јер је савремена математика концентрисана у великој мери на »*minorer, majorer et approcher*«, како је недавно лепо рекао један француски математичар из бурбакистичке школе.

*

Интересантно је истаћи случајност да је Петровићеву неједнакост поново открио један амерички математичар, и да је она била полазна тачка да друга два америчка математичара уопште ову неједнакост. Најзад, југословенски математичар С. Курепа дао је ново уопштење. Не оспоравајући вредност наведених генерализација, ипак треба признати да је Петровићева неједнакост оно што је битно у радовима које су дали Diaz, Metcalf и С. Курепа. Међутим, они који се баве уопштењима, често не одају дужно признање резултатима којима су се инспирисали.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Petrovitch, *Module d'une somme*, L' Enseignement mathématique **19** (1917), 53—56.

Видети такође:

*Notice sur les travaux scientifiques de M. Michel Petrovitch* (1894—1921), Paris 1922, p. 18—19.

[2] M. Petrovitch, *Théorème sur les intégrales curvilignes*, Publications Mathématiques de l'Université de Belgrade, **2** (1933), 45—59.

[3] J. Карамата, *Теорија и пракса Stieltjes-ова интеграла*, Српска Академија Наука, Посебно издање, **154**, Београд 1949, стр. 300—301.

[4] J. Карамата, *Комплексан број са применом на елементарну геометрију*, Београд 1950, стр. 155.

[5] H. S. Wilf, *Some applications of the inequality of arithmetic and geometric means to polynomial equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), 263—265.

[6] J. B. Diaz and F. T. Metcalf, *A complementary triangle inequality in Hilbert and Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966), 88—97.

[7] S. Kurepa, *On an inequality*. Georgetown University, Department of mathematics, 1967, 7 pp.

[8] M. Marden, *The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable*, Amer. Math. Soc., Mathematical Surveys **3**, New York 1949., p. 1.

[9] D. S. Mitrinović, *Elementary inequalities*, Groningen 1964, p. 143.

[10] Д. С. Митриновић, *Неједнакости*, Београд 1965, стр. 210.

[11] Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа, *Неравенства*. Перевод с английского В. И. Левина с дополнениями В. И. Левина и С. Б. Стечкина, Москва 1948.

МАТЕМАТИЧКА БИБЛИОТЕКА, 38 (1968), 97—100.

Др *Драгослав С. Митриновић*

# О ЈЕДНОЈ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОЈ ЈЕДНАЧИНИ

Михаило Петровић [1] доказао је 1926. године следећи резултат:

**Теорема П.** *За сваку интеграбилну Riccati-еву једначину*

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx}+y^2=F(x)$$

*постоји по један неограничен низ функција* $X_1, X_2, \ldots$ *променљиве* $x$ *таквих да је и свака једначина*

$$(2) \qquad \frac{dy_k}{dx}+y_k^2=F(x)+X_k \qquad (k=1,\, 2,\, \ldots)$$

*интеграбилна, и то без икаквих суплементарних квадратура.*

*Функције* $X_k$ *формирају се по рекурентном закону*

$$X_k=\frac{3}{4}\left(\frac{X_{k-1}'}{X_{k-1}}\right)^2-\frac{1}{2}\,\frac{X_{k-1}''}{X_{k-1}},$$

*где је* $X_0=F(x)$.

*Интеграли једначине* (2) *израчунавају се потпуно из претходних интеграла*

$$y_{k-1},\ y_{k-2},\ \ldots,\ y_1,\ y_0 \qquad (y_0=y)$$

*помоћу рекурентног обрасца*

$$y_k=y_{k-1}+\frac{d}{dx}\log\frac{y_{k-1}}{\sqrt{X_{k-1}}}.$$

Куренски је, независно од Петровића, такође дошао до наведене теореме 1929. године [2].

Петровић је поново[1] објавио свој резултат 1935. године [3] и затим га унео 1936. и у своју монографију [4].

У вези са овим поставили смо следећи општи проблем:

*Полазећи од дате интеграбилне Riccati-еве једначине* (1) *образовати бескрајан низ других Riccati-евих једначина истог облика, које ће такође бити интеграбилне.*

Решење овог проблема објавили смо у чланцима [5] и [6] и оно је дато теоремом:

**Теорема М.** *Полазећи од интеграбилне Riccati-еве једначине* (1) *могућно је образовати неограничен низ интеграбилних једначина истог облика*

$$\frac{dy_k}{dx}+y_k^2=F_k(x) \qquad (k=1,\ 2,\ \dots),$$

*где је $F_k$ дато са*

$$F_k(x)=F_{k-1}+\frac{Q_k''-F_{k-1}'}{Q_k}+\frac{3}{4}\left(\log\left(F_{k-1}-Q_k'-Q_k^2\right)\right)'^2$$
$$+\frac{F_{k-1}-Q_k'}{Q_k}\left(\log\left(F_{k-1}-Q_k'-Q_k^2\right)\right)'-\frac{1}{2}\,\frac{\left(F_{k-1}-Q_k'-Q_k^2\right)''}{F_{k-1}-Q_k'-Q_k^2},$$

*у коме је $F_0=F$, и где су $Q_1,\dots,Q_k$ произвољне функције променљиве $x$.*

*Интеграл $y_k$ израчунава се по рекурентној формули*

$$y_k=\frac{\left(F_{k-1}-Q_k'-Q_k^2\right)y_{k-1}}{Q_k\left(y_{k-1}-Q_k\right)}$$
$$+\frac{Q_k\,Q_k''-Q_k\,F_{k-1}'+2\,Q_k^2\,F_{k-1}-2\,Q_k'^2+4\,Q_k'\,F_{k-1}-2\,F_{k-1}^2}{2\,Q_k\left(F_{k-1}-Q_k'-Q_k^2\right)},$$

*где је $y_0=y$ интеграл полазне једначине.*

Треба подвући чињеницу да присуство произвољних функција $Q_k(x)$ у $F_k(x)$ даје извесну генералност горњој теореми.

Наведена теорема садржи следеће резултате као партикуларне случајеве:

[1] Интересантно је да у овом раду Петровић не наводи свој рад [1] који садржи теорему П.



**Последица 1.** *Ако се пође од једне интеграбилне Riccati-еве једначине* (1) *може се образовати бескрајан низ интеграбилних једначина*

$$\frac{dy_k}{dx}+y_k^2=F_k(x) \qquad (k=1,\ 2,\ \dots),$$

*где је*

$$F_k(x)=F_{k-1}+2\left(\frac{F_{k-1}}{\int F_{k-1}\,dx}\right)^2-\frac{F_{k-1}'}{\int F_{k-1}\,dx},$$

$$y_k=\frac{y_{k-1}\int F_{k-1}\,dx}{\int F_{k-1}dx-y_{k-1}}-\frac{F_{k-1}}{\int F_{k-1}\,dx} \qquad (F_0=F,\ y_0=y).$$

**Последица 2.** *Ако се може интегралити једначина* (1), *што је случај и са једначином*

$$\frac{dy_1}{dx}+y_1^2=F(x)+\frac{3}{4}\left(\frac{F'}{F}\right)^2-\frac{1}{2}\,\frac{F''}{F},$$

*чији је општи интеграл*

$$y_1=\frac{F}{y}-\frac{1}{2}\,\frac{F'}{F},$$

*где је $y$ општи интеграл полазне једначине* (1).

Последица 2 еквивалентна је теореми П. Да би дошао до свог резултата, Петровић је, у ствари, у једначини (1) извршио смену функције

$$y=\frac{d}{dx}\log\left(\int\exp\left(\int y_1\,dx\right)\sqrt{F}\,dx\right). \tag{3}$$

Једначина (1) тада постаје

$$\frac{dy_1}{dx}+y_1^2=F(x)+\frac{3}{4}\left(\frac{F'}{F}\right)^2-\frac{1}{2}\,\frac{F''}{F}. \tag{4}$$

Према (3) општи интеграл једначине (4) је

$$y_1=y+\frac{d}{dx}\log\frac{y}{\sqrt{F}}, \tag{5}$$

где је $y$ општи интеграл једначине (1).

На основу тих чињеница Петровић је исказао теорему П. Разлика између теореме П и последице 2 је у томе што је интеграл једначине (4) приказан у теореми П изразом (5), док је у последици 2 дат са

$$y_1=\frac{F}{y}-\frac{1}{2}\frac{F'}{F}. \tag{6}$$

Лако је показати да су идентични изрази који стоје на десној страни једначина (5) и (6). Ако се, наиме, у једначини (5) изврши назначено диференцирање, има се

$$y_1=y+\frac{y'}{y}-\frac{1}{2}\frac{F'}{F}, \quad \text{тј.} \quad y_1=\frac{y'+y^2}{y}-\frac{1}{2}\frac{F'}{F}.$$

Према једначини (1), последњи образац постаје

$$y_1=\frac{F}{y}-\frac{1}{2}\frac{F'}{F},$$

што је требало доказати.

Дакле, трансформација (3), од које је Петровић пошао, еквивалентна је рационалној трансформацији

$$y=\frac{F}{y_1+\dfrac{1}{2}\dfrac{F'}{F}}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Петровић, *Једна особина линеарне диференцијалне једначине другог реда*, Рад Југословенске академије знаности и уметности, 232 (1926), 99 — 107.

[2] M. Kourensky, *Sur l'équation de Riccati*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, (6) 9 (1929), 950 — 957.

[3] M. Petrovitch, *Théorème sur l'équation de Riccati*, Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, 4 (1935), 169 — 180.

[4] М. Петровић, *Један диференцијални алгоритам и његове примене*, Посебна издања Српске академије, 111 (1936), 108 — 114.

[5] D. S. Mitrinović, *Théorème sur l'équation de Riccati*, C. R. Acad. Sci., Paris, 208 (1939), 156 — 157.

[6] Д. С. Митриновић, *Неколико ставова о Riccati-евој диференцијалној једначини*, Глас Српске академије 181 (1939), 171 — 236.

МАТЕМАТИЧКА БИБЛИОТЕКА, 38 (1968), 101—104.

Др *Петар М. Васић*

# НЕЈЕДНАКОСТ МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА ЗА КОНВЕКСНЕ ФУНКЦИЈЕ

**0.** Михаило Петровић 1932. године доказао је неједнакост (видети [1])

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leqslant f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)+(n-1)\,f(0), \tag{1}$$

где је $f$ конвексна функција на $[0,\ a)$ $(a>0)$ и $x_i \in [0,\ a)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, $\sum_{i=1}^{n} x_i \in [0,\ a)$. Михаило Петровић је и раније наишао на неједнакост (1) али само за једну подкласу конвексних функција: за функције које се могу представити у облику степеног реда са ненегативним коефицијентима.

У математичкој литератури неједнакост (1) носи име М. Петровића.

М. Петровић је у својим радовима доста често користио ову своју неједнакост, која се комбинована са основном неједнакошћу за конвексне функције може написати у облику:

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leqslant \frac{1}{n}\left(f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)+(n-1)\,f(0)\right). \tag{2}$$

О неким применама неједнакости (2) видети књигу М. Петровића: *Рачунање са бројним размацима*, Београд 1932, 193. стр.

М. Петровић је такође често користио и специјалан случај неједнакости (2)

$$\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^k \leqslant \frac{x_1^k+\cdots+x_n^k}{n} \leqslant \frac{(x_1+\cdots+x_n)^k}{n} \tag{3}$$

$$(x_1,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0).$$

Ова последња неједнакост добија се ако се у (2) стави $f(x)=x^k$.

О неким резултатима до којих је дошао М. Петровић примењујући (2) и (3) видети чланак П. М. Васић: *Геометријске неједнакости у радовима Михаила Петровића* који је објављен у овој књизи.

Неједнакост М. Петровића исказује једну од особина конвексних функција: Свака конвексна функција на $[0,+\infty)$ која има у нули вредност 0 је субадитивна.

У овом чланку задржаћемо се на неким генерализацијама неједнакости М. Петровића као и на једној њеној примени.

**1.** Румунски математичар T. Popoviciu навео је у својој књизи: *Les fonctions convexes* (видети [2]) следећу неједнакост:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \leqslant f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) + (n-1) f(0), \tag{4}$$

из које се за $p_i=1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ добија неједнакост М. Петровића. Међутим, Popoviciu није експлицитно навео под којим допунским условима важи ова неједнакост. Наиме, ова неједнакост не важи под условима за Петровићеву неједнакост за свако $p_i \geqslant 0$. Тако, на пример, ако ставимо $p_i=\dfrac{1}{n}$, из (4) добијамо неједнакост супротну од неједнакости коју по дефиницији задовољавају конвексне функције.

Међутим, применом критеријума T. Popoviciua, без тешкоће се добија да ова неједнакост важи ако се наведеним претпоставкама дода и претпоставка да је $x_i \in \left[0, \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

**2.** Следећа генерализација неједнакости (1), а истовремено и неједнакости (4), потиче од италијанског математичара F. Giaccardia (видети [3]). Ова неједнакост има облик:

$$\sum_{i=0}^{n} p_i f(x_i) \leqslant \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} p_i x_i - x_0} \tag{5}$$

$$\times \left\{ f\left(\sum_{i=0}^{n} p_i x_i\right)\left[\sum_{i=0}^{n} p_i x_i - x_0 \sum_{i=0}^{n} p_i\right] + \sum_{i=0}^{n} p_i x_i f(x_0) \cdot \sum_{i=0}^{n} p_i - 1\right\},$$



где је $f$ конвексна функција на $\left[x_0, \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)$, $p_i \geqslant 0$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ и $0 \leqslant x_0 < x_i < \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Из ове неједнакости за $p_i=1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и $x_0=0$ добија се неједнакост М. Петровића а за $x_0=0$ и $p_i>1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ неједнакост (4).

**3.** Следећа генерализација неједнакости (1) (тачније речено раније споменутог случаја када се функција $f$ може представити помоћу степеног реда са ненегативним коефицијентима) потиче од Д. Марковића (видети [4]). Овај став гласи: Ако је функција $f$ представљена редом

$$f(x)=\sum_{i=1}^{+\infty} a_i x^i,$$

чији је полупречник конвергенције $a$ и

$$a_1=a_2=\cdots=a_{k-1}=0; \quad a_k \neq 0; \quad a_{k+i} \geqslant 0 \qquad (k \geqslant 1; i=1, 2, \ldots),$$

тада важи неједнакост

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leqslant f\left(\sqrt[k]{\sum_{i=1}^{n} x_i^k}\right) + (n-1) f(0), \tag{6}$$

где је $x_i \in [0, a)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, $\sqrt[k]{x_1^k+\cdots+x_n^k} \in [0, a)$.

У [5] доказано је да неједнакост (6) важи за сваку функцију $f$ која је $k-1$ пута диференцијабилна и за коју је $f^{(k-1)}(x)$ конвексна функција, као и $f'(0)=\cdots=f^{(k-2)}(0)=0$.

У [4] и [5] налазе се још неке генерализације неједнакости (1).

**4.** На крају, полазећи од тога да генералисана неједнакост М. Петровића (тј. неједнакост (4)) важи за свако $p_i \geqslant 1$ $(i=1, 2, \ldots n)$ доказаћемо следећи став:

Нека је $f$ конвексна функција на $[0, a)$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ два низа ненегативних бројева и $p_i \geqslant 1$. Ако важе једнакости

$$\sum_{i=1}^{n_1} p_i x_i = \sum_{i=n_1}^{n_2} p_i x_i = \cdots = \sum_{i=n_{k-1}}^{n} p_i x_i,$$

тада важи неједнакост:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \leqslant k f\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) - \left(k - \sum_{i=1}^{n} p_i\right) f(0), \tag{7}$$

где је $x_i \in [0, a)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \in [0, a)$.

Заиста, како на основу (2) важи неједнакост

$$\sum_{i=n_\nu}^{n_{\nu+1}} p_i f(x_i) \leqslant f\left(\sum_{i=n_\nu}^{n_{\nu+1}} p_i x_i\right) - \left(1 - \sum_{i=n_\nu}^{n_{\nu+1}} p_i\right) f(0)$$

$$= f\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) - \left(1 - \sum_{i=n_\nu}^{n_{\nu+1}} p_i\right) f(0)$$

$$(n_0 = 1, n_k = n, \nu = 0, 1, \ldots, n),$$

сумирањем по $\nu$ добијамо неједнакост (7).

За $p_i = 1$ добија се неједнакост A. W. Marshalla, I. Olkina и F. Proschana (видети [6]). О неким специјалним случајевима ове неједнакости видети чланке [5], [7] и [8].

## ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Petrović, *Sur une fonctionnelle*, Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, 1 (1932), 149—156.

[2] T. Popoviciu, *Les fonctions convexes*, Actualitée 992, Paris 1944.

[3] F. Giaccardi, *Su alcune disuguaglianze*, Giorn. Mat. Finanz. 1 (4) (1955), 139—153.

[4] Д. Марковић, *Поводом једне неједнакости М. Петровића*, Весник Друштва математичара и физичара НРС, 11 (1959), 45—53.

[5] P. M. Vasić, *Les inégalités pour les fonctions convexes*, Matematički vesnik, 5 (20), (1968) (u štampi).

[6] O. Shisha (editor), *Inequalities*, New York and London, 1967, (чланак A. Marshall, I. Olkin, F. Proschan, *Monotonicity of ratios of means and other applications of majorization*, str. 177—190)

[7] S. Gatti, *Sul massimo di un indice di anormalità*, Metron, 18 (1956), 181—188.

[8] Z. W. Birnbaum, *On an inequality due to S. Gatti*, Metron, 19 (1958), 243—244.

МАТЕМАТИЧКА БИБЛИОТЕКА, 38 (1968), 105—111.

Др *Петар М. Васић*

# ГЕОМЕТРИЈСКЕ НЕЈЕДНАКОСТИ У РАДОВИМА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

Међу бројним резултатима до којих је дошао Михаило Петровић у разним областима математике, има и неколико геометријских неједнакости. Скоро све резултате у овој области М. Петровић је добио примењујући неједнакост (видети [7]):

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} \tag{1}$$

$$\leqslant \frac{f(x_1 + \cdots + x_n) + (n-1) f(0)}{n},$$

где је $f$ конвексна функција на $[0, +\infty)$ и $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$, или специјалан случај ове неједнакости који се добија ако се стави $f(x) = x^k$:

$$\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^k \leqslant \frac{x_1{}^k + \cdots + x_n{}^k}{n} \tag{2}$$

$$\leqslant \frac{(x_1 + \cdots + x_n)^k}{n} \qquad (x_1, \ldots, x_n \geqslant 0).$$

У облику ставова изложићемо резултате М. Петровића из геометријских неједнакости и такође ћемо указати на неке генерализације Петровићевих резултата до којих су дошли други математичари.

**Став 1.** *Ако је $F$ конвексна и два пута диференцијабилна функција на $[0, +\infty)$ и $a, b, c$ стране једног троугла, важе неједнакости*

$$F\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leqslant \frac{F(a)+F(b)+F(c)}{3} \leqslant \frac{F(0) + 2F\left(\frac{a+b+c}{2}\right)}{3}. \tag{3}$$

*Знак једнакости наступа ако и само ако је троугао равностран или ако су две стране једнаке, а трећа је* 0.

Приметимо да је неједнакост (3) прецизнија од (1).

Да (3) заиста важи, М. Петровић је доказао на следећи начин (видети [1] и његову књигу: *Рачунање са бројним размацима*, Београд 1932, стр. 78 — 80):

Ако ставимо $2s=a+b+c$, на основу особина страна троугла је

$$x_1=s-a>0,\quad x_2=s-b>0,\quad x_3=s-c>0. \tag{4}$$

Ако ставимо $f(t)=F(s-t)$, имамо $\dfrac{d^2f}{dt^2}=\dfrac{d^2F}{dt^2}$, па је функција $F$ конвексна ако је функција $f$ конвексна. Стога важе истовремено неједнакости

$$3f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)\leqslant f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)\leqslant f(x_1+x_2+x_3)+2f(0)$$

и

$$3F\left(s-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)\leqslant F(s-x_1)+F(s-x_2)+F(s-x_3)$$
$$\leqslant F(s-x_1-x_2-x_3)+2F(s).$$

Из последњих неједнакости за вредности $x_1, x_2, x_3$ које су дате са (4) добијамо (3).

Следећа неједнакост (видети [1]) је последица неједнакости (3):

**Став 2.** *Ако су $a, b, c$ стране троугла, важе неједнакости*

$$\frac{1}{3}\leqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}<\frac{1}{2}. \tag{5}$$

Заиста, стављајући $F(x)=x^2$, из (3) се добијају неједнакости (5). Приметимо да су овако добијене неједнакости заиста оштрије од оних које би се добиле применом (1).

И неједнакост из става **3** је последица става **1**:



**Став 3.** *Ако су $a, b, c$ стране троугла, важе неједнакости*

$$\frac{3}{2}\leqslant\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2, \tag{6}$$

*при чему знак једнакости важи ако и само ако је $a=b=c$.*

При доказу ове неједнакости (видети [2]) М. Петровић је искористио чињеницу да је

$$F(x)=\frac{x}{2s-x}\qquad(2s=a+b+c)$$

конвексна функција за $0\leqslant x<2s$ $\left(\text{јер је } \dfrac{d^2F}{dx^2}=\dfrac{4s}{(2s-x)^3}>0\right)$, па према (3) важи неједнакост (6).

С. Павловић је, користећи исти метод као М. Петровић, доказао (видети [3]) следећи:

**Став 3'.** *Ако је $(n-1)s$ обим $n$-троугла чије су стране $a_i$ $(i=1, \ldots, n)$ и ако је $a_i>s$ $(i=1, \ldots, n)$, тада је*

$$\frac{n}{n-1}\leqslant\frac{a_1}{a_2+\cdots+a_n}+\frac{a_2}{a_3+\cdots+a_n+a_1}+\cdots \tag{7}$$
$$+\cdots+\frac{a_n}{a_1+\cdots+a_{n-1}}\leqslant\frac{n-1}{n-2}.$$

У Петровићевој књизи: *Рачунање са бројним размацима* налази се неједнакост садржана у следећем ставу:

**Став 4.** *Нека је $P$ произвољна тачка на кругу полупречника $R$ у коме је уписан правилан полигон са $n$ страна. Ако су $a_1, \ldots, a_n$ растојања тачке $P$ од темена овог полигона, важи неједнакост*

$$R\sqrt{2n}\leqslant a_1+\cdots+a_n\leqslant nR\sqrt{2}. \tag{8}$$

Ова неједнакост је непосредна последица неједнакости (2), с обзиром да је

$$a_1^2+\cdots+a_n^2=2R^2n.$$

Међутим, из услова када важи знак једнакости у (2), без тешкоће се закључује да неједнакости (8) нису најбоље могућне. П. М. Васић и Ж. Живановић побољшали су неједнакост (1) доказавши следећи став (видети [4]):

**Став 4'.** *Важи неједнакост*

$$(9)\qquad 2R\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2n}\leqslant a_1+\cdots+a_n\leqslant 2R\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2n},$$

*при чему су ознаке исте као у ставу* **4.**

Ова неједнакост се може доказати на следећи начин. Претпоставимо да се тачка $P$ налази на луку $A_1A_n$ (са $A_1, \ldots, A_n$ означимо темена полигона), и ставимо $\measuredangle A_1OP=x$ ($O$ је центар круга). Због симетрије можемо претпоставити да је $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{n}$. Тада је

$$PA_k=2R\sin\left(\frac{x}{2}+(k-1)\frac{\pi}{n}\right)\qquad\left(k\leqslant\frac{2(n+1)\pi-nx}{2\pi}\right),$$

$$PA_k=2R\sin\left(\pi-\frac{x}{2}-(k-1)\frac{\pi}{n}\right)$$

$$=2R\sin\left(\frac{x}{2}+(k-1)\frac{\pi}{n}\right)\qquad\left(k\geqslant\frac{2(n+1)\pi-nx}{2\pi}\right),$$

при чему $k$ узима вредности од 1 до $n$. Сумирањем по $k$ добијамо

$$\sum_{k=1}^{n}PA_k=2R\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{x}{2}+(k-1)\frac{\pi}{n}\right)$$

$$=-\frac{R}{\sin\frac{\pi}{2n}}\sum_{k=1}^{n}\left(-2\sin\left(\frac{x}{2}+(k-1)\frac{\pi}{n}\right)\sin\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$=\frac{-R}{\sin\frac{\pi}{2n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(\frac{x}{2}+(2k-1)\frac{\pi}{2n}\right)-\cos\left(\frac{x}{2}+(2k-3)\frac{\pi}{2n}\right)\right),$$

тј.

$$\sum_{k=1}^{n}PA_k=R\frac{\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2n}\right)-\cos\left(\frac{x}{2}+(2n-1)\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\frac{\pi}{2n}}=2R\frac{\sin\left(\frac{x}{2}+(n-1)\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\frac{\pi}{2n}}.$$



Када $x$ узима вредности од 0 до $\frac{\pi}{n}$, аргумент $\frac{x}{2}+(n-1)\frac{\pi}{2n}$ варира у интервалу $\left[\frac{n-1}{2n}\pi,\ \frac{\pi}{2}\right]$. Како је синус растућа функција у првом квадранту, одавде добијамо неједнакост (9), при чему знак једнакости важи само за $x=0$, односно за $x=\frac{\pi}{n}$.

Неједнакост из следећег става такође се налази у књизи *Рачунање са бројним размацима.*

**Став 5.** *Ако су $AC$ и $BD$ две узајамно нормалне тетиве круга полупречника $R$, важе неједнакости**

$$(10)\qquad 2R\leqslant AC+BD\leqslant 4R.$$

М. Петровић је ову неједнакост доказао на следећи начин. Нека је $E$ други крај пречника који пролази кроз тачку $A$ и нека је $P$ тачка пресека правих $AC$ и $BD$. Тада важе једнакости:

$$PA^2+PB^2=AB^2,\quad PC^2+PD^2=CD^2=BE^2,$$

па је

$$(11)\qquad PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=AB^2+BE^2=4R^2.$$

Стављајући у (2): $n=4$, $a_1=PA$, $a_2=PB$, $a_3=PC$, $a_4=PD$, на основу (11) добијамо неједнакост из става **5.**

Следећа три става формулишу резултате до којих је дошао М. Петровић у чланку [5].

**Став 6.** *Ако су $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ углови сферног троугла, важе неједнакости*

$$\frac{\pi^2}{3}<\alpha^2+\beta^2+\gamma^2<9\pi^2.$$

Ове неједнакости следују непосредно из (2) ако се узме у обзир особина углова сферног троугла:

$$\pi<\alpha+\beta+\gamma<3\pi.$$

**Став 7.** *Ако је $h$ висина лоптиног слоја и $\rho$ полупречник средњег круга лоптиног слоја, тада за запремину $V$ овог слоја важе неједнакости*

$$(12)\qquad \frac{\pi h^3}{6}+\pi h\rho^2\leqslant V\leqslant\frac{\pi h^3}{6}+2\pi h\rho^2.$$

* У наведеној књизи у (10) уместо $4R$ погрешно стоји $2R\sqrt{2}$.

И овај став М. Петровић је доказао примењујући неједнакости (2). Наиме, ако са $r$ и $r'$ означимо полупречнике основа лоптиног слоја, имамо $r+r'=2\rho$, па на основу (2) добијамо неједнакости

$$2\rho^2 \leqslant r^2+r'^2 \leqslant 4\rho^2. \tag{13}$$

Како је

$$V=\frac{\pi h^3}{6}+\frac{\pi h}{2}(r^2+r'^2),$$

применом неједнакости (13), добија се (12).

**Став 8.** *Ако су $h$ висина и $\rho$ полупречник средњег круга зарубљене купе, за запремину $V$ зарубљене купе важи двострука неједнакост*

$$\frac{2\pi}{3}h\rho^2 \leqslant V \leqslant \frac{5\pi}{3}h\rho^2. \tag{14}$$

Означимо са $r$ и $r'$ полупречнике основа зарубљене купе. Тада на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине имамо неједнакост $4rr' \leqslant (r+r')^2$, а на основу (2)

$$\frac{(r+r')^2}{2} \leqslant r^2+r'^2 \leqslant (r+r')^2.$$

Како је

$$V=\frac{\pi h}{3}(r^2+r'^2+rr') \quad \text{и} \quad r+r'=2\rho, \tag{15}$$

непосредно се добијају неједнакости (14).

Б. Мартић је успео да побољша овај Петровићев резултат (видети [6]), доказавши следећи:

**Став 8'.** *Ако су $h$ висина и $\rho$ полупречник средњег круга зарубљене купе, за запремину $V$ зарубљене купе важе неједнакости*

$$\pi h\rho^2 \leqslant V \leqslant \frac{4\pi}{3}h\rho^2. \tag{16}$$

Ево Мартићевог доказа. Како је

$$r^2+rr'+r'^2=(r+r')^2-rr' \geqslant 4\rho^2-\rho^2=3\rho^2,$$
$$r^2+rr'+r'^2=(r+r')^2-rr' \leqslant 4\rho^2,$$

из (15) се добијају неједнакости (16).



На крају приметимо да се још неколико једноставнијих геометријских неједнакости могу наћи у књизи *Рачунање са бројним размацима.*

## ЛИТЕРАТУРА


[1] M. Petrović, *Sur quelques fonctions des cotés et des angles d'un triangle*, L'Enseignement Mathématique, 18 (1916), 153—163.

[2] M. Petrović, *A propos d'un théorème de M. Pompeiu*, Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences 40 (1938), 205—208.

[3] С. Павловић, *Неке особине симетричних функција страна извесних полигона*, Увођење младих у научни рад I, Математичка библиотека, св. 18, Београд 1961, 139—142.

[4] P. M. Vasić — Ž. Živanović, *Über eine Ungleichung die sich auf regelmässige Polygone bezieht*, Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № 181 — № 196 (1967), 67—68.

[5] М. Петровић, *Стереометријске неједначине*, Зборник радова Математичког института САН, 3 (1953), 1—4.

[6] Б. Мартић, *Примедба на једну стереометријску неједначину М. Петровића*, Зборник радова Српске академије наука и уметности 69, Математички институт књ. 8 (1960), 131—132.

[7] П. М. Васић, *Неједнакости М. Петровића за конвексне функције*, ова књига, стр. 101—104.

МАТЕМАТИЧКА БИБЛИОТЕКА, 38 (1968), 113—116.

Др *Драгослав С. Митриновић*

# МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ И STIRLING-ОВИ БРОЈЕВИ

Године 1940. почео сам да проучавам Stirling-ове бројеве прве врсте и о томе сам дискутовао са Петровићем. Добио сам у то време и неке резултате, али је ускоро избио рат и Stirling-ове бројеве оставио сам по страни све до 1948. године када сам о њима објавио први чланак. Затим су следовали други чланци. У библиографији мојих радова [1] наведени су сви моји чланци и таблице који се односе на Stirling-ове бројеве.

У вези са наведеном дискусијом Петровић ми је дао белешку која је овде клиширана. (Ова белешка до сада није објављена). У ствари, то је једна практична примена његових нумеричких спектара коју је требало да додам своме пројектованом чланку. И том приликом Петровић ми је рекао да је разочаран својим спектрима. То ми је изјавио и раније више пута. Први пут сам од њега чуо да нема смисла да се неко бави његовим спектрима у време када му је К. Орлов саопштио да припрема дисертацију из те области. Добро се сећам да је Петровић рекао да је саветовао Орлову да се не бави спектрима и додао ми је да спектри могу да се користе онда када је неки алгоритам или резултат познат. Уосталом, бесплодност теорије спектара показали су својим радовима малобројни београдски математичари који су се одали овој теорији. Није ми познато да се ма ко бавио спектрима у иностранству.

У реферативном часопису *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, **47** (1919—1920), 320—321, познати математичар G. Pólya дао је следећи приказ Петровићеве монографије о спектрима који доносимо у преводу са немачког на српскохрватски.

M. P e t r o v i ć, *Les spectres numériques*. Са предговором E. Borela. Paris 1919, 110 p.

Како потенцијални редови имају моћ континуума, могућно је сваком потенцијалном реду придружити један децималан

M. M. Petr. m'a fait remarqué que le coefficient $\underline{A_k}$ du polynome

$$f(x) = (x+1)(x+2)\cdots(x+n) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n$$

peut se calculer par le procédé suivant, purement arithmétique, simple et rapide

Désignons : 1° par $\underline{q}$ un nombre entier égal ou supérieur au nombre de chiffres du plus grand coefficient $\underline{A_n}$ (pour $\underline{n}$ donné) ; par $\underline{l_k}$ le nombre des chiffres de l'entier $\underline{k}$ ; par $\underline{M_k}$ le nombre

$$M_k = k\,0^{q-l_k}\,1$$

où $\underline{0}^{q-l_k}$ désigne la suite de $q-l_k$ zéro consécutifs intercalés entre $\underline{k}$ et $\underline{1}$.

Si l'on forme ainsi la suite de $\underline{n}$ entiers

$$M_1,\ M_2,\ \cdots M_n$$

le produit $M_1 M_2 \cdots M_n$, divisé par $10^{nq}$, sera un nombre decimal $\underline{S}$ qui jouira de la propriété suivante :

a) la partie entière de $\underline{S}$ est égale au coefficient $A_0 = n!$



b) si l'on partage la partie décimale de $\underline{S}$ en tranches successives à $\underline{q}$ chiffres, la suite de chiffres significatifs qui compose la $\underline{k}$-ième tranche est égale au coefficient $\underline{A_k}$.

Exemple : soit $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 24 + 50x + 35x^2 + 10x^3 + x^4$

pour laquelle on aura $q = 2$, $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 1$

$$M_1 = \underline{1}01 \qquad M_2 = \underline{2}01 \qquad M_3 = \underline{3}01 \qquad M_4 = \underline{4}01$$

On trouve

$$M_1 M_2 M_3 M_4 = 2450351001$$

ce qui, divisé par $10^{nq} = 10^8$ fournit

$$S = 24,50351001.$$

број, и сваки проблем који се односи на потенцијални ред схватити као проблем који се односи на одговарајући децимални број. Писац себи поставља задатак да ову кореспонденцију *ефектуира* и да разне проблеме о потенцијалним редовима преведе у оне са децималним бројевима. Децимални број придружен потенцијалном реду назива се *спектар*. Ако су коефицијенти $M_0, M_1, M_2, \ldots$ потенцијалног реда

$$f(x) = M_0 + M_1 x + M_2 x^2 + \cdots$$

цели бројеви, спектар се добија ако се бројеви $M_0, M_1, M_2, \ldots$ пишу један за другим. Ако бројеви $M_0, M_1, M_2, \ldots$ нису негативни и мањи су од 10, број $f(1/10)$ даје један спектар. Број $f(1/100)$ могао би се назвати *спектрална пруга* у којој се тамне и светле пруге (тј. цифра 0 и коефицијенти од $f(x)$) међусобно измењују. *Спектрална метода* састоји се у томе да се различити проблеми сведу на проучавање спектра, што је наравно могућно урадити помоћу најразноврснијих трансформација, а у свима случајевима се приближно постиже. Без доказа су наведени резултати разних новијих радова из теорије функција о потенцијалним редовима са целим и рационалним коефицијентима (Hurwitz, Borel, Fatou, Pólya, итд.). Цитирано је и четврто Хилбертово саопштење о интегралним једначинама, пошто је ту такође употребљен израз „спектар".

Нове резултате које би тек спектрална метода учинила приступачним референт није нашао у овој књизи.

## ЛИТЕРАТУРА

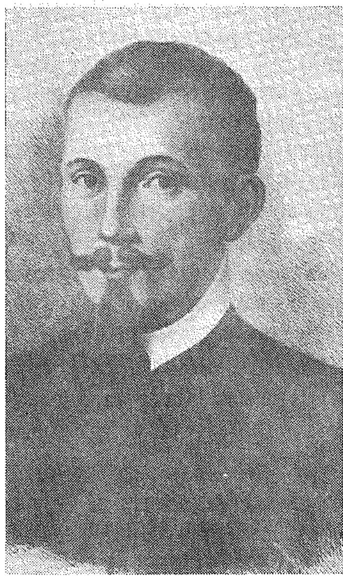
[1] Р. Ж. Ђорђевић и Р. Р. Јанић, *Библиографија радова професора Драгослава С. Митриновића*, Публикације Електротехничког факултета у Београду, серија: Математика и физика, № **180** (1967), 35 стр.

МАТЕМАТИЧКА БИБЛИОТЕКА, 38 (1968), 117—125.

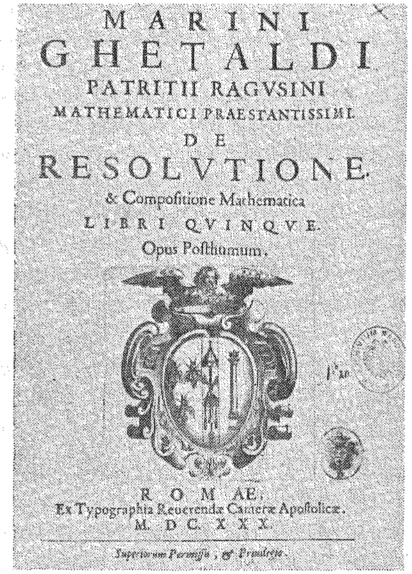
Др *Ернест Стипанић*

# МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ О ГЕТАЛДИЋЕВОМ УЧЕШЋУ У ГЕНЕЗИ АНАЛИТИЧКЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

Југословенска математика слави ове године два јубилеја: *четиристогодишњицу* рођења Марина Геталдића (1568—1626) и *стогодишњицу* рођења Михаила Петровића (1868—1943). Тим поводом, сматрали смо да је од интереса подсетити се на један Петровићев суд о улози Марина Геталдића у развитку аналитичке геометрије. Ми ћемо га овде кратко размотрити са становишта научних истраживања која се тичу места и улоге Геталдићевог главног дела *De resolutione et compositione mathematica* у генези аналитичке геометрије.



Марин Геталдић (1568—1626)




De resolutione et compositione mathematica

**1.** У свом извештају Српској академији наука, када се 1937. године вратио из Париза, где је као делегат Академије присуствовао прослави тристогодишњице Descartes-ове геометрије, Михаило Петровић је о улози Марина Геталдића у развитку аналитичке геометрије изрекао следећи суд[1]:

„Из грађе која је извучена пажљивим прегледом Геталдићевих дела могла се створити верна слика његове улоге при стварању Аналитичке геометрије. За ту слику потписани мисли да одговара правоме стању ствари, јер је она добијена из оригинала Геталдићевих дела, која нису ни тако многобројна, ни толико обимна да их један познавалац елементарне геометрије не би могао за релативно кратко време прегледати и у њима се снаћи. А из те слике излази овакав крајњи закључак:

Геталдић се ни у ком случају не може сматрати за творца или оснивача Аналитичке геометрије, али му неоспорно припада улога пионира који је извршио један од најважнијих и најпотребнијих претходних послова за стварање те геометрије, а то је алгебризирање геометриских проблема. О каквој аналитичкој геометрији, у смислу у каквом је она разрађена после Декарта, а да се у њој ради само са посебним бројевима, не би могло бити ни говора, јер се у тој Геометрији све мора посматрати динамички, као промена а то се може чинити само кад величине нису бројно утврђене, тј. када су оне изражене општим бројевима, и када се са таквим непрецизираним величинама знају вршити све оне рачунске радње које се врше са фиксираним бројевима. А заслуга зато да се то може извести у Геометрији припада неоспорно и у првом реду Марину Геталдићу. А да је он своје методе допунио увођењем координатног система и координата, он би заузео место које је, при стварању Аналитичке геометрије, судбина доделила Декарту. Али Геталдић, приспевши до врата ове геометрије, није прешао преко тога прага. У његовим делима узалуд би се тражио ма и најслабији траг координата и координатног система. Њему, дакле, припада само поменута важна пионирска улога, а то није улога оснивача и творца.“

Овим је Петровић окарактерисао у ствари Геталдићево главно дело *De resolutione et compositione mathematica* (1630)[2] и поставио га према Descartes-овом делу *Géométrie* (1637), управо онда када су математичари широм света прослављали тристогодишњицу тог Descartes-овог дела, које је отворило пут најсјајнијој епоси у развитку математике.



**2.** Петровић је, дакле, увидом у Геталдићева дела закључио: а) да је Геталдић *алгебризирањем геометријских проблема* обавио „један од најважнијих и најпотребнијих послова за стварање“ аналитичке геометрије и да му због тога припада „улога пионира“ те геометрије, односно да њему „припада неоспорно и у првом реду“ заслуга за увођење „општих бројева“ у геометрију; б) да је својим методама дошао до врата аналитичке геометрије, али да није прешао њен праг, јер да се у његовим делима не може наћи ни „најслабији траг координата и координатног система“, па да му зато припада само „пионирска улога“, а не и „улога оснивача и творца“ аналитичке геометрије.

**3.** Пионирска улога Марина Геталдића, тачније његовог дела *De resolutione et compositione mathematica*, у развитку аналитичке геометрије, била је предмет истраживања многих аутора, пре и после Петровића[3]. Њихове оцене те улоге не разликују се битно међу собом, а Петровићева оцена је у основи слична њиховим, иако је резултат само увида у Геталдићева дела, а не дубљег проучавања истих. Користимо ову прилику да Петровићеву оцену, као такву, прецизније сврстамо међу оценама, које су проистекле из исцрпних компаративних истраживања улоге Геталдићевих дела у настанку и развитку аналитичке геометрије, односно њихове улоге у развитку примене алгебарске анализе у геометрији, имајући при том у виду Петровићеве закључке, подвучене у претходном одељку под а) и б).

**4.** Лако је уочити, када се и летимично погледа Геталдићево дело *De resolutione et compositione mathematica*, да је Геталдић систематски „алгебризирао“ низ проблема и теорема из елементарне, Еуклидове, геометрије. Али потребно је и одмах нагласити, што су показала исцрпна компаративна проучавања низа аутора, да је он то урадио *инспирисан Viète-овом логистиком спецiозом* (logistica speciosa)[4]. Он јој доделио примарну улогу у оквиру методолошке концепције свог главног дела, противстављајући је методи античких геометричара, као нову и ефикасну аналитичку методу у третирању геометријских проблема и теорема. Зато је Геталдићево „алгебризирање геометријских проблема“ и његово увођење „општих бројева“ у геометрију потребно првенствено посматрати у светлу *Viète-ове логистике спецiозе* и тако ценити место и прогресивну улогу његовог главног дела на колосеку који је, трасиран *Viète-овом* алгебром, водио ка аналитичкој геометрији Descartes-a.

Гeталдић је био Viète-ов ученик, сарадник и следбеник, који је дубоко схватио замах и значај Viète-ове симболичке алгебре (logistike specioze). Он се њоме инспирисао у Паризу, у директном контакту са *Viète-ом* и преко његових дела, прозрео корисност њене примене у геометрији и схватио је да се *алīебризирањем īеомеīрије* стварају нови путеви развитку математике, који су убрзо били обасјани буктињом Descartes-ове геометрије. Зато се Геталдићева „улога пионира" аналитичке геометрије, који је алгебризирањем геометријских проблема „извршио један од најважнијих и најпотребнијих послова" за њено стварање, *мора* посматрати и ценити у оквиру *Viète-ове йионирске улоīе* и његовог *уйшцаја* на Геталдића.

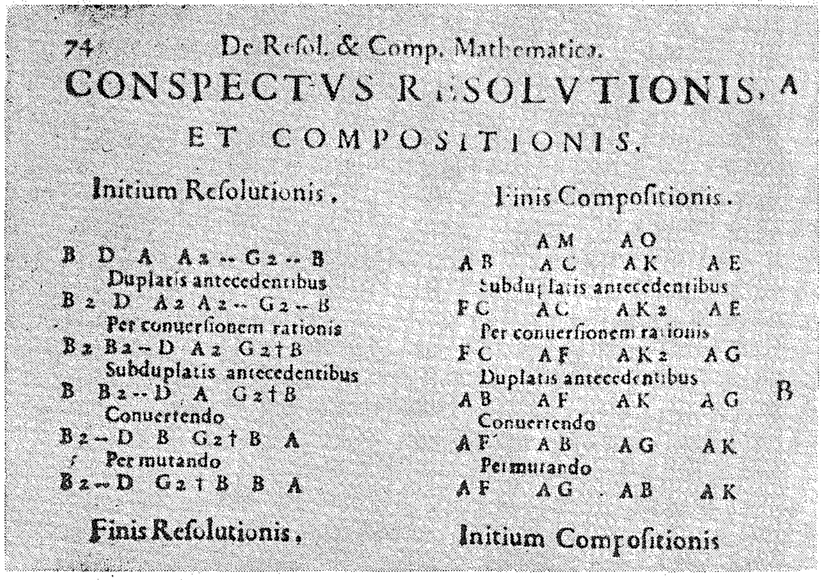
Уочавањем ситуације која је настала у развитку математике појавом *Viète-ове симболичке алīебре* — тог conditio sine qua non Descartes-ове аналитичке односно координатне геометрије — и сагледавањем места и улоге Геталдићевог дела *De resolutione et compositione mathematica* у тој ситуацији, долази се до *неойходних* елемената за што тачнију оцену Геталдићеве „улоге пионира" аналитичке геометрије. Допуњена у том смислу, Петровића оцена сврстава се међу оне оцене којима се научно тачно утврђује улога Геталдића у предекартовском процесу рађања аналитичке геометрије.

**5.** У тежиште Геталдићеве „улоге пионира" аналитичке геометрије, Петровићева оцена ставља Геталдићево „алгебризирање геометријских проблема". Сматрамо, у вези с тим, занимљивим и овде сврсисходним подвући — на шта се није обраћала пажња у досадашњим проучавањима Геталдића — да се у Геталдићевом „алгебризирању геометријских проблема" посебно издваја његов *Conspectus resolutionis et compositionis* (Конспект анализе и синтезе)[5], као елемент који потврђује основни смисао Петровићеве оцене. Тим конспектом, на неколико места у свом главном делу, Геталдић изванредно јасно презентира улогу Viète-ове алгебре у третирању геометријских проблема и прецизно одређује узајамни однос анализе (resolutio) и синтезе (compositio), са изразитом тежњом да ове математички формализује.

Као илустрацију наводимо Геталдићев *Conspectus resolutionis et compositionis* који се односи на проблем[6]: Data diffe-



rentia crurum trianguli et diferentia segmentorum basis datoque excessu inter crus maius et basim. Invenire triangulum" (Слободан превод: Дата је разлика двеју страница троугла и разлика отсечака на основици — које одговарајућа висина прави — као и разлика веће странице и основе односно основице и веће странице. Одредити троугао).


74 De Resol. & Comp. Mathematica.

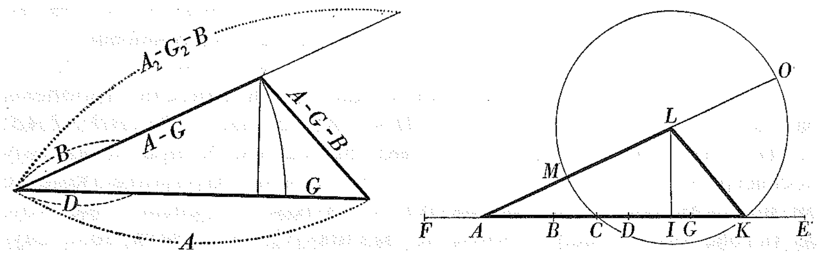
CONSPECTVS RESOLVTIONIS, A

ET COMPOSITIONIS.

| Initium Resolutionis. | Finis Compositionis. |
|---|---|
| | AM AO |
| B D A A2 -- G2 -- B | AB AC AK AE |
| Duplatis antecedentibus | Subduplatis antecedentibus |
| B2 D A2 A2 -- G2 -- B | FC AC AK2 AE |
| Per conuersionem rationis | Per conuersionem rationis |
| B2 B2 -- D A2 G2 † B | FC AF AK2 AG |
| Subduplatis antecedentibus | Duplatis antecedentibus |
| B B2 -- D A G2 † B | AB AF AK AG B |
| Conuertendo | Conuertendo |
| B2 -- D B G2 † B A | AF AB AG AK |
| Per mutando | Permutando |
| B2 -- D G2 † B B A | AF AG . AB AK |
| Finis Resolutionis. | Initium Compositionis |

De resolutione et compositione mathematica, Liber secnndus, Problema VII

Геталдић је проблем попратио следећим схематским цртежима[7]:



Очигледан је недостатак Геталдићеве симболике. У алгебарској анализи (resolutio) проблема са $A$ је означио непознату основицу троугла, са $B$ разлику двеју страница, са $D$ разлику отсечака на основици које прави одговарајућа висина троугла и са $G$ разлику основице и веће странице, док је у синтези проблема (compositio — геометријска конструкција троугла) са $A$ и $B$ означио крајње тачке отсечка који претставља разлику двеју страница, са $B$ и $D$ крајње тачке отсечка који претставља разлику основице и веће странице, а са $B$ и $G$ крајње тачке двострукоr отсечка који претставља разлику отсечака на основици које прави одговарајућа висина.

Означимо ли са $b$ разлику двеју страница троугла ($AL—KL=b$), са $g$ разлику основице и веће странице ($AK—AL=g$), са $d$ разлику отсечака на оснавици ($AI—KI=d$) и са $x$ непознату основицу ($AK=x$), онда у савременој транскрипцији наведени *Conspectus resolutionis et compositionis* изгледа:

| Principium resolutionis | Finis compositionis |
|---|---|
| $b:d=x:(2x-2g-b)$ | $AB:AM=AK:AO$ |
| $2b:d=2x:(2x-2g-b)$ | $FC:AC=2AK:AE$ |
| $2b:(2b-d)=2x:(2g+b)$ | $FC:AF=AK:AG$ |
| $b:(2b-d)=x:(2g+b)$ | $AB:AF=AK:AG$ |
| $(2b-d):b=(2g+b):x$ | $AF:AB=AG:AK$ |
| $(2b-d):(2g+b)=b:x$ | $AF:AG=AB:AK$ |
| Finis resolutionis | Principium compositionis |

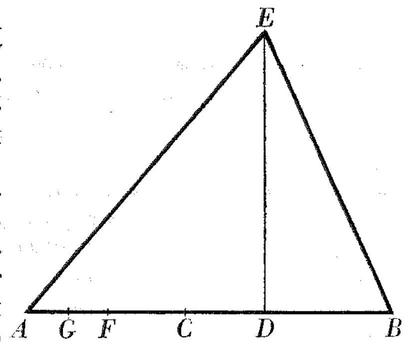
Поменимо да је Геталдић у анализи и синтези проблема раздвојио четири случаја: 1. $AL<AK$; 2. $AL>AK$, $BD>2AB$; 3. $AL>AK$, $BD<2AB$; 4. $AL>AK$, $BD=2AB$. У првом случају посматрао је анализу и синтезу у четири варијанте (које се битно међу собом не разликују), у другом и трећем у две (које се такође битно међу собом не разликују), а у четвртом случају показао је да поменутом услову одговара бесконачно много троуглова. Ми смо навели *Conspectus resolutionis et compositionis* који одговара другој варијанти првог случаја.



**6.** Мало пажљивија анализа Геталдићевих конструктивних решења два геометријска проблема, четвртог и петог, којима се он бавио у петој књизи свог главног дела открива, сматрамо, у геометријском облику ,,најслабији траг координата и координатног система". На ово је већ упозорио Отон Кучера, у својој студији о Геталдићу, када је, између осталог, написао[8)]: ,,... мислимо да не идемо предалеко, ако устврдимо, да се Геталдић у овом а и у следећем проблему примакнуо баш на праг темељној мисли аналитичке геометрије".

Ми ћемо се овде задржати на Геталдићевом конструктивном изналажењу трећег темена троугла у петом проблему[9)]: ,,Super data base triangulum constituere, in quo differentia segmentorum basis sit dupla differentiae crurum, ipsaq. differentia crurum sit dupla excessus, quo crus maius superat basim" (Над датом основицом конструисати троугао код кога је разлика отсечака на основици — које одговарајућа висина прави — двапут већа од разлике двеју осталих страница, а ова је двапут већа од разлике веће странице и основице).

Два темена троугла су одређена датом основицом $AB$ (сл. 1). Пошто је одабрао произвољну тачку $C$ на основици $AB$ (Abscindatur a data base $AB$ quaecumque portio $AC$), Геталдић налази средину $D$ дужи $BC$ и у тачки $D$ подиже нормалу на основицу $AB$. Затим налази средину $F$ дужи $AC$ и средину $G$ дужи $AF$. Из тачке $B$, као центра, описује кружни лук полупречника $BG$, који сече у тачки $E$ нормалу подигнуту у тачки $D$. Тачка $E$ је треће теме траженог троугла, односно $ABE$ је тражени троугао, што Геталдић прецизно доказује методом елементарне геометрије.



Сл. 1.

На посебан начин, Геталдић је истакао произвољност отсечка $AC$ и у вези са тим закључио: ,,... itaque innumera triangula possunt super eadem base constitui, cum in data base $AB$ sumpto puncto $C$ ubicumque...“ (... на тај се начин над истом основицом може конструсати бесконачно много троуглова, будући да се тачка $C$ на основици $AB$ узима где год било).

Гетaлдић је, дакле, обратио *нарочиту* пажњу на тачку $C$, односно на њен положај (а то имплиците значи и на положај тачке $D$ односно на положај нормале $DE$), јер је очигледно да од њеног положаја (односно од положаја тачке $D$) зависи положај тачке $E$. Другим речима, обратио је пажњу на *функционалну зависност* дужине $DE$ од дужине $AC$ (односно од дужине $AD$). Сем тога, он је, у неку руку, тачку $A$ *фиксирао* као сталну, полазну, *тачку мерења* (Abscindatur a data base $AB$ quaecumque portio $AC$), а нормалу $DE$ као праву на којој у зависности од дужи $AC$ (односно дужи $AD$) одређује тачку $E$. Није тешко видети да геометријско место тачака $E$ представља елипсу, односно да сама поставка проблема имплицира класичну дефиницију елипсе.

Мислимо да нам наведена анализа Гетaлдићеве одредбе тачке $E$, односно трећег темена троугла $ABE$, дозвољава да можемо казати: Гетaлдићева одредба тачке $E$ садржи у геометријском облику бар „најслабији траг координата и координатног система“. Зато сматрамо да би Петровићева оцена, коју смо кратко формулисали под *b*) у одељку 2), допуњена у смислу наведене анализе, *адекватније* и *прецизније* тумачила закључну мисао, према којој Гетaлдићу припада само „пионирска улога“, а не и „улога оснивача и творца“ аналитичке геометрије.

**7.** Петровићев суд о Марину Гетaлдићу, својим основним закључцима, потврђује да је време непосредно пред појавом Descartes-ове геометрије имало у Марину Гетaлдићу истакнутог *пионира* аналитичке геометрије, а у његовом делу *De resolutione et compositione mathematica* истакнуто пионирско дело — на путу ка Descartes-овом делу *Géométrie* којим се тек *стварно* родила аналитичка односно координатна геометрија. И управо овим, без обзира на допуне о којима је било речи у овом раду, Петровићев суд, узет у целини, спада међу оне судове којима су *научно тачно* процењени значај и улога Марина Гетaлдића у предекартовском развитку аналитичке геометрије, тачније у предекартовској примени алгебарске анализе у геометрији.



## РЕФЕРЕНСЕ

[1]. *Извештај Српској краљевској академији наука*, Годишњак СКА, бр. 47, Београд, 1937, стр. 274—278

На почетку извештаја Петровић је нагласио да је за време боравка у Паризу, поводом поменуте Descartes-ове прославе, прегледао Гетaлдићева дела уз помоћ лица које је добро познавало латински и италијански језик и да има намеру написати расправу о Гетaлдићевој улози у развитку аналитичке геометрије. Из тога се може претпоставити да је Петровић приликом писања извештаја Академији имао само увид у Гетaлдићева дела, стечен њиховим прегледом у Паризу, и да је намеравао о њима написати расправу, пошто их детаљно проучи.

[2]. Само је у овом делу Гетaлдић „алгебризирао геомеријске проблеме“, ни у једном другом његовом делу нема ни трага о примени Vièteove алгебарске анализе, односно „општих бројева“.

[3]. Cf.: Е. Стипанић, *Марин Гетaлдић*, Завод за издавање уџбеника НР Србије Београд, 1961, стр. 174—181

[4]. Ibid стр. 145—181; Е. Стипанић, *De l'analyse algébrique dans l'oeuvre du Marin Getaldić*, Congrès international des mathématiques Moscou, 1966, Résumés, Section 15, стр. 9; Моја расправа *Марин Гетaлдић и његов рад у математици и физици*, која ће бити објављена у едицији Расправе и грађа за повијест наука ЈАЗУ.

[5]. Први сам скренуо пажњу на значај тог Гетaлдићевог Конспекта у свом саопштењу на Конгресу математичара у Москви и у својој претходно поменутој расправи.

[6]. *De resolutione et compositione mathematica*, Liber secundus, Problema VII, Rim, 1630, стр. 72—74

[7] Овде ознака $A_2—G_2—B$ значи исто што и $2A—2G—B$. Наиме, Гетaлдић, у духу свог времена, коефицијенте пише као индексе. То се јасно види и у приложеном Конспекту.

[8]. Отон Кучера, *О Марину Гетaлдићу, патрицију дубровачком, знаменитом математику и физику на почетку XVII вијека*, Рад, књ. CXVII, Загреб, 1893, стр. 60

[9]. *De resolutione et compositione mathematica*, Liber quintus, Problema V, стр. 328—330

Кучера је детаљно анализирао само четврти проблем: Super data base triangulum constituere, quod habeat differentiam crurum dimidiae basis aequalem (Конструисати троугао дате основице код кога је разлика двеју осталих страница једнака половини основице).

МАТЕМАТИЧКА БИБЛИОТЕКА, 38 (1968), 127—141.

Др *Милорад Бертолино*

# ПРИЛОЗИ МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА КВАЛИТАТИВНОЈ АНАЛИЗИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

## I

Резултати Михаила Петровића у области квалитативне анализе диференцијалних једначина бројни су, разноврсни и садрже многе духовите посебне поступке. Нећемо се упуштати у анализу свих тих резултата — нећемо дати чак ни њихов сумаран преглед. — Издвојићемо само област такозваног директног проучавања реалних интеграла, а нарочито неке делове у којима долази до изражаја примена диференцијалних неједнакости. Петровић са изванредном вештином из релативно једноставних теоријских претпоставки изводи далекосежне последице. Суштина квалитативне анализе је у проучавању особина решења на основу особина функција које се јављају у самој једначини, при чему се не мора знати општи интеграл. Општи интеграл некад није елементарна функција, а некад је тако компликован да се квалитативна анализа и тада јавља као најпогоднији начин проучавања решења. У хипотезама које се односе на функције које фигуришу у диференцијалној једначини код Петровића се често јављају неједнакости. Петровић одједном улази у суштину проблема и, такорећи корак по корак, прати ток интегралне криве. Са гледишта строгости разматрања у дедуктивном смислу, њему се могу стављати појединачне примедбе и наћи ће се код њега омашки, које су редовно лако отклоњиве. Али оно што са гледишта математичког „чистунства“ може да изгледа као недостатак, често се јавља као врлина ако је циљ лакше увођење почетника у научни рад. Петровић пише онако како су му идеје долазиле, комбинујући доказни поступак са хеуристичким примедбама, илуструјући тако на лак, занимљив али никако баналан начин сâмо настајање и и развитак стваралачке мисли у току решавања једног проблема.

Ако је, рецимо, дата диференцијална једначина $y'=f(x, y)$, основна неједнакост која је значајна у квалитативној анализи биће неједнакост $f(x, y) \gtrless 0$, која одређује област рашћења односно опадања решења диференцијалне једначине. Решење $y = \varphi(x)$ једначине $f(x, y) = 0$ представља скуп стационарних тачака решења. Ове основне околности зачудо се ретко наглашавају у делима о квалитативној анализи, док су у Петровићевим радовима оне и видно истакнуте, и много коришћене. Поменимо следећи Петровићев резултат из 1895. године ([1]); цитирамо према изворном тексту:

Нека је дата Рикатијева једначина

$$\frac{dy}{dx} + \varphi_1(x)\, y^2 + \varphi_2(x)\, y + \varphi_3(x) = 0, \tag{1}$$

где су $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ униформне функције од $x$.

Сменом $y = \dfrac{u}{\varphi_1(x)}$ добијамо

$$\frac{du}{dx} + u^2 + f_1(x)\, u + f_2(x) = 0, \tag{2}$$

са $f_1(x) = \varphi_2(x) - \dfrac{\varphi_1{}'(x)}{\varphi_1(x)}$, $\quad f_2(x) = \varphi_1(x)\, \varphi_3(x)$.

*Први случај.* Нека су $a_1$ и $a_2$ коначне границе: $\lim f_1(x) = a_1$, $\lim f_2(x) = a_2$. Кад $x$ бесконачно расте, граница којој тежи општи интеграл једначине (2) не зависи од интеграционе константе: она је или потпуно неодређена, па ма какву вредност дали константи, или је равна једној од вредности

$$-\frac{1}{2}\left(a_1 + \sqrt{a_1{}^2 - 4\, a_2}\right), \qquad -\frac{1}{2}\left(a_1 - \sqrt{a_1{}^2 - 4\, a_2}\right).$$

*Други случај.* $f_1(x)$ и $f_2(x)$ не теже обе коначним границама, или ако теже, те су обе границе равне нули. Кад је једна од тих граница бесконачна, граница интеграла $u$ извесно је бесконачна. Кад су обе границе равне нули, у општем случају не може се наћи граница интеграла $u$, али у специјалним случајевима то је често пута могуће.

У првом случају, за $a_1{}^2 - 4\, a_2 = 0$ интеграл тежи ка $-\dfrac{a_1}{2}$; ако је $a_1{}^2 - 4\, a_2 > 0$ тежи уопште већем корену квадратне једначине



$r^2 + a_1\, r + a_2 = 0$, изузетно може тежити мањем; ако је $a_1{}^2 - 4\, a_2 < 0$, интеграл осцилира бесконачно много пута између $-\infty$ и $+\infty$. Наведеном резултату могу се ставити замерке са гледишта прецизности доказа, јасноће формулација, одређености термина, недовољног увида у све могуће подслучајеве, њиховог непотпуног разграничења. Али нека читалац покуша да критички приђе овом резултату и да сам прецизира термине и тражи све могуће подслучајеве, па ће се брзо уверити у то да су евентуалне омашке отклоњиве, да је резултат, генерално узев, тачан, да је директна Петровићева анализа изванредно инспиративна и инструктивна и да представља одличног путовођу за даље испитивање аналогних проблема. Уосталом, доба у коме је рад настао још се није одликовало данашњом ригорозношћу, а и сам Петровић је у каснијем резултатима све ближи савременом начину математичког изражавања. Квалитативна анализа компаративних Рикатијевих једначина у нашим чланцима [15], [16] инспирисана је баш овим Петровићевим радом.

## II

У Петровићевим радовима ([5], [6], [7]) значајно место заузима појам квалитативног првог интеграла. Нека је, наиме, дата диференцијална једначина

$$F(x,\, y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n)}) = 0 \tag{3}$$

и нека је уочен израз $\Phi(x,\, y,\, y',\, \ldots,\, y^{(m)})$. Нека је, даље, $y(x)$ функција која припада одређеној класи решења једначине (3). Израз $\Phi$ биће квалитативни први интеграл дате једначине ако он, посматран као функција од $x$ варира у одређеном интервалу $[\lambda_1,\, \lambda_2]$ за све функције $y(x)$ из одређене класе интеграла једначине (3), после замене њих и њихових извода укључујући ред $m$ у израз $\Phi$. То се пише на следећи начин:

$$\Phi = \lambda_1 + \theta\,(\lambda_2 - \lambda_1) = \lambda, \quad \text{са} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

где су $\lambda_1$, $\lambda_2$ константе, а $\lambda$ и $\theta$ функције од $x$. У случају обичног првог интеграла израз $\Phi$ се просто своди на константу.

Из неједнакости, на пример,

$$\frac{1}{2}\,(y'^2 + y^2)^2 \leqslant y'^4 + y^4 \leqslant (y'^2 + y^2)^2$$

за $y'^4+y^4=f(x)$ добија се

$$\frac{y'^2+y^2}{\sqrt{f(x)}}=1+\theta\left(\sqrt{2}-1\right),\qquad 0\leqslant\theta\leqslant 1,$$

квалитативни први интеграл за $y'^4+y^4=f(x)$.

Или, из неједнакости

$$\frac{1}{2}(y'+y)^2\leqslant y'^2+y^2\leqslant(y'+y)^2$$

добија се за једначину

$$y'^2+y^2=f(x) \tag{4}$$

(за сваки њен позитивни, монотоно растући интеграл) квалитативни први интеграл;

$$\frac{y'+y}{\sqrt{f(x)}}=1+\theta\left(\sqrt{2}-1\right),\qquad 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

Петровић проучава такве класе диференцијалних једначина чији квалитативни први интеграли дају једначине $\Phi=\lambda$ лакше за проучавање. Тако, полазећи од простијих једначина, долази до закључака који се односе на решења генералнијих или компликованијих.

У овом смислу нарочито је од интереса једначина (4) којом се Петровић доста бавио и којој ћемо и ми посветити мало више пажње. Очигледно је $y'=\pm\sqrt{f(x)-y^2}$, па у области $|y|>\sqrt{f(x)}$ решења једначине не егзистирају. Узмимо, у области $|y|<\sqrt{f(x)}$, једну тачку са координатама $(x_0, y_0)$, где је $y_0>0$. Кроз ову тачку пролазе две интегралне криве $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$, од којих је прва позитивна и растућа (одговара грани $y'=+\sqrt{f(x)-y^2}$), а друга позитивна и опадајућа (одговара грани $y'=-\sqrt{f(x)-y^2}$). Квалитативни први интеграл $\dfrac{y'+y}{\sqrt{f(x)}}=\lambda$ (са $1\leqslant\lambda\leqslant\sqrt{2}$) одговара, очигледно, кривој $Y_1(x)$. С друге стране, за позитивно $y$ и негативно $y'$ (што одговара кривој $Y_2(x)$) из неједнакости

$$\frac{(y'-y)^2}{2}\leqslant y'^2+y^2\leqslant(y'-y)^2$$



добија се квалитативни први интеграл исте једначине, али за $Y_2(x)$ у облику

$$\frac{y'-y}{\sqrt{f(x)}}=\lambda\qquad (\text{са } -\sqrt{2}\leqslant\lambda\leqslant-1).$$

Интеграција показује да се $Y_1(x)$ налази између кривих

$$y=e^{-x}\left[y_0e^{x_0}+\int_{x_0}^{x}e^{x}\sqrt{f(x)}\,dx\right]$$

и

$$y=e^{-x}\left[y_0e^{x_0}+\sqrt{2}\int_{x_0}^{x}e^{x}\sqrt{f(x)}\,dx\right],$$

а $Y_2(x)$ између кривих

$$y=e^{x}\left[y_0e^{-x_0}-\sqrt{2}\int_{x_0}^{x}e^{-x}\sqrt{f(x)}\,dx\right]$$

и

$$y=e^{x}\left[y_0e^{-x_0}-\int_{x_0}^{x}e^{-x}\sqrt{f(x)}\,dx\right].$$

Очигледно, уже претпоставке о функцији $f(x)$ омогућавају даљу квалитативну анализу, јер ће особине оквирних кривих рећи нешто и о особинама решења $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$. За $y_0<0$ расуђивања су аналогна.

Овим се не исцрпљују сва Петровићева разматрања о наведеној једначини. Између осталих, треба истаћи његов чланак ([9]), где је на свега три стране изванредно јасно показано како и најмање квантитативне промене неког параметра који фигурише у датој једначини могу имати за последицу веома видне квалитативне промене тока интегралних кривих. Као пример Петровић проучава једначину

$$y'^2+y^2=\alpha\,u(x)+1,$$

која је специјалан случај претходне једначине. Диференцијабилна функција $u(x)$ претпоставља се монотоном, са $u'(x)\neq 0$. За $\alpha=0$ општи интеграл се добија у облику $y=\sin(x+C)$, дакле скуп осцилаторних кривих. За $\alpha\neq 0$, Петровић диференцира дату једначину и добија једнакост

$$2y'(y+y'')=\alpha\,u'(x),$$

одакле се види да мора бити и $y'\neq 0$ (због $\alpha\neq 0$, $u'(x)\neq 0$), па да су, дакле, решења дате једначине монотоно растућа или монотоно опадајућа. Диференцирање дате једначине представља једну од досетки, толико типичних за Петровића, које омогућавају да се из крајње једноставних поступака изведу значајни закључци. Додуше, овде Петровић претпоставља и егзистенцију другог извода решења дате једначине. Став је, међутим, тачан и без ове претпоставке, али је доказ знатно дужи, па ћемо га изоставити. У случају $\alpha=0$, напоменимо, сем општег интеграла $y=\sin(x+C)$ јављају се и праве $y=\pm 1$ као сингуларни интеграли. У свакој тачки, на пример, праве $y=1$ сустичу се једно (монотоно растуће) решење једначине $y'=+\sqrt{1-y^2}$ и једно (монотоно опадајуће) решење једначине $y'=-\sqrt{1-y^2}$. Ова два решења образују јединствену криву чији се први извод анулира у тачки која спаја ове две гране. Спајање о коме је реч немогуће је, као што се може показати, у случају $\alpha\neq 0$, $u'(x)\neq 0$, па остају једино појединачна решења једначина $y'=\pm\sqrt{\alpha u(x)+1-y^2}$ монотоно растућа или монотоно опадајућа за све вредности $x$ за које су дефинисана. Читалац може сам да покуша да докаже Петровићев став не користећи $y''$. Аутор ових редова је то већ учинио и објавиће овај доказ на другом месту. Доказ је интересантан због геометријских околности везаних са њим, али Петровићев ипак треба претпоставити, јер претпостављање егзистенције другог извода овде, као што се може показати, не сужава битно проблем.

У својству примера за Петровићев став наведимо једначину

$$y'^2+y^2=x+\frac{1}{4x}$$

$\left(\text{овде је } \alpha=1,\quad u(x)=x+\frac{1}{4x}-1\right).$

Решења $y=\pm\sqrt{x}$ су монотона и остају у области $|y|<\sqrt{x+\frac{1}{4x}}$ за $x\geqslant x_0>0$ (пример је наш, М. Б.).

Споменимо још да се сличном методом може разматрати једначина

$$y'^m+y^n=f(x), \tag{5}$$



где су $m$ и $n$ природни бројеви (видети [20]). На проучавање ове једначине аутора ових редова је инспирисала не само Петровићева метода проучавања једначине $y^2+y'^2=f(x)$, него и једна друга околност која се запажа у вези са Петровићевим резултатима. У последњем случају ($\alpha\neq 0$, $u'(x)\neq 0$) запажа се да решења имају исту особину као функција $u(x)$ која фигурише у једначини (монотоно рашћење или опадање). Намеће се одмах општија помисао: посматрати све оне једначине типа $y'=F(x,\ y,\ f(x))$ које омогућавају да се, полазећи од неке квалитативне особине $P$ функције $f(x)$, докаже да постоји скуп решења $y(x)$ дате једначине која имају ту исту особину $P$. У случају једначине (5) добили смо низ резултата ове врсте. Једначину (4), важну у применама, проучавали су Т. Пејовић и Д. С. Митриновић, између осталих радова и у радовима [12], [13], са гледишта интеграције у коначном облику, а сем наведених бавили су се овом једначином и други аутори.

Претпоставимо да је особина $P$ дата исказом „бити ограничена функција за $x\geqslant x_0$“. Свакој функцији $f(x)$ одговара друга једначина $y'=F(x,\ y,\ f)$ а свакој једначини овог типа одговара други (бесконачан) скуп ограничених решења. Овим је дефинисано једно мултиформно пресликавање скупа ограничених функција у себе сама и било би интересантно проучавати особине једног таквог пресликавања, чија је „генератриса“ диференцијална једначина.

## III

Облик $y'=F(x,\ y,\ f(x))$ нашли смо, међутим, такође код Петровића (видети [3], [6], [7], [10]) у нешто другачијем али ипак доста сродном контексту. Познат је следећи Петровићев резултат, који дајемо према изворном тексту:

Нека је дата једначина $y'=F(x,\ y,\ f)$ где је $f$ функција од $x$ која фигурише у $F$. Нека је $(x_0, y_0)$ тачка у којој су функција $F$ и њен извод $\dfrac{\partial F}{\partial f}$ одређени, коначни, непрекидни и не мењају знак и за коју се овај парцијални извод не анулира. Увек се могу изабрати две функције $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ које испуњавају следеће услове:

1) Оне су одређене, коначне и непрекидне у неком довољно малом интервалу од $x=x_0-a_1$ до $x=x_0+a_2$ ($a_1$ и $a_2$ су две позитивне константе);

2) У овом је интервалу $\lambda(x) < f(x) < \mu(x)$. Ако се са $u$ и $v$ означе интеграли једначина

$$u' = F(x, u, \lambda), \qquad v' = F(x, v, \mu),$$

који за $x = x_0$ узимају вредност $u_0 = v_0 = y_0$, функције $u$ и $v$ су одређене, коначне и непрекидне у довољно малом интервалу од $x = x_0 - b_1$ до $x = x_0 + b_2$ ($b_1$ и $b_2$ су две позитивне константе).

Два интервала $(x_0 - a_1,\ x_0 + a_2)$ и $(x_0 - b_1,\ x_0 + b_2)$ имају увек један заједнички интервал $(x_0 - h_1,\ x_0 + h_2)$ који је различит од нуле.

За сваку вредност $x$ из интервала $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$ интеграл $y$ једначине $y' = F(x, y, f)$ који за $x = x_0$ узима вредност $y = y_0$ је одређен, коначан, непрекидан и *налази се стално између одговарајућих интеграла $u$ и $v$*.

Очигледно, овде се из неких неједнакости које важе за функцију $f$ изводе неједнакости које важе за решења дате једначине. Особина $P$ из прошлог одељка овде је: „задовољавати неједнакости типа $\lambda(x) < f(x) < \mu(x)$“. Наравно, резултат даје и више од овога, јер пружа тачно упутство за формирање компаративних једначина. Ако су једначине $u' = F(x, u, \lambda)$, $v' = F(x, v, \mu)$ лакше за проучавање од дате једначине, моћи ћемо да добијемо и квантитативну процену и квалитативни опис непознатог решења које је „уоквирено“ функцијама $u$ и $v$.

## IV

У претходном одељку ради се о неједнакостима типа $\lambda(x) < f(x) < \mu(x)$ које задовољава функција $f(x)$, која фигурише на десној страни дате једначине. Још су значајнији Петровићеви резултати у вези са неједнакостима типа

$$f_1(x, y) < f(x, y) < f_2(x, y), \tag{6}$$

где су $f_1$, $f$, $f_2$ десне стране једначина

$$y' = f_1(x, y), \quad y' = f(x, y), \quad y' = f_2(x, y). \tag{7}$$

У вези са овим неједнакостима указали смо ([19]) на један важан Петровићев приоритет. Позната је Чаплигинова теорема која гласи:



Нека је дат отворен скуп $\Omega$ и функције $f_1(x, y)$, $f(x, y)$, $f_2(x, y)$ непрекидне на том скупу. Нека су $y_1(x)$, $y(x)$, $y_2(x)$ редом решења једначина (7), са $y_1(x_0) = y(x_0) = y_2(x_0) = y_0$ (тачка $(x_0, y_0)$ је у $\Omega$). Тада из (6) следује, у $\Omega$,

$$y_1(x) < y(x) < y_2(x) \quad \text{за } x > x_0. \tag{8}$$

Ову теорему је Чаплигин објавио 1919. године. Међутим, Петровић је 1899. г. (видети [3], [7]) објавио следећи став који наводимо према изворном тексту:

Нека су

$$y' = F(x, y), \tag{9}$$

$$u' = F_1(x, u), \tag{10}$$

$$v' = F_2(x, v) \tag{11}$$

три диференцијалне једначине првог реда. Функције двеју променљивих $x$ и $y$

$$F(x, y) - F_1(x, y) \tag{12}$$

$$F(x, y) - F_2(x, y) \tag{13}$$

имаће, у равни $XOY$ свака своју позитивну и негативну област. Означимо са:

$\Delta_1$ и $\Delta_2$ позитивну и негативну област функције (12);

$\Omega_1$ и $\Omega_2$ позитивну и негативну област функције (13);

$D_1$, $D_2$ . . . линије које ограничавају те области;

$E_1$, $E_2$ . . . линије које представљају геометријска места сингуларитета функција $F$, $F_1$, $F_2$;

П део равни који је заједнички за један пар области $\Delta$ и $\Omega$ супротно означених, нпр., за области $\Delta_1$ и $\Omega_2$.

Нека је $M_0(x_0, y_0)$ једна тачка која не припада ни једној од линија $D$ ни $E$, а која се налази у области П.

Напослетку, нека су $y$, $u$, $v$ интеграли једначина (9), (10), (11) који за $x = x_0$ имају заједничку вредност $y = y_0$, $u = y_0$, $v = y_0$. Тада ће, са једне и друге стране тачке $(x_0, 0)$ постојати на оси $Ox$ један размак различит од нуле, на пример

$$(x_0 - h_1,\ x_0 + h_2), \tag{14}$$

($h_1$ и $h_2$ су два позитивна броја) који ће испуњавати ове услове:

а) док се $x$ мења у размаку (14) интеграли $u$ и $v$ као и њихови први изводи су одређени, коначни и непрекидни;

б) контура Γ састављена од кривих $u$, $v$ и двеју правих $x=x_0-h_1$ и $x=x_0+h_2$ садржана је у области П и она не обухвата ни један део кривих $D$ ни $E$ нити се са којом од ових сече.

Тада се може доказати овај резултат:

*Када се x мења у размаку* (14) *интеграл једначине* (9) *биће одређен, коначан и непрекидан, а налазиће се стално између u и v.*

Очигледно се ради о истом ставу. Чаплигинов став се обично наводи уз претпоставку јединствености решења за средњу једначину, што је излишно, јер став важи и без те претпоставке. Код Петровића, као што видимо, јединственост се такође посебно не подвлачи. О овом приоритету читалац може више наћи у чланку [19]. Овде ћемо нагласити да приоритет о коме је реч не смањује велику улогу Чаплигина, који је још дао основе теорије за једначину реда $n$, дубоку анализу линеарних једначина $n$-тог реда, као и своју чувену методу сукцесивног уоквиравања. Из Чаплигинових радова, развио се у СССР и другде читав један правац приближне и квалитативне интеграције диференцијалних једначина. Без умањивања, дакле, значаја Чаплигинове теорије, овај приоритет видно подвлачи, међутим, луцидност и богатство идеја Михаила Петровића.

Ваља напоменути да се Чаплинова неједнакост јавља код Петровића и раније, у његовом раду [2] из 1896, али не у овако општем и не у експлицитном виду. Ту је важан следећи његов резултат:

Нека су

$$\frac{dY_1}{dx}=\varphi(Y_1-F_1)(Y_1-F_2), \tag{15}$$

$$\frac{dY_2}{dx}=\varphi(Y_2-\Phi_1)(Y_2-\Phi_2) \tag{16}$$

две једначине за које у интегралу $(0, \alpha)$ важи

$$F_1(x) \lesseqgtr f_1(x), \qquad F_2(x) \lesseqgtr f_2(x)$$

$$\Phi_1(x) \gtreqless f_1(x), \qquad \Phi_2(x) \gtreqless f_2(x)$$



где су $F_1$, $F_2$, $\Phi_1$, $\Phi_2$ позитивне и неопадајуће функције у интервалу $(0, \alpha)$.

У том ће интервалу важити

$$Y_1<y<Y_2,$$

где су $Y_1$, $Y_2$ интеграли једначина (15), (16) који се анулирају за $x=0$, а $y$ решење једначине

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(y-f_1)(y-f_2) \tag{17}$$

које се анулира за $x=0$. $\varphi(x)$ је позитивна као и $f_1$, $f_2$ при чему се још подразумева да су $\varphi$, $f_1$, $f_2$ неопадајуће, а $f_1$ и $f_2$ у случају када пролазе кроз почетак немају обе осу као тангенту и $f_1<f_2$.

Ако под овим претпоставкама упоредимо десне стране једначина (15), (17), (16) видећемо да важи неједнакост типа (6), дакле чаплигинска неједнакост. Интересантно је да, 1913. године, Сима Марковић ([11]) користи неједнакост чаплигинског типа у свом специјалном проучавању Рикатијеве једначине, не наводећи општији став Петровићев из 1899. Како је сам Петровић био председник испитног одбора, а како се наведена Петровићева теорема не наводи ни у књизи [10], за који приказ је М. Миланковићу сам Петровић дао грађу, може се закључити да Петровић није довољно увиђао значај овог става. Међутим, В. В. Немицки ([21]), говорећи о великом значају чаплигинске теорије изричито подвлачи како у њеним основима лежи позната Чаплигинова лема (како је он назива), о којој је реч у овом одељку.

## V

Петровић је дао значајне резултате у вези са линеарним диференцијалним једначинама другог реда, посебно у проучавању осцилаторних и неосцилаторних решења. Познате Штурмове резултате о нулама линеарне једначине другог реда проширивао је на општије једначине, као и на систем једначина. С друге стране, поједине Штурмове резултате даље је прецизирао или их користио и у проучавању једначина првог реда, примењујући неку врсту инверзног поступка. Сем резултата из ширих области математичке анализе користио је свој појам квалитативног првог интеграла, али и свој диференцијални алгоритам ([8]) односно свој диференцијални оператор $\Delta_n(y) = \frac{1}{y}\frac{d^n y}{dx^n}$.

Задржаћемо се само на једном Петровићевом резултату ([5], [6]) који је Петровић доказао користећи теорему о средњој вредности интеграла. Овај резултат, у тексту сасвим приближном оригиналу, гласи:

Нека је дата једначина

$$y'' = f(x)\, y \tag{18}$$

где је $f(x)$ реална, коначна, позитивна и непрекидна функција у једном интервалу $(a, b)$. Свака интегрална крива $y(x)$ чији се први извод анулира у једној тачки $(x_0, y_0)$ (где је $x_0$ из интервала $(a, b)$) биће у интервалу $(x_0, x)$ уоквирена кривим

$$y = y_0 \operatorname{ch}(x - x_0)\sqrt{N} \quad \text{и} \quad y = y_0 \operatorname{ch}(x - x_0)\sqrt{M}, \tag{19}$$

где $N$ и $M$ означавају једну доњу и једну горњу границу за $f(\xi)$, за вредности између $x_0$ и $x$. Ако је $f(x)$ негативна у $(a, b)$, по претпоставци довољно великом, крива $y(x)$ је осцилаторна, састављена од наизменично позитивних и негативних полуталаса. Сваки полуталас, било позитиван, било негативан, обухваћен је двема кривим

$$y = y_0 \cos(x - x_0)\sqrt{N} \quad \text{и} \quad y = y_0 \cos(x - x_0)\sqrt{M}, \tag{20}$$

где $N$ и $M$ имају претходни смисао, али за $-f(x)$.

Овај је резултат типичан за Петровићев метод уоквиравања интегралне криве помоћу две криве, једне горње и једне доње. Овде се посматра једна ужа класа решења — само решења чији се први извод у тачки $(x_0, y_0)$ анулира, али су зато добијене оквирне криве са великом прецизношћу. У првом случају се види да и решење постаје бесконачно као и оквирне криве када се независно промењива бесконачно увећава, а у другом случају осцилаторност решења долази до изражаја на довољно великом интервалу.

Познато је да се сменом $y = e^{\int z dx}$ једначина (18) своди на Рикатијеву једначину

$$z' + z^2 - f(x) = 0. \tag{21}$$



Својевремено смо ([14], [17]), користећи споменуту схему и једначину (21), применили на (21) Чаплигинову или боље, Петровић-Чаплигинову теорему и, посматрајући компаративне једначине $z' + z^2 = N$, $z' + z^2 = M$, доказали да се као оквирне криве решења једначине (18) добијају опет криве (19) и (20). Тиме је на други начин био доказан Петровићев став (Петровић је користио теореме о средњој вредности интеграла). Напоменимо да се, користећи резултате из чланка ([17]), директном применом методе ретракта Важевског, резултат може доказати и на трећи начин, који значи повезивање методе Важевског са диференцијалним неједнакостима третираног типа. Овај доказ још није публикован.

## VI

Већ смо споменули једначину (17) коју Петровић проучава у свом раду [2]. У истом раду се третира и једначина

$$y' = \varphi\,(f_1 - y)(f_2 - y)\cdots(f_n - y) \tag{22}$$

(позната Петровићева ,,хемијска једначина``) Први његов резултат у вези са (17), који се наводи у [2] је следећи:

Уз претпоставку о функцијама $f_1$, $f_2$ које смо већ навели, доказује се да интеграл $y(x)$ који се анулира за $x = 0$ јесте у $(0, \alpha)$ *позитиван, растући и мањи од* $f_1(x)$.

Сам по себи резултат није нарочито сложен, нити се тешко доказује и Петровићу је важан због даљих математичких, нарочито хемијских примена. Резултат је, међутим, посебно важан методолошки, јер у њему долази до изражаја извесна алгебризација проблема. Чињеница да је десна страна једначине квадратни трином и то факторизован по $y$ омогућава праћење знака поља праваца, наиме јасно разликовање области рашћења и опадања решења, што омогућава суштинске закључке о решењима.

Проучавајући једначину (22), Петровић констатује да интеграл има исту особину као и у случају (17), тј. да је позитиван, растући, мањи од најмање од функција $f_i(x)$. На овоме се Петровић и зауставља, због примењеног карактера рада, у оквиру кога га интересује само решење које се анулира у почетку. Сама једначина, међутим, због полиномијалног облика по $y$ десне стране пружа широке могућности за проучавање и других решења. Под погодним претпоставкама о функцијама

$f_i(x)$ могу се ове функције третирати као приближна решења једначине, јер се права решења приближавају тим функцијама, уз могућност прецизног оцењивања грешке (видети [18]). Функције $f_i(x)$ су такозвана „геометријска места стационарних тачака", чија је улога у квалитативној анализи од основног значаја.

Напоменимо да једначину (17) Петровић третира и у свом капиталном делу из феноменологије ([4]), у оквиру проучавања „материјализације Рикатијеве једначине", у делу где је реч о бимолекуларној реакцији.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Петровић Михаило: „*О асимптотним вредностима интеграла диференцијалних једначина првог реда*", Глас СКАН, L, 1895.

[2] Petrovitch Michel: „*Sur l' équation différentielle de Riccati et ses applications chimiques*", Sitzungsberichte der königl. böhhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, Prag, 1896, str. 1—25.

[3] Petrovitch Michel: „*Sur une manière d' étendre le théorème de la moyenne aux équations différentilles du premier ordre*" Math. Annalen, LIV Band, 3. Heft, str. 417—436.

[4] Петровић Михаило: „*Елементи математичке феноменологије*", Београд, 1911.

[5] Petrovitch Michel: „*Intégrales premières à restrictions*", Académie royale de Serbie, Paris 1929,

[6] Petrovitch Michel: „*Intégration qualitative des équations differentielles*. Mémorial des sc. math. Paris, 1931.

[7] Петровић Михаило: „*Рачунање са бројним размацима*," Београд, 1932.

[8] Петровић Михаило: „*Један диференцијални алгоритам и његове примене*" СКАН, Посебна издања, Прир. и мат. списи књ. 30, Београд, 1936.

[9] Петровић Михаило: „*Осетљива места обичних и диференцијалних једначина*", Математички весник; Удружење студената математике на Београдском Универзитету, Београд, 1939, прештампано у Михаило Петровић: Чланци, Друштво мат. и физ. НРС, Београд, 1949, стр. 59—61.

[10] „*Notice sur les travaux scientifiques de M. Michel Petovith*", Acad. roy. de Serbie, Paris, 1922.

[11] Сима М. Марковић: „*Општа Рикатијева једначина првог реда*", докторска теза, Београд, 1914.

[12] Тадија Пејовић: „*Нови случајеви интеграбилитета једне важне диференцијалне једначине*", докторска теза, Београд, 1923.



[13] Драгослав С. Митриновић: „*Истраживања о једној важној диференцијалној једначини првог реда*", докторска теза, Београд, 1935.

[14] М. Бертолино: „*Примедба у вези са једним ставом Михаила Петровића*". Весник Друштва мат. и физ. НРС, X, Београд, 1958, стр. 115—118.

[15 М. Бертолино: „*Једна примена диференцијалних неједнакости*", Математичка библиотека 22, стр. 37—45.

[16] M. Bertolino: „*Théorèmes sur le comportement asymptotique des solutions de certaines équations différentielles*", Vesnik Društva mat. i fiz. NRS, XIII, 1—2, 1961, str. 23—34.

[17] M. Bertolino: „*Sur la limite (finie ou infinie) d' application des inégalités de Tchapliquine du second ordre*", Ann. di Mat. pura ed appl. (IV), Vol. LXVII, str. 113—126, Bologna, 1965.

[18] M. Bertolino: *Solutions approximatives presque stables des équations différentielles*", Matematički vesnik 4 (19), sv. 1, 1967, str. 71—74,

[19] M. Bertolino: „*Priorité de Michel Petrovitch relative au théorème de Tchapliguine sur les inégalités différentielles du premier ordre*", Matematički vesnik 4 (19), sv. 1, 1967, str. 165—168.

[20] M. Bertolino: „*Zone d' influence qualitative de certaines fonctions figurant au deuxième membre des équations différentielles*", Bull. sci., Conseil Acad. RSF Yougoslavie, Section A — Zagreb, Tome 12. № 9 — 10, 1967. str. 241.

[21] В. В. Немыцкий: „*Теория обыкновенных диффеpенциальных уравнений за 50 лет 1917—1966 г.* Вестник Московского университета, № 5—1967. стр. 37—47.

МАТЕМАТИЧКА БИБЛИОТЕКА, 38 (1968), 143—151.

Др *Добривоје Михаиловић*

# ДОПРИНОС МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА НЕБЕСКОЈ МЕХАНИЦИ

Резултати рада Михаила Петровића у области Небеске механике могу се свести на неколико рачунских допуна које се односе на конфигурацију равностраног троугла односно праволинијску конфигурацију које допуштају егзактна решења проблема трију тела. Ове допуне Петровић је публиковао у чланцима [2] и [3], а до одговарајућих резултата је дошао применом ставова елементарне геометрије приказаних у облику асиметричних бројних размака [1].

Неколико година после публиковања Петровићевих предавања на Универзитету у Београду под насловом „*Рачунање са бројним размацима*“, у току 1935. године публиковано је у Београду неколико расправа које су се односиле на проблем трију тела Небеске механике. Тако А. Билимовић и Б. Петронијевић у чланку [4] изводе у елементарно-геометријском облику једначине кретања трију тела око њиховог заједничког тежишта. Они су геометријском методом доказали егзистенцију пола гравитације (центра атракције) — тачке пресека резултујућих убрзања појединачних маса, као и поклапање пола гравитације са тежиштем као услов за егзистенцију егзактних решења проблема трију тела. У чланку „*Quelques théorèmes au problème des trois corps*“ [5] Б. Петронијевић проширује напред наведене резултате на случај атрактивних сила облика $F=kr^n$. В. Жардецки у чланку „*A propos d'un théorème du problème des trois corps*“ [6] показује да се пол гравитације налази у унутрашњости троугла у случају када су све силе атрактивне или све репулсивне, а ван троугла, ако су у исти мах и атрактивне и репулсивне.

Михаило Петровић полази од посматрања конфигурације равностраног троугла трију тела коју карактеришу следећи елементи:

1. $s = s_1 = s_2 = s_3$ — дужине страна овога троугла;

2. $r = r_1 = r_2 = r_3$ — одстојања маса од тежишта система;

3. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — модули резултујућих убрзања одговарајућих маса у правцима респективно $r_1, r_2, r_3$,

4. $k$ — фактор пропорционалности;

5. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — хомогене функције маса облика:

$$\lambda_1 = m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2,$$
$$\lambda_2 = m_1^2 + m_1 m_3 + m_3^2,$$
$$\lambda_3 = m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2;$$

6. целокупна маса система:

$$\mu = m_1 + m_2 + m_3.$$

За ову конфигурацију Билимовић и Петронијевић су елементарно-геометријским путем извели следеће релације:

$$s_i = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda_i}} r_i, \quad \gamma_i = \frac{k \lambda_i^{3/2}}{\mu^2} \cdot \frac{1}{r_i^2} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Ако између маса $m_1, m_2, m_3$ постоји једна релација облика

$$F(m_1, m_2, m_3) = 0 \tag{2}$$

где је $F$ хомогена функција трију маса, може се поставити проблем одређивања граница могућих варијација за односе $r_i/s_i$ и $\gamma_i$ ако није позната ни једна од маса система. Формулација тога проблема и његово решење представљају прилог теорији егзактних решења проблема трију тела.

Решавању тога проблема Петровић је приступио на следећи начин. Ако се стави

$$\frac{m_2}{m_1} = x, \quad \frac{m_3}{m_1} = y, \quad \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\mu} = z_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

налази се

$$z_1 = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\mu} = \frac{\sqrt{x^2 + xy + y^2}}{1 + x + y},$$



$$z_2 = \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\mu} = \frac{\sqrt{1 + y + y^2}}{1 + x + y}, \tag{3}$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{\lambda_3}}{\mu} = \frac{\sqrt{1 + x + x^2}}{1 + x + y},$$

а из (2)

$$F(1, x, y) = 0. \tag{4}$$

Елиминацијом из релација (3) једне од променљивих помоћу релације (4) постају величие $z_i$ функције једног аргумента. Зато се за позитивне вредности величина $x$ и $y$ доња и горња граница могућих варијација могу одредити било применом поступка за налажење екстремних вредности, или применом теорије бројних размака. Петровић је показао да се из познавања размака у којима варирају величине $z_i$ могу одредити и границе варијација величина

$$u_i = \frac{\lambda_i^{3/2}}{\mu^2} = \mu z_i^2 \quad (i = 1, 2, 3). \tag{5}$$

Ако се посматра специјални облик релације (2) и то онај у коме је једна од маса геометријска средина других двеју, тј.

$$m_1^2 = m_2 m_3, \tag{6}$$

тада је, према напред уведеним ознакама $xy = 1$, те је

$$z_1 = \frac{\sqrt{1 + x^2 + \frac{1}{x^2}}}{1 + x + \frac{1}{x}}.$$

Како за реалне позитивне бројеве $a$, $b$, $c$ важи двострука неједнакост

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{a + b + c} < 1,$$

то ће асиметрични облик овог размака [1] бити

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{a + b + c} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \theta \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (0 < \theta < 1)$$

или

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{a+b+c}=0{,}5774+\theta\cdot 0{,}4226 \qquad (0<\theta<1).$$

Применом овог резултата на релације (4) налази се

$$z_i=\frac{1}{\sqrt{3}}+\theta\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad (i=1,\,2,\,3). \tag{7}$$

Користећи последње релације Петровић је одредио размаке у којима варирају односи $r_i/s_i$, као и модули убрзања $\gamma_i$ трију маса.

Тако пре свега из (1) и (3) произилази

$$\frac{r_i}{s_i}=z_i=\frac{\sqrt{\lambda_i}}{\mu} \qquad (i=1,\,2,\,3),$$

па је према (7)

$$\frac{r_i}{s_i}=\frac{1}{\sqrt{3}}+\theta\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad (i=1,\,2,\,3). \tag{8}$$

Из релација (5) произилази

$$u_i=\frac{\lambda_i^{3/2}}{\mu^2}=\mu z_i^3, \quad \frac{u_i}{\mu}=z_i^3 \qquad (i=1,\,2,\,3)$$

па је према (7) размак у коме варира $z_i^3$

$$z_i^3=\frac{u_i}{\mu}=\frac{1}{\sqrt{27}}+\theta\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{27}}\right) \qquad (i=1,\,2,\,3),$$

тј.

$$u_i=\mu\left[\frac{1}{\sqrt{27}}+\theta\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{27}}\right)\right] \qquad (i=1,\,2,\,3;\ 0<\theta<1). \tag{9}$$

Како је на основу (1) и (5)

$$\gamma_i=k\cdot\frac{\lambda_i^{3/2}}{\mu^2}\cdot\frac{1}{r_i^2}=\frac{k}{r^2}\cdot u_i \qquad (i=1,\,2,\,3),$$

то се за размак у коме варирају модули убрзања налази

$$\gamma_i=\left[\frac{1}{\sqrt{27}}+\theta\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{27}}\right)\right]\cdot\frac{k\mu}{r_i^2} \qquad (i=1,\,2,\,3;\ 0<\theta<1).$$



Напред наведени размаци могу се у извесним специјалним случајевима сузити. Петровић анализира случај када три масе леже у теменима равностраног троугла, а величине маса образују тзв. Г-троугао, тј. такав троугао у коме је величина једне стране геометријска средина других двеју.

Користећи геометријски став према коме се за произвољни троугао са странама $a$, $b$, $c$ количник

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{a+b+c}$$

налази између $\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}$, Петровић је одредио уже размаке у којима леже односи $r_i/s_i$ и модули убрзања $\gamma_i$. Тако, на основу овога става он пре свега налази

$$z_i=\frac{1}{\sqrt{3}}+\theta\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad (i=1,\,2,\,3;\ 0<\theta<1),$$

а из

$$r_i=z_i s_i, \quad r_i/s_i=z_i \qquad (i=1,\,2,\,3)$$

добија

$$\frac{r_i}{s_i}=\frac{1}{\sqrt{3}}+\theta\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad (i=1,\,2,\,3;\ 0<\theta<1)$$

тј.

$$r_i/s_i=0{,}5774+\theta\cdot 0{,}1296 \qquad (i=1,\,2,\,3;\ 0<\theta<1).$$

На основу релације

$$\gamma_i=\frac{ku_i}{r_i^2}=\frac{k\mu z_i}{s_i^2}, \quad u_i=\mu z_i^3 \qquad (i=1,\,2,\,3)$$

за размаке у којима се налазе модули убрзања Петровић налази

$$\gamma_i=\left[\frac{1}{\sqrt{27}}+\theta\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{8}}-\frac{1}{\sqrt{27}}\right)\right]\frac{k\mu}{r^2} \qquad (i=1,\,2,\,3;\ 0<\theta<1),$$

односно

$$\gamma_i=\left[\frac{1}{\sqrt{3}}+\theta\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]\cdot\frac{k\mu}{s^2} \qquad (i=1,\,2,\,3;\ 0<\theta<1)$$

тј.

$$\gamma_i=(0{,}1924+\theta\cdot 0{,}1611)\frac{k\mu}{r^2}\qquad (i=1,2,3;\ 0<\theta<1)$$

односно

$$\gamma_i=(0{,}5774+\theta\cdot 0{,}1296)\cdot\frac{k\mu}{s^2}\qquad (i=1,2,3;\ 0<\theta<1).$$

У случају када је $m_1^2\neq m_2m_3$, тј. када маса $m_1$ не представља геометријску средину маса $m_2$ и $m_3$, тада Петровић уводи одступање $\delta$ од ове средине, те је у овом случају

$$m_2m_3=m_1^2+\delta.$$

На основу тога ће нпр. израз

$$\lambda_1=m_2^2+m_3^2+m_2m_3$$

добити облик

$$\lambda_1=M+\delta,$$

где је

$$M=m_1^2+m_2^2+m_3^2,$$

па је

$$z_1=\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\mu},\quad \text{тј.}\quad z_1=\frac{\sqrt{M}}{\mu}\sqrt{1+\frac{\delta}{M}}\,.$$

Како је за произвољне вредности маса $m_1$, $m_2$, $m_3$

$$\frac{\mu^2}{3}<M<\mu^2$$

то $\delta/M$ лежи у рзмаку $1/\mu^2$ и $3/\mu^2$, а израз

$$\omega=\sqrt{1+\frac{\delta}{M}}$$

у размаку $(\omega_1,\ \omega_2)$, где је

$$\omega_1=\sqrt{1+\frac{\delta}{\mu^2}},\quad \omega_2=\sqrt{1+\frac{3\delta}{\mu^2}}\,.$$

Како је још

$$\frac{1}{\sqrt{3}}<\frac{\sqrt{M}}{\mu}<1,$$



то $z_1$ лежи између $\dfrac{\omega_1}{\sqrt{3}}$ и $\omega_2$, те је

$$z_1=\frac{\omega_1}{\sqrt{3}}+\theta\cdot\left(\omega_2-\frac{\omega_1}{\sqrt{3}}\right)\qquad (0<\theta<1)\,.$$

Користећи се овим размаком, из релације $u_1=\mu z_1^3$ добија се размак за $u_1$, а одавде и размаци за $r_1/s_1$ и $\gamma_1$, за чије одређивање није потребно познавати масе $m_1$, $m_2$, $m_3$.

У специјалном случају, када величине маса образују Г-троугао сужење напред одређених размака постиже се полазећи од тога да је

$$\frac{\mu^2}{3}<M<\frac{\mu^2}{2},$$

те величина $\omega=\sqrt{1+\dfrac{\delta}{M}}$ сада лежи у размаку $(\rho_1,\rho_2)$, при чему је

$$\rho_1=\sqrt{1+\frac{2\delta}{\mu^2}},\quad \rho_2=\omega_2=\sqrt{1+\frac{3\delta}{\mu^2}},$$

те је

$$z_1=\frac{\rho_1}{\sqrt{3}}+\theta\cdot\left(\frac{\rho_2}{\sqrt{2}}-\frac{\rho_1}{\sqrt{3}}\right)\qquad (0<\theta<1),$$

а размаци за односе $r_1/s_1$ и $\gamma_1$ се одређују према напред изложеном поступку.

Уводећи у предња расматрања појам Г-троугла за величине маса у конфигурацији равностраног троугла, Петровић је показао, да потребан и довољан услов да троугао са странама

$$a,\ a+p,\ a+q\qquad (0<p<q)$$

представља Г-троугао је тај, да однос $q/p$ лежи између корена једначине

$$x^2-3x+1=0$$

тј. између бројева

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2};\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Како, пак, из елементарно-геометријских расматрања произилази да код ових троуглова мора бити $2p<q$, то се за однос $q/p$ налази размак

$$2<\frac{q}{p}<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

тј.

$$q/p=2+\theta\cdot 0{,}6180 \qquad (0<\theta<1)\,.$$

За случај праволинијске конфигурације маса Петровић наводи изразе за модуле убрзања, не дајући за овај случај одговарајуће бројне размаке [3].

У чланку [3] Петровић наводи још један начин одређивања бројних размака за односе $r_i/s_i$ и модуле убрзања $\gamma_i$ који је предложио Д. Марковић. Он користи размак у коме лежи медијана разломака $a_1/b_1$ и $a_2/b_2$, тј. количник

$$\frac{a_1\lambda_1+a_2\lambda_2}{b_1\lambda_1+b_2\lambda_2}.$$

Наиме, ако су $a_1$ и $a_2$ реални бројеви произвољног знака а $b_1$ и $b_2$, $\lambda_1$ и $\lambda_2$ реални позитивни бројеви тада медијана лежи у размаку између $a_1/b_1$ и $a_2/b_2$ [1].

Из релација

$$\left(\frac{r_i}{s_i}\right)^2=\frac{\lambda_i}{\mu^2} \qquad (i=1,\,2,\,3)$$

добија се њиховим сабирањем

$$3\left(\frac{r}{s}\right)^2=\frac{2p+q}{p+2q}\,,$$

где је

$$p=m_1^2+m_2^2+m_3^2,\;\; q=m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3\,.$$

Зато је

$$1<\frac{2p+q}{p+2q}<2$$

те је

$$1<\frac{r}{s}\sqrt{3}<\sqrt{2}$$

тј.

$$r/s=0{,}5774+\theta\cdot 0{,}2391 \qquad (0<\theta<1)\,.$$



За размаке у којима се налазе вредности за модуле убрзања Марковић је нашао

$$0{,}1924\cdot\frac{k\mu}{r^2}<\gamma<0{,}5443\cdot\frac{k\mu}{r^2}\,,$$

$$0{,}5774\cdot\frac{k\mu}{s^2}<\gamma<0{,}8165\cdot\frac{k\mu}{s^2}\,,$$

тј.

$$\gamma=(0{,}1924+\theta\cdot 0{,}3519)\cdot\frac{k\mu}{r^2}\,,$$

$$\gamma=(0{,}5774+\theta\cdot 0{,}2391)\cdot\frac{k\mu}{s^2}\,.$$

$$(0<\theta<1)$$

На крају треба напоменути да практична вредност напред наведених резултата Михаила Петровића, са становишта Небеске механике лежи у могућности њихове ограничене примене на примеру групе Тројанаца као конкретне реализације Лагранжеове конфигурације равностраног троугла у проблему трију тела. Непосредна примена ових резултата на астероидни проблем трију тела у случају конфигурације равностраног троугла не би могла доћи у обзир имајући у виду чињеницу да центри либрације $L_4$ и $L_5$ који представљају темена за два равнострана троугла са страном *SJ* (растојање Сунце—Јупитер) представљају сингуларитете овога проблема.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] М. Петровић, *Рачунање са бројним размацима*, Београд 1932.

[2] М. Петровић, *Примедба о проблему трију тела*, Гласник Југословенског професорског друштва, књ. XVI, св. 3, Београд 1935.

[3] M. Petrovitch, *Quelques contributions élémentaires récentes au probléme des trois corps*, Publication de l'Observatoire Astronomique de l'Université de Belgrade, Mémoirres III (1936).

[4] А. Билимовић и Б. Петронијевић, *Прилог решењу проблема трију тела*, Гласник Југословенског професорског друштва, књ. XV, св. 10 (1935).

[5] Б. Петронијевић, *Quelques théorèmes au problème des trois corps*, Гласник Југословенског професорског друштва, књ. XVI, св. 3 (1935).

[6] В. Жардецки, *A propos d'un théorème du problème des trois corps.* Гласник Југословенског професорског друштва, књ. XVI, св. 1(1935).

МАТЕМАТИЧКА БИБЛИОТЕКА, 38 (1968), 153—156.

Др *Радосав Ж. Ђорђевић*

# О ЈЕДНОМ ПЕТРОВИЋЕВОМ ОПЕРАТОРУ

М. Петровић у својој монографији [1] дефинисао је диференцијални оператор $\Delta_k$ који примењен на функцију $u(x)$ даје

$$\Delta_k(u) = \frac{1}{u}\,\frac{d^k u}{dx^k} = \frac{1}{u}\,D^k(u) \quad (k \text{ природан број}).$$

У истом раду М. Петровић је посматрао овај оператор као алгоритам који је могућно применити на решавање неких проблема геометрије, кинематике, механике, физике. Овај алгоритам М. Петровић је користио и за трансформације општих типова диференцијалних једначина у друге једначине које су или нижег реда или припадају класи интеграбилних једначина.

У својој докторској дисертацији [2] И. Бандић решавао је неодређене диференцијалне једначине које се јављају у теорији еластицитета, хидродинамици и електроници. Решења тих једначина изражавана су у облику парова функција које задовољавају једну унапред дату везу. Таква решења уведена су у литературу радовима Д. С. Митриновића (видети [3], [4], [5]). Међутим, И. Бандић примењујући Митриновићев метод користио се извесним особинама диференцијалног оператора М. Петровића $\Delta_k$. И. Бандић извео је у уводном делу своје дисертације неке нове особине оператора $\Delta_k$.

Посматрајући диференцијалне изразе

$$D^n\{S(u, v)\} = R\{u, v;\ D(u),\ D(v);\ \ldots;\ D^n(u),\ D^n(v)\};$$

$$\Delta_n\{S(u, v)\} = T\{u, v;\ \Delta_1(u),\ \Delta_1(v);\ \ldots;\ \Delta_n(u),\ \Delta_n(v)\},$$

где су $u$ и $v$ функције променљиве $x$, и $R$ и $T$ одговарајуће функције наведених аргумената и $S$ дата функција, Д. С. Митриновић је у свом раду [6] поставио следећи проблем:

*Одредити функције $u$ и $v$ за које важи једнакост*

$$R\{u,\ v;\ \Delta_1(u),\ \Delta_1(v);\ \ldots;\ \Delta_n(u),\ \Delta_n(v)\}$$
$$=T\{u,\ v;\ D(u),\ D(v);\ \ldots;\ D^n(u),\ D^n(v)\}.$$

У истом раду Д. С. Митриновић је решио овај проблем за $n=2$ и $n=3$.

Овде ћемо решити нешто општији проблем на који је у поменутом раду указао Митриновић. Проблем гласи:

*Нека су $u_1, u_2, \ldots, u_m$ функције променљиве $x$ и $S$ дата функција од $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Ако је*

$$D^n\{S(u_1, u_2, \ldots, u_m)\}=R\{u_1, u_2, \ldots, u_m;\ D(u_1),\ D(u_2),\ \ldots,$$
$$\ldots,\ D(u_m);\ \ldots;\ D^n(u_1),\ D^n(u_2),\ \ldots,\ D^n(u_m)\},$$

$$\Delta_n\{S(u_1, u_2, \ldots, u_m)\}=T\{u_1, u_2, \ldots, u_m;\ \Delta_1(u_1),\ \Delta_1(u_2),\ \ldots,$$
$$\ldots,\ \Delta_1(u_m);\ \ldots;\ \Delta_n(u_1),\ \Delta_n(u_2),\ \ldots,\ \Delta_n(u_m)\},$$

*одредити функције $u_1, u_2, \ldots, u_m$ тако да важи једнакост*

$$R\{u_1, u_2, \ldots, u_m;\ \Delta_1(u_1),\ \Delta_1(u_2),\ \ldots,\ \Delta_1(u_m);\tag{1}$$
$$\ldots,\ \Delta_n(u_1),\ \Delta_n(u_2),\ \ldots,\ \Delta_n(u_m)\}$$
$$=T\{u_1, u_2, \ldots, u_m;\ D(u_1),\ D(u_2),\ \ldots,\ D(u_m);$$
$$\ldots,\ D^n(u_1),\ D^n(u_2),\ \ldots,\ D^n(u_m)\}.$$

Решићемо овај проблем у случајевима $n=2$ и $n=3$.

За $n=2$ једнакост (1) постаје

$$\sum\left(1-\frac{S}{u_1}\right)u_1''\frac{\partial S}{\partial u_1}+\sum\left(1-\frac{S}{u_1^2}\right)u_1'^2\frac{\partial^2 S}{\partial u_1^2}\tag{2}$$
$$+2\sum\left(1-\frac{S}{u_1u_2}\right)u_1'u_2'\frac{\partial^2 S}{\partial u_1\partial u_2}=0,$$

где збирове на левој страни треба узети преко свих одговарајућих комбинација функција $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Ако ставимо

$$u_i=F_{i-1}(u_1)\qquad(i=2,\ 3,\ \ldots,\ m),\tag{3}$$



једначина (1) постаје

$$u_1''+G(u_1)u_1'^2=0,\tag{4}$$

где је $G$ одређена функција од $u_1$.

Према томе, за одређивање непознатих функција $u_2, u_3, \ldots, u_m$ претходно треба по $u_1$ решити диференцијалну једначину (4) а затим искористити једнакости (3).

Нека је сада $n=3$. Једначина (1) у том случају има облик

$$\sum\left(1-\frac{S}{u_1}\right)u_1'''\frac{\partial S}{\partial u_1}+3\sum\left(1-\frac{S}{u_1^2}\right)u_1''u_1'\frac{\partial^2 S}{\partial u_1^2}\tag{5}$$
$$+3\sum\left(1-\frac{S}{u_1u_2}\right)u_1''u_2'\frac{\partial^2 S}{\partial u_1\partial u_2}+3\sum\left(1-\frac{S}{u_1u_2}\right)u_1'u_2''\frac{\partial^2 S}{\partial u_1\partial u_2}$$
$$+3\sum\left(1-\frac{S}{u_1^2u_2}\right)u_1'^2u_2'\frac{\partial^3 S}{\partial u_1^2\partial u_2}+3\sum\left(1-\frac{S}{u_1u_2^2}\right)u_1'u_2'^2\frac{\partial^3 S}{\partial u_1\partial u_2^2}$$
$$+\sum\left(1-\frac{S}{u_1^3}\right)u_1'^3\frac{\partial^3 S}{\partial u_1^3}+6\sum\left(1-\frac{S}{u_1u_2u_3}\right)u_1'u_2'u_3'\frac{\partial^3 S}{\partial u_1\partial u_2\partial u_3}=0.$$

На основу једнакости (3), једначина (5) постаје

$$G_1(u_1)u_1'''+G_2(u_1)u_1''u_1'+G_3(u_1)u_1'^3=0,\tag{6}$$

где су $G_1$, $G_2$, $G_3$ одговарајуће функције аргумента $u_1$.

Ако у (6) ставимо

$$u_1'=p,\quad u_1''=p\frac{dp}{du_1},\quad u_1'''=p^2\frac{d^2p}{du_1^2}+p\left(\frac{dp}{du_1}\right)^2,$$

добијамо једначину

$$G_1(u_1)\left(p\frac{d^2p}{du_1^2}+\left(\frac{dp}{du_1}\right)^2\right)+G_2(u_1)\,p\frac{dp}{du_1}+G_3(u_1)\,p^2=0,$$

која сменом $p=\exp\left(\int z(u_1)\,du_1\right)$ постаје

$$G_1(u_1)z'+2G_1(u_1)z^2+G_2(u_1)z+G_3(u_1)=0.\tag{7}$$

Једначина (7) је Riccati-ева једначина по $z$.

Према томе, одређивање непознатих функција $u_1, u_2, \ldots, u_m$ своди се на решавање Riccati-eve диференцијалне једначине (7).

## ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Петровић, *Један диференцијални оператор и његове примене*, Београд 1936.

[2] И. Бандић, *Методе решавања неодређених диференцијалних једначина које се јављају у теорији еластицитета, хидродинамици и електроници*, Публикације Електротехничког факултета, серија: Математика и физика, № 24 (1959), 1—40.

[3] Д. С. Митриновић, *О диференцијалној једначини једној важној проблема теорије еластицитета*, Годишни зборник на филозофскиот факултет на Универзитет во Скопје, Природно-математички оддел, 3 (1950), 1—22.

[4] D. S. Mitrinović, *Sur une équation différentielle indéterminée intervenant dans un problème important de l'Elasticité*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 232 (1951), 681—683.

[5] D. S. Mitrinović, *Sur un procédé d'intégration d'une équation de Monge*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 232 (1951), 1334—1336.

[6] D. S. Mitrinović, *Sur un opérateur différentiel*, La Revue Scientifique, Paris, 89 (1951), 44.

МАТЕМАТИЧКА БИБЛИОТЕКА, 38 (1968), 157—160.

*Драгоје Тодоровић*

# ПОГЛЕДИ МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА НА МАТЕМАТИЧКУ НАСТАВУ НА УНИВЕРЗИТЕТУ

Познато је да Михаило Петровић није учио педагошке науке.* Његови педагошки погледи и његов методски поступак плод су угледања на професоре који су му предавали и резултат су сопственог искуства стеченог у наставном раду. Међутим, човеку изузетних способности, какве је имао Михаило Петровић, није било тешко ући у област педагошких наука уопште, као и решавати практична методска питања везана за наставу математике посебно.

Два документа која се налазе у Архиви Србије садрже погледе Михаила Петровића на методски поступак у настави математике на универзитету и његова схватања о суштини и карактеру саме универзитетске наставе.

У првом, датираном 19. маја 1912. године, писаном његовом руком, са његовим и Миланковићевим потписом, упућеном Савету Филозофског факултета, Михаило Петровић говори о преоптерећености професора математике а с тим у вези и његовој немогућности да уводи студенте у научни рад, јер, пише Петровић, „теориску математику, која је главни предмет у I научној групи, а споредан за више других група, предаје за све године један наставник, са 6 часова предавања, 2 часа вежбања и 1 часом семинарског рада". Затим Петровић наставља: „Савет ће лако увидети да је такав рад сасвим недовољан. Радећи сам, наставник је досад могао предавати само најпотребније елементе, немајући могућности да се од њих одмакне и да уведе слушаоце у коју од грана математике што се данас развијају, које садржавају актуелне проблеме, које су према томе

* Међутим, у школи École Normale Supérieure у Паризу Петровић је добио добро методско образовање. Ученици ове школе у то време две године су хоспитовали у средњим школама (Прим. Редакционог одбора).

најподесније земљиште за самосталан рад, а у које је немогућно ући док се добро не савладају елементарне партије.“

Развијајући даље своје погледе о потреби навикавања студената на самосталан рад и њиховог увођења у научне области математике, Михаило Петровић наставља: „Међутим, баш у тим областима математике, у које се данас не стиже улазити, огледа се систем научног рада и било би од највеће користи уводити слушаоце баш на том терену у самосталан рад, што је у једној науци, као што је математика, где је сваки део подлога другоме, немогућно учинити са садашњим програмом рада“.[1]

Ови захтеви представљају суштину погледа Михаила Петровића на једну страну универзитетске наставе — на њен задатак да оспособљава студенте за самосталан и научни рад.

Михаило Петровић није само тако говорио, он је тако поступао, тако радио. Захваљујући његовој несебичности, његовој подршци и помоћи младим и талентованим студентима, створен је при Београдском универзитету квалитетан кадар научника — математичара који је добио опште признање и стекао своје научно име познато као „Београдска математичка школа“.

У другом документу, Михаило Петровић износи своје погледе и захтеве за бољом методском спремом студената математике.

Кад је после Првог светског рата број студената на Београдском универзитету знатно порастао, повећане су и потребе за научним и наставним кадром. Као шеф катедре за теоријску математику, Михаило Петровић се нашао пред новим и веома сложеним задацима. Отварањем нових гимназија и већим приливом омладине у школе, наметала се потреба за бројнијим и квалитетнијим наставним кадром. Михаило Петровић је настојао да преко катедре за теоријску математику оспособи и што боље спреми наставни кадар за средње школе. Као дугогодишњи професор и као изасланик Министарства просвете, он је могао запазити који су квалитети потребни професору математике, које особине код њега треба развијати а које слабости одстрањивати. Неоспорно, он је био свестан чињенице колико

[1] Архив Србије, Београдски универзитет, Ф III, 61, 1912. година.



Савету Философског факултета.

За студенте I групе, који се спремају за наставнике Математике у нашим средњим школама, било би врло корисно да се што боље упуте у Математичку Дидактику, а нарочито у праксу предавања из Математике. Пошто је у изгледу да ће ти ученици, због недовољног броја наставника Математике, имати у току овога семестра, а можда и у току целе године, врло мало часова предавања, вежбања и семинара, било би корисно дати им 4–6 часова недељно из Математичке Дидактике.

Налазим да се за тај предмет не би могла катедра попунити ни редовним, ни ванредним професором, ни доцентом. С тога ми је част предложити, а по чл. 59. Опште Уредбе Универзитета, да се она попуни хонорарним наставником, који би могао бити један од дугогодишњих, опробаних и искусних наставника Математике у средњ. школи, који је показао успеха са својим ученицима.

Са своје стране, за то место предлажем г. Петра Тицу инспектора Мин. Просвете за средњошколску наставу, дугогодишњег професора Математике и Директора средње школе, за кога налазим да би поменути посао могао вршити са много успеха.

23. Новембра 1920.
Београд.

Мих. Петровић

Фотокопија Петровићевог захтева да се студентима математике предаје „математичка дидактика“ (*Архив Србије. Фил. факултет*, 2290, 1920).

професор математике може својим наставним поступком да омили ученицима овај предмет или да учини да он постане баук.

Зато Михаило Петровић, у својству професора универзитета, предлаже 29. новембра 1920. године, Савету Филозовског факултета следеће:

„За студенте I групе, који се спремају за наставнике математике у нашим средњим школама, било би врло корисно да се што боље упуте у математичку дидактику, а нарочито у пракси предавања из математике. Пошто је у изгледу да ће ти ученици, због недовољног броја наставника математике, имати у току овог семестра а можда и у току целе године, врло мало часова предавања, вежбања и семинара, било би корисно дати им 4—6 часова недељно из математичке дидактике“.[1]

Овај предлог Михаила Петровића представља његов поглед на другу страну универзитетске наставе — на неопходност оспособљавања студената за наставни рад. Применом овог његовог предлога створио би се такав наставни кадар који би у наставни поступак могао да унесе научне методе, такав наставни кадар који би умео да користи савремене наставне принципе и на тај начин побољша квалитет наставе математике у средњим школама. Тиме би се створио бољи и уједначенији наставни кадар за математику и избегле све слабости у настаном поступку које су често имале судбоносне последице за појединце па и читаве генерације.

Из ова два захтева Михаила Петровића излази да сам професор универзитета мора имати потребне услове који би му омогућили увођење студената у научни рад и који би се пре свега састојали у могућности индивидуалног прилажења студентима, откривању њихових склоности и развијању истих, као и сталном подстицању на самосталан рад. С друге стране, обезбедити увођење студената у педагошке науке и на тај начин спремити такав наставни кадар који ће своја знања предавати младим генерацијама на један јаснији, упрошћенији и систематизованији начин и тако створити веће интересовање за математику.

То су била нека од педагошких схватања Михаила Петровића. Као што се може запазити, он је и у овом случају својим предлозима ушао у саму срж проблема, овог пута проблема наставе математике на универзитету.

---

[1] Архив Србије, Филолошки факултет, бр. 2290, 1920. година.

МАТЕМАТИЧКА БИБЛИОТЕКА, 38 (1968), 161—196.

Др *Радосав Ж. Ђорђевић*
Др *Радован Р. Јанић*

# ИЗ НАСТАВНЕ ПРАКСЕ МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

Професор Д. С. Митриновић сугерирао нам је да припремимо за штампу текстове задатака са писмених испита даваних на дипломским испитима из теориске математике у периоду од 1921. до 1938. године.

Према сећању професора Т. Пејовића и Д. С. Митриновића, најчешће је на испиту давано по четири задатка. Међутим, у литографисаним материјалима[1], као и у личним забелешкама, које нам је ставио на располагање професор Митриновић, нисмо могли наћи све задатке из појединих испитних рокова из овог периода па чак ни задатке за читаве рокове.

Свакако да је највећи број ових задатака саставио сам Петровић, али су у предлагању задатака такође имали удела Н. Салтиков, Т. Пејовић и Ј. Карамата. По речима Т. Пејовића, све задатке из комплексних функција саставио је М. Петровић.

Треба подвући да је испит држан на крају четврте године студија. Пре тога није било никаквих провера знања и такође било је мало вежбања. У једном испитном року, после елиминаторног писменог испита, на усмени испит је излазило приближно 4—5 кандидата. Према казивању професора Митриновића тешкоћа испита је била првенствено у томе што је требало знати целокупну материју, а да уз то није било одређених индикација из којих ће области бити дати задаци на писменом испиту. Сам усмени испит није представљао тешкоћу и кандидати су обично добијали веће оцене на усменом него на писменом испиту (у диплому је посебно уношена оцена са писменог, а посебно са усменог испита). Кандидати који су на

---

[1] Б. П. Ђ е р а с и м о в и ћ, *Решења дипломских задатака из теоријске математике*, Београд 1930; Ф. Б а ш ч е л и ј а, *Решени дипломски задаци из теоријске математике*, Београд 1935; С. М. Н и к и т о в и ћ, *Решења дипломских задатака из теоријске математике*, Београд 1938.

писменом испиту добили оцену осам или више били су добри математичари.

## ЗАДАЦИ

*Октобар 1921.*

**1.** Које једначине петог степена $x^5-5x+n=0$, имају три реална и два имагинарна корена? Раздвојити у том случају реалне корене.

**2.** Израчунати површину ограничену луком криве

$$y=x^3-9x^2+15x+30$$

$x$-осом и максималном и минималном ординатом.

**3.** Одредити линије кривине површине $xy+z=0$.

**4.** Одредити реални и имагинарни део функције $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ при кретању тачке $z$ по кругу $|z|=1$.

*Октобар 1923.*

**1.** Одредити асимптоте криве $x^3-5xy^2+7=0$ и овлаш конструисати криву.

**2.** Шта се може рећи о реалним коренима једначине

$$x^5+ax+b=0$$

кад се тачка $M(a, b)$ креће?

**3.** Написати једначине тангенте и нормале криве $y=3x^{2x}$, и у тачкама максимума и минимума одредити полупречник кривине.

**4.** Интегралити диференцијалну једначину

$$x\log x\,dy-y\log y\,dx=0$$

и наћи сингуларитете њених партикуларних интеграла.

*Фебруар 1924.*

**1.** Наћи $n$-ти извод функције $F(x)=x^{n-1}\log(1+x)$ и показати да је он позитиван за све вредности $x>-1$. Наћи вредност $F^{(n)}(0)$.

**2.** Одредити све корене једначине $e^{3z}=1$ чији се модули налазе између 2 и 9.



**3.** Интегралити линеарну диференцијалну једначину

$$y''-3y'+2y=e^{-x}\cos 2x.$$

**4.** Дат је систем парабола које имају теме у координатном почетку а оса симетрије им је $x$-оса. Одредити систем кривих који дати систем парабола сече под углом од 45°.

*Јун 1924.*

**1.** Конструисати криву $y=\sin 2x+2\cos x$ у интервалу $(0, 2\pi)$. Одредити у том интервалу максимуме, минимуме и превојне тачке.

**2.** Одредити полупречник кривине у тачки $M(1, 2)$ оне криве која задовољава диференцијалну једначину $y'-y^2+x=0$ и пролази кроз тачку $M$.

**3.** Одредити општи интеграл диференцијалне једначине другога реда

$$y''+f(y)(y')^2+g(y)(y')^3=0,$$

где су $f(y)$ и $g(y)$ дате функције.

**4.** Када се у $z$-равни тачка $z=re^{\theta i}$ креће по Archimède-ovoj спирали $r=\theta$, по каквој ће се кривој у $w$-равни кретати тачка $w=1+z^2$?

*Фебруар 1925.*

**1.** Решити по $x$ једначину $\sum_{n=1}^{+\infty}(xi)^{ni}=A$, где је $A$ дати број. Испитати реалност решења.

**2.** Одредити на датом кругу тачку $M$ за коју ће површина описана обртањем лука $OM$ око пречника $OC$ бити једнака десетоструком логаритму апсцисе $OB$ тачке $M$.

**3.** Израчунати вредност одређеног интеграла

$$J=\int_a^b \frac{dx}{\rho},$$

11*

где је $\rho$ полупречник кривине једне криве линије у њеној тачки $M(x, y)$, знајући да тангента те криве у тачки $x=a$ гради са $x$-осом угао $\alpha$, а у тачки $x=b$ угао $\beta$.

**4.** Одредити модуо и аргумент функције $f(z)=e^{z^m}$ ($m$ цео позитиван број) и одредити границе којима ће тежити модуо када се $z$ бескрајно удаљава у разним правцима у $z$-равни. Колика је вредност криволинијског интеграла

$$J=\int \frac{e^{z^m}}{(z+i)^m}\,dz$$

узетог дуж елипсе са центром у $z=0$?

*Јун 1925.*

**1.** Решити графички једначину $e^{z^2}\log z+a=0$ и испитати како се мењају реални корени када се $a$ мења.

**2.** Одредити све реалне функције које су једнаке свом $n$-том изводу.

**3.** Израчунати криволинијски интеграл

$$J=\int \frac{e^{zi}}{1+z^2}\,dz$$

дуж контуре која се састоји од дужи $AB$ и полукруга над $AB$.

**4.** Наћи општи интеграл парцијалне једначине

$$x-xp-yq-\sqrt{x^2+y^2+z^2}=0.$$

*Фебруар 1926.*

**1.** Испитати облик кривих линија $ay=x^a$ ($a$ реалан параметар). Разликовати случајеве: $a<0$, $0<a\leqslant 1$ и $a>1$.

Наћи обвојницу тих кривих. Колико кривих пролази кроз тачку $(x_0, y_0)$ ако је $x_0>0$.

**2.** Решити једначину $e^{1/z}=Re^{\theta i}$ ($R$, $\theta$ дате константе). Показати да сва решења леже на кривој $x^2+y^2-x/\log R=0$ и да их у близини координатног почетка има бесконачно много.

Доказати да је $z=0$ есенцијални сингуларитет функције $e^{1/z}$.



**3.** На параболоиду $\dfrac{z}{\sqrt{3}}=x+\dfrac{y^2}{2}$ одредити све криве чије тангенте са $z$-осом заклапају сталан угао од 30°.

**4.** Дата је фамилија обртних параболоида $2az=x^2+y^2$ где је $a$ параметар. Одредити њихове ортогоналне трајекторије.

*Јун 1926.*

**1.** У једначини $x^4+ax^2+bx+1=0$ одредити коефицијенте $a$ и $b$ тако да једначина има

1° два двострука корена;

2° један троструки корен.

У оба случаја решити једначину.

**2.** Одредити асимптоте и екстреме криве $y^3=x^2(x-6)$ па затим нацртати криву.

**3.** Применом рачуна остатака израчунати одређени интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

**4.** Одредити површину код које је растојање пројекције ма које њене тачке $M$ на $Oxy$ раван до линије пресека тангентне равни у тачки $M$ са $Oxy$ равни стална величина.

*Окшобар 1926.*

**1.** Какве корене има једначина $x^5+mx+4=0$ с обзиром на параметар $m$?

**2.** Одредити једначине тангената криве

$$2x^2+5xy+8y^2-7x+y=0$$

повучених у крајевима пречника који пролази кроз координатни почетак.

**3.** Решити диференцијалну једначину

$$2x^2y'-4xy-y^2=0$$

и од интегралних кривих наћи ону која пролази кроз тачку (1,1). Наћи асимптоте ове партикуларне криве и конструисати је.

**4.** За које ће вредности коефицијената $a$ и $b$ интеграл функције

$$f(z) = \frac{ae^z + be^{2z} + e^{3z}}{z^2 - 3z + 2}$$

бити униформна функција променљиве $z$?

*Фебруар 1927.*

**1.** Које услове треба да задовољавају коефицијенти једначине

$$x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0$$

да би се подесном сменом $x = t + h$ свела на биномну једначину $t^5 = A$.

Дати један пример такве једначине чији су коефицијенти цели бројеви па затим решити ту једначину.

**2.** Наћи геометријско место пројекција темена параболе $y^2 = 2x$ на њеним тангентама.

**3.** Наћи општи интеграл једначине

$$y''' - y'' - y' + y = e^{ax},$$

где је $a$ константа различита од 1. Одредити онај партикуларан интеграл за који је $y''(0) = y'(0) = y(0) = 0$.

**4.** Применом рачуна остатака израчунати одређени интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\, dx.$$

*Јун 1927.*

**1.** Кроз једну покретну тачку $M(a, b)$ на параболи $y^2 = x$ повући праву $d$ управну на правој $MO$. Наћи обвојницу правих $d$.

**2.** Формирати диференцијалну једначину кругова који се додирују у једној истој тачки и одредити ортогоналне трајекторије ових кругова.



**3.** Наћи општи интеграл парцијалне једначине

$$(x+y)\frac{\partial u}{\partial x} + (y+z)\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 1\,.$$

**4.** Које услове треба да задовољавају функције $f(x, y)$ и $g(x, y)$ да би функција

$$f(x, y) + i\,(f(x, y) + g(x, y))$$

била аналитичка? Када је то случај интегралити диференцијалну једначину

$$y' = f(x, y) + i\,(f(x, y) + g(x, y))\,.$$

*Октобар 1927.*

**1.** Одредити екстреме функције $y = a \ln\left(\cos \dfrac{x}{a}\right)$ ($a$ позитивна константа). Одредити затим асимптоте, полупречник кривине у произвољној тачки, дужину лука од координатног почетка до произвољне тачке. На крају конструисати график дате функције.

**2.** Из сваке тачке равни могу се повући четири нормале на елипсу. Доказати да су бар две од тих нормала реалне.

**3.** Интегралити диференцијалну једначину

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x)$$

и наћи онај партикуларан интеграл који је холоморфан у близини почетка.

**4.** Нека је $f(z) = \prod_{k=0}^{+\infty} u_k$, где је $u_k = e^{2\pi i z k}$.

За које се вредности од $z$ ова функција може развити у конвергентан ред уређен по степенима од $z$?

*Фебруар 1928.*

**1.** Како се мењају корени једначине $t^5 + xt + y = 0$ када се тачка $M(x, y)$ креће у $Oxy$ равни.

**2.** Дата је крива једначином $3xy^2 = x^3 - a^3$, где је $a$ променљив параметар. Наћи асимптоте ових кривих, геометријско место екстрема и ортогоналне трајекторије датих кривих.

**3.** Наћи општи интеграл парцијалне једначине

$$p+q=e^z \sin(x+y)$$

и одредити интегралну површину која пролази кроз криву

$$x+y=0, \quad e^z \cos^2 x=1.$$

Одредити линије кривине добијене површи.

**4.** По којој ће се кривој у $w$-равни кретати тачка

$$w=f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

када се тачка $z$ креће по делу круга $|z|=1$ који лежи у првом квадранту?

*Јун 1928.*

**1.** Решити систем

$$x^2+y^2+1,$$

$$b^2x^2-2abxy+a^2y^2+2ax+2by=1,$$

при чему је $a^2+b^2=1$.

Нацртати криве које одређују једначине датог система.

**2.** Помоћу рекурентне формуле наћи вредност одређеног интеграла

$$J_n=\int_{-1}^{+1} x^n \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx,$$

где је $n$ природан број. Разликовати случајеве када је $n$ парно и када је $n$ непарно.

**3.** Одредити криву линију код које је пројекција полупречника кривине на $x$-осу стална величина. Одредити једну интеграциону константу да крива пролази кроз координатни почетак.

**4.** Нека је $f(z)$ једна рационална функција, холоморфна дуж позитивног дела реалне осе и која тежи нули кад $z$ бескрајно расте у позитивном правцу.



Нека је $a$ позитиван број мањи од 1. Опишимо око почетка два круга ($\gamma$) и ($\Gamma$) полупречника $r$ и $R$ таква да се сви полови функције $f(z)$ налазе у прстенастој површини.

1° Применити Cauchy-еву теорему на криволинијски интеграл

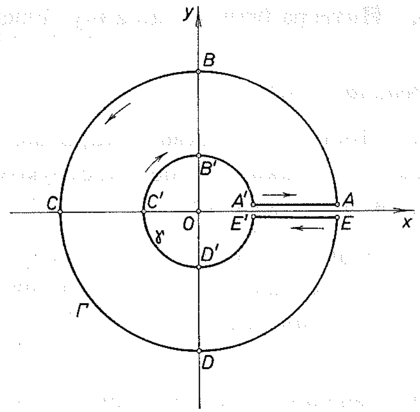
$$J=\int z^{a-1} f(z)\,dz$$

узет дуж контуре (види сл. 1)

$$A'ABCDEE'D'C'B'A'.$$

2° Пустивши да полупречник $r$ тежи нули, а полупречник $R$ бескрајно расте, израчунати вредност интеграла

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} f(x)\,dx.$$




Сл. 1

3° Применити све то на случај када је

$$f(z)=\frac{1}{1+z}.$$

*Октобар 1928.*

**1.** Наћи екстреме и превојне тачке криве $y=e^{-x}\sin x$ и конструисати криву. Функцију $f(x)=e^{-x}\sin x$ развити у Maclaurin-ов ред.

**2.** Какав услов морају испуњавати параметри $a$ и $b$ да би криве

$$y=x^2+1 \quad \text{и} \quad xy=ax+by$$

имале додир првог реда? Одредити геометријско место средишта хипербола $xy=ax+by$ при чему $a$ и $b$ задовољавају горе нађени услов.

**3.** У какав се ред може развити онај интеграл диференцијалне једначине

$$2xy'=y^2-y$$

који задовољава услов $y(a)=b$. Одредити природу тачке $x=0$, све коефицијенте реда и област његове употребљивости.

**4.** Интегралити парцијалну једначину $p_1+x_1p_2^2+x_2p_3=0$.

*Фебруар 1929.*

**1.** Постоје ли такви логаритамски системи у којима има бројева $x$ једнаких своме двоструком логаритму? Који су то системи и бројеви $x$?

**2.** Који полином $P(x)$ има ту особину да је извод функције $P(x)e^x$ једнак $x^me^x$? Означивши са $x_1, x_2, \ldots$ нуле тога полинома, израчунати

$$x_1^3+x_2^3+\cdots$$

**3.** Одредити криву другог степена која пролази кроз тачку $(1,1)$ и има два пара коњугованих дијаметара

$$\text{(I)}\qquad 2x-3y=0,\quad x+2y=0;$$

$$\text{(II)}\qquad x-y=0,\quad 3x-5y=0.$$

**4.** Одредити онај партикуларан интеграл диференцијалне једначине

$$\frac{dy}{dz}+2zy+Ae^{z^2+Az}y^2=0$$

($A$ комплексна константа са позитивним реалним и имагинарним делом) који за $z=0$ добија вредност $y=\infty$.

Показати да тај интеграл $y$ има бесконачно много полова и да сви ови леже на једној правој која пролази кроз почетак у $z$-равни.

Израчунати криволинијски интеграл

$$J=\int_C y\,dz,$$

узет дуж кружног квадранта $C$ чији је полупречник $R$. Шта бива од тога интеграла када $R\to+\infty$?



*Јун 1929.*

**1.** Одредити криву другог степена која пролази кроз тачку $(1,1)$, додирује $x$-осу у тачки $(4,0)$ а $y$-осу у тачки $(0,3)$. Добијену криву свести на канонични облик.

**2.** Тачка $M$ лежи на кривој $y=\operatorname{ch} x$. Одредити тачку $M$ тако да је

$$OA+PM=OP+\text{лук } AM$$

($P$ — пројекција тачке $M$ на $x$-осу, $A$ — пресек дате криве са $y$-осом) и одредити границе у којима се налази апсциса тачке $M$.

**3.** Дата је диференцијална једначина

$$(x^2+a)\,y''-2xy'-(bx^2+cx+d)\,y=0\,.$$

Одредити коефицијенте $b, c, d$ тако да једначина има партикуларни интеграл облика $y=e^{mx}$. За те вредности констаната наћи општи интеграл дате једначине.

**4.** Дата је елипса са великом полуосом $a$ и нумеричким ексцентрицитетом $e$.

Наћи површину обртног елипсоида добијеног кад се дата елипса обрће око своје осе симетрије на којој се налазе жиже. Сматрајући ту површину као функцију од $e$ и стављајући $e=z$, испитати ту функцију.

1° Наћи сингуларитете те функције и вредност за $z=0$.

2° Развити ову функцију у ред по степенима од $z$.

*Октобар 1929.*

**1.** Одредити максимуме и минимуме функције

$$y=a\sin\frac{x}{a}\qquad (a\geqslant 0)$$

и полупречник кривине у тачкама максимума и минимума, кад $x$ варира у интервалу $(0, a\pi)$.

Израчунати запремину обртног тела које се добија кад се површина ограничена датом кривом, $x$-осом и правом $x=a\pi$ обрће око $x$-осе.

На крају, сматрајући $a$ као променљив параметар, одредити обвојницу датих кривих.

**2.** Саставити једначину параболе која додирује $x$-осу у тачки $(4, 0)$, а $y$-осу у тачки $(0, 3)$.

**3.** Одредити услове под којима једначина

$$x^{2n+1}+ax+b^2=0$$

има два реална корена.

**4.** Интегралити диференцијалну једначину

$$\frac{dy}{dx}=(e^y-1)\operatorname{cotg} x.$$

За које вредности константе интеграл остаје реална функција за све реалне вредности променљиве $x$, и испитати онај интеграл за који је таква константа највећа. Наћи све његове сингуларитете и испитати како тај интеграл варира кад $x$ описује затворену путању која опкољава $1, 2, \ldots, n$ узастопних сингуларитета.

*Фебруар 1930.*

**1.** Дате су две тачке $(1, 1)$ и $(-1, 1)$. Одредити једначину парабола које пролазе кроз дате тачке и додирују $x$-осу. Израчунати величину површине ограничене једном од ових парабола и отсечком праве $y=1$, и показати да је она иста за све ове параболе.

**2.** Одредити криву $y=f(x)$ код које пројекција ординате на тангенту у свакој тачки има сталну дужину 1.

Одредити ону интегралну криву која пролази кроз тачку $(0,1)$.

*Јун 1930.*

**1.** Дат је ред $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

1° Одредити његов полупречник конвергенције.



2° Одредити израз за $f'(x)$ у коначном облику, па из њега извести израз за саму функцију $f(x)$.

3° За $x=1/2$ сабрати довољан број чланова па да $f(x)$ буде израчунато са грешком мањом од $10^{-3}$.

**2.** Дата је права $d$ у равни $Oxy$ која је паралелна $x$-оси на растојању $2a$ (у правоуглом координатном систему у простору). Из тачке $M$ у простору повучене су нормале $MP$ на праву $d$ и $MQ$ на $z$-осу.

Наћи површину чија тангентна раван у тачки $M$ пролази кроз средину дужи која спаја подножја тих нормала.

**3.** Одредити тачке пресека дате параболе са њеном еволутом.

**4.** Одредити функцију $g(u)$, где је $u=x^2+y^2$, тако да $g(u)$ буде реални део једне аналитичке функције. Међу таквим функцијама која је то, која се, кад $z$ опише затворену путању око почетка, повећава за јединицу.

*Октобар 1931.*

**1.** Дата је Riccati-ева једначина

$$(x-1)\,y'-y^2+xy=x-1.$$

1° Наћи све полиноме првог степена који су партикуларни интеграли дате једначине.

2° Знајући тако партикуларне интеграле одредити њен општи интеграл.

3° Доказати да све криве представљене општим интегралом пролазе кроз тачку $M(1, 1)$. Изузетак је само једна крива. Наћи партикуларни интеграл који одговара тој кривој, испитати његов ток и одредити му асимптоте.

**2.** Дата је крива $\rho=f(\theta)$. Доказати:

1° Дата крива је спирала ако је $f'(\theta)$ стално позитивно и ако $f(\theta)$ постаје бесконачно велико за $\theta=\infty$. Нацртати ту спиралу.

2° Количник $\dfrac{\widehat{AM}}{AM}$ тежи једној граници када $\theta$ неограничено расте. Одредити ту границу ако је $\lim\limits_{\theta\to+\infty}\dfrac{f(\theta)}{f'(\theta)}=\lambda$.

3° Уверити се у горње резоновање на примеру $\rho = \theta e^{a\theta}$, где је $a$ позитивна константа.

**3.** Дата је парабола $y^2 = 2x$. Одредити геометријско место центара кругова који имају особину да су тетиве заједничке за параболу и било који круг, паралелне или управне међу собом.

**4.** Доказати да интеграл

$$J(a) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{az}}{z^2} dz$$

узет дуж праве $x = c\,(c > 0)$ од $-\infty$ до $+\infty$ има смисла за све реалне вредности параметра $a$ и израчунати његову вредност за $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$.

*Фебруар 1932.*

**1.** Дата је диференцијална једначина

$$y' \cos x + 3\,y \sin x = 4 \sin x + 2 \sin^3 x.$$

1° Одредити општи интеграл дате једначине.

2° Скицирати графике интегралних кривих и одредити тачке које су заједничке за све интегралне криве.

3° Одредити величину површине ограничене произвољном интегралном кривом, правама $x = k\pi$ и $x = (k+1)\pi$ ($k$ ненегативан цео број) и $x$-осом. Да ли тражена површина зависи од интеграционе константе.

**2.** Дата је парцијална једначина

$$px + qy = 2z - b(x+y) - 2a.$$

1° Одредити општи интеграл ове једначине.

2° У општем интегралу одредити произвољну функцију тако да добивена површина пролази кроз криву

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = a + d + b(\cos t + \sin t),$$

где је $t$ реалан параметар.

3° Доказати да је пресек тако добијене површине са равни $Oxy$ крива другог степена, а затим одредити положај њених главних оса.



**3.** Дата је права

(1) $$qu^p x - pu^q y - b = 0 \quad (0 < q < p).$$

1° Наћи обвојницу тих правих сматрајући $u$ као променљив параметар и конструисати је.

2° Сматрајући у (1) $u$ као непознату а $x$ и $y$ као параметре, видети у каквој вези стоји обвојница са коренима једначине (1).

**4.** Дата је функција

$$f(z) = \sqrt{\frac{2z-1}{z+1}}\,.$$

1° Колико вредности има та функција у макојим тачкама? Који су сингуларитети и каква је тачка $z = \infty$?

2° Помоћу рачуна остатака израчунати интеграл

$$J = \int_C f(z) \frac{dz}{z}$$

дуж круга $|z| = 2$.

3° Одредити неколико првих чланова развитка у ред функције $f(z)$ у околини тачке $z = \infty$ и одредити полупречник конвергенције тог реда.

*Март 1932.*

**1.** Дата је диференцијална једначина $y' = y\sqrt{1-y^2}$.

1° Одредити општи интеграл ове једначине и показати да се партикуларни интеграл, који за $x = 0$ постаје $y = 1$, може представити у облику

$$x = \log \operatorname{tg} \frac{t}{2}, \quad y = \sin t.$$

2° Конструисати криву представљену овим партикуларним интегралом, израчунати величину површине између те криве, координатних оса и праве $x = a$. Чему тежи та површина када $a$ тежи бесконачности.

**2.** Дата је крива $x^2 - 3xy + 4y^2 - 5x + 4y = 0$.

Наћи дужине нормала у теменима пречника који пролазе кроз координатни почетак. Одредити облик криве.

**3.** Наћи општи облик оне аналитичке функције $f(z)=f(x+iy)$ чији је реални део нека функција од $t\,(=x+y)$. Ако је $f(0)>0$, $f'(0)$ је у четвртом квадранту равни $f(z)$, у ком се квадранту налазе сингуларитети функције $\dfrac{1}{f(z)}$?

**4.** Дата је парцијална једначина $p^2+q^2+z-xp-yq=0$.

Наћи њен потпуни и сингуларни интеграл као и Cauchy-ев интеграл који за $x=0$ постаје $z=y^k$, за случај $k=1$, $k=2$.

*Јун 1932.*

**1.** Одредити асимптотске линије површине $z=y\sin x$.

Посматрати пројекције тих асимптотских линија на $Oxy$ раван, испитати њихов ток и конструисати их за

$$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ +\frac{\pi}{2}\right).$$

Под којим углом ове криве секу $y$-осу?

**2.** Израчунати двојни интеграл

$$\iint\limits_D \frac{1}{x+y}\,dx\,dy,$$

где је $D$ троугао ограничен правама $x=1$, $y=0$, $x-y=a$ $(0<a<1)$.

Чему тежи вредност овог интеграла када $a\to 0$.

**3.** Дата је површина $z=\left|\dfrac{u}{u-1}\right|^2$, $u=x+iy$.

1° Одредити ниво линије те површине. Испитати природу тих линија за разне вредности тих висина и конструисати их.

2° Посматрати праве које су нормалне на $x$-оси и пролазе кроз тачку $(1,0,0)$, и одредити њихове продоре са посматраном површином. Дискутовати број продора према положају тих правих.

**4.** Ако је $f(z)=\dfrac{z}{z-1}$, испитати сингуларитете функција: $f(z)$, $e^{f(z)}$, $\log f(z)$.

Каква је за њих тачка $z=\infty$?



*Октобар 1932.*

**1.** Одредити општу аналитичку функцију чији је реални део нека функција од $y/x$. За које је вредности $z$ та функција реална?

*Фебруар 1933.*

**1.** Дата је фамилија правих

$$x\sin t-y\cos t-f(t)=0,$$

где је $t$ реалан параметар.

1° Одредити једначину обвојнице ових правих.

2° Нека је $M(x,y)$ тачка додира произвољне праве дате фамилије и обвојнице, $R$ полупречник кривине обвојнице у тој тачки. Формирати диференцијалну једначину коју треба да задовољава функција $f$, да би дужина $OM$ била једнака полупречнику $R$.

3° Добијену диференцијалну једначину трансформисати у једначину код које се промењливе могу раздвојити.

**2.** Нека је у кругу $|z|=\dfrac{1}{2}$ функција $f(z)$ аналитичка.

Посматрати интеграл

$$\varphi(n)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)}{z^n(1-z)}\,dz$$

узет дуж контуре $C\left(\text{садржане у кругу } |z|=\dfrac{1}{2}\right)$ која обухвата тачку $z=0$.

1° Ако је за свако $n$ функција $\varphi$ позната, одредити $f(z)$ у облику Maclaurin-овог реда и дати услове које мора задовољавати функција $\varphi$ да би $f(z)$ била холоморфна у посматраном кругу.

2° За случај када је $\varphi(n)=\dfrac{1}{n}$ одредити $f(z)$ и њене сингуларитете.

3° Како у том случају гласи закон мултиформности?

*Март 1933.*

**1.** Одредити криву $C$ код које је $R=\sin 2\alpha$ у свакој тачки $M(x, y)$, где је $\alpha$ угао који заклапа тангента у тачки $M$ са $x$-осом, док је $R$ полупречник кривине у тој тачки.

**2.** Дата је парцијална једначина

$$z+px-qy=\alpha pq \qquad (\alpha=\text{const}).$$

1° Одредити потпуни интеграл дате једначине.

2° Одредити произвољне константе тако да пресеци површина са сваком од координатних равни буду праве и нацртати их.

*Јун 1933.*

**1.** Одредити криву линију код које је у свакој тачки $M(x, y)$ полупречник кривине $R$ пропорционалан одсечку $N$ нормале у тачки $M$између тачке $M$ и $y$-осе, тј. $R=aN$.

1° Испитати када се интеграл добијене диференцијалне једначине може изразити у коначном облику.

2° За случај $a=2$, конструисати криву која пролази кроз координатни почетак и чији је извод у тачки $x=1$ бесконачан.

**2.** Одредити општу аналитичку функцију $f(z)$ чији реални део има облик

$$P(x, y)=\varphi(x+y)+\psi(x-y).$$

Одредити $f(z)$ тако да интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^2-1}\,dz$$

узет дуж круга $|z-p|=p$ буде једнак 0 или 1, према томе да ли је $p<0$ или $p>0$.

**3.** Наћи решење парцијалне једначине

$$2z(yp+a^2xq)+a^2x^2+y^2=0$$

у облику површине која пролази кроз праву линију

$$y=ax+a, \quad z=\sqrt{a}\,x.$$



Какве се површине добијају када параметар $a$ узима позитивне и негативне вредности, а нарочито када су те површине обртне?

*Октобар 1933.*

**1.** Дата је фамилија кривих $(x^2+y^2)^2=2a(x^2-y^2)$, где је $a$ промењљив параметар.

1° Образовати диференцијалну једначину ових кривих.

2° Одредити ортогоналне трајекторије датих кривих.

3° Нека је $\rho=OM$ потег тачке $M(\rho, \theta)$ посматране криве, $\theta$ угао који заклапа потег са поларном осом $Ox$, а $\alpha$ угао који заклапа тангента у $M$ са поларном осом $Ox$. Доказати да је у свакој тачки $\alpha+\dfrac{\pi}{2}=3\theta$.

**2.** Одредити општу аналитичку функцију $f(z)$ чији реални део има облик

$$P(x, y)=\varphi(x^2-y^2).$$

Одредити затим функцију $F(z)$ задату криволинијским интегралом

$$F(z)=\int_0^z \{f(z)-f(0)\}\,dz.$$

Колика је вредност интеграла

$$J(a)=\int_C \frac{z^2}{F(z)-F(1)}\,dz,$$

који је узет дуж круга са центром у тачки $a$ и полупречника 2. Одредити $J(a)$ за све положаје тачке $a$ у комплексној равни.

**3.** Одредити ону површину чија једначина задовољава парцијалну једначину

$$yp-xq=2xy$$

и која сече раван $Oyz$ по кривој чија је једначина

$$z=y^4-\frac{1}{2}y^2+2\sqrt{2}\,my+4.$$

Одредити затим пресеке ове површине са равни $Oxy$ и одредити коефицијент $m$ тако да двострука тачка тога пресека буде на симетрали угла координатног система $Oxy$.

*Март 1934.*

**1.** Дата је површина $z = x \sin y$.

1° Одредити асимптотске линије на тој површини и одредити угао под којим оне секу $x$-осу.

2° Конструисати пројекције нађених асимптотских линија у равни $Oxy$ и показати да кроз једну тачку $M$ на $x$-оси пролази само једна крива.

3° Одредити полупречник кривине у тачки $M$ на $x$-оси и видети како он варира када се $M$ креће по тој оси.

**2.** Конструисати криву дату у параметарском облику

$$x = \frac{1}{t(1-t)}, \quad y = 1 + t + t^2.$$

Одредити размак у коме се налази вредност $\lambda$ за коју права $y = \lambda x$ не сече дату криву. Доказати да за све вредности $\lambda$ из тога размака једначину $y = \lambda x$ задовољавају четири комплексне вредности параметра $t$ и израчунати реалне и имагинарне делове тих вредности.

**3.** Ако је аналитичка функција $f(z)$ дата редом

$$f(z) = \frac{z}{1\cdot 2} + \frac{z^2}{2\cdot 3} + \frac{z^3}{3\cdot 4} + \cdots,$$

који су сингуларитети свих грана функција

$$f'(z), \; f(z) \text{ и } \int_0^z f(z)\,dz\,?$$

*Јун 1934.*

**1.** Дата је парцијална једначина $p + (1+z)^{4/3} q = 0$.

1° Одредити њен Cauchy-ев интеграл који за $x = 0$ узима вредност $z = \sqrt{-y}$.



2° Сматрајући у овом интегралу величину $z$ као параметар, одредити и конструисати обвојницу овако добијене фамилије кривих у равни.

3° Израчунати површину која је ограничена делом криве лево од $y$-осе, њеном асимптотом и $y$-осом.

4° У колико тачака сече крива $y = \alpha x^3$ посматрану обвојницу? Шта бива када је $\alpha = \dfrac{4}{27}$?

*Октобар 1934.*

**1.** Коју контуру описује тачка $w = z^2$ када тачка $z = x + iy$ описује правоугаоник чија су темена у тачкама

$$z = \pm\frac{3}{4} + iy, \quad z = x \pm \frac{4}{5}\,i\,.$$

Ако су $a_1$ и $a_2$ они корени једначине $z^4 = 1$ који се налазе у унутрашњости те контуре, одредити за које вредности променљиве $z$ интеграл

$$J(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(t - a_1 z)(t - a_2 z)}\,dt$$

има одређену и коначну вредност. Израчунати ту вредност применом рачуна остатака у случају када је реални део од $z$ различит од нуле, тј. $\operatorname{Re} z \neq 0$.

**2.** Одредити онај интеграл парцијалне једначине

$$2x^2yp - q = 2xyz\,,$$

који за $y = 0$ постаје $z = x + 1$.

1° Одредити пројекције линија највећег нагиба тако добијене површине.

2° Конструисати ону криву добијене фамилије кривих, која има сингуларну тачку, и геометријско место превојних тачака те фамилије кривих.

3° Да ли је површина ограничена $x$-осом и ближом граном ма које од тих кривих коначна?

*Март 1935.*

**1.** На дату криву $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, где је $t$ променљив параметар, повући тангенту у тачки $M(x, y)$ и кроз тачке пресека ове тангенте са координатним осама $Ox$ и $Oy$ повући нормале на координатне осе до њиховог пресека $N$.

Одредити једначину геометријског места тачака $N$ када се тачка $M$ креће по датој кривој.

1° Одредити површину између лука криве, који лежи у првом квадранту, његових асимптота и праве $x=x_0$. Колика је ова површина ако $x_0$ неограничено расте?

2° Ако са $J_k$ означимо вредности ордината траженог геометријског места тачака које одговарају вредностима параметра $t=t_k=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{k}$, за $k=2, 3, \ldots$, испитати да ли ред чији је општи члан $u_n=J_n-b$ конвергира?

**2.** Конструисати криву чија је једначина

$$y=e^{2x}-\sqrt{e^{4x}-2pe^x+3} \qquad (p \text{ реалан параметар}).$$

Елиминацијом експоненцијалне функције одредити алгебарску једначину чији су корени максималне и минималне вредности дате криве. Дискутовати ову једначину у вези са датом кривом.

Испитати шта овој кривој одговара у случају када алгебарска једначина има један двоструки корен.

**3.** Као функцију променљиве $x$ одредити размак у коме ће се налазити онај партикуларни интеграл једначине

$$\frac{dy}{dx}=\lambda\,\frac{e^{-y^2}}{1+x^2}+\frac{1}{x}$$

који постаје једнак нули за $x=1$.

Коју вредност треба узети за $\lambda$ да дужина тог размака не буде већа од два, за свако $x$ од 1 до 2?

*Јун 1935.*

**1.** Дата је фамилија правих

$$y=ax+a^3,$$

где је $a$ параметар.



1° Одредити обвојницу ових правих и конструисати је.

2° Нека је $M$ тачка на обвојници и нека коефицијент правца тангенте обвојнице у тој тачки има вредност један. Одредити дужину лука $OM$ и површину ограничену луком $OM$ и тангентама повученим у тачкама $O$ и $M$.

**2.** Одредити алгебарску једначину другог степена која за корене има апсцисе оних тачака $M_1$ и $M_2$ криве

$$y=x^3+ax^2+bx+c$$

које леже симетрично према симетрали првог квадранта.

Колико има таквих парова тачака $M_1$ и $M_2$?

**3.** Дата је линеарна парцијална једначина

$$x(yp+xq)+yz=0.$$

Из општег интеграла ове једначине одредити све врсте површина другог реда које овај интеграл може дати.

**4.** Нека је $C$ круг $|t|=3$ и $f(t)$ функција холоморфна за $|t|\leqslant 3$. Израчунати

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(tz)}{\sin(t+z)-\sin(t-z)}\,dt.$$

Колико је од координатног почетка удаљен најближи сингуларитет функције $\cos 2z\cdot F(z)$, ако је $r$ полупречник конвергенције развитка функције $f(z)$ у Maclaurin-ов ред?

*Октобар 1935.*

**1.** Дата је Riccati-ева једначина

$$(x-1)\,y'-(y-1)(y-x+1)=0.$$

1° Наћи све полиноме првог степена који представљају интеграле дате једначине и помоћу њих образовати општи интеграл $y=f(x, C)$.

**2.** Графички испитати број корена једначине $Ce^x+x=0$.

За које вредности $C$ ова једначина има двоструки корен?

**3.** Ако је $f(x, C)$ општи интеграл Riccati-еве диференцијалне једначине

$$(x-1)\, y' - (y-1)(y-x+1) = 0,$$

сматрајући $x$ као комплексну променљиву одредити онај партикуларни интеграл који у тачки $x = \pi i$ има пол првог реда. У том случају наћи вредност интеграла

$$\int f(x, C)\, dx$$

дуж круга $|x-(2+3i)| = 6$.

*Март 1936.*

**1.** Дата је површина $zx^2 - ay^2 = 0$ ($a = \text{const}$).

1° Одредити једначине асимптотских линија ове површине.

2° Конструисати пројекције ових линија на раван $Oxy$.

3° Израчунати површину дела равни $Oxy$ који је ограничен асимптотским линијама.

**2.** Дата је алгебарска једначина $z^5 - 16z + 1 = 0$.

Одредити приближан положај њених комплексних нула применом Rouché-овог става, поделивши је претходно са $z$.

У коме се размаку налазе њени реални корени?

**3.** На којој кривој треба да се налази тачка $(a, b)$ да би партикуларни интеграл диференцијалне једначине

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}\, y^3 + \frac{bx}{1+x^2}\, y + (2a^2 - 3b - 1)\, e^x,$$

који је једнак 0 за $x = 0$, био идентички једнак нули.

Какве сингуларитете има у том случају општи интеграл $y$ те једначине, према разним положајима тачке $(a, b)$.

**4.** Наћи Cauchy-ев интеграл парцијалне једначине

$$xp + yq = pq$$

који за $x = 0$ има вредност $z = y^2$.

Испитати геометријски облик одговарајуће површине.



*Јун 1936.*

**1.** Одредити тачке пресека кривих другог степена

$$(x-y)^2 + 3(x+y) = 10, \quad x^2 + y^2 + 4xy - 6(x+y) = -5.$$

**2.** Испитати ток и конструисати криву чија је једначина

$$y + x^2 y^2 - 1 = 0.$$

**3.** Израчунати збир

$$\sum_{k=0}^{n} a_k,$$

где су $a_k$ комплексни бројеви који се сви налазе на кругу полупречника 1, а аргументи су им $k\alpha$.

Из овога извести образац за збир $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin k\alpha$, а на основу овог последњег збира израчунати збир првих $n$ природних бројева.

*Октобар 1936.*

**1.** Испитати број и положај реалних корена једначине

$$x^6 + x - 1 = 0$$

и доказати да се сви корени ове једначине налазе у прстену између кругова са центром у координатном почетку и полупречника једнаких апсолутним вредностима најмањег и највећег реалног корена.

**2.** Ако је $M$ произвољна тачка криве, $P$ њена пројекција на $x$-осу, $T$ тачка пресека тангенте криве у тачки $M$ са $y$-осом, одредити све криве које имају особину да је површина трапеза $OPMT$ једнака половини квадрата ординате тачке $M$.

Нацртати те криве.

Има ли међу њима правих?

**3.** Одредити општи облик свих целих функција нулте и прве врсте чије су нуле квадрати нула функције

$$f(z) = \int_0^z \operatorname{tg}(t-a)\, dt \qquad (a = \text{const}).$$

**4.** Одредити и геометријски протумачити сингуларни интеграл парцијалне једначине $z = xp + yq - p^2 q$.

*Фебруар 1937.*

**1.** Дата је површина другог реда

$$z^2 + x^2 + y^2 - 2axz = 0 \qquad (a > 1).$$

Колико има равни које пролазе кроз праву $x = 0$, $z = C$, а дату површину пресецају по круговима. Одредити углове које те равни заклапају међу собом.

**2.** Дата је једначина $x^4 - x^2 - ax - b = 0$.

Испитати графички број и приближан положај реалних корена дате једначине за разне вредности параметара $a$ и $b$.

Које услове треба да испуњавају параметри $a$ и $b$ да би једначина имала један двоструки, два двострука или један троструки корен. У ова три последња случаја решити једначину.

**3.** Дата је фамилија правих линија једначином

$$x \cos t + y \sin t - f(t) = 0,$$

где је $t$ параметар. Нека је $M$ тачка додира ових правих са њиховом обвојницом.

Одредити функцију $f(t)$ тако да права $OM$ са $x$-осом заклапа угао $\frac{3t}{2}$.

Из тачке $O$ повучена је нормала $ON$ на дату праву. Одредити геометријско место тачака $N$ и конструисати га.

**4.** Свести одређени интеграл

$$J = \int_0^{2\pi} e^{-ti + ae^{-ti}} \log\left(1 - \frac{e^{ti}}{2}\right) dt \qquad (a = \text{const})$$

на један криволинијски интеграл узет дуж круга описаног око почетка. Одредити вредност овог интеграла развијањем у ред и применом рачуна остатака, а затим утврдити за колико ће разних вредности за $a$ дати интеграл имати једну дату реалну вредност $A$.



*Март 1937.*

**1.** Дата је површина

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4yz - 4y - 2z - 3 = 0.$$

Једна раван, која пролази кроз праву $y = 0$, $z = 1$ пресеца координатне равни $Oxy$ и $Oyz$ по правама $O'x'$ и $O'y'$ а дату површину по кривој $C$. Одредити једначину те криве у координатном систему $O'x'y'$ и испитати шта представља крива $C$ када се дата раван окреће око дате праве.

**2.** Скицирати график криве чије су једначине у параметарском облику

$$x = \log \operatorname{tg} \frac{t}{2}, \quad y = \sin t.$$

Израчунати величину површине ограничене овом кривом, $x$-осом и правом $x = a$.

Чему тежи та површина када $a$ неограничено расте?

**3.** За које ће вредности $\lambda$ ред чији је општи члан

$$u_n = \frac{n^2}{n^\lambda + n^{1/\lambda}}$$

бити конвергентан?

Да ли ће за исте ове вредности $\lambda$ конвергирати и ред чији је општи члан.

$$u_n = \frac{n^2}{n^\lambda + n^{1/\lambda} \log^2 n}.$$

**4.** Ако је $f(x)$ цела функција променљиве $x$, показати да ће и интеграл

$$J(x) = \int f(z) f\left(\frac{x}{z}\right) dz,$$

узет дуж круга $|z| = +\infty$, представљати целу функцију променљиве $x$?

Помоћу датих коефицијената реда

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

одредити коефицијенте реда

$$J(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

Применити овај поступак на интеграл

$$J(x) = \int e^{az+b\frac{x}{z}}\, dz,$$

где су $a$ и $b$ константе и одредити врсту целе функција $J(x)$.

*Јун 1937.*

**1.** Дата је фамилија кривих у простору

$$x + az + a\varphi(a) = 0, \quad y + z\varphi(a) + a\varphi(a) = 0,$$

где је $a$ параметар.

1° Одредити услов који треба да задовољава функција $\varphi$ да би ове криве имале обвојницу.

2° Из добијеног услова егзистенције обвојнице одредити функцију $\varphi$, а затим и саму обвојницу.

**2.** За које ће позитивне вредности броја $p$, а за које позитивне и негативне вредности број $q$, ред са општим чланом

$$u_n = n^{q-p} \log(1+p)^n$$

бити конвергентан?

**3.** Дата је линеарна парцијална једначина првог реда

$$q = \frac{x}{y}\, p + \frac{y}{x}.$$

Одредити услов да би општи интеграл одређивао једну површину другог реда, а затим протумачити геометријски значај ове површине.

**4.** Одредити све целе функције $F(z)$ прве врсте, које имају исте нуле као и функција

$$f(z) = \int_0^z \operatorname{tg}(z+a)\, dz,$$

где је $a$ сталан број.



Навести елементарну функцију која припада функцији $F(z)$ и помоћу ње израчунати $F(z)$ у коначном облику.

*Октобар 1937.*

**1.** Функцију $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ развити у ред по степенима од $x$, одредити полупречник конвергенције тога реда и испитати у којим тачкама на кругу конвергенције тај ред конвергира.

**2.** Дата је права $y = ax + b$. Одредути на њој тачку $P(x, y)$ и параболу, тако да парабола сече дату праву у тачки $P$ под правим углом, да пролази кроз координатни почетак и да за осу има $x$-осу.

Израчунати величину површине ограничену луком $OP$ параболе, $x$-осом и ординатом тачке $P$. Чему тежи та површина када $a$ тежи бесконачности.

**3.** Одредити у облику реалних одређених интеграла реални и имагинарни део криволинијског интеграла

$$J_m = \int (1+z)\, e^z z^{-m}\, dz$$

узетог дуж круга $|z| = r$.

Комплексном интеграцијом такође израчунати реални и имагинарни део датог криволинијског интеграла.

Израчунати бројне вредности интеграла $J_m$, за $m = 5, 6, \ldots, 11$ и уочити једну аритметичку правилност у бројиоцима тако добијених вредности, када су оне сведене на најпростији облик.

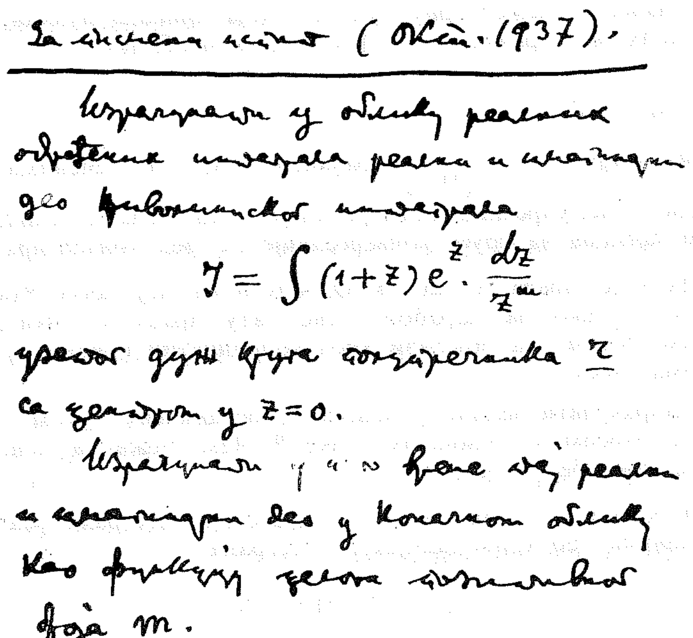
**4.** Одредити Cauchy-ев интеграл, који за $x = 0$ постаје $z = y$, парцијалне једначине $(p+y)(q+x) = a$, где је $a$ дата константа.

Испитати геометријски значај овог интеграла.

*Март 1938.*

**1.** Одредити делимичне збирове $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$ реда чији је општи члан

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}.$$


За писмени испит (Окт. 1937).

Израчунати у облику реалних одређених интеграла реални и имагинарни део Фреснелског интеграла

$$J = \int (1+z)\, e^{z} \cdot \frac{dz}{z^{m}}$$

узетог дуж круга полупречника $r$ са центром у $z=0$.

Израчунати у исто време реални и имагинарни део у коначном облику као функцију целог позитивног броја $m$.

Задатак из теорије функција комплексне променљиве који је дат на испиту марта 1937.

У случају да дати ред конвергира, одредити његов збир, у случају његове дивергенције испитати његово асимптотско понашање.

Упоредити дати ред са редом чији је општи члан $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Испитати конвергенцију реда са општим чланом $v_n$, а у случају његове дивергенције испитати његово асимптотско понашање.

Шта је са редом чији је општи члан $2v_n - u_n$?

**2.** Дата је крива $x^2 + 3y^2 = 6y$ и права $y = x$ која дели површину, коју ограничава дата крива, у делове $A$ и $B$.

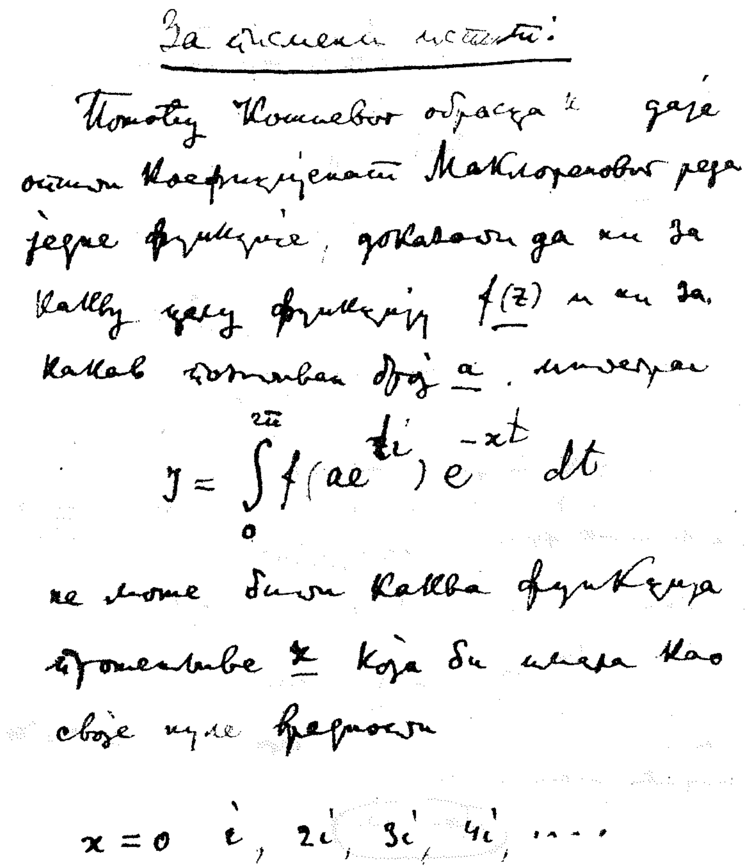
Конструисати криву и наћи површину делова $A$ и $B$ и одредити њихов однос.



**3.** Користећи Cauchy-ев образац за одређивање коефицијената Maclaurin-овог реда једне функције, доказати да ни за какву целу функцију $f(z)$ и ни за какав број $a$ интеграл

$$J(x) = \int_0^{2\pi} f(ae^{ti})\, e^{-tx}\, dt$$

не може бити каква функција променљиве $x$ која би имала као своје нуле вредности $x = ki$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.


За писмени испит:

Помоћу Кошиевог обрасца за добити коефицијенте Маклореновог реда једне функције, доказати да ни за какву целу функцију $f(z)$ и ни за какав позитиван број $a$, интеграл

$$J = \int_0^{2\pi} f(ae^{ti})\, e^{-xt}\, dt$$

не може бити каква функција променљиве $x$ која би имала као своје нуле вредности

$x = 0,\ i,\ 2i,\ 3i,\ 4i,\ \ldots$

Задатак из теорије функција комплексне променљиве који је дат на испиту марта 1938.

IV

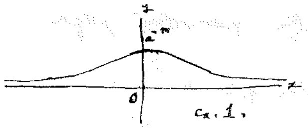
## За писмени испит

Задатак: Конструисати криву линију

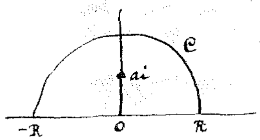
$$(a^2+x^2)^m y - 1 = 0$$

где је a позитивна константа, а m цео (сталан) позитиван број, па помоћу рачуна остатака израчунати површину ограничену овом кривом и апсцисном осом.

### Решење.




сл. 1.




Према једначини $y = \frac{1}{(x^2+a^2)^m}$ крива има облик слике 1., а површина која има да се израчуна је

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^m}$$

Посматрајмо криволинијски интеграл

$$J = \int \frac{dz}{(a^2+z^2)^m}.$$

узет у равни Z дуж контуре састављене од полукруга C (полупречника R) и реалне осовине. Према Кошијевој теореми он има за вредност $2\pi i \cdot B$ где је B остатак функције $f(z) = \frac{1}{(a^2+z^2)^m}$ за онај пол који се налази у контури, а то је пол $z = ai$.

Са друге стране, је

$$J = \int_{-R}^{+R} \frac{dz}{(a^2+z^2)^m} + \int_C (\text{дуж полукруга } C)$$

Интеграл $\int_C$ се добија смењујући да је $z = Re^{\theta i}$ $dz = Rie^{\theta i}d\theta$ и интеграљући од $\theta = 0$ до $\theta = \pi$.

окрени лист.



према томе је

$$\int_C = i \int_0^{\pi} \frac{Re^{\theta i}\, d\theta}{(a^2+R^2e^{2\theta i})^m}$$

и тај интеграл тежи нули кад R бесконачно расте. ~~[illegible]~~

Према томе је

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^m} = 2\pi i \cdot B$$

Остатак B за пол $z = ai$ израчунава се по познатом обрасцу за полове m-тог реда

$$B = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-ai)^m \cdot \frac{1}{(z^2+a^2)^m}\right] = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[\frac{1}{(z+ai)^m}\right]$$

за $z = ai$

и тако се налази

$$B = \frac{m(m+1)\cdots(2m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(m-1)} \cdot \frac{(-1)^{m-1}}{(2ai)^{2m-1}}$$

а према томе је тражена површина

$$P = 2\pi \frac{m(m+1)\cdots(2m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(m-1)} \cdot \frac{1}{(2a)^{2m-1}}$$

**Текст и решење једног задатка који је М. Петровић припремио за испит.**

**4.** Одредити Cauchy-ев интеграл линеарне парцијалне једначине

$$(x-1)p - y(y+1)q = y^2 + y - x + 1$$

који за $x = 0$ узима вредност $-y$.

Дати геометријску интерпретацију добијеног интеграла.

*Март 1940.*[1]

**1.** Наћи општи интеграл диференцијалне једначине

$$2xyy' = y^2 - 4x^2.$$

[1] Мада М. Петровић није учествовао у испитима после пензионисања, ради потпуности доносимо такође текстове задатака из 1940—1941.

Према вредностима интеграционе константе испитати које све криве може претстављати интеграл горње једначине и конструисати те криве.

**2.** Наћи општи интеграл линеарне парцијалне једначине

$$yp+(x+z)\,q=0.$$

Одредити из овог интеграла најопштију једначину средишне површине другог реда чији коефицијенти уз $x^2$, $y^2$ и $z^2$ морају бити $+1$ или $-1$.

Испитати геометријско значење добијених површина.

**3.** Одредити функцију претстављену интегралом

$$f(x)=\frac{x}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{(t-1)^2}{t^3-2xt^2+t}\,dt$$

када је $x>1$. Конструисати криву $y=f(x)$ и развити $f(x)$ у Laurent-ов ред по степенима $\frac{1}{x}$.

*Октобар 1940.*

**1.** Наћи запремину тела ограничену равнима $z=0$, $z=c$ и површином

$$x^2+y^2=x\sqrt{c^2-z^2}.$$

**2.** Одредити ортогоналне трајекторије фамилије сфера, чија се средишта налазе на датој правој, а пречници су сразмерни растојању средишта сфера од дате тачке на истој правој. Испитати случај када тражене трајекторије представљају површине другог реда.

**3.** Одредити функцију дату интегралом

$$f(z)=\frac{-3}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ti}}{t^3-iz^3}\,dt.$$

Каква је функција $f(z)$? Испитати њену модуларну површину $u=|f(z)|$ и конструисати фамилију њених ниво линија.

**4.** Наћи услов да би једначина

$$x^4+ax^3+2x^2+cx+1=0,\quad a>0$$

имала два корена једнака а супротног знака и одредити вредности корена. Доказати да су поменута два корена имагинарна ако су остала два реална. Применити на случај када су два корена 1 и 2.



*Март 1941.*

**1.** Дата је диференцијална једначина

$$x^2y''-2y=2ax\qquad(a>0).$$

1° Показати да ова једначина има бесконачно много полинома другог степена као партикуларне интеграле.

2° Наћи општи интеграл горње једначине.

3° Испитати када ће интегрална крива представљати конусне пресеке и који су то конусни пресеци.

**2.** Одредити размак у коме ће се налазити збир квадрата углова макаквих $n$-тоуглова у равни. За какве ће троуглове тај збир достићи крајње вредности тако добијеног размака.

**3.** Дата је функција

$$f(z)=\frac{1}{z}\log\left(\frac{e^z-1}{z}\right).$$

Испитати природу њених сингуларитета. Конструисати криву $y=f(x)$ за реалне вредности $x$. Видети да ли та крива има средишта симетрије и у колико тачака она пресеца праву $y=a$ за $a>0$.

**4.** Протумачити геометријско значење Cauchy-евог интеграла парцијалне једначине

$$xyp+yq+pq=yz$$

који за $x=0$ постаје $z=e^y$.

## ПИТАЊА ИЗ ТЕОРИЈЕ ФУНКЦИЈА[1]

1. Геометриско представљање комплексних количина и основне рачунске радње са њима (сабирање, одузимање, множење, делење, степеновање, кореновање, логаритмисање).

[1] Ово су питања која је М. Петровић дао испитивачу који га је замењивао на испиту за време његове одсутности.

2. Одредба реалног и имагинарног дела дате функције.

3. Односи између путања променљиве $z$ и функције $f(z)$. Затворене и отворене путање.

4. Изводи функција што зависе од имагинарне променљиве количине. Аналитичке и неаналитичке функције.

5. Разне врсте сингуларитета аналитичких функција.

6. Аналитичке функције разврстане према природи сингуларитета.

7. Криволиниски интеграли и њихово израчунавање.

8. Cauchy-ева теорема о еквиваленцији путања и њене последице.

9. Cauchy-ев основни интегрални образац и образац за изражавање извода помоћу интеграла.

10. Cauchy-ева теорема о облику реда у коме се може развити $f(z)$ у близини једне своје обичне тачке. Коефицијенти реда и област конвергенције.

11. Laurent-ова теорема за развијање у близини пола или есенцијалне тачке.

12. Развијање у близини критичких тачака.

13. Остаци функција, њихово израчунавање и примене.

14. Аналитичко продужавање функција. — Линије сингуларитета.

15. Дефиниција целих функција и неколико основних особина.

16. Разлагање целих функција на примарне факторе (без доказивања).

17. Врста (genre) целих функција и која особина функције у вези са њеном врстом.

18. Мероморфне функције и неколико основних особина.

19. Разни аналитички изрази мероморфних функција (Cauchy, Laurent, Weierstrass, Mittag-Leffler).

---

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ
ЧОВЕК — ФИЛОЗОФ — МАТЕМАТИЧАР

ИЗДАВАЧ

Завод за издавање уџбеника
Социјалистичке Републике Србије
Београд, Обилићев венац 5/I

Коректор
МИРЈАНА ЛЕСКОВАЦ

Рукопис предат у штампу маја 1968. године;
штампање завршено јула 1968. године.

Обим: $12^1/_4$ штампарских табака
Тираж: 2.000 примерака
Формат: 14×20 cm

Штампа Београдски графички завод, Београд
Булевар војводе Мишића 17