

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

Д. РАШКОВИЋ

ТЕОРИЈА ОСЦИЛАЦИЈА

ДРУГО ПРЕРАЂЕНО ИЗДАЊЕ

Научна Књига

БЕОГРАД, 1965.

УНИВЕРЗИТЕТСКИ УЏБЕНИЦИ

Решењем ректора Универзитета у Београду бр. 315/1 од 2. II 1965. год., а на основу закључка Универзитетске комисије за уџбенике од 1. II 1965. год. штампано као стални уџбеник за студенте Техничког факултета.

За издавача *Драгослав Јоковић*, уредник *Гордана Николић*, техн. уредник *Добринка Чонкин*, коректор *Свешослав Симонов*

Штампа: Графичко пред. „Радиша Тимотић“. Београд, Обилићев венац 5, тел. 622-650

С А Д Р Ж А

ДЕО ПРВИ

МАЛЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ СИСТЕМА СА ЈЕДНИМ СТЕПЕНОМ
СЛОБОДЕ ОСЦИЛОВАЊА

1. Правoliniјско хармонијско осциловање

	страна
1.1. Хармонијско осциловање	1
1.2. Хармонијски осцилатор	6
1.3. Крутости завојних опруга	9
a) Цилиндричка опруга	9
b) Конична опруга	10
1.4. Спрезање опруга	10
a) Паралелна спрега	10
b) Редна спрега	11
c) Мешовита спрега	12
1.5. Метода енергије	12
1.6. Утицај масе опруе Редуција маса и крутости опруга	14
1.7. Попречне осцилације греде са једном концентрисаном масом	17
1.8. Попречне осцилације масе на струни	25
1.9. Слагање колинеарних осцилација	26
1.9.1. Синхроне колинеарне осцилације	26
1.9.2. Асинхроне колинеарне осцилације	30
1.10. Модулација	34
1.11. Подржавање (бијење)	35
Примери	37

2. Криволинијско хармонијско осциловање

2.1. Математичко (кружно) клатно	43
2.2. Циклоидно клатно	44
2.3. Физичко клатно	46
2.4. Котрљајно клатно (Rollpendel)	47
2.5. Ваљање брода	49
2.6. Торзијски (увртни) осцилатор	50
2.7. Спирални осцилатор	53
2.8. Слагање ортогоналних осцилација	54
2.8.1. Синхроне ортогоналне осцилације	54
2.8.2. Асинхроне ортогоналне осцилације	55
Примери	58

3. Осцилације са отпорном силом

	страна
3.1. Осцилације са трећем	63
3.2. Отпор сразмеран првом степену брзине	68
3.2.1. Опадајуће осцилаторно кретање (слаба осцилација)	69
3.2.2. Аперидичко кретање (јака осцилација)	72
3.2.3. Гранични случај аперидичког кретања	74
3.2.4. Осцилације са променљивим коефицијентом гушења	75
3.3. Функција расипања	75
Примери	77

4. Принудне осцилације

А) Просте принудне осцилације

4.1. Проста принудна осцилација без отпорне силе	79
4.2. Проста принудна осцилација са отпорном силом	86
Примери	93

В) Хармонијска анализа

4.3.1. Фуријеови редови	94
4.3.2. Хармонијска анализа	98
а) Аналитичка метода	98
Гибзова појава	100
б) Нумеричка метода	103
с) Графичка метода	105
д) Механичка метода	106
4.3.3. Хармонијска синтеза	107

С) Сложене принудне осцилације

4.4. Случај периодичке поремећајне силе	107
4.5. Случај произвољне поремећајне силе	109
4.6. Принудне осцилације греда са једном концентрисаном масом	113
а) Стална поремећајна сила	113
б) Тренутна сила коначног импулса	114
с) Случај покретног терета	114
4.7. Примена Лапласових трансформација	115
а) Лапласова трансформација	115
б) Пресликавање извесних функција	116
с) Теорема померања	117
д) Теорема конволуције	119
е) Теорема разлагања	120
ф) Јединичне импулсне функције	121
г) Примена на осцилације	122
Примери	125

5. Аналогије између механичких и електричних осцилација

ДЕО ДРУГИ

ОСИЛАЦИЈЕ СИСТЕМА СА ВИШЕ СТЕПЕНИ СЛОБОДЕ

6. Мале осцилације холономног конзервативног система

	страна
6.1. Диференцијалне једначине система	137
6.2. Особине инерционих и квазиеластичних коефицијената	141
6.3. Фреквентна једначина	144
6.4. Ортогоналност главних осцилација	149
6.5. Главне и нормалне координате	151
6.6. Принудне осцилације	155

7. Линеарне осцилације система са више степени слободе

7.1. Нехомогени ланци	157
7.2. Хомогени ланци	162
7.3. Филтри	166
7.4. Мале трансверзалне осцилације концентрисаних маса на струни	167
Примери	169

8. Торзијске осцилације лаквих вратила са више дискова

8.1. Вратило променљивог попречног пресека са више различитих дискова	171
8.2. Редуктори	172
8.3. Хомогене машине. Примена једначина коначних разлика	175
8.4. Холцерава приближна метода	180
Примери	184

9. Попречне осцилације еластичних греда
са више концентрисаних маса

9.1. Прости статички носачи	185
9.2. Континуални носачи	194
9.3. Приближне методе	199
9.3.1. Данкерлеова метода	199
9.3.2. Морлијева метода	201
9.3.3. Стодолина метода	202
Примери	205

10. Сложена клатна

10.1. Сферно клатно	207
10.2. Елиптичко клатно	209
10.3. Двогубо математичко клатно	212
10.4. Сложено математичко клатно	217
10.5. Двогубо физичко клатно	220
10.6. Сложено физичко клатно	224
10.7. Возила	227
Примери	233

11. Мале осцилације неконзервативног система

11.1. Карактеристична једначина малих осцилација неконзервативног система	241
---	-----

	страна
Примери	244
11.2. Динамички апсорбер (гушитељ) осцилација	248

12. Критичне брзине брзоходних вратила

12.1. Вертикално вратило са једним диском	257
12.2. Хоризонтално вратило са једним диском	258
12.3. Вратило са више дискова	262
12.4. Тешко вратило са дисковима	263
12.5. Утицај гироскопског ефекта диска на критичне брзине	265
12.6. Сложене торзијске и попречне осцилације	268
Примери	269

13. Стабилност кретања

13.1. Лежен Дирихлеова теорема	271
13.2. Услови стабилности стационарног кретања	274
13.3. Стабилност и нестабилност осцилаторног система	277
a) Једначина првог степена	277
b) Квадратна једначина	278
c) Кубна једначина	278
d) Једначина четвртог степена	280
13.4. Routh-ов критеријум	282
13.5. Hurwitz-ов критеријум	288
13.6. Стабилност стационарног кретања Ватовог регулатора	289
Примери	291

14. Основи матричног рачунања са применом на осцилаторне проблеме

14.1. Врсте и особине матрица	295
14.2. Рачунске операције са матрицама	298
14.3. Линеарне трансформације	302
Примери	305
14.4. Квадратна форма	306
14.5. Проблеми са сопственим вредностима	306
Примери	308
14.6. Фреквентна једначина	310
Пример	312

ДЕО ТРЕЋИ

ОСЦИЛАЦИЈЕ ЕЛАСТИЧНИХ ТЕЛА

15. Основне једначине равнотеже и динамике еластичних тела

15.1. Еластичне особине тела	313
15.2. Услови за равнотежу еластичног тела	313
15.3. Односи између напона и деформација. Хуков закон	316
15.4. Основне диференцијалне једначине равнотеже еластичног тела	321

	страна
15.5. Деформациони рад (потенцијална енергија)	322
15.6. Динамичке једначине еластичног тела	324
15.7. Таласање. Таласна једначина	325

16. Осцилације жице

16.1. Трансверзалне осцилације жице	331
16.1.1. Слободне осцилације	331
Пример	337
16.1.2. Принудне осцилације	337

17. Лонгитудиналне и торзијске осцилације призматичних греда

17.1. Лонгитудиналне осцилације призматичних греда	341
17.2. Торзијске осцилације кружних вратила	345

18. Трансверзалне осцилације призматичних греда

18.1. Слободне осцилације греда са једним распоном	351
1) Проста греда	356
2) Конзола	358
3) Слободна греда	359
4) Обострано уклештена греда	360
5) Конзола подупрта на слободном крају	360
6) Греда ослоњена само на једном крају	361
7) Обострано уклештена греда са једним покретним уклештењем	362
8) Подупрта конзола са покретним уклештењем	362
18.2. Утицај концентрисаних маса на слободне осцилације греда	364
18.3. Утицај инерције обртања пресека и трансверзалне силе на попречне осцилације греде	367
18.3.1. Утицај инерције обртања пресека	367
18.3.2. Утицај трансверзалне силе (смицања)	368
18.4. Принудне осцилације	370
18.4.1. Утицај периодичко променљиве силе	374
18.4.2. Утицај покретног оптерећења	375
18.4.3. Утицај аксијалне силе на трансверзалне осцилације греде	378
18.5. Континуални носачи	379
18.6. Приближне методе	386
18.6.1. Релијева метода енергије	386
18.6.2. Данкерлеова метода	392
18.6.3. Рицова метода	393
18.6.4. Галеркинова метода	398
18.7. Спрегнуте трансверзалне и торзијске осцилације	401

19. Осцилације мембрана

19.1. Таласна једначина мембране	403
19.2. Правоугаона мембрана	405
19.3. Квадратна мембрана	408
19.4. Кружна мембрана	412

20. Осцилације плоча

	страна
20.1. Таласна једначина плоче	417
20.2. Кружна плоча	423
20.3. Правоугаона плоча	426
20.3.1. Слободне осцилације	426
20.3.2. Принудне осцилације	432
20.4. Торзијске (увртне) осцилације плоче променљиве дебљине	433
20.5. Осцилације обртних дискова	435
Трансверзалне (савојне) осцилације	435

ДЕО ЧЕТВРТИ

ОСНОВИ НЕЛИНЕАРНИХ ОСЦИЛАЦИЈА

21. Нелинеарне осцилације

21.1. Слободне нелинеарне осцилације	439
21.1.1. Синусна карактеристика (клатна)	442
21.1.2. Параболичка карактеристика	443
21.2. Принудне нелинеарне осцилације	447
21.3. Примена Галеркинове методе	451
21.4. Метода хармонијског баланса	452
21.5. Метода лагано променљиве амплитуде	454
21.6. Фазне криве	455
а) Осцилације са трећем	458
б) Слаба осцилација	459
с) Аперидичко кретање	459
21.7. Метода изоклина	460
21.8. Интегралење помоћу редова	465
21.9. Mathieu-ова диференцијална једначина	467

ДЕО ПЕТИ

АПАРАТИ ЗА РЕГИСТРОВАЊЕ ОСЦИЛАЦИЈА

22. Механички апарати

22.1. Фреквентометри	475
22.2. Индикатори	476
22.3. Виброметри и акцелерометри	478
22.4. Торзиометар	485
22.5. Осцилографи	486
Литература	489
Регистар имена	493
Регистар	495

ПРЕДГОВОР

*„Neither seeking nor avoiding mathematical
exercitations we enter into problems solely with
a view to possible usefulness for physical science“.*

*Lord Kelvin and Peter Guthrie Tait.
(„Treatise on Natural Philosophy“, part. II).*

Овај уџбеник садржи шири курс мојих предавања која држим студентима V семестра свих одсека Машинског факултета и студентима VIII семестра групе Механике Природно-математичког факултета. С обзиром да се у модерној техници третирају све више еластодинамички проблеми, он ће, као прва књига на нашем језику из ове области корисно послужити инжењерима и студентима и других факултета.

Градиво је подељено у шест делова: *Мале осцилације система са једним, два и више степени слободе, Осцилације еластичних тела, Нелинеарне и реолинеарне осцилације и Аппарати за регистровање осцилација*. Прва два дела су детаљније разрађена, ради поступног улажења у ову сложenu математичку проблематику а и у складу са наставним планом на Машинском факултету.

Излагања су основана на мојим курсевима Механике и Отпорности материјала тако да овај уџбеник са ранијим чини укупни курс Техничке механике. Да би се могло лакше ући у област осцилација еластичних тела изведене су укратко основне једначине равнотеже и динамике еластичних тела (гл. XVIII), пошто се на факултету не предаје Теорија еластичности. С обзиром на основни курс Више математике за студенте коришћен је и виши математички апарат са кратким објашњењима у циљу примене на техничке проблеме, па је укратко додирнута и проблематика матричног рачунања које данас све више улази у област техничких наука.

Многобројна литература из ове модерне области креће се у теоријском или практичном смеру. Доследно свом курсу механике трудио сам се да изложим теоријске принципе ове научне дисциплине са применом на техничке проблеме машинске, грађевинске и електротехничке струке. Извесни задаци су испитни задаци са Машинског факултета.

Професори др. К. Вороњец и инж. С. Стевовић прочитали су књигу у рукопису и учинили ми врло корисне примедбе на чему сам им особито захвалан.

1. јуна 1953. год.
12. децембра 1956. год.
Београд

Д. Р.

ПРЕДГОВОР ДРУГОМ ИЗДАЊУ

Битан садржај књиге остао је и у овом издању, само је градиво подешено у складу са новим наставним планом и програмом наставе на другом степену студија на машинским факултетима. Стога су изостављени проблеми осцилација са два степена слободе пошто су укључени у проблеме осциловања система са коначним бројем степени слободе.

На многим местима градиво је допуњено, поготову примерима. С обзиром на трећи степен студија задржани су проблеми осцилација еластичних тела, нарочито мембрана и плоча и дата је примена Лапласових трансформација на осцилаторне проблеме (чл. 4.7.).

Захваљујући љубазности „Научне књиге“ стари цртежи су замењени новим, те је побољшана техничка опрема књиге. Цртеже је брижљиво урадио Никола Дудић на чему сам му захвалан.

Морам одати признање и захвалност колективу графичког предузећа „Радиша Тимотић“ на настојању да се овај тешки слог добро и брзо сложи.

12. I 1965. год.

24. XI 1965. год.

Београд

Д. Р.

Д Е О П Р В И.

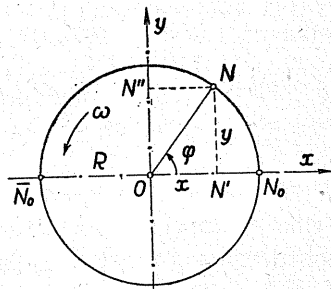
МАЛЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ СИСТЕМА СА ЈЕДНИМ СТЕПЕНОМ СЛОБОДЕ ОСЦИЛОВАЊА

1. ПРАВОЛИНИЈСКО ХАРМОНИЈСКО ОСЦИЛОВАЊЕ 48

1.1. Хармонијско осциловање. — Када се тачка N креће *једно-*
лико по кругу, полупречника R , обимном брзином $v = R\omega = \text{const}$, где
је $\omega = \dot{\varphi}$ *угаона брзина*, тада се њена пројекција N' на осу Ox креће
праволинијски од почетног положаја N_0 до коњуговане тачке \bar{N}_0 и
натраг (сл. 1.1.). Положај тачке N на кругу одређујемо углом $\varphi = \omega t$
који се *линеарно мења* са временом, а положај тачке N' одредићемо
координатом $x = \overline{ON'}$ која се назива *елонгација*. Као почетно време
узима се нулто време $t_0 = 0$; тада је тачка у почетном положају N_0 ,
па је елонгација $x_{\text{max}} = x_0 = R$. Када N' дође у положај \bar{N}_0 избачај ће
бити $x_{\text{min}} = -R$, па је највећи отклон (избачај) тачке N' од средишта
круга $x_{\text{max}} = \pm R$ и назива се *амплитуда*. Како је елонгација функција
времена то су кинематичке једначине овог праволинијског кретања

$$x = R \cos \omega t; \quad \dot{x} = -R\omega \sin \omega t; \quad \ddot{x} = -R\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x. \quad (1)$$

Оне показују да се угао φ , тзв. *фазни*
угао (фаза), линеарно мења са временом
а ω је њена — *фазна — брзина*; дија-
грам (x, t) је косинусна линија, дијаграм
 (\dot{x}, t) синусна линија и дијаграм (\ddot{x}, t)
такође косинусна линија. У почетном по-
ложају амплитуда је највећа, $x_{\text{max}} = R$,
брзина је једнака нули, $\dot{x} = 0$, а убрзање
је $\ddot{x}_0 = -R\omega^2$. При пролазу кроз равно-
тежни положај (O) је $\omega t = \pi/2$, па су $x = 0$,



Сл. 1.1. — Праволинијско хармо-
нијско осциловање

$\dot{x} = -R\omega$, $\ddot{x} = 0$. Када тачка N пређе половину кружне путање тачка N' ће стићи у положај \bar{N}_0 ; тада је $\omega t = \pi$, па су $x = -R = x_{\min}$, $\dot{x} = 0$, $\ddot{x} = R\omega^2$. Тачка N наставља кретање по доњем делу круга а тачка N' се враћа ка полазном положају пролазећи кроз равнотежни положај (O) . Кретање је, дакле, *правoliniјско хармонијско осциловање око центра осциловања (O)* .

За време T тачка N учини *један обршај* по кругу, а тачка N' пређе пут $N_0 \bar{O} \bar{N}_0 \bar{O} N_0$ једнак двоструком пречнику ($s = 2D = 4R$) који се назива *пунa (цела) осцилација*. Време T је *период осциловања*

$$T = 2\pi/\omega \quad [\text{sec}]. \quad (2)$$

За време T тачка N' учини пуну осцилацију а за једну секунду учиниће $n' = 1/T$ осцилација, те је *број осцилација у секунди*

$$f = n' = 1/T = \omega/2\pi. \quad (3)$$

Он се назива и *учестаност* или *фреквенција осциловања*. Како је димензија периода $[T]$ то се узима да је димензија фреквенције *једна пунa осцилација у секунди* и назива се *циклус* или *херц* (Hz), према имену чувеног немачког физичара Херца (H. Hertz, 1857. – 1894.). Према томе је

$$1 \text{ Hz} = 1 \text{ циклус/sec} = 1 \text{ cps (cycles per second)} = 1/\text{sec}.$$

На пример, $f = 10 \text{ Hz}$ значи да тачка N обиђе кружну путању 10 пута у секунди, односно да тачка N' учини 10 пуних осцилација. Период осциловања је $1/10 = 0,1 \text{ sec}$.

Струја за осветљење има у Европи фреквенцију 50 Hz, у USA има 60 Hz.

Ниске фреквенције имају опсег од 16 Hz до 20 000 Hz, па се називају и *звучним фреквенцијама*, и ако су за пренос говора и музике довољне фреквенције од 30 Hz до 10 000 Hz. *Средње фреквенције* имају опсег од 20 000 Hz до 100 000 Hz; *високе* су до 30 000 000 Hz а преко тога су *уштра високе фреквенције*. Због тога се у радиотехници употребљавају и више јединице, *килоцикл*, $1 \text{ kcps} = 1 000 \text{ cps} = 1 000 \text{ Hz}$, и *мегацикл*, $1 \text{ Mcps} = 1 000 000 \text{ cps} = 1 000 000 \text{ Hz}$.

Из (3) следе ови односи

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f = \pi n/30; \quad n = 60 \quad n' = 60 f = 30 \omega/\pi = 9,549 \omega. \quad (4)$$

Први показује број осцилација у 2π секунди и назива се *кружна фреквенција* (било, *пулзација*). И ова се фреквенција мери истим јединицама као и учестаност, (Hz). Други однос је *број осцилација у минути* (сурт). Он одговара *минушном броју обршаја* тачке по кругу ($\pi n/30$).

Како је

$$x[(t+T)] = x[\omega t + 2\pi] = R \cos(\omega t + 2\pi) = R \cos \omega t = x(\omega t) \quad (5)$$

то је елонгација (x) периодичка функција времена (t), периода $T = 2\pi/\omega$. После сваког периода (T) циклус се понавља те настаје исто стање осциловања.

Док се тачка N' креће по Ox оси дотле се тачка N'' — пројекција тачке N на Oy осу — креће по Oy оси по закону осциловања

$$y = R \sin \omega t = R \cos(\omega t - \pi/2); \quad \dot{y} = R \omega \cos \omega t; \quad \ddot{y} = -R \omega^2 y,$$

те је разлика фазних углова $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$. Ово су две ортогоналне осцилације које се разликују у фази за $\pi/2$.

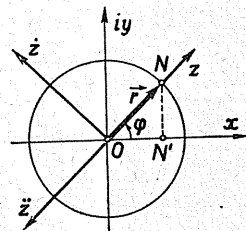
Обе осцилације могу се представити скупно помоћу обршног вектора (верзора) $\vec{r} = r = \vec{ON}(t)$, сталног модула, $|r| = R$, чији положај одређује положај тачке N на кругу (сл. 1.2.). Овај вектор гради са $+Ox$ осом угао $\varphi = \omega t$, па се назива вектор таласања, модула једнаког амплитуди, $|r| = R$.

Вектору r одговара у комплексној равни ($Ox; Oiy$) комплексни број z , те је

$$z = x + iy = R(\cos \varphi + i \sin \varphi) = RE(\varphi) = Re^{i\varphi};$$

$$\varphi = \omega t,$$

$$(6) \quad \text{Сл. 1.2. — Вектор таласања}$$



где је $i = \sqrt{-1}$ имагинарна јединица а $E(\varphi)$ комплексна јединица у правцу аргумента φ . Модул комплексног броја је амплитуда, $\text{mod } z = |z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$, а аргумент је фаза, $\text{arg } z = \varphi$. Како је $dE/d\varphi = \omega(-\sin \varphi + i \cos \varphi) = \omega E(\varphi + \pi/2)$ и $d^2E/d\varphi^2 = -\omega^2(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \omega^2 E(\varphi + \pi)$, то множење комплексном јединицом представља ротацију праћену деформацијом ω , односно ω^2 , пута. Кинематичке једначине су

$$z = RE(\varphi); \quad \dot{z} = R\omega E(\varphi + \pi/2); \quad \ddot{z} = R\omega^2 E(\varphi + \pi), \quad (7)$$

па реални делови ових комплексних бројева представљају кинематичке једначине осциловања по Ox оси, а имагинарни једначине осциловања по Oy оси (сл. 1.3. а):

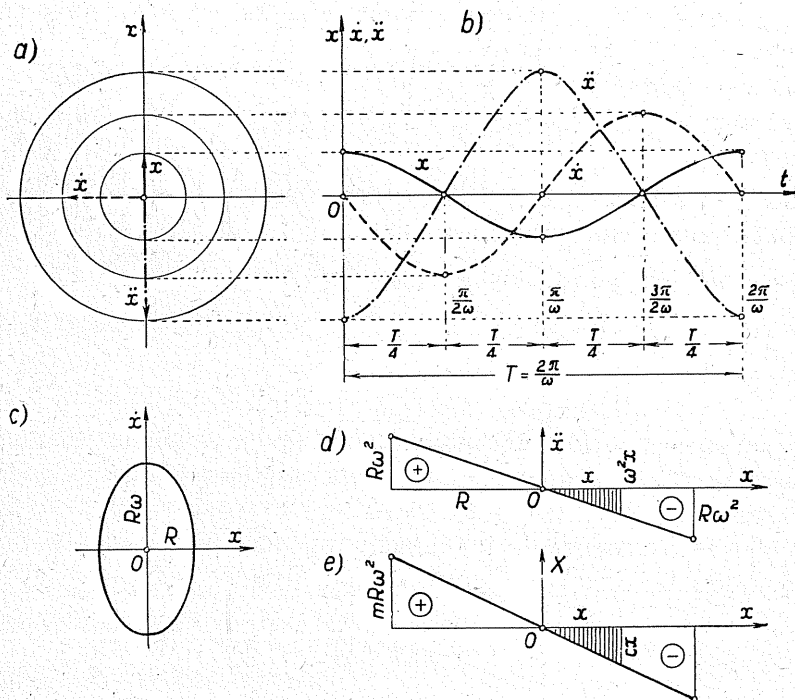
$$\begin{aligned} x = \Re(z) &= R \cos \varphi; & \dot{x} = \Re(\dot{z}) &= -R \omega \sin \varphi; & \ddot{x} = \Re(\ddot{z}) &= -\omega^2 x; \\ y = \Im(z) &= R \sin \varphi; & \dot{y} = \Im(\dot{z}) &= R \omega \cos \varphi; & \ddot{y} = \Im(\ddot{z}) &= -\omega^2 y. \end{aligned} \quad (8)$$

Кинематички дијаграми приказани су сл. 1.3. Када се из прве две једначине (1) елиминише време добија се да је дијаграм пута и брзине *елипса* (сл. 1.3. c). Дијаграм убрзања и пута је *права линија* (сл. 1.3. d).

Из треће кинематичке једначине (1), види се да је убрзање сразмерно растојању покретне тачке N' од центра осцилације (O), где је ω^2 коефицијент пропорционалности, и да је усмерено ка центру осцилације. Према томе је *основна динамичка једначина хармонијског кретања*

$$m \ddot{x} = -m \omega^2 x = -c x = X, \quad (9)$$

где је c коефицијент пропорционалности, димензије $[F/L]$, јединице t/cm или kg/cm . Материјална тачка, масе m , дакле, врши хармонијску



Сл. 1.3. — Кинематички дијаграми хармонијског осциловања

осцилацију под утицајем привлачне силе која зависи линеарно од растојања покретне тачке од центра осцилације који је центар привлачења, јер је за $x > 0$ сила $X < 0$, а за $x < 0$ је $X > 0$. Дијаграм силе (X) и пређеног пута (x) приказан је на сл. 1.3. e.

Из једначине (9) следи да је диференцијална једначина кретања облика

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0; \quad \omega^2 = c/m = cg/G, \quad (10)$$

тј. хомогене диференцијалне једначине са константним коефицијентима, па је њен општи интеграл

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t = A \cos \varphi + B \sin \varphi, \quad (11)$$

где су A и B константе и $\varphi = \omega t$.

Ако су почетни услови за $t=0$, $x = x_0$ и $\dot{x} = \dot{x}_0$ онда су константе

$$A = x_0; \quad B = \dot{x}_0/\omega, \quad (12)$$

па је паршикуларни интеграл односно закон осциловања:

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \cos(\omega t - 1/2 \pi). \quad (13)$$

Хармонијска осцилација је, дакле, збир двеју колинеарних хармонијских осцилација, истих кружних фреквенција (ω) а различитих амплитуда. Друга осцилација се разликује у фази од прве за $\pi/2$. Осцилације су дакле „синхроне“, али нису у фази.

Уведу ли се смене

$$x_0 = R \cos \varphi_0; \quad \dot{x}_0/\omega = R \sin \varphi_0$$

добиће се једна хармонијска осцилација

$$x = R \cos(\omega t - \varphi_0), \quad (14 a)$$

нове амплитуде R и померања фазе φ_0 , које су одређене једначинама

$$R = \sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0/\omega)^2}; \quad \text{tg } \varphi_0 = \dot{x}_0/\omega x_0. \quad (14 b)$$

У случају специјалних почетних услова да је за $t_0=0$ почетна брзина једнака нули $\dot{x}_0=0$ и $x_0=R$ биле би константе $A = x_0 = R$ и $B=0$, па би се добио закон осциловања (1).

Праволинијско хармонијско осциловање врши се под утицајем привлачне силе (X) која линеарно зависи од растојања од центра осциловања ($X = -cx$), па како је та сила конзервативна то је и кре-

тање конзервативно, те важи закон о одржавању механичке енергије. С обзиром на (1) и (9) биће енергије

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} c R^2 \sin^2 \varphi;$$

$$E_p = -U = -A = - \int_0^x (-cx) dx = \frac{cx^2}{2} = \frac{1}{2} c R^2 \cdot \cos^2 \varphi, \quad (15 a)$$

па је *шопална механичка енергија*

$$E = E_k + E_p = cR^2/2 = \text{const}, \quad (15 b)$$

где је U функција силе која је једнака раду, A . Обе су, дакле, енергије *променљиве* у току једног циклуса, али је њихов збир у сваком тренутку *константан*.

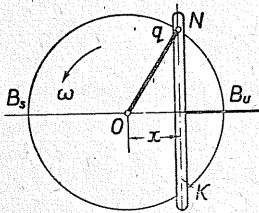
На пример, када би осциловање било дато законом $x = R \sin(\omega t + \alpha)$ била би брзина $\dot{x} = R \omega \cos \varphi$, $\varphi = \omega t + \alpha$, па су енергије

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right);$$

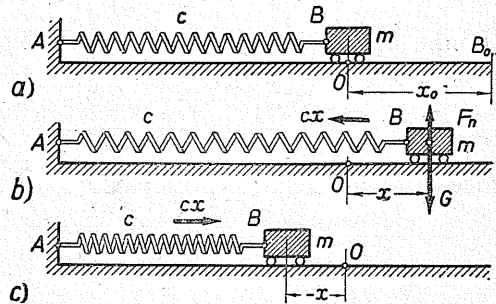
$$E_p = \frac{1}{2} cx^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2;$$

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 = \frac{1}{2} c R^2.$$

1.2. Хармонијски осцилатор. — Хармонијска осцилација се може остварити помоћу *кулисног механизма Волфа*, (сл. 1.4.). Кулисни камен (q) који је насађен на крај криваје ON врши кружно кретање, угаonom брзином ω , а кулиса K



Сл. 1.4. — Кулисни механизам Волфа



Сл. 1.5. — Хоризонтални хармонијски осцилатор

врши хармонијско кретање од *унушрашње* (B_u) до *спољашње мршве шачке* (B_s).

Хармонијску осцилацију изводи и *хоризонтални осцилатор* (сл. 1.5.) који се састоји из масе (m) везане за опругу AB , *крупости* c . Ако је O

равнотежни положај масе, (сл. 1.5. *a*), и ако се иста изведе из равнотежног положаја за амплитуду x_0 и пусти, наступиће хармонијско кретање по глаткој хоризонталној равни. У случају кретања налево сила еластичности опруге (cx) је усмерена налево (сл. 1.5. *b*) а у случају кретања надесно та је сила усмерена надесно (сл. 1.5. *c*), те је увек усмерена ка равнотежном положају O .

Крутост опруге (c) је коефицијент пропорционалности привлачне силе, и има димензију $[F/L]$. Она представља силу која изазива издужење опруге за јединицу дужине, те се због тога мери јединицама kg/cm , kg/mm , t/cm . Ова крутост се назива и константа опруге (spring constant). Реципрочна вредност крутости зове се карактеристика опруге ($C=1/c$), димензије $[L/F]$. Карактеристика опруге представља, дакле, издужење опруге услед јединичне силе.

На пример, када сила $F=200 \text{ kg}$ издужи опругу за 1 cm тада је крутост опруге $c=F/f_s=200 \text{ kg/1 cm}=200 \text{ kg/cm}$.

Занемарујући масу опруге и трење, а пошто се тежина (mg) поништава са нормалним отпором подлоге (F_n), то се кретање врши само под утицајем силе еластичности опруге (cx), која је сразмерна издужењу опруге. Према томе је диференцијална једначина кретања

$$m\ddot{x} = -cx,$$

истог облика који смо имали и код хармонијског кретања (9).

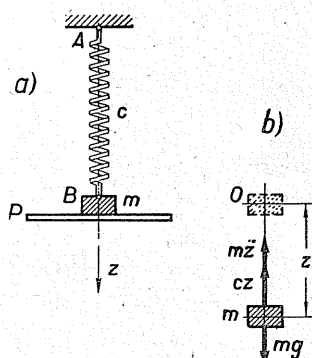
Уместо хоризонталног осцилатора примењује се и вертикални осцилатор. Ради постављања диф. једначине кретања разликоваћемо два случаја. Нека је о опругу AB обешена маса m под коју је подметнута подлога (P), (сл. 1.6. *a*). Измакне ли се подлога (P) наступиће осцилације у вертикалном смеру, па је диф. једначина кретања

$$m\ddot{z} = -cz + mg,$$

односно

$$\ddot{z} + \omega^2 z = g.$$

(16 a)



Сл. 1.6. — Вертикални хармонијски осцилатор са подлогом

Она има облик нехомогене диф. једначине другог реда са константним коефицијентима, па је општи интеграл једнак збиру општег интеграла хомогене једначине и партикуларног интеграла нехомогене, тј.

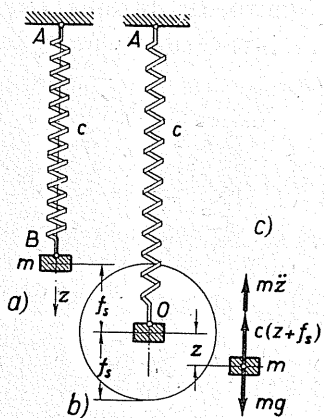
$$z = A \cos \omega t + B \sin \omega t + (g/\omega^2).$$

Ако су почетни услови кретања: за $t=0$, $z_0=0$, $\dot{z}_0=0$, онда су константе $A = -g/\omega^2$, $B=0$, па је партикуларни интеграл

$$z = \frac{g}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) = \frac{G}{c} (1 - \cos \omega t). \quad (16 b)$$

Највећа амплитуда добија се за полупериод $T/2 = \pi/\omega$ и износи $z_{\max} = 2g/\omega^2 = 2\Delta l = 2f_s$, где је $\Delta l = f_s$ издужење опруге под утицајем тежине $G = mg$, које износи $f_s = G/c = m\bar{g}/c = g/\omega^2$.

На пример, ако је $G = 100 \text{ gr}$, $c = 20 \text{ gr/cm}$ биће $\omega^2 = c/m = cg/G = 196$, тј. $\omega = 14 (1/\text{sec})$, па је $f_s = G/c = 5 \text{ cm}$ и $z = 5(1 - \cos 14 t)$.



Сл. 1.7. — Вертикални хармонијски осцилатор без подлоге

У другом случају претпостављамо да је маса (m) обешена о опругу AB , крутости c , (сл. 1.7. а). Под утицајем тежине $G = mg$ наступиће издужење опруге за $\Delta l = f_s = mg/c = g/\omega^2$, па ће материјална тачка (m) заузети равнотежни положај O , (сл. 1.7. б). Ако се сада изведе из равнотежног положаја (сл.1.7. с), и пусти наступиће осцилације у вертикалном правцу око равнотежног положаја (O) па је диф. једначина кретања

$$m\ddot{z} = -c(z + f_s) + mg = -cz - cf_s + mg = -cz,$$

те је

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0, \quad (17 a)$$

тј. хомогена једначина са константним коефицијентима. Решење ове једначине је

$$z = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (17 b)$$

Дакле, у овоме случају тежина тешета ($G = mg$) нема више утицаја на осциловање, пошто се уравништежила са силом еластичности опруге, $G = mg = cf_s$. Овим се проблем свео на проблем хоризонталног осцилатора, тј. на осциловање масе око равнотежног положаја (O).

Закон кретања зависи од почетних услова.

1.3. Крутости завојних опруга. — Крутости завојних опруга, кружног попречног пресека, могу се одредити експериментално и рачуном*.

Експериментално се мерењем одреди лако период осциловања бројањем пуних осцилација осцилатора у једној секунди или једној минути а при устаљеном осциловању, па је $T=1/f=2\pi/\omega$. Када се познаје период тада се крутост може одредити рачуном:

$$c = m \omega^2 = m (2\pi/T)^2 = 4\pi^2 G/gT^2 = 4\pi^2 G n^2/g = F/f_s. \quad (18)$$

Код фундамента машине сила еластичности је сила потиска земљишта. Означимо са C_z силу потребну за сабијање јединице запремине земљишта, онда је крутост

$$c = F_p/f_s = C_z A f_s/f_s = C_z A \quad [\text{kg/cm}], \quad (18')$$

јер се коефицијент C_z мери јединицом kg/cm^3 .

Проучићемо само цилиндричке и коничне опруге, малог хода, тј. такве код којих можемо сматрати да се сваки завојак налази у равни управној на осу.

а) *Цилиндричка опруга.* — Нека цилиндричка опруга, кружног попречног пресека (d), има N активних завојака, онда је њена дужина $L=2R \pi N$, где је R полупречник завојнице, (сл. 1.8. а). Ако је слободан крај опруге изложен дејству аксијалне силе затезања F , онда ову силу можемо редуковати на тежиште попречног пресека, (сл. 1.8. б), па ћемо добити трансверзалну силу и спрег момента $M_t = FR$. Укупни тангенцијални напон биће

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_O} r + \frac{F}{A} = \frac{F}{A} \left[2 \frac{R}{r} + 1 \right],$$

где је r полупречник попречног пресека. С обзиром на однос $R/r \gg 1$ може се јединица занемарити, па је попречни пресек изложен само увијању, моментом FR . При издужењу опруге за f_s мора рад силе F бити једнак деформационом раду при увијању, па је

$$A = A_d; \quad \frac{1}{2} F f_s = \frac{M_t^2 L}{2GI_O} = \frac{F^2 R^2 L}{2GI_O},$$

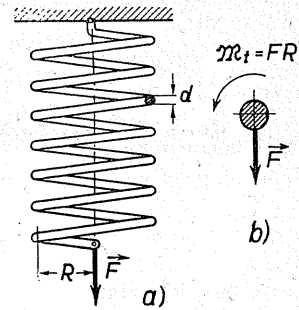
где је G модул клизања** (смицајни модул).

Из горње једначине можемо лако одредити издужење, крутост опруге (torsional rigidity) и потребан број активних завојака према обрасцима:

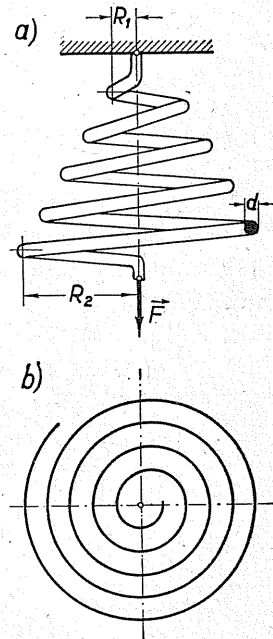
$$f_s = \frac{64NR^3}{Gd^4} F; \quad c = \frac{F}{f_s} = \frac{Gd^4}{64NR^3}; \quad N = \frac{Gd^4}{64R^3} \frac{f_s}{F}. \quad (19)$$

* Отпорност материјала, 3. изд., Београд, 1962, чл. 5.7.

** За челик је $G=8 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$.



Сл. 1.8. — Цилиндричка кружна завојна опруга



Сл. 1.9. — Конична кружна завојна опруга

b) *Конична опруга.* — У случају коничне опруге, кружног попречног пресека, пречника d , малог хода, пројекција завојнице на раван управну на осу је спирала (сл. 1.9.), једначине $r=R_1+k\varphi$, па су $dr=k d\varphi$ и $R_2=R_1+k \cdot 2N\pi$. Како је елемент завојнице $ds=r d\varphi$ то је дужина

$$L = \int_{R_1}^{R_2} r d\varphi = 2R_s \pi N, \quad \text{где је } R_s = \frac{1}{2}(R_1 + R_2).$$

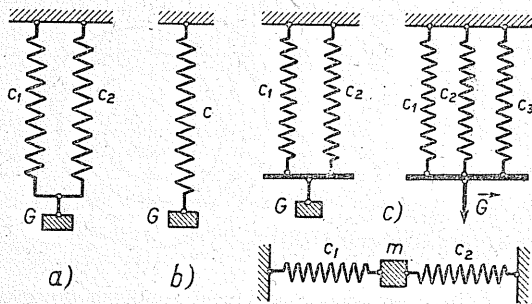
Занемарујући утицај трансверзалне силе, изједначењем рада силе F и деформационог рада при увијању биће

$$A = A_{dt}, \quad \frac{1}{2} F f_s = \frac{F^2}{8GI_0} \frac{2N\pi}{R_2 - R_1} (R_2^4 - R_1^4),$$

па из ове једначине можемо одредити издужење, крутост и број активних завојака опруге према обрасцима:

$$\begin{aligned} f_s &= \frac{FN\pi}{2GI_0} (R_1 + R_2) (R_1^2 + R_2^2); \\ c &= \frac{F}{f_s} = \frac{GI_0}{16N(R_1 + R_2) (R_1^2 + R_2^2)}; \\ N &= \frac{GI_0 c}{16(R_1 + R_2) (R_1^2 + R_2^2) F}. \end{aligned} \quad (20)$$

1.4. Спрезање опруга. — Ако је више опруга везано у паралелну или редну везу, а различитих крутости, могу се заменити једном једином опругом еквивалентне крутости (Ersatzsystem).



Сл. 1.10. — a, b) Еквивалентна крутост двеју паралелно везаних опруга
c) Паралелно спрезање опруга

a) *Паралелна сѝрега.*
— Ако је маса m везана двома паралелним опругама крутости c_1 и c_2 , (сл. 1.10. a), онда се обе опруге могу заменити једном опругом, крутости c , (сл. 1.10. b). Пошто маса m добија услед силе G вертикално померање f_s то ће се и опруге издужити за исту дужину

$$f_s = f_1 = f_2.$$

Силе еластичности опруга морају стајати у равнотежи са силом F , па је

$$G = F_1 + F_2.$$

Како између издужења (f_i), сила (F_i) и крутости (c_i), према Хуковом закону еластичности, постоји однос $f_i = F_i/c_i$, то, с обзиром на горњи однос, добијамо да је

$$c = c_1 + c_2. \quad (21 a)$$

У случају паралелне везе двеју опруга крућости еквивалентне опруге је једнака збиру крућости опруга.

За n паралелно везаних опруга еквивалентна крућост је једнака збиру крућости свих опруга

$$c = \sum_{i=1}^n c_i. \quad (21 b)$$

На сл. 1.10. приказани су случајеви паралелног спрезања.

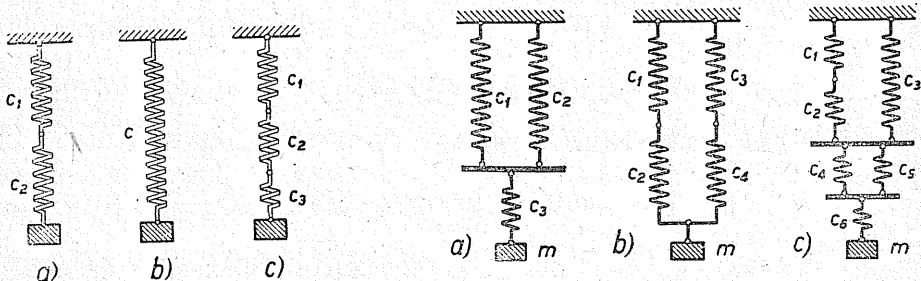
b) Редна сјагега. — Ако је маса m обешена о две опруге које су редно везане; (сл. 1.11. a), онда је укупно издужење

$$f_s = f_1 + f_2 = (G/c_1) + (G/c_2) = G/c$$

па је крућост еквивалентне опруге

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \quad \text{или} \quad c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}. \quad (22 a)$$

У случају редне сјагега реципрочна вредности крућости еквивалентне опруге једнака је збиру реципрочних вредности крућости појединих опруга



Сл. 1.11. — a, b) Еквивалентна крућост двеју редно везаних опруга, c) Редно спрезање опруга

Сл. 1.12. — Мешовито спрезање опруга

За n опруга везаних редно биће

$$\frac{1}{c} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i}. \quad (22 b)$$

На сл. 1.11. c приказани су случајеви редног спрезања.

с) *Мешовита спрега*. — Мешовита спрега састоји се из паралелних и редних веза, па еквивалентну крутост треба поступно одредити према обрасцима (21) и (22). На пример, за случај представљен на сл. 1.12. биће

$$a) \frac{1}{c} = \frac{1}{c_1 + c_2} + \frac{1}{c_3}; \quad c = \frac{(c_1 + c_2) c_3}{c_1 + c_2 + c_3};$$

$$b) c = c_{12} + c_{34} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} + \frac{c_3 c_4}{c_3 + c_4};$$

$$c) \frac{1}{c} = \frac{1}{c_{13}} + \frac{1}{c_{45}} + \frac{1}{c_6} = \frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3} + \frac{1}{c_4 + c_5} + \frac{1}{c_6}.$$

1.5. Метода енергије. — Кинетичка и потенцијална енергија хармонијског осциловања дате су изразима (15 а), па се, због релација $2 \sin^2 \omega t = 1 - \cos 2 \omega t$, $2 \cos^2 \omega t = 1 + \cos 2 \omega t$, могу написати и у овом облику

$$E_k = \frac{1}{4} m R^2 \omega^2 (1 - \cos 2 \omega t); \quad E_p = \frac{1}{4} c R^2 (1 + \cos 2 \omega t), \quad (23)$$

те се види да су периодичке функције и да се хармонијски мењају кружном фреквенцијом 2ω .

За два карактеристична положаја — 1^о најудаљенији и 2^о равнотежни — биће енергије:

$$1^o \quad t = 0; \quad t = kT/2 = k \pi / \omega; \quad x = R \cos k \pi = \pm R; \quad \dot{x} = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n; \\ E_k = 0; \quad E_p = E_{p \max} = cR^2/2 = E; \quad (24 a)$$

$$2^o \quad t = (2k - 1)T/4 = (2k - 1) \pi / 2 \omega; \quad x = 0; \quad \dot{x} = \mp R \omega; \\ E_p = 0; \quad E_k = E_{k \max} = mR^2 \omega^2 / 2 = cR^2 / 2 = E. \quad (24 b)$$

Из предњег се види да у равнотежном положају $\epsilon_{\text{рине}}$ највећу вредност а тиме и кинетичка енергија, док су $x=0$ и потенцијална енергија једнака нули. Највећа кинетичка енергија једнака је тоталној механичкој енергији E . Обрнуто, у најудаљенијем положају ϵ амплитуда највећа $|x_{\max}| = R$, брзина је једнака нули, па и кинетичка енергија, док је потенцијална енергија највећа и једнака тоталној механичкој енергији E . Према томе су амплитуде кинетичке и потенцијалне енергије једнаке тоталној енергији па су

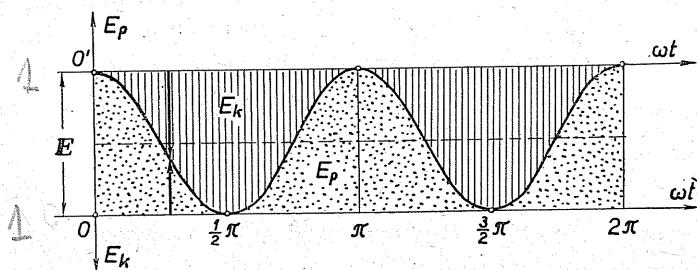
$$E_k = \frac{1}{2} E (1 - \cos 2 \omega t); \quad E_p = \frac{1}{2} E (1 + \cos 2 \omega t).$$

Дијаграми промене енергија приказани су на сл. 1.13. где се шрафирани део односи на кинетичку а нешрафирани део на потенцијалну енергију. Екстремне вредности ових енергија су, дакле,

$$E_{k \max} = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 = E, \quad E_{p \max} = \frac{1}{2} c R^2 = E = E_{k \max} \quad (25 a)$$

а у сваком тренутку је њихов збир константан и једнак тоталној енергији, јер је кретање конзервативно и према томе важи закон о одржавању механичке енергије. Изједначењем тих вредности добија се квадрат кружне фреквенције хармонијског осцилатора

$$E_{k \max} = E_{p \max} = E; \quad \omega^2 = c/m = cg/G. \quad (25 b)$$



Сл. 1.13. — Дијаграм промене кинетичке и потенцијалне енергије

Ова се метода назива *метода енергије* и први ју је применио енглески физичар *лорд Рели* (lord Rayleigh, 1842. — 1919.) у чувеном делу „*Theory of Sound*“, 1894. године. Она се примењује и у отпорности материјала за одређивање *кријичне силе аксијално притиснутог штапа**.

Потенцијална енергија је једнака негативном раду, па је (15 b) интеграл енергије, те помоћу њега одмах одређујемо брзину и без интеграћења диф. једначине осциловања. Тако је

$$\Delta E_k = A = -E_p; \quad E_k + E_p = E = \text{const},$$

те је први интеграл хармонијског осциловања

$$\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 - \dot{x}_0^2) = -\frac{1}{2} c x^2; \quad \dot{x}^2 = \dot{x}_0^2 - \omega^2 x^2 = \omega^2 (R^2 - x^2); \quad \dot{x}_0 = R \omega.$$

Када једначину (9) помножимо идентитетом $\dot{x} dt \equiv dx$ а како је $\ddot{x} = d\dot{x}/dt$, то интегралењем добијамо

$$\int \dot{x} dt (m d\dot{x}/dt) + c x dx = m \dot{x} d\dot{x} + c x dx = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} c x^2 = E = C,$$

* Отпорност материјала, чл. 12.5.

па је обратно

$$dE = m\dot{x}d\dot{x} + cx dx = m\dot{x}\ddot{x}dt + cx dx = (m\ddot{x} + cx) dx = 0.$$

Пошто је $dx \neq 0$ добија се диф. једначина осциловања (10).

Овим поступком, дакле, можемо помоћу методе енергије писати и диференцијалне једначине осциловања. Код вертикалног хармонијског осцилатора са подлогом (сл. 1.6.) енергије су

$$E_k = \frac{1}{2} m\dot{z}^2; \quad E_p = \frac{1}{2} cz^2 - mgz,$$

јер тежина терета врши рад при издужењу опруге, те следи

$$d(E_k + E_p) = d(\frac{1}{2} m\dot{z}^2 + \frac{1}{2} cz^2 - mgz) = (m\dot{z}\ddot{z} + cz - mg) dz = 0,$$

јер је $\dot{z} dz = (dz/dt) \cdot z dt = \dot{z} \cdot dz$, па се добија једначина (16a).

Код вертикалног хармонијског осцилатора без подлоге потенцијална енергија има два дела: прираштај потенцијалне енергије деформације опруге и потенцијалне енергије масе тела

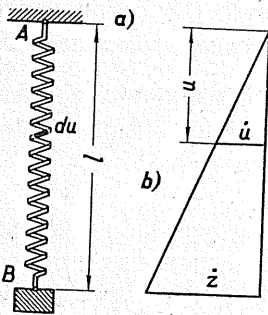
$$E_k = \frac{1}{2} m\dot{z}^2, \quad E_p = E_{p1} + E_{p2} = [\frac{1}{2} c(z + f_s)^2 - \frac{1}{2} cf_s^2] - mgz = \frac{1}{2} cz^2,$$

јер је $f_s = G/c$. Како се опруга издужила за f_s до новог равнотежног положаја (O) то се утицај теже *покинуо* са силом деформисања, те се енергије рачунају од новог равнотежног положаја (сл. 1.7.), па је

$$d(E_k + E_p) = (m\dot{z} dz + cz dz) = (m\dot{z} + cz) dz = 0.$$

1.6. Утицај масе опруге. Редукција маса и крутости опруга.

— Методу енергије применићемо за одређивање утицаја масе опруге на кружну фреквенцију вертикалног осцилатора (сл. 1.14. a). Претпоставићемо да је опруга *хомогена*, дужине l у недеформисаном стању, те је можемо сматрати танким штапом масе $m_f = \rho' l$, где је ρ' линијска густина (линијска специфична маса, маса јединице дужине). Даље претпостављамо да је ова маса доста мала у односу на масу терета ($m_f \ll m$) те не утиче на облик осциловања, што значи да не утиче на потенцијалну енергију већ само на кинетичку енергију система — маса опруге — терет. Можемо сматрати да се врши издужење опруге (танког штапа) под утицајем аксијалне силе на слободном крају (B) која је једнака тежини



Сл. 1.14. — Примена Релијевог методе енергије

терета $G = mg$. Посматрајмо елемент дужине du опруге (штапа AB) на удаљењу u од тачке вешања (A) и означимо са dz издужење краја (B) штапа, онда према *Хуновом закону* постоји однос издужења

$du:dz = u:l$ (сл. 1.14. б), па у томе односу стоје и брзине $\dot{u} : \dot{z} = u : l$, где је \dot{z} брзина осциловања терета (m). Према томе су енергије система

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \rho' \dot{u}^2 du = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} \rho' \frac{\dot{z}^2}{l^2} \int_0^l u^2 du = \frac{1}{2} (m + \frac{1}{3} m_f) \dot{z}^2,$$

$$E_p = \frac{1}{2} c (z + f_s)^2 - \frac{1}{2} c f_s^2 - mgz = \frac{1}{2} cz^2; \quad f_s = \frac{G}{c}.$$

Закон осциловања око новог равнотежног положаја (сл. 1.7.) је $z = z_0 \cos \Omega t$, па су $z_{\max} = z_0$, $\dot{z}_{\max} = z_0 \Omega$, где је Ω кружна фреквенција овог осциловања ($\Omega \neq \omega$). Изједначујући максималне вредности енергија добијамо

$$E_{k\max} = E_{p\max}; \quad \Omega^2 = \frac{c}{m^*}; \quad T^* = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{m^*}{m}} = T \sqrt{1 + \frac{1}{3} \mu}, \quad (26 a)$$

где је m^* редукована маса

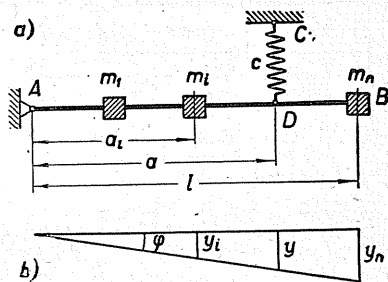
$$m^* = m + \frac{1}{3} m_f; \quad \mu = m_f/m. \quad (26 b)$$

Она је једнака збиру масе терета и трећине масе опруге. Дакле, под горњим претпоставкама маса опруге учествује само са 33% своје величине и повећава период осциловања (T^*). Када је маса опруге мала тада је $\mu \ll 1$, па је $T^* \approx T$.

Појам редуковане масе као и редуковане крућосћи опруге примењује се и у другим случајевима када се систем маса или систем опруга редукује на једну масу односно на једну опругу, тј. на систем са једним степеном слободе осциловања.

Нека је на хомогени крути штап AB , дужине l , чију масу занемарујемо, насађено више концентрисаних маса (m_i). Штап се може обртати око зглоба A а у равнотежном положају га придржава опруга CD , крућости c , (сл. 1.15. а).

Иако систем има више маса, због крућосћи штапа, има само један степен слободе кретања, јер се положај маса може одредити помоћу генерализане координате φ . Означимо са a_i положаје маса m_i од A а са a положај тачке D , онда су поме-



Сл. 1.15. — Редуција маса

рања маса и тачке D , тј. издужење опруге и брзине, (сл. 1.15. b),

$$y_i = a_i \varphi, \quad y = a \varphi; \quad \dot{y}_i = a_i \dot{\varphi}; \quad \dot{y} = a \dot{\varphi}.$$

Кинетичка и потенцијална енергија система су

$$E_k = \sum_i 1/2 m_i \dot{y}_i^2 = \dot{\varphi}^2 \sum_i 1/2 m_i a_i^2;$$

$$E_p = 1/2 c y^2 - \sum_i m_i g y_i = 1/2 c a^2 \varphi^2 - \varphi \sum_i m_i g a_i,$$

па је због $\dot{\varphi} d\varphi = \ddot{\varphi} d\varphi$, једначина

$$d(E_k + E_p) = (\ddot{\varphi} \sum_i m_i a_i^2 + c a^2 \varphi - g \sum_i m_i a_i) d\varphi = 0,$$

односно

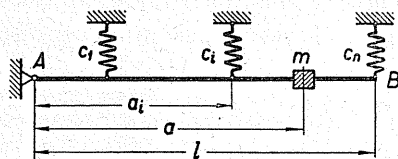
$$\ddot{\varphi} \sum m_i a_i^2 + c a^2 \varphi = g \sum m_i a_i.$$

Квадрат кружне фреквенције је

$$\omega^2 = c/m^*; \quad m^* = \sum_{i=1}^n m_i (a_i/a)^2, \quad (27)$$

где је m^* маса система редукована на тачку везивања опруге (D).

У случају да је на штап насађена само једна маса m на удаљењу a од A , (сл. 1.16.), а да штап придржава више опруга крутости c_i на удаљењима a_i од A , онда, слично претходном поступку, добијамо да су:



Сл. 1.16. — Редуција крутости опруга

$$E_k = 1/2 m \dot{y}^2 = 1/2 m a^2 \dot{\varphi}^2;$$

$$E_p = -m g a \varphi + \varphi^2 \sum_{i=1}^n 1/2 c_i a_i^2,$$

па је једначина

$$m a^2 \ddot{\varphi} + \varphi \sum_{i=1}^n c_i a_i^2 - m g a = 0,$$

те је кружна фреквенција

$$\omega^2 = \frac{\sum c_i a_i^2}{m a^2} = \frac{\sum c_i (a_i/a)^2}{m} = \frac{c^*}{m}; \quad c^* = \sum_{i=1}^n c_i (a_i/a)^2, \quad (28)$$

где је c^* редукована крутост система опруга на концентрисану масу (m).

1.7. Попречне осцилације греде са једном концентрисаном масом. — На лакој греди AB , распона l , чију масу занемарујемо ($M=0$), налази се концентрисана маса (терет) тежине $G = mg$ (сл.1.17. а). Услед дејства терета (G) греда ће се деформисати и оса греде AB прелази у еластичну линију греде, па ће се добити нови равношежни положај. Тада се као и код вертикалног хармонијског осцилатора тежина терета (G) уравниотежила са силом еластичности опруге (овде флексионе опруге, $G = mg = cf_s$, где је f_s *статички угиб пресека греде* у коме дејствује концентрисана сила $F = G$, а c је *крутост опруге*).

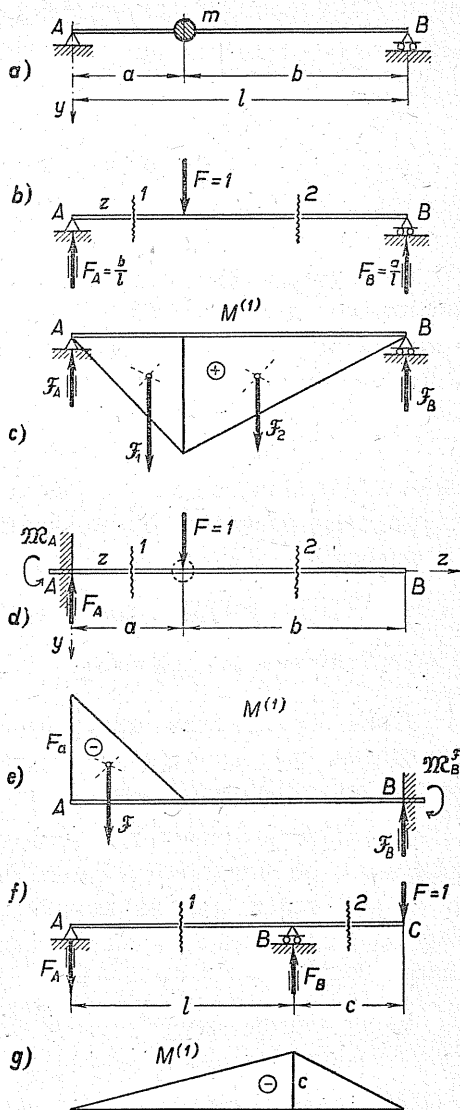
Када се сада маса (m) изведе из новог равнотежног положаја и пусти наступиће осцилације масе око новог равнотежног положаја, па су према (17 а) енергије и једначина осциловања

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{y}^2; \quad E_p = \frac{1}{2} c y^2;$$

$$m \ddot{y} + c y = 0; \quad \omega^2 = c/m. \quad (29)$$

Кретање је хармонијско осциловање, кружне фреквенције ω .

Из отпорности материјала* је познато да је статички угиб греде на месту дејства концентрисаног терета једнак $f_s = F \alpha_{11}$, где је α_{11} *Maxwell-ов ушцајни коефицијент за померање*, тј. *јединични угиб* (угиб услед дејства јединичне силе). Према томе биће крутост,



Сл. 1.17. — Попречне осцилације масе на греди

* Отпорност материјала, стр. 161.

кружна фреквенција и период осциловања

$$f_s = \frac{F}{c} = F \alpha_{11}; \quad c = \frac{1}{\alpha_{11}}; \quad \omega^2 = \frac{c}{m} = \frac{g}{G \alpha_{11}}; \quad (30)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{G \alpha_{11}}{g}}.$$

Закон осциловања за почетне услове $t = t_0$, $y = y_0$ и $\dot{y}_0 = 0$ је

$$y = A \cos \omega t + B \sin \omega t; \quad y = y_0 \cos \omega t, \quad (31)$$

где је оса Ay усмерена наниже како се ради и код одређивања угиба.

Међутим, често се у техничкој пракси осциловање рачуна од равнотежног положаја AB , као да је лака греда хармонијски осцилатор са подлогом (сл. 1.6.). Тада је диференцијална једначина облика (16 а) па је решење

$$m\ddot{y} + cy = mg; \quad y = A \cos \omega t + B \sin \omega t + (g/\omega^2).$$

Како су сада почетни услови за $t=0$ је $y_0=0$ и $\dot{y}_0=0$, где је y мерено од осе Az (равнотежног положаја AB), то су константе $A = -g/\omega^2 = -mg/m\omega^2 = -G/c = f_s$, $B=0$, па је закон осциловања

$$y = f_s (1 - \cos \omega t); \quad f_s = G \alpha_{11}, \quad \omega^2 = g/f_s. \quad (32)$$

За $\omega t = \pi$ доби а се $y_{\max} = 2f_s$.

Овим се проблем одређивања кружне фреквенције и периода осциловања свео на одређивање угиба греде испод концентрисане силе односно на одређивање утицајног коефицијента.

Као што је познато из отпорности материјала* угиб пресека на удаљењу z од левог краја греде (просте греде сл. 1.17. а или конзоле, сл. 1.17. d) услед дејства концентрисане силе F у пресеку удаљеном за a од левог краја може се одредити помоћу једначина еластичне линије

а) за *просћу греду*

$$f_s = Fk [\varphi(z, a) + \chi(z, a)] \quad (33 a)$$

б) за *конзолу*

$$f_s = Fk [\psi(z, a) + \chi(z, a)], \quad (33 b)$$

* Отпорност материјала, стр. 161.

где су φ , ψ и χ *Греен-ове специјалне инфлуеншне функције*:

$$\begin{aligned}\varphi(z, a) &= \frac{1}{6} \frac{z}{l} \frac{b}{l} \left[1 - \left(\frac{b}{l} \right)^2 - \left(\frac{z}{l} \right)^2 \right]; & b &= l - a; \\ \psi(z, a) &= \frac{1}{6} \left(\frac{z}{l} \right)^2 \left[3 \frac{a}{l} - \frac{z}{l} \right]; & l &= a + b; \\ \chi(z, a) &= \frac{1}{6} \left(\frac{z - a}{l} \right)^3.\end{aligned}\quad (34)$$

Овде су: a пресек у коме дејствује терет ($F = G$), z пресек у коме се тражи угиб, $k = l^3/\mathfrak{B}$ *коэффициент гйккости греде* (јединице cm/kg), $\mathfrak{B} = EI_x$ *савојна крушост греде* (јединице kgcm^2). За пресеке лево од концентрисане силе ($z < a$) узима се само део лево од „масне црпе“ (I), а за пресеке десно од терета ($z > a$) узима се и десни део од масне црте, тј. цела једначина. При овоме је претпостављено да је координатни почетак у левом ослоњу (укљештењу) A и да је $+Ax$ оса усмерена наниже како би се добили позитивни угиби.

За одређивање утицајног коэффицијента треба ставити $F = 1$ па је утицајни коэффициент за пресек у коме дејствује јединична сила

а) за *просћу греду*

$$\alpha_{11} = \frac{k}{3} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \left(\frac{b}{l} \right)^2; \quad k = \frac{l^3}{\mathfrak{B}}; \quad (35 a)$$

б) за *конзолу*

$$\alpha_{11} = \frac{k}{3} \left(\frac{a}{l} \right)^3; \quad k = \frac{l^3}{\mathfrak{B}}. \quad (35 b)$$

За одређивање утицајних коэффицијената користи се и *графоаналитичка метода*. Дијаграм момента услед јединичног оптерећења ($F = 1$) треба узети за ново „*фиктивно оптерећење*“, тада је трансверзална сила у пресеку подељена крутошћу ($\mathfrak{B} = EI_x$) нагиб а момент подељен крутошћу угиб односно утицајни коэффициент α_{ik} .

На пример, за случај просте греде (сл. 1.17. c) биће

$$F = 1; \quad F_A = Fb/l = b/l, \quad F_B = a/l; \quad \mathfrak{F}_1 = a^2 b/2l; \quad \mathfrak{F}_2 = ab^2/2l;$$

па је $\mathfrak{F}_A = [\mathfrak{F}_1 \cdot 2a/3 + \mathfrak{F}_2(l - 2b/3)]/l$,

$$\alpha_{11} = [\mathfrak{F}_A a - \mathfrak{F}_1 a/3] / \mathfrak{B} = \frac{1}{3} k (a/l)^2 (b/l)^2$$

те се добија иста вредност као и (35 a).

Из отпорности материјала познато је да између деформационог рада при савијању и угиба постоји овај однос

$$A_{df} = \sum \frac{1}{2\mathfrak{B}} \int M_f^2 dz; \quad f_s = \frac{\partial A_{df}}{\partial F} = \sum \frac{1}{\mathfrak{B}} \int M_f \frac{\partial M_f}{\partial F} dz.$$

За случај јединичне силе парцијални извод $\partial M_f / \partial F$ је једнак моменту услед јединичног оптерећења, па се утицајни коефицијент за пресек испод силе може одредити овим обрасцем

$$\alpha_{11} = \sum \frac{1}{\mathfrak{B}} \int [M^{(1)}]^2 dz, \quad (36)$$

где знак збира показује да изразе за момент треба узети лево и десно од пресека у коме дејствује сила.

Тако добијамо

a) за *просћу греду* (сл. 1.17. b):

$$F_A = b/l; \quad F_B = a/l; \quad M_{(1)}^{(1)} = bz/l; \quad M_{(2)}^{(1)} = az/l,$$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{\mathfrak{B}} \left[\int_0^a \left(\frac{b}{l} z \right)^2 dz + \int_0^b \left(\frac{a}{l} z \right)^2 dz \right] = \frac{a^2 b^2}{3 \mathfrak{B} l};$$

b) за *конзолу* (сл. 1.17. d, e):

$$M^{(1)} = z; \quad \alpha_{11} = \frac{1}{\mathfrak{B}} \int_0^l z^2 dz = \frac{l^3}{3 \mathfrak{B}} = \frac{k}{3};$$

c) за *греду са прејусћом* (сл. 1.17. f, g), $\overline{BC} = c$, биће:

$$F_A = -c/l; \quad F_B = (c+l)/l; \quad M_1^{(1)} = -cz/l; \quad M_2^{(1)} = z;$$

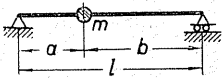

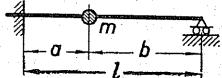
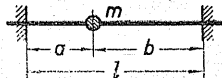
$$\alpha_{11} = \frac{1}{\mathfrak{B}} \left[\int_0^l \left(\frac{cz}{l} \right)^2 dz + \int_0^c z^2 dz \right] = \frac{c^2}{3 \mathfrak{B}} (l+c).$$

Код статички неодређених носача треба претходно одредити статичке непознате, па онда угибе услед силе и ових непознатих.

Важнији случајеви дати су у табlici 1.1.

Чест је случај у пракси да је концентрисана маса обешена помоћу опруге која је везана за греду. Тада сматрамо да су флексиона опруга

Таблица 1.1.

Ред. број	С л у ч а ј	Утицајни коефицијент	Крутост	Квадрат кр. фреквенције	Период осциловања
		α_{11}	$c=1/\alpha_{11}$	$\omega^2 = \frac{1}{m \alpha_{11}}$	$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{m \alpha_{11}}$
1		$\frac{l^3}{3\mathfrak{B}} \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(\frac{b}{l}\right)^2$ ✓	$\frac{3\mathfrak{B}}{l^3} \frac{1}{(a/l)^2 (b/l)^2}$ ✓	$\frac{3\mathfrak{B}}{m l^3} \frac{1}{(a/l)^2 (b/l)^2}$ ✓	$2\pi \sqrt{\frac{m l^3}{3\mathfrak{B}} \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(\frac{b}{l}\right)^2}$ ✓
1a	$a=b=1/2 l$	$\frac{l^3}{48\mathfrak{B}}$	$\frac{48\mathfrak{B}}{l^3}$	$\frac{48\mathfrak{B}}{m l^3}$	$2\pi \sqrt{\frac{m l^3}{48\mathfrak{B}}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m l^3}{3\mathfrak{B}}}$
2		$\frac{l^3}{3\mathfrak{B}} \left(\frac{a}{l}\right)^3$ ✓	$\frac{3\mathfrak{B}}{l^3} \cdot \frac{1}{(a/l)^3}$ ✓	$\frac{3\mathfrak{B}}{m l^3} \frac{1}{(a/l)^3}$ ✓	$2\pi \sqrt{\frac{m l^3}{3\mathfrak{B}} \left(\frac{a}{l}\right)^3}$ ✓
2a	$a=l$	$\frac{l^3}{3\mathfrak{B}}$	$\frac{3\mathfrak{B}}{l^3}$	$\frac{3\mathfrak{B}}{m l^3}$	$2\pi \sqrt{\frac{m l^3}{3\mathfrak{B}}}$
3		$\frac{l^3}{12\mathfrak{B}} \left(\frac{a}{l}\right)^3 \left(\frac{b}{l}\right)^2 \left(3 + \frac{b}{l}\right)$ ✓	$\frac{12\mathfrak{B}}{l^3} \cdot \frac{1}{\left(3 + \frac{b}{l}\right)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{a}{l}\right)^3 \left(\frac{b}{l}\right)^2}$ ✓	$\frac{12\mathfrak{B}}{m l^3} \frac{1}{\left(3 + \frac{b}{l}\right)} \frac{1}{\left(\frac{a}{l}\right)^3 \left(\frac{b}{l}\right)^2}$ ✓	$2\pi \sqrt{\frac{m l^3}{12\mathfrak{B}} \left(3 + \frac{b}{l}\right) \left(\frac{a}{l}\right)^3 \left(\frac{b}{l}\right)^2}$ ✓
3a	$a=b=1/2 l$	$\frac{7}{768} \frac{l^3}{\mathfrak{B}}$	$\approx \frac{110\mathfrak{B}}{l^3}$	$\approx \frac{110\mathfrak{B}}{m l^3}$	$\approx 2\pi \sqrt{\frac{m l^3}{110\mathfrak{B}}}$
4		$\frac{l^3}{3\mathfrak{B}} \left(\frac{a}{l}\right)^3 \left(\frac{b}{l}\right)^3$	$\frac{3\mathfrak{B}}{l^3} \frac{1}{(a/l)^3} \cdot \frac{1}{(b/l)^3}$	$\frac{3\mathfrak{B}}{m l^3} \frac{1}{\left(\frac{a}{l}\right)^3 \left(\frac{b}{l}\right)^3}$	$2\pi \sqrt{\frac{m l^3}{3\mathfrak{B}} \left(\frac{a}{l}\right)^3 \left(\frac{b}{l}\right)^3}$
4a	$a=b=1/2 l$	$\frac{l^3}{192\mathfrak{B}}$	$\frac{192\mathfrak{B}}{l^3}$	$\frac{192\mathfrak{B}}{m l^3}$	$\frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{m l^3}{3\mathfrak{B}}}$

$\mathfrak{B} = E I_x = \text{const}$, крутост при савијању (flexural rigidity)

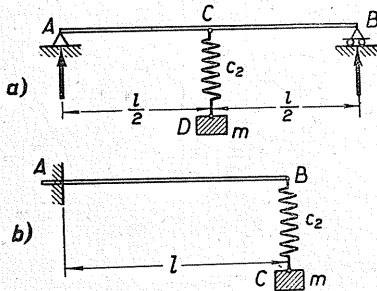
(греда) и опруга везане *редно* (сл. 1.18.). За случај масе на половини распона просте греде (сл. 1.18. *a*) биће:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = \alpha_{11} + \frac{1}{c_2} = \frac{k}{48} + \frac{1}{c_2}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}; \quad (37a)$$

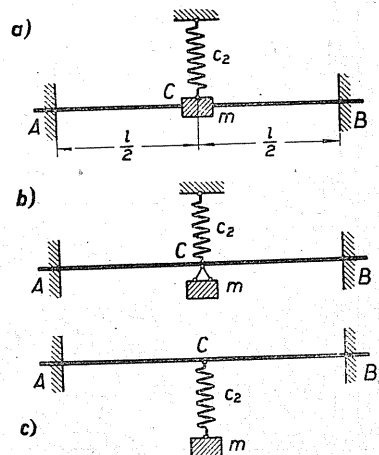
док је за случај конзоле (сл. 1.18. *b*)

$$\frac{1}{c} = \alpha_{11} + \frac{1}{c_2} = \frac{k}{3} + \frac{1}{c_2}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (37b)$$

Спрезање крутости опруга зависи од начина постављања масе (m) на греди (флексионој опрузи). На сл. 1.19. приказана су три карактеристична случаја постављања. У првом



Сл. 1.18. Редно спрезање флексионе и завојне опруге



Сл. 1.19. — Карактеристични случајеви постављања масе на греди

случају (сл. 1.19. *a*) маса је *непосредно* стављена на греду а за масу је везана опруга, те је веза *паралелна*, па је

$$c = c_1 + c_2 = \frac{1}{\alpha_{11}} + c_2; \quad \alpha_{11} = \frac{k}{192}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}.$$

У другом случају (сл. 1.19. *b*) греда је прекинута и оба су дела везана *зглобом* о који је обешен терет, а опруга је везана за зглоб, те је веза опруга *паралелна*, па је

$$c = \frac{1}{\alpha_{11}} + \frac{1}{\alpha_{11}} + c_2 = 2 \cdot \frac{24}{k} + c_2 = \frac{48}{k} + c_2; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}.$$

У трећем случају (сл. 1.19. *c*) је веза опруга *редна*, те је

$$\frac{1}{c} = \alpha_{11} + \frac{1}{c_2} = \frac{k}{192} + \frac{1}{c_2}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Као и код хармонијског осцилатора (сл. 1.14.) може се помоћу методе енергије узети у обзир и маса греде („маса флексионе објруге“) и иста редуковати на тачку у којој дејствује концентрисана маса (сл. 1.20. а).

Закон осциловања концентрисане масе (m) за случај да се осцилације рачунају од равнотежног положаја AB греде дат је једначином (32). Претпоставићемо да и све елементарне масе (dM) масе греде M осцилују по истом закону и да је линија њихових амплитуда статичка еластична линија пресека греде услед концентрисане силе ($F = G = mg$).

Означимо са y_s угиб елементарне масе $dM = q dz/g$, где је q тежина јединице дужине греде (kg/cm), онда важе ове релације:

$$y = f_s (1 - \cos \omega t); \quad \dot{y} = f_s \omega \sin \omega t; \quad (38 a)$$

$$\eta = y_s (1 - \cos \omega t); \quad \dot{\eta} = y_s \omega \sin \omega t; \quad (38 b)$$

те упоређивањем добијамо

$$\frac{y}{y_s} = \frac{\dot{y}}{\dot{y}_s} = \frac{y_s}{f_s}; \quad \dot{\eta}_{\max} = \frac{y_s}{f_s} \dot{y}_{\max} = \lambda f_s \omega \cdot u(z). \quad (39)$$

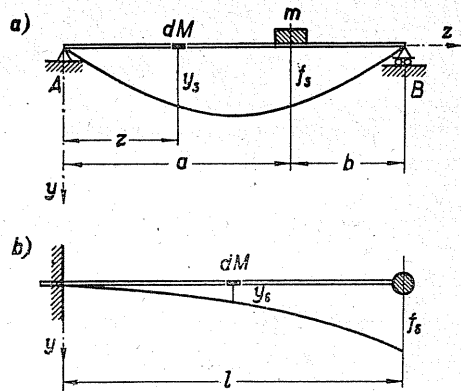
Угиб пресека лево од концентрисане силе (F) и угиб испод силе (F) износе

$$y_s = \frac{F l^3}{3 \mathfrak{B}} \varphi(z, a) = \frac{F b}{6 \mathfrak{B} l} [(l^2 - b^2) z - z^3]; \quad f_s = f_F = \frac{F a^2 b^2}{3 \mathfrak{B} l}, \quad (40)$$

па је однос угиба

$$\frac{y_s}{f_s} = \lambda u(z) = \frac{1}{2 a^2 b} u(z); \quad u_l(z) = (l^2 - b^2) z - z^3; \quad u_d(z) = (l^2 - a^2) z - z^3, \quad (41)$$

где се функција $u_l(z)$ односи на леви део греде ($z < a$) а $u_d(z)$ на десни део греде. При томе се a и b и координате $z_{(l)}$ и $z_{(a)}$ мере од ослонаца до терета (F).



Сл. 1.20. — Утицај масе греде

Кинетичка енергија система састоји се из енергија масе (m) и масе греде (M). Екстремне вредности од обе енергије једновремене су, те је максимална кинетичка енергија система

$$E_{k \max} = \frac{1}{2} m f_s^2 \omega^2 + \sum \int \frac{1}{2} \frac{q dz}{g} \Big|_{1 \max} = E_{k \max}^{(m)} + E_{k \max}^{(M)},$$

пошто је максимална кинетичка енергија масе греде

$$\begin{aligned} E_{k \max}^{(M)} &= \sum \int \frac{1}{2} \frac{q dz}{g} \lambda^2 f_s^2 \omega^2 [u(z)]^2 dz = \\ &= \frac{M \omega^2 f_s^2}{8 a^4 b^2 l} \left[\int_0^a [(l^2 - b^2) z - z^3]^2 dz + \int_0^b [(l^2 - a^2) z - z^3]^2 dz \right] = \frac{1}{2} M^* f_s^2 \omega^2. \end{aligned}$$

Редукована маса прости греде (M^*) на пресек у коме дејствује концентрисана маса (m) износи:

$$\begin{aligned} M^* &= \frac{M}{420 \alpha^4 \beta^2} \{ 15 (\alpha^7 + \beta^7) - 42 (\alpha^5 + \beta^5) + 35 (\alpha^3 + \beta^3) + \\ &+ 42 \alpha^2 \beta^2 (\alpha^3 + \beta^3) + 35 \alpha^2 \beta^2 (\alpha + \beta) (\alpha \beta - 2) \}, \end{aligned} \quad (42)$$

где су $\alpha = a/l$, $\beta = b/l$.

Максимална потенцијална енергија греде је енергија масе (m), те се према методи енергије добија

$$E_{k \max} = E_{p \max}; \quad \frac{1}{2} f_s^2 \omega^2 (m + M^*) = \frac{1}{2} c f_s^2 = \frac{f_s^2}{2 \alpha_{11}}, \quad (43)$$

па су кружна фреквенција и период осциловања

$$\omega^2 = \frac{c}{m + M^*} = \frac{1}{(m + M^*) \alpha_{11}}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{(m + M^*) \alpha_{11}}. \quad (44)$$

На пример, када је маса m на половини распона прости греде тада је $\alpha = \beta = 1/2$, па је редукована маса греде

$$M^* = M \frac{64}{420} \cdot \frac{1}{64} [15 - 168 + 560 + 42 - 245] = \frac{17}{35} M.$$

Стога су кружна фреквенција и период осциловања

$$\alpha_{11} = \frac{l^3}{48 \mathfrak{B}}; \quad \omega^2 = \frac{48 \mathfrak{B}}{(m + \frac{17}{35} M) l^3}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Код конзоле оптерећене на слободном крају силом F биће једначина еластичне линије и угиб испод силе (сл. 1.20. *b*)

$$y_s = \frac{f_s}{2l^3} (3lz^2 - z^3); \quad f_s = f_F = \frac{Fl^3}{3\mathfrak{B}}; \quad \lambda = \frac{1}{2l^3};$$

те је максимална кинетичка енергија масе греде

$$\begin{aligned} E_{k\max} &= \int_0^l \frac{1}{2} \frac{q dz}{g} \lambda^2 f_s^2 \omega^2 (3lz^2 - z^3)^2 dz = \\ &= \frac{M}{8l^6} f_s^2 \omega^2 \int_0^l (3lz^2 - z^3)^2 dz = \frac{1}{2} M^* f_s^2 \omega^2. \end{aligned}$$

Редукована маса греде, кружна фреквенција и период осциловања су

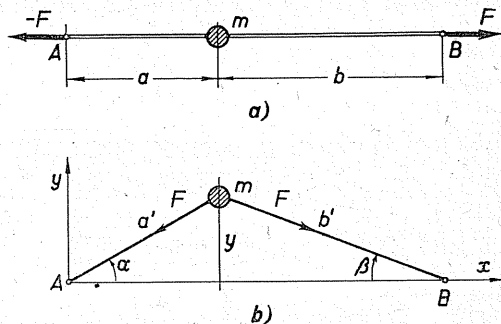
$$M^* = \frac{33}{140} M; \quad \omega^2 = \frac{1}{(m+M^*)\alpha_{11}}; \quad \alpha_{11} = \frac{l^3}{3\mathfrak{B}}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{(m+M^*)\alpha_{11}}. \quad (45)$$

Овако бисмо поступили и у другим случајевима само треба знати једначину еластичне линије услед концентрисане силе и угиб пресека у коме дејствује концентрисана сила.

Када је маса греде $M \ll m$, тада се њен утицај може занемарити.

1.8. Попречне осцилације масе на струни.

— На струни (нити) AB , дужине l , која је у A и B затегнута аксијалним силама F , налази се маса m (сл. 1.21. *a*). Када се маса изведе из равнотежног положаја AB управно на правац струне и пусти наступиће њено осциловање око равнотежног положаја под утицајем промене правца затезне силе у деловима струне. Диференцијалне једначине кретања масе (сл. 1.21. *b*) биће:



Сл. 1.21. — Осцилације масе на струни

$$m \ddot{x} = \sum X_i = F(\cos \beta - \cos \alpha) = F \left(\frac{b}{b'} - \frac{a}{a'} \right) = 0;$$

$$m \ddot{y} = \sum Y_i = -F(\sin \alpha + \sin \beta) \approx -F(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = -F \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) y.$$

Пошто су

$$b' = b(1 + \varepsilon), \quad a' = a(1 + \varepsilon), \quad \sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha, \quad \sin \beta \approx \operatorname{tg} \beta,$$

то је диференцијална једначина осциловања

$$m \ddot{y} + \frac{Fl}{ab} y = \ddot{y} + \frac{c}{m} y = \ddot{y} + \omega^2 y = 0. \quad (46 a)$$

Осциловање је хармонијско, кружном фреквенцијом ω и периодом T , док је крутост струне

$$c = \frac{Fl}{ab}; \quad \omega^2 = \frac{c}{m} = \frac{Fl}{G ab} g; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (46 b)$$

Овим се проблем осциловања масе на струни („проблем осциловања перле“) своди на предходни случај само је друкчија крутост c .

На пример, за $a=b=l/2$ биће $c=4F/l$, па је $\omega^2=4F/ml$ и период $T=2\pi/\omega = \pi\sqrt{Gl/Fg}$.

1.9. Слагање колинеарних осцилација. — Две или више колинеарних осцилација различитих амплитуда, фреквенција и фаза могу се сложити у једну једину осцилацију колинеарну са овима. Када су осцилације исте фреквенције оне се зову синхроне, у противном су асинхроне.

1.9.1. Синхроне колинеарне осцилације. — Две синхроне колинеарне осцилације, различитих амплитуда и померања фаза

$$x_1 = a \cos(\omega t + \alpha_1), \quad x_2 = b \cos(\omega t + \alpha_2), \quad (47)$$

могу се сложити у једну колинеарну осцилацију

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = (a \cos \alpha_1 + b \cos \alpha_2) \cos \varphi - (a \sin \alpha_1 + b \sin \alpha_2) \sin \varphi = \\ &= A \cos \varphi - B \sin \varphi, \quad \varphi = \omega t, \end{aligned}$$

која сменама

$$A = a \cos \alpha_1 + b \cos \alpha_2 = R \cos \alpha, \quad B = a \sin \alpha_1 + b \sin \alpha_2 = R \sin \alpha,$$

постаје

$$x = x_1 + x_2 = R \cos(\omega t + \alpha). \quad (48)$$

Амплитуда и померање фазе износе

$$R = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}; \quad (49)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B}{A} = \frac{a \sin \alpha_1 + b \sin \alpha_2}{a \cos \alpha_1 + b \cos \alpha_2}.$$

На пример, осцилације

$$x_1 = 3 \cos(t + \pi/6), \quad x_2 = 5 \cos(t + \pi/2)$$

слажу се у једну осцилацију

$$x = 7 \cos(t + \alpha); \quad R = 7; \quad \operatorname{tg} \alpha = 13\sqrt{3}/9; \quad \alpha = 68^\circ 10'.$$

Користећи комплексне бројеве могу се ове две осцилације сабрати и графички помоћу закона сабирања комплексних бројева. Због тога узмемо ли једначине (47) у комплексном облику*

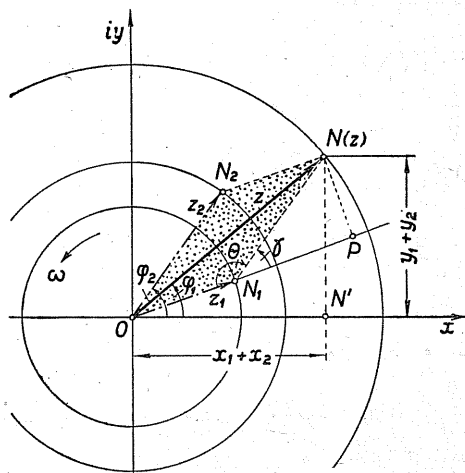
$$z_1 = a e^{\varphi_1 i},$$

$$z_2 = b e^{\varphi_2 i},$$

$$\varphi_i = \omega t + a_i,$$

тада је збир комплексних бројева нови комплексни број

$$\begin{aligned} z &= z_1 + z_2 = x + iy = \\ &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = \\ &= R e^{\varphi i}, \end{aligned}$$



Сл. 1.22. — Слагање колинеарних синхроних осцилација

који је потпуно одређен дужицом дијагоналном паралелограма вектора са заједничком почетном тачком, (сл. 1.22.). Његов модул и померање фазе у односу на први вектор z_1 биће

$$\begin{aligned} |z| = R &= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}; \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{NP}{OP} = \frac{b \sin \gamma}{a + b \cos \gamma}; \quad \gamma = \alpha_2 - \alpha_1. \end{aligned}$$

Реални део представља резултујућу осцилацију у x правцу а имагинарни део осцилацију у y правцу, те су

$$x = \Re(z) = R \cos(\omega t + \alpha_1 + \theta); \quad y = \Im(z) = R \sin(\omega t + \alpha_1 + \theta).$$

Из изложеног видимо да се две колинеарне синхроне осцилације увек слажу у једну осцилацију исте кружне фреквенције (ω) и периода T , али померене фазе ($\alpha = \alpha_1 + \theta$). Ако се вектори z_1 и z_2 обрћу око тачке O константном угаоном брзином ω онда се и њихов вектор-

* $(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)^n = \cos n \varphi \pm i \sin n \varphi$, (Moivre); $e^{\varphi i} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, (Euler).

ски збир z обрће истом угаonom брзином око тачке O . Завршна тачка овог вектора лежи на кругу полупречника R , једнаком амплитуди резултујуће осцилације.

На сл. 1.23. приказан је пример слагања колинеарних осцилација

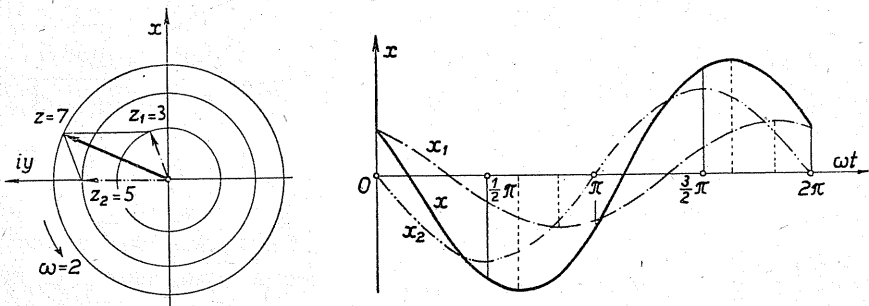
$$x_1 = 3 \cos(2t + 1/6 \pi), \quad x_2 = 5 \cos(2t + 1/2 \pi).$$

Тада је

$$R = 7; \quad \operatorname{tg} \theta = 0,786; \quad \theta = 38^\circ 10',$$

па је

$$\alpha = 30^\circ + 38^\circ + 10' = 68^\circ 10'.$$



Сл. 1.23. — Слагање осцилација $x_1 = 3 \cos(2t + 1/6 \pi)$ и $x_2 = 5 \cos(2t + 1/2 \pi)$.

Специјални случајеви јесу:

1^о Ако је $a \neq b$ али је разлика почетних фаза $1/2 \pi$, онда се паралелограм вектора претвара у *правоугаоник*, (сл. 1.24. а).

На пример, за $x_1 = a \cos \omega t$, $x_2 = b \sin \omega t$, биће $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi/2$, па је $R = (a^2 + b^2)^{1/2}$; $\operatorname{tg} \alpha = b/a$.

2^о Ако је $a \neq b$ а разлика фаза је $\alpha_2 - \alpha_1 = 2n\pi$, онда је $x = R \cos(\omega t + \alpha)$; $R = a + b$; $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$. Када је у овом случају $a = b$ тада је $R = 2a$ па се таласање назива *јакo* (сл. 1.24. б).

3^о Ако је $a \neq b$ и $a > b$ а фазна разлика је $\alpha_2 - \alpha_1 = (2n + 1)\pi$ онда је амплитуда $R = a - b$ (сл. 1.24. с). Када је и $a = b$, тада је $R = 0$, па тачка *мирује*.

Више синхроних колинеарних осцилација различитих амплитуда и померања фаза

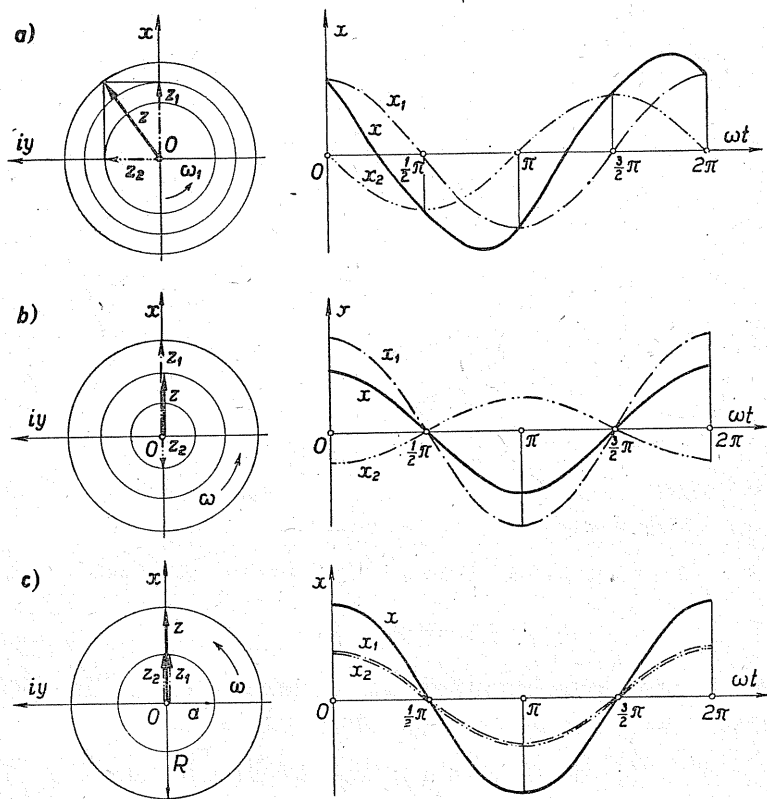
$$x_i = a_i \cos(\omega t + \alpha_i)$$

могу се сложити у једну осцилацију истог правца и кружне фреквенције

$$x = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n a_i \cos(\omega t + \alpha_i) = A \cos \omega t - B \sin \omega t = R \cos(\omega t + \alpha), \quad (50 a)$$

где су

$$A = \sum_{i=1}^n a_i \cos \alpha_i = R \cos \alpha; \quad B = \sum_{i=1}^n a_i \sin \alpha_i = R \sin \alpha, \quad (50 b)$$



Сл. 1.24. — а) Фазна разлика $\pi/2$; б) јако таласање; в) фазна разлика $(2n+1)\pi$

па су амплитуда и померање фазе одређени једначинама

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = B/A. \quad (50 c)$$

Како су

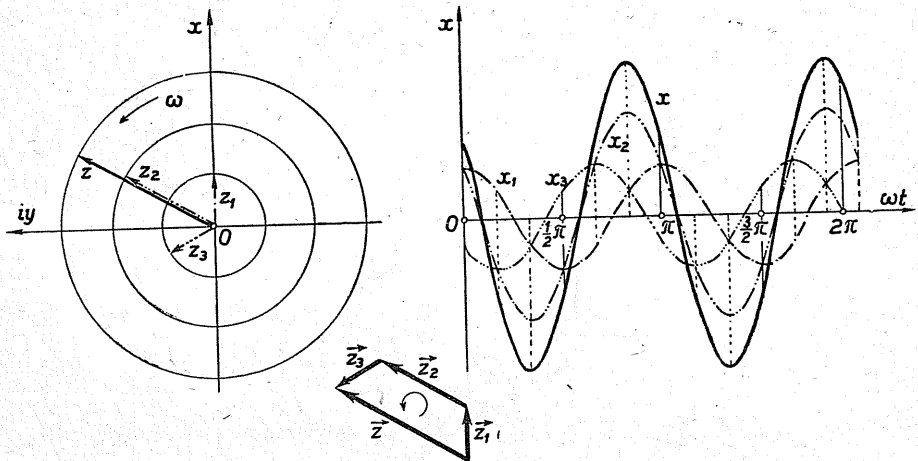
$$A^2 = \left[\sum_{i=1}^n a_i \cos \alpha_i \right]^2 = \sum_i \sum_j a_i a_j \cos \alpha_i \cos \alpha_j;$$

$$B^2 = \sum_i \sum_j a_i a_j \sin \alpha_i \sin \alpha_j,$$

то ће квадрат амплитуде бити

$$R^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \cos(\alpha_i - \alpha_j). \quad (50 d)$$

Геометријски посматрано проблем се своди на сабирање *система вектора са заједничком почетном тачком*. Резултанта је одређена завршном страном полигона вектора (сл. 1.25.).



Сл. 1.25. — Слагање више колинеарних синхроних осцилација

На сл. 1.25. је показан поступак за осцилације

$$x_1 = 2 \cos 2t; \quad x_2 = 4 \cos(2t + \frac{1}{3}\pi); \quad x_3 = 2 \cos(2t + \frac{2}{3}\pi),$$

на је

$$A^2 = 9, \quad B^2 = 27, \quad R = 6; \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}; \quad \alpha = \frac{1}{3}\pi.$$

1.9.2. Асинхроне колинеарне осцилације. — Две асинхроне колинеарне осцилације различитих амплитуда и фаза

$$x_1 = a \cos(\omega_1 t + \alpha_1); \quad x_2 = b \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \quad (51 a)$$

могу се сложити у једну колинеарну осцилацију која може имати периодички или аперидички карактер кретања што зависи од тога да ли су кружне фреквенције ω_1 и ω_2 *самерљиве* или *несамерљиве* величине.

Ако се стави

$$a = (a+b)/2 + (a-b)/2; \quad b = (a+b)/2 - (a-b)/2; \quad \varphi_1 = \omega_1 t + \alpha_1,$$

биће

$$x = x_1 + x_2 = \frac{1}{2}(a+b) [\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2] + \frac{1}{2}(a-b) [\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2].$$

Како су

$$\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 = 2 \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2};$$

$$\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 = -2 \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2},$$

то је

$$x = (a+b) \left[\cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right] - \\ - (a-b) \left[\sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right] = A \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - B \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2},$$

где су

$$A = (a+b) \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}, \quad B = (a-b) \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}.$$

Сменама $A = R \cos \theta$, $B = R \sin \theta$, обе се осцилације слажу у једну колинеарну осцилацију

$$x = x_1 + x_2 = R \cos [(\varphi_1 + \varphi_2)/2 + \theta] = R \cos (\omega_s t + \alpha) \quad (51 b)$$

где су амплитуда R и померање фазе α променљиве са временом

$$R = (A^2 + B^2)^{1/2} = [a^2 + b^2 + 2ab \cos (\varphi_1 - \varphi_2)]^{1/2} = f(t); \quad (52)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{B}{A} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \theta(t);$$

$$\omega_s = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}; \quad \alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \theta.$$

Када су кружне фреквенције *самерљиве*, тј. ако постоји однос

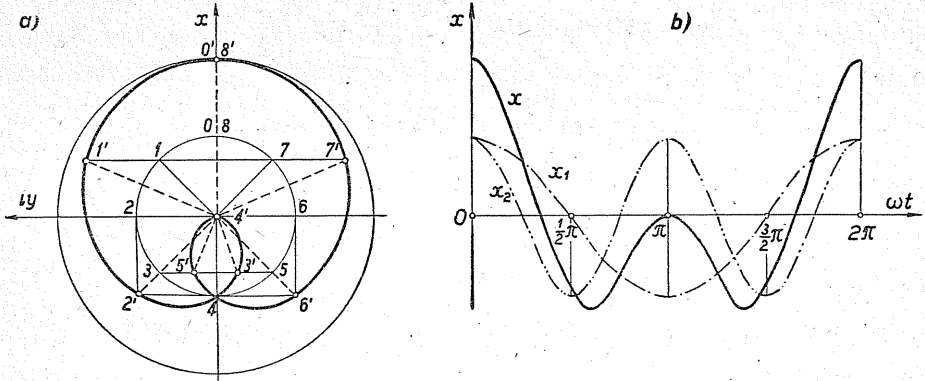
$$\omega_1 = p \omega, \quad \omega_2 = q \omega, \quad \omega_1/\omega_2 = p/q,$$

где су p и q два цела узајамно проста броја а ω највећи заједнички садржалац (мера), тада је резултујуће кретање периодичко, периода

$$T = 2\pi/\omega = pT_1 = qT_2, \quad (53)$$

где су T_1 и T_2 периоди компонентних осцилација. У случају да су ω_1 и ω_2 *несамерљиве* величине кретање има осцилаторни аперидички карактер.

На сл. 1.26. приказан је случај слагања асинхроних осцилација $x_1 = a \cos \omega t$, $x_2 = a \cos 2\omega t$, које се свде на периодичко кретање $x = 2a \cos \frac{\omega t}{2} \cos \frac{3\omega}{2} t = C \cos \frac{3\omega}{2} t$, јер су кружне фреквенције самерљиве $\omega_1/\omega_2 = \omega/2\omega = 1/2$; $T = 2\pi/\omega = T_1 = 2T_2$.

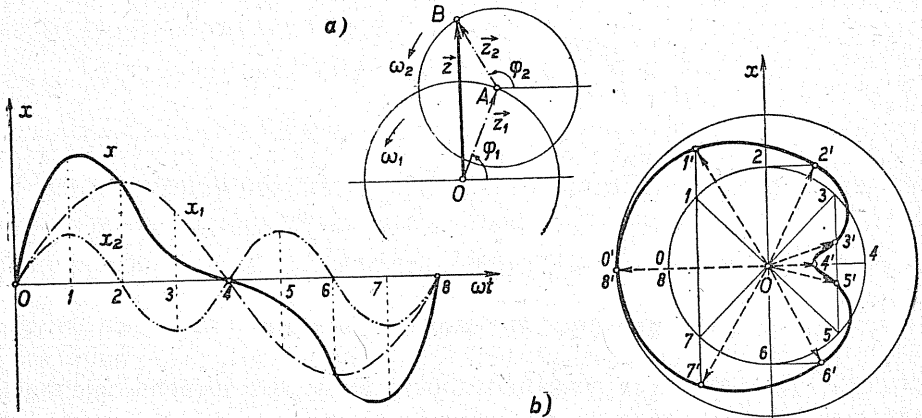


Сл. 1.26. — Слагање асинхроних колинеарних осцилација једнаких амплитуда

Резултујућа осцилација може се извести помоћу комплексних бројева (сл. 1.27. а) па је

$$z = z_1 + z_2 = a e^{(\omega_1 t + \alpha_1) i} + b e^{(\omega_2 t + \alpha_2) i}$$

Вектор z_1 обрће се угаonom брзином ω_1 око средишта O а вектор z_2 изводи два кретања: обртно око своје почетне тачке A угаonom брзи-



Сл. 1.27. — а) Геометријско слагање асинхроних осцилација, б) Асинхроне осцилације $x_1 = 2a \sin \omega t$, $x_2 = a \sin 2\omega t$

ном ω_2 и преносно кретање његове почетне тачке A у односу на тачку O . Ако су оба кретања истосмерна завршна тачка вектора z описује еписцилоиду, у противном хипоциклоиду.

На сл. 1.27. *b* приказано је сабирање осцилација

$$x_1 = 2a \sin \omega t = 2a \cos(\omega t - \pi/2); \quad x_2 = a \sin 2\omega t = a \cos(2\omega t - \pi/2)$$

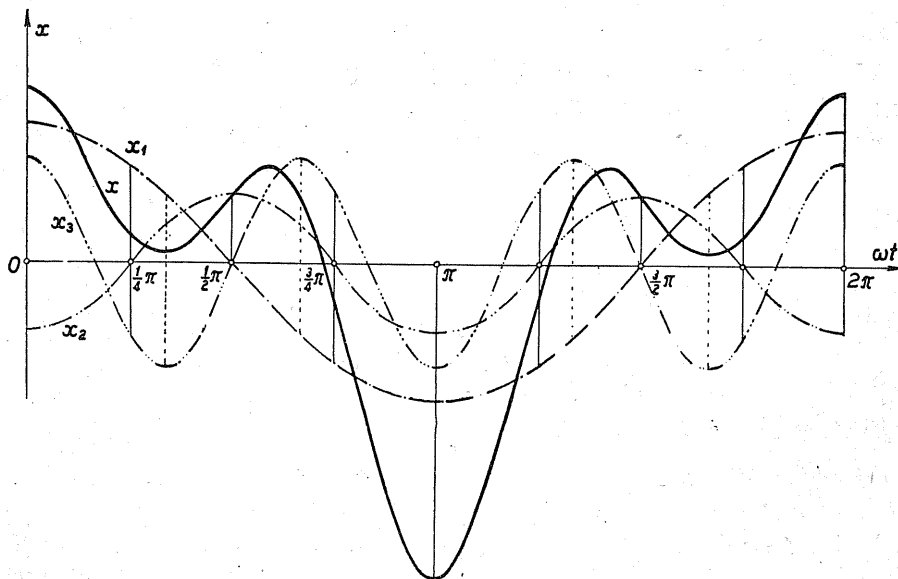
па је

$$R(t) = a\sqrt{5+4\cos\omega t}; \quad \operatorname{tg}\theta = 1/3 \operatorname{tg}(-\omega t/2); \quad T = 2\pi/\omega; \quad \omega_1/\omega_2 = 1/2.$$

Кретање је периодичко.

И више асинхроних осцилација* могу се свести у једну једину осцилацију. Њено кретање је периодичко или аperiodичко што зависи од тога да ли су кружне фреквенције самерљиве или нису.

На пример, ако кружне фреквенције три осцилације стоје у односу $\omega_1:\omega_2:\omega_3 = p:q:r$, где су p, q и r узајамно прости цели бројеви, кретање ће бити периодичко, јер периоди осциловања стоје у истом односу $T = pT_1 = qT_2 = rT_3$.



Сл. 1.28. — Слагање трију колинеарних асинхроних осцилација

На сл. 1.28. приказан је начин сабирања асинхроних осцилација

$$x_1 = 4 \cos \omega t; \quad x_2 = -2 \cos 2\omega t = 2 \cos(2\omega t + \pi); \quad x_3 = 3 \cos 3\omega t.$$

Кретање је периодичко јер постоји однос $\omega_1:\omega_2:\omega_3 = (1:2:3)\omega$, па је период осциловања $T = 2\pi/\omega$.

$$* \cos nx = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{2r} \cos^{n-2r} x \sin^{2r} x;$$

$$\sin nx = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{2r+1} \cos^{n-(2r+1)} x \sin^{(2r+1)} x;$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}; \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

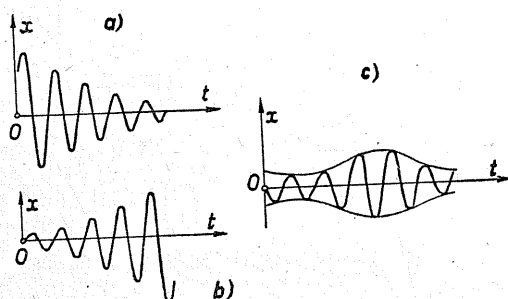
$$\sin \alpha \pm \cos \beta = \pm 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\alpha \mp \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{\alpha \pm \beta}{2} \right).$$

Када је однос кружних фреквенција асинхронних осцилација рационалан кретање је периодичко, у противном је аperiodичко. Међутим, како се сваки ирационалан број може са жељеном тачношћу апроксимирати рационалним бројевима, то је аperiodичко кретање „скоро периодичко” (теорија Harald Bohr-а о „скоро периодичким функцијама”).

1.10. Модулација. — Хармонијско кретање, као што смо видели, може бити и са променљивом амплитудом

$$x = R(t) \cdot \cos(\omega_s t + \alpha). \quad (54)$$

Када је $R(t)$ моношано опадајућа функција тада је и осцилација опадајућа (abklingend), сл. 1.29. а, а када је $R(t)$ моношано растућа функција тада је и осцилација растућа (anschwellend, сл. 1.29. б). Међутим, када је $R(t)$ осцилаторна функција осцилација се зове амплитудно модулирана.



Сл. 1.29. — а, б) Модулација
 с) Синусно амплитудна модулација

Ако је $R(t)$ периодичка функција, њен се период назива период модулације, а кружна фреквенција се зове фреквенција модулације (ω_m). У овоме се случају осцилација може написати у облику

$$x = (a + b \cos \omega_m t) \cos \omega_s t, \quad (55)$$

па је кружна фреквенција осцилације (ω_s) различита од кружне фреквенције модулације (ω_m). Величина b представља *прираштај* (ход) амплитуде, а однос $m = b/a$ зове се *степен модулације*.

Периодичка амплитудна модулирана осцилација (55) може се написати у облику збира трију осцилација

$$x = x_1 + x_2 + x_3 = a \cos \omega_s t + \frac{1}{2} b \cos(\omega_m - \omega_s) t + \frac{1}{2} b \cos(\omega_m + \omega_s) t. \quad (56)$$

Први сабирак x_1 , амплитуде a и кружне фреквенције ω_s , представља основну осцилацију (Trägerschwingung), друга два сабирка су доубунске осцилације (Seitenschwingungen), амплитуда $\frac{1}{2} b$ и кружних фреквенција $\omega_m \pm \omega_s$.

На сл. 1.29. с је приказана једна синусно амплитудно модулирана осцилација.

Помоћу комплексних бројева може се ова осцилација предочити графички. Због тога једначину (18) предочимо у облику

$$z = R e^{\omega t} = (a + b \cos \omega_m t) e^{\omega t}, \quad \omega = \omega_s,$$

онда је модул комплексног броја z променљив са временом и мења се у размаку $|a-b| < |R| < |a+b|$. Обртни вектор је, дакле, променљивог модула а обрће се око тачке O угаоном брзином ω .

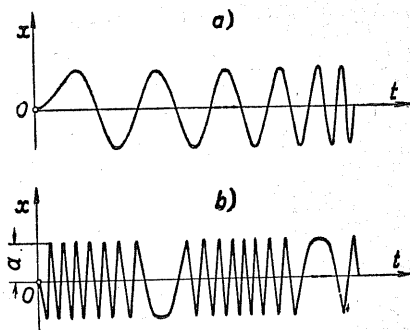
Примена амплитудне модулације је велика у радиофонији, јер треба фреквенцију станице $f = \omega_s/2\pi$ модулирати на фреквенцију музичких инструмената $\omega_m/2\pi$.

Ако је амплитуда хармонијске осцилације *сШална*, али је кружна фреквенција променљива са временом, онда је закон кретања

$$x = R \cdot \cos [\omega_s(t) t + \alpha]. \quad (57)$$

С обзиром на функцију $\omega_s(t)$, осцилација је монотono фреквентно променљива или је, пак, *фреквентно модулирана* ако је $\omega_s(t)$ осцилаторна функција времена (t).

Сл. 1.30. *a* приказује дијаграм монотono фреквентно променљиве осцилације (на пример, залетног осцилатора) а сл. 1.30. *b* фреквентно модулиране осцилације



Сл. 1.30. — Фреквентно променљива и модулирана осцилација

$$x = a \sin \left[\omega_0 t - \frac{\omega_h}{\omega_m} \cos (\omega_m t + \alpha_m) + \alpha_0 \right]. \quad (58)$$

Величина ω_h/π зове се *прираштај фреквенције*, а однос ω_h/ω_0 је *сШейен модулације*.

1.11. Подрхтавање (бијење). — Када су кружне фреквенције двеју асинхроних колинеарних осцилација врло блиске једна другој, тј. када је њихов однос $\omega_1/\omega_2 \approx 1$, наступа појава *подрхтавања* или *бијења* (Schwebungen). Како се ове осцилације могу, према (54), написати као једна осцилација променљиве амплитуде и кружне фреквенције

$$x = R(t) \cos \varphi(t), \quad (59 a)$$

где су

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos [(\omega_1 - \omega_2)t - \gamma]}, \quad \gamma = \alpha_2 - \alpha_1, \quad (59 b)$$

$$\varphi(t) = \frac{(\omega_1 + \omega_2)t + \delta}{2} + \arctg \left[\frac{a-b}{a+b} \operatorname{tg} \frac{(\omega_1 - \omega_2)t + \gamma}{2} \right], \quad \delta = \alpha_1 + \alpha_2; \quad (59 c)$$

то је кружна фреквенција

$$\Omega = \dot{\varphi}(t) = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \frac{a^2 - b^2}{R^2(t)}, \quad \omega_s = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}; \quad \omega_d = \omega_1 - \omega_2. \quad (60)$$

Како је разлика кружних фреквенција *доста мања* од њиховог збира $\omega_d = \omega_1 - \omega_2 \ll (\omega_1 + \omega_2) = 2\omega_s$, то се амплитуда R и кружна фреквенција $\dot{\varphi}$ при подрхтавању *врло сјоро мењају* у односу на компонентне осцилације.

Кретање ће бити периодичко или аperiodичко према томе да ли су кружне фреквенције *самерљиве* или *несамерљиве*. Период промене амплитуде R зове се период подрхтавања или бијења и износи

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} = \frac{1}{f_d} = \frac{1}{f_1 - f_2}, \quad (61)$$

а број удара у јединици времена је

$$f_d = \frac{1}{T_d} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi}. \quad (62)$$

Функција $R(t)$ мења се у току горњег периода између вредности $|a+b|$ и $|a-b|$, а функција $-\dot{R}(t)$ је иста као горња само прсликана преко осе Ot . Обе криве су обвојнице дијаграма кретања $x(t)$.

Горњи се изрази упроштавају када су $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Тада су $\varphi_1 = \omega_1 t$, $\delta = \gamma = 0$, па су закони осциловања

$$R^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \omega_d t; \quad \text{tg } \theta = \frac{a-b}{a+b} \text{tg } \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t = \frac{a-b}{a+b} \text{tg } \frac{\omega_d t}{2};$$

$$\omega_d = \omega_1 - \omega_2; \quad \omega_s = (\omega_1 + \omega_2)/2; \quad (63)$$

$$x = R \cos(\omega_s t + \theta) = R \cos \varphi; \quad \dot{\varphi} = \omega_s t + \theta; \quad \Omega = \dot{\varphi} = \omega_s + (a^2 - b^2)\omega_d/2R^2.$$

У случају осцилација

$$x = a \sin 5\omega t + a \sin 4\omega t = a \cos(5\omega t - \pi/2) + a \cos(4\omega t - \pi/2)$$

биће

$$\omega_s = 9\omega/2; \quad \omega_d = \omega; \quad \text{tg } \theta = 0; \quad \theta = 0; \quad (\alpha_1 + \alpha_2)/2 = \pi/2;$$

$$R^2 = 2a^2(1 + \cos \omega t), \quad R = 2a \cos(\omega t/2),$$

па је

$$x = 2a \cos(\omega t/2) \cdot \cos[(9\omega t - \pi)/2] = 2a \cos(\omega t/2) \cdot \sin(9\omega t/2).$$

Дијаграм је приказан на сл. 1.31. а.

За $x = a \cos 5\omega t - a \cos 4\omega t$ биће

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0; \quad \gamma = 0; \quad \theta = \pi/2; \quad \omega_s = 9\omega/2; \quad \omega_d = \omega; \quad R^2 = 2a^2(1 - \cos \omega t); \quad R = 2a \sin(\omega t/2);$$

па је

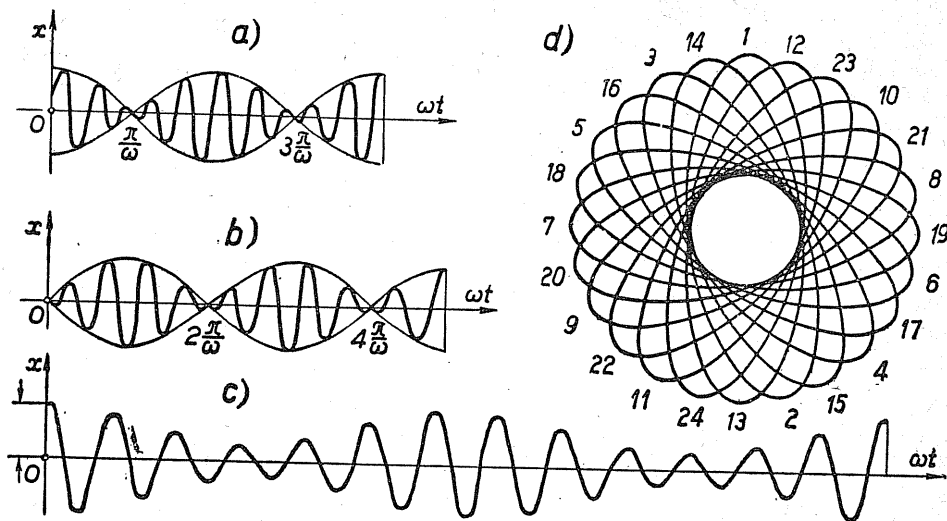
$$x = R \cos[(9\omega t + \pi)/2] = -2a \sin(\omega t/2) \sin(9\omega t/2).$$

Дијаграм кретања је приказан на сл. 1.31. б.

У случају да је $x = 2a \cos 13 \omega t + a \cos 11 \omega t$ биће

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \gamma = \delta = 0; \quad \omega_s = 12\omega; \quad \omega_d = 2\omega;$$

$$R = a [5 + 4 \cos 2\omega t^2]; \quad \varphi(t) = 12\omega t + \arctg (1/3 \operatorname{tg} \omega t).$$



Сл. 1.31. — Подрхтавање (бијење)

Дијаграм кретања је приказан на сл. 1.31. с, а крајеви вектора $z = z_1 + z_2$ описују криве приказане на сл. 1.31. d.

ПРИМЕРИ

1.1. Криваја кулисног механизма (сл. 1.4.) обрће се са 120 о/min. Одредити максималну брзину и убрзање кулисе ако је дужина криваје $R = 10$ cm.

$$[\omega = \pi \cdot 120 / 30 = 4\pi \text{ (sec}^{-1}\text{)}; \quad T = 0,5 \text{ sec}; \quad f = 2 \text{ Hz}; \quad v_{\max} = R \omega = 40\pi \text{ cm/sec};$$

$$a_{\max} = R \omega^2 = 160\pi^2 \text{ cm/sec}^2].$$

1.2. Свака опруга железничког вагона прима силу услед које се скрати за 5 cm. Одредити период осцилације.

$$[f_s = g/\omega^2 = 5 \text{ cm}; \quad T = 2\pi \sqrt{f_s/g} = 0,45 \text{ sec}].$$

1.3. Тежина машине и њеног бетонског постоља износи 100 тона а специфична крутост еластичног земљишта је $C_z = 2 \text{ k}_z/\text{cm}^2$. Одредити период осциловања темеља машине површине 20 m^2 .

$$[\text{Крутост еквивалентне опруге је } c = C_z A = 400 \text{ t/cm}, \text{ па је } T = 2\pi \sqrt{G/cg} \approx 0,1 \text{ sec}].$$

1.4. Терет обешен о опругу (сл. 1.6.), тежине $G_1=10$ kg, учини за пола минуте пуних 90 осцилација. После тога му је додат терет тежине $G_2=30$ kg. Одредити период осциловања оба терета на истој опрузи.

[Како је $n'_1=f_1=90/30=3$ то је $T_1=1/3$ sec; $T_1=2\pi\sqrt{G_1/cg}$, па је

$$T_2=2\pi\sqrt{(G_1+G_2)/cg}=T_1\sqrt{(G_1+G_2)/G_1}=2T_1=2/3$$
 sec.

1.5. Кугла тежине $G=1$ kg може да осцилује између опруга (сл. 1.10. c), крутости $c=1$ kg/l cm. Кугла је изведена надесно из равнотежног положаја за 5 cm и пуштена да осцилује без почетне брзине. Одредити период осциловања и највећу брзину.

[Овде је $m\ddot{x}=-c_1x-c_2x=-2cx$; $\omega^2=2c/m=2cg/G$,

$$T=2\pi\sqrt{G/2cg}\approx 0,141$$
 sec; $v_{\max}=R\omega=222$ cm/sec].

1.6. Челична завојна опруга, пречника 5 mm, намотана је на ваљку, полупречника 1 cm, и има 20 активних завојака (сл. 1.8.). Колика је крутост опруге? Колико је изду жење услед силе од једне тоне?

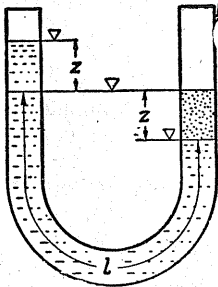
$$[c=8\cdot 10^5\cdot 1/16\cdot 64\cdot 20\cdot 1=40$$
 kg/cm; $f_s=F/c=25$ cm].

1.7. На зарубљеном конусу, пречника 4 cm и 10 cm, намотана је челична кружна опруга, пречника 8 mm и има 30 активних завојака (сл. 1.9.). Колика је крутост опруге?

$$[\text{Према (20) биће } c=8\cdot 10^5\cdot 0,8^4/16\cdot 30\cdot 7\cdot 29=21$$
 kg/cm].

1.8. У спојном суду, попречног пресека A , налази се течност, специфичне тежине γ , (сл. 1.32.). Одредити кружну фреквенцију осцилација течности.

[Решење. — При померању нивоа течности у суду за дубину z , диференцијална једначина осцилација биће

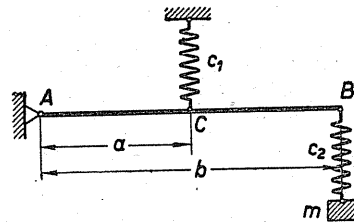


Сл. 1.32. — Осцилације течности у спојном суду

$$m\ddot{z}=-2\gamma Az, \text{ тј. } \ddot{z}+\omega^2z=0$$

где је

$$\omega^2=2\gamma A/m=2\gamma g Al/Gl=2g/l.$$



Сл. 1.33. — Осцилације масе на крутој полузи

1.9. Претпостављајући да је штап AB крут и занемарујући његову тежину, одредити кружну фреквенцију терета m , (сл. 1.33.). Специјално за $a/b=1/2$, $c_1=c_2$.

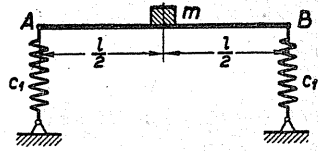
[Решење. — Крутост c_1 треба редуковати на крај B штапа, $E_{p1}=1/2c_1y_1^2=1/2c_1(a/b)^2y^2=1/2c_1^*y^2$, јер је $y_1:y=a:b$, те је $c_1^*=c_1(a/b)^2$. Због редне везе биће $1/c=(1/c_1^*)+(1/c_2)$, па је $\omega^2=c/m=c_1c_2(a/b)^2/m[c_1(a/b)^2+c_2]=c_2/5m$].

1.10. О челичну конзолу AB , дужине $l=1$ m, момента инерције попречног пресека $I_x=80$ cm⁴, обешен је терет тежине 100 kg о спругу крутости $c_2=200$ kg/cm. Одредити период осцилације терета.

$$[T=2\pi\sqrt{(100/981)[(1/200)+(1/48J)]}\approx 0,169\text{ sec}].$$

1.11. На средину просте греде, распона l , која се ослања на две спруге крутости c_1 , постављен је терет тежине G , (сл. 1.34). Одредити период малих осцилација терета занемарујући тежину греде.

[Како је $c_2=48\mathfrak{B}/l^3$ то је $1/c=(1/2c_1)+(1/c_2)$, па је $T=2\pi\sqrt{G/gc}$.

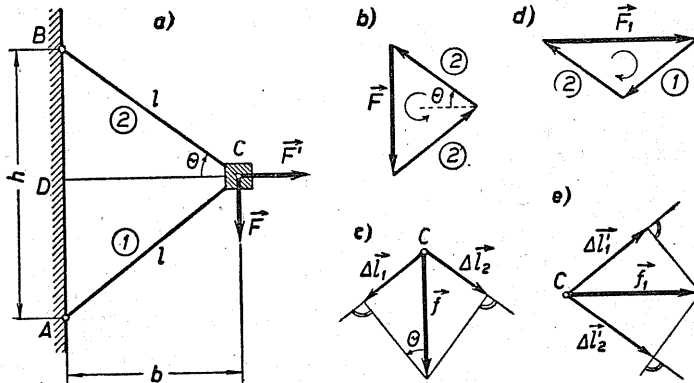


Сл. 1.34. — Осцилације масе на греди са еластичним лежиштима

1.12. У коме односу стоје кружне фреквенције система претстављених на сл. 1.15 и 1.16. ако су $m_1=m=3m_3$, $m_2=2m_3$, $c_1=c$; $2c$; $3c$; $a_1/l=1/3$, $2/3$ и 1 , $c/l=3/4$?

[Према (27) и (28) биће $\omega_1^2/\omega_2^2=c^*/mm^*=cma^4/\sum m_i a_i^2 \cdot \sum c_i a_i^2$, па је однос $\omega_1/\omega_2=27\sqrt{15/320}$].

1.13. Лук на три зглоба. — Одредити кружне фреквенције вертикалних и хоризонталних осцилација масе m која се налази у зглобу C лучног носача ABC , (сл. 1.35);



Сл. 1.35. — Осцилације масе у зглобу лука на три зглоба

[Решење. — Због осе симетрије CD маса m може да осцилује у два главна правца: вертикалном и хоризонталном.

У првом случају из троугла сила, сл. 1.35. b, налазимо да су силе у штаповима AC и CD једнаке и износе $|F_u|=F/2\sin\theta$. Штап (1) је оптерећен на притисак а штап (2) на затезање. Издужења штапова су $|\Delta l_i|=F_u/EA=F_u l/\mathfrak{A}$, где је \mathfrak{A} крутост при аксијалном најрезању (axial rigidity), па је угиб зглоба C , (сл. 1.35. c), $f_s=\Delta l/\sin\theta = F_u l/\mathfrak{A}\sin\theta=2F l^3/\mathfrak{A}h^2$, те је утицајни коефицијент $\alpha_{11}=2l^3/\mathfrak{A}h^2$. Према (53), кружна фреквенција је

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m\alpha_{11}}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{A}h^2}{2ml^3}} = \sqrt{\frac{2\mathfrak{A}}{ml}} \cdot \sin^2\theta,$$

У другом случају, сличним поступком према сл. 1.35. *d*, *e*, добијамо

$$F_u = F' l/2 b, \quad |\Delta I_1| = F' l^2/2 \mathfrak{A} b; \quad f_s' = F' l/2 \mathfrak{A} \cos^2 \theta = F' l^3/2 \mathfrak{A} b^2, \quad \alpha'_{11} = l^3/2 \mathfrak{A} b^2,$$

па је кружна фреквенција

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{m \alpha'_{11}}} = \sqrt{\frac{2 \mathfrak{A} b^2}{m l^3}} = \sqrt{\frac{2 \mathfrak{A}}{m l}} \cdot \cos^2 \theta,$$

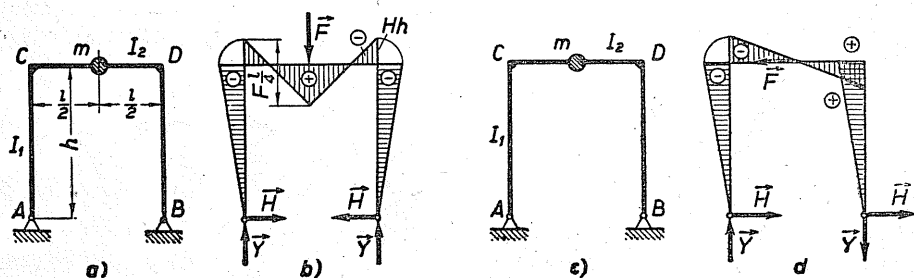
Кружне фреквенције стоје у односу $\omega : \omega' = \operatorname{tg} \theta$.

1.14. Симетрични оквир (рам).* — Ако је на средини пречаге *CD* оквира *ACDB*, (сл. 1.36.), насађена маса *m*, онда она може да осцилује у вертикалном, (сл. 1.36. *a*, *b*) и хоризонталном правцу, (сл. 1.36. *c*, *d*).

Одредити кружне фреквенције тих осцилација.

[Решење. — Као што је познато из Отпорности материјала (чл. 10.8, стр. 188) momenti у рољевима *C* и *D*, сл. 1.36. *a*), биће

$$\mathfrak{M}_C = \mathfrak{M}_D = Hh = \frac{3Fl}{8(2k+3)}, \quad \text{где је } k = \frac{I_2 h}{I_1 l}.$$



Сл. 1.36. — Осцилације масе на рамовској конструкцији

Дијаграм нападног момента оквира приказан је на сл. 1.36. *b*. Утицајни коефицијент α_{11} за пресек испод силе биће

$$\alpha_{11} = \frac{l^3}{48 \mathfrak{B}_2} \frac{3+8k}{12+8k}$$

па је кружна фреквенција вертикалних осцилација терета (*m*)

$$\omega = \sqrt{\frac{48 \mathfrak{B}_2}{m l^3} \frac{12+8k}{3+8k}}$$

Осцилације оквира су симетричне.

У случају хоризонталних осцилација, (сл. 1.36. *c*), дијаграм нападног момента приказан је на сл. 1.36. *d*. Утицајни коефицијент у пресеку у коме дејствује сила биће

$$\alpha'_{11} = \frac{h^2 l}{12 \mathfrak{B}_2} (2k+1) = \frac{h^3}{12 \mathfrak{B}_1} \left(2 + \frac{1}{k}\right)$$

* Д. Рашковић — Таблице из Отпорности материјала, Београд, 1963, стр. 90.

па је кружна фреквенција хоризонталних осцилација терета

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{m a'_{11}}} = \sqrt{\frac{12\mathfrak{B}_1}{m h^3 \left(2 + \frac{1}{k}\right)}}.$$

Ове осцилације оквира су *антисиметричне* (обратно симетричне).

Када је крутост пречаге много већа од крутости стубова AC и BD , тада се величина I_1/I_2 може као мала занемарити, па је приближна вредност кружне фреквенције

$$\omega' \approx \sqrt{\frac{6\mathfrak{B}_1}{m h^3}}.$$

1.15. На средину обострано уклештене греде, масе M , стављен је терет масе m . Одредити кружну фреквенцију узимајући у обзир и масу греде.

[Како су

$$y_s = F(3l z^2 - 4 z^3)/48 \mathfrak{B}; \quad f_s = F/l^3/192 \mathfrak{B}; \quad \alpha_{11} = k/l^3, \quad \lambda = 4/l^3, \quad u(z) = 3l z^2 - 4 z^3,$$

то је због симетрије,

$$E_k^{(M)} \max = 2 \int_0^{l/2} q dz \cdot \lambda^2 f_s^2 \omega^2 u^2 / 2g = M^* f_s^2 \omega^2 / 2; \quad M^* = 13 M / 35;$$

$$\omega^2 = 192 \mathfrak{B} / (m + 17 M / 35) l^3].$$

1.16. Сложити хармонијска кретања

$$x_1 = 3 \cos(\pi t + \pi/3), \quad x_2 = 4 \sin(\pi t + \pi/3).$$

$$[x = x_1 + x_2 = 3 \cos(\pi t + \pi/3) + 4 \cos(\pi t - \pi/3); \quad \alpha_1 = \pi/3; \quad \alpha_2 = -\pi/6; \quad \alpha_2 - \alpha_1 = -\pi/2;$$

$$R = 5; \quad \operatorname{tg} \alpha = (3\sqrt{3} - 4)/7 = 0,17; \quad \alpha^0 = 9,74^0; \quad \alpha = 0,17;$$

$$x = 5 \cos(\pi t + 0,17)].$$

1.17. Сложити хармонијске осцилације:

$$x_1 = 5 \cos(2t - 2\pi/3); \quad x_2 = 3 \sin(2t + \pi/6).$$

$$\left[x = 5 \cos\left(2t - \frac{2\pi}{3}\right) + 3 \cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right); \quad \alpha_1 = -\frac{2\pi}{3}; \quad \alpha_2 = -\frac{\pi}{3}; \quad \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{3}; \right.$$

$$\left. R^2 = 25 + 9 + 15; \quad R = 7; \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}; \quad \alpha = \pi/3; \quad x = 7 \cos(2t + \pi/3) \right].$$

1.18. Сложити хармонијска осциловања:

$$x_1 = 5 \cos\left(3t + \frac{2\pi}{3}\right); \quad x_2 = 3 \cos\left(3t - \frac{\pi}{3}\right); \quad x_3 = 2 \cos\left(3t + \frac{\pi}{6}\right).$$

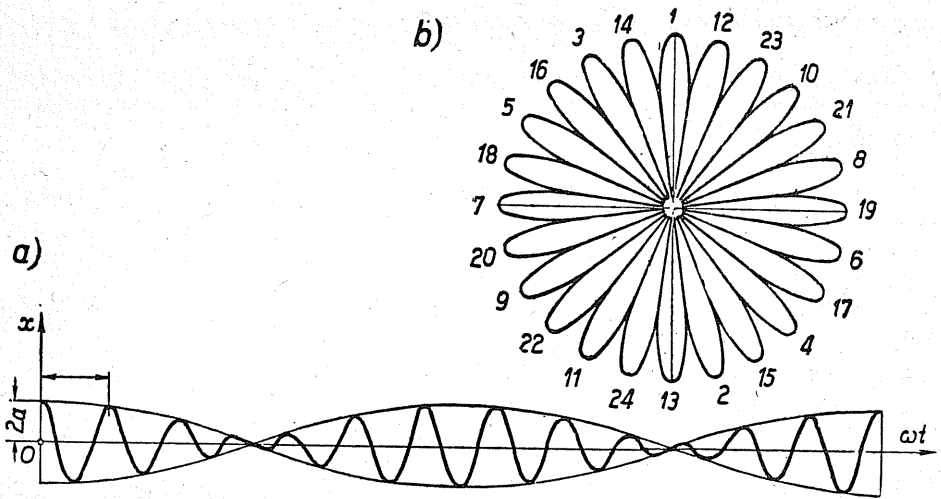
$$\left[A = 5 \cos\frac{2\pi}{3} + 3 \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2 \cos\frac{\pi}{6} = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}; \right.$$

$$\left. B = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{3}; \quad R = 2\sqrt{2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = 2 + \sqrt{3}; \quad \alpha = 1,31 \text{ rad}; \quad \alpha = 75^0 \right].$$

1.19. Сложити асинхроне осцилације

$$x_1 = 6 \cos 4t, \quad x_2 = 3 \cos 2t.$$

$$[\varphi_1 - \varphi_2 = 2t; \quad \omega_s = 3; \quad R = 3\sqrt{5 + 4 \cos 2t}; \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{3} \operatorname{tg} t].$$

Сл. 1.37. — Случај $x = 2a \cos \omega t \cdot \cos 12 \omega t$

1.20. Сложити асинхроне осцилације

$$x_1 = a \cos 13 \omega t, \quad x_2 = a \cos 11 \omega t.$$

[Решење;

$$\omega_s = 12 \omega; \quad \omega_d = 2 \omega; \quad \gamma = \delta = 0;$$

$$R = 2a \cos \omega t; \quad \varphi = 12 \omega t;$$

$$x = 2a \cos \omega t \cdot \cos 12 \omega t.$$

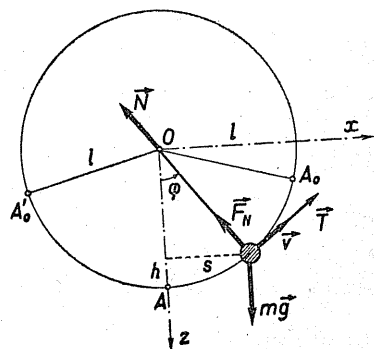
Дијаграм кретања приказан је на сл. 1.35. а.

Сл. 1.35. б приказује криве које описује завршна тачка вектора $z = z_1 + z_2$.

2. КРИВОЛИНИЈСКО ХАРМОНИЈСКО ОСЦИЛОВАЊЕ

2.1. Математичко (кружно) клатно — Положај тачке, масе m , на кругу полупречника l , (сл. 2.1.), одређен је елонгацијом φ , па је брзина покретне тачке $v=l\dot{\varphi}$. Кинетичка и потенцијална енергија биће

$E_k = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2$, $E_p = mgh = mgl(1 - \cos \varphi)$, јер тежа mg врши негативни рад $-mgh$, где је $h=l-l \cos \varphi$. Како је $dE_p/d\varphi = mgl \sin \varphi = 0$ за $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$ и $d^2 E_p/d\varphi^2 = mgl \cos \varphi \geq 0$ за $\varphi=0$ односно $\varphi=\pi$, то је положај равнотеже $\varphi=0$ **стабилан**, док је положај $\varphi=\pi$ **нестабилан** (лабилан). Испитиваћемо осцилације клатна око стабилног равнотежног положаја.



Сл. 2.1. — Математичко (кружно) клатно

Лагранжева једначина даје диференцијалну једначину кретања

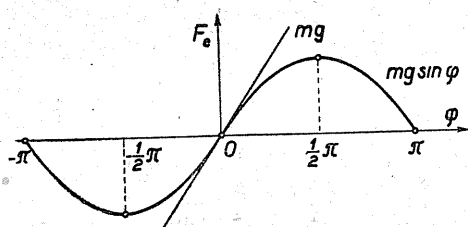
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = m l^2 \ddot{\varphi} + m g l \sin \varphi = 0, \quad (1)$$

или

$$m l \ddot{\varphi} + m g \sin \varphi = 0, \quad (1 a')$$

где је $m l \ddot{\varphi}$ сила инерције а $m g \sin \varphi$ реституциона сила. Упоредјујући ову једначину са једначином хармонијског осцилатора, (чл. I, обр. 9), закључу-

јемо да ова сила не зависи линеарно од елонгације, те кружно клатно није линеарни осцилатор, пошто му карактеристика није права линија већ синусна линија, (сл. 2.2.). У првом приближавању, а за мале елонгације, можемо синусну линију у нултој тачки заменити ње-



Сл 2.2. — Синусна карактеристика клатна

ном тангентом*, тј. ставити

$$\sin \varphi \approx \varphi,$$

па је у томе случају диференцијална једначина малих осцилација математичког клатна

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = \ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0. \quad (2)$$

У овоме је случају, дакле, кретање *хармонијско*, кружне фреквенције и периода осцилације

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}; T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (3)$$

Како је на одређеном месту на Земљи $g = \text{const}$, то период осцилације математичког клатна зависи само од његове дужине, а не зависи од почетног положаја, па је кретање *изохроно*. Периоди осцилација два клатна различитих дужина, према (3), дакле, стоје у односу $T_1 : T_2 = \sqrt{l_1} : \sqrt{l_2}$.

Математичко клатно чији полупериод траје 1 sec зове се *секундно клатно*. Његова дужина је $l_s = g/\pi^2 = 981/\pi^2 = 99,4 \text{ cm} \approx 1 \text{ m}$. Ово клатно служи за експериментално одређивање убрзања теже (g).

Када су почетни услови кретања: за $t = t_0 = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $v_0 = 0$, тада је партикуларни интеграл

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega t; \dot{\varphi} = -\varphi_0 \omega \sin \omega t. \quad (4)$$

Потенцијална енергија за случај малих осцилација клатна је

$$E_p = mgl(1 - \cos \varphi) = 2mgl \sin^2 \frac{1}{2} \varphi \approx \frac{1}{2} mgl \varphi^2,$$

и највећа је у најудаљенијем положају (A_0) клатна од равнотежног положаја (A). У положају (A_0) брзина је једнака нули. Међутим, брзина је највећа при пролазу тачке кроз равнотежни положај (A). Екстремне вредности кинетичке и потенцијалне енергије износе

$$E_{k \max} = \frac{1}{2} m \omega^2 l^2 \varphi_0^2,$$

$$E_{p \max} = \frac{1}{2} mgl \varphi_0^2.$$

Помоћу методе енергије, (чл. 1.5.), изједначујући ове две енергије, можемо одредити кружну фреквенцију осцилација клатна (ω).

2.2. Циклоидно клатно — Ако се тешка тачка креће по циклоиди у вертикалној равни, онда њен положај можемо одредити гене-

*) $\sin \varphi = \varphi - (\varphi^3/3!) + (\varphi^5/5!) - \dots \approx \varphi; \varphi \ll 1 \text{ rad}$.

ралисаном координатом s , мереном од најнижег положаја E , (сл. 2.3. а). Тачка P је шренушњи пол обртања круга, полупречника R , по правој Ox , па је елемент лука $ds = Pm \cdot d\varphi = 2R \cos \theta \cdot d\varphi = 2R \cos (1/2 \varphi) \cdot d\varphi$, јер је $\theta = 1/2 \varphi$. Према томе је лук

$$s = \int_0^{\varphi} 2R \cos^{1/2} \varphi d\varphi = 4R \sin (1/2 \varphi).$$

Кинетичка и потенцијална енергија су

$$\begin{aligned} E_k &= 1/2 m \dot{s}^2; E_p = m g (2R - z) = \\ &= m g (2R - Pm \cos \theta) = \\ 2mgR \sin^2 \theta &= m g R \sin^2 (1/2 \varphi) = \\ &= m g s^2 / 8R, \end{aligned} \quad (5)$$

па Лагранжева једначина даје диференцијалну једначину кретања клатна

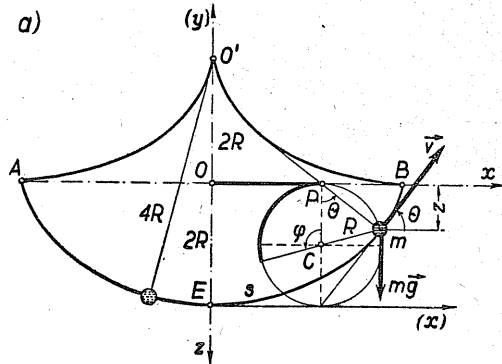
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{s}} + \frac{\partial E_p}{\partial s} = \ddot{s} + \frac{g}{4R} s = 0. \quad (5a)$$

Кретање је, дакле, хармонијско, кружне фреквенције и периода

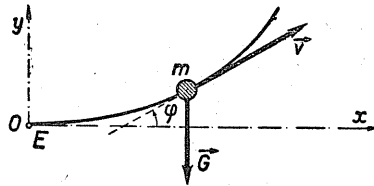
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{4R}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{4R}{g}}. \quad (6)$$

Период осцилације и за коначне амплитуде не зависи од почетног положаја, па је кретање изохроно. Овај период је једнак периоду малих осцилација математичког клатна дужине $l = 4R$. Када се о тачку O обеси математичко клатно дужине $l = 4R$, с тим да крај приљубљује лукове AO' и $O'B$ циклоиде $A O' B$, која је еволута дате циклоиде $A E B$, тада ће се тачка m кретати по циклоиди $(A E B)$.

Проблем можемо уошшиши за ма коју криву $y = f(x)$ по којој се креће тешка тачка, масе m (сл. 2.3.б). Узмимо координатни почетак O у шмену криве (E), тј. у положају стабилне равнотеже, тада је диференцијална једначина кретања тачке за правац тангенте $ms = -mg \sin \varphi$,



b)



Сл. 2.3. — Циклоидно клатно

где је φ угао који гради тангента повучена на криву са $+Ox$ осом. Како је брзина $v=s$, $ds=(dx^2+dy^2)^{1/2}$, $\operatorname{tg} \varphi = y'$, $\sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi / (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^{1/2}$ то је диференцијална једначина

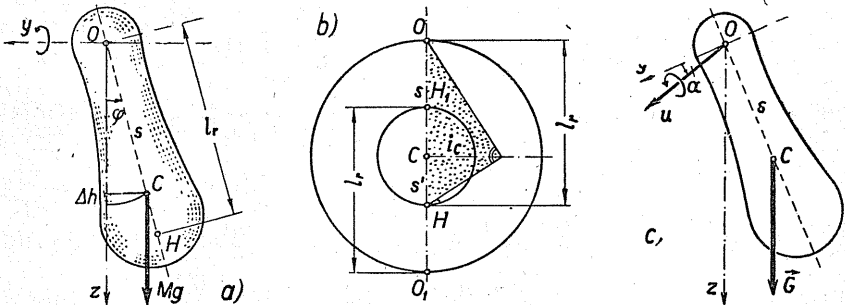
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{-g dy}{ds}; \quad \frac{d}{dt} (x \sqrt{1+y'^2}) = \frac{-g y'}{\sqrt{1+y'^2}}. \quad (7)$$

На пример, параметарске једначине круга за систем Axy (сл. 2.1.) биле би $x=l \sin \varphi$, $y=l(1-\cos \varphi)$, $\operatorname{tg} \varphi = y'$, $\dot{x}=l \dot{\varphi} \cos \varphi$, па је према (7) диф. једначина $l \ddot{\varphi} = -g \sin \varphi$.

Ако се код циклоиде (сл. 2.3.a) узме систем Exy у темену, онда су параметарске једначине $x=R(\varphi + \sin \varphi)$, $y=R(1-\cos \varphi)$; $\dot{x}=R \dot{\varphi} (1 + \cos \varphi)$, $s=4R \sin(\varphi/2)$, $ds=2R \cos(\varphi/2) d\varphi$, па је према (7) диф. једначина

$$\ddot{s} = -g \frac{R \sin \varphi d\varphi}{2R \cos(\varphi/2) d\varphi} = -g \sin \frac{\varphi}{2} = -\frac{gs}{4R}.$$

2.3. Физичко клатно. — Као генерализану координату узнећемо угао φ одклона клатна (сл. 2.4. a) од вертикалног положаја стабилне равнотеже — Az осе — пошто је функција силе $U = Mgz = Mgs \cos \varphi$, где је $s = \overline{OC}$ растојање тежишта тела (C) од тачке вешања (O).



Сл. 2.4. — Физичко клатно — a) Елонгација, б) Центар осциловања, c) Косо клатно

Кинетичка и потенцијална енергија су

$$E_k = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2; \quad J = J_y;$$

$$E_p = -A = Gs(1 - \cos \varphi) = 2Gs \sin^2(\varphi/2) \approx \frac{1}{2} Gs \varphi^2,$$

где је $G = Mg$, $J = J_y$, момент инерције клатна за осу Oy кроз тачку вешања O управну на раван симетрије клатна и $\varphi \ll 1$ рад.

Лагранжеве једначине друге врсте дају диф. једначину малих осцилација клатна око равнотежног положаја

$$J \ddot{\varphi} + Gs \varphi = 0; \quad \ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0 \quad (8)$$

па је кретање *хармонијско*, кружне фреквенције и периода осциловања

$$\omega = \sqrt{Gs/J}; \quad T = 2\pi \sqrt{J/Gs} = 2\pi \sqrt{I^2/gs} = 2\pi \sqrt{I/g}, \quad (9)$$

где је $i = i_y = \sqrt{J_y/M}$ полупречник инерције за Oy осу а l_r редукована дужина физичког клатна. Ова дужина је једнака дужини математичког клатна масе $m = M$ а истог периода осциловања. Она износи

$$l_r = J_y/Ms = i_y^2/s = (J_c + M_s^2)/Ms = s + (i_c^2/s); \quad i_c^2 = (I_p - s)s = ss', \quad (10)$$

где је $i_c = \sqrt{J_c/M}$ сопствени полупречник инерције, за тежишну осу (c) паралелну оси Oy око које се клатно клати. Како је $i_c^2/s > 0$ биће $i_r > s$ па други крај редуковане дужине одређује на клатну тачку H која се назива центар осциловања или Хајгенсов центар осциловања. Он има особину реверзибилности: центар H одговара тачки вешања O , и обратно, тачки вешања $O'(H)$ одговара центар $H'(O)$. На овоме принципу се конструише реверзибилно клатно. Положај центра (H) може се одредити према (10) конструкцијом средње геометријске пропорционале (сл. 2.4. b).

Период осциловања зависи од положаја тежишта те је $T = f(s)$, а и редукована дужина зависи од s , $l_r = \theta(s)$, па следи

$$\frac{dT}{ds} = \frac{\pi}{\sqrt{gl_r}} \frac{dl_r}{ds} = \frac{\pi}{\sqrt{gl_r}} \left(1 - \frac{i_c^2}{s^2}\right) = 0; \quad s = i_c; \quad l_r = 2i_c; \quad T_{min}^2 = 2\pi \sqrt{\frac{2i_c}{g}}. \quad (11)$$

Најмањи период је тада када је растојање тежишта $\overline{OC} = s$ једнако сопственом полупречнику инерције за Cs осу паралелну Oy оси.

Код косог клатна (сл. 4.2. c) оса клаћења Ou гради са Oy осом угао α , односно са Oz осом угао $\pi/2 - \alpha$ те није управна на раван осциловања, па се мења обртни момент. Тада је диференцијална једначина осциловања

$$J_u \ddot{\varphi} = \mathfrak{M}_u = -Gs \sin \varphi \cos \alpha \approx -(Gs \cos \alpha) \varphi, \quad (12)$$

па су период и редукована дужина клатна

$$T = 2\pi \sqrt{l_r/g}; \quad l_r = J_u/Mg \cos \alpha, \quad (13)$$

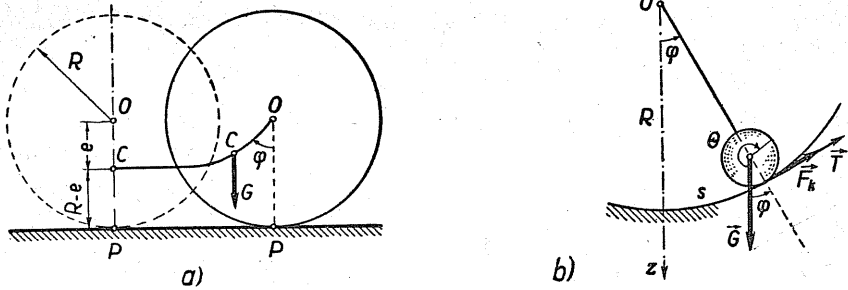
где је J_u момент инерције клатна за осу Ou .

2.4. Котрљајно клатно (Rollpendel). — Ваљак, полупречника R , ексцентричног тежишта C , $\overline{OC} = e$, налази се на хоризонталној подлози. Ако се изведе из равнотежног положаја наступиће осцилације око истог положаја под утицајем тежине ваљка. Пошто је кретање ваљка по подлози котрљање без клизања, то се своди на обртање око третутне осе кроз пол P , (сл. 2.5. a).

Кинетичка и потенцијална енергија за случај малих осцилација ваљка биће

$$E_k = \frac{1}{2} J_p \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} M [i_c^2 + (R-e)^2] \dot{\varphi}^2 \quad (14 a)$$

$$E_p = G e (1 - \cos \varphi) = 2 G e \sin^2 \frac{1}{2} \varphi \approx \frac{1}{2} G e \varphi^2,$$



Сл. 2.5. — Котрљајно клатно

где је J_p момент инерције ваљка за тренутну осу управну на раван осциловања у тачки P . Лагранжева једначина даје диференцијалну једначину малих осцилација у облику

$$J_p \ddot{\varphi} + G e \varphi = 0, \quad (14 b)$$

па су кружна фреквенција и период осцилације:

$$\omega = \sqrt{\frac{G e}{J_p}} = \sqrt{\frac{g e}{i_c^2 + (R-e)^2}},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{i_c^2 + (R-e)^2}{g e}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}}. \quad (15)$$

Редукована дужина овог клатна износи

$$l_r = \frac{i_c^2 + (R-e)^2}{e}. \quad (16)$$

Овај се проблем може *уошшиши*. Нека се обртно тело полупречника r (сл. 2.5. *b*), котрља у обртном телу, полупречника R , око свога равнотежног положаја (Oz осе). У обзир ћемо узети и *ошпор* *прошив* *кошрљања*, па су диференцијалне једначине кретања средишта и обртања око средишта

$$m \ddot{s} = F_k + F_T; \quad J \ddot{\theta} = -F_k r; \quad J = J_c; \quad s = (R-r) \varphi = r \theta,$$

где је θ угао обртања обртног тела а F_T пројекција силе теже на правац тангенте. Како је $s = (R-r)\ddot{\varphi} = r\ddot{\theta}$ биће

$$m(R-r)\ddot{\varphi} + J(R-r)\ddot{\varphi}/r^2 = -G \sin \varphi.$$

За мале осцилације је $\sin \varphi \approx \varphi$, па је једначина осциловања

$$[1 + (I/r^2)](R-r)\ddot{\varphi} + g\varphi = 0; \quad \ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0. \quad (17a)$$

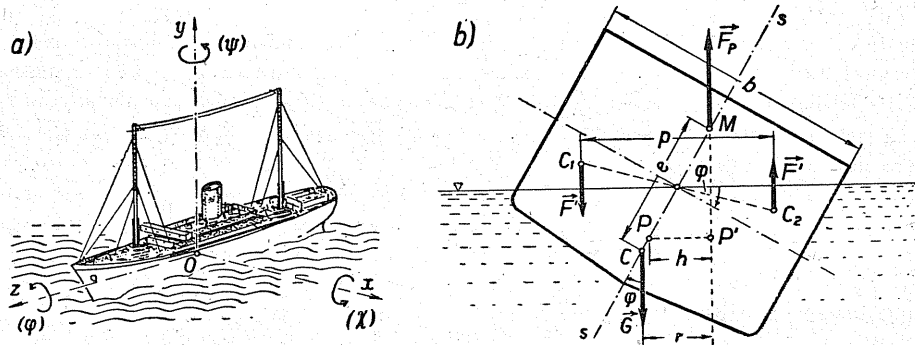
Кретање је хармонијско, кружне фреквенције, периода и редуковане дужине:

$$\omega^2 = \frac{g}{(R-r)k}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}}; \quad l_r = (R-r)k; \quad k = 1 + \frac{I_c}{r^2} \quad (17b)$$

где је k коэффициент кошљања.

Овај коэффициент износи: а) за ваљак $J_c = mr^2/2, k = 3/2$; б) за лопту (куглу) $J_c = 2mr^2/5, k = 7/5$.

2.5. Ваљање брода — Брод*, (сл 2.6. а), изводи три осцилаторна кретања: ваљање (rolling; Rollen, Schlingern) око подужне осе z (елонгација φ), њихање, љуљање (pitching; Stampfen) око попречне осе x (елонгација χ) и скрећање или вијугање (yawing; Abschwenken) око вертикалне осе y (елонгација ψ). Сем тога, пошто се брод креће и транслаторно, то вертикална компонента овог кретања доводи и до осцилација зароњавања, врло малих амплитуда и краткотрајног периода. Како је равнотежа мирног брода



Сл. 2.6. — а) Ваљање брода, б) Метациентар

око вертикалне осе индиферентна, то таласи не производе осцилације скретања. Од свих осцилација брода најважније је ваљање, али је приметан утицај и њихања, нарочито код дугачких бродова.

* Динамика, чл. 20.5

Пошто је попречни пресек — профил брода — симетричан, то у нормалном положају нападна тачка потиска воде (P) и тежиште брода (C) леже на симетралу профила, која је вертикална, па су ове две силе супротне, те су у равнотежи. Међутим, када се брод нагне на један бок, напр. десни, (сл. 2.6. b), помера се нападна тачка потиска у P' док тежиште не мења свој положај у односу на сам профил. Нападна линија потиска воде сече симетралу профила у метацентру M . Када је метацентар изнад тежишта равнотежа брода је стабилна, а када је испод тежишта равнотежа је лабилна. Због тога се тежи да се тежиште брода што више спусти.

Услед померања нападне тачке потиска из P у P' јавља се спрег момента

$$\mathfrak{M} = F_p r = G r = G e \sin \varphi \approx G e \varphi, \quad (18 a)$$

па је динамичка једначина осцилације

$$J \ddot{\varphi} = - G e \varphi; \quad J = J_z, \quad (18 b)$$

где је J аксијални момент инерције брода за осу Cz . Према томе је за мале осцилације кретање хармонијско, те су кружна фреквенција, период осциловања и редукована дужина

$$\omega = \sqrt{G e / J}; \quad T = 2\pi \sqrt{I_r / g}; \quad I_r = J / M e = I^2 / e, \quad (19)$$

где је e метацентричка висина а $I = I_z$ полупречник инерције брода за тежишну Cz осу.

Метацентричка висина e зависи од геометријских величина брода и елонгације φ . Услед померања нападне тачке потиска у P' део профила који је дубље утонуо изложен је дејству вишка потиска F' , док други део трпи мањи потисак, те се ствара спрег момента $F' p$ који је једнак моменту потиска за моментну тачку P , па је

$$\mathfrak{M} = F' p = F_p h = M_p,$$

где је p крак спрега а h крак силе потиска. Ако са A_0 означимо потопљену површину профила а са A' површину вишка потиска, онда су силе потиска за два блиска профила на растојању dz , $F_p = \gamma_0 A_0 dz$, $F' = \gamma_0 A' dz$. Површина A' приближно је правоугли троугао, те је $A' = 1/8 b^2 \operatorname{tg} \varphi \approx 1/8 b^2 \varphi$. Пошто су $h = \overline{MP} \cdot \sin \varphi$, $p = 2/3 b$, $\overline{PC} = s$, $e = \overline{MP} + \overline{PC}$, биће метацентричка висина

$$e = s + \frac{h}{\sin \varphi} = s + \frac{p}{\sin \varphi} \cdot \frac{F'}{F_p} = s + p \frac{A'}{A_0 \varphi} = s + \frac{b^3}{12 A_0},$$

па је момент спрега

$$\mathfrak{M} \approx F_p \left(s + \frac{b^3}{12 A_0} \right) \varphi = k \varphi.$$

2.6. Торзијски (увртни) осцилатор — На хомогени штап AO , који је уклештен на горњем крају, насађен је хомогени диск K , (сл. 2.7.). Ако се диск изложи дејству спрега који дејствује у равни диска, онда је штап AO напрегнут на увијање (торзију). Одстрани ли се

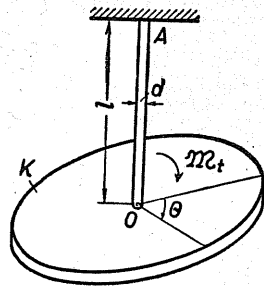
утицај спрега наступиће торзијске (увртне) осцилације диска. Овај систем, дакле, представља *торзијски (увртни) осцилатор*.

Између момента увијања (\mathfrak{M}_t) и угла увијања (θ) постоји овај однос*

$$\mathfrak{M}_t = \frac{\mathbf{G} I_0}{l} \theta = c \theta, \quad (20)$$

где су \mathbf{G} модул клизања (смицајни модул) а $I_0 = d^4 \pi/32$ поларни момент инерције кружног попречног пресека штапа AO , пречника d . Коefицијент пропорционалности

$$c = \frac{\mathbf{G} I_0}{l} = \frac{\mathfrak{L}}{l} \quad (21)$$



Сл. 2.7. — Торзијски осцилатор

зове се *крућошћ* при увијању (*torsional rigidity*), димензије момента силе, $[c] = [F L]$, јединице kgcm/rad , и показује *јединични моменш* увијања, тј. момент увијања који изазива угао увијања једнак једном радијану ($57^\circ 17' 44,3''$). Његова реципрочна вредност $1/c = C = l/\mathfrak{L}$, димензије $[F^{-1} L^{-1}]$, представља *ушчицајни коefицијентш* при увијању.

Кинетичка и потенцијална енергија биће

$$E_k = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2; \quad E_p = A_{dt} = \frac{\mathfrak{M}_t^2 l}{2 \mathbf{G} I_0} = \frac{c \theta^2}{2}, \quad (22)$$

па Лагранжева једначина даје диференцијалну једначину осцилација и закон осциловања

$$J \ddot{\theta} + c \theta = 0; \quad \theta = \theta_0 \cos \omega t \quad (23)$$

где је J аксијални момент инерције диска (K) за вертикалну тежишну осу. Кретање је, дакле, *хармонијско*, па су кружна фреквенција и период осцилације торзијског осцилатора:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{J}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{Jl}{\mathbf{G} I_0}}. \quad (24)$$

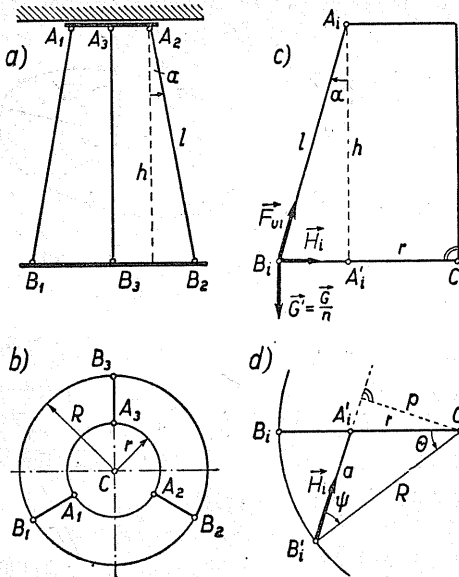
На пример, ако је диск тежине $G = 10 \text{ kg}$, полупречника $R = 10 \text{ cm}$, штап челични пречника 20 mm , дужине 400 mm , онда су $J = GR^2/2g$; $I_0 = r^4 \pi^2/2 = d^4 \pi/32$; $\mathbf{G} = 8 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$; па је период

$$T = 2\pi (5 \mathbf{G} l R^2 / \mathbf{G} d^4 g)^{1/2} \approx 1/40 = 0,025 \text{ sec.}$$

* И. В. Мешерски — Збирка задатака из Теоријске механике, зад. 3.683.

Користећи овај принцип торзијских осцилација можемо проучити мале осцилације мултифиларног клатна. Плоча, тежине G , полупречника R , момента инерције J_z за вертикалну тежишну осу Cz , обешена је помоћу конача једнаке дужине (l) о тачке A_i (сл. 2.8. а) које леже

на кругу, полупречника r , а други крајеви конача везани су за тачке плоче B_i , које леже на кругу полупречника R (сл. 2.8. б). У свакој тачки B_i дејствује сила $G' = G/n$ коју разлажемо на две компоненте: силу у концу $F_{ui} = G/n \sin \alpha$ и силу у равни плоче $H_i = F_i = (G/n) \operatorname{tg} \alpha$ (сл. 2.8. с). У равнотежном положају ове силе секу осу Cz те не изазивају обртни момент. Међутим, када се плоча заокрене у њеној равни за угао θ око осе Cz , онда ове силе стварају момент. Момент једне силе биће $F_i p = F_i \cdot R \sin \psi$, где из троугла $B'_i CA'_i$ (сл. 2.8. д) следи однос



Сл. 2.8 — Мултифиларно клатно

$$r/\sin \psi = (R-r)/\sin \theta.$$

Због односа

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= (R-r)/l; \quad \operatorname{tg} \alpha = (R-r)/h = (R-r) / \sqrt{l^2 - (R-r)^2} = \\ &= (R-r)/l \sqrt{1 - (R-r)^2/l^2}, \end{aligned}$$

а под претпоставком да је дужина конача знатно дужа од полупречника плоче ($l \gg R$) може се ставити да је $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$. Тада је обртни момент

$$\mathfrak{M} = n F_i p = n (G/n) \operatorname{tg} \alpha \cdot R \sin \psi = GR (r/l) \sin \theta \approx c \theta, \quad (25)$$

па је диф. једначина малих осцилација клатна

$$J \ddot{\theta} = -\mathfrak{M} = -c \theta; \quad \ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0; \quad c = GRr/l. \quad (26)$$

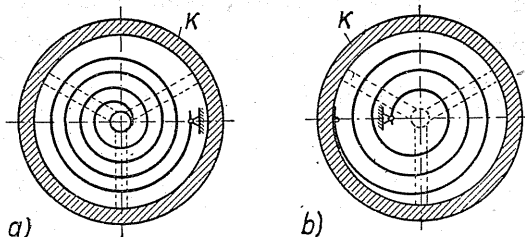
Кретање је хармонијско, кружне фреквенције, периода и редуковане дужине клатна:

$$\omega^2 = \frac{c}{J} = \frac{GRr}{Jl} = \frac{Rr}{l} \frac{g}{i_z^2}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{li_z^2}{Rrg}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}}; \quad l_r = \frac{li_z^2}{Rr}. \quad (27)$$

У случају када је $r = R$ биће*

$$l_r = li_2^2/R^2; T = 2\pi (i_2/R) \sqrt{l/g}. \quad (28)$$

2.7. Спирални осцилатор. — Спирални осцилатор састоји се из спиралне опруге која је на једном крају учвршћена, (сл. 2.9. а), а на другом везана за цилиндрични замајцац (K) који може да се обрће око осе кроз средиште O . Оваква опруга може да се сматра приближно као кружни носач, дужине L , изложен савијању услед момента M , који се ствара услед обртања замајца за угао θ .



Сл. 2.9. — Спирални осцилатор

Кинетичка и потенцијална енергија система биће

$$E_k = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2; E_p = A_{df} = \int_0^L \frac{M^2 ds}{2EI} = \frac{M^2 L}{2EI} = \frac{1}{2} \frac{EI}{L} \theta^2, \quad (29)$$

јер према Castigliano-вом** обрасцу између момента и угла заокретања постоји однос $\theta = \partial E_p / \partial M = ML/EI = ML/\mathfrak{B}$ то је крутост опруге

$$c = \frac{M_f}{\theta} = \frac{EI}{L} = \frac{\mathfrak{B}}{L}, \quad (30)$$

где је \mathfrak{B} крутост при савијању а I момент инерције попречног пресека опруге.

Применом Лагранжеве једначине добијамо диференцијалну једначину кретања како за спољашње (сл. 2.9. а) тако и за унутрашње (сл. 2.9. б) учвршћење опруге:

$$J\ddot{\theta} + c\theta = 0, \quad (31)$$

па су кружна фреквенција и период хармонијске осцилације опруге

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{J}}; T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{JL}{\mathfrak{B}}}. \quad (32)$$

Овакве се опруге примењују код часовника.

* И. В. Мешћерски — Збирка задатака из Теоријске Механике, зад. 3.683.

** Отпорност материјала, чл. 11,2 и 9.7

2.8. Слагање ортогоналних осцилација. — Две ортогоналне осцилације могу бити *синхроне* (истих фреквенција) или *асинхроне* (различитих фреквенција), различитих амплитуда и фаза.

2.8.1. Синхроне ортогоналне осцилације. — Две синхроне ортогоналне осцилације представљене једначинама

$$x = a \cos(\omega t + \alpha_1); \quad y = b \cos(\omega t + \alpha_2) \quad (33)$$

развијањем свODE се на две једначине

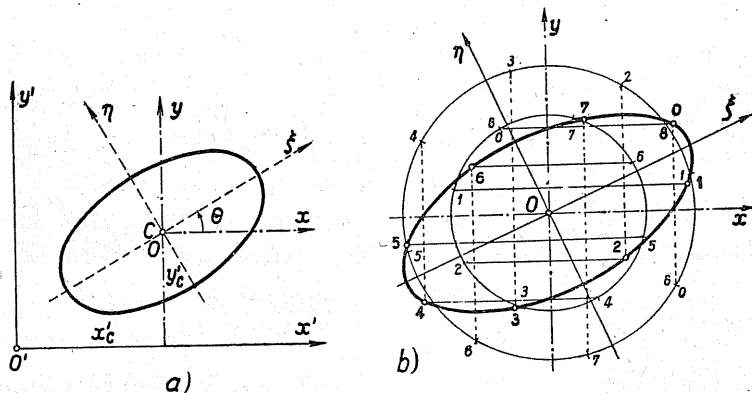
$$\cos \varphi \cos \alpha_1 - \sin \varphi \sin \alpha_1 = x/a = u; \quad \cos \varphi \cos \alpha_2 - \sin \varphi \sin \alpha_2 = y/b = v,$$

по непознатим u и v , где је $\varphi = \omega t$. Решењем добијају се непознате

$$\cos \varphi = (v \sin \alpha_1 - u \sin \alpha_2) / \Delta; \quad \sin \varphi = (v \cos \alpha_1 - u \cos \alpha_2) / \Delta;$$

$$\Delta = \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = \sin \alpha$$

где је Δ *детерминанта система*. Степеновањем горњих једначина



Сл. 2.10. — Елиптика хармонијска осцилација

и сабирањем добијамо једначину трајекторије тачке која једновремено изводи ове две осцилације

$$\begin{aligned} f(x, y) &= b^2 x^2 - 2ab \cos \alpha \cdot xy + a^2 y^2 - a^2 b^2 \sin^2 \alpha = \\ &= Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Како су детерминанте

$$J_1 = A + C = b^2 + a^2;$$

$$J_2 = AC - B^2 = a^2 b^2 \sin^2 \alpha > 0; \quad J_3 = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = -a^4 b^4 \sin^4 \alpha$$

то је крива *елипса* са средиштем C у координатном почетку O , јер су $D = E = 0$ (сл. 2.10. а).

Ротацијом система Sxy за угао θ , где је

$$\operatorname{tg} 2\theta = -2B/(A-C) = 2ab \cos \alpha / (a^2 - b^2)$$

једначина се своди на канонички вид

$$M\xi^2 + N\eta^2 + (J_3/J_2) = 0; \quad \xi^2/(-J_3/MJ_2) + \eta^2/(-J_3/NJ_2) = 0, \quad (35)$$

где су M и N корени квадратне једначине $u^2 - J_1u + J_2 = 0$.

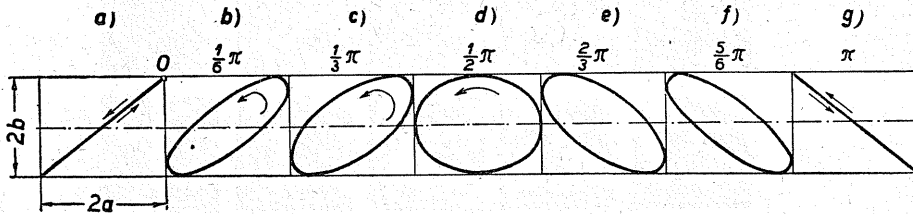
За $a > b$ је $\operatorname{tg} 2\theta > 0$ ако је $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ и $\operatorname{tg} 2\theta < 0$ ако је $\pi/2 < \alpha \leq 3\pi/2$. У првом случају угао θ је *оштар* (сл. 2.11.b,c), у другом *туп* (сл. 2.11., e, f).

На сл. 2.10. b приказан је случај осцилација

$$x = 3 \sin(2t + 1/3\pi) = 3 \cos(2t - 1/6\pi); \quad y = 2 \sin(2t + 2/3\pi) = 2 \cos(2t + 1/6\pi).$$

Путања има једначину $4x^2 - 6xy + 9y^2 - 27 = 0$. Како је $\operatorname{tg} 2\theta = 0/5$, то је $\theta = 25^\circ 20'$.

Специјални случајеви су приказани на сл. 2.11. За $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$ имамо $y = \pm bx/a$, па елипса прелази у *праву линију* (сл. 2.11. a, g).



Сл. 2.11. — Карактеристични случајеви елиптичке осцилације

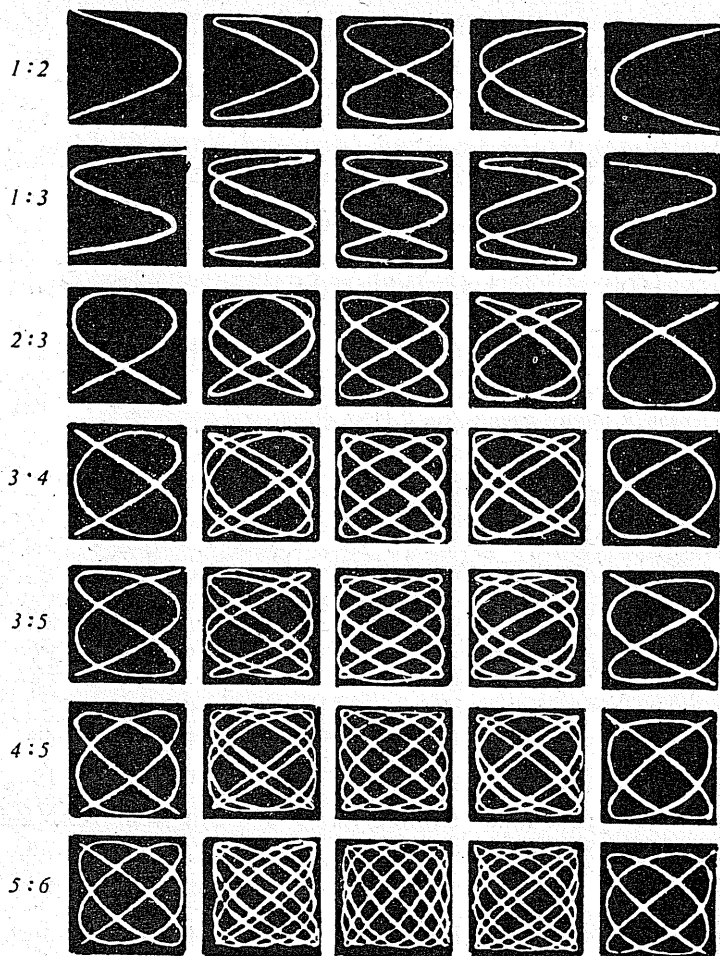
За $\alpha = \pi/2$ једначина елипсе је $b^2x^2 + a^2y^2 = 1$ (сл. 2.11. d); за $a = b$ она прелази у *круг*.

2.8.2 Асинхроне ортогоналне осцилације — У овом случају су осцилације приказане једначинама

$$x = a \cos(\omega_1 t + \alpha_1); \quad y = b \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \quad (36)$$

па се резултујуће кретање, с обзиром на односе кружних фреквенција (или периода осцилација), врши по доста сложеној путањи. Ове криве линије су познате као *Лисажуове* (Jules Lissajous, 1822.—1880.) *фигуре*, (сл. 2.12.).

Ради добијања једначине трајекторије треба из система једначина (36) елиминисати време (t) па се добија зависност $y=f(x)$ или $f(x, y) = 0$.



Сл. 2.12. — Лисажуове фигуре

На пример, ако је $x = a \cos(2\omega t - \alpha)$, $y = b \cos \omega t$, добија се једначина

$$x = a [2(y/b)^2 - 1] \cos \alpha + [2(a/b)y \sqrt{1 - (y/b)^2}] \sin \alpha.$$

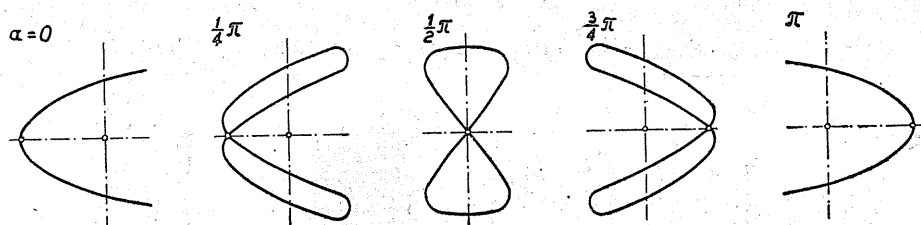
За $a = b = 2 \text{ cm}$ и α различито криве су показане на сл. 2.13.

Лисажуове фигуре се могу конструисати. Нека је у почетном положају $x = x_0 = a$ тада је $\omega_1 t_0 + \alpha_1 = 0$ тј. $\alpha_1 = -\omega_1 t_0$. Како је $\tau = t - t_0$

то једначине (36) постају

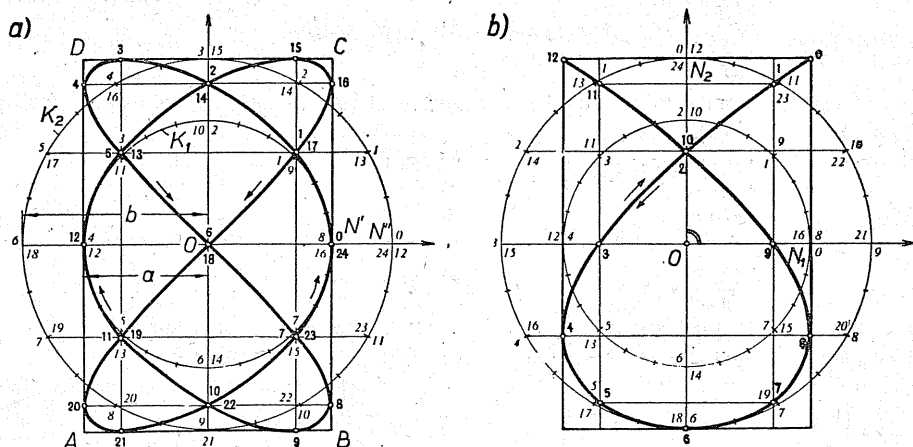
$$x = a \cos \omega_1 \tau; y = b \sin (\omega_2 \tau + \alpha); \alpha = \omega_2 t_0 + \alpha + \pi/2. \quad (37)$$

Претпоставимо ли да је $b > a$ и из тачке O опишемо центричне кругове полупречника a и b , (сл. 2.14.), тада Лисажуова крива мора да



Сл. 2.13. — Лисажуове фигуре за: $x = a \cos (2 \omega t - \alpha); y = b \cos \omega t$

лежи у правоугаонику $ABCD$. Нека је $\alpha = 0$, тада су почетне тачке N'_0 и N''_0 у положајима O . Од ових тачака поделимо оба круга на $n = pq$ једнаких делова, где су p и q односи кружних фреквенција, односно периода ($T = p T_1 = q T_2$). Ако су ови делови доста велики, могу се поделити на ситније делове, тј. могу се кругови поделити на $n = kpq$



Сл. 2.14. — Графичка конструкција Лисажуове фигуре

једнаких делова. Од тачке O треба на кругу K_1 обележити сваки p -ти подељак цифрама, а на кругу K_2 сваки q -ти подељак. Ако сада из тачака на кругу K_1 повучемо вертикале а из одговарајућих тачака на кругу K_2 хоризонтале, у пресеку ће се добити тачке Лисажуове криве.

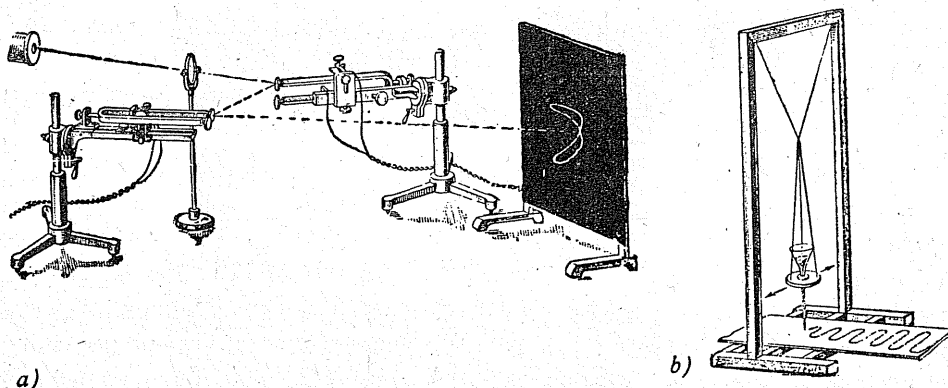
На сл. 2.14. приказан је пример конструкције Лисажуове криве за случај осцилација

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \sin \frac{2}{3} \omega t; \quad a = 4, \quad b = 6; \quad T_1/T_2 = 2/3 = q/p.$$

На кругу K_1 је обележен сваки трећи подељак, а на кругу K_2 сваки други.

Када је $\alpha \neq 0$ поступак је исти само што вектори \vec{ON}_1 и \vec{ON}_2 у почетном положају граде угао α .

На сл. 2.14. *b* приказан је случај $x = 4 \cos \omega t; \quad y = 6 \sin (\frac{2}{3} \omega t + \frac{1}{2} \pi)$.



Сл. 2.15. — Експериментално одређивање Лисажуових кривих: а) помоћу звучних виљушки; б) Аiry-јево клатно

Лисажу је своје криве добијао експериментално помоћу звучних виљушки (дијагона — сл. 2.15.а). У ову сврху може се користити и Аiry-јево клатно са ситним песком (сл. 2.15.б). Помоћу удара у висак са песком добија се крива.

ПРИМЕРИ

2.1. Одредити редуковану дужину и период осцилација физичког клатна које има облик танке правоугаоне плочице (сл. 2.16.а) обешене о једно теме.

$$[J_c = \frac{1}{12} M d^2; \quad J = \frac{1}{3} M d^2; \quad l_r = \frac{2}{3} d; \quad T = 2\pi \sqrt{2 d / 3 g}; \quad d = \sqrt{b^2 + h^2}.]$$

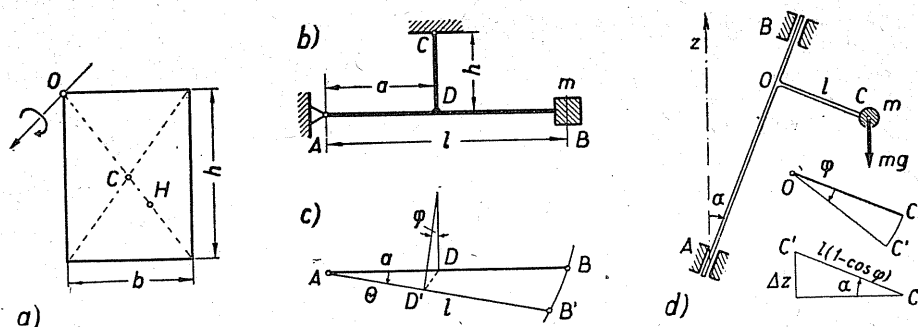
2.2. Физичко клатно има облик танког обруча. Одредити редуковану дужину овог клатна за тачку вешања на обиму обруча, полупречника R , (идеално физичко клатно).

$$[J_c = M R^2; \quad J = 2 M R^2; \quad l_r = 2 R].$$

2.3. Крути штап AB , дужине l , везан је у A зглобом око кога се може обртати, (сл. 2.16.б), а на крају B носи терет тежине G . Штап у хоризонталном положају одржава крути штап CD , висине h . Методом енергије одредити кружну фреквенцију

малих осцилација терета, ако се исти покрене у смеру управном на штап AB и пусти. Тежину штапа занемарити; $a = AD = 1/3 l$.

[Решење. — Како је, због малих углова, (сл. 2.16. c), $a\theta = h\varphi$, то је кинетичка енергија $E_k = 1/2 m l^2 \dot{\theta}^2 = 1/2 m l^2 (h/a)^2 \dot{\varphi}^2$. Због крутости штапа CD наступиће издизање



Сл. 2.16. — a) Физичко клатно у облику правоугаоне плочице, b, c) Хоризонтално клатно са полугом, d) Косо клатно

терета (m) за висину $\Delta y = (l/a) \Delta y_1$, где је Δy_1 подизање тачке D при осцилацији $\Delta y_1 = h(1 - \cos \varphi) = 2h \sin^2 1/2 \varphi \approx 1/2 h \varphi^2$. Ако је закон кретања тачке D дат изразом $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$, онда је $|\dot{\varphi}_{max}| = \varphi_0 \omega$, па су екстремне вредности енергија

$$E_{kmax} = E_{pmax} = 1/2 m l^2 (h/a)^2 \varphi_0^2 \omega^2 = 1/2 mgh \varphi_0^2 (l/a), \text{ те је } \omega^2 = ga/lh = g/3h.$$

2.4. Да би период малих осцилација математичког клатна био што дужи мора бити и дужина клатна што већа. Због тога се у пракси често користи *математичко клатно са нагнутом осом*, сл. 2.16. d. Одредити период осцилација овог клатна занемарујући масу осовине и полуге.

[Решење. — При осцилацијама масе m у равни управној на осу AB биће енергије

$$E_k = 1/2 m l^2 \dot{\varphi}^2, \quad E_p = mgl(1 - \cos \varphi) \sin \alpha \approx 1/2 mgl \varphi^2 \sin \alpha,$$

па је кружна фреквенција осцилација $\omega = \sqrt{(g \sin \alpha)/l}$, те зависи од угла α , па се може по вољи учинити малом]

2.5. Одредити период малих осцилација *асташичког клатна* (сл. 2.17. a).

[Решење. — Из моментне једначине за тачку O добијамо

$$J\ddot{\varphi} = -M, \quad \text{тј. } ml^2 \ddot{\varphi} = -(2cl - mg) \cdot l \varphi,$$

јер је реституциона сила опруга $2cx = 2cl \sin \varphi \approx 2cl\varphi$. Према томе су

$$\omega^2 = \frac{2cl - mg}{ml}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{2cl - mg}}.$$

2.6. Одредити кружну фреквенцију малих осцилација *лабилног клатна**, (сл. 2.17. b).

[Решење. — Из моментне једначине за O , слично претходном задатку, добија се:

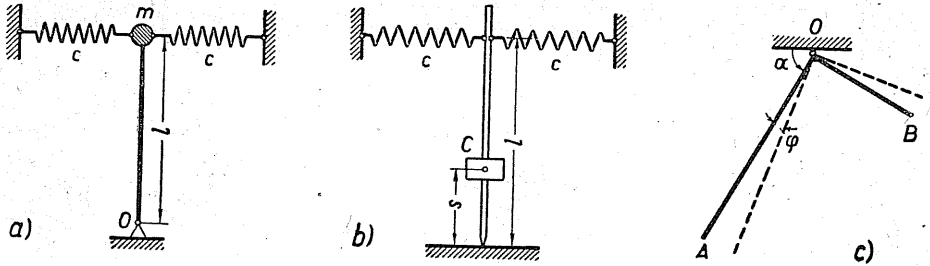
$$m(i^2 + s^2)\ddot{\varphi} + (2cl^2 - mgs)\varphi = 0,$$

где је l сопствени полупречник инерције, па је $\omega^2 = (2cl^2 - mgs)/m(i^2 + s^2)$. Погодним избором величина s и z може се ω начинити по вољи малом вредношћу. За $2cl^2 = mgs$

* Примењује се код *сеизмографа*.

је $\omega = 0$, па је клатно у индиферентној равнотежи. При даљем смањивању крутости c равнотежа постаје лабилна, ($2cl^2 < mgs$).

2.7. Хомогени правоугли челични лењир AOB , дужина кракова $\overline{AO} = 2a$, $\overline{OB} = 2b$, може да се обрће у вертикалној равни око тачке O . Одредити равнотежни положај лењира, ако је $a/b = 2$, и период малих осцилација око равнотежног положаја, (сл. 2.17. с). Специјално решење за $b = 12,5$ см.



Сл. 2.17. — а) Астатичко клатно, б) Лабилно клатно, с) Осциловање разнокраког угаоника

[Решење. — Из $\Sigma M_O = 0$ добијамо равнотежни положај $\operatorname{tg} \alpha = (a/b)^2 = 4$. Динамичка једначина обртања је

$$J \ddot{\varphi} = \mathfrak{M} = [\rho' 2 a g \cdot a \cdot \cos(\alpha + \varphi) - \rho' 2 b g \cdot b \sin(\alpha + \varphi)].$$

Како су:

$J = \frac{8}{3} \rho' (a^3 + b^3) = 24 \rho' b^3$; $\cos(\alpha + \varphi) \approx \cos \alpha - \varphi \sin \alpha$; $\sin(\alpha + \varphi) \approx \sin \alpha + \varphi \cos \alpha$, то је диференцијална једначина

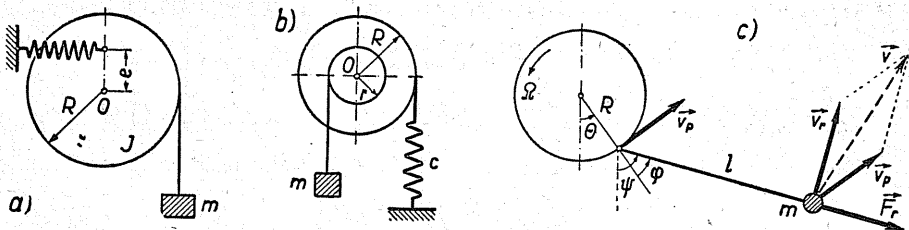
$$\ddot{\varphi} + [g(4 \sin \alpha + \cos \alpha) / 12 b] \varphi = 0,$$

па је период осцилације

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{12b}{g \cos \alpha (1 + 4 \operatorname{tg} \alpha)}} = 2\pi \sqrt{\frac{12 \sqrt{17} \cdot b}{17g}}.$$

2.8. Одредити кружну фреквенцију осцилација система приказаног на сл. 2.18. а.

$$[E_k = \frac{1}{2} (J + mR^2) \dot{\varphi}^2; E_p = \frac{1}{2} c e^2 \varphi^2 - m g R \varphi; \omega^2 = c e^2 / (J + mR^2).]$$



Сл. 2.18. — а) Чекр са опругом, б) Опружна вага, с) Модифицирано Sarazin-Taylor-ово клатно

2.9. Два когура насађена су на заједничку осовину, (сл. 2.18. *b*). Преко мањег когура је пребачен каиш са теретом G а преко већег конач са опругом, крутости c . Ако је J укупни момент инерције дискова одредити период малих осцилација терета.

$$[E_k = \frac{1}{2}(J + m r^2) \dot{\varphi}^2; E_p = \frac{1}{2} c R^2 \varphi^2 - mgr \varphi, \text{ па је } T = 2\pi \sqrt{(J + m r^2) / c R^2}.]$$

2.10. Математичко клатно у пољу центрифугалне силе. — На обиму вратила, полупречника R , које се обрће константном угаоном брзином Ω око геометријске осе, привезано је математичко клатно, масе m , сл. 2.18. *c*. Занемарујући утицај тежине клатна одредити период малих осцилација под утицајем центрифугалне силе (модифицирано *Sarazin-Taylor*-ово клатно).

[Решење. — Положај тачке m можемо одредити генерализаним координатама θ и $\psi = \theta + \varphi$, те се њена брзина састоји из

преносне брзине $v_p = R\Omega$ и релативне брзине $v_r = l\dot{\psi} = l(\Omega + \dot{\varphi})$, те је $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_p$, па је квадрат брзине

$$v^2 = v_r^2 + v_p^2 + 2v_r v_p \cos \varphi = (R^2 + l^2)\Omega^2 + 2l\Omega(l + R \cos \varphi)\dot{\varphi} + l^2\dot{\varphi}^2 + 2Rl\Omega^2 \cos \varphi$$

Кинетичка енергија система је

$$E_k = \frac{1}{2} J \Omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 = E_k(\varphi, \dot{\varphi})$$

па, дакле, зависи од $\dot{\varphi}$ и φ . Како је $E_p = 0$, то је генерализана координата φ , те се проблем своди на систем са једним степеном слободe. Лагранжева једначина даје једначину

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} &= m l^2 \ddot{\varphi} - (m R l \Omega \sin \varphi) \dot{\varphi} + m R l \Omega \dot{\varphi} \sin \varphi + m R l \Omega^2 \sin \varphi = \\ &= m l^2 \ddot{\varphi} + m R l \Omega^2 \sin \varphi = 0, \end{aligned}$$

те за мале осцилације добијамо

$$m l^2 \ddot{\varphi} + m R l \Omega^2 \varphi = 0, \text{ тј. } \ddot{\varphi} + (R \Omega^2 / l) \varphi = 0,$$

па је кружна фреквенција $\omega = \Omega \sqrt{R/l}$ сразмерна угаоној брзини обртања вратила Број осцилација клатна за један обртај вратила увек је исти и не зависи од брзине обртања вратила већ само од односа R/l .

2.11. Танка правоугаона плоча савијена је у полуваљак, (сл. 2.19. *a*). Одредити период малих осцилација ваљка у случају да се котрља без клизања по хоризонталној равни.

[Решење. — Како су $J_O = M r^2$; $J_c = M(r^2 - e^2)$, где је $e = 2r/\pi$, то је $I_c^2 = r^2 - e^2$ па је према (15) кружна фреквенција $\omega = \sqrt{g e / [I_c^2 + (r - e)^2]} = \sqrt{g / r(\pi - 2)}$.]

2.12. У коме односу стоје периоди осцилација диска, момента инерције J , ако су делови вратила различитих крутости, (сл. 2.19. *b, c*)?

[Решење. — У првом случају је веза опруга паралелна, па је

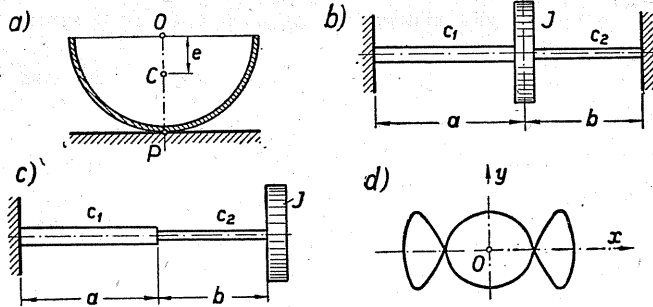
$$c = c_1 + c_2,$$

док је у другом случају веза редна, те је

$$(1/c) = (1/c_1) + (1/c_2).$$

Периоди осцилација стоје у односу

$$T_1 : T_2 = \sqrt{c_1 c_2 / (c_1 + c_2)^2}.$$



Сл. 2.19. — *a)* Осцилације полусферне љуске на глаткој равни,
b), c) Торзијски осцилатор на вратиљу променљивог пресека
d) Асинхроне осцилације

2.13. Сложити ортогоналне синхроне осцилације:

- a)* $x = 4 \sin t, y = 4 \cos t;$
- b)* $x = 6 \cos t, y = 2 - 6 \sin t;$
- c)* $x = 2 + 4 \cos t; y = 3 + 4 \sin t;$
- d)* $x = 3 \sin 2t; y = 4 \sin 2t + \pi/3;$
- e)* $x = 4 \cos 2t; y = 3 \sin 2t.$

2.14. Сложити ортогоналне асинхроне осцилације:

- a)* $x = 3 \sin t; y = 2 \cos 2t;$
- b)* $x = 2 \sin 2t; y = 2 \cos t;$
- c)* $x = 4 \cos (2t - \pi/6); y = 3 \sin t;$
- d)* $x = 2 \cos 2t; y = 2 \cos t.$

2.15. Показати да је путања за осцилације $x = 2a \cos t, y = a \sin 3t$ облика приказаног на слици 2.19. *d)*

$$[2a^2 y = 4x^2 - a^2(4a^2 - x^2)^{1/2}].$$

3. ОСЦИЛАЦИЈЕ СА ОТПОРНОМ СИЛОМ

Слободна хармонијска осцилација трајала би, према принципу о одржавању енергије, бесконачно дуго, када не би постојале *ошторне силе* које умањују амплитуду, те *гуше (амортизују) осцилације*. Због тога се ове осцилације називају *амортизоване*.

Отпорна сила може бити макаква, а обично зависи од брзине. Проучићемо три карактеристична случаја: када је отпорна сила константна, када је сразмерна првом степену брзине и када је сразмерна другом степену брзине. Прве осцилације се зову и *осцилације са шрењем*.

3.1. Осцилације са трењем. — У овоме случају поред силе еластичности опруге, (сл. 3.1.), дејствује тежина G и сила шрења. Тежина се поништава са нормалним оштором F_n а сила (отпор) трења је према Кулоновом (Coulomb) закону о трењу сразмерна нормалном отпору ($F_n = G = mg$), колинеарна је са брзином али је супротног смера

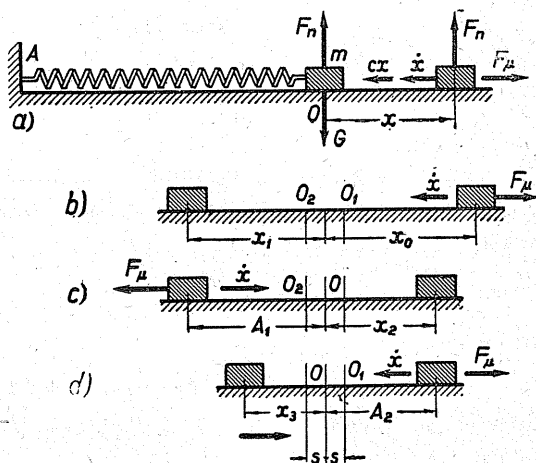
$$F_{\mu} = -\mu F_n (\text{sign } v) = -\mu mg (\text{sign } \dot{x}), \quad (1)$$

где је μ кинематички коефицијент шрења при клизању који сматрамо константним али мањим од статичког коефицијента трења (при ми-

ровању) $\mu < \mu_0$. Множилац $\text{sign } v = \text{sign } \dot{x}$ има вредност $(+1)$ када је $\dot{x} > 0$ и (-1) када је $\dot{x} < 0$, те је супротног смера од смера брзине.

Диференцијална једначина кретања налево биће

$$(\leftarrow) \quad m\ddot{x} + cx = -\mu mg (\text{sign } \dot{x}). \quad (2)$$



Сл. 3.1. — Осцилације са Кулоновим трењем

Када се материјална тачка изведе из равнотежног положаја за амплитуду x_0 (сл. 3.1. b) и пусти, без почетне брзине ($\dot{x}_0=0$), наступиће *кретање налево* ако је сила еластичности опруге по апсолутној вредности *већа* од силе трења мировања

$$|-cx_0| > \mu_0 mg, \quad (3)$$

где је μ_0 *коэффициент трења при мировању (статички коэффициент трења)*; $\mu_0 > \mu$. У овоме случају, због $x < 0$, диференцијална једначина (2) има облик

$$(\leftarrow) \quad \ddot{x} + \omega^2 x = \mu g, \quad (4)$$

тј. нехомогене диф. једначине са константним коэффициентима. Њено је опште решење

$$(\leftarrow) \quad x = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t + (\mu g / \omega^2). \quad (5)$$

За наведене почетне услове кретања (за $t=0$, $x = x_0$, $\dot{x}_0=0$), константе су

$$A_1 = x_0 - (\mu g / \omega^2); \quad B_1 = 0;$$

па су кинематичке једначине осциловања:

$$x = [x_0 - (\mu g / \omega^2)] \cos \omega t + (\mu g / \omega^2) = s + (x_0 - s) \cos \omega t, \quad (6)$$

$$\dot{x} = -\omega (x_0 - s) \sin \omega t,$$

где је уведена ознака

$$s = \mu g / \omega^2 = \mu G / m \omega^2 = F_{\mu} / c. \quad (7)$$

За $t=0$ и $t=\pi/\omega$ брзина је једнака нули, ($\dot{x}=0$), па је у размаку $0 < t < \pi/\omega$ *негативна*, ($\dot{x} < 0$). Када се тачка тренутно заустави, тада према (6), достигне амплитуду

$$x_1 = s - (x_0 - s) = -(x_0 - 2s) \quad (8)$$

те је $|-x_1| < |x_0|$.

При тренутном заустављању, у тренутку $t=\pi/\omega$, мења се знак брзине и *кретање ће насупрутно надесно* (сл. 3.1. c) ако је испуњен услов

$$|-cx_1| > \mu_0 mg. \quad (9)$$

Диференцијална једначина кретања у овом случају има облик

$$(\rightarrow) \quad \ddot{x} + \omega^2 x = -\mu g, \quad (10)$$

и решење јој је

$$(\rightarrow) \quad x = A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t - s. \quad (11)$$

Почетни услови кретања су: за $t=t_1=\pi/\omega$, $x=x_1=-(x_0-2s)$ и $\dot{x}_0=0$, па су константе:

$$A_2 = x_0 - 3s, \quad B_2 = 0,$$

те су закони кретања и брзине

$$x = -s + (x_0 - 3s) \cos \omega t; \quad \dot{x} = -\omega (x_0 - 3s) \sin \omega t. \quad (12)$$

У размаку $\pi/\omega < t < 2\pi/\omega$ брзина је позитивна, ($\dot{x} > 0$), а за $t_2=2\pi/\omega$ је једнака нули, ($\dot{x}=0$); тачка се тренутно зауставља на удаљењу

$$x_2 = -s + (x_0 - 3s) = x_0 - 4s, \quad (13)$$

те је $|x_2| < |-x_1|$. Буде ли испуњен услов $|-cx_2| > p_0 mg$ наступиће кретање *налево*; затим *надесно*, итд., итд.

Према изнетом, закони кретања су

$$0 < t < \pi/\omega \quad x = x_{(1)} = s + (x_0 - s) \cos \omega t; \quad (\leftarrow)$$

$$\pi/\omega < t < 2\pi/\omega \quad x = x_{(2)} = -s + (x_0 - 3s) \cos \omega t; \quad (\rightarrow) \quad (14)$$

$$2\pi/\omega < t < 3\pi/\omega \quad x = x_{(3)} = s + (x_0 - 5s) \cos \omega t; \quad (\leftarrow)$$

.....

$$(n-1)\pi/\omega < t < n\pi/\omega \quad x = x_{(n)} = (-1)^{n-1} s + [x_0 - (2n-1)s] \cos \omega t;$$

односно

$$\xi_{(1)} = x_{(1)} - s = (x_0 - s) \cos \omega t = A_1 \cos \omega t; \quad (\leftarrow)$$

$$\xi_{(2)} = x_{(2)} + s = (x_0 - 3s) \cos \omega t = A_2 \cos \omega t; \quad (\rightarrow) \quad (15)$$

.....

$$\xi_{(n)} = x_{(n)} - (-1)^{n-1} s = [x_0 - (2n-1)s] \cos \omega t = A_n \cos \omega t.$$

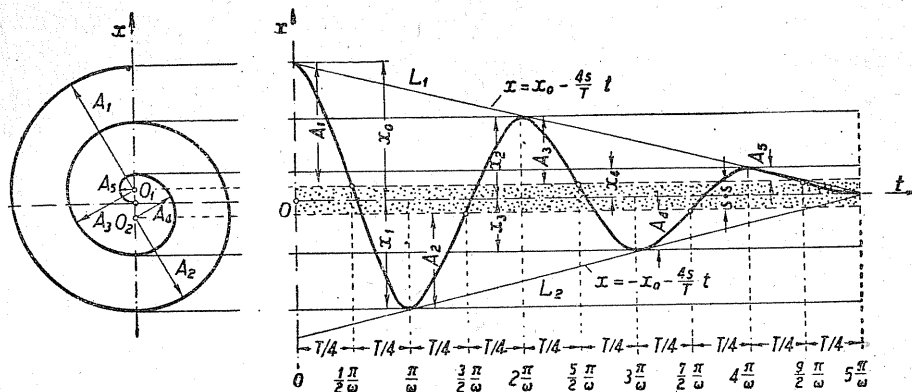
Кретање је, дакле, периодичко; периода

$$T = 2\pi/\omega \quad (16)$$

на који не ушиче сила шрења.

Дијаграми (x, t) су *косинусне линије* које мењају апсцисну осу, (сл. 3.2. а). *Полуосцилације са негативном брзином*, ($\dot{x} < 0$), имају праву $x=s$ за осу, а *полуосцилације са позитивном брзином*, ($\dot{x} > 0$), праву

$x = -s$. Ове криве линије секу праве $x = \pm s$ у тачкама са апсцисама $\frac{1}{4}T$; $\frac{3}{4}T$; $\frac{5}{4}T$; ...



Сл. 3.2. — Спирала са два центра

Амплитуде полуосцилација имају вредности:

a) у односу на осу $x=0$:

$$x_0; x_1 = -(x_0 - 2s); x_2 = x_0 - 4s; x_3 = -(x_0 - 6s); \dots \quad (17a)$$

и

b) у односу на осе $x = \pm s$:

$$A_1 = x_0 - s; A_2 = -(x_0 - 3s); A_3 = x_0 - 5s; \dots \quad (17b)$$

уопште је

$$x_n = (-1)^n [x_0 - 2ns]; \quad A_n = (-1)^{n-1} [x_0 - (2n-1)s];$$

и

$$|x_n| - |x_{n+1}| = 2s; \quad |A_n| - |A_{n+1}| = 2s$$

иа полуамплитуде образују опадајућу аритметичку прогресију, разлике $2s$. Због тога врхови амплитуда леже на правама L_1 и L_2 .

Тачка ће се зауставити када буде испуњен услов

$$|x_n| < \mu_0 g / \omega^2 = s_0, \quad \text{или} \quad |A_n| < s_0, \quad (18)$$

тј. када уђе у мртву зону (отсечак ширине $2s_0$), сл. 3.2. До заустављања тачка ће направити n полуосцилација

$$n \geq \frac{x_0 - s_0}{2s}. \quad (19)$$

Промене амплитуда и дијаграм кретања можемо лако графички добити помоћу спирале са два центра на растојањима $\overline{OO_1} = s$ и

$\overline{OO_2} = -s$, (сл. 3.2.). Полукругови, полупречника једнаким амплитудама A_i , наизменично се описују из средишта $O_1(s; 0)$ и $O_2(-s; 0)$. Када последњи полукруг уђе у мртву зону крешање ће сшати.

Сл. 3.2. а је изведена за податке: $G=600$ gr; $q=0,1$ kg/cm; $\mu=0,05$; $\mu_0=0,06$; $x_0=5$ cm, па су:

$$\omega^2 = c/m = 163 \text{ sec}^{-2}; T = 2\pi/\omega \approx 0,5 \text{ sec}^{-1}; s = 0,3 \text{ cm}; s_0 = 0,36 \text{ cm}; 2s = 0,6 \text{ cm}.$$

Амплитуде су:

$$a) x_0 = 5 \text{ cm}; x_1 = -4,4 \text{ cm}; x_2 = 3,8 \text{ cm}; x_3 = -3,2 \text{ cm}; x_4 = 2,6 \text{ cm}; x_5 = -2 \text{ cm}; x_6 = 1,4 \text{ cm}; x_7 = -0,8 \text{ cm}; x_8 = 0,2 \text{ cm};$$

$$b) A_1 = 4,7 \text{ cm}; A_2 = -4,1 \text{ cm}; A_3 = 3,5 \text{ cm}; A_4 = -2,9 \text{ cm}; A_5 = 2,3 \text{ cm}; A_6 = -1,7 \text{ cm}; A_7 = 1,1 \text{ cm}; A_8 = -0,5 \text{ cm}.$$

Тачка ће извршити $n = 7,733 \approx 8$ полуосцилација.

Једначине правах L_1 и L_2 , које су обвојнице дијаграма (x, t) , јесу:

$$x = \pm (x_0 - \frac{4s}{T} t) \approx \pm (5 - 2,4 t).$$

Када би у почетном положају A_0 , (сл. 3.1.), почетна брзина била различита од нуле, $\dot{x}_0 \neq 0$, и усмерена улево, тада бисмо, из једначине (5), добили да су интеграционе константе

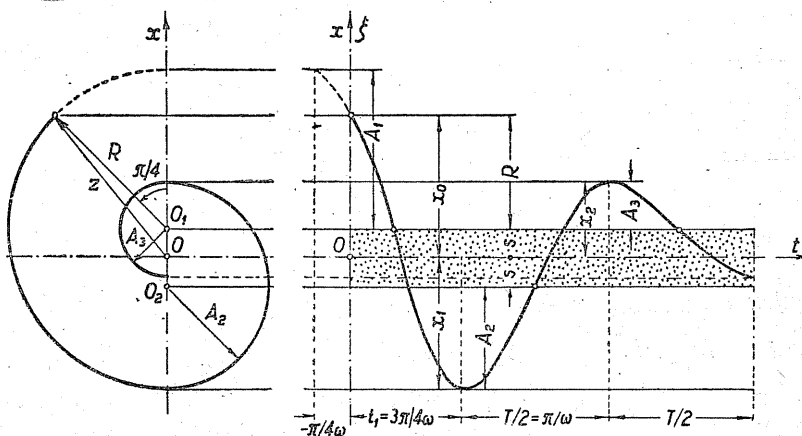
$$A_1 = x_0 - s; \quad B_1 = -\dot{x}_0/\omega.$$

Уводећи смене $R \cos \varphi_0 = A_1$, $R \sin \varphi_0 = -B_1$, закон кретања биће

$$x = s + R \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (6')$$

па су амплитуда и померање фазе

$$R = \sqrt{(\dot{x}_0/\omega)^2 + (x_0 - s)^2}; \quad \text{tg } \varphi_0 = -B_1/A_1 = -\dot{x}_0/\omega (x_0 - s). \quad (6'')$$



Сл. 3.3. — Дијаграм пута и времена

Тачка се зауставља у тренутку када је брзина једнака нули, ($\dot{x}=0$), одређеном једначином $t_1 = (\pi - \varphi_0)/\omega$, па настаје кретање на

десно. Даљи ток кретања је исти као и у случају претходног кретања без почетне брзине.

Дијаграм (x, t) за случај кретања са почетном брзином представљен је на сл. 3.3. за податке: $x_0 = 5 \text{ s}$, $\dot{x}_0 = -4 \text{ s } \omega$, па су $R = 4\sqrt{2} \text{ s} \approx 5,66 \text{ s}$ и $t_1 = 3\pi/4 \omega$.

Из изложеног видимо да је разлика овог кретања од претходног случаја без почетне брзине само у првом циклусу здесна на лево, јер ће се тачка после времена t_1 тренутно зауставити, достигавши амплитуду $R - 2 \text{ s}$ а затим ће наставити кретање надесно до наредног тренутка t_2 , када је брзина опет једнака нули.

Према томе је закон кретања

$$x_{(n)} = (-1)^{n-1} s + (R - 2 \text{ ns}) \cos(\omega t + 1/4 \pi).$$

Тачка се зауставља после три полуосцилације.

3.2. Отпор сразмеран првом степену брзине. — Када се осцилација врши под утицајем отпорне силе сразмерне првом степену брзине

$$F_w = -b\dot{x} \text{ (sign } \dot{x}), \quad (20)$$

где је b коефицијент пропорционалности, тј. коефицијент отпорне силе, димензије $[FT/L]$, обично јединице kg sec/cm , колинеарне са брзином само супротног смера, тада је диференцијална једначина кретања

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0. \quad (21)$$

Уведу ли се смене $c/m = \omega^2$; $b/m = 2\delta$, где је δ коефицијент гушења (амортизације*), горња једначина постаје

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (22)$$

па је хомогена диференцијална једначина са константним коефицијентима. Њена карактеристична једначина је

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0 \quad (23)$$

са коренима

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2} = \omega [-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}], \quad (23a)$$

где је

$$\zeta = \delta/\omega = b/2\sqrt{c/m}$$

коефицијент расипања**.

Ако је $\delta > \omega$ корени су реални и различити; при $\delta = \omega$ корени су реални и једнаки а када је $\delta < \omega$ корени су коњуговано комплексни. У прва два случаја кретање је апериодичко; у трећем случају је опадајуће хармонијско кретање.

* Abklingkonstante; ** Dämpfungszahl.

3.2.1. Опадајуће осцилаторно кретање (слаба осцилација). —

У овоме је случају $\delta < \omega$, тј. $\zeta < 1$, па су корени карактеристичне једначине коњуговано комплексни. Ставимо ли да је

$$\delta^2 - \omega^2 = -\rho^2, \quad \text{тј.} \quad \rho^2 = \omega^2 - \delta^2 = \omega^2(1 - \zeta^2) \quad (24)$$

биће

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \rho i = -\delta \pm i \sqrt{\omega^2 - \delta^2} = \omega [-\zeta \pm i \sqrt{1 - \zeta^2}], \quad (24a)$$

па је општи интеграл диференцијалне једначине (22)

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\delta t} [A \cos \rho t + B \sin \rho t], \quad (25)$$

где су C_1, C_2 , односно A, B , интеграционе константе. Уведу ли се смене

$$A = R \cos \theta_0, \quad B = R \sin \theta_0$$

горња једначина постаје

$$x = R e^{-\delta t} \cdot \cos(\rho t - \theta_0). \quad (26)$$

Амплитуда и померање фазе одређени су једначинама

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \text{tg } \theta_0 = B/A. \quad (26a)$$

За почетне услове кретања за $t = 0$, $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ константе биће

$$A = x_0, \quad B = (\delta x_0 + \dot{x}_0) / \rho,$$

па је партикуларни интеграл за наведене почетне услове

$$x = e^{-\delta t} \left[x_0 \cos \rho t + \frac{\delta x_0 + \dot{x}_0}{\rho} \sin \rho t \right] = R e^{-\delta t} \cos(\rho t - \theta_0). \quad (27)$$

У овоме су случају амплитуда и померање фазе

$$R = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\delta x_0 + \dot{x}_0}{\rho} \right)^2}; \quad \text{tg } \theta_0 = \frac{\delta x_0 + \dot{x}_0}{\rho x_0}. \quad (28)$$

Из једначина (25) и (27) видимо да је оппадајуће осцилаторно кретање сложено и да се састоји из двеју колинеарних синхроних осцилација, кружне фреквенције ρ али променљивих амплитуда,

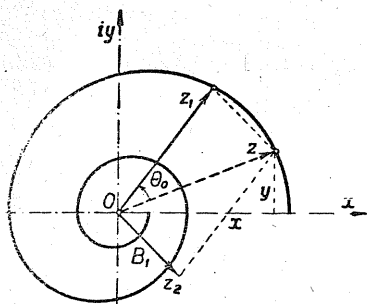
$$x_1 = A e^{-\delta t} \cos \rho t, \quad x_2 = B e^{-\delta t} \sin \rho t = B e^{-\delta t} \cos(\rho t - 1/2 \pi),$$

од којих друга заостаје у фази за првом за $1/2 \pi$. Оне се могу сложити у једну осцилацију преко комплексних бројева променљивих модула $|z_1| = A e^{-\delta t}$, $|z_2| = B e^{-\delta t}$, па су модул и аргумент збира ових бројева

$$|z| = e^{-\delta t} \sqrt{A^2 + B^2} = R e^{-\delta t}; \quad \arg z = \rho t - \theta_0.$$

Геометријско место комплексних бројева z јесте логаритамска спирала, (сл. 3.4.).

Диференцирањем једначине (26) добијамо брзину кретања



Сл. 3.4. — Логаритамска спирала

$$\dot{x} = -Re^{-\delta t} [\delta \zeta^2 \cos(pt - \theta_0) + p \sin(pt - \theta_0)]. \quad (29)$$

Из једначина (27) и (29) види се да функције $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ нису периодичке, јер није задовољен услов $f(t + T_a) \equiv f(t)$ за сваку вредност t , где је

$$T_a = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (30)$$

период слабе осцилације. Овај период се због тога и зове условни период па је и кретање квази-периодичко; $x(t + T_a) \neq x(t)$.

Брзина је једнака нули, ($\dot{x} = 0$), када је испуњен услов

$$\operatorname{tg}(pt_0 - \theta_0) = -\delta/p; \quad \operatorname{tg}(pt_0 - \theta_0 + n\pi) = -\delta/p,$$

тада су

$$pt_0 - \theta_0 = \operatorname{arc tg}(-\delta/p), \quad pt_n - \theta_0 = \operatorname{arc tg}(-\delta/p)$$

те времена

$$t_n = t_0 + n\pi/p = t_0 + n(T_a/2)$$

распу у аритметичкој прогресији, разлике $\pi/p = 1/2 T_a$.

Из једначина (26) добија се полуамплитуда

$$x_n = Re^{-\delta t_n} \cos(pt_n - \theta_0) = (-1)^n x_0 e^{-n\delta\pi/p}$$

па је и

$$x_{n+1} = Re^{-\delta(t_n + 1/2 T_a)} \cdot \cos(pt_n - \theta_0 + \pi) = (-1)^{n+1} x_0 e^{-(n+1)\delta\pi/p}$$

Апсолутне вредности узастопних полуамплитуда стоје у односу

$$\frac{|x_n|}{|x_{n+1}|} = \frac{1}{e^{-\delta\pi/p}} = e^{\delta\pi/p} = e^{\delta T_a/2} = \kappa \quad (31)$$

и образују геометријску прогресију. Природни логаритам тога односа зове се логаритамски декремент (пад) опадајуће осцилације

$$\ln|x_n| - \ln|x_{n+1}| = \ln \kappa = \frac{\delta\pi}{p} = \frac{\delta T_a}{2} = \frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \mathfrak{D}. \quad (32)$$

Он је *неименовани* број. Помоћу њега и периода осцилације одређује се *експериментално* и коефицијент гушења

$$\delta = \frac{2 \ln \kappa}{T_a} = \frac{2 \mathcal{D}}{T_a} \quad (32a)$$

Неки писци узимају за логаритамски декремент природни логаритам односа апсолутних вредности амплитуда, па је

$$\ln \frac{|x(t)|}{|x(t+T_a)|} = \ln |x(t)| - \ln |x(t+T_a)| = \delta T_a = \mathcal{D}' = 2\mathcal{D},$$

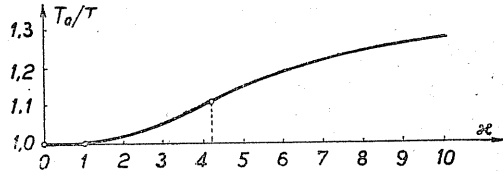
те има два пута већу вредност од претходне.

Период опадајуће осцилације T_a је *дужи* од периода слободне осцилације T , јер је

$$T_a = \frac{2\pi}{\rho} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}} =$$

$$= T [1 - (\delta/\omega)^2]^{-1/2} \approx$$

$$\approx T [1 + 1/2 (\delta/\omega)^2] > T.$$



Сл. 3.5. — Дијаграм промене односа периода T_a/T у зависности од односа полаумплитуда

Како је $\delta/\omega = \zeta = \rho \mathcal{D}/\pi\omega = \mathcal{D} T/\pi T_a$ то је однос

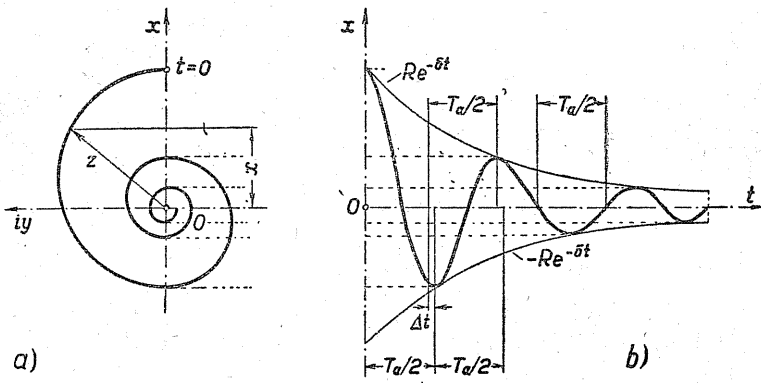
$$\frac{T_a}{T} = \frac{\omega}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\mathcal{D} T/\pi T_a)^2}} = \sqrt{1 + (\mathcal{D}/\pi)^2}. \quad (33)$$

Та зависност је приказана на сл. 3.5.

За $\kappa=2$ је $T_a/T=1,024$ па је T_a за 2,4% дужи од периода T ; за $\kappa=4,2$ је $T_a/T=1,1$ па је већи за 10% од T .

Из овога дијаграма закључујемо да *слаби оштор мало мења период осцилације али врло брзо гуши слободне осцилације.*

На сл. 3.6. приказан је закон кретања (26) за случај да је $\theta_0=0$, тј. када су почетни услови кретања: за $t=0$, $x=x_0$, $\dot{x}_0=-\delta x_0$. Криве $x=Re^{-\delta t}$ јесу обвојнице ди



Сл. 3.6. — Закон кретања за почетне услове: за $t=0$, $x=x_0$, $\dot{x}_0=-\delta x_0$

јаграма. Апсисе тачака додира дијаграма (x, t) и обвојница одређене су са $t_d = n\pi/p$, а апсисе екстремних тачака са $pt = \arctg(-\delta/p) + n\pi$, па ове тачке леже на размаку $\Delta t \approx \delta, p^2 = \delta/\omega^2$.

3.2.2. Аперидичко кретање (јака осцилација). — У овоме је случају $\delta > \omega$, тј. $\zeta > 1$, па су корени карактеристичне једначине (23) реални и различити. Ставимо ли да је

$$q^2 = \delta^2 - \omega^2 \quad (34)$$

биће корени

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm q = -\delta \pm \omega \sqrt{\zeta^2 - 1} = \omega [-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}], \quad (34a)$$

те је општи интеграл диференцијалне једначине (22)

$$x = e^{-\delta t} (C_1 e^{qt} + C_2 e^{-qt}) = e^{-\delta t} (A \operatorname{Ch} qt + B \operatorname{Sh} qt), \quad (35)$$

где су $A = C_1 + C_2$, $B = C_1 - C_2$ константе, јер је $e^{qt} = \operatorname{Ch} qt + \operatorname{Sh} qt$ и $e^{-qt} = \operatorname{Ch} qt - \operatorname{Sh} qt$. Како при $t \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow 0$ то је кретање аперидичко.

За велику вредност t може се ставити $\operatorname{Ch} qt \approx \operatorname{Sh} qt \approx \frac{1}{2} e^{qt}$, па се општи интеграл (35) може написати у овом облику

$$x \approx \frac{1}{2} (A+B) e^{-(\delta-q)t} = C e^{-(\delta-q)t}. \quad (36)$$

Како је $\delta - q > 0$ то када $t \rightarrow \infty$ тада $x \rightarrow 0$, те материјална тачка асимптотски тежи равнотежном положају ($x=0$).

Уведу ли се смене

$$A = C \operatorname{Sh} \psi_0, \quad B = C \operatorname{Ch} \psi_0,$$

интеграл (35) може се написати у облику

$$x = C e^{-\delta t} \operatorname{Sh} (qt + \psi_0), \quad (37)$$

па су амплитуда и померање фазе одређени једначинама

$$C = \sqrt{B^2 - A^2}, \quad \operatorname{Th} \psi_0 = A/B. \quad (37a)$$

Ако су почетни услови кретања: за $t=0$, $x=x_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0$, онда су константе

$$A = x_0, \quad B = (\delta x_0 + \dot{x}_0)/q,$$

па је партикуларни интеграл за наведене почетне услове кретања

$$x = e^{-\delta t} \left[x_0 \operatorname{Ch} qt + \frac{\delta x_0 + \dot{x}_0}{q} \operatorname{Sh} qt \right], \quad (38)$$

и брзина кретања

$$\dot{x} = e^{-\delta t} \left[\dot{x}_0 \operatorname{Ch} qt - \frac{\omega^2 x_0 + \delta \dot{x}_0}{q} \operatorname{Sh} qt \right]. \quad (39)$$

Из једначине (39) закључујемо да ће брзина покретне тачке бити једнака нули, ($\dot{x}=0$), у тренутку t_n одређеном једначином

$$\operatorname{Th} qt_n = \frac{q \dot{x}_0}{\omega^2 x_0 + \delta \dot{x}_0} = \frac{q}{\delta + \omega^2 (x_0/\dot{x}_0)} = \frac{\sqrt{1 - (\omega/\delta)^2}}{1 + (\omega^2/\delta) (x_0/\dot{x}_0)} \quad (40)$$

достигавши амплитуду

$$x_n = x_0 e^{-\delta t_n} \operatorname{Ch} qt_n \left[1 + \frac{1 + (x_0/\delta \dot{x}_0)}{1 + (\omega^2 x_0/\delta \dot{x}_0)} \right]. \quad (40a)$$

Под претпоставком да је $x_0 > 0$, с обзиром на почетну брзину \dot{x}_0 , разликујемо три случаја апериодичког кретања. Пошто функција $\operatorname{Th} qt$ за $0 < qt < \infty$ монотонно расте од вредности 0 до 1 то трансцендентна једначина (40) може имати само један позитивни корен t_n ако је задовољен услов

$$0 < \frac{\sqrt{1 - (\omega/\delta)^2}}{1 + (\omega^2 x_0/\delta \dot{x}_0)} < 1. \quad (40b)$$

а) *Први случај.* — Ако је $\dot{x}_0 > 0$ онда је x_n позитивно, па је закон кретања приказан на сл. 3.7.a. Из њега се види да се тачка удаљава од равнотежног положаја, ($x=0$), до максимума x_n , а затим се враћа асимптотски равнотежном положају не стигавши у њу у коначном времену.

б) *Други случај.* — Ако је $\dot{x}_0 < 0$ а испуњен је и услов

$$1 + (\omega^2 x_0/\delta \dot{x}_0) > \sqrt{1 - (\omega/\delta)^2} = q/\delta, \quad \text{тј.}$$

$$|\dot{x}_0| > x_0(\delta + q),$$

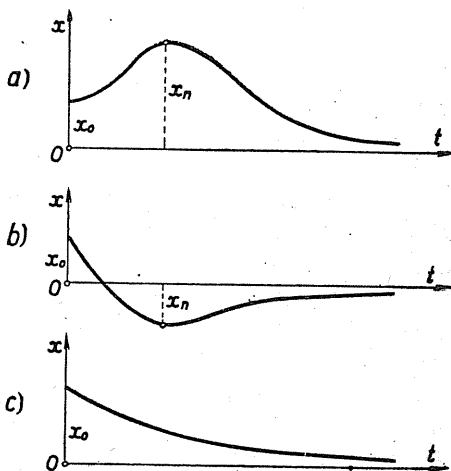
онда је неједначина (40b) задовољена, па је $x_n < 0$. Закон кретања је приказан на сл. 3.7.b. Из дијаграма се види да тачка пролази једанпут кроз равнотежни положај ($x=0$), затим се удаљује од њега у негативном смеру постижући максимум, а онда се асимптотски враћа положају равнотеже.

в) *Трећи случај.* — Ако је $\dot{x}_0 < 0$ а испуњен је и услов

$$1 + (\omega^2 x_0/\delta \dot{x}_0) < \sqrt{1 - (\omega/\delta)^2} = q/\delta, \quad \text{тј.} \quad |\dot{x}_0| < x_0(\delta + q)$$

онда неједначина (40b) није задовољена, па се амплитуда x монотонно смањује. Дијаграм кретања приказан је на сл. 3.7.c, из кога се види да тачка асимптотски тежи равнотежном положају.

Прва два случаја зову се апериодичко кретање прве врсте а трећи случај је апериодичко кретање друге врсте.



Сл. 3.7. — Дијаграми (x, t) апериодичког кретања

3.2.3. Гранични случај аperiодичког кретања. — У овоме је случају $\omega = \delta$, тј. $\zeta = 1$, па су оба корена карактеристичне једначине (23) реална и једнака. Општи интеграл диференцијалне једначине (22) има облик

$$x = e^{-\delta t} (At + B), \quad (41)$$

па се одмах види да када $t \rightarrow \infty$ тада $x \rightarrow 0$, те материјална тачка доста брзо стиже у равнотежни положај. Ако су почетни услови кретања: за $t=0$, $x = x_0 > 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ онда су константе

$$A = \delta x_0 + \dot{x}_0, \quad B = x_0,$$

па је партикуларни интеграл

$$x = e^{-\delta t} [x_0 + (\delta x_0 + \dot{x}_0) t] \quad (42)$$

и брзина кретања

$$\dot{x} = e^{-\delta t} [\dot{x}_0 - \delta (\delta x_0 + \dot{x}_0) t]. \quad (43)$$

Брзина је једнака нули, ($\dot{x} = 0$), када је задовољен услов

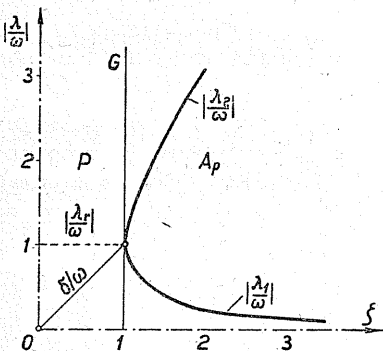
$$t_n = \dot{x}_0 / \delta (\delta x_0 + \dot{x}_0) \quad (44)$$

и у томе тренутку материјална тачка постиже амплитуду

$$x_n = e^{-\delta t_n} \cdot \frac{\delta x_0 + \dot{x}_0}{\delta}. \quad (45)$$

Слично претходном случају аperiодичког кретања и овде разликујемо три случаја кретања. Први случај ($\dot{x}_0 > 0$, $t_n > 0$ те је и $x_n > 0$) и други ($\dot{x}_0 < 0$, тј. $|\dot{x}_0| > \delta x_0$, даје $t_n > 0$ и $x_n < 0$) представљају аperiодичко кретање прве врсте, док трећи случај ($\dot{x}_0 < 0$, тј. $|\dot{x}_0| < \delta x_0$, па је $t_n < 0$) представља аperiодичко кретање друге врсте. Дијаграми кретања су слични дијаграмима представљеним на сл. 3.7.

Из (24a) и (34a) види се да корени карактеристичне једначине зависе од односа $\delta/\omega = \zeta$. У случају слабе осцилације опадање амплитуда биће утолико јаче уколико је коефицијент δ већи, па је најповољнији случај када је $\zeta = 1$, тј. у случају граничног случаја аperiодичког кретања. Како је реални део корена $\lambda_r = -\zeta\omega$, то је модул односа корена и кружне фреквенције слободне осцилације $|\lambda_r/\omega| = \zeta$. У случају аperiодичког кретања биће



Сл. 3.8. — Зависност корена карактеристичне једначине од коефицијента расипања

$$\frac{\lambda_1}{\omega} = -[\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}],$$

$$\frac{\lambda_2}{\omega} = -[\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}],$$

па је $|\lambda_2/\omega| > |\lambda_1/\omega|$. Дијаграми промена модула $|\lambda/\omega|$ приказани су на сл. 3.8. из које се види да највећој вредности функције $|\lambda_1/\omega|$ одговара најмања вредност функције $|\lambda_2/\omega|$. Тангента повучена у тој тачки на обе криве је вертикална и представља гранични случај апериодичког кретања.

3.2.4. Осцилације са променљивим коефицијентом гушења. — У раније изнетим случајевима коефицијент гушења је био константан. Међутим, он може да зависи и од неког параметра, напр. $\delta = \delta(w)$, тако да *опада* када вредност параметра w *расте* и да је за $w = w_k$ коефицијент $\delta = 0$. Према томе је вредност $w = w_k$ *критична вредност*, па је за $w < w_k$ коефицијент δ позитиван, ($\delta > 0$) а за $w > w_k$ је негативан, ($\delta < 0$). У овоме је случају диференцијална једначина кретања

$$\ddot{x} + 2\delta(w) \cdot \dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

За случај да је $\omega > |\delta|$ према вредности δ , постоје три врсте интеграла.

1^о Када је $w < w_k$, тј. $\delta > 0$, тада је

$$x = R e^{-\delta t} \sin(pt + \theta_0),$$

случај амортизованог осцилаторног кретања око положаја $x=0$.

2^о При $w = w_k$, тј. $\delta = 0$, биће

$$x = R \sin(\omega t + \theta_0),$$

па представља закон хармонијског кретања око положаја $x=0$.

3^о Ако је $w > w_k$, тј. $\delta < 0$, онда је $\delta = -k$, где је $k > 0$, па је

$$x = R e^{kt} \sin(\sqrt{\omega^2 - k^2} t + \theta_0)$$

те представља кретање око положаја $x=0$ са неограниченим порастом амплитуде.

Због овога је вредност w_k заиста критична вредност параметра w , јер се при пролазу кроз ту вредност прелази из области амортизованих осцилација у област осцилација са амплитудом која неограничено расте.

Такав се случај јавља при осцилацијама аеропланског крила, где је w брзина лета. Ако је $w < w_k$ осцилације крила су амортизоване и нису опасне; међутим, када је $w > w_k$ тада наступају осцилације са неограниченим порастом амплитуде, те наступа лом крила. Та се појава назива *флајшер* (flutter). При овој појави аеродинамичке силе имају јачег утицаја него силе амортизације осцилација.

3.3. Функција расипања. — У случају конзервативног кретања Лагранжева диференцијална једначина има облик

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial E_k}{\partial q} + \frac{\partial E_p}{\partial q} = 0, \quad (46)$$

где је *генералисана сила* за координату q дата изразом $Q = \partial U / \partial q = -\partial E_p / \partial q$. У случају неконзервативног кретања горња једначина постаје

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial E_k}{\partial q} + \frac{\partial E_p}{\partial q} = Q^*, \quad (47)$$

где је Q^* генерализована неконзервативна сила за координату q . Ако постоји функција која зависи од генерализоване координате и генерализоване брзине и која има особину да је парцијални извод те функције по генерализованој брзини једнак негативној генерализованој сили

$$Q^* = - \frac{\partial \Phi(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \quad (48)$$

онда се по Релу (Rayleigh) та функција назива функција расипања (dissipative function). Уводећи ту функцију Лагранжева једначина постаје

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial E_k}{\partial q} + \frac{\partial E_p}{\partial q} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (49)$$

За случај слабе осцилације биће

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad E_p = \frac{1}{2} c x^2, \quad \Phi = \frac{1}{2} b \dot{x}^2$$

па су

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}, \quad \frac{\partial E_p}{\partial x} = c x; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} = b \dot{x},$$

и

$$\dot{x} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}^2 = 2E_k; \quad \dot{x} \frac{\partial E_p}{\partial x} = c x \dot{x} = \frac{dE_p}{dt}; \quad \dot{x} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} = b \dot{x}^2 = 2\Phi.$$

Множењем једначине (49) генерализованом брзином \dot{x} биће

$$\dot{x} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial E_k}{\partial x} \right] + \dot{x} \frac{\partial E_p}{\partial x} = - \dot{x} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}.$$

Како је

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} \right) = \ddot{x} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} \Big| + \frac{\partial E_k}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial E_k}{\partial x} \dot{x} = \frac{d}{dt} (2E_k)$$

то је

$$\dot{x} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial E_k}{\partial x} \right] = \frac{d}{dt} (2E_k) - \left[\ddot{x} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} \right] = \frac{d}{dt} (2E_k) - \frac{d}{dt} E_k,$$

па је

$$\frac{d}{dt} E_k + \frac{dE_p}{dt} = -2\Phi,$$

те је

$$\boxed{\frac{d}{dt} (E_k + E_p) = \frac{d}{dt} E = -2\Phi.} \quad (50)$$

Из ове једначине закључујемо да при неконзервативном кретању функција расипања игра улогу *мере опадања шопалне механичке енергије у јединици времена. Ово умањење је, дакле, једнако двострукој вредности функције расипања.*

Како је хармонијско кретање конзервативно то је тотална механичка енергија константна $E = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2$, па је $dE/dt = 0$. У случају осцилације са отпорном силом која је сразмерна првом степену брзине, множењем диференцијалне једначине (21) са $\dot{x} dt = dx$ и интеграљењем следи

$$\int_0^t m \dot{x} dx + \int_0^t c x dx = dE_k + dE_p = - \int_0^t b \dot{x}^2 dt = - \int_0^t 2\Phi dt < 0.$$

ПРИМЕРИ

3.1. Тело тежине 500 грама осцилује по храпавој равни коефицијента трења $\mu_0 = 0,3$, $\mu = 0,2$ а крутост опруге за коју је везано износи $c = 250$ gr/cm. Одредити број његових осцилација до заустављања.

$$[s_0 = 6 \text{ mm}, s = 4 \text{ mm}; n = (10 - 0,6)/0,8 = 12, \text{ тј. } 6 \text{ пуних осцилација}].$$

3.2. Тело везано опругом, такве крутости да се под утицајем терета G издужи за 4 mm, отклоњено је из равнотежног положаја за $x_0 = 30$ cm и пуштено без почетне брзине да осцилује по храпавој хоризонталној равни. Одредити коефицијент трења између површине и тела ако је после 5 пуних осцилација почетна амплитуда умањена три пута.

$$[|x_n| = |x_0| - 2ns; s = 1 \text{ cm}; s = \mu F/c; \mu = 2,5].$$

3.3. Материјална тачка масе $m = 1$ креће се под утицајем привлачне силе сразмерне растојању, коефицијента пропорционалности $c = 25$, и отпорне силе сразмерне брзини, коефицијента пропорционалности $b = 6$. Одредити закон кретања ако су почетни услови: за $t = 0$, $x_0 = 8$, $\dot{x}_0 = 0$.

$$[x = e^{-3t} (8 \cos 4t + 6 \sin 4t)].$$

3.4. Период опадајућег осцилаторног кретања је $T_a = 2$ sec а логаритамски декремент $\mathcal{D} = 0,5$. Одредити закон кретања ако су почетни услови: за $t = 0$, $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 1$ m/sec.

$$[T_a = 2 \text{ sec}; p = \pi \text{ sec}^{-1}; \delta = 0,5; x = (1/\pi) e^{-0,5t} \sin \pi t].$$

3.5. Написати законе кретања материјалне тачке која врши амортизоване осцилације ако су почетни услови кретања: за $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = v_0$ и коефицијент расипања $\zeta = 0,5$; 1 и 2.

$$[x = (v_0/0,865 \omega) e^{-0,5\omega t} \sin 0,865 \omega t; x = v_0 t e^{-\omega t}; x = (v_0/3,46 \omega) (e^{-0,268 \omega t} - e^{-3,73 \omega t})].$$

3.6. Тачка која осцилује у вискозној средини има период осцилације 0,20 sec и почетну амплитуду $x_0 = 1$ dm. Колики је логаритамски декремент осцилације ако је амплитуда после 10 полуосцилација пала на $x = 2$ mm?

$$[|x_n| = |x_0| e^{-n\mathcal{D}}; -10 \mathcal{D} = \ln 0,02 = \ln 2 - \ln 100 = 0,69315 - 4,60517 = -3,91202, \text{ па је } \mathcal{D} = 0,3912].$$

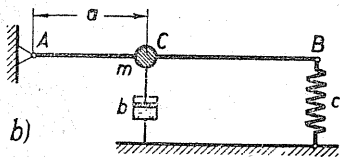
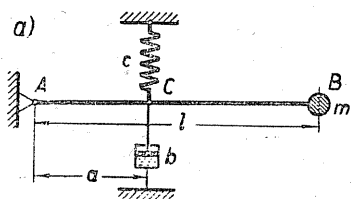
3.7. Материјална тачка масе $m=10\text{ kg}^*$ креће се у вискозној средини тако да је сила привлачења на удаљењу $x=1\text{ m}$ једнака 2 kg . Колики је период осцилације ако се после пуне три осцилације амплитуда умањи 10 пута?

$$[c=2\text{ kg/m}; \omega^2=9,81/5; -6\mathfrak{D}=\ln 1-\ln 10=-2,30259; \mathfrak{D}=0,38376 \text{ па је период } T_0=4,5248 \text{ sec}].$$

3.8. Ако су $m=2$ грама масе, $b=10\text{ kg sec/cm}$, $c=8\text{ kg/cm}$ и почетни услови кретања: за $t_0=0$ су $x_0=1\text{ cm}$, $\dot{x}_0=2\text{ cm/sec}$, одредити x_{max} и време достизања те дужине.

$$[\ddot{x}+5\dot{x}+4x=0, \lambda_{1,2}=-1; -4; x=2e^{-t}-e^{-4t}; \dot{x}=0, \text{ за } T=(\ln 2)/3, \text{ па је } x_{\text{max}}=3/2\sqrt[3]{2}\approx 1,19 \text{ cm}].$$

3.9. У коме односу стоје кружне фреквенције и периоди амортизованих осцилација система приказаних на сл. 3.9. ?



Сл. 3.9. — Амортизоване осцилације масе на греди

и

(Решење. — а) Статичком редукијом масе m на тачку C штапа AB добијамо $m^*=m/l/a=m/\psi$, па је

$$(m/l/a)\ddot{y}+b\dot{y}+cy=0, p_1=\frac{\psi}{2m}\sqrt{4cm-b^2}$$

б) Како су

$$E_k=1/2 m\dot{y}^2,$$

$$E_p=1/2 c f_s^2=1/2 c (l/a)^2 y^2,$$

$$\Phi=1/2 b\dot{y}^2,$$

то је диференцијална једначина кретања

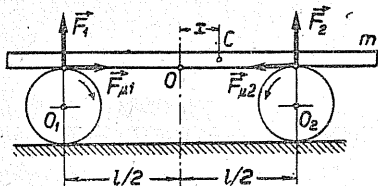
$$\ddot{y}+2\delta\dot{y}+(c/m)(l/a)^2 y, \text{ па је } p_2=\frac{1}{2m\psi}\sqrt{4cm-b^2\psi^2}.$$

Према томе је

$$p_1/p_2=\psi^2\sqrt{\left(4\frac{cm}{b^2}-\psi\right)/\psi\left(4\frac{cm}{b^2}-\psi^2\right)}$$

$$T_1/T_2=p_2/p_1.$$

3.10. Хомогени штап, масе m , ослања се на два једнака точка која су на међусобном растојању l а обрћу се у супротним смеровима, (сл. 3.10.). Одредити закон кретања штапа ако је положен на тачке у тренутку $t=0$ тако да је тежиште штапа ексцентрично у односу на тачку O , и коефицијент трења између тачкова и штапа ако је познат период кретања T .



Сл. 3.10. — Осцилације штапа на обртним храпавим тачковима

[Решење. — Како је $G=mg=F_1+F_2$ из $\Sigma M_C=0$ биће $Gx=1/2(F_2-F_1)l$, па је

$$F_\mu=\mu(F_2-F_1)=2\mu Gx/l,$$

те је диференцијална једначина кретања

$$m\ddot{x}+(2\mu G/l)x=0.$$

Закон кретања је

$$x=x_0\cos\sqrt{(2\mu g/l)}t,$$

па је период

$$T=2\pi\sqrt{l/2\mu g}$$

и коефицијент трења

$$\mu=2(l/g)(\pi/T)^2.$$

4. ПРИНУДНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ

Када на материјалну тачку, масе m , дејствује поред силе еластичности опруге $(-cx)$ и отпорне силе $(-b \dot{x} \operatorname{sign} \dot{x})$, још и нека сила која се мења са временом, кретање се назива принудном осцилацијом. Сила $F_t = mf(t)$ јесте поремећајна или пертурбациона сила, јер ремети слободне осцилације.

Функција $f(t)$ је периодичка функција времена, па се може изразити помоћу тригонометријског коначног или конвергентног бесконачног реда

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \Omega t + b_n \sin n \Omega t,$$

где је Ω кружна фреквенција поремећајне силе. На овај се начин може функција $f(t)$ написати у облику збира елементарних функција облика $\cos n \Omega t$ или $\sin n \Omega t$, па се може испитати утицај сваког члана посебице и дејства суперпонирати.

Када је функција $f(t)$ облика $\cos \Omega t$ или $\sin \Omega t$ принудна осцилација се назива проста; у противном случају је сложена.

Ове осцилације су од велике важности у акустици, машинској техници и електротехници ниско и високо фреквентне наизменичне струје.

А) ПРОСТЕ ПРИНУДНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ

4.1. Проста принудна осцилација без отпорне силе. — Нека на материјалну тачку масе m дејствује поред силе еластичности опруге и поремећајна сила која се мења по закону

$$F_t = F \cos(\Omega t - \theta_0),$$

где је F амплитуда поремећајне силе а Ω њена кружна фреквенција. Време рачунамо од тренутка позитивног максимума поремећајне силе, тј. када је $t_0 = \theta_0 / \Omega$.

Диференцијална једначина кретања је

$$m \ddot{x} = -cx + F_t = -cx + F \cos(\Omega t - \theta_0). \quad (1)$$

Уведу ли се ознаке

$$c/m = \omega^2, \quad F/m = h,$$

горња једначина постаје

$$\ddot{x} + \omega^2 x = h \cos(\Omega t - \theta_0) \quad (2)$$

па је нехомогена диф. једначина другог реда са константним коефицијентима.

Општи интеграл ове једначине састоји се из збира општег интеграла хомогене једначине (x_h) и партикуларног интеграла нехомогене (x_p) који тражимо у облику

$$x_p = C \cos \theta + D \sin \theta,$$

где су C и D константе а $\theta = \Omega t - \theta_0$. Када овај интеграл два пута диференцирамо и унесемо у једначину (2) добићемо константе

$$C = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2}, \quad D = 0,$$

па је општи интеграл нехомогене једначине (2):

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t + C \cos(\Omega t - \theta_0) = R \cos(\omega t - \varphi_0) + C \cos(\Omega t - \theta_0). \quad (3)$$

Из ове једначине видимо да је проста принудна осцилација без отпорне силе збир слободне и принудне осцилације кружних фреквенција ω и Ω , односно периода

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad T_p = \frac{2\pi}{\Omega} = T_F. \quad (4)$$

Период принудне осцилације је једнак периоду промене поремећајне силе $F(t)$. Оба периода, као и период слободне осцилације, не зависе од почетних услова кретања.

Ако је $\omega > \Omega$ онда је амплитуда принудне осцилације C позитивна, па је и фаза принудне осцилације једнака фази принудне силе. Међутим; при $\omega < \Omega$, тј. $T_p < T$, амплитуда C је негативна, па је режим принудног кретања одређен једначином

$$x_p = - \frac{h}{\Omega^2 - \omega^2} \cos(\Omega t - \theta_0) = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t - \theta_0 + \pi) \quad (5)$$

те је фаза принудне осцилације повећана за π у односу на фазу принудне силе. Прве осцилације, ($\omega > \Omega$), зову се принудне осцилације са малом фреквенцијом, а друге, ($\omega < \Omega$), су са великом фреквенцијом.

Према томе на знак амплитуде C и на фазу принудне осцилације има утицај однос кружних фреквенција принудне и слободне осцилације

$$\psi = \Omega/\omega. \quad (6)$$

Ако би сила F дејствовала стационарно, онда би амплитуда принудног кретања била

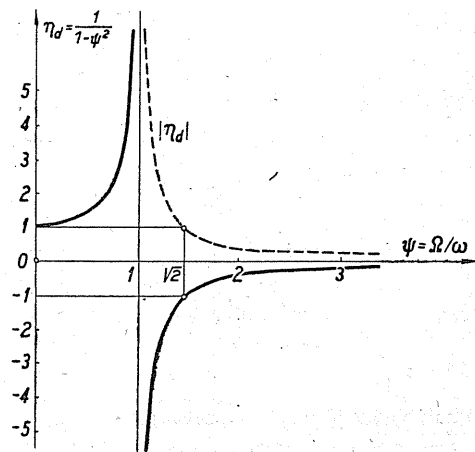
$$C_s = \frac{F}{c} = \frac{hm}{m\omega^2} = \frac{h}{\omega^2}; \quad F = F_s. \quad (7)$$

Ова амплитуда представља издужење опруге, крутости c , под утицајем силе F . Дејствује ли сила периодички амплитуда ће бити

$$C_d = C = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} = \frac{h}{\omega^2(1 - \psi^2)} = \frac{C_s}{1 - \psi^2}. \quad (8)$$

Под динамичким фактором или множиоцем резонансе (magnification factor, Vergrößerungsfaktor, Resonanzfunktion) подразумева се однос амплитуда

$$\eta_d = \frac{C_d}{C_s} = \frac{1}{1 - \psi^2}. \quad (9)$$



Овај фактор зависи од односа фреквенција ψ . Када је $\psi < 1$, тј. ако је $0 < \Omega < \omega$, $T_p > T$,

тада је $C_d > C_s$. За $\psi = 1$ је $C_d = \infty$. Према томе са повећањем кружне фреквенције Ω расте и амплитуда принудних осцилација. Ако је $\psi > 1$, тј. $T_p < T$, онда је $C_d = C_s/(\psi^2 - 1)$, па при порасту ψ амплитуда C_d опада. За $\Omega = \omega\sqrt{2}$ је $\psi = \sqrt{2}$ и $C_d = C_s$. Дијаграм промене динамичког фактора η_d од односа фреквенција $\psi = \Omega/\omega$ приказан је на сл. 4.1. а.

За почетне услове: за $t=0$, $x=x_0$ и $\dot{x}=\dot{x}_0$ интеграционе константе су

$$A = x_0 - C \cos \theta_0, \quad B = \frac{\dot{x}_0}{\omega} - C \frac{\Omega}{\omega} \sin \theta_0,$$

па је партикуларно решење

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t - C \left[\cos \omega t \cos \theta_0 + \frac{\Omega}{\omega} \sin \omega t \sin \theta_0 \right] + C \cos(\Omega t - \theta_0). \quad (3a)$$

Из овога се види да се проста принудна осцилација без отпорне силе састоји из трију осцилација. Прве две осцилације су слободне

$$x_1 = \dot{x}_0 \cos \omega t + \frac{x_0}{\omega} \sin \omega t;$$

$$x_2 = -C \left[\cos \omega t \cos \theta_0 + \frac{\Omega}{\omega} \sin \omega t \sin \theta_0 \right] \quad (3b)$$

кружних фреквенција ω и периода $T_1 = T_2 = 2\pi/\omega$. Трећа је принудна

$$x_3 = x_p = C \cos (\Omega t - \theta_0), \quad (3c)$$

кружне фреквенције Ω и периода $T_3 = T_F = 2\pi/\Omega$.

Због отпорних сила после извесног времена изумреће слободне осцилације, па ће остати само принудне чији је закон кретања

$$x_p = C \cos (\Omega t - \theta_0) = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \cos (\Omega t - \theta_0). \quad (10)$$

Принудну осцилацију можемо представити геометријски помоћу комплексних бројева. Зато диференцијалну једначину (2) напишимо у комплексном облику

$$m\ddot{z} + cz = Fe^{i\Omega t} = \mathfrak{F},$$

узимајући да је $\theta_0 = 0$. Претпоставимо ли да је решење $z = Ce^{i\Omega t}$, биће $\ddot{z} = (i\Omega)^2 Ce^{i\Omega t}$ па уношењем у једначину (2) добијамо

$$C [m(i\Omega)^2 + c] e^{i\Omega t} = (c - m\Omega^2) z = Fe^{i\Omega t} = \mathfrak{F}.$$

Комплексни број z једнак је количнику комплексних бројева

$$z = \frac{\mathfrak{F}}{Z(i\Omega)}. \quad (11)$$

Комплексни број $Z(i\Omega)$ модула

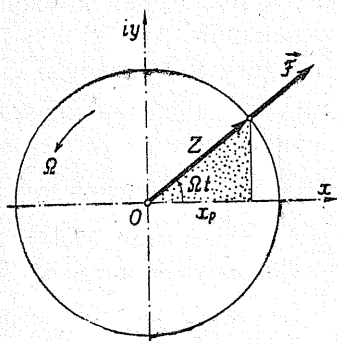
$$|Z| = \sqrt{[c + m(i\Omega)^2]^2} = c - m\Omega^2 \quad (12)$$

зове се *механичка импеданца*. Она је у овом случају — принудне осцилације без отпорне силе — *реалан број*. Модул комплексног броја z је једнак количнику модула, па је

$$|z| = \frac{|\mathfrak{F}|}{|Z|} = \frac{F}{c - m\Omega^2} = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} = C,$$

Сл. 4.2. — Механичка импеданца

а аргумент је једнак разлици аргумената и износи Ωt . Према томе је комплексни број z колинеаран са бројем \mathfrak{F} , (сл. 4.2), па се ова осцилација може представити обртним



вектором који се обрће око тачке O угаоном брзином Ω . Реални део овог комплексног броја представља принудну осцилацију у x правцу а имагинарни у y правцу:

$$\Re |z| = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \cos \Omega t, \quad \Im(z) = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t.$$

Вектори \vec{z} и $\vec{\zeta}$ су колинеарни у истог смера при $\omega > \Omega$; када је $\omega < \Omega$ тада су колинеарни али суйрошног смера.

Рад поремећајне силе у току периода T_p биће

$$A^{Ft} = \int_0^{T_p} F \cos \Omega t \cdot dx_p = -FC\Omega \int_0^{2\pi/\Omega} \cos \Omega t \sin \Omega t dt = 0.$$

Када буде однос кружних фреквенција слободних и принудних осцилација $\psi = 1$ биће амплитуда C бесконачно велика. Ова појава се назива резонанса. У машинској и грађевинској техници ова је појава штетна, јер тада може наступити лом појединих делова који осцилују.

У случају резонансе збир

$$x_2 + x_3 = C[\cos(\Omega t - \theta_0) - (\cos \omega t \cos \theta_0 + \psi \sin \omega t \sin \theta_0)]$$

јавља се у облику $0/0$. Користећи Лојшталову теорему* биће

$$\frac{h}{\frac{d}{d\Omega}(\omega^2 - \Omega^2)} \left\{ \frac{d}{d\Omega} [\cos(\Omega t - \theta_0) - (\cos \omega t \cos \theta_0 + \psi \sin \omega t \sin \theta_0)] \right\}_{\omega=\Omega},$$

па је

$$x_2 + x_3 = \frac{-h}{2\Omega} \left[-t \sin(\Omega t - \theta_0) - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \sin \theta_0 \right].$$

Због тога је интеграл диференцијалне једначине (2) облика

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{h}{2\omega^2} \left[\omega t \sin(\omega t - \theta_0) + \sin \omega t \sin \theta_0 \right]. \quad (13)$$

Исти резултат ћемо добити ако партикуларни интеграл нехомогене једначине (2) узмемо у облику

$$x_p = t(C \cos \theta + D \sin \theta),$$

где је $\theta = \Omega t - \theta_0$, због тога што је $i\omega = i\Omega$ корен карактеристичне једначине. У овом су случају константе] $C=0$, $D=h/2\Omega=h/2\omega$, па је

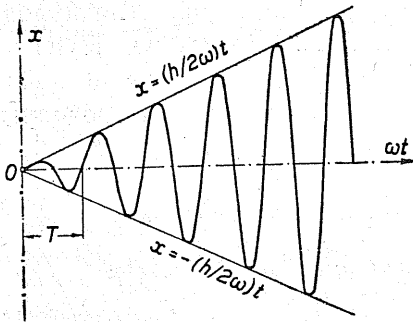
*Р. Кашанин. — В. Математика I. Београд, 1949; стр. 480.

партикуларни интеграл нехомогене једначине (2):

$$x_p(t) = \frac{h}{2\omega} t \sin(\omega t - \theta_0). \quad (14a)$$

Узимајући исте почетне услове као и раније добићемо партикуларни интеграл (13). Ако су почетни услови такви да је за $t=0$, $x_0=0$, $\dot{x}_0=0$, и ако је $\theta_0=0$, биће

$$x = x_p(t) = \frac{h}{2\omega} t \sin \omega t. \quad (14b)$$



Дијаграм овог кретања је приказан на сл. 4.3. Праве $x = \pm ht/2\omega = F\omega t/2c$ су обвојнице дијаграма.

И кретање у случају резонансе се може представити као једна осцилација. Како је у овом случају

$$\begin{aligned} x &= R \cos(\omega t - \varphi_0) + \frac{h}{2\omega} t \sin \omega t = \\ &= Q \sin(\omega t + \psi_0), \end{aligned} \quad (15a)$$

Сл. 4.3. — Дијаграм (x, t) при резонанси

то су амплитуда и померање фазе променљиви са временом:

$$Q = \sqrt{R^2 + \frac{Rh}{\omega} t \sin \varphi_0 + \frac{h^2 t^2}{4\omega^2}}; \quad \operatorname{tg} \psi_0 = \frac{R \cos \varphi_0}{R \sin \varphi_0 + (ht/2\omega)}. \quad (15b)$$

Када $t \rightarrow \infty$ тада амплитуда заиста тежи ка ∞ .

Када су кружне фреквенције Ω и ω блиских вредности, то јест када је њихова разлика $\varepsilon = \Omega - \omega \ll 1$ и $\psi \approx 1$, тада се осцилације (3) могу представити једном осцилацијом

$$x = R \cos(\omega t - \varphi_0) + C \cos[(\omega + \varepsilon)t - \theta_0] = P \cos(\omega t - \psi_0). \quad (16a)$$

Упоредивањем добија се амплитуда и померање фазе

$$P = [R^2 + C^2 + 2RC \cos(\varepsilon t + \varphi_0 - \theta_0)]^{1/2}; \quad \operatorname{tg} \psi_0 = \frac{R \sin \varphi_0 - C \sin(\varepsilon t - \theta_0)}{R \cos \varphi_0 + C \cos(\varepsilon t - \theta_0)}. \quad (16b)$$

Амплитуда је променљива и мења се у размаку $R - C$ до $R + C$; период њене промене је период подрхтавања

$$T_d = 2\pi/\varepsilon = 2\pi/(\Omega - \omega) = T T_p / (T - T_p); \quad T = T_s. \quad (16c)$$

Ако су у овом случају почетни услови за $t_0=0, x_0=\dot{x}_0=0$, онда су $R \cos \varphi_0 + C \cos \theta_0 = 0, \omega \operatorname{tg} \varphi_0 = \Omega \operatorname{tg} \theta_0$. Како је $\omega^2 - \Omega^2 \approx -2\Omega\varepsilon$, то је закон подрхшавања

$$x_d \approx \frac{h}{2\Omega\varepsilon} \left[\frac{\cos \theta_0}{\cos \varphi_0} \cos(\omega t - \varphi_0) - \cos(\Omega t - \theta_0) \right] \approx \frac{h}{2\Omega\varepsilon} \sin \varepsilon t \sin(\Omega t - \theta_0), \quad (16d)$$

јер се због мале вредности ($\varepsilon = \Omega - \omega$) може узети да су

$$\cos(\omega t - \varphi_0) = \cos(\Omega - \varepsilon)t - \cos \varphi_0 + \sin(\Omega - \varepsilon)t \sin \varphi_0; \quad \cos \varepsilon t \approx 1.$$

Просту принудну осцилацију без отпорне силе можемо произвести помоћу кулисе Wolf-а, (сл. 4.4.), и опруге о коју је обешен терет (m). У овоме случају горња тачка А опруге АВ није непомична већ се креће праволинијски у вертикалном правцу и хармонијски, кружном фреквенцијом Ω која представља угаону брзину кулисног камена (q). Диференцијална једначина кретања је

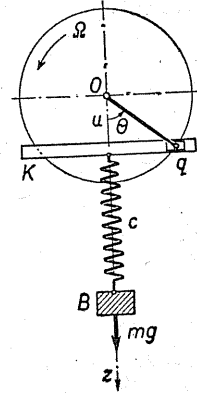
$$m\ddot{z} = -c(z - u),$$

где је $u = r \cos \Omega t$. Према томе ће бити

$$m\ddot{z} + cz = cr \cos \Omega t,$$

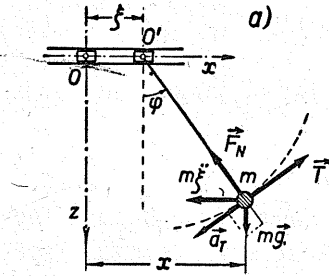
или

$$\ddot{z} + \omega^2 z = h \cos \Omega t, \quad \text{где је } h = cr/m.$$

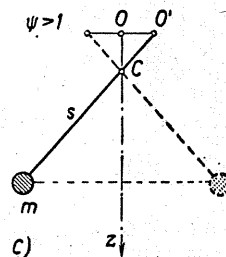
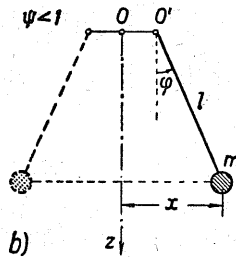


Сл. 4.4. — Извођење принудних осцилација помоћу кулисе Wolf-а

Када се тачка вешања O кружног клатна креће праволинијски и хармонијски, тада су осцилације тачке m принудне. Нека је закон кретања тачке вешања $\xi = r \sin \Omega t$, (сл. 4.5.а) онда је $\ddot{\xi} = -r\Omega^2 \sin \Omega t$. Ово



Сл. 4.5. — а) Математичко клатно са покретном тачком вешања у хоризонталном правцу



Сл. 4.5. — б,с) Померање фазе између поремећајне силе и принудне осцилације

убрзање је преносно убрзање, па је динамичка једначина релативног кретања масе m за правац тангенте:

$$l\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi + r\Omega^2 \sin \Omega t \cos \varphi.$$

За мале осцилације ($\varphi \ll 1$ rad) биће $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$, па је

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = h \sin \Omega t,$$

где су: $\omega^2 = g/l$, $h = r\Omega^2/l$.

Слично обрасцу (3) добијамо општи интеграл једначине

$$\varphi = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t.$$

Ако су почетни услови такви да је за $t=0$, $\dot{\varphi}=0$ и $\varphi=0$, онда су константе $A=0$, $B = -h\Omega/\omega(\omega^2 - \Omega^2)$, па је закон кретања

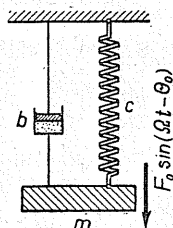
$$\varphi = \frac{r}{l} \frac{\Omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} \left[\sin \Omega t - \frac{\Omega}{\omega} \sin \omega t \right],$$

и

$$\begin{aligned} x = l\varphi + \xi &= r \frac{\psi^2}{1 - \psi^2} [\sin \Omega t - \psi \sin \omega t] + r \sin \Omega t = \\ &= \frac{r}{1 - \psi^2} [\sin \Omega t - \psi^3 \sin \omega t]. \end{aligned}$$

На овом се примеру најбоље уочава померање фазе између померајне силе и принудне осцилације. При $\psi < 1$ нема померања фазе, (сл. 4.5.b), али при $\psi > 1$ има; у овоме случају постоји и чвор С, (сл. 4.5.c); за $\psi = \Omega/\omega = \sqrt{2}$ он се налази на половини дужине клатна. Положај чвора од масе (m) одређујемо помоћу односа $s = l(\omega/\Omega)^2$.

4.2. Проста принудна осцилација са отпорном силом. — У случају да на масу m дејствује и отпорна сила сразмерна брзини, (сл. 4.6.) диференцијална једначина кретања је



Сл. 4.6. — Проста принудна осцилација са отпорном силом

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega^2 x = h \cos(\Omega t - \theta_0). \quad (17)$$

Партикуларни интеграл горње једначине потражићемо у облику

$$x_p = C \cos \theta + D \sin \theta,$$

где је $\theta = \Omega t - \theta_0$. Двоструким диференцирањем и уношењем у горњу једначину, константе C и D одређујемо из система једначина

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \Omega^2) C + 2\delta \Omega D &= h, \\ -2\delta \Omega C + (\omega^2 - \Omega^2) D &= 0, \end{aligned}$$

па су

$$C = \frac{h(\omega^2 - \Omega^2)}{\Delta}, \quad D = \frac{2\delta \Omega h}{\Delta}$$

где је

$$\Delta = (\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2. \quad (18)$$

Уведу ли се смене

$$C = N \cos \alpha, \quad D = N \sin \alpha$$

биће

$$x_p = N \cos(\Omega t - \theta_0 - \alpha) = N \cos(\Omega t - \beta), \quad (19)$$

где је $\beta = \theta_0 + \alpha$. Амплитуда и померање фазе одређене су обрасцима

$$N = \sqrt{C^2 + D^2} = \frac{h}{\Delta} \sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2} = \frac{h}{\sqrt{\Delta}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{D}{C} = \frac{2\delta\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}. \quad (20)$$

У случају слабе осцилације је $\delta < \omega$, $\zeta < 1$, $p^2 = \omega^2 - \delta^2$, па је општи интеграл облика

$$x = e^{-\delta t} (A \cos pt + B \sin pt) + N \cos(\Omega t - \beta). \quad (21a)$$

Ако су почетни услови кретања: за $t=0$ су $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, онда су интеграционе константе

$$A = x_0 - N \cos \beta; \quad B = (\delta x_0 + \dot{x}_0)/p - (\delta N/p) \cos \beta - (\Omega/p) \sin \beta,$$

па је партикуларни интеграл

$$x = e^{-\delta t} \left[x_0 \cos pt + \frac{\delta x_0 + \dot{x}_0}{p} \sin pt \right] - N e^{-\delta t} [\cos pt \cos \beta + \frac{\delta \cos \beta + \Omega \sin \beta}{p} \sin pt] + N \cos(\Omega t - \beta) = x_1 + x_2 + x_3. \quad (21b)$$

И принудна осцилација са отпорном силом састоји се из три члана. Први члан x_1 представља амортизовану осцилацију која зависи од почетног положаја и почетне брзине; други члан x_2 представља амортизовану осцилацију услед принудне силе. Трећи члан представља стварну принудну осцилацију

$$x_3 = x_p = N \cos(\Omega t - \beta), \quad (22)$$

амплитуде N , и периода једнаког периоду поремећајне силе

$$T_p = \frac{2\pi}{\Omega} = T_F \quad (23)$$

али различите фазе од фазе силе.

За велико t а при услову $\omega > \Omega$ амортизоване осцилације се брзо амортизују и остаје само режим принудног кретања. Како је у

овом случају $\operatorname{tg} \alpha = 2\delta\Omega/(\omega^2 - \Omega^2) > 0$ то је и $\alpha > 0$ па осцилације материјалне тачке заостају у фази иза осцилација принудне силе за угао

$$(\Omega t - \theta_0) - (\Omega t - \theta_0 - \alpha) = \alpha.$$

При јакој амортизацији, $\delta > \omega$, амортизовано кретање ишчезава још брже, те раније наступа режим принудног кретања.

Када би сила F дејствовала *статички*, тада би амплитуда принудне осцилације била

$$N_s = F/c = h/\omega^2.$$

Међутим, у случају променљиве поремећајне силе амплитуда N зависи од фреквенција (ω, Ω) и коефицијента гушења (δ). Уведемо ли ознаке

$$\psi = \Omega/\omega, \quad \zeta = \delta/\omega \quad (24)$$

амплитуда (20) биће

$$N_d = N = \frac{h}{\sqrt{\Delta}} = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} = \frac{N_0}{\sqrt{(1 - \psi^2)^2 + (2\psi\zeta)^2}}, \quad (25)$$

па је динамички фактор појачавања

$$\eta_d = \frac{N_d}{N_s} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \psi^2)^2 + 4\psi^2\zeta^2}}, \quad (26)$$

При $\zeta = \delta/\omega = \text{const}$, динамички фактор зависи само од односа кружних фреквенција

$$\eta_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \psi^2)^2 + 4\psi^2\zeta^2}} = \eta(\psi) \quad (27)$$

и биће у *максимуму* када је функција

$$\chi(\psi) = (1 - \psi^2)^2 + 4\psi^2\zeta^2$$

у *минимуму*. Како су прва два извода ове функције

$$\chi'(\psi) = -4\psi(1 - \psi^2 - 2\zeta^2); \quad \chi''(\psi) = -4 + 12\psi^2 + 8\zeta^2,$$

то из услова $\chi' = 0$ добијамо два корена

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = \sqrt{1 - 2\zeta^2}.$$

Ако је $1 - 2\zeta^2 > 0$, тј. $\zeta < 1/\sqrt{2}$, онда је и $\delta/\omega < 1/\sqrt{2} = 0,707$, те је $\delta \leq 0,707\omega$ па је и $\psi_2 > 0$. Ако је, пак, $\delta > 0,707\omega$ тада је $\zeta = \delta/\omega > 1/\sqrt{2}$, па је и $\psi_2 > 0$, те је $\chi(\psi)$ монотono растућа функција док је η_d монотono опадајућа функција. Ставимо ли вредност ψ_2 у израз $\chi''(\psi)$ биће

$$\chi''(\psi) = -4 + 12(1 - 2\zeta^2) + 8\zeta^2 = 8(1 - 2\zeta^2) > 0,$$

па корен ψ_2^2 одговара минимуму функције $\chi(\psi)$ а максимуму функције $\eta_d(\psi)$. Због тога је

$$\eta_{d\max} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (1 - 2\zeta^2)]^2 + 4\zeta^2(1 - 2\zeta^2)}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}. \quad (28)$$

У случају резонансе, тј. када је кружна фреквенција поремећајне силе једнака кружној фреквенцији слободних осцилација, ($\Omega = \omega$), биће $\psi = 1$, па је динамички фактор

$$\eta_{dr} = \frac{1}{2\zeta} < \eta_{d\max}, \quad (29)$$

мањи од највећег динамичког фактора. Под резонансом се може подразумевати и случај када је кружна фреквенција поремећајне силе једнака кружној фреквенцији амортизованих осцилација, тада је

$$\Omega = p = \sqrt{\omega^2 - \delta^2} = \omega\sqrt{1 - \zeta^2},$$

тј.

$$\psi = \sqrt{1 - \zeta^2}$$

и

$$\eta_{dp} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - 3/4\zeta^2}} < \eta_{d\max}. \quad (29a)$$

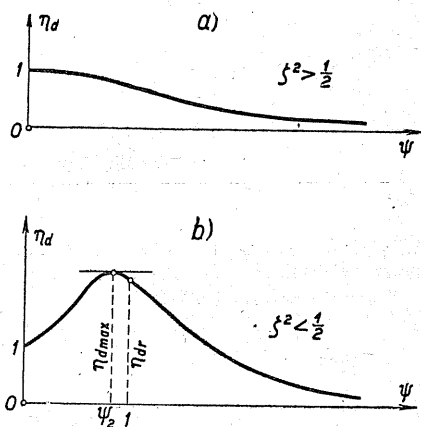
При малом отпору су и разлике $\eta_{d\max}$, η_{dr} и η_{dp} мале вредности.

На пример, за $\zeta = 0,05$ биће $\psi_2 = 0,9975$ па су $\eta_{d\max} = 10,013$ и $\eta_{dr} = 10,000$, $\eta_{dp} = 10,010$.

За $\zeta = 0,50$ биће $\psi_2 = 0,7071$ па су вредности динамичких фактора 1,155; 1,000 и 1,102. Највеће су разлике за $\zeta = 1/\sqrt{2} = 0,707$ те је $\psi_2 = 0$ и фактори 1,000; 0,707 и 0,894.

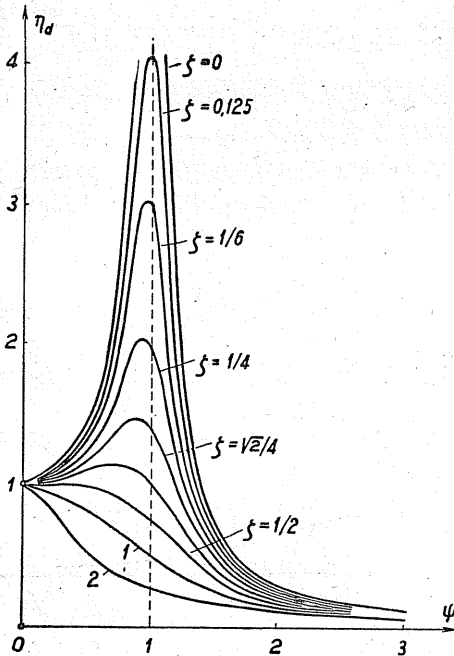
Из изложеног видимо да при $\zeta^2 > 1/2$ функција η_d моноџоно опада од вредности 1 до 0, (сл. 4.7.a), а при $\zeta^2 < 1/2$, динамички фактор има максимум (28) при услову $\psi_2 = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$. У области малих фреквенција принудних сила, ($0 < \psi < \psi_2$), η_d расте од вредности 1 до $\eta_{d\max}$, а у области принудних сила веће кружне фреквенције, ($\psi_2 < \psi < \infty$), динамички фактор опада од $\eta_{d\max}$ до нуле, (сл. 4.7.b).

На сл. 4.8. приказан је дијаграм промене динамичког фактора η_d у зависности од ψ за различите вредности ζ .



Сл. 4.7. — Дијаграми промене динамичког фактора од односа фреквенција

Померање фазе принудне осцилације према фази принудне силе такође зависи од коефицијента ψ и ζ . Ако је δ стално онда је



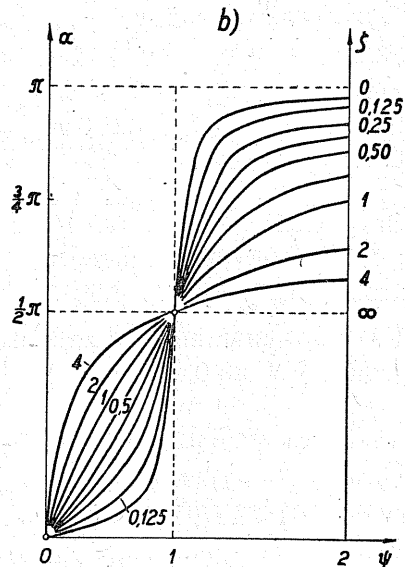
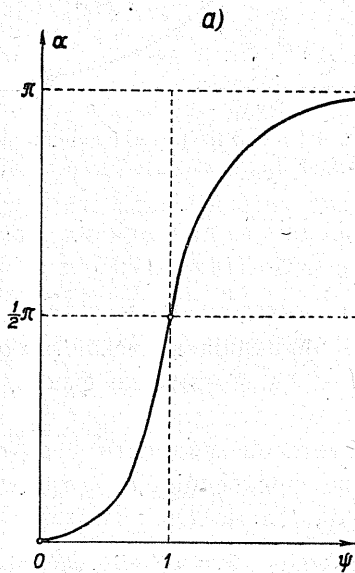
Сл. 4.8. — Дијаграм промене динамичког фактора у зависности од односа фреквенција и коефицијента расипања

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{2\delta\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} = \\ &= \frac{2\psi\zeta}{1 - \psi^2} = f(\psi). \end{aligned} \quad (30)$$

При $\psi=0$ је $\operatorname{tg} \alpha=0$ па је и $\alpha=0$. Ако је $\psi=1$ онда је $\operatorname{tg} \alpha=\infty$ па је $\alpha=1/2\pi$; за $\psi=\infty$ је $-\operatorname{tg} \alpha=0$ па је $\alpha=\pi$. Како је

$$\begin{aligned} f'(\psi) &= \frac{d \operatorname{tg} \alpha}{d\psi} = \\ &= \frac{2\zeta(1 - \psi^2) + 4\psi^2\zeta}{(1 - \psi^2)^2} = \\ &= 2\zeta(1 + \psi^2)\eta_d^2 > 0, \end{aligned} \quad (31)$$

за произвољне вредности ψ и ζ , то померање фазе монотонно расте за $\psi < 1$ од вредности 0 до $1/2\pi$ а за $\psi > 1$ од вредности $1/2\pi$ до π , (сл. 4.9.a). За $\psi=0$ је функција $f(\psi)$ прекидна.



Сл. 4.9. — a) Зависност померања фазе од односа кружних фреквенција

Сл. 4.9. — b) Зависност померања фазе од односа фреквенција и коефицијента расипања

На сл. 4.9.b приказан је дијаграм промене померања фазе α од ζ . Рад пертурбационе силе при једном циклусу принудног кретања биће

$$A^{F_t} = \int_0^{T_p} F \cos \Omega t \cdot dx_p = -FN\Omega \int_0^{T_p} \cos \Omega t \sin(\Omega t - \alpha) dt = FN\pi \sin \alpha, \quad (32)$$

јер је $\theta_0 = 0$ и

$$2 \sin(\Omega t - \alpha) \cos \Omega t = \sin(2\Omega t - \alpha) + \sin(-\alpha) = \sin(2\Omega t - \alpha) - \sin \alpha.$$

За исти циклус биће енергија расипања

$$\begin{aligned} A^{F_w} &= -b \int_0^{T_p} \dot{x}_p dx_p = -b \int_0^{T_p} \dot{x}_p^2 dt = -N^2 b \Omega^2 \int_0^{T_p} \sin^2(\Omega t - \alpha) dt = \\ &= bN^2 \pi \Omega, \end{aligned} \quad (33)$$

па расте са квадратом амплитуде. Како је $\sin \alpha = \text{tg } \alpha / \sqrt{1 + \text{tg } \alpha^2} = Nb\Omega/F$ то је рад принудне силе једнак енергији отпорне силе за исти циклус принудног кретања, $A^{F_t} = A^{F_w}$.

Једначина (17) може се геометријски представити помоћу механичке импеданце. Због тога је напишимо у комплексном облику

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + cz = Fe^{i\Omega t} = \mathfrak{F}. \quad (34)$$

Претпоставимо да је $z = Ce^{i\Omega t}$ онда уношењем у горњу једначину добијамо

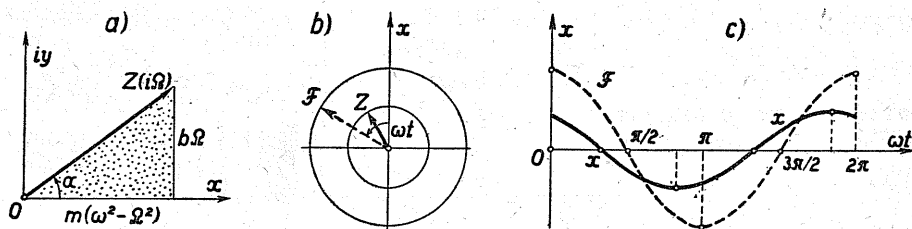
$$[m(i\Omega)^2 - b(i\Omega) + c] z = Fe^{i\Omega t} = \mathfrak{F}, \quad (35)$$

па је z количник комплексних бројева

$$z = \frac{\mathfrak{F}}{Z(i\Omega)},$$

где је комплексни број

$$Z(i\Omega) = m(i\Omega)^2 + b(i\Omega) + c = (c - m\Omega^2) + ib\Omega \quad (36)$$



Сл. 4.10. — Механичка импеданца принудне осцилације са отпорном силом
механичка импеданца (сл. 4.10.a), модула

$$|Z| = \sqrt{(c - m\Omega^2)^2 + b^2\Omega^2} = \sqrt{m^2(\omega^2 - \Omega^2)^2 + b^2\Omega^2} = m\sqrt{\Delta} = \frac{F}{N} = \frac{c}{\eta_d}. \quad (36a)$$

Како је количник комплексних бројева комплексни број чији је модул једнак количнику модула а аргумент разлици аргумената, то је

$$|z| = \frac{|\mathfrak{F}|}{|Z(i\Omega)|} = \frac{F}{F/N} = N, \quad \arg z = \arg F - \arg Z = \Omega t - \alpha,$$

јер је

$$\arg Z = \alpha = \arctg [b\Omega (c - m\Omega^2)],$$

пошто је

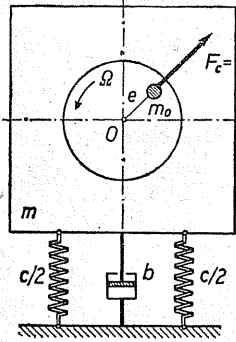
$$\tg \alpha = b\Omega/m (\omega^2 - \Omega^2) = 2\delta\Omega/(\omega^2 - \Omega^2).$$

Према томе је комплексни број z одређен изразом

$$z = \frac{F}{m\sqrt{\Delta}} e^{i(\Omega t - \alpha)} = Ne^{i(\Omega t - \alpha)} \quad (37)$$

Његов реални део представља принудну осцилацију (17):

$$\Re(z) = x_p = \frac{F}{m\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \cos(\Omega t - \alpha) = \frac{h}{\sqrt{\Delta}} \cos(\Omega t - \alpha).$$



Сл. 4.11. — Утицај центрифугалне силе на принудне осцилације

Вектори \vec{F} и \vec{z} одређују кретање крутог тела које се у комплексној равни обрће угаоном брзином Ω . Однос њихових модула $|F|/|z| = |Z|$ и разлика фаза α у потпуности се одређују механичком импеданцом $Z(i\Omega)$, како је показано на сл. 4.10. *b*, *c*.

У машинској пракси је чест случај принудне осцилације под утицајем центрифугалне силе услед придодате масе m_0 , (сл. 4.11.). Интензитет ове силе је $F_c = m_0 e \Omega^2$, где је Ω угаона брзина обртања а e ексцентричност. Пројекција ове силе јесте принудна сила $F_t = m_0 e \Omega^2 \cdot \sin \Omega t$, па је $F_{max} = F_e = K\Omega^2$, сразмерна квадрату кружне фреквенције. Сменом $h' = K/m$ биће $h = K\Omega^2/m = h'\Omega^2$ па се овај случај своди на претходни, те је амплитуда принудне осцилације

$$N' = \frac{h'\Omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} = \frac{h'\psi^2}{\sqrt{(1 - \psi^2)^2 + 4\psi^2\zeta^2}} \quad (38)$$

Динамички фактор износи

$$\eta'_d = \frac{N'}{h'} = \frac{\psi^2}{\sqrt{(1 - \psi^2)^2 + 4\psi^2\zeta^2}} \quad (39)$$

ПРИМЕРИ

4.1. Материјална тачка масе $m=2$ грама масе врши принудну осцилацију под утицајем силе $F=6 \cos t$. Одредити закон кретања ако је крутост опруге $c=8 \text{ gr/cm}$ а почетни услови кретања за $t=0$ су $x_0=\dot{x}_0=0$. Колики је динамички фактор?

$$[x=(\cos t - \cos 2t); C=1; \psi=1/2; \eta_d=4/3].$$

4.2. Проста принудна осцилација је представљена једначином $\ddot{x}+4x=5 \cos 2t$. Одредити закон кретања за почетне услове: за $t_0=0$ су $x_0=2 \text{ cm}$, $\dot{x}_0=2 \text{ cm/sec}$.

[Резонанса; $x=A \cos 2t+B \sin 2t+t(C \cos 2t+D \sin 2t)$; $A=2$; $B=1$; $C=0$; $D=h/2\Omega=5/4$, па је $x=2 \cos 2t+\sin 2t+5/4 t \sin 2t$].

4.3. Клип индикатора парне машине површине 4 cm^2 изложен је променљивом притиску паре $p=4+3 \sin(2\pi t/T) \text{ kg/cm}^2$, где је T време једног обртаја вратила које се обрће једнолико са 180 обртаја у минути (сл. 4.12.). Тежина покретног дела индикатора износи $G=1 \text{ kg}$. Одредити амплитуду принудних осцилација писаљке ако је опруга крутости $c=3 \text{ kg/cm}$.

[Овде су: $n=180 \text{ o/min}$; $\Omega=6\pi$; $\Omega T=2\pi$; $\omega^2=c/m=cg/G$; принудна сила је $F(t)=Ap(t)=3A \sin 6\pi t$, пошто се статички притисак ($p_s=4 \text{ kg/cm}^2$) у равнотежава са тежином покретног дела клипа. Према томе је амплитуда

$$C=h/(\omega^2-\Omega^2)=(3AgG)/(cgG-36\pi^2)\approx 4,5 \text{ cm}].$$

4.4. На слободном крају челичне конзоле, дужине 1m, Рејпер-овог профила, постављен је електромотор, тежине 600 kg, чије се вратило обрће са 3000 o/min. Тежина његовог ротора је $G_r=100 \text{ kg}$, а његова ексцентричност у односу на средиште вратила $e=0,1 \text{ m}$. Димензионисати конзолу занемарујући њену тежину под условом да амплитуда принудних осцилација не пређе величину 0,5 mm.

[Диф. једначина је $m\ddot{y}+cy=M_r e\Omega^2 \sin \Omega t$, где су $m=G/g$, $M_r=G_r/g$, $c=1/\alpha_{11}=3\mathfrak{B}/l^3$; $\omega^2=c/m=3\mathfrak{B}g/Gl^3$; $\Omega=\pi n/30=100$; $\mu=M_r/M=G_r/G=1/6$; $h=\mu e\Omega^2$; $C=h/(\omega^2-\Omega^2)=1/20 \text{ cm}$, те је момент инерције попречног пресека конзоле $I_x=G_r\Omega^2(1+20\mu e)/3Eg=1000 \text{ cm}^4$, коме одговара профил 1 P 24].

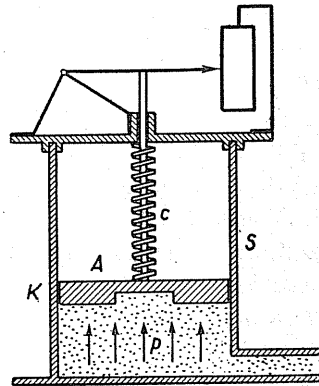
4.5. Одредити закон кретања ако је $\ddot{x}+4x=6 \cos 2,1t$ и почетни услови кретања: за $t_0=0$ су $x_0=\dot{x}_0=0$.

$[x=A \cos 2t+B \sin 2t+C \cos 2,1t$; $A=-C$; $B=0$; $x=C(\cos 2,1t-\cos 2t)=29,26 \sin 0,05t \cdot \sin 2,05t$ (подршћавање); $T_p=2\pi/0,1=20\pi \approx 62,8 \text{ sec}$].

4.6. Диференцијална једначина принудних осцилација масе m има облик $\ddot{x}+4\dot{x}+8x=4 \cos(2t-1/3\pi)$. Одредити закон режима принудног кретања, динамички фактор и његову највећу вредност.

$$[N=1/\sqrt{5}; \text{tg}\alpha=2; \alpha=63^\circ 26'; \beta=123^\circ 30'; \eta_d=2/\sqrt{5};$$

$$\eta_{dr}=\sqrt{2}/2=0,707; \eta_{dp}=\sqrt{5}/5=0,8944; \eta_{max}=1].$$



Сл. 4.12. — Индикатор парне машине

4.7. Написати диференцијалну једначину кретања масе m обешене о опругу крутости c , која се креће у отпорној средини тако да се горњи крај креће по закону $u = u_0 \sin \Omega t$; ако су $m=1$, $b=4$, $c=5$, $u_0=4\sqrt{2}$; $\Omega=1$.

Одредити закон кретања за почетне услове: за $t_0=0$ су $x_0=0$; $\dot{x}_0=0$.

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 4\sqrt{2} \sin t; \lambda = -2 \pm i; f = 1; \delta = 2;$$

$$\Delta = 32; N = 1; \operatorname{tg} \alpha = 1; \beta = 3\pi/4;$$

$$x = e^{-2t} [A \cos t + B \sin t] + \cos(t - 3\pi/4);$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} [e^{-2t} (\cos t + \sin t) + (\sin t - \cos t)].$$

В) ХАРМОНИЈСКА АНАЛИЗА

4.3.1. Фуријеови редови. — Најпростије периодичке функције су $\sin t$ и $\cos t$, периода $T = 2\pi$, јер су $\sin(t + 2\pi) = \sin t$, $\cos(t + 2\pi) = \cos t$. Функције $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ су такође периодичке периода $T = 2\pi/\omega$, јер је $\sin \omega(t + 2\pi/\omega) = \sin(\omega t + 2\pi) = \sin \omega t$. Функције $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$ су такође периодичке, периода $T = \pi$, јер је $\operatorname{tg} t = \operatorname{tg}(t + \pi) = \sin(t + \pi)/\cos(t + \pi) = -\sin t / -\cos t = \operatorname{tg} t$. Функција $f(t)$ је периодичка ако постоји такав број T различит од нуле ($T \neq 0$) да је за сваку вредност t задовољена идентичност $f(t + T) \equiv f(t)$. Број T је тада период те периодичке функције. Како је $\sin(t + 4\pi) = \sin[(t + 2\pi) + 2\pi] = \sin(t + 2\pi) = \sin t$, то је сваки број kT ; $k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$, такође период те функције. Ако су p и q цели бројеви, онда је и $T = pT_1 + qT_2$ такође период периодичке функције. Од свих ових периода онај најмањи се зове примитивни период функције. Слика периодичке функције је шалас, те је довољно функцију приказати само у једном размаку (периоду), пошто је у осталим размацима потпуно иста, и добија се транслацијом у правцу осе Ot .

Периодичка функција $f(t)$ може се у периоду 2π најбоље апроксимирати тригонометријским полиномом

$$T_s(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{n=s} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad (40)$$

где су a_n и b_n константни реални коефицијенти. Овакав се тригонометријски полином добија слагањем више хармонијских осцилација различитих али самерљивих периода. Број s је ред тригонометријског полинома. Тригонометријски полином је такође периодичка функција, периода 2π , јер је

$$T_s(t + 2\pi) \equiv T_s(t). \quad (41)$$

Када се периодичка функција $f(t)$ апроксимира тригонометријским редом $T_s(t)$ тада се учини грешка $f(t) - T_s(t)$. Апроксимација има смисла само онда ако се грешка може проценити. Како ова разлика представља горњу грешку, то се према Bessel-у поставља услов да коефицијенти тригонометријског реда (40) треба да буду тако одређени да одређени интеграл

$$J = J_s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(t) - T_s(t)]^2 dt \quad (42)$$

има најмању вредност. Он представља средње квадрaтно одсшуйање полинома $T_s(t)$ од периодичке функције $f(t)$ у датом размаку $[0, 2\pi]$. Услови екстремума су

$$\frac{\partial J}{\partial a_n} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(t) - T_s(t)] \frac{\partial T_s}{\partial a_n} dt = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(t) - \frac{1}{2} a_0 - \sum a_n \cos nt - \sum b_n \sin nt \right] \cos nt dt = 0;$$

$$\frac{\partial J}{\partial b_n} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(t) - \frac{1}{2} a_0 - \sum a_n \cos nt - \sum b_n \sin nt \right] \sin nt dt = 0.$$

Пошто су одређени интеграл

$$\int_0^{2\pi} dt = 2\pi; \quad \int_0^{2\pi} \sin nt dt = 0; \quad \int_0^{2\pi} \cos nt dt = 0, (n \neq 0); \quad \int_0^{2\pi} \sin mt \cos nt dt = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mt \cos nt dt = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n, \end{cases} \quad \int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt dt = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n, \end{cases} \quad (43)$$

то из горњег услова, замењујући n са $0, 1, 2, \dots$, одређујемо коефицијенте a_n , а сличним поступком и коефицијенте b_n , који износе:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt. \quad (44)$$

Ово су Фуријеови коефицијенти или Ојлерове константе. Коефицијент $\frac{1}{2} a_0$ представља средњу вредност функције $f(t)$ у размаку $[0, 2\pi]$.

Из горњег следи да ће од свих тригонометријских полинома реда s најбоље апроксимирати периодичку функцију $f(t)$ у размаку $[0, 2\pi]$ онај полином који има Фуријеове коефицијенте.

Ако остатак $R_s(t) = f(t) - T_s(t)$ функције $f(t)$, апроксимиране тригонометријским полиномом $T_s(t)$, тежи ка нули када n бесконачно расте, каже се да је функција $f(t)$ развијена у Фуријеов ред

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (45)$$

који уствари представља границу збира квадрата Фуријеових коефицијената. Овај ред може бити и конвергентан и дивергентан. Међутим, ако је функција $f(t)$ ограничена периодичка функција у размаку $[0, 2\pi]$ и непрекидна у целом размаку осим у коначном броју тачака (τ) у којима постоје вредности $f(\tau+0) \neq f(\tau-0)$, као и први извод $f'(\tau)$, или пак изводи $f'(\tau+0)$ и $f'(\tau-0)$, онда остатак $R_s(t)$ тежи нули када n бесконачно расте па је Фуријеов ред конвергентан. Овај ред представља функцију $f(t)$ у свима тачкама размака у којима је она непрекидна, а у тачкама прекидности је

$$f(t) = \frac{f(\tau+0) + f(\tau-0)}{2} \quad (46)$$

како је показао Дирихле (G. P. Lejeune Dirichlet).

На овај начин видимо да је свакој периодичкој функцији придодат одређени Фуријеов ред за који накнадно треба испитати да ли је конвергентан или дивергентан. Као елементарни критеријум за једнолику конвергенцију реда служе ова два правила:

1^о Тригонометријски ред једнолико конвергира ако конвергира ред ајсолућних вредности његових коефицијената (Weierstrass), и

2^о Тригонометријски ред конвергира једнолико, ако функција $f(t)$ којој је придодат има непрекидан други извод у размаку $[0, 2\pi]$.

Ако је функција $f(t)$ непрекидна у размаку $[0, 2\pi]$ и ако је $f(0) = f(2\pi)$, то ред конвергира једнолико, што значи да свакој вредности J коју сматрамо као дозвољену грешку, одговара један број n , такав да ако се у реду Фуријеа узме n чланова, онда одступање збира овог реда од функције $f(t)$ не прелази вредност J ни у једној тачки размака $[0, 2\pi]$. Коефицијенти Фуријеовог реда теже нули брзином $1/n^2$ ако је $f(t)$ непрекидна функција у целом размаку, или брзином $1/n$ ако има и прекидних тачака.

Поред облика (45), Фуријеов ред може се написати и у другим облицима.

а) Уведу ли се смене $a_n = -r_n \sin \alpha_n$; $b_n = r_n \cos \alpha_n$,

биће $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\operatorname{tg} \alpha_n = -a_n/b_n$,

па ред (45) постаје *ред синуса*

$$f(t) = 1/2 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \sin (nt - \alpha_n). \quad (45a)$$

Сменама $a_n = r_n \cos \alpha_n$, $b_n = r_n \sin \alpha_n$ тај ред постаје *ред косинуса*:

$$f(t) = 1/2 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos (nt - \alpha_n). \quad (45b)$$

Када је функција *периодичка* али периода различитог од 2π онда се сменом *нови период* T на оси $+Ot$ *пресликава* у период 2π на новој оси $+O\tau$ где је уведена нова *променљива* τ . Важнији случајеви периода дати су у табlici 4.1.

Таблица 4.1.

	$T \neq 2\pi$	$T = b - a = l$
$\tau =$	$2\pi t/T$	$2\pi(t-a)/b-a$
$d\tau =$	$(2\pi/T) dt$	$2\pi dt/b-a$
$a_n =$	$\frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2n\pi}{T} t \cdot dt$	$\frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \cos \frac{2n\pi}{b-a} (t-a) dt;$
$b_n =$	$\frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2n\pi}{T} t \cdot dt$	$\frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \sin \frac{2n\pi}{b-a} (t-a) dt;$
$f(t) =$	$1/2 a_0 + \sum_1^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2n\pi}{T} (t-a) + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} (t-a) \right],$	
	$T; a=0;$	$T=b-a; a \neq 0.$

Када $f(t)$ није *периодичка функција*, али се *посматра само у да-шом размаку* $[a, b]$ може се такође развити у Фуријеов ред у истом размаку ако се *период продужи*. Због тога се уместо функције $f(t)$ узима функција $\varphi(t)$ таква да задовољава услове: 1^о да је за $a < t < b$ и $\varphi(t) = f(t)$; 2^о да је $\varphi(a) = \varphi(b) = 1/2 [f(a) + f(b)]$, и 3^о да је период

функције $\varphi(t)$ једнак $T=b-a$. Ако се ова функција $\varphi(t)$ развије у Фуријеов ред онда ће он представљати функцију $f(t)$ у унутрашњости размака $[a, b]$ у коме се она и посматра.

4.3.2. Хармонијска анализа. — Под *хармонијском анализом* подразумева се одређивање коефицијената Фуријеовог реда придодатог некој периодичкој функцији или непериодичкој која је периодички продужена. Када су одређени ови коефицијенти, тада је познат и Фуријеов ред, који представља суперпозицију хармонијских осцилација. Поједини чланови реда зову се *компоненте* или *хармоници*. Компоненте $a_1 \cos t$ и $b_1 \sin t$ јесу *основни хармоници*, док су остале виши *хармоници*, чији је период n пута мањи од периода основног хармоника.

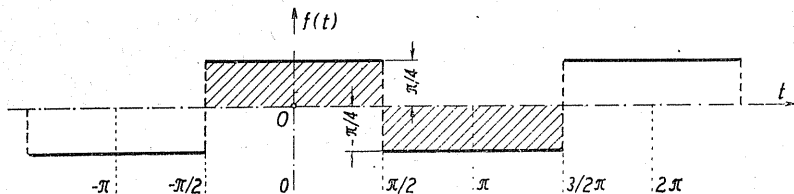
У хармониској анализи примењују се четири методе: а) *аналитичка*, б) *нумеричка*, с) *графичка* и д) *механичка*.

а) Аналитичка метода. — Када је функција $f(t)$ задата аналитичким изразом тада се коефицијенти Фуријеовог реда одређују према обрасцима (44). При овом рачунању можемо се користити неким олакшицама које проистичу из особина саме функције.

Олакшице су наведене у табели 4.2. на страни 99.)

Ако је функција $f(t)$ *задата различитим аналитичким изразима* у појединим деловима размака $[0, 2\pi]$ она се ипак може развити у један Фуријеов ред само при израчунавању коефицијената a_n и b_n треба размак поделити на два дела и извршити назначено интегралне.

Фурије* је вршио своја прва испитивања на функцији приказаној на сл. (4.13.) за коју је $f(t) = f_1(t) = 1/4\pi$ за $-1/2\pi < t < 1/2\pi$ а $f(t) = f_2(t) = -1/4\pi$ за $1/2\pi < t < 3/2\pi$. Ова функција је *непериодичка* али се може периодички продужити и у размаку



Сл. 4.13. — Прва Фуријеова непериодичка функција

$[-1/2\pi, 3/2\pi]$ развити у конвергентни Фуријеов ред. Пошто функција има симетрију косинусне линије то користећи олакшицу (6) биће коефицијенти

$$a_{2n+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{4} \cos(2n+1)t \, dt = (-1)^n \frac{1}{2n+1},$$

* „Théorie de la chaleur“. Paris, 1822.

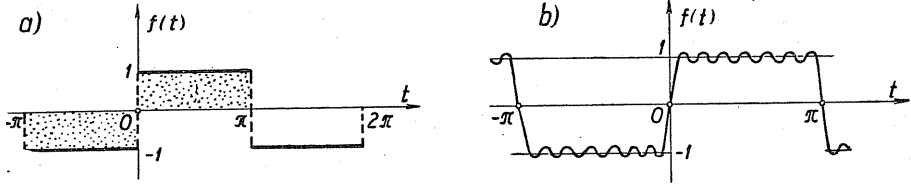
Таблица 4.2.

Р. бр.	Особина	Олакшица
1	$f(t+2\pi) \equiv f(t)$	$\int_0^{2\pi} f dt = \int_{-\pi}^{\pi} f dt = \int_a^{a+2\pi} f dt$
2	$f(-t) \equiv f(t)$ парна	$b_n = 0; \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cdot \cos nt dt;$ $f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cos nt; \quad n=0; 1; 2; \dots$
3	$f(-t) \equiv -f(t)$ непарна	$a_n = 0; \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cdot \sin nt dt$ $f(t) = \sum_1^{\infty} b_n \sin nt$
4	$f(t+\pi) = -f(t)$ промена знака када се аргумент повећа за $T/2$	$a_{2n} = b_{2n} = 0$ $a_{2n+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cdot \cos (2n+1)t dt;$ $b_{2n+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cdot \sin (2n+1)t dt;$ $f(t) = \sum_0^{\infty} [a_{2n+1} \cos (2n+1)t + b_{2n+1} \sin (2n+1)t]$
5	$f(\pi+t) = -f(\pi-t) = -f(t)$ симетрија синусне линије	$a_n = 0; \quad b_{2n} = 0; \quad b_{2n+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(t) \cdot \sin (2n+1)t dt;$ $f(t) = \sum_0^{\infty} b_{2n+1} \sin (2n+1)t.$
6	$f(\pi+t) = f(\pi-t) = -f(t)$ симетрија косинусне линије	$b_n = 0; \quad a_{2n} = 0; \quad a_{2n+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(t) \cos (2n+1)t dt;$ $f(t) = \sum_0^{\infty} a_{2n+1} \cos (2n+1)t.$

па је ред косинуса непарних аргумената

$$f(t) = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \cos(2n+1)t = \cos t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{1}{5} \cos 5t - \dots$$

Функција $f(t)=1$ за $0 < t < \pi$, $f(t)=-1$ за $-\pi < t < 0$ приказана је на сл. 4.14. а. Како има симетрију синусне линије то користећи олакшицу (5) таблице 4.2.



Сл. 4.14. — Апроксимација Фуријеовим редом функције $f(t) = \pm 1$

биће

$$b_{2n+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(2n+1)t \, dt = \frac{4}{\pi} \frac{1}{2n+1},$$

па је ред синуса непарних аргумената

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)t = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots \right].$$

На сл. 4.14. б приказана је апроксимација са првих шест чланова реда. За $t = \pi/2$ добија се познати Лајбницов (Leibniz) ред

$$\frac{\pi}{4} = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Тригонометријски редови се примењују и у Отпорности материјала*.

Важнији случајеви који се срећу у техничкој пракси изнети су у таблици 4.3.

Гибзова појава. — Када се функција $f(t) = \frac{1}{2}(\pi - t)$ за $0 < t < 2\pi$, (сл. 4.15.), која је прекидна и у тачки $t=0$ има *дисконтинуишет прве врсте*, (јер граничне вредности функције са леве и десне стране нису једнаке), развије у Фуријеов ред добиће се

$$\frac{\pi - t}{2} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \sin nt = \frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \dots$$

Ако се функција $f(t)$ апроксимира у датом размаку коначним тригонометријским редом са n чланова, онда је његов збир S_n . У делу размака у коме је функција $f(t)$ непрекидна крива $S_n(t)$ све боље апроксимира криву $f(t)$ уколико n расте. Међутим, ове криве показују извесна нова својства у близини тачке дисконтинуитета прве врсте; наиме појављује се *скок функције* $S_n(t)$ који је сразмеран величини дисконтинуитета \overline{AB} и износи приближно 9%. У случају горње функције максимум криве $S_n(t)$ здесна не

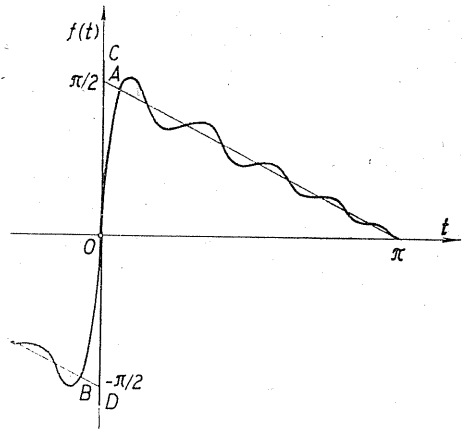
* Чл. 9.9.

Таблица 4.3.

Р. број	Слика	$f(t)$	Фуријеов ред
1		-1 $-\pi < t < 0$ $f(t) = 1$ $0 < t < \pi$	$\frac{4}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{\sin(2n+1)t}{2n+1}$ $t = 1/2\pi \text{ Лајбницов ред}$ $\frac{\pi}{4} = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$
2		$1/4 \pi$ $-1/2 < t < 1/2 \pi$ $f(t) = -1/4 \pi$ $1/2 \pi < t < 3/2 \pi$	$\sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n+1)t}{2n+1}$
3		t/π $-\pi \leq t \leq \pi$	$\frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nt}{n}$
4		$\frac{2}{\pi} t$ $-1/2 \pi \leq t \leq 1/2 \pi$ $2 \left(1 - \frac{t}{\pi}\right)$ $1/2 \pi \leq t \leq 3/2 \pi$	$\frac{8}{\pi^2} \sum_0^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)^2}$
5		$\frac{\pi-t}{2}$ $0 < t < 2\pi$	$\sum_1^{\infty} \frac{\sin nt}{n}$
6		$-t$ $-\pi \leq t \leq 0$ t $0 \leq t \leq \pi$	$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}$ $t=0 \quad \frac{\pi^2}{8} =$ $= \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$
7		t $0 < t < 2\pi$	$\pi - 2 \sum_1^{\infty} \frac{\sin nt}{n}$

Р. број	Слика	$f(t)$	Фуријеов ред
8		$\frac{h}{s} t$ $0 \leq t \leq s$ $s \leq t \leq \pi - s$ $h(\pi - t)/s$ $\pi - s \leq t \leq \pi$	$\frac{4}{\pi} \frac{h}{s} \sum_1^{\infty} \sin(2n+1)s.$ $\frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)^2}$
9		t^2 $-\pi \leq t \leq \pi$	$\frac{1}{3} \pi^2 + 4 \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nt}{n^2}$ $t=0; \frac{\pi^2}{12} = \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$ $t=\pi$ $\frac{\pi^2}{6} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$
10		$\left(\frac{t-\pi}{2}\right)^2$ $0 \leq t \leq 2\pi$	$\frac{\pi^2}{12} + \sum_1^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2}$
11		$ \sin t $	$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\cos 2nt}{4n^2 - 1}$
12		$\cos^2 \frac{\pi t}{2a}$	$\frac{\alpha}{\pi} - 2\pi \sum_1^{\infty} \frac{1}{2n}$ $\frac{\sin 2na \cos 2nt}{(4n^2 a^2 - \pi^2)}$
13		$\text{Sh}t$ $-\pi \leq t \leq \pi$	$2 \frac{\text{Sh}\pi}{\pi} \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(n-1)t}{n^2 + 1}$
14		ht $-\pi \leq t \leq 0$ kt $0 \leq t \leq \pi$	$\frac{k-h}{8} + \frac{2(h-k)}{\pi}$ $\sum_0^{\infty} \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2} +$ $+ (h+k) \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nt}{n}$

тежи вредности $\frac{1}{2}\pi$ већ вредности $\frac{1}{2}\pi + 0,09\pi = \frac{1}{2}\pi + 0,2808$. Исто тако и минимум најближи вредности $t=0$ слева не тежи вредности $-\frac{1}{2}\pi$ већ вредности $-\frac{1}{2}\pi - 0,09\pi = -\frac{1}{2}\pi - 0,2808$. Ово значи да крива $S_n(t)$ не апроксимира у околини тачке дисконтинуитета прве врсте висину скока \overline{AB} функције $f(t)$ него дужину $\overline{CD} = \overline{AB} + 2 \cdot 0,2808$. Ова појава се назива *Гибзова појава* јер ју је открио амерички математичар Гибз (Josiah Willard Gibbs) 1889. год.



Сл. 4.15. — Гибзова појава

б) Нумеричка метода. — Проблем одређивања коначног броја првих коефицијената Фуријеовог реда своди се на Беселов проблем *интерполације шригонометријским полиномом*: у датом координатном систему Oxy задате су вредности функције $y_i = f_i$, за вредности аргумената t_i , а треба одредити тригонометријски полином који ће апроксимирати задату функцију $f(t)$ у датом размаку. Размак $[0, 2\pi]$ дели се у $2n$ једнаких подељака, дужине π/n , тако да су за вредности аргумената $t=0, t_1=\pi/n, \dots, t_{2n-1}=(2n-1)\pi/n, t_{2n}=2\pi$, вредности функције: $y_0=f_0, y_1=f_1, \dots, y_{2n}=f_{2n}=y_0$. Затим се коефицијенти a_n и b_n реда $f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos t + \dots + a_n \cos nt + b_1 \sin t + \dots + b_{n-1} \sin(n-1)t$, израчунавају из услова да *шригонометријски полином пролази кроз даће тачке*, тј. из система линеарних једначина:

$$\frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos t_1 + \dots + a_n \cos nt_1 + b_1 \sin t_1 + \dots + b_{n-1} \sin(n-1)t_1 = f_1,$$

$$\frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos t_2 + \dots + a_n \cos nt_2 + b_1 \sin t_2 + \dots + b_{n-1} \sin(n-1)t_2 = f_2,$$

.....

$$\frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos t_{2n} + \dots + a_n \cos nt_{2n} + b_1 \sin t_{2n} + \dots + b_{n-1} \sin(n-1)t_{2n} = f_{2n},$$

те су:

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{2n} f_r; \quad a_n = \frac{1}{2n} \sum_{r=1}^{2n} (-1)^r f_r;$$

(46)

$$a_k = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{2n} f_r \cos \frac{kr\pi}{n}, \quad b_k = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{2n} f_r \sin \frac{kr\pi}{n}; \quad k=1, \dots, n-1.$$

Овако израчунати коефицијенти приближно замењују Фуријеове коефицијенте израчунате по обрасцима (44).

У циљу упрошћавања рачунања обично се узима да је $2n$ *паран број* дељив са 4 (обично $2n=12, 24, 36$ или 72), како би се рачунале само четири вредности тригонометријских функција синуса и косинуса оштрих углова. Сем тога се рачун спроводи *шабеларно*, на пример, за случај $2n=12$, по *методи Рунгеа* (Carl Runge, 1856.—1927) у *шри сћењена*.

1. *Штејен.* — Вредности функције треба написати према схеми и наћи збирове и разлике

		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
	f_{12}	f_{11}	f_{10}	f_9	f_8	f_7	
Збир	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
Разлика		d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	

2. *Штејен.* — Збирове и разлике из претходног степена треба написати према следећој схеми и израчунати њихове збирове и разлике

	s_0	s_1	s_2	s_3		d_1	d_2	d_3
	s_6	s_5	s_4			d_5	d_4	
Збир	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3		σ'_1	σ'_2	σ'_3
Разлика	δ_0	δ_1	δ_2			δ'_1	δ'_2	

3. *Штејен.* — Коefицијенти a_n и b_n израчунавају се помоћу схеме

Коefицијент множења m	Коefицијенти														
	a_n								b_n						
$\sin 30^\circ$ $\cos 60^\circ$ } 0,500				δ_2			$-\sigma_2$	σ_1				σ'_1			
$\sin 60^\circ$ $\cos 30^\circ$ } 0,866					δ_1							σ'_2	δ'_1	δ'_2	
$\sin 90^\circ = 1$	$\sigma_0 + \sigma_2$	$\sigma_1 + \sigma_3$	δ_0		δ_0	$-\sigma_3$	δ_0	δ_2		σ'_3				σ'_1	$-\sigma'_3$
Збир чланова колона по- множених са m Σ	I	II	I	II	I	II	I	II		I	II	I	II	I	II
Збир	I+II	$6a_0$	$6a_1$	$6a_2$	—	$6b_1$	$6b_2$	$6b_3$							
Ра- злика	I-II	$12a_6$	$6a_5$	$6a_4$	$6a_3$	$6b_5$	$6b_4$								

У њој I и II значе збирове коefицијената једне колоне помножене коefицијентом множења (m) који представља вредност $\sin 30^\circ$, $\sin 60^\circ$ и $\sin 90^\circ$.*

* За 24 компоненте види *Машиностроение* — Том 1, стр. 268.

За 48 компоненте види J. P. Den Hartog, *Mechanical vibrations*, New York, 1947., стр. 28.

За 72 компоненте види R. Stansfield, *The Measurement of Torsional Vibrations* (The Institution of Mechanical Engineers, 1942.—43. год.).

Пример. — Израчунати коефицијенте тригонометријског полинома помоћу Рунге-ове методе ако су познате вредности функције: 0; 1,060; 0,575; 0,260; 0,080; 0; 0; 0; 0; -0,020; -0,155; -0,430 и 0.

1 ^o		1,060	0,575	0,260	0,080	0	0
	0	-0,430	-0,155	-0,020	0	0	0
(s)	0	0,630	0,420	0,240	0,080	0	0
(d)		1,490	0,730	0,280	0,080	0	
2 ^o (c)	0	0,630	0,500	0,240	1,490	0,810	0,280
(δ)	0	0,630	0,340		1,490	0,650	
3 ^o							

0,500			0,340		-0,500	0,630			1,490					
0,866			0,630							0,810	1,490	0,650		
1	0,500	0,870	0		0	-0,240	0	0,340	0,280				1,490	-0,280
Σ	0,500	0,870	0,170	0,548	-0,250	0,075	0	0,340	1,025	0,701	1,290	0,563	1,490	-0,280
Σ	1,370		0,718		-0,175				1,726		1,853		1,210	
R	-0,370		-0,378		-0,325			-0,340	0,324		0,727		-	

па су:

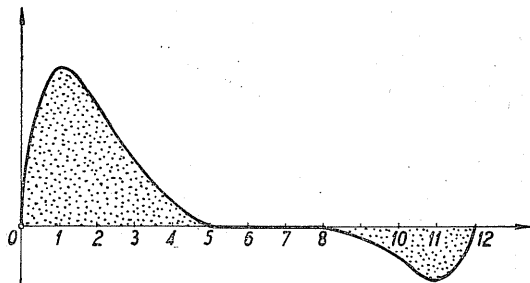
$$a_0=0,228; a_1=0,120; a_2=-0,029; a_3=-0,057;$$

$$a_4=-0,054; a_5=-0,063; a_6=-0,031;$$

$$b_1=0,288; b_2=0,309; b_3=0,202; b_4=0,121; b_5=0,054;$$

те је функција, (сл. 4.16.), развијена у ред:

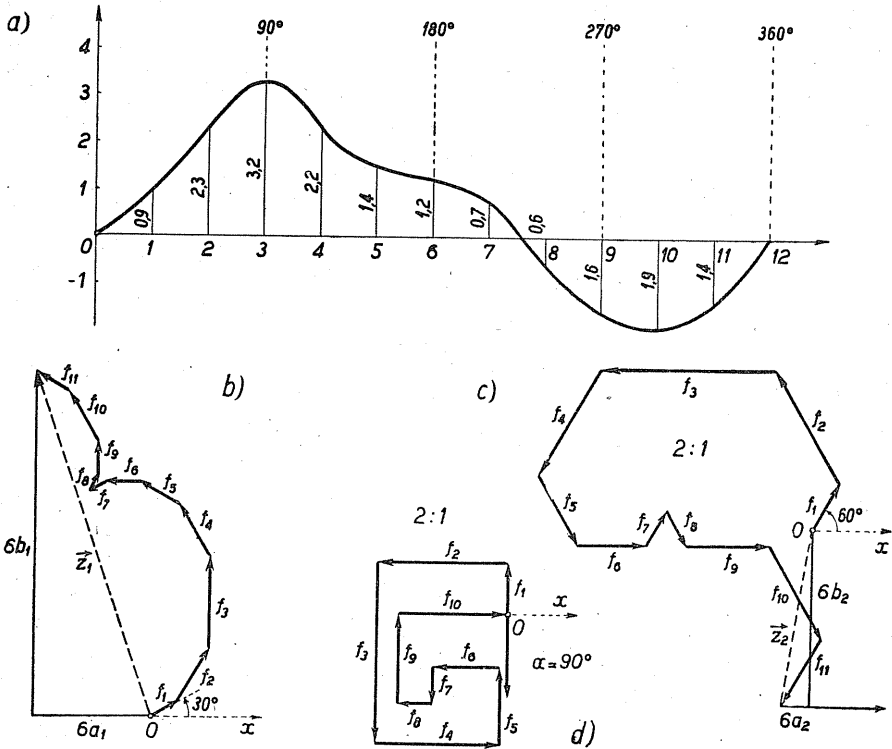
$$\begin{aligned} f(t) = & 0,114 + 0,120 \cos t - \\ & - 0,029 \cos 2t - 0,057 \cos 3t - \\ & - 0,054 \cos 4t - 0,063 \cos 5t - \\ & - 0,031 \cos 6t + 0,288 \sin t + \\ & + 0,309 \sin 2t + 0,202 \sin 3t + \\ & + 0,121 \sin 4t + 0,054 \sin 5t. \end{aligned}$$



Сл. 4.16. — Примена нумеричке методе у хармонијској анализи

с) Графичка метода. — Из обрасца (46) види се да су вредности pa_k и pb_k ортогоналне координате вектора \vec{z}_k једнаког векторском збиру вектора \vec{f}_r који са апсцисном осом граде углове $k\pi/n$. Према томе се и графичка метода одређивања Фуријеових коефицијената, када су познате вредности функције за дате вредности аргумента, своди на сабирање вектора, (сл. 4.17.а). За случај $2n=12$ биће $\pi/n=30^\circ$. Ако је $k=1$ онда

углови α_r вектора \vec{f}_r расту у арифметичкој прогресији, разлике 30° , (сл. 4.17.b); за $k=2$ за 60° , (сл. 4.17.c), а за $k=3$ расту за 90° , (сл. 4.17.d), па су координате резултујућих вектора:



Сл. 4.17. — Примена графичке методе у хармонијској анализи

$$6 a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} (f_1 + f_{11}) + \frac{1}{2}(f_2 + f_{10}) - \frac{1}{2}(f_4 + f_8) - \frac{1}{2}\sqrt{3}(f_5 + f_7) + (f_{12} - f_6),$$

$$6 b_1 = \frac{1}{2}(f_1 - f_{11}) + \frac{1}{2}\sqrt{3}(f_2 - f_{10}) + (f_3 - f_9) + \frac{1}{2}\sqrt{3}(f_4 - f_8) + \frac{1}{2}(f_5 - f_7),$$

$$6 a_2 = \frac{1}{2}(f_1 + f_5 + f_7 + f_{11}) - \frac{1}{2}(f_2 + f_4 + f_8 + f_{10}) - (f_3 + f_9) + (f_6 + f_{12}),$$

$$6 b_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3} [(f_1 + f_2 + f_7 + f_8) - (f_4 + f_5 + f_{10} + f_{11})],$$

$$6 a_3 = (f_4 + f_8 + f_{12}) - (f_2 + f_6 + f_{10}),$$

$$6 b_3 = (f_1 + f_5 + f_9) - (f_3 + f_7 + f_{11}), \dots$$

d) **Механичка метода.** — Постоје нарочити апарати звани хармонијски анали-
заџори помоћу којих се могу одредити механичким путем Фуријеови коефицијенти
неке функције која је задата графички, на пример, добијена на апаратима за регистровање

осцилаторних процеса (као анализатори Coradi-Henrici, Michelson-Stratton, Mader, Wentev-ov оптички, електрични West. El. Co, итд.).

Ови анализатори раде по принципу Ватовог регулатора за парне машине и принципу планиметра.

4.3.3. Хармонијска синтеза. — Под *хармонијском синтезом* подразумева се поступак обрнут анализи. Тада се израчунавају вредности функције $f(t)$ при познатим вредностима Фуријеових коефицијената за одређене вредности аргумента t . Слично обрасцима (45), у овоме случају добијамо да су:

$$f_0 = 1/2 a_0 + \sum_{r=1}^n a_r, \quad f_n = 1/2 a_0 + \sum_{r=1}^{n=6} (-1)^r a_r, \quad (47)$$

$$f_k = 1/2 a_0 + \sum_{r=1}^n a_r \cos \frac{kr\pi}{n} + \sum_{r=1}^{n-1} b_r \sin \frac{kr\pi}{n},$$

те се може применити *метода Рунге-а*

С) СЛОЖЕНЕ ПРИНУДНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ

4.4. Случај периодичке поремећајне силе. — Када је поремећајна сила $F(t)$ периодичка функција времена (t) тада је можемо развити у Фуријеов ред

$$F(t) = 1/2 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t) \quad (48)$$

чије коефицијенте одређујемо према обрасцима (44), јер је период промене силе $T_F = 2\pi/\Omega$. Диференцијална једначина *сложене принудне осцилације без ошћорне силе* може се написати у облику

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 1/2 (a_0/m) + \sum_1^{\infty} h_n \cos (n\Omega t - \alpha_n), \quad (49)$$

где је $h_n = r_n/m = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}/m$. *Партикуларно решење* ове нехомогене једначине потражићемо у облику

$$x_p = (a_0/2m\omega^2) + \sum_1^{\infty} C_n \cos (n\Omega t - \alpha_n). \quad (50)$$

Како је први члан $a_0/2m\omega^2$ *константан* и представља удаљење од равнотежног положаја то се може узети да је $a_0 = 0$. Двоструким диференцирањем израза (50) и уношењем у једначину (49) добијамо константе

$$C_n = \frac{h_n}{\omega^2 - n^2 \Omega^2}, \quad (51)$$

па је ошши интеграл једначине (49)

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \sum_1^{\infty} C_n \cos (n\Omega t - \alpha_n). \quad (52)$$

Ако су почетни услови кретања: за $t=0$, $x=x_0$ и $\dot{x}=\dot{x}_0$, онда се интеграл горње једначине може написати у облику збира трију осцилација

$$x = x_1 + x_2 + x_3 = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t - \sum_1^{\infty} C_n (\cos \alpha_n \cos \omega t + n\psi \sin \alpha_n \sin \omega t) + \sum_1^{\infty} C_n \cos (n\Omega t - \alpha_n), \quad (53)$$

у коме трећи члан приказује принудну осцилацију

$$x_3 = x_p = \sum_1^{\infty} \frac{h_n}{\omega^2 - n^2 \Omega^2} \cos (n\Omega t - \alpha_n). \quad (54)$$

У случају да је кружна фреквенција слободних осцилација $\omega = p\Omega$, где је p цео број, наступа резонанса p -ог реда. При $p \neq n$ решење (53) се не мења, али ако је $p = n$ онда је $C_n = \infty$, па се збир $x_2 + x_3$ јавља у неодређеном облику $0/0$. Применом Лопиталовог правила добијамо да је

$$(x_2 + x_3)_n = \frac{1}{\frac{d}{d\Omega} \sum (\omega^2 - n^2 \Omega^2)} \frac{d}{d\Omega} \left\{ h_n \left[\cos (n\Omega t - \alpha_n) - (\cos \alpha_n \cos \omega t + n \frac{\Omega}{\omega} \sin \alpha_n \sin \omega t) \right] \right\} = \frac{h_n}{-2n^2 \Omega} \left[nt \sin (n\Omega t - \alpha_n) - \frac{n}{\omega} \sin \alpha_n \sin \omega t \right]_{\omega = n\Omega} \quad (55)$$

па је решење (53) облика

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{h_n}{2\omega^2} \sin \alpha_n \sin \omega t - \frac{h_n}{2\omega} t \sin (n\Omega t - \alpha_n) - \sum_1^{\infty}{}' C_n \left(\cos \alpha_n \cos \omega t + \frac{n\Omega}{\omega} \sin \alpha_n \sin \omega t \right) + \sum_1^{\infty} C_n \cos (n\Omega t - \alpha_n), \quad (56)$$

где знак ' код збира значи да је изостављен члан индекса $p = n$.

При доста великом t могу се изоставити чланови са тригонометријским функцијама, па је закон кретања при резонанси

$$x \approx -\frac{h_n}{2\omega} t \sin(n\omega t - \alpha_n). \quad (57)$$

Ако у Фуријеовом реду нема неких коефицијената, а баш буде кружна фреквенција слободних осцилација сразмерна индексу тога коефицијента онда нема ни резонансе. Тако на пример, ако је функција парна, онда су коефицијенти $b_n = 0$, па резонанса може бити само онда када је $p = 2; 4; 6; \dots$.

У случају принудне осцилације са ошћорном силом и принудном периодичком силом, периода $T_F = 2\pi/\Omega$, диференцијална једначина кретања је

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = \sum_1^{\infty} h_n \cos(n\Omega t - \alpha_n), \quad (58)$$

па добијамо закон принудног кретања

$$x_p = \sum_1^{\infty} N_n \cos(n\Omega t - \alpha_n - \beta_n), \quad (59)$$

где су амплитуда и померање фазе дати једначинама

$$N_n = \frac{h_n}{\omega^2 \sqrt{(1 - n^2 \psi^2)^2 + 4n^2 \psi^2 \zeta^2}}; \quad \text{tg } \beta_n = \frac{2n \psi \zeta}{1 - n^2 \psi^2}. \quad (60)$$

Максимална амплитуда сваког хармоника није при резонанси, него када је испуњен услов

$$\omega = n\Omega \sqrt{1 - 2\zeta^2}. \quad (61)$$

4.5. Случај произвољне поремећајне силе. — У случају произвољне поремећајне силе примењује се Лагранжева метода варијација констаната.*

У случају принудне осцилације без ошћорне силе диференцијална једначина кретања може се написати у облику

$$m\ddot{x} + cx = F f(t) \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = h f(t). \quad (62)$$

Општи интеграл хомогене диференцијалне једначине је облика

$$x^* = x_h = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \quad (63)$$

* Т. Пејовић — Диференцијалне једначине II. Београд, 1948, стр. 78

где су C_1 и C_2 интеграционе константе, које овде сматрамо променљивим величинама. Диференцирањем горње једначине добијамо да је брзина

$$\dot{x}^* = \omega [-C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t] + [\dot{C}_1 \cos \omega t + \dot{C}_2 \sin \omega t], \quad (64)$$

па пошто мора бити $\dot{x} = \dot{x}^*$ то је други члан једнак нули. Поновним диференцирањем израза \dot{x}^* и уношењем у једначину (62) добијамо сисџем једначина

$$\dot{C}_1 \cos \omega t + \dot{C}_2 \sin \omega t = 0, \quad -\dot{C}_1 \omega \sin \omega t + \dot{C}_2 \omega \cos \omega t = h f(t),$$

из кога следи

$$\dot{C}_1 = -\frac{h}{\omega} f(t) \sin \omega t; \quad \dot{C}_2 = \frac{h}{\omega} f(t) \cos \omega t. \quad (65)$$

Интегралењем добијамо

$$C_1 = A - \frac{h}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin \omega \tau \, d\tau; \quad C_2 = B + \frac{h}{\omega} \int_0^t f(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau, \quad (66)$$

где су A и B интеграционе константе а τ нова променљива, пошто се мења горња граница (t) одређеног интеграла. Према томе је општи интеграл једначине (62) облика

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t +$$

$$+ \frac{h}{\omega} \left[\sin \omega t \int_0^t f(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau - \cos \omega t \int_0^t f(\tau) \sin \omega \tau \, d\tau \right]. \quad (67)$$

Уводећи под интеграл изразе са ωt који се не интеграле добија се решење и у овом облику

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{h}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin \omega (t - \tau) \, d\tau, \quad (68)$$

у коме трећи члан представља принудну осцилацију

$$x_p = \frac{h}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin \omega (t - \tau) \, d\tau. \quad (69)$$

Ако су почетни услови кретања такви да су за $t=0$ почетни положај $x=x_0$ и почетна брзина $\dot{x}=\dot{x}_0$, онда је и $x_p=0$, па је $A=x_0$.

Диференцирањем израза (69), водећи рачуна о диференцирању под знаком интеграла када је горња граница променљива и зависи од параметра (t), док је τ интеграциона променљива, па је

$$\frac{dJ}{dt} = \varphi(\tau, t) \frac{dt}{dt} + \int_0^t \frac{\partial \varphi(\tau, t)}{\partial \tau} d\tau$$

где је $\varphi(\tau, t)$ подинтегрална функција, биће

$$\dot{x} = \omega (-A \sin \omega t + B \cos \omega t); \quad B = \dot{x}_0 / \omega,$$

те је партикуларни интеграл за постављене почетне услове кретања

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{h}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (70)$$

Израз за принудно кретање (69) представља партикуларни интеграл нехомогене диф. једначине (62). Међутим, тај се израз може извести и физикално на начин како је показао лорд Рели. Претпоставимо да се и тело масе m , обешено о опругу крутости s , налази у почетку кретања ($t=0$) у миру — у статичком положају — и нека је $z_0=0$, тада је закон кретања $z = (\dot{z}_0/\omega) \sin \omega t$. Нека у почетном тренутку дејствује и поремећајна сила $F(t) = Ff(t)$, чија је промена дата графички, (сл. 4.18.). Означимо са τ неко произвољно време а са t време у коме треба да одредимо закон кретања. За временски размак $d\tau$ маса m добија импулс $m dv = Ff(\tau) d\tau$, па је промена брзине

$$dv = hf(\tau) d\tau; \quad h = F/m.$$

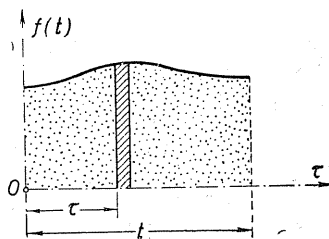
Сматрамо ли тренутак τ као завршетак дејства импулса може се тада dv сматрати варијацијом почетне брзине \dot{z}_0 услед које долази до померања

$$dz = \frac{dv_0}{\omega} \cdot \sin \omega(t - \tau) = \frac{h}{\omega} f(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau.$$

Како импулси непрекидно трају у размаку од 0 до неке вредности t то је померање одређено интегралом

$$z = \frac{h}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau$$

који представља закон принудног кретања.



Сл. 4.18. — Физикално извођење партикуларног интеграла принудне осцилације

Овај је интеграл познат под именом интеграла Духамела.

У случају принудних осцилација са отпорном силом диференцијална једначина осциловања је

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = Ff(t) \quad \text{или} \quad \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = hf(t).$$

Општи интеграл хомогене једначине је облика

$$x^* = x_h = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

где су сада, као и у претходном случају, константе C_i променљиве. Диференцирањем добијамо да је брзина

$$\dot{x}^* = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} + [\dot{C}_1 e^{\lambda_1 t} + \dot{C}_2 e^{\lambda_2 t}],$$

па пошто мора бити $\dot{x}^* = \dot{x}$ то је други члан једнак нули. Поновним диференцирањем и уношењем релација у прву једначину (71) следи

$$C_1 e^{\lambda_1 t} [\lambda_1^2 + 2\delta\lambda_1 + \omega^2] + C_2 e^{\lambda_2 t} [\lambda_2^2 + 2\delta\lambda_2 + \omega^2] + \dot{C}_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \dot{C}_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} = hf(t).$$

Како мора бити задовољена карактеристична једначина хомогеног дела

$\lambda_i^2 + 2\delta\lambda_i + \omega^2 = 0$, за $i = 1$ и $i = 2$, то добијамо систем једначина

$$\dot{C}_1 e^{\lambda_1 t} + \dot{C}_2 e^{\lambda_2 t} = 0; \quad \lambda_1 \dot{C}_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 \dot{C}_2 e^{\lambda_2 t} = hf(t)$$

из којих одређујемо \dot{C}_1 и \dot{C}_2 , па су

$$C_1 = A - \frac{h}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_0^t f(\tau) e^{-\lambda_1 \tau} d\tau; \quad C_2 = B + \frac{h}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_0^t f(\tau) e^{-\lambda_2 \tau} d\tau. \quad (72)$$

Општи интеграл нехомогене једначине ових осцилација је

$$x = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} + \frac{h}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[\int_0^t f(\tau) e^{\lambda_2(t-\tau)} d\tau - \int_0^t f(\tau) e^{\lambda_1(t-\tau)} d\tau \right]. \quad (73)$$

Решења добијамо у овом облику:

1° за слабу осцилацију ($\delta < \omega$)

$$x = e^{-\delta t} (A_1 \cos pt + B_1 \sin pt) + \frac{h}{p} \int_0^t f(\tau) e^{-\delta(t-\tau)} \sin p(t-\tau) d\tau; \quad (73a)$$

2° за јаку осцилацију ($\delta > \omega$)

$$x = e^{-\delta t} \left((A_1 \operatorname{Ch} qt + B_1 \operatorname{Sh} qt) + \frac{h}{q} \int_0^t f(\tau) \cdot e^{-\delta(t-\tau)} \operatorname{Sh} q(t-\tau) d\tau \right); \quad (73b)$$

3° за гранични случај ајериодичког кретања ($\delta = \omega$)

$$x = e^{-\delta t} (At + B) + h \int_0^t f(\tau) \cdot e^{-\delta(t-\tau)} (t-\tau) d\tau. \quad (73c)$$

4.6. Принудне осцилације греда са једном концентрисаном масом. — Ако се на греди, чију масу занемарујемо, налази концентрисана маса (m), онда слично слободним осцилацијама, (чл. 1.7.), могу наступити и принудне осцилације масе. С обзиром на односе поремећајне силе и концентрисане масе разликујемо три карактеристична случаја принудних осцилација.

а) Сјална поремећајна сила. — Када на масу (m) која се налази на лакој греди ($M \approx 0$) дејствује сјална поремећајна сила $F(t) = F \cdot f(t)$ и када је греда у почетку била у миру ($y_0 = \dot{y}_0 = 0$) онда је режим принудног кретања као (69), те је

$$y = y_p = \frac{h}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin \omega(t-\tau) \cdot d\tau. \quad (74)$$

Динамички фактор деформација (угиба) приближно је једнак динамичком фактору нормалних напона

$$\eta_d = y_{\max} / f_s = \sigma_d / \sigma_s, \quad (75)$$

где је $f_s = y_s$ сјашички угиб пресека испод масе а σ_s сјашички нормални напон.

Када је $F(t) = F = \text{const}$, тада је решење

$$y = f_s (1 - \cos \omega t), \quad (76)$$

па је $y_{\max} = 2f_s$, тј. $\eta_d = 2$, како смо имали раније (чл. 1.7. обр. 32). Греда осцилује кружном фреквенцијом слободних осцилација (ω) али јој је амплитуда два пута већа од угиба ($f_s = F/c$).

Ако је сила F дејствовала у размаку $[0, t_1]$ и затим нагло престала да дејствује, онда можемо сматрати да се у тренутку престанка дејства јавља и сила $-F$, супротна првој, те је закон осциловања после престанка дејства силе:

$$y = y_1 = f_s (1 - \cos \omega t) - f_s [1 - \cos \omega(t-t_1)] = f_s [\cos \omega(t-t_1) - \cos \omega t]. \quad (77)$$

b) *Тренушна сила коначног импулса.* — На саму масу (m) која се налази на лакој греди дејствује тренутна сила F коначног импулса за врло кратко време ($\Delta t = dt$). Због тога маса добија убрзање $a = dv/dt = F/m$, па је прираштај брзине $dv = (F dt)/m = I/m$, где је I *импулс силе*. Овај прираштај може се сматрати почетном брзином слободних осцилација масе на греди после престанка краткотрајног дејства импулса, јер за ово кратко време маса остаје непокретна.* Према томе је закон осциловања масе *после престанка дејства импулса*

$$y = A \cos \omega t + B \sin \omega t = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t = \frac{I}{m\omega} \sin \omega t = y_{\max} \sin \omega t \quad (78)$$

па је *динамички фактор***

$$\eta_a = y_{\max}/f_s = I c/Fm\omega = \omega \cdot dt = 2\pi dt/T. \quad (79)$$

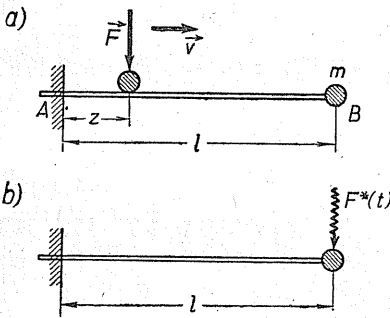
Када сила F коначног импулса не дејствује на маси (m) него у неком пресеку (k) удаљеном за $z = a$ од ослоња A , онда се она *мора редуковати на пресек (i) у коме је маса m* . У истом временском размаку обе силе даће импулсе $I = F dt$ и $I^* = F^* dt$ који морају произвести исте деформације, па следи однос

$$F \alpha_{ik} = F^* \alpha_{ii}; \quad F^* = F \alpha_{ik}/\alpha_{ii}, \quad (80)$$

где су α_{ik} и α_{ii} утицајни коефицијенти у пресецима (i) и (k) услед дејства јединичне силе у пресеку (i).

После ове редукације могу се применити претходни образци узимајући силу F^* .

c) *Случај покретног шереџа.* — Када се по конзоли AB , распона l , на чијем се слободном крају налази концентрисана маса (m), *креће шереџ F* , једнолико, брзином v (сл. 4.19.a), тада ће изазивати



принудне осцилације масе. Дејство покретног терета на масу може се схватити као непрекидно дејство тренутних сила коначног импулса ($F dt$) чије се нападне тачке непрекидно мењају у скоковима $v dt$, тако да су све на бесконачно блиском растојању, наредне од претходне. Редукацијом силе F на масу m , (сл. 4.19.b), због утицајних коефицијената

Сл. 4.19. — Утицај покретног терета на осцилације масе на греди $\alpha_{ik} = \frac{k}{6} \frac{3l-z}{l^3} z^2; \quad \alpha_{ii} = \frac{k}{3}; \quad k = \frac{l^3}{\mathfrak{B}}$

* Динамика, чл. 22.

** Образац се може применити и у случају коначног временског размака мањег од $1/10$ периода, $dt \leq 0,1 T$.

биће

$$F^* = \frac{F}{2} \cdot \frac{(3l-z)z^2}{l^3}$$

Брзина је v , па је $z = vt$, те, према (74), добијамо закон принудног кретања

$$y = \frac{Fv^2}{2m\omega l^3} \int_0^t \tau^2 (3l - v\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau = \frac{Fv^2}{2m\omega^2 l^3} \left[\frac{6v}{\omega^2} t + 3lt^2 - vt^3 - \frac{6l}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) - \frac{6v}{\omega^3} \sin \omega t \right] \quad (81)$$

и брзину

$$\dot{y} = f_s \frac{v^2}{2l^3} \left[\frac{6v}{\omega^2} + 6lt - 3vt^2 - \frac{6l}{\omega} \sin \omega t - \frac{6v}{\omega^2} \cos \omega t \right]. \quad (82)$$

У тренутку $t_1 = l/v$ шереш ће најушшиши конзолу и тада настаје хармонјско осциловање према закону

$$y = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (83)$$

где се константе одређују из (81) и (82) а ново време рачуна од тренутка $t_1 = t_0$.

4.7. Примена Лапласових трансформација. — Лапласове трансформације се много користе при решавању обичних и парцијалних линеарних диференцијалних једначина и сценијалних интегралних једначина, које се јављају у осцилаторним проблемима. Због тога ћемо у даљем изнети основе ових трансформација и применити их на конкретне осцилаторне проблеме принудних осцилација.

а) *Лајласова трансформација.* — Одређени интеграл

$$\mathfrak{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) \cdot dt = F(p) = \frac{1}{p} Q(p) \quad (84)$$

назива се *Лајласов (Laplace) интеграл* или *Лајласова трансформација* („слика“) функције („оригинала“) $f(t)$, реалне променљиве (t) , у функцију (слику) $F(p)$, параметра p који може имати и копмлексно значење, $p = \alpha \pm i\beta$, са позитивним реалним делом $Q(p) > 0$, тако да је горњи интеграл за вредност $p = \alpha$ конвергентан. За функцију $f(t)$ претпоставља се да је дата у размаку $0 \leq t < +\infty$ а да је $f(t) = 0$ за $t < 0$.

Лапласова трансформација је, дакле, функција свога параметра (p) . Производ $p \mathfrak{L}[f(t)] = Q(p)$ назива се *Carson-овом трансформацијом*. Она је основ *операционе методе* решавања линеарних диференцијалних једначина.

Лапласова трансформација је *линеарна*, јер за њу важе ове две релације линеарности:

$$\mathfrak{L}[kf(t)] = k \cdot \mathfrak{L}[f(t)], \quad k = \text{const и реално}; \quad (85)$$

$$\mathfrak{L}[f(t)] = \mathfrak{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathfrak{L}[f_1(t)] + \mathfrak{L}[f_2(t)].$$

Када је позната Лапласова трансформација $F(p)$ онда се инверзијом одређује оригинал

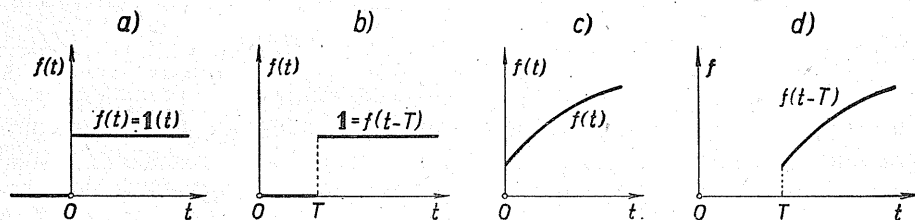
$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}[F(p)]. \quad (86)$$

Ако је дата нехомогена диференцијална једначина

$$L(x, t) = F(t) \quad (87)$$

онда се применом Лапласове трансформације, према (84), на све чланове леве и десне стране једначине, иста своди на *алгебарску једначину* слике $X(p)$ оригинала $x(t)$ које је решење предње диференцијалне једначине и које ћемо одредити инверзијом слике $X(p)$.

b) *Пресликавање извесних функција.* — Најпростија је функција *јединична** која се бележи са $\mathbf{1}(t)$, те је $\mathbf{1}(t) = f(t) = 1$ за $t \geq 0$ и $\mathbf{1}(t) = f(t) = 0$ за $t < 0$, (сл. 4.20.a).



Сл. 4.20. — Јединична функција

Њена Лапласова трансформација је

$$\mathfrak{L}[\mathbf{1}(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p}; \quad Q(p) = p\mathfrak{L}[\mathbf{1}(t)] = 1. \quad (88)$$

Ако је $f(t) = e^{at}$ онда се може увести смена $p - a = r$, па се опет добија (84) само параметра $p - a$. Слично за функцију $f = e^{-at}$ увешћемо смену $r = p + a$.

Код експоненцијалне функције $f(t) = t^n$, где је $n \geq 1$, парцијалном интеграцијом

$$\mathfrak{L}[t^n] = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^n dt = [-t^n e^{-pt}/p]_0^{\infty} + np^{-1} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-pt} dt$$

* Она се назива и функција *Heavyside-a*.

добија се рекурзивни образац

$$\mathfrak{L}[t^n] = \frac{n}{p} \mathfrak{L}[t^{n-1}] = \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (89)$$

Када је $f(t) = 1/\sqrt{t}$ тада се сменом $pt = x^2$ интеграл (84) своди на Лапласов интеграл, па је слика $\sqrt{\pi/p}$. За функцију $f(t) = \sqrt{t^n}$ добија се рекурзивни образац.

с) *Теореме померања.* — Функција $F(p)$ је слика оригинала $f(t)$. Када се параметар p повећа на $p+a$, где је a комплексни број са негативним реалним делом, онда је $F(p+a)$ слика нове функције

$$F(p+a) = \int_0^{\infty} e^{-(p+a)t} f(t) \cdot dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-at} f(t) dt = e^{-at} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (90)$$

Ово померање у параметру („shift“) показује *множење* оригинала експоненцијалном функцијом e^{-at} . Помоћу ове теореме и с обзиром на особину линеарности трансформације због односа $\text{Ch } at = (e^{at} + e^{-at})/2$; $\text{cos } at = \text{Ch } at i$; $\text{Sh } at = (e^{at} - e^{-at})/2$; $\text{sin } at = i^{-1} \text{Sh } at i$, добијају се слике хиперболичких и тригонометријских функција.

Ако је јединична функција $f(t-T) = \mathbf{1}(t-T) = 1$ за $T \leq t \leq \infty$ и једнака нули за $t < T$, (сл. 4.20.b), онда ће бити

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[\mathbf{1}(t-T)] &= \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot \mathbf{1}(t-T) \cdot dt = \int_0^T e^{-pt} \cdot \mathbf{1}(t-T) \cdot dt + \int_T^{\infty} e^{-pt} \cdot \mathbf{1}(t-T) \cdot dt = \\ &= \int_T^{\infty} e^{-pt} \cdot \mathbf{1}(t-T) \cdot dt = e^{-pT}/p = e^{-pT} \mathfrak{L}[\mathbf{1}(t)]. \end{aligned} \quad (91)$$

Дакле, множење слике јединичне функције са e^{-pT} помера се оригинал $f(t) = \mathbf{1}(t) = 1$ у смеру $+Ot$ осе за дуж T .

Ово се може применити и на друге функције ако се уведе смена $\tau = t - T$, па ће бити

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-p(t-T)} f(t-T) \cdot dt = e^{pT} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t-T) \cdot dt$$

па је

$$e^{-pT} F(p) = e^{-pT} \mathfrak{L}[f(t)] = \mathfrak{L}[f(t-T)], \quad (92)$$

Дакле, множење слике (трансформације) $\mathfrak{L}[f(t)]$ експонентом e^{-pT} помера се оригинал $f(t)$ за дуж \bar{T} у смеру $+Ot$ осе (сл. 4.20.c).

За пресликавање извода $f = \dot{f} = df/dt$ и интеграла $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$,

где је сада t променљива граница а τ нова променљива, користи се парцијална интеграција.

Најчешћа пресликавања која се срећу у техничкој пракси дата су у табlici 4.4.

Таблица 4.4.

	$F(p) = \mathfrak{L}[f(t)]$	$f(t)$		$F(p) = \mathfrak{L}[f(t)]$	$f(t)$
1.	$kF(p)$	$kf(t)$	14.	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	$\text{Sh } at$
2.	$F_1(p) + F_2(p)$	$f_1(t) + f_2(t)$	15.	$\frac{p}{p^2 - a^2}$	$\text{Ch } at$
3.	$\frac{1}{p}$	$1(t)$	16.	$\frac{p}{(p^2 + a^2)^2}$	$\frac{t}{2a} \sin at$
4.	$\frac{1}{p - a}$	e^{at}	17.	$\frac{a^2}{(p^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2a} (\sin at - at \cos at)$
5.	$\frac{1}{p + a}$	e^{-at}	18.	$\frac{b}{(p + a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \sin bt$
6.	$\frac{1}{p - 1}$	e^t	19.	$\frac{p + a}{(p + a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \cos bt$
7.	$\frac{1}{p + 1}$	e^{-t}	20.	$\frac{p}{p^4 + 4a^4}$	$\frac{1}{2a^2} \sin at \text{ Sh } at$
8.	$\frac{n!}{p^{n+1}} = \frac{n}{p} \mathfrak{L}[t^{n-1}]$	$t^n; n > -1$ цео број	21.	$\frac{p^3}{p^4 + 4a^4}$	$\cos at \text{ Ch } at$
9.	$\frac{\sqrt{\pi/p}}{2^{n+1} \left(\frac{n+1}{2}\right)!} \sqrt{\frac{\pi}{p^{n+2}}}$	$1/\sqrt{t}$	22.	$\frac{1}{p^4 - a^4}$	$\frac{1}{2a^3} (\text{Sh } at - \sin at)$
10.	$\frac{(n+1)!}{2^{n+1} \left(\frac{n+1}{2}\right)!} \sqrt{\frac{\pi}{p^{n+2}}}$	\sqrt{tn}	23.	$\frac{p^2}{p^4 - a^4}$	$\frac{1}{2a} (\text{Sh } at + \sin at)$
11.	$\frac{e^{-ap}}{p}$	$\begin{cases} 0 & 0 \leq t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$	24.	$\frac{p}{p^4 - a^4}$	$\frac{1}{2a^2} (\text{Ch } at - \cos at)$
12.	$\frac{a}{p^2 + a^2}$	$\sin at$	25.	$\frac{p^3}{p^4 - a^4}$	$\frac{1}{2} (\text{Ch } at + \cos at)$
13.	$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$\cos at$			

	$F(p) = \mathfrak{L}[f(t)]$	$f(t)$		$F(p) = \mathfrak{L}[f(t)]$	$f(t)$
26.	$\ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)$	$\frac{1 - e^{-t}}{t}$	32.	$p^n F(p)$	$\frac{d^n f}{dt^n}$ ако је $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$
27.	$\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right)$	$\frac{1 - e^t}{t}$	33.	$\frac{1}{p} F(p)$	$\int_0^t f(\tau) d\tau$
28.	$F(p+a)$	$e^{-at} f(t)$	34.	$F_1(p) \cdot F_2(p)$	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$
29.	$pF(p) - f(0)$	$\frac{df}{dt}$	35.	$\frac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}
30.	$p^n F(p) - [p^{n-1} f(0) + p^{n-2} f'(0) + \dots + f^{(n-1)}(0)]$	$\frac{d^n f}{dt^n}$	36.	$\frac{1}{p} \operatorname{arctg} p$	$\frac{\pi}{2} - \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$
31.	$p^2 F(p) - [pf(0) + f'(0)]$	$\frac{d^2 f}{dt^2}$	37.	$\frac{1}{p} \ln \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$	$\int_0^\infty \frac{\cos \tau}{\tau} d\tau$

d) *Теорема конволуције.* — За три функције $f(t)$, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ каже се да су у конволуцији када између њих постоји следећи интегрални однос

$$f(t) = \int_0^t \varphi(t-\tau) \cdot \psi(\tau) \cdot d\tau = \int_0^t \varphi(\tau) \cdot \psi(t-\tau) \cdot d\tau. \quad (93)$$

Нека су \mathfrak{L}_1 и \mathfrak{L}_2 Лапласове трансформације функција $f_1(t)$ и $f_2(t)$ онда се према теорему померања добија

$$e^{-pt} \mathfrak{L}_2 = \int_0^\infty e^{-p\tau} f_2(t-\tau) d\tau.$$

Множењем предњег израза са $f_1(\tau) d\tau$ и интегралењем следи

$$\mathfrak{L}_2 \int_0^\infty e^{-p\tau} f_1(\tau) d\tau = \int_0^\infty f_1(\tau) d\tau \cdot \int_0^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau) dt = \int_0^\infty e^{-pt} \left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] dt,$$

па се добија теорема конволуције (convolution, Faltung, produit de con-

position, свёртка):

$$\mathfrak{L}_1[f_1(t)] \cdot \mathfrak{L}_2[f_2(t)] = \mathfrak{L} \left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] = \mathfrak{L} \left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \right]. \quad (94)$$

На пример:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_1[\cos t] \mathfrak{L}_2[\text{Ch } t] &= [p/(p^2+1)] \cdot [p/(p^2-1)] = p^2/(p^4-1) = \mathfrak{L} \left[\int_0^t \cos(t-\tau) \text{Ch } \tau d\tau \right] = \\ &= \mathfrak{L} \left[\frac{1}{2} \int_0^t (e^\tau + e^{-\tau}) \cos(t-\tau) \cdot d\tau \right] = \mathfrak{L} [(\text{Sh } t + \sin t)/2] = \mathfrak{L} [f(t)]. \end{aligned}$$

e) *Теорема разлагања.* — Нека се слика да представити у облику количника два полинома $M^m(p)$ и $N^n(p)$, то јест као права разломљена рационална функција, где је $n > m$, онда је треба разложити на делимичне разломке.* С обзиром на врсту корена: реални прости корени, реални сложени корени r -ог реда, и конјуговано комплексни прости или сложени корени разлагање има изглед:

$$\frac{M(p)}{N(p)} = \sum_{k=1}^p \frac{A_k}{(p-p_k)} + \sum_p \frac{B_{sp}}{(p-p_s)^p} + \frac{Cp+D}{p^2+\alpha p+\beta} + \sum_0^r \frac{Pp+Q}{(p^2+\alpha p+\beta)^p}. \quad (95)$$

Непознате коефицијенте одређујемо *методом неодређених коефицијената* или према следећем

$$A_k = M(p_k)/N'(p_k); \quad B_{sr} = r! M(p_s)/N^{(r)}(p_s) \quad (96)$$

где су ' први а (r) извод реда r полинома $N(p)$.

На пример, за рационалну функцију

$$\frac{3x^5+2x^4+6x^3-11x^2-12x-8}{(x-2)^2(x^2+2x+2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2} + \frac{Px+Q}{(x^2+2x+2)^2}$$

биће

$$M(2) = 100; \quad N'(2) = 0; \quad N''(2) = 2(4+4+2)^2 = 2 \cdot 100, \text{ па је}$$

$B = 2 \cdot 100 / 2 \cdot 100 = 1$. Даље је

$$\frac{M(x)}{N(x)} - \frac{B}{(x-2)^2} = \frac{3x^4+7x^3+16x^2+13x+6}{(x-2)(x^2+2x+2)^2} = \frac{M_1(x)}{N_1(x)}; \quad A = \frac{M_1(2)}{N_1'(2)} = \frac{200}{100} = 2.$$

* Р. Кашанин — В. математика, II—књ. I, стр. 160. Београд, 1949.

Пребацавањем на леву страну и делењем са $(x-2)$ добијамо

$$\frac{M_2(x)}{N_2(x)} = \frac{M_1 - A(x^2 + 2x + 2)^2}{N_1(x)} = \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2} + \frac{Px + Q}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

Сада методом неодређених коефицијената добијамо систем једначина:

$$C = 1; \quad 2C + D = 1; \quad 2C + 2D + P = 2; \quad 2D + Q = 1;$$

те су

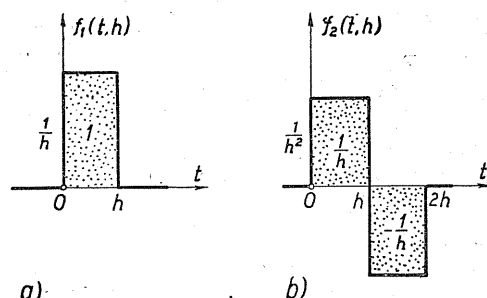
$$C = 1; \quad D = -1; \quad P = 2; \quad Q = 3.$$

f) Јединичне импулсне функције. — Посматрајмо функцију

$$f_1(t; h) = \frac{1}{h} \begin{cases} t \leq h \\ 0 & t > h \end{cases} \quad (97)$$

(сл. 4.21.а), онда шрафирана површина износи $h \cdot f_1(t, h) = 1$. Њена Лапласова трансформација биће

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[f_1(t, h)] &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f_1(t, h) dt = \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-ph}}{ph}. \end{aligned} \quad (98)$$



Сл. 4.21. — Јединичне импулсне функције

За $h=0$ је десна страна неодређена, $0/0$, те се за $h \rightarrow 0$ може да уведе гранична функција

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathfrak{L}[f_1(h, t)] = \mathfrak{J}_1(t) = \delta(t) \quad (99)$$

која се назива јединична импулсна функција првог реда. Она је једнака нули за свако t , али је за $t=0$ бескрајно велика, те је $\mathfrak{J}_1(0) = \infty$. Она се назива и Dirac-ова функција и има механичко значење, јер представља тренутну силу коначног импулса која јединичној маси ($m=1$) при нултом почетном услову ($t=0$) даје јединичну брзину ($v=1$), пошто је сила $F = mv_0 \cdot \mathfrak{J}_1(t)$, те јединична импулсна функција има јединицу $1/\text{sec}$.

Лапласове трансформације функције (97) дају:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathfrak{L}[f_1(t, h)] = \mathfrak{L}[\lim_{h \rightarrow 0} f_1(t, h)] = \mathfrak{L}[\mathfrak{J}_1(t)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-ph}}{ph} = 1$$

те су

$$\mathfrak{L}[\mathfrak{J}_1(t)] = 1; \quad \mathfrak{L}\left[\int_0^t \mathfrak{J}_1(t) dt\right] = \frac{1}{p}. \quad (100)$$

На сл. 4.21.b је представљена функција

$$f_2(t, h) = \begin{cases} 1/h^2 & 0 \leq t < h \\ -1/h^2 & h \leq t \leq 2h \\ 0 & t < 0 \text{ и } t > 2h \end{cases} \quad \text{за} \quad (101)$$

Лапласова трансформација ове функције је

$$\mathfrak{L}[f_2(t, h)] = (1 - 2e^{-ph} + e^{-2ph})/ph^2 \quad (102)$$

и за $h=0$ јавља се у облику $0/0$, па се за $h \rightarrow 0$ може да уведе гранична функција

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathfrak{L}[f_2(t, h)] = \mathfrak{J}_2(t) \quad (103)$$

која се назива *јединична импулсна функција другог реда*. За њу важе трансформације

$$\mathfrak{L}[\mathfrak{J}_2(t)] = p; \quad \mathfrak{L}\left[\int_0^t \mathfrak{J}_2(t) dt\right] = 1, \quad (104)$$

те се види да је импулсна функција другог реда први извод функције \mathfrak{J}_1 по времену t , те има јединицу $1/\text{sec}^2$. Сила $F = mx_0 \cdot \mathfrak{J}_2(t)$ показује да $\mathfrak{J}_2(t)$ представља јединичну силу која јединичној маси $m=1$ даје јединично померање $x=1$ при брзини $v=0$.

g) *Примена на осцилације*. — Код амортизованог принудног осциловања диференцијална једначина је облика

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = Ff(t) \quad \text{или} \quad \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2x = hf(t) \quad (105a)$$

са почетним условима: за $t=0$ су $x=x_0$ и $\dot{x}=\dot{x}_0$. Применом трансформација према (87) добија се

$$\mathfrak{L}[\ddot{x}] + 2\delta \mathfrak{L}[\dot{x}] + \mathfrak{L}[x] = h\mathfrak{L}[f(t)] = hF(p),$$

или

$$[-px_0 + \dot{x}_0] + p^2X(p) + 2\delta[-x_0 + pX(p)] + \omega^2X(p) = hF(p),$$

односно

$$\mathfrak{L}[x(t)] = X(p) = \frac{\dot{x}_0 + (2\delta + p)x_0}{p^2 + 2\delta p + \omega^2} + \frac{h}{p^2 + 2\delta p + \omega^2} F(p). \quad (105b)$$

Инверзијом слике $X(p)$ добићемо оригинал $x(t)$, то јест *закон кретања*. При томе треба искористити теореме конволуције и разлагања и изразе подесити за табличне случајеве. Разликоваћемо више случајева.

1° Када је $b=0$ тада је и $\delta=0$, па из (105b) следи

$$\mathfrak{L}[x(t)] = X(p) = x_0 \frac{p}{p^2 + \omega^2} + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} + \frac{h}{p^2 + \omega^2} F(p) \quad (106a)$$

те инверзијом добијамо закон кретања

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}[X(p)] = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{h}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin(t-\tau) d\tau. \quad (106b)$$

Трећи члан на десној страни представља режим *принудног осциловања*.

На пример, за $m=1$; $c=4$; $F=3$; $x_0=4$; $\dot{x}_0=2$; $f(t)=\sin t$; $\Omega=1$ биће

$$x = 4 \cos 2t + \sin 2t + (\sin t - 0,5 \sin 2t).$$

2° Када је $F=\text{const}$, тада на масу у тренутку $t=0$ дејствује константна сила $F=\text{const}$, па је $Ff(t)=F \cdot 1(t)$ где је $1(t)$ јединична функција. Узмимо нулте почетне вредности $x_0=0$ и $\dot{x}_0=0$, тада (105a) постаје

$$\mathfrak{L}[x(t)] = X(p) = \frac{h}{p^2 + 2\delta p + \omega^2}. \quad (107)$$

Да би кретање било периодичко мора бити $\delta < \omega$, па је тада $p = -\delta + \lambda i$, то јест $\lambda^2 = \omega^2 - \delta^2$, те је закон кретања

$$x(t) = \frac{h}{\omega^2} \left[1 - e^{-\delta t} \left(\cos \lambda t + \frac{\delta}{\omega^2 - \delta^2} \sin \lambda t \right) \right]. \quad (108)$$

Функција $P(t)=x(t)$ назива се *прелазном функцијом* овог осцилаторног система.

За $\delta=0$ добија се образац (76), јер је $h/\omega^2 = F/m\omega^2 = F/c = f$.

3° Када је $f(t)$ произвољна функција тада закон кретања зависи од корена полинома $N(p)$. Резултати су дати у табели 4.5.

Када на масу (m) насађену на лаку греду ($M=0$) дејствује тренутна сила коначног импулса (чл. 4.6.b) имаћемо диференцијалну једначину

$$m\ddot{x} + cx = I \cdot J_1(t) \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = h \cdot J_1(t). \quad (109)$$

Таблица 4.5.

	$\frac{\omega}{\delta}$	$N(p)$	Корени	Трансформација $X(p)$ и оригинал $x(t)$
Опадајуће осциловање	$\delta > \omega$	$(p+\delta)^2 + \lambda^2$	$p = -\delta \pm \lambda i; \lambda^2 = \omega^2 - \delta^2$	$\mathfrak{L}[x(t)] = X(p) = \frac{(p+\delta)}{(p+\delta)^2 + \lambda^2} x_0 + \frac{\dot{x}_0 + \delta x_0}{(p+\delta)^2 + \lambda^2} + \frac{h}{(p+\delta)^2 + \lambda^2} F(p)$ $x(t) = x_0 e^{-\delta t} \cos \lambda t + \frac{\dot{x}_0 + \delta x_0}{\lambda} e^{-\delta t} \sin \lambda t + \frac{h}{\lambda} \int_0^t f(\tau) e^{-\delta(t-\tau)} \sin \lambda(t-\tau) d\tau$
Апериодичко кретање	$\delta > q$	$(p+\delta)^2 - q^2$	$p = -\delta \pm q; q^2 = \delta^2 - \omega^2$	$\mathfrak{L}[x(t)] = X(p) = \frac{p+\delta}{(p+\delta)^2 - q^2} x_0 + \frac{\dot{x}_0 + \delta x_0}{(p+\delta)^2 - q^2} + \frac{h}{(p+\delta)^2 - q^2} F(p)$ $x(t) = x_0 e^{-\delta t} \text{Ch } qt + \frac{\dot{x}_0 + \delta x_0}{q} e^{-\delta t} \text{Sh } qt + \frac{h}{q} \int_0^t f(\tau) e^{-\delta(t-\tau)} \text{Sh } q(t-\tau) d\tau$
Гранични случај	$\delta = \omega$	$(p+\delta)^2$	$p = -\delta$	$\mathfrak{L}[x(t)] = X(p) = \frac{(p+2\delta) x_0 + \dot{x}_0}{(p+\delta)^2} + \frac{h}{(p+\delta)^2} F(p) = \frac{x_0}{p+\delta} + \frac{\delta x_0 + \dot{x}_0}{(p+\delta)^2} + \frac{h}{(p+\delta)^2} F(p)$ $x(t) = x_0 e^{-\delta t} + (\dot{x}_0 + \delta x_0) t e^{-\delta t} + h \int_0^t f(\tau) \cdot (t-\tau) \cdot e^{-\delta(t-\tau)} d\tau$

За почетне услове мировања ($x_0=0$, $\dot{x}_0=0$ за $t=0$) биће трансформација и решење:

$$(p^2 + \omega^2) X(p) = h; \quad x(t) = \frac{h}{\omega} \sin \omega t = y_{\max} \sin \omega t, \text{ како је било и раније (78).}$$

ПРИМЕРИ

4.8. Методом варијација констаната одредити интеграл диференцијалне једначине принудних осцилација

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 5x = e^{2t}.$$

$$[x = Ae^{-t} + Be^{-5t} + e^{2t}/21 - e^{-5t}/28 - e^{-t}/12].$$

4.9. Методом варијација констаната одредити општи интеграл једначине

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 20 \cos 3t.$$

$$[x = e^{-2t} (A \cos t + B \sin t) + (3 \sin 3t - \cos 3t)/2].$$

4.10. Методом варијација констаната одредити интеграл диференцијалне једначине принудних осцилација

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 8,5x = (3 - 4t) e^t.$$

$$[x = e^{-3/2t} [A \cos 2,5t + B \sin 2,5t] + 0,08 (4,6 - 4t) e^t].$$

2) Показати да је $x = \sum_0^{\infty} [(2^n + n) t^n] / n!$ партикуларно решење диференцијалне једначине

$\ddot{x} + \dot{x} - 6x = (3 - 4t) e^t$ за почетне услове кретања: за $t=0$ су $x_0=1$, $\dot{x}_0=3$.

4.11. На просту греду, распона $l=4\text{m}$, насађена је маса m , тежине $2t$, на удаљењу $a=2\text{m}$ од левог ослонца. Греда је челични носач профила \square NP 20. Занемарујући масу греде одредити динамички фактор осцилација, ако на масу дејствује тренутна сила коначног импулса $F=1\text{t}$ у времену $dt=0,01\text{ sec}$; $E=2,10 \cdot 10^6\text{ kg/cm}^2$.

$$\left[T = 2\pi \sqrt{\frac{ml^3}{48E}} \approx 0,16\text{ sec}; \quad dt < 0,016; \quad \eta_d = \omega \Delta t = 0,393 \approx 0,4; \quad y_s = F/c = Fg/G\omega^2 \right].$$

4.12. На слободном крају конзоле, распона $l=2\text{m}$, попречног пресека \square NP 16 насађена је маса m , тежине 500 kg . По конзоли се креће терет $F=2\text{t}$, брзином, $v=30\text{ cm/sec}$. Одредити закон кретања масе.

$$\{y = 0,056 y_s [-0,3 t^3 + 6 t^2 + 0,0012t - 0,0081 (1 - \cos \omega t) - 0,0003 \sin \omega t]; \quad \omega^2 = 3E/ml^3 = 1458\}.$$

4.13. На средини прости греде AB , распона $l=4\text{m}$, налази се мотор тежине $G=3,0\text{t}$, који је неуравнотежен тако да даје вертикалну компоненту центрифугалне силе $Y_c = F \sin \Omega t$, где је $F=2\text{t}$. Греда је челична, попречног пресека \square NP 30. Одредити

амплитуду принудних осцилација и нормални напон у пресеку под теретом G ако је $n = 600$ o/min.

$$\{\omega^2 = 48 \text{ B}/m^3 = 70^2; \quad \Omega = \pi n/30 = 20 \pi \approx 62,8; \quad \eta_d = 2/(1 - \psi^2) = 5,26;$$

$$y_{\max} = y_s^{(G)} + \eta_d y_s^{(F)} = \frac{l^3}{48 \text{ B}} [G + \eta_d F];$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_s^{(G)} + \eta_d \sigma_s^{(F)} = \frac{l}{4 W} (G + \eta_d F);$$

$$y_{\max} = 0,56 \text{ cm}; \quad \sigma_{\max} = 1260 \text{ kg/cm}^2 \}.$$

4.14. На средини просте греде насађена је концентрисана маса (m). Одредити закон њеног осциловања ако се по греди креће терет од левог ка десном ослоњу, брзином v .
[Решење. — Узмимо приближну једначину еластичне линије греде у облику

$$y = (F l^3 / 48 \text{ B}) \sin (\pi z / l),$$

онда је због $z = vt$, и $\alpha_{11} = l^3 / 48 \text{ B}$, а према (80),

$$F^*(t) = F \sin (\pi z / l) = F \sin \Omega t; \quad \Omega = v \pi / l; \quad T' = \pi / \Omega = l / v,$$

па је закон осциловања масе

$$y = y_s [\sin \Omega t - \psi \sin \omega t] / (1 - \psi).$$

4.15. Одредити закон принудног неамортизованог осциловања масе m ако су почетни услови кретања $x_0 = x(T')$, $\dot{x}_0 = \dot{x}(T')$, где је T' период промене поремећајне силе.

[Решење. — Из једначина (68) сада добијамо систем једначина

$$x_0 = A = A \cos \omega T' + B \sin \omega T' + \frac{h}{\omega} \int_0^{T'} f(\tau) \sin \omega (T' - \tau) d\tau;$$

$$\frac{\dot{x}_0}{\omega} = B = -A \sin \omega T' + B \cos \omega T' + \frac{h}{\omega} \int_0^{T'} f(\tau) \cos \omega (T' - \tau) d\tau$$

из кога одређујемо константе

$$A = h [C \operatorname{ctg} (\omega T' / 2) + S] / 2\omega; \quad B = -h [C - S \operatorname{ctg} (\omega T' / 2)] / 2\omega,$$

где су уведене ознаке

$$C = \int_0^{T'} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau; \quad S = \int_0^{T'} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau.$$

Када познајемо константе A и B можемо написати партикуларни интеграл (70) стављајући уместо t параметар T' .

4.16. Код коленастих вратила мотора или парних машина сила се мења тако да је сразмерна модулу синусне функције, $F(t) = F_0 |\sin \Omega t|$, где је Ω кружна фреквенција поремећајне силе. Одредити закон принудног осциловања. Специјално за резонантни случај ($\omega = \Omega$) и када је $\omega = 3,5\Omega$.

[Решење. — График силе је приказан у табlici 4.3. сл. 11. Пошто је период промене поремећајне силе $T' = \pi/\Omega$, то према претходном задатку добијамо вредности интеграла:

$$C = \Omega [1 + \cos(\omega\pi/\Omega)] / (\Omega^2 - \omega^2);$$

$$S = \Omega [\sin(\omega\pi/\Omega)] / (\Omega^2 - \omega^2).$$

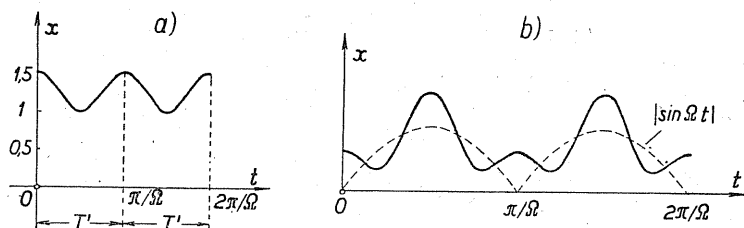
За случај $t < \pi/2$ закон кретања је

$$x(t) = \frac{\Omega}{\omega(\Omega^2 - \omega^2)} \left[\sin \omega t + \operatorname{ctg} \frac{\omega\pi}{2\Omega} \cos \omega t \right] - \frac{h}{\Omega^2 - \omega^2} \sin \Omega t.$$

За $\omega = \Omega$ израз $x(t)$ јавља се у облику $0/0$, па применом Лопиталовог правила добијамо:

$$x = \frac{h}{2\omega^2} \left[\sin \omega t + \left(\frac{\pi}{2} - \omega t \right) \cos \omega t \right].$$

Дијаграм кретања је приказан на сл. 4.22.a



Сл. 4.22. — Закон кретања код коленастих вратила

За $\omega = 3,5\Omega$ и $0 \leq t \leq \pi/\Omega$ закон кретања је

$$x(t) = \frac{4h}{45\Omega^2} \left[\sin \Omega t - \frac{2\sqrt{2}}{7} \sin \left(\frac{7}{2} \Omega t - \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

Дијаграм је приказан на сл. 4.22.b.

4.17. Помоћу Лапласових трансформација решити диференцијалну једначину

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 9x + 5x = \cos t$$

ако су почетни услови: $x_0(0) = 1$; $\dot{x}_0(0) = \ddot{x}_0(0) = 0$.

[Решење. — Овде добијамо слику

$$X(p) \cdot [p^3 + 4p^2 + 6p + 4] - (p^3 + 4p + 6) = p/(p^2 + 1)$$

односно

$$X(p) = \frac{p^4 + 4p^3 + 7p^2 + 5p + 6}{(p+2)(p^2+1)(p^2+2p+2)} = \frac{A}{p+2} + \frac{Bp+C}{p^2+1} + \frac{Dp+E}{p^2+2p+2}$$

где су:

$$A = 4/5; \quad B = 0; \quad C = 1/5; \quad D = 1/5; \quad E = 9/5.$$

Сада је

$$X(p) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{p+2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p^2+1} + \frac{p+1}{5[(p+1)^2+1^2]} + \frac{8}{5[(p+1)^2+1^2]},$$

па је оригинал

$$x(t) = 4/5 e^{-2t} + 1/5 e^{-t} (\cos t + 8 \sin t) + 1/5 \sin t.$$

4.18. Написати Лапласову трансформацију (слику) за хармонијски осцилатор изложеном дејству импулса који се понављају за сваки период (T).

Решење. — Диференцијална једначина осциловања је

$$\ddot{x} + \omega^2 x = h [J_1(t) + J_1(t-T) + J_1(t-2T) + \dots],$$

где је $\dot{h} = 1/m$, I је импулс kg/sec а J_1 јединична импулсна функција првог реда. Ако су почетни услови $x_0 = x(0)$ и $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, онда је трансформација диференцијалне једначине:

$$(p^2 + \omega^2) \cdot X(p) - (px_0 + \dot{x}_0) = h(1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + e^{-3pT} + \dots) = h/(1 - e^{-pT}),$$

јер је десна страна геометријски ред са $q = e^{-pT}$.

5. АНАЛОГИЈЕ ИЗМЕЂУ МЕХАНИЧКИХ И ЕЛЕКТРИЧНИХ ОСЦИЛАЦИЈА

У механици смо наишли на читав низ аналогија између појединих физичких величина, те су се различити физички проблеми могли интерпретирати истим математичким апаратом. Захваљујући векторском рачуну многи проблеми кинематике крутог тела аналогни су проблемима статике крутог тела. Предност Даламберовог принципа је у томе да се и динамички проблеми могу решавати статичком методом, испитујући „равнотежу сила“ за време самог кретања. Због тога постоји и потпуна аналогија између линеарних и торзијских осцилација, која се може проширити и на електричне осцилације.

Као што је познато из електротехнике* *шренушне вредности* електричних периодичких функција означавају се малим словима i (*сструја*), u (*напон*) и e (*електромоторна сила*), док се великим словима означавају *ефективне вредности* (I, U, E), тј. оне вредности које мере сами апарати (амперметар и волтметар). Амplitude ових периодичких функција су *максималне вредности* тих величина (I_m, U_m, E_m), док је кружна фреквенција ω , а $T=2\pi/\omega$ период осцилације. Ефективна вредност наизменичне струје представља замишљену једносмерну струју, која пролазећи кроз проводник, отпора R , развија, према Џауловом закону, исту топлоту као и наизменична струја. Према томе се претвара у топлоту електрична енергија

$$W = R \int_0^T i^2 dt = R I^2 T,$$

па је *ефективна вредност наизменичне сструје*

$$I = \sqrt{T^{-1} \int_0^T i^2 dt} \quad (1)$$

а на исти се начин дефинишу и друге две величине.

Између амплитуда и ефективних вредности постоје ови односи

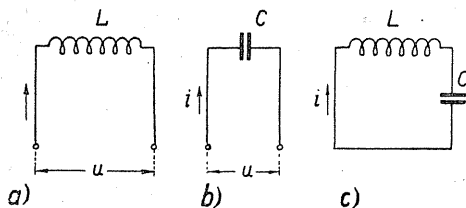
$$I_m = I\sqrt{2}, \quad U_m = U\sqrt{2}, \quad E_m = E\sqrt{2}. \quad (2)$$

* В. Јовановић — Основни закони електрицитета. Београд, 1948.

Нека кроз калем, сачиниоца самоиндукције L , (сл. 5.1. а), пролази наизменична струја која се мења по закону $i = I_m \sin \omega t$, она производи магнетно поље, флукса $\Phi = Li$, услед кога се у калему индукује електромоторна сила $e = -d\Phi/dt$. Она је,

према Омовом закону, $Ri = u + e = 0$, супротна напону u , па је „једначина равнотеже кола“

$$L \frac{di}{dt} = u. \quad (3)$$



Сл. 5.1. — а) Индуктанца је аналогон маси осцилатора, б) Инверзна капацитанца је аналогон крутости опруге осцилатора, с) Електрично осцилаторно хармонијско коло

Према Њутновом закону основна динамичка једначина кретања масе m дата је једначином $ma = mdv/dt = F$, па се одмах уочава да маси m одговара сачинилац самоиндукције L , брзини v јачина струје i , а сили F напон u .

Претпостави ли се да је $i = I_m \sin \omega t$, онда из једначине (3) добијамо да је напон

$$u = I_m L \omega \cos \omega t = U_m \sin(\omega t + 1/2 \pi), \quad (4a)$$

где су

$$U_m = I_m L \omega = I_m R_L, \quad I = U/L\omega. \quad (4b)$$

Отпор $L\omega$ зове се *индуктивни отпор* (*индуктанца*). Из (4) видимо да напон предњачи струји у фази за $1/2 \pi$.

Калем, као што се зна, нагомилава енергију $W = 1/2 L i^2$ која одговара кинетичкој енергији покретне масе $E_k = 1/2 m v^2$.

Ако се у колу налази кондензатор, капацитета C , (сл. 5.1. б), онда су оптерећење кондензатора $q = Ci$ и струја $i = dq/dt = C(du/dt)$ функције времена t . Ако је $u = U_m \sin \omega t$, онда је струја

$$i = C \omega \cdot U_m \sin(\omega t + 1/2 \pi) = I_m \sin(\omega t + 1/2 \pi), \quad (5a)$$

па су

$$U_m = I_m / C \omega = (I_m R_c); \quad U = I/C \omega, \quad (5b)$$

где је $1/C\omega$ *капацитивни отпор* (*капацитанца*). У овом случају струја предњачи напону у фази за $1/2 \pi$.

Као што се зна, кондензатор нагомилава енергију $1/2 q^2/C$ која одговара потенцијалној енергији опруге $1/2 cx^2$, па померање (x) одговара оптерећењу кондензатора (q) а крутост опруге (c) реципрочности вредности капацитета кондензатора ($1/C$). Због тога постоји и аналогја између одређивања крутости еквивалентне опруге групе опруга и капацитета групе кондензатора везаних редно или паралелно.

Механичком хармонијском осцилатору одговара *електрично осцилаторно коло* које се састоји из калема и кондензатора, (сл. 5.1. с). Користећи методу енергије, јер нема термогеног отпора па важи закон о одржавању енергије

$$1/2 L i^2 + 1/2 q^2/C = h = \text{const},$$

диференцирањем добијамо

$$L (di/dt) + (q/C) (dq/dt) = L (di/dt) + (1/C) \int i dt = 0,$$

пошто је $q = \int i dt$, те је

$$\ddot{q} + (1/CL)q = 0. \quad (6)$$

Кружна фреквенција и период осцилације осцилатора јесу

$$\omega^2 = 1/CL; \quad T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{CL}. \quad (7)$$

У случају кола представљеног на сл. 5.2. а диференцијална једначина биће

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u = U_m \sin \omega t, \quad (8a)$$

па струја мора да изостаје за напоном за угао φ . Због тога узмимо да је $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$; онда се диференцирањем и уношењем у горњу једначину добија померање фазе и амплитуда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R} = (R_L/R); \quad U_m = I_m (L \omega \sin \varphi + R \cos \varphi). \quad (8b)$$

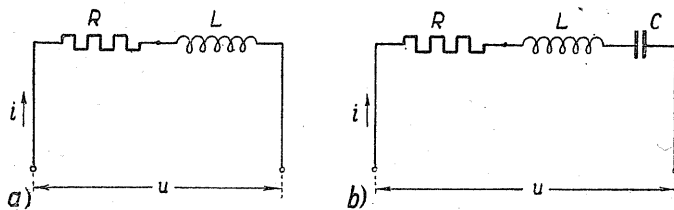
Из ових једначина добијамо да је амплитуда струје

$$I_m = \frac{U_m}{L \omega \sin \varphi + R \cos \varphi} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} = \frac{U_m}{Z}, \quad (9)$$

где је Z привидни отпор кола или електрична импеданца. У овом случају, дакле, важи закон

$$I = U/Z \quad (10)$$

који се зове Омов закон наизменичне струје или Joubert-ово Правило.



Сл. 5.2. — а) Електрично коло са термогеним отпором б) Општи случај електричног кола

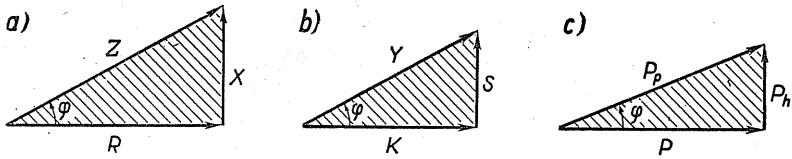
У општем случају електричног кола, (сл. 5.2. б), једначина је

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q = u = U_m \sin \omega t, \quad (11a)$$

па је решење $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$, те су померање фазе и амплитуда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L \omega - \frac{1}{C \omega}}{R}; \quad I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(L \omega - \frac{1}{C \omega}\right)^2}} = \frac{U_m}{|Z|}, \quad (11b)$$

где је Z импеданца кола. Представи ли се импеданца као вектор, онда су његове координате $L\omega - (1/C\omega)$ и R (сл. 5.3. а). Прва координата састоји се из индуктивног и капацитетног отпора па се зове и *реакција кола* (X), док се термогени отпор (R)



Сл. 5.3. — а) Импеданца, б) Адмитанца, в) Привидна, активна и реактивна снага и фактор снаге

често зове и *активни опшор кола*. Реципрочна вредност импеданце назива се *сложена проводност* или *адмитанца*

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad (12)$$

Представи ли се адмитанца као вектор, он има две координате: $K = Y \cos \varphi$ и $S = Y \sin \varphi$, (сл. 5.3 б). Прва се зове *активна проводност* (*кондуктивност*) а друга *реактивна проводност* (*сусејтивност*). На овај се начин у теорији наизменичних струја уведе тзв. *параметри кола*: R , X , Z , K и S .

Под тренутном снагом подразумева се израз

$$p = ui = U_m I_m \sin \omega t \sin (\omega t - \varphi) = P_p [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)] \quad (13)$$

где је $P_p = UI$ *привидна снага*. Величина $P = UI \cos \varphi$ назива се *активна снага* а $\cos \varphi$ је *фактор снаге*, док се величина $P_h = UI \sin \varphi$ зове *реактивна снага* или *хорманација*, (сл. 5.3. в).

Када је у колу, (сл. 5.2. б), индуктивни отпор једнак капацитетном, ($L\omega = 1/C\omega$), тада је и $\varphi = 0$, па наступа *напонска резонанса*. У овоме је случају период осцилације $T = 2\pi/\omega_k = 2\pi\sqrt{CL}$, (*Thomson-ова формула*). Кружна фреквенција ових принудних осцилација зове се *кришична учестаност*. У случају резонансе за струју важи прави Омов закон, јер је $I = U/R$. Однос струје при резонанси и струје у близини саме резонансе назива се *селективност* $s = I/I_1$.

На основу изнетог можемо поставити схему (14) аналогија величина при линеарним, торзијским и електричним осцилацијама.*

Да би аналогија била потпуна и између механичке и електричне импеданце неки писци називају механичком импеданцом количник поремећајне силе и брзине

$$Z(i\Omega) = \frac{\mathfrak{G}}{z} \quad (15)$$

* На страни 133.

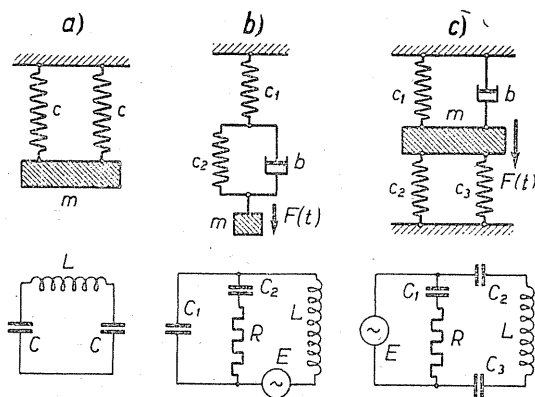
Схема аналогија величина механичких и електричних осцилација

ЛИНЕАРНЕ		ТОРЗИЈСКЕ		ЕЛЕКТРИЧНЕ	
m	kg sec ² /m	J	kgm sec ²	L	henry (H)
x	m	θ, φ	1; (rad);	$q = \int i dt$	coulomb (C)
\dot{x}	m/sec	$\dot{\theta}, \dot{\varphi}$	1/sec	i	ampère (A)
c	kg/cm	$c_t = c$	kgm	$1/C; C = Q/U$	farad (F)
b	kg sec/m	b	kgm sec	R	ohm (Ω)
2δ	1/sec	2δ	1/sec	R/L	(14)
$K = m\dot{x}$	kg sec	$L = J\dot{\theta}$	kgm sec	$\Phi = Li$	weber (Wb)
$F(t)$	kg	$\mathfrak{M}(t)$	kgm	E, U	volt (V)
$Z = c - m\Omega^2$	kg/m	$c - J\Omega^2$	kgm	$\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$	ohm (Ω)
$Z = \sqrt{b^2\Omega^2 + (c - m\Omega^2)^2}$	kg/m	$\sqrt{b^2\Omega^2 + (c - J\Omega^2)^2}$	kgm	$\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$	

Поступајући као и у чл. 4.2. добијамо помоћу обрасца (35), модул механичке импеданце

$$|Z(i\Omega)| = \sqrt{b^2 + \left(m\Omega - \frac{c}{\Omega}\right)^2}. \quad (16)$$

На сл. 5.4. приказано је неколико електричних модела за механичке осцилације.



Сл. 5.4. — Електрични модели за механичке осцилације

Аналогије се могу проширити и на системе са више степени слободе осциловања. Тада је важно да сваком степену слободе осциловања одговара по једно затворено електрично коло како ће се доцније видети.

ОСЦИЛАЦИЈЕ СИСТЕМА СА ВИШЕ СТЕПЕНИ СЛОБОДЕ

Механичким системом материјалних тачака назива се скуп материјалних тачака, код кога је кретање сваке тачке зависно од положаја и кретања осталих тачака. Ако свака тачка система може за време кретања да узима произвољан положај и да има произвољну брзину систем се назива слободан; у противном случају није слободан. Положај сваке тачке у простору одређујемо помоћу координата x_i , те на тај начин за систем од N тачака треба $3N$ координата. Под бројем степени слободе система подразумева се број међусобно независних скаларних величина (координата) потребних за одређивање положаја материјалног система.

Услови који ограничавају слободу кретања тачака система називају се везама и аналитички се изражавају помоћу једначина или неједначина. Ове једначине дају везу између координата и брзина тачака система. У случају да се веза мења у току времена онда једначине веза зависе експлицитно од времена. Везе које не зависе експлицитно од времена називају се склерономне или стационарне везе, а ако зависе онда су реономне или нестационарне. И једне и друге могу бити или двосране (задржавајуће) или једносране (незадржавајуће). У првом се случају изражавају једначинама а у другом неједначинама.

Ако ограничењу подлеже само положаји тачака, тј. ако једначина везе даје само однос између координата тачака, везе се зову коначне или геометријске. Међутим, ако ограничењу подлеже и брзине тачака система, онда једначине веза успостављају односе између координата и брзина те се везе зову диференцијалне или кинематичке. У практичним проблемима се често јављају кинематичке везе које линеарно зависе од брзина. Ове диференцијалне везе могу бити и интегралне, те после интегралења постају коначне, па се могу

убројати у групу коначних веза. Према Херцу везе се деле на холономне и нехолономне. У прве везе спадају коначне и диференцијалне интегралбилне везе, у друге, пак, диференцијалне неинтегралбилне везе. Системи са првим везама називају се холономни системи, а са другим нехолономни системи.

Када на систем дејствују конзервативне силе онда су системи конзервативни, у противном су случају неконзервативни.

Ако се систем састоји из N материјалних тачака m_j , $j=1, 2, \dots, N$, са H холономних веза $f_h(x_i, t)=0$, где је $h=1, 2, \dots, H$, онда је за одређивање положаја система потребно $3N-H=p$ независних координата, те систем има p сљедећи слободе кретања. Ове координате називају се генерализане координате система (q_i) и међусобно су пошћуно независне. Између општих Декартових* и ових криволинијских координата постоје односи

$$x_\nu = f_\nu(q_i, t), \quad \nu = 1, 2, \dots, 3N. \quad (a)$$

Кинетичка енергија система биће

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=N} m_j v_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \dot{x}_\nu^2. \quad (b)$$

Пошто је

$$\dot{x}_\nu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_\nu}{\partial t}, \quad \nu = 1, \dots, 3N$$

то уношењем у једначину (b) добијамо да је кинетичка енергија

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_\nu}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_i^n \sum_k^n \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k + \\ + \sum_i^n \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \frac{\partial x_\nu}{\partial t} \dot{q}_i + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial t} \right)^2 \quad (c)$$

односно

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k A_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k + \sum_i B_i \dot{q}_i + \frac{1}{2} C, \quad (d)$$

где су уведене смене

$$A_{ik} = \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_k}, \quad B_i = \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \frac{\partial x_\nu}{\partial t}, \quad C = \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial t} \right)^2 \quad (e)$$

при чему су коефицијенти A_{ik} , B_i и C , уопште узев, функције генерализаних координата q_i и времена t .

* $x_j = x_\nu$; $y_j = x_{\nu+1}$; $z_j = x_{\nu+2}$; $m_j = m_\nu = m_{\nu+1} = m_{\nu+2}$.

6. МАЛЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ ХОЛОНОМНОГ КОНЗЕРВАТИВНОГ СИСТЕМА

6.1. Диференцијалне једначине система. — Нека материјални систем има n степени слободе кретања и нека су q_1, q_2, \dots, q_n независне генерализане координате помоћу којих одређујемо положај система. Претпоставимо да су коначне везе *стационарне*, тј. да не зависе експлицитно од времена, а да су диференцијалне везе *хомогене*, јер је само тада могућ положај стабилне равнотеже система чије мале осцилације око тога положаја испитујемо, онда је систем *холономан*, па су коефицијенти $B_i = 0, C = 0$, те се кинетичка енергија овог система може написати у облику

$$E_k = 1/2 \sum_i^n \sum_k^n A_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \quad (1)$$

где су коефицијенти $A_{ik} = A_{ki}$ функције генерализаних координата.

Пошто посматрамо мале осцилације система око положаја стабилне равнотеже можемо генерализане координате изабрати тако да су у томе положају све једнаке нули, $q_{i0} = 0$. Разложимо ли коефицијенте A_{ik} у Меклоренов ред у околини положаја стабилне равнотеже, биће

$$A_{ik} = (A_{ik})_0 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial q_i} \right)_0 q_i + \dots$$

Због *малих осцилација* можемо се зауставити само на првом члану горњег реда, па је

$$A_{ik} = (A_{ik})_0 = a_{ik} = \text{const}, \quad (2)$$

те је кинетичка енергија система

$$E_k = 1/2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \quad (3)$$

квадратна форма генералисаних брзина са константним коефицијентима a_{ik} који испуњавају услов симетричности

$$a_{ik} = a_{ki}. \quad (3a)$$

Они се називају инерциони коефицијенти система за дате координате q_i .

Према (3) кинетичка енергија биће

$$\begin{aligned} E_k = 1/2 [(a_{11} \dot{q}_1^2 + a_{22} \dot{q}_2^2 + \dots + a_{nn} \dot{q}_n^2) + \\ + 2(a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{13} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \dots + a_{1n} \dot{q}_1 \dot{q}_n) + \\ + 2(a_{23} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + a_{24} \dot{q}_2 \dot{q}_4 + \dots + a_{2n} \dot{q}_2 \dot{q}_n) + \dots]. \end{aligned} \quad (3b)$$

Ако је систем конзервативан онда силе имају функцију сила $U(q_i)$, или потенцијал $E_p(q_i)$, која зависи од генералисаних координата. Услов равнотеже система материјалних тачака јесте да је прва варијација потенцијалне енергије једнака нули, $\delta E_p = 0$, што значи да потенцијална енергија система у положају равнотеже има стационарно значење (*maximum*, *minimum*, *minimax*). Како је прва варијација

$$\delta E_p = \sum_i^n \frac{\partial E_p}{\partial q_i} \delta q_i = 0, \quad (4)$$

то, пошто $\delta q_i \neq 0$, мора бити извод потенцијалне енергије по генералисаној координати једнак нули, тј. мора генералисана сила бити једнака нули

$$Q_i = \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = 0. \quad (5)$$

Како је потенцијална енергија функција генералисаних координата можемо је у близини положаја равнотеже развити у Меклоров ред

$$E_p = (E_p)_0 + \sum_i \left(\frac{\partial E_p}{\partial q_i} \right)_0 q_i + 1/2 \sum_i \sum_k \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0 q_i q_k + \dots$$

Пошто се енергија система одређује са тачношћу до адитивне константе можемо узети да је $(E_p)_0 = 0$. Због положаја стабилне равнотеже и први збир на десној страни је једнак нули, а како проучавамо мале осцилације система око тог положаја, можемо занемарити чланове вишег реда, јер су координате и брзине у области

стабилне равнотеже мале величине. Према томе се и потенцијална енергија може написати у облику *квaдрaтнe фoрмe генерaлисaних коoрдинaтa*

$$E_p = 1/2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ik} q_i q_k, \quad (6)$$

где су коефицијенти c_{ik} константе особине симетричности

$$c_{ik} = c_{ki} = \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0 = \text{const.} \quad (6a)$$

Ови се коефицијенти називају *коэффициенти усложњавања или квази-еластични коэффициенти*.

Према (6), дакле, потенцијална енергија биће

$$E_p = 1/2 [(c_{11} q_1^2 + c_{22} q_2^2 + \dots + c_{nn} q_n^2) + 2(c_{12} q_1 q_2 + c_{13} q_1 q_3 + \dots)]. \quad (6b)$$

Како кинетичка енергија тада није функција генералисаних координата q_i то су изводи

$$\frac{\partial E_k}{\partial q_i} = 0; \quad \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^n a_{ik} q_k,$$

па су генералисани импулси *хамогене линеарне фoрмe генерaлисaних брзина*. Чланови $a_{ik} q_k$ показују утицај генералисане брзине q_k на i -ту координату генералисаног импулса. Сем тога су изводи генералисаних импулса по времену линеарне фoрмe генерaлисaних убрзања.

Генералисане силе су

$$Q_i = - \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = - \sum_{k=1}^n c_{ik} q_k,$$

те чланови $c_{ik} q_k$ показују утицај промене (отклона) координате q_k на генералисану силу за i -ту координату.

Пошто кинетичка енергија не зависи од генералисаних координата Лагранжеве једначине имају облик

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = 0; \quad i = 1, \dots, n, \quad (7)$$

па дају систем диференцијалних једначина другог реда

$$\begin{array}{c} \rightarrow k \\ \downarrow i \end{array} \quad \boxed{\sum_{k=1}^n (a_{ik} \ddot{q}_k + c_{ik} q_k) = 0,} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n, \\ k = 1, 2, \dots, n, \end{array} \quad (8)$$

односно

$$\begin{array}{l} a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + \dots + a_{1n} \ddot{q}_n + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 + \dots + c_{1n} q_n = 0, \\ a_{21} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + \dots + a_{2n} \ddot{q}_n + c_{21} q_1 + c_{22} q_2 + \dots + c_{2n} q_n = 0, \\ \dots \\ a_{n1} \ddot{q}_1 + a_{n2} \ddot{q}_2 + \dots + a_{nn} \ddot{q}_n + c_{n1} q_1 + c_{n2} q_2 + \dots + c_{nn} q_n = 0, \end{array} \quad (8a)$$

са константним коефицијентима

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad c_{ik} = c_{ki}.$$

Чланови у којима постоје коефицијенти a_{ik} , $i \neq k$, називају се чланови динамичких веза, а чланови у којима постоје коефицијенти c_{ik} , $i \neq k$, јесу чланови статичких веза. Због тога и осцилације холомног конзервативног система можемо поделити у две групе.

1) Ако су коефицијенти $a_{ik} = 0$ за $i \neq k$ једначине (8) постају

$$\begin{array}{c} \rightarrow k \\ \downarrow i \end{array} \quad \boxed{a_i \ddot{q}_i + \sum_k c_{ik} q_k = 0,} \quad (9)$$

где су $a_{ii} = a_i$ и $\ddot{q}_{ii} = \ddot{q}_i$. Ове осцилације су са статичким везама и представљају осцилације сирегнуће силама (на пример, линеарне и торзијске осцилације).

2) Ако су коефицијенти $c_{ik} = 0$ за $i \neq k$, онда једначине (8) постају

$$\begin{array}{c} \rightarrow k \\ \downarrow i \end{array} \quad \boxed{c_i q_i + \sum_k a_{ik} \ddot{q}_k = 0,} \quad (10)$$

где су $c_{ii} = c_i$ и $q_{ii} = q_i$. Ове осцилације су са динамичким везама и представљају осцилације сирегнуће убрзањима (на пример, попречне осцилације лаких греда са концентрисаним масама).

За $n=1$ биће диференцијална једначина

$$a_{11} \ddot{q}_1 + c_{11} q_1 = 0.$$

За случај хармонијског осцилатора, (чл. 1. 2, обр. 15 а), коефицијенти су $a_{11}=m$, $c_{11}=c$, па је $\omega^2=c_{11}/a_{11}$. Код математичког клатна, (чл. 2. 1, обр. 1), су $a_{11}=ml^2$, $c_{11}=mgl$. Док у првом случају инерциони коефицијент представља масу, у другом представља момент инерције масе. Квазиеластични коефицијент је у првом случају крутост опруге, а у другом је момент силе.

За $n=2$ биће једначине

$$a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 = 0, \quad a_{21} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + c_{21} q_1 + c_{22} q_2 = 0.$$

За случај двоугобог математичког клатна, (чл. 8. 3, обр. 19), биће коефицијенти:

$$a_{11} = (m_1 + m_2) l_1^2, \quad a_{12} = a_{21} = m_2 l_1 l_2, \quad a_{22} = m_2 l_2^2,$$

$$c_{11} = (m_1 + m_2) gl_1, \quad c_{12} = c_{21} = 0, \quad c_{22} = m_2 gl_2.$$

Инерциони коефицијенти a_{ik} представљају моменте инерције, а коефицијенти c_{ik} моменте сила. Генералисани импулси

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} = a_{11} \dot{q}_1 + a_{12} \dot{q}_2 = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2,$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} = a_{12} \dot{q}_1 + a_{22} \dot{q}_2 = m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2$$

представљају замахе, а генералисане силе моменте сила

$$Q_1 = -(c_{11} q_1 + c_{12} q_2) = -(m_1 + m_2) gl_1, \quad Q_2 = -(c_{12} q_1 + c_{22} q_2) = -m_2 gl_2.$$

6.2. Особине инерционих и квазиеластичних коефицијената. — За коефицијенте a_{ik} и c_{ik} извели смо да су константе и да су симетрични. Али, како су кинетичка и потенцијална енергија квадратне форме генералисаних брзина и координата, то они имају још неке особине, пошто се испитују мале осцилације система око положаја стабилне равнотеже. Ради лакшег проучавања претпоставимо систем са два степена слободе, тада су енергије:

$$2E_k = \Phi_1(\dot{q}_1, \dot{q}_2) = a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2,$$

$$2E_p = \Phi_2(q_1, q_2) = c_{11} q_1^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + c_{22} q_2^2, \quad (11)$$

те су квадратне бинерне форме променљивих \dot{q}_1 и \dot{q}_2 , односно q_1 и q_2 . Сасвим уопште бинерна квадратна форма променљивих x_1 и x_2 може

се написати у облику

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2) &= a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 = (a_{11} x_1 + a_{12} x_2) x_1 + \\ &+ (a_{21} x_1 + a_{22} x_2) x_2 = L_1 x_1 + L_2 x_2, \end{aligned} \quad (12)$$

где су $L_1(x_1, x_2)$ и $L_2(x_1, x_2)$ линеарне бинерне форме истих променљивих.

Детерминанта коефицијената квадратне бинерне форме

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2, \quad (13)$$

која је уствари детерминанта система хомогених једначина првог реда добијених помоћу израза $1/2 (\partial \Phi / \partial x_i) = 0$, назива се дискриминантна форма. Према знаку ове дискриминанте разликујемо три врсте форми.

1) Када је $\Delta > 0$, тада су $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$ и истог су знака. Формирајмо производ

$$\begin{aligned} a_{11} \Phi &= a_{11}^2 x_1^2 + 2 a_{11} a_{12} x_1 x_2 + a_{11} a_{22} x_2^2 = \\ &= (a_{11} x_1 + a_{12} x_2)^2 + (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) x_2^2 \end{aligned}$$

онда је форма

$$\Phi = \frac{1}{a_{11}} [L_1^2 + \Delta x_2^2].$$

Како је $\Delta > 0$ то је форма једнака нули када су $x_1 = x_2 = 0$, или је пак различита од нуле и има знак коефицијента a_{11} (или a_{22} , пошто су истог знака). Оваква форма $\Phi \neq 0$ назива се дефинишна и то позитивно дефинишна ако је $\Phi > 0$ и негативно дефинишна ако је $\Phi < 0$.

Да би, дакле, бинерна квадратна форма била позитивно дефинишна морају бити испуњени услови

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad \Delta = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0. \quad (14)$$

2) Када је $\Delta < 0$, тада је $a_{11} \Phi > 0$ за $x_2 = 0$, а за $L_1 = 0$ је $a_{11} \Phi < 0$. Према томе форма може бити и позитивна и негативна и једнака нули и назива се индефинишна форма.

3) Ако је $\Delta = 0$ онда је за $a_{11} \neq 0$ и $\Phi \neq 0$ и истог је знака као и коефицијент a_{11} ; $\Phi = 0$ је само онда када је $L_1 = 0$. У овоме случају форма не мења знак а може бити једнака нули ако истовремено нису и $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$. Оваква се форма назива семидефинишна.

На исти се начин разврставају и квадратне форме од више променљивих x_i , $i=1, 2, \dots, n$. Форма је дефинитна ако је увек истог знака и једнака нули само за све $x_i=0$. При $\Phi > 0$ она је позитивно дефинитна; када је $\Phi < 0$ тада је негативно дефинитна. Форма је индефинитна ако може бити и позитивна и негативна а семидефинитна ако не мења знак а може бити једнака нули и онда ако сви x_i нису једнаки нули.

Пошто је кинетичка енергија увек квадратна позитивна дефинитна форма генералисаних брзина што морају инерциони коефицијенти задовољавати услове (14).

На пример, форма

$$\Phi = 2E_k = 2\dot{q}_1^2 + 4\dot{q}_1\dot{q}_2 + 3\dot{q}_2^2$$

може да представља кинетичку енергију неког система са два степена слободе кретања, јер су услови (14) задовољени. Међутим, форма

$$\Phi = \dot{q}_1^2 + 4\dot{q}_1\dot{q}_2 + 3\dot{q}_2^2 \neq 2E_k$$

не може да представља кинетичку енергију у реалном подручју, јер није задовољен услов $\Delta > 0$.

Док је кинетичка енергија увек дефинитна и позитивна квадратна форма генералисаних брзина, тј. при произвољним \dot{q}_i остаје увек позитивна, дотле је, уопште узев, E_p недефинитна квадратна форма генералисаних координата q_i . Према томе од знака ове функције зависи и карактер малих кретања око равнотежног положаја као и сам карактер равнотеже. При овоме разликујемо три случаја.

1) Ако је у области равнотеже система $E_p < 0$ онда потенцијална функција има максимум а функција силе минимум, те је положај равнотеже нестабилан, па се систем после добијених малих импулса неће вратити у свој равнотежни положај, те ће кретања бити апериодичка.

2) Ако је у области равнотеже система $E_p > 0$ онда потенцијална енергија има минимум а функција силе максимум, те је положај равнотеже стабилан и мала кретања око овог положаја су осцилаторног карактера.

3) Може се десити да је потенцијална енергија у положају равнотеже и позитивна и негативна, па нема ни максимум ни минимум (minimax), те је положај равнотеже индиферентан.

У случају малих осцилација око положаја стабилне равнотеже мора пошеницијална енергија имати минимум, ше је позитивно дефинишна квадратна форма генерализаних координата q . Због тога, на пример у случају система са два степена слободe морају бити задовољени услови

$$c_{11} > 0, \quad c_{22} > 0, \quad \Delta = c_{11} c_{22} - c_{12}^2 > 0. \quad (15)$$

6.3. Фреквентна једначина. — Решења система диференцијалних једначина другог реда са константним коефицијентима (8 а) тражићемо у облику

$$q_k = A_k \cos(\omega t + \alpha), \quad (16a)$$

односно

$$q_k = A_k e^{i\omega t} \quad (16b)$$

претпостављајући да све масе врше хармонијска кретања, око положаја стабилне равнотеже, исте кружне фреквенције и фазе али различитих амплитуда.

Уношењем овог решења у систем (8) исти се своди на систем алгебарских хомогених једначина облика

$$\sum_k (c_{ik} - a_{ik} \omega^2) A_k = 0, \quad i, k = 1, 2, \dots, n, \quad (17)$$

односно

$$(c_{11} - a_{11} \omega^2) A_1 + (c_{12} - a_{12} \omega^2) A_2 + \dots + (c_{1n} - a_{1n} \omega^2) A_n = 0; \quad (17a)$$

$$(c_{21} - a_{21} \omega^2) A_1 + (c_{22} - a_{22} \omega^2) A_2 + \dots + (c_{2n} - a_{2n} \omega^2) A_n = 0;$$

$$\dots$$

$$(c_{n1} - a_{n1} \omega^2) A_1 + (c_{n2} - a_{n2} \omega^2) A_2 + \dots + (c_{nn} - a_{nn} \omega^2) A_n = 0.$$

Да би овај систем хомогених линеарних једначина са n непознатих A_k имао осим идентичког решења $A_k \equiv 0$ и друга стварна решења мора детерминанта система бити једнака нули

$$\Delta_n(\omega^2) = \| c_{ik} - a_{ik} \omega^2 \| = 0, \quad (18)$$

или у развијеном облику

$$\Delta_n(\omega^2) = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}\omega^2 & c_{12} - a_{12}\omega^2 & \dots & c_{1n} - a_{1n}\omega^2 \\ c_{21} - a_{21}\omega^2 & c_{22} - a_{22}\omega^2 & \dots & c_{2n} - a_{2n}\omega^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} - a_{n1}\omega^2 & c_{n2} - a_{n2}\omega^2 & \dots & c_{nn} - a_{nn}\omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (18a)$$

Ова једначина се назива фреквентна једначина, једначина фреквенција или Лагранжева детерминанта. Она је једначина n -ог степена по $\omega^2 = \lambda$. Када се развије имаће $n!$ чланова и n корена које бележимо по реду апсолутних вредности

$$\omega_1^2 < \omega_2^2 < \dots < \omega_s^2 < \dots < \omega_n^2, \text{ или } \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n. \quad (19)$$

Ови корени се називају сопствена значења (Eigenwerte, valeur propre, proper value, characteristic number) система и представљају квадраше кружних фреквенција осцилација система. Ове фреквенције ω_s су сопствене кружне фреквенције система.

На пример, ако су енергије $E_k = (2\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)/2$; $E_p = (3q_1^2 + 2q_1q_2 + q_2^2)/2$, онда је фреквентна једначина $f(\lambda = \omega^2) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, са коренима $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$.

Корени $\omega^2 = \lambda$ фреквентне једначине (18a) имају ове особине.

- 1) Сви су корени реални и има их онолико кога је реда једначина.
- 2) Ако је пошвенцијална енергија система позитивна дефинитна форма генералисаних координата q_i , онда су сви корени позитивни.
- 3) Корени су стационарне вредности форме $\Phi_2 = \sum \sum c_{ik} A_i A_k$ када је испуњен услов да је форма $\Phi_1 = \sum \sum a_{ik} A_i A_k = 1$. Ове се форме добијају када генералисане брзине, односно координате, у изразима за кинетичку и пошвенцијалну енергију сменимо амплитудама A_i и A_k решења (16).

Доказ изводимо на овај начин. Означимо сопствену вредност детерминанте (18a) са $\omega^2 = \lambda$ и претпоставимо да је λ имагинарно, тада мора бити

$$\lambda = \lambda' + i\lambda'', \quad i = \sqrt{-1},$$

где су λ' и λ'' реални бројеви. Због тога и амплитуде A_k морају такође бити имагинарне, па је

$$A_k = A'_k + iA''_k,$$

где су A'_k и A''_k реални бројеви. Унесемо ли ове вредности у решење (17) биће

$$\sum_k [c_{ik} - a_{ik}(\lambda' + i\lambda'')] [A'_k + iA''_k] = 0.$$

Раздвајањем реалних и имагинарних делова добијамо два система једначина за сваку вредност k :

$$\sum_k (c_{ik} - a_{ik}\lambda') A'_k + \lambda'' \sum_k a_{ik} A''_k = 0,$$

$$\sum_k (c_{ik} - a_{ik}\lambda') A''_k - \lambda'' \sum_k a_{ik} A'_k = 0.$$

Ако прву једначину помножимо са A''_i а другу са $-A'_i$ и резултате саберемо за све вредности i добијамо, због (3a) и (6a), једначину

$$\lambda'' \sum_i \sum_k a_{ik} (A''_i A''_k + A'_i A'_k) = 0. \quad (20)$$

Пошто су двоструки збирови позитивни, јер представљају квадратне позитивне дефинитне форме кинетичке енергије у којима су генерисане брзине замењене вредностима A'_i , A'_k , односно A''_i , A''_k , то горња једначина може бити задовољена само ако је

$$\lambda'' = 0, \quad (20a)$$

чиме се потврђује реалан карактер свих корена фреквентне једначине, а такође и реалност коефицијената A_k .

Помножимо ли једначину (11) са A_i и саберемо за цео систем добијамо услов

$$\sum_i \sum_k (c_{ik} A_i A_k) - \lambda \sum_i \sum_k a_{ik} A_i A_k = 0. \quad (20b)$$

Пошто су оба збира ове једначине позитивна мора бити и $\lambda > 0$, те су сви корени *позитивни*.

Ради доказа треће особине корена фреквентне једначине применимо Лагранжеву методу мултипликатора. Узмимо функцију

$$\Phi = \Phi_2 - \lambda \Phi_1 = \sum_i \sum_k (c_{ik} - \lambda a_{ik}) A_i A_k,$$

под условом да је задовољен услов стационарности, тада је

$$\frac{\partial \Phi}{\partial A_i} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial A_i} - \lambda \frac{\partial \Phi_1}{\partial A_i} = 0$$

те добијамо

$$\sum_k (c_{ik} A_k) - \lambda \sum_k a_{ik} A_k = 0. \quad (21)$$

Упоређујући ову једначину са (17) видимо да мора бити множилац $\lambda = \omega^2$, тј. једнак квадрату сопствене кружне фреквенције система. Помножимо једначину (21) са A_i и саберимо за све вредности i биће

$$\sum_i \sum_k (c_{ik} A_i A_k) - \lambda \sum_i \sum_k a_{ik} A_i A_k = 0,$$

те је према постављеном трећем услову, (3), сопствена вредност

$$\lambda = \frac{\sum_i \sum_k c_{ik} A_i A_k}{\sum_i \sum_k a_{ik} A_i A_k} \quad (22)$$

заиста стационарна вредност форме Φ_2 када је форма $\Phi_1 = 1$.

Као што је познато из теорије хомогених линеарних алгебарских једначина са n непознатих њихова решења, различита од идентичких нису потпуно одређена већ су одређени њихови односи. Та су решења сразмерна кофакторима једне врсте (ма које) у детерминанти система (18). Узмемо ли кофакторе последње врсте (n) онда ће бити

$$\frac{A_1}{K_{n1}} = \frac{A_2}{K_{n2}} = \dots = \frac{A_k}{K_{nk}} = \dots = \frac{A_n}{K_{nn}} = C, \quad (23)$$

где је C константа. Ако су кофактори последње врсте K_{nk} једнаки нули онда треба бирати ону врсту чији су кофактори различити од нуле. Ако би, пак, кофактори свих врста били једнаки нули онда су једначине система међусобно зависне, па се систем своди на једну једначину са безброј решења различитих од нуле.

Како фреквентна једначина (18 а) има n различитих корена $\omega_s^2 = \lambda_s$, где је $s = 1, 2, \dots, n$, то за сваки корен добијамо однос

$$\frac{A_1^{(s)}}{K_{n1}^{(s)}} = \frac{A_2^{(s)}}{K_{n2}^{(s)}} = \dots = \frac{A_k^{(s)}}{K_{nk}^{(s)}} = \dots = \frac{A_n^{(s)}}{K_{nn}^{(s)}} = C_s, \quad (23a)$$

па је амплитуда координате q_k за ту вредност корена

$$A_k^{(s)} = C_s K_{nk}^{(s)} (\omega_s^2) = C_s K_{nk}^{(s)} (\lambda_s), \quad (24)$$

и партикуларно решење, према (16a),

$$q_k^{(s)} = A_k^{(s)} \cos(\omega_s t + \alpha_s) = C_s K_{nk}^{(s)} \cos(\omega_s t + \alpha_s), \quad (25)$$

где је α_s почетна фаза осцилације. Ако је $\omega_s^2 = \omega_1^2$ најнижи корен фреквентне једначине (18a) онда су решења

$$\begin{aligned} q_1^{(1)} &= C_1 K_{n1}^{(1)} \cos(\omega_1 t + \alpha_1), & q_2^{(1)} &= C_1 K_{n2}^{(1)} \cos(\omega_1 t + \alpha_1), \\ &\dots & & \\ q_{n-1}^{(1)} &= C_1 K_{n,n-1}^{(1)} \cos(\omega_1 t + \alpha_1), & q_n^{(1)} &= C_1 K_{nn}^{(1)} \cos(\omega_1 t + \alpha_1). \end{aligned} \quad (25a)$$

Ове једначине представљају главне (основне) осцилације или основне облике (форме) осцилација система и то, због најнижег корена $\omega_1^2 = \lambda_1$, прве главне осцилације или основне хармонике. У овоме се случају, дакле, све координате q_i мењају истом кружном фреквенцијом ω_1 и почетном фазом α_1 , или се разликује за π , с обзиром да је вредност кофактора праћена знаком $(-1)^{n+k}$ уз одговарајућу субдетерминанту n -те врсте и k -те колоне детерминанте (18).

Према томе би други главни облик осцилација система био

$$q_1^{(2)} = A_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \alpha_2), \quad q_2^{(2)} = A_2^{(2)} \cos(\omega_2 t + \alpha_2), \quad \dots \quad (25b)$$

Решења (25) чине основни систем интеграла једначина (18a). Како је према познатом правилу из теорије система хомогених линеарних диференцијалних једначина са константним коефицијентима и збир решења шакође решење диференцијалне једначине, то је општи интеграл једначине (17) облика

$$q_k = \sum_{s=1}^n q_k^{(s)} = \sum_s A_k^{(s)} \cos(\omega_s t + \alpha_s) = \sum_s C_s K_{nk}^{(s)} \cos(\omega_s t + \alpha_s). \quad (26)$$

Овај интеграл садржи $2n$ произвољних константи A_k , или C_s и α_s , које се одређују из $2n$ почетних услова кретања, да су за $t=0$ почетне вредности генералисаних координата $(q_k)_0$ и генералисаних брзина $(\dot{q}_k)_0$ дате.

Ако је решење претпостављено у облику (16b) онда је

$$q_k^{(s)} = A_k^{(s)} e^{\omega_s t} + \bar{A}_k^{(s)} e^{-i\omega_s t}, \quad (27)$$

јер ω_s^2 има две вредности. Уводећи смене

$$A_k^{(s)} = 1/2 R_k^{(s)} e^{i\omega_s t}, \quad \bar{A}_k^{(s)} = 1/2 R_k^{(s)} e^{-i\omega_s t},$$

и користећи Ојлерове формуле добијамо решење

$$q_k^{(s)} = R_k^{(s)} \cos(\omega_s t + \alpha_s). \quad (28)$$

На пример, за енергије

$$E_k = (2 \dot{q}_1^2 + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)/2; \quad E_p = (3 q_1^2 + 2 q_1 q_2 + q_2^2)/2$$

биће систем једначина

$$2 \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + 3 q_1 + q_2 = 0; \quad \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + q_1 + q_2 = 0;$$

односно

$$(3 - 2\lambda) A_1 + (1 - \lambda) A_2 = 0; \quad (1 - \lambda) A_1 + (1 - \lambda) A_2 = 0.$$

Фреквентна једначина, корени и односи амплитуда су

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-2\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) = 0; \quad \lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 2;$$

$$\frac{A_1^{(s)}}{-(1-\lambda_s)} = \frac{A_2^{(s)}}{3-2\lambda_s}; \quad \frac{A_1^{(1)}}{0} = \frac{A_2^{(1)}}{1}; \quad \frac{A_1^{(2)}}{1} = \frac{A_2^{(2)}}{-1}.$$

6.4. Ортогоналност главних осцилација. — Нека су $\omega_s^2 = \lambda_s$ и $\omega_r^2 = \lambda_r$ корени фреквентне једначине (18a), тада су једначине (17) задовољене, те добијамо две једначине

$$\sum_k c_{ik} A_k^{(s)} = \lambda_s \cdot \sum_k a_{ik} A_k^{(s)}, \quad (29)$$

$$\sum_i c_{ik} A_i^{(r)} = \lambda_r \cdot \sum_i a_{ik} A_i^{(r)},$$

где је $A_k \neq A_i$. Ако прву једначину помножимо са $A_i^{(r)}$ а другу са $A_k^{(s)}$ и саберемо за све индексе i и k добијамо два система једначина

$$\sum_i \sum_k c_{ik} A_i^{(r)} A_k^{(s)} = \lambda_s \sum_i \sum_k a_{ik} A_i^{(r)} A_k^{(s)},$$

$$\sum_k \sum_i c_{ik} A_i^{(r)} A_k^{(s)} = \lambda_r \sum_k \sum_i a_{ik} A_i^{(r)} A_k^{(s)}, \quad (29a)$$

па ако их одуземо следи веза

$$(\lambda_s - \lambda_r) \sum_i \sum_k a_{ik} A_i^{(r)} A_k^{(s)} = 0.$$

Како су корени фреквентне једначине различити $\lambda_s \neq \lambda_r$, то мора бити задовољен услов

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} A_i^{(r)} A_k^{(s)} = 0, \quad r \neq s, \quad (30)$$

за сваки пар различитих корена фреквентне једначине. Овај услов се назива услов ортогоналности главних осцилација, те се каже да су главне осцилације ортогоналне.

Како је горњи услов изведен под претпоставком да су коефицијенти $c_{ik} = c_{ki}$, који важе само у случају да је потенцијална енергија позитивна дефинитна форма генерализаних координата, то важи само за конзервативне системе, док за неконзервативне не важи. Према томе је услов ортогоналности главних осцилација конзервативних система основно својство ових осцилација и често се користи ради одређивања кружних фреквенција и у случају принудних осцилација.

Потпуно на исти начин добили бисмо и овај услов ортогоналности

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ik} A_i^{(r)} A_k^{(s)} = 0, \quad r \neq s, \quad (31)$$

С обзиром на релације (24) услов ортогоналности се може написати и у овом облику

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} K_{ni}^{(r)} K_{nk}^{(s)} = 0. \quad (32)$$

У предњем примеру биће:

$$a_{11}=2; \quad a_{12}=a_{21}=1; \quad a_{22}=1$$

па су

$$K_{21}^{(1)}=0; \quad K_{21}^{(2)}=1; \quad K_{22}^{(1)}=1; \quad K_{22}^{(2)}=-1,$$

па је према (32) испуњен услов

$$a_{11} K_{21}^{(1)} K_{21}^{(2)} + a_{12} K_{21}^{(1)} K_{22}^{(2)} + a_{21} K_{22}^{(1)} K_{21}^{(2)} + a_{22} K_{22}^{(1)} K_{22}^{(2)} = 0.$$

се помоћу ових координата само са члановима који садрже квадрате брзина ($\dot{\xi}_s$) односно координата (ξ_s), док мешовити чланови са $\xi_r \dot{\xi}_s$ или $\dot{\xi}_r \dot{\xi}_s$ отпадају.

Ако се у израз за кинетичку енергију система (3) уместо генералисаних брзина \dot{q}_i и \dot{q}_k унесу вредности (36) за вредности корена λ_r и λ_s биће

$$E_k = 1/2 \sum_i \sum_k a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = 1/2 \sum_i \sum_k a_{ik} \sum_r K_{ni}^{(r)} \dot{\xi}_r \sum_s K_{nk}^{(s)} \dot{\xi}_s.$$

Како се индекси i, k односе на кофакторе а не и на главне брзине ($\dot{\xi}$) то је кинетичка енергија система

$$E_k = 1/2 \sum_r \sum_s k_{rs} \dot{\xi}_r \dot{\xi}_s, \quad (37)$$

где су коефицијенти

$$k_{rs} = \sum_i \sum_k a_{ik} K_{ni}^{(r)} K_{nk}^{(s)}. \quad (37a)$$

На исти начин одредили бисмо и потенцијалну енергију

$$E_p = 1/2 \sum_i \sum_k c_{ik} q_i q_k = 1/2 \sum_i \sum_k c_{ik} \sum_r K_{ni}^{(r)} \xi_r \sum_s K_{nk}^{(s)} \xi_s,$$

те је

$$E_p = 1/2 \sum_r \sum_s p_{rs} \xi_r \xi_s \quad (38)$$

где су коефицијенти

$$p_{rs} = \sum_i \sum_k c_{ik} K_{ni}^{(r)} K_{nk}^{(s)}. \quad (38a)$$

С обзиром на услов ортогоналности главних осцилација конзервативног система, (31) и (32), мора бити $r=s$, па су инерциони и квази-еластични коефицијенти за главне координате

$$a_s = k_{ss} = \sum_i \sum_k a_{ik} K_{ni}^{(s)} K_{nk}^{(s)}, \quad c_s = p_{ss} = \sum_i \sum_k c_{ik} K_{ni}^{(s)} K_{nk}^{(s)}, \quad (39)$$

те су кинетичка и потенцијална енергија система

$$E_k = 1/2 \sum_{s=1}^n a_s \dot{\xi}_s^2, \quad E_p = 1/2 \sum_{s=1}^n c_s \xi_s^2. \quad (40)$$

Лагранжеве једначине дају тада систем једначина

$$a_s \ddot{\xi}_s + c_s \xi_s = 0 \quad (41)$$

те је кружна фреквенција

$$\omega_s = \sqrt{c_s/a_s}. \quad (41a)$$

На пример, за $n=2$, према (36) и (39), биће:

$$q_1 = K_{21}^{(1)} \xi_1 + K_{21}^{(2)} \xi_2, \quad q_2 = K_{22}^{(1)} \xi_1 + K_{22}^{(2)} \xi_2, \quad (36b)$$

$$a_1 = a_{11} [K_{21}^{(1)}]^2 + 2 a_{12} K_{21}^{(1)} K_{22}^{(1)} + a_{22} [K_{22}^{(1)}]^2;$$

$$a_2 = a_{11} [K_{21}^{(2)}]^2 + 2 a_{12} K_{21}^{(2)} K_{22}^{(2)} + a_{22} [K_{22}^{(2)}]^2;$$

$$c_1 = c_{11} [K_{21}^{(1)}]^2 + 2 c_{12} K_{21}^{(1)} K_{22}^{(1)} + c_{22} [K_{22}^{(1)}]^2 \quad (39a)$$

$$c_2 = c_{11} [K_{21}^{(2)}]^2 + 2 c_{12} K_{21}^{(2)} K_{22}^{(2)} + c_{22} [K_{22}^{(2)}]^2.$$

Треба приликом конкретног рачунања имаћи у виду да не треба скраћиваши чиниоце појединих врста или колона детерминанте (18).

Ако се уместо главних координата ξ_s уведу нове координате

$$\zeta_s = \sqrt{a_s} \xi_s \quad (42)$$

онда су кинетичка и потенцијална енергија система

$$E_k = 1/2 \sum_{s=1}^n \dot{\zeta}_s^2; \quad E_p = 1/2 \sum_{s=1}^n (c_s/a_s) \zeta_s^2 = 1/2 \sum_{s=1}^n \omega_s^2 \zeta_s^2, \quad (43a)$$

па Лагранжеве једначине дају систем једначина

$$\ddot{\zeta}_s + \omega_s^2 \zeta_s = 0. \quad (43b)$$

Ове координате ζ_s називају се *нормалне координате*.

Проблем одређивања главних координата своди се на геометријски проблем одређивања главних праваца линија и површина у n -мерном еуклидском простору, представљеном квадратним n -мерним формама генерализованих брзина, односно координата, („*Hauptachsenproblem*“). Због тога се за случај $n=2$ проблем своди на одређивање главних праваца *елипсе*, јер хомогене форме — кинетичка и потенцијална енергија — представљају елипсе, будући да су позитивно дефинитне форме.

Сматрамо ли генералисане брзине \dot{q}_1 и \dot{q}_2 Декартовим правоуглим координатама у равни тада форма

$$\Phi(\dot{q}_1, \dot{q}_2) = 2E_k = a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2$$

представља у томе систему елипсу са средиштем у координатном почетку. Ротацијом координатног система за угао θ ,

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}, \quad (44)$$

добивамо главне правце — осе — елипсе и једначину елипсе у каноничном облику

$$M\xi_1^2 + N\xi_2^2 + (J_3/J_2) = 0,$$

где су

$$M + N = J_1, \quad MN = J_2,$$

и детерминанте

$$J_1 = a_{11} + a_{22}; \quad J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta; \quad J_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -2E_k \end{vmatrix};$$

$$J_3 = -2E_k \Delta$$

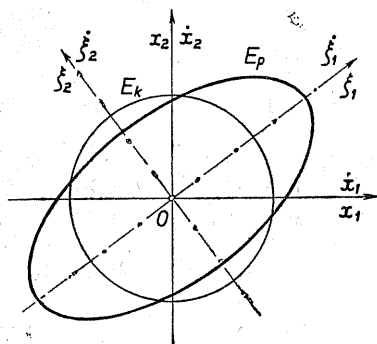
те је каноничка једначина елипсе

$$M\xi_1^2 + N\xi_2^2 - 2E_k = 0. \quad (45)$$

У случају $n=3$ проблем се своди на одређивање главних праваца елипсоида.

На пример, када су енергије

$$E_k = m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)/2; \quad E_p = c(3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2)/2$$



Сл. 6.1. — Главне координате система

онда првој одговара круг, полупречника $R = \sqrt{2E_k/m}$, а другој елипса. Ротацијом триедра Ox_1x_2 за угао θ (сл. 6.1.)

$$\operatorname{tg} 2\theta = -4c/(3c - 3c) = \infty; \quad \theta = \pi/4;$$

добивамо везу између старих и нових координата

$$x_1 = \sqrt{2}(\xi_1 - \xi_2)/2; \quad x_2 = \sqrt{2}(\xi_1 + \xi_2)/2$$

па су

$$E_k = m(\xi_1^2 + \xi_2^2)/2; \quad E_p = c(\xi_1^2 + 5\xi_2^2)/2,$$

Лагранжеве једначине дају систем једначина

$$m\ddot{\xi}_1 + c\xi_1 = 0, \quad m\ddot{\xi}_2 + 5c\xi_2 = 0.$$

Једначине нису више симултане; свака од њих представља просту хармонијску осцилацију кружне фреквенције

$$\omega_1 = \sqrt{c/m}; \quad \omega_2 = \sqrt{5c/m}.$$

Како је фреквентна једначина

$$\Delta \left(\lambda = \frac{m \omega^2}{c} \right) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0; \quad \lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 5,$$

то су, према 36, везе између координата

$$x_1 = 2(\xi_1 + \xi_2); \quad x_2 = (2\xi_1 - 2\xi_2),$$

те су енергије

$$E_k = 4m(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2); \quad E_p = 4c(\xi_1^2 + 5\xi_2^2)$$

па опет добијамо исте једначине

$$m\ddot{\xi}_1 + c\xi_1 = 0; \quad m\ddot{\xi}_2 + 5c\xi_2 = 0,$$

односно

$$\ddot{\xi}_1 + \omega_1^2 \xi_1 = 0; \quad \ddot{\xi}_2 + \omega_2^2 \xi_2 = 0. \quad \checkmark$$

6.6. Принудне осцилације. — У случају принудних осцилација система са статичким везама диференцијална једначина (8) постаје

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} \ddot{q}_k + c_{ik} q_k) = F_i \cos(\Omega t + \alpha), \quad (46)$$

где је F_i амплитуда поремећајне силе за координату q_i . Ове једначине представљају систем нехомогених диференцијалних једначина за координате q_i . Њихово опште решење једнако је збиру општих решења хомогеног система и партикуларних решења нехомогеног система.

Међутим, ако је хомогени систем решен, то јест ако су познати сви типови слободних осцилација система са одговарајућим кружним фреквенцијама, онда се могу наћи и партикуларна решења принудних осцилација. Помоћу главних координата, (чл. 6.5.) слободан систем се разбија на поједине материјалне тачке које засебно осцилују око својих равнотежних положаја одређених координатама ξ_s . Ако би на овакве масе дејствовале и поремећајне силе, онда би се систем свео на принудне осцилације n појединих материјалних тачака; у томе случају мора између силе и амплитуде постојати однос, (гл. 4. обр. 10 b)

$$F = Cm(\omega^2 - \Omega^2). \quad (47)$$

Због тога, претпоставимо да је закон принудног кретања за главни облик (ω_s) слободних осцилација, према (26),

$$q_k^{(s)} = C_s K_{nk}^{(s)} \cos(\Omega t + \alpha), \quad (48)$$

где је Ω кружна фреквенција поремећајне силе а α померање фазе. Уносећи овај израз у (46) добијамо

$$\sum_k (c_{ik} - \Omega^2 a_{ik}) C_s K_{nk}^{(s)} = F_i.$$

Како је за хомогени систем испуњен услов (8) то поремећајна сила мора задовољавати следећи услов

$$F_i = \sum_k (\omega_s^2 - \Omega^2) a_{ik} C_s K_{nk}^{(s)}, \quad (49)$$

аналоган услову (47) за један степен слободе осциловања.

Помоћу овог израза може се решити проблем принудних осцилација развијајући F_i у ред

$$F_i = \sum_k f_s a_{ik} K_{nk}^{(s)}, \quad f_s = C_s (\omega_s^2 - \Omega^2), \quad (50)$$

па је принудно кретање одређено једначином

$$q_k = \sum_s C_s K_{nk}^{(s)} \cos(\Omega t + \alpha) = \sum_s f_s K_{nk}^{(s)} \frac{\cos(\Omega t + \alpha)}{(\omega_s^2 - \Omega^2)}. \quad (51)$$

Коефицијенти f_s се лако израчунавају користећи услов ортогоналности слободних осцилација (32). Множећи (50) са $K_{ni}^{(r)}$ и сабирајући за цео систем, остају само коефицијенти са $s=r$, па је

$$\sum_i F_i K_{in}^{(r)} = \sum_i \sum_k f_s a_{ik} K_{in}^{(r)} K_{nk}^{(s)} = \sum_i f_s a_{ik} [K_{ni}^{(s)}]^2$$

те је коефицијент

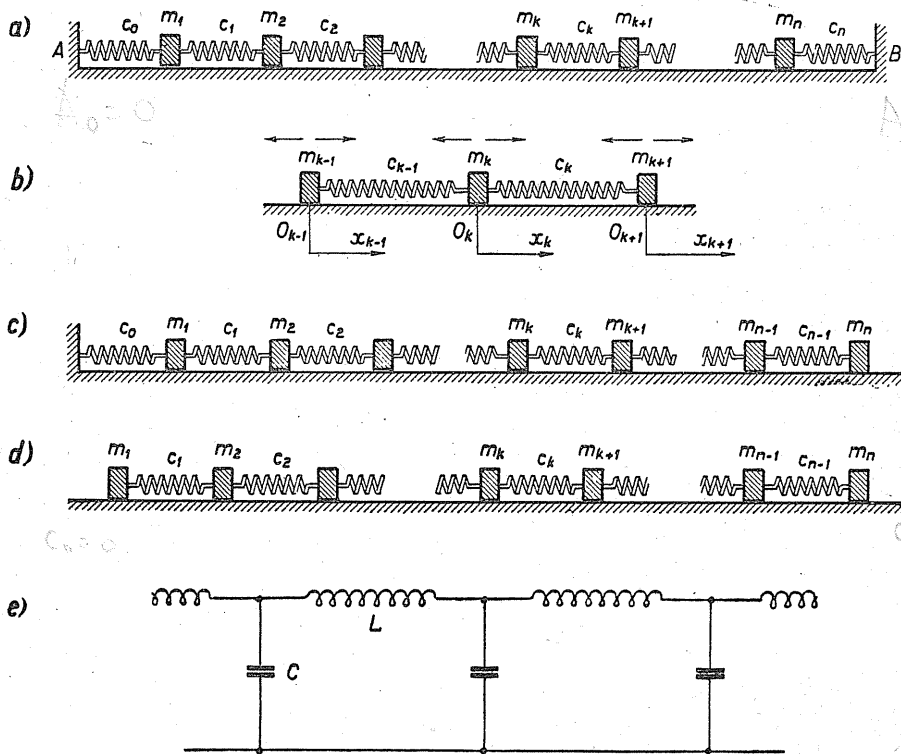
$$f_s = \frac{\sum_i F_i K_{ni}^{(r)}}{\sum_i a_{ik} [K_{ni}^{(s)}]^2}. \quad (52)$$

Ове се једначине називају формуле коефицијената разлагања силе F_i на нормалне компоненте.

44

7. ЛИНЕАРНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ СИСТЕМА СА ВИШЕ СТЕПЕНИ СЛОБОДЕ

7.1. Нехомогени ланци. — Нека се један ланац састоји из n материјалних тачака међусобно повезаних опругама различите крутости c_k , (сл. 7.1.), тако да су и прва и последња маса везане. Издвојимо



Сл. 7.1. — Нехомогени ланци, филтри

из овог нехомогеног ланца *три оближње масе са двама одговарајућим опругама* (сл. 7.1.b) и означимо са x_{k-1}, x_k и x_{k+1} њихове координате у односу на равнотежне положаје (O_{k-1}, O_k, O_{k+1}). На масу m_k

дејствују тада две релативне силе сразмерне *релативним померањима* саме масе у односу на два оближња положаја. За изабрани координатни систем (+Ox оса усмерена надесно) прва сила је *негативна* а друга *позитивна* а тежина се поништава са нормалним отпором глатке равни, па је диференцијална једначина малих осцилација масе m_k по оси Ox:

$$m_k \ddot{x}_k = -c_{k-1}(x_k - x_{k-1}) + c_k(x_{k+1} - x_k), \quad k=1, \dots, n \quad (1)$$

или

$$m_k \ddot{x}_k - c_{k-1} x_{k-1} + (c_{k-1} + c_k) x_k - c_k x_{k+1} = 0. \quad (2)$$

Према томе је систем диференцијалних једначина овог линеарног система

$$\begin{aligned} k=1; \quad m_1 \ddot{x}_1 + (c_0 + c_1) x_1 - c_1 x_2 &= 0; \quad x_0 = 0; \\ k=2; \quad m_2 \ddot{x}_2 - c_1 x_1 + (c_1 + c_2) x_2 - c_2 x_3 &= 0; \\ k=3; \quad m_3 \ddot{x}_3 - c_2 x_2 + (c_2 + c_3) x_3 - c_3 x_4 &= 0; \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ k=n-1; \quad m_{n-1} \ddot{x}_{n-1} - c_{n-2} x_{n-2} + (c_{n-2} + c_{n-1}) x_{n-1} - c_{n-1} x_n &= 0; \\ k=n; \quad m_n \ddot{x}_n - c_{n-1} x_{n-1} + (c_{n-1} + c_n) x_n &= 0; \quad x_{n+1} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

сличан систему *Клајејронових једначина шрију момената* континуалног неоптерећеног носача* уклештеног на крајевима.

Исти систем једначина добијамо и помоћу Лагранжевих једначина. У овоме су случају енергије

$$E_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k \dot{x}_k^2; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} E_p &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} c_{k-1} (x_k - x_{k-1})^2 = \\ &= \frac{1}{2} [c_0 x_1^2 + c_1 (x_2 - x_1)^2 + c_2 (x_3 - x_2)^2 + \dots + c_{n-1} (x_n - x_{n-1})^2 + c_n x_n^2]. \end{aligned} \quad (5)$$

Како су инерциони коефицијенти $a_{ii} = m_k$, $a_{ik} = 0$, $c_{ik} \neq 0$, то је систем са *статичким везама*, па су осцилације *спрегнуте* силама.

* Отпорност материјала, чл. 10.5.1

$c_n = 0$ али $c_0 \neq 0$. У првом случају (сл. 7.1.c) једначина постаје

$$\Delta(\lambda = \alpha^2) = \begin{vmatrix} c_0 + c_1 - m_1 \lambda & -c_1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 - m_2 \lambda & -c_2 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 - m_3 \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -c_{n-2} & c_{n-2} + c_{n-1} - m_n \lambda & -c_{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{n-1} & c_{n-1} - m_n \lambda & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

У другом случају када је леви крај слободан а десни везан, биће $c_0 = 0$ и $c_n \neq 0$, па је први члан детерминанте (9) облика $c_1 - m_1 \lambda$ а последњи $c_{n-1} + c_n - m_n \lambda$.

Код слободног ланца (сл. 7.1.d) је $c_0 = c_n = 0$ па детерминанта постаје

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} c_1 - m_1 \lambda & -c_1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 - m_2 \lambda & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & -c_{n-2} & c_{n-2} + c_{n-1} - m_{n-1} \lambda & -c_{n-1} \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & -c_{n-1} & c_{n-1} - m_n \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_{n-1} & m_n \\ -c_1 & c_1 + c_2 - m_2 \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & -c_{n-1} \\ 0 & 0 & \vdots & -c_{n-1} & c_{n-1} - m_n \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

када се саберу сви елементи сваке колоне. У овом случају $\lambda = 0$ није корен једначине те је фреквентни полином $n-1$ -ог степена по сопственој вредности λ . Он има $(n-1)$ корена λ који су позитивни и различити. Ово нам показује да систем губи један степен слободе осци-

ловања, па због тога мора бити нека динамичка веза. Када саберемо све једначине (3) узимајући да је $c_0 = c_n = 0$ добијамо услов $\sum m_k \ddot{x}_k = \sum \frac{d}{dt} (m_k \dot{x}_k) = 0$, па је количина кретања система константна $\sum m_k \dot{x}_k = K_x = C = \text{const}$, те се систем кретања шранслашорно као крушо шело. Због тог динамичког услова смањује се, дакле, један степен слободе осциловања система.

На пример, у случају система као на сл. 7.1.a са $c_0 = 2c$, $c_1 = c_2 = c_3 = c$, $m_1 = 2m$, $m_2 = m_3 = m$, фреквентна једначина (8) биће:

$$\Delta \left(u = \frac{m\lambda}{c} \right) = \begin{vmatrix} 3-2u & -1 & 0 \\ -1 & 2-u & -1 \\ 0 & -1 & 2-u \end{vmatrix} = 2u^3 - 11u^2 + 17u - 7 = 0. \checkmark$$

Како је $f(1) = 1 > 0$ и $f(1/2) = -1 < 0$, то је $0,5 < u < 1$. По Хорнеровој схеми биће:

u	2	-11	17	-7	Поправка
0,8		1,6	-7,52	7,58	$-\frac{0,58}{3,24} = -0,179$
	2	-9,4	9,48	0,58	
		1,6	-6,24		
0,621	2	-11	17	-7	$\frac{0,206}{5,652} = 0,036$ $u = 0,66 \checkmark$
		1,242	-6,060	6,794	
	2	-9,758	10,940	-0,206	
		1,242	-5,288		
	2	-8,516	5,652		

$$f(u): (u - 0,66) = 2u^2 - 9,68u + 10,61;$$

$$u_1 = 0,66; \quad u_2 = 1,67; \quad u_3 = 3,17. \quad 4,66$$

$$\text{Проба: } \sum u_i = \frac{11}{2} = 5,5 = 0,66 + 1,67 + 3,17; \quad u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3 = 8,488 \approx 17/2 = 8,5;$$

$$u_1 u_2 u_3 = 3,494 \approx 7/2 = 3,5.$$

За случај као на сл. 7.1.c и исте вредности маса и опруга и $c_3 = 0$ имаћемо

$$\Delta(u) = \begin{vmatrix} 3-2u & -1 & 0 \\ -1 & 2-u & -1 \\ 0 & -1 & 1-u \end{vmatrix} = 2u^3 - 9u^2 + 10u - 2 = 0; \quad u_1 = 1/4;$$

0,25	2	-9	10	-2	$\frac{0,031}{5,875} = 0,005;$
		0,50	-2,125	1,969	
	2	-8,50	7,875	-0,031	$u_1 = 0,245 \approx 0,25$
		0,50	-2		
	2	-8	5,875		

$$u_1 = 0,25; \quad u_2 = 1,42; \quad u_3 = 2,83.$$

Међутим, за случај слободног ланца (сл. 7.1.d) било би

$$\Delta(\lambda) = -\lambda \begin{vmatrix} 2m & m & m \\ -c & 2c-\lambda m & -c \\ 0 & -c & c-\lambda m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2-u & -1 \\ 0 & -1 & 1-u \end{vmatrix} = 2u^2 - 7u + 4 = 0;$$

$$u_0=0; u_1=0,72; u_2=2,78.$$

7.2. Хомогени ланци. — У случају хомогеног ланца све су масе међусобно једнаке $m_i = m$ а такође и крутости свих опруга $c_i = c$, па се фреквентне једначине упрошћавају. Уводећи нову сопствену вредност $u = m \omega^2 / c$ за три карактеристична случаја представљена на сл. 7.1. добијамо* :

Безион

$$\Delta_n^{(v)}(u) = \begin{vmatrix} 2-u & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2-u & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-u & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2-u & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2-u \end{vmatrix} = (2-u) \Delta_{n-1}^{(v)} - \Delta_{n-2}^{(v)} = 0; \quad (11)$$

$$\Delta_0 = 1$$

Матрица

$$\Delta_n^{(k)}(u) = \begin{vmatrix} 2-u & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2-u & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-u & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2-u & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1-u \end{vmatrix} = (1-u) \Delta_{n-1}^{(v)} - \Delta_{n-2}^{(v)} = 0; \quad (12)$$

Кабел

$$\Delta_n^{(s)}(u) = \begin{vmatrix} 1-u & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2-u & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-u & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 2-u & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1-u \end{vmatrix} =$$

$$= -u \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-u & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-u & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 2-u & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1-u \end{vmatrix} = \Delta_{n-1}^{(v)}(u), \quad (13)$$

* Т блица 8.1.

где су ознаке: v за *обосшрано везани ланац*, k за *једнострано лево везани ланац* (конзолни ланац) и s за *слободни ланац*. Показани су и рекурзивни обрасци, тако да се детерминанте не морају ни развијати, већ се све могу одредити помоћу полинома за основни случај — *обосшрано везаног ланца* (v).

На пример, за $n=3$ биће

$$\Delta_3^{(v)} = \begin{vmatrix} 2-u & -1 & 0 \\ -1 & 2-u & -1 \\ 0 & -1 & 2-u \end{vmatrix} = (2-u)\Delta_2^{(v)} - \Delta_1^{(v)} = 0; \quad \Delta_0=1; \quad \Delta_1=2-u=-(u-2);$$

$$\Delta_2^{(v)} = \begin{vmatrix} 2-u & -1 \\ -1 & 2-u \end{vmatrix} = (2-u)\Delta_1^{(v)} - \Delta_0^{(v)} = (2-u)^2 - 1 = u^2 - 4u + 3 = 0;$$

$$\Delta_3^{(v)} = (2-u) [u^2 - 4u + 3] = -(u^3 - 6u^2 + 10u - 4) = 0.$$

$$\Delta_3^{(k)} = \begin{vmatrix} 2-u & -1 & 0 \\ -1 & 2-u & -1 \\ 0 & -1 & 1-u \end{vmatrix} = (1-u)\Delta_2^{(v)} - \Delta_1^{(v)} = -(u^3 - 5u^2 + 6u - 1) = 0.$$

$$\Delta_3^{(s)} = \begin{vmatrix} 1-u & -1 & 0 \\ -1 & 2-u & -1 \\ 0 & -1 & 1-u \end{vmatrix} = \Delta_2^{(v)} = u^2 - 4u + 3 = 0 = -u \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2-u & -1 \\ 0 & -1 & 1-u \end{vmatrix} = 0.$$

За $n=4$ биће

$$\Delta_4^{(v)} = (2-u) \Delta_3^{(v)} - \Delta_2^{(v)} = u^4 - 8u^3 + 21u^2 - 20u + 5 = 0;$$

$$\Delta_4^{(k)} = (1-u) \Delta_3^{(v)} - \Delta_2^{(v)} = u^4 - 7u^3 + 15u^2 - 10u + 1 = 0;$$

$$\Delta_4^{(\cdot)} = \Delta_3^{(v)} = -(u^3 - 6u^2 + 10u - 4) = 0.$$

Да би се избегло одређивање корена фреквентног полинома користи се *тригонометријска метода* као код *једначина са коначним разликама*. Једначина (7) у случају хомогеног ланца постаје

$$A_{k-1} - (2-u) A_k + A_{k+1} = 0; \quad u = m\omega^2/c = \omega^2/\omega_0^2, \quad (14)$$

где је $\omega_0^2 = c/m$ квадрат кружне фреквенције осцилатора са једном масом и опругом (сл. 1.5.). Гранични услови зависе од начина везивања ланца на крајевима. За *обосшрано везан ланац* (сл. 7.1.а) су $A_0 = 0$ и $A_{n+1} = 0$, па се решење горње једначине може представити у облику

$$A_k = C \sin k\varphi. \quad (15)$$

Леви гранични услов је задовољен $A_0=0$ за $k=0$, а за $k=n+1$ мора бити

$$(n+1)\varphi = s\pi; \quad s = 1, 2, 3, 4, \dots; \quad \varphi = \frac{s\pi}{n+1}. \quad (16)$$

Уносећи израз (15) у (14) биће

$$C \sin(k-1)\varphi - (2-u)C \sin k\varphi + C \sin(k+1)\varphi = 0$$

те следи однос

$$C \sin k\varphi [2 \cos \varphi - (2-u)] = 0.$$

Како $C \neq 0$ и $\sin k\varphi \neq 0$, јер не би било осцилација, мора бити

$$2 \cos \varphi - (2-u) = 0; \quad u = 2(1 - \cos \varphi) = 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{m\omega^2}{c} \quad (17)$$

што представља *фреквенцијну једначину*. С обзиром на (14) кружна фреквенција је

$$\omega = 2 \sin \frac{s\pi}{2(n+1)} \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Према (6) и (15) закон кретања сваке масе је

$$x_k = \sum_s C_s \sin \frac{ks\pi}{n+1} \cos(\omega_s t + \alpha_s) \quad (19)$$

где су C_s и α_s интеграционе константе које се одређују из почетних услова кретања

$$\begin{aligned} x_k(0) &= C_s \sin \frac{ks\pi}{n+1} \cos \alpha_s, \\ \dot{x}_k(0) &= -C_s \omega_s \sin \frac{ks\pi}{n+1} \sin \alpha_s. \end{aligned} \quad (20)$$

У друга два случаја везивања ланца фреквентна једначина (17) остаје иста али се мењају гранични услови. За *конзолни ланац* (сл. 7.1.с) је $A_0=0$ али је A_{n+1} неодређено, па (15) задовољава први услов.

Из (7) други гранични услов је

$$\begin{aligned} -A_{n-1} + (1-u) A_n &= -C \sin(n-1)\varphi + C(2\cos\varphi - 1)\sin n\varphi = \\ &= C[-\sin n\varphi \cos\varphi + \cos n\varphi \sin\varphi + 2\sin n\varphi \cos\varphi - \sin n\varphi] = \\ &= C[\sin(n+1)\varphi - \sin n\varphi] = 0. \end{aligned}$$

Како $C \neq 0$ биће услов

$$\sin(n+1)\varphi - \sin n\varphi = 2 \cos \frac{2n+1}{2}\varphi \sin \frac{\varphi}{2} = 0,$$

то јест

$$\frac{2n+1}{2}\varphi = \frac{2s-1}{2}\pi, \quad \varphi = \frac{2s-1}{2n+1}\pi; \quad s=1, 2, \dots, n. \quad (21)$$

С обзиром на (14) и (17) кружна фреквенција је

$$\omega = 2 \sin \frac{2s-1}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (22)$$

Код слободног ланца су A_0 и A_{n+1} неодређени, па из (7) следе гранични услови

$$(1-u)A_1 - A_2 = 0; \quad -A_{n-1} + (1-u)A_n = 0$$

који, с обзиром на (15) и (17), постају

$$\begin{aligned} C(2\cos\varphi - 1)\sin\varphi - C\sin 2\varphi &= 0; \quad -C\sin(n-1)\varphi + C(2\cos\varphi - 1)\sin n\varphi = 0, \\ -C\sin\varphi &= 0; \quad C\sin n\varphi(\cos\varphi - 1) = 0. \end{aligned}$$

Како $C \neq 0$, $\sin\varphi \neq 0$ биће услов

$$\sin n\varphi = 0, \quad \varphi = \frac{s}{n}\pi, \quad s=1, 2, \dots, n-1, \quad (23)$$

па је кружна фреквенција

$$\omega = 2 \sin \frac{s}{n} \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (24)$$

Овај резултат следи непосредно из (18) када се уместо n стави $n-1$, јер се према (13) умањује за један број степени слободе осциловања.

На пример, за $n=5$ биће кружне фреквенције

a) за уклештени ланац према (18) и $\sqrt{c/m} = \omega_0$:

$$\omega = 2\omega_0 \sin \frac{s\pi}{12}; \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3}-1) \omega_0; \omega_0; \sqrt{2} \omega_0; \sqrt{3} \omega_0; \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3}+1) \omega_0;$$

b) за конзолни ланац према (22):

$$\omega = 2\omega_0 \sin \frac{(2s-1)\pi}{22}; 0,28468 \omega_0; 0,83098 \omega_0; 1,30992 \omega_0; 1,68270 \omega_0; 1,91912 \omega_0;$$

c) за слободни ланац према (24)

$$\omega = 2\omega_0 \sin \frac{s\pi}{10}; \omega_1=0; 0,61804 \omega_0; 1,17558 \omega_0; 1,61804 \omega_0; 1,90212 \omega_0.$$

7.3. Филтри. — Хомогени ланци (сл. 7.1.) служе и као *механички* или *електрични филтри* (сл. 7.1.e) који могу да пропуштају одређене фреквенције или одређене области фреквенција из области побудних фреквенција. Они могу бити двојаки: *нискофреквентни* (Tiefpassfilter) који пропуштају осцилације у ланцу фреквенције испод неке граничне вредности и *високофреквентни* (Hochpassfilter) који пропуштају осцилације са фреквенцијом изнад граничне фреквенције.

Посматрајмо хомогени ланац (сл. 7.1.a) претпостављајући да уклештење није чврсто већ се креће периодички по закону $x_0 = A_0 \cos \Omega t$, где је Ω *поремећајна (побудна) фреквенција*. Све масе ће осциловати истом кружном фреквенцијом, истом или различитом фазом и различитом амплитудом, $x_k = A_k \cos \Omega t$. Уместо решења система једначина (14), које смо узели у облику (15), овде ће бити облика $A_k = C \sin(k\varphi + \alpha)$, где су C и α константе, које одређујемо из граничних услова

$$A_0 = C \sin \alpha, \quad A_{n+1} = C \sin [(n+1)\varphi + \alpha] = 0,$$

те су

$$\alpha = s\pi - (n+1)\varphi; \quad C = \frac{A_0}{\sin \alpha} = \frac{A_0}{(-1)^{s+1} \sin(n+1)\varphi} \quad (25)$$

па је закон кретања сваке масе

$$x_k = A_0 \frac{\sin(n+1-k)\varphi}{\sin(n+1)\varphi} \cos \Omega t. \quad (26)$$

Динамички фактор за сваку поједину масу је

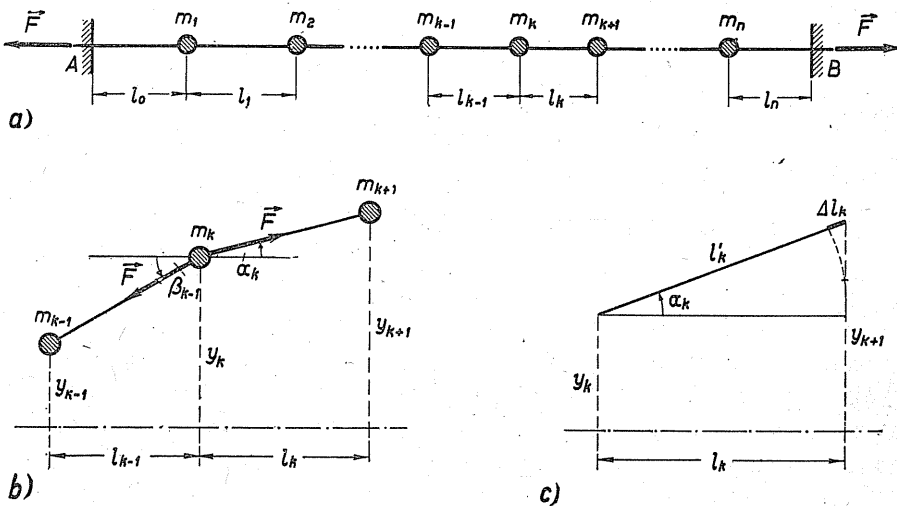
$$\eta_{dk} = \frac{A_k}{A_0} = \frac{\sin(k\varphi + \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sin(n+1-k)\varphi}{\sin(n+1)\varphi}. \quad (27)$$

За $\Omega=0$ је и $\varphi=0$ па је овај фактор неодређен $\eta_{dk}=0/0$ те следи

$$\eta_k = \frac{n+1-k}{n+1} = 1 - \frac{k}{n+1} \quad (28)$$

и представља статички избачај (угиб) сваке масе услед јединичног избачаја левог краја ланца. Овај избачај опада линеарно са бројем k .

7.4. Мале трансверзалне осцилације концентрисаних маса на струни. — На струни (нити) AB , дужине L , чију масу занемарујемо ($M=0$), затегнутој аксијалним силама $F = \text{const}$ у крајњим тачкама A и B (сл. 7.2.a) насађено је више концентрисаних маса (m_k), на међусобним растојањима l_k . Када се систем изведе из равнотежног поло-



Сл. 7.2. — Осцилације маса на струни

жаја Ax у правцу осе Ay и пусти наступиће трансверзалне осцилације око тог равнотежног положаја услед промене правца затезних сила. Означимо са y_k ординату масе m_k (сл. 7.2.b) онда су пројекције резултанте сила које дејствују на ту масу

$$\sum X_k = F (\cos \alpha_k - \cos \beta_{k-1}) \approx 0;$$

$$\sum Y_k = F (\sin \alpha_k - \sin \beta_{k-1}) \approx F (\text{tg } \alpha_k - \text{tg } \beta_{k-1}) \approx F \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{l_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{l_{k-1}} \right);$$

јер су (сл. 7.2.c):

$$\cos \alpha_k = \frac{l_k}{l'_k} = \frac{l_k}{l_k(1+\varepsilon)} = \frac{1}{1+\varepsilon}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l_{k-1}}{l_{k-1}} = \frac{\Delta l_k}{l_k} = \dots; \quad l'_k = l_k + \Delta l_k = l_k(1+\varepsilon).$$

Диференцијална једначина осциловања масе m_k је

$$\begin{aligned} m_k \ddot{y}_k &= \sum Y_k = F \left[\frac{y_{k-1}}{l_{k-1}} - \left(\frac{1}{l_{k-1}} + \frac{1}{l_k} \right) y_k + \frac{y_{k+1}}{l_k} \right] = \\ &= c_{k-1} y_{k-1} - (c_{k-1} + c_k) y_k + c_k y_{k+1}. \end{aligned} \quad (29)$$

Ова је једначина аналогна једначини осциловања масе m_k ланца (2) само је крутост $c_k = F/l_k$. Према томе све што је изнето у чл. 7.1. важи и овде. Решење ћемо тражити у облику

$$y_k = A_k \cos(\omega t + \alpha),$$

па је фреквентна једначина облика (8)

$$\Delta_n(\lambda = \omega^2) = \begin{vmatrix} c_0 + c_1 - m_1 \lambda & -c_1 & 0 & \vdots \\ -c_1 & c_1 + c_2 - m_2 \lambda & -c_2 & \vdots \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 - m_3 \lambda & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -c_{n-2} & c_{n-2} + c_{n-1} - m_{n-1} \lambda & -c_{n-1} & \vdots \\ 0 & -c_{n-1} & c_{n-1} + c_n - m_n \lambda & \vdots \end{vmatrix} = 0 \quad (30)$$

Када је систем хомоген тада су све масе једнаке $m_k = m$ и сва растојања маса $l_k = l = L/(n+1)$, па је $c_k = c = F/l = (n+1)F/L$. Сада важи све оно што је изнето у чл. 7.2., па су фреквентна једначина, сопствена вредност и кружна фреквенција

$$\sin(n+1)\varphi = 0; \quad \varphi_s = \frac{s\pi}{n+1}; \quad s = 1, 2, \dots, n; \quad (31)$$

$$2 - u = 2 \cos \varphi; \quad u = 2(1 - \cos \varphi) = 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{m\omega^2}{c} = \frac{m}{c} \lambda,$$

$$\omega_s = 2 \sin \frac{s\pi}{2(n+1)} \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad c = \frac{(n+1)F}{L} = \frac{F}{l}.$$

Односи амплитуда су

$$\frac{A_{ks}}{\sin k \varphi_s} = \frac{A_{ks}}{\sin \frac{ks\pi}{n+1}} = \dots = C_s \quad (32)$$

а закон кретања масе m_k је

$$y_k = C_s \sin \frac{k s \pi}{n+1} \cos(\omega_s t + \alpha_s) \quad (33)$$

где су C_s и α_s константе које одређујемо из почетних услова кретања

На пример, за $n=5$ биће сопствене вредности и кофактори:

$$u_1 = 2 - \sqrt{3}; \quad u_2 = 1; \quad u_3 = 2; \quad u_4 = 3; \quad u_5 = 2 + \sqrt{3}$$

$$K_{5k}^{(1)} = 1; \quad \sqrt{3}; \quad 2; \quad \sqrt{3}; \quad 1;$$

$$K_{5k}^{(2)} = 1; \quad 1; \quad 0; \quad -1; \quad -1;$$

$$K_{5k}^{(3)} = 1; \quad 0; \quad -1; \quad 0; \quad 1;$$

$$K_{5k}^{(4)} = 1; \quad -1; \quad 0; \quad 1; \quad -1;$$

$$K_{5k}^{(5)} = 1; \quad -\sqrt{3}; \quad 2; \quad -\sqrt{3}; \quad 1.$$

ПРИМЕРИ

7.1. Слободан ланац састоји се из четири масе, $m_1 = m_3 = m$, $m_2 = m_4 = 2m$, и опруга крутости $c_1 = c_3 = c$, $c_2 = 2c$ (два дублеша). Одредити кружне фреквенције система.

Решење. — Према (10) биће фреквентна једначина

$$f(\lambda) = m \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -c & 3c-2m\lambda & -2c & 0 \\ 0 & -2c & 3c-m\lambda & -c \\ 0 & 0 & -c & c-2m\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3-2u & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3-u & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1-2u \end{vmatrix} = 0;$$

$$u = \frac{m\lambda}{c} = \frac{m\omega^2}{c}$$

$$f(u) = \begin{vmatrix} 5-2u & -1 & 2 \\ -2 & 3-u & -1 \\ 0 & -1 & 1-2u \end{vmatrix} = 4u^3 - 74u^2 + 35u - 14 = 0;$$

$$f(0) = -14; \quad f(1) = 1; \quad f(2) = -8; \quad f(0,5) = -2;$$

$$u_1 = 0,74; \quad u_2 = 1,28; \quad u_3 = 3,98.$$

7.2. Ланац везан на левом крају носи масе: $4m$, $3m$, $2m$ и m а крутости опруга су једнаке c . Одредити фреквентну једначину.

Решење. — Према (9) за $u = m\omega^2/c$ биће

$$f(u) = \begin{vmatrix} 2-4u & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-3u & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2-2u & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1-u \end{vmatrix} = 24u^4 - 76u^3 + 70u^2 - 20u + 1 = 0.$$

$$f(u) = u^4 - 3,167u^3 + 2,917u^2 - 0,833u + 0,042 = 0;$$

$$f(0) > 0; \quad f(1) = -1 < 0; \quad f(1/2) = 1/2 > 0; \quad f(1/3) = -11/27 < 0;$$

$$u_1 = 0,057; \quad u_2 = 0,401; \quad u_3 = 0,918; \quad u_4 = 1,791.$$

7.3. Написати фреквентне једначине за хомогене ланце са $n=5$ маса.

Решење. —

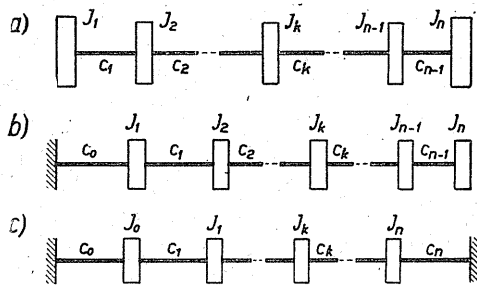
$$\begin{aligned} \text{a) } \Delta_5^{(v)} &= (2-u) \Delta_4^{(v)} - \Delta_2^{(v)} = (2-u) (u^4 - 8u^3 + 21u^2 - 20u + 5) - \\ &- (u^2 - 4u + 3) = -(u^5 - 10u^4 + 36u^3 - 56u^2 + 35u - 6) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \Delta_5^{(k)} = (1-u) \Delta_4^{(v)} - \Delta_3^{(v)} = -(u^5 - 9u^4 + 28u^3 - 35u^2 + 15u - 1) = 0.$$

$$\text{c) } \Delta_5^{(s)} = \Delta_4^{(v)} = u^4 - 8u^3 + 21u^2 - 20u + 5 = 0.$$

8. ТОРЗИЈСКЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ ЛАКИХ ВРАТИЛА СА ВИШЕ ДИСКОВА

8.1. Вратило променљивог попречног пресека са више различитих дискова. — На лако вратило, чију масу занемарујемо, променљивог попречног пресека, насађено је више дискова различитих моментата инерције (J_k). Слично поступку код нехомогених ланаца, (чл. 7.1.), добијамо за три карактеристична случаја ослањања: слободно вращило (сл. 8.1.a), $\frac{1}{2}$ једноштрано уклешћено вращило, (сл. 8.1.b), и обострано



Сл. 8.1. — Торзијске осцилације лаких вратила са више дискова

уклешћено вращило, (сл. 8.1.c), изразе за кинетичку и потенцијалну енергију

$$E_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} J_k \dot{\theta}_k^2; \quad (1)$$

$$E_p = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} c_k (\theta_{k+1} - \theta_k)^2; \quad E_p = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} c_k (\theta_{k+1} - \theta_k)^2; \quad E_p = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2} c_k (\theta_{k+1} - \theta_k)^2,$$

па су фреквентне једначине облика:

$$a) \begin{vmatrix} J_1 & & J_2 & & J_3 & \dots & J_{n-1} & & J_n \\ -c_1 & c_1 + c_2 - J_2 \omega^2 & & & 0 & & 0 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & & -c_{n-1} & \\ 0 & & 0 & & 0 & & -c_{n-1} & & c_{n-1} - J_n \omega^2 \end{vmatrix} = 0; \quad (2a)$$

$$b) \begin{vmatrix} c_0 + c_1 - J_1 \omega^2 & \cdot & 0 & 0 \\ -c_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & -c_{n-1} & c_{n-1} - J_n \omega^2 \end{vmatrix} = 0; \quad (2b)$$

$$c) \begin{vmatrix} c_0 + c_1 - J_1 \omega^2 & \cdot & 0 \\ -c_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & c_{n-1} + c_n - J_n \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2c)$$

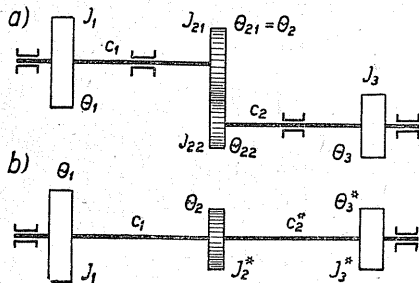
У првом случају систем има $n-1$ степен слободе осциловања, јер сабирањем диференцијалних једначина система добијамо услов

$$\sum J_k \ddot{\theta}_k = 0, \quad \text{односно} \quad \sum J_k \dot{\theta}_k = L = \text{const.}$$

Он показује да је *замах система константан*, те се систем обрће као круто тело, па према томе $\omega_0 = 0$ није корен фреквентне једначине, те систем има $n-1$ степен слободе осциловања.

Све особине торзијских осцилација ових система су аналогне особинама линеарних осцилација, (чл. 7.1.), само треба водити рачуна о аналогијама изнетим у чл. 5. између ових двеју врста осцилација, замењујући масу (m_k) моментом инерције (J_k) а крутост опруге (c_k) крутошћу одговарајућег дела вратила $c_k = G I_0 / l_k$, (чл. 2.7.).

8.2. Редуктори. — У машинској пракси проблем торзијских осцилација се јавља и код редуктора. Нека се редуктор, (сл. 8.2.a),



Сл. 8.2. — Редуктор са два диска

састоји из дискова, момената инерције J_1 и J_3 , насађених на вратилима крутости c_1 и c_2 и пара захваћених зупчаника, момената инерције J_{21} и J_{22} . Преносни однос пара захваћених зупчаника је

$$i = -\frac{\omega_{21}}{\omega_{22}} = -\frac{z_{22}}{z_{21}} = \frac{1}{k}; \quad (3)$$

k је *редукциони коефицијент* (фактор). Према Willis-овој формули угаона брзина другог зупчаника је

$$\omega_{22} = -k \omega_{21}, \quad \text{те је} \quad \theta_{22} = -k \theta_{21} = -k \theta_2. \quad (4)$$

Кинетичка и потенцијална енергија система биће

$$E_k = 1/2 [J_1 \dot{\theta}_1^2 + J_{21} \dot{\theta}_{21}^2 + J_{22} \dot{\theta}_{22}^2 + J_3 \dot{\theta}_3^2] = 1/2 [J_1 \dot{\theta}_1^2 + J_2^* \dot{\theta}_2^2 + J_3 \dot{\theta}_3^2], \quad (5a)$$

$$E_p = 1/2 [c_1 (\theta_{21} - \theta_1)^2 + c_2 (\theta_3 - \theta_{22})^2], \quad (5b)$$

где је

$$J_2^* = J_{21} + k^2 J_{22} \quad (5c)$$

редуковани моменти инерције оба зупчаника на прво вращило, а $\theta_{22}^ = -\theta_{22}/k$ редуковани угао обрћања другог зупчаника.*

Да би се систем свео на торзијски систем са једним вратилом и три диска, (сл. 8.2.b), треба редуковати на прво вратило момент инерције трећег диска, угао θ_3 и крутост c_2 , према услову да енергије остану непромењене

$$E_{k3} = 1/2 J_3 \dot{\theta}_3^2 = 1/2 J_3^* (\dot{\theta}_3^*)^2, \quad E_{p3} = 1/2 c_2 \theta_3^2 = 1/2 c_2^* (\theta_3^*)^2,$$

тј. према обрасцима

$$J_3^* = k^2 J_3, \quad \theta_3^* = -\theta_3/k, \quad c_2^* = k^2 c_2. \quad (6)$$

Кинетичка и потенцијална енергија оваквог редукованог система биће

$$E_k = 1/2 [J_1 \dot{\theta}_1^2 + J_2^* \dot{\theta}_2^2 + J_3^* (\dot{\theta}_3^*)^2],$$

$$E_p = 1/2 [c_1 (\theta_2 - \theta_1)^2 + c_2^* (\theta_3^* - \theta_2)^2]. \quad (7)$$

Лагранжеве једначине дају систем диференцијалних једначина

$$J_1 \ddot{\theta}_1 - c_1 (\theta_2 - \theta_1) = 0,$$

$$J_2^* \ddot{\theta}_2 + c_1 (\theta_2 - \theta_1) - c_2^* (\theta_3^* - \theta_2) = 0, \quad (8)$$

$$J_3^* \ddot{\theta}_3^* + c_2^* (\theta_3^* - \theta_2) = 0.$$

Сабирањем ових једначина добијамо услов да је замах система константан, (3), те систем има само два степена слободе осциловања. Према томе је фреквентна једначина

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} c_1 - J_1 \lambda & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2^* - J_2 \lambda & -c_2^* \\ 0 & -c_2^* & c_2^* - J_3^* \lambda \end{vmatrix} = \quad (9)$$

$$= \lambda^2 - \left(\frac{J_1 + J_2^*}{J_1 J_2^*} c_1 + \frac{J_2^* + J_3^*}{J_2^* J_3^*} c_2^* \right) \lambda + \frac{J_1 + J_2^* + J_3^*}{J_1 J_2^* J_3^*} c_1 c_2^* = 0.$$

Она је аналогна једначини 10а линеарних осцилација, (чл.7.1.), са три масе. Корен $\lambda_0 = \omega_0^2 = 0$ није корен фреквентне једначине. Остали корени се одређују на раније изнети начин.

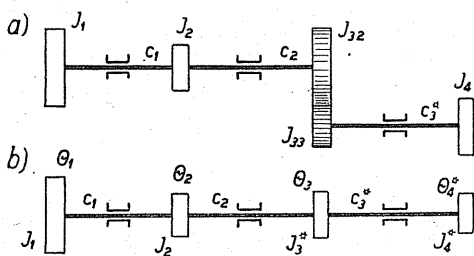
На исти начин извршили бисмо редукцију и у случају редуктора приказаног на сл. 8.3.а, па су

$$J_3^* = J_{32} + k^2 J_{33}, \quad J_4^* = k^2 J_4, \quad \theta_{33} = -k \theta_3, \quad \theta_4^* = -\theta_4/k, \quad c_3^* = k^2 c_3,$$

па су енергије

$$E_k = 1/2 [J_1 \dot{\theta}_1^2 + J_2 \dot{\theta}_2^2 + J_3^* \dot{\theta}_3^2 + J_4^* (\dot{\theta}_4^*)^2],$$

$$E_p = 1/2 [c_1 (\theta_2 - \theta_1)^2 + c_2 (\theta_3 - \theta_2)^2 + c_3^* (\theta_4^* - \theta_3)^2]$$



Сл. 8. 3. — Редуктор са три диска

и фреквентна једначина

$$\begin{aligned} \omega^6 - \left(\frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} c_1 + \frac{J_2 + J_3^*}{J_2 J_3^*} c_2 + \right. \\ \left. + \frac{J_3^* + J_4^*}{J_3^* J_4^*} c_3^* \right) \omega^4 + \\ \left. + \left(\frac{J_1 + J_2 + J_3^*}{J_1 J_2 J_3^*} \right) \cdot c_1 c_2 + \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} \cdot \frac{J_3^* + J_4^*}{J_3^* J_4^*} c_1 c_3^* + \frac{J_2 + J_3^* + J_4^*}{J_2 J_3^* J_4^*} c_2 c_3^* \right) \omega^2 - \frac{J_1 + J_2 + J_3^* + J_4^*}{J_1 J_2 J_3^* J_4^*} c_1 c_2 c_3^* = 0.$$

На пример, ако су $J_1 = J_2 = J_4 = J$, $J_{32} = 3 J_{33}$, $J_{33} = 1/24 J$, $c_1 = c_2 = c$, $c_3 = 1/3 c$, $z_{32} = 60$ зубаца, $z_{33} = 20$ зубаца, онда је $k = 3$, па су $J_3^* = 1/2 J$, $J_4^* = 9 J$, $c_3^* = 3c$, те су енергије

$$E_k = 1/2 J [\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 1/2 \dot{\theta}_3^2 + 9 (\dot{\theta}_4^*)^2],$$

$$E_p = 1/2 c [(\theta_2 - \theta_1)^2 + (\theta_3 - \theta_2)^2 + 3 (\theta_4^* - \theta_3)^2]$$

и фреквентна једначина

$$3 \lambda^3 - 34 \lambda^2 + 74 \lambda - 23 = 0,$$

где је $\lambda = J \omega^2 / c$.

Корене ове кубне једначине одредићемо по *Newton—Raphson*-овој методи*. Како је $f(0) = -23 < 0$ а $f(0,5) = 5,875 > 0$ то се најнижи корен налази у размаку $0 < \lambda < 0,5$. Због $f'(\lambda) = 9 \lambda^2 - 68 \lambda + 74$ за прву приближну вредност узимамо $\lambda_1 = x_1 \approx 23/74 \approx 0,3$. Тада су $f(0,3) = -3,779$ и $f'(0,3) = 54,41$, па је наредна приближна вредност

$$x_2 = x_1 - [f(x_1) / f'(x_1)] = 0,3 + 0,0695 = 0,3695.$$

Како је $f(0,3695) = -0,1439$ и $f'(0,3695) = 54,1025$, што се лако одређује помоћу Хорнерове схеме, наредна приближна вредност корена је

$$x_3 = x_2 - [f(x_2) / f'(x_2)] = 0,3695 + 0,0026 = 0,3721.$$

* Таблице из Отпорности материјала. Београд, 1965., стр. 111.

Сада су $f(0,3721) = -0,0376$ и $f'(0,3721) = 49,9432$, па је поправка $0,0007$, те је приближна вредност најнижег корена $\lambda_1 \approx 0,3728$.

Делењем полинома овим кореним чиниоцем добија се квадратна једначина $3\lambda^2 - 32,8816\lambda + 61,7415 = 0$, те су корени кубне једначине $\lambda_1 \approx 0,3728$, $\lambda_2 \approx 2,4065$, $\lambda_3 \approx 8,5540$. Они задовољавају услов $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{34}{3} = 11,333$.

8.3. Хомогене машине. Примена једначина коначних разлика.

— Ако је на лако вратило, (сл. 8.1.a), насађено више дискова различитих момената инерције, онда је диференцијална једначина осциловања k -ог диска, (према чл. 7.1., обр. 2), облика

$$J_k \ddot{\theta}_k - c_{k-1} \dot{\theta}_{k-1} + (c_{k-1} + c_k) \theta_k - c_k \theta_{k+1} = 0 \quad (10)$$

и њој одговарајућа алгебарска једначина

$$-c_{k-1} A_{k-1} + (c_{k-1} + c_k - J_k \omega^2) A_k - c_k A_{k+1} = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (11)$$

У случају хомогене машине, тј. када су сви дискови лаког вратила истог момента инерције (J) и делови вратила између оближњих дискова имају исте крутости (c), горња једначина постаје

$$A_{k-1} - (2 - u^2) A_k + A_{k+1} = 0, \quad (12)$$

где је $u = J\omega^2/c$. Ова је једначина слична Клапејроновој једначини трију момената континуалног носача једнаких распона и неоптерећеног између трију оближњих ослонаца* а која има облик $\mathfrak{M}_{k-1} + 4\mathfrak{M}_k + \mathfrak{M}_{k+1} = 0$.

У овоме се случају може применити метода једначина коначних разлика** другог реда према овој схеми

y	Δ	Δ^2	
y_{k-1}	Δy_k Δy_{k+1}	$\Delta^2 y_k$	тј. $\Delta^2 y_k = y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}$
y_k			
y_{k+1}			

и то од индекса $k=2$ до $k=n-1$.

Претпоставимо решење једначине (12) у облику

$$A_k = C e^{\lambda k} \quad (14)$$

онда ће бити

$$e^{-\lambda} - (2 - u^2) + e^{\lambda} = 0 \quad (15)$$

* Отпорност материјала, чл. 10.5.1.

** Д. Рашковић. — „Примена методе једначина коначних разлика код торзијских осцилација вратила са више дискова“. Збор. Маш. фак., 1953.

из које непосредно следи да је

$$\operatorname{Ch} \lambda = 1 - \frac{1}{2} u^2. \quad (16)$$

Према вредности коефицијента u разликујемо три врсте кретања.

1° Ако је $|u| < \sqrt{2}$ онда је $|\operatorname{Ch} \lambda| < 1$, па је λ чисто имагинарни број. Ставимо ли да је $\lambda = i\beta$, $i = \sqrt{-1}$, биће $\operatorname{Ch} i\beta = \cos \beta = 1 - \frac{1}{2} u^2$, па је

$$u = 2 - 2 \cos \beta = 4 \sin^2 \frac{1}{2} \beta \quad (17)$$

те је решење облика

$$A_k = C e^{k\beta i} = C_1 \cos k\beta + C_2 \sin k\beta. \quad (18)$$

Кретање је, дакле, осцилаторног карактера.

2° Буде ли $|u| > \sqrt{2}$ биће $|\operatorname{Ch} \lambda| > 1$, па је λ комплексни број, $\lambda = \alpha + i\beta$, те је $\operatorname{Ch}(\alpha + i\beta) = \operatorname{Ch} \alpha \cos \beta + i \operatorname{Sh} \alpha \sin \beta = 1 - \frac{1}{2} u^2$, јер је $\operatorname{Sh} i\beta = i \sin \beta$. Како је десна страна предње једначине реална и $\operatorname{Ch} \lambda$ позитиван, мора бити $\beta = \pi$, па је и

$$u = \sqrt{2(1 + \operatorname{Ch} \alpha)} = 2 \operatorname{Ch} \frac{1}{2} \alpha. \quad (19)$$

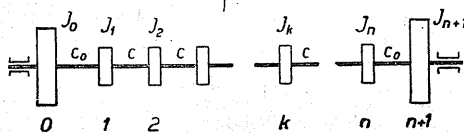
Због $e^{i\pi} = -1$ решење једначине (12) биће

$$A_k = C e^{k(\alpha + i\pi)} = (-1)^k C e^{k\alpha} = (-1)^k [C_1 \operatorname{Ch} k\alpha + C_2 \operatorname{Sh} k\alpha], \quad (20)$$

па је кретање ајериодичког карактера.

3° За $|u| = \sqrt{2}$ биће гранични случај ајериодичког кретања.

Изложена метода коначних разлика не може се применити у случају када је број дискова $n+2$, као на пример, код мотора, где је нулти диск замајац а $n+1$ машина, (сл. 8.4.). Али се у извесним случајевима може и ова метода применити, када се познају односи између кру-



Сл. 8.4. — Торзијски нехомогени систем код мотора

тости тих делова вратила и кружних фреквенција. У овом случају напишимо једначине (10) за индекс $k=0$ и $k=1$

$$(c_0 - J_0 \omega^2) A_0 - c_0 A_1 = 0,$$

$$-c_0 A_0 + (c_0 + c_1 - J_1 \omega^2) A_1 -$$

$$-c_1 A_2 = 0;$$

из њих добијамо да је $A_0 = [c_0 / (c_0 - J_0 \omega^2)] A_1$. Уносећи ову вредност у другу једначину горњег система добијамо да је

$$A_2 - [1 - u^2 + \eta_0/c] A_1 = 0, \quad (21)$$

где је

$$\eta_0 = \frac{c_0}{1 - (c_0/J_0 \omega^2)} \quad (22)$$

коэффициент који за доста велико ω тежи ка c_0 , па замајац дејствује као уклешћење.

Узимајући једначину (10) за индексе $k=n$ и $k=n+1$ добијамо

$$A_{n-1} - [1 - u^2 + \eta_n/c] A_n = 0 \quad (23)$$

где је

$$\eta_n = \frac{c_n}{1 - (c_n/cJ_{n+1} \omega^2)} \quad (24)$$

коэффициент који за доста велико ω тежи ка c_n па и последњи диск (машина) дејствује као уклешћење.

Једначине (10) за индексе $k=1$ и $k=n$ имају облик

$$A_0 - (2 - u^2) A_1 + A_2 = 0, \quad A_{n-1} - (2 - u^2) A_n + A_{n+1} = 0,$$

из којих, уносећи у њих вредности за A_2 и A_{n-1} из (21) и (23), добијамо граничне услове

$$A_0 + [(\eta_0/c) - 1] A_1 = 0, \quad A_{n+1} + [(\eta_n/c) - 1] A_n = 0. \quad (25)$$

Претпоставимо ли осцилаторно кретање, из (18) добијамо за индексе $k=0$, $k=1$, $k=n$ и $k=n+1$ амплитуде

$$A_0 = C_1; \quad A_1 = C_1 \cos \beta + C_2 \sin \beta; \quad A_n = C \cos n\beta + C_2 \sin n\beta,$$

$$A_{n+1} = C_1 \cos (n+1)\beta + C_2 \sin (n+1)\beta.$$

Уносећи ове вредности у граничне услове (25) добијамо систем хомогених једначина

$$C_1 \left[1 + \left(\frac{\eta_0}{c} - 1 \right) \cos \beta \right] + C_2 \left[\left(\frac{\eta_0}{c} - 1 \right) \sin \beta \right] = 0,$$

$$C_1 \left[\cos (n+1)\beta + \left(\frac{\eta_n}{c} - 1 \right) \cos n\beta \right] + C_2 \left[\sin (n+1)\beta + \left(\frac{\eta_n}{c} - 1 \right) \sin n\beta \right] = 0,$$

па је фреквентна једначина

$$\sin (n+1)\beta + \left[\left(\frac{\eta_0}{c} - 1 \right) + \left(\frac{\eta_n}{c} - 1 \right) \right] \sin n\beta + \left(\frac{\eta_0}{c} - 1 \right) \left(\frac{\eta_n}{c} - 1 \right) \sin (n-1)\beta = 0. \quad (26)$$

За разлику од алгебарске фреквентне једначине (2) ова је једначина *трансцендентна* и изражена је помоћу елементарних тригонометријских функција. Овим је проблем одређивања корена упрошћен када се познају коефицијенти η_0 и η_1 .

Сличан поступак је и за случај аперодичког кретања (20); фреквентна једначина је тада облика

$$\begin{aligned} \text{Sh}(n+1)\alpha - \left(\frac{\eta_0}{c} - 1\right) + \left(\frac{\eta_n}{c} - 1\right) \text{Sh} n\alpha + \\ + \left(\frac{\eta_0}{c} - 1\right) \left(\frac{\eta_n}{c} - 1\right) \text{Sh}(n-1)\alpha = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

и изражава се помоћу хиперболичких функција.

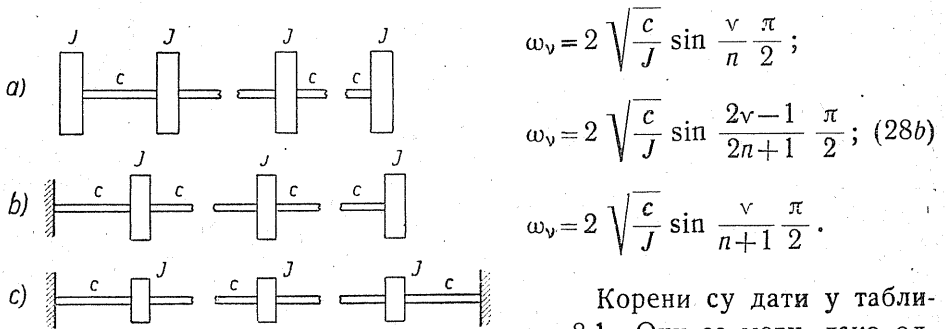
За три карактеристична случаја, (сл. 8.5.), биће

$$\eta_0 = \eta_n = 0, \quad \eta_0 = c, \quad \eta_n = 0, \quad \eta_0 = \eta_n = c$$

па добијамо услове:

$$\begin{aligned} \sin n\beta (\cos \beta - 1) = 0; \quad \sin(n+1)\beta - \sin n\beta = 0; \quad \sin(n+1)\beta = 0; \\ \beta = \nu\pi/n; \quad \beta = (2\nu - 1)\pi/(2n+1); \quad \beta = \sqrt{\nu}/(n+1). \end{aligned} \quad (28a)$$

Кружне фреквенције хармонијских торзијских осцилација за ова три карактеристична случаја биће



Сл. 8.5. — Хомогени торзијски осцилатор

Корени су дати у табlici 8.1. Они се могу лако одредити и графички.*

Због аналогије са линеарним осцилацијама хомогених ланаца, фреквентне једначине (чл. 7.2.) су исте као (28.b) па за корене вреде исти односи као у табlici 8.1. Услови (11 ÷ 13, чл. 7.2.), важе и у овом случају

$$\Delta_n^{(s)} = \Delta_{n-1}^{(u)} = 0; \quad \Delta_n^{(k)} = \Delta_n^{(u)} - p \Delta_{n-1}^{(u)} = \Delta_{n+1}^{(s)} + p \Delta_n^{(s)} = 0, \quad (29)$$

* Д. Рашковић — „Један начин за одређивање кружних фреквенција слободних торзијских осцилација хомогених машина.“ Машинство и Електротехника, бр. 6, 1954.

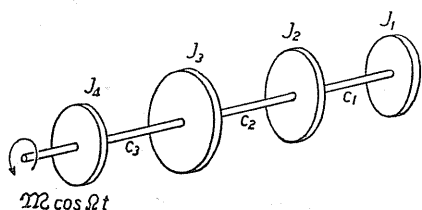
Таблица 8.1.

$\rho = c/J$

(s) (n)	(u) (n)	$\lambda = \omega^2$	ω према (28b)
2	1	2ρ	$\sqrt{2\rho}$
3	2	$\rho; 3\rho$	$\sqrt{\rho}; \sqrt{3\rho}$
4	3	$(2-\sqrt{2})\rho; 2\rho; (2+\sqrt{2})\rho$	$\sqrt{(2-\sqrt{2})\rho}; \sqrt{2\rho}; \sqrt{(2+\sqrt{2})\rho}$
5	4	$0,3819\rho; 1,3830\rho; 2,6180\rho;$ $3,6181\rho$	$0,61804\sqrt{\rho}; 1,17558\sqrt{\rho}; 1,61804\sqrt{\rho};$ $1,90212\sqrt{\rho}$
6	5	$(2-\sqrt{3})\rho; \rho; 2\rho; 3\rho; (2+\sqrt{3})\rho$	$1/2(\sqrt{3}-1)\sqrt{2\rho}; \sqrt{\rho}; \sqrt{2\rho}; \sqrt{3\rho};$ $1/2(\sqrt{3}+1)\sqrt{2\rho}$
7	6	$0,1980\rho; 0,7534\rho; 1,5550\rho;$ $2,4465\rho; 3,2486\rho; 3,8019\rho$	$0,44504\sqrt{\rho}; 0,86782\sqrt{\rho}; 1,24696\sqrt{\rho}$ $1,56358\sqrt{\rho}; 1,80194\sqrt{\rho}; 1,94984\sqrt{\rho}$
8	7	$0,1522\rho; 0,5888\rho; 1,2346\rho;$ $2\rho; 2,7653\rho; 3,4142\rho; 3,8478\rho$	$0,39018\sqrt{\rho}; 0,76736\sqrt{\rho}; 1,11114\sqrt{\rho}$ $\sqrt{2\rho}; 1,66294\sqrt{\rho}; 1,84776\sqrt{\rho};$ $1,96158\sqrt{\rho}$
9	8	$0,1206\rho; 0,4679\rho; \rho; 1,6526\rho;$ $2,3475\rho; 3\rho; 3,5319\rho; 3,8790\rho$	$0,34730\sqrt{\rho}; 0,68404\sqrt{\rho}; \sqrt{\rho};$ $1,28558\sqrt{\rho}; 1,53208\sqrt{\rho}; \sqrt{3\rho};$ $1,87938\sqrt{\rho}; 1,96962\sqrt{\rho}$
(k)	(n)	$\lambda = \omega^2$	ω према (28b)
	1	ρ	$\sqrt{\rho}$
	2	$1/2(3 \mp \sqrt{5})\rho$	$0,61804\sqrt{\rho}; 1,61840\sqrt{\rho}$
	3	$0,1980\rho; 1,5575\rho; 3,2467\rho$	$0,445000\sqrt{\rho}; 1,24798\sqrt{\rho}; 1,80186\sqrt{\rho}$
	4	$0,12061\rho; \rho; 2,3475\rho; 3,5319\rho$	$0,34730\sqrt{\rho}; \sqrt{\rho}; 1,53208\sqrt{\rho};$ $1,87938\sqrt{\rho}$
	5	$0,0811\rho; 0,6905\rho; 1,7158\rho;$ $2,8414\rho; 3,6829\rho$	$0,28468\sqrt{\rho}; 0,83098\sqrt{\rho}; 1,30992\sqrt{\rho}$ $1,68270\sqrt{\rho}; 1,91912\sqrt{\rho}$
	6	$0,0581\rho; 0,4747\rho; 1,2905\rho;$ $2,2400\rho; 3,1361\rho; 3,7708\rho$	$0,24110\sqrt{\rho}; 0,68922\sqrt{\rho}; 1,13608\sqrt{\rho}$ $1,49700\sqrt{\rho}; 1,77092\sqrt{\rho}; 1,94190\sqrt{\rho}$
	7	$0,04378\rho; 0,3819\rho; \rho; 1,7909\rho;$ $2,6180\rho; 3,3382\rho; 3,8271\rho$	$0,20906\sqrt{\rho}; 0,61804\sqrt{\rho}; \sqrt{\rho};$ $1,33826\sqrt{\rho}; 1,61804\sqrt{\rho}; 1,82710\sqrt{\rho};$ $1,95630\sqrt{\rho};$
	8	$0,0335\rho; 0,2996\rho; 0,8503\rho;$ $1,4529\rho; 2,1847\rho; 2,8918\rho;$ $3,4702\rho; 3,8640\rho$	$0,18266\sqrt{\rho}; 0,54736\sqrt{\rho}; 0,92264\sqrt{\rho}$ $1,20534\sqrt{\rho}; 1,47808\sqrt{\rho}; 1,70050\sqrt{\rho}$ $1,86286\sqrt{\rho}; 1,96598\sqrt{\rho}$

па се јасно види да обострано укљешћење лаког вратила замењује у погледу фреквенције једначине један диск слободног вратила. Према томе је и у овом случају укљешћено вратило основни случај, јер се помоћу његове фреквенције једначине могу извести и једначине за остала два случаја.

8.4. Холцерова приближна метода. — Холцерова (Holzer)* метода је приближна метода за одређивање кружних фреквенција основног и виших облика торзијских осцилација система. Ако је на лако вратило, чију масу занемарујемо, насађено више дискова различитих момената инерције и ако су



Сл. 8.6. — Примена Holzer-ове приближне методе

крugости делова вратила између дискова такође различити, онда систему диференцијалних једначина (10) одговара систем алгебарских једначина (11):

$$J_k \omega^2 A_k - c_{k-1} (A_k - A_{k-1}) + c_k (A_{k+1} - A_k) = 0 \tag{30}$$

који се може написати у овом облику

$$\begin{aligned} J_1 \omega^2 A_1 + c_1 (A_2 - A_1) &= 0, \\ J_2 \omega^2 A_2 - c_1 (A_2 - A_1) + c_2 (A_3 - A_2) &= 0, \\ J_3 \omega^2 A_3 - c_2 (A_3 - A_2) + c_3 (A_4 - A_3) &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \tag{30'}$$

Саберу ли се, за случај слободног вратила, (сл. 8.6.), све ове једначине добија се услов

$$\sum_k J_k \omega^2 A_k = (J_1 \omega^2 A_1 + J_2 \omega^2 A_2 + \dots + J_n \omega^2 A_n) = 0, \tag{31}$$

који је задовољен када је ω кружна фреквенција слободних осцилација вратила. Из система једначина (30) могу се наредне амплитуде A_k изразити помоћу претходних амплитуда једначинама

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 - \frac{\omega^2}{c_1} J_1 A_1, \\ A_3 &= A_2 - \frac{\omega^2}{c_2} (J_1 A_1 + J_2 A_2), \\ A_4 &= A_3 - \frac{\omega^2}{c_3} (J_1 A_1 + J_2 A_2 + J_3 A_3), \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \tag{32}$$

* Holzer H. — „Die Berechnung der Drehschwingungen und ihre Anwendung im Maschinenbau“. Berlin. 1921, S. 101.

Tolle M. — „Regelung der Kraftmaschinen“ Berlin, 1921, S. 205.

Све амплитуде, дакле, зависе од амплитуде првог диска (A_1). Уносећи ове вредности у услов (31) добијамо да и он зависи од амплитуде A_1 и за произвољно изабрану њену вредност, на пример, $A_1 = 1$, биће задовољен само онда ако је ω заиста кружна фреквенција слободних осцилација система.

На овоме принципу основана је Холцорова нумеричка метода одређивања кружних фреквенција система. Треба, дакле, узети да је амплитуда првог диска $A_1 = 1$ рад и претпоставити кружну фреквенцију ω па испитати да ли је задовољен услов (31).

На пример, у случају слободног вратила са два диска, (сл. 8.1.а), добијамо за услов (31) израз

$$J_1 \omega^2 A_1 + J_2 \omega^2 \left[A_1 - \frac{\omega^2}{c_1} J_1 A_1 \right] = 0.$$

За $A_1 = 1$ биће

$$(J_1 + J_2) \omega^2 - (J_1 J_2 / c_1) \omega^4 = 0,$$

одакле следи да је

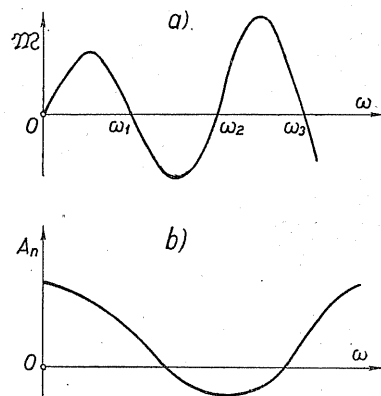
$$\omega^2 = 0, \quad \omega^2 = \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} c_1.$$

Прва вредност није корен фреквентне једначине, због услова (3), а друга се вредност поклапа са раније добијеном вредности.

Рачун се обично спроводи *табеларно*. Ако услов (31) није задовољен, тј. једнак нули, онда он представља потребни торзијски момент који треба да дејствује на последњем диску да би систем вршио принудне осцилације са претпостављеном кружном фреквенцијом ω , (сл. 8.6). Зависност овог момента од кружне фреквенције ω може се приказати и графички, (сл. 8.7.а), па се вредности кружних фреквенција слободних осцилација одређују из услова да је $\mathfrak{M} = 0$.

Како је $A_1 = 1$ то се помоћу једначина (32) могу одредити и амплитуде осталих дискова. Оне се добијају непосредно из саме таблице (колона 4). Када се познају амплитуде, могу се лако одредити и главни облици осцилација система.

Рачун итеративним путем треба поновити све дотле, док се не добије кружна фреквенција жељене тачности.



Сл. 8.7. — Дијаграм промене торзијског момента и амплитуде у зависности од кружне фреквенције

У случају вратила које је на једном крају уклештено фреквенција се одређује из услова да је амплитуда на томе месту једнака нули, (сл. 8.7.b).

На пример., у случају вратила са три диска, рачун је спроведен табеларно са почетном вредности $\omega=60$.

Таблица 8.2.

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]
				$[4]_{k-1} - [8]_{k-1}$	$[3] \cdot [4]$	$\sum_1^k [5]$		$[6] : [7]$
ω	k	J_k	$J_k \omega^2 \cdot 10^{-6}$	A_k	$J_k \omega^2 A_k \cdot 10^{-6}$	$\sum J_k \omega^2 A_k \cdot 10^{-6}$	$c \cdot 10^{-6}$	
ω^2		kgcm sec ²	kg cm	rad	kgcm rad	kgcm rad	kgcm	rad
60 3600	1	2000	7,200	1	7,200	7,200	10	0,720
	2	1000	3,600	0,280	1,008	8,208	15	0,547
	3	1500	5,400	-0,267	- 1,442	6,766		
70 4900	1	2000	9,800	1	9,800	9,800	10	0,980
	2	1000	4,900	0,020	0,098	9,898	15	0,660
	3	1500	7,350	-0,640	- 4,704	5,194		
80 6400	1	2000	12,800	1	12,800	12,800	10	1,280
	2	1000	6,400	-0,280	- 1,792	11,008	15	0,734
	3	1500	9,600	-1,014	- 9,734	- 1,274		
85 7225	1	2000	14,450	1	14,450	14,450	10	1,445
	2	1000	7,225	-0,445	- 3,215	11,235	15	0,749
	3	1500	10,838	-1,194	-12,941	- 1,706		
82,5 6806,25	1	2000	13,613	1	13,613	13,613	10	1,361
	2	1000	6,806	-0,361	- 2,457	11,196	15	0,746
	3	1500	10,207	-1,107	-11,299	- 0,103		
82 6724	1	2000	13,448	1	13,448	13,248	10	1,325
	2	1000	6,724	-0,325	- 2,185	11,263	15	0,751
	3	1500	10,086	-1,076	-10,853	0,410		

Из ње се види, да се приближна вредност налази између $82 < \omega < 82,5$. Тачна је вредност $\omega_1=82,3$ добијена решавањем фреквентне једначине. Истим поступком би се одредила и фреквенција другог главног облика осцилација, она износи $\omega_2=182,2 \text{ sec}^{-1}$.

Ова метода је нарочито погодна у пракси ако има више дискова. На пример, у случају машине са пет дискова: (1) осни регулатор, (2) замајцац, (3) спојница, (4) и (5) динамо машине, начин прорачуна за најнижу кружну фреквенцију дат је у табlici 8.3.

Холцерава метода се може применити и у случају *принудних Шорзијских осцилација*. Ако на пример, на први диск система са три степена слободe, дејствује поремећајни момент $\mathfrak{M} \cos \Omega t$, алгебарске једначине биће

$$\begin{aligned}
 J_1 \Omega^2 A_1 + c_1 (A_2 - A_1) &= -\mathfrak{M}, \\
 J_2 \Omega^2 A_2 - c_1 (A_2 - A_1) + c_2 (A_3 - A_2) &= 0, \\
 J_3 \Omega^2 A_3 - c_2 (A_3 - A_2) &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

Таблица 8.3.

ω	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]
60 3600	1	1000	3,600	1	3,600	3,600	10	0,360
	2	8000	28,800	0,640	18,432	22,032	35	0,629
	3	1500	5,400	-0,029	- 0,157	21,875	25	0,875
	4	3000	10,800	-0,904	- 9,763	12,112	40	0,303
	5	2000	7,200	-1,207	- 8,690	3,422		
70 4900	1	1000	4,900	1	4,900	4,900	10	0,490
	2	8000	39,200	0,510	19,992	24,892	35	0,711
	3	1500	7,350	-0,201	- 1,477	23,415	25	0,936
	4	3000	14,700	-1,137	-16,714	6,701	40	0,168
	5	2000	9,800	-1,305	-12,789	- 6,088		
65 4225	1	1000	4,225	1	4,225	4,225	10	0,423
	2	8000	33,800	0,577	19,503	23,728	35	0,678
	3	1500	6,338	-0,101	- 0,640	23,088	25	0,924
	4	3000	12,675	-1,025	-12,991	10,097	40	0,252
	5	2000	8,450	-1,277	-10,791	- 0,684		

па њиховим сабирањем добијамо услов

$$\sum_k J_k \Omega^2 A_k = -\mathfrak{M}. \quad (34)$$

Ако је A_1 амплитуда првог диска онда се из прве једначине (33) одређује амплитуда другог диска

$$A_2 = A_1 - \frac{\Omega^2}{c_1} J_1 A_1 - \frac{\mathfrak{M}}{c_1},$$

а из друге једначине и амплитуда трећег диска

$$A_3 = A_2 - \frac{\Omega^2}{c_2} (J_1 A_1 + J_2 A_2) - \frac{\mathfrak{M}}{c_2}.$$

На овај се начин могу све амплитуде изразити у зависности од A_1 . Уносећи ове вредности у (34) добијамо алгебарску једначину по A_1 која се може табеларно решити према Холцеровој схеми. Посао је у овоме случају много олакшан, јер су амплитуде принудних осцилација потпуно одређене.

На пример за вратило са три диска, (таблица 8.4.) рачун је спроведен табеларно за $\Omega = 60 \text{ sec}^{-1}$ и $\mathfrak{M}_1 = 5 \text{ tm}$:

Таблица 8.4.

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]
			$\begin{matrix} [4]_{k-2} \\ -[8]_{k-1} \\ -[9]_{k-1} \end{matrix}$	$[3] \cdot [4]$	$\sum_1^k [5]$		$[6]:[7]$	$\frac{\mathfrak{M}}{c}$
k	J_k	$J_k \Omega^2 \cdot 10^{-6}$	A_k	$J_k \Omega^2 A_k \cdot 10^{-6}$	$\sum J_k \Omega^2 A_k \cdot 10^{-6}$	$c \cdot 10^{-6}$		
	kgcm. sec ²	kgcm	rad	kgcm rad	kgcm rad	kgcm sec	rad	rad
1	2000	7,200	A_1	$7,2 A_1$	$7,2 A_1$	10	$0,72 A_1$	0,05
2	1000	3,600	$0,280 A_1 - 0,05$	$1,008 A_1 - 0,180$	$8,208 A_1 - 0,180$	15	$0,547 A_1 -$ $-0,012$	0,03
3	1500	5,400	$-0,267 A_1 - 0,068$	$-1,442 A_1 - 0,367$	$6,766 A_1 - 0,547$			

Из рубрике [6] добијамо: $(6,766 A_1 - 0,547) 10^6 = -\mathfrak{M} = -0,5 \cdot 10^6$;

$$A_1 = 0,007; \quad A_2 = -0,048; \quad A_3 = -0,070.$$

ПРИМЕРИ

8.1. На челично вратило, пречника $d=10$ см, насађена су три диска на једнаким растојањима $l_1=l_2=1$ м (сл. 8.1.а). Крутости су једнаке $c_1=c_2=c$. Пречник трећег диска је $D_3=50$ см, тежине 200 kg, $J_2=2J_3$, $J_1=3J_3$, $J_3=J$. Одредити кружне фреквенције система.

[Решење. — Према (21) биће

$$f(u=J_3 \omega^2/c) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2-2u & -1 \\ 0 & -1 & 1-u \end{vmatrix} = 3u^2 - 7u + 3 = 0;$$

$$u = \frac{7 \mp \sqrt{13}}{6} = 0,565; \quad 1,77.$$

Крутог вратила је

$$c = G I_0 / l = G d^4 \pi / 32 l = 8 \cdot 10^5 \cdot 10^4 \cdot 3,14 / 32 \cdot 100 = 7,85 \cdot 10^6 \text{ kgcm},$$

а момент инерције диска износи

$$J_3 = M_3 R_3^2 / 2 = G_3 R_3^2 / 2g = 200 \cdot 625 / 2 \cdot 981 = 63,7 \text{ kgcm sec}^2,$$

па је $c/J = 12,4 \cdot 10^4$, те су

$$\omega^2 = uc/J; \quad \omega = \sqrt{uc/J}; \quad \omega_1 = 265 \text{ sec}^{-1}; \quad \omega_2 = 469 \text{ sec}^{-1}.$$

8.2. Код редуктора (сл. 8.2.) су познате следеће величине: $J_1=50$ kgcm sec², $J_3=30$ kgcm sec², $J_{21}=20$ kgcm sec², $J_{22}=10$ kgcm sec², $c_1=6 \cdot 10^6$ kgcm, $c_2=4 \cdot 10^6$ kgcm, и бројеви зубаца $z_{21}=40$ и $z_{22}=20$. Одредити кружне фреквенције осциловања редуктора.

[Решење. — Пошто су преносни однос $i=20/40=1/2$; $k=2$; то су редуковани momenti инерције $J_2^*=20+4 \cdot 10=60$ kgcm sec²; $J_3^*=4 \cdot 30=120$ kgcm sec², редукована крутог $c_2^*=4 \cdot 4 \cdot 10^6=16 \cdot 10^6$ kgcm то је, према (28b) фреквентна једначина:

$$f(\lambda) = \lambda^2 - [6(50+60)/50 \cdot 60 + 16(60+120)/60 \cdot 120] 10^6 \lambda + (50+60+120) \cdot 96 \cdot 10^{12} / 50 \cdot 60 \cdot 120 = 0,$$

односно

$$f(\lambda) = 3 \lambda^2 - 186 \cdot 10^4 \lambda + 184 \cdot 10^6 = 0.$$

Корени су:

$$\lambda = (186 \mp 116,20) \cdot 10^4 / 6, \quad \text{то јест } 11,63 \cdot 10^4 \text{ и } 50,37 \cdot 10^4,$$

те су кружне фреквенције

$$\omega_1 = 341 \text{ sec}^{-1}, \quad \omega_2 = 708 \text{ sec}^{-1}.$$

8.3. Одредити кружне фреквенције конзолног хомогеног осцилатора са четири диска.

[Решење. — Овде је кружна фреквенција

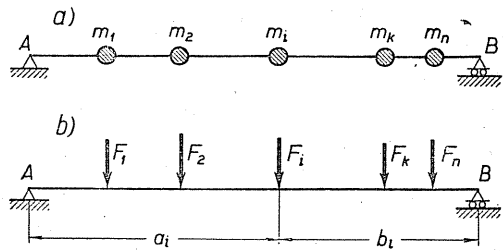
$$\omega = 2 \omega_0 \sin [(2 \nu - 1) \pi / 9 \cdot 2], \quad \omega_0 = \sqrt{c/J},$$

па су вредности фреквенција (редом): $0,347 \omega_0$; ω_0 ; $1,532 \omega_0$ и $1,879 \omega_0$.

9. ПОПРЕЧНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ ЕЛАСТИЧНИХ ГРЕДА СА ВИШЕ КОНЦЕНТРИСАНИХ МАСА

4.

9.1. Прости статички носачи. — На простој еластичној греди, AB , распона l , (сл. 9.1. *a*), насађено је више концентрисаних маса на удаљењима a_i и b_i од ослонаца A и B . Угиб пресека гредe, чију масу занемарујемо, испод масе m_i , занемарујући утицај смицања и обртање пресека, је



$$f_{si} = y_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} F_k =$$

$$= \alpha_{i1} F_1 + \alpha_{i2} F_2 + \dots + \alpha_{in} F_n, \quad (1)$$

Сл. 9.1. — Попречне осцилације лаке гредe са више концентрисаних маса

где су α_{ik} утицајни коефицијенти, ($\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$), а F_k тежине концентрисаних маса, (сл. 9.1. *b*).

Решавањем овог система једначина можемо одредити силе F_i које производе та померања. На пример, за три силе имали бисмо :

$$y_1 = \alpha_{11} F_1 + \alpha_{12} F_2 + \alpha_{13} F_3; \quad F_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} [y_1 K_{11} + y_2 K_{21} + y_3 K_{31}],$$

$$y_2 = \alpha_{21} F_1 + \alpha_{22} F_2 + \alpha_{23} F_3; \quad F_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} [y_1 K_{12} + y_2 K_{22} + y_3 K_{32}],$$

$$y_3 = \alpha_{31} F_1 + \alpha_{32} F_2 + \alpha_{33} F_3; \quad F_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} [y_1 K_{13} + y_2 K_{23} + y_3 K_{33}],$$

где су детерминанте

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}; \Delta_1 = \begin{vmatrix} y_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ y_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ y_3 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & y_1 & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & y_2 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & y_3 & \alpha_{33} \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & y_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & y_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & y_3 \end{vmatrix}.$$

Изрази K_{ik} су кофактори или алгебарски компленти елемената y_i (тј. субдетерминанте са својим предзнаком), док су количници K_{ik}/Δ редуковани кофактори.

Према томе су силе које производе померања

$$F_i = \sum_{k=1}^n \frac{K_{ki}}{\Delta} y_k. \quad (1a)$$

Кинетичка и потенцијална енергија овог система су

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{y}_i^2, \quad E_p = A_{aj} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} F_i y_i = \sum_i \frac{1}{2} \frac{\Delta_i}{\Delta} y_i = \sum_i \sum_k \frac{1}{2} \frac{K_{ki}}{\Delta} y_i y_k, \quad (1b)$$

па Лагранжеве једначине друге врсте дају систем једначина

$$\Delta m_i \ddot{y}_i + \sum_k K_{ki} y_k = 0, \quad (1c)$$

односно у развијеном облику

$$\Delta m_1 \ddot{y}_1 + K_{11} y_1 + K_{21} y_2 + K_{31} y_3 = 0, \quad /210$$

$$\Delta m_2 \ddot{y}_2 + K_{12} y_1 + K_{22} y_2 + K_{32} y_3 = 0, \quad /212$$

$$\Delta m_3 \ddot{y}_3 + K_{13} y_1 + K_{23} y_2 + K_{33} y_3 = 0. \quad /213$$

Када прву једначину помножимо са α_{11} , другу са α_{12} и трећу са α_{13} и саберемо добићемо диференцијалну једначину за прву масу

$$y_1 + \alpha_{11} m_1 \ddot{y}_1 + \alpha_{12} m_2 \ddot{y}_2 + \alpha_{13} m_3 \ddot{y}_3 = 0$$

јер је према особинама детерминанти*

$$\alpha_{11} K_{11} + \alpha_{12} K_{12} + \alpha_{13} K_{13} = \Delta; \quad \alpha_{11} K_{21} + \alpha_{12} K_{22} + \alpha_{13} K_{23} = 0; \dots$$

Из овога видимо да се може лако написати диференцијална једначина за сваку масу (m_i) када се у изразу (1) уместо сила F_k ставе силе инерције ($-m_k \ddot{y}_k$).

* Р. Кашанин, Виша Математика I, Београд, 1949.

Када се горња детерминанта развије добија се *фреквенцини полином*

$$f(\lambda = \omega^2) = \sum_{r=n}^0 (-1)^r S_r \lambda^r = 0. \quad (6)$$

Он је n -ог степена по сопственој вредности λ , односно $2n$ -ог степена по кружној фреквенцији ω . Коефицијенти S_r јесу скалари r -ог реда детерминанте коефицијената p_{ik} .

За два степена слободе осциловања било би

$$n=2; f(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-p_{11}\lambda & -p_{12}\lambda \\ -p_{21}\lambda & 1-p_{22}\lambda \end{vmatrix} = S_2\lambda^2 - S_1\lambda + 1 = 0; S_0 = 1;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} = S_2; S_1 = p_{11} + p_{22}.$$

За $n=3$ биће $f(\lambda) = -S_3\lambda^3 + S_2\lambda^2 - S_1\lambda + 1 = 0;$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = S_3; S_2 = \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{31} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix}; S_1 = p_{11} + p_{22} + p_{33}.$$

Корени полинома (6) су сопствене вредности $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots < \lambda_n$ и њима одговарају главни облици осциловања

$$\frac{A_{1s}}{K_{n1}^{(s)}} = \frac{A_{2s}}{K_{n2}^{(s)}} = \dots = \frac{A_{ks}}{K_{nk}^{(s)}} = \dots = \frac{A_{ns}}{K_{nn}^{(s)}} = C_s. \quad (7)$$

Слично ранијем поступку (чл. 1, обр. 33) мешовити утицајни коефицијенти се одређују помоћу инфлуентних функција

$$\text{за простиу греду } \alpha_{ik} = \alpha_{ki} = \frac{k}{6} \left\{ \frac{b}{l} \cdot \frac{z}{l} \left[1 - \left(\frac{b}{l} \right)^2 - \left(\frac{z}{l} \right)^2 \right] \right\};$$

$$z = z_i < a_k = l - b_k; \quad b = b_k; \quad (8a)$$

$$\text{за конзолу } \alpha_{ik} = \alpha_{ki} = \frac{k}{6} \left[3 \frac{a}{l} \left(\frac{z}{l} \right)^2 - \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right]; \quad k = \frac{l^3}{\mathfrak{B}}; \quad (8b)$$

или помоћу деформационог рада

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} = \sum \frac{1}{\mathfrak{B}} \int M_i^{(1)} M_k^{(1)} dz, \quad (8c)$$

где је $M_i^{(1)}$ момент услед јединичне силе која дејствује у пресеку (i) а $M_k^{(1)}$ момент услед дејства силе $F=1$ у пресеку (k). Знак збира показује да треба узети моменте у сваком пољу где се мењају.

На пример, нека су на лакој греди AB само две једнаке концентрисане масе (m) на растојањима $l/3$ од ослоњаца A и B (сл. 9.2.a) онда је, због симетрије оптерећења, $\alpha_{11} = \alpha_{22}$. Стаavimo у пресек (1) јединичну силу $F=1$ (сл. 9.2.b) онда су отпори ослоњаца $2/3$ и $1/3$, па је утицајни коефицијент

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{1}{\mathfrak{B}} \int_0^{l/3} \left(\frac{2}{3} z\right)^2 dz + \frac{1}{\mathfrak{B}} \int_0^{2l/3} \left(\frac{1}{3} z\right)^2 dz = \frac{8k}{486}$$

где је $k = l^3/\mathfrak{B}$ коефицијент гибкости греде.

Да бисмо одредили коефицијент α_{ik} ставимо у пресеке 1 (1) и k (2) јединичне силе (сл. 9.2. c, d) и узмимо моменте у пресецима (p, q, r) биће:

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{\mathfrak{B}} \left\{ \int_0^{l/3} \frac{1}{3} z \cdot \frac{2}{3} z dz + \int_{l/3}^{2l/3} \frac{1}{3} z \left[\frac{2}{3} z - \left(z - \frac{l}{3} \right) \right] dz + \int_0^{l/3} \frac{1}{3} z \cdot \frac{2}{3} z dz \right\} = \frac{7k}{486}$$

Коефицијенти су $p_{11} = p_{22} = 8mk/486$, $p_{12} = p_{21} = 7mk/486$. Сменом $u = m k \omega^2 / 486$ биће

$$f(u) = \begin{vmatrix} 1-8u & -7u \\ -7u & 1-8u \end{vmatrix} = 15u^2 - 16u + 1 = 0;$$

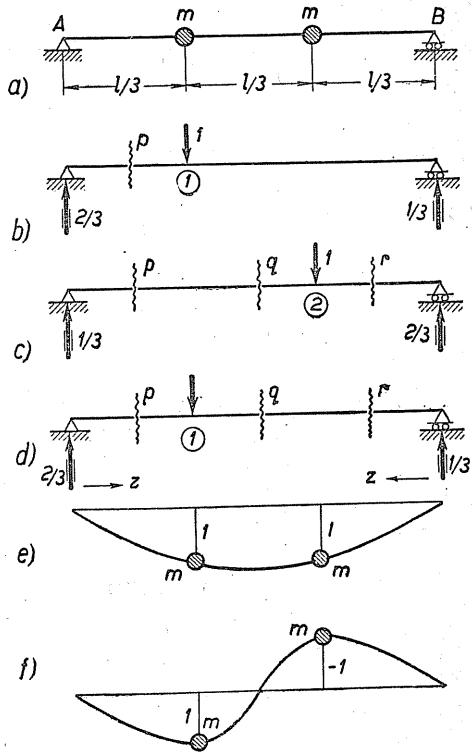
$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = S_2; \quad S_1 = 16; \quad u_{1,2} = \frac{16 \mp \sqrt{256-60}}{30} = \frac{1}{5}; \quad u_2 = 1;$$

$$\omega = \sqrt{\frac{486 u}{mk}}; \quad \omega_1 = 5,69 \sqrt{\frac{\mathfrak{B}}{ml^3}}; \quad \omega_2 = 22,04 \sqrt{\frac{\mathfrak{B}}{ml^3}}.$$

Како су према (7) односи

$$\frac{A_{1s}}{7u} = \frac{A_{2s}}{1-8u}; \quad \frac{A_{1s}}{1} = \frac{A_{2s}}{1-8u}; \quad \frac{A_{11}}{1} = \frac{A_{21}}{1}; \quad \frac{A_{12}}{1} = \frac{A_{21}}{-1}$$

то су главни облици приказани на сл. 9.2.e, f. Први облик одговара основном хармонику, други првом вишем хармонику. У овом случају постоји један чвор (C).

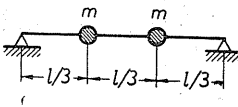
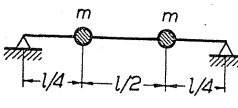
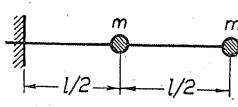
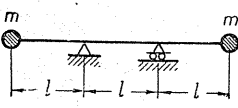
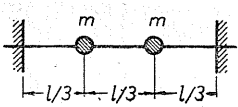
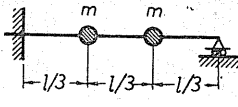
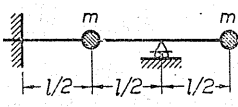


Сл. 9.2. — Две концентрисане масе на простој греди

За важније случајеве за два степена слободе осциловања резултати су дати у доњој табlici.

Таблица 9.1.

$$k = l^3/B$$

Редни број	Случај оптерећења	α_{ik}	$\omega^2_{1,2}$
1		$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{8}{486} k$ $\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{7}{486} k$	$\frac{486}{15 mk} (8 \mp 7)$ $\omega_1 = \frac{5,69}{\sqrt{mk}}; \omega_2 = \frac{22,04}{\sqrt{mk}}$
2		$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{9}{768} k$ $\alpha_{21} = \alpha_{12} = \frac{7}{768} k$	$\frac{24}{mk} (9 \mp 7)$ $\omega_1 = \frac{6,93}{\sqrt{mk}}; \omega_2 = \frac{19,57}{\sqrt{mk}}$
3		$\alpha_{11} = \frac{2}{48} k$ $\alpha_{22} = \frac{16}{48} k$ $\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{5}{48} k$	$\frac{48}{7 mk} (9 \mp \sqrt{74})$ $\omega_1 = \frac{1,65}{\sqrt{mk}}; \omega_2 = \frac{10,94}{\sqrt{mk}}$
4		$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{4}{6} k$ $\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{6} k$	$\frac{6}{(4 \mp 1) mk}$ $\omega_1 = \frac{1,10}{\sqrt{mk}}; \omega_2 = \frac{1,41}{\sqrt{mk}}$
5		$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{8}{3^7} k$ $\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{11}{2 \cdot 3^7} k$	$\frac{162}{5 mk} (16 \mp 11)$ $\omega_1 = \frac{12,73}{\sqrt{mk}}; \omega_2 = \frac{29,57}{\sqrt{mk}}$
6		$\alpha_{11} = \frac{11}{3^7} k$ $\alpha_{22} = \frac{20}{3^7} k$ $\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{23}{2 \cdot 3^7} k$	$\frac{162}{13 mk} (31 \mp \sqrt{610})$ $\omega_1 = \frac{8,86}{\sqrt{mk}}; \omega_2 = \frac{26,34}{\sqrt{mk}}$
7		$\alpha_{11} = \frac{7}{3 \cdot 2^8} k$ $\alpha_{22} = \frac{80}{3} \cdot 2^8 k$ $\alpha_{12} = \alpha_{21} = -\frac{12}{3 \cdot 2^8} k$	$\frac{12}{13 mk} (87 \mp \sqrt{5905})$ $\omega_1 = \frac{3,06}{\sqrt{mk}}; \omega_2 = \frac{12,30}{\sqrt{mk}}$

Често се ради лакшег рачунања уместо сопствене вредности узима њена реципрочна вредност $z=1/\lambda$, па фреквентни полином (6) постаје

$$f(z=1/\omega^2) = \begin{vmatrix} z-p_{11} & -p_{12} & \dots & -p_{1n} \\ -p_{21} & z-p_{22} & \dots & -p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p_{n1} & -p_{n2} & \dots & z-p_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{r=0}^n (-1)^r S_r z^{n-r} = 0 \quad (9)$$

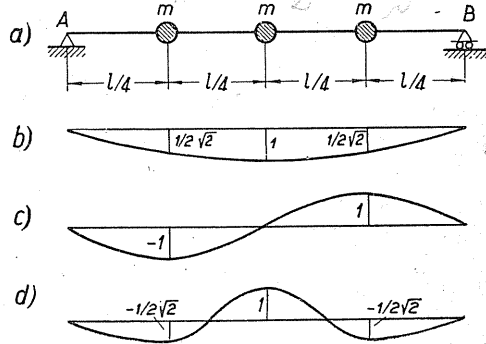
где су S_r скалари r -ог реда детерминанте коефицијената p_{ik} . Нове су сопствене вредности $z_1 = z_{\max} > z_2 > z_3 \dots > z_n$. Првој вредности одговара основни облик осциловања.

На пример, у случају просте греде оптерећене са три концентрисане масе (сл. 9.3.a) због симетрије оптерећења биће утицајни коефицијенти $\alpha_{11}=\alpha_{33}$; $\alpha_{12}=\alpha_{21}=\alpha_{23}=\alpha_{32}$; $\alpha_{13}=\alpha_{31}$.

Применом обрасца (8a) добијамо коефицијенте

α_{ik}	1	2	3	f_i	p_{ik}
1	$9u$	$11u$	$7u$	$27u$	$\alpha_{ik} m$
2	$11u$	$16u$	$11u$	$38u$	
3	$7u$	$11u$	$9u$	$27u$	

$u=k/768$; $k=l^3/B$.



Сл. 9.3. — Осцилације три масе на простој греди

Сменом $z=1/mu^2$ биће

$$f\left(z = \frac{1}{mu \omega^2}\right) = \begin{vmatrix} z-9 & -11 & -7 \\ -11 & z-16 & -11 \\ -7 & -11 & z-9 \end{vmatrix} = z^3 - S_1 z^2 + S_2 z - S_3 = z^3 - 34 z^2 + 78 z - 28 = 0;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{vmatrix} = S_3 = 28; \quad S_2 = \begin{vmatrix} 16 & 11 \\ 11 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 11 & 16 \end{vmatrix} = 78; \quad S_1 = 9+16+9=34,$$

па су корени

$z_1 = 16 + 11\sqrt{2}$; $z_2 = 2$; $z_3 = 16 - 11\sqrt{2}$;

и главни облици осциловања (сл. 9.3. b, c, d)

$$\begin{matrix} A_{1s} & A_{2s} & A_{3s} \\ \begin{vmatrix} -11 & -7 \\ z_s-16 & -11 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_s-9 & -7 \\ -11 & -11 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_s-9 & -11 \\ -11 & z_s-16 \end{vmatrix} \end{matrix} ; \begin{matrix} z_1) \sqrt{2}/2 : 1 : \sqrt{2}/2; \\ z_2) +1 : 0 : -1; \\ z_3) \sqrt{2}/2 : -1 : \sqrt{2}/2. \end{matrix}$$

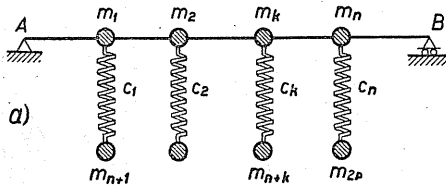
Основни хармоник је без чвора, сваки виши има онолико чворова кога је реда (први један чвор, други два чвора).

Кружне фреквенције су

$$\omega_s^2 = \frac{1}{m u z_s} ; \quad \omega_s = \sqrt{\frac{768}{m k z_s}} ; \quad \omega_1 = \frac{4,93}{\sqrt{m k}} ; \quad \omega_2 = \frac{19,6}{\sqrt{m k}} ; \quad \omega_3 = \frac{39,6}{\sqrt{m k}}$$

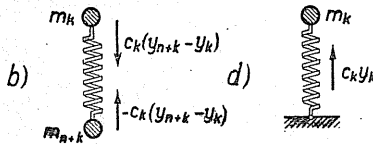
Када се о масе (m_k) обесе нове масе (m_{n+k}) помоћу опруга крутости c_k (сл.9.4.a), систем има два пушта више степени слободе (2n).

На угибе пресека греде испод маса m_k утичу и силе еластичности опруга, тако да је сада угиб

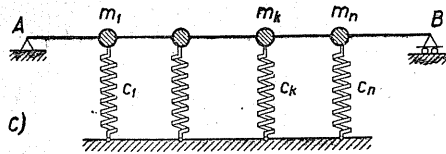


$$y_i = \sum \alpha_{ik} [F_k + c_k (y_{n+k} - y_k)] .$$

Стављајући уместо силе F_k силу инерције ($-m_k \ddot{y}_k$) систем диференцијалних једначина (2) сада постаје



$$i \downarrow \rightarrow k \quad y_i + \sum_k [m_k \ddot{y}_k - c_k (y_{n+k} - y_k)] \alpha_{ik} = 0 ; \quad (10)$$



$$m_{n+k} \ddot{y}_{n+k} = -c_k (y_{n+k} - y_k) .$$

Сл. 94. — Осцилације система са 2n маса и n опруга

Други систем једначина показује да додатне масе, (сл. 9.4.b), осцилују хармонијски.

Уносећи једначине овог система у први добија се

$$y_i + \sum_{k=1}^n (m_k \ddot{y}_k + m_{n+k} \ddot{y}_{n+k}) \alpha_{ik} = 0 ; \quad (11)$$

$$-c_k y_k + c_k y_{n+k} + m_{n+k} \ddot{y}_{n+k} = 0 .$$

Претпостављајући решење као и у првом случају, (3), добија се сложенија фреквентна једначина:

$$\Delta_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-p_{11}\lambda & -p_{12}\lambda & \dots & -p_{1n}\lambda & -p_{1,n+1}\lambda & -p_{1,n+2}\lambda & \dots \\ -p_{21}\lambda & 1-p_{22}\lambda & \dots & -p_{2n}\lambda & -p_{2,n+1}\lambda & -p_{2,n+2}\lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -c_1 & 0 & \dots & 0 & (c_1 - m_{n+1}\lambda) & 0 & \dots \\ 0 & -c_2 & \dots & 0 & 0 & (c_2 - m_{n+2}\lambda) & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

На пример, у случају просте греде са две масе и једном опругом систем једначина је

$$y_1 + (m_1 \ddot{y}_1 + m_2 \ddot{y}_2) \alpha_{11} = 0, \quad -c_1 y_1 + c_1 y_2 + m_2 \ddot{y}_2 = 0$$

и фреквентна једначина

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - m_1 \alpha_{11} \lambda & -m_2 \alpha_{11} \lambda \\ -c_1 & c_1 - m_2 \lambda \end{vmatrix} = \\ = m_1 m_2 \alpha_{11} \lambda^2 - [c_1 (m_1 + m_2) \alpha_{11} + m_2] \lambda + c_1 = 0.$$

За случај просте греде са једнаким масама, на растојањима по $\frac{1}{3}l$ од ослонаца, и једнаким крутостима (c), утицајни коефицијенти су

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 8u; \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = 7u, \quad u = l^3/486 \mathfrak{B},$$

па је систем једначина

$$y_1 + (m_1 \ddot{y}_1 + m_3 \ddot{y}_3) \alpha_{11} + (m_2 \ddot{y}_2 + m_4 \ddot{y}_4) \alpha_{12} = 0; \\ y_2 + (m_1 \ddot{y}_1 + m_3 \ddot{y}_3) \alpha_{21} + (m_2 \ddot{y}_2 + m_4 \ddot{y}_4) \alpha_{22} = 0; \\ -c_1 y_1 + c_1 y_3 + m_3 \ddot{y}_3 = 0; \\ -c_2 y_2 + c_2 y_4 + m_4 \ddot{y}_4 = 0,$$

и фреквентна једначина

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-p_{11}\lambda & -p_{12}\lambda & -p_{13}\lambda & -p_{14}\lambda \\ -p_{21}\lambda & 1-p_{22}\lambda & -p_{23}\lambda & -p_{24}\lambda \\ -c_1 & 0 & c_1 - m_3\lambda & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & c_2 - m_4\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

она је за $m_i = m, c_i = c,$

$$f(\lambda) = \lambda^4 - 2 \frac{\alpha_{11} + 2c\Delta}{m\Delta} \lambda^3 + \\ + \frac{1+6c\alpha_{11}+4c^2\Delta}{m^2\Delta} \lambda^2 - 2c \frac{1+2c\alpha_{11}}{m^3\Delta} \lambda + \frac{c^2}{m^4\Delta} = 0.$$

Ако би све горње масе биле једнаке нули онда би систем (2c) постао

$$\begin{aligned} \downarrow \rightarrow k \\ i \quad y_i + \sum_k m_{n+k} \ddot{y}_{n+k} \alpha_{ik} = 0, \\ -c_k y_k + c_k y_{n+k} + m_{n+k} \ddot{y}_{n+k} = 0. \end{aligned} \quad (13a)$$

Систем опет има n степени слободe.

На пример, у случају прсте греде са $m_1=0$, $m_2 \neq 0$, биће фреквентна једначина

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda m_2 \alpha_{11} \\ -c_1 & c_1 - m_2 \lambda \end{vmatrix} = c_1 - m_2 (1 + c_1 \alpha_{11}) \lambda = 0,$$

тј.

$$\lambda = \frac{1}{m_2 \left(\alpha_{11} + \frac{1}{c_1} \right)} = \frac{c^*}{m_2},$$

где је $c^* = c_1 / (1 + c_1 \alpha_{11})$ редна веза.

Обрнуто, ако су све масе $m_{n+k} = 0$ а доњи крајеви опруга везани за непомичну подлогу, (сл. 9.4.c), систем има опет n степени слободe. Сада је систем једначина

$$y_i + \sum_k (m_k \ddot{y}_k + c_k y_k) \alpha_{ik} = 0. \quad (13b)$$

За горњи пример греде са две једнаке масе биће

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 + (c - m\lambda) \alpha_{11} & (c - m\lambda) \alpha_{12} \\ (c - m\lambda) \alpha_{21} & 1 + (c - m\lambda) \alpha_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{aligned} \alpha_{11} = \alpha_{22}; \quad \alpha_{12} = \alpha_{21}; \\ \Delta = \alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2; \end{aligned}$$

тј.

$$\lambda^2 - 2 \frac{\alpha_{11} + c\Delta}{m\Delta} \lambda + \frac{1 + 2c\alpha_{11} + c^2\Delta}{m^2\Delta} = 0.$$

9.2. Континуални носачи. — У случају да су масе насађене на континуалном носачу са више ослонаца, тада приликом одређивања утицајних коефицијената треба узети у обзир и утицаје *статичких непознатих величина* — реакција сувишних ослонаца услед јединичних сила.

Носач са два распона и три крута ослонаца на истом нивоу, (сл. 9.5.a), је *једанпут статички неодређен*, па претходно треба одредити отпор сувишног ослонаца B услед јединичних сила у појединим пољима распона. Статичку непознату $F_B^1 = Y_B^1$ услед дејства јединичне силе $F_1 = 1$ у првом распону, (сл. 9.5.b), одређујемо из услова да

је угиб тога ослоњаца једнак нули*

$$f_B = \alpha_{B1} - \alpha_{BB} Y_B^1 = 0, \text{ па је } Y_B^1 = \alpha_{B1} / \alpha_{BB}.$$

Утицајни коефицијент у пресеку (1) услед силе $F_1 = 1$ и статичке непознате Y_B^1 биће

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^* &= \alpha_{11} - \alpha_{1B} Y_B^1 = \\ &= \alpha_{11} - \frac{(\alpha_{1B})^2}{\alpha_{BB}}. \end{aligned} \quad (14a)$$

Утицајни коефицијенти у пресеку (2) услед ових сила износе

$$\begin{aligned} \alpha_{21}^* &= \alpha_{21} - \alpha_{2B} Y_B^1 = \\ &= \alpha_{21} - \frac{\alpha_{1B} \alpha_{2B}}{\alpha_{BB}}. \end{aligned} \quad (14b)$$

На исти начин одредили бисмо и статичку непознату за силу $F_2 = 1$ у другом распону

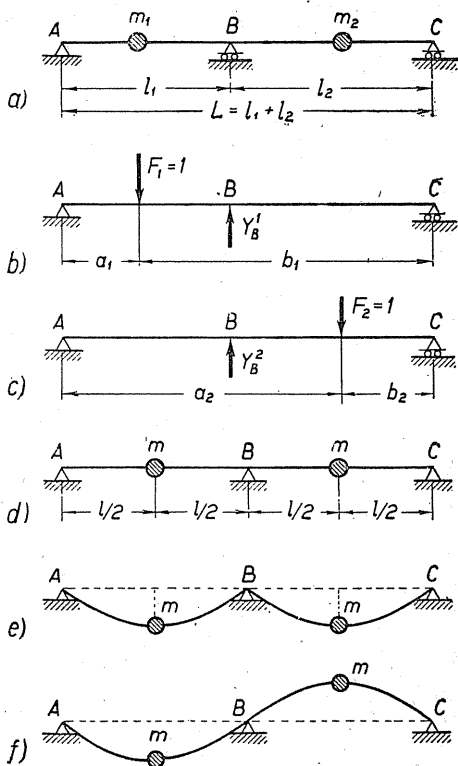
$$f_B = \alpha_{B2} - \alpha_{BB} Y_B^2 = 0,$$

па је

$$Y_B^2 = \alpha_{B2} / \alpha_{BB}$$

тј.

$$\begin{aligned} \alpha_{22}^* &= \alpha_{22} - \alpha_{2B} Y_B^2 = \\ &= \alpha_{22} - \frac{(\alpha_{2B})^2}{\alpha_{BB}}. \end{aligned} \quad (14c)$$



Сл. 9.5. — Осцилације континуалног носача са два распона и две масе

Оваквим начином (различитим од Тимошенка**) избегли смо одређивање статичких непознатих и добили скупне обрасце за утицајне коефицијенте. У горњим обрасцима претпоставили смо све утицајне коефицијенте *позитивним*, а статичке непознате *усмереним навише*.

Фреквентна једначина има и даље облик (5) са новим утицајним коефицијентима.

* Отворност материјала, чл. 10.2.

** S. Timoschenko — *Vibration Problems in Engineering*. III ed. New York, page 271.

У специјалном случају носача са једнаким распонима и једнаким масама (m) на срединама распона, (сл. 9.5.d), биће:

α_{ik}	1	2	B	α_{ik}^*	1	2	$u = k/3 \cdot 16^2; k = L^3/3$	ρ_{ik}^*	1	2
1	9u			1	$2^3/16u$	$-9/16u$	$L = 2l$	1	$2^9/16mu$	$-9/16mu$
2	7u	9u		2	$-9/16u$	$2^3/16u$	$S_2^* = 1^4/8 m^2 u^2$	2	$-9/16mu$	$2^3/16mu$
B	11u	11u	16u				$S_1^* = 2^3/8 m u$			

$$f(\lambda) = S_2^* \lambda^2 - S_1^* \lambda + 1 = 14 m^2 u^2 \lambda^2 - 23 m u \lambda + 8 = 0,$$

$$\lambda_1 = 1/2 mu, \quad \lambda_2 = 8/7 mu.$$

Односи амплитуда су

$$\frac{A_1^{(s)}}{m \alpha_{12}^* \lambda_s} = \frac{A_2^{(s)}}{1 - m \alpha_{11}^* \lambda_s} \quad \text{тј.} \quad \frac{A_1^{(1)}}{-1} = \frac{A_2^{(1)}}{1}; \quad \frac{A_1^{(2)}}{-1} = \frac{A_2^{(2)}}{-1},$$

па добијамо исте главне облике осцилација као и на сл. 9.5. e, f које смо добили користећи се симетријом греде и оптерећења.

На исти начин поступили бисмо и у случају континуалног носача са четири ослоња и три распона са по једном масом у сваком пољу, (сл. 9.6.). Носач је *двајуш сташички неодређен*, па статичке непознате одређујемо из услова:

$$\left\{ \begin{aligned} f_B &= \alpha_{Bi} - \alpha_{BB} Y_B^i - \alpha_{BC} Y_C^i = 0, \\ f_C &= \alpha_{Ci} - \alpha_{CB} Y_B^i - \alpha_{CC} Y_C^i = 0, \end{aligned} \right. \quad i = 1, 2, 3$$

те су

$$Y_B^i = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \alpha_{Bi} & \alpha_{BC} \\ \alpha_{Ci} & \alpha_{CC} \end{vmatrix}, \quad Y_C^i = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \alpha_{BB} & \alpha_{Bi} \\ \alpha_{CB} & \alpha_{Ci} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{BB} & \alpha_{BC} \\ \alpha_{CB} & \alpha_{CC} \end{vmatrix}.$$

Утицајни коефицијенти биће:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_{ii}^* &= \alpha_{ii} - \alpha_{iB} Y_B^i - \alpha_{iC} Y_C^i, \\ \alpha_{ki}^* &= \alpha_{ki} - \alpha_{kB} Y_B^i - \alpha_{kC} Y_C^i. \end{aligned} \right. \quad (15)$$

За случај да су распони једнаки а такође и масе које се налазе на срединама

распона (сл. 9.6.a), биће:

α_{ik}	1	2	3	B	C	(1)	(2)	(3)	α_{ik}^{**}	1	2	3
1	25u				Y_B^i	$29/40$	$23/40$	$-6/40$	1	$84/40u$		
2	39u	81u			Y_C^i	$-6/40$	$23/40$	$29/40$	2	$-27/40u$	$66/40u$	
3	17u	39u	25u						3	$9/40u$	$-27/40u$	$84/40u$
B	38u	69u	31u	64u		$u = k/3 \cdot 36^2$ $k = L^3/3B; L = 3l; z = 1/(mu\lambda/40)$						
C	31u	69u	38u	56u	64u							

$$\begin{vmatrix} z-84 & 27 & -9 \\ 27 & z-66 & 27 \\ -9 & 27 & z-84 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 54 & z-93 \\ 0 & z-66 & 27 \\ 75-z & 27 & z-84 \end{vmatrix} =$$

$$= (75-z)(z^2-159z+4680) = 0;$$

$$z_1 = 39;$$

$$z_2 = 75;$$

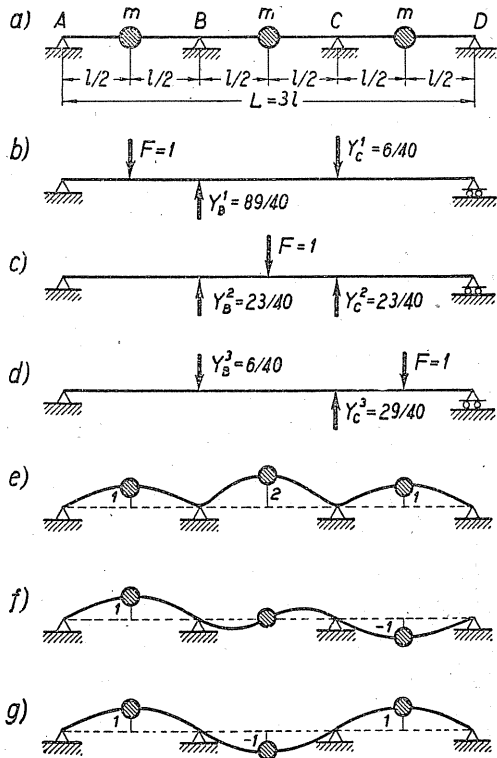
$$z_3 = 120;$$

$$\omega_1 = 6,92 C;$$

$$\omega_2 = 8,75 C;$$

$$\omega_3 = 12,15 C;$$

$$C = \sqrt{B/ml^3}.$$



Сл. 9.6. — Осцилације континуалног носача са три једнака распона и три једнаке масе

Односи амплитуда су:

$$\frac{A_{1s}}{9} = \frac{A_2}{-27} = \frac{A_{3s}}{27}; \quad \lambda_s \begin{vmatrix} K_{31} & K_{32} & K_{33} \\ (1) & 1 & -1 & 1 \\ (2) & -1 & 0 & 1 \\ (3) & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Главни облици осцилација су приказани на сл. 9.6. e, f, g.

У случају да је леви крај греде уклешћен, треба континуални носач претворити у конзолу и применити предњи постојањак.

На пример, у случају конзоле подупрте на слободном крају и са масом на средини распона, биће: $\alpha_{11} = 1/24 k$, $\alpha_{B1} = 5/48 k$, $\alpha_{BB} = 1/8 k$, $\alpha_{11}^* = 1/768 k$, те добијамо исту вредност као у табlici 1.1.3.a.

За случај да је леви крај греде на сл. 9.5. уклешћен биће:

$$\begin{cases} \alpha_{B1} - \alpha_{BB} Y_B^1 - \alpha_{BC} Y_C^1 = 0; \\ \alpha_{C1} - \alpha_{CB} Y_B^1 - \alpha_{CC} Y_C^1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{B2} - \alpha_{BB} Y_B^2 - \alpha_{BC} Y_C^2 = 0; \\ \alpha_{C2} - \alpha_{CB} Y_B^2 - \alpha_{CC} Y_C^2 = 0; \end{cases}$$

те одређујемо статичке непознате. Подаци су дати у таблицама:

α_{ik}	1	2	B	C		(1)	(2)	α_{ik}^*	1	2
1	2u				Y_B^i	25/56	43/56	1	20/56u	-9/56u
2	8u	54u			Y_C^i	-3/56	22/56	2	-9/56u	33/56u
B	5u	28u	16u							
C	11u	81u	40u	128u						

$u = k/6 \cdot 64$; $k = 1^3/3$; $L = 2l$; $m\lambda/56 = 1/z$.

Фреквентна једначина и корени су:

$$\begin{vmatrix} z-20 & 9 \\ 9 & z-38 \end{vmatrix} = z^2 - 58z + 679 = 0; \quad z_1 = 29 \mp 9\sqrt{2}; \quad \lambda_1 = 56/muz_1; \quad i=1; 2.$$

Ако се носачу ABC, (сл. 9.5.), замене крајњи ослоњци уклештењима он постаје шријуш стайицки неодређен. Претворићемо га у просту греду AC, па статичке непознате (моменте уклештења и отпор средњег ослоњца) одређујемо из услова да су нагиби тангенти еластичне линије просте греде AC на местима уклештења једнаки нули и угиб у пресеку B такође једнак нули. Тако добијамо систем једначина:

$$\begin{cases} \alpha = 0; & \gamma_{AA} \mathfrak{M}_A^i + \gamma_{AC} \mathfrak{M}_C^i + \nu_{AB} Y_B^i = \nu_{Ai}; & (\mathfrak{M}_A^i \downarrow); \\ \beta = 0; & \gamma_{CA} \mathfrak{M}_A^i + \gamma_{CC} \mathfrak{M}_C^i + \nu_{CB} Y_B^i = \nu_{Ci}; & (\mathfrak{M}_C^i \uparrow); \\ f_B = 0; & \delta_{BA} \mathfrak{M}_A^i + \delta_{BC} \mathfrak{M}_C^i + \alpha_{BB} Y_B^i = \alpha_{Bi}; & (Y_B^i \uparrow). \end{cases} \quad (16a)$$

Одредимо ли статичке непознате (\mathfrak{M}_A^i , \mathfrak{M}_C^i , Y_B^i) утицајни коефицијенти биће:

$$\begin{cases} \alpha_{ii}^* = \alpha_{ii} - \delta_{iA} \mathfrak{M}_A^i - \delta_{iC} \mathfrak{M}_C^i - \alpha_{iB} Y_B^i, \\ \alpha_{ki}^* = \alpha_{ki} - \delta_{kA} \mathfrak{M}_A^i - \delta_{kC} \mathfrak{M}_C^i - \alpha_{kB} Y_B^i. \end{cases} \quad (16b)$$

Овде су: α_{ik} , δ_{ik} утицајни коефицијенти померања услед сила, односно спрегова, а ν_{ik} , γ_{ik} утицајни коефицијенти обртања услед сила, односно спрегова. Сви су ови коефицијенти позитивни и могу се одредити методом деформационог рада, стављајући у пресеку (k) јединични статички елемент 1^* (силу или спрег), како је показано у следећој табlici.

Таблица утицајних коефицијената

$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$	$\delta_{ik} = \delta_{ki}$	$\nu_{ik} = \nu_{ki} = \delta_{ki}$	$\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$
$\sum \frac{1}{\mathfrak{B}} \int M_F^1 M_F^* dz$	$\sum \frac{1}{\mathfrak{B}} \int M_{\mathfrak{M}}^1 M_F^* dz$	$\sum \frac{1}{\mathfrak{B}} \int M_F^1 M_{\mathfrak{M}}^* dz$	$\sum \frac{1}{\mathfrak{B}} \int M_{\mathfrak{M}}^1 M_{\mathfrak{M}}^* dz$
<p>Напомена: M_F^1 значи нападни момент услед силе $F = 1$, $M_{\mathfrak{M}}^1$ „ „ „ „ спрега $\mathfrak{M} = 1$, M_F^* „ „ „ „ силе $F^* = 1^*$, $M_{\mathfrak{M}}^*$ „ „ „ „ спрега $\mathfrak{M}^* = 1^*$.</p> <p>Статичке величине $F^* = 1^*$ и $\mathfrak{M}^* = 1^*$ треба увек узети у смеру тражене деформације пресека (k).</p>			

9.3. Приближне методе. — Из изложених примера се види да се при већем броју маса m_i налази на велике математичке тешкоће при решавању фреквентне једначине. Због тога се често у техничкој пракси примењују приближне методе за одређивање кружне фреквенције *основног облика осцилација* или, пак, и фреквенција виших хармоника. Метода има много, али ћемо изнети оне које се најчешће примењују у пракси.

9.3.1. Данкерлеова метода. — Помоћу ове методе, коју је емпиријски открио Данкерле* (Dunkerley), 1894. год., одређује се најнижа кружна фреквенција система, тј. кружна фреквенција основног облика

* Dunkerley S. — „On the Whirling and Vibration of Shafts“. Phil. Trans of the Royal Soc. London, 1894. Vº 185, page 279.

осцилација. Када се у фреквентну једначину (5) уведе смена $1/\omega^2 = z$ онда се она своди на алгебарску једначину облика

$$f(z) = f(\lambda^{-1}) = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu S_\nu z^{n-\nu} = z^n - S_1 z^{n-1} + S_2 z^{n-2} - \dots + (-1)^n S_n = 0; \quad S_0 = 1. \quad (16)$$

Ако су z_1, z_2, \dots, z_n корени те једначине (16), то према особинама корена алгебарских једначина, мора бити

$$\sum_{s=1}^n z_s = z_1 + z_2 + \dots + z_n = S_1 = \sum_{i=1}^n m_i \alpha_{ii},$$

па је сигурно највећи корен

$$z_1 = z_{\max} = \frac{1}{\omega_1^2} \leq \sum_{i=1}^n m_i \alpha_{ii}. \quad (17)$$

У случају система са једним степеном слободе, (чл. 1.7.), између крутости s и утицајног коефицијента α_{11} , постоји однос $s = 1/\alpha_{11}$, па је сопствена кружна фреквенција $\omega_{11} = \sqrt{1/m_1 \alpha_{11}}$, (обр. 30). Ако замислимо да се на греди AB налази само маса m_1 , онда је сопствена кружна фреквенција ове масе

$$\omega_{ii} = \sqrt{1/m_i \alpha_{ii}}.$$

Уносећи ове вредности у једначину (17) добијамо образац

$$\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{\omega_{\min}^2} \leq \sum \frac{1}{\omega_{ii}^2} = \frac{1}{\omega_{11}^2} + \frac{1}{\omega_{22}^2} + \dots + \frac{1}{\omega_{nn}^2}, \quad (18)$$

који представља Данкерлеов образац. Овај нам образац показује да је реципрочна вредности квадрата најмање кружне фреквенције система маса мања или једнака збиру реципрочних вредности квадрата сопствених кружних фреквенција свих маса система претпостављајући да се свака маса за себе налази на греди.

Помоћу ове методе добијају се најниже кружне фреквенције са грешком од 3% до 10% од стварне вредности. Та је грешка још већа у случају континуалних носача.

На пример, у случају система са три степена слободe, (сл. 9.3.a), биће $S_1 = m(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) = 34 mi$, па је $\omega_{\min} = 4,75 \sqrt{1/mk}$. Грешка $(4,93 - 4,75) \cdot 100/4,93$ износи 3,64%.

Ако би у истом случају биле масе $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = 2m$, онда је

$$S_1 = mi(9 + 64 + 18) = 91mi, \text{ па је } \omega_{\min} = 2,90 \sqrt{1/mk}.$$

У случају представљеном на сл. 9.6.a, са једнаким масама, биће $S_1 = 234/40 mi$, па је $\omega_{\min} = 25,92 \sqrt{1/mk}$. Тачна је вредност $\omega_{\min} = \sqrt{40/mi} z_{\max} = 36 \sqrt{1/mk}$. Грешка износи 27,7%.

9.3.2. Морлијева метода. — Морлијева (Morley) метода се оснива на Релијевој методи енергије, само се као приближни основни облик осцилација узима еластична линија греде АВ, (сл. 9.1.), коју иста добија под утицајем терета $F_i = G_i = m_i g$.

Према Клапејроновој теореме потенцијална енергија греде износи

$$E_p = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} G_i y_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i g y_i$$

где су y_i одговарајућа померања. Кинетичка енергија је

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{y}_i^2.$$

Пошто је по претпоставци еластична линија угиба врло блиска основном облику осцилација, то је померање

$$y_i = f_i \cos \omega t \text{ и } \dot{y}_i = -f_i \omega \sin \omega t,$$

па је највећа вредност ординате и брзине масе m_i

$$y_{i \max} = f_i; \quad |y_{i \max}| = |-f_i \omega|, \quad \text{где је } f_i \text{ угиб.}$$

Како је у равнотежном положају потенцијална енергија највећа, док је у најудаљенијем положају греде највећа кинетичка енергија, то, према Релијевој теореме, изједначајући ове две вредности енергија, следи

$$E_{p \max} = E_{k \max}; \quad \sum_i \frac{1}{2} m_i g f_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 f_i^2,$$

па је квадрат кружне фреквенције

$$\omega^2 = \frac{g \sum_i m_i f_i}{\sum_i m_i f_i^2} = g \frac{\sum_i G_i f_i}{\sum_i G_i f_i^2} \quad (19)$$

Овај образац је познат као *Морлијев образац**, и своди проблематику одређивања кружне фреквенције основног типа осцилација на одређивање угиба (f_i) греде у пресецима у којима дејствују терети $G_i = m_i g$. Одређивање ових угиба се врши или рачунски, према познатим једначинама еластичних линија, или графички, конструкцијом еластичне линије.

9.3.3. Стодолина метода. — Стодола** оснива свој поступак одређивања најниже кружне фреквенције на чињеници да су амплитуде маса приликом осцилација неодређене али су одређени главни облици осцилација. Као први главни облик осцилација узима се еластична линија греде под ушцајем шпеша $G_i = m_i g$. Конструкција еластичне линије обично се изводи графички по методи *Mohr-a****, (сл. 9.7.a). Ако је размера за дужине $u_L = m/\text{cm}$, а размера за силе G_i у плану сила $u_F = t/\text{cm}$, \bar{H}_1 растојање пола P_1 од плана вертикалних сила, мерено у cm, онда је размера момената $u_M = u_L u_F \bar{H}_1$. Ако се сада дијаграм нападног момента греде узме за ново „фиктивно оптерећење“ и конструише нови „план сила“ са растојањем пола P_2 од плана ових „сила“ \bar{H}_2 , (сл. 9.7.b), мереним у cm, и ако су „фиктивне силе“ као површине пренете у „план сила“ у размери $u_A = \text{cm}^2/\text{cm}$, онда је размера угиба еластичне линије греде

$$u_f = 100 \frac{u^3 L u_F u_A}{EI_x} \bar{H}_1 \bar{H}_2 \quad (\text{cm/cm}),$$

где вредност $EI_x = \mathfrak{B}$ треба узети у јединици tm^2 .

Претпоставимо да је ω_0 кружна фреквенција осцилација система, онда су у најудаљенијим положајима маса реституционе силе

$$-F_e = F_j = -m a, \quad F_i = m_i f_i \omega_0^2. \quad (20)$$

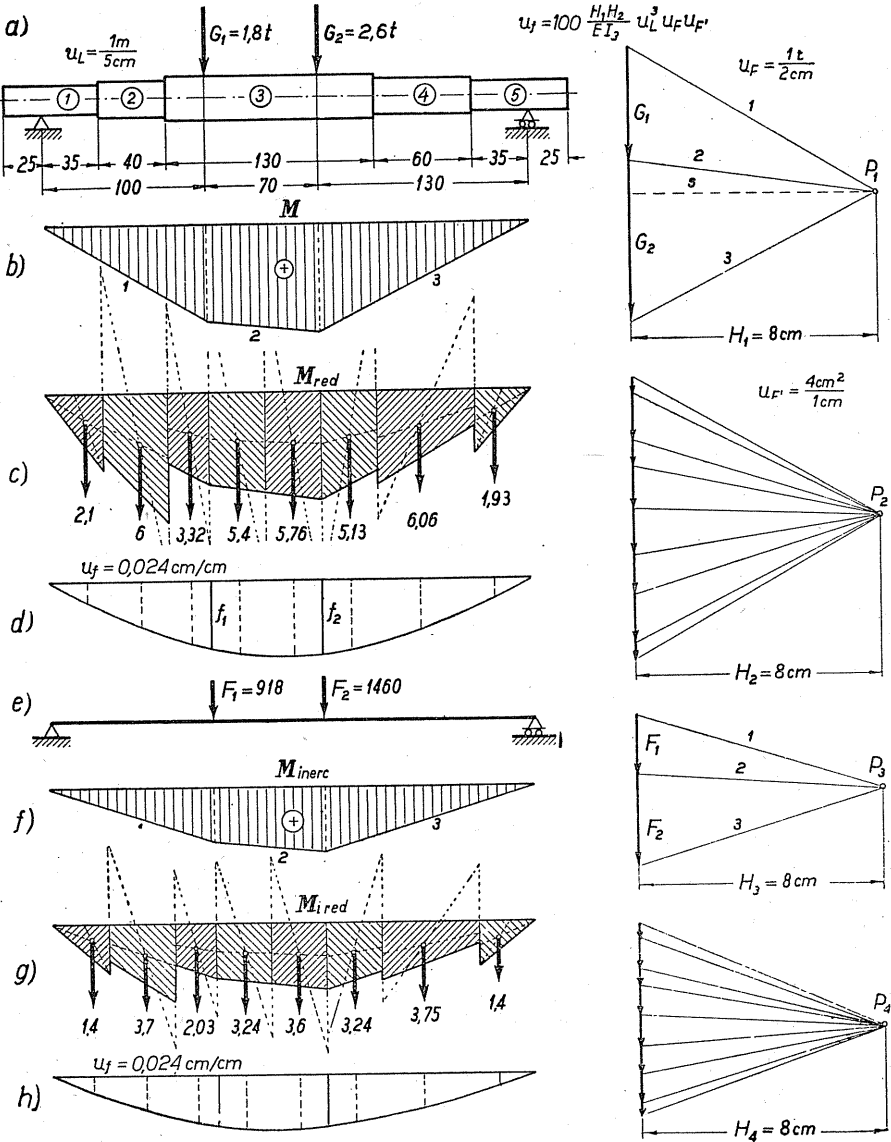
Ако се сада нађе еластична линија греде услед ових реституционих сила добиће се нове амплитуде (угиби) u_ω , (сл. 9.7.h). Буде ли облик ове еластичне линије врло

* Morley A. — „The Calculation of Vibrations and Whirling Speeds“. Engineering, Vо 88, 1909., page 135.

** Stodola A. — Dampf-und Gas-Turbinen. 6Auf I. S. 381. Berlin, 1924. год.

*** Отпорност материјала, чл. 9. и 4.

близак облику статичке еластичне линије тада кружна фреквенција нових рести-
туционих сила представља приближну вредност најниже кружне фреквенције.



Сл. 9.7. — Примена Стодолине методе

Изједначајући обе реституционе силе у најудаљенијим положајима маса добијамо однос

$$F_1 = F_1', \quad m_1 f_1 \omega_0^2 = m_1 f_{\omega} \omega^2$$

па је

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\left[\frac{f_i}{f_\omega} \right]_{sr}} \quad (21)$$

где је $(f_i/f_\omega)_{sr}$ средња вредност свих односа амплитуда.

Када је одступање еластичних линија доста велико, тада се врши понављање конструкције еластичне линије реституционих сила полазећи од претходне приближне еластичне линије, све до жељене тачности.

За прву вредност кружне фреквенције ω_0 узима се заокружена вредност ради лакшег рачунања, на пример $\omega_0 = 100 \text{ sec}^{-1}$.

Рачун се спроводи табеларно.

У случају да је греда променљивог попречног пресека* треба дијаграм нападног момента редуковаши према највећем моменту инерције пресека греде.

На сл. 9.7. је приказан поступак за случај вратила турбине оптерећеног дисковима тежина $G_1 = 1800 \text{ kg}$ и $G_2 = 2600 \text{ kg}$. Како је вратило променљивог попречног пресека, то је редуција дијаграма нападног момента извршена према највећем моменту инерције I_3 . Размера угиба еластичне линије је

$$u_f = 100 \frac{u_L^3 \cdot u_F \cdot u_A}{EI_{x_3}} \bar{H}_1 \bar{H}_2 = 0,024 \text{ (cm/cm)};$$

$$EI_3 = 2,2 \cdot 10^6 \cdot 19850 \cdot 10^{-7} = 4,22 \cdot 10^3 \text{ tm}^2.$$

Рачун је дат табелароо са $\omega_0 = 100 \text{ sec}^{-1}$

d_i	I_i	I_3/I_i	l	G_l	f_l	F_l	t_ω	f_i/f_ω
20	7850	2,44	1	1800	0,050	918	0,038	1,31
21	9550	2,01	2	2600	0,055	1460	0,043	1,29
25	19180	1,00						
24	16290	1,18						

$(f_i/f_\omega)_{sr} = 1,30$

Конструкција еластичне линије сила инерције је извршена са истим размерама.

Прва приближна вредност кружне фреквенције основног облика осцилација је

$$\omega_1 \approx 100 \sqrt{1,30} \approx 114 \text{ sec}^{-1}.$$

Ради добијања тачније вредности поступак треба поновити са овом вредности фреквенције.

* Geiger J. — Mechanische Schwingungen. Berlin, 1927., S. 70.

ПРИМЕРИ

9.1. Проста греда оптерећена је трима једнаким масама (m); једна је у средини распона а друге су удаљене по $l/6$ од ослонаца. Одредити кружне фреквенције и главне облике осциловања.

[Решење. — Утицајни коефицијенти и фреквентна једначина су

α_{ik}	1	2	3
1	$75u$	$117u$	$51u$
2	$117u$	$243u$	$117u$
3	$51u$	$117u$	$75u$

$$f(z) = \begin{vmatrix} z-75 & -117 & -51 \\ -117 & z-243 & -117 \\ -51 & -117 & z-75 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 24-z \\ -234 & z-243 & -117 \\ z-126 & -117 & z-75 \end{vmatrix} =$$

$$=(24-z)(z^2-369z+3240)=0$$

па су

$$u = \frac{k}{11664}; \quad z = 1/mu \omega^2; \quad z_i = 360; 24; 9$$

$$\omega^2 = \frac{11664}{zmk}; \quad \omega_1 = 5,69 \sqrt{\frac{g}{ml^3}}; \quad \omega_2 = 22,07 \sqrt{\frac{g}{ml^3}}; \quad \omega_3 = 36,04 \sqrt{\frac{g}{ml^3}}$$

9.2. Одредити кружне фреквенције осцилација ако су масе на греди (сл. 9.3) $2m, 3m$ и m .

[Решење. — Ставимо $u=k/768$ и $z=1/mu \omega^2$ онда је

$$f(u) = \begin{vmatrix} z-18 & -22 & -14 \\ -33 & z-48 & -33 \\ -7 & -11 & z-9 \end{vmatrix} = z^3 - 75z^2 + 271z - 168 = 0;$$

$$z_i = 0,78; 2,786; 71,434]$$

9.3. Обострано уклештени носач, распона $2l$, подупрт је на средини ослономцем (B) и на срединама поља оптерећен масама m и $2m$. Одредити приближном методом најнижу кружну фреквенцију.

[Решење. — Због симетрије овде је $\alpha_{11}^* = \alpha_{22}^*$. Носач је трипут статички неодређен, те статичке непознате одређујемо из услова $\alpha = 0$, $\beta = 0$ и $f_B = 0$, тј. из система једначина

$$128 \mathfrak{M}_A^1 + 64 \mathfrak{M}_C^1 + 24 Y_B^1 L = 21 L;$$

$$64 \mathfrak{M}_A^1 + 128 \mathfrak{M}_C^1 + 24 Y_B^1 L = 15 L;$$

$$48 \mathfrak{M}_A^1 + 48 \mathfrak{M}_C^1 + 16 Y_B^1 L = L;$$

$$\Delta = 12 \cdot 16^3 L;$$

$$L = 2l; \quad k = L^3 \mathfrak{B};$$

$$\mathfrak{M}_A^1 = \frac{25}{64}; \quad \mathfrak{M}_C^1 = \frac{19}{64}; \quad Y_B^1 = -2$$

$$\alpha_{11}^* = \alpha_{11} + \alpha_{1B} Y_B^1 - \delta_{1A} \mathfrak{M}_A^1 - \delta_{1C} \mathfrak{M}_C^1 =$$

$$\approx \frac{k}{3 \cdot 16^2} \left(31 - \frac{405}{16 L} \right)$$

$$\frac{1}{\omega_{\min}^2} = 3m \alpha_{11}^* = \frac{k}{256} \frac{G}{g} \left(31 - \frac{405}{16 L} \right).$$

9.4. Одредити кружне фреквенције сопствених осцилација симетричне греде ABC , оптерећене масама m у срединама распона, (сл. 9.5.d). Масу греде занемарити.

[Решење. — Због симетрије распона и оптерећења систем са два степена слободe може се раставити на два система са по једним степеном слободe. У случају симетричних осцилација. (сл. 9.5.e), можемо сматрати да су греде AB и BC уклештене у B , у случају антисиметричних осцилација да су просте греде, (сл. 9.5.f), па су кружне фреквенције

$$\omega^2_1 = \frac{48 \mathfrak{B}}{m l^3}, \quad \omega^2_2 = \frac{768 \mathfrak{B}}{7 m l^3}.$$

10. СЛОЖЕНА КЛАТНА

10.1. Сферно клатно. — Проблем сферног клатна јесте проблем кретања тешке материјалне тачке по *непокретној сфери*, (сл. 10.1.), полупречника $R=l$, једнаког дужини конца, о који је обешена материјална тачка N у центру сфере.

За генерализане координате уземемо сферне координате $R=l$, φ и θ па је једначина сфере $R=\text{const}$, те је $\dot{R}=0$ па брзина има само две компоненте: циркуларну и меридионалну. Како се кретање врши под утицајем теже, то постоји функција силе $U=mgz=mg l \cos \theta = -E_p$, те су енергије

$$E_k = \frac{1}{2} m [l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + l^2 \dot{\theta}^2];$$

$$E_p = -mg l \cos \theta, \quad (1)$$

па Лагранжеве једначине друге врсте дају систем једначина

$$ml^2 \ddot{\theta} - ml^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + mgl \sin \theta = 0, \quad (2)$$

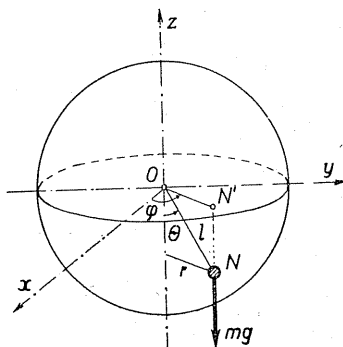
$$\frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta) = 0.$$

Из друге једначине види се да је координата φ *цикличка* и да је *циклички интеграл*

$$l^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta = r^2 \dot{\varphi} = C = 2 S_z = h \quad (3)$$

интеграл површине у равни управној на Oz осу, те се кретање врши *константном секторском брзином* у тој равни. Искључујући овај интеграл из прве једначине (2) једначина осциловања је

$$l^2 \ddot{\theta} = \frac{h^2 \cos \theta}{l^2 \sin^3 \theta} - gl \sin \theta, \quad (4)$$



Сл. 10.1. — Сферно клатно

Ова диф. једначина *раздваја* променљиве, па множењем идентитетом $2 \dot{\theta} dt = 2 d\theta$ и интегралењем биће

$$l^2 \dot{\theta}^2 = -\frac{h^2}{l^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} + 2gl \cos \theta + C_1,$$

где је C_1 интеграциона константа.

Ради лакше дискусије боље је увести координату $z = l \cos \theta$, па је $\dot{z} = -l \dot{\theta} \sin \theta$, те горња једначина постаје

$$\begin{aligned} l^2 \dot{z}^2 &= -2gz^3 - C_1 z^2 + 2gl^2 z + (C_1 l^2 - h^2) = \\ &= (l^3 - z^2) \cdot (2gz + C_1) - h^2 = f(z). \end{aligned} \quad (5)$$

Како је на левој страни позитивна величина то је $f(z)$ позитивни полином трећег степена, па се закон кретања може одредити овим елиптичким интегралом

$$t = \pm l \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{f(z)}}; \quad \varphi = \pm hl \int_{z_0}^z \frac{dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{f(z)}}. \quad (6)$$

Полином $f(z) = 0$ има три реална корена. Како је $f(-l) = -h^2 < 0$ и $f(l) = -h^2 < 0$ то се два корена налазе у размаку $-l < z_1 < z_0 < z_2 < l$, а трећи корен је $z_3 > l$ те нема физичког смисла. Тачка се, дакле, креће у сферном појасу између кругова $z = z_1$ и $z = z_2$ са почетним положајем $z = z_0$. Да ли ће оба корена z_1 и z_2 бити са исте или супротних страна екватора ($z = 0$) зависи од слободног члана полинома $(C_1 l^2 - h^2) \geq 0$. Како су $z_i, i = 1, 2$, корени полинома $f(z) = 0$, то је према (56), $\dot{z}_i = 0$, што значи да је брзина тачке на тим круговима једнака нули. Када тачка дође на круг, тренутно се зауставља па се затим спушта или подиже до наредног круга z_i . Како је $\dot{\varphi} = h/l^2 \sin^2 \theta$ увек истог знака то се тачка обрће око Oz осе увек у истом смеру. Ако је $\dot{\varphi} = 0$ онда из (2) следи да је $\ddot{\theta} + (g/l) \sin \theta = 0$, па тачка врши кретање математичког клатна у равни меридијана, кружном фреквенцијом $\sqrt{g/l}$. Ако је угао θ сталан $\theta = \alpha$, онда је $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ па је $\dot{\varphi}^2 = g/l \cos \alpha = h^2/l^4 \sin^4 \alpha = \omega^2$ и $v = l\omega \sin \alpha$. Тачка врши кретање конусног клашна, хоризонталном брзином v и угаоном брзином ω . У томе случају се оба круга стапају те је $z_1 = z_2 = z_0$. Тада је корен z_0 корен и изводне једначине

$$f'(z_0) = -6gz_0^2 - 2C_1 z_0 + 2gl^2 = g(l^2 - z_0^2) - z_0(C_1 + 2gz_0) = 0. \quad (7)$$

Из (5) и (6) следи да је $h = (l^2 - z_0^2) \sqrt{g/z_0}$, па је тада $\dot{z} = 0$ и $\dot{\varphi} = \sqrt{g/z_0}$ те је $\theta = \alpha = \text{const.}$; $\dot{\theta} = 0$, $v = l\omega \sin \alpha$.

Конусно клатно се употребљава у машинству као *Вајтов регулатор*. Због тога проучимо мале осцилације овог клатна око равнотежног хоризонталног круга. Тада је $\theta = \alpha + \varepsilon$, где је ε мали поремећај, па су

$$\sin \theta \approx \sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha, \quad \cos \theta \approx \cos \alpha - \varepsilon \sin \alpha,$$

када се узму мале величине угла ε , $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$, $\cos \varepsilon \approx 1$. Због $\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$ и горњих релација (4) постаје

$$\ddot{\varepsilon} - \frac{h^2 (\cos \alpha - \varepsilon \sin \alpha)}{l^4 (\sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha)^2} = -\frac{g}{l} (\sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha); \quad \dot{\varphi} = \omega = \frac{h}{l^2 \sin^2 \alpha} = \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}}$$

Како је према рачунању са бројевима блиским јединици

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha - \varepsilon \sin \alpha}{(\sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha)^2} &\approx \frac{\cos \alpha - \varepsilon \sin \alpha}{\sin^3 \alpha + 3\varepsilon \sin^2 \alpha \cos \alpha} \approx \frac{\cos \alpha (1 - \varepsilon \operatorname{tg} \alpha)}{\sin^3 \alpha (1 + 3\varepsilon \operatorname{ctg} \alpha)} \approx \\ &\approx \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha} [1 - \varepsilon \operatorname{tg} \alpha - 3\varepsilon \operatorname{ctg} \alpha] = \frac{1}{\sin^4 \alpha} [\sin \alpha \cos \alpha - \varepsilon (\sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha)] \end{aligned}$$

то је

$$\ddot{\varepsilon} - \omega^2 [\sin \alpha \cos \alpha - \varepsilon (\sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha)] = -\omega^2 \cos \alpha (\sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha)$$

тј

$$\ddot{\varepsilon} + \omega^2 (1 + 3 \cos^2 \alpha) \varepsilon = \ddot{\varepsilon} + \Omega^2 \varepsilon = 0.$$

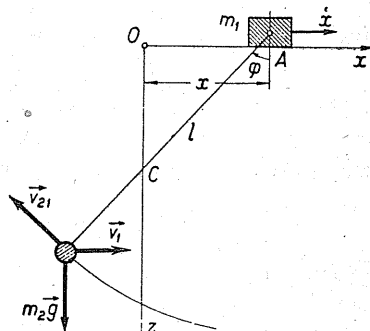
Мале поремећајне осцилације су хармонијске, периода

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \frac{\cos \alpha}{1 + 3 \cos^2 \alpha}}. \quad (8)$$

10.2. Елиптичко клатно. — Ово се клатно састоји из масе m_1 , која клизи по глаткој хоризонталној равни, (сл. 10.2.), и масе m_2 везане концем, дужине l , за прву масу, а може да осцилује у вертикалној равни око осе кроз тачку вешања A . Како систем има два степена слободе кретања, то ћемо за генерализане координате узети померања x и φ . Брзина масе m_2 састоји се из преносне брзине $v_1 = \dot{x}$ и релативне брзине $v_{21} = l\dot{\varphi}$, те је

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + v_{21}, \quad v_2^2 = v_1^2 + v_{21}^2 + 2v_1 v_{21} \cdot$$

$$\cos (180^\circ - \varphi) = \dot{x}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 - 2l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi.$$



Сл. 10.2. — Елиптичко клатно

Кинетичка и потенцијална енергија су

$$E_k = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) = \frac{1}{2}[(m_1 + m_2) \dot{x}^2 - 2 m_2 l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + m_2 l^2 \dot{\varphi}^2], \quad (9)$$

$$E_p = -m_2 g z = -m_2 g l \cos \varphi,$$

па Лагранжеве једначине дају систем диференцијалних једначина

$$\frac{d}{dt} [(m_1 + m_2) \dot{x} - m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi] = (m_1 + m_2) \ddot{x} - m_2 l \ddot{\varphi} \cos \varphi + m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = 0,$$

$$\frac{d}{dt} [m_2 l (l \dot{\varphi} - \dot{x} \cos \varphi)] - m_2 l (\dot{x} \dot{\varphi} - g) \sin \varphi = 0.$$

Пошто је x *цикличка координата*, јер енергије не зависе од ње, то прва једначина даје један циклички интеграл, који показује да је генерисани импулс за ту координату константан:

$$(m_1 + m_2) \dot{x} - m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi = C_1. \quad (10)$$

Интеграљењем добијамо да је

$$(m_1 + m_2) x - m_2 l \sin \varphi = C_1 t + C_2.$$

Ако су почетни услови кретања: за $t=0$, $x=0$, $\varphi=0$, $\dot{x}=0$, $\dot{\varphi}=0$, онда су $C_1=C_2=0$, па је

$$x = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \sin \varphi, \quad (11)$$

што значи да се *тежиште система креће по вертикалној осовини*.

Из друге једначине следи да је

$$m_2 l [l \ddot{\varphi} + \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi - \ddot{x} \cos \varphi] - m_2 l (\dot{x} \dot{\varphi} - g) \sin \varphi = l \ddot{\varphi} - \ddot{x} \cos \varphi + g \sin \varphi = 0,$$

па, с обзиром на (10), постаје

$$l [m_1 + m_2 (1 - \cos^2 \varphi)] \ddot{\varphi} + m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi + g (m_1 + m_2) \sin \varphi = 0. \quad (12)$$

Ограничимо ли се на *мале осцилације* ($\cos \varphi \approx 1$; $\sin \varphi \approx \varphi$), горња једначина се своди на једначину хармонијске осцилације

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$$

периода

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (13)$$

Због (11) следи да маса m_2 описује елипсу у вертикалној равни.

Ако је маса m_1 доста велика у односу на масу клатна m_2 , ($m_1 \gg m_2$), онда када $m_1 \rightarrow \infty$, период елиптичког клатна асимптотски тежи периоду математичког клатна

$$T \rightarrow 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (13')$$

$(m_1 \rightarrow \infty)$

Из овога следи да се помоћу елиптичког клатна може мењати период осцилације клатна не мењајући његову дужину, већ само однос маса $\mu = m_2/m_1$.

Нека је маса $m_1 = M$ везана за тачку O опругом крутости c и нека је маса $m_2 = m$, онда се кружна фреквенција малих осцилација може одредити узимајући да су брзине тачака

$$v_1 = \dot{x}; \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_{21}; \quad v_2 \approx \dot{x} + l\dot{\varphi},$$

па су енергије

$$E_k = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x} + l\dot{\varphi})^2 = \frac{1}{2} (M+m) \dot{x}^2 + ml \dot{x} \dot{\varphi} + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2,$$

$$E_p = \frac{1}{2} cx^2 + mgl(1 - \cos \varphi) \approx \frac{1}{2} cx^2 + \frac{1}{2} mgl \varphi^2.$$

Лагранжеве једначине дају систем једначина

$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\varphi} + cx = 0; \quad ml\ddot{x} + ml^2\ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0. \quad (14)$$

Претпостављајући решења у облику

$$x = A_1 \cos(\omega t + \alpha), \quad \varphi = A_2 \cos(\omega t + \alpha)$$

добија се систем алгебарских једначина

$$[c - (M+m)\omega^2]A_1 - ml\omega^2 A_2 = 0, \quad -ml\omega^2 A_1 + (mgl - ml^2\omega^2)A_2 = 0$$

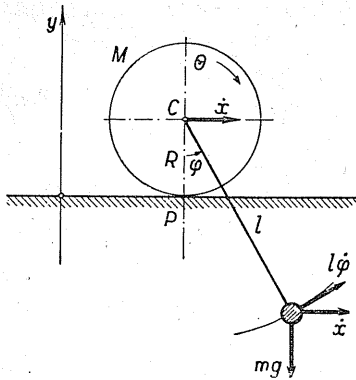
па је фреквентна једначина

$$f(\omega^2) = \begin{vmatrix} c - (M+m)\omega^2 & -ml\omega^2 \\ -ml\omega^2 & mgl - ml^2\omega^2 \end{vmatrix} = \omega^4 - \left(\frac{c}{M} + \frac{M+m}{M} \frac{g}{l} \right) \omega^2 + \frac{c}{M} \frac{g}{l} = 0.$$

Однос амплитуда је

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{g}{\omega^2} - l.$$

На овај проблем своди се и проблем одређивања кружне фреквенције малих осцилација масе m обешене о лаки штап AB , (чију масу занемарујемо). Штап је везан за диск, масе M , који се котрља без клизања по хоризонталној равни, (сл. 10.3.). Како су



Сл. 10.3. — Котрљајно клатно са два степена слободе

$$\dot{x} = R \dot{\theta}; \quad \dot{\theta} = \dot{x}/R; \quad v_2^2 \approx \dot{x}^2 + 2l \dot{x} \dot{\varphi} + l^2 \dot{\varphi}^2;$$

$$J = \frac{1}{2} M R^2,$$

то су енергије

$$E_k = \frac{1}{2} (M \dot{x}^2 + J \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2l \dot{x} \dot{\varphi} + l^2 \dot{\varphi}^2) = \frac{3}{4} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2l \dot{x} \dot{\varphi} + l^2 \dot{\varphi}^2),$$

$$E_p \approx \frac{1}{2} m g l \varphi^2,$$

па Лагранжеве једначине дају систем диференцијалних једначина

$$(3M + 2m) \ddot{x} + 2ml \ddot{\varphi} = 0, \quad \ddot{x} + l \ddot{\varphi} + g \varphi = 0$$

из којих на познати начин одређујемо фреквентну једначину

$$-\omega^2 [(3M + 2m)(g - l\omega^2) + 2ml\omega^2] = 0$$

и њене корене

$$\omega_1^2 = 0; \quad \omega_2^2 = [1 + (2m/3M)] g/l. \quad (15)$$

10.3. Двогубо математичко клатно. — О средиште C_1 математичког клатна, масе m_1 , дужине l_1 , (сл. 10.4.а), обешено је друго математичко клатно, масе m_2 , дужине l_2 . Овакво се клатно назива *двогубо* или *двојно* математичко клатно.

Брзина масе m_1 је $v_1 = l_1 \dot{\varphi}_1$. Маса m_2 се налази на крају штапа $C_1 C_2$ који изводи *равно кретање* у равни Oxz па је њена брзина једнака збиру релативне брзине v_{21} у односу на тачку вешања C_2 и преносне брзине v_1 саме тачке вешања, те је $v_2 = v_1 + v_{21}$. Како посматрамо *мале осцилације* можемо сматрати да је угао θ врло мали, те је $\theta \approx 0$, па се може векторски збир заменити *скаларним*. Под тим претпоставкама биће брзине тачака клатна

$$v_1 = l_1 \dot{\varphi}_1; \quad v_2 = v_1 + v_{21}; \quad v_2 \approx v_1 + v_{21} \approx l_1 \dot{\varphi}_1 + l_2 \dot{\varphi}_2, \quad (16)$$

где су φ_1 и φ_2 *ошклони* клатна од вертикалних равнотежних положаја које узимамо за генерализане координате.

Због ових осцилација тежишта маса m_i подићи ће се за висине h_i које за случај малих осцилација износе

$$h_1 = l_1 (1 - \cos \varphi_1) = 2 l_1 \sin^2 (\varphi_1/2) \approx \frac{1}{2} l_1 \varphi_1^2; \quad (17)$$

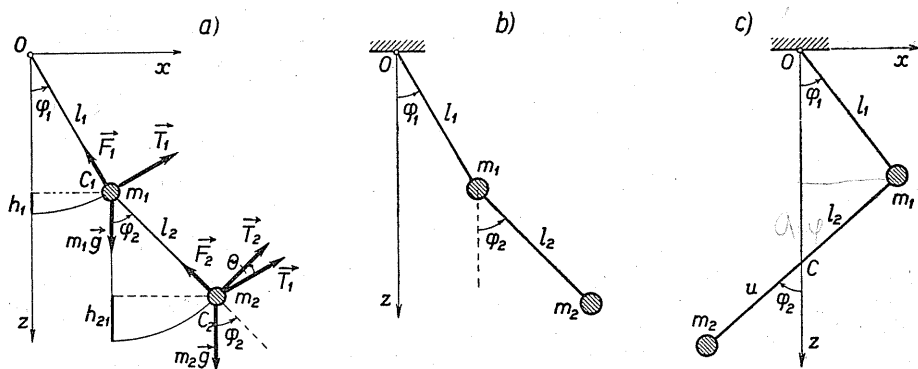
$$h_2 = h_1 + h_{21} = h_1 + l_2 (1 - \cos \varphi_2) \approx \frac{1}{2} (l_1 \varphi_1^2 + l_2 \varphi_2^2)$$

где је h_{21} релативно подизање тежишта C_2 у односу на тежиште C_1 .

На основу изнетог можемо написати изразе за енергије

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1 \dot{\varphi}_1 + l_2 \dot{\varphi}_2)^2;$$

$$E_p = \sum \frac{1}{2} m_i g h_i = \frac{1}{2} m_1 g l_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} m_2 g (l_1 \varphi_1^2 + l_2 \varphi_2^2), \quad (18)$$



Сл. 10.4. — а) Двогубо математичко клатно; б, с) Главни облици осцилација двогубог математичког клатна

па Лагранжеве диференцијалне једначине друге врсте дају систем диференцијалних једначина осциловања

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2) g l_1 \varphi_1 = 0,$$

$$m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 g l_2 \varphi_2 = 0. \quad (19)$$

Претпоставимо ли решења у облику

$$\varphi_k = A_k \cos(\omega t + \alpha), \quad (20)$$

тј. да обе масе осцилују синхронно али различитих амплитуда, добија се систем алгебарских једначина

$$(1 + \mu)(g - l_1 \lambda) A_1 - \mu l_2 \lambda A_2 = 0; \quad \mu = m_2/m_1;$$

$$-l_1 \lambda A_1 + (g - l_2 \lambda) A_2 = 0; \quad \lambda = \omega^2 \quad (21)$$

па је фреквентна једначина

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} (1 + \mu)(g - l_1 \lambda) & -\mu l_2 \lambda \\ -l_1 \lambda & g - l_2 \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 - g(1 + \mu) \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2} \lambda + g^2 \frac{1 + \mu}{l_1 l_2} = 0 \quad (22)$$

и њени корени (сопствене вредности)

$$\lambda = \frac{g(1+\mu)(l_1+l_2)}{2l_1l_2} \left[1 \mp \sqrt{1 - 4 \frac{l_1l_2}{(1+\mu)(l_1+l_2)^2}} \right]. \quad (23)$$

Како су односи амплитуда

$$\frac{A_{1s}}{\mu l_2 \lambda_s} = \frac{A_{2s}}{(1+\mu)(g-l_1 \lambda_s)} = C_s \quad (24)$$

то су главни облици осциловања приказани на сл. 10.4. *b, c*.

Код првог вишег хармоника (другог облика) постоји чвор *C* чији положај одређујемо у односу на доњу масу m_2 дужином

$$u = l_2 - l_1 (\sin \varphi_1 / \sin \varphi_2).$$

Променом односа маса мењају се сопствене вредности па и кружне фреквенције. Разликоваћемо два случаја.

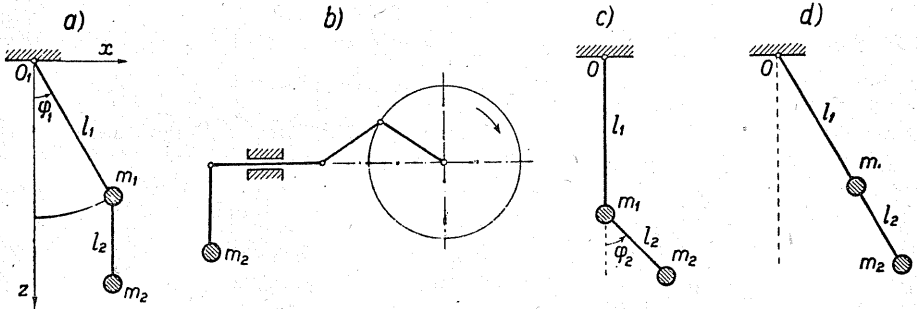
1^o $m_1 \gg m_2$. У овом случају је μ мала величина у односу на јединицу па се може занемарити те су сада сви елементи осциловања

$$f(\lambda) = \lambda^2 - g \frac{l_1+l_2}{l_1l_2} \lambda + \frac{g^2}{l_1l_2} = 0; \quad \lambda = \frac{g}{2l_1l_2} [(l_1+l_2) \mp (l_1-l_2)]; \quad (25)$$

$$\lambda_1 = g/l_1; \quad \lambda_2 = g/l_2; \quad A_{1s}/0 = A_{2s}/(g-l_1 \lambda_s); \quad A_{1s}/(g-l_2 \lambda_s) = A_{2s}/l_1 \lambda_s,$$

где су узети кофактори елемената прве врсте.

Први облик има односе $A_{11}/[1-(l_2/l_1)] = A_{21}/1$ те маса m_2 не утиче на хармонијско осциловање прве масе (сл. 10.5. *a*). Овакав начин кре-



Сл. 10.5. — Утицај односа маса клатна на облике осцилација

тања масе m_2 може се извести помоћу уређаја приказаног на сл. 10.5. *b*. Код другог облика је однос $A_{12}/0 = A_{22}/(l_1/l_2)$. Маса m_1 мирује а маса m_2 осцилује (сл. 10.5. *c*).

2° $m_2 \gg m_1$. — Тада је $1 + \mu \approx \mu$ па су елементи осциловања

$$f(\lambda) = \lambda^2 - g\mu \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2} \lambda + \frac{g^2 \mu}{l_1 l_2} = 0; \quad \lambda_1 = \frac{g}{l_1 + l_2}; \quad \lambda_2 \approx g\mu \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2}; \quad (26)$$

$$A_{1s} / l_2 \lambda_s = A_{2s} / (g - l_1 \lambda_s); \quad A_{11} / 1 = A_{21} / 1; \quad A_{12} / 1 \approx A_{22} / 0.$$

Како су у првом случају амплитуде скоро једнаке то се обе масе налазе увек на истој правој (сл. 10.5. d); код другог облика прва маса осцилује док друга мирује.

Код хомогеног клатна је $m_1 = m_2$, $l_1 = l_2 = l$, па је $\mu = 1$, те уведећи нову сопствену вредност $u = l\omega^2/g$ биће

$$\begin{aligned} 2(1-u)A_1 - uA_2 &= 0; & f(u) &= \begin{vmatrix} 2(1-u) & -u \\ -u & 1-u \end{vmatrix} = u^2 - 4u + 2 = 0; \\ -uA_1 + (1-u)A_2 &= 0; & & \end{aligned} \quad (27)$$

$$u = 2 \mp \sqrt{2}; \quad \frac{A_{1s}}{u_s} = \frac{A_{2s}}{2(1-u_s)}; \quad \frac{A_{11}}{1} = \frac{A_{21}}{\sqrt{2}}; \quad \frac{A_{12}}{1} = \frac{A_{22}}{-\sqrt{2}}.$$

На сл. 10.6. приказан је случај специјалног двугобо математичког клатна, једнаких маса $m_1 = m_2 = m$ и дужина $l_1 = l_2 = l$. Масе су причвршћене помоћу опруга, крутости c , тако да клатно у равнотежном положају заузима вертикални положај. Како су $v_1 = l\dot{\varphi}_1$; $v_2^2 = v_1^2 + v_{21}^2 + 2v_1 v_{21}$; $v_{21} = l\dot{\varphi}_2$ то су кинетичка и потенцијална енергија система:

$$E_k = 1/2 m l^2 (2\dot{\varphi}_1^2 + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2),$$

$$E_p = mg(2h_1 + h_2) + 1/2 cl^2 [\varphi_1^2 + (\varphi_1 + \varphi_2)^2] =$$

$$1/2 [mgl(2\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + cl^2 (2\varphi_1^2 + 2\varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2^2)]$$

па добијамо систем диференцијалних једначина

$$2m\ddot{\varphi}_1 + 2(mg + cl)\varphi_1 + m\ddot{\varphi}_2 + cl\varphi_2 = 0,$$

$$m\ddot{\varphi}_1 + cl\varphi_1 + m\ddot{\varphi}_2 + (mg + cl)\varphi_2 = 0,$$

са фреквентном једначином

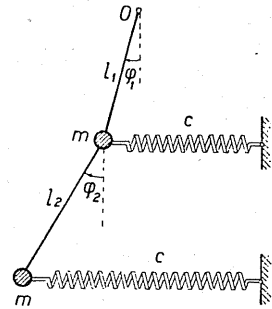
$$2(mg + cl - ml\omega^2)^2 - (cl - ml\omega^2)^2 = 0$$

и коренима

$$\lambda_{1,2} = \omega_{1,2}^2 = \frac{c}{m} + \frac{g}{l} \left(2 \mp \sqrt{2} \right).$$

Два једнака математичка клатна везана опругом CD на удаљењу h од тачака вешања O_1 и O_2 представљају *Обербеково клатно* („*sympatische Pendel*“, Oberbeck, 1888. год.). Означимо са φ и θ генерализане координате (сл. 10.7. a) онда је кинетичка енергија

$$E_k = 1/2 m l^2 (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2). \quad (28)$$



Сл. 10.6. — Двугобо математичко клатно са опругама

Потенцијална енергија се састоји из енергија маса и енергије опруге. Из четвороугла $O_1 C D O_2$ O_1 следи векторска релација

$$\vec{O}_1 \vec{O}_2 = \vec{d} = \vec{O}_1 \vec{C}' + \vec{C}' \vec{D}' + \vec{D}' \vec{O}_2 = \vec{O}_1 \vec{C}' + \vec{d}' - \vec{O}_2 \vec{D}'$$

па пројекцирањем на Ox осу добијамо

$$d = (d, i) = h \sin \varphi + d' \cos \varepsilon - h \sin \theta \approx d' + h (\sin \varphi - \sin \theta)$$

пошто је угао ε између вектора \vec{CD} и $\vec{C'D}'$ врло мали. Издужење опруге биће

$$\Delta d = d' - d = h (\sin \theta - \sin \varphi) \approx h (\theta - \varphi) \quad (29)$$

па је потенцијална енергија опруге

$$E_p^{(c)} = \frac{1}{2} c (\Delta d)^2 = \frac{1}{2} c h^2 (\theta - \varphi)^2 = \frac{1}{2} c (x_2 - x_1)^2 \quad (30)$$

и укупна потенцијална енергија система

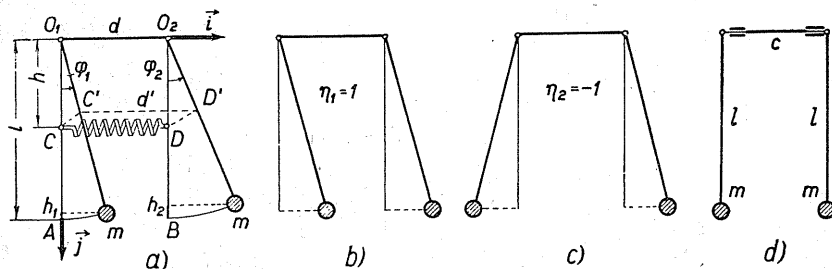
$$\begin{aligned} E_p &= mg(h_1 + h_2) + \frac{1}{2} c (\Delta d)^2 = \frac{1}{2} mgl(\varphi^2 + \theta^2) + \frac{1}{2} ch^2(\theta - \varphi)^2 = \\ &= \frac{1}{2} (mgl + ch^2)(\varphi^2 + \theta^2) - ch^2 \varphi \theta. \end{aligned} \quad (31)$$

Лагранжеве једначине дају систем диференцијалних једначина

$$m l^2 \ddot{\varphi} + (mgl + ch^2) \varphi - ch^2 \theta = 0; \quad m l^2 \ddot{\theta} + (mgl + ch^2) \theta - ch^2 \varphi = 0. \quad (32)$$

па је фреквентна једначина

$$\begin{aligned} f(\lambda = \omega^2) &= \begin{vmatrix} mgl + ch^2 - ml^2 \lambda & -ch^2 \\ -ch^2 & mgl + ch^2 - ml^2 \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2 \frac{mgl + ch^2}{ml^2} \lambda + \\ &+ \frac{(mgl + ch^2)^2 - (ch^2)^2}{(ml^2)^2} = 0; \quad \lambda_1 = \frac{g}{l}; \quad \lambda_2 = \frac{g}{l} + 2 \frac{c}{m} \frac{h^2}{l^2}. \end{aligned} \quad (33) \end{aligned}$$



Сл. 10.7. — Овербек-ово симпатично клатно

Односи амплитуда су

$$\frac{A_{1s}}{ch^2} = \frac{A_{2s}}{mgl + ch^2 - ml^2 \lambda_s}; \quad \frac{A_{11}}{-1} = \frac{A_{21}}{1}; \quad \frac{A_{12}}{1} = \frac{A_{22}}{+1}, \quad (34)$$

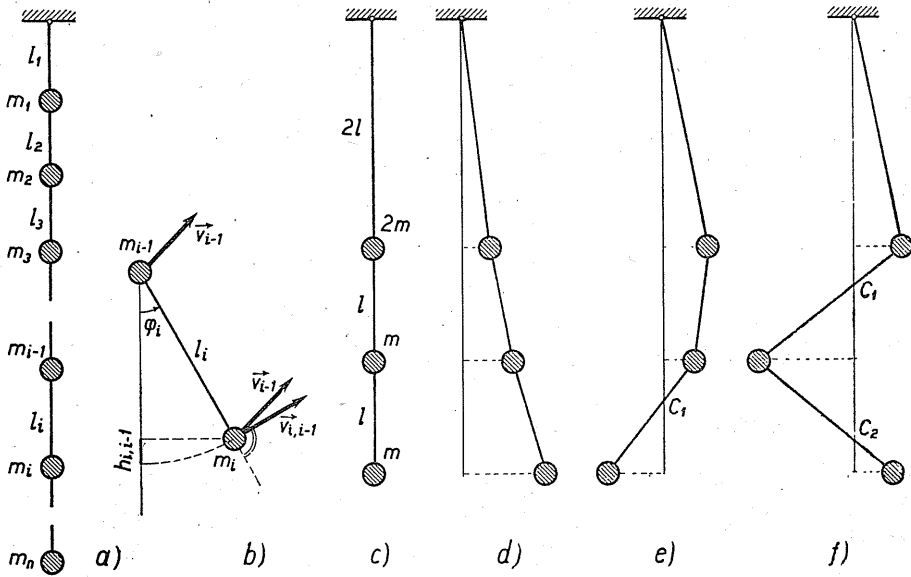
па су главни облици осциловања приказани на сл. 10.7. *b, c*.

Практично се ово клатно може извести као што је показано на сл. 10.7. d.

Специјалан је случај када је $h=l$, тј. када је опруга везана за саме масе. Сменама $u=l\omega^2/g$, $\alpha=cl/mg$ добија се фреквентна једначина

$$f(u) = \begin{vmatrix} 1+\alpha-u & -\alpha \\ -\alpha & 1+\alpha-u \end{vmatrix} = u^2 - 2(1+\alpha)u + (1+2\alpha) = 0; \quad u = 1 + \alpha(1 \mp 1).$$

10.4. Сложено математичко клатно. — Оно се састоји из више математичких клатна, различитих дужина l_i и маса m_i , (сл. 10.8. a).



Сл. 10.8. — Сложено математичко клатно

Претпостављајући мале осцилације онда је брзина i -те масе (сл. 10.8. b) и њено подизање

$$v_i = v_{i-1} + v_{i, i-1} = v_{i-1} + l_i \dot{\varphi}_i = \sum_{k=1}^i l_k \dot{\varphi}_k, \quad (35 a)$$

$$h_i = h_{i-1} + h_{i, i-1} = h_{i-1} + \frac{1}{2} l_i \dot{\varphi}_i^2 = \sum_{k=1}^i \frac{1}{2} l_k \dot{\varphi}_k^2 \quad (35 b)$$

те добијамо за поједине масе

$$v_1 = l_1 \dot{\varphi}_1;$$

$$h_1 = \frac{1}{2} l_1 \dot{\varphi}_1^2$$

$$v_2 = v_1 + v_{21} = l_1 \dot{\varphi}_1 + l_2 \dot{\varphi}_2;$$

$$h_2 = h_1 + h_{21} = \frac{1}{2} l_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} l_2 \dot{\varphi}_2^2$$

$$v_3 = v_2 + v_{32} = l_1 \dot{\varphi}_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 + l_3 \dot{\varphi}_3;$$

$$h_3 = h_2 + h_{32} = \frac{1}{2} (l_1 \dot{\varphi}_1^2 + l_2 \dot{\varphi}_2^2 + l_3 \dot{\varphi}_3^2)$$

$$v_n = \sum_{k=1}^n l_k \dot{\varphi}_k;$$

$$h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} l_k \dot{\varphi}_k^2$$

Поступним сабирањем енергија добили бисмо да је укупна кинетичка енергија система

$$E_k = \frac{1}{2} \left[\dot{\varphi}_1^2 \sum_1^n m_k + 2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sum_2^n m_k + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 \sum_2^n m_k + 2 l_1 l_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 \sum_3^n m_k + \right. \\ \left. + 2 l_2 l_3 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 \sum_3^n m_k + l_3^2 \dot{\varphi}_3^2 \sum_3^n m_k + \dots + l_n^2 \dot{\varphi}_n^2 m_n \right], \quad (36)$$

где је n број математичких клатна (материјалних тачака). Истим поступком добили бисмо и укупну потенцијалну енергију

$$E_p = \frac{g}{2} \left[l_1 \varphi_1^2 \sum_1^n m_k + l_2 \varphi_2^2 \sum_2^n m_k + l_3 \varphi_3^2 \sum_3^n m_k + \dots + l_n \varphi_n^2 m_n \right]. \quad (37)$$

За случај трогубог клатна (сл. 10.8. с) биће :

$$E_k = \frac{ml^2}{2} [16 \dot{\varphi}_1^2 + 8 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + 2 \dot{\varphi}_2^2 + 4 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 + 2 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_3^2],$$

$$E_p = \frac{mgl}{2} [8 \varphi_1^2 + 2 \varphi_2^2 + \varphi_3^2]$$

те добијамо системе једначина

$$\begin{aligned} 8 \ddot{\varphi}_1 + 2 \ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_3 + 4k\varphi_1 &= 0; & (4k-8) A_1 - 2\lambda A_2 & - \lambda A_3 = 0; \\ 4 \ddot{\varphi}_1 + 2 \ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_3 + 2k\varphi_2 &= 0; & -4\lambda A_1 + (2k-2\lambda) A_2 - \lambda A_3 &= 0; \\ 2 \ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_3 + k\varphi_3 &= 0; & -2\lambda A_1 - \lambda A_2 + (k-\lambda) A_3 &= 0. \end{aligned}$$

Уводећи нову сопствену вредност $u = l\omega^2/g$ биће фреквентна једначина

$$f(u) = \begin{vmatrix} 2-4u & -2u & -u \\ -2u & 2-2u & -u \\ -u & -u & 1-u \end{vmatrix} = u^3 - 6u^2 + 8u - 2 = 0.$$

Пошто су $f(0) = -2$, $f(1/4) = -23/64 < 0$, $f(1/3) = 1/27 > 0$ то је један корен између $1/3$ и $1/4$ те ћемо узети прву приближну вредност $u = 0,30$. По Хорнеровој схеми следи

0,3	1	-6	8	-2	1	-6	8	-2	
			0,3	-1,71	1,887		0,302	-1,721	1,896
	1	-5,7	6,29	-0,113	1	-5,698	6,279	-0,104	
			0,3	-1,62			0,302	-1,630	
	1	-5,4	4,67		1	-5,396	4,649		
	$\Delta = -\frac{0,113}{4,67} = 0,024$;	$u = 0,3024$			$\Delta = \frac{104}{4649} = 0,02$;	$u = 0,324$			

па су корени

$$u_1=0,324; u_2=1,406; u_3=4,270.$$

Односи амплитуда су

$$\frac{A_{1s}}{1} = \frac{A_{2s}}{1-u_s} = \frac{A_{3s}}{2\left(u_s-3+\frac{1}{u_s}\right)}; \quad \begin{matrix} 1 : 0,676 : 0,648; \\ 1 : -0,406 : -1,788; \\ 1 : -3,270 : 3,004; \end{matrix}$$

главни облици су приказани на сл. 10.8. *d, e, f*.

Код хомогеног сложеног клатна све су масе једнаке а такође и дужине ($m_i = m, l_i = l$) па се рачун упрошћава јер се фреквентна једначина да свести на Јакобијеву детерминанту која има само дијагонални ред и два реда паралелна са њим. Ово се свођење врши овако: треба елементе друге врсте одузети од елемената прве врсте, затим треће од друге и тако редом, а потом елементе друге колоне од елемената прве колоне и редом треће колоне од друге, четврте од треће до последње колоне. Ово ћемо показати на систему 4 клатна:

$$E_k = \frac{ml^2}{2} [4\dot{\varphi}_1^2 + 6\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + 3\dot{\varphi}_2^2 + 4\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3 + 4\dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_3 + 2\dot{\varphi}_3^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_4 + 2\dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_4 + 2\dot{\varphi}_3\dot{\varphi}_4 + \dot{\varphi}_4^2];$$

$$E_p = \frac{mgl}{2} [4\varphi_1^2 + 3\varphi_2^2 + 2\varphi_3^2 + \varphi_4^2].$$

$$f(u) = \begin{vmatrix} 8u-8 & 6u & 4u & 2u \\ 6u & 6u-6 & 4u & 2u \\ 4u & 4u & 4u-4 & 2u \\ 2u & 2u & 2u & 2u-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u-8 & 6 & 0 & 0 \\ 2u & 2u-6 & 4 & 0 \\ 2u & 2u & 2u-4 & 2 \\ 2u & 2u & 2u & 2u-2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2u-14 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 2u-10 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2u-6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2u-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u-7 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & u-5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & u-3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & u-1 \end{vmatrix} = 0.$$

За n материјалних тачака добили бисмо детерминанту и фреквентни полином

$$f(u) = \begin{vmatrix} u-(2n-1) & n-1 & 0 & \vdots \\ n-1 & u-(2n-3) & n-2 & \vdots \\ 0 & n-2 & u-(2n-5) & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & : u-5 & 2 & 0 \\ & & & : 2 & u-3 & 1 \\ & & & : 0 & 1 & u-1 \end{vmatrix} =$$

$$= \sum (-1)^r \frac{n!}{(n-r)!} \binom{n}{r} u^{n-r} = 0 \tag{38}$$

а за фреквентне полиноме важи рекурзивни образац

$$f_{n+1} - (2n+1-u)f_n + n^2 f_{n-1} = 0, \quad (39)$$

те се детерминанта не мора ни развијати. Тако су

$$f_0 = 1; \quad f_1 = u - 1 = 0; \quad f_2 = u^2 - 4u + 2 = 0;$$

$$f_3 = u^3 - 9u^2 + 18u - 6 = 0;$$

$$f_4 = u^4 - 16u^3 + 72u^2 - 96u + 24 = 0.$$

Ови су полиноми *Laguerre*-ови полиноми.*

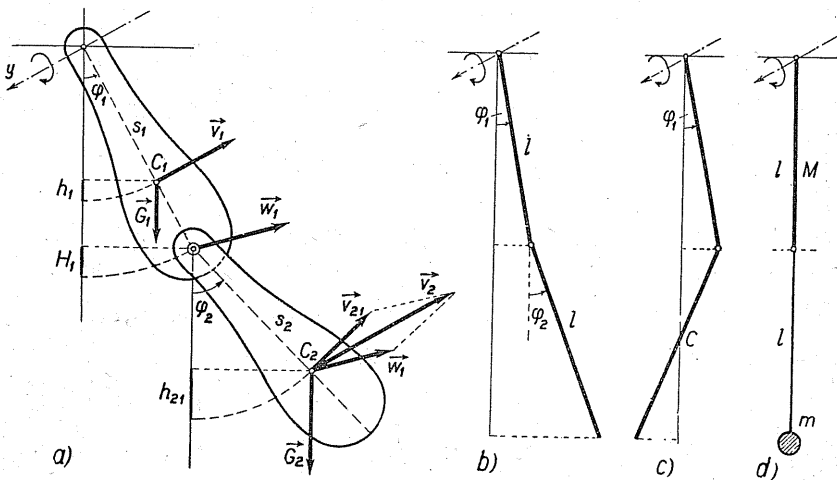
На пример, за $n=3$ имали бисмо

$$f(u) = \begin{vmatrix} u-5 & 2 & 0 \\ 2 & u-3 & 1 \\ 0 & 1 & u-1 \end{vmatrix} = u^3 - 9u^2 + 18u - 6 = 0;$$

$$u_i = 0,416; \quad 2,294; \quad 6,290$$

$$\frac{A_{1s}}{1} = \frac{A_{2s}}{-(u-5)/2} = \frac{A_{3s}}{(u^2-8u+11)/2}.$$

10.5. Двогубо физичко клатно. — Слично двогубом математичком клатну и ово се клатно састоји из два обична физичка клатна од којих се прво клати око осе Oy управне на раван симетрије клатна а друго је везано за зглоб W_1 те изводи равно кретање у равни Oxz .



Сл. 10.9. — Двогубо физичко клатно

Као генерализане координате узнемо угловне елонгације φ_1 и φ_2 (сл. 10.9. а) па је брзина средишта првог клатна $v_1 = s_1 \dot{\varphi}_1$ где је $s_1 = \overline{OC_1}$

* Д. Рашковић — Неке карактеристике фреквентних једначина малих осцилација система са динамичким и мешовитим везама. Зборник радова Маш. Инст. САН., Бгд., 1959., том LX, књ. 8.

растојање тежишта C_1 од тачке вешања O . Брзина средишта C_2 другог клатна једнака је векторском збиру преносне брзине тачке вешања W_1 и релативне брзине према томе зглобу. Како испитујемо мале осцилације око положаја стабилне равнотеже то се векторски збир може заменити скаларним па су брзине средишта

$$v_1 = l_1 \dot{\varphi}_1; \quad \vec{v}_2 = \vec{w}_1 + \vec{v}_{21}; \quad v_2 \approx l_1 \dot{\varphi}_1 + s_2 \dot{\varphi}_2. \quad (40)$$

Кинетичка енергија првог клатна јесте енергија обртања око осе Oy а другог је кинетичка енергија његовог равног кретања, па је укупна кинетичка енергија система

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} J_{1y} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2 = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \\ &+ \frac{1}{2} M_2 v_2^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2 = \frac{1}{2} (J_1 \dot{\varphi}_1^2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2) + \frac{1}{2} [M_1 s_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + M_2 (l_1 \dot{\varphi}_1 + \\ &+ s_2 \dot{\varphi}_2)^2] = \frac{1}{2} [A \dot{\varphi}_1^2 + 2B \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + C \dot{\varphi}_2^2], \end{aligned} \quad (41 a)$$

где су уведене смене

$$A = J_1 + M_1 s_1^2 + M_2 l_1^2; \quad B = M_2 l_1 s_2; \quad C = J_2 + M_2 s_2^2. \quad (41 b)$$

Овде су J_i сопствени моменти инерције тела за тежишне осе паралелне обртној оси Oy , s_i растојања тежишта C_i од тачака вешања и M_i масе клатна.

Прво тежиште ће се при осциловању подићи за висину h_1 а друго за висину $h_2 = H_1 + h_{21}$, где је H_1 висина подизања зглоба W_1 а h_{21} релативна висина подизања тежишта C_2 у односу на тај зглоб, па ће бити

$$h_1 \approx \frac{1}{2} s_1 \varphi_1^2; \quad h_2 \approx H_1 + h_{21} \approx \frac{1}{2} (l_1 \varphi_1^2 + s_2 \varphi_2^2) \quad (42)$$

те је потенцијална енергија система

$$E_p = M_1 g h_1 + M_2 g h_2 = \frac{1}{2} [D \varphi_1^2 + E \varphi_2^2] \quad (43 a)$$

где су уведене смене

$$D = g(M_1 s_1 + M_2 l_1); \quad E = M_2 g s_2. \quad (43 b)$$

Лагранжеве једначине и решење (20) дају систем једначина

$$\begin{aligned} A \ddot{\varphi}_1 + B \ddot{\varphi}_2 + D \varphi_1 &= 0; & (D - \lambda A) A_1 & - \lambda B A_2 = 0; \\ B \ddot{\varphi}_1 + C \ddot{\varphi}_2 + E \varphi_2 &= 0; & -\lambda B A_1 & + (E - \lambda C) A_2 = 0; \end{aligned} \quad (44)$$

па је фреквентна једначина

$$f(\lambda = \omega^2) = \begin{vmatrix} D - \lambda A & -\lambda B \\ -\lambda B & E - \lambda C \end{vmatrix} = (AC - B^2)\lambda^2 - (AE + DC)\lambda + DE = a\lambda^2 - b\lambda + c = 0, \quad (45)$$

и њени корени и односи амплитуда

$$\lambda = \frac{b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad \frac{A_{1s}}{B\lambda_s} = \frac{A_{2s}}{D - A\lambda_s}. \quad (46)$$

У случају хомогеног система клајна, облика штапова, маса M и дужина l , (сл. 10.9. b), биће

$$J_i = \frac{1}{12} M l^2; \quad s_i = \frac{l}{2}; \quad A = \frac{4}{3} M l^2; \quad B = \frac{1}{2} M l^2; \\ C = \frac{1}{3} M l^2; \quad D = \frac{3}{2} M g l; \quad E = \frac{M g l}{2};$$

$$f\left(u = \frac{l\omega^2}{3g}\right) = \begin{vmatrix} 3 - 8u & -3u \\ -3u & 1 - 2u \end{vmatrix} = 7u^2 - 14u + 3 = 0; \quad u = 1 \mp \frac{2}{7}\sqrt{7};$$

$$u = 1 \mp 0,756; \quad u_1 = 0,244; \quad u_2 = 1,756; \quad \omega_1 = 0,86 \sqrt{g/l}; \quad \omega_2 = 2,30 \sqrt{g/l};$$

$$\frac{A_{1s}}{3u_s} = \frac{A_{2s}}{3 - 8u_s}; \quad \frac{A_{11}}{1} = \frac{A_{21}}{1,43}; \quad \frac{A_{12}}{1} = \frac{A_{22}}{-2,09}.$$

Главни облици осциловања приказани су на сл. 10.9. c, d.

Ако је први штап врло краћак ($M_1 \approx 0$) онда би било

$$A = M l^2; \quad B = M l^2/2; \quad C = M l^2/3; \quad D = M g l; \quad E = M g l/2$$

$$f(u = l\omega^2/3g) = \begin{vmatrix} 2 - 6u & -3u \\ -3u & 1 - 2u \end{vmatrix} = 3u^2 - 10u + 2 = 0; \quad u = \frac{5 \mp \sqrt{19}}{3};$$

$$\frac{A_{1s}}{1} = \frac{A_{2s}}{2 \left[\frac{1}{5 \mp \sqrt{19}} - 1 \right]}; \quad \frac{A_{11}}{1} = \frac{A_{21}}{1,12}; \quad \frac{A_{12}}{1} = \frac{A_{22}}{-1,79}.$$

Ако је прво клајно облика штапа, масе M , дужине l , а друго машемашичко клајно, масе m , дужине l , (сл. 10.9. d), онда ће бити

$$v_1 = l\dot{\varphi}_1/2; \quad v_2 = l(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2); \quad h_1 = l\varphi_1^2/4; \quad h_2 = l(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)/2,$$

$$E_k = 1/6 (M + 3m) l^2 \dot{\varphi}_1^2 + m l^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + 1/2 m l^2 \dot{\varphi}_2^2;$$

$$E_p = 1/4 (M + 2m) g l \varphi_1^2 + 1/2 m g l \varphi_2^2$$

$$f\left(u = \frac{l\omega^2}{g}\right) = \begin{vmatrix} 3(1 + 2\mu) - 2(1 + 3\mu)u & -6\mu u \\ -u & 1 - u \end{vmatrix} = 2u^2 - (5 + 12\mu)u + 3(1 + 2\mu) = 0, \quad \mu = m/M.$$

Црквено звоно је комбинација физичког и математичког клатна (сл. 10.10. а). Маса звона је M а маса језика (клепала) m , те су енергије:

$$E_k = \frac{1}{2}[(J_y + ma^2) \dot{\varphi}_1^2 + 2 mal \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + ml^2 \dot{\varphi}_2^2], \quad E_p = \frac{1}{2}[Ms_1 + ma] g \varphi_1^2 + mgl \varphi_2^2$$

па добијамо систем диференцијалних једначина

$$(J_y + ma^2) \ddot{\varphi}_1 + mal \ddot{\varphi}_2 + (Ms_1 + ma) g \varphi_1 = 0; \quad mal \ddot{\varphi}_1 + ml^2 \ddot{\varphi}_2 + mgl \varphi_2 = 0,$$

и фреквентну једначину

$$f(\lambda = \omega^2) = \begin{vmatrix} (Ms_1 + ma) g - (J_y + ma^2) \lambda & - mal \lambda \\ - a \lambda & g - l \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (47)$$

Звоно неће звонити када је $\varphi_1 = \varphi_2$, тј. када је однос амплитуда једнак јединици, (сл. 10.10. б). Тада је

$$\frac{A_{1s}}{A_{2s}} = \frac{g - l\lambda}{a \lambda} =$$

$$= \frac{mal \lambda}{(Ms_1 + ma) g - (J_y + ma^2) \lambda} = 1, \quad \text{Сл. 10.10. — а) Звоно, б) Маса на танком обручу}$$

па добијамо два односа

$$(J_y + ma^2 + mal) \lambda = (Ms_1 + ma) g; \quad (a + l) \lambda = g$$

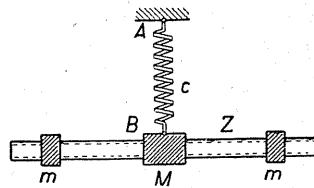
те мора бити

$$(a + l) = \frac{J_y + ma(a + l)}{Ms_1 + ma} = l_r = \frac{J_y}{Ms_1}. \quad (48)$$

Звоно неће звонити када се тежиште клепала (масе m) поклопи са центром осциловања (Хајгенсовим центром) физичког клатна (звона). Као што је познато из Динамике тада се не мења период физичког клатна, па маса m додата у Хајгенсовом центру не утиче на промену периода осциловања.

Једначину (48) можемо лако проверити и опитом. Нека је клатно у облику хомогеног обруча, полупречника R , (сл. 10.10. б), тада момент инерције за осу кроз тачку вешања O износи: $J_y = 2MR^2$, па је редукована дужина клатна $l_r = 2R$, те је центар осциловања на самом обиму обруча. Ако се математичко клатно дужине l обеси у тежишту C обруча, онда је горњи услов задовољен и систем ће осциловати као једно тело. Међутим, промени ли се дужина клатна, или тачка вешања C , тада ће осцилације система оба клатна бити спрегнуте.

Иако би услов (48) био испуњен ипак може који пут звоно и да звони, што зависи од почетних услова

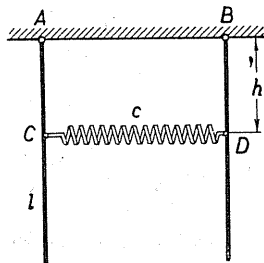


Сл. 10.11. — Wilberforce-ов осцилатор

кретања, али ће при томе звонити испрекидано. Због тога се при конструкцији звона увек тежи да се избегне горњи однос.

Код *Wilberforce*-овог осцилатора, (сл. 10.11.), који се састоји из масе M са опругом AB , крутости c , и завртња (Z) са масама m , може се момент инерције маса за вертикалну осу мењати. У овоме су случају осцилације сличне као и код возила, тј. постоје спрегнуте осцилације транслације у вертикалном правцу и обртања око вертикалне осе. Спрезање осцилација настаје услед тога што се при истезању опруге ствара спрег малог момента, а при скупљању настаје и слабо вучење. И у овоме се случају, може уочити периодичка промена енергије са једног дела система на други.

Енергије *Oberbeck*-овог физичког клатна (сл. 10.12.) облика штапа износе



Сл. 10.12. — *Oberbeck*-ово физичко клатно

$$E_k = \frac{1}{6} M l^2 (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2),$$

$$E_p = \frac{1}{4} M g l (\varphi^2 + \theta^2) + \frac{c}{2} h^2 (\theta - \varphi)^2$$

те је фреквентна једначина

$$f\left(u = \frac{l\omega^2}{3g}\right) = \begin{vmatrix} 1 + 2k - 2u & -2k \\ -2k & 1 + 2k - 2u \end{vmatrix} =$$

$$= 4u^2 - 4(1 + 2k)u + (1 + 4k) = 0; \quad k = ch^2/Mgl; \quad (49)$$

$$u_1 = 1/2; \quad u_2 = 1/2 + 2k; \quad A_{1s}/A_{2s} = 2k/(1 + 2k - 2u) = \eta;$$

$$\eta_1 = A_{11}/A_{21} = 1; \quad \eta_2 = A_{12}/A_{22} = -1.$$

10.6. Сложено физичко клатно. — Означимо са v_i брзину средишта i -ог клатна а са w_{i-1} брзину његове тачке вешања за предходно клатно и са $v_{i, i-1}$ релативну брзину у односу на тачку вешања. Нека је h висина подизања тежишта C_i i -ог клатна а H_{i-1} висина подизања његове тачке вешања, онда, слично сложеном математичком клатну добијемо брзине и подизања тежишта клатна

$$v_i = w_{i-1} + v_{i, i-1} = s_i \dot{\varphi}_i + \sum_{k=1}^{i-1} l_k \dot{\varphi}_k; \quad (50)$$

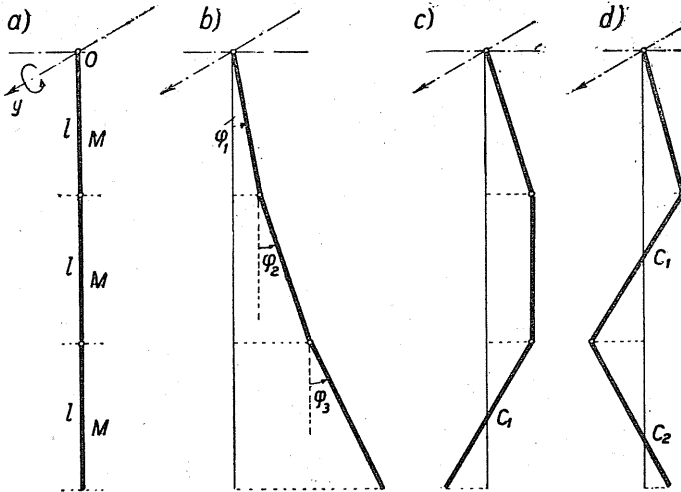
$$h_i = H_{i-1} + h_{i, i-1} = \frac{1}{2} s_i \varphi_i^2 + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{2} l_k \varphi_k^2$$

па су енергије

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (J_i \dot{\varphi}_i^2 + M_i v_i^2); \quad E_p = \sum_{i=1}^n M_i g h_i; \quad (51)$$

па Лагранжеве једначине дају систем диференцијалних једначина те се тиме проблем своди на исти проблем као и код сложеног математичког клатна.

У случају хомогеног сложеног клатна облика штапа, све су масе штапова једнаке $M_i = M$ а такође и њихове дужине $l_i = l$, па су цен-



Сл. 10.13. — Трогубо физичко клатно

трални моменти инерције $J_i = Ml^2/12$. На пример, за трогубо клатно (сл. 10.13. a) имали бисмо

$$v_1 = \frac{l}{2} \dot{\varphi}_1; \quad v_2 = \frac{l}{2} (2\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2); \quad v_3 = \frac{l}{2} (2\dot{\varphi}_1 + 2\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3);$$

$$h_1 = \frac{l}{4} \varphi_1^2; \quad h_2 = \frac{l}{4} (2\varphi_1^2 + \varphi_2^2); \quad h_3 = \frac{l}{4} (2\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 + \varphi_3^2)$$

па су енергије

$$E_k = \frac{1}{2} \left\{ \frac{Ml^2}{12} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2) + \frac{Ml^2}{4} [\dot{\varphi}_1^2 + (2\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 + (2\dot{\varphi}_1 + 2\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3)^2] \right\};$$

(52)

$$E^d = \frac{Mgl}{4} (5\varphi_1^2 + 3\varphi_2^2 + \varphi_3^2).$$

Главни облици осциловања приказати су на сл. 10.13., *b, c, d*, јер су

$$\frac{A_{11}}{1} = \frac{A_{21}}{2,33} = \frac{A_{31}}{4,08}; \quad \frac{A_{12}}{1} = \frac{A_{22}}{1} = \frac{A_{32}}{-2};$$

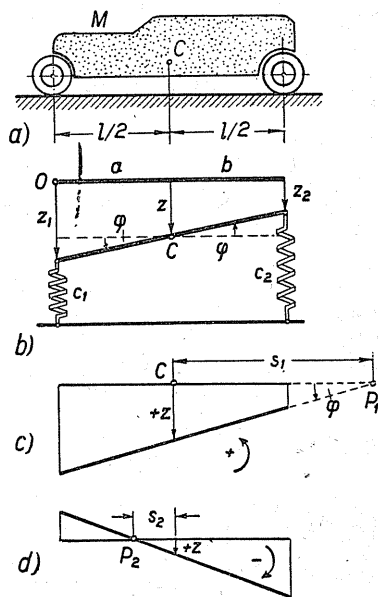
$$\frac{A_{13}}{1} = \frac{A_{23}}{-1} = \frac{A_{33}}{0,57}.$$

10.7. Возила. — Возило (на пример аутомобил) представља компликовани осцилаторни систем. Оно се састоји из три масе: *шасије, осовина* и *опруга*. Код аутомобила има осам различитих опруга: четири за везу шасије са осовинама и четири за везу са путем (точкови са гумама). Како свако тело у простору има шест степени слободе кретања то аутомобил има 18 степени слободе, па су велике математичке тешкоће потпуног решења проблема. Због тога се овај проблем упростићава посматрајући само главна кретања: 1) *транслаторно кретање шасије* (рама) у вертикалном правцу, 2) *њихање шасије* око попречне тежишне осе у равни уздужне симетрије и 3) *транслаторно кретање* точкова у вертикалном правцу.

Основне кружне фреквенције за прва два кретања су величине истог реда, уопште узев мање од 1 сурс-а, док се точкови крећу у вертикалном правцу много већом брзином, и кружном фреквенцијом 6—10 пута већом неголи код прва два кретања. Због ових односа фреквенција могу се ове осцилације шасије и точкова сматрати неспрегнутим и посматрати засебно прва два кретања а засебно осцилације точкова, што у многоне упростићава проблем, јер се осцилације шасије свде на два степена слободе.

Нека је M маса возила (шасије, осовина) и нека су c_1 и c_2 крутости опруга предњих и задњих осовина (сл. 10.14. *a*). Посматрајмо осцилације возила у вертикалној равни и за генерализане координате узмимо померање тежишта система у вертикалном правцу (z) и угао обртања (φ) око попречне осе управне на вертикалну раван симетрије возила, (сл. 10.14. *b*), онда је према Кениговој теореме кинетичка енергија овог равног кретања

$$E_k = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2; \quad J = J_c. \quad (56)$$



Сл. 10.14. — Возило

Ако је положај тежишта система одређен са a и b у односу на осовине онда су вертикалне силе у опругама $F_A = Gb/l$ и $F_B = Ga/l$, где је l растојање осовина те су издужења опруга услед статичког дејства сила $f_1 = F_A/c_1 = Gb/lc_1$, $f_2 = F_B/c_2 = Ga/lc_2$, те је $f_1/f_2 = bc_2/ac_1$. У равнотежном положају возила ове се силе поништавају са тежином система G , те она не утиче даље на потенцијалну енергију. Због тога је потенцијална енергија система једнака само потенцијалној енергији опруга:

$$E_p = 1/2 (c_1 z_1^2 + c_2 z_2^2) = 1/2 [c_1 (z + a\varphi)^2 + c_2 (z - b\varphi)^2], \quad (57)$$

где су z_1 и z_2 померања крајева A и B рама.

Лангранжеве једначине дају систем диференцијалних једначина

$$M \ddot{z} + (c_1 + c_2) z - (c_2 b - c_1 a) \varphi = 0,$$

$$J \ddot{\varphi} - (c_2 b - c_1 a) z + (c_1 a^2 + c_2 b^2) \varphi = 0, \quad (58)$$

које се, претпостављајући решења у облику

$$z = A_1 \cos(\omega t + \alpha), \quad \varphi = A_2 \cos(\omega t + \alpha), \quad (59)$$

своде на систем алгебарских једначина

$$(c_1 + c_2 - M\omega^2) A_1 - (c_2 b - c_1 a) A_2 = 0, \quad (60)$$

$$-(c_2 b - c_1 a) A_1 + (c_1 a^2 + c_2 b^2 - J\omega^2) A_2 = 0.$$

Како је $J = Mi^2$, где је $i = i_c$ централни полупречник инерције за осу обртања, уводећи смене

$$p = (c_1 + c_2)/M, \quad q = (c_2 b - c_1 a)/M, \quad r = (c_1 a^2 + c_2 b^2)/M$$

фреквентна једначина биће

$$(p - \omega^2)(r - i^2 \omega^2) - q^2 = \omega^4 - \left(\frac{r}{i^2} + p\right) \omega^2 + \frac{rp - q^2}{i^2} = 0, \quad (61)$$

па су њени корени

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{r}{i^2} + p \right) \mp \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{r}{i^2} - p \right)^2 + \frac{q^2}{i^2}}. \quad (62)$$

Из система (60) одређујемо односе амплитуда

$$\eta_s = \frac{A_{1s}}{A_{2s}} = \frac{r - i^2 \omega_s^2}{q} = \frac{q}{p - \omega_s^2}. \quad (63)$$

Овде је однос η именовани број, димензије дужине, јединице m или m/rad .

Када је $q > 0$ тада су $f_1 > f_2$ и $\eta_1 > 0$ па су и транслација и обртање у *позитивном смеру*, те је први облик осцилација представљен на сл. 10.14. *c*. Како је $\eta_2 < 0$ то су транслација и обртање у супротним смеровима, па је други главни облик представљен на сл. 10.14. *d*. Пошто је кретање возила равно, то се може свести на једно обртање *око шренушног пола*. У првом случају осцилација пол је P_1 , другом је P_2 . Њихове положаје лако одређујемо из сл. 10.14. *c* и *d*, те су

$$s_1 = z/\varphi = \eta_1; \quad s_2 = -z/\varphi = \eta_2; \quad s_1 s_2 = -l^2,$$

што значи да су s_1 и s_2 супротног знака.

Ако је $a = b$, онда су $q = a(c_2 - c_1)/M$ и $r = a^2 p$, па је квадрат кружне фреквенције

$$\omega^2 = \frac{p}{2} \left(\frac{a^2}{l^2} + 1 \right) \mp \sqrt{\frac{p^2}{4} \left(\frac{a^2}{l^2} - 1 \right)^2 + \frac{g^2}{l^2}}. \quad (62 a)$$

Ако је $q = 0$, тј. ако је $c_2 b = c_1 a$, онда систем једначина (58) постаје

$$M \ddot{z} + (c_1 + c_2) z = 0, \quad J \ddot{\varphi} + (c_1 a^2 + c_2 b^2) \varphi = 0, \quad (64)$$

па се систем распада на два система са по једним степеном слободе. У овом случају, дакле, осцилације возила нису више *спрегнуте*, те су и транслаторне и обртне осцилације хармонијске и међусобно независне, са кружним фреквенцијама

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{M}} = \sqrt{p}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{J}} = \sqrt{\frac{r}{l^2}}. \quad (65)$$

Због тога се и коефицијент q назива *коефицијент спрезања*. У овоме случају су угиби опруга једнаки, $f_1 = f_2$.

Код железничког вагона, тежине G , је $a = b$, $c = a + b$, $c_1 = c_2 = c$ па су фреквенције

$$\omega_1 = \sqrt{2cg/G}; \quad \omega_2 = l \sqrt{c/J}. \quad (62 b)$$

На овај се случај своди и систем представљен на сл. 10.15. *a*, па су кружне фреквенције *неспрегнутих осцилација*

$$\omega_1 = \sqrt{2c/M}, \quad \omega_2 = \sqrt{c l^2/2J}.$$

Када се маса возила M замени двама масама m на крајевима греде AB , дужине $2l$, чију масу занемарујемо, (сл. 10.15. *b*), добићемо *неспрегнуте осцилације*. Како су у овом случају енергије

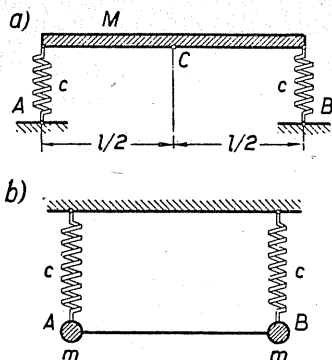
$$E_k = m [\dot{z}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2], \quad E_p = c (z^2 + l^2 \varphi^2),$$

то је систем једначина:

$$m \ddot{z} + c z = 0, \quad m \ddot{\varphi} + c \varphi = 0.$$

па су кружне фреквенције једнаке и износе

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{c/m}.$$



Сл. 10.15. — а) Шасија возила замењена хомогеним штапом. б) Два неспрегнута хармонијска осцилатора

Често шасију можемо сматрати *шпа-иом*, па је израчунавање момента инерције једноставно. На пример, за случај представљен на сл. 10.16. а, спрегнути коефицијент није једнак нули и ако је $a = b = l$, па су осцилације спрегнуте. Како је

$$J = \frac{1}{12} M (2l)^2 = \frac{1}{3} M l^2 \text{ и } z_1 = z + l\varphi, z_2 = z - l\varphi,$$

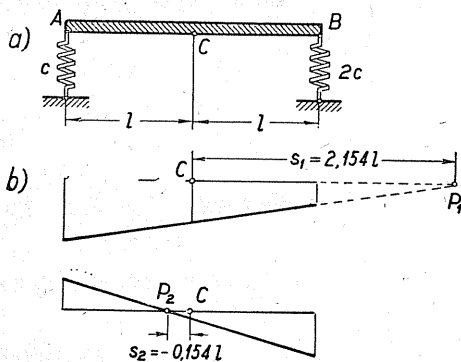
то добијамо систем једначина

$$M \ddot{z} + 3c z - c l \varphi = 0,$$

$$-c z + 3c l \varphi - \frac{1}{3} M l \ddot{\varphi} = 0,$$

па је фреквентна једначина

$$\omega^4 - 12 (c/M) \omega^2 + 24 (c/M)^2 = 0$$



Сл. 10.16. — Осцилације греде ослоњене на два еластична ослоњца

са коренима

$$\omega_{1,2}^2 = 2 (3 \mp \sqrt{3}) (c/M);$$

$$\omega_1^2 = 2,54 (c/M); \quad \omega_2^2 = 9,46 (c/M).$$

Односи амплитуда су

$$\eta = \frac{A_1}{A_2} = 3l - \frac{M l \omega^2}{3c} =$$

$$= \frac{c l}{3c - M \omega^2} = (1 \pm \frac{2}{3} \sqrt{3}) l;$$

$$\eta_1 = 2,154l; \quad \eta_2 = -0,154l.$$

Положаји тренутних полова приказани су на сл. 10.16. б, с, те је:

$$s_1 s_2 = -\frac{1}{3} l^2.$$

Код *шроосне локомошиве*, тежине G , чије се тежиште налази у средњој вертикалној равни на удаљењу a од вертикале кроз средиште задње осовине (сл. 10.17.), налазе се на свакој осовини по две опруге

крugости c_1 . Растојања тачкова су l_1 и l_2 . Кинетичка и потенцијална енергија биће

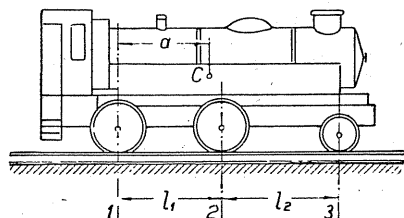
$$E_k = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2,$$

$$E_p = \frac{2}{2} c_1 z_1^2 + \frac{2}{2} c_2 z_2^2 + \frac{2}{2} c_3 z_3^2 = c_1 (z + a\varphi)^2 + \\ + c_2 [z - (l_1 - a)\varphi]^2 + c_3 [z - (l_1 + l_2 - a)\varphi]^2,$$

па Лагранжеве једначине дају систем једначина

$$M\ddot{z} + 2(c_1 + c_2 + c_3)z + 2[(c_1 + c_2 + c_3)a - \\ - c_2 l_1 - c_3(l_1 + l_2)]\varphi = 0,$$

$$J\ddot{\varphi} + 2[c_1 a - c_2(l_1 - a) - c_3(l_1 + l_2 - \\ - a)]z + 2[c_1 a^2 + c_2(l_1 - a)^2 + \\ + c_3(l_1 + l_2 - a)^2]\varphi = 0.$$



Сл. 10.17. — Троосна локомотива

Осцилације у вертикалном правцу представљају *подскакивање*, а обртне *галопирање*. Помоћу претпоставке (30) добићемо фреквентну једначину и-кружне фреквенције.

На пример*, ако је $G = 26 \text{ t}$, $J = 220 \text{ t m sec}^2$, $c_1 = c_2 = 135 \text{ t/m}$, $c_3 = 148 \text{ t/m}$, $l_1 = l_2 = 1,8 \text{ m}$, $a = 1,6 \text{ m}$, биће:

$$13\ddot{z} + 418gz - 107g\varphi = 0; \quad 110\ddot{\varphi} - 107z + 943\varphi = 0$$

па су

$$\omega_1 = 2,88 \text{ sec}^{-1}; \quad \omega_2 = 17,76 \text{ sec}^{-1}.$$

Односи амплитуда су:

$$\eta_1 = 0,263, \quad \eta_2 = -318.$$

У претходним излагањима возило је растављено на два система: шасију и тачкове. Међутим, када тачак наиђе на неравном путу на неку препреку наступиће и поремећај осцилација рама. После извесног времена на исту препреку, наићи ће и задњи тачак, те ће и он изазвати нове поремећаје осцилација. Ако се возило креће константном брзином v и ако је Δt време у коме се дешавају ови поремећаји

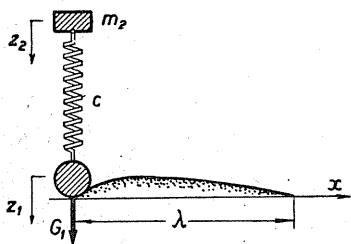
$$\Delta t = l/v = n_1 T_1 = n_2 T_2,$$

*И. В. Мешнерски — Збирка задатака из Теоријске механике, 3. издање, задатак 3.748.

сразмерно периодима сопствених осцилација возила, где су n_1 и n_2 цели бројеви, може доћи до суперпозиције ових поремећаја па и до резонансе. Због тога се мора утицај импулса једног тачка на други тачак отклонити. Проблем осцилације возила свели смо на осцилације око тренутних полова P_1 и P_2 (сл. 10.14. *c, d*), услед момента реституционих сила опруга за ове моментне тачке. Да би моменти ових сила били једнаки нули, морају се полови покlopити са крајњим тачкама A и B штапа AB , те у том случају морају бити $s_1 = b$, $s_2 = a$, то јест $s_1 s_2 = -ab = l^2$. Маса M може се разложити на две масе m_A^* и m_B^* у крајњим тачкама A и B , према условими:

$$M = m_A^* + m_B^*; \quad m_A^* a^2 + m_B^* b^2 = Ml^2; \quad m_A^* = M b/l; \quad m_B^* = M a/l.$$

Означимо са G_1 тежину испод опруге тачка, (сл. 10.18.), која се, непосредно преноси на пут, а са $G_2 = m_2 g$ тежину изнад опруге, онда систем има два степена слободe, те за генерализане координате узимамо вертикална померања маса z_1 и z_2 . Претпоставимо да је неравнина пута дата једначином



$$z = h \sin^2 \frac{\pi x}{\lambda} = \frac{h}{2} (1 - \cos 2kt), \quad (66)$$

Сл. 10.18. — Осцилације тачка возила по неравном путу

где су $k = \pi v/\lambda$, v брзина кретања возила а λ таласна дужина неравнине пута.

Како је $z = z_1$ то су брзина и убрзање масе m_1 :

$$\dot{z}_1 = h k \sin 2kt, \quad \ddot{z}_1 = 2 h k^2 \cos 2kt,$$

па је притисак тачка на пут

$$F_1 = F_{s1} + F_{d1} = G_1 + 2 m_1 h k^2 \cos 2kt. \quad (67)$$

Док је статички притисак на пут константан, динамички се притисак мења и расте са квадраном брзине кретања возила.

Диференцијална једначина кретања масе m_2 биће

$$m_2 \ddot{z}_2 = -c (z_2 - z_1) \quad (68)$$

те се своди на нехомогену једначину

$$\ddot{z}_2 + \omega^2 z_2 = \frac{1}{2} \omega^2 h (1 - \cos 2kt) \quad (68 a)$$

чије је решење

$$z_2 = R \sin(\omega t + \alpha) + \frac{1}{2} h + C \cos 2kt. \quad (69)$$

Ако су почетни услови кретања: за $t=0$, $z_1 = z_2 = 0$, $\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = 0$, онда је партикуларно решење

$$z_2 = \frac{h}{2} \left[1 + \frac{1}{\omega^2 - 4k^2} (4k^2 \cos \omega t - \omega^2 \cos 2kt) \right]. \quad (69 a)$$

Притисак масе m_2 на пут биће

$$F_2 = G_2 - c(z_2 - z_1) = G_2 - 2ch \frac{k^2}{\omega^2 - 4k^2} (\cos \omega t - \cos 2kt)$$

па је укупни притисак

$$F_p = F_s + F_d = G_1 + G_2 + 2hk^2 \left[m_1 \cos 2kt - m_2 \frac{\omega^2}{\omega^2 - 4k^2} (\cos \omega t - \cos 2kt) \right]. \quad (70)$$

Из ове једначине види се да динамички притисак зависи како од квадрата брзине кретања возила тако и од сопствене фреквенције опруге (ω). При великим брзинама и глатком путу више долази до изражаја утицај тежине $m_1 g$, док при неравнини има великог утицаја горња маса m_2 , пошто због ње може доћи и до резонансе, када буде $\omega = 2k = 2\pi v/\lambda$.

ПРИМЕРИ

10.1. У шупљем танком кружном цилиндру, масе M , полупречника R , који се налази на непокретној хоризонталној храпавој равни, налази се хомогена кугла, полупречника r . Одредити кружну фреквенцију малих осцилација система око положаја стабилне равнотеже.

(Camb. Math. Tripos, Part. I. 1899.)

[Решење. — Енергије система су:

$$E_k = \frac{1}{3} (J_1 \dot{\theta}^2 + M v_1^2 + J_2 \dot{\phi}^2 + m v_2^2) = (M + \frac{7}{10} m) R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{7}{5} m R (R - r) \dot{\theta} \dot{\phi} + \frac{7}{10} m (R - r)^2 \dot{\phi}^2; \\ E_p = \frac{1}{2} mg (R - r) \phi^2.$$

Систем диференцијалних једначина је

$$(10M + 7m) R \ddot{\theta} + 7m(R - r) \ddot{\phi} = 0, \quad 7R \ddot{\theta} + 7(R - r) \ddot{\phi} + 5g\phi = 0,$$

па су фреквенције

$$\omega_1^2 = 0; \quad \omega_2^2 = (10M + 7m)g/[14M(R - r)].$$

10.2. Хомогена танка полулопта, полупречника R , лежи на храпавој хоризонталној равни а у њој се налази куглица, масе m . Одредити фреквентну једначину малих осцилација система у вертикалној равни.

[Решење. — Како су

$$z_C = 1/2 R, \quad J_C = J_0 - M R^2 = 5/12 M R^2$$

биће енергије:

$$E_k = 1/2 [J_C \dot{\theta}^2 + M (1/2 R \dot{\theta})^2 + m R^2 (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2],$$

$$E_p = 1/2 [1/2 M \theta^2 + m \varphi^2] g R,$$

па је фреквентна једначина

$$4 \omega^4 - (7 + 6 \mu) k \omega^2 + 3 k^2 = 0, \quad \mu = m/M, \quad k = g/R.]$$

10.3. Хомогени танки шупљи ваљак, масе M , полупречника R , лежи на хоризонталној равни а у њему се налази пуни хомогени ваљак, масе m , полупречника основе r . Ваљци су паралелних оса. Одредити дужину еквивалентног математичког клатна малих осцилација система.

$$\begin{aligned} [E_k = 1/2 \{2MR^2 \dot{\theta}^2 + m [R \dot{\theta} + (R-r) \dot{\varphi}]^2 + 1/2 m r^2 [R \dot{\theta} + (R-r) \dot{\varphi}]^2 \cdot r^{-2}\} = \\ = 1/4 (4M + 3m) R^2 \dot{\theta}^2 + 3/2 m R (R-r) \dot{\theta} \dot{\varphi} + 3/4 m (R-r)^2 \dot{\varphi}^2; \end{aligned}$$

$$E_p = 1/2 m g (R-r) \varphi^2$$

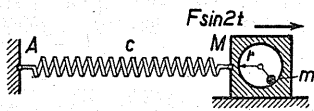
$$(4M + 3m) R \ddot{\theta} + 3m (R-r) \ddot{\varphi} = 0; \quad 6M (R-r) \ddot{\varphi} + (4M + 3m) g \varphi = 0,$$

тј.

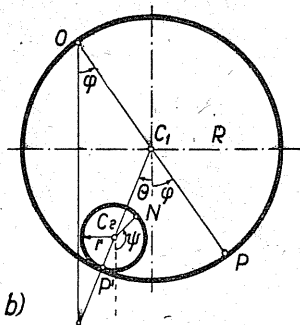
$$3R \ddot{\theta} + 3(R-r) \ddot{\varphi} + 3g\varphi = 0,$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l_r} = \frac{4M + 3m}{6M(R-r)} g; \quad l_r = \frac{6M(R-r)}{4M + 3m}.$$

10.4. — Призматични клизач, масе M , везан је за тачку A опругом, (сл. 10.19. а), и клизи по хоризонталној равни под утицајем поремећајне силе $F(t) = F \sin 2t$. У шупљини клизача налази се куглица масе $m = 1/4 M$, тежине 980 грама.



а)



б)

Сл. 10.19. — а) Осцилације масе у шупљини осцилаторног клизача; б) Осцилације шупљог ваљка у обешеном шупљом ваљку

а) Одредити амплитуде малих осцилација система око равнотежног положаја ако је $r = 5$ см, а опруга се под утицајем силе $F = 100$ kg издужи за 2 мм.

б) Који услов мора бити испуњен да би клизач био у стању мировања?

$$[a) E_k = 1/2 [M + m] \dot{x}^2 + m (r^2 \dot{\varphi}^2 + 2r \dot{x} \dot{\varphi}),$$

$$E_p = 1/2 [cx^2 + m g r \varphi^2];$$

$$\Delta(\Omega^2) = M m r^2 \left(\Omega^4 - \right.$$

$$\left. - \frac{(M + m) g + cr}{M r} \Omega^2 + \frac{cg}{M r} \right);$$

$$\Omega = 2; \quad M + m = 3/4 M;$$

$$A_1 = \frac{F m r (g - r \Omega^2)}{\Delta}; \quad A_2 = \frac{F m r \Omega^2}{\Delta};$$

$$b) r \Omega^2 = g; \quad A_1 = 0].$$

10.5. Хомогени шупљи ваљак, полупречника R , обешен је о једну изводницу а у његовој шупљини налази се други хомогени шупљи ваљак, полупречника r .

Одредити кружне фреквенције осцилација система претпостављајући да нема трења између ваљака.

[Решење. — Из услова котрљања без клизања, (сл. 10.19. б), биће $\widehat{PP'} = \widehat{P'N}$, па је $r(\psi + \theta) = R(\varphi + \theta)$, те је $\psi = [(R - r)\theta + R\varphi]/r$.

Како је

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_{21}$$

то је

$$v_2 \approx R\dot{\varphi} - (R - r)\dot{\theta}, \text{ јер су углови } \varphi \text{ и } \theta \text{ супротног знака.}$$

Енергије биће

$$E_k = 1/2 [J_y \dot{\varphi}^2 + J_2 \dot{\psi}^2 + m v_2^2] = (M + m) R^2 \dot{\varphi}^2 + m (R - r)^2 \dot{\theta}^2,$$

$$E_p = 1/2 M g R \theta^2 + 1/2 m g [R \varphi^2 + (R - r) \theta^2] = 1/2 (M + m) g R \varphi^2 + 1/2 m g (R - r) \theta^2$$

па добијамо систем несимултаних диф. једначина

$$\varphi + (g/2R)\theta = 0, \quad \ddot{\theta} + [g/2(R - r)]\theta = 0,$$

пошто су φ и θ главне координате система.

Квадрати кружних фреквенција су $g/2R$ и $g/2(R - r)$.

10.6. Код двојног математичког клатна је $m_1 = 2m = 2m_2$, $l_i = l$, (сл. 10.4.). Одредити кружне фреквенције.

[Решење. — Овде је $\mu = 1/2$ па је из (22)

$$\Delta(\omega^2) = 2\omega^4 - 6k\omega^2 + 3k^2 = 0; \quad \omega^2 = (3 \mp \sqrt{3})k/2; \quad k = g/l.$$

10.7. Исти задатак као претходни само је $m_1 = m$, $m_2 = 2m$.

$$[\omega^4 - 6k\omega^2 + 3k^2 = 0; \quad \omega^2 = (3 \mp \sqrt{6})k].$$

10.8. Код двогубог клатна са опругама, (сл. 10.6.), је $m_1 = 2m$, $m_2 = m$; $l_i = l$, $c_1 = c$, $c_2 = 2c$. Одредити кружне фреквенције.

[Решење. — Енергије су:

$$E_k = \frac{ml^2}{2} (3\dot{\varphi}_1^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2); \quad E_p = \frac{mgl}{2} (3\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{c l^2}{2} (3\varphi_1^2 + 4\varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_2^2);$$

па су

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} 3(k + u - \omega^2) & -\omega^2 + 2u \\ -\omega^2 + 2u & k + 2u - \omega^2 \end{vmatrix} = 0; \quad k = g/l; \quad u = c/m.$$

10.9. Oberbeck-ово клатно (сл.10.7.) је леве масе $2m$ а десне m , $h = l/2$. Одредити кружне фреквенције осцилација.

[Решење. — Енергије су

$$E_k = \frac{ml^2}{2} (2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2); \quad E_p = \frac{mgl}{2} (2\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{cl^2}{8} (\varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2),$$

па су

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} 8k + u - 8\omega^2 & -u \\ -u & 4k + u - 4\omega^2 \end{vmatrix} = 8\omega^4 - (16k + 3u)\omega^2 + (3ku + 8) = 0;$$

$$k = g/l, \quad u = c/ml.$$

10.10. Код сложеног клатна (сл. 10.9. d) је $M = 3m$, $l_1 = l_2 = l$. Одредити кружне фреквенције система.

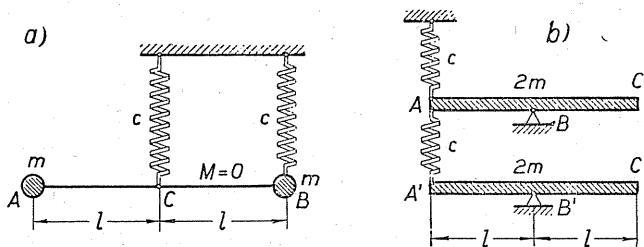
[Решење. — Овде су енергије

$$E_k = ml^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_2^2); \quad E_p = \frac{mgl}{2} \left(\frac{5}{2}\varphi_1^2 + \varphi_2^2 \right)$$

па је фреквентна једначина

$$f(u = l\omega^2/g) = \begin{vmatrix} 5 - 4u & -2u \\ -u & 1 - u \end{vmatrix} = 2u^2 - 9u + 5 = 0; \quad u = \frac{9 \mp \sqrt{41}}{4}$$

10.11. У коме односу стоје кружне фреквенције система приказаних на сл. 10.20 ако се у првом случају маса штапа ABC занемарује а у другом износи $2m$?



Сл. 10.20. — Свођење проблема осцилација на случај возила

[Решење. — Како су генерализане координате

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \text{b)} \\ z_1 = z + l\varphi, & z_2 = z - l\varphi; & z_1 = l\varphi_1, & z_2 = l\varphi_2, \end{array}$$

то су енергије

$$\begin{array}{ll} E_k = m(\dot{z}^2 + l^2\dot{\varphi}^2), & E_k = \frac{1}{2}J(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2), \\ E_p = \frac{1}{2}c(2z^2 - 2lz\varphi + l^2\varphi^2) & E_p = \frac{1}{2}c l^2[(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \varphi_1^2] \end{array}$$

и системи диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} 2m\ddot{z} + 2cz - c\varphi &= 0, \\ 2ml^2\ddot{\varphi} + c l^2 z - c l z &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi}_1 + 2cl^2\varphi_1 - cl^2\varphi_2 &= 0, \\ J\ddot{\varphi}_2 + cl^2(\varphi_2 - \varphi_1) &= 0. \end{aligned}$$

Фреквентне једначине биће

$$4u^2 - 6u + 1 = 0; \quad u = m\omega^2/c; \quad | \quad u^2 - 3u + 1 = 0, \quad u = J\omega^2/cl^2.$$

Због $J = 2/3 ml^2$ кружне фреквенције су

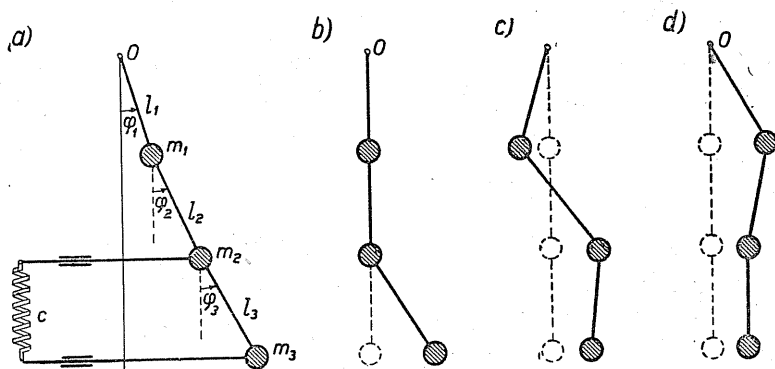
$$\omega_i^2 = 1/4 (3 \mp \sqrt{5}) (c/m); \quad | \quad \omega_i^2 = 3/4 (3 \mp \sqrt{5}) c/m,$$

$$\omega_i^2(I): \omega_i^{2(II)} = 1:3$$

10.12. Код железничког вагона тежине 10 тона су $a=b=3$ м, $l=3$ м, $c=250$ т/м. Одредити кружне фреквенције.

[Решење. — Према (62 b) биће: $\omega_1 = 22,14 \text{ sec}^{-1}$, $\omega_2 = 31,32 \text{ sec}^{-1}$.

10.13. Одредити кружне фреквенције и главне облике осцилација троуглог математичког клатна, (сл. 10.21. a), ако су $m_1 = m_2 = m_3 = m$, $l_1 = l_2 = l_3 = l$, $k = mg/cl = 1$.



Сл. 10.21. — Троугло математичко клатно са опругом

[Решење. — Кинетичка и потенцијална енергија система су:

$$\begin{aligned} E_k &= 1/2 [m_1 (l_1 \dot{\varphi}_1)^2 + m_2 (l_1 \dot{\varphi}_1 + l_2 \dot{\varphi}_2)^2 + m_3 (l_1 \dot{\varphi}_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 + l_3 \dot{\varphi}_3)^2] = \\ &= 1/2 ml^2 [3 \dot{\varphi}_1^2 + 2 \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2 + 4 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + 2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 + 2 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3]; \end{aligned}$$

$$E_p = 1/2 [mgl(3\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 + \varphi_3^2 + cl^2(2\varphi_1 + 2\varphi_2 + \varphi_3)^2),$$

па се добија систем диференцијалних једначина

$$3 ml^2 \ddot{\varphi}_1 + 2 ml^2 \ddot{\varphi}_2 + ml^2 \ddot{\varphi}_3 + 3 mgl \varphi_1 + 2 cl^2 (2 \varphi_1 + 2 \varphi_2 + \varphi_3) = 0,$$

$$2 ml^2 \ddot{\varphi}_1 + 2 ml^2 \ddot{\varphi}_2 + ml^2 \ddot{\varphi}_3 + 2 mgl \varphi_2 + 2 cl^2 (2 \varphi_1 + 2 \varphi_2 + \varphi_3) = 0,$$

$$ml^2 \ddot{\varphi}_1 + ml^2 \ddot{\varphi}_2 + ml^2 \ddot{\varphi}_3 + mgl \varphi_3 + cl^2 (2 \varphi_1 + 2 \varphi_2 + \varphi_3) = 0.$$

Фреквентна једначина је

$$\begin{vmatrix} 4+3k-3\lambda & 4-2\lambda & 2-\lambda \\ 4-2\lambda & 4+2k-2\lambda & 2-\lambda \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1+k-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5k-\lambda & -2k & 0 \\ -2k & 2k & \lambda-2k \\ 0 & 2-\lambda & 1+k-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$k = \frac{mg}{cl}; \quad \lambda = \frac{m\omega^2}{c},$$

те су њени корени (за $k=1$)

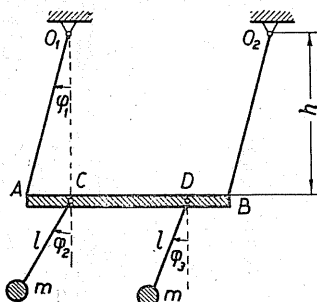
$$(2-\lambda)(\lambda^2-9\lambda+16)=0, \quad \lambda_1=2; \quad \lambda_2=1/2(9-\sqrt{17}); \quad \lambda_3=1/2(9+\sqrt{17}).$$

Односи амплитуда су

$$A_1 : 2(2-\lambda) = A_2 : (5-\lambda)(\lambda-2) = A_3 : 2(3-\lambda), \quad \lambda = \lambda_s,$$

па су главни облици осцилација приказани на сл. 10.21. *b, c, d*].

10.14. Штап AB , масе $M=4m$, обешен је концима дужине h о тачке O_1 и O_2 (сл. 10.22.). О тачке C и D штапа обешена су два једнака математичка клатна, масе m , дужине $l=1/3 h$. Одредити кружне фреквенције малих осцилација система у вертикалној равни.



[Решење. — Пошто су: $v_1 = h \dot{\varphi}_1$, $v_2 = h \dot{\varphi}_1 + l \dot{\varphi}_2$,

$v_3 = h \dot{\varphi}_1 + l \dot{\varphi}_3$, то су енергије

$$E_k = 1/2 (M + 2m) h^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2mhl \dot{\varphi}_1 (\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3) + ml^2 (\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2);$$

$$E_p = 1/2 g [M + 2m] h \varphi_1^2 + ml \varphi_2^2 + \varphi_3^2],$$

односно

Сл. 10.22. — Сложено физичко и два математичка клатна

$$E_k = 1/2 ml^2 [54 \dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2 + 6 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + 6 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3];$$

$$E_p = 1/2 mgl [18 \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2],$$

па добијамо систем диференцијалних једначина:

$$18 l \ddot{\varphi}_1 + l \ddot{\varphi}_2 + l \ddot{\varphi}_3 + 6 g \varphi_1 = 0;$$

$$3 l \ddot{\varphi}_1 + l \ddot{\varphi}_2 + g \varphi_2 = 0;$$

$$3 l \ddot{\varphi}_1 + l \ddot{\varphi}_3 + g \varphi_3 = 0.$$

Фреквентна једначина је

$$\begin{vmatrix} 2(1-3\lambda) & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & 2(1-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2\lambda^2-4\lambda+1)=0, \quad \lambda = \frac{l\omega^2}{g}$$

и њени корени

$$\lambda_1 = 1/2(2 - \sqrt{2}); \quad \lambda_2 = 1; \quad \lambda_3 = 1/2(2 + \sqrt{2}).$$

10.15. Одредити кружне фреквенције система као у претходном случају ако се систем уместо математичких клатна састоји из физичких клатна облика штапа, дужине l , масе m .

[Решење. — Енергије су

$$E_k = 1/2 m l^2 [54 \dot{\varphi}_1^2 + 1/3 (\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2) + 3 \dot{\varphi}_1 (\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3)];$$

$$E_p = 1/2 m g l [18 \varphi_1^2 + 1/2 (\varphi_2^2 + \varphi_3^2)]; \quad \lambda = l\omega^2/g,$$

па је фреквентна једначина

$$\begin{vmatrix} 4(1-3\lambda) & -\lambda & -\lambda \\ -3\lambda & 3-2\lambda & 0 \\ -3\lambda & 0 & 3-2\lambda \end{vmatrix} = (3-2\lambda)(9\lambda^2 - 22\lambda + 6) = 0;$$

$$\lambda_1 = 3/2; \quad \lambda_{2,3} = 1/2(11 \mp \sqrt{67}).$$

10.16. Танка хомогена правоугаона плоча, (сл. 10.23.), ослања се крајевима на четири опруге, $c_1 = c_3 = c$, $c_2 = c_4 = 2c$. Под претпоставком да све тачке плоче осцилују вертикално, одредити кружне фреквенције малих осцилација плоче.

[Решење. — За генерализане координате узећемо z , φ и ψ , па су кинетичка и потенцијална енергија плоче:

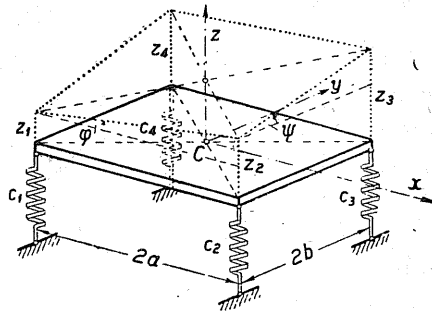
$$E_k = 1/2 (M \dot{z}^2 + J_x \dot{\varphi}^2 + J_y \dot{\psi}^2),$$

$$E_p = 1/2 \sum_{i=1}^4 c_i z_i^2.$$

Због крутости плоче мора бити испуњен услов $z_3 - z_4 = z_2 - z_1$, па између координата z_i постоје везе

$$z_2 - z_1 = 2a \varphi, \quad z_3 - z_2 = 2b \psi,$$

$$z_1 + z_3 = z_2 + z_4 = 2z, \quad z_3 - z_4 = z_2 - z_1 = 2a \varphi,$$



Сл. 10.23. — Осцилације танке хомогене плочице ослоњене на еластична лежишта

те су

$$z_1 = z - a \varphi - b \psi, \quad z_2 = z + a \varphi - b \psi,$$

$$z_3 = z + a \varphi + b \psi, \quad z_4 = -a \varphi + b \psi.$$

Како су моменти инерције

$$J_x = \frac{1}{3} M b^2, \quad J_y = \frac{1}{3} M a^2, \quad M = \rho 4a b,$$

то су енергије

$$E_k = \frac{1}{2} (M \dot{z}^2 + \frac{1}{3} b^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{3} a^2 \dot{\varphi}^2),$$

$$E_p = \frac{1}{2} c (6 z^2 + 6 a^2 \varphi^2 + 6 b^2 \psi^2 - 4 a b \varphi \psi).$$

Лагранжеве једначине дају систем једначина

$$M \ddot{z} + 6 c z = 0,$$

$$\frac{1}{3} M b \ddot{\psi} + 6 c b \psi - 2 a c \varphi = 0,$$

$$\frac{1}{3} M a \ddot{\varphi} + 6 a c \varphi - 2 b c \psi = 0,$$

па је фреквентна једначина

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & b(6 - \frac{1}{3}\lambda) & -2a \\ 0 & -2b & a(6 - \frac{1}{3}\lambda) \end{vmatrix} = (6 - \lambda)(\lambda^2 - 36\lambda + 9.32) = 0,$$

и кружне фреквенције

$$\omega^2 = c \lambda / M; \quad \omega_1^2 = 6 c / M, \quad \omega_2^2 = 12 c / M, \quad \omega_3^2 = 24 c / M.$$

11. МАЛЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ НЕКОНЗЕРВАТИВНОГ СИСТЕМА

11.1. Карактеристична једначина малих осцилација неконзервативног система. — У чл. 6. испитивали смо мале осцилације конзервативног система, тј. система изложеног дејству конзервативних сила, које се увек могу изразити парцијалним изводима функције силе U (или негативне потенцијалне енергије E_p) по дотичној генерализаној координати. Битна особина конзервативног система је да *важи закон о одржавању механичке енергије.*

Међутим, у пракси су чести случајеви када на систем не дејствују силе које имају потенцијал, већ које на неки други начин зависе од координата или брзина. Овакве силе називамо *неконзервативним*, па су и *системи неконзервативни*. У техничкој пракси су најважнији проблеми кретања система у отпорној средини. Тада на сваку масу система дејствују и *ошторне силе*, које, уопште узев, зависе од брзине кретања масе, координатне су са брзинама али су супротног смера. У овоме случају закон о одржавању механичке енергије не важи, јер долази до расипања енергије, које је *окарактерисано функцијом расипања.*

Питање конзервативности или неконзервативности неког система зависи и од тога како је материјални систем изолован и подешен за проучавање. Ако у систему има тела која се обрћу великом сталном угаоном брзином онда ће се јављати и *нове силе које зависе од брзине и које се називају гироскопске силе*, јер такво тело уствари представља гироскоп. Вертикални симетрични гироскоп представља конзервативни систем са три степена слободе. Међутим, ако се проучавају мале осцилације осе симетрије гироскопа, онда се може једна координата одстранити, (угао обртања око осе), па иста не улази у израз за кинетичку и потенцијалну енергију система, те добијамо гироскоп са два степена слободе. Тада осцилације осе симетрије изазивају силе које зависе од брзине, те нису једнаке парцијалним изводима потенцијалне енергије по дотичној координати. И ове се силе убрајају у неконзервативне, јер

су гироскопске. У суштини су оне силе инерције. У Лагранжевим једначинама се јављају као парцијални изводи кинетичке енергије по дотичној генералисаној координати.

Нека се систем састоји из N материјалних тачака и нека су хо-лономне везе склерономне, тј. не зависе експлицитно од времена, тако да је број степени слободе кретања n . Ако се систем креће у отпорној средини малим брзинама, онда се могу отпорне силе сматрати линеарним функцијама генералисаних брзина, те је отпорна сила за i -ту генералисану координату

$$Q_i^* = F_{wi} = - \sum_{k=1}^n b_{ik} \dot{q}_k, \quad (1)$$

где је b_{ik} коэффициент пропорционалности између силе и брзине. Уводећи за овакве силе, слично потенцијалној енергији, функцију расипања, (чл. 3.3),

$$\Phi = 1/2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad (2)$$

отпорна сила је једнака негативном парцијалном изводу ове функције по генералисаној брзини (\dot{q}_i)

$$Q_i^* = F_{wi} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} = - \sum_k b_{ik} \dot{q}_k. \quad (3)$$

Рад отпорних сила у јединици времена је

$$A' = P = \sum_i Q_i^* \dot{q}_i = - \sum_i \sum_k b_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = -2\Phi, \quad (4)$$

те је функција расипања позитивна дефинитна квадратна форма генералисаних брзина, јер је рад отпорних сила увек негативан. У овоме случају коэффициенти пропорционалности b_{ik} задовољавају услов симетричности, те је

$$b_{ik} = b_{ki}. \quad (5)$$

Лагранжеве једначине кретања могу се онда написати у облику

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} = - \frac{\partial E_p}{\partial q_i}. \quad (6)$$

Ако се ова једначина помножи са \dot{q}_i и све се једначине саберу биће

$$\sum_i \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right] \dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial E_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial E_p}{\partial q_i} \dot{q}_i = - \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i.$$

Како су E_k и Φ хомогене квадратне форме генералисаних брзина, то по Ојлеровој теореме о хомогеним функцијама, мора бити

$$\sum_i \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2E_k; \quad \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2\Phi.$$

Ако се горња једначина напише у облику

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial E_k}{\partial q_i} \dot{q}_i &= \frac{d}{dt} \left[\sum_i \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right] - \\ - \sum_i \left[\frac{\partial E_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right] + \sum_i \frac{\partial E_p}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i &= - \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i, \end{aligned}$$

а како је

$$\sum_i \frac{\partial E_p}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \frac{dE_p}{dt},$$

биће

$$\frac{d}{dt} (2E_k) - \frac{dE_k}{dt} + \frac{dE_p}{dt} = \frac{d(E_k + E_p)}{dt} = \frac{dE}{dt} = -2\Phi. \quad (7)$$

Ово показује да функција 2Φ представља меру деградације механичке енергије, (E).

За случај малих осцилација око равнотежног положаја све три функције E_k , E_p и Φ су позитивне квадратне форме генералисаних брзина, односно координата, па су њихови коефицијенти симетрични ($a_{ik} = a_{ki}$, $b_{ik} = b_{ki}$, $c_{ik} = c_{ki}$). Лагранжеве диференцијалне једначине (6) дају систем диференцијалних једначина другог реда

$$i \downarrow \rightarrow k \quad \sum_{k=1}^n (a_{ik} \ddot{q}_k + b_{ik} \dot{q}_k + c_{ik} q_k) = 0. \quad (8)$$

Претпостављајући решења овог система диференцијалних једначина у облику

$$q_k = A_k e^{\lambda t}, \quad (9)$$

где су A_k и λ константе, систем диференцијалних једначина (8) своди се на систем хомогених алгебарских једначина

$$i \downarrow \rightarrow k \quad \sum_{k=1}^n (a_{ik} \lambda^2 + b_{ik} \lambda + c_{ik}) A_k = 0. \quad (10)$$

Да би овај систем хомогених једначина имао осим идентичког решења још и друга, мора детерминанта система бити једнака нули

$$\Delta(\lambda) = \left\| a_{ik} \lambda^2 + b_{ik} \lambda + c_{ik} \right\| = 0, \quad (11)$$

односно у развијеном облику

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11}; & a_{12}\lambda^2 + b_{12}\lambda + c_{12}; & \dots, & a_{1n}\lambda^2 + b_{1n}\lambda + c_{1n} \\ a_{21}\lambda^2 + b_{21}\lambda + c_{21}; & a_{22}\lambda^2 + b_{22}\lambda + c_{22}; & \dots, & a_{2n}\lambda^2 + b_{2n}\lambda + c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\lambda^2 + b_{n1}\lambda + c_{n1}; & a_{n2}\lambda^2 + b_{n2}\lambda + c_{n2}; & \dots, & a_{nn}\lambda^2 + b_{nn}\lambda + c_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (11a)$$

Ово је карактеристична једначина система, јер смо решење претпоставили у облику (9). Она је алгебарска једначина $2n$ -тог степена по сопственој вредности λ , која може бити реална или комплексна. Свакој вредности λ , одговара амплитуда $A_k^{(s)}$ па је због линеарности једначина решење збир решења

$$q_k = \sum_{s=1}^n A_k^{(s)} e^{\lambda_s t}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (12)$$

ПРИМЕРИ

11.1. Дати су коефицијенти форми

a_{ik}	1	2	b_{ik}	1	2	c_{ik}	1	2
1	2	1	1	4	1	1	5	5
2	1	1	2	1	2	2	5	8

Испитати да ли су форме позитивно дефинитне и одредити сопствене вредности.

[Решење. — Пошто су детерминанте форми позитивне $\|a_{ik}\| = 1$; $\|b_{ik}\| = 7$ и $\|c_{ik}\| = 15$ то су форме позитивно дефинитне, па могу бити енергије и функција расипања. Према (11a) је карактеристична једначина

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 2\lambda^2 + 4\lambda + 5 & \lambda^2 + \lambda + 5 \\ \lambda^2 + \lambda + 5 & \lambda^2 + 2\lambda + 8 \end{vmatrix} = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 18\lambda^2 + 32\lambda + 15 = 0.$$

Како је

$$f(\lambda) = (\lambda + 3) \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \lambda^2 + \lambda + 5 & \lambda^2 + 2\lambda + 8 \end{vmatrix} = (\lambda + 3) (\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5) = 0,$$

то је $\lambda_1 = -3$ корен.

Кубну једначину сменом $\lambda = x - 1$ сводимо на редуковани облик

$$x^3 + px + q = x^3 + 6x - 2 = 0; \quad \Delta = (q/2)^2 + (p/3)^3 = 1 + 8 = 9,$$

те због $\Delta > 0$ има један реалан и два конјугована комплексна корена.*

Овде су

$$x = u + v; \quad u^3 = -(q/2) + \sqrt{\Delta} = 4; \quad v^3 = -(q/2) - \sqrt{\Delta} = -2;$$

$$x = 1,588 - 1,260 = 0,328 = x_1,$$

* Таблице из Отпорности материјала, стр. 109.

па је

$$f(x) = (x^3 + 6x - 2) : (x - 0,328) = x^2 + 0,328x + 6,108 = 0,$$

$$x_{2,3} = -0,164 \pm 2,466i.$$

Према томе су корени ($\lambda_i = x_c - 1$, $i = 2, 3, 4$); $\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = -0,672$; $\lambda_{3,4} = -1,164 \pm 2,466i$.

Према проширеним Viète-овим обрасцима мора бити

$$\sum \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = -6; \quad \sum \lambda_i \lambda_j = \lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_2(\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3 \lambda_4 = 18;$$

$$\sum \lambda_i \lambda_j \lambda_k = \lambda_1(\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_4 + \lambda_3 \lambda_4) + \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = -32;$$

$$\Pi \lambda_i = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = -3 \cdot -0,672 \cdot (1,164^2 + 2,466^2) = 15].$$

11.2. Дате су енергије и функција расипања

$$E_k = \frac{1}{2} (3\dot{q}_1^2 + 4\dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2\dot{q}_2^2); \quad E_p = \frac{1}{2} (4q_1^2 + 2q_1 q_2 + q_2^2); \quad \Phi = \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2\dot{q}_2^2),$$

одредити сопствене вредности.

[Решење. — Овде су коефицијенти форми

a_{ik}	1	2	b_{ik}	1	2	c_{ik}	1	2
1	3	2	1	1	1	1	4	1
2	2	2	2	1	2	2	1	1

па је карактеристична једначина

$$t(\lambda) = \begin{vmatrix} 3\lambda^2 + \lambda + 4 & 2\lambda^2 + \lambda + 1 \\ 2\lambda^2 + \lambda + 1 & 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 \end{vmatrix} = 2\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 7\lambda + 3 = 0.$$

Једначина $f(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3,5\lambda + 1,5 = 0$ сменом $\lambda = x - 0,5$ своди се на редуковани облик

$$f(x) = x^4 + Px^2 + Qx + R = x^4 + 2,5x^2 + 0,5x + 9/16 = 0.$$

Њена Ојлерова резолвента* је

$$t^3 + 2Pt^2 + (P^2 - 4R)t - Q^2 = t^3 + 5t^2 + 4t - 0,25 = 0,$$

која се сменом $t = y - 5/3 = y - 1,666$ своди на редуковану кубну једначину

$$y^3 + py + q = y^3 - \frac{13}{3}y + \frac{253}{108} = 0; \quad \Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0.$$

Због $\Delta < 0$ једначина има сва три реална корена, па се мора применити тригонометријска метода

$$r^2 = -\frac{p^3}{27}; \quad \cos \varphi = -\frac{q}{2r}; \quad r = \frac{13\sqrt{13}}{27}; \quad \cos \varphi = -0,6736; \quad \varphi = 132^\circ 20',$$

па су

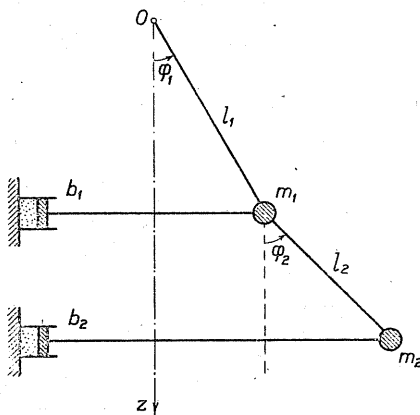
$$\begin{aligned} y_1 &= 2\sqrt{-p/3} \cos \frac{\varphi}{3} = 1,726; & t_1 &= 0,060; & \sqrt{t_1} &= 0,245, \\ y_2 &= 2\sqrt{-p/3} \cos \left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ\right) = -2,313; & t_2 &= -3,979; & \sqrt{t_2} &\approx 2i, \\ y_3 &= 2\sqrt{-p/3} \cos \left(\frac{\varphi}{3} + 240^\circ\right) = 0,582; & t_3 &= -1,084; & \sqrt{t_3} &= 1,040i, \end{aligned}$$

* Таблице из Отпорности материјала, стр. 111.

те су корени

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} (\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}) = 0,123 + 1,52 i; & \lambda_1 &= -0,377 + 1,52 i; \\ x_2 &= \frac{1}{2} (\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}) = 0,123 - 1,52 i; & \lambda_2 &= -0,377 - 1,52 i; \\ x_3 &= \frac{1}{2} (-\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}) = -0,123 + 0,96 i; & \lambda_3 &= -0,623 + 0,96 i \\ x_4 &= \frac{1}{2} (-\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}) = -0,123 - 0,96 i; & \lambda_4 &= -0,623 - 0,96 i \end{aligned}$$

где је $\sqrt{t_1} \cdot \sqrt{t_2} \cdot \sqrt{t_3} = -Q$.



Сл. 11.1. -- Двогубо клатно са пригушницама

Коефицијенти су

a_{ik}	1	2	b_{ik}	1	2	c_{ik}	1	2
1	$(m_1 + m_2) l_1^2$	$m_2 l_1 l_2$	1	$(b_1 + b_2) l_1^2$	$b_2 l_1 l_2$	1	$(m_1 + m_2) g l_1$	0
2	$m_2 l_1 l_2$	$m_2 l_2^2$	2	$b_2 l_1 l_2$	$b_2 l_2^2$	2	0	$m_2 g l_2$

па је карактеристична једначина

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} (m_1 + m_2) l_1^2 \lambda^2 + (b_1 + b_2) l_1^2 \lambda + (m_1 + m_2) g l_1 & m_2 l_1 l_2 \lambda^2 + b_2 l_1 l_2 \lambda \\ m_2 l_1 l_2 \lambda^2 + b_2 l_1 l_2 \lambda & m_2 l_2^2 \lambda^2 + b_2 l_2^2 \lambda + m_2 g l_2 \end{vmatrix} = 0.$$

У специјалном случају када је систем хомоген $m_i = m$, $l_i = l$, $b_i = b$ карактеристична једначина је:

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 2(\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2) & \lambda^2 + 2\delta\lambda \\ \lambda^2 + 2\delta\lambda & \lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 \end{vmatrix} = 0; \quad 2\delta = \frac{b}{m}; \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l},$$

то јест

$$f(\lambda) = \lambda^4 + 4\delta\lambda^3 + 4(\omega_0^2 - \delta^2)\lambda^2 + 8\delta\omega_0^2\lambda + 2\omega_0^4 = 0.$$

11.3. За масе двогубог клатна везане су пригушнице чији је отпор сразмеран првом степену брзине (сл. 11.1.). Одредити сопствене вредности осцилаторног система.

[Решење. — Због малих осцилација су

$$v_1 = l_1 \dot{\varphi}_1; \quad v_2 \approx v_1 + v_{21} = l_1 \dot{\varphi}_1 + l_2 \dot{\varphi}_2;$$

$$x_1 = l_1 \varphi_1; \quad x_2 = l_1 \varphi_1 + l_2 \varphi_2; \quad h = \frac{1}{2} l \varphi^2,$$

па су енергије и функција расипања

$$E_k = \frac{1}{2} [m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + m_2 (l_1 \dot{\varphi}_1 + l_2 \dot{\varphi}_2)^2];$$

$$E_p = \frac{g}{2} [m_1 l_1 \varphi_1^2 + m_2 (l_1 \varphi_1^2 + l_2 \varphi_2^2)];$$

$$\Phi = \frac{1}{2} [b_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + b_2 (l_1 \dot{\varphi}_1 + l_2 \dot{\varphi}_2)^2].$$

Од корена ове једначине зависи да ли ће кретање бити осцилаторно или аperiодичко.

Сменом $y = (\lambda^2 + 2\delta\lambda) / \omega_0^2$ горња једначина постаје

$$f(y) = \begin{vmatrix} 2(y+1) & y \\ y & y+1 \end{vmatrix} = y^2 + 4y + 2 = 0; \quad y = -2 \mp \sqrt{2},$$

па су сопствене вредности

$$\lambda_i = -\delta \mp \sqrt{\delta^2 - (2 \mp \sqrt{2}) \omega_0^2}; \quad i = 1, \dots, 4.$$

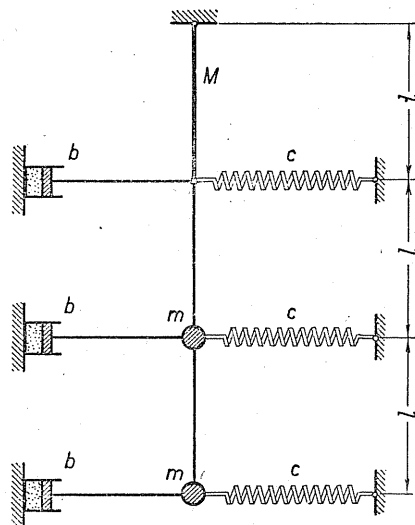
11.4. Тројно клатно састоји се из физичког клатна облика штапа масе $M = 3m$, и два математичка клатна, масе m . Сва клатна имају исте дужине. За крајеве клатна везане су пригушнице, коефицијента отпора b и опруге крутости c . Написати карактеристичну једначину система.

[Реш. ње. — Овде су енергије и функција расипања:

$$E_k = \frac{1}{2} M \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} M l^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m (l \dot{\varphi}_1 + l \dot{\varphi}_2)^2 + \frac{1}{2} m (l \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + l \dot{\varphi}_3)^2;$$

$$E_p = \frac{1}{4} M g l \varphi_1^2 + \frac{1}{2} m g l (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{m g l}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2) + \frac{1}{2} c l^2 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} c (l^2 \varphi_1^2 + l^2 \varphi_2^2) + \frac{1}{2} c (l^2 \varphi_1^2 + l^2 \varphi_2^2 + l^2 \varphi_3^2);$$

$$\Phi = \frac{1}{2} b l^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} b (l \dot{\varphi}_1 + l \dot{\varphi}_2)^2 + \frac{1}{2} b (l \dot{\varphi}_1 + l \dot{\varphi}_2 + l \dot{\varphi}_3)^2$$



Сл. 11.2. — Сложено клатно са пригушницама и опругама

ге су

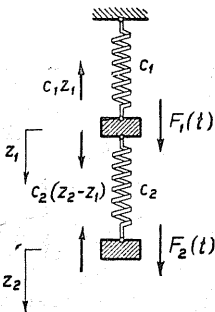
a_{ik}	1	2	3	b_{ik}	1	2	3	c_{ik}	1	2	3
1	$\frac{3m l^2}{2}$	$m l^2$	$\frac{m l^2}{2}$	1	$\frac{3b l^2}{2}$	$b l^2$	$\frac{b l^2}{2}$	1	$\frac{7}{4} m g l + \frac{3}{2} c l^2$		
2	$m l^2$	$m l^2$	$\frac{m l^2}{2}$	2	$b l^2$	$b l^2$	$\frac{b l^2}{2}$	2		$m g l + c l^2$	
3	$\frac{m l^2}{2}$	$\frac{m l^2}{2}$	$\frac{m l^2}{2}$	3	$\frac{b l^2}{2}$	$\frac{b l^2}{2}$	$\frac{b l^2}{2}$	3			$\frac{m g l}{2} + \frac{1}{2} c l^2$

па је

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 6\lambda^2 + 12\delta\lambda + (6+6s)\omega_0^2 & 4\lambda^2 + 8\delta\lambda & 2\lambda^2 + 4\delta\lambda \\ 4\lambda^2 + 8\delta\lambda & 4\lambda^2 + 8\delta\lambda + (4+4s)\omega_0^2 & 2\lambda^2 + 4\delta\lambda \\ 2\lambda^2 + 4\delta\lambda & 2\lambda^2 + 4\delta\lambda & 2\lambda^2 + 4\delta\lambda + (2+2s)\omega_0^2 \end{vmatrix} = 0$$

где су $2\delta = b/m$; $\omega_0^2 = g/l$; $s = cl/mg$.

11.2. Динамички апсорбер (гушитељ) осцилација. — Динамички апсорбер се састоји из две масе: m_1 масе машине и m_2 масе апсорбера (гушитеља) које су спојене опругама, крутости c_i (сл. 11.3.). На сваку масу (m_i) дејствује поремећајна сила, амплитуде F_i , кружне фреквенције Ω , те су диференцијалне једначине апсорбера



$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + (c_1 + c_2) z_1 - c_2 z_2 &= F_1 \cos \Omega t, \\ m_2 \ddot{z}_2 - c_2 z_1 + c_2 z_2 &= F_2 \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (13)$$

Решења овог система симултаних диференцијалних једначина другог реда претпоставићемо у облику

$$z_1 = A_1 \cos \Omega t, \quad z_2 = A_2 \cos \Omega t \quad (14)$$

те се тада предњи систем једначина своди на систем алгебарских нехомогених једначина

$$\begin{aligned} (c_1 + c_2 - m_1 \Omega^2) A_1 - c_2 A_2 &= F_1, \\ -c_2 A_1 + (c_2 - m_2 \Omega^2) A_2 &= F_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Сл. 11.3. — Динамички апсорбер са две принудне силе

Решењем овог система добијамо амплитуде осциловања маса

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} F_1 & -c_2 \\ F_2 & c_2 - m_2 \Omega^2 \end{vmatrix}; \quad A_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1 \Omega^2 & F_1 \\ -c_2 & F_2 \end{vmatrix}; \\ \Delta &= \begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1 \Omega^2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - m_2 \Omega^2 \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (16)$$

где је Δ дешерминаншта система. Она је једнака детерминанти слободног система са два степена слободе осциловања када се уместо фреквенције слободних осцилација ω стави фреквенција принудне силе Ω .

Однос амплитуда слободних осцилација је

$$\frac{A_{1s}}{c_2 - m_2 \omega^2} = \frac{A_{2s}}{c_2}; \quad \eta_s = \frac{A_{1s}}{A_{2s}} = \frac{c_2 - m_2 \omega^2}{c_2} = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{22}^2} \quad (17a)$$

па је однос амплитуда при резонанси ($\Delta = 0$) једнак односу амплитуда при слободним осцилацијама

$$\eta = \frac{A_1}{A_2} = \frac{F_1 (c_2 - m_2 \Omega^2) + F_2 c_2}{F_1 c_2 + F_2 (c_1 + c_2 - m_1 \Omega^2)} = \eta_s. \quad (17b)$$

Према томе су при резонанси главни облици принудних осцилација исти као и главни облици слободних осцилација.

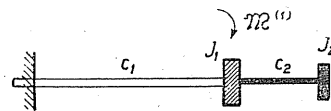
Амплитуда $A_1 = 0$ када је $F_2 = 0$ и $c_2/m_2 = \Omega^2 = \omega_{22}^2$, тј. када сила дејствује само на горњу масу (масу машине) и када је кружна фреквенција слободних осцилација масе m_2 једнака кружној фреквенцији принудних осцилација. Тада маса машине *остаје у миру а осцилује само маса апсорбера*.

Динамички апсорбер се може применити и код *Торзијског осцилатора*. Главном систему (c_1, J_1), сл. 11.4., додаје се апсорбер (c_2, J_2), који услед поремећајног момента $\mathcal{M}(t) = \mathcal{M} \cos(\Omega t + \alpha)$ на првом диску гуши принудне осцилације система. Осцилације главног система ће се угушити када буде испуњен услов

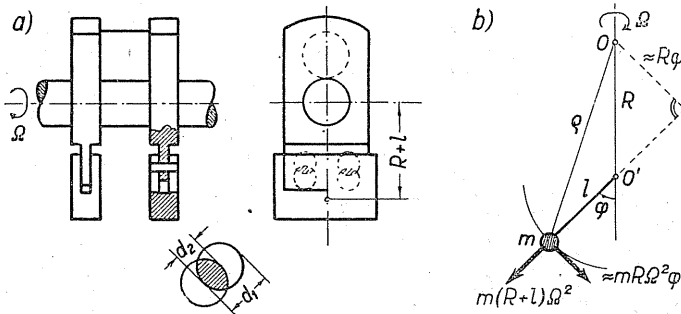
$$c_2 - J_2 \Omega^2 = 0,$$

који следи непосредно из аналогија међу овим и линеарним осцилацијама.

Код торзијских система са доста *променљивом брзином обрћања* мора се кружна фреквенција апсорбера мењати, па се као апсорбер



Сл. 11.4. — Торзијски апсорбер



Сл. 11.5. — Тејлорово клатно

примењује *Тејлорово клатно*, (сл. 11.5.), код кога се поље теже замењује пољем центрифугалне силе. Обично се ово клатно изводи *бифиларно*, (сл. 11.5.а). У случају да нема промене угаоне брзине машине,

кружна фреквенција овог клатна је $\omega = \Omega \sqrt{R/l}$, (чл. 2, зад. 10.). Међутим, ако се угао обртања θ мења хармонијски, ($\theta = \theta_0 \sin \nu t$), када се вратило обрће угаоном брзином Ω , онда је за случај малих осцилација тангенцијално убрзање клатна (месе m): $a_T = l\ddot{\varphi} + (R+l)\ddot{\theta}$, сл. 11.5.b, па је диференцијална једначина кретања у правцу тангенте

$$\ddot{\varphi} + (\Omega^2 R/l)\varphi = [(R+l)/l]\nu^2 \theta_0 \sin \nu t. \quad (18)$$

Из ове се једначине види да су за случај $\theta_0 = 0$ осцилације слободне, у противном ($\theta_0 \neq 0$) су принудне; клатно је принуђено да осцилује кружном фреквенцијом поремећајног момента (ν), па је решење горње једначине

$$\varphi = \varphi_0 \sin \nu t.$$

Уносећи ову вредност у горњу једначину добијамо однос амплитуда

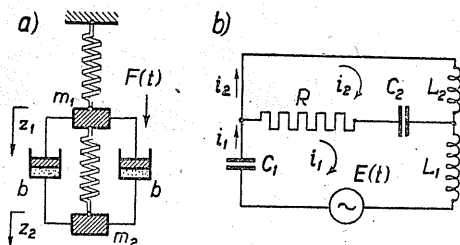
$$\frac{\theta_0}{\varphi_0} = \frac{(\Omega^2 R/l) - \nu^2}{[1 + (R/l)]\nu^2}. \quad (19)$$

Ако је $\nu = \omega$ онда је $\theta_0 = 0$ и за коначну вредност φ_0 . У овоме случају, као и код динамичког апсорбера (сл. 11.3.), клатно ствара момент који је једнак поремећајном моменту само је супротног смера

$$\mathfrak{M} = m \Omega^2 (R+l) R \varphi. \quad (20)$$

Примена динамичког апсорбера без амортизације могућа је само код машина са константним бројем обртаја (на пример синхроних машина), па се код машина (мотора) користе апсорбери са амортизацијом.

У случају система приказаног на сл. 11.6.a, чији је електрични модел приказан на сл. 11.6.b, енергије и функција расипања биће



$$E_k = 1/2 (m_1 \dot{z}_1^2 + m_2 \dot{z}_2^2);$$

$$E_p = 1/2 [c_1 z_1^2 + c_2 (z_2 - z_1)^2]; \quad (21)$$

$$\Phi = 1/2 b (\dot{z}_2 - \dot{z}_1)^2,$$

Сл. 11.6. — a) Динамички апсорбер са отпором, b) Електрични модел

па Лагранжеве једначине дају систем диференцијалних једначина другог реда

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + c_1 z_1 - c_2 (z_2 - z_1) - b (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) = F \cos \Omega t, \\ m_2 \ddot{z}_2 + c_2 (z_2 - z_1) + b (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Њихова решења, због отпорних сила, морамо претпоставити у облику

$$z_i = A_i \cos \Omega t + B_i \sin \Omega t, \quad i = 1, 2 \quad (23)$$

те добијамо систем алгебарских нехомогених једначина

$$\begin{cases} (c_1 + c_2 - m_1 \Omega^2) A_1 & + b \Omega B_1 & - c_2 A_2 & - b \Omega B_2 = F; \\ -b \Omega A_1 + (c_1 + c_2 - m_1 \Omega^2) B_1 & + b \Omega A_2 & - c_2 B_2 = 0; \\ -c_2 A_1 & - b \Omega B_1 + (c_2 - m_2 \Omega^2) A_2 & + b \Omega B_2 = 0; \\ b \Omega A_1 & - c_2 B_1 & - b \Omega A_2 + (c_2 - m_2 \Omega^2) B_2 = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Детерминанта система (24) је

$$\Delta(\Omega)^2 = \begin{vmatrix} c_1 - m_1 \Omega^2 & 0 & -m_2 \Omega^2 & 0 \\ 0 & c_2 - m_1 \Omega^2 & 0 & -m_2 \Omega^2 \\ -c_2 & -b \Omega & c_2 - m_2 \Omega^2 & b \Omega \\ b \Omega & -c_2 & -b \Omega & c_2 - m_2 \Omega^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & 0 & -s & 0 \\ 0 & p & 0 & -s \\ -c_2 & -r & q & r \\ r & -c_2 & -r & q \end{vmatrix}$$

где су p, q, r, s константе, или

$$\Delta(\Omega^2) = (pq - sc_2)^2 + r^2(p - s)^2, \quad (25)$$

и биће

$$\begin{aligned} A_1 &= F \frac{r^2(p-s) + q(pq - sc_2)}{\Delta}, & B_1 &= F \frac{rs(c_2 - q)}{\Delta} = F \frac{rs^2}{\Delta}, \\ A_2 &= F \frac{r^2(p-s) + c_2(pq - sc_2)}{\Delta}, & B_2 &= \frac{prs}{\Delta}. \end{aligned} \quad (26)$$

Присуство отпорних сила помера фазе између принудних осцилација маса и поремећајне силе. Због тога, а ради испитивања промене амплитуде главне масе (m_1), уведемо смене

$$A_1 = R_1 \cos \alpha_1, \quad B_1 = R_1 \sin \alpha_1,$$

онда је померање

$$z_1 = R_1 \cos(\Omega t - \alpha_1), \quad (27)$$

где су амплитуда и померање фазе одређени једначинама

$$R_1^2 = A_1^2 + B_1^2 = F^2 \frac{q^2 + r^2}{\Delta}, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{rs^2}{r^2(p-s) + q(pq - sc_2)}.$$

Однос квадрата амплитуда померања и принудне силе биће

$$\begin{aligned} \frac{R_1^2}{F^2} &= \frac{q^2 + r^2}{\Delta} = \\ &= \frac{(c_2 - m_2 \Omega^2)^2 + b^2 \Omega^2}{[(c_1 - m_1 \Omega^2)(c_2 - m_2 \Omega^2) - m_2 \Omega^2 c_2]^2 + b^2 \Omega^2 (c_1 - m_1 \Omega^2 - m_2 \Omega^2)^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Уведу ли се раније ознаке и $f_{1s} = F/c_1$, статички угиб масе m_1 под утицајем статичке силе F , онда је квадрат динамичког фактора

$$\begin{aligned} \eta_{d1}^2 &= \left(\frac{R_1}{f_{1s}} \right)^2 = \\ &= \frac{4\beta^2 \Psi_1^2 + (\Psi_1^2 - \gamma^2)^2}{4\beta^2 \Psi_1^2 (\Psi_1^2 - 1 + \mu \Psi_1^2) + [\mu \Psi_1^2 \gamma^2 - (\Psi_1^2 - 1)(\Psi_1^2 - \gamma^2)]^2} = \frac{M\beta^2 + N}{P\beta^2 + Q}; \end{aligned} \quad (29)$$

$\beta = b/2m_2 \omega_{11}$ је бездимензиони коефицијент гушења а M , N , P и Q величине које зависе од карактеристика $\mu = m_2/m_1$, $\gamma = \omega_{22}/\omega_{11}$, Ψ_1 и Ψ_2 . Познају ли се ове карактеристике и коефицијент β може се одредити и динамички фактор. За један дати механички осцилатор, с обзиром на вредност коефицијента гушења β , разликујемо три случаја.

1^о Ако је $\beta = 0$ онда је и $b = 0$, па за динамички фактор добијамо исту вредност као и у случају динамичког апсорбера, (8).

2^о При $\beta = \infty$ израз (29) се јавља у неодређеном облику $0/0$, па диференцирањем добијамо да је

$$\eta_{d1}^2 = (R_1/f_{1s})^2 = (\Psi_1^2 - 1 + \mu \Psi_1^2)^{-2} \quad (30)$$

те је критична вредност коефицијента ψ_1

$$\psi_{1kr} = \sqrt{1/(1+\mu)}. \quad (30a)$$

3^e Буде ли β између горњих граничних вредности онда динамички коефицијент η_{d1} зависи од промене тога коефицијента. Да би η_{d1} било независно од вредности β мора детерминанта величина M , N , P и Q бити једнака нули, $MQ - PN = 0$, тј. мора бити задовољен услов

$$\frac{1}{\psi_1^2 - 1 + \mu \psi_1^2} = \frac{\psi_1^2 - \gamma^2}{[\mu \psi_1^2 \gamma^2 - (\psi_1^2 - 1)(\psi_1^2 - \gamma^2)]}. \quad (31)$$

Ако би се на десној страни горњег услова узео знак $-$ било би $\psi_1 = 0$, па би било и $\Omega = 0$; због тога се мора узети знак $+$, па се добија једначина

$$\psi_1^4 - 2 \frac{1 + (1 + \mu) \gamma^2}{2 + \mu} \psi_1^2 + \frac{2 \gamma^2}{2 + \mu} = 0 \quad (32)$$

односно

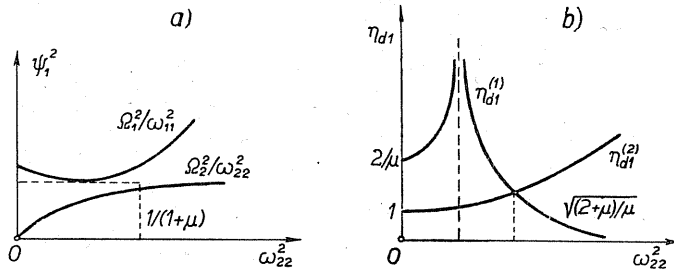
$$\Omega^4 - 2 \frac{\omega_{11}^4 + (1 + \mu) \omega_{22}^2}{2 + \mu} \Omega^2 + \frac{2 \omega_{11}^2 \omega_{22}^2}{2 + \mu} = 0. \quad (32a)$$

Корени биквадратне једначине (32a) су различити $\Omega_1^2 \neq \Omega_2^2$, па претпоставимо ли да је $\Omega_1^2 > \Omega_2^2$ а $\gamma = 0$, (тј. $\omega_{22} = 0$), корени су $\Omega_1^2 = 2 \omega_{11}^2 / (2 + \mu)$, $\Omega_2^2 = 0$. Када се кружна фреквенција ω_{22} мења и тежи ка $+\infty$ мењају се и корени, те $\Omega_1^2 \rightarrow \infty$ док је $\Omega_2^2 = \omega_{11}^2 / (1 + \mu)$. Први корен постиже минималну вредност $\omega_{11}^2 / (1 + \mu)$, а затим расте до $+\infty$. Други корен има минималну вредност 0, а затим асимптотски расте ка вредности $\omega_{11}^2 / (1 + \mu)$. Промене корена ψ_1^2 једначине (32) у зависности од промене кружне фреквенције апсорбера ω_{22} приказане су дијаграмом на сл. 11.7.a.

При $\beta = \infty$ динамички фактори (30), за две различите вредности Ω_1^2 и Ω_2^2 корена једначине (32), односно (32a), постају

$$\eta_{d1}^{(1)} = \frac{1}{\left| 1 - (1 + \mu) \frac{\Omega_1^2}{\omega_{11}^2} \right|}, \quad \eta_{d1}^{(2)} = \frac{1}{\left| 1 - (1 + \mu) \frac{\Omega_2^2}{\omega_{11}^2} \right|}, \quad (33)$$

па зависе од кружне фреквенције ω_{22} апсорбера. Њихове промене су приказане на сл. 11.7.b.



Сл. 11.7. — Нанкхатт-ови дијаграми

Ханкам (Е. Нанкхатт) је 1932. год. показао да се најбоља вредност η_{d1} постиже при $\eta_{d1}^{(1)} = \eta_{d1}^{(2)}$. Како је $\Omega_1^2 \neq \Omega_2^2$ то изједначењем вредности (33) биће

$$1 - (1 + \mu) \frac{\Omega_1^2}{\omega_{11}^2} = - \left[1 - (1 + \mu) \frac{\Omega_2^2}{\omega_{11}^2} \right]$$

па је

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = 2 \omega_{11}^2 / (1 + \mu).$$

Једначина (32a) је квадратна по Ω^2 , па је, према Viète-овим условима,

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = 2 [\omega_{11}^2 + (1 + \mu) \omega_{22}^2] / (2 + \mu).$$

Одавде изједначењем добијамо најповољнији однос кружних фреквенција

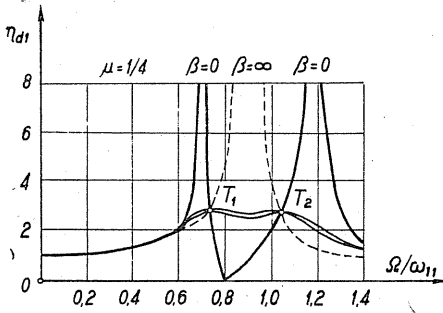
$$\frac{\omega_{11}^2}{1 + \mu} = \frac{\omega_{11}^2 + (1 + \mu) \omega_{22}^2}{2 + \mu}, \quad \text{тј.} \quad \gamma = \frac{\omega_{22}}{\omega_{11}} = \frac{1}{1 + \mu} \quad (34)$$

и најповољнију вредност динамичког фактора

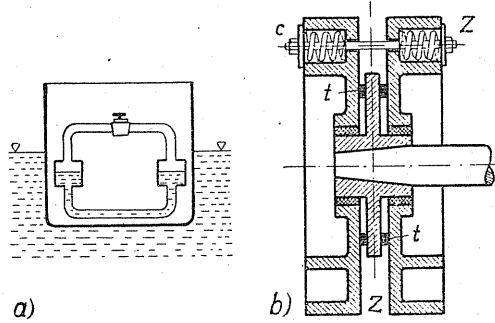
$$\eta_{d1} = \eta_{d1}^{(1)} = \eta_{d1}^{(2)} = \sqrt{(2 + \mu) / \mu}. \quad (34a)$$

На сл. 11.8. је приказана зависност динамичког фактора η_{d1} у зависности од односа Ω/ω_{11} а за однос $\mu = m_2/m_1 = 1/4$ и различите вредности коефицијента β . Све резонантне криве пролазе кроз тачке T_1 и T_2 , једнаких ордината, у којима постижу своје максимуме.

На овоме принципу конструисан је и *Фрамов* (Frahm) апсорбер за пригушивање осцилација ваљања брода, (сл. 11.9.а). Овај се апсорбер састоји из два танка дели-



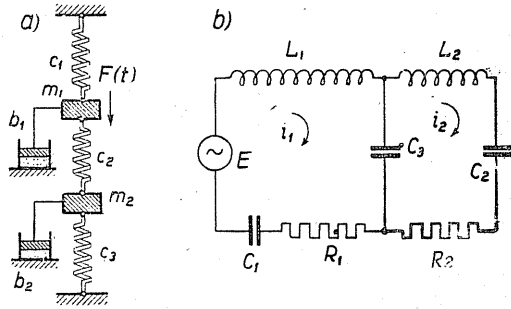
Сл. 11.8. — Зависност динамичког фактора од односа фреквенција и односа маса



Сл. 11.9. — а) Frahm-ов апсорбер за гушење осцилација брода, — б) Lanchester-damper

мично напуњена водом и са две славине. Горња славина представља ваздушни вентил којим се регулише гушење осцилација брода (главне масе) услед периодичких импулса таласа. Примена ових апсорбера је била велика на немачким путничким бродовима, (на пример, на бродовима „*Vremen*“ и „*Europa*“).

За гушење торзијских осцилација код гасних и дизел машина примењује се *торзијски апсорбер са шпренгем*, тзв. *Lanchester damper* (сл. 11.9.б). Овај се апсорбер састоји из два замајца (*Z*) који се могу слободно обрнути на вратилу, а спојена су *завршњем са ојругом*, (*c*). Између замајца су *шарни прстенови* (*t*). При малим осцилацијама замајци се заједно обрћу са рукавцем вратила. Међутим, теже ли осцилације да постану веће, они услед велике инерције маса не следе ове осцилације те долази до трења између прстенова и до расипања енергије. Тиме се ограничавају амплитуде торзијских осцилација, и не дозвољава се велики пораст тангенцијалних напона.



Сл. 11.10. — Аутомобилски апсорбер

У случају аутомобилског апсорбера приказаног на сл. 11.10.а, чији је електрични модел приказан на сл. 11.10.б, енергије и функција расипања биће

$$E_k = 1/2 (m_1 \dot{z}_1^2 + m_2 \dot{z}_2^2);$$

$$E_p = 1/2 [c_1 z_1^2 + c_2 (z_2 - z_1)^2 + c_3 z_2^2]; \quad \Phi = 1/2 (b_1 \dot{z}_1^2 + b_2 \dot{z}_2^2),$$

па добијамо систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + b_1 \dot{z}_1 + c_1 z_1 - c_2 (z_2 - z_1) &= F \cos \Omega t, \\ m_2 \ddot{z}_2 + b_2 \dot{z}_2 + c_2 (z_2 - z_1) + c_3 z_2 &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Представимо ли да су координате z_i комплексни бројеви а поремећајну силу узмемо у комплексном облику $\mathfrak{F} = F e^{i\Omega t}$, онда је и решење комплексно

$$z_i = A_i e^{i\Omega t}, \quad (36)$$

те следи систем једначина

$$\begin{aligned} (c_2 + Z_1) A_1 - c_2 A_2 &= F; \\ -c_2 A_1 + (c_3 + Z_2) A_2 &= 0; \end{aligned}$$

и амплитуде

$$\begin{aligned} A_1 &= (c_3 + Z_2) F / \Delta; \\ A_2 &= F c_2 / \Delta, \end{aligned} \quad (37)$$

где су Z_i механичке импеданце (сл. 4.10.).

12. КРИТИЧНЕ БРЗИНЕ БРЗОХОДНИХ ВРАТИЛА

12.1. Вертикално вратило са једним диском. — При извесним брзинама обртања вратила се показују динамички *нестабилним*, па се могу појавити и велике амплитуде, проузроковане резонансом. Тада је угаона брзина обртања вратила једнака кружној фреквенцији сопствених осцилација. Она се назива *кришичном брзином вратила* (ω_k).

На средини вертикалног вратила AB , дужине l , чију масу занемарујемо, налази се диск чије се тежиште поклапа са тежиштем попречног пресека вратила, (сл. 12.1. *a*). При обртању вратила, угаоном брзином ω , центрифугална сила се уравнотежава са силом еластичности вратила

$$m\omega^2 = cy. \quad (1)$$

Кришична угаона брзина вратила износи

$$\omega_k = \sqrt{c/m} = 1/30 \pi n_k = \omega_{11}; \quad (2)$$

тј. једнака је сопственој кружној фреквенцији диска, где је c крутост вратила; $c = 1/\alpha_{11}$, а α_{11} је утицајни коефицијент за померање од силе.

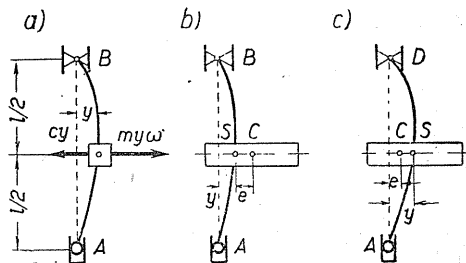
У случају *ексцентричног диска*, (сл. 12.1. *b*), чије се тежиште, (C), не поклапа са тежиштем вратила, (S), услов равнотеже силе еластичности опруге и центрифугалне силе

$$m(y + e)\omega^2 = cy, \quad (3)$$

одређује угиб тежишта попречног пресека вратила

$$y = \frac{me\omega^2}{c - m\omega^2} = \frac{e}{(\omega_k/\omega)^2 - 1}; \quad \omega_k^2 = \frac{c}{m}. \quad (4)$$

Угиб постаје $y = \infty$ када је $\omega_k^2 = c/m = \omega^2$, тј. када је угаона брзина једнака кружној фреквенцији сопствених осцилација. За $\omega < \omega_k$ је $y > 0$.



Сл. 12.1. — *a*) Кришична брзина вертикалног вратила са једним диском, *b*, *c*) Лавалово правило

Буде ли $\omega > \omega_k$ тада је $y < 0$, смањује се и мења знак, па је

$$m(y-e)\omega^2 = cy, \quad \text{тј.} \quad y = \frac{e}{1 - (\omega_k/\omega)^2}. \quad (5)$$

Када ω расте угиб се смањује и тежи граничној вредности e , како показују и експерименти, те наступа самостабилизација вратила, (сл. 12.1. с), тзв. Лавалово правило.

12.2. Хоризонтално вратило са једним диском. — Нека се z оса поклапа са геометријском осом вратила и нека је оса Ox хоризонтална, (сл. 12.2. а). Означимо са x и y координате тежишта диска, (С), а са ξ и η координате тежишта попречног пресека вратила, (S), онда је

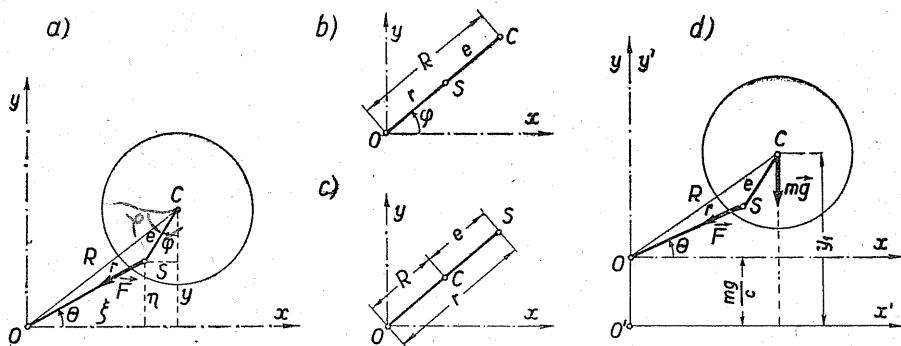
$$\xi = x - e \cos \varphi, \quad \eta = y - e \sin \varphi, \quad (6)$$

где је $\varphi = \omega t$. Како је кретање диска комплано, то за генерализане координате узимамо x , y и φ , па су динамичке једначине кретања диска

$$m\ddot{x} = \sum X_i = -c\xi; \quad m\ddot{y} = \sum Y_i = -c\eta;$$

$$J_c \ddot{\varphi} = \sum \mathcal{M} = -Ye \cos \varphi + Xe \sin \varphi, \quad (7)$$

где су X и Y пројекције реституционе силе $\vec{F} = -c\vec{r}$ а J_c сопствени аксијални момент инерције диска.



Сл. 12.2. — а) Критична брзина хоризонталног вратила са једним диском, б, с) Самостабилизација вратила, д) Критичне брзине прве и друге врсте

С обзиром на (6) једначине (7) постају

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -c(x - e \cos \varphi); & m\ddot{y} = -c(y - e \sin \varphi); \\ J_c \ddot{\varphi} = ce(\eta \cos \varphi - \xi \sin \varphi) = ce(y \cos \varphi - x \sin \varphi), \end{cases}$$

односно

$$\begin{cases} m\ddot{x} + cx = ce \cos \varphi; & m\ddot{y} + cy = ce \sin \varphi, \\ J_c \ddot{\varphi} + ce(x \sin \varphi - y \cos \varphi) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Ако је угаона брзина обртања вратила константна, $\dot{\varphi} = \text{const}$, онда је $\ddot{\varphi} = 0$, па мора бити задовољен услов

$$x \sin \varphi - y \cos \varphi = 0; \quad \eta \cos \varphi - \xi \sin \varphi = 0, \quad (9)$$

те је $\text{tg } \varphi = y/x = (\eta + e \sin \varphi)/(\xi + e \cos \varphi) = \eta/\xi = \text{tg } \theta$, па је и $\varphi = \theta$.

Прве две једначине (8) јесу нехомогене једначине чија су решења

$$x = A \cos \omega_k t + B \sin \omega_k t + \frac{e}{1 - \nu^2} \cos \varphi, \quad (10a)$$

и

$$y = C \cos \omega_k t + D \sin \omega_k t + \frac{e}{1 - \nu^2} \sin \varphi, \quad (10b)$$

где је $\omega_k = \sqrt{c/m}$ критична угаона брзина и $\nu = \omega/\omega_k$. Због везе (9) морају константе у (10) бити једнаке нули, јер је

$$(A \sin \varphi - C \cos \varphi) \cos \omega_k t + (B \sin \varphi - D \cos \varphi) \sin \omega_k t = 0,$$

па је

$$A = B = C = D = 0,$$

те елиминисањем угла φ из горњих једначина добијамо да је

$$x^2 + y^2 = R^2 = [e/(1 - \nu^2)]^2; \quad R = e/(1 - \nu^2). \quad (11)$$

Ако је $\omega < \omega_k$, тј. $\nu < 1$, онда је $R > e$, па осцилације диска расту уколико се ω приближава вредности ω_k , (сл. 12.2. b, c). Међутим, када је $\omega \gg \omega_k$, тј. $\nu \gg 1$, тада је

$$R = -e/(\nu^2 - 1) \quad (12)$$

па наступа самостабилисање вратила, (сл. 12.2. b).

Угаона брзина обртања вратила је ограничена у размаку

$$[1 - (e/R_0)] \omega_k^2 \leq \omega^2 \leq [1 + (e/R_0)] \omega_k^2 \quad (12a)$$

где је R_0 највећи дозвољени угиб диска и $e < R_0$.

У предњем излагању занемарили смо утицај тежине диска. Међутим, ако се и она узме у обзир, (mg) , динамичке једначине биће

$$\begin{cases} m\ddot{x} + cx = ce \cos \varphi; & m\ddot{y} + cy = ce \sin \varphi - mg, \\ J_c \ddot{\varphi} = -ce(x \sin \varphi - y \cos \varphi). \end{cases} \quad (13)$$

Транслацијом координатног система Oxy у тачку O' , (сл. 12.2. d), добија се $y_1 = y + (mg/c)$, па горње једначине (13) постају

$$\begin{cases} m\ddot{x} + cx = ce \cos \varphi; & m\ddot{y}_1 + cy_1 = ce \sin \varphi; \\ J_c \ddot{\varphi} = -ce(x \sin \varphi - y_1 \cos \varphi) - mge \cos \varphi. \end{cases} \quad (14)$$

Прве две једначине (14) су еквивалентне првим двама једначинама (13), а у трећој се појављује утицај тежине диска.

Ако је разлика углова φ и θ врло мала, први члан на десној страни треће једначине (14) може се занемарити као мала величина у односу на тежину, па је динамичка једначина обртања

$$\ddot{\varphi} = -\varepsilon \cos \varphi, \quad (15)$$

где је $\varepsilon = mge/J_c$. Интегралењем ове диференцијалне једначине добија се

$$\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}_0^2 = -2\varepsilon \sin \varphi; \quad (16)$$

$\dot{\varphi}_0 = \omega_0$ је угаона брзина основног кретања. Развијањем горњег израза

$$\dot{\varphi} = (\omega_0^2 - 2\varepsilon \sin \varphi)^{1/2} \approx \omega_0 [1 - (\varepsilon/\omega_0^2) \sin \varphi]$$

биће $\dot{\varphi} = \omega_0 + \varepsilon \sin \varphi = \omega_0 + \varepsilon \sin \omega_0 t$, па се добија

$$\varphi = \omega_0 t + (\varepsilon/\omega_0) (1 - \cos \omega_0 t). \quad (17)$$

Како је ε мала величина, то су

$$\sin \varphi \approx \sin \omega_0 t + \frac{\varepsilon}{\omega_0} (1 - \cos \omega_0 t) \cos \omega_0 t;$$

$$\cos \varphi \approx \cos \omega_0 t - \frac{\varepsilon}{\omega_0} (1 - \cos \omega_0 t) \sin \omega_0 t.$$

Уношењем ових вредности у прве две једначине (14)

$$\ddot{x} + \omega_k^2 x = \omega_k^2 e \left(\cos \omega_0 t - \frac{\varepsilon}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{\varepsilon}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right),$$

$$\ddot{y}_1 + \omega_k^2 y = \omega_k^2 e \left(\sin \omega_0 t + \frac{\varepsilon}{\omega_0} \cos \omega_0 t - \frac{\varepsilon}{2\omega_0} \cos 2\omega_0 t - \frac{\varepsilon}{2\omega_0} \right),$$

биће решења

$$x = C_1 \sin(\omega_k t + \alpha_1) + \frac{\omega_k^2 e}{\omega_k^2 - \omega_0^2} \left(\cos \omega_0 t - \frac{\varepsilon}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) + \frac{\omega_k^2 e \varepsilon}{2 \omega_0 (\omega_k^2 - 4 \omega_0^2)} \sin 2 \omega_0 t; \quad (18)$$

$$y_1 = \frac{e \varepsilon}{2 \omega_0} C_2 \sin(\omega_k t + \alpha_2) + \frac{\omega_k^2 e}{\omega_k^2 - \omega_0^2} \left(\sin \omega_0 t + \frac{\varepsilon}{\omega_0} \cos \omega_0 t \right) - \frac{\omega_k^2 e \varepsilon}{2 \omega_0 (\omega_k^2 - 4 \omega_0^2)} \cos 2 \omega_0 t.$$

Из ових се једначина види да координате тежишта постају бесконачно велике за две вредности критичних брзина

$$\omega_{k1} = \sqrt{c/m}, \quad \omega_{k2} = 1/2 \omega_{k1} = 1/2 \sqrt{c/m}, \quad (19)$$

од којих је друга једнака половини прве. Ова критична брзина се назива, према *Сименс-Шодоли* (Siemens-Stodola), *критичном брзином друге врсте*.

Критичне брзине друге врсте показују се и у случају када дејствује *поремањани моменш*. Занемарујући тежину диска, једначине (13) биће

$$\ddot{x} + \omega_k^2 x = e \omega_k^2 \cos \varphi; \quad \ddot{y} + \omega_k^2 y = e \omega_k^2 \sin \varphi; \quad (20)$$

$$J_c \ddot{\varphi} + c e (x \sin \varphi - y \cos \varphi) = \mathfrak{M}(t).$$

Ако је угаона брзина обртања диска ω_u и обртни угао

$$\varphi = \omega_u t + \psi, \quad (21)$$

а момент се мења периодички са временом

$$\mathfrak{M}(t) = \mathfrak{M}_k \cos k \omega_u t, \quad (22)$$

трећа једначина (20) постаје

$$J_c \ddot{\psi} + c e (x \sin \varphi - y \cos \varphi) = \mathfrak{M}_k \cos k \omega_u t, \quad J = J_c; \quad (23)$$

овде је $k \omega_u$ кружна фреквенција промене момента, а k број промена при једном обрту. Претпостављајући да је ексцентричност e мала и да је разлика углова $\varphi - \psi$ такође мала, може се други члан у једначини (23) занемарити, па је

$$\ddot{\psi} = (\mathfrak{M}_k / J) \cos k \omega_u t$$

те интеграљењем добијамо

$$\psi = -(\mathfrak{M}_k / k^2 J \omega_u^2) \cos k \omega_u t.$$

За мале промене угаоне брзине може се ставити да је $\cos \psi \approx 1$, $\sin \psi \approx \psi$, па су

$$\cos \varphi \approx \cos \omega_u t - \psi \sin \omega_u t, \quad \sin \varphi \approx \sin \omega_u t + \psi \cos \omega_u t,$$

те једначине (20) постају

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_k^2 x &= e \omega_k^2 \cos \omega_u t + \frac{\mathfrak{M}_k e \omega_k^2}{k^2 \omega_u^2 J} \cos k \omega_u t \sin \omega_u t; \\ \ddot{y} + \omega_k^2 y &= e \omega_k^2 \sin \omega_u t - \frac{\mathfrak{M}_k e \omega_k^2}{k^2 \omega_u^2 J} \cos k \omega_u t \cos \omega_u t. \end{aligned} \quad (24)$$

С обзиром на познате тригонометријске релације, биће

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_k^2 x &= e \omega_k^2 \cos \omega_u t + \frac{\mathfrak{M}_k e \omega_k^2}{2 k^2 \omega_u^2 J} [\sin (k+1) \omega_u t - \sin (k-1) \omega_u t]; \\ \ddot{y} + \omega_k^2 y &= e \omega_k^2 \sin \omega_u t - \frac{\mathfrak{M}_k e \omega_k^2}{2 k^2 \omega_u^2 J} [\cos (k+1) \omega_u t + \cos (k-1) \omega_u t]. \end{aligned} \quad (25)$$

Резонанса се јавља при следећим вредностима критичне брзине

$$|\omega_u| = \omega_k; \quad \omega_u = \frac{\omega_k}{|k \pm 1|}. \quad (26)$$

Развије ли се функција $\mathfrak{M}(t)$ у Фуријеов ред, тада је за више чланове реда критична брзина друге врсте

$$\omega_u = \frac{\omega_k}{|n k \pm 1|}. \quad (27)$$

Доња таблица даје однос критичних брзина друге и прве врсте за различите вредности k и n :

ω_u/ω_k	$k=1/2$		$k=1$		$k=3/2$		$k=2$		$k=3$	
$n=1$	$2/3$	2	$1/2$	∞	$2/5$	2	$1/3$	1	$1/4$	$1/2$
$n=2$	$1/2$	∞	$1/3$	1	$1/4$	$1/2$	$1/5$	$1/3$	$1/7$	$1/5$
$n=3$	$2/5$	2	$1/4$	$1/2$	$2/11$	$2/7$	$1/7$	$1/5$	$1/10$	$1/8$

12.3. Вратило са више дискова. — Код вратила са више дискова (на пример сл. 9.1.) угиб y_i масе m_i (у пресеку испод силе $F_i = G_i$) биће према (9.1)

$$y_i = \sum \alpha_{ik} \mathfrak{F}_{jk} = \omega^2 \sum \alpha_{ik} m_k y_k, \quad (28)$$

па се сменом $1/\omega^2 = \lambda$ добија фреквентна једначина

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} m_1 - \lambda & \alpha_{12} m_2 & \dots & \alpha_{1n} m_n \\ \alpha_{21} m_1 & \alpha_{22} m_2 - \lambda & \dots & \alpha_{2n} m_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} m_1 & \alpha_{n2} m_2 & \dots & \alpha_{nn} m_n - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (29)$$

Множећи сваку врсту детерминанте са $\sqrt{m_i}$ а сваку колону са $1/\sqrt{m_i}$ добија се симетрична детерминанта

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} m_1 - \lambda & \alpha_{12} \sqrt{m_1 m_2} & \dots & \alpha_{1n} \sqrt{m_1 m_n} \\ \alpha_{21} \sqrt{m_1 m_2} & \alpha_{22} m_2 - \lambda & \dots & \alpha_{2n} \sqrt{m_2 m_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} \sqrt{m_1 m_n} & \alpha_{n2} \sqrt{m_2 m_n} & \dots & \alpha_{nn} m_n - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (30)$$

Сопствене вредности λ_s представљају реципрочне вредности квадрата кружних фреквенција. Најнижа кружна фреквенција је критична угаона брзина обртног вратила.

Овим се динамички проблем одређивања критичних брзина свео на статички проблем одређивања утицајних коефицијената и динамички проблем одређивања кружних фреквенција попречних осцилација греде под утицајем концентрисаних маса. У пракси се често тражи најнижа кружна фреквенција, тј. прва критична брзина, па се примењују приближне методе. Таква је метода Морлијева (чл. 9.3.2) основана на Релијевој методи енергије. Према (12.6) критична угаона брзина и период су:

$$\omega_k^2 = g \frac{\sum_i G_i f_i}{\sum_i G_i f_i^2}; \quad T_k = \frac{2\pi}{\omega_k} = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_i G_i f_i^2}{g(\sum_i G_i f_i)}}, \quad (31)$$

где су f_i угиви пресека греде испод концентрисаних сила G_i .

За карактеристичне случајеве са једном масом критична брзина је дата у табlici 1.1. (страна 21).

12.4. Тешко вратило са дисковима. — Применом методе енергије може се одредити критична угаона брзина тешког вратила чију масу узимамо у обзир, оптерећеног концентрисаним масама (дискovima). При томе се претпоставља да је основни облик осциловања врло близак статичкој еластичној линији $y(z)$ услед концентрисаног терета или некој кривој линији која добро апроксимира еластичну линију. Ако је q тежина јединице дужине греде (kg/m) онда је маса

греде. $M = ql/g$, а елементарна маса биће $dM = (q/g) dz$. Сваки делић греде осцилује по хармонијском закону рачунатом од осе греде

$$y(z, t) = y(z) [1 - \cos \omega t]; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \dot{y} = \omega \cdot y(z) \cdot \sin \omega t, \quad (32)$$

па је највећа кинетичка енергија целе греде без концентрисаних маса

$$E_{k \max} = \int_0^l \frac{1}{2} dM \cdot \dot{y}_{\max}^2 = \frac{q}{2g} \omega^2 \int_0^l [y(z)]^2 \cdot dz; \quad y(z) = y_s \quad (33)$$

где је $y(z) = y_s$ *статички* угиб масе dM , тј. *ординаша еластичне линије греде*. Ако дејствују и концентрисане масе, онда је према **чл. 1.7.** максимална кинетичка енергија система

$$E_{k \max} = \frac{q}{2g} \omega^2 \int_0^l y^2 dz + \sum_i \frac{1}{2} \frac{G_i}{g} f_i^2 \omega^2 \quad (34)$$

где су f_i угиби маса m_i услед њихових тежина G_i .

Максимална потенцијална енергија једнака је деформационом раду при савијању. Како је диференцијална једначина еластичне линије савијене греде $\mathfrak{B} y'' = -M_f$, $\mathfrak{B} = El_x$, то је највећа потенцијална енергија савијене греде

$$A_{df} = \int_0^l \frac{1}{2\mathfrak{B}} M_f^2 dz = \frac{\mathfrak{B}}{2} \int_0^l (y'')^2 dz. \quad (35)$$

Према Клапејроновој теорему треба додати и потенцијалну енергију услед терета, па је укупна највећа потенцијална енергија

$$E_{p \max} = \frac{\mathfrak{B}}{2} \int_0^l (y'')^2 dz + \sum_i \frac{1}{2} G_i f_i. \quad (36)$$

Изједначајући највеће енергије (34) и (36) добијамо квадрат критичне угаоне брзине

$$E_{k \max} = E_{p \max}; \quad \omega_k^2 = g \frac{\mathfrak{B} \int_0^l (y'')^2 dz + \sum_i G_i f_i}{q \int_0^l y^2 dz + \sum_i G_i f_i^2}. \quad (37)$$

Ако је греда променљивог пресека онда је $\mathfrak{B} = f(z)$, па га треба увући под знак интеграла.

12.5. Утицај гироскопског ефекта на критичне брзине.

До сада смо разматрали случајеве када су дискови насађени на вратилу тако да њихове средње равни задржавају свој стални управни правац на диску и у простору. Међутим, при савијању вратила долази до промене средње равни диска услед чега се јавља и његово гироскопско дејство, поготово код брзоходних вратила.

Из теорије регуларне прецесије тешког симетричног *гироскопа* (чигре, зврка)* познато је да је тренутна угаона брзина обртања векторски збир угаоне брзине сопственог обртања око фигурне осе (ω_s) и угаоне брзине прецесије (Ω),

те је $\vec{\omega} = \vec{\omega}_s + \vec{\Omega}$, па се кретање представља котрљањем без клизања по непокретном кружном конусу.

Момент спољашњих сила $\vec{\mathcal{M}}_O$ који је потребан да би произвео регуларну прецесију дејствује у смеру чворне осе (сл. 12.3. а) а њему се супротставља *гироскопски* (девијациони) *момент* који дејствује у негативном смеру те осе и износи

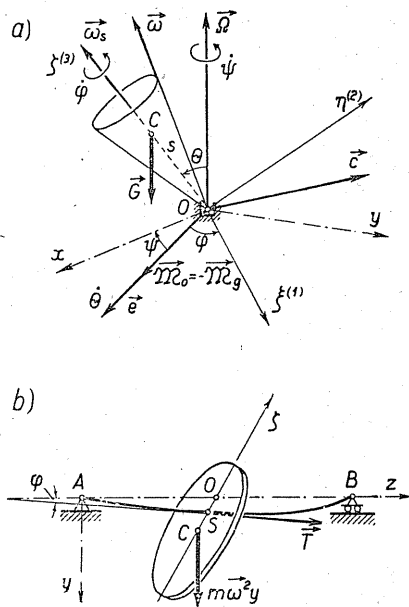
$$\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_d = -\mathcal{M}_O = - \left[J_3 \omega_s \Omega \sin \theta + \frac{J_3 - J_1}{2} \Omega^2 \sin 2\theta \right], \quad (38)$$

где је θ угао нутације — између фигурне осе и осе прецесије. Гироскоп је симетрично обртно тело па је код њега $J_1 = J_2 \neq J_3$.

Код диска насађеног на вратилу угао нутације θ једнак је нагибу φ тангенте еластичне линије са Oz осом. Претпостављајући *стационарно кретање* $\omega_s = 0$ (тада тачке O , S и C диска и вратила леже у једној равни, сл. 12.3. б), а како су нагиби врло мали, може се ставити $\cos \theta = \cos \varphi \approx 1$ и $\sin \theta = \sin \varphi \approx \varphi$, те је гироскопски момент

$$\mathcal{M}_g \approx -(J_3 - J_1) \Omega^2 \varphi = -C \omega^2 \varphi; \quad C = J_3 - J_1; \quad \omega = \Omega. \quad (39)$$

* Динамика, чл. 20.5.2.



Сл. 12.3. — Гироскопски ефект

На угибе и нагибе греде утичу и силе и спрегови, па, овде, као и у случају осцилација маса на греди (чл. 9, обр. 2) треба ставити уместо сила силе инерције (центрифугалне силе) а уместо спрегова гироскопске моменте, те ће бити систем једначина

$$y_i + \sum_k (\sigma_{ik} m_k \ddot{y}_k + \delta_{ik} \mathfrak{M}_{gk}) = 0; \quad (40)$$

$$\varphi_i + \sum_k (\nu_{ik} m_k \ddot{y}_k + \gamma_{ik} \mathfrak{M}_{gk}) = 0; \quad |\nu_{ik}| = |\delta_{ik}|.$$

Пошто је центрифугална сила $F_j = m \omega^2 y$ и $\mathfrak{M}_g = -C \omega^2 \varphi$, то је за случај једног диска (сл. 12.3. б):

$$\eta \approx y - e = \alpha_{11} m \lambda y - \delta_{11} C \lambda \varphi; \quad \varphi = \nu_{11} m \lambda y - \gamma_{11} C \lambda \varphi; \quad \lambda = \omega^2. \quad (41)$$

Овај систем има решења

$$y = e [1 + \gamma_{11} C \lambda] / \Delta; \quad \varphi = e \delta_{11} m \lambda / \Delta, \quad (42)$$

само у случају када детерминанта система горњих једначина није једнака нули

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} m \lambda - 1 & -\delta_{11} C \lambda \\ \delta_{11} m \lambda & -(\gamma_{11} C \lambda + 1) \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 \left[\frac{1}{\lambda^2} - (\alpha_{11} m - \gamma_{11} C) \frac{1}{\lambda} - (\alpha_{11} \gamma_{11} - \delta_{11}^2) C m \right] \neq 0. \quad (43)$$

Пошто су утицајни коефицијенти α_{11} , γ_{11} , δ_{11} увек позитивне величине, јер су силе узете да су позитивне у смеру пораста угиба, а моменте позитивни у смеру пораста нагиба, то је $\alpha_{11} \gamma_{11} - \delta_{11}^2 > 0$, па је детерминанта Δ увек позитивна величина.

Угаона брзина за коју је ова детерминанта једнака нули назива се *кришична угаона брзина гироскопског дејства диска*, и износи

$$\frac{1}{\omega_g^2} = \frac{1}{2} (\alpha_{11} m - \gamma_{11} C) + \sqrt{\frac{1}{4} (\alpha_{11} m - \gamma_{11} C)^2 + (\alpha_{11} \gamma_{11} - \delta_{11}^2) m C}. \quad (44)$$

Из (42) види се да када $\omega \rightarrow \infty$ тада $y \rightarrow 0$ и $\varphi \rightarrow 0$, па наступа *самостабилисање*, као и случају просте критичне брзине.

Како је

$$\alpha_{11} m - \frac{1}{\omega_g^2} = \frac{1}{2} (\alpha_{11} m + \gamma_{11} C) - \sqrt{\frac{1}{4} (\alpha_{11} m + \gamma_{11} C)^2 - \delta_{11}^2 m C} > 0$$

то је

$$\alpha_{11} m - \frac{1}{\omega_g^2} = \frac{1}{\omega_r^2} - \frac{1}{\omega_g^2} > 0,$$

па је

$$\omega_g > \omega_k. \quad (45)$$

Гироскојско дејство диска повећава критичну вредност угаоне брзине. Како је у овом случају $\Omega = \omega$, то је прецесија регуларна и прогресивна („Gleichlauf“); међутим, ако је $\Omega = -\omega$, тј. $\omega_s = 2\omega$, прецесија је регуларна и ретроградна („Gegenlauf“). У овоме другом случају је гироскопски момент (39):

$$\mathfrak{M}_g = \frac{1}{2} (J_3 + J_1) \omega^2 \varphi = \frac{1}{2} D \omega^2 \varphi, \quad D = J_3 + J_1, \quad (46)$$

па је критична угаона брзина прецесије (за $e = 0$):

$$\frac{1}{\omega_r^2} = \frac{1}{2} (\alpha_{11} m + \gamma_{11} D) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\alpha_{11} m + \gamma_{11} D)^2 - (\alpha_{11} \gamma_{11} - \delta_{11}^2) m D}. \quad (47)$$

Како је поткорена величина увек позитивна, то се за критичну брзину добијају две вредности. Због

$$\alpha_{11} m - \frac{1}{\omega_r^2} = \frac{1}{2} (\alpha_{11} m - \gamma_{11} D) \mp \sqrt{\frac{1}{4} (\alpha_{11} m - \gamma_{11} D)^2 + \delta_{11}^2 m D},$$

биће

$$\omega_{r1} < \omega_k < \omega_{r2}. \quad (48)$$

Једна критична брзина при овој прецесији је нижа а друга је виша од критичне брзине прве врсте диска (не узимајући у обзир гироскопско дејство диска).

Ако је на слободном крају конзоле насађен диск, масе m , сл. 12.4. а, онда су моменти инерције

$$J_1 = \frac{1}{2} J_3; \quad C = J_3 - J_1 = J_1 = m i^2;$$

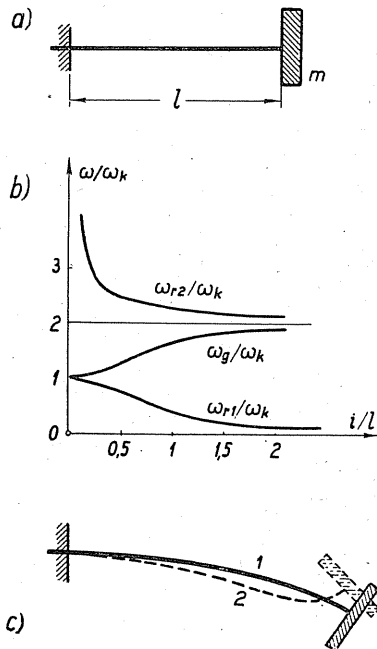
$$D = J_1 + J_3 = 3 J_1 = 3 m i^2,$$

где је i полупречник инерције. Како су

$$\alpha_{11} = l^3/3 \mathfrak{B}; \quad \gamma_{11} = l/\mathfrak{B}; \quad \delta_{11} = l^2/2 \mathfrak{B}; \quad \mathfrak{B} = E l^3,$$

$$\frac{\gamma_{11} C}{\alpha_{11} m} = 3 u^2; \quad \frac{\delta_{11}^2 C}{\alpha_{11}^2 m} = \frac{9}{4} u^2; \quad \frac{\gamma_{11} D}{\alpha_{11} m} = 9 u^2;$$

$$\frac{\delta_{11}^2 D}{\alpha_{11}^2 m} = \frac{27}{4} u^2; \quad u = \frac{i}{l},$$



Сл. 12.4. — Гироскопско дејство диска на слободном крају конзоле

то из једначина (44) и (47) добијамо односе

$$\frac{\omega_g^2}{\omega_k^2} = \frac{2}{3u^2} [3u^2 - 1 + \sqrt{(3u^2 - 1)^2 + 3u^2}];$$

$$\frac{\omega_r^2}{\omega_k^2} = \frac{2}{9u^2} [9u^2 + 1 \pm \sqrt{(9u^2 + 1)^2 - 9u^2}].$$

Графичка зависност односа ω/ω_k приказана је на сл. 12.4. *b*, а облици савијене греде за ретроградни случај критичне брзине на сл. 12.4. *c*.

12.6. Сложене торзијске и попречне осцилације. — У пракси је чест случај комбинованих торзијских и попречних осцилација, као на пример код спреге парне турбине и динамо машине. Нека је на вратилу *AB* насађен диск, масе m_1 и аксијалног момента инерције J_1 , (као на сл. 9.5.), а вратило је спрегнуто са вратилом *BC*, на коме се налази други диск, масе m_2 , аксијалног момента инерције J_2 , тако да спојница (*B*) не утиче на попречне осцилације прве масе m_1 .

Диференцијалне једначине попречних осцилација прве масе биће

$$m_1 \ddot{x} + cx = ce \cos \varphi_1, \quad (49)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + cy_1 = ce \sin \varphi_1,$$

јер је, према (14), узета у обзир и сопствена тежина диска.

Ако је c_{12} торзијска крутост дела вратила између маса, онда су диференцијалне једначине торзијских осцилација дискова

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_{12} (\varphi_1 - \varphi_2) = mge \cos \varphi_1 - ce (y_1 \cos \varphi_1 - x \sin \varphi_1);$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 - c_{12} (\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \quad (50)$$

Решење ових диференцијалних једначина се много упрошћава када се претпостави* да је угаона брзина обртања вратила константна, $\omega_0 = \text{const}$. Уводећи ознаку $\omega_1 = \sqrt{c/m_1}$ кружне фреквенције попречних осцилација, решења једначина (49) биће

$$x = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \frac{\omega_1^2 e}{\omega_1^2 - \omega_0^2} \cos \omega_0 t;$$

$$y_1 = C_2 \sin(\omega_1 t + \alpha_2) + \frac{\omega_1^2 e}{\omega_1^2 - \omega_0^2} \sin \omega_0 t. \quad (51)$$

* Hort W. — Technische Schwingungslehre. II Aufl. Berlin, 1922., S. 216.

Унесу ли се ова решења у једначине (50), с обзиром на однос

$$\cos \omega_0 t \cos \omega t = \frac{1}{2} \cos (\omega_0 - \omega) t + \frac{1}{2} \cos (\omega_0 + \omega) t,$$

добија се приближна диференцијална једначина

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_{12} (\varphi_1 - \varphi_2) = m g e \cos \omega_0 t + D_1 \sin [(\omega_0 + \omega) t + \varepsilon_1] + D_2 \sin [(\omega_0 - \omega) t + \varepsilon_2], \quad (52)$$

у којој су D_1 , D_2 , ε_1 , ε_2 константе које зависе од величине дискова и вратила.

Једначина (50), односно (52), представља диференцијалну једначину принудних осцилација система са две масе, па резонанса наступа када је

$$\omega_k = \omega_1; \quad \omega_{k1} = \omega_2 = \sqrt{c(J_1 + J_2)/J_1 J_2}; \quad \omega_{k2} = \omega_1 \pm \omega_2. \quad (53)$$

П Р И М Е Р И

12.1. Проста греда распона l оптерећена је на средини распона масом тежине G . Одредити критичну брзину вратила.

[Решење. — Једначина еластичне линије половине греде је

$$y = f(3u - 4u^3), \quad u = z/l; \quad f = f_i = Fl^3/48 \mathfrak{B}; \quad du/dz = 1/l; \quad dz = l du;$$

$$y'' = -24 fu/l^2,$$

па је

$$\omega_k^2 = g \frac{2 \cdot 24^2 \mathfrak{B} f^2 l^{-3} \int_0^{1/2} u^2 du + Gf}{2ql \int_0^{1/2} (3u - 4u^3)^2 du + Gf^2} = \frac{96g}{k(G + 17G_0/35)}; \quad k = \frac{l^3}{\mathfrak{B}}; \quad G_0 = Mgl.$$

12.2. Одредити критичну угаону брзину вратила из претходног задатка ако се уместо еластичне линије узме линија

$$y = f \sin(\pi z/l) = f \sin u,$$

где су

$$u = \pi z/l, \quad f = Gl^3/48 \mathfrak{B} = Gk/48,$$

[Решење. — Овде су изводи

$$y' = (dy/du)(du/dz) = (f\pi/l) \cos u;$$

$$y'' = -(f\pi^2/l^2) \sin u; \quad u = \pi z/l; \quad du/dz = \pi/l; \quad dz = (l/\pi) du;$$

$$\omega_k^2 = g \frac{2f^2 \pi^3 k^{-1} \int_0^{\pi/2} \sin^2 u \cdot du + Gf}{2qf^2 l \pi^{-1} \int_0^{\pi/2} \sin^2 u \cdot du + Gf^2} = \frac{\pi^4 + 96}{2k(G + \frac{1}{2}G_0)} = \frac{\pi^4 + 96}{k(2G + G_0)}.$$

12.3. Конзолно вратило носи на крају диск тежине G . Одредити критичну угаону брзину вратила.

[Решење. — Једначина еластичне линије је

$$y = f \frac{u^2}{2} (3-u); \quad u = z/l; \quad f = F l^3 / 3 \mathfrak{B} = Fk/3; \quad F = G; \quad dz = l du;$$

па су

$$y'' = 3 f (1-u)/l^2; \quad \int_0^l (y'')^2 dz = \frac{9 f^2}{l^3} \int_0^1 (1-u)^2 du = \frac{3 f^2}{l^3},$$

$$\int_0^l y^2 dz = \frac{f^2 l}{4} \int_0^1 u^4 (3-u)^2 du = \frac{33}{140} f^2 l$$

те је

$$\omega_k^2 = \frac{3/k + 3/k}{G + 33 G_0/140} = \frac{6}{k(G + 33/140 G_0)}; \quad G_0 = ql].$$

12.4. Исти задатак као претходни само за еластичну линију узети једначину

$$y = f (1 - \cos u), \quad u = \pi z/2 l, \quad f = Gl^3/3 \mathfrak{B}.$$

[Решење. — Овде су

$$z = 2 lu/\pi; \quad dz = (2 l/\pi) du; \quad y' = f (\pi/2 l) \sin u; \quad y'' = f (\pi/2 l)^2 \cos u$$

$$\frac{f^2 \pi^3}{8 l^3} \int_0^{\pi/2} \cos^2 u du = \frac{f^2 \pi^4}{32 l^3}; \quad \frac{2 f^2 l}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos u)^2 du = \frac{3 \pi - 8}{2 \pi} f^2 l;$$

$$\omega_k^2 = \frac{\pi^4 + 96}{k [G + (3 \pi - 8) G_0/2\pi]} g].$$

12.5. Обострано уклештено челично вратило носи на средини распона диск тежине $G = 2 G_0$, где је G_0 тежина вратила, дужине $l = 2$ м, кружног пресека, пречника $d = 10$ см. Израчунати критични број обртаја вратила.

[Решење. — Диференцијална једначина еластичне линије и интеграл су

$$y = 2 f u^2 (3 - 4 u); \quad u = z/l; \quad dz = l du; \quad f = G l^3 / 192 \mathfrak{B} = Gk/192;$$

$$y'' = 12 f (1 - 4 u)/l^2;$$

$$\int_0^l (y'')^2 dz = \frac{2 \cdot 144 f^2}{l^3} \int_0^{1/2} (1 - 4 u)^2 du = 48 \frac{f^2}{l^3};$$

$$\int_0^l y^2 dz = 8 f^2 l \int_0^{1/2} u^4 (3 - 4 u)^2 du = \frac{104}{35} f^2 l;$$

$$\omega_k^2 = g \frac{48/k + 192/k}{104 G_0/35 + G} = \frac{240 g}{k(104 G_0/35 + G)} = \frac{1400 g}{29 G_0 k} \frac{1}{\text{sec}^2};$$

$$G_0 = \gamma (d^2 \pi/4) l = 7, 85 \cdot \pi/4 \cdot 20 \approx 124 \text{ kg}; \quad I_x = d^4 \pi/64; \quad \mathfrak{B} = E I_x = 2 \pi 10^{10}/64 \text{ kgcm}^2;$$

$$k = l^3 \mathfrak{B} = 256/10^4 \pi; \quad g \approx 310 \pi;$$

$$\omega_k^2 = 4557 \pi^2; \quad \omega_k = 67,56 \pi = \pi n_k/30; \quad n_k = 2027 \text{ o/min}].$$

13. СТАБИЛНОСТ КРЕТАЊА

13.1. Лежен Дирихлеова теорема. — Ако је систем од N материјалних тачака подвргнут k коначним везама онда има $n = 3N - k$ степени слободе кретања. Тренутни положај система може се тада одредити са $n = 3N - k$ међусобно независних генералисаних координата q_i . Принцип виртуалних померања се изражава неједначином

$$\sum (\mathbf{F}, \delta \mathbf{r}) = \sum \left(\mathbf{F}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum Q_i \delta q_i \leq 0.$$

У случају равнотеже система морају генералисане силе бити $Q_i = 0$. Ако су оне конзервативне и имају функцију силе, која зависи од генералисаних координата q_i , онда мора у положају равнотеже система та функција да има екстремну вредност, тј. мора бити

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0. \quad (1)$$

Лагранж је први указао на ову теорему коју је доцније доказао Дирихле (Lejeune Dirichlet, 1805. – 1859.): Ако у положају равнотеже конзервативног холономног склерономног система функција силе има максимум (пошвенцијална функција минимум) онда је равнотежа система стабилна; у прошивном је лабилна или пак индиферентна.

У положају равнотеже можемо узети да су све координате $q_i = 0$. Ако се из тачке O опише у n -мерном простору сфера полупречника ρ , она обухвата област (S) у којој је $|q_i| \leq \rho$. Буде ли ρ по вољи произвољно мала величина таква да се при саопштавању почетних брзина $(\dot{q}_i)_0$ може наћи такав број η да је $|\dot{q}_{i0}| < \eta$ и да систем при прелазу из положаја O у O' не изађе из области S , равнотежа система је стабилна, јер је увек $|q_i| \leq \rho$. Како је систем конзервативан и склерономан то важи интеграл енергије, па је

$$E_{k0} = U_0 + h, \quad E_k = U + h, \quad \text{тј.} \quad E_k = E_{k0} - (U_0 - U).$$

Како функција U у положају стабилне равнотеже има *maximum*, то је $U_0 - U > 0$. Дамо ли некој координати q_i највећу вредност $|q_i| = \varepsilon$, док остале имају произвољне вредности али по апсолутној вредности мање од ε , онда разлика $U_0 - U$ добија различите вредности P_i . Претпоставимо ли да је P најмања вредност те разлике онда је сигурно $U_0 - U > P$. Ако су и почетне брзине тако мале да је $E_{k0} < P$ онда је $E_k = E_{k0} - P < 0$. Ово не може бити, јер је E_k увек позитивна величина, те и координате q_i не могу достићи граничне вредности ε . Због тога систем не може изаћи из области (S) , што значи да је равнотежа стабилна.

На основу изнетог закључујемо да је систем у стабилној равнотежи када је потенцијална енергија у екстремуму и то у *минимуму*. Према томе је критеријум равнотеже

$$\frac{\partial E_p}{\partial q_i} = 0; \quad \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_i^2} \begin{cases} > 0 & \text{стабилна} \\ = 0 & \text{индиферентна} \\ < 0 & \text{лабилна} \end{cases} \quad (2)$$

На пример, у случају хармонијског осцилатора је $E_p = 1/2 cx^2$, па је услов стабилности $\partial^2 E_p / \partial x^2 = c > 0$.

Код *математичког* (и физичког) *клатна* је

$$E_p = mgl(1 - \cos\varphi); \quad \frac{dE_p}{d\varphi} = mgl \sin\varphi = 0; \quad \left. \begin{matrix} \frac{d^2 E_p}{d\varphi^2} = mgl \cos\varphi > 0 & \text{за } \varphi = 0; \\ < 0 & \text{за } \varphi = \pi. \end{matrix} \right\}$$

У случају система са два степена слободе је

$$E_p = f(x, y) = 1/2 (c_{11} x^2 + 2c_{12} xy + c_{22} y^2),$$

па је услов екстремума функције $f(x, y)$

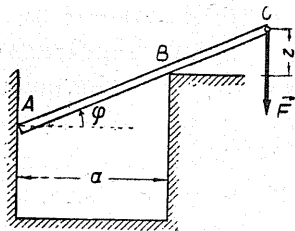
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0.$$

Да би функција $f(x, y)$ била у минимуму морају бити задовољени и услови

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0.$$

Због тога квазиеластични коефицијенти морају задовољавати услове

$$c_{11} > 0; \quad c_{22} > 0; \quad c_{11} c_{22} - c_{12}^2 > 0.$$



Сл. 13.1. — Услов стабилности штапа који се ослања на две тачке

Критеријум стабилности равнотеже (2) примењује се у *статичким проблемима*.

Потенцијална енергија хомогеног штапа ABC , чију тежину занемарујемо, (сл. 13.1.), и њен извод

јесу

$$E_p = Fz = F(l \sin \varphi - a \operatorname{tg} \varphi);$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = F \left(l \cos \varphi - \frac{a}{\cos^2 \varphi} \right) = 0,$$

па је $\cos^3 \varphi = a/l$, те је равнотежа *нестабилна*, јер је $-3Fl \sin \varphi < 0$.

У отпорности материјала примењује се *метода енергије* (Rayleigh-Ritz-ова метода) за одређивање *криптичне силе* аксијално притиснутог штапа*. У овоме случају као критеријум стабилне равнотеже служи израз

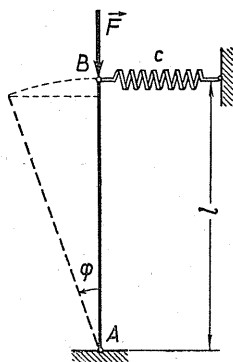
$$\Delta A = A_{dk} - A > 0, \quad (3)$$

где је $A_{dk} = E_p$ деформациони рад (потенцијална енергија) при извијању а A рад аксијалне силе (F).

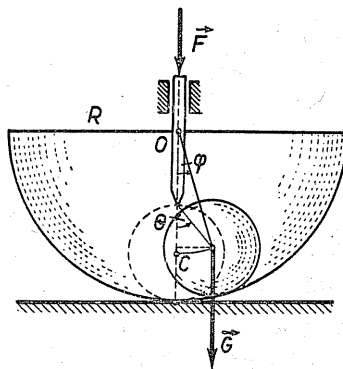
На пример, за случај стуба AB , зглавкасто везаног у A чији крај B придржава хоризонтална опруга, крутости c , (сл. 13.2.), биће:

$$E_p = A_{dk} \approx \frac{1}{2} c (l \varphi)^2, \quad A = Fl(1 - \cos \varphi) = 2Fl \sin^2 \frac{1}{2} \varphi \approx \frac{1}{2} Fl \varphi^2.$$

Из обрасца (3) следи услов $cl > F$, те је критична сила $F_k = cl$.



Сл. 13.2. — Одређивање критичне силе притиснутог штапа



Сл. 13.3. — Southwell-ово експериментално одређивање критичне силе

За експериментално одређивање критичне силе *Саушвил* (R. V. Southwell, Phil. Trans. R.S., London, 1913.) је конструисао модел, (сл. 13.3.). У глаткој шупљој полукугли, полупречника R , налази се у најнижем положају кугла, полупречника r , тежине G , коју притиска сила F преко игле. Када се кугла помери из равнотежног положаја за угао φ , потенцијална енергија биће

$$E_p = G(R-r)(1 - \cos \varphi) - Fs \approx (R-r) \left[G - F \frac{R-2r}{r} \right] \frac{\varphi^2}{2},$$

* Отпорност материјала, чл. 12,5.

јер су

$$(R-r) (1 - \cos \varphi) \approx \frac{1}{2} (R-r) \varphi^2;$$

$$s = r(1 - \cos \theta) - (R-r) (1 - \cos \varphi) \approx \frac{1}{2} [r \theta^2 - (R-r) \varphi^2].$$

Из услова стабилности

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi^2} = G - F \frac{R-2r}{r} > 0$$

следи да је критична сила

$$F_k < \frac{G}{(R/r) - 2}.$$

13.2. Услови стабилности стационарног кретања. — При стационарном кретању јављају се цикличке координате али не и нецикличке брзине. У случају конзервативног система са два степена слободне кретања важи интеграл енергије, па је $E = E_k + E_p$. Ако је генерализована сила која одговара цикличкој координати нула, онда важи један интеграл, јер је генерализовани импулс за ту координату константан. Када се у изразу за кинетичку енергију ставе нецикличке брзине једнаке нули а уместо цикличке брзине уведе циклички интеграл, онда је ова енергија функција само координата те има обележје потенцијалне енергије. На овај се начин добија *модифицирана потенцијална енергија система*

$$E_p^* = E_k^* + E_p,$$

која, према Рауџу (Routh — „*Essay on the Stability of Steady Motion*“, 1877. год.), за испитивање стабилности стационарног кретања има исти значај као и потенцијална енергија обичног кретања. Према томе *услов стабилности стационарног кретања јесте да је модифицирана потенцијална енергија у минимуму.*

На пример, у случају равноравног кретања под утицајем привлачне силе интензитета $F = k r^n$, кинетичка и потенцијална енергија су

$$E_k = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2 r^2), \quad E_p = k \frac{r^{n+1}}{n+1} = -U.$$

Координата φ је цикличка, па из Лагранжевих једначина видимо да важи интеграл површине $r^2 \dot{\varphi} = C$. Како је за стационарно кретање нецикличка брзина $\dot{r} = 0$, то је модифицирана потенцијална енергија

$$E_p^* = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + k \frac{r^{n+1}}{n+1}.$$

Из услова

$$\frac{\partial E_p^*}{\partial r} = -m \frac{C^2}{r^3} + k r^n = 0; \quad \frac{\partial^2 E_p^*}{\partial r^2} = 3m \frac{C^2}{r^4} + k n r^{n-1} = k (n+3) r^{n-1} > 0$$

следи да је услов стабилног кретања $n+3 > 0$, односно $n > -3$.

На исти начин одредили бисмо и услов стабилности обртања диска ако му је угаона брзина већа од критичне, (сл. 12.2. с). Као генералисане координате узмемо R , φ и ψ , где је $\theta = \psi - \varphi$. Тада су енергије:

$$E_k = 1/2 (mv_C^2 + J_c \dot{\psi}^2) = 1/2 m (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 + I^2 \dot{\psi}^2);$$

$$E_p = 1/2 cr^2 = 1/2 c (R^2 + e^2 + 2 Re \cos \theta).$$

Како је генералисана сила $F = -cr$, то је φ цикличка координата, па је циклички интеграл

$$\frac{d}{dt} [m R^2 \dot{\varphi} + m I^2 (\dot{\varphi} + \dot{\theta})] = 0, \quad \text{тј.} \quad R^2 \dot{\varphi} + I^2 (\dot{\varphi} + \dot{\theta}) = h.$$

Цикличка брзина биће

$$\dot{\varphi} = (h - I^2 \dot{\theta}) / (R^2 + I^2).$$

При стационарном кретању је нецикличка брзина $\dot{R} = 0$, па је модифицирана потенцијална енергија

$$E_p^* = 1/2 m [R^2 \dot{\theta}^2 + I^2 (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2] + 1/2 c [R^2 + e^2 + 2 Re \cos \theta] = f(R, \theta).$$

Услови екстремума

$$\frac{\partial E_p^*}{\partial \theta} = -c Re \sin \theta = 0; \quad \frac{\partial^2 E_p^*}{\partial \theta^2} = -c Re \cos \theta > 0$$

показују да мора бити $\sin \theta = 0$, тј. $\theta = 0$ или $\theta = \pi$. Због Лаваловог парадокса је $\theta = \pi$ и $\dot{\theta} = 0$, те је модифицирана потенцијална енергија

$$E_p^* = 1/2 m [(R^2 + I^2)^{-1} \cdot h^2] + 1/2 c [R^2 + e^2 - 2 Re] = f_1(R).$$

Из њених извода

$$\frac{\partial E_p^*}{\partial R} = m [-R h^2 (R^2 + I^2)^{-2}] + cR - ce = 0, \quad h = (R^2 + I^2) \cdot \dot{\theta},$$

$$\frac{\partial^2 E_p^*}{\partial R^2} = -m h^2 [(R^2 + I^2)^{-2} - 4R (R^2 + I^2)^{-3}] + c > 0,$$

$$\dot{\varphi}_{(\theta=\pi)} = \omega; \quad \omega_k = \sqrt{c/m}; \quad \nu = \omega/\omega_k,$$

следе услови стабилности обртања диска

$$\theta = \pi; \quad \nu = \omega/\omega_k > 1; \quad R = e/(1 - \nu^2); \quad (l/e)^2 > [(3\nu^2 + 1)/(\nu^2 - 1)^2].$$

У случају *шешког симетричног гирскопа — зврка*, (сл.12.3.а), пошто је елипсоид инерције обртни, биће $J_1 = J_2$ а како сила $G = Mg$ и отпор зглоба секу фигурну осу то је $\mathfrak{M}_3 = 0$. Помоћу Ојлерових кинематичких и динамичких једначина

$$\omega_1 = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi; \quad J_1 \dot{\omega}_1 - (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 = \mathfrak{M}_1;$$

$$\omega_2 = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi; \quad J_2 \dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1 = \mathfrak{M}_2;$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta; \quad J_3 \dot{\omega}_3 - (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 = \mathfrak{M}_3,$$

добиамо интеграл, јер је $\omega_3=0$, у облику:

$$\omega_3 = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta = c.$$

Кинетичка и потенцијална енергија су

$$E = 1/2 (J_1 \dot{\omega}_1^2 + J_2 \dot{\omega}_2^2 + J_3 \dot{\omega}_3^2) = 1/2 J_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + 1/2 J_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2; \quad E_p = Mgs \cos \theta,$$

па су координате φ и ψ цикличке те добијамо још два интеграла

$$J_1 \dot{\psi} \sin^2 \theta + J_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta = H; \quad J_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) = J_3 c = B.$$

Први показује да је замах система за непокретну осу Oz константан, а други да је замах за покретну осу $O\xi$ такође константан.

Уводећи ове интеграле у кинетичку енергију, јер је $\dot{\psi} = (H - B \cos \theta) / J_1 \sin^2 \theta$ добијамо

$$E_k = 1/2 J_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2 J_1} \frac{(H - B \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + 1/2 J_3 c^2.$$

Како је за стационарно кретање нецикличка брзина $\dot{\theta}=0$, то је модифицирана потенцијална енергија

$$E_p^* = \frac{1}{2 J_1} \frac{(H - B \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + 1/2 J_3 c^2 + Mgs \cos \theta.$$

Услов стационарности је

$$\frac{\partial E_p^*}{\partial \theta} = \frac{(H - B \cos \theta) (B - H \cos \theta)}{J_1 \sin^3 \theta} - Mgs \sin \theta = 0; \quad \omega_s = \frac{J_1 - J_3}{J_1} \Omega \cos \theta + \frac{Mgs}{\Omega},$$

где су уведене ознаке $\dot{\psi} = \Omega$, $\dot{\varphi} = \omega_s$ које представљају константе. У систему координата Ω , ω_s горња једначина представља систем *хипербола*. У случају да је $Mg=0$ тај систем прелази у систем *дјравих линија* кроз тачку O . У оба случаја кретање је *регуларна прецесија*.

Код гироскопа у усправном положају, ($\theta=0$), биће $H=B=J_3c$, па су изводи модифициране потенцијалне енергије

$$\frac{\partial E_p^*}{\partial \theta} = \frac{J_3^2 c^2 (1 - \cos \theta)^2}{J_1 \sin^3 \theta} - Mgs \sin \theta,$$

$$\frac{\partial^2 E_p^*}{\partial \theta^2} = \frac{J_3^2 c^2 (1 - \cos \theta) (2 - 3 \cos \theta + \cos^2 \theta)}{J_1 \sin^4 \theta} - Mgs \cos \theta.$$

Из услова

$$\left[\frac{\partial^2 E_p^*}{\partial \theta^2} \right]_{\theta \rightarrow 0} > 0,$$

помоћу Лопиталовог правила, добијамо услов стабилности овог гироскопа

$$J_3^2 c^2 = L_{\zeta}^2 > 4 J_1 Mgs.$$

Да би обртање било стабилно мора се гироскопу дати велики замах око фигурне осе.

13.3. Стабилност и нестабилност осцилаторног система. —

Код амортизоване осцилације система са једним степеном слободe осциловања када је отпор сразмеран првом степену брзине (**чл. 3.2.**) карактеристична једначина је облика (77 а) са коренима $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$. У случају када је $\delta < \omega$ корени су *конјуговано комплексни*, па је кретање опадајуће хармонијско осциловање облика

$$x = Re^{-\delta t} \cos(pt - \theta_0). \quad (4)$$

Са порастом времена (t) амплитуда опада, па се каже да је кретање *стабилно*. У противном када је $\delta > \omega$ кретање је аperiодичко, то јест *нестабилно*.

За случај осциловања неконзервативног система (**чл. 11.**) форме су

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k; \quad \Phi = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k b_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k; \quad E_p = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k c_{ik} q_i q_k,$$

па добијамо систем диференцијалних једначина (8). Под претпоставком решења у облику (9) карактеристични полином је

$$f(\lambda) = \|a_{ik} \lambda^2 + b_{ik} \lambda + c_{ik}\| = \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu} \lambda^{n-\nu} = 0. \quad (5)$$

Ако је сопствена вредност комплексна, $\lambda = \alpha + i\beta$, онда је и вредност $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ корен карактеристичне једначине те је решење

$$q = Ae^{\lambda t} = Ae^{(\alpha+i\beta)t} = Ae^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t).$$

Када $t \rightarrow \infty$ тада ће $q \rightarrow 0$ само ако је реални део корена *негашиван*. У том случају имамо *опадајуће осциловање* па је осциловање *стабилно*; у противном је, када су корени позитивни или пак конјуговано комплексни са позитивним реалним делом *аperiодичко*, тј. *нестабилно*. Стога се проблем стабилности осцилаторног система своди на испитивање корена његовог карактеристичног полинома. Ако је реални део *негашиван* $\alpha < 0$ интеграл $q(t)$ је ограничен па је *кретање стабилно*, у противном када је $\alpha > 0$ тада је интеграл $q(t)$ неограничен те је *кретање нестабилно*.

а) Једначина првог степена. — Ако је полином првог степена

$$f(x) = A_1 x + A_0 = 0, \quad x = -A_0/A_1$$

онда можемо увек изабрати $A_1 > 0$, па за $x < 0$ мора бити и $A_0 > 0$. Дакле, морају оба коефицијента A_i бити позитивна $A_0 \neq 0, A_1 \neq 0$.

b) *Квадратна једначина.* — У овоме је случају полином облика

$$f(x) = A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0.$$

Нека су x_1 и x_2 корени полинома онда они задовољавају Viète-ове услове

$$x_1 + x_2 = -A_1/A_2, \quad x_1 x_2 = A_0/A_2. \quad (6)$$

Пошто је $f(x) = 0$ то можемо увек изабрати да је коефицијент A_2 позитиван, $A_2 > 0$. Друга два коефицијента зависе од корена једначине.

1° *Оба корена су негативна.* — Када је $x_1 = -\alpha_1$, $x_2 = -\alpha_2$ онда Viète-ови услови (6) постају

$$x_1 + x_2 = -(\alpha_1 + \alpha_2) = -A_1/A_2; \quad x_1 x_2 = \alpha_1 \alpha_2 = A_0/A_2,$$

па пошто је $A_2 > 0$ морају бити и коефицијенти A_1 и A_2 позитивни.

Решавањем једначине добијамо корене

$$x_{1,2} = \frac{-A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - 4A_2A_0}}{2A_2} = -\frac{A_1}{2A_2} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4A_2A_0}{A_1^2}} \right], \quad (7)$$

па да би корени били негативни морају бити задовољени још и ови услови

$$A_1^2 \geq 4A_2A_0, \quad 4A_2A_0/A_1^2 > 0, \quad A_1A_0 > 0.$$

На пример: $x^2 + 5x + 6 = 0$; $A_1 > 0$; $x_1 = -2$ $x_2 = -3$; $25 > 24$; $24/25 > 0$.

2° *Корени су конјуговано комплексни.* — Узећемо да је $A_2 > 0$ и да су корени $x_1 = -\alpha + i\beta$, $x_2 = -\alpha - i\beta$, тада, према (6), добијамо

$$x_1 + x_2 = -2\alpha = -A_1/A_2; \quad x_1 x_2 = x \bar{x} = \alpha^2 + \beta^2 = A_0/A_2,$$

па морају сви коефицијенти A_i бити позитивни. Из (7) следи да мора бити поткорена количина негативна, те су услови

$$A_1 > 0; \quad A_1^2 < 4A_2A_0. \quad (8)$$

На пример: $x^2 + 2x + 2 = 0$; $x = -1 \pm i$; $4 < 8$; $x^2 - 2x + 2 = 0$; $x = 1 \pm i$,

c) *Кубна једначина.* — Полином је облика

$$f(x) = A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0,$$

а корени x_i задовољавају проширене Viète-ове услове

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{A_2}{A_3}; \quad x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{A_1}{A_3}; \quad x_1 x_2 x_3 = -\frac{A_0}{A_3}. \quad (9)$$

Како је $f(x)=0$ то је увек $A_3 > 0$ а остали коефицијенти зависе од корена једначине.

1° Сва три корена су негативна. — Тада су корени $x_i = -\alpha_i < 0$, $i=1, 2, 3$, па из (9) следи

$$-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = -A_2/A_3 < 0; \quad A_3 > 0; \quad A_2 > 0;$$

$$\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 = A_1/A_3 > 0; \quad A_1 > 0;$$

$$-\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -A_0/A_3 < 0; \quad A_0 > 0.$$

Дакле, да би корени били негативни морају сви коефицијенти A_i полинома бити позитивни.

На пример, $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+1)(x+2)(x+3) = 0$.

2° Један корен је негативан, остала два су конјуговано комплексна. — Нека су корени $x_1 = -\alpha_1$, $x_{2,3} = -\alpha_2 \pm i\beta_2$, онда из (5) следи

$$x_1 + x_2 + x_3 = -(\alpha_1 + 2\alpha_2) = -A_2/A_3 < 0; \quad A_3 > 0; \quad A_2 > 0;$$

$$\sum x_i x_j = 2\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 = A_1/A_3 > 0; \quad A_1 > 0;$$

$$x_1 x_2 x_3 = -\alpha_1 (\alpha_2^2 + \beta_2^2) = -A_0/A_3; \quad A_0 > 0.$$

Дакле, да би један корен био негативан и реални делови конјугованих корена негативни потребно је да су сви коефицијенти полинома позитивни.

На пример, $x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = (x+2)(x^2 + 2x + 2) = 0$, $x_1 = -2$; $x_{2,3} = -1 \pm i$.

Услов $A_i > 0$ је само потребан али није довољан пошто могу бити реални делови комплексних корена позитивни или једнаки нули (тј. чисто имагинарни корени).

На пример, $x^3 + x + 10 = (x+2)(x^2 - 2x + 5) = 0$; $x_1 = -2$; $x_{2,3} = 1 \pm 2i$;

$$x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = (x+2)(x^2 + 4) = 0; \quad x_1 = -2; \quad x_{2,3} = -2i;$$

Да бисмо дошли до још једног услова поделимо $f(x)=0$ са A_3 , онда једначина постаје

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = (x+p)(x^2 + qx + r) = 0,$$

где су

$$p+q=a; \quad pq+r=b; \quad pr=c; \quad a > 0; \quad b > 0; \quad c > 0; \quad A_i > 0.$$

Формирајмо сада израз

$$ab - c = q(p^2 + pq + r) = q(p^2 + b).$$

Ако је $ab - c > 0$ онда је $q > 0$ јер је $p^2 + b > 0$, пошто је $b > 0$. Због негативног корена $x_1 = -p$ мора бити $p > 0$ па како је $c > 0$ мора бити и $r > 0$ што значи да је квадратни трином $x^2 + qx + r$ са позитивним коефицијентима па су му корени или реални или конјуговано комплексни са негативним реалним делом. Дакле, да би корени кубне једначине били негашивни или један негашиван а два конјуговано комплексна са негашивним реалним делом морају бити испуњени услови

$$A_i > 0; \quad ab - c > 0, \quad \text{то јест} \quad A_2 A_1 - A_3 A_0 = \begin{vmatrix} A_2 & A_0 \\ A_3 & A_1 \end{vmatrix} > 0. \quad (10)$$

На пример, у наведеним примерима су $A_i > 0$, али је други услов

$$\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 60 > 0; \quad \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 20 > 0; \quad \begin{vmatrix} 0 & 10 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -10 < 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

d) Једначина четвртог степена. — Полином је облика

$$f(x) = A_4 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0,$$

а корени x_i задовољавају проширене Viète-ове услове

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -A_3/A_4; \\ x_1(x_2 + x_3 + x_4) + x_2(x_3 + x_4) + x_3 x_4 &= A_2/A_4; \\ x_1(x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4) + x_2 x_3 x_4 &= -A_1/A_4; \\ x_1 x_2 x_3 x_4 &= A_0/A_4. \end{aligned} \quad (11)$$

Због $f(x) = 0$ увек можемо узети да је $A_4 > 0$; остали коефицијенти зависе од облика корена једначине.

1^o Сви корени су негашивни. — Овде су $x_i = -\alpha_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, па из (11) следи

$$\begin{aligned} \sum x_i &= -\sum \alpha_i = -A_3/A_4 < 0; \quad A_4 > 0; \quad A_3 > 0; \\ \sum x_i x_j &= \sum \alpha_i \alpha_j = A_2/A_4 > 0; \quad A_2 > 0; \\ \sum x_i x_j x_k &= -\alpha_1(\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_3 \alpha_4) - \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 < 0; \quad A_1 > 0; \\ \prod x_i &= \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 > 0; \quad A_0 > 0. \end{aligned}$$

Потребан је услов да су сви коефицијенти позитивни.

На пример, $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 = 0$; $x_i = -1; -2; -3; -4$.

2° Корени су конјуговано комплексни. — У овом су случају

$$x_{1,2} = -\alpha \pm i\beta; \quad x_{3,4} = -\gamma \pm i\delta,$$

па Viète-ови обрасци доказују

$$\sum x_i = -2(\alpha + \gamma) = -A_3/A_4 < 0; \quad A_4 > 0; \quad A_3 > 0;$$

$$\sum x_i x_j = \alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\gamma + \gamma^2 + \delta^2 > 0; \quad A_2 > 0;$$

$$\sum x_i x_j x_k = -2[(\alpha^2 + \beta^2)\gamma + (\gamma^2 + \delta^2)\alpha] < 0; \quad A_1 > 0;$$

$$\prod x_i = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) > 0; \quad A_0 > 0.$$

да морају коефицијенти бити позитивни. Овај је услов потребан али није довољан.

На пример, $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 30x + 27 = 0$; $x_i = -1; -3; 1 \pm 3i$;

$$x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0; \quad x_i = -1; -2; \pm i.$$

Да изведемо други потребан услов поделимо $f(x) = 0$ са A_4 , онда ћемо имати:

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 + px + q)(x^2 + rx + s) = 0,$$

где су

$$p + r = a; \quad pr + q + s = b; \quad ps + qr = c; \quad qs = d.$$

Како су $A_i > 0$ то су $a, b, c, d > 0$. Формирајмо израз

$$(abc - c^2 - a^2 d) = D = pr[(q - s)^2 + (p + r)(ps + qr)] = pr[q - s]^2 + ac.$$

Ако је $D > 0$ мора бити $pr > 0$ јер су $a > c > 0$. Како је $pr = r(a - r) = ar - r^2 > 0$, $a > 0$ мора бити $r > 0$, па је и $p > 0$. Због $d = qs > 0$ морају q и s бити истог знака, а како је $c = ps + qr > 0$ и $p > 0$, $r > 0$ мора бити $q > 0$ и $s > 0$. Пошто су, дакле, $p > 0$, $q > 0$, $r > 0$ и $s > 0$ то морају тринومي $x^2 + px + q = 0$ и $x^2 + rx + s = 0$ имати негативне корене или конјуговано комплексне са негативним реалним делом.

Дакле, да би корени једначине четвртог степена имали реалне делове негативне потребно је и довољно да буду испуњени следећи услови:

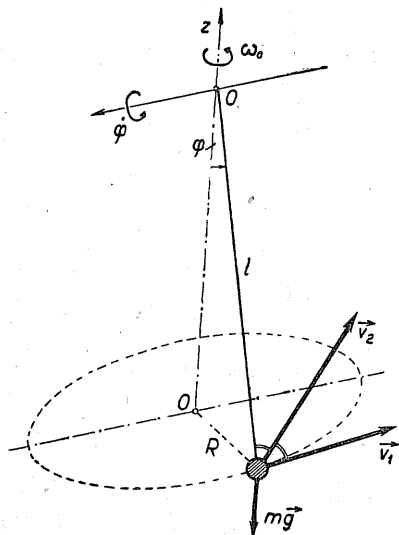
$$A_i > 0; \quad A_3 A_2 A_1 - A_3^2 A_0 - A_1^2 A_4 = \begin{vmatrix} A_3 & A_1 & 0 \\ A_4 & A_2 & A_0 \\ 0 & A_3 & A_1 \end{vmatrix} > 0, \quad (12)$$

$$abc - c^2 - a^2 d > 0,$$

На пример, за наведене примере су:

$$A_i > 0; \begin{vmatrix} 10 & 50 & 0 \\ 1 & 35 & 24 \\ 0 & 10 & 50 \end{vmatrix} = 12600 > 0; \begin{vmatrix} 2 & 30 & 0 \\ 1 & 4 & 27 \\ 0 & 2 & 30 \end{vmatrix} = -768 < 0; \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Помоћу ових критеријума можемо одредити услове стабилности конусног клатна (сл. 13.4.). Нека се клатно обрће око вертикалне Oz



Сл. 13.4. — Стабилност конусног клатна

осе константном угаоном брзином ω_0 онда тачка m има две брзине: обимну $v_1 = R\omega_0 = l\omega_0 \sin \varphi \approx l\omega_0 \varphi$, и бочну $v_2 = l\dot{\varphi}$. Вектори ових брзина су управни, па је квадрат брзине $v^2 = v_1^2 + v_2^2$.

Према томе су кинетичка и потенцијална енергије малих осцилација

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 (\omega_0^2 \varphi^2 + \dot{\varphi}^2);$$

$$E_p = mgl(1 - \cos \varphi) \approx \frac{1}{2} mgl \varphi^2,$$

па Лагранжева једначина даје диференцијалну једначину

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = ml^2 \ddot{\varphi} -$$

$$- ml^2 \omega_0^2 \varphi + mgl \varphi = \ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} - \omega_0^2 \right) \varphi = 0.$$

Претпоставимо решење у облику $\varphi = A e^{\lambda t}$ онда је карактеристична једначина $\lambda^2 + k = 0$. Овде су $A_1 = 1$, $A_0 = k$. За $k > 0$, тј. $g/l > \omega_0^2$, кретање је *стабилно* а за $k < 0$ је *лабилно*. Гранични случај $k = 0$, тј. $\sqrt{g/l} = \omega_0 = \omega_k$, представља *критичну* угаону брзину клатна.

13.4. Routh-ов критеријум. — За карактеристични полином

$$f(x) = \sum_0^n A_{n-\nu} x^{n-\nu} = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_k x^k + \dots$$

$$+ A_1 x + A_0 = 0, \quad A_n > 0, \quad (13)$$

са коренима x_i важе проширени Viète-ови обрасци:

$$\begin{aligned} \sum x_i &= x_1 + x_2 + \dots + x_n = -A_{n-1}/A_n, \\ \sum x_i x_j &= x_1(x_2 + x_3 + \dots + x_n) + x_2(x_3 + \dots + x_n) + \dots + x_{n-1}x_n = A_{n-2}/A_n, \\ \sum x_i x_j x_k &= -A_{n-3}/A_n, \quad \sum C_n^r = (-1)^r A_{n-r}/A_n; \\ \prod x_i &= (-1)^n A_0/A_n, \end{aligned} \quad (14)$$

па бисмо поступно могли извести услове о стабилности. Један је услов сигуран да су сви коефицијенти A_i полинома позитивни, али је он само потребан али није и довољан, јер према Декартовом правилу из алгебре тада нема мена знакова између коефицијената полинома па нема ни позитивних корена* али могу бити комплексни корени са позитивним реалним делом. Због тога се морају испитати и ти други услови.

У теорији алгебарских полинома важну улогу игра *Sturm-ова* теорема: „Број корена полинома $f(x)$ у размаку $[a, b]$ једнак је броју разлике броја мена знакова у реду *Sturm-ових* функција при порасту x од a до b “. Нека је $f(x)=0$ полином n -ог реда са реалним коефицијентима и нека нема степених корена, тј. нека је узајамно прост са полиномом $f'(x)=0$. На ова два полинома применимо Еуклидов алгоритам одређивања највећег заједничког делиоца стим што се остатак $r(x)$ замењује негативном вредности. Тако ће бити

$$\begin{aligned} f(x) &= q(x)f'(x) - f_1(x); & f_1(x) &= -r_1(x); \\ f'(x) &= q_1(x)f_1(x) - f_2(x); & f_2(x) &= -r_2(x); \\ &\dots & & \\ f_{m-2}(x) &= q_{m-1}(x) \cdot f_{m-1}(x) - f_m(x); & f_m(x) &= -r = \text{const.} \end{aligned} \quad (15)$$

Функције

$$f(x); f'(x); f_1(x); \dots; f_{m-1}(x); f_m = \text{const.} \quad (16)$$

образују ред *Sturm-ових* функција; f_m је константан број ако су $f(x)$ и $f'(x)$ узајамно прости, то јест ако немају заједничких корена.

За две вредности $x=a$ и $x=b$ треба одредити предзнаке *Sturm-овим* функцијама и број мена m_a и m_b па је број корена у томе размаку једнак $m_a - m_b$.

* Број позитивних корена полинома (13) при $A_n > 0$ једнак је или за паран број мањи од броја промене знакова његових коефицијената. На пример, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ има три мене знакова (+ - + -) па је број позитивних корена 3 или 1. Корени су $x_i = 1; 2; 3$. Код полинома $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ има две мене, па је број позитивних корена или 2 или 0; они су 2; -1 и 3.

На пример, за полином $f(x) = x^3 - 11x^2 + 38x - 40$, је $f'(x) = 3x^2 - 22x + 38$, па је

$$f : f', \text{ односно } 3f : f' \quad \begin{array}{l} 3x^3 - 33x^2 + 114x - 120 \quad \left| \begin{array}{l} 3x^2 - 22x + 38 = f' \\ x \end{array} \right. \\ \hline 3x^3 - 22x^2 + 38x \\ r_1 = -11x^2 + 76x - 120 \\ f_1 = 11x^2 - 76x + 120 \end{array}$$

$$f' : f_1, \text{ односно } 11f' : f_1 \quad \begin{array}{l} 33x^2 - 242x + 418 \quad \left| \begin{array}{l} 11x^2 - 76x + 120 = f_1 \\ 3 \end{array} \right. \\ \hline 33x^2 - 228x + 360 \\ r_2 = -14x + 58 \\ f_2 = 14x - 58 = 2(7x - 29) \end{array}$$

$$f_1 : f_2, \text{ односно } 7f_1 : f_2 \quad \begin{array}{l} 77x^2 - 532x + 840 \quad \left| \begin{array}{l} 7x - 29 = f_2 \\ 11x \end{array} \right. \\ \hline r_3 = -213x + 840 \\ f_3(x) = 213x - 840 = 3(71x - 280) \end{array}$$

$$f_2 : f_3 \text{ или } 71f_2 : f_3 \quad \begin{array}{l} 497x - 2059 \quad \left| \begin{array}{l} 71x - 280 = f_3 \\ 7 \end{array} \right. \\ \hline r_4 = -99 \\ f_4 = 99 \quad | \quad 99 = f_4. \end{array}$$

Приликом дељења вршено је множење односно скраћивање јер не утиче на предзнак

Таблица знакова је

a	$f(x)$	$f'(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	f_4	m	Δ
0	-	+	+	-	-	+	3	
1	-	+	+	-	-	+	3	0
3	+	-	-	-	-	+	2	1
6	+	+	+	+	+	+	0	3 2

Између 0 и 1 нема корена, између 0 и 3 има један корен, између 0 и 6 има три корена а између 3 и 6 има 2 корена. Корени су $x_1 = 2, 4$ и 5 .

Routh-ов критеријум оснива се на *Sturm-овој теорему* и *раздељивању корена*. Уместо x узмимо комплексну променљиву z онда је полином (13):

$$w = f(z) = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \dots + A_1 z + A_0 = \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu} z^{i-\nu} = 0 \quad (16)$$

где је w функција комплексне променљиве $z = x + iy = R e^{i\varphi}$. Она се може апроксимирати само првим чланом $A_n z^n = A_n R^n e^{in\varphi}$.

Ако је $z = -x + iy$ онда сви корени морају да леже лево од имагинарне осе (iy) у полукругу довољно великог полупречника (R). Тачки z одговара нека тачка криве $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Узме ли се тачка $z = iy$, то јест на имагинарној осе, онда је комплексна функција

$$w = f(z) = f(iy) = u + iv = i^n (A_n y^n - i A_{n-1} y^{n-1} - A_{n-2} y^{n-2} + \dots).$$

Како $i^n = (e^{i\pi/2})^n = e^{n\pi i/2}$ показује само ротацију, то се параметарске једначине криве $w = f(z)$ могу написати у облику полинома

$$\begin{aligned} u &= P_n(y) = A_n y^n - A_{n-2} y^{n-2} + A_{n-4} y^{n-4} - \dots, \\ v &= P_{n-1}(y) = -A_{n-1} y^{n-1} + A_{n-3} y^{n-3} - A_{n-5} y^{n-5} + \dots. \end{aligned} \quad (17)$$

Увек се може претпоставити да је $A_n > 0$, онда при $y \rightarrow \infty$ и $P_n \rightarrow \infty$ а $P_{n-1} \rightarrow -\infty$, па је коефицијент $A_{n-1} > 0$. Ако се поделе полиноми P_n и P_{n-1} биће

$$v = P_{n-1}(y) = -A_{n-1} y^{n-1} + A_{n-3} y^{n-3} - A_{n-5} y^{n-5} + \dots,$$

Увек се може претпоставити да је $A_n > 0$, онда при $y \rightarrow \infty$ и $P_n \rightarrow \infty$ а $P_{n-1} \rightarrow -\infty$, па је коефицијент $A_{n-1} > 0$. Ако се поделе полиноми P_n и P_{n-1} биће

$$P_n = -\frac{A_n}{A_{n-1}} y P_{n-1} + P_{n-2} = a_n y P_{n-1} + P_{n-2}.$$

Тада мора бити, због горњих услова, и $a_n < 0$. Делењем полинома P_{n-1} полиномом P_{n-2} биће

$$P_{n-1} = a_{n-1} y P_{n-2} + P_{n-3}.$$

Како при $y \rightarrow \infty$, $P_{n-1} \rightarrow -\infty$ и $P_{n-2} \rightarrow -\infty$ то мора бити коефицијент $a_{n-1} > 0$. Ако се продужи делење полинома P_{n-2} са P_{n-3} биће коефицијент $a_{n-2} < 0$, а затим $a_{n-3} > 0$, $a_{n-4} < 0$, \dots . Овај закључак представља *Routh-ов кришеријум**: Да би сви корени карактеристичне једначине (13) са позитивним коефицијентима имали реалне делове негативне потребно је и довољно да су при сукцесивном делењу полинома P_n , P_{n-1} , \dots , количници за позитивно у алтернативно променљивог знака, стиме што је први количник (a_n) негативан. Количници a_i могу се изразити помоћу a_i коефицијената A_i .

У случају једначине четвртог степена са реалним коефицијентима

$$f(z) = A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0 = 0$$

за $z = iy$ добијају се полиноми

$$P_4 = A_4 y^4 - A_2 y^2 + A_0; \quad P_3 = -A_3 y^2 + A_1 y.$$

* J.E.G. Routh — „A treatise on the stability of a given state of motion“. London, 1887.

Како при $y \rightarrow \infty$ и $P_4 \rightarrow \infty$, а $P_3 \rightarrow -\infty$ то су $A_4 > 0$ и $A_3 > 0$. Деобом ових полинома добијамо да је

$$P_4 = -\frac{A_4}{A_3} y P_3 + \left(\frac{A_1 A_4}{A_3} - A_2 \right) y^2 + A_0, \quad \text{то јест} \quad a_4 = -\frac{A_4}{A_3} < 0.$$

Деобом полинома P_3 и P_2 добија се

$$P_3 = \frac{-A_3^2}{A_1 A_4 - A_3 A_2} y P_2 + \frac{A_1^2 A_4 - A_1 A_2 A_3 + A_0 A_3^2}{A_1 A_4 - A_3 A_2} = a_3 y P_2 + P_1.$$

Како за $y \rightarrow \infty$ и $P_3 \rightarrow -\infty$ и $P_2 \rightarrow -\infty$ то мора бити $a_3 > 0$, то јест мора бити

$$a_3 = -A_3^2 / (A_1 A_4 - A_3 A_2) > 0, \quad \text{то јест} \quad A_1 A_4 - A_2 A_3 < 0.$$

Новом деобом полинома P_2 са P_1 добија се

$$P_2 = \frac{(A_1 A_4 - A_3 A_2)^2}{(A_1^2 A_4 - A_1 A_2 A_3 + A_0 A_3^2) A_3} y P_1 + P_0 = a_2 y P_1 + P_0; \quad P_0 = A_0.$$

Како при $y \rightarrow \infty$, $P_2 \rightarrow -\infty$ а $P_1 \rightarrow -\infty$ мора бити:

$$a_2 = (A_1 A_4 - A_3 A_2)^2 / (A_1^2 A_4 - A_1 A_2 A_3 + A_0 A_3^2) < 0$$

то јест

$$A_1^2 A_4 - A_1 A_2 A_3 + A_0 A_3^2 < 0; \quad A_0 > 0.$$

Routh је ове количнике изрази помоћу схеме

A_4	$+A_2$	A_0	$b_1 = -A_4 A_1 + A_2 A_2;$	(18)
A_3	$-A_1$	0	$b_2 = A_3 A_0;$	
b_1	b_2	b_3	$c_1 = -A_3 b_2 + b_1 A_1;$	
c_1	c_2		$c_2 = -A_3 b_3$	

која се назива *Routh-овом схемом*. Помоћу ове схеме може се његов критеријум стабилности овако изразити: *Карактеристични полином је стабилан ако су елементи прве колоне Routh-ове схеме позитивни.*

На самој схеми је показан начин одређивања коефицијената. Ако је неки елемент једнак нули треба узети малу вредност ϵ па предужити поступак формирања схеме.

На пример, код полинома $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$ су коефицијенти позитивни ($A_i > 0$), па је схема

1	11	0	Коефицијенти прве колоне схеме су позитивни, па су корени $x_i = -1; -2$ и -3 , те је заиста полином стабилан. Сменом x са $z = iy$ и дељењем добијамо
6	6	0	
60	0	0	
360	0		

$$f(x = z = iy) = i^3 (y^3 - 11y) + (-6y^2 + 6) = i^3 P_3 + P_2,$$

$$P_3 : P_2 \quad \left. \begin{array}{l} y^3 - 11y \\ P_1 = -10y \end{array} \right| \begin{array}{l} -6y^2 + 6 \\ -\frac{1}{6}y \end{array}; \quad P_2 : P_1 \quad \left. \begin{array}{l} -6y^2 + 6 \\ P_0 = 6 \end{array} \right| \begin{array}{l} -10y \\ \frac{6}{10}y \end{array}; \quad P_1 : P_0 \quad \left. \begin{array}{l} -10y \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} 6 \\ -\frac{10}{6}y \end{array}$$

$$a_3 = -\frac{1}{6} < 0 \qquad a_2 = \frac{6}{10} > 0 \qquad a_1 = -\frac{10}{6} < 0.$$

На пример, за полином четвртог степена

$$f(x) = x^4 + 6x^3 + 18x^2 + 24x + 16 = 0 \quad \text{су} \quad A_i > 0$$

и биће:

1	18	16	0	$x_i = -1 \pm i; \quad -2 \pm 2i$ $f(iy) = (y^4 - 18y^2 + 16) + i^3 (-6y^3 + 24y) = P_4 + iP_3 = 0;$
6	24	0	0	
84	96	0		
1440	0			

па дељењем добијамо количнике

			$y^4 - 18y^2 + 16$	$-6y^3 + 24y$	$-\frac{1}{6}y$
		$-14y^2 + 16$	$\frac{120}{7}y$	$-14y^2 + 16$	$-\frac{1}{6}y$
	$\frac{120}{7}y$	16	$-\frac{49}{60}y$	$\frac{6}{14}y$	$-\frac{1}{6}y$
	0	$\frac{15}{14}y$			$-\frac{1}{6}y$
	$a_1 = \frac{15}{14} > 0$	$a_2 = -\frac{49}{60} < 0$	$a_3 = \frac{6}{14} > 0$	$a_4 = -\frac{1}{6} < 0$	

13.5. Hurwitz-ов критеријум. — Hurwitz је коефицијенте a_i изразио помоћу детерминанти. За једначину четвртог степена биће

$$a_4 = -\frac{A_4}{A_3} < 0; \quad A_4 > 0; \quad \Delta_1 = A_3 > 0;$$

$$a_3 > 0; \quad A_1 A_4 - A_2 A_3 < 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_3 & A_1 \\ A_4 & A_2 \end{vmatrix} > 0;$$

$$a_2 < 0; \quad A_1^2 A_4 - A_1 A_2 A_3 + A_0 A_3^2 < 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_3 & A_1 & 0 \\ A_4 & A_2 & A_0 \\ 0 & A_3 & A_1 \end{vmatrix} > 0.$$

Hurwitz је ове детерминанте назвао *Routh-овим детерминантима*.

За полином n -ог степена детерминанте се могу написати скупно као једна детерминанта

$$A_i > 0; \quad \Delta_k > 0; \quad \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} A_{n-1} & A_{n-3} & A_{n-5} & \cdots & 0 \\ A_n & A_{n-2} & A_{n-4} & \vdots & 0 \\ \vdots & A_{n-1} & A_{n-3} & \vdots & 0 \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & A_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_1 \end{vmatrix} > 0 \quad (19)$$

па Hurwitz-ов* критеријум гласи: *Да би корени карактеристичног полинома имали негативне реалне делове потребно је и довољно да су сви коефицијенти полинома позитивни и да су $n-1$ Routh-ове детерминанте позитивне.*

На пример, за полином $f(x) = x^4 + 6x^3 + 18x^2 + 24x + 16 = 0$ биће

$$A_i > 0; \quad \Delta_{-1} = \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 24 & 0 \\ 1 & 18 & 16 \\ 0 & 6 & 24 \end{vmatrix} = 1440 > 0; \quad \Delta_1 = 6 > 0; \quad \Delta_2 = 84 > 0.$$

На пример, за $f(x) = x^5 + 8x^4 + 25x^3 + 40x^2 + 34x + 12 = 0$ биће

$$\begin{array}{r|l} 1 & 25 & 34 & 0 \\ 8 & 40 & 12 & 0 \\ 160 & 260 & 0 & 0 \\ 4320 & 1920 & 0 & 0 \\ 102 \cdot 10^3 & & 0 & \end{array} \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 8 & 40 & 12 & 0 \\ 1 & 25 & 34 & 0 \\ 0 & 8 & 40 & 12 \\ 0 & 1 & 25 & 34 \end{vmatrix} = 102000 > 0;$$

$\Delta_1 = 8 > 0; \quad \Delta_2 = 160 > 0; \quad \Delta_3 = 4320 > 0;$ Корени су $-1; -2; -3; -1 \pm i$.

* A. Hurwitz — *Mathematische Annalen*, (46); 1895.

За полином $f(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 30x + 27 = 0$, биће

$$A_i > 0; \quad \begin{array}{c|ccc} 1 & 4 & 27 & 0 \\ 2 & 30 & 0 & 0 \\ -22 & 54 & 0 & \\ \hline -768 & & & \end{array} \quad x_i = \begin{array}{l} -1 \\ -3 \\ 1 \pm 3i \end{array} \quad \Delta_3 = \begin{array}{c|cc|c} 2 & 30 & 0 \\ \hline 1 & 4 & 27 \\ \hline 0 & 2 & 30 \end{array} = -768 < 0;$$

$$\Delta_1 = 2 > 0; \quad \Delta_2 = -22 < 0.$$

На пример, за полином шестог степена

$$f(x) = x^6 + 5x^5 + 20x^4 + 20x^3 + 32x^2 + 32x + 16 = 0$$

биће:

$$A_i > 0; \quad \Delta_5 = \begin{array}{c|ccc|cc} 5 & 20 & 32 & 0 & 0 \\ 1 & 20 & 32 & 16 & 0 \\ \hline 0 & 5 & 20 & 32 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 20 & 32 & 16 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 20 & 32 \end{array} = -17472 < 0; \quad x_i = \begin{array}{l} -1 \\ -2 \\ \pm 2i \\ -1 \pm i \end{array}$$

$$\Delta_1 = 5 > 0; \quad \Delta_2 = 80 > 0; \quad \Delta_3 = 960 > 0; \quad \Delta_4 = -9984 < 0$$

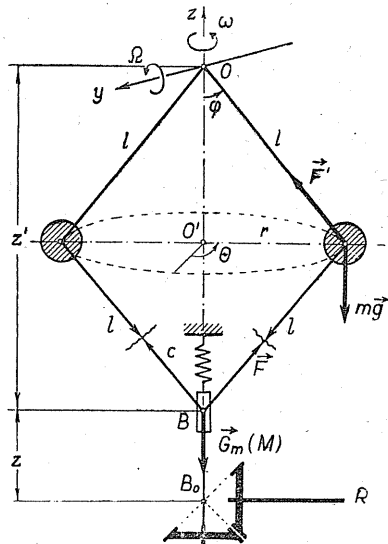
$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 20 & 32 & 16 \\ 5 & 20 & 32 & 0 \\ 80 & 128 & 80 & 0 \\ \hline 960 & 2160 & 0 & \\ \hline -49 & 920 & & \end{array}$$

13.6. Стабилност стационарног кретања Ватовог регулатора.

— Средиште кугле Ватовог регулатора има две међусобно управне брзине: обимну $v_1 = r \dot{\theta} = l \dot{\theta} \sin \varphi$ услед обртања око вертикалне $z - z$ осе, (сл. 13.5.), и бочну $v_2 = l \dot{\varphi}$ услед подизања кугле. Положај огрлице („муфа“) M можемо одредити у односу на најнижи положај координатом $z = \overline{OB_0} - \overline{OB} = 2l(1 - \cos \varphi)$, па је брзина подизања муфа

$$\dot{z} = 2l \dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Узимајући у обзир масе кугли, (m), муфа (M), опругу и редуковани момент инерције J^* машине на осу регулатора $z - z$, кинетичка и потенцијална енергија и функција расипања биће:



Сл. 13.5. — Услови стабилности стационарног кретања Watt-овог регулатора

$$E_k = [ml^2(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + \dot{\varphi}^2)] + 2Ml^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + 1/2 J^* \dot{\theta}^2, \quad (20)$$

$$E_p = 2mgl(1 - \cos \varphi) + 2Mgl(1 - \cos \varphi) + 2cl^2(1 - \cos \varphi)^2, \quad (21)$$

$$\Phi = 1/2 b\dot{z}^2 = 2bl^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi. \quad (22)$$

Лагранжеве једначине дају систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} (2m + 4M \sin^2 \varphi) l^2 \ddot{\varphi} - [m \dot{\theta}^2 + 2M \dot{\varphi}^2] l^2 \sin 2\varphi + \\ + 2gl(m + M) \sin \varphi + 4cl^2(1 - \cos \varphi) \sin \varphi + 4bl^2 \dot{\varphi} \sin^2 \varphi = 0, \quad (23) \\ (2ml^2 \sin 2\varphi) \dot{\varphi} \dot{\theta} + (J^* + 2ml^2 \sin^2 \varphi) \ddot{\theta} = \mathfrak{M}^*. \end{aligned}$$

Како је координата θ цикличка то за случај стационарног обртања ставимо да је цикличка брзина константна $\dot{\theta} = \omega_0$ а нецикличка брзина $\dot{\varphi} = 0$, $\varphi = \varphi_0$, тада из (23) добијамо да је $\mathfrak{M}^* = 0$ и услов

$$-ml\omega_0^2 \sin 2\varphi_0 + 2g(m + M) \sin \varphi_0 + 4cl(1 - \cos \varphi_0) \sin \varphi_0 = 0, \quad (24)$$

па је услов стационарности

$$\mathfrak{M}^* = 0; \quad \cos \varphi_0 = [(m + M)g + 2cl]/(m\omega_0^2 + 2c)l. \quad (25)$$

Ако се стање стационарног обртања поремети услед прираштаја момента $d\mathfrak{M}/d\varphi = u$ онда ће се променити и угао φ и угаона брзина ω_0 за мале величине w и ε

$$\dot{\theta} = \omega = \omega_0 + w, \quad \varphi = \varphi_0 + \varepsilon, \quad \varepsilon^2 \approx 0, \quad w^2 \approx 0$$

па су

$$\ddot{\theta} = \dot{\omega} = \dot{w}; \quad \omega^2 \approx \omega_0^2 + 2\omega_0 w; \quad \dot{\varphi} = \dot{\varepsilon}; \quad \ddot{\varphi} = \ddot{\varepsilon}.$$

Како су

$$\begin{aligned} \sin \varphi \approx \sin \varphi_0 + \varepsilon \cos \varphi_0; \quad \cos \varphi \approx \cos \varphi_0 - \varepsilon \sin \varphi_0, \\ u = d\mathfrak{M}/d\varphi = \Delta \mathfrak{M}/\varepsilon; \quad \Delta \mathfrak{M} = u\varepsilon; \quad \varepsilon^2 \approx 0; \quad w\varepsilon \approx 0, \\ \sin^2 \varphi \approx \sin^2 \varphi_0 + \varepsilon \sin 2\varphi_0; \quad \sin 2\varphi \approx \sin 2\varphi_0 + 2\varepsilon \cos 2\varphi_0; \end{aligned}$$

то Лагранжеве једначине постају

$$\left| \begin{aligned} A \ddot{\varepsilon} + B \dot{\varepsilon} + C\varepsilon - D w = 0; \\ J_0 \dot{w} = -u\varepsilon, \end{aligned} \right. \quad (26)$$

где су, с обзиром на услов стационарности (25), константе

$$\begin{aligned} A &= (2m + 4M \sin^2 \varphi_0) l^2; \quad B = 4bl^2 \sin^2 \varphi_0; \\ C &= 2m\omega_0^2 l^2 (\sin^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0) + 2gl(M + m) \cos \varphi_0 + \\ &\quad + 4cl^2 (\cos \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0), \\ D &= 2ml^2 \omega_0 \sin 2\varphi_0, \\ J_0 &= J^* + 2ml^2 \sin^2 \varphi_0. \end{aligned} \quad (26')$$

Претпостављајући решења једначина (26) у облику

$$\varepsilon = C_1 e^{\lambda t}, \quad w = C_2 e^{\lambda t}$$

биће карактеристична једначина облика

$$J_0 (A\lambda^3 + B\lambda^2 + C\lambda) + D u = A_3 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_1 \lambda + A_0 = 0.$$

Како су сви коефицијенти $A_i > 0$ то из Routh-ове детерминанте одређујемо услов стабилности

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} BJ_0 & Du \\ AJ_0 & CJ_0 \end{vmatrix} = J_0 (BCJ_0 - ADu) > 0$$

у облику

$$B > ADu / CJ_0$$

односно

$$b > \frac{ADu}{4CJ_0 l^2 \sin^2 \varphi_0}. \quad (27)$$

Ако се занемари маса муфа ($M = 0$) и опруга ($c = 0$) услов (27) постаје

$$b > \frac{ml\omega_0 u \cos \varphi_0}{[J_0 (g \cos \varphi_0 - \omega_0^2 l \cos 2\varphi_0) \sin \varphi_0]}. \quad (28)$$

ПРИМЕРИ

13.1. Тешки штап AB може да се обрће око зглоба A . У тачки B придржава га нерастегљиво уже које је пребачено преко малог котура K и на чијем крају виси терет G_2 , (сл. 13.6.).

Одредити карактер равнотеже штапа.

[Решење. — Потенцијална енергија је

$$E_p = \frac{1}{2} G_1 l \cos \varphi + G_2 s = \frac{1}{2} G_1 l \cos \varphi + 2 G_2 l \sin \frac{1}{2} \varphi,$$

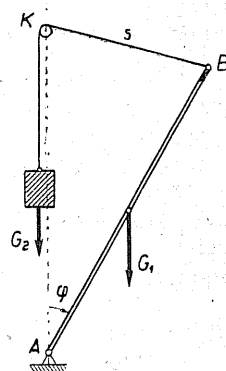
па су њени изводи

$$dE_p / d\varphi = [-G_1 l \sin \frac{1}{2} \varphi + G_2 l] \cos \frac{1}{2} \varphi = 0,$$

$$d^2 E_p / d\varphi^2 = -\frac{1}{2} G_1 l \cos^2 \frac{1}{2} \varphi -$$

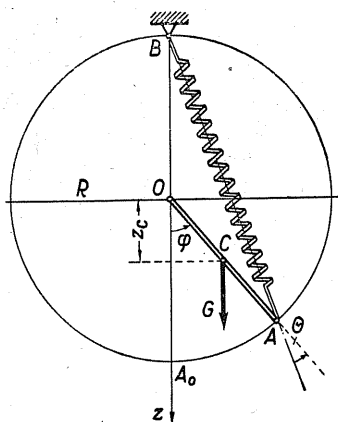
$$-\frac{1}{2} [-G_1 l \sin \frac{1}{2} \varphi + G_2 l] \sin \frac{1}{2} \varphi.$$

Услови равнотеже су: $\varphi = \pi$ или $\sin(\varphi/2) = G_2/G_1$. Ако је задовољен други услов, то јест ако постоји равнотежа у нагнутом положају штапа, онда је иста *нестабилна* а вертикални равнотежни положај је *стабилан*. Међутим, ако тај услов није испуњен, онда је вертикални положај равнотеже *нестабилан*].



Сл. 13.6. — Одређивање карактера равнотежног положаја штапа

13.2. Одредити стабилни равнотежни положај физичког клатна облика штапа (OA), дужине R , тежине G , чији је крај (A) везан опругом, крутости c , дужине у нерастегнутом стању l , (сл. 13.7).



Сл. 13.7. — Услови стабилности клатна са опругом

Дакле, биће:

$$1^{\circ} \text{ за } \varphi=0; \quad c(2R-l) < G \text{ (стабилан положај);}$$

$$2^{\circ} \text{ за } \cos(\varphi/2) = cl/(2cR-G); \quad \cos \varphi = 2 \cos^2(\varphi/2) - 1;$$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{cl}{2cR-G} < 1; \quad \frac{(G-2cR)^2 - c^2 l^2}{2(2cR-G)} > 0; \quad G < c(2R-l)$$

13.3 Код Schlick-овог палографа клатно ON има променљиву дужину, јер полука пролази кроз обртни ваљак у тачки O а зглобом C је везана са кривајом CO_1 која се обрће око хоризонталне осе кроз O_1 , (сл. 33.8).

Одредити услов при коме ће вертикални равнотежни положај клатна бити стабилан и кружну фреквенцију малих осцилација око тога положаја, занемарујући тежине делова механизма.

[Решење. — Ако је тачка A положај стабилне равнотеже клатна онда је потенцијална енергија

$$E_p = -mgz = -mg \cdot \overline{AB} = -mg(\overline{OB} - \overline{OA}) = -mg[r(1 - \cos \theta) - l(1 - \cos \varphi)].$$

Како из троугла OCO_1 следи однос

$$h/r = \sin(\varphi + \theta)/\sin \varphi,$$

[Решење. — Узмимо осу Oz усмерену на ниже и са φ означимо угао који гради штап са Oz осом, онда је потенцијална енергија система:

$$E_p = -Gz_c + c(\Delta l)^2/2 = (-GR \cos \varphi)/2 + c(\overline{AB} - l)^2/2 = (-GR \cos \varphi)/2 + c[2R \cos(\varphi/2) - l]^2/2; \quad \theta = \varphi/2.$$

Услови стабилности су:

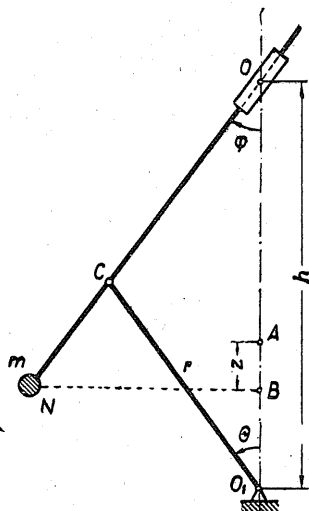
$$dE_p/d\varphi = \sin(\varphi/2) \cdot [\cos(\varphi/2)(-2cR^2 + GR) + clR] = 0;$$

$$d^2E_p/d\varphi^2 = [(-2cR^2 + GR) \cos \varphi + cRl \cdot \cos(\varphi/2)]/2 \geq 0,$$

односно

$$\sin(\varphi/2) = 0;$$

$$\cos(\varphi/2) = clR/(-2cR^2 + GR) = cl/(2cR - G).$$



Сл. 13.8. — Критеријум стабилности Schlick-овог палографа

то је за мале углове

$$\theta = (h-r) \varphi / r \text{ и } \cos \theta \approx 1 - 1/2 \theta^2,$$

па је енергија

$$E_p = -(mg/2r) [(h-r)^2 - r l] \varphi^2.$$

Њени су изводи

$$\partial E_p / \partial \varphi = -(mg/r) [(h-r)^2 - r l] \varphi,$$

$$\partial^2 E_p / \partial \varphi^2 = -(mg/r) [(h-r)^2 - r l],$$

па је услов за стабилну равнотежу

$$\sqrt{r l} > h - r.$$

Како је кинетичка енергија

$$E_k = 1/2 J \dot{\varphi}^2 = 1/2 m (h-r+l)^2 \dot{\varphi}^2$$

то је кружна фреквенција малих осцилација око положаја стабилне равнотеже

$$\omega^2 = g [r l - (h-r)^2] / [r - (h-r+l)^2].$$

13.4. Одредити критеријум стабилности клатна са Еванс-овим механизмом занемарујући масе полуа, (сл. 13.9).

[Решење. — За генерализану координату клаћења узмимо угао φ , и помоћне углове ψ и θ , онда следе релације:

$$a \cos \psi + b \sin \varphi - R \sin \theta = l = a;$$

$$a \sin \psi + b \cos \varphi + R \cos \theta = h = R + b.$$

Због малих осцилација ставимо да је уопште узев

$$\sin \alpha \approx \alpha, \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2(\alpha/2) \approx 1 - \alpha^2/2,$$

онда горње релације постају:

$$-a \psi^2/2 + b \varphi = R \theta; \quad a \psi - b \varphi^2/2 = R \theta^2/2;$$

$$-a (R \theta^2 + b \varphi^2)/8 = R \theta - b \varphi = 0,$$

то јест $\theta = b \varphi / R$.

Координата тежишта клатна је

$$z_C = z = R \cos \theta - c \cos \varphi =$$

$$= (R-c) + (Rc-b^2) \varphi^2 / 2R,$$

па су потенцијална енергија и услови стабилности:

$$E_p = G z_C; \quad dE_p / d\varphi = G(Rc-b^2)\varphi / R = 0;$$

$$d^2 E_p / d\varphi^2 = G(Rc-b^2) / R > 0,$$

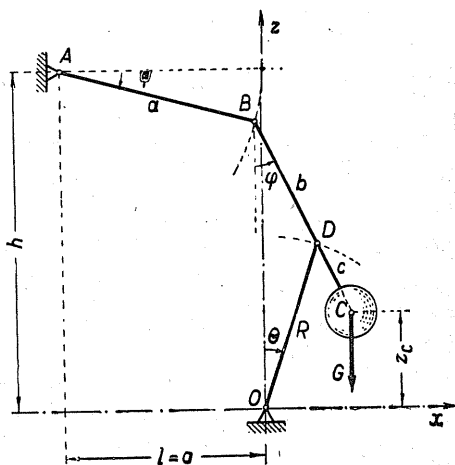
то јест $Rc > b^2$.

13.5. Енергије и функција расипања једног система са два степена слободе дате су једначинама

$$E_k = 1/2 (3 \dot{x}_1^2 + 4 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + 2 \dot{x}_2^2); \quad E_p = 1/2 (4 \dot{x}_1^2 + 2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dot{x}_2^2);$$

$$\Phi = 1/2 (\dot{x}_1^2 + 2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + 2 \dot{x}_2^2).$$

Одредити карактер кретања система.



Сл. 13.9. — Клатно са Еванс-овим механизмом

[Решење. — Лагранжеве једначине дају систем једначина

$$3\ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2 + \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + 4x_1 + x_2 = 0; \quad 2\ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2 + \dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 + x_1 + x_2 = 0,$$

па је карактеристична једначина

$$f(\lambda) = 2\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 7\lambda + 3 = 0.$$

Како су $A_i > 0$ и Routh-ове детерминанте $\Delta_1 = 4 > 0$; $\Delta_2 = 28 > 0$; $\Delta_3 = 78 > 0$ то корени имају негативне реалне делове. Због тога што су квазиеластични коефицијенти $c_{ik} > 0$ и $\Delta(c_{ik}) = 4 - 1 = 3$ то је положај $x_1 = x_2 = 0$ положај стабилне равнотеже. Кретање је, дакле, опадајућа осцилација око тог положаја.

Због

$$f(\lambda) = \lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d \approx (\lambda^2 + a\lambda + b) [\lambda^2 + (c/b)\lambda + (d/b)] = 0,$$

добивамо две квадратне једначине

$$\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0, \quad \lambda^2 + 7/8\lambda + 3/8 = 0$$

са коренима

$$\lambda_{1,2} \approx -1 \pm i\sqrt{3}, \quad \lambda_{3,4} \approx -1/16 (7 \mp i\sqrt{47}).$$

Ове се вредности могу побољшати *Нушновом методом**

$$\lambda = \lambda_1 - (f'/f'') \pm [f'' - 2f'f''/f']^{1/2} / f''; \quad f^{(i)} = f^{(i)}(\lambda_1), \dots$$

па су

$$\lambda_{1,2} \approx -0,76 \pm 1,30i; \quad \lambda_{3,4} = -0,25 \pm 0,97i.$$

13.6 Испитати да ли је осцилаторни систем чији је карактеристични полином

$$f(x) = x^6 + 9x^5 + 38x^4 + 90x^3 + 124x^2 + 96x + 32 = 0$$

стабилан. Одредити корене полинома.

[Решење. — Према Routh-у и Hurwitz-у биће:

1	38	124	32	0	$A_i > 0$
9	90	96	0	0	
252	1020	288	0		
13 500	21 600	0			
8 326 800	3 888 000				
12 74 \cdot 10^8					

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} 9 & 90 & 96 & 0 & 0 \\ 1 & 38 & 124 & 32 & 0 \\ 0 & 9 & 90 & 96 & 0 \\ 0 & 1 & 38 & 124 & 32 \\ 0 & 0 & 9 & 90 & 96 \end{vmatrix} = \Delta_5 > 0$$

$$\Delta_1 = 9; \quad \Delta_2 = 252; \quad \Delta_3 = 13500; \quad \Delta_4 = 925200;$$

$$x_1 = -1; \quad -2; \quad -1 \pm i; \quad -2 \pm 2i.$$

* Th. v. Kármán — M. A. Biot — *Mathematical Methods in Engineering*. New York, 1940. p. 248.

14. ОСНОВИ МАТРИЧНОГ РАЧУНАЊА СА ПРИМЕНОМ НА ОСЦИЛАТОРНЕ ПРОБЛЕМЕ

14.1. Врсте и особине матрица. — Кинетичка и потенцијална енергија осцилаторног система са n степени слободe јесу хомогене квадратне *форме* генералисаних брзина, односно координата. Те су *форме* одређене када се знају њихови коефицијенти a_{ik} , односно c_{ik} . Скуп ових коефицијената може се довести у везу са једним математичким оператором који се назива *матрица* и који нема одређене вредности али представља одређени начин писања ових елемената.

Скуп $m \cdot n$ елемената (a_{ik}) поређаних у правоуглој схеми од m *врсци* и n *колона* образује, према Sylvester-у,* *матрицу*. Њу ћемо обељавати овако

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A(a_{ik})_{mn}. \quad (1)$$

Када је $m \neq n$ матрица се назива *правоугаоном*; при $m = n$ она је *квaдрaтнa*. Ове се последње матрице нарочито много користе у разним техничким проблемима.

Коефицијенти a_{ik} матрице јесу њени *елементи*. Када су они реални бројеви и матрица је *реална*. Специјална реална матрица је *нула матрица*, код ње су сви елементи $a_{ik} = 0$. Када су елементи комплексни бројеви и матрица је *комплексна*.

Заменимо ли у матрици $A = (a_{ik})$ врсте колонама добићемо нову матрицу $A' = (a_{ki})$. Она се назива *транспонована матрица*. Код квадратне матрице транспонована матрица добија се пресликавањем елемената преко главне дијагонале матричне схеме. Поновним транспонованњем добија се опет првобитна матрица, $(A')' = A$.

Квaдрaтнa матрица која има особину да је једнака својој транспонованој матрици назива се *симетричном*. Код ње је, дакле, испуњен услов

$$A_s = A'_s, \quad a_{ik} = a_{ki}. \quad (2)$$

* J. J. Sylvester, Phil. Mag. 37., 1850.

Квадратна матрица се назива *антисиметричном* (*кососиметричном*) ако је једнака негативној транспонованој матрици. Код ње је

$$A_a = -A'_a, \quad a_{ik} = -a_{ki}, \quad a_{ii} = 0. \quad (3)$$

Квадратна матрица код које су сви елементи $a_{ii} \neq 0$ а сви $a_{ik} = 0$ за $i \neq k$, назива се *дијагоналном*. Она има само елементе дуж главне дијагонале матричне схеме. Дијагонална матрица чији су елементи $a_{ii} = 1$ назива се *јединичном матрицом*. Она у матричном рачуну игра исту улогу као јединица у обичном рачуну. Ове се матрице обележавају са

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & & \\ 0 & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} = D(d_i), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Примери. — Наведени типови матрица јесу:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad A_s = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}; \quad A_a = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}.$$

Када се у комплексној матрици елементи $a_{ik} = \alpha_{ik} + i\beta_{ik}$ замене њиховим конјуговано-комплексним бројевима $\bar{a}_{ik} = \alpha_{ik} - i\beta_{ik}$ добија се конјуговано-комплексна матрица $\bar{A}(\bar{a}_{ik})$.

Оваква се матрица назива *хермитском* када је задовољен услов

$$A'_h = \bar{A}_h \quad \text{или} \quad \bar{A}'_h = A_h. \quad (5a)$$

Код ње су елементи $a_{ii} = \alpha_{ii}$ реални, док су елементи $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$. Пресликавањем преко главне дијагонале добијају се конјуговано-комплексни елементи. Комплексна матрица је *косохермитска* када су задовољени услови

$$\bar{A}'_{kh} = -A_{kh} \quad \text{или} \quad A'_{kh} = -\bar{A}_{kh}. \quad (5b)$$

Код ње су дијагонални елементи чисто имагинарни бројеви.

На пример, типови комплексних матрица јесу

$$A = \begin{pmatrix} 2+3i & 1+2i \\ 2+i & 4-2i \end{pmatrix}; \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 2-3i & 1-2i \\ 2-i & 4+2i \end{pmatrix}; \quad A_h = \begin{pmatrix} 2 & 2-i \\ 2+i & 3 \end{pmatrix};$$

$$A'_h = \begin{pmatrix} 2 & 2+i \\ 2-i & 3 \end{pmatrix} = \bar{A}_h; \quad A_{kh} = \begin{pmatrix} 2i & 4+2i \\ -4+2i & 3i \end{pmatrix}.$$

Свакој реалној квадратној матрици одговара детерминанта састављена од њених елемената. Ред детерминанте $\det \mathbf{A} = D(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}|$ је уједно и ред квадратне матрице. Детерминанта се назива *модулом матрице* јер представља одређени број. Према томе да ли је $|\mathbf{A}| \neq 0$ или је $|\mathbf{A}| = 0$ матрица је *несингуларна* или *сингуларна (особена)*.

Детерминанта транспоноване матрице једнака је детерминанти прве матрице.

Примери. —

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}; |\mathbf{A}| = |\mathbf{A}'| = -12; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; |\mathbf{B}| = |\mathbf{B}'| = 0.$$

Свакој несингуларној квадратној матрици одговара *реципрочна или инверзна матрица*

$$\mathbf{R}(\alpha_{ik}) = \mathbf{A}^{-1}(a_{ik}) = \frac{1}{|\mathbf{A}|} (K_{ki}); \quad \alpha_{ik} = \frac{K_{ki}}{|\mathbf{A}|}. \quad (6)$$

Елементи ове матрице једнаки су количницима кофактора K_{ki} детерминанте матрице и модула матрице.

Елементи реципрочне дијагоналне матрице једнаки су реципрочним вредностима елемената прве дијагоналне матрице. Реципрочна јединична матрица је опет јединична матрица.

Примери. —

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}; |\mathbf{A}| = -12; \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/12 & 1/3 & -1/12 \\ 7/6 & 1/3 & -5/6 \\ -5/12 & -1/3 & 7/12 \end{pmatrix}; \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

Матрица код које су елементи $a_{ik} = 0$ када је $|i - k| > 1$ назива се *Јакобијева матрица*. Она се, дакле, састоји само из три дијагонална реда елемената. Овакве симетричне матрице долазе често у осцилаторним проблемима.

Када су елементи матрице такође матрице она се назива *супер-матрица* (или матрица матрица). Таква дијагонална матрица је *квазидијагонална матрица*. Ове су матрице схематски представљене са

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}; \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{pmatrix}; \mathbf{K}_d = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \mathbf{A}_n \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Досадашње матрице састојале су се из врста и колона. Када матрица има само једну врсту она се назива *матрица врста* а једну ко-

лону онда је *матрица колона*. Ове се матрице доводе у везу са „вектором“ у n -димензионом простору који је одређен скупом бројева a_1, a_2, \dots, a_n који представљају његове *координате*. Ове ћемо векторе обележавати масним словима \mathbf{a} или ознаком \vec{a} иако немају онај векторски карактер као у тродимензионом простору. Овакав вектор представља матрицу колону $\{a_i\}$; транспонованој матрици — матрици врсти (a_i) одговара други вектор \mathbf{a}' :

$$\mathbf{a} = \{a\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{a}' = (a) = (a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (8)$$

Још је важна једна карактеристика матрице, њен *ранг* (r). Код несингуларне матрице је $|\mathbf{A}| \neq 0$, док је код сингуларне $|\mathbf{A}| = 0$. Може се десити да су и минори неког реда детерминанте матрице једнаки нули или различити од ње. Под *рангом матрице* (према *Frobenius-у*) подразумева се *ред највишег минора детерминанте матрице који је различит од нуле*. Разлика између реда детерминанте квадратне матрице и њеног ранга назива се *ексцес* или *пад ранга* (дефект, нулитет), па је $e = n - r$. Код несингуларне матрице је $e = 0$, тј. $r = n$.

Појам ранга се проширује и на правоугаоне матрице: ранг је ред минора највишег реда који је различит од нуле. Детерминанта правоугаоне матрице највишег реда назива се *мајор* матрице.

14.2. Рачунске операције са матрицама. — Иако матрица нема одређене нумеричке вредности ипак се са њом може рачунати.

За две матрице каже се да су *једнаке* ако су истог типа ($m \cdot n$) и једнаких истомесних коефицијената, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, $a_{ik} = b_{ik}$.

Збир (разлика) двеју матрица истог типа опет је матрица истог типа са елементима једнаким збиру (разлици) истомесних елемената матрица сабирака

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B}, \quad c_{ik} = a_{ik} \pm b_{ik}. \quad (9)$$

Производ матрице скаларом (бројем) λ јесте нова матрица чији су сви елементи увећани λ пута:

$$\mathbf{B} = \lambda \mathbf{A}, \quad b_{ik} = \lambda a_{ik}. \quad (10)$$

Ово правило омогућава да се заједнички садржалац елемената матрице напише испред њене схеме.

За сабирање, одузимање и множење матрице скаларом важе ови обрасци:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathbf{B} + \mathbf{A}; & \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}, \\ \lambda \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} &= \lambda (\mathbf{A} + \mathbf{B}); & \lambda \mathbf{A} + \nu \mathbf{A} &= (\lambda + \nu) \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (11)$$

Свака квадратна матрица једнака је збиру симетричне и антисиметричне матрице. [Њена транспонована матрица једнака је разлици таквих матрица

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a; \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A}_s - \mathbf{A}_a. \quad (12a)$$

Према томе могу се одредити овакве матрице помоћу образаца

$$\mathbf{A}_s = 1/2 (\mathbf{A} + \mathbf{A}'); \quad \mathbf{A}_a = 1/2 (\mathbf{A} - \mathbf{A}'). \quad (12b)$$

Примери. — Горње рачунске операције применити на квадратну матрицу

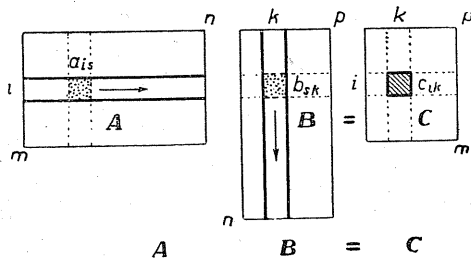
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_s = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Под *производом* матрице \mathbf{A} типа (m, n) и матрице \mathbf{B} типа (n, p) подразумева се трећа матрица \mathbf{C} типа (m, p) са m *врста* и p *колона*. Њени су елементи једнаки збировима производа елемената i -те врсте прве матрице (леве) са елементима k -те колоне друге (десне) матрице, (сл. 14.1):

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C}; \quad c_{ik} = \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sk} = a_{i1} b_{1k} + \dots + a_{in} b_{nk}, \quad (13a)$$

$$i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

Елемент c_{ik} резултујуће матрице $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ може се дефинисати скаларним производом i -тог вектора врсте леве матрице (\mathbf{A}) са k -тим вектором колоне десне матрице



Сл. 14.1. — Схематски приказ множења матрица

$$c_{ik} = \mathbf{a}'_i \mathbf{b}_k = (a_i) \{b_k\} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \begin{Bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{Bmatrix} = \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sk}. \quad (13b)$$

Производ матрице и вектора јесте нови вектор

$$\mathbf{A} \mathbf{b} = \mathbf{c}; \quad \mathbf{A} \{b\} = \{c\}; \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11} b_1 + a_{12} b_2 \\ a_{21} b_1 + a_{22} b_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}. \quad (13c)$$

За множење двеју матрица *не важи комутативни закон*, па се стога разликују производи матрица „слева“ и „здесна“. У изузетним случајевима тај закон и важи. Дистрибутивни и асоцијативни закони важе. Степеновање матрица своди се на производ.

За множење разних типова матрица важе ови обрасци:

$$AB \neq BA; \quad (AB)C = A(BC) = ABC; \quad (A+B)C = AC + BC;$$

$$C(A+B) = CA + CB;$$

$$AI = IA = A; \quad AA^{-1} = I; \quad (A')^{-1} = (A^{-1})'; \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1};$$

$$AA = A^2; \quad A^p A^q = A^{p+q};$$

$$AA' = B_s; \tag{14}$$

$$\overline{AA'} = \overline{A'}A = I, \quad \overline{(AB)} = \overline{A} \overline{B}; \quad \overline{(A^{-1})} = (\overline{A})^{-1}.$$

Производ матрице и дијагоналне матрице, слева и здесна, биће:

$$AD = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_2 \\ a_{21}d_1 & a_{22}d_2 \end{pmatrix}; \quad DA = \begin{pmatrix} d_1 & a_{11} & d_1 & a_{12} \\ d_2 & a_{21} & d_2 & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Матрица чији су елементи једнаки кофакторима детерминанте прве матрице назива се *адјунгована матрица*. За производ матрице њеном адјунгованом матрицом важи овај однос

$$A^* = (K_{ki}), \quad AA^* = A^*A = |A|I = D(|A|). \tag{16}$$

Скаларни производ двају вектора проширује се и на n -димензиони простор па износи

$$ab = (\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

У матричном рачуну под *скаларним производом* вектора подразумева се производ матрице врсте и матрице колоне. У резултату се увек добија скалар — број. Према томе биће:

$$a'b = b'a = (a) \{b\} = (b) \{a\} = (a_1, \dots, a_n) \begin{Bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} = (b_1, \dots, b_n) \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i b_i. \tag{17}$$

Диадским производом двају вектора назива се производ матрице колоне и матрице врсте. Резултат овог множења је правоугаона или квадратна матрица. У овом случају закон комутације не важи. Дакле, биће:

$$\{a\}(b) = ab' = \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} (b_1, \dots, b_n) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \dots & a_n b_n \end{pmatrix} = C(c_{ik}); \quad ab' \neq b'a. \tag{18}$$

Пример. — За дате матрице проверити напред наведене обрасце:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}; \quad \{a\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \{b\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решење. — Овде су $|\mathbf{A}| = -12$; $|\mathbf{B}| = 29$;

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = \mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 6 \\ 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 4 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 3 & 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 14 & 24 \\ 13 & 12 & 29 \\ 17 & 22 & 44 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{C}| = -348 = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|; \end{aligned}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 18 & 13 & 28 \\ 14 & 10 & 18 \\ 31 & 17 & 39 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A'B'} = (\mathbf{BA})' = \begin{pmatrix} 18 & 14 & 31 \\ 13 & 10 & 17 \\ 28 & 18 & 39 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B'A'} = (\mathbf{AB})' = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 17 \\ 14 & 12 & 22 \\ 24 & 29 & 44 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA} = \begin{pmatrix} 18 & 10 & 22 \\ 14 & 13 & 24 \\ 26 & 18 & 38 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{AA}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{-1}{12} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -14 & -4 & 10 \\ 5 & 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I};$$

$$\mathbf{BB}^{-1} = \mathbf{I};$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^* &= \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -14 & -4 & 10 \\ 5 & 4 & -7 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{AA}^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -14 & -4 & 10 \\ 5 & 4 & -7 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = -12 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^{-1} = -\frac{1}{174} \begin{pmatrix} 35 & -10 & -24 \\ 6 & -88 & 34 \\ 36 & 52 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{AD} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{DA} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Даље је

$$\mathbf{A} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{a'b} = (\mathbf{a}) \{b\} = (1 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (1+4+3) = 8 = \mathbf{b'a} = (\mathbf{b}) \{a\} = (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\{a\} (\mathbf{b}) = \mathbf{ab}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (123) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad (\mathbf{b}) \{a\} = \mathbf{b'a} = (123) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 8.$$

Ради олакшања множења матрица оне се могу *разделиши* на суб-матрице (партиција матрица). Делење се врши вертикалним и хоризонталним цртама, тако да ширина првог чиниоца (делењем *вертикалама*) буде једнака висини другог чиниоца (делењем *хоризонталама*). Резултујућа матрица има висину првог а ширину другог чиниоца. Резултујуће субматрице добијају се према правилу множења матрица.

Буде ли детерминанта матрице $|A| \neq 0$, једначине (19) могу се решити једнозначно по величинама x_i , па је ова трансформација одређена изразом

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}; \quad \{x\} = \mathbf{A}^{-1} \{y\}, \quad (21)$$

где је \mathbf{A}^{-1} реципрочна матрица матрице \mathbf{A} .

На овоме је заснован начин решавања система линеарних једначина (19) са n непознатих x_i када су величине y_i апсолутни чланови b_i система једначина. Тада је

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}, \quad x_k = \frac{1}{|A|} \sum_i b_i K_{ki}.$$

Ово представља *Крамерово правило* (Cramer), према коме систем једначина (19), са $y_i = b_i$ и условом $|A| \neq 0$, има само један скуп решења x_i . Када је систем *хомоген* $b_i = 0$ али је $|A| \neq 0$, тада су сва решења $x_i = 0$.

Линеарна трансформација (20) осим афиног пресликавања може да има и друго значење. Ако су x_i и y_i координате једне „*исте шачке*“ мерене у два различита координатна система, онда се трансформација изражава са

$$\mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{y}; \quad \{x\} = \mathbf{T} \{y\}, \quad (22)$$

где је \mathbf{T} *матрица трансформације координата*.

На пример, формуле трансформација координата x_1, x_2 система Ox_1, x_2 при ротацији истог за угао φ у директном смеру у систем Oy_1, y_2 и обратно биће

$$\{x\} = \mathbf{T} \{y\}; \quad \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{cases} y_1 \\ y_2 \end{cases}; \quad \{y\} = \mathbf{T}^{-1} \{x\}; \quad \begin{cases} y_1 \\ y_2 \end{cases} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}.$$

Елементи сваке колоне (k) матрице (1) могу се схватити координатама једног вектора у простору од m димензија, па се матрица може да напише као матрица врста чији су елементи ти вектори

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_n); \quad \{\mathbf{a}_k\} = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}; \quad k = 1, \dots, n. \quad (23a)$$

Обрнуто, могу се и елементи једне врсте (i) схватити као координате једног вектора у простору од n димензија, па се матрица (1) може написати у облику матрице колоне тих вектора

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}); \quad i = 1, \dots, m. \quad (23b)$$

Скаларни производ једног вектора самим собом једнак је збиру квадрата његових координата и представља *норму вектора*. Позитивни квадратни корен из норме јесте *модул* или *дужина вектора*. Вектор чија је дужина јединица назива се *јединични вектор*. Он је једнак количнику вектора и његовог модула, па се каже да је вектор нормиран у односу на свој јединични вектор \mathbf{e}_a . Према томе су:

$$N_a = \mathbf{a}\mathbf{a} = (a)\{a\} = \sum a_i^2, \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}; \quad \mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}. \quad (24)$$

За два вектора каже се да су *ортогонални* ако је њихов скаларни производ једнак нули, $\mathbf{a}\mathbf{b} = (a)\{b\} = 0$. Систем од n јединичних специјалних вектора

$$\mathbf{e}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{e}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}$$

чини скуп *ортогоналних* и *нормираних јединичних* вектора када је испуњен услов

$$(e_i)\{e_k\} = \mathbf{e}'_i \mathbf{e}_k = \begin{cases} 0 & \text{за } i \neq k \\ 1 & i = k. \end{cases} \quad (25)$$

У теорији трансформација важну улогу игра *ортогонална матрица*. Помоћу ње се систем јединичних ортогоналних вектора трансформише у исти такав систем вектора. Ова је матрица увек квадратна а њени вектори колоне представљају јединичне ортогоналне векторе који задовољавају услов (25). Оваква линеарна трансформација се назива *ортогоналном* и представља *чисто обрћање* (ротацију).

Матрица \mathbf{T} при ротацији система координата x у нови систем u са заједничким координатним почетком O има векторе колоне једнаке јединичним векторима другог система мереним у првом систему; обрнуто, вектори колоне њене реципрочне матрице јесу јединични вектори првог система мерени у другом систему, те су:

$$\mathbf{T} = (\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) = \left(\begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{Bmatrix} \right); \quad \mathbf{T}^{-1} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \left(\begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{Bmatrix} \right).$$

Код ортогоналне матрице је транспонована матрица једнака реципрочной, а производ двеју ортогоналних матрица је опет ортогонална матрица. Услов (25) задовољавају и вектори врсте оваквих матрица.

Детерминанта ове матрице износи ± 1 .

Примери. — 14.1. Показати особине ортогоналне матрице јединичних вектора просторног ортогоналног система.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad I^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Delta = 1; \quad e'_1 e_1 = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1;$$

$$e'_1 e_2 = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

14.2. Матричним путем одредити формуле трансформација координата при ротацији система у функцији од Ојлерових углова.

Решење. — Правоугли десни триедар ($Oxyz$) прелази (сл. 14.2) у исти такав триедар ($O\xi\eta\zeta$) помоћу трију узастопних обртања: око прецесионе осе (\mathbf{k}) за угао прецесије ψ , око чворне осе (\mathbf{e}) за угао нутације θ и око осе сопственог обртања (\mathbf{k}') за угао обртања φ . Та три обртања могу се представити помоћу ортогоналних матрица чији се јединични вектори одређују увек у односу на претходни систем:

$$O_1 = (\mathbf{e} \text{ u } \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$O_2 = (\mathbf{e} \text{ c } \mathbf{k}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$O_3 = (i'j'k') = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

јединични вектор \mathbf{u} је у равни Oxy и управан је на \mathbf{e} , док је \mathbf{c} у равни $O\xi\eta$ и управан је такође на \mathbf{e} .

Трансформација је представљена релацијом*

$$\{r\} = O \{ \rho \} = O_1 O_2 O_3 \{ \rho \};$$

Сл. 14.2. — Ојлерови углови

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta & -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

14.3. Извести Ојлерове кинематичке једначине.

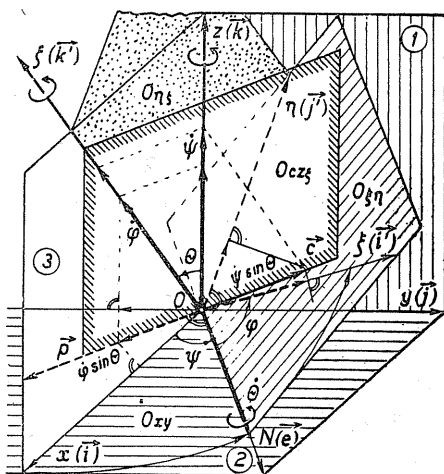
Решење. — Изводи Ојлерових углова по времену падају у правце оса триедра $O\mathbf{e}\mathbf{k}\mathbf{k}'$ па је матрица трансформације $T = (\mathbf{e}\mathbf{k}\mathbf{k}')$. С обзиром на основни триедар референције (непокретни или покретни) добићемо*

$$\{\omega\} = T \{\Omega\}$$

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \theta \sin \psi \\ \sin \psi & 0 & -\sin \theta \cos \psi \\ 0 & 1 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & 0 \\ 0 & \cos \theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}.$$

Матрица трансформације није ортогонална; њена детерминанта износи $\pm \sin \theta$.

* Киѐматика, чл. 10.3, обр. 187. и 188.



14.4. Квадратна форма. — Бинерна хомогена квадратна форма може се написати у облику:

$$\Phi(x_1, x_2) = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 = x_1 (a_{11} x_1 + a_{12} x_2) + x_2 (a_{21} x_1 + a_{22} x_2) = x_1 L_1 + x_2 L_2,$$

где изрази у заградама представљају бинерне линеарне форме. Како су линеарне форме производи матрице и вектора то се квадратна форма може написати у матричном облику

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k = \sum_i x_i \sum_k a_{ik} x_k = \mathbf{x}' \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{x}) \mathbf{A} \{x\}. \quad (26)$$

Њена матрица $\mathbf{A} (a_{ik})$ је симетрична ($a_{ik} = a_{ki}$), а њена детерминанта се назива *дискриминанта форме*. Када је $|\mathbf{A}| \neq 0$ форма је дефинитна. Реална квадратна форма је позитивно дефинитна када су сви главни минори детерминанте матрице (развијени по елементима главне дијагонале) позитивни.

14.5. Проблеми са сопственим вредностима. — Сопственом вредношћу неке матрице \mathbf{A} назива се скаларна величина λ којој одговара вектор \mathbf{x} различит од нуле а који задовољава једначину

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}; \quad \mathbf{A} \{x\} = \lambda \{x\}; \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \{x\} = \{0\}. \quad (27)$$

Овај услов показује да се вектор $\{y\} = \mathbf{A} \{x\}$ трансформише у паралелни вектор $\lambda \mathbf{x}$, где је λ коефицијент пропорционалности.

Образац (27) представља систем хомогених алгебарских једначина са константним коефицијентима a_{ik} . Тај систем има решење, сем тривијалног, ако је детерминанта система једнака нули

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0. \quad (28)$$

Она представља *карактеристичну (секуларну) једначину* матрице \mathbf{A} . Она је алгебарска једначина реда n по λ ; њени корени јесу *сопствене вредности* а одговарајући вектори \mathbf{x} јесу *сопствени вектори*.

Разликују се три врсте проблема са сопственим вредностима који су представљени једначинама

$$\mathbf{A} \{x\} = \lambda \{x\}; \quad \mathbf{A} \{x\} = \lambda \mathbf{D} \{x\}; \quad \mathbf{A} \{x\} = \lambda \mathbf{B} \{x\}. \quad (29)$$

Трећи случај је општи. Други случај је његов специјални случај, а први је специјални случај другог. Погодним трансформацијама општи проблем даде се свести на први случај; \mathbf{D} је дијагонална а \mathbf{B} произвољна матрица.

Сопствене вредности имају извесна карактеристична својства.

1° *Сопствене вредности симетричне матрице су реалне.*

Ако су x_i и y_i комплексни бројеви тада се под скаларним производом подразумева израз

$$\mathbf{x} \mathbf{y} = (\mathbf{x}) \{ \mathbf{y} \} = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n = \sum x_i \bar{y}_i.$$

Према томе је

$$(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda (\mathbf{x} \mathbf{y}) \text{ и } (\mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}) = \bar{\lambda} (\mathbf{x} \mathbf{y}).$$

Како је матрица \mathbf{A} симетрична биће

$$(\mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\lambda \mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lambda (\mathbf{x} \mathbf{x}) = \bar{\lambda} (\mathbf{x} \mathbf{x}), \text{ па је } \lambda = \bar{\lambda}.$$

2^о Сојсџвени вектори су за две различите сојсџвене вредности орџо-
гонални.

Ако је $\lambda_r \neq \lambda_s$ онда су

$$(\mathbf{A} \mathbf{x}'_r, \mathbf{x}_s) = \lambda_r (\mathbf{x}'_r, \mathbf{x}_s), (\mathbf{x}'_r, \mathbf{A} \mathbf{x}_s) = \lambda_s (\mathbf{x}'_r, \mathbf{x}_s), \text{ тј. } (\mathbf{x}'_r, \mathbf{x}_s) (\lambda_r - \lambda_s) = 0,$$

или

$$(\mathbf{x}'_r, \mathbf{x}_s) = (x_r) \{ x_s \} = 0.$$

3^о Сојсџвене вредности орџо-гоналне матрице имају модул једнак јединици.

Како је $(\mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{A} \mathbf{x}) = (\mathbf{x} \mathbf{x})$ то је $(\lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{x}) = \lambda^2 (\mathbf{x} \mathbf{x})$, па је $\lambda^2 = 1$.

4^о Хомогена квадрајна форма може се орџо-гоналном шрансформаци-
јом шрансформисаји у нову форму само са квадрајним члановима.

Сопственој вредности λ_s одговара сопствени вектор \mathbf{x}_s који задовољава једначину (27). Када се познају сопствене вредности λ_s онда се сопствени вектори одређују из услова

$$(\mathbf{A} - \lambda_s \mathbf{I}) \mathbf{x}_s = 0, \quad |\mathbf{A} - \lambda_s \mathbf{I}| = 0, \quad s = 1, \dots, n. \quad (30)$$

Ови сопствени вектори образују нову матрицу — матрицу сојсџвених
векџора

$$\mathbf{X} = \{ \mathbf{X} \} = (\mathbf{x}_{ks}) = (\{ \mathbf{x}_k^s \}). \quad (31)$$

Ови вектори се и нормирају те задовољавају услов ортогоналности и
нормирања

$$\mathbf{V} = (\mathbf{v}_s); \quad \{ v_s \} = \begin{Bmatrix} v_1^s \\ v_2^s \\ v_3^s \\ \vdots \end{Bmatrix}; \quad (v'_r) \{ v_s \} = \begin{cases} 0 & \text{за } r \neq s \\ 1 & r = s \end{cases}. \quad (32)$$

Новом трансформацијом координата v_i^s у координате ξ_i помоћу
матрице сопствених нормираних вектора (32), $\mathbf{x} = \mathbf{V} \{ \xi \}$, због $\mathbf{x}' = (\mathbf{V} \{ \xi \})' =$
 $= \xi' \mathbf{V}' = (\xi) \mathbf{V}'$ квадратна форма (26) трансформише се на облик

$$\Phi = \mathbf{x}' \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{x}) \mathbf{A} \{ \mathbf{x} \} = (\xi) \mathbf{L} \{ \xi \} = \sum_{s=1}^n \lambda_s \xi_s^2 \quad (33)$$

где је

$$L = V'AV = D(\lambda_s) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (34)$$

дијагонална матрица сопствених вредности.

У случају општег проблема, када су матрице A и B истог реда а матрица B је несингуларна, сопствене вредности овог пара матрица биће

$$(A - \lambda B) \{x\} = \{0\}; \quad |A - \lambda B| = 0. \quad (35)$$

Оне су реалне као и одговарајући сопствени вектор. Овим матрицама одговарају квадратне форме

$$\Phi_1 = (x) A \{x\}; \quad \Phi_2 = (x) B \{x\}. \quad (36)$$

Помоћу трансформација

$$V'AV = L, \quad V'BV = I, \quad (37)$$

где је V матрица сопствених нормираних вектора који задовољавају услов

$$(v_r) B \{v_s\} = \begin{cases} 0 & r \neq s \\ 1 & \text{за } r = s \end{cases} \quad (38)$$

квадратне форме се трансформишу на облике са квадратним члановима

$$\Phi_1 = (\xi) L (\xi) = \sum_{s=1}^n \lambda_s \xi_s^2, \quad \Phi_2 = (\xi) I (\xi) = \sum_{s=1}^n \xi_s^2. \quad (39)$$

Примери. — 14.4. Квадратна тернерна форма

$$\Phi = (x_1 x_2 x_3) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2$$

је позитивно дефинитна, јер су испуњени услови

$$a_{ik} > 0, \quad |A| = 18; \quad \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 > 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 > 0; \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 11 > 0.$$

Њена карактеристична једначина и сопствене вредности су

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 10\lambda^2 + 27\lambda - 18 = 0; \quad \lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 3; \quad \lambda_3 = 6.$$

Сопствене нормиране векторе одређујемо из услова

$$(\mathbf{A} - \lambda_s \mathbf{I}) \mathbf{v}_s = 0; \quad \begin{pmatrix} 3 - \lambda_s & 1 & 2 \\ 1 & 4 - \lambda_s & 1 \\ 2 & 1 & 3 - \lambda_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^s \\ v_2^s \\ v_3^s \end{pmatrix} = 0$$

$$(v_1^s)^2 + (v_2^s)^2 + (v_3^s)^2 = 1$$

и износе

$$\{v_1\} = \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/2\sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad \{v_2\} = \begin{pmatrix} 1/6\sqrt{6} \\ -1/3\sqrt{6} \\ 1/6\sqrt{6} \end{pmatrix}; \quad \{v_3\} = 1/3 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Лако се уверавамо да су они ортогонални, јер су, на пример,

$$(v_1) \{v_2\} = (1/2\sqrt{2} \quad 0 \quad -1/2\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1/6\sqrt{6} \\ -1/3\sqrt{6} \\ 1/6\sqrt{6} \end{pmatrix} = 0; \quad (v_1) \{v_3\} = 0; \quad (v_2) \{v_3\} = 0.$$

Како су матрице сопствених нормираних вектора

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{2} & 1/6\sqrt{6} & 1/3\sqrt{3} \\ 0 & -1/3\sqrt{6} & 1/3\sqrt{3} \\ -1/2\sqrt{2} & 1/6\sqrt{6} & 1/3\sqrt{3} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{V}' = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & -3\sqrt{2} \\ \sqrt{6} & -2\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$$

то је

$$\Phi = \xi_1^2 + 3\xi_2^2 + 6\xi_3^2; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & \sqrt{6} & 2\sqrt{3} \\ 0 & -2\sqrt{6} & 2\sqrt{3} \\ -3\sqrt{2} & \sqrt{6} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

14.5. Сличним поступком нашли бисмо за симетричне матрице

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 - \lambda \\ 1 - \lambda & 2 - 2\lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(5 - \lambda) = 0, \quad \lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 5.$$

Сопствене векторе одређујемо из услова (35) и (38)

$$\begin{pmatrix} 3 - \lambda_s & 1 - \lambda_s \\ 1 - \lambda_s & 2 - 2\lambda_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^s \\ v_2^s \end{pmatrix} = 0, \quad (v_1^s \ v_2^s) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^s \\ v_2^s \end{pmatrix} = (v_1^s)^2 + 2v_1^s v_2^s + (v_2^s)^2 = 1$$

па су

$$\{v_1\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2\sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad \{v_2\} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{V}' = \begin{pmatrix} 0 & 1/2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 5 \end{pmatrix}$$

Квадратне форме које одговарају матрицама \mathbf{A} и \mathbf{B} јесу

$$\Phi_1 = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2; \quad \Phi_2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

и трансформацијом (37) постају

$$\Phi_1 = \xi_1^2 + 5\xi_2^2; \quad \Phi_2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$$

14.6. Фреквентна једначина. — Кинетичка и потенцијална енергија осцилаторног система могу се написати као квадратне форме генералисаних брзина, односно координата

$$2E_k = (\dot{q}) \mathbf{A} \{\dot{q}\}; \quad 2E_p = (q) \mathbf{C} \{q\}, \quad (40)$$

где је $\mathbf{A} = (a_{ik})$ инерцијска матрица а $\mathbf{C} = (c_{ik})$ квазиеластична матрица. Лагранжеве једначине дају систем једначина

$$\mathbf{A} \{\ddot{q}\} + \mathbf{C} \{q\} = 0. \quad (41)$$

Претпостављајући решење у облику $\{q\} = \{r\} e^{i\omega t}$, где је $\{r\}$ амплитудни вектор а ω кружна фреквенција, фреквентна једначина је

$$(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{A}) \{r\} = \{0\}; \quad |\mathbf{C} - \lambda \mathbf{A}| = 0; \quad (42)$$

овде је $\lambda = \omega^2$ сопствена вредност.

Помоћу трансформација $\{q\} = \mathbf{V} \{\xi\}$, $\{\dot{q}\} = \mathbf{V} \{\dot{\xi}\}$, енергије се свде на облике

$$2E_k = (\dot{\xi}) \mathbf{I} \{\dot{\xi}\}; \quad 2E_p = (\xi) \mathbf{L} \{\xi\}, \quad (43)$$

са главним координатама ξ , које су уједно и нормалне координате.

У случају неконзервативног система и функција расипања је хомогена квадратна форма $2\Phi = (\dot{q}) \mathbf{B} \{\dot{q}\}$, где је \mathbf{B} матрица отпорних коефицијената, па Лагранжева једначина доводи до система једначина

$$\mathbf{A} \{\ddot{q}\} + \mathbf{B} \{\dot{q}\} + \mathbf{C} \{q\} = \{0\}. \quad (44)$$

Решење ћемо тражити у облику $\{q\} = \{r\} e^{\lambda t}$, па је карактеристична једначина

$$|\mathbf{P}(\lambda)| = |\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}\lambda + \mathbf{C}| = 0, \quad (45)$$

где је \mathbf{P} квадратна полиномна матрица са коефицијентима

$$p_{ik} = a_{ik}\lambda^2 + b_{ik}\lambda + c_{ik}.$$

Ако су матрице \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} реалне несингуларне матрице са позитивно дефинитним квадратним формама кретање је *стабилно*. Тада је сопствена вредност комплексни број са негативним реалним делом.

На пример, ако су матрице

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

онда је карактеристични полином

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 & \lambda^2 + \lambda + 1 \\ \lambda^2 + \lambda + 1 & 2\lambda^2 + \lambda + 2 \end{vmatrix} = 7\lambda^4 + 9\lambda^3 + 13\lambda^2 + 7\lambda + 3 = 0,$$

па како су задовољени Hurwitz-ови услови кретање је *стабилно*.

Приближне вредности корена су

$$\lambda_{1,2} \approx -9/14 \pm i^{1/14} \sqrt{283}, \quad \lambda_{3,4} \approx -7/26 \pm i^{1/26} \sqrt{107}.$$

Помоћу матричног рачуна могу се *методом итерације* одредити сопствене вредности. Нека је конзервативни систем са статичким везама, (чл. 6.1., об. 9), и претпоставимо решење у облику (6, чл. 10.3.) онда добијамо систем алгебарских једначина облика

$$A_i \omega^2 = \sum_k \frac{c_{ik}}{a_i} A_k = N_i; \quad \lambda = \omega^2, \tag{46}$$

где су A_i амплитуде главних осцилација које одговарају сопственој вредности λ . Узмемо ли да је $A_n = 1$ онда из једначине (46) можемо одредити вредности N_1, N_2, \dots, N_n . Ако A_i представљају систем решења једначина (46) онда мора бити задовољен услов

$$\frac{N_1}{A_1} = \frac{N_2}{A_2} = \dots = \frac{N_n}{1} = \lambda = \omega^2. \tag{47}$$

Узму ли се сада вредности $N_i/N_n, \dots, 1$ за нове вредности A_i и поступак *понови* добиће се нове вредности N_i' . Ако овај процес конвергише то односи N_i/N_n конвергишу амплитудама A_i , а односи N_i/A_i сопственој вредности $\lambda = \omega^2$. Овако добијена сопствена вредност је *највећи корен фреквеншне једначине* (18, чл. 6.3.). Рачун се своди на множење матрица

$$\mathbf{K} \{A\} = \{N\}; \quad \begin{pmatrix} \frac{c_{11}}{a_1} & \frac{c_{12}}{a_1} & \dots & \frac{c_{1n}}{a_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{c_{n1}}{a_n} & \frac{c_{n2}}{a_n} & \dots & \frac{c_{nn}}{a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ N_n \end{pmatrix}, \tag{48}$$

где је \mathbf{K} несиметрична квадратна матрица елемената $k_{ik} = c_{ik}/a_i$, па је $k_{ik} \neq k_{ki}$.

У пракси је чест случај да се тражи *најмањи корен фреквеншне једначине*. Њега је лако одредити методом итерације ако се уместо матрице \mathbf{K} узме реципрочна матрица, па је

$$\mathbf{K}^{-1} \{A\} = \{N\}.$$

Елементи ове матрице одређују се по обрасцима (6).

У случају система са динамичким везама из једначина (10, чл. 6.1.) добијамо систем алгебарских једначина

$$c_i A_i = \omega^2 \sum_k a_{ik} A_k$$

па се проблем своди на претходни

$$\frac{A_i}{\omega^2} = \sum_k \frac{a_{ik}}{c_i} A_k, \quad \mathbf{K} \{A\} = \{N\}, \quad (49)$$

те се на овај начин одређује најмања сопствена вредност $\lambda = \omega^2$.

Пример. — 14.6. У случају вратила са три једнака диска (сл. 8.5.b) енергије су

$$E_k = 1/2 J (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2);$$

$$E_p = 1/2 c (2 \theta_1^2 - 2 \theta_1 \theta_2 + 2 \theta_2^2 - 2 \theta_2 \theta_3 + \theta_3^2).$$

Узимајући за сопствену вредност $\lambda = J \omega^2 / c$ и прве вредности амплитуда

$$A_1 = 2; \quad A_2 = -2; \quad A_3 = 1$$

биће:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -7/3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \Delta = 1 \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{11}{2} \begin{pmatrix} 5/11 \\ 9/11 \\ 1 \end{pmatrix}; \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{„} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -7/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/3 \\ -23/3 \\ 10/3 \end{pmatrix} = \frac{10}{3} \begin{pmatrix} 19/10 \\ -23/10 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{„} \quad \begin{pmatrix} 5/11 \\ 9/11 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{56}{11} \begin{pmatrix} 25/56 \\ 45/56 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ \text{„} \quad \begin{pmatrix} 19/10 \\ -23/10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61/33 \\ -75/33 \\ 33/33 \end{pmatrix} = \frac{33}{10} \begin{pmatrix} 61/33 \\ -75/33 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{„} \quad \begin{pmatrix} 25/56 \\ 45/56 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{283}{156} \begin{pmatrix} 126/283 \\ 227/283 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ \text{„} \quad \begin{pmatrix} 61/33 \\ -75/33 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 197/33 \\ -244/33 \\ 108/33 \end{pmatrix} = \frac{108}{33} \begin{pmatrix} 197/108 \\ -244/108 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{„} \quad \begin{pmatrix} 126/283 \\ 227/283 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1429}{283} \begin{pmatrix} 636/1429 \\ 1146/1429 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ \text{„} \quad \begin{pmatrix} 197/108 \\ -244/108 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 638/108 \\ -793/108 \\ 352/108 \end{pmatrix} = \frac{352}{108} \begin{pmatrix} 638/352 \\ -793/352 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ \text{„} \quad \begin{pmatrix} 638/352 \\ -793/352 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2069/352 \\ -2576/352 \\ 1145/352 \end{pmatrix} = \frac{1145}{352} \begin{pmatrix} 2069/1145 \\ -2576/1145 \\ 1 \end{pmatrix}; \end{array}$$

$$\lambda \approx 3; \quad 10/3; \quad 33/10; \quad \dots \quad 1145/352 = 3,253.$$

$$A_1 : A_2 : A_3 = 2069 : -2576 : 1145 = 1,72 : -2,24 : 1$$

како је

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 0$$

то су корени

$$\lambda_1 = 0,1981; \quad \lambda_2 = 1,555; \quad \lambda_3 = 3,247.$$

$$\lambda \approx 2/11; \quad 11/50 \dots 283/1420 \approx 0,1980$$

$$A_1 : A_2 : A_3 = 836 : 1146 : 1429 = 0,58 : 0,80 : 1.$$

ДЕО ТРЕЋИ

ОСЦИЛАЦИЈЕ ЕЛАСТИЧНИХ ТЕЛА

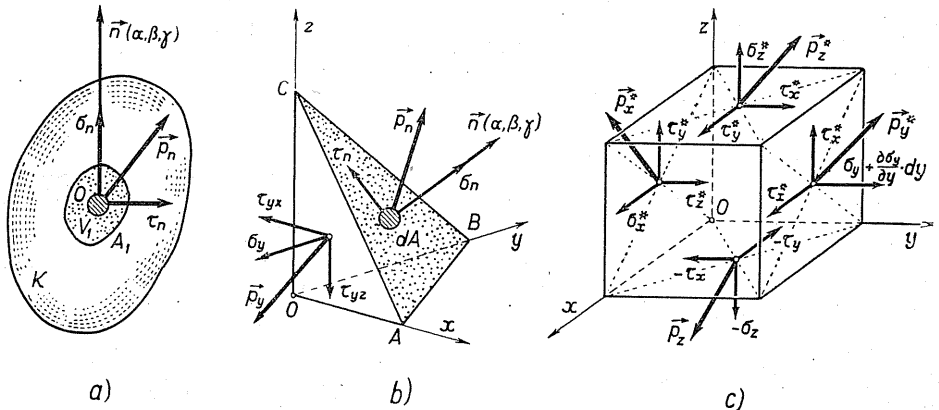
15. ОСНОВНЕ ЈЕДНАЧИНЕ РАВНОТЕЖЕ И ДИНАМИКЕ ЕЛАСТИЧНИХ ТЕЛА

15.1. Еластичне особине тела. — У досадашњим излагањима проучавали смо материјалне системе са *к* значним бројем *с*тешени слободe, чији су поједини елементи били *круша шела*. Међутим, у природи стварно постоје *чврста шела* која се под утицајем *спољашњих сила деформишу*. При овоме разликујемо две врсте спољашњих сила: *запреминске*, које нападају све тачке тела и које су сразмерне маси (на пример, тежа, сила инерције) и *површинске*, које дејствују у тачкама спољашње површине тела (притисак течности или гаса, узајамни притисак тела). *Унутрашње силе* између појединих честица тела, с обзиром на закон акције и реакције, немају утицаја.

Сва чврста тела имају мање више особину *еластичности*, да се по престанку дејства сила враћају у своје првобитно стање, ако су деформације мале чија је горња граница граница еластичности. Када деформације пређу ову границу тела постају *пластична*. Тело је *хомогено*, ако је, у ужем смислу речи, густина једнака у свима тачкама тела; у противном је *нехомогено*. Тело које у свим правцима има исте особине зове се *изотропно*, у противном је *анизотропно*. Прва су на пример гасови, течности и аморфна тела; друга, кристали и дрво. Поликристална тела (на пример, челик, мермер) могу се сматрати хомогеним и изотропним, ако се ограничимо на испитивање делова већих од самих кристала.

15.2. Услови за равнотежу еластичног тела. — Нека је тело (*K*), напрегнуто спољашњим силама (сл. 15.1.а). Замислимо да смо из њега издвојили део запремине V_1 ограничен површином A_1 , онда унутрашње силе у тачкама те површине представљају утицај осталог,

одстрањеног дела тела, те имају значај површинских сила. Нека је dA елемент те површине око тачке O са спољашњом нормалом $\vec{n}(\alpha, \beta, \gamma)$. Под *напоном* у тој тачки подразумева се количник резултате унутрашњих сила које нападају тај елемент и самог површинског елемента. Овај вектор \vec{p}_n се у општем случају не поклапа са нормалом површине (\vec{n}) и може се разложити у две компоненте: у правцу нор-



Сл. 15.1. — Напони и деформације еластичног тела

мале — *нормални напон* (σ_n) — и у тангенцијалној равни површине у тачки O — *тангенцијални напон* (τ_n), који се у тој равни може даље разложити у две ортогоналне компоненте. На овај се начин напон \vec{p}_n у свакој тачки површине A_1 да разложити у три међусобно управна правца, па је

$$\vec{p}_n = \sigma_n \vec{n} + \tau_{nT} \vec{T} + \tau_{nN} \vec{N} = p_{nx} \vec{i} + p_{ny} \vec{j} + p_{nz} \vec{k}. \quad (1)$$

Напрезање тела се познаје ако се знају напони у свакој тачки тела и за све равни кроз ту тачку. Узме ли се у тачки O елемент запремине у облику тетраедра $OABC$, (сл. 15.1.b), онда се напон за косу раван ABC може да одреди помоћу девет компонентних напона за координатне равни. Како су, према (1), напони за координатне равни

$$\begin{aligned} \vec{p}_x &= \sigma_x \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k}; & \vec{p}_y &= \tau_{yx} \vec{i} + \sigma_y \vec{j} + \tau_{yz} \vec{k}; \\ \vec{p}_z &= \tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{j} + \sigma_z \vec{k} \end{aligned} \quad (2)$$

то из услова за равнотежу сила, занемарујући запреминске силе, добијамо векторску једначину

$$\vec{p}_n = p_x \alpha + p_y \beta + p_z \gamma. \quad (3)$$

Скаларне једначине се називају *Кошијеве једначине* (Cauchy, 1822. год.):

$$\begin{aligned} p_{nx} &= (\vec{p}_n, \vec{i}) = \sigma_x \alpha + \tau_{yx} \beta + \tau_{zx} \gamma; & \alpha &= \cos \alpha, \\ p_{ny} &= (\vec{p}_n, \vec{j}) = \tau_{xy} \alpha + \sigma_y \beta + \tau_{zy} \gamma; & \beta &= \cos \beta, \\ p_{nz} &= (\vec{p}_n, \vec{k}) = \tau_{xz} \alpha + \tau_{yz} \beta + \sigma_z \gamma; & \gamma &= \cos \gamma. \end{aligned} \quad (4)$$

Оне нам, дакле, омогућују да се за сваку косу равну површину кроз тачку O одреде компонентни напони помоћу компонентних напона за три ортогоналне равни кроз ту тачку. Када је тачка O на спољашњој површини тела а коса раван ABC се поклапа са елементом површине, тада се у горњим једначинама уместо компонентних напона појављују пројекције сила за јединицу површине (*услови на површини*).

Да бисмо успоставили везу између напона и запреминских сила замислимо да смо из тела издвојили запремину у облику паралелепипеда, (сл. 15.1.с). Ако су $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$ напони за координатне равни, онда су напони за остале три равни $\vec{p}_x^*, \vec{p}_y^*, \vec{p}_z^*$, где је на пример, $\vec{p}_y^* = \vec{p}_y + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} dy$.

Из првог услова за равнотежу ($\Sigma \vec{F}_i = 0$) добија се векторска једначина

$$\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} + \vec{F}'_v = 0; \quad (5)$$

F'_v је сила по јединици запремине. Овој векторској једначини одговарају три скаларне једначине

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X'_v = 0; & \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y'_v = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z'_v = 0, & \end{aligned} \quad (6)$$

које се зову *Навијеве једначине* (L. Navier, 1821. год.).

Из другог услова, ($\vec{M}_O = 0$), следи да су главни momenti за координатне осе једнаки нули. Из услова $M_z = 0$, занемарујући мале величине вишег реда, добијамо $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, па су тангенцијални напони у два ортогоналним равнима једнаки по величини и усмерени ка

пресечној ивици тих равни. Ови напони се називају *конјуговани напони*. Из тога следи да су $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_z$; $\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_x$; $\tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_y$, па је стање напона одређено са шест компонентних напона: *Шри нормална* ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) и *Шри тангенцијална* (τ_x, τ_y, τ_z).

Познавајући компонентне напоне можемо помоћу Кошијевих једначина (4) одредити нормални напон

$$\sigma_n = (\vec{p}_n, \vec{n}) = p_{nx} \alpha + p_{ny} \beta + p_{nz} \gamma = \sigma_x \alpha^2 + \sigma_y \beta^2 + \sigma_z \gamma^2 + 2[\tau_x \alpha\beta + \tau_y \beta\gamma + \tau_z \alpha\gamma]. \quad (7)$$

Ако се из тачке O у правцу орта \vec{n} пренесе потег $r = 1/\sqrt{\sigma_n}$, онда су његове координате $\xi = r\alpha$, $\eta = r\beta$, $\zeta = r\gamma$, па из (7) добијамо *површину напона*

$$\sigma_x \xi^2 + \sigma_y \eta^2 + \sigma_z \zeta^2 + 2[\tau_x \xi\eta + \tau_y \eta\zeta + \tau_z \zeta\xi] = 1 \quad (8)$$

која представља *елипсоид*. Узму ли се главне осе елипсоида, горња једначина биће

$$\sigma_1 q_1^2 + \sigma_2 q_2^2 + \sigma_3 q_3^2 = 1; \quad (9)$$

овде су $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ *главни напони*. Према томе у свакој тачки тела постоје три узајамно управне равни за које су укупни напони једнаки главним напонима, те су тангенцијални напони једнаки нули. Елипсоид чије су полуосе једнаке главним напонима назива се *Ламеов елипсоид напона*. Када су два напона једнака ($\sigma_1 = \sigma_2$) елипсоид је обртни; за $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ биће сфера, а за $\sigma_3 = 0$ претвара се у *елипсу напона* (равно стање напона).

Како је за главне осе

$$\sigma_n = \sigma_1 \alpha^2 + \sigma_2 \beta^2 + \sigma_3 \gamma^2,$$

то је

$$p_n^2 = \sigma_1^2 \alpha^2 + \sigma_2^2 \beta^2 + \sigma_3^2 \gamma^2,$$

па је тангенцијални напон

$$\tau_n^2 = p_n^2 - \sigma_n^2 = \sigma_1^2 \alpha^2 + \sigma_2^2 \beta^2 + \sigma_3^2 \gamma^2 - (\sigma_1 \alpha^2 + \sigma_2 \beta^2 + \sigma_3 \gamma^2)^2.$$

Због $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ највећи тангенцијални напон одређује се из условног екстремума, те су *главни тангенцијални напони*:

$$\tau_I = \pm 1/2 (\sigma_2 - \sigma_3); \quad \tau_{II} = \pm 1/2 (\sigma_3 - \sigma_1); \quad \tau_{III} = \pm 1/2 (\sigma_1 - \sigma_2). \quad (10)$$

15.3. Односи између напона и деформација. Хуков закон. —

При деформацији тачка N тела, одређена вектором положаја $\vec{r}(x, y, z)$, прелази у положај N' , (сл. 15.2.а), одређен у односу на прву *релативним вектором положаја* — *померање* —

$$\vec{s} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}, \quad (11)$$

чије су координате функције координата (x, y, z) . Деформацију елементарног паралелепипеда знаћемо ако проучимо деформације његових ивица. Због тога посматрајмо промене двеју ивица \overline{AB} и \overline{AC} , дужина dx и dy , (сл. 15.2.b). Замислимо

ли ивицу \overline{AB} као штап, онда ће она услед translације, ротације и деформације прећи у положај $\overline{A'B''}$. Прираштај дужине AB износи $\frac{\partial u}{\partial x} dx$, када се занемаре мале величине вишег реда. Однос овог издужења према првобитној дужини назива се *специфично издужење* или *дилатација*, $\bar{\epsilon}_x = \partial u / \partial x$.

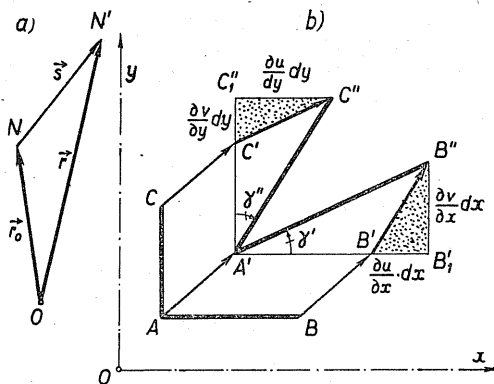
Ивица $\overline{A'B'}$ заокренула се око A' за угао γ' , те је $\text{tg } \gamma' = \frac{B'B_1}{A'B_1} = (\partial v / \partial x) dx / [1 + (\partial u / \partial x) dx] \approx \partial v / \partial x \approx \gamma'_{xy}$, ако се занемаре мале величине у односу на јединицу. На исти начин нашли бисмо да дилатација ивице \overline{AC} износи $\epsilon_y = \partial v / \partial y$, док је угао њеног заокретања $\text{tg } \gamma'' = \frac{C''C_1''}{A'C_1''} = (\partial u / \partial y) dy / [1 + (\partial v / \partial y) dy] \approx \partial u / \partial y = \gamma''_{xy}$. Услед овога прави угао код A се мења за угао $\gamma_{xy} = \gamma'_{xy} + \gamma''_{xy} \approx (\partial v / \partial x) + (\partial u / \partial y)$ који се зове *клизање*. На потпуно исти начин одредили бисмо и трећу дилатацију и два клизања у другим двома координатним равнинама, па је деформација одређена са шест компонентних деформација — *шири дилатације* и *шири клизања*:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad (12a)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (12b)$$

Дилатације се сматрају позитивним при издужењу, а клизања при смањењу правог угла.

Слично површини напона (8) може се добити и површина деформације ако се у истој једначини уместо компонентних напона ставе компонентне деформације. Како дилатације могу бити позитивне, негативне и једнаке нули, то је површина деформације централна површина другог реда и не мора бити елипсоид. Уведе ли се систем глав-



Сл. 15.2. — Вектор еластичног померања

них оса добиће се *главне дилашације*. Пошто су у овом случају клизања једнака нули, то осе главних праваца остају међусобно управне.

Ако се главни правци деформација узму за главне осе онда је промена запремине паралелепипеда

$$\begin{aligned}\Delta V = V' - V &= dx(1 + \varepsilon_1) dy(1 + \varepsilon_2) dz(1 + \varepsilon_3) - dx dy dz \approx \\ &\approx (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) V.\end{aligned}$$

Однос промене ове запремине према првобитној назива се *запреминска дилашација* и има инваријантну вредност*

$$\varepsilon_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{s}. \quad (13)$$

Познају ли се координате вектора померања (u, v, w) тада се диференцирањем одређују све компонентне деформације (12).

Међутим, при обрнутом проблему одређивања координата вектора померања када су познате компонентне деформације мора се, сем интегралења, водити рачуна и о томе да су заиста та померања могућа за те деформације. Због тога морају бити задовољени Сен Венови услови компатибилности (сагласности) деформација (Saint Venant, 1864. год.). Из (12a) биће

$$\partial \varepsilon_x / \partial y = \partial^2 u / \partial x \partial y; \quad \partial^2 \varepsilon_x / \partial y^2 = \partial^3 u / \partial x \partial y^2, \quad \partial^2 \varepsilon_y / \partial x^2 = \partial^3 v / \partial y \partial x^2$$

и сабирањем, с обзиром на (12b), следи услов

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_z}{\partial x \partial y}. \quad (14a)$$

Из (12b), с обзиром на (12a), биће

$$(\partial \gamma_x / \partial x) + (\partial \gamma_y / \partial y) - (\partial \gamma_z / \partial z) = 2 \partial^2 w / \partial x \partial y; \quad \partial^2 \varepsilon_z / \partial x \partial y = \partial^3 w / \partial x \partial y \partial z$$

па је

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_z}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \quad (14b)$$

* $(1 \pm \alpha)(1 \pm \beta) \approx 1 \pm \alpha \pm \beta; \quad (1 \pm \alpha)^n \approx 1 \pm n\alpha;$

$(1 \pm \alpha) : (1 \pm \beta) \approx 1 \pm \alpha \mp \beta; \quad \alpha \ll 1; \quad \beta \ll 1.$

Сличним поступком добили бисмо још четири услова компатибилности, те су:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_z}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_z}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial y \partial z}; & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_z}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial z \partial x}; & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_z}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \quad (14c)$$

Стање напона је одређено са шест компонентних напона које смо извели чисто статичким путем. Стање деформација је одређено са шест компонентних деформација које смо извели геометријско-кинематичким путем. Међутим, за конкретно решавање проблема мора се водити рачуна и о физичким особинама тела, те мора постојати нека зависност између напона и деформација. Ако између компонентних напона и деформација постоји линеарна зависност, онда се такво еластично тело назива идеално еластично тело. Таква веза би на пример била

$$\begin{aligned} \sigma_x &= a_{11} \varepsilon_x + a_{12} \varepsilon_y + a_{13} \varepsilon_z + a_{14} \gamma_x + a_{15} \gamma_y + a_{16} \gamma_z; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (15)$$

где су a_{ik} коэффицијенти еластичности који зависе од координата. Њих има 36. Међутим, у случају хомогеног тела ови су коэффицијенти константни. Због тога између њих постоји 15 веза, јер су $a_{ik} = a_{ki}$, $i \neq k$, те се број коэффицијената своди на 21. Из особина изотропности и еластичности тела, а како је утицај компонентног напона на одговарајућу компонентну дилатацију исти, (тј., σ_x утиче на ε_y исто тако као и σ_y на ε_x), то су коэффицијенти $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a$, $a_{44} = a_{55} = a_{66} = b$. Ако се промени смер једне осе, на пример y , онда се нормални напони (15) и дилатације не мењају, али клизања γ_x и γ_z мењају знак, па морају бити коэффицијенти $a_{14} = a_{16} = 0$. Промени ли се смер осе z биће и $a_{15} = 0$. Ово нам показује да нормални напони нису зависни од клизања, нити пак, тангенцијални напони од дилатација, те се број коэффицијената своди на 8, па су једначине (15) облика:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= a \varepsilon_x + a_{12} \varepsilon_y + a_{13} \varepsilon_z; & \tau_x &= b \gamma_x + a_{45} \gamma_y + a_{46} \gamma_z; \\ \sigma_y &= a_{12} \varepsilon_x + a \varepsilon_y + a_{23} \varepsilon_z; & \tau_y &= a_{54} \gamma_x + b \gamma_y + a_{56} \gamma_z; \\ \sigma_z &= a_{13} \varepsilon_x + a_{23} \varepsilon_y + a \varepsilon_z; & \tau_z &= a_{64} \gamma_x + a_{65} \gamma_y + b \gamma_z. \end{aligned} \quad (16)$$

Како утицај нормалних напона σ_y и σ_z на дилатацију ϵ_x мора бити исти као и утицај напона σ_x и σ_z на ϵ_y , односно σ_x и σ_y на ϵ_z , то су $a_{12} = a_{13} = a_{23}$, па нормални напони зависе само од коефицијената a и a_{12} . Ако се у изразу за τ_x промени смер осе x , онда се $\tau_x = \tau_y$; и $\gamma_x = \gamma_{yz}$ не мењају, али се друга два клизања мењају знаком, па су $a_{45} = a_{46} = 0$. На исти начин показали бисмо да су и $a_{54} = a_{56} = a_{64} = a_{65} = 0$, те једначине (16) постају:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= a \epsilon_x + a_{12} (\epsilon_y + \epsilon_z), & \tau_x &= b \gamma_x, \\ \sigma_y &= a \epsilon_y + a_{12} (\epsilon_z + \epsilon_x), & \tau_y &= b \gamma_y, \\ \sigma_z &= a \epsilon_z + a_{12} (\epsilon_x + \epsilon_y), & \tau_z &= b \gamma_z. \end{aligned} \quad (16a)$$

Напони, дакле, зависе само од *три коефицијента*. И ова три коефицијента нису међусобно независна. Како смо до сада ротацију оса вршили само за 180° , извршимо сада ротацију око z осе за произвољни угао φ , онда је, с обзиром на (16a), напон

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + \tau_z \sin 2\varphi = a (\epsilon_x \cos^2 \varphi + \epsilon_y \sin^2 \varphi) + \\ &+ a_{12} (\epsilon_x \sin^2 \varphi + \epsilon_y \cos^2 \varphi + \epsilon_z) + b \gamma_z \sin 2\varphi = a \epsilon_\xi + a_{12} (\epsilon_\eta + \epsilon_z). \end{aligned}$$

Како су дилатације за нове осе

$$\epsilon_\xi = \epsilon_x \cos^2 \varphi + \epsilon_y \sin^2 \varphi + 1/2 \gamma_z \sin 2\varphi, \quad \epsilon_\eta = \epsilon_x \sin^2 \varphi + \epsilon_y \cos^2 \varphi - 1/2 \gamma_z \sin 2\varphi$$

то изједначењем добијамо услов $2b = a - a_{12}$, те остају само *два независна коефицијента еластичности*, јер је трећи везан горњом релацијом. У техничкој пракси уводе се уместо ових коефицијената *Ламеови коефицијенти*

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} = a_{12}; \quad \mathbf{G} = \frac{E}{2(1+\mu)} = b; \quad a = \lambda + 2\mathbf{G}; \quad (17)$$

где су E *Јангов модул еластичности*, μ *Поасонов коефицијент* а \mathbf{G} *модул клизања*, везан са E обрасцем $\mathbf{G} = E/2(1+\mu) \approx E/2,6$.

С обзиром на ове односе могу се написати једначине које дају везе између напона и деформација, односно компонентних померања у облику:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \epsilon + 2\mathbf{G} \epsilon_x; & \tau_x &= \mathbf{G} \gamma_x; & E \epsilon_x &= \sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z); \\ (a) \cdot \sigma_y &= \lambda \epsilon + 2\mathbf{G} \epsilon_y; & (b) \tau_y &= \mathbf{G} \gamma_y; & E \epsilon_y &= \sigma_y - \mu (\sigma_z + \sigma_x); \\ \sigma_z &= \lambda \epsilon + 2\mathbf{G} \epsilon_z; & \tau_z &= \mathbf{G} \gamma_z; & E \epsilon_z &= \sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y). \end{aligned} \quad (18)$$

где је $\varepsilon = \varepsilon_v$ запреминска дилатација. Ове једначине изражавају уопштени Хуков закон за идеално еластично шело.

15.4. Основне диференцијалне једначине равнотеже еластичног тела. — У проблемима теорије еластичности задато је еластично тело (еластичне особине E , ρ или \mathbf{G}), спољашње запреминске силе и гранични услови на површини а треба решити две врсте проблема : 1^о одредити координате вектора померања шачака као функције координата, при чему треба задовољити услове за равнотежу (6) уз граничне услове (4), и 2^о одредити компоненти напона у функцији од координата, при чему треба задовољити једначине (6) и (4), а одговарајуће деформације морају задовољити услове компатибилности (14).

Ради решења првог — основног — проблема треба успоставити везу између координата померања и запреминских сила. Ако се диференцирају једначине (18a) и унесу у једначине равнотеже (6) добијају се једначине

$$\begin{aligned} (\lambda + \mathbf{G}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \mathbf{G} \Delta u + X'_v = 0; \quad (\lambda + \mathbf{G}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \mathbf{G} \Delta v + Y'_v = 0; \\ (\lambda + \mathbf{G}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \mathbf{G} \Delta w + Z'_v = 0; \quad \varepsilon = \varepsilon_v, \end{aligned} \quad (19)$$

где је $\Delta u = (\partial^2 u / \partial x^2) + (\partial^2 u / \partial y^2) + (\partial^2 u / \partial z^2)$ Лапласов оператор. Ове једначине јесу основне диференцијалне једначине за равнотежу еластичног шела или Ламеове диференцијалне једначине. Оне су од основног значаја у теорији еластичности, јер садрже у себи механичке, геометријске и физичке елементе на којима је основана ова научна дисциплина. Стварно, оне у себи садрже услове за равнотежу, координате померања и еластичне особине тела, као и густину ρ , особину материјалности, те у заједници са граничним условима (4) омогућају решење проблема.

Када су запреминске силе једнаке нули, а како је $\frac{\partial}{\partial x} \Delta f(x, y, z) = \Delta \frac{\partial f}{\partial x}$, то диференцирањем и сабирањем једначина (19) следи да је $\Delta \varepsilon = 0$, па је запреминска дилатација хармонијска функција. Како је $\Delta (\partial \varepsilon / \partial x) = \partial (\Delta \varepsilon) / \partial x = 0$ то применом оператора Δ на једначине (19) следи да су

$$\Delta^2 u = 0, \quad \Delta^2 v = 0, \quad \Delta^2 w = 0. \quad (20)$$

Координате померања су бихармонијске функције координата.

Ради решења другог задатка треба довести у везу услове компатибилности (14) са напонима, помоћу Хуковог закона (18). Претпоставимо да су запреминске силе једнаке нули, или константе, и диференцирајмо Ламеове једначине (19), прву по x , другу по z а трећу по y , па саберимо две последње, тада добијемо

$$(\lambda + \mathbf{G}) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \mathbf{G} \Delta \varepsilon_x = 0; \quad 2(\lambda + \mathbf{G}) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y \partial z} + \mathbf{G} \Delta \gamma_x = 0. \quad (a)$$

Због везе између инваријаната деформација и напона (18с), $\varepsilon = (1 - 2\mu) \sigma / E$, где је $\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$, дилатација је, према (18а), $\varepsilon_x = (\sigma_x - \lambda \varepsilon) / 2 \mathbf{G}$, па, због $\Delta \varepsilon = 0$ биће $\Delta \varepsilon_x = \Delta \sigma_x / 2 \mathbf{G}$. Уносећи ово у прву једначину (а), с обзиром на (17), јер је $1 + \mu = (\lambda + 2 \mathbf{G}) / 2(\lambda + \mathbf{G})$, добијемо једначину $\Delta \sigma_x + [1 / (1 + \mu)] \partial^2 \varepsilon / \partial x^2 = 0$; а цикличком пермутацијом још две једначине. Из друге једначине (а), с обзиром на Хуков закон (18с), добијемо једначину $2 / (\lambda + \mathbf{G}) (\partial^2 \varepsilon / \partial y \partial z) + \Delta \tau_x = 0$, а цикличком пермутацијом још две једначине. Ових шест једначина

$$\begin{aligned} (1 + \mu) \Delta \sigma_x + (\partial^2 \sigma / \partial x^2) &= 0, & (1 + \mu) \Delta^2 \tau_x + (\partial^2 \sigma / \partial y \partial z) &= 0, \\ (1 + \mu) \Delta \sigma_y + (\partial^2 \sigma / \partial y^2) &= 0, & (1 + \mu) \Delta^2 \tau_y + (\partial^2 \sigma / \partial z \partial x) &= 0, \\ (1 + \mu) \Delta \sigma_z + (\partial^2 \sigma / \partial z^2) &= 0, & (1 + \mu) \Delta^2 \tau_z + (\partial^2 \sigma / \partial x \partial y) &= 0, \end{aligned} \quad (20a)$$

јесу познате *Белтрамијеве диференцијалне једначине* (Beltrami, 1892.). Оне са условима за равнотежу (6) чине потпуни систем једначина за одређивање компонентних напона. Уз ове једначине долазе и гранични услови (4).

Мичел (Michel) је 1900. год. ове једначине проширио на општи случај када постоје и запреминске силе. Његове једначине имају облик:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{q_i} + \frac{1}{1 + \mu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial q_i^2} + \frac{\mu}{1 - \mu} \operatorname{div} \vec{F} + 2 \frac{\partial Q' v}{\partial q_i} &= 0, & q_i &= x, y, z \\ Q' v &= X', Y', Z' & & \\ \Delta \tau_{q_i} + \frac{1}{(1 + \mu)} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial q_j \partial q_k} + \frac{\partial Q'_j}{\partial q_k} + \frac{\partial Q'_k}{\partial q_j} &= 0; & i &\neq j \neq k. \end{aligned} \quad (20b)$$

15.5. Деформациони рад (потенцијална енергија). — Када се еластично тело деформише под утицајем сила, тада се мењају нападне тачке истих, те оне врше рад који се претвара у *потенцијалну енергију (деформациони рад)*. По престанку дејства ових сила, ова ће се енергија претворити у кинетичку енергију која ће вратити тело у своје првобитно стање. Као што је познато из отпорности материјала специфични деформациони рад при истезању, (тј. рад за јединицу запремине), је $\mathbf{A}'_{de} = 1/2 \sigma_x \varepsilon_x$ а при смицању $\mathbf{A}'_{ds} = 1/2 \tau \gamma$. Према томе специфични деформациони рад напрегнутог паралелепипеда биће

$$\mathbf{A}'_d = 1/2 (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z). \quad (21)$$

Овај израз представља *Клџејронов образац** (Clapeyron).

* Отпорност материјала, чл. 9.5.

С обзиром на Хуков закон (18) може се специфични деформациони рад изразити у функцији или само од *најона* или само од *деформација*:

$$A'_d = \frac{1}{4G} \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{\mu}{1 + \mu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + 2(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) \right] \quad (21a)$$

или

$$A'_d = G \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{1}{2} (\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2) \right] + \frac{1}{2} \lambda \varepsilon^2. \quad (21b)$$

Парцијални изводи функције (21a) по напонима дају компонентне дилатације, а функције (21b) по дилатацијама компонентне напоне, па је на пример:

$$\frac{\partial A'_d}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{2G} \left[\sigma_x - \frac{\mu}{1 + \mu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right] = \varepsilon_x; \quad \frac{\partial A'_d}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x$$

што представља познате *Кастилјанове обрасце* (Castigliano, 1873. год.).

Познаје ли се специфични деформациони рад, може се израчунати *шопални деформациони рад* помоћу обрасца

$$A_d = \iiint_{(V)} A'_d dV. \quad (22)$$

Специфични деформациони рад троши се једним делом на промену *зајремине* а другим делом на промену *облика*. Због тога мора бити у првом случају запреминска дилатација $\varepsilon_V \neq 0$, у другом је $\varepsilon_V = 0$. Тада морају у првом случају тангенцијални напони бити једнаки нули, а нормални једнаки и управни на одговарајуће равни као и у случају хидростатичког притиска ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$). Из (18c) је $\varepsilon_V = 3(1 - 2\mu)p/E$, па је $p = -K\varepsilon_V$, где је $K = E/3(1 - 2\mu)$ *модул компресије*. Допунски нормални напони $\sigma'_x = \sigma_x - p$; $\sigma'_y = \sigma_y - p$; $\sigma'_z = \sigma_z - p$, као и тангенцијални напони учествују у промени облика (форме — defiguration). Како је

$$\sigma'_x - \sigma'_y = \sigma_x - \sigma_y; \quad \sigma'_y - \sigma'_z = \sigma_y - \sigma_z; \quad \sigma'_z - \sigma'_x = \sigma_z - \sigma_x$$

и

$$(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 = 3(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2),$$

то уносећи ово у (21a) добијамо:

$$\mathbf{A}'_d = \frac{1}{4 \mathbf{G}} \left\{ \frac{1-2\mu}{3(1+\mu)} \sigma^2 + \frac{1}{3} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + 2(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) \right\}.$$

Стога су специфични деформациони радови који мењају запремину и облик (Gestaltsänderungsarbeit):

$$\mathbf{A}'_{dV} = \frac{1}{4 \mathbf{G}} \frac{1-2\mu}{3(1+\mu)} \sigma^2 = \frac{1-2\mu}{6E} \sigma^2; \quad (23a)$$

$$\mathbf{A}'_{dF} = \frac{1}{12 \mathbf{G}} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)]. \quad (23b)$$

За главне напоне горњи изрази постају једноставнији, јер су тада тангенцијални напони једнаки нули. Специфични радови не зависе од закона промене напона, већ само од њихових коначних вредности, а како не зависе ни од избора координатног система, то су инваријантни.

15.6. Динамичке једначине еластичног тела. — Нека се честица тела пре деформације налазила у положају N , (сл. 15.2.a), после деформације биће у N' , па је $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}$. Диференцирањем ове једначине, пошто је померање $\vec{s} = \vec{s}(r, t)$, добија се брзина честице

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} + (\vec{T}, \nabla) \vec{s};$$

први део је локални а други стационарни извод вектора померања. Како се проучавају мале деформације у околини тачке N , може се сматрати да је $\vec{s} = \vec{s}(t)$, па се може занемарити стационарни део извода; тада су брзина и убрзање $\vec{v} = \dot{\vec{s}}$, $\vec{a} = \ddot{\vec{s}}$.

Основну динамичку једначину еластичног тела можемо добити помоћу Даламберовог принципа додајући Навијеовој једначини (5) силу инерције, $-m \vec{a} = -m (\partial^2 \vec{s} / \partial t^2)$, па је

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} = \text{div } \vec{p} + \vec{F}'_V \quad (24)$$

? div p je skalar

или у скаларном облику

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + X'_V; & \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} + Y'_V; \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z'_V. \end{aligned} \quad (24a)$$

Пошто при овом извођењу нису претпостављене никакве везе између напона и деформација, то динамичке једначине добијамо и из Ламеових једначина (19). У векторском облику биће

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} = (\lambda + \mathbf{G}) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{s} + \mathbf{G} \Delta \vec{s}}, \quad (25)$$

или у скаларном облику

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + \mathbf{G}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \mathbf{G} \Delta u + X'_V; & \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (\lambda + \mathbf{G}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \mathbf{G} \Delta v + Y'_V, \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (\lambda + \mathbf{G}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \mathbf{G} \Delta w + Z'_V, \end{aligned} \quad (25a)$$

јер је запреминска дилатација $\varepsilon = \varepsilon_V = \operatorname{div} \vec{s}$.

Како су Ламеове константе карактеристике дотичног еластичног тела, то су горње симултане парцијалне диференцијалне једначине (25a) довољне за одређивање компонентних померања (u , v , w), уз напред задате граничне и почетне услове.

15.7. Таласање. Таласна једначина. — Када се изазове *поремећај* равнотежног стања еластичног тела на које не дејствују спољашне силе, наступиће кретање — *треперење* — честица. Оно се преноси кроз тело, те настаје *таласни процес*, који је *окарактерисан шиме* да у сваком месту еластичне средине влада исто стање *поремећаја* само са *задоцњавањем* фазе. Треперење честица се може извести на два начина: 1^о када се *поремећај* изазове у *ненапрегнутом стању* и 2^о у *напрегнутом стању*. Како су *жица* и *мембрана* неотпорне према савијању, то могу *треперити* само у *напрегнутом стању*. Међутим, *шипке*, *шпайови* и *плоче* опирају се савијању, па могу *треперити* на оба горња начина.

Ставимо ли да је $F'_V = 0$ динамичка једначина (25), која се примењује при проучавању таласног процеса, постаје

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} = (\lambda + \mathbf{G}) \text{grad div } \vec{s} + \mathbf{G} \Delta \vec{s}. \quad (26)$$

Векторска функција померања \vec{s} дефинише *сложено векторско поље* ($\text{div } \vec{s} \neq 0$; $\text{rot } \vec{s} \neq 0$), али се увек може узети у облику збира $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$. Прва компонента представља *поштенцијално или безвршложно поље* ($\text{div } \vec{s}_1 \neq 0$; $\text{rot } \vec{s}_1 = 0$) а друга *вршложно (соленоидно) поље* ($\text{div } \vec{s}_2 = 0$; $\text{rot } \vec{s}_2 \neq 0$). Због тога се може једначина (26) написати у облику

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial^2 \vec{s}_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \vec{s}_2}{\partial t^2} \right) &= (\lambda + \mathbf{G}) \text{grad div } \vec{s}_1 + \mathbf{G} (\Delta \vec{s}_1 + \Delta \vec{s}_2) = \\ &= (\lambda + 2\mathbf{G}) \text{grad div } \vec{s}_1 - \mathbf{G} \text{rot rot } \vec{s}_2, \end{aligned} \quad (27)$$

јер је уопште $\Delta \vec{s} = \text{grad div } \vec{s} - \text{rot rot } \vec{s} = \nabla(\nabla \cdot \vec{s}) - [\nabla, [\nabla \cdot \vec{s}]]$. Ако се (27) помножи скаларно Хамилтоновим оператором ∇ , а како је $\nabla(\partial^2 \vec{s}/\partial t^2) = \partial^2(\nabla \cdot \vec{s})/\partial t^2 = 0$, јер се операција ∇ може као независна заменити операцијом диференцирања по t , и $\Delta \vec{s}_1 = \text{grad div } \vec{s}_1$ а $\text{rot } \vec{s}_2 = 0$, она постаје

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{div } \vec{s}_1 - (\lambda + 2\mathbf{G}) \Delta \text{div } \vec{s}_1 = \text{div} \left(\frac{\partial^2 \vec{s}_1}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mathbf{G}}{\rho} \Delta \vec{s}_1 \right) = 0$$

те је

$$\frac{\partial^2 \vec{s}_1}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mathbf{G}}{\rho} \Delta \vec{s}_1 = c_1^2 \Delta \vec{s}_1. \quad (28)$$

Када се, пак, (27) помножи векторским оператором ∇ , а како је $\text{rot}(\partial^2 \vec{s}_1/\partial t^2) = (\partial^2/\partial t^2) \text{rot } \vec{s}_1 = 0$, и $\text{rot } \Delta \vec{s}_2 = \Delta \text{rot } \vec{s}_2$, то она постаје

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{rot } \vec{s}_2 - \mathbf{G} \Delta (\text{rot } \vec{s}_2) = \text{rot} \left(\rho \frac{\partial^2 \vec{s}_2}{\partial t^2} - \mathbf{G} \Delta \vec{s}_2 \right) = 0$$

те је

$$\frac{\partial^2 \vec{s}_2}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{G}}{\rho} \Delta \vec{s}_2 = c_2^2 \Delta \vec{s}_2. \quad (29)$$

На овај се начин једначина (27) распада на две једначине (28) и (29), истог облика, које се разликују само константама c_1 и c_2 . Према томе је таласно кретање састављено из два различита таласна кретања. Прво кретање је *безвршљожно* (28), те су и таласи *безвршљожни* или *компресиони*; друго је *вршљожно* (29), па су и таласи *вршљожни* или *еквиволумни*, јер је $\operatorname{div} \vec{s}_2 = \varepsilon = 0$, те нема промене запремине. Како је однос $c_1/c_2 > 1$ то је константа c_1 компресионих таласа увек *већа* од константе c_2 еквиволумних таласа.

Једначине облика (28) или (29) представљају *таласне једначине*. У специјалном случају када је померање функција *само једне координате* и *времена* t , на пример, $\vec{s} = \vec{s}(x, t)$, тада из основних динамичких једначина (25a) добијамо три таласне једначине

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (30)$$

Како су тада и померања u, v, w функције од x и t , простирање таласа врши се у правцу осе x . Све честице које се налазе у неком тренутку у равни управној на осу x трепере у истој фази. Због тога се овакви таласи називају *равански*, и то *лонгитудинални*, дефинисани првом једначином (30) и *трансверзални*, дефинисани другим двама једначинама (30). С обзиром на константе c_i види се да су лонгитудинални таласи компресиони а трансверзални *вртложни* (еквиволумни).

Док се *равански* таласи простиру само у једном правцу, *дотл* код *ферних таласа*, изазваних поремећајем у једној тачки средине, померања зависе од растојања тачке од извора поремећаја. У овоме случају је таласна једначина облика

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi, \quad (31)$$

где је $\varphi = \varphi(r, t)$. Како је $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, то је

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \varphi)$$

па се таласна једначина (31) своди на облик

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \varphi) \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 (r \varphi)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \varphi), \quad (31a)$$

те је истог облика као и прва једначина (30) ако се стави да је $r \varphi = u$.

Свака се таласна једначина, дакле, своди на облик

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \quad (32)$$

Општи интеграл ове парцијалне диференцијалне једначине другог реда може се одредити по *Даламберовој методи* (1747. год.), ако се уведу нове променљиве

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct.$$

Тада су

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right);$$

па се једначина (32) своди на облик

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0 \quad (33)$$

те је

$$\partial u / \partial \xi = \varphi'(\xi).$$

Општи интеграл једначине (32) је облика

$$u(x, t) = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct), \quad (34)$$

где су φ и ψ произвољне функције, које се одређују из почетних услова кретања.

Нека су ти услови: за $t=0$, $u=f(x)$, $\partial u/\partial t=F(x)$, онда из (34) добијамо

$$\varphi(\xi) + \psi(\xi) = f(\xi); \quad c \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) = F(\xi).$$

Из друге једначине интегралом добијамо

$$\varphi(\xi) - \psi(\xi) = -\frac{1}{c} \int_0^{\xi} F(z) dz + C,$$

где је z нова променљива а $C = \varphi(0) - \psi(0) = 0$ интеграциона константа. Решавањем ових једначина добијамо

$$\varphi(\xi) = 1/2 f(\xi) - (1/2c) \int_0^{\xi} F(z) dz; \quad \psi(\xi) = 1/2 f(\xi) + (1/2c) \int_0^{\xi} F(z) dz,$$

па је и

$$\psi(\eta) = 1/2 f(\eta) + (1/2c) \int_0^{\eta} F(z) dz,$$

те је

$$u = \frac{1}{2} [f(\xi) + f(\eta)] + \frac{1}{2c} \int_{\xi}^{\eta} F(z) dz$$

или

$$u = 1/2 [f(x - ct) + f(x + ct)] + 1/2c [\Phi(x - ct) - \Phi(x + ct)]; \quad (35)$$

$\Phi(\xi)$ је неодређени интеграл функције $-(1/c)F(\xi)$.

Ако је почетна брзина једнака нули онда је решење (35) облика

$$u(x, t) = 1/2 [f(x - ct) + f(x + ct)], \quad \text{са } u(x, 0) = f(x). \quad (35a)$$

Када је $\psi(x + ct) = 0$, тада функција $u = \varphi(x - ct)$ представља периодички процес, јер за $x=0$, $t=0$ има вредност $\varphi(0)$ исту као и за случај да је $x - ct = 0$. Сем тога за сваку вредност $x = ct$ она такође има исту вредност као $\varphi(0)$, те се крива $\varphi(x)$ помера дуж осе x , према закону кретања $x = ct$, тј. брзином c . Према томе константа c , која зависи од еластичних особина тела, представља брзину просирања

шаласа (фазну брзину). Функција $\psi(x+ct)$ представља исти процес само у супротном смеру. Први талас ($c > 0$) зове се директни, други је индиректни. Према томе је таласање сложено из двају таласања исте фазне брзине само супротног смера.

Ако су функције

$$\varphi(x-ct) \quad \text{и} \quad \psi(x+ct)$$

просте тригонометријске функције облика

$$A \cos k(x \pm ct)$$

или

$$A \sin k(x \pm ct)$$

решења се називају чисто периодичка решења, периода $T = 2\pi/kc$, шаласне дужине $l = cT$, кружне фреквенције $\omega = ck$.

Суперпозицијом добијамо таласање облика

$$u = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{l} - \frac{t}{T} \right) + A \sin 2\pi \left(\frac{x}{l} + \frac{t}{T} \right) = 2A \sin 2\pi \frac{x}{l} \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

За $x/l = n/2$, где је n цео број, је $u = 0$ те ове тачке, тзв. чворови, не осцилују. Распојање два узастопна чвора једнако је половини шаласне дужине. Овакви таласи називају се спојећи шаласи.

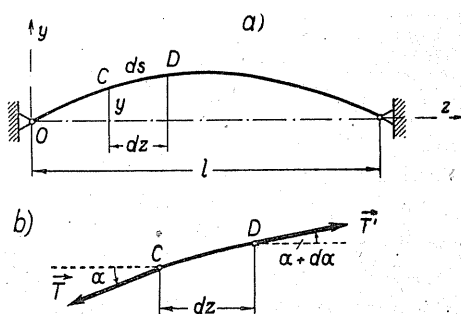
16. ОСЦИЛАЦИЈЕ ЖИЦЕ

Под жицом подразумевамо еластично тело влакнастог облика, врло малог попречног пресека у односу на дужину. Она се не опире савијању па се осциловање (треперење) може извести само у напетом стању. При томе могу бити лонгишудиналне и шрансверзалне осцилације. Ове друге су много важније, нарочито у акустици. Сем тога осцилације могу бити слободне, принудне и амортизоване.

16.1. Трансверзалне осцилације жице. — 16.1.1. Слободне осцилације. — Нека је жица дужине l затегнута на крајевима A и B , (сл. 16.1.a), онда у сваком попречном пресеку дејствује нормални напон (σ) који пада у правац саме жице. Због потпуне савитљивости жице тангенцијални напони не дејствују. Ако се жица изведе из равнотежног

напетог положаја (на пример, ударом или повлачењем) и пусти наступиће трансверзалне осцилације у равни Ayz , па је померање сваке тачке $v = v(z, t) = y(z, t)$, јер се сматра да су иста врло мала. Замислимо да смо из жице извадили елемент дужине ds . Како је продужење $ds = \sqrt{(dy^2 + dz^2)^{1/2}} = dz(1 + y'^2)^{1/2}$ врло мало услед незнатне промене напона, то се може узети да је $ds \approx dz$, и занемарити прираштај нормалног

напона ($\partial\sigma/\partial z$) dz . Како је овај прираштај врло мали то не утиче на треперење жице, јер исто изазивају само промене правца напона у крајњим тачкама елемента. Занемарујући утицај спољашних сила, (на пример теже), који је врло незнатан, онда на елемент ds дејствује резултанта $\vec{F} = \sigma A (\vec{T}' - \vec{T})$, где је $\sigma = \sigma_0$ почетни напон затезања а A површина попречног пресека жице. Координате ове силе биће:



Сл. 16.1. — Слободне трансверзалне осцилације жице

$$Z = \sigma A [\cos(\alpha + d\alpha) - \cos \alpha]; \quad Y = \sigma A [\sin(\alpha + d\alpha) - \sin \alpha].$$

Пошто посматрамо врло мале осцилације то су и углови нагиба врло мали, па се може узети да је $\cos(\alpha + d\alpha) \approx \cos \alpha$, $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = dy/dz$ те је $Z=0$, па је једина сила која дејствује на елемент жице

$$Y = \sigma A \left[\left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_D - \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_C \right] = \sigma A \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} dz.$$

Како је маса елемента dz жице ρAdz , где је ρ густина, а $\partial^2 y / \partial t^2$ пројекција убрзања, то према Даламберовом принципу добијамо динамичку једначину

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dz = \sigma A \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} dz.$$

Таласна једначина трансверзалних осцилација жице је

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}, \quad (1)$$

где је

$$c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \sqrt{\frac{\sigma g}{\gamma}} \quad \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right] \quad (2)$$

брзина простирања таласа. Она је, дакле, сразмерна квадратном корену количника нормалног напона и густине материјала жице.

Партикуларни интеграл једначине (1) за постављене граничне услове, да је померање $y=0$ за $z=0$ и $z=l$, и почетне услове, да је за $t=0$ померање $y=f(z)$ и $\partial y / \partial t = F(z)$, може се извести из општег Даламберовог решења, (чл. 15.), развијајући функције $\varphi(x-ct)$ и $\psi(x+ct)$ у Фуријеове редове. Међутим, то се партикуларно решење може много лакше добити методом партикуларних интеграла Данијела Бернулија (Daniel Bernoulli), коју је применио и Поасон у својој „Механици“ и Фурије у свом делу „*Théorie analytique de la chaleur*“, 1782. год.

Ово решење тражићемо у облику производа двеју функција

$$y = Z(z) \cdot T(t), \quad (3)$$

од којих свака зависи само од једне променљиве (z , односно t), али таквих да свака посебице задовољава граничне услове, то јест да је $Z(0)T(t) = Z(l)T(t) = 0$. Уносећи ову вредност интеграла у (1), парцијална једначина другог реда своди се на обичну диференцијалну једначину другог реда

$$Z'' T - c^{-2} T'' Z = 0, \quad (4)$$

где Z'' и T'' показују изводе тих функција по њиховим променљивим. Ова је једначина задовољена ако су једновремено задовољене две диференцијалне једначине другог реда облика

$$Z'' + CZ = 0; \quad T'' + c^2 CT = 0, \quad (5)$$

где је C произвољна константа. На овај се начин проблем интегралења парцијалне једначине (1), са одређеним граничним условима, свео на две обичне хомогене диференцијалне једначине другог реда са константним коефицијентима. Да систем ових једначина заиста одговара парцијалној једначини (4) лако се уверавамо множећи прву са T а другу са $-Z/c^2$ и сабирајући их. Облици интеграла ових једначина зависе од константе C . Ако је $C > 0$ интегрални обе једначине (5) су изражени помоћу тригонометријских функција, а за $C < 0$ помоћу хиперболичких. Ако је $C = 0$ биће $Z'' = 0$ и $T'' = 0$, па је једначина (4) идентички задовољена. Због тога се ово решење, као тривијално, мора одбацити. С обзиром на постављене граничне услове мора се и вредност $C < 0$ одбацити, јер су хиперболичке функције $\text{Ch } \lambda l \neq 0$, $\text{Sh } \lambda l \neq 0$, те мора једино бити константа C позитивна; $C > 0$.

Ставимо ли да је $C = \lambda^2$ и $\omega = c\lambda$ решење једначине (5) биће

$$Z = C_1 \cos \lambda z + C_2 \sin \lambda z, \quad (6a)$$

$$T = C_3 \cos \omega t + C_4 \sin \omega t. \quad (6b)$$

С обзиром на гранични услов за $z=0$, $y=0$, тј. $Z=0$, из (6a) следи да је $C_1=0$. Како је за $z=l$ такође $y=0$, тј. $Z=0$, мора бити и

$$C_2 \sin \lambda l = 0.$$

Пошто је $C_2 \neq 0$, јер бисмо у противном имали тривијално решење, то мора бити $\sin \lambda l = 0$, или

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}; \quad \omega_n = c \frac{n\pi}{l} = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}, \quad (7)$$

где је n произвољан позитиван цео број $1, 2, \dots$. Према томе је партикуларно решење једначине (1) за вредност λ_n :

$$y_n = Z_n T_n = (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \lambda_n z,$$

где су нове константе $A_n = C_{2n} C_{3n}$, $B_n = C_{2n} C_{4n}$.

Пошто је збир решења хомогене једначине такође њено решење, то се сва партикуларна решења једначине (1) могу написати у облику збира

$$y(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi}{l} ct + B_n \sin \frac{n\pi}{l} ct \right) \sin \frac{n\pi}{l} z. \quad (8)$$

Вредности λ_n за које постоје решења једначине (1); за постављене граничне услове, називају се *карактеристични (сопствени) бројеви*; функције Z_n су *карактеристичне (сопствене) функције* дате парцијалне једначине. Ове функције задовољавају услов

$$\int_0^l Z_r Z_s dz = 0, \quad r \neq s, \quad (9)$$

па су *ортогоналне*, што се лако доказује узимајући, на пример, $r=1$, $s=2$.

На пример,

$$\int_0^l \sin \frac{\pi}{l} z \sin \frac{2\pi}{l} z dz = \frac{2l}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 u \cdot \cos u \cdot du = \frac{2l}{3\pi} \left[\sin^3 u \right]_0^{\pi} = 0.$$

Поред граничних услова морају бити задовољени и почетни услови кретања. У тренутку $t=0$ жицу изводимо из равнотежног положаја тако да добија облик $y=f(z)$, затим је пуштамо и свака тачка има почетну брзину $\partial y/\partial t = F(z) = f_1(z)$. Из (8) за $t=0$ и диференцирањем тог реда, за $t=0$, добијамо

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} z; \quad f_1(z) = \frac{\pi c}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \sin \frac{n\pi}{l} z. \quad (10)$$

Ако ове функције помножимо са $\sin(n\pi z/l)$ и интегралимо у границама од 0 до l , а како је

$$\int_0^l \sin^2(n\pi/l) z dz = \frac{1}{2} l,$$

добијамо коефицијенте:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(z) \sin \frac{n\pi}{l} z dz; \quad B_n = \frac{2}{\pi c} \int_0^l f_1(z) \sin \frac{n\pi}{l} z dz. \quad (11)$$

Они су, дакле, коефицијенти Фуријеових редова у које развијамо функције $f(z)$ и $f_1(z)$ за $t=0$ у размаку $0 \leq z \leq l$ тако да су $f'(0) = f(l) = f_1(0) = f_1(l) = 0$. Ове функције као и њихови изводи $f(z)$,

$f''(z)$ и $f_1'(z)$ морају бити непрекидне функције у томе размаку. Према томе се партикуларно решење може написати и у овом облику

$$y(z, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi c}{l} t \sin \frac{n\pi z}{l} \int_0^l f(z) \sin \frac{n\pi}{l} z dz + \\ + \frac{2}{\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi c}{l} t \sin \frac{n\pi z}{l} \int_0^l f_1(z) \sin \frac{n\pi}{l} z dz. \quad (8')$$

Исти партикуларни интеграл (8) можемо добити и из Даламберовог општег интеграла

$$y(z, t) = \varphi(z - ct) + \psi(z + ct). \quad (12)$$

Произвољне функције φ и ψ морају задовољити граничне и почетне услове. Из првог граничног услова (за $z=0, y=0$) следи

$$\varphi(-ct) + \psi(ct) = 0, \quad \psi(\tau) = -\varphi(-\tau), \quad \text{где је } \tau = ct.$$

Из другог граничног услова (за $z=l, y=0$), с обзиром на претходни, следи

$$\varphi(l - ct) + \psi(l + ct) = 0, \quad \psi(\rho) = -\varphi(\rho - 2\tau) = -\varphi(-\rho), \quad \rho = l + \tau.$$

Ако се ρ повиси за $\rho + z$ онда се добија да је

$$\varphi(z + 2l) = \varphi(z),$$

периодичка функција, периода $2l$.

Из почетних услова кретања, чл. (15.7), с обзиром на горње услове добијамо

$$\varphi(z) + \psi(z) = \varphi(z) - \varphi(-z) = f(z);$$

$$\varphi'(z) - \psi'(z) = \varphi'(z) - \varphi'(-z) = -\frac{1}{c} f_1(z).$$

Узимајући уместо z вредност $-z$, из горњих релација следи да су f и f_1 *нејарне* периодичке функције

$$f(-z) = -f(z); \quad f(z + 2l) = f(z),$$

$$f_1(-z) = -f_1(z); \quad f_1(z + 2l) = f_1(z).$$

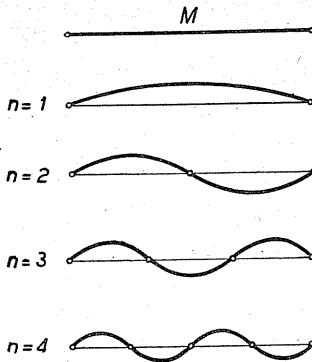
Из другог почетног услова следи да и функција Φ , која је интеграл функције $-(1/c) f_1(z)$, мора бити *јарна* периодичка функција

$$\Phi(-z) = \Phi(z) = -c^{-1} \int f_1(z) dz; \quad \Phi(z + 2l) = \Phi(z).$$

Када су ови услови испуњени, тада Даламберово решење, (34. чл. 15), представља заиста партикуларно решење и овог проблема:

$$y(z, t) = \frac{1}{2} [f(z - ct) + f(z + ct)] + \frac{1}{2} [\Phi(z - ct) - \Phi(z + ct)]. \quad (13)$$

Развију ли се непарне периодичке функције $f(z)$ и $f_1(z)$ у Фуријеове редове онда они морају имати облике (10). Коefицијенти редова су тада одређени са (11). Ако су ове функције непрекидне у читавом размаку $0 \leq z \leq l$ онда су њихови Фуријеови редови *равномерно конвергентни*. У томе се случају може тај ред интегралити. Како је функција $f_2(z)$ непрекидна, то интегралом друге једначине (10) добијамо да је функција,



Сл. 16.2. — а) Основни и виши
хармоници жице

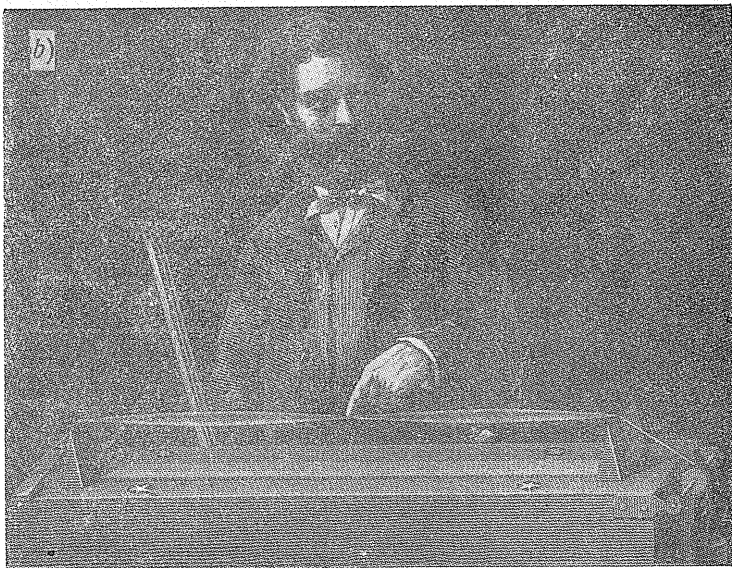
$$\Phi(z) = -c^{-1} \int f_1(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\pi/l)z.$$

Познавајући ове вредности и уношењем у (13) биће

$$y = \frac{1}{2} \sum A_n [\sin(n\pi/l)(z-ct) + \sin(n\pi/l)(z+ct)] + \frac{1}{2} \sum B_n [\cos(n\pi/l)(z-ct) - \cos(n\pi/l)(z+ct)],$$

што се после познатих тригонометријских трансформација своди на једначину (8) добијену помоћу Бернулијеве методе.

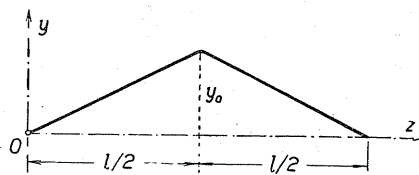
За $n=1$ добијамо *основни хармоник* (тон), фреквенције $\pi c/l$, периода $T_1=2l/c$. За $n=2$ добијамо *други хармоник*, кружне фреквенције $\omega_2 = 2\omega_1$, периода l/c , са једним чвором (за $z=l/2$). За $n=3,4,\dots$ добијамо *још више хармонике*, (сл. 16.2.a и 16.2.b).



Сл. 16.2. — б) Октава

Бернулијева метода партикуларних решења није општа метода интегралења парцијалне једначине (4) и не може се увек применити, јер не даје сва решења, ако унапред није доказана њихова јединственост за постављене граничне услове.

Пример. — Нека су за жицу, дужине l , почетни услови: за $t=0$ је $f(z)$ приказана на сл. 16.3. а $f_1(z)=0$. Како је $f(z) = 2y_0z/l$ за $0 \leq z \leq l/2$ и $f(z) = 2y_0(l-z)/l$ за $l/2 \leq z \leq l$, то је функција нејарна, па су коефицијенти $B_n=0$. Међутим, коефицијенти A_n износе



Сл. 16.3. — Осцилације жице са почетним условима кретања

$$A_n = \frac{2}{l} \left[\int_0^{l/2} \frac{2y_0}{l} z \sin \frac{n\pi}{l} z dz + \int_{l/2}^l \frac{2y_0}{l} (l-z) \sin \frac{n\pi}{l} z dz \right] = \frac{8y_0}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2},$$

па су

$$A_{2n} = 0; \quad A_{2n-1} = \frac{(-1)^{n+1} 8y_0}{(2n-1)^2 \pi^2},$$

те је партикуларно решење

$$y = \frac{8y_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi}{l} z \cos \frac{(2n-1)\pi c}{l} t.$$

16.1.2. Принудне осцилације. — Код принудних осцилација жице разликујемо два случаја: 1^о познато је унапред кретање једне тачке (N) жице на удаљењу a од краја A , и 2^о у некој тачки (N) дејствује периодичка сила. У оба случаја облик осцилација мора бити такав да је крива непрекидна линија.

1. случај. — Нека је кретање тачке N на удаљењу $z=a$ од левог краја представљено синусном функцијом

$$y_N = C \sin(\Omega t + \alpha). \quad (14)$$

Узимајући у обзир само *стојеће таласе*, тако да свака тачка жице има исту кружну фреквенцију (Ω), решење диференцијалне једначине (1) тражићемо у облику

$$y = Z \sin(\Omega t - \alpha). \quad (15)$$

Уносећи исто у (1) добијамо обичну диференцијалну једначину другог реда у облику

$$Z'' + (\Omega/c)^2 Z = 0.$$

Њен општи интеграл је

$$Z = A \sin[(\Omega/c)z + \beta]. \quad (16)$$

Граничне услове морамо поставити за два дела жице, лево и десно од тачке N . За леви део AN биће:

за $z=0$, $y=0$, за $z=a$, $y=C$, па је $\beta=0$ и $C=A \sin \frac{\Omega}{c} a$,

те је једначина померања тачака жице у овоме делу

$$y = C \frac{\sin [\Omega z/c]}{\sin (\Omega a/c)} \sin (\Omega t + \alpha). \quad (17a)$$

На потпуно исти начин одредили бисмо и померања за десни део жице NB :

$$y = C \frac{\sin [\Omega (l-z)/c]}{\sin [\Omega (l-a)/c]} \sin (\Omega t + \alpha). \quad (17b)$$

Амплитуда постаје бесконачно велика када је испуњен услов

$$a\Omega/c = n\pi, \quad \text{или} \quad \Omega (l-a)/c = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

2. случај — Нека у тачки $N (z = a)$ дејствује периодичка сила $F = F_0 \sin (\Omega t + \alpha)$, чија је напдна линија увек управна на елементу жице. У овоме случају морају вертикалне компоненте сила (напона) жице да уравнотежавају ову силу, па је

$$\sigma A \left[\left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_{-a} - \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_{+a} \right] = F_0 \sin (\Omega t + \alpha). \quad (18)$$

Уносећи у ову једначину и изразе из (17a) и (17b) добијамо највећу амплитуду осцилација

$$C = \frac{F_0 c}{\sigma A \Omega} \frac{\sin (\Omega a/c) \sin [\Omega (l-a)/c]}{\sin (\Omega l/c)}$$

Према томе су померања (17a) и (17b) дата изразима

$$\text{за } z < a, \quad y = \frac{F_0 c}{\sigma A \Omega} \frac{\sin [\Omega (l-a)/c]}{\sin (\Omega l/c)} \sin \frac{\Omega}{c} z \sin (\Omega t + \alpha), \quad (19a)$$

$$\text{за } z > a, \quad y = \frac{F_0 c}{\sigma A \Omega} \frac{\sin (\Omega a/c)}{\sin (\Omega l/c)} \sin \frac{\Omega}{c} (l-z) \sin (\Omega t + \alpha). \quad (19b)$$

Из ових се једначина види да је амплитуда бесконачно велика у случају када је кружна фреквенција поремећајне силе (Ω) једнака кружној фреквенцији сопствених осцилација струне (ω):

$$\frac{\Omega l}{c} = n\pi; \quad \Omega = \frac{n\pi c}{l} = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \omega, \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

под претпоставком да сила F не дејствује у чвору.

Ако би на жицу дејствовало више принудних сила F_n у тачкама N_n на растојањима a_n од левог ослоњаца A , онда се решење хомогене једначине (8) може написати у облику

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin (n\pi/l) z, \quad (20)$$

где су q_n генерализане координате.

Кинетичка енергија жице биће

$$E_k = \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dz = \frac{\rho A}{2} \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \left[\dot{q}_n \sin \frac{n\pi}{l} z \right]^2 dz = \frac{\rho A l}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n^2. \quad (21)$$

Како је издужење елемента ds жице

$$\Delta ds = ds - dz = \sqrt{dz^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} dz \right)^2} - dz \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 dz,$$

то је деформациони рад или потенцијална енергија

$$E_p = \frac{1}{2} \sigma A \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 dz = \frac{\pi^2 \sigma A}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 q_n^2, \quad (22)$$

јер је

$$\int_0^l \cos \frac{r\pi}{l} z \cos \frac{s\pi}{l} z dz = \begin{cases} 0 & \text{за } r \neq s, \\ 1/2 l & \text{за } r = s. \end{cases}$$

Помоћу Лагранжевих једначина добијамо диференцијалну једначину

$$\ddot{q}_n + \left(\frac{\pi n c}{l} \right)^2 q_n = \frac{2}{\rho A l} Q_n^*; \quad (23)$$

овде је Q_n^* генералисана принудна сила за координату q_n . Ове силе одређујемо помоћу закона рада сила F_v . Замислимо да смо координате q_n дали виртуално померање δq_n онда ће се променити и остале координате

$$\delta q_n \sin(n\pi/l) a_1; \dots; \delta q_n \sin(n\pi/l) a_v; \dots; \quad v=1, 2, \dots, p$$

па је рад

$$A = \sum_n \sum_{v=1}^p F_v \sin \frac{n\pi}{l} a_v \delta q_n = \sum_n Q_n^* \delta q_n \quad (24)$$

те је генералисана принудна сила

$$Q_n^* = \sum_{v=1}^p F_v \sin \frac{n\pi}{l} a_v. \quad (25)$$

Слично као и у случају принудних осцилација система са једним степеном слободe, (чл. 4.), добија се партикуларни интеграл принудног кретања у облику

$$q_n^{(p)} = \frac{2}{n\pi\rho A} \int_0^t Q_n^*(\tau) \sin \left[\frac{n\pi c}{l} (t-\tau) \right] d\tau, \quad (26)$$

па је општи интеграл

$$q_n = A_n \cos \frac{n\pi c}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi c}{l} t + \frac{2}{n\pi\rho A} \int_0^t Q_n^*(\tau) \sin \frac{n\pi c}{l} (t-\tau) d\tau, \quad (27)$$

где је под интегралом уведена нова променљива τ .

На пример, ако у средини распона ($z=1/2l$) дејствује сила константне јачине $F=F_0$ онда је

$$Q_n^* = F_0 \sin 1/2 n\pi, \quad Q_{2n}^* = 0, \quad Q_{2n-1} = (-1)^{n-1} F_0.$$

Нека је жица у почетку била у стању мировања, тада су $A_n = B_n = 0$, па је режим принудног кретања (26):

$$q_n^{(p)} = \frac{(-1)^{n-1} 2Fl}{(2n-1)^2 \pi c \rho A} \left[1 - \cos \frac{(2n-1) \pi c}{l} t \right].$$

С обзиром на (2) и (20) биће померања тачака жице

$$y = \frac{2Fl}{\pi^2 \sigma A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \left[1 - \cos \frac{(2n-1) \pi c}{l} t \right] \sin \frac{(2n-1)\pi}{l} z. \quad (28)$$

Угиб пресека испод силе је

$$y_{(z=1/2l)} = \frac{2Fl}{\pi^2 \sigma A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \left[1 - \cos \frac{(2n-1) \pi c}{l} t \right] \quad (29)$$

и достиже највећу вредност

$$y_{\max} (z=1/2l) = \frac{Fl}{2\sigma A},$$

јер је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad (30)$$

за $t=l/c, l/3c, l/5c, \dots$,

Стрела жице услед статичког дејства силе F , због услова $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = y_0/(l/2)$ и једначине (21),

$$A_d = 1/2 F y_0 = E y,$$

износи

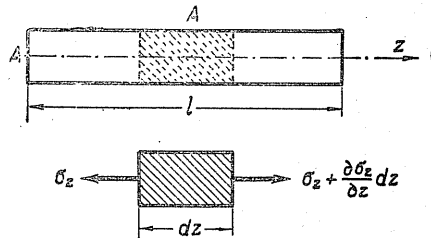
$$y_0 = Fl/4\sigma A. \quad (31)$$

Из (30) и (31) види се да сила приложена *нагло* у средини распона жице производи два пута већи угиб (стрелу) неголи у случају статичког дејства, тј. када сила полако расте од 0 до вредности F_0 .

17. ЛОНГИТУДИНАЛНЕ И ТОРЗИЈСКЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ ПРИЗМАТИЧНИХ ГРЕДА

17.1. Лонгитудиналне осцилације призматичних греда. — Претпоставимо да попречни пресек греде AB , дужине l , (сл. 17.1.) за време ових осцилација остаје раван и да све тачке пресека врше кретања само у правцу осе Az , те постоје померања $w = w(z, t)$. Због велике дужине таласа ових осцилација у сравњењу са висином попречног пресека, може се утицај контракције попречног пресека занемарити.

Ако је A попречни пресек греде онда је, због $\sigma_z = E\varepsilon_z = E(\partial w/\partial z)$, динамичка једначина кретања



Сл. 17.1. — Лонгитудиналне осцилације призматичне греде

$$\Sigma Y_i = 0; \quad \rho A dz \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = A \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz - \sigma_z \right) dz = A \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz = EA \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} dz.$$

па је таласна једначина лонгитудиналних осцилација греде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}; \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}} \quad \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right]. \quad (1)$$

Брзина простирања таласа иста је као и у случају лонгитудиналних осцилација жице, те не зависи од попречног пресека него само од особина материјала (E ; ρ). Према томе све што је речено у чл. 16. о интеграљењу таласне једначине, важи и овде. Нормална функција је облика

$$w(z, t) = Z(z) \cdot T(t); \quad Z = C_1 \cos \lambda z + C_2 \sin \lambda z. \quad (2)$$

За четири карактеристична случаја: слободну греду, греду ослоњену на два ослонца, конзолу и обострано уклештену греду, гранични услови и нормалне функције дате су у таблицаи 17.1.

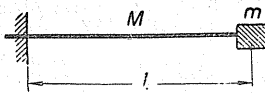
Таблица 17.1.

Случај	a)	b)	c)	d)
Слика				
$z=0$	$\sigma=0 \quad Z'=0$	$w=0 \quad Z=0$	$w=0 \quad Z=0$	$w=0 \quad Z=0$
$z=l$	$\sigma=0 \quad Z'=0$	$w=0 \quad Z=0$	$\sigma=0 \quad Z'=0$	$w=0 \quad Z=0$
C_1	$\neq 0$	0	0	0
C_2	0	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$
Z	$C_1 \cos \lambda z$	$C_2 \sin \lambda z$	$C_2 \cos \lambda z$	$C_2 \sin \lambda z$
$f(\lambda)$	$\sin \lambda l = 0$	$\sin \lambda l = 0$	$\cos \lambda l = 0$	$\sin \lambda l = 0$
λ_n	$\frac{n\pi}{l}$	$\frac{n\pi}{l}$	$\frac{2n-1}{l} \frac{\pi}{2}$	$\frac{n\pi}{l}$

(3)

Ако се на гређи налази и концентрисана маса (m) онда ће се морати увести *накнадни услови*. Нека је, на пример, на слободном крају конзоле, (сл. 17.2.), насађена маса (m). Искористићемо решење једначине за случај хомогене конзоле, уз промењени гранични услов на слободном крају

$$w = A \sin \lambda z \sin (\omega t + \alpha). \tag{4}$$



При померању масе (m) *надесно* јављаће се њена сила инерције, а на масу дејствује и сила еластичности греде која тежи да масу врати у првобитни положај. Како је дилатација

Сл. 17.2. — Конзола са концентрисаном масом на слободном крају

$$\epsilon = \Delta l/l = F/\mathfrak{A} = \partial w/\partial z,$$

то је сила еластичности $F = \mathfrak{A} (\partial w/\partial z)$, па је гранични услов

$$m \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)_l = - \mathfrak{A} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_l, \tag{5}$$

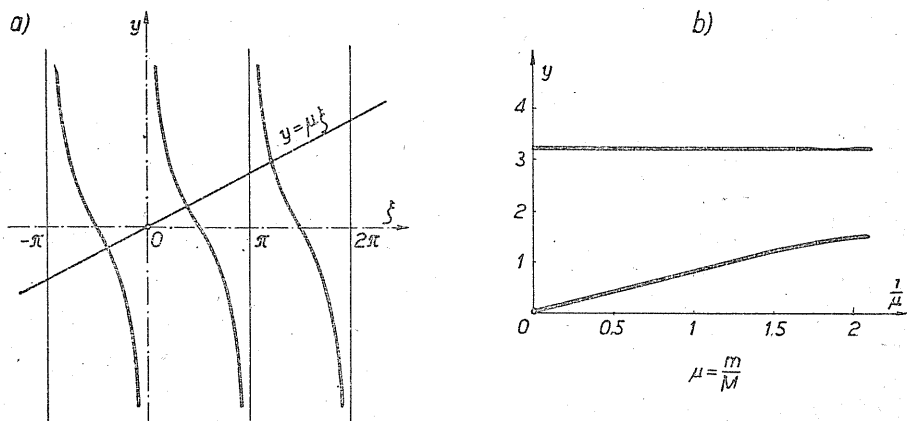
где је $\mathcal{A} = EA$ *испезна крушосћ* (axial rigidity) греде. Како су, из једначине (4),

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_l = A \lambda \cos \lambda l \sin(\omega t + \alpha); \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)_l = -A \omega^2 \sin \lambda l \sin(\omega t + \alpha),$$

то уношењем ових извода у гранични услов (5, пошто $A \neq 0$, добијамо фреквентну једначину у трансцендентном облику

$$\operatorname{ctg} \lambda l = \frac{m}{M} \lambda l = \mu \lambda l; \quad \mu = \frac{m}{M}. \tag{6}$$

Корени ове трансцендентне једначине најлакше се одређују *графички* као апсцисе пресечних тачака праве $y = \mu \xi$ и криве $y = \operatorname{ctg} \xi$, где је $\xi = \lambda l$, како је показано на сл. 17.3. а. Промене кружне фреквенције, односно $\xi = \lambda l = \omega l/c$, $\omega_n = c \lambda_n$ од односа маса $1/\mu$ приказана је на сл. 17.3. б.



Сл. 17.3. — Дијаграм промене кружне фреквенције у зависности од односа маса

Решење је

$$w(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin(k_n z/l),$$

где је

$$k_n = \lambda_n l \quad \text{и} \quad \omega_n = c \lambda_n = k_n \sqrt{EA/Ml}.$$

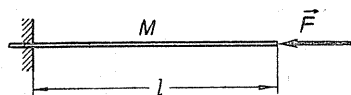
Ако су почетни услови да је у тренутку $t = 0$ на крају $z = l$ дејствовала сила F а затим је штап без почетне брзине остављен да осцилује, онда су

$$w(z; 0) = Fz/EA; \quad \frac{\partial w}{\partial t}(z; 0) = 0.$$

Користећи услов ортогоналности нормалних функција добијамо решење

$$w(z, t) = \frac{4Fl}{EA} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin k_n \sin(k_n z/l) \cos \omega_n t}{k_n (2k_n + \sin 2k_n)}. \quad (7)$$

У случају да на слободни крај конзоле дејствује *принудна аксијална сила* $F = F_0$, (сл. 17.4.), најзгодније је користити *генералисане координате*, које зависе од времена, у облику функција



$$q_n = A_n \cos \frac{n \pi c}{l} t + B_n \sin \frac{n \pi c}{l} t, \quad (8)$$

па је решење

Сл. 17.4. — Утицај аксијалне силе притиска на осцилације хомогене конзоле

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} q_{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2l} z; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Кинетичка енергија греде је

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{\rho A}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dz = \frac{\rho A}{2} \int_0^l \left[\sum_n \dot{q}_{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2l} z \right]^2 dz = \\ &= \frac{\rho A l}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_{2n-1}^2. \end{aligned} \quad (9a)$$

Потенцијална енергија је једнака деформационом раду при исте-зању, па је

$$\begin{aligned} E_p = A_{de} &= \frac{\mathfrak{U}}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 dz = \frac{\pi^2 \mathfrak{U}}{8 l^2} \int_0^l \left[\sum_n (2n-1) q_{2n-1} \cos \frac{(2n-1)\pi}{2l} z \right]^2 dz = \\ &= \frac{\pi^2 \mathfrak{U}}{16 l} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^2 q_{2n-1}^2. \end{aligned} \quad (9b)$$

Помоћу Лагранжевих једначина добијамо диференцијалну једначину

$$\ddot{q}_{2n-1} + \left[\frac{(2n-1)\pi c}{2l} \right]^2 q_{2n-1} = \frac{2}{\rho A l} Q_{2n-1}^*$$

где је Q_{2n-1}^* генералисана принудна сила, коју одређујемо по методи рада, (чл. 16.25.), па је $Q_{2n-1}^* = (-1)^n F_0$. Слично обрасцу (28, чл. 16.) добићемо закон померања

$$w = \frac{8 F_0 l}{\pi^2 \mathfrak{U}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2l} \left[1 - \cos \frac{(2n-1)\pi c}{2l} t \right]. \quad (10)$$

Највеће померање слободног краја конзоле износи

$$(w_B)_{\max} = \frac{2Fl}{2l} = 2(w_B)_s.$$

Из овога видимо да аксијална сила F_0 *нагло* додата на слободном крају конзоле изазива *два пута* већу деформацију неголи ако сила исте јачине дејствује статички, поступно од вредности 0 до F_0 . Овај закључак смо имали и код принудне силе која дејствује на половини распона жице, (чл. 16, об. 30 и 31).

Ако у тачки $z = a$ дејствује аксијална поремећајна сила $F(t) = F \sin \Omega t$, онда се могу користити *Лајласове трансформације*, па једначина (1) постаје

$$\partial^2 w / \partial t^2 - c^2 (\partial^2 w / \partial z^2) = h \sin \Omega t \cdot J_1(z - a),$$

где је $h = F/\rho'$; $\rho' = \rho A = \gamma A/g$ [kg sec²/cm²] *линијска густина греде*, а $J_1(z - a)$ јединична импулсна функција првог реда, јединице [1/cm].

Решење ћемо претпоставити у облику

$$w(z, t) = Z(z) \sin \Omega t,$$

где је $Z(z)$ *форма принудног осциловања*. Уношењем ове вредности у диференцијалну једначину она се своди на обичну диференцијалну једначину другог реда

$$Z'' + \lambda^2 Z = -C J_1(z - a); \quad C = F/EA.$$

Лапласова трансформација даје слику

$$\mathfrak{L}[Z] = [\rho Z(0) + Z'(0)] / (\rho^2 + \lambda^2) - [C / (\rho^2 + \lambda^2)] \mathfrak{L}[J_1],$$

па је решење (оригинал) — нормална функција

$$Z(z) = Z(0) \cos \lambda z + \frac{Z'(0)}{\lambda} \sin \lambda z \quad \parallel \quad - \frac{F}{EA \lambda} \sin \lambda (z - a). \quad (11)$$

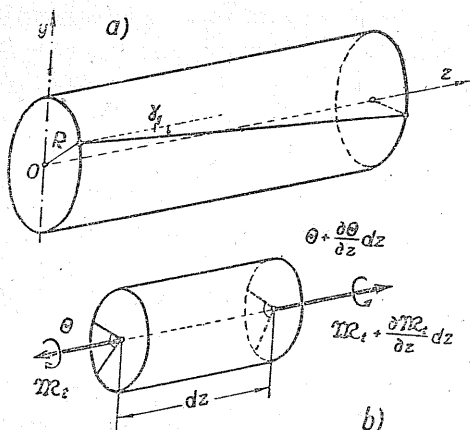
Наравно да он зависи од граничних услова $Z(0)$ и $Z'(0)$.

За $z < a$ у обзир долазе чланови лево од масне црте, а за део $z > a$ и део десно од масне црте.

17.2. Торзијске осцилације кружних вратила. — У машинској пракси су нарочито важне торзијске осцилације вратила *кружног попречног пресека*. Ако је поларни момент инерције пресека I_0 , а G модул клизања материјала, онда између угла увијања θ и момента увијања M , постоји однос $\theta = M l / G I_0$. Према томе су угао увијања θ на

дужини z , (сл. 17.5. a), и његов извод дати обрасцима

$$\theta = \frac{\mathfrak{M}_t z}{\mathbf{G} I_0}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\mathfrak{M}_t}{\mathbf{G} I_0} = \frac{\mathfrak{M}_t}{\mathfrak{I}} \quad (12)$$



Замислимо да смо из вратила исекли део дужине dz онда на бочним странама дејствују различити momenti увијања (сл. 17.5. b). Ако је J_z аксијални момент инерције вратила, онда је динамичка једначина обртања елемента dz :

$$dJ_z \ddot{\theta} = (\mathfrak{M}_t + \frac{\partial \mathfrak{M}_t}{\partial z} dz - \mathfrak{M}_t) = \frac{\partial \mathfrak{M}_t}{\partial z} dz. \quad (13)$$

Сл. 17.5. — Торзијске осцилације кружног вратила

Како је $dJ_z = \rho I_0 dz$, а с обзиром на други образац (12), горња једначина постаје

$$\rho I_0 dz \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \mathbf{G} I_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} dz,$$

те је таласна једначина торзијских осцилација хомогеног кружног вратила:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{G}}{\rho} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}. \quad (14)$$

Брзина простирања таласа је

$$c = \sqrt{\frac{\mathbf{G}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\mathbf{G}g}{\gamma}} \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right]; \quad (15)$$

она, дакле, зависи само од особина материјала вратила (\mathbf{G} ; ρ).

Ова таласна једначина је слична таласној једначини лонгитудиналних осцилација греде, само се разликује у брзини c . Према томе ћемо и у овом случају партикуларно решење тражити у облику $\theta = ZT$. Сопствене функције Z морају да задовоље граничне услове: да су на слободном крају вратила, или на крајевима слободно ослоњеног вратила, momenti увијања једнаки нули $\mathfrak{M}_t = 0$, тј. $\frac{\partial \theta}{\partial z} = Z' = 0$; на месту укле-

штења су углови увијања $\theta = 0$, тј. $Z = 0$. На тај су начин гранични услови исти као и код лонгитудиналних осцилација (3). На основу тога може се дати аналогија између осцилација жице и лонгитудиналних торзијских осцилација греде, према следећој табlici.

Таблица 17.2.

	Осцилације	Померање	Брзина	Маса	Сила	c
1	Трансв. осцилације жице	y	$\partial y / \partial t$	$\rho A dz$	$\sigma A \frac{\partial y}{\partial z}$	$\sqrt{\sigma / \rho}$
2	Лонг. осцилације жице	w	$\partial w / \partial t$	$\rho A dz$	σA	$\sqrt{E / \rho}$
3	Лонг осцилације греде	w	$\partial w / \partial t$	$\rho A dz$	$E A \frac{\partial w}{\partial z}$	$\sqrt{E / \rho}$
4	Торзијске осцилације кружног вратила	θ	$\partial \theta / \partial t$	$\rho I_0 dz$	$G I_0 \frac{\partial \theta}{\partial z}$	$\sqrt{G / \rho}$

(16)

Ако попречни пресек вратила није кружни опет важи иста таласна једначина (14) само је брзина простирања таласа

$$c = \sqrt{k} \cdot \sqrt{G / \rho}, \quad (15 a)$$

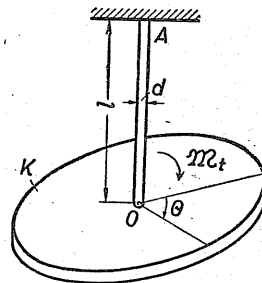
где је k коефицијент облика пресека.

У машинској пракси је чест случај вратила са насађеним дисковима. У овоме се случају мора водити рачуна о новим граничним условима. Нека је на слободном крају конзоле AO насађен диск, аксијалног момента инерције J_1 , (сл. 17.6.), тада ћемо искористити једначину (14) чије је решење

$$\theta = ZT = (C_1 \cos \lambda z + C_2 \sin \lambda z) (C_3 \cos \omega t + C_4 \sin \omega t). \quad (17)$$

Један је гранични услов $\theta = 0$ за $z = 0$, па ће бити $C_1 = 0$. Претпостављајући стојеће таласе добијамо решење у облику

$$\theta = A \sin \lambda z \sin (\omega t + \beta). \quad (18)$$



Сл. 17.6. — Утицај диска на торзијске осцилације хомогеног вратила

При увијању диска на слободном крају торзијски момент еластичности вратила тежи да диск врати у првобитни положај, па је

динамичка једначина обртања диска

$$J_1 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right)_l = -\mathfrak{M}_l = -G I_0 \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_l = -\mathfrak{Z} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_l. \quad (19)$$

Диференцирањем израза (18) и унесећи га у гранични услов (19), пошто $A \neq 0$, добија се *фреквеншна једначина* у облику

$$\lambda l \operatorname{tg} \lambda l = J/J_1 \text{ или } \operatorname{ctg} \xi = \mu \xi, \quad (20)$$

тј. иста као и (6) само је сада $\mu = J_1/J$. Дијаграми на сл. 17.3. *a* важе и овде само за нови однос $\mu = J_1/J$.

Ако је $\lambda l = \xi$ мала величина онда се $\operatorname{tg} \xi$ може развити у ред

$$\operatorname{tg} \xi = \xi + \frac{\xi^3}{3} + \frac{2\xi^5}{3 \cdot 5} + \frac{17\xi^7}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} + \dots = \frac{1}{\mu \xi}.$$

Зауставимо ли се на другом члану реда добија се биквадратна једначина

$$\xi^4 + 3\xi^2 - (3/\mu) = 0,$$

чији је корен

$$\xi = \frac{\omega l}{c} = \sqrt{-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{\mu}}}$$

па је кружна фреквенција

$$\omega \approx \sqrt{\frac{3G}{2\rho l^2} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{3\mu}} - 1 \right)}. \quad (21)$$

Ако се узме само први члан реда добија се квадратна једначина $\xi^2 \approx (1/\mu)$, па је корен $\xi = \omega l/c = \sqrt{1/\mu} = \sqrt{J/J_1}$, те је кружна фреквенција

$$\omega \approx \sqrt{\frac{c^2}{l^2} \cdot \frac{J}{J_1}} = \sqrt{\frac{G}{\rho l^2} \cdot \frac{\rho I_0 l}{J_1}} = \sqrt{\frac{G I_0}{J_1 l}} \quad (22)$$

иста као и у случају торзијских осцилација са једним степеном слободне, (чл. 2.7.), када се занемари маса вратила.

Када су на крајевима слободног вратила насађени дискови аксијалних момената инерције J_1 и J_2 , (као на сл. 8.1. *a* за $n=2$) гранични услови биће

$$\left[J_1 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right)_0 = \mathfrak{Z} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_0 ; \quad J_2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right)_l = -\mathfrak{Z} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_l \right] \quad (23)$$

јер се осцилације врше у супротном смеру. Ако се диференцира решење (17) и унесе у граничне услове (23), добија се систем алгебарских једначина

$$J_1 \omega^2 C_1 + \mathfrak{Z} \lambda C_2 = 0,$$

$$(J_2 \omega^2 \cos \lambda l + \mathfrak{Z} \lambda \sin \lambda l) C_1 + (J_2 \omega^2 \sin \lambda l - \mathfrak{Z} \lambda \cos \lambda l) C_2 = 0. \quad (24)$$

Сем тривијалног решења $C_1 \equiv C_2 \equiv 0$, постоји решење тога система ако је детерминанта једнака нули. Она представља фреквентну једначину

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} J_1 \omega^2 & \mathfrak{I} \lambda \\ J_2 \omega^2 \cos \lambda l + \mathfrak{I} \lambda \sin \lambda l & J_2 \omega^2 \sin \lambda l - \mathfrak{I} \lambda \cos \lambda l \end{vmatrix} \equiv 0. \quad (25)$$

Уведу ли се смене

$$\xi = \lambda l, \quad \omega = \lambda c, \quad \mu_1 = J_1/J, \quad \mu_2 = J_2/J, \quad J_2 = \rho I_0 l = J, \quad \mathfrak{I} = c^2 J/l \quad (26)$$

фреквентна једначина (25) своди се на трансцендентну једначину

$$\text{tg } \xi = \frac{(\mu_1 + \mu_2) \xi}{\mu_1 \mu_2 \xi^2 - 1}, \quad (27)$$

а из прве једначине (24) добија се и однос $C_1/C_2 = -J/J_1 \xi = -1/\mu_1 \xi$.

Ако су $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ корени трансцендентне једначине (27) онда је нормална функција

$$Z_n = C_n \left(\cos \frac{\xi_n}{l} z - \mu_1 \xi_n \sin \frac{\xi_n}{l} z \right),$$

па је опште решење

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \right] \left[\cos \frac{\xi_n}{l} z - \mu_1 \xi_n \sin \frac{\xi_n}{l} z \right], \quad (28)$$

где је $\omega_n = c \xi_n/l$. У општем случају кретање није периодичко.

С обзиром на односе момената инерције дискова J_1 и момента инерције вратила J разликујемо неколико карактеристичних случајева који су важни за праксу.

1^о Ако су J_i мали у односу на J онда су μ_1 и μ_2 мали бројеви, па се корени ξ_i једначине (27) ближе вредностима $\pi, 2\pi, \dots$, те се решење (28) приближава општем решењу за слободно вратило без дискова.

2^о Ако су J_i велики у односу на J , онда су μ_1 и μ_2 велики бројеви, па једначина (27) постаје

$$\xi \text{ tg } \xi \approx 1/\mu_1 + 1/\mu_2, \quad (29)$$

где смо у имениоцу занемарили јединицу као малу величину.

Како је десна страна једначине (27) мала величина то се може ставити да је $\text{tg } \xi \approx \xi$, па су приближни корен и фреквенција

$$\xi_1 = \omega l/c = \sqrt{(1/\eta_1) + (1/\eta_2)}. \quad (30)$$

Период осциловања је

$$T \approx 2\pi l/c \xi_1 \approx 2\pi \sqrt{l(J_1 J_2) / \mathfrak{I} (J_1 + J_2)}$$

исти као и у случају слободног вратила са два диска (систем са једним степеном осциловања.)

Пошто су остали корени

$$\xi_2 = \pi + \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right); \quad \xi_3 = 2\pi + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right),$$

то су фреквенције *високе* у поређењу са фреквенцијом основног облика.

3^e Ако се $\operatorname{tg} \xi$ развије у ред и узму само два прва члана, онда једначина (27) постаје

$$1 + \frac{\xi^2}{3} \approx \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2 \xi^2 - 1},$$

односно

$$\xi^2 \approx \frac{\mu_1 + \mu_2}{\left(\mu_1 \mu_2 - \frac{1}{\xi^2}\right) \left(1 + \frac{1}{3} \xi^2\right)}. \quad (31)$$

Узме ли се сада за ξ први корен (30) и унесе у (31) добија се

$$\xi_1 \approx \sqrt{\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_2^2} - \frac{1}{\mu_1 \mu_2}\right)} \quad (32)$$

када се занемаре мале величине вишег реда. У овоме случају период осцилације је

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\mathfrak{S}} \frac{J_1^* J_2^*}{J_1^* + J_2^*}}; \quad (33)$$

редуковани моменти инерције дискова су

$$J_1^* = J_1 + \frac{J_2}{3(J_1 + J_2)} J; \quad J_2^* = J_2 + \frac{J_1}{3(J_1 + J_2)} J. \quad (34)$$

И у овоме је случају период осциловања исти као и у случају слободног вртила са два диска на крајевима, (чл. 8.1.), чији су моменти инерције J_1^* и J_2^* .

У случају принудних осцилација треба увести у једначину (28) генералисане координате q_n , где су ξ_i корени једначине (27).

Кинетичка и потенцијална енергија биће

$$E_k = \frac{\rho I_0}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2 dz + \frac{1}{2} J_1 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_0^2 + \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_l^2 = \frac{1}{8} J \sum \frac{D_n}{\xi_n} \dot{q}_n^2;$$

$$E_p = A_d t = \frac{\mathfrak{S}}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2 dz = \frac{\mathfrak{S}}{8l} \sum D_n \xi_n q_n^2, \quad (35)$$

где је

$$D_n = 2 \xi_n (1 + \mu_1^2 \xi_n^2) - \sin 2 \xi_n (1 - \mu_1^2 \xi_n^2) + 2 \mu_1 \xi_n (1 - \cos 2 \xi_n l).$$

Лагранжеве једначине дају диференцијалне једначине

$$\ddot{q}_n + \frac{c^2 \xi_n^2}{l^2} q_n = \frac{4 \xi_n}{J D_n} Q_n^*, \quad (36)$$

где је Q_n^* генералисана сила.

С обзиром на аналогију између осцилација, лако се добија закон принудног кретања, па је опште решење облика

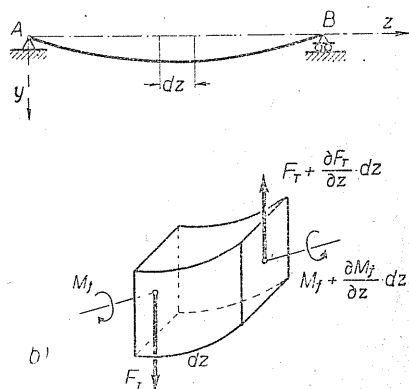
$$\theta = \frac{4l}{cJ} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{D_n} \left(\cos \frac{\xi_n}{l} z - \mu_1 \xi_n \sin \frac{\xi_n}{l} z \right) \int_0^t Q_n^*(\tau) \sin \frac{c \xi_n}{l} (t - \tau) d\tau. \quad (37)$$

18. ТРАНСВЕРЗАЛНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ ПРИЗМАТИЧНИХ ГРЕДА

18.1. Слободне осцилације греда са једним распоном — Претпоставимо да се осцилације хомогене призматичне греде врше у главној равни савијања и да су константни попречни пресеци греде мали у односу на њену дужину l ,

(сл. 18.1.). Ако су и угиби (померања) $v \approx y$ такође мали, онда се могу одговарајуће угаоне брзине и угаона убрзања занемарити, те ће бити $ds \approx dz$, па је трансверзална сила $Y_T = F_T \cos \varphi \approx F_T$. Због тога прираштаји трансверзалне силе и нападног момента (момента савијања) износе

$$\begin{aligned} dF_T &= \frac{\partial F_T}{\partial z} dz; \\ dM_f &= \frac{\partial M_f}{\partial z} dz = F_T dz. \end{aligned} \quad (1)$$



Сл. 18.1. — Трансверзалне осцилације призматичне греде

Како је једначина еластичне линије савијене греде*

$$EI_x v'' = \mathfrak{B} y'' = -M_f; \quad v = y, \quad (2)$$

где је $\mathfrak{B} = EI_x$ крутост при савијању (flexural rigidity), то диференцирањем добијамо

$$\mathfrak{B} y'''' = -\frac{\partial M_f}{\partial z} = -F_T; \quad \mathfrak{B} y'''' = -\frac{\partial^2 M_f}{\partial z^2} = -\frac{\partial F_T}{\partial z} = +q; \quad (3)$$

овде је q специфично оптерећење по дужном метру греде. Оса Ay је усмерена наниже.

* Отпорност материјала, чл. 9.1.

Према закону о кретању тежишта биће

$$\rho A dz \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = dF_T = \frac{\partial F_T}{\partial z} dz = -\mathfrak{B} \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} dz, \quad (4)$$

па је *шласна једначина* трансверзалних осцилација греде

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = 0;} \quad (5)$$

c је брзина простирања таласа

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{\mathfrak{B}}{\rho A}} = \sqrt{\frac{EI_x}{\rho A}} \equiv \sqrt{\frac{EI_x l}{M}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{B} gl}{G}},} \quad \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} \right]. \quad (6)$$

Решење једначине (5) тражићемо, према Бернулијевој методи партикуларних интеграла, у облику производа функција

$$y = v = Z(z) \cdot T(t), \quad (7)$$

па се своди на обичну диференцијалну једначину четвртог реда

$$ZT'' + c^2 Z^{IV} T = 0. \quad (8)$$

Она се распада на две диференцијалне једначине, једну другог и другу четвртог реда

$$T'' + Cc^2 T = 0, \quad (9)$$

$$Z^{IV} - CZ = 0, \quad (10)$$

где је C произвољна константа. Уведемо ли нове константе

$$\lambda = C = k^4, \quad Cc^2 = \omega^2 = k^4 c^2 = k^4 \frac{\mathfrak{B}}{\rho A} = k^4 \frac{\mathfrak{B} l}{M};$$

$$\omega = k^2 \sqrt{\frac{\mathfrak{B} l g}{G}}; \quad M = \rho A l, \quad (11)$$

онда карактеристична једначина диференцијалне једначине (10) има корене: k ; $-k$; ki ; $-ki$, па је њено решење

$$Z = Ae^{kz} + Be^{-kz} + Ce^{ikz} + De^{-ikz}, \quad (12)$$

где су A, B, C, D константе. Међутим, с обзиром на односе

$$e^{\pm ikz} = \cos kz \pm i \sin kz, \quad e^{\pm ikz} = \text{Ch } kz \pm \text{Sh } kz = \cos ikz \mp i \sin ikz;$$

$$\text{Sh } kz = \frac{1}{i} \sin ikz; \quad \text{Ch } kz = \cos ikz;$$

$$\sin kz = \frac{1}{i} \text{Sh } ikz; \quad \cos kz = \text{Ch } ikz;$$

једначина (12) постаје

$$Z = A (\text{Ch } kz + \text{Sh } kz) + B (\text{Ch } kz - \text{Sh } kz) + C (\cos kz + i \sin kz) + D (\cos kz - i \sin kz) \quad (13)$$

односно

$$Z = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz + C_3 \text{Ch } kz + C_4 \text{Sh } kz, \quad (14)$$

где су C_i нове константе. Оне се одређују из граничних услова греде (то јест из услова ослањања греде на крајевима).

Општи интеграл хомогене једначине (9) је

$$T = A \cos \omega t + B \sin \omega t; \quad (15)$$

константе A и B одређују се из почетних услова кретања.

Према изнетом опште решење једначине (5) биће

$$y = v = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n T_n = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t). \quad (16)$$

Облици нормалних (сопствених) функција Z_n зависе од граничних услова. Они дају четири једначине првог степена са четири константе C_i . Решење ових једначина, сем тривијалног $C_i = 0$, постоји ако је детерминанта система једнака нули. Она представља фреквенцијну једначину у трансценденцијном облику. Помоћу ње одређујемо карактеристичне вредности k_n , а тиме, према (11), и одговарајуће кружне фреквенције (ω_n). Ових решења (корена) фреквентне једначине има бескрајно много, па ће бити бескрајно много и сопствених функција Z_n .

Ако су почетни услови кретања: за $t=0$, $v=f(z)$ и $(\partial v/\partial t)_0 = f_1(z) = \varphi(z)$ онда из (16) следе релације

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n Z_n; \quad \varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n Z_n, \quad (17)$$

из којих се одређују константе A_n и B_n , коришћењем особине ортогоналности нормалних функција

$$\int_0^l Z_r Z_s dz = 0, \quad r \neq s. \quad (18)$$

Константе су

$$A_n = \frac{\int_0^l f(z) Z_n dz}{\int_0^l Z_n^2 dz}, \quad B_n = \frac{1}{\omega_n} \frac{\int_0^l \varphi(z) Z_n dz}{\int_0^l Z_n^2 dz}. \quad (19)$$

С обзиром на једначину (13) види се да су решења једначине (5) комбинације тригонометријских и хиперболичких функција, те се често користе и функције*:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(kz) &= 1/2 (\text{Ch } kz + \cos kz); & \mathbf{U}(kz) &= 1/2 (\text{Ch } kz - \cos kz); \\ \mathbf{T}(kz) &= 1/2 (\text{Sh } kz + \sin kz); & \mathbf{V}(kz) &= 1/2 (\text{Sh } kz - \sin kz). \end{aligned} \quad (20)$$

Оне имају својства цикличке пермутације до укључиво четвртог извода, према доњој схеми:

$f(kz)$	$f(0)$	$f'(kz)$	$f'(0)$	$f''(kz)$	$f''(0)$	$f'''(kz)$	$f'''(0)$	$f^{IV}(kz)$	$f^{IV}(0)$
S	1	$k\mathbf{V}$	0	$k^2\mathbf{U}$	0	$k^3\mathbf{T}$	0	$k^4\mathbf{S}$	k^4
T	0	$k\mathbf{S}$	k	$k^2\mathbf{V}$	0	$k^3\mathbf{U}$	0	$k^4\mathbf{T}$	0
U	0	$k\mathbf{T}$	0	$k^2\mathbf{S}$	k^2	$k^3\mathbf{V}$	0	$k^4\mathbf{U}$	0
V	0	$k\mathbf{U}$	0	$k^2\mathbf{T}$	0	$k^3\mathbf{S}$	k^3	$k^4\mathbf{V}$	0

У овоме је случају решење (12) облика

$$Z = A\mathbf{S}(kz) + B\mathbf{T}(kz) + C\mathbf{U}(kz) + D\mathbf{V}(kz), \quad (22)$$

где су A , B , C и D нове константе.

* K. Hohenemser — W. Prager, *Dynamik der Stabwerke*. Berlin, 1933.

Поред функција (20) уводе се и друге функције, које се много примењују у проблемима „Динамике конструкција“. Те су функције:

$$a) \mathbf{A}(kz) = 2(\mathbf{ST} - \mathbf{UV}) = \text{Ch } kz \sin kz + \text{Sh } kz \cos kz,$$

$$b) \mathbf{B}(kz) = 2(\mathbf{TU} - \mathbf{SV}) = \text{Ch } kz \sin kz - \text{Sh } kz \cos kz,$$

$$c) \mathbf{C}(kz) = 2(\mathbf{S}^2 - \mathbf{U}^2) = 2 \text{Ch } kz \cos kz,$$

$$d) \mathbf{D}(kz) = 2(\mathbf{TV} - \mathbf{U}^2) = \text{Ch } kz \cos kz - 1 = \frac{1}{2} \mathbf{C} - 1,$$

$$e) \mathbf{S}_1(kz) = 2(\mathbf{T}^2 - \mathbf{V}^2) = 4(\mathbf{US} - \mathbf{V}^2) = 4(\mathbf{T}^2 - \mathbf{US}) = 2 \text{Sh } kz \sin kz,$$

$$f) \mathbf{E}(kz) = 2(\mathbf{S}^2 - \mathbf{TV}) = 1 + \text{Ch } kz \cos kz = 2 + \mathbf{D} = 1 + \frac{1}{2} \mathbf{C},$$

$$g) \mathbf{F}(kz) = -kz \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{D}} = kz \frac{\text{Ch } kz \sin kz - \text{Sh } kz \cos kz}{1 - \text{Ch } kz \cos kz},$$

$$h) \mathbf{H}(kz) = -2kz \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{D}} = kz \frac{\text{Sh } kz - \sin kz}{1 - \text{Ch } kz \cos kz} = 2 \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{B}} \mathbf{F},$$

$$i) \mathbf{L}(kz) = -\frac{k^2 z^2}{2} \frac{\mathbf{S}_1}{\mathbf{D}} = k^2 z^2 \frac{\text{Sh } kz \sin kz}{1 - \text{Ch } kz \cos kz} = \frac{1}{2} kz \frac{\mathbf{S}_1}{\mathbf{B}} \mathbf{F},$$

$$j) \mathbf{N}(kz) = -2k^2 z^2 \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{D}} = k^2 z^2 \frac{\text{Ch } kz - \cos kz}{1 - \text{Ch } kz \cos kz} = 2kz \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{B}} \mathbf{F}, \quad (23)$$

$$k) \mathbf{R}(kz) = -k^3 z^3 \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{D}} = k^3 z^3 \frac{\text{Ch } kz \sin kz + \text{Sh } kz \cos kz}{1 - \text{Ch } kz \cos kz} = k^2 z^2 \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} \mathbf{F},$$

$$l) \mathbf{\Pi}(kz) = \frac{2k^3 z^3 \mathbf{T}}{1 - \text{Ch } kz \cos kz} = k^3 z^3 \frac{\text{Sh } kz + \sin kz}{1 - \text{Ch } kz \cos kz} =$$

$$= -\frac{2k^3 z^3 \mathbf{T}}{\mathbf{D}} = 2k^2 z^2 \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{B}} \mathbf{F},$$

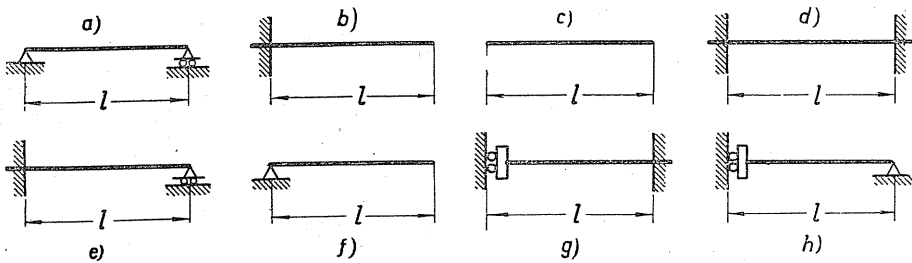
$$m) \mathbf{\Phi}(kz) = kz \frac{\mathbf{S}_1}{\mathbf{B}} = \frac{2kz}{\text{Cth } kz - \text{ctg } kz} = -k^2 z^2 \frac{\mathbf{S}_1}{\mathbf{FD}},$$

$$n) \mathbf{G}(kz) = k^2 z^2 \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = k^2 z^2 \frac{\text{Cth } kz + \text{ctg } kz}{\text{Cth } kz - \text{ctg } kz} = -k^3 z^3 \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{FD}},$$

$$o) \mathbf{O}(kz) = k^3 z^3 \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{B}} = \frac{2k^3 z^3}{\text{tg } kz - \text{Th } kz} = -k^4 z^4 \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{FD}}.$$

Трансцендентна фреквентна једначина има бесконачно много корена k_n , и позитивних и негативних. Међутим, решења која одговарају негативним коренима нису независна од првих, јер се може показати да нормалне функције имају особину да је за вредност корена k и $-k$ и $Z_i = -Z_i$, те је довољно узети у обзир само функције Z са позитивним индексима.

Показаћемо како се одређују фреквентне једначине за осам карактеристичних случајева, (сл. 18.2.), који се примењују у пракси. О условима на крајевима греде може се рећи ово: за сваки ослонац



Сл. 18.2. — Осам карактеристичних случајева ослањања греда

је угиб $y=0$ и моменш $M_f=0$, па су $Z=0$ и $Z''=0$; код уклешћења су, пак, угиб и нагиб тангенте еластичне линије једнаки нули, $y=0$, $y'=0$, те су $Z=0$, $Z'=0$. На слободном крају су шпансверзална сила и нападни моменш једнаки нули, то јест $F=0$, $M_f=0$, па су $Z'''=0$, $Z''=0$.

1) Проста греда. — Код прсте греде, (сл. 18.2. a), услови на крајевима су: за $z=0$ су $Z=0$ и $Z''=0$, и за $z=l$ су $Z=0$ и $Z''=0$. Из (14), а за наведене услове, добијамо систем од четири хомогене линеарне једначине

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = 0; & k^2(-C_1 + C_3) = 0; \\ C_1 \cos kl + C_2 \sin kl + C_3 \operatorname{Ch} kl + C_4 \operatorname{Sh} kl = 0; \\ k^2(-C_1 \cos kl - C_2 \sin kl + C_3 \operatorname{Ch} kl + C_4 \operatorname{Sh} kl) = 0. \end{cases}$$

Како је $k \neq 0$ то из првих двеју једначина следи да су $C_1 = C_3 = 0$ па друге две једначине постају

$$C_2 \sin kl + C_4 \operatorname{Sh} kl = 0; \quad -C_2 \sin kl + C_4 \operatorname{Sh} kl = 0,$$

те је фреквентна једначина облика

$$\operatorname{Sh} kl \sin kl = 0.$$

(24)

Она је задовољена било да је $\text{Sh } kl = 0$ или $\sin kl = 0$. П ва једначина има само имагинарне корене, из друге једначине биће

$$\boxed{\sin kl = 0,} \quad \text{то јест} \quad \boxed{kl = n\pi;} \quad n = 1, 2, \dots, \text{ и } C_4 = 0.$$

Нормална функција има облик

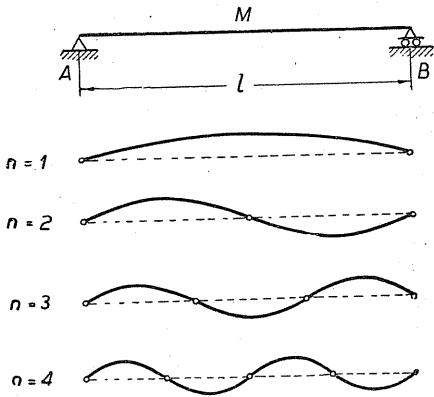
$$Z_n = C_{3n} \sin \frac{n\pi}{l} z = C_n \sin \frac{n\pi}{l} z. \quad (25)$$

Кружна фреквенција и период осцилације су

$$\omega_n = k^2 c = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{\mathfrak{B}}{\rho A}} = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{\mathfrak{B}}{M l^3}}, \quad (26)$$

$$T_n = \frac{2l^2}{n^2 \pi} \sqrt{\frac{\rho A}{E I_x}} = \frac{2}{n^2 \pi} \sqrt{\frac{M l^2}{\mathfrak{B}}}$$

па кружна фреквенција расте са квадратом природних бројева (n). Основни хармоник се добија за $n=1$, виши за $n=2, 3, \dots$, (сл. 18.3.). Таласна дужина је $\lambda'_n = 2l^2/\pi n^2$. Положај чворова се одређује из услова $Z_n = 0$, то јест $\sin(n\pi z/l) = 0$, те је $z = l/n$. Сви подаци за прва четири хармоника дати су у таблици 18.1.



Сл. 18.3. — Хармоници просте греде

Таблица 18.1.

n	1	2	3	4
ω_n	$9,8696 \sqrt{\mathfrak{B}/M l^3}$	$39,478 \sqrt{\mathfrak{B}/M l^3}$	$88,826 \sqrt{\mathfrak{B}/M l^3}$	$157,76 \sqrt{\mathfrak{B}/M l^3}$
λ'_n	$l^2/(1/2 \pi)$	$l^2/2 \pi$	$l^2/(9/2 \pi)$	$l^2/8 \pi$

Исту фреквентну једначину добијамо и помоћу функција (20). Из (22), с обзиром на (21), биће:

$$A = 0, \quad C = 0, \quad B \Gamma(kl) + D V(kl) = 0, \quad B k^2 V(kl) + k^2 D \Gamma(kl) = 0,$$

те је фреквентна једначина

$$\Gamma^2(kl) - V^2(kl) = 1/2 S_1(kl) = \text{Sh } kl \sin kl = 0.$$

Пошто су A_n и B_n произвољни можемо ставити да је $C_n = 1$, па је опште решење

$$y(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi}{l} z. \quad (27)$$

За почетне услове (17) добијамо, као и код жице, (чл. 19), да су константе:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(z) \sin \frac{n\pi}{l} z dz, \quad B_n = \frac{2}{l\omega_n} \int_0^l \varphi(z) \sin \frac{n\pi}{l} z dz.$$

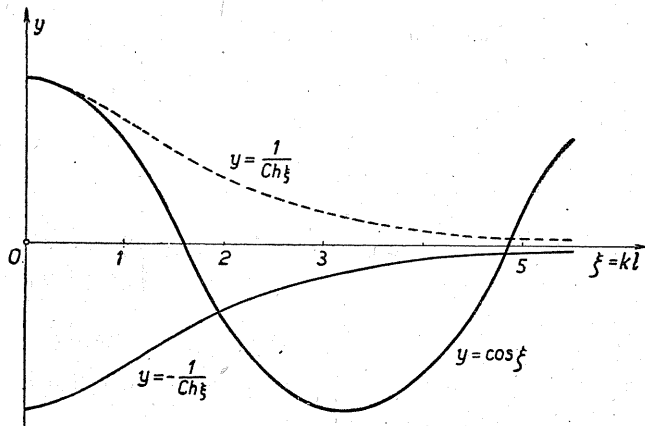
2) Конзола. — Код конзоле, (сл. 18.2. b), гранични услови су: за $z=0$ су $Z=0$ и $Z'=0$, а за $z=l$ су $Z''=0$ и $Z'''=0$. Из (14) добијамо систем хомогених једначина

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = 0; & C_2 + C_4 = 0, \\ C_1 \cos kl + C_2 \sin kl - C_3 \operatorname{Ch} kl - C_4 \operatorname{Sh} kl = 0, \\ C_1 \sin kl - C_2 \cos kl + C_3 \operatorname{Sh} kl + C_4 \operatorname{Ch} kl = 0, \end{cases}$$

па је фреквентна једначина

$$1 + \operatorname{Ch} kl \cos kl = 0. \quad (28)$$

Корене ове трансцендентне једначине одредићемо најлакше графички помоћу кривих $y = \cos \xi$ и $y = -1/\operatorname{Ch} \xi$, где је $\xi = kl$, како је пока-



Сл. 18.4. — Графичко одређивање кружних фреквенција (сопствених вредности) фреквентне једначине конзоле и слободне греде

зано на сл. 18.4. Корени једначине (28) и кружне фреквенције дати су у табlici 18.2.

Таблица 18.2.

n	1	2	3	4	5	6	$n > 4$
ξ_n	$1,8751 \approx$ $\approx 0,6 \pi$	$4,6944 \approx$ $\approx 1,49 \pi$	$7,8548 \approx$ $\approx 2,5 \pi$	10,996	14,137	17,279	$\approx \frac{2n-1}{2} \pi$
ω_n	$3,515/\sqrt[3]{EI^3}$	$22,032/\sqrt[3]{EI^3}$	$61,701/\sqrt[3]{EI^3}$	$120,89/\sqrt[3]{EI^3}$	$198,85/\sqrt[3]{EI^3}$	$298,74/\sqrt[3]{EI^3}$	$\approx \frac{(2n-1)^2}{4} \pi^2 \sqrt[3]{\frac{EI^3}{M}}$

За велико $\xi = kl$ крива $1/\text{Ch } \xi$ брзо опада и тежи нули, па је $\cos k_n l = 0$, то јест

$$k_n l = \frac{1}{2} (2n-1) \pi, \text{ за } n > 4.$$

Како је $C_3 = -C_1$ и $C_4 = -C_2$ то је нормална функција

$$Z = C_1 (\cos kz - \text{Ch } kz) + C_2 (\sin kz - \text{Sh } kz),$$

односно

$$Z_n = C_n \frac{\text{Ch } k_n z - \cos k_n z}{\text{Ch } k_n l + \cos k_n l} - \frac{\text{Sh } k_n z - \sin k_n z}{\text{Sh } k_n l + \sin k_n l}, \quad (29)$$

где је C_n константа. Типови осцилација су приказани на сл. 18.5., те се види да се за више хармоники облик приближава синусној линији.

Из (22), с обзиром на граничне услове и (21), добијамо

$$A = 0; \quad B = 0;$$

$$C S(kl) + D T(kl) = 0;$$

$$C V(kl) + D S(kl) = 0,$$

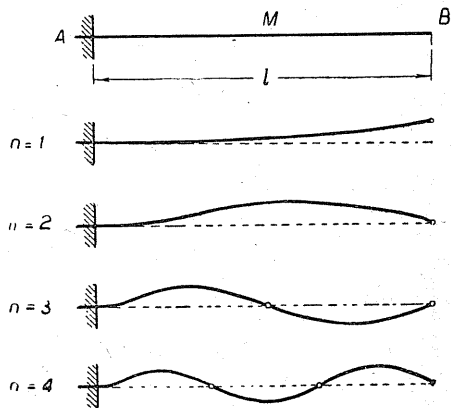
па је фреквентна једначина

$$S^2(kl) - V(kl) \cdot T(kl) = \frac{1}{2} E(kl) = \frac{1}{2} (1 + \text{Ch } kl \cos kl) = 0,$$

иста као и у претходном случају.

3) Слободна греда. — Код слободне греде, (сл. 18.2. с), услови на крајевима су: за $z=0$ и $z=l$ су $Z''=0$ и $Z'''=0$, па, помоћу (22), добијамо да су $C=D=0$, и фреквентну једначину

$$U^2(kl) - T(kl) \cdot V(kl) = -\frac{1}{2} D(kl) = 0,$$



Сл. 18.5. — Хармоници хомогене конзоле

то јест

$$-D(kl) = 1 - \operatorname{Ch} kl \cos kl = 0. \quad (30)$$

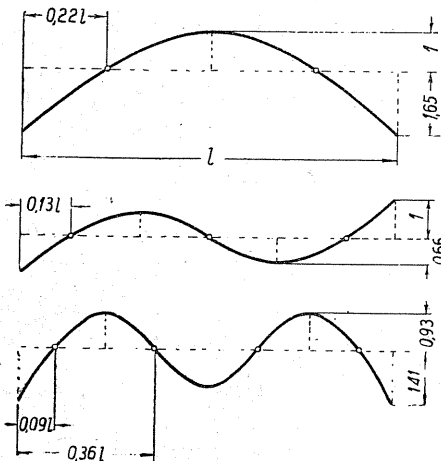
Корени се одређују графички помоћу пресека кривих $y = \cos \xi$ и $y = 1/\operatorname{Ch} \xi$, $\xi = kl$, (сл. 18.4.). За велико ξ израз $1/\operatorname{Ch} \xi$ тежи нули, па следи услов $\cos kl = 0$, то јест $kl \approx \frac{1}{2}(2n+1)\pi$.

Корени и кружне фреквенције дати су у табlici 18.3.

Таблица 18.3.

n	1	2	3	4	5	6	7
	0	4,7300	7,8532	10,996	14,137	17,279	20,420
ω_n	0	$22,373\sqrt{\mathfrak{B}/Ml^3}$	$61,669\sqrt{\mathfrak{B}/Ml^3}$	$120,85\sqrt{\mathfrak{B}/Ml^3}$	$199,85\sqrt{\mathfrak{B}/Ml^3}$	$298,74\sqrt{\mathfrak{B}/Ml^3}$	$416,902\sqrt{\mathfrak{B}/Ml^3}$

Облици осцилација су приказани на сл. 18.6. Овај случај осцилација срећемо код бродова.



Сл. 18.6. — Хармоници слободне греде (брода).

4) Обосшрано уклешћена греда. — У овоме случају, (сл. 18.2. d), гранични услови су: за $z=0$ и $z=l$ су $Z=0$ и $Z'=0$, па из (22) следи да су $A=B=0$ и фреквентна једначина

$$\operatorname{Ch} kl \cos kl = 1, \quad (30')$$

иста као и у случају слободне греде.

5) Конзола подупрша на слободном крају. — Услови на крајевима, (сл. 18.2. e), су: за $z=0$ је $Z=0$ и $Z'=0$, за $z=l$ су $Z=0$ и $Z''=0$.

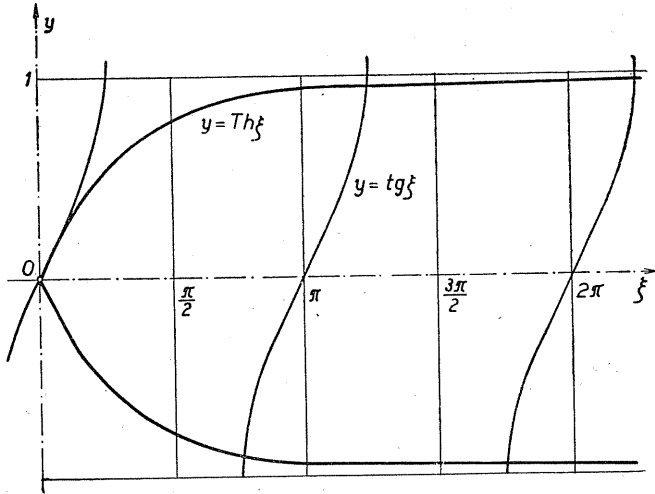
Из (22) следи да су $A=B=0$ и фреквентна једначина облика

$$B(kl) = \operatorname{Ch} kl \sin kl - \operatorname{Sh} kl \cos kl = 0$$

односно

$$\boxed{\operatorname{tg} kl = \operatorname{Th} kl.} \quad (31)$$

Корени се одређују графички, (сл. 18.7.). За велико $\xi = kl$ биће $\operatorname{Th} \xi \rightarrow 1$, па следи $\operatorname{tg} kl \approx 1$. Корени су дати у табlici 18.4.



Сл. 18.7. — Графичко одређивање корена једначине $\operatorname{tg} \xi = \operatorname{Th} \xi$

Таблица 18.4.

n	1	2	3	4	5	$n > 5$
ξ_n	3,9270	7,0690	10,210	13,352	16,493	$\frac{\pi}{4} \approx \frac{\pi(n+1)+1}{4} \approx 16,493 + \pi(n-5)$
ω_n	$15,421\sqrt{\mathfrak{B}/Ml^3}$	$49,970\sqrt{\mathfrak{B}/Ml^3}$	$104,244\sqrt{\mathfrak{B}/Ml^3}$	$178,28\sqrt{\mathfrak{B}/Ml^3}$	$272,02\sqrt{\mathfrak{B}/Ml^3}$	$\approx 16,493 + \pi(n-5)$

б) Греда ослоњена само на једном крају. — Услови на крајевима, (сл. 18.2. f), су: за $z=0$ су $Z=0$ и $Z''=0$ а за $z=l$ су $Z''=0$ и $Z'''=0$, па из (22) следи да су $A=C=0$ и фреквентна једначина

$$V(kl) S(kl) - U(kl) T(kl) = 0, \text{ то јест } \operatorname{tg} kl = \operatorname{Th} kl,$$

те је иста као и у случају конзоле подупрте на слободном крају.

7) *Обострано уклештена греда са једним покретним уклешћењем.* — У овоме случају услови на крајевима греде, (сл. 18.2. g), су: за $z=0$ су $Z'=0$, $Z'''=0$, а за $z=l$ су $Z=0$ и $Z'=0$. Из (22) следи да су $B=D=0$, па је фреквентна једначина

$$S(kl) T(kl) - U(kl) V(kl) = \frac{1}{2} A(kl) = 0,$$

то јест

$$\operatorname{tg} kl + \operatorname{Th} kl = 0. \quad (32)$$

Корени су: 0; 2,365; 5,498; уопште, за $n > 2$ биће $\xi_n \approx 5,498 + (n-2)\pi$. Најнижа кружна фреквенција је $\omega_2 = 5,593 \sqrt{\mathfrak{B}/Ml^3}$.

8) *Подупрша конзола са покретним уклешћењем.* — У случају овога ослањања, (сл. 18.2. h), биће услови на крајевима: за $z=0$ су $Z'=0$, $Z'''=0$ и за $z=l$ су $Z=0$ и $Z''=0$. Из (22) биће $B=D=0$ па је фреквентна једначина

$$S^2(kl) - U^2(kl) = \frac{1}{2} C(kl) = 0,$$

то јест

$$\operatorname{Ch} kl \cos kl = 0. \quad (33)$$

Из услова $\cos kl = 0$ следи да је

$$\cos kl = 0; \quad k_n l = \frac{2n-1}{2} \pi; \quad n = 1, 2, \dots$$

Сви резултати за наведене карактеристичне случајеве дати су прегледно у табелици 18.5. (страница 363).

Сличним поступком одредили бисмо и фреквентне једначине у случају да су лежишта *еластична**. Нека је, на пример, десно лежиште прсте греде, (сл. 18.2.a), *еластично*, са опругом крутости c_1 , онда ће гранични услови бити: за $z=0$ су $Z=Z''=0$, док је за $z=l$ угиб $Z=Y/c_1 = -F_T/c_1 = \mathfrak{B}Z'''/c_1$, јер је, према усвојеним ознакама и (3), трансверзална сила на овом ослоњуцу негативна, и момент $Z''=0$. Према (22), с обзиром на (21), биће константе $A=C=0$, па је фреквентна једначина

$$\Delta(\xi) = \begin{vmatrix} V(\xi) & T(\xi) \\ T(\xi) - \alpha U(\xi) & V(\xi) - \alpha S(\xi) \end{vmatrix} = V^2 - T^2 - \alpha(VS - UT) = 0,$$

где су: $\alpha = \mathfrak{B}k^3/c_1$, $\xi = kl$.

* Отпорност материјала, чл. 10.3.

Таблица 18.5.

Сопствена вредност $\xi_n = k_n l$	Нормална функција Z_n		Фреквентна једначина	Гранич. усл.		Случај сл. 18.2.
				$z=l$	$z=0$	
$\pi; 2\pi, \dots, \dots n\pi$		$C_n \sin \frac{n\pi}{l} z$	$\text{Sh } kl \sin kl = 0$ $\sin kl = 0$ $S_1(kl) = 0$	$Z'' = 0$ $Z''' = 0$	$Z = 0$ $Z'' = 0$	a)
1,8751 4,6941 7,8548 10,996 14,137 17,279	$\frac{S(k_n l)}{T(k_n l)}$	$C_n \left[\frac{\text{Ch } k_n z - \cos k_n z}{\text{Ch } k_n l + \cos k_n l} - \frac{\text{Sh } k_n z - \sin k_n z}{\text{Sh } k_n l + \sin k_n l} \right]$	$1 + \text{Ch } kl \cdot \cos kl = 0$ $E(kl) = 0$	$Z'' = 0; Z''' = 0$	$Z = 0; Z' = 0$	b)
0 4,7300 7,8532 10,996 14,137 17,279	$\frac{S(k_n l)}{V(k_n l)}$	$C_n \left[\frac{\text{Ch } k_n z + \cos k_n z}{\text{Ch } k_n l - \cos k_n l} - \frac{\text{Sh } k_n z + \sin k_n z}{\text{Sh } k_n l - \sin k_n l} \right]$	$1 - \text{Ch } kl \cdot \cos kl = 0$ $D(kl) = 0$	$Z'' = 0; Z''' = 0$	$Z'' = 0; Z''' = 0$	c)
као c)	$\frac{U(k_n l)}{V(k_n l)}$	$C_n \left[\frac{\text{Ch } k_n z - \cos k_n z}{\text{Ch } k_n l - \cos k_n l} - \frac{\text{Sh } k_n z - \sin k_n z}{\text{Sh } k_n l - \sin k_n l} \right]$	$1 - \text{Ch } kl \cdot \cos kl = 0$ $D(kl) = 0$	$Z = 0; Z' = 0$	$Z = 0; Z' = 0$	d)
3,9270 7,0690 10,210 13,352 16,493 21,206	$\frac{V(k_n l)}{S(k_n l)}$	као под d) или $C_n \left[\frac{\text{Sh } k_n z - \sin k_n z}{\text{Sh } k_n l + \sin k_n l} - \frac{\text{Ch } k_n z - \cos k_n z}{\text{Ch } k_n l + \cos k_n l} \right]$	$\text{tg } kl = \text{Th } kl$ $B(kl) = 0$	$Z = 0; Z'' = 0$	$Z = 0; Z' = 0$	e)
као e)		$C_n \left[\frac{\sin kz}{\sin kl} + \frac{\text{Sh } kz}{\text{Sh } kl} \right]$ $C_n \left[\frac{\sin kz}{\cos kl} + \frac{\text{Sh } kz}{\text{Ch } kl} \right]$	$\text{tg } kl = \text{Th } kl$ $B(kl) = 0$	$Z'' = 0; Z''' = 0$	$Z = 0; Z'' = 0$	f)
0 2,365 5,498 11,781 14,923 18,064		$C_n \left[\frac{\cos k_n z}{\cos k_n l} - \frac{\text{Ch } k_n z}{\text{Ch } k_n l} \right]$ $C_n \left[\frac{\cos k_n z}{\sin k_n l} + \frac{\text{Ch } k_n z}{\text{Sh } k_n l} \right]$	$\text{tg } kl = -\text{Th } kl$ $A(kl) = 0$	$Z = 0; Z' = 0$	$Z = 0; Z'' = 0$	g)
$\frac{1}{2}\pi$ $\frac{3}{2}\pi$ \dots $\frac{2n-1}{2}\pi$		као под g) $C_n \left[\frac{\cos k_n z}{\cos k_n l} + \frac{\text{Ch } k_n z}{\text{Ch } k_n l} \right]$	$\text{Ch } kl \cos kl = 0$ $\cos kl = 0$ $C(kl) = 0$	$Z = 0; Z' = 0$	$Z = 0; Z'' = 0$	h)

Сопствене вредности одређују се помоћу трансцендентне једначине

$$\frac{c_1 l^3}{\mathfrak{B}} = \xi^3 \frac{\mathbf{B}(\xi)}{\mathbf{S}_1(\xi)} = \frac{\xi^3}{2} (\text{Cth } \xi - \text{ctg } \xi).$$

За $c_1 = \infty$ биће $\mathbf{S}_1(\xi) = 0$, случај греде са крутим ослонцима.

У случају да је *уклешћење конзоле еластично* (сл. 18.2.b), биће нагиб $\varphi_A = \mathfrak{M}_A / c_1$, где је c_1 специфична крутост при обртању*. Гранични услови у овом случају су: за $z=0$ су $Z=0$, $Z' = Z''/c_1$ а за $z=l$ су $Z'' = Z''' = 0$.

Фреквентна једначина је

$$\alpha = \frac{\mathbf{B}(\xi)}{\mathbf{E}(\xi)} = \frac{\text{Ch } \xi \sin \xi - \text{Sh } \xi \cos \xi}{1 + \text{Ch } \xi \cos \xi}$$

где су $\alpha = c_1/k$, $\xi = kl$.

18.2. Утицај концентрисаних маса на слободне осцилације греда. — Нека се на слободном крају конзоле, (сл. 18.5.), налази концентрисана маса m , онда се гранични услови на том крају мењају ушлико што *трансверзална сила није више једнака нули, већ је њена негативна вредност једнака сили инерције масе m , јер шежи, као сила еластичности греде, да масу врати у првобитни положај.* Према томе су у овоме случају гранични услови:

$$\text{за } z=0 \text{ су } Z=0 \text{ и } Z'=0;$$

$$\text{за } z=l \text{ су } Z''=0, \quad m\omega^2 Z = -F_T = -\mathfrak{B}Z''',$$

јер је

$$\mathfrak{B}y'' = M_f. \quad (34)$$

С обзиром на услове на крајевима (34), из (22) следи да су $A=B=0$, па је фреквентна једначина

$$\Delta(kl) = \begin{vmatrix} \mathbf{S}(kl) & \mathbf{T}(kl) \\ m\omega^2 \mathbf{U}(kl) + \mathfrak{B}k^3 \mathbf{V}(kl) & m\omega^2 \mathbf{V}(kl) + \mathfrak{B}k^3 \mathbf{S}(kl) \end{vmatrix} = 0,$$

која се, због (11), своди на облик

$$k \mu l (\mathbf{S}\mathbf{V} - \mathbf{U}\mathbf{T}) = \mathbf{T}\mathbf{V} - \mathbf{S}^2 \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} k \mu l \mathbf{B} = \frac{1}{2} \mathbf{E},$$

* Отпорност материјала, чл. 10.3.

где је $\mu = m/M$. Према томе се карактеристичне вредности kl одређују из трансцендентне једначине

$$\mu kl = \frac{E(kl)}{B(kl)} = \frac{1 + \operatorname{Ch} kl \cos kl}{\operatorname{Ch} kl \sin kl - \operatorname{Sh} kl \cos kl} \quad (35)$$

за дати однос маса μ .

За $m=0$, то јест $\mu=0$, из (35) добија се једначина (28).

Ако је на средини просте греде, (сл. 18.8. a), насађена маса m , онда разликујемо два случаја осцилација: симетричних (сл. 18.8. b), и антисиметричних, (сл. 18.8. c).

У првом случају су гранични услови:

$$\text{за } z=0 \text{ су } Z=Z''=0,$$

$$\text{за } z=1/2 l \text{ су } Z'=0, \quad (36)$$

$$\frac{1}{2} m \omega^2 Z = \underline{F_T} = \gamma \mathfrak{B} Z''', \quad \Upsilon$$

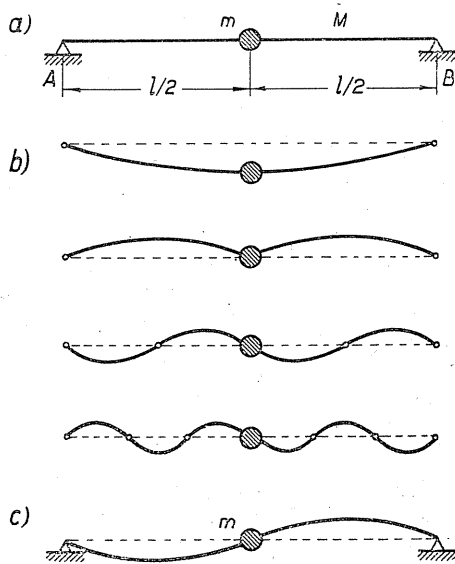
јер је половина силе инерције једнака сили еластичности греде. Из (22), с обзиром на (36) и (11), следи да су $A=C=0$ и фреквентна једначина

$$\Delta(\xi) = \begin{vmatrix} S(\xi) & U(\xi) \\ \frac{1}{2} \mu kl T(\xi) + U(\xi) & \frac{1}{2} \mu kl V(\xi) + S(\xi) \end{vmatrix} = 0$$

која се своди на облик

$$\frac{1}{2} \mu \xi = \frac{C(\xi)}{B(\xi)} = \frac{2 \operatorname{Ch} \xi \cos \xi}{\operatorname{Ch} \xi \sin \xi - \operatorname{Sh} \xi \cos \xi} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \xi - \operatorname{Th} \xi = \frac{4}{\mu \xi} \quad (37)$$

где је $\xi = 1/2 kl$; $\mu = m/M$.



Сл. 18.8. — Хармоници просте греде са концентрисаном масом на средини распона

С обзиром на (22) и трећи услов (36) биће константа $D = -BS(\xi)/U(\xi)$, па се после свођења добија нормална функција

$$Z_n = C_n \left[\frac{\text{Sh } k_n z}{\text{Sh } \xi} - \frac{\sin k_n z}{\cos \xi} \right].$$

Главни облици су приказани на сл. 18.8. *b*, па се види да за високе хармонике маса m скоро остаје у миру. Када $n \rightarrow \infty$ тада и $u \rightarrow 0$, те маса дејствује као уклештење.

Ако је маса m мала у сравњењу са M , ($m \ll M$), то јест ако је μ мало а ξ није много велико, онда из (37) следи да $\text{tg } \xi \rightarrow \infty$, па је $\xi \approx \frac{1}{2}(2n-1)\pi$. Ово је услов симетричног осциловања просте греде, распона $\frac{1}{2}l$, (сл. 18.8. *c*). У овоме се случају, дакле, може утицај масе (m) занемарити.

Када је, пак, маса греде M мала у односу на m , ($M \ll m$), онда је и десна страна једначина (37) за мале вредности ξ такође мала. Да би се одредиле ове мале вредности разложимо у ред функције

$$\text{tg } \xi = \xi + \frac{1}{3}\xi^3 + \frac{2}{15}\xi^5 + \frac{17}{315}\xi^7 + \dots; \quad \text{Th } \xi = \xi - \frac{1}{3}\xi^3 + \frac{2}{15}\xi^5 - \frac{17}{315}\xi^7 + \dots,$$

тада је

$$\text{tg } \xi - \text{Th } \xi \approx \frac{2}{3}\xi^3 + \frac{2 \cdot 17}{315}\xi^7 + \dots \approx \frac{2}{3} \left(\xi^3 + \frac{17}{105}\xi^7 \right)$$

па је

$$(3/\mu) = \xi^4 + \frac{17}{105}\xi^8$$

ако се задржимо на четвртим члановима горњих редова. Сменом $3/\mu = u$ и $\xi^4 = u + au^2 + bu^3 + \dots$, методом неодређених коефицијената, добијамо поступно коефицијенте

$$a = -\frac{17}{105}, \quad b = -\frac{34}{105} \quad a = 2 \cdot \left(\frac{17}{105}\right)^2,$$

па је

$$\xi^4 \approx \frac{1}{16} k^4 l^4 = u \left[1 - \frac{17}{105}u + 2 \left(\frac{17}{105}\right)^2 u^2 \right].$$

Кружна фреквенција основног хармоника биће

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{48 \mathfrak{B}}{m l^3} \left[1 - \frac{17}{35} \left(\frac{M}{m}\right) + \frac{6 \cdot 17^2}{35} \left(\frac{M}{m}\right)^2 - \dots \right]}. \quad (38)$$

За $M=0$, из (39), добија се кружна фреквенција слободних осцилација масе m на средини распона просте греде, (чл. 1.7.).

Проблем антисиметричних осцилација своди се на осцилације двеју простих греда распона $\frac{1}{2}l$, те маса m дејствује као непокретно лежиште. Фреквентна једначина у овоме случају је

$$S_1(\xi) = 2 \text{Sh } \xi \sin \xi = 0,$$

иста као и (24) само је ξ два пута мање.

На потпуно исти начин одредили бисмо и фреквентну једначину осцилација обострано уклештене греде са масом (m) на средини распона; она има облик

$$\mu \xi = - \frac{A(\xi)}{D(\xi)} = \frac{\text{Ch } \xi \sin \xi + \text{Sh } \xi \cos \xi}{1 - \text{Ch } \xi \cos \xi} \quad (39)$$

18.3. Утицај инерције обртања пресека и трансверзалне силе на попречне осцилације греде. — У чл. 18.1. претпоставили смо да је попречни пресек греде мали у односу на њену дужину, те смо узели да је $\varphi \approx 0$, (сл. 18.1.). Међутим, поред translације попречни пресек врши и ротацију за угао нагиба тангенте еластичне линије (φ). Сем тога на угиб пресека утиче и трансверзална сила. Због тога се таласна једначина (5) мора допунити члановима који изражавају ове утицаје, а који су знатне вредности у случају кратких а дебелих греда.

18.3.1. Утицај инерције обртања пресека. — Како је нагиб тангенте еластичне линије греде $\varphi \approx \partial v / \partial z$ то су угаона брзина и угаоно убрзање при обртању пресека око попречне главне централне осе инерције (x):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial z \partial t^2}; \quad v = y.$$

Динамичка једначина обртања пресека елемента греде dz , око x осе, биће

$$dJ_x \ddot{\varphi} = \rho I_x dz \frac{\partial^3 v}{\partial z \partial t^2} = -dM = -dM_f,$$

па је укупни прираштај момента савијања

$$dM_f = \frac{\partial M_f}{\partial z} dz = \left(F_T - \rho I_x \frac{\partial^3 v}{\partial z \partial t^2} \right) dz.$$

Због тога динамичке једначине translације и обртања пресека биће

$$\rho A dz \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = dF_T = \frac{\partial F_T}{\partial z} dz, \quad (a)$$

$$\frac{\partial M_f}{\partial z} dz = \left(F_T - \rho I_x \frac{\partial^3 v}{\partial z \partial t^2} \right) dz. \quad (b)$$

Диференцирањем једначине (b), с обзиром на (3), биће

$$\frac{\partial^2 M_f}{\partial z^2} = -\mathfrak{B} \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = \frac{\partial F_T}{\partial z} - \rho I_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2}, \quad (c)$$

па се елиминисањем трансверзалне силе из (a) и (c) добија таласна једначина

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = I_x^2 \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2}, \quad (40)$$

где је I_x полупречник инерције попречног пресека греде за x осу. Једначина (40) се разликује од (5) чланом на десној страни који показује утицај инерције обртања пресека на слободне осцилације греде.

18.3.2. Утицај трансверзалне силе (смицања). — Деформациони рад елемента савијене греде услед трансверзалне силе је*

$$\begin{aligned} dA_{df}^{FT} &= \frac{1}{2} F_T dy_1 = \int \int \frac{\tau^2}{2G} dA \cdot dz = \frac{1}{2} \int \int \left(\frac{F_T S}{I_x \xi} \right)^2 \frac{dA}{G} \cdot dz = \\ &= \frac{F_T^2 dz}{2G} \int \int \left(\frac{S}{I_x \xi} \right)^2 dA = \frac{\kappa F_T^2}{2GA} dz, \quad y=v \end{aligned}$$

где је κ *смицајни коефицијент* (Schubverteilungszahl). Нагиб тангенте еластичне линије услед смицања је $\psi = \kappa F_T / GA$, па је укупни нагиб

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \varphi + \psi, \quad (d)$$

те су нападни момент и трансверзална сила

$$M_f = -\mathfrak{B} \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad F_T = \frac{GA}{\kappa} \psi = \frac{GA}{\kappa} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \varphi \right). \quad (e)$$

Уносећи ове вредности у једначине транслације (a) и ротације (b) добија се

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial F_T}{\partial z} = \frac{GA}{\kappa} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \quad (f)$$

$$-\mathfrak{B} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{GA}{\kappa} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \varphi \right) - \rho I_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (g)$$

Ако се из (f) одреди вредност

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\rho \kappa}{G} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

и диференцира по z и t , биће

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} = \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \frac{\rho \kappa}{G} \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2}, \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z \partial t^2} = \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2} - \frac{\rho \kappa}{G} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4}. \quad (h)$$

Диференцира ли се једначина (g) по z

$$-\mathfrak{B} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} = \frac{GA}{\kappa} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \rho I_x \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z \partial t^2}$$

* Отпорност материјала, чл. 7.6.

и у њу унесу вредности из (h) добија се таласна једначина у облику

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = i_x^2 \left[1 + \kappa \frac{E}{G} \right] \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2} - \rho \kappa \frac{i_x^2}{G} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} \quad (41)$$

у којој чланови на десној страни представљају утицаје инерције обртања пресека и трансверзалне силе (смицања). За случај да је $\kappa=0$, добија се једначина (40) у којој је узет у обзир само утицај инерције обртања пресека.

Ако се решење једначине (41) потражи у облику (8), где је функција $T(t)$ облика (15), па је $T(IV) = \omega^4 T$ онда се она распада на две диференцијалне једначине облика

$$T'' + \omega^2 T = 0, \quad ZIV + Ca^2 Z'' - C(1 - Cb^2 c^2) Z = 0, \quad (42)$$

где су:

$$C = k^4, \quad \omega^2 = Cc^2 = k^4 c^2; \quad a^2 = i_x^2 \left[1 + \kappa \frac{E}{G} \right]; \quad b^2 = \rho \kappa \frac{i_x^2}{G}.$$

Карактеристична једначина друге обичне диференцијалне једначине четвртог реда (42) је облика

$$c^2 \lambda^4 + a^2 \omega^2 \lambda^2 - \omega^2 (1 - b^2 \omega^2) = 0, \quad (43)$$

са коренима

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\alpha \omega^2 + \sqrt{\omega^4 (\alpha^2 - \beta) + (\omega/c)^2}} = \pm p,$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\alpha \omega^2 + \sqrt{\omega^4 (\alpha^2 - \beta) + (\omega/c)^2}} = \pm qi, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (43a)$$

где су уведене смене: $\alpha = a^2/2c^2$, $\beta = b^2/c^2$. Величине p и q биће реални бројеви ако су испуњени услови: $(1 - b^2 \omega^2) > 0$ и $a^4 > 4b^2 c^2$, то јест $[1 - \kappa E/G]^2 > 0$, па је q увек реалан број, док је p зависно од материјала греде.

На пример, за челик је $G = 8.10^5 \text{ kg/cm}^2$, $\kappa = 1,1+1,2$; $\gamma = 7,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$, $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$ па је $\omega < 2,89 \cdot 10^5 / i_x$, где је i_x мерено у см. Овај је услов у пракси обично задовољен.

Решење једначине (43) је облика (12), односно (14), то јест

$$Z = C_1 \cos qz + C_2 \sin qz + C_3 \text{Ch } pz + C_4 \text{Sh } pz, \quad (44)$$

па се фреквентне једначине одређују на исти начин као и раније

Ако се у обзир узме само утицај инерције обртања пресека али се занемари утицај смицања, онда фреквентне једначине остају исте само су због $b=0$ и $a=i_x$ корени фреквентне једначине (43)

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\alpha \omega^2 + \sqrt{\omega^4 \alpha^2 + (\omega/c)^2}} = \pm p; \quad \alpha = \frac{i_x^2}{2c^2} = \frac{\rho}{2E}; \quad (43b)$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\alpha \omega^2 + \sqrt{\omega^4 \alpha^2 + (\omega/c)^2}} = \pm qi; \quad i = \sqrt{-1}.$$

Из овога се види да инерција обртања попречног пресека греде и смицање утичу на смањење кружне фреквенције сопствених осцилација хомогених греда.

На пример, за челичну греду правоугаоног попречног пресека, односа $h/l=1/5$, дужине $l=1\text{m}$, $\kappa=6/5$ добијају се за првих пет карактеристичних случајева, (сл. 18.), снижења кружних фреквенција за 1,94%, $\approx 0,1\%$; 5,85% и 2,05%. За случај $b=0$ биће: 1,63%, $\approx 0\%$, 5,04% и 1,95%.

18.4. Принудне осцилације. — У случају принудних осцилација греде најбоље је користити генералисане координате, као и код жице, (чл. 16.). Како оне зависе од времена (t), то је, према (16),

$$y = v = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n T_n = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) Z_n = \sum_{n=1}^{\infty} q_n Z_n. \quad (45)$$

Кинетичка и потенцијална енергија греде биће

$$E_k = \frac{\rho A}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dz = \frac{\rho A}{2} \sum_{n=1}^{\infty} q_n^2 \int_0^l Z_n^2 dz; \quad (46a)$$

$$E_p = \frac{\mathfrak{B}}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right)^2 dz = \frac{\mathfrak{B}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} q_n^2 \int_0^l (Z_n'')^2 dz, \quad (46b)$$

пошто, с обзиром на ортогоналност нормалних функција (18), отпадају производи координата различитих индекса.

Услов (18) се користи ради израчунавања горњих интеграла. Нормалне функције морају да задовоље диференцијалне једначине (10b), па ће за две различите вредности k_r и k_s бити

$$\int_0^l Z_r Z_s dz = 0; \quad r \neq s; \quad Z_r^{IV} - k_r^4 Z_r = 0; \quad Z_s^{IV} - k_s^4 Z_s = 0.$$

Ако се прва једначина помножи са Z_s а друга са Z_r , одузму и интеграле биће

$$\begin{aligned} \Phi &= (k_s^4 - k_r^4) \int_0^l Z_r Z_s dz = \int_0^l (Z_r Z_s^{IV} - Z_s Z_r^{IV}) dz = \\ &= \left| Z_r Z_s''' - Z_s Z_r''' + Z_s' Z_r'' - Z_r' Z_s'' \right|_0^l = 0, \end{aligned} \quad (47)$$

јер је израз на десној страни за ма какве граничне услове на крајевима (то јест за $z=0$ и $z=l$) једнак нули, па је услов ортогоналности (18) задовољен.

Интеграл (46a) не може се директно израчунати помоћу (47), јер се исти, због $r=s$, јавља у облику $0/0$. Због тога морамо применити Лопиталово правило. Означимо са Φ десну страну једначине (47) онда је

$$\int_0^l Z_r^2 dz = \left[\frac{\partial \Phi / \partial k_s}{\partial (k_s^4 - k_r^4) / \partial k_s} \right]_{k_s = k_r} = \left[\frac{\partial \Phi / \partial k_s}{4k_s^3} \right]_{k_r} \quad (48a)$$

У функцији Φ фигуришу изводи по z , међутим, та функција зависи од k_s , јер су нормалне функције Z функције аргумента kz . Због тога означимо ли са $\xi = k_r z$ и са $\eta = k_s z$, биће изводи:

$$\begin{aligned} Z_r' &= \frac{dZ_r(k_r z)}{dz} = k_r Z_r'(\xi); & Z_s' &= \frac{dZ_s(k_s z)}{dz} = k_s Z_s'(\eta); \\ Z_r'' &= k_r^2 Z_r''(\xi); & Z_s'' &= k_s^2 Z_s''(\eta); \\ &\dots & &\dots \end{aligned}$$

па је функција*

$$\begin{aligned} \Phi(k_s) &= \left| k_s^3 Z_r(\xi) Z_s'''(\eta) - k_r^3 Z_s(\eta) Z_r'''(\xi) + k_s k_r^2 Z_s'(\eta) Z_r''(\xi) - \right. \\ &\quad \left. - k_r k_s^3 Z_r'(\xi) Z_s''(\eta) \right|_0^l \quad (48b) \end{aligned}$$

где су сада са ' означени изводи по ξ , односно η .

Диференцирањем функције Φ по k_s , будући да Z_r не зависи од k_s и да је $d\eta/dk_s = z$, а за вредност $k_s = k_r$, добијамо

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial k_s} \right]_{k_s = k_r} &= \left| 3k_r^2 Z_r Z_r''' + k_r^3 z Z_r''^2 - k_r^2 Z_r' Z_r'' \right|_0^l - 2k_r^3 z Z_r' Z_r''' + \\ &\quad + k_r^3 z Z_r^2 \Big|_0^l \quad (48c) \end{aligned}$$

јер је, према (10b),

$$Z_s^{IV} = k_s^4 Z_s = k_s^4 Z_s^{IV}(\eta), \quad \text{те је} \quad Z_s^{IV}(\eta) = Z_s(\eta).$$

Из граничних услова за осам карактеристичних случајева (таблица 18.5.) види се да је на крајевима увек $Z Z''' = 0$, и $Z Z'' = 0$, па ове изразе треба из једначине (48c) одстранити, те остају само чланови помножени са z . Како за $z=0$ израз (48c) постаје једнак нули то је

$$\partial \Phi / \partial k_s = k_r^3 l [Z_r^2 - 2 Z_r' Z_r'' + (Z_r'')^2], \quad (48d)$$

* Крылов А. Н. — О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики имеющих приложение в технических вопросах. АН. СССР, Ленинград, 1933.

па је одређени интеграл

$$\int_0^l Z_r^2 dz = \frac{1}{4} l [Z_r^2 - 2Z_r' Z_r''' + (Z_r'')^2]_l, \quad (49)$$

где знаци ' значе изводе по $\xi = k_r z$, узете за вредност $z = l$.

За осам карактеристичних случајева, (сл. 18.2.), вредности ових интеграла дате су у табlici 18.6.

Таблица 18.6.

Сл. 18.2.	a)	e)	h)	b)	c)	f)	d)	g)
$z=0$	$Z=0$	$Z=0$	$Z'=0$	$Z=0$	$Z''=0$	$Z=0$	$Z=0$	$Z'=0$
	$Z''=0$	$Z'=0$	$Z'''=0$	$Z'=0$	$Z'''=0$	$Z''=0$	$Z'=0$	$Z'''=0$
$z=l$	$Z=0$	$Z=0$	$Z=0$	$Z''=0$	$Z''=0$	$Z''=0$	$Z=0$	$Z=0$
	$Z''=0$	$Z'=0$	$Z''=0$	$Z'''=0$	$Z'''=0$	$Z'''=0$	$Z'=0$	$Z'=0$
$\int_0^l Z^2 dz$	[$-1/2 l Z'(\xi) Z'''(\xi)$] $_l$			[$1/4 l Z^2(\xi)$] $_l$		[$1/4 l (Z''(\xi))^2$] $_l$		
$\int_0^l (Z'')^2 dz$					$k^4 \int_0^l Z^2 dz$			

Ради израчунавања интеграла (46b) помножимо једначину (10b) са Z_n и интегралимо у границама распона греде, биће

$$k_n^4 \int_0^l Z_n^2 dz = \int_0^l Z_n^{IV} Z_n dz = [Z_n Z_n''' - Z_n' Z_n'']_0^l + \int_0^l Z_n''^2 dz$$

па је

$$\int_0^l (Z_n'')^2 dz = k_n^4 \int_0^l Z_n^2 dz = \frac{k_n^4 l}{4} [Z_n^2 - 2Z_n' Z_n''' + (Z_n'')^2]_0^l \quad (50a)$$

где су на десној страни означени изводи по $\xi = kz$, а за вредност $z = l$.

На овај начин се, дакле, могу добити кинетичка и потенцијална енергија (46а, б), па Лагранжеве једначине дају систем једначина

$$\rho A \ddot{q}_n \int_0^l Z_n^2 dz + \mathfrak{B} q_n \int_0^l (Z_n'')^2 dz = Q_n^*, \quad (51)$$

где је Q_n^* генерализана принудна сила за координату q_n . Њу одређујемо по методи рада, па је

$$dA = \sum Q_n^* \delta q_n. \quad (52)$$

За случај простије греде нормална функција и њени изводи по $\xi = k_n z$ биће:

$Z_n = \sin k_n z$; $Z_n' = \cos \xi_n$; $Z_n'' = -\sin \xi_n$; $Z_n''' = -\cos \xi_n$; $k_n = n\pi/l$
па су интегрални (50):

$$\int_0^l Z_n^2 dz = \left[-\frac{l}{2} Z_n'(\xi_n) Z_n'''(\xi_n) \right]_l = \frac{1}{2} l \cos^2 k_n l = \frac{1}{2} l,$$

$$\int_0^l (Z_n'')^2 dz = \frac{1}{4} k_n^4 l \left[-2Z_n'(\xi_n) Z_n'''(\xi_n) \right] = \frac{1}{2} k_n^4 l = n^4 \pi^4 / 2 l^3.$$

Лагранжева једначина (51), с обзиром на (6), облика је

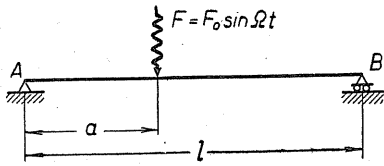
$$\ddot{q}_n + \frac{n^4 \pi^4 c^2}{l^4} q_n = \frac{2}{\rho A l} Q_n^* = \frac{2}{M} Q_n^*; \quad \omega_n^2 = c^2 k_n^4, \quad (53)$$

па је њено опште решење према методи варијација констаната* (чл. 4.5.):

$$q_n = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{2l^2}{n^2 \pi^2 c M} \int_0^t Q_n^*(\tau) \sin \frac{n^2 \pi^2 c}{l^2} (t - \tau) d\tau. \quad (54)$$

* $\ddot{q} + \omega^2 q = f(t)$; $q^{(p)} = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau.$

18.4.1. Утицај периодичко променљиве силе. — На просту греду AB , (сл. 18.9.), дејствује периодичка сила $F = F_0 \sin \Omega t$ у пресеку на растојању a од левог ослоња. Замислимо да координата q_n добије мало померање δq_n , тада је, према (45), угиб пресека ($z = a$)



$$\delta y_{(z=a)} = \sum \delta q_n \sin(n\pi a/l),$$

па је прираштај рада пертурбационе силе

$$\delta A = (F_0 \sin \Omega t) \delta y = \\ = F_0 \sin \Omega t \sin(n\pi a/l) \delta q_n = Q_n^* \delta q_n$$

Сл. 18.9. — Утицај периодичко променљиве силе на осцилације просте греде

те је генералисана сила

$$Q_n^* = F_0 \sin(n\pi a/l) \sin \Omega t. \quad (55)$$

Унесе ли се ова вредност у трећи члан једначине (54) добиће се закон режима принудног кретања:

$$q_n^{(p)} = \frac{2F_0}{M} \sin \frac{n\pi a}{l} \left[\frac{1}{\omega_n^2 - \Omega^2} \sin \Omega t - \frac{l^6 \Omega}{n^2 \pi^2 c (\omega_n^2 - \Omega^2)} \sin \omega_n t \right] \quad (56)$$

а тиме, с обзиром на (45), и облик нормалне функције Z_n . Померање је

$$y_p = v_p = \frac{2F_0}{M} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2 - \Omega^2} \sin \frac{n\pi}{l} a \sin \frac{n\pi}{l} z \sin \Omega t - \\ - \frac{2F_0 l^6 \Omega}{M \pi^2 c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (\omega_n^2 - \Omega^2)} \sin \frac{n\pi}{l} a \sin \frac{n\pi}{l} z \sin \omega_n t = y_2 + y_1. \quad (57)$$

Први члан ове једначине представља „чистије принудне осцилације“ услед периодичког дејства силе F , а други слободне осцилације услед исте силе. После дужег времена, услед отпора, изумреће слободне осцилације, па је режим „чистог“ принудног кретања

$$y_p = v_p = v_2 = \frac{2F_0}{M} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2 - \Omega^2} \sin \frac{n\pi}{l} a \sin \frac{n\pi}{l} z \sin \Omega t. \quad (57a)$$

Када се амплитуда силе F мења полако, то јест ако је кружна фреквенција периодичке силе Ω врло мала, тада се величина Ω^2 може занемарити, па добијамо

$$y_p = v_p \approx \frac{2F_0 l^3}{3\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi}{l} a \sin \frac{n\pi}{l} z = f_s(z=a) \quad (57b)$$

статички угиб пресека испод силе.

На пример, за $a = 1/2 l$ овај ред конвергише врло брзо и биће

$$f_s = \frac{2F_0 l^3}{3\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^4} \sin \frac{(2n-1)\pi}{l} z \quad (58a)$$

па је

$$f_{max} \approx \frac{2F_0 l^3}{\mathfrak{B} \pi^4} (1+0,012+0,02) \approx \frac{2F_0 l^3}{\mathfrak{B} \pi^4} \approx \frac{F_0 l^3}{48,7 \mathfrak{B}}. \quad (58b)$$

Да бисмо испитали однос динамичког и статичког угиба греде уведемо однос кружних фреквенција принудне силе и основног облика слободних осцилација, $\psi = \Omega/\omega_1 = \Omega l^2/c\pi^2$. Уносећи овај израз у (57a) биће

$$y_p = \frac{2F_0 l^3}{\mathfrak{B} \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 - \psi^2} \sin \frac{n\pi}{l} a \sin \frac{n\pi}{l} z \sin \Omega t,$$

па, према (57b), добијамо однос угиба

$$\eta_d = \left(\sum \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi}{l} a \sin \frac{n\pi}{l} z \right) / \left(\sum \frac{1}{n^4 - \psi^2} \sin \frac{n\pi}{l} z \right). \quad (59)$$

На пример, за $a = 1/2 l$ биће

$$y_p = \frac{2F_0 l^3}{\mathfrak{B} \pi^4} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^4 - \psi^2} \sin \frac{n\pi}{l} z,$$

па заустављајући се само на првом члану реда, с обзиром на (58a), добијамо

$$\eta_d \approx \frac{f_d}{f_s} = \frac{1}{1 - \eta^2}.$$

Када је $\omega_1 = 3\Omega$, тада је $\psi = 1/3$, па је $\eta_d = 1,125$, то јест f_d је за 12,5% веће од f_s .

У случају више концентрисаних периодичких сила укупно померање се добија методом суперпозиције.

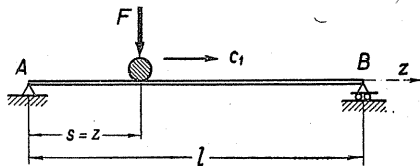
18.4.2. Утицај покретног оптерећења. — Када се сила константне јачине ($F = F_0$) креће по простој греди AB , једнолико брзином $v_1 = c_1$ од левог ка десном ослонцу (сл. 18.10.), онда она врши рад. Ако је у почетку кретања ($t_0 = 0$) терет био у ослонцу A ($z = 0$) онда ће у тренутку t прећи пут $s = z = c_1 t$, па је прираштај рада силе

$$\delta A = F \cdot \delta y = F \cdot \delta(q_n \sin k_n z) = Q_n^* \delta q_n \quad (60)$$

те је генералисана принудна сила

$$Q_n^* = F \sin k_n z = F \sin k_n c_1 t = F \sin \Omega_n t, \quad (61)$$

где је Ω_n кружна фреквенција промене генералисане силе, $\Omega_n = k_n c_1$.



Сл. 18.10. — Утицај покретног терета на осцилације греде

Унесемо ли ову једначину у трећи члан једначине (54) добићемо закон принудног кретања:

$$q_n^{(p)} = \frac{2 F l^2}{n^2 \pi^2 M c} \int_0^t \sin \Omega_n \tau \sin \omega_n (t - \tau) d\tau, \quad (62a)$$

па је, према (45), померање — закон режима принудног кретања:

$$y_p = v_p = \frac{2 F l^3}{\pi^4 \mathfrak{B}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (n^2 - \beta^2)} \sin k_n z \sin \Omega_n t - \frac{2 F l^3 \beta}{\pi^4 \mathfrak{B}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (n^2 - \beta^2)} \sin k_n z \sin \omega_n t, \quad (62b)$$

где је уведена смена $\beta = l c_1 / \pi c$.

Први збир горњег израза представља „чистије принудне осцилације“ услед дејства покретне силе константног интензитета (F), а други слободне осцилације услед дејства ове силе.

За $c_1 = 0$ добија се статички угиб оптерећеног пресека ($s = a$).

Буде ли брзина кретања терета $c_1 = \pi c / l$, то јест $\beta = 1$, тада је време прелаза целог распона греде $t_k = l / c_1 = l^2 / \pi c = T / 2$, где је T период осцилације греде при основном хармонику ($n = 1$), па се збир првих чланова у (62b) јавља у неодређеном облику

$$\frac{2 F l^3}{\pi^4 \mathfrak{B}} \frac{1}{1 - \beta^2} \left[\sin \frac{\pi}{l} c_1 t - \beta \sin \omega_1 t \right] \sin \frac{\pi}{l} z.$$

Применом Лопиталовог правила, због $\partial \beta / \partial c_1 = l / \pi c$, биће

$$-\frac{\pi c}{2 \beta l} \left[\frac{\pi}{l} t \cos \frac{\pi}{l} c_1 t - \frac{l}{\pi c} \sin \omega_1 t \right]_{\beta=1}$$

па је померање

$$y_p = -\frac{F l^2 c_1}{\pi^3 \mathfrak{B}} t \sin \frac{\pi c_1}{l} t \sin \frac{\pi}{l} z + \frac{2 F l^3}{\pi^4 \mathfrak{B}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 (n + 1)} \sin k_n z \sin \Omega_n t. \quad (62c)$$

Узмимо ли у овом случају, а за $z = 1/2 l$, само први члан реда добићемо

$$y_p \approx f_d = f_{max} = F l^3 / \mathfrak{B} \pi^3,$$

па је динамички фактор

$$\eta_d = f_d / f_s = [F l^3 / \mathfrak{B} \pi^3] / [2 F l^3 / \pi^4 \mathfrak{B}] = 1/2 \pi \approx 1,57.$$

Динамички угиб на средини распона греде већи је за 57% од статичког угиба на истом месту.

Када терет стигне на крај греде (B) настају њене слободне осцилације. Тада су, дакле, за $t=l/c_1$, брзине свих тачака једнаке нули, па је за $t > l/c_1$ приближан закон слободних осцилација

$$y_p \approx \frac{Fl^3}{\pi^3 \mathfrak{B}} \sin \frac{\pi}{l} z \cos \left[\frac{\pi c_1}{l} t - \pi \right]. \quad (63)$$

Осцилације нису више опасне за греду, поготову што се исте врло брзо амортизују услед отпора трења.

Када се терет креће врло лагано, тада је c_1 мали број, па је и β мали број, ($\beta \approx 0$), те је закон кретања

$$y_p \approx \frac{2Fl^3}{\pi^4 \mathfrak{B}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin k_n z \sin \Omega_n t. \quad (64a)$$

У овоме се случају могу занемарити силе инерције, па се динамичка еластична линија поклапа са статичком еластичном линијом.

Ако је брзина терета таква да је β мали број који се не занемарује (случај преласка терета преко моста), узимајући само прве чланове редова добија се закон принудног кретања

$$y_p \approx \frac{2Fl^3}{\pi^4 \mathfrak{B}} \frac{1}{1 - \beta^2} \sin k_n z \left[\sin \frac{\pi c_1}{l} t - \beta \sin \omega_1 t \right]. \quad (64b)$$

За $z = \frac{1}{2} l$, y_p се мало разликује од статичког угиба.

Ако је маса греде (M) мала у сравњењу са масом покретног терета ($m = F/g$) онда се иста може занемарити, те добијамо случај принудних осцилација лаке греде са покретном константном масом. Тада је диференцијална једначина

$$m \ddot{y} = F - (y/\alpha_{zz})$$

где је $\alpha_{zz} = z^2(l-z)^2/3 \mathfrak{B} l$ утицајни коефицијент у пресеку испод силе. Ставимо ли $z = c_1 t$, због $\ddot{y} = c_1^2 y''$, где је z нова променљива, горња диференцијална једначина постаје

$$y'' = \alpha - [\beta y / (lz - z^2)^2],$$

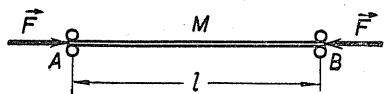
где су уведене смене $\alpha = g/c_1^2$; $\beta = 3 \mathfrak{B} g l / F c_1^2$.

Стокс (Stokes) је ову једначину око 1860. год. интегрално помоћу редова, док је лорд Келвин показао да се може интегралити и квадратуром.

Сложенији је случај произвољно променљивог оптерећења $F(z, t)$. Тада се једначина (5) помоћу Лапласове трансформације своди на алгебарску једначину слике, а помоћу инверзне трансформације добија се оригинал — то јест закон кретања.

18.4.3. Утицај аксијалне силе на трансверзалне осцилације греде. — Услед аксијалне силе константне величине F , (сл. 18.11.), наступа промена дужине греде (скраћење)

$$\Delta s = \int_0^l ds - dz = \int_0^l [\sqrt{1 + (\partial y / \partial z)^2} - 1] dz \approx \frac{1}{2} \int_0^l (\partial y / \partial z)^2 dz, \quad (65)$$



Сл. 18.11. — Утицај аксијалних сила притиска на осцилације просте греде

под претпоставком да је $\partial y / \partial z$ мала величина у односу на јединицу.

У овом случају, према (25) и (45), укупна потенцијална енергија (деформациони рад) услед притиска (компресије) и савијања износи

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} F \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \mathfrak{B} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right)^2 dz = \\ &= \frac{\mathfrak{B} \pi^4}{4 l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 q_n^2 - \frac{F \pi^2}{4 l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 q_n^2; \quad y = v, \end{aligned} \quad (66)$$

док је кинетичка енергија

$$E_k = \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dz = \frac{1}{4} M \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n^2. \quad (67)$$

Лагранжева диференцијална једначина је

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 [1 - (k^2/n^2)] q_n = 0, \quad (68)$$

где је

$$k^2 = F l^2 / \mathfrak{B} \pi^2, \quad (69a)$$

па је њено решење

$$y = v = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \Omega_n t + B_n \sin \Omega_n t) \sin k_n z; \quad (69b)$$

овде је кружна фреквенција

$$\Omega_n = \omega_n \sqrt{1 - (k/n)^2}. \quad (70)$$

Она је мања од кружне фреквенције слободних осцилација. За $k = n$ биће једнака нули. Тада је аксијална сила F једнака Ојлеровој критичној сили аксијално притиснутог штапа, $F = n^2 \mathfrak{B} \pi^2 / l^2 = F_k$.

У случају аксијалних сила *зашезања*, решење је истог облика као (69b), само је кружна фреквенција

$$\Omega_n = \omega_n \sqrt{1 + (k/n)^2}. \quad (71)$$

Она се повећава у односу на фреквенцију слободних осцилација.

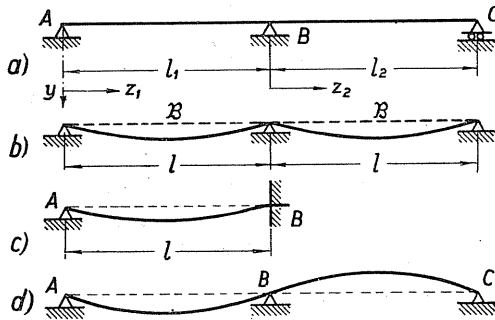
Ако је *k* велико, (на пример, случај жице, јер је њена крутост \mathfrak{B} мала), може се у изразу (71) занемарити јединица према *k/n*, па је тада кружна фреквенција $\Omega \approx nck \pi^2/l^2$ и решење (69b) постаје

$$y = v = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(k_n \sqrt{Fl/M}) t + B_n \sin(k_n \sqrt{Fl/M}) t \sin k_n z.$$

18.5. Континуални носачи. — Изложена метода може се применити и на континуалне носаче са више распона. У случају носача са два распона та се метода доста лако примењује, али је тешка у случају носача са више распона, те се, као и у отпорности материјала*, примењује *метода штрију момената* (слична *Clapeyron*-овој методи).

Нека је носач променљивог пресека ослоњен на три крута ослоња на истом нивоу а различитих распона, (сл. 18.12a). Поставимо координатне почетке у левим ослоњима сваког распона и применимо решење (22) за сваки распон

$$Z_r = A_r S(k, z_r) + B_r T(k, z_r) + C_r U(k, z_r) + D_r V(k, z_r); r = 1, 2 \quad (72)$$



Сл. 18.12. — Основни облици осцилација хомогене греде са два распона

имаћемо две једначине са *осам константи*. Њих ћемо одредити из граничних услова на крајевима греде и на међуослоњу, пошто је еластична линија непрекидна линија. Гранични услови су:

(1) за $z_1=0, \quad Z_1=0;$	(5) за $z_2=l_2, \quad Z_2=0;$	(73)
(2) за $z_1=0, \quad Z_1''=0;$	(6) за $z_2=l_2, \quad Z_2''=0;$	
(3) за $z_1=l_1, \quad Z_1=0;$	(7) за $z_1=l_1, \quad \left. \begin{matrix} Z_1' = Z_2'; \\ Z_1'' = Z_2''; \end{matrix} \right\}$	
(4) за $z_2=0, \quad Z_2=0;$	(8) за $z_2=0 \quad \left. \begin{matrix} Z_1' = Z_2'; \\ Z_1'' = Z_2''; \end{matrix} \right\}$	

* Отпорност материјала, чл. 10.10.

С обзиром на особине функција (21), из услова (1), (2) и (4) следи да су константе

$$A_1 = 0; \quad C_1 = 0; \quad A_2 = 0.$$

Остали услови дају систем једначина

$$\begin{cases} B_1 T(\xi_1) + D_1 V(\xi_1) & = 0; \\ k_1 B_1 S(\xi_1) + k_1 D_1 U(\xi_1) - k_2 B_2 & = 0; \\ k_1^2 B_1 V(\xi_1) + k_1^2 D_1 T(\xi_1) & - k_2^2 C_2 & = 0; \\ & B_2 T(\xi_2) + C_2 U(\xi_2) + D_2 V(\xi_2) & = 0; \\ & B_2 V(\xi_2) + C_2 S(\xi_2) + D_2 T(\xi_2) & = 0, \end{cases}$$

из којих добијамо фреквентну једначину у облику

$$\Delta(\xi_i) = \begin{vmatrix} T(\xi_1) & V(\xi_1) & 0 & 0 & 0 \\ S(\xi_1) & U(\xi_1) & -u & 0 & 0 \\ V(\xi_1) & T(\xi_1) & 0 & -u^2 & 0 \\ 0 & 0 & T(\xi_2) & U(\xi_2) & V(\xi_2) \\ 0 & 0 & V(\xi_2) & S(\xi_2) & T(\xi_2) \end{vmatrix} = \frac{S_1(\xi_1)}{B(\xi_1)} + u \frac{S_1(\xi_2)}{B(\xi_2)} = 0, \quad (74)$$

где су уведене смене $u = k_2/k_1$; $\xi_i = k_i l_i$.

За случај да је $l_1 = l_2$ и $EI_x = \mathfrak{B} = \text{const}$, горња једначина биће

$$S_1(\xi) \cdot B(\xi) = \sin kl (\operatorname{tg} kl - \operatorname{Th} kl) = 0. \quad (75)$$

Услов $B(kl) = 0$ односи се на *симетричне осцилације*, (сл. 18.12.b). Овај је услов једнак услову датом на сл. 18.2.e, те можемо сматрати да је носач распона $L = 2l$, (сл. 18.2.c), укљештен код другог ослонца. Услов $S_1(kl) = 0$ односи се на *антисиметричне осцилације*, (сл. 18.2.d), те можемо сматрати да се носач састоји из двеју простих греда, (случај a, сл. 18.2.).

Према томе су корени фреквентних једначина:

$$\pi; \quad 3,9270; \quad 2\pi; \quad 7,0690; \quad 3\pi; \quad 10,210, \dots,$$

У случају да је леви крај греде са два распона *укљештен* а распони су различити, као и крутости греда, (сл. 18.13.a), гранични услови

су исти као (73) само се мења други услов и износи: за $z_1=0$ биће $Z'_1=0$. Тада су $A_1=B_1=A_2=0$ па је фреквентна једначина:

$$\Delta(\xi_1) = \begin{vmatrix} U(\xi_1) & V(\xi_1) & 0 & 0 & 0 \\ T(\xi_1) & U(\xi_1) & -u & 0 & 0 \\ S(\xi_1) & T(\xi_1) & 0 & -u^2 & 0 \\ 0 & 0 & T(\xi_2) & U(\xi_2) & V(\xi_2) \\ 0 & 0 & V(\xi_2) & S(\xi_2) & T(\xi_2) \end{vmatrix} = \mathbf{B}(\xi_1) \mathbf{B}(\xi_2) - \mathbf{D}(\xi_1) \mathbf{S}_1(\xi_2) = 0. \quad (76a)$$

За једнаке распоне и крутости, (сл. 18.13. a), добијамо фреквентну једначину

$$\mathbf{B}^2(kl) - \mathbf{D}(kl) \mathbf{S}_1(kl) = 0. \quad (76b)$$

У случају да је и десни ослонац *круто укљештен* сличним поступком за случај да је $l_1=l_2$, $u=1$, (сл. 18.13. b), добили бисмо фреквентну једначину

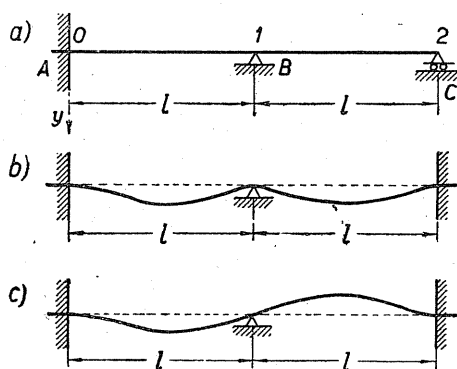
$$\mathbf{D}(kl) \cdot \mathbf{B}(kl) = 0. \quad (77)$$

Први услов $\mathbf{D}(kl)=0$ односи се на *симетричне осцилације*, (сл. 18.13.b) а други $\mathbf{B}(kl)=0$ на *антисиметричне осцилације*, (сл. 18.13.c). У првом случају, дакле, носач растављамо на две обострано укљештене греде, у другом на две конзоле подупрте на слободним крајевима.

Симетрија греде много олакшава одређивање сопствених вредности, јер се исте свode на основне случајеве, (сл. 18.2.). Само у овом случају морамо посебно испитати сваки случај осцилација. Када и немамо потпуну симетрију греда ипак можемо користити основне случајеве. На пример, када у случају представљеном на сл. 18.13. a не бисмо имали десни ослонац, онда бисмо добили фреквентну једначину у облику:

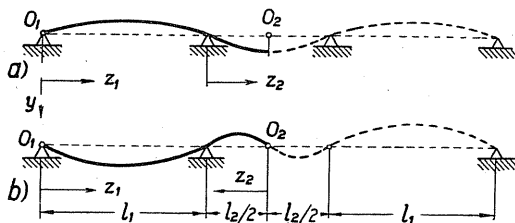
$$(\mathbf{S}^2 - \mathbf{U}^2) (\mathbf{T}\mathbf{U} - \mathbf{S}\mathbf{V}) = \mathbf{B}\mathbf{C} = (\mathbf{t}g kl - \mathbf{T}h kl) \mathbf{C}h kl \cos kl = 0.$$

Први услов одговара случају представљеном на сл. 18.2. e, а други случају представљеном на сл. 18.2. h.



Сл. 18.13. — Основни облици осцилација хомогене статички неодређене греде

Греда са *три распона* представљена на сл. 18.14. *a* симетрична је у односу на средину распона, па се може раставити на две греде једнаких распона $L = l_1 + 1/2 l_2$. За оба облика осцилација гранични услови и фреквентне једначине су:



Сл. 18.14. — Облици осцилација хомогене греде са три распона

a) за симетричне осцилације, (сл. 18.14.*a*):

$$\begin{aligned}
 (1) \quad z_1=0 \quad & \begin{cases} Z_1=0; \\ Z_1''=0, \end{cases} & (3) \quad z_1=l_1, \quad Z_1=0; & (4) \quad z_2=0 \quad \begin{cases} Z_2'=0 \\ Z_2'''=0 \end{cases} \\
 (2) \quad & & & (5) \quad &
 \end{aligned} \tag{78a}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad z_1=l_1 \quad & \begin{cases} Z_1' = -Z_2', \\ Z_1'' = Z_2'', \end{cases} & (8) \quad z_2=1/2 l_2, \quad Z_2=0
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}(\xi_1) \mathbf{C}(\xi_2) + \mathbf{S}_1(\xi_1) \mathbf{A}(\xi_2) = 0;$$

b) за антисиметричне осцилације, (сл. 18.14.*b*):

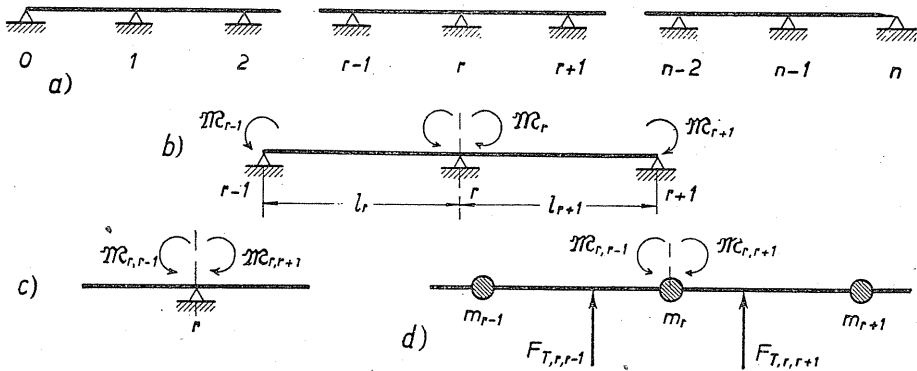
гранични су услови исти као и у претходном случају само се мењају четврти и пети услов (за $z_2 = 0$ јесу $Z_2 = 0$, $Z_2'' = 0$) па је фреквентна једначина

$$\mathbf{B}(\xi_1) \mathbf{S}_1(\xi_2) + \mathbf{S}_1(\xi_1) \mathbf{B}(\xi_2) = 0, \tag{78b}$$

где су $\xi_1 = kl_1$, $\xi_2 = 1/2 kl_2$.

Једначину (78*b*) могли смо добити и непосредно из (78*a*) сменом парне функције \mathbf{C} непарном \mathbf{S}_1 , (23), и \mathbf{A} са \mathbf{B} .

Континуални носач са n распона и $n+1$ ослонаца на истој висини $n-1$ пут је *статички неодређен*, (сл. 18.15. а), па можемо слично теорему трију момената из отпорности материјала, поставити и дина-



Сл. 18.15. — Примена динамичке једначине трију момената

мичку једначину трију момента. Нормална функција (22) за распон l_r има облик

$$Z_r = A_r \mathbf{S}(\zeta_r) + B_r \mathbf{T}(\zeta_r) + C_r \mathbf{U}(\zeta_r) + D_r \mathbf{V}(\zeta_r), \quad (79a)$$

где смо, краткоће ради, означили $\zeta_r = k_r z_r$. За греду са n распона имаћемо систем од n оваквих једначина и $4n$ константи које морамо одредити из услова ослањања греде и непрекидности еластичне линије исте.

С обзиром на односе (21), (2) и (3) изводи нормалне функције по променљивој z биће:

$$Z'_r = k_r [A_r \mathbf{V}(\zeta_r) + B_r \mathbf{S}(\zeta_r) + C_r \mathbf{T}(\zeta_r) + D_r \mathbf{U}(\zeta_r)] = \varphi,$$

$$Z''_r = k_r^2 [A_r \mathbf{U}(\zeta_r) + B_r \mathbf{V}(\zeta_r) + C_r \mathbf{S}(\zeta_r) + D_r \mathbf{T}(\zeta_r)] = -\mathfrak{M}/\mathfrak{B}_r, \quad (79b)$$

$$Z'''_r = k_r^3 [A_r \mathbf{T}(\zeta_r) + B_r \mathbf{U}(\zeta_r) + C_r \mathbf{V}(\zeta_r) + D_r \mathbf{S}(\zeta_r)] = -F_T/\mathfrak{B}_r,$$

где су: \mathfrak{M} реактивни момент над ослоном, F_T трансверзална сила а \mathfrak{B}_r крутост тога распона греде.

Замислимо да смо из континуалног носача издвојили два оближња распона, (сл. 18.15. б), онда утицај осталог дела греде морамо заменити реактивним моментима над ослонцима $(r-1)$ и $(r+1)$. Из граничних услова на левом $(r-1)$, и десном (r) , ослонцу распона

l_r добијамо односе:

$$\begin{aligned} (1) \quad z_r = 0 & \begin{cases} Z_r = 0 & A_r = 0, \\ Z'_r = \varphi_{r-1} & k_r B_r = \varphi_{r-1}, \end{cases} & (79c) \\ (2) & \\ (3) \quad z_r = l_r & \begin{cases} Z_r = 0 & B_r \mathbf{T}(\xi_r) + C_r \mathbf{U}(\xi_r) + D_r \mathbf{V}(\xi_r) = 0, \\ Z'_r = \varphi_r & k_r [B_r \mathbf{S}(\xi_r) + C_r \mathbf{T}(\xi_r) + D_r \mathbf{U}(\xi_r)] = \varphi_r, \end{cases} \end{aligned}$$

где је $\xi_r = k_r l_r$. Решавањем овог система једначина, с обзиром на функције (23) и детерминанту система двеју последњих једначина $\Delta = \mathbf{U}^2 - \mathbf{V}\mathbf{T} = -1/2 \mathbf{D}$, добијамо:

$$A_r = 0; \quad B_r = -\varphi_{r-1} k_r^{-1}, \quad (79d)$$

$$C_r = -\frac{l_r}{\xi_r^2} [\varphi_{r-1} \mathbf{F}(\xi_r) + \varphi_r \mathbf{H}(\xi_r)],$$

$$D_r = \frac{l_r}{\xi_r^3} [\varphi_{r-1} \mathbf{L}(\xi_r) + \varphi_r \mathbf{N}(\xi_r)].$$

Унесемо ли ове константе у другу једначину (79 b) добијају се реактивни моменти над ослоњцима:

$$z_r = 0; \quad \mathfrak{M}_{r-1} = -\mathfrak{B}_r k_r^2 C_r = \beta_r [\varphi_{r-1} \mathbf{F}(\xi_r) + \varphi_r \mathbf{H}(\xi_r)], \quad (79e)$$

$$z_r = l_r; \quad \mathfrak{M}_r = \beta_r [\varphi_{r-1} \mathbf{H}(\xi_r) + \varphi_r \mathbf{F}(\xi_r)], \quad (79f)$$

где је $\beta_r = \mathfrak{B}_r / l_r$, *редукована савојна крућошћ греде*.

Замислимо ли да смо из греде исекли само средњи ослонац (r) онда су реактивни моменти са обе стране ослонца једнаких интензитета али супротних смерова, то јест они су супротни спрегови, па је њихов збир једнак нули:

$$\mathfrak{M}_{r, r-1} + \mathfrak{M}_{r, r+1} = 0. \quad (80)$$

Момент $\mathfrak{M}_{r, r-1}$ је реактивни момент греде распона l_r на десном ослоњцу али са његове *леве стране*, док је $\mathfrak{M}_{r, r+1}$ момент над тим ослоњцем али са *десне стране*. Према обрасцима (79, e, f) за те моменте добијамо вредности

$$\mathfrak{M}_{r, r-1} = \beta_r [\varphi_{r-1} \mathbf{H}(\xi_r) + \varphi_r \mathbf{F}(\xi_r)], \quad (80a)$$

$$\mathfrak{M}_{r, r+1} = \beta_{r+1} [\varphi_r \mathbf{F}(\xi_{r+1}) + \varphi_{r+1} \mathbf{H}(\xi_{r+1})]. \quad (80b)$$

Уношењем тих вредности у услов (80) добијамо *динамичку једначину шрију моменаџа* у облику

$$a_{r, r-1} \varphi_{r-1} + a_{rr} \varphi_r + a_{r, r+1} \varphi_{r+1} = 0. \quad (81)$$

Њени коефицијенти износе:

$$\begin{aligned} a_{r, r-1} &= \beta_r \mathbf{H}(\xi_r); & a_{r, r+1} &= \beta_{r+1} \mathbf{H}(\xi_{r+1}); \\ a_{rr} &= \beta_r \mathbf{F}(\xi_r) + \beta_{r+1} \mathbf{F}(\xi_{r+1}). \end{aligned} \quad (82)$$

Овим се пошћујком проблем свео на решавање система алгебарских једначина (81) са константним коефицијентима. У свакој се једначини појављују само по три непознате, као и у случају статичке једначине шрију момената.

Када су крајеви носача слободно подупрци, тада су реактивни моменти над тим ослонцима једнаки нули, те прва и последња једначина система (81) имају само по два члана. Систем једначина тада има облик

$$\begin{array}{l|l} r=1; & a_{11} \varphi_1 + a_{12} \varphi_2 = 0, \\ r=2; & a_{21} \varphi_1 + a_{22} \varphi_2 + a_{23} \varphi_3 = 0, \\ r=3; & \phantom{a_{21} \varphi_1 +} a_{32} \varphi_2 + a_{33} \varphi_3 + a_{34} \varphi_4 = 0, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ r=n-1; & a_{n-1, n-2} \varphi_{n-2} + a_{n-1, n-1} \varphi_{n-1} = 0. \end{array} \quad (83)$$

Коефицијенти за други и претпоследњи ослонац износе

$$a_{11} = \beta_1 \Phi(\xi_1) + \beta_2 \mathbf{F}(\xi_2); \quad a_{n-1, n-1} = \beta_{n-1} \mathbf{F}(\xi_{n-1}) + \beta_n \Phi(\xi_n). \quad (84)$$

У случају крајњих укљешћених ослонаца систем једначина (81) узима се од индекса $r=0$ до индекса $r=n$, те има $n+1$ једначину, али су тада, због укљештења, $\varphi_0 = \varphi_n = 0$.

На пример, за случај простих греде, (сл. 18.2. а), из прве једначине (83) следи да је $a_{11} = 0$. Како је $\xi_2 = 0$, то је, према (82), $\Phi(kl) = 0$, то јест $\mathbf{S}_1(kl) = 0$, односно $\sin kl = 0$.

За случај конзоле подупрте на слободном крају, (сл. 18.2.е), имаћемо систем једначина:

$$a_{00} \varphi_0 + a_{01} \varphi_1 = 0; \quad a_{10} \varphi_0 + a_{11} \varphi_1 = 0.$$

Због $\varphi_0 = 0$ биће $a_{01} = a_{10} = 0$, па је $a_{11} = 0$, то јест $\mathbf{F}(kl) = 0$ или $\mathbf{B}(kl) = 0$.

За случај греде са два раслона, (сл. 18.12.а), из (83) следи услов $a_{11} = 0$. Како је ово лежиште једновремено друго и претпоследње то из услова (84) следи да је

$$a_{11} = \beta_1 \Phi(\xi_1) + \beta_2 \Phi(\xi_2) = 0.$$

Овај услов, с обзиром на (23), лако се своди на раније добијени (74).

У случају да је леви крај укљештен, (сл. 18.13.а), систем једначина (83), узимајући фиктивни распон $l_0 = 0$, биће:

$$a_{00} \varphi_0 + a_{01} \varphi_1 = 0, \quad a_{10} \varphi_0 + a_{11} \varphi_1 = 0.$$

Пошто је $\varphi_0 = 0$ то је $a_{01} = a_{10} = 0$, па је, због $l_1 = l_2 = l$, $\beta = \beta_1 = \beta_2$, услов

$$a_{11} = \beta [F(kl) + \Phi(kl)] = 0,$$

који се своди на фреквентну једначину (76).

18.6. Приближне методе. — Као и код система са коначним бројем степени слободe осциловања (чл. 9) примењују се приближне методе и у случају осцилација хомогених греда, односно жица. Од многобројних метода изнећемо оне које се најчешће примењују.

18.6.1. Релијева метода енергије*. — Приликом бочних осцилација греде јавља се центрифугална сила елемента dz и износи $dF_c = y \omega^2 dm$, где је $y(z)$ померање а ω кружна фреквенција. Како ова сила расте од нуле до максималне вредности то је рад или кинетичка енергија целе греде

$$E_{k \max} = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l y^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l \rho A y^2 dz. \quad (85)$$

Потенцијална енергија или деформациони рад греде биће

$$A_{df} = E_p \max = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_f^2 dz}{\mathfrak{B}} = \frac{1}{2} \int_0^l \mathfrak{B} (y'')^2 dz. \quad (86)$$

Потенцијална енергија је највећа у најудаљенијем положају греде а кинетичка је највећа у положају равнотеже, јер је брзина $v = \omega y$ тада највећа, па су највеће вредности ових енергија једнаке *шоталној механичкој енергији*, (чл. 1.5). Изједначењем тих енергија добијамо кружну фреквенцију трансверзалних осцилација:

$$E_{k \max} = E_p \max; \quad \omega_k^2 = \frac{\int_0^l \mathfrak{B} (y'')^2 dz}{\int_0^l \rho A y^2 dz}. \quad (87)$$

Обично се претпоставља да греда осцилује у облику *статичке еластичне линије*, $v = y = y(z)$, или у облику неке криве линије која задовољава граничне услове а добро апроксимира и стварни облик осци-

* J. W. Strutt baron Rayleigh, Theory of Sound, T. I. 1879.

лација, (као функције $y = f_s \cos \omega t$ или $y = f_s \sin \omega t$, где су f_s највеће амплитуде). Ако би облик осцилација зависио од неког параметра, на пример, $y = y(\lambda) \cdot \sin \omega t$, онда и кружна фреквенција (87) зависи од истог параметра, па се екстремна вредност кружне фреквенције добија из услова

$$\frac{d\omega_k}{d\lambda} = 0. \quad (88)$$

Због тога је Релијев принцип енергије принцип минимума, јер деформациони рад слободних осцилација греде има минимум.

Ако би на греди било и концентрисаних маса (m_i) онда кинетичкој енергији (85) треба додати и енергије ових маса, те је кружна фреквенција

$$\omega_k^2 = \frac{\int_0^l \mathfrak{B} (y'')^2 dz}{\int_0^l \rho A y^2 dz + \sum_{i=1}^n m_i f_{si}^2} \quad (89)$$

где су f_{si} статички угиби греде испод дотичних маса.

С обзиром на односе (2) и (3) може се показати да је за случај континуалног оптерећења греде $q = q(z)$ деформациони рад једнак раду терета*:

$$\begin{aligned} A_{df} &= \frac{1}{2} \mathfrak{B} \int_0^l (y'')^2 dz = \frac{1}{2} \mathfrak{B} \left\{ [y' y''']_0^l - \int_0^l y' y'''' dz \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \mathfrak{B} \left\{ [y' y''']_0^l - [y y'''']_0^l + \int_0^l y y^{IV} dz \right\} = \frac{1}{2} \int_0^l y \cdot q(z) \cdot dz \end{aligned} \quad (90)$$

па се образац (87) може написати у облику

$$\omega_k^2 = \frac{\left[\int_0^l y \cdot q(z) \cdot dz \right]}{\left[\int_0^l \rho A(z) \cdot y^2 dz \right]}, \quad (91)$$

који је погоднији за рачунање.

* Отпорност материјала, чл. 9.5.

У горњим обрасцима занемарили смо деформациони рад услед концентрисаних сила и концентрисаних момената. Узму ли се у обзир и ти радови образац (91) постаје

$$\omega_k^2 = \frac{\int_0^l y \cdot q(z) \cdot dz + \sum_i F_i f_{si} + \sum_i M_i \varphi_i}{\int_0^l \rho A y^2 dz + \sum_i m_i f_{si}^2} \quad (92)$$

Овде су f_{si} угиби услед концентрисаних сила а φ_i нагиби услед спрегова.

Кружне фреквенције одређене по овој методи увек су *нешто веће од стварних кружних фреквенција израчунастих директним методама.*

Овако израчунате најниже кружне фреквенције представљају уједно и *кришичне угаоне брзине хомогених вртшила.*

За четири карактеристична основна случаја, (сл. 18.2.), вредности кружних фреквенција добијених овом методом дате су у табlici 18.7.

Ова се метода згодно искористићава у случају хомогених греда оптерећених концентрисаним масама, јер се проблем „редукцијом масе греде на концентрисану масу“ своди на један степен слободе осциловања. Тада се узима да је нормална функција оваквог осциловања једначина статичке еластичне линије концентрисаног шпешта.

На пример, ако је проста греда оптерећена масом m на средини распона, (сл. 18.8.a), онда је једначина еластичне линије*

$$y = v = f_s (3u - 4u^3); \quad f_s = Fl^3/48 \mathfrak{B}; \quad u = z/l.$$

Применом обрасца (89) добијамо најнижу кружну фреквенцију

$$\omega^2 = 48 \mathfrak{B} / [m + 17/35 M] l^3 = 48 \mathfrak{B} / m^* l^3.$$

Проблем се, дакле, свео на један степен слободе, (чл. 1.9.), са редукованом масом $m^* = m + 17/35 M$. За $m = M$ редукована маса се повећава за око 48,5%. Исту вредност добијамо и методом изнетом у чл. 18.2. (обр. 38a) заустављајући се на другом члану реда.

Из услова да је енергија целе греде са концентрисаном масом једнака енергији редуковане масе можемо ту масу лако одредити

* Таблице из отпорности материјала, VI — VII.

Случај (сл. 18.2.)		a)	b)	d)	e)	
чл. 18.1.	ω_{\min}	$9,8696\sqrt{k}$	$3,515\sqrt{k}$	$22,373\sqrt{k}$	$15,421\sqrt{k}$	
по Rayleigh — у	Ел. линија	$v = y$	$f u^2 (6 - 4u + u^2)$	$f u^2 (1 - u)^2$	$\frac{f}{2} (3u^2 - 5u^3 + 2u^4)$	
	кружна фреквенција	ω^2	$\frac{3024}{31} k$	$\frac{162}{13} k$	$504 k$	$\frac{4536}{19} k$
		ω	$9,871\sqrt{k}$	$3,525\sqrt{k}$	$22,450\sqrt{k}$	$15,445\sqrt{k}$
	Грешка	$+ \varepsilon^0 /_0$	$0,02^0 /_0$	$0,286^0 /_0$	$0,34^0 /_0$	$0,16^0 /_0$
по Dunkerley — у	Угиб	$f_s (z = a)$	$\frac{Fl^3}{3\mathfrak{B}} \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(\frac{b}{l}\right)^2$	$\frac{Fa^3}{3\mathfrak{B}}$	$\frac{Fl^3}{3\mathfrak{B}} \left(\frac{a}{l}\right)^3 \left(\frac{b}{l}\right)^3$	$\frac{Fl^3}{12\mathfrak{B}} \left(\frac{a}{l}\right)^3 \left(\frac{b}{l}\right)^2 \left(3 + \frac{b}{l}\right)$
	утиц. коеф.	a_{zz}	$\alpha u^2 (1 - u)^2$	αu^3	$\alpha u^3 (1 - u)^3$	$1/4 \alpha (4u^3 - 9u^4 + 6u^5 - u^6)$
	кружна фреквенција	ω^2	$90 k$	$12 k$	$420 k$	$210 k$
		ω	$9,487\sqrt{k}$	$3,464\sqrt{k}$	$20,494\sqrt{k}$	$14,491\sqrt{k}$
	Грешка	$-\varepsilon^0 /_0$	$\approx 4^0 /_0$	$\approx 2^0 /_0$	$\approx 8,4^0 /_0$	$\approx 6^0 /_0$

$\mathfrak{B} = EI_x;$

$k = \mathfrak{B} / M l^3$

$f = q l^4 / 24 \mathfrak{B};$

$u = z / l,$

$dz = l du;$

$\alpha = l^3 / 3 \mathfrak{B}$

Таблица 18.7.

обрасцем

$$m^* = m + M \int_0^1 [\varphi(u)]^2 \cdot du; \quad u = z/l, \quad (93)$$

где је $y = f_s \varphi(z)$, а f_s је угиб пресека греде испод концентрисане силе.

На пример, за обострано уклештену греду оптерећену масом (m) на средини распона биће*

$$y = v = f_s [4u^2(3-4u)]; \quad f_s = F l^3 / 192 \mathfrak{B},$$

па је

$$m^* = m + 32 M \int_0^{1/2} [u^4(3-4u)^2] du = m + 13/35 M.$$

У случају концентрисане масе на слободном крају конзоле, због $y = 1/2 f_s u^2(3-u)$, $f_s = F l^3 / 3 \mathfrak{B}$, добијамо $m^* = m + 33/149 M$.

Не мора се увек узети за нормалну функцију једначина статичке еластичне линије греде услед концентрисане силе већ и нека друга функција, која, дакле, мора задовољити граничне услове. Погодним избором облика те функције може се постићи боља тачност.

На пример, узме ли се за нормалну функцију конзоле

$$y = v = f_s [1 - \cos^{1/2} \pi u]; \quad f_s = F l^3 / 3 \mathfrak{B}; \quad u = z/l,$$

онда је $m^* = m + M [3/2 - (4/\pi)] = m + 0,226 M$, док је раније било $m^* = m + 0,236 M$.

Ову методу можемо применити и у случају трансверзалних осцилација хомогене жице.

На пример, нека је $y = v = [1 - (2z/l)^n] \cos \omega t$, $-1/2 l < z < 1/2 l$, где смо претпоставили стојеће таласе, онда су екстремне вредности енергија

$$E_{k \max} = \omega^2 M n^2 / (n+1)(2n+1); \quad E_{p \max} = 2 n^2 \sigma A / l (2n-1)$$

те је

$$\omega^2 \approx \frac{2(n+1)(2n+1)}{2n-1} \frac{\sigma}{\rho l^2}.$$

За $n=1$ биће $\omega^2 = 12k$, где је $k = \sigma / \rho l^2$. Како је тачна вредност, (према чл. 16.1, обр. 7), $\omega = \pi \sqrt{k} = \pi \sqrt{k}$, то је грешка мања од 10%. За $n=2$ биће $\omega^2 = 10k$ па је кружна фреквенција већа за 0,64% од тачне вредности. Користећи образац (86) добијамо $n = 1/2(1 + \sqrt{6}) = 1,72475$, те је $\omega^2 = 9,8990k$, па је кружна фреквенција само за 0,149% већа од тачне вредности.

* Таблице из отпорности материјала, VI—VII.

У случају греде променљивог попречног пресека мењају се попречни пресек и момент инерције пресека, па су $A = A(z)$, $I_x = I_x(z)$. Диференцијална једначина (4), односно (6), сада постаје

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI_x \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0; \quad v = y. \quad (94)$$

У овим се случајевима најнижа кружна фреквенција одређује помоћу методе енергије, применом обрасца (87). стим што су у њему A и I_x функције од z .

На пример, за случај конзоле променљивог кружног попречног пресека, (сл. 18.16.), узнемо координатни почетак на слободном крају (B) па добијамо*:

$$r = Ru; \quad A = A_A u^2; \quad I_x = I_{Ax} u^4;$$

$$\mathfrak{B}_A = EI_{Ax}; \quad u = z/l,$$

где су A_A и I_{Ax} попречни пресек и његов момент инерције на месту уклештења. Како у овоме случају морају бити задовољени следећи гранични услови:

$$\text{за } z=0, \quad \mathfrak{B} Z'' = 0; \quad \frac{d}{dz} (\mathfrak{B} Z''') = 0, \quad \text{за } z=l, \quad Z=0, \quad Z' = 0$$

то ћемо решење тражити у облику

$$y = C (z-l)^2 \sin \omega t.$$

Како је маса греде $M = 1/2 \rho A_A l$, то, применом обрасца (87), добијамо кружну фреквенцију

$$\omega^2 = 28 \mathfrak{B}_A / M l^3; \quad \omega = 5,2915 \sqrt{\mathfrak{B}_A / M l^3} \approx 4,5826 R l^{-2} \sqrt{E / \rho}.$$

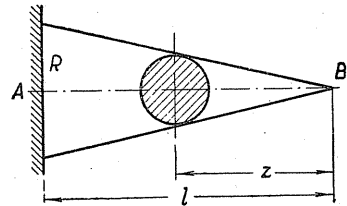
Овом методом можемо одредити и утицај аксијалних сила на трансверзалне осцилације хомогених греда, (чл. 18.4.3).

На пример, нека је конзола распона l оптерећена на слободном крају аксијалном притисном силом F . Према обрасцима (66 и 67) екстремне вредности енергија износе

$$E_{k \max} = 1/2 \rho A \omega^2 \int_0^l y^2 dz = 52/405 M f_s^2 \omega^2$$

$$E_p \max = 1/2 \mathfrak{B} \int_0^l (y'')^2 dz + 1/2 F \int_0^l (y')^2 dz = 1/5 M g f_s [1 + 5/14 (F l^2 / \mathfrak{B})],$$

* R. Kirchoff, „Über die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt“. Berlin, 1879; Leipzig, 1881.



Сл. 18.16. — Осцилације хомогене конусне кружне конзоле

Јер је једначина еластичне линије конзоле услед континуалног оптерећења

$$y = \frac{1}{3} f_s u^2 (6 - 4u + u^2); \quad f_s = q l^4 / 8 \mathfrak{B}; \quad u = z/l; \quad y' = (dy/du)/l.$$

Према овој методи добијамо најнижу кружну фреквенцију

$$\omega^2 = \frac{81}{52} \frac{g}{f_s} \left[1 + \frac{5}{14} \frac{F l^2}{\mathfrak{B}} \right]; \quad \omega = \frac{3,5264}{l^2} \sqrt{\frac{\mathfrak{B} g}{q} \left(1 + \frac{5 F l^2}{14 \mathfrak{B}} \right)}.$$

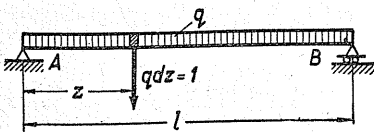
У случају континуалног аксијалног оптерећења (q') рад ових сила износи*

$$A = \frac{1}{2} q' \int_0^l (l-z) (y')^2 dz,$$

па, слично горњем поступку, добијамо

$$\omega^2 = 81g [1 + (q' f_s / q)] / 52 f_s.$$

18.6.2. Данкерлева метода. — Ова се метода, (чл. 9.3.1.), може применити и у случају хомогених греда само треба одредити утицајни коефицијент. Замислимо ли да у неком пресеку $z=a$ од левог ослоњаца дејствује јединична сила $F=q dz=1$ (сл. 18.17.), тада је реципрочна вредност квадрата најниже кружне фреквенције



$$\frac{1}{\omega_{min}^2} = \frac{1}{\omega_k^2} = \int_0^l \alpha_{zz} dm = \frac{q}{g} \int_0^l \alpha_{zz} dz, \quad (95)$$

Сл. 18.17. — Примена Dunkerley-ове методе

јер је маса $dm=q dz/g$ и $M=G/g$.

Кружна фреквенција одређена овом методом увек је мања од стварне вредности. Грешка се креће до 10%.

За четири карактеристична случаја, (сл. 18.2.), резултати су дати у табlici 18.7.

У случају када је греда оптерећена и концентрисаним масама предњи образац постаје

$$\frac{1}{\omega_{min}^2} = \frac{1}{\omega_k^2} = \sum_i m_i \alpha_{ii} + \frac{q}{g} \int_0^l \alpha_{zz} dz. \quad (95')$$

* Отпорност материјала, чл. 12.5, слика 256.

На пример, када је проста греда масе M оптерећена на средини распона масом m , основна кружна фреквенција биће

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{48 \mathfrak{B}}{ml^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 8/15 (M/m)}} = \sqrt{\frac{48 \mathfrak{B}}{ml^3}} \cdot \left[1 - \frac{4}{15} \frac{M}{m} + \frac{8}{75} \left(\frac{M}{m} \right)^2 \mp \dots \right].$$

Ова се вредност разликује од (38) и у другом члану реда.

18.6.3. Рицова метода. — Рицова (Walther Ritz) метода* је уопштена Релијева метода енергије. Основна је претпоставка да су таласи штојећи, те да свака материјална честица греде врши хармонијско осциловање исте кружне фреквенције ω , то јест, да је $y(z, t) = Z \cos \omega t$. Кинетичка и потенцијална енергија мењају се у току времена. Прва је највећа у равнотежном положају греде (за $\cos \omega t = 0$, то јест за $t = nT/4$), док је потенцијална енергија највећа у најудаљенијем положају. Њихове екстремне вредности су једнаке $E_{k \max} = E_{p \max}$ а како је кретање конзервативно и нема расипања енергије то су ове енергије једнаке укупној механичкој енергији. Из услова једнакости тих енергија одређује се, према методи енергије, најнижа кружна фреквенција осцилација (87).

Риц претпоставља нормалну функцију $Z(z)$ у облику збира функција $\varphi_i(z)$

$$Z = C_1 \varphi_1(z) + C_2 \varphi_2(z) + \dots + C_n \varphi_n(z) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(z), \quad (96)$$

које појединачно задовољавају граничне услове греде, (геометријске услове за деформације — нагибе и угибе) док су C_i произвољне константе. Да би се добила што боља апроксимација квадрата кружне фреквенције (87) ове константе морају бити тако одређене да израз (87) има екстремну вредност и то минимум. Тај услов постаје

$$\frac{\partial}{\partial C_i} \frac{\int_0^l \mathfrak{B} (Z'')^2 dz}{\int_0^l \rho A Z^2 dz} = 0. \quad (96')$$

* W. Ritz—Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathem. Physik, J. für und angew. Math. Bd. CXXXV, 1910.

Диференцирањем

$$\int_0^l \rho A Z^2 dz \cdot \frac{\partial}{\partial C_i} \int_0^l \mathfrak{B} (Z'')^2 dz - \int_0^l \mathfrak{B} (Z'')^2 dz \cdot \frac{\partial}{\partial C_i} \int_0^l \rho A Z^2 dz = 0,$$

с обзиром на једнакост (87), добија се услов

$$\frac{\partial}{\partial C_i} \int_0^l [\mathfrak{B} (Z'')^2 - \omega^2 \rho A Z^2] dz = 0. \quad (97)$$

Израз (97) може се написати и у погоднијем облику. Из (96) следе изводи:

$$\partial Z / \partial C_i = \varphi_i; \quad Z'' = \sum C_k \varphi_k''; \quad \partial Z'' / \partial C_i = \varphi_i'',$$

па уношењем у (97) добијамо

$$2 \int_0^l \left[\mathfrak{B} Z'' \frac{\partial Z''}{\partial C_i} - \omega^2 \rho Z \frac{\partial Z}{\partial C_i} \right] dz = 2 \int_0^l \left[\mathfrak{B} \sum C_k \varphi_k'' \right] \varphi_i'' dz - \\ - \omega^2 \rho A \int_0^l \left[\sum C_k \varphi_k \right] \varphi_i dz.$$

Када су A и $\mathfrak{B} = EI_x$ константни биће услов

$$\sum_k C_k (a_{ik} - \lambda b_{ik}) = 0; \quad \lambda = \frac{\omega^2 \rho A}{\mathfrak{B}} = \frac{M \omega^2}{\mathfrak{B} l} \quad (98)$$

где су коефицијенти уз непознате константе C_k :

$$a_{ik} = \int_0^l \varphi_i'' \varphi_k'' dz; \quad b_{ik} = \int_0^l \varphi_i \varphi_k dz. \quad (99)$$

Када се одреде коефицијенти a_{ik} и b_{ik} помоћу одређених интеграла, онда систем (98) постаје систем хомогених алгебарских једначина са непознатим C_k . Одбацујући тривијално решење $C_k \neq 0$ јер је тада $Z \equiv 0$, детерминанта система представља *фреквеншну једначину*

$$\Delta(\lambda) = |a_{ik} - \lambda b_{ik}| = 0. \quad (100)$$

Њених n корена по сопственој вредности λ , односно ω^2 , дају приближне вредности кружних фреквенција.

Са математичког гледишта проблем је једноставан, али је тешкоћа у правилном избору функција $\varphi_i(z)$. Међутим, како се према Вајер-

штрасу свака непрекидна функција може у ограниченем размаку добро апроксимирати полиномом, то се за ове функције обично узимају полиноми.

За $n=1$ ова се метода своди на *методу енергије* (један степен слободе осциловања).

Рицова метода се може применити и у осталим осцилаторним проблемима, и њена је предност у томе што се могу одмах добити и фреквенције виших хармоника. Тачност зависи од броја узетих чланова реда (96).

Метода се може применити и у случају греде променљивог пресека, тада су $A=A(z)$ и $B=B(z)$, па су коефицијенти и сопствена вредност

$$a_{ik} = \int_0^l B \varphi_i'' \varphi_k'' dz; \quad b_{ik} = \int_0^l A \varphi_i \varphi_k dz; \quad \lambda = \rho \omega^2. \quad (101)$$

Фреквентна је једначина облика (100).

На пример, у случају хомогене конзоле, (сл. 18.2. b), нормалну функцију уземо у облику реда

$$Z = C_1(6u^2 - 4u^3 + u^4) + C_2(20u^2 - 10u^3 + u^5), \quad u = z/l$$

Јер свака функција φ_i задовољава граничне услове: за $u=0$, $Z=Z'=0$ и за $u=1$ су $Z''=Z'''=0$. Како је $dZ/dz = l^{-1} \cdot (dZ/du)$, због $\rho A/B = c^{-2}$ и смене $\lambda = \omega^2 l^4/c^2$, услов (97) своди се на облик

$$\int_0^1 (C_1 \varphi_1'' + C_2 \varphi_2'') \varphi_i'' du - \lambda \int_0^1 (C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2) \varphi_i du = 0.$$

После извршених операција интегралања добијамо систем алгебарских једначина

$$\begin{cases} (144/5 - 104/45 \lambda) C_1 + (104 - 2644/315 \lambda) C_2 = 0, \\ (104 - 2644/315 \lambda) C_1 + (2640/7 - 21128/693 \lambda) C_2 = 0. \end{cases}$$

Како су $C_i \neq 0$ мора детерминанта система бити једнака нули. Она представља фреквентну једначину. Корени су

$$\omega_1 \approx 3,517 \sqrt{(c/l^2)}; \quad \omega_2 \approx 22,78 \sqrt{(c/l^2)}.$$

С обзиром на тачне вредности (таблица 18.7.) грешка у првом случају износи само 0,03% а за фреквенцију првог вишег хармоника је $\approx 3,4\%$.

За жицу, дужине l , (сл. 16.3), са координатним почетком на половини распона, претпоставићемо померање у облику реда функција

$$y = Z = C_1(1-u^2) + \frac{1}{2} C_2 lu(1-u^2) + C_3(1-u^2)^2 + \dots,$$

где је $u = 2z/l$. Узме ли се само први члан реда добиће се енергије

$$E_{k \max} = \frac{4}{15} M \omega^2 C_1^2, \quad E_{p \max} = \frac{8}{3} (\sigma A C_1^2 / l),$$

па је, према (87), квадрат кружне фреквенције $\omega_1^2 = 10 (\sigma / \rho l^2)$. Грешка износи 0,64%.
Када се узме само други члан реда добиће се кружна фреквенција првог вишег хармоника $\omega_2 \approx 6,48 (\sigma / \rho l^2)^{1/2}$, са грешком 3,14%.

Када се узму први и трећи члан реда добијају се енергије

$$E_{k \max} = \frac{1}{2} M \omega^2 \left(\frac{8}{15} C_1^2 - \frac{32}{35} C_1 C_2 + \frac{128}{315} C_2^2 \right),$$

$$E_{p \max} = \frac{32}{3} (\sigma A / l) \left(\frac{1}{4} C_1^2 + \frac{2}{5} C_1 C_2 + \frac{8}{35} C_2^2 \right),$$

и фреквентна једначина

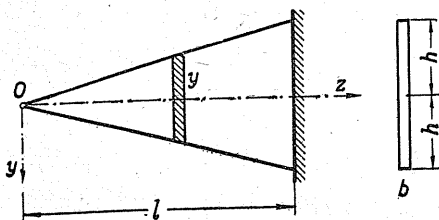
$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{16}{15} \lambda^2 - \frac{1}{6} & -\frac{32}{35} \lambda^2 - \frac{2}{15} \\ -\frac{32}{35} \lambda^2 - \frac{2}{15} & \frac{256}{315} \lambda^2 - \frac{16}{105} \end{vmatrix} = 3095 \lambda^4 - 5418 \lambda^2 + 762 = 0; \quad \lambda^2 = \omega^2 \rho l^2 / 64 \sigma.$$

Њени су корени $\lambda_1 = 0,15423$, $\lambda_2 = 1,59617$, па су кружне фреквенције

$$\omega_1 \approx 3,14174 \sqrt{\sigma / \rho l^2}; \quad \omega_2 \approx 10,107 \sqrt{\sigma / \rho l^2},$$

са грешком 0,0005%, односно 7,23%.

Клин је променљивог попречног пресека (сл. 18.17.)



Сл. 18.18. — Осцилације клина (гибња)

$$A = 2yb = A_m z/l = A_m u,$$

јер су

$$A_m = A_{\max} = 2bh$$

и однос

$$y/z = h/l$$

то јест

$$u = z/l = y/h.$$

И момент инерције је променљив

$$I_x = b(2y)^3/12 = 2by^3/3 = I_m u^3,$$

где је

$$I_m = I_{\max} = 2bh^3/3; \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_m u^3.$$

Гранични су услови:

a) геометријски: за $z=l$ је $Z=0$ и $Z'=0$;

b) динамички: за $z=0$ је $Z''=0$ и $Z'''=0$,

па је нормална функција

$$Z = C_1(1-u)^2 + C_2(1-u)^2 u + C_3(1-u)^2 u^2 + \dots$$

Пошто су изводи:

$$\varphi'_1 = -2(1-u); \quad \varphi''_1 = 2; \quad \varphi'_2 = 3u^2 - 4u + 1; \quad \varphi''_2 = 6u - 4;$$

$$d\varphi/dz = (d\varphi/du) \cdot (du/dz) = (d\varphi/du)/l; \quad d^2\varphi/dz^2 = (d^2\varphi/du^2)/l^2,$$

па су коефицијенти

$$a_{11} = 4 \mathfrak{B}_m l \int_0^1 u^3 du = \mathfrak{B}_m l;$$

$$a_{12} = a_{21} = 2\mathfrak{B}_m l \int_0^1 (6u-4)u^3 du = \frac{2}{5} \mathfrak{B}_m l;$$

$$a_{22} = \mathfrak{B}_m l \int_0^1 (6u-4)^2 u^3 du = \frac{2}{5} \mathfrak{B}_m l;$$

$$b_{11} = A_m l \int_0^1 u(1-u)^4 du = \frac{A_m l}{30};$$

$$b_{12} = b_{21} = A_m l \int_0^1 u^2(1-u)^4 du = \frac{A_m l}{105};$$

$$b_{22} = A_m l \int_0^1 (1-u)^4 u^2 du = \frac{A_m l}{280}.$$

Увешћемо нову сопствену вредност

$$\lambda = \rho\omega^2 A_m l / \mathfrak{B}_m l = 3\rho\omega^2 / Eh^2; \quad \rho = \gamma/g,$$

па је фреквентна једначина

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{30} & \frac{2}{5} - \frac{\lambda}{105} \\ \frac{2}{5} - \frac{\lambda}{105} & \frac{2}{5} - \frac{\lambda}{280} \end{vmatrix} = 5\lambda^2 - 1638\lambda + 42336 = 0.$$

Сопствене вредности и кружне фреквенције износе:

$$\lambda_1 = 28,2; \quad 299,4; \quad \omega_s = \sqrt{\lambda_s \mathfrak{B}_m / \rho A_m};$$

$$\omega_1 = 5,319 k; \quad \omega_2 = 17,3 k; \quad k = \sqrt{\mathfrak{B}_m / \rho A_m}.$$

186.4. Галеркинова метода.* — Ова је метода основана на принципима варијационог рачуна.** Када се уместо тачне нормалне функције Z узме приближна онда неће бити задовољена релација (87), то јест неће се тај израз идентички свести на нулу. Због тога га можемо написати у облику одређеног интеграла

$$W = \int_0^l [\mathfrak{B} (Z'')^2 - \omega^2 \rho A Z^2] dz = \int_0^l \Phi(z, Z, Z', Z'') dz \quad (102)$$

где је са Φ означена подинтегрална функција. Претпоставимо да се осцилације врше само у једном правцу (трансверзалном), онда мора прва варијација овог интеграла на директном путу да има стационарну вредност једнаку нули

$$\delta W = \int_0^l \delta \Phi(z, Z, Z', Z'') dz = 0. \quad (103)$$

Прва варијација функције Φ износи

$$\delta \Phi = (\partial \Phi / \partial Z) \delta Z + (\partial \Phi / \partial Z') \delta Z' + (\partial \Phi / \partial Z'') \delta Z''. \quad (104)$$

Заобилазни (суседни) пут мора бити тако изабран да су прве варијације функције δZ на границама размака $[0; l]$ једнаке нули. Методом парцијалног интегралења добијамо

$$\int_0^l \frac{\partial \Phi}{\partial Z'} \delta Z' dz = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial Z'} \delta Z \right]_0^l - \int_0^l \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial Z'} \delta Z dz = - \int_0^l \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial Z'} \delta Z dz,$$

$$\int_0^l \frac{\partial \Phi}{\partial Z''} \delta Z'' dz = \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial \Phi}{\partial Z''} \delta Z dz,$$

* Галеркин Б. Г. — Упругие тонкие плиты. Москва, 1932.

** Динамика, Додатак III.

те је прва варијација интеграла

$$\delta W = \int_0^l \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial Z'} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial \Phi}{\partial Z''} \right) \delta Z \cdot dz = 0. \quad (105)$$

Слично Рицовой методи нормална функција узима се у облику реда функција (96), па је њена прва варијација

$$\delta Z = \delta C_k \varphi_k(z).$$

Уношењем ове вредности у (105), а пошто се константе бирају тако да су њихове прве варијације $\delta C_i \neq 0$, мора бити задовољен систем интегрално-диференцијалних једначина

$$\int_0^l \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial Z'} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial \Phi}{\partial Z''} \right) \varphi_i(z) dz = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (106)$$

за сваку вредност $i = 1, 2, \dots, n$, где је n број константи у реду (106). Када се изврше назначена диференцирања у овој једначини, с обзиром на (87), израз се може написати и у облику диференцијалне једначине осцилација за стојеће таласе

$$\int_0^l \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} (\mathfrak{B} Z'') - \omega^2 \rho A Z \right] \varphi_i(z) \cdot dz = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (107)$$

Када су A и $\mathfrak{B} = EI$ константни тада се услов (107) може написати у облику

$$\Delta(\lambda) = |a_{ik} - \lambda b_{ik}| = 0; \quad \lambda = \frac{\omega^2 \rho A}{\mathfrak{B}} = \frac{M \omega^2}{\mathfrak{B} l} \quad (108)$$

где су коефицијенти

$$a_{ik} = \int_0^l \varphi_i \varphi_k^{IV} dz; \quad b_{ik} = \int_0^l \varphi_i \varphi_k dz. \quad (109)$$

Ако је греда променљивог попречног пресека па се површина пресека и момент инерције мењају према законима

$$A = A_m f(z); \quad I_x = I_m \psi(z); \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_m \Psi(z), \quad (110)$$

где су A_m и I_m (односно \mathfrak{B}_m) највеће вредности тада су коефицијенти a_{ik} и b_{ik} и сопствена вредност:

$$a_{ik} = \int_0^l \varphi_i (\psi'' \varphi_k'' + 2 \psi' \varphi_k''' + \psi \varphi_k^{IV}) dz; \quad (111)$$

$$b_{ik} = \int_0^l \varphi_i \varphi_k f dz; \quad \lambda = \rho \omega^2 A_m / \mathfrak{B}_m.$$

Фреквентна једначина има исти облик као (108).

Проблем се, дакле, своди на одређивање константи C_i помоћу одређених интеграла (106) или (107), па се добија систем од n алгебарских линеарних једначина. Детерминанта овог система (због услова $C_i \neq 0$) представља фреквентну једначину а њени корени представљају квадрате кружних фреквенција. Бићна разлика између Ричове и ове методе јесте у томе што се код прве константе одређују методом диференцирања, (97), а код друге помоћу одређених интеграла, (106).

На пример, за случај трансверзалних осцилација жице са координатним почетком на средини распона диференцијална једначина за стојеће таласе, $v = y = Z(z) \sin \omega t$, према (чл. 16.1, обр. 1), јесте $Z'' + (\omega/c)^2 Z = 0$. Узме ли се функција у облику реда

$$Z = C_1(1 - u^2) + C_3(1 - u^2)^2,$$

где је $u = 2z/l$, добија се

$$(C_1 \varphi_1'' + C_2 \varphi_2'') + \lambda (C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2) = 0, \quad \lambda = (\omega l/c)^2; \quad c^2 = \sigma/\rho.$$

Уносећи ову вредност у (107) и интегралећи у размаку од -1 до $+1$ а за индексе $i=1, i=2$, добићемо систем алгебарских једначина ($n=2$), па је фреквентна једначина

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 7\lambda - 70 & 6\lambda - 56 \\ 9\lambda - 84 & 8\lambda - 96 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 112\lambda + 1008 = 0,$$

и њени корени $\lambda_1 = 9,86976$, $\lambda_2 = 102,13024$. Кружне фреквенције основног и другог вишег хармоника јесу

$$\omega_1 \approx 3,14168 \sqrt{\sigma/\rho l^2}; \quad \omega_2 = 10,595 \sqrt{\sigma/\rho l^2}.$$

С обзиром на ранију таблицу грешка износи $0,0009\%$, односно $7,2\%$. Добијене кружне фреквенције су *веће* од стварних.

На пример, нека се попречни пресек и момент инерције пресека просте греде, распона l , мењају по законима $A = A_m [1 - a (1/2 l - z)^2]$; $I = I_m [1 - b (1/2 l - z)^2]$, где су A_m и I_m вредности на половини распона, и узмимо функцију $Z = C \sin(\pi/l) z$, онда из једначине (107) добијамо услов

$$\int_0^l C [\psi'' Z'' + 2 \psi' Z''' + \psi Z^{IV} - \lambda f Z] \varphi_j dz = 0; \quad \lambda = \omega^2 \rho A_m / E I_m,$$

где су $A = A_m f(z)$; $I = I_m \psi(z)$. После извршеног интегралења добићемо кружну фреквенцију основног хармоника

$$\omega_1 \approx \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{12 - b l^2}{12 - a l^2}} \sqrt{\frac{E I_m}{\rho A_m}}$$

18.7. Спрегнуте трансверзалне и торзијске осцилације. — Досадашњи случајеви осцилација хомогених греда посматрани су под претпоставком да попречни пресек греде има две равни симетрије и да је оптерећење греде у равни симетрије и главној равни инерције. Међутим, у случају греда чији попречни пресек има само једну раван симетрије, или само *центар симетрије*, мора се узети у обзир и увијање. Оптерећење греде дуж њене аксијалне осе можемо *редуковаши* на *осу смицања* која пролази кроз *центар смицања* а паралелна је оси греде*. Том редукцијом добијамо оптерећење дуж те нове осе (ζ) и момент увијања по јединици дужине греде једнак $-qe$, где је e растојање оса. Услед спрега наступа и обртање подвезица профила (на пример Γ пресека) те исте добијају бочна померања $x = 1/2 h \theta$. Како је $\partial^3 y / \partial z^3 = 1/2 h \theta'''$, где је h висина пресека, то се јављају силе у подвезицама $F = dM/dz = \mathfrak{B}_y y'''$ које изазивају допунски момент увијања

$$\mathfrak{M}'_t = -Fh = -1/2 \mathfrak{B}_y h \theta^{IV},$$

где је \mathfrak{B}_y савојна крутост у вертикалној равни савијања. С обзиром на чл. 17.2, обр. 12, момент увијања на дужини dz греде дуж осе смицања износи

$$\mathfrak{M}'_t = \mathfrak{T} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} - \mathfrak{T}_1 \frac{\partial^3 \theta}{\partial \zeta^3}; \quad \mathfrak{T} = G I_0; \quad \mathfrak{T}_1 = 1/2 \mathfrak{B}_y h^2, \quad (112)$$

где је \mathfrak{T} *торзијска крутост* а \mathfrak{T}_1 *ујредна крутост (warping rigidity)*.

Овим поступком добијамо односе између оптерећења и момената савијања, односно увијања:

$$\mathfrak{B}_x y^{IV} = q; \quad \mathfrak{M}'_t = \mathfrak{T} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} - \mathfrak{T}_1 \frac{\partial^4 \theta}{\partial \zeta^4} = -qe.$$

Ставимо ли у горње изразе уместо оптерећења силе инерције и моменте сила инерције добијамо диференцијалне једначине спрегнутих осцилације греде

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_x \frac{\partial^4 y}{\partial \zeta^4} &= -\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (y + e \theta); \\ \mathfrak{T} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} - \mathfrak{T}_1 \frac{\partial^4 \theta}{\partial \zeta^4} &= \rho A e \frac{\partial^2}{\partial t^2} (y + e \theta) + \rho I_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (113)$$

* Отпорност материјала, чл. 7.4.

Претпоставимо ли решење у облику

$$y = Z \sin \omega t, \quad \theta = \Theta \sin \omega t,$$

горње се једначине свODE на две симултане диференцијалне једначине четвртог реда:

$$\mathfrak{B}_x Z^{IV} - \rho A \omega^2 (Z + e \Theta) = 0; \tag{114}$$

$$\mathfrak{I} \Theta'' - \mathfrak{I}_1 \Theta^{IV} + \rho A e \omega^2 (Z + e \Theta) - \rho I_0 \omega^2 \Theta = 0.$$

Нормалне функције Z и Θ морају задовољити граничне услове греде.

На пример, за просту греду гранични услови су:

$$\text{за } z=0 \text{ и } z=l \text{ су } y=\theta=\partial^2 y/\partial \zeta^2=\partial^2 \theta/\partial \zeta^2=0,$$

те су нормалне функције

$$Z = C \sin k \zeta, \quad \Theta = D \sin k \zeta, \quad k = n \pi / l.$$

Једначине (114) свODE се на систем алгебарских једначина

$$(\mathfrak{B}_x k^4 - \rho A \omega^2) C - \rho A e \omega^2 D = 0;$$

$$\rho A e \omega^2 C + (\rho A e^2 \omega^2 - \rho I_0 \omega^2 - \mathfrak{I} k^2 - \mathfrak{I}_1 k^4) D = 0,$$

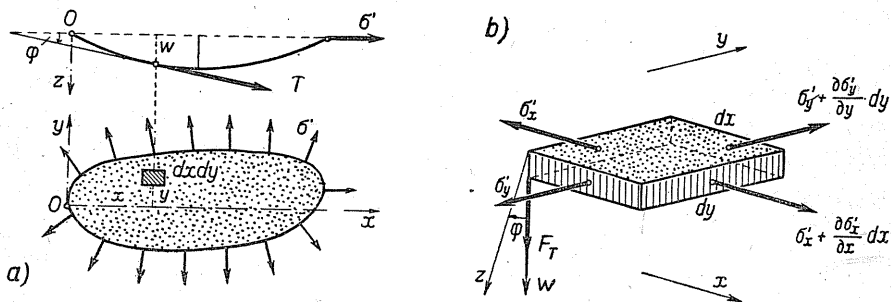
из којих одређујемо квадрате кружних фреквенција.

За $e=0$ добијају се вредности $\omega_1^2 = \omega_0^2$, $\omega_2^2 = \Omega^2$ које одговарају неспрегнутим трансверзалним и торзијским осцилацијама просте греде.

Сложенији су случајеви када пресек нема ниједну раван симетрије. Ови се јављају код турбинских дискова, осцилација авионског крила и пропелера.

19. ОСЦИЛАЦИЈЕ МЕМБРАНА

19. 1. Таласна једначина мембране. — Претпоставља се да је мембрана врло танка и пошћуно савишљива, те се не обире савијању услед сила које дејствују по ободу мембране и које рачунамо на јединицу дужине, σ' [kg/cm]. Ако су ови напони константни онда је мембрана једнолико најрегнута, у противном је неједнолико најрегнута. Даље се претпоставља да је површина мембране у недеформисаном стању раван Oxy и да су померања — угиби — w шачака мембране (w) врло мали у поређењу са попречним димензијама, исто тако да тангенцијална раван мембране у шачки (x, y, w) гради врло мали угао са



Сл. 19.1. — Осцилације мембране

хоризонталном равни Oxy , (сл. 19.1. а). Може се узети да је трансверзална сила елемента мембране $dx dy$, (сл. 19.1. б), вертикална

$$F_{Tz} = Z_T = F_T \cos \varphi \approx F_T. \quad (1)$$

На странама елемента $dx dy$ мембране, (сл. 19.1. б), дејствују напони

$$\sigma'_x; \quad \sigma'_x = \sigma'_x + \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} dx; \quad \sigma'_y; \quad \sigma'_y = \sigma'_y + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} dy,$$

па ће се мењати и померања ако се изврши прираштај елемента за dx и dy

$$w; \quad w + \frac{\partial w}{\partial x} dx; \quad w + \frac{\partial w}{\partial y} dy.$$

Пројекција елементарне силе $\sigma'_x dy$ (која дејствује у $x-x$ правцу) на вертикални правац биће

$$\sigma'_x dy \cos(90^\circ - \varphi) = \sigma'_x dy \sin \varphi \approx \sigma'_x dy \operatorname{tg} \varphi = \sigma'_x dy \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Пројекција резултанте ових сила на z правац износи

$$Z_1 = \left(\sigma'_x + \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} dx \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(w + \frac{\partial w}{\partial x} dx \right) dy - \left(\sigma'_x \frac{\partial w}{\partial z} \right) dy, \quad (2)$$

односно, ако се занемаре мале величине другог реда,

$$Z_1 \approx \left(\sigma'_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy \approx \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma'_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy. \quad (2a)$$

На потпуно исти начин одредили бисмо и пројекцију на z правац резултанте сила које дејствују на елемент $dx dy$ у $y-y$ правцу:

$$Z_2 \approx \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma'_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy. \quad (2b)$$

Како је маса елемента мембране $dm = \rho'' dx dy$, где је ρ'' површинска густина, $\rho'' = \gamma''/g$, γ'' специфична тежина (kg/cm^2) и убрзање $\partial^2 w / \partial t^2$, динамичка једначина кретања тежишта елемента у правцу z осе биће

$$\rho'' dx dy \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Z_1 + Z_2 + q'' dx dy = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma'_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma'_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + q'' \right] dx dy;$$

овде је q'' специфично опшерећење мембране по јединици њене површине (јединице kg/cm^2). Таласна једначина мембране је

$$\rho'' \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q'' + \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma'_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma'_y \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (3)$$

Са довољном тачношћу може се узети да су напони σ'_x и σ'_y једнаки напону на ободу (σ'), па таласна једначина (3) постаје

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c_0^2 + c^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (4)$$

где су

$$c_0^2 = q''/\rho'', \quad c^2 = \sigma'/\rho'' \quad (5)$$

брзине простирања таласа.

Уведе ли се Лапласов оператор

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (6)$$

таласна једначина (4) постаје

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c_0^2 + c^2 \Delta w. \quad (7)$$

У случају да мембрана није оптерећена горња једначина биће

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \Delta w. \quad (8)$$

Померање w је функција од променљивих x , y и t .

За $w = w(x, t)$ добија се таласна једначина трансверзалних осцилација жице.

19.2. Правоугаона мембрана. — а) У случају једнолико напрегнуте ($\sigma' = \text{const}$) а неоптерећене ($q'' = 0$) правоугаоне мембране, страна a и b , (сл. 19.2), таласна једначина има облик (8).

Слично општој таласној једначини, решење једначине (8) тражићемо, према Бернулијевој методи партикуларних интеграла, (чл. 16.1), у облику производа функција

$$w(x, y, t) = W(x, y) \cdot T(t) \quad (9)$$

од којих прва зависи од x и y а друга само од t , али таквих да су задовољени гранични услови. Уносећи (9) у (8) ова једначина постаје

$$W T'' = c^2 T \Delta W. \quad (10) \quad \text{Сл. 19.2. — Правоугаона мембрана}$$

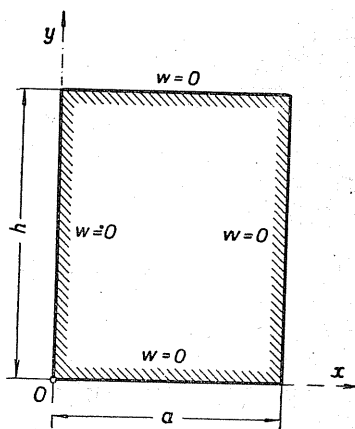
Ова је једначина задовољена ако су једновремено задовољене две диференцијалне једначине

$$\text{односно} \quad T'' + CT = 0; \quad c^2 \Delta W + CW = 0, \quad (11)$$

$$\Delta W + k^2 W = 0; \quad T'' + \omega^2 T = 0, \quad (12)$$

где су уведене смене

$$C = \omega^2; \quad k^2 = C/c^2 = \omega^2/(\sigma'/\rho''). \quad (13)$$



Гранични услови мембране јесу да су угиби тачака на ободу (руб) једнаки нули:

$$\begin{aligned} \text{за } x=0, x=a, y=y \text{ јесу } w=0, W=0; \\ \text{за } y=0, y=b, x=x \text{ јесу } w=0, W=0. \end{aligned} \quad (14)$$

Ове услове задовољава функција

$$W(x, y) = \sin(m\pi/a)x \sin(n\pi/b)y, \quad m=1, 2, \dots; \quad n=1, 2, \dots \quad (15)$$

Унесе ли се ова функција у прву једначину (12) биће

$$-(m\pi/a)^2 W - (n\pi/b)^2 W + k^2 W = 0,$$

па, се с обзиром на (13), добија фреквентна једначина

$$(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2 - (\omega^2/c^2) = 0 \quad (16)$$

те је кружна фреквенција

$$\omega_{mn} = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} = \pi \sqrt{\rho'' \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \quad (17)$$

сразмерна квадратном корену напона којим је напрегнута мембрана. Решење друге једначине (12) је облика

$$T = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (18)$$

где су A и B произвољне константе. Период осцилације је

$$T_{mn} = \frac{2\pi}{\omega_{mn}} = \frac{2}{c \sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}. \quad (19)$$

Како је и збир решења једначине (8) такође њено решење, то је опште решење таласне једначине (8):

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn} \cos \omega_{mn} t + B_{mn} \sin \omega_{mn} t) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad (20)$$

где су A_{mn} и B_{mn} константе које се одређују из почетних услова кретања.

Из (20) се види да се осцилација мембране састоји из збира бесконачно много нормалних осцилација којима одговарају нормалне (сопствене) функције (15). Како у општем случају две кружне фреквенције ω_{mn} и ω_{pq} нису самерљиве, то и кретање представљено једначином (20) није уопште узев периодичко.

Као и код жице, поред граничних услова морају бити задовољени и почетни услови. Ако су они

$$w(x, y, t=0) = f(x, y); \quad \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{t=0} = f_1(x, y), \quad \begin{matrix} 0 \leq x \leq a, \\ 0 \leq y \leq b, \end{matrix} \quad (21)$$

онда за $t=0$ једначина (20), с обзиром на (21), даје однос

$$\sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = f(x, y). \quad (22a)$$

Диференцирањем једначине (20), с обзиром на (21), добија се

$$\sum_m \sum_n B_{mn} \omega_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = f_1(x, y) = \varphi(x, y). \quad (22b)$$

Као што се функција од једне променљиве $f(x)$ може у размаку $0 < x < a$ развити у тригонометријски ред синуса, (чл. 5.4.1.),

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi}{a} x,$$

где је

$$A_m = \frac{2}{a} \int_0^a f(\xi) \sin \frac{m\pi\xi}{a} d\xi,$$

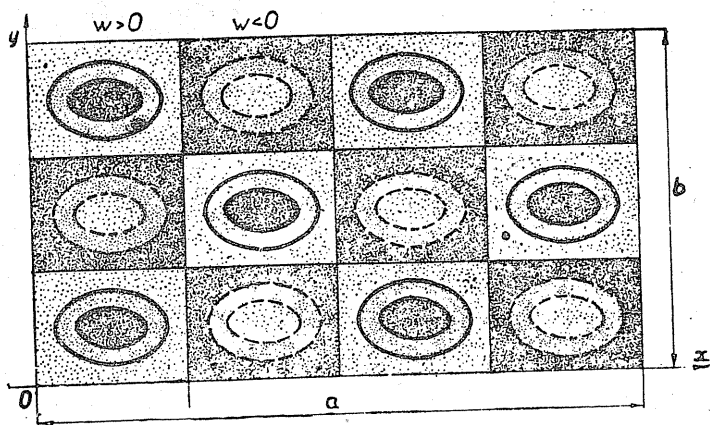
тако се исто и функција двеју независно променљивих $f(x, y)$, односно $f_1(x, y)$, може у размацима $0 < x < a$, $0 < y < b$, развити у двоспружи тригонометријски ред, те су коефицијенти:

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \sin \frac{m\pi\xi}{a} d\xi \int_0^b f(\xi, \eta) \sin \frac{n\pi\eta}{b} d\eta; \quad (23)$$

$$B_{mn} = \frac{4}{ab \omega_{mn}} \int_0^a \sin \frac{m\pi\xi}{a} d\xi \int_0^b \varphi(\xi, \eta) \sin \frac{n\pi\eta}{b} d\eta.$$

Свакој нормалној функцији (15) одговара један нормални облик осцилација мембране, при коме све њене тачке врше хармонијске осцилације различитих амплитуда али истих кружних фреквенција ω_{mn} и фаза. Све тачке мембране пролазе једновремено кроз равнотежни положај ($z=0, w=0$). У овоме су положају брзине тачака највеће, а у најудаљенијим положајима од равнотежног оне су једнаке нули.

Површина мембране је подељена у $m \cdot n$ једнаких правоугаоника, страна a/m и b/n у којима су померања наизменично позитивна и негативна, (како је показано на сл. 19.3. за случај $m=4, n=3$). Правоугаоници су одељени чворним линијама чије тачке не осцилују ($w=0$). За



Сл. 19.3. — Чворне линије правоугаоне мембране

$m=n=1$ добија се основни облик осцилација, сви остали су виши хармоници. Једино при основном облику нема чворних линија, изузев контуре где је такође $w=0$.

b) У случају неједнолико напрегнуте правоугаоне мембране, $\sigma'_x \neq \sigma'_y$, када су напони константни, диференцијална једначина (8) постаје

$$\rho'' \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (24)$$

где су

$$c_1^2 = \sigma'_x / \rho'', \quad c_2^2 = \sigma'_y / \rho''. \quad (25)$$

Решење једначине (24) може се опет узети у облику (9), па је прва једначина (12) облика

$$c_1^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + c_2^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \omega^2 W = 0.$$

Како су гранични услови исти, то је нормална функција облика (15), па је кружна фреквенција

$$\omega_{mn} = \pi \sqrt{c_1^2 (m/a)^2 + c_2^2 (n/b)^2}. \quad (26)$$

19.3. Квадратна мембрана. — За случај квадратне мембране је $a=b$, па је, према (17), кружна фреквенција

$$\omega_{mn} = \omega_{nm} = (\pi c/a) \sqrt{m^2 + n^2}, \quad (27)$$

иста за два различита облика осцилација. Ако се претпоставе *штојећи шаласи* онда је закон кретања за ова два облика

$$\begin{aligned}
 w &= w_{mn} + w_{nm} = C_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} y \sin \omega_{mn} t + \\
 &+ C_{nm} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{a} y \sin \omega_{nm} t = \\
 &= \left(C_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} y + C_{nm} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{a} y \right) \sin \omega_{mn} t. \quad (28)
 \end{aligned}$$

Кретање је, дакле, у овом случају, *периодичко*. Најнижа кружна фреквенција добија се за $m=n=1$, па су

$$\omega_{11} = \frac{\pi c}{a} \sqrt{2}, \quad T_{11} = \frac{2\pi}{\omega_{11}} = \frac{a}{c} \sqrt{2}. \quad (29)$$

Из услова $w=0$, а за произвољну вредност t , одређује се једначина *чворних линија*. Према томе из (28) следи да је за квадратну мембрану

$$\eta_d \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} y + \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{a} y = 0, \quad (30)$$

где је $\eta_d = C_{mn}/C_{nm}$ однос амплитуда који се може да мења од $-\infty$ до $+\infty$.

Разликоваћемо неколико карактеристичних случајева.

a) Ако је $\eta_d = -1$ онда је једначина (30) идентички задовољена, ($m=n$), па је у свима тачкама $w=0$, тј. мембрана се налази у *положају равнотеже*.

b) *Случај $m=n$* . — Из (30) следи да је

$$\sin (m\pi/a) x \sin (m\pi/a) y = 0$$

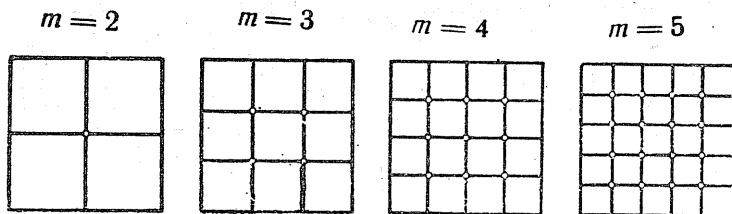
па су

$$mx/a = k_1, \quad my/a = k_2, \quad \text{где су } k_i = 1, 2, \dots, (m-1)$$

те су

$$x = ak_1/m, \quad y = ak_2/m.$$

Мембрана има, дакле, $m-1$ чворних линија паралелних оси Ox и $m-1$



Сл. 19.4. — Чворне линије квадратне мембране за случај $m=n$

паралелних оси Ox , како је показано на сл. 19.4. за $m=2, m=3, \dots, m=5$.

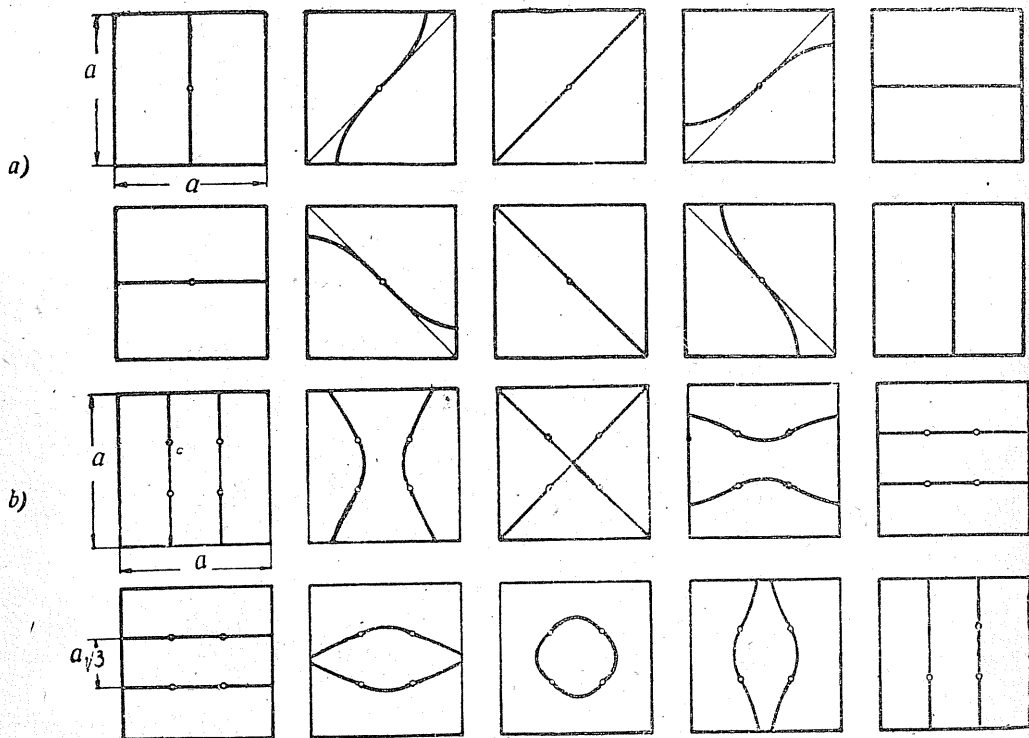
с) *Случај* $m=2, n=1$. — У овоме случају се из (30) добија

$$\eta_d \sin(2\pi/a)x \sin(\pi/a)y + \sin(\pi/a)x \sin(2\pi/a)y = \\ = 2 \sin(\pi/a)x \sin(\pi/a)y [\eta_d \cos(\pi/a)x + \cos(\pi/a)y] = 0.$$

Прва два решења одговарају контури, а израз у заградаи даје једначину чворних линија за различите односе $\eta_d = C_{21}/C_{12}$:

$$\eta_d \cos(\pi/a)x + \cos(\pi/a)y = 0.$$

Чворне линије су претстављене на сл. 19.5.a; све пролазе кроз средиште мембране ($x_c = a/2, y_c = a/2$) које се назива *пол*.



Сл. 19.5. — а) Чворне линије квадратне мембране за случај $m=2, n=1$

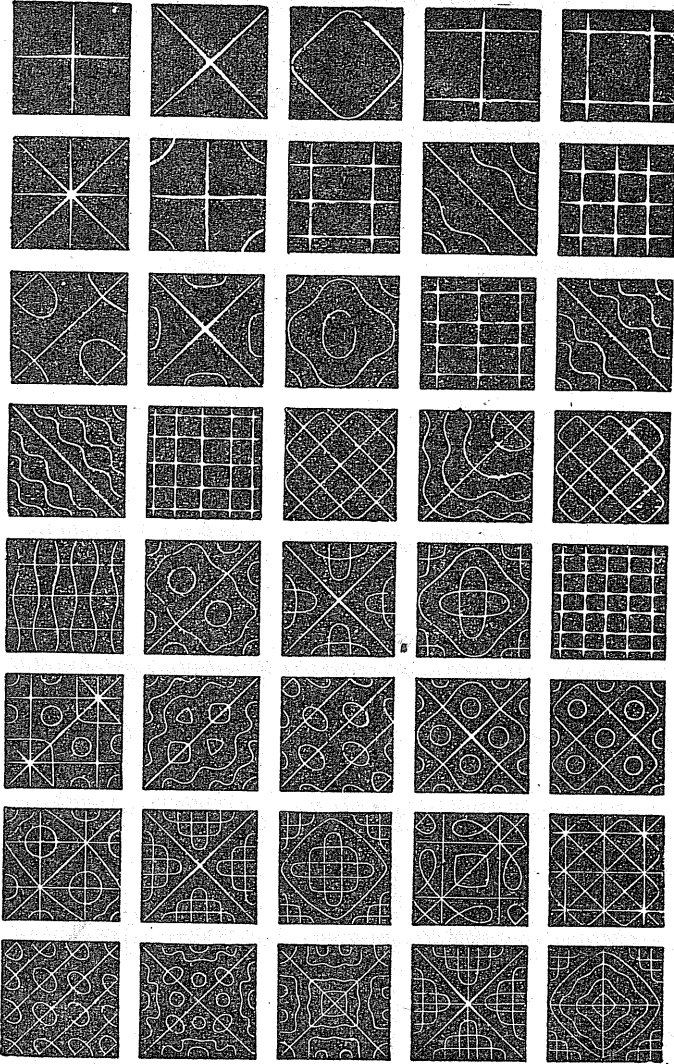
— б) Чворне линије квадратне мембране за случај $m=1, n=3$

д) *Случај* $m=1, n=3$. — У овом случају из (30), развијањем израза $\sin(3\pi x/a)$ и $\sin(3\pi y/a)$, одбацујући услове на контури, добијамо једначину чворних линија

$$\eta_d [4 \cos^2(\pi/a)x - 1] + 4 \cos^2(\pi/a)y - 1 = 0.$$

Чворне линије су приказане на сл. 19.5.b. Оне пролазе кроз четири пола који се налазе у теменима квадрата са средиштем у средишту мембране, страна $1/3 a$.

На сл. 19.6. приказане су компликованије чворне линије (тзв.

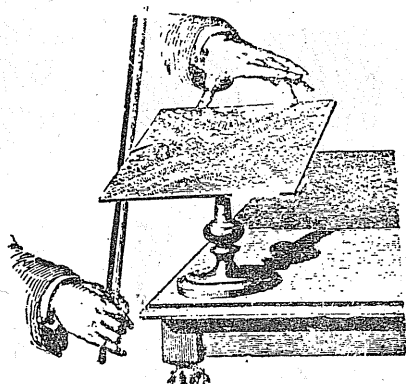


Сл. 19.6. — Хладнијеве линије

Хладнијеве линије). Као што је познато из физике оне се могу експериментално показати помоћу песка или ситних опиљака, (сл. 19.7.).

19.4. **Кружна мембрана.** — Парцијална диференцијална једначина (8) примењује се и код кружне мембране за коју важе исте претпоставке као и за правоугаону мембрану. Овде је само zgodније

уместо координата x и y увести *поларне координате* r и φ . Како су



Сл. 19.7. — Експериментално извођење Хладнијевих линија

$$r^2 = x^2 + y^2; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x};$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \varphi; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \varphi;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \cos^2 \varphi = -\frac{\sin \varphi}{r};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos^2 \varphi}{x} = \frac{\cos \varphi}{r} \quad (31)$$

и изводи

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r};$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r}; \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = & \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cos^2 \varphi - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \frac{\sin^2 \varphi}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\sin^2 \varphi}{r} + \\ & + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = & \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \frac{\cos^2 \varphi}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\cos^2 \varphi}{r} - \\ & - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2}, \end{aligned}$$

то је *Лајласов операшор** (6) за поларне координате у равни

$$\Delta(x, y) = \Delta(r, \varphi) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (33)$$

* Кинематика, Додатак III, обр. 322.

па је *ш*аласна једначина

$$\boxed{\frac{\partial^2 w(r, \varphi, t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta w(r, \varphi).} \quad (34)$$

Решење ове једначине тражићемо у облику производа функција

$$w = W(r, \varphi) \cdot T(t) \quad (35)$$

па се једначина (34) раздваја на две једначине

$$\Delta W + k^2 W = \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + k^2 W = 0; \quad (36a)$$

$$T'' + \omega^2 T = 0; \quad (36b)$$

овде су k и ω везани релацијом (13).

Решење једначине (36b) је исто као и (18). Међутим, једначина (36a) је хомогена парцијална једначинама са променљивим коефицијентима. Због тога ћемо и њено решење тражити у облику производа двеју функција

$$W(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi), \quad (37)$$

од којих свака зависи само од по једне променљиве. Уносећи (37) у (36a) биће

$$\Phi R'' + \frac{\Phi}{r} R' + \frac{R}{r^2} \Phi'' + k^2 R \Phi = 0. \quad (38)$$

Ова се једначина такође своди на две једначине

$$\Phi'' + n^2 \Phi = 0; \quad R'' + r^{-1} R' + [(\omega/c)^2 - (n/r)^2] R = 0. \quad (39)$$

Решење прве једначине је

$$\Phi = C \cos n \varphi + D \sin n \varphi = S \sin(n \varphi + \theta), \quad (40)$$

где је n цео позитиван број, јер је Φ периодичка функција.

Друга једначина, сменом

$$x = k r = \omega r/c, \quad (41)$$

своди се на Беселову* диференцијалну једначину

$$R''(x) + \frac{1}{x} R'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) R(x) = 0. \quad (42)$$

Решење једначине (42) је облика

$$R(x) = (a_n x^n + a_{n+2} x^{n+2} + a_{n+4} x^{n+4} + \dots) = A \left[\frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{(n+2)! 2!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+4} - \dots \right]. \quad (43)$$

* Friedrich Wilhelm Bessel, 1784. — 1846.

Израз у загради ове једначине назива се *Беселова** или *цилиндричка функција прве врсте n -ог реда или индекса*, те се краће обележава са

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(i \frac{x}{2}\right)^{2m}}{(n+m)! m!}, \quad (44)$$

где је $i = \sqrt{-1}$, а $n \geq 0$ цео број. Овај је ред униформно ковергентан за коначне вредности x . Сем горњег облика ова функција може се написати и у облику

$$J_n(x) = \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \cos t} \cos nt \, dt, \quad (45)$$

те је периодичка функција времена t , периода $[-\pi, \pi]$. Она је реална за свако x . Како је n цео број, позитиван, нула или негативан, то вреде ове релације и рекурентна формула:

$$|J_n(x)| \leq 1; J_0(0) = 1; J_n(0) = 0; n > 1; J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x); n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x). \quad (46)$$

Обрнутим поступком може се лако доказати да Беселова функција (43), односно (44), задовољава Беселову линеарну диференцијалну једначину другог реда (42), јер се диференцирањем и парцијалним интегралом добија

$$J_n''(x) + \frac{1}{x} J_n'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n(x) = 0. \quad (47)$$

За случај *својећих шаласа* померања тачака мембране одређена су једначином

$$w(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} J_n(\omega_{nm} r/c) \sin n\varphi \cdot \sin \omega_{nm} t. \quad (48)$$

Једначине чворних линија добијају се из (36) стављајући $W=0$. За $\theta=0$, биће услови

$$n\varphi = p\pi, \quad J_n(\omega_{nm} r/c) = J_n(x_{nv}) = 0,$$

где је x_{nv} један од корена функције J_n . Како је и ξ_{nm} такође корен Беселове функције, то је

$$\xi_{nm} = \omega_{nm} a/c = x_{nv} a/r$$

* Р. Кашанин — Виша математика II-2 књига. Београд, 1950.

па су једначине чворних линија

$$\varphi = p \pi / n; \quad p = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (49)$$

$$r = (x_{nv} / \xi_{nm}) a; \quad v = 1, 2, \dots, m-1. \quad (50)$$

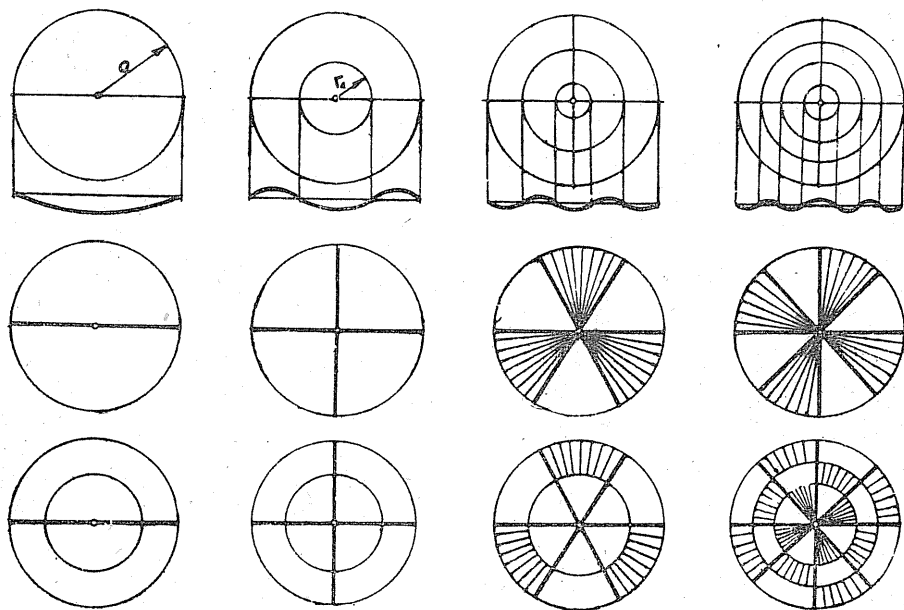
Једначина (49) представља снап правих линија — пречника — а једначина (50) систем концентричних кругова. Према томе мембрана има p чворних линија — пречника, под углом φ_p , и $m-1$ чворних кругова, не рачунајући ободни круг. Полупречници ових кругова се лако одређују из (50) узимајући $v=1, 2, \dots, m-1$, где су x_{nv} и ξ_{nm} нуле Беселове функције $J_n(x)$; прве су у унутрашњости контуре а друге на самом рубу.

Када се знају корени Беселове функције $J_n(x)$ онда се кружна фреквенција и период осцилације одређују обрасцима

$$\omega_{nm} = \xi_{nm} \frac{c}{a}; \quad T_{nm} = \frac{2\pi}{\omega_{nm}} = \frac{2\pi}{\xi_{nm}} \frac{a}{c} = \frac{2\pi}{\xi_{nm}} a \sqrt{\frac{\rho''}{\sigma'}}. \quad (51)$$

Сваком корену одговара по један нормални облик осцилација. Кружне фреквенције за случај да је $n=0$ износе

$$\omega_{01} = 2,405 (c/a); \quad \omega_{02} = 5,520 (c/a), \dots$$



Сл. 19.8. — Чворне линије кружне мембране

Прва три облика осцилација су приказана на сл. 19.8.a. Остали карактеристични случајеви су приказани на сл. 19.8.b.c. На њима су означене зоне у којима су померања истог знака.

На пример, за $n=4$ и $m=3$ чворне линије су четири пречника и два концентрична круга, односно три, узимајући и ободни круг. Из (49) а за $p=0; 1; 2; 3$ добијамо углове

$$\varphi_0=0, \quad \varphi_1=1/4\pi, \quad \varphi_2=2/4\pi, \quad \varphi_3=3/4\pi.$$

Како је

$$\xi_{nm}=\xi_{43}=14,372 \text{ а } x_{n\nu}=x_{4\nu}$$

то су

$$x_{41}=7,588, \quad x_{42}=11,065,$$

па су, према (49), полупречници чворних кругова

$$r_1=\frac{7,588}{14,372} a=0,527a, \quad r_2=\frac{11,065}{14,372} a=0,769a,$$

како је и уцртано на сл. 19.8.

Као и у случају правоугаоне мембране можемо и код кружне применити *Ritz-ову методу*. Претпоставимо да је деформисана површина мембране симетрична у односу на вертикалну осу кроз њено средиште, тј. да су чворне линије само концентрични кругови, тада је $n=0$, па је, према (40), $\Phi=C$, те је W функција само од r . Због тога је

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2, \quad \iint_{(A)} dx dy = 2\pi \int_0^a r dr,$$

па су, према (39), највеће вредности кинетичке и потенцијалне енергије

$$E_{kmax} = \frac{2\pi \rho''}{2} \omega^2 \int_0^a W^2 r dr; \quad E_{pmax} = \frac{2\pi \sigma'}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 r dr. \quad (52)$$

Функцију $W(r)$ претпоставићемо у облику реда

$$W = C_1 \cos \frac{\pi r}{2a} + C_3 \cos \frac{3\pi r}{2a} + \dots, \quad (53)$$

и узимајући само његов први члан, према обрасцу (42), добијамо

$$\frac{\partial}{\partial C_1} \int_0^a \left[C_1^2 \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 \sin^2 \frac{\pi r}{2a} - \lambda \omega^2 C_1 \cos^2 \frac{\pi r}{2a} \right] 2\pi r dr = 0 \quad (54)$$

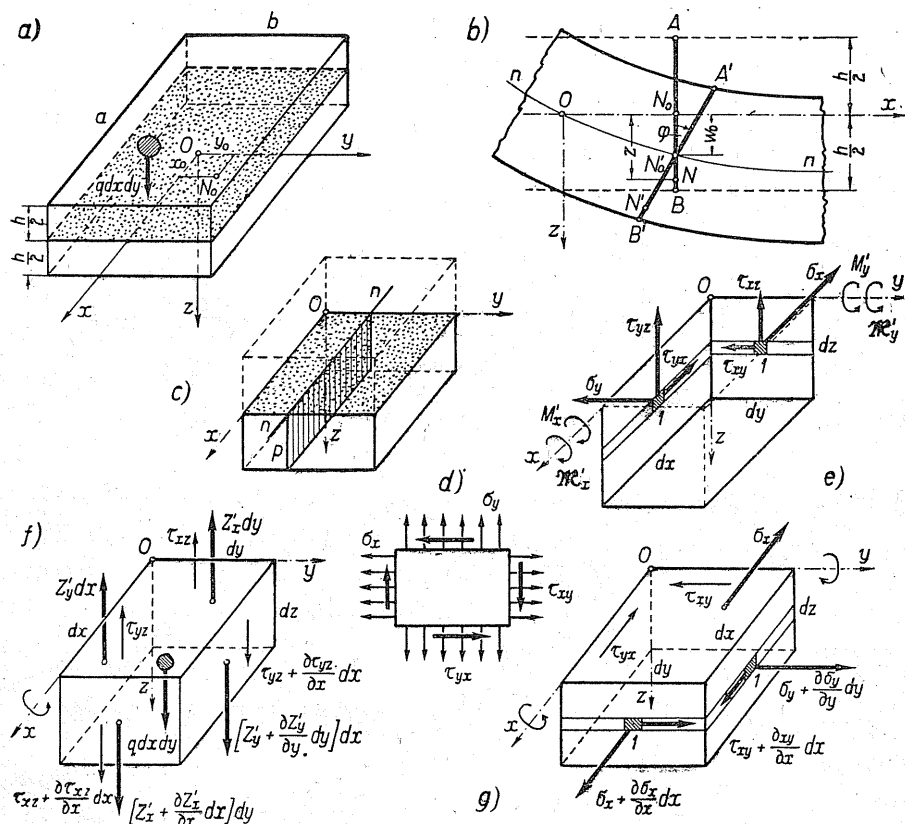
одакле следи да је кружна фреквенција основног облика осцилација

$$\omega_{01} = \frac{\pi}{2a} \sqrt{\frac{\pi^2 + 2}{\pi^2 - 2}} \lambda = \frac{2,415}{a} \sqrt{\frac{\sigma'}{\rho''}}, \quad (55)$$

те је за 0,5% већа од рачунске вредности ω_{01} .

20. ОСЦИЛАЦИЈЕ ПЛОЧА

20.1. Таласна једначина плоче. — Плоча може да врши уздужне и трансверзалне осцилације, али су ове друге у пракси много важније те ћемо их изнети.



Сл. 20.1. — Извођење таласне једначине плоче

Претпоставља се да је плоча, (сл. 20.1.а), од еластичног, хомогеног и изотропног материјала, и да јој је дебелина h мала у односу на друге две

димензије. Координатни систем $Oxuz$ узећемо у тежишту плоче, тако да се раван Oxu поклапа са њеном *средњом равни*; оса Oz је усмерена *наниже*. Услед деформације *средња раван* прелази у криву површину — *еластичну површину*. Ако се претпостави да нека тачка *средње равни* $N_0(x; y; 0)$ прелази (сл. 20.1.b) за време деформације у тачку $N'_0(x; y; w_0)$ тако да је дуж $\overline{N_0 N'_0}$ паралелна оси Oz , онда се може закључити, као и у теорији савијања греда, да је *еластична површина ненапрегнућа* ($\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$), те је *једновремено и неутрална површина*.

Замислимо да смо из плоче исекли паралелепипед, запремине $h \, dx \, dy$, (сл. 20.1.c), и претпоставимо, *према Кирхофу*, да бочне стране остају равне и управне на неутралну површину, али да се окрећу око неутралних оса $n-n$. Означимо са R_1 и R_2 главне полупречнике кривина неутралне површине који леже у равнима Oxz и Oyz , онда нека тачка N на растојању z од ове површине има дилатације:

$$\epsilon_x = \frac{z}{R_1} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}; \quad \epsilon_y = \frac{z}{R_2} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}. \quad (1)$$

Пошто је *напрезање* равно (сл. 20.1.d), то су дилатације

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_x = (\sigma_x - \mu \sigma_y) / E; \quad \epsilon_{yy} = \epsilon_y = (-\mu \sigma_x + \sigma_y) / E$$

па су нормални напони

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{1}{R_1} + \mu \frac{1}{R_2} \right) = \frac{-Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y &= \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{1}{R_2} + \mu \frac{1}{R_1} \right) = \frac{-Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right); \\ \sigma_z &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где је w_0 координата померања у z правцу — *угиб* — тачке $N_0(x; y; 0)$.

Вертикално влакно, (p), пресека паралелног равни Oxz , (сл. 20.1.b), заокренуло се у положај (p') за мали угао φ који можемо заменити његовим тангенсом, па је $\varphi \approx -\partial w_0 / \partial x$. Истовремено се јавља и нагиб у правцу осе Oy , те су компонентна померања тачке $N(x, y, z)$:

$$u = z \sin \varphi \approx z \varphi = -z \frac{\partial w_0}{\partial x}; \quad v \approx z \psi = -z \frac{\partial w_0}{\partial y}; \quad w,$$

па је *клизање*

$$\gamma_{xy} = \gamma_z = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}, \quad (3)$$

и одговарајући тангенцијални напон

$$\tau_{xy} = \tau_z = G \gamma_{xy} = -2Gz \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}; \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (4)$$

Из (2) и (4) види се да су напони σ_x , σ_y , τ_{xy} сразмерни апликати z , те је распоред напона у унутрашњости плоче *линеаран*, због тога су ови напони у тачкама неутралне површине једнаки нули; екстремне вредности достижу у тачкама основа плоче.

Нормалним напонима (2) одговарају *нормалне силе* на бочним странама паралелепипеда које се свде на спрегове — *моментше савијања* — и које рачунамо за јединицу дужине ивице, (сл. 20.1.e), те износе

$$M'_{fx} = M'_x = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot z \, dz = - \mathfrak{D} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \quad (5)$$

$$M'_{fy} = M'_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z \, dz = \mathfrak{D} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right),$$

где је уведена ознака

$$\mathfrak{D} = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \quad (6)$$

која представља *крушосћ плоче (flexural rigidity of the plate)*.

Тангенцијалним напонима (4) одговарају *моментши увијања* такође рачунати за јединицу дужине ивице паралелепипеда

$$\mathfrak{M}'_{tx} = \mathfrak{M}'_x = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot z \, dz = -(1-\mu) \mathfrak{D} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}, \quad (7)$$

$$\mathfrak{M}'_{ty} = \mathfrak{M}'_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} \cdot z \, dz = (1-\mu) \mathfrak{D} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$

док тангенцијалним напонима $\tau_{xz} = \tau_x$ и $\tau_{yz} = \tau_y$ одговарају *шрансверзалне силе* за јединицу дужине ивице

$$Z'_x = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \, dz; \quad Z'_y = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \, dz. \quad (8)$$

Када се пређе са координатних равни Oxz и Oyz на паралелне равни на растојањима dx и dy промениће се напони (сл. 20.1.f, g) па ће се променити трансверзалне силе, моменти савијања и увијања.

Према закону о кретању средишта плоче биће динамичка једначина (сл. 20.1.f)

$$\rho h \, dx \, dy \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = \left[\left(Z'_x + \frac{\partial Z'_x}{\partial x} dx \right) - Z'_x \right] dy + \left[\left(Z'_y + \frac{\partial Z'_y}{\partial y} dy \right) - Z'_y \right] dx + q \, dx \, dy,$$

где је q специфично оптерећење плоче, односно

$$\rho h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = \frac{\partial Z'_x}{\partial x} + \frac{\partial Z'_y}{\partial y} + q. \quad (9)$$

Због малих угаоних промена може се занемарити угаоно убрзање; тада моментне једначине за осе Ox и Oy , (сл. 20.1.f), дају систем једначина:

$$\begin{aligned} & \left[-M'_x + \left(M'_x + \frac{\partial M'_x}{\partial y} dy \right) \right] dx + \left[-\mathfrak{M}'_x + \left(\mathfrak{M}'_x + \frac{\partial \mathfrak{M}'_x}{\partial x} dx \right) \right] dy - \\ & \quad - \left[\left(Z'_y + \frac{\partial Z'_y}{\partial y} dy \right) dx \right] dy = 0; \\ & \left[M'_y - \left(M'_y + \frac{\partial M'_y}{\partial x} dx \right) \right] dy + \left[\mathfrak{M}'_y - \left(\mathfrak{M}'_y + \frac{\partial \mathfrak{M}'_y}{\partial y} dy \right) \right] dx + \\ & \quad + \left[\left(Z'_x + \frac{\partial Z'_x}{\partial x} dx \right) dy \right] dx = 0, \end{aligned}$$

јер сила Z'_y сече осу Ox а сила Z'_x осу Oy . Свођењем добија се

$$\begin{aligned} \frac{\partial M'_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{M}'_x}{\partial x} - Z'_y &= 0, & \text{тј.,} & \quad Z'_x = \frac{\partial M'_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}'_y}{\partial y}; \\ -\frac{\partial M'_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{M}'_y}{\partial y} + Z'_x &= 0, & \text{тј.,} & \quad Z'_y = \frac{\partial M'_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{M}'_x}{\partial x}. \end{aligned} \quad (10)$$

Диференцирајући изразе (10), с обзиром на односе (5) и (7) добијамо

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z'_x}{\partial x} &= -\mathfrak{D} \left[\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \right] - (1-\mu) \mathfrak{D} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2}; \\ \frac{\partial Z'_y}{\partial y} &= -\mathfrak{D} \left[\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + \mu \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \right] - (1-\mu) \mathfrak{D} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2}. \end{aligned}$$

Ако се ове вредности унесу у једначину (9) тада шаласна једначина плоче постаје:

$$\rho h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = -\mathfrak{D} \left[\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right] + q = -\mathfrak{D} \Delta \Delta w_0 + q, \quad (11)$$

где је уведена ознака дуплог Лапласовог оператора

$$\Delta\Delta = \Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \quad (12)$$

Буде ли лева страна једначине (11) једнака нули, тада се добија диференцијална једначина еластичне површине савијене плоче*:

$$\mathfrak{D}\Delta\Delta w_0 = q \quad (13)$$

која се може применити и за контуална и концентрисана оптерећења.

При $q=0$ таласна једначина (11) постаје

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = -\alpha^4 \Delta \Delta w_0, \quad (14)$$

где је уведена смена

$$\alpha^4 = \mathfrak{D}/\rho h.$$

На овај се начин проблем трансверзалних осцилација плоче свео на интегралење линеарне парцијалне диференцијалне једначине четвртог реда (14).

Решење ове једначине тражићемо у облику производа функција

$$w_0(x, y, t) = W(x, y) \cdot T(t) \quad (15)$$

па се једначина (14) раздваја на две једначине

$$T'' + \omega^2 T = 0; \quad \Delta \Delta W - k^4 W = 0, \quad (16)$$

где су уведене смене

$$C = \omega^2; \quad k^4 = C/\alpha^4 = \omega^2 \rho h / \mathfrak{D}. \quad (17)$$

Друга једначина (16), због особина Лапласовог оператора,

$$\Delta \Delta W - k^4 W = (\Delta \Delta - k^4) W = (\Delta - k^2) W \cdot (\Delta + k^2) W = 0,$$

распада се даље на две парцијалне диференцијалне једначине другог реда

$$\Delta W - k^2 W = 0; \quad \Delta W + k^2 W = 0; \quad \omega^2 = k^2 \sqrt{\mathfrak{D}/\rho h} = k^2 \sqrt{\mathfrak{D}g/\gamma_m h}; \quad (18)$$

* Lagrange 1811.; Sophie Germain, 1815.

које смо имали и код мембрана, само је прва са негативним предзнаком уз W . Овде је γ_m специфична тежина материјала плоче.

Решавањем ових једначина, уз задовољење граничних услова, одређују се кружне фреквенције осцилација ω_{mn} . Ако је ивица (s) плоче *уклештена* онда морају у свима тачкама ивице бити померања једнака нули а такође и нагиби тангенцијалне равни на еластичну површину морају бити једнаки нули

$$W_{(s)} = 0; \quad (\partial W / \partial n)_{(s)} = 0. \quad (19)$$

Ако је плоча дуж ивице *слободно ослоњена* онда је угиб у свима тачкама те ивице једнак нули. Како се плоча може обртати око те ивице то мора бити једнак нули и момент савијања око ње, те су, дакле, гранични услови:

$$W_{(s)} = 0; \quad M'_{(s)} = 0. \quad (20)$$

Буде ли једна страна плоче *пошћуно слободна*, тада дуж ње нема ни момента савијања, ни момента увијања нити трансверзалне силе, те постоје три гранична услова $M'_s = 0$; $\mathfrak{M}'_s = 0$; $Z'_s = 0$. Међутим, Кирхоф је показао да се друга два услова свде на један, тако да има само два гранична услова

$$M'_{(s)} = 0, \quad (\text{први Кирховљев услов}) \\ \left(Z' - \frac{\partial \mathfrak{M}'}{\partial n} \right)_s = 0, \quad (\text{други Кирховљев услов}), \quad (21)$$

односно

$$\left[\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right]_x = 0; \quad \left[\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right]_y = 0.$$

Кинетичка енергија осциловања плоче је

$$E_k = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \rho \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 dx dy dz = \frac{1}{2} \rho h \iint_{(A)} \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 dx dy. \quad (22)$$

Како су тангенцијални напони τ_{xz} и τ_{yz} врло мали, то су клизања $\gamma_{xz} \approx \gamma_{yz} = 0$, па се проблем своди на *равно сшање напрезања*, те је потенцијална енергија

$$E_p = A_d = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} \right) dx dy dz,$$

која се, с обзиром на (1), (2), (3) и (4), може написати и у овом облику

$$E_p = \frac{\mathfrak{D}}{2} \iint_{(A)} \left[\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2(1 - \mu) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (23)$$

20.2. Кружна плоча. — Као и код кружне мембране, (чл. 19.3.), увешћемо поларне координате r и φ , па диференцијалне једначине (18) постају

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \pm k^2 W = 0. \quad (24)$$

Решење ових једначина узимамо у истом облику као и код мембране, $W = R(r) \Phi(\varphi)$, па се једначина (24) распада на две једначине

$$\Phi'' + n^2 \Phi = 0; \quad R'' + \frac{1}{r} R' + \left(\pm k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (25)$$

Како за $r=0$, Нојманова функција има бескрајно велику вредност то у обзир долазе само *Беселове функције прве врсте*, али се због вредности $\pm k^2$ морају узети ове функције и са реалним, $J_n(x)$, и са имагинарним аргументом, $I_n(x)$, где је $x=kr$. Функција I_n назива се *модифицирана Беселова функција прве врсте, реда n* , па је,

$$I_n(x) = (i)^{-n} J_n(\lambda i) = \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x \cos t} \cos nt \, dt. \quad (26)$$

Она је реална када је n цео број.

Ова функција задовољава другу диференцијалну једначину (25)

$$I_n'' + \frac{1}{x} I_n' - \left(1 + \frac{n^2}{x^2} \right) I_n = 0,$$

стављајући уместо x вредност xi .

Према томе је решење једначине (25) облика

$$\Phi = C \sin(n\varphi + \theta); \quad R(r) = J_n(k_n r) + K I_n(k_n r), \quad (27)$$

те је закон померања тачака еластичне—неутралне—површине плоче

$$w_0(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \left[J_n(k_{nm} r) + K_{nm} I_n(k_{nm} r) \right] \sin n\varphi \sin \omega_{nm} t. \quad (28)$$

У случају *пошћуно слободне кружне плоче* Кирховљеви услови, (21), постају

$$\left[\Delta W + \frac{1-\mu}{\mu} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right]_{r=a} = 0; \quad \left[\frac{\partial}{\partial r} \Delta W + \frac{1-\mu}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right) \right]_{r=a} = 0, \quad (29)$$

па се из њих могу одредити вредности k_{nm} и K_{nm} . Чворне линије су концентрични кругови (m) или пречници (n).

За различите вредности n и m Lamb и Southwell* дали су у таб-
лици 20.1. зависности величине $4\rho a^4 \omega^2/Eh^2$, при $\mu=0,3$, од n и m .

Таблица 20.1.

$\frac{4\rho a^4 \omega^2/Eh^2}{n \backslash m}$	0	1	2	3
0	0	0	10,61	56,97
1	29,67	154,3	443,9	1040
2	577	1222	2624	4285
3	2983	5266	8574	13287

Најнижа кружна фреквенција и фреквенција виших хармоника (по Кирхофу) износе:

$$\omega_{02} = \frac{h}{2a^2} \sqrt{10,61 \frac{E}{\rho}}; \quad k_{nm} = \frac{\pi}{2a} (n+2m). \quad (30)$$

У случају пошћуно укљешћене плоче гранични услови (19) постају

$$W_{(r=a)}=0; \quad \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)_{(r=a)}=0 \quad (31)$$

па су вредности k_{nm} у зависности од n и m дате у табlici 20.2.

Таблица 20.2.

$\frac{k_{nma}}{n \backslash m}$	1	2	3	4
0	3,1961	6,3064	9,4395	12,577
1	4,6110	7,7993	10,958	14,108
2	5,9056	9,1967	12,402	15,579
3	7,1433	10,537	13,795	

Кружне фреквенције можемо добити и по Рицовой мџоди**. Уз-
мимо да је функција

$$W(r) = C_1 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 + C_2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^3 + C_3 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^4 + \dots, \quad (32)$$

* Lamb. H.-R., V. Southwell — The Vibration of a Spinning Disk. PRSL. 1921.

** Галеркин Б. Г. — Упругие тонкие плиты. Москва, 1923.

само функција од r , тада су,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{d^2 W}{dr^2} \cos^2 \varphi + \frac{dW}{dr} \frac{\sin^2 \varphi}{r};$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{d^2 W}{dr^2} \sin^2 \varphi + \frac{dW}{dr} \frac{\cos^2 \varphi}{r};$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 W}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} \right) \sin 2\varphi,$$

те су максималне енергије, (22) и (23),

$$E_{kmax} = \frac{1}{2} \rho h \cdot 2\pi \omega^2 \int_0^a W^2 r dr;$$

$$E_{pmax} = \frac{2\pi \mathfrak{D}}{2} \int_0^a \left\{ \left[W''' + \frac{1}{r} W' \right]^2 - 2(1-\mu) \frac{W' W''}{r} \right\} r dr. \quad (33)$$

Заустављајући се само на првом члану реда (32), изједначењем максималних вредности енергија, (33), добија се најнижа кружна фреквенција

$$\rho h \pi \omega^2 \frac{C_1^2 a^2}{10} = \pi \mathfrak{D} \frac{32 C_1^2}{3 a^2}; \quad \omega = \sqrt{\frac{320 \cdot \mathfrak{D}}{3 \rho h a^4}} = \frac{10,33}{a^2} \sqrt{\frac{\mathfrak{D}}{\rho h}}.$$

Ако се узму два члана реда (32), онда се добија услов:

$$\frac{\partial}{\partial C_i} \left[\frac{32}{3 a^2} (C_1^2 + \frac{3}{2} C_1 C_2 + \frac{9}{10} C_2^2) - \frac{\beta}{a^2} (1/_{10} C_1^2 + 1/_{6} C_1 C_2 + 1/_{14} C_2^2) \right] = 0$$

где је

$$\beta = \rho h a^4 \omega^2 / \mathfrak{D}.$$

Он се своди на две алгебарске једначине

$$C_1 ({}^{64}/_3 - 1/_{5} \beta) + C_2 (16 - 1/_{6} \beta) = 0;$$

$$C_1 (16 - 1/_{6} \beta) + C_2 ({}^{96}/_5 - 1/_{7} \beta) = 0,$$

па су фреквентна једначина и њени корени

$$\beta^2 - 1958,4 \beta + 193 536 = 0; \quad \beta_1 = 104,3; \quad \beta_2 = 1854,$$

односно кружне фреквенције

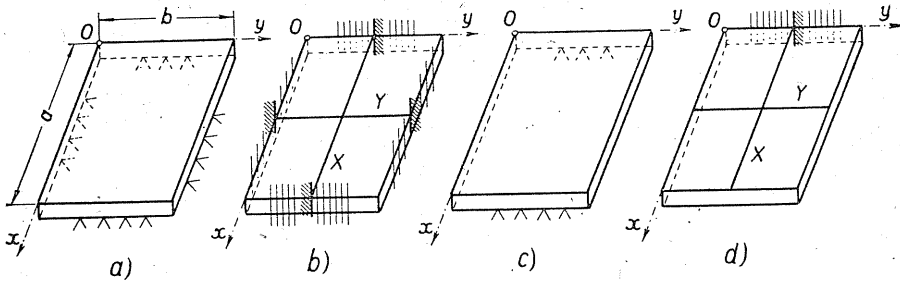
$$\omega_{01} = \frac{10,21}{a^2} \sqrt{\frac{\mathfrak{D}}{\rho h}}; \quad \omega_{02} = \frac{43,04}{a^2} \sqrt{\frac{\mathfrak{D}}{\rho h}}.$$

Тачније вредности се добијају из таблице 20.2. те је

$$\omega_{nm} = \frac{k_{nm}^2 a^2}{a^2} \sqrt{\frac{\mathfrak{D}}{\rho h}}; \quad \omega_{01} = \frac{10,215}{a^2} \sqrt{\frac{\mathfrak{D}}{\rho h}}; \quad \omega_{02} = \frac{39,771}{a^2} \sqrt{\frac{\mathfrak{D}}{\rho h}},$$

јер су $k_{01} a = 3,1961$; $k_{02} a = 6,3064$.

20.3. Правоугаона плоча. — 20.3.1. Слободне осцилације. — Ако је правоугаона плоча, ивица a и b , слободно ослоњена, (сл. 20.2. а),



Сл. 20.2.—Гранични услови за слободно ослоњену и уклештену плочу

гранични услови (20) постају:

$$\text{за } x = 0; \quad x = a; \quad w_0 = 0; \quad M'_x = \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0; \quad (34)$$

$$\text{за } y = 0; \quad y = b; \quad w_0 = 0; \quad M'_y = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0.$$

Ти су услови задовољени када се функција $W(x, y)$ узме у облику производа функција

$$W(x, y) = \sin(m\pi/a)x \sin(n\pi/b)y; \quad m = 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots, \quad (35);$$

који смо имали и код правоугаоне мембране. Ако се ова вредност унесе у другу једначину (16) добија се

$$(\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4)W - k^4 W = 0; \quad \alpha = m\pi/a; \quad \beta = n\pi/b;$$

па је фреквентна једначина

$$k^2_{mn} = \pi^2 [(m^2/a^2) + (n^2/b^2)] \quad (36)$$

и кружна фреквенција

$$\omega_{mn} = \pi^2 [(m^2/a^2) + (n^2/b^2)] \sqrt{\mathfrak{D}/\rho h}. \quad (37)$$

Према (15) решење је облика

$$w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \left[A_{mn} \cos \omega_{mn} t + B_{mn} \sin \omega_{mn} t \right], \quad (38)$$

где су A и B константе које треба одредити из почетних услова кретања.

Уопште, кретање представљено законом (38) није периодичко; само ако је однос страна a/b рационалан број ($a/b=p/q$, где су p и q цели бројеви), тада је периодичко, на пример, код квадратне плоче.

Чворне линије се добијају из услова $W=XY=0$, те су $W=\sin(\pi/a)x \sin(\pi/b)y$; $W=\sin(2\pi/a)x \sin(2\pi/b)y$; $W=\sin(\pi/a)x \sin(2\pi/b)y$.

У случају пошћуно уклеишене плоче на свима ивицама, (сл. 20.2.b), најбоље је применити *Ritz*-ову методу. Функција облика

$$W=256 C \left(\frac{x^4}{a^4} - 2 \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^2}{a^2} \right) \left(\frac{y^4}{b^4} - 2 \frac{y^3}{b^3} + \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (39)$$

задовољава граничне услове (19) да су дуж контура

$$\text{за } x=0 \text{ и } x=a; W=0; \frac{\partial W}{\partial x}=0,$$

$$\text{за } y=0 \text{ и } y=b; W=0; \frac{\partial W}{\partial y}=0. \quad (40)$$

Како су интеграл

$$\int \int_{(A)} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 dx dy = 83,22 \frac{b}{a^3} C^2; \quad \int \int_{(A)} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 dx dy = 83,22 \frac{a}{b^3} C^2;$$

$$\int \int_{(A)} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} dx dy = \int \int_{(A)} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy = 23,78 \frac{C^2}{ab};$$

$$\int \int_{(A)} W^2 dx dy = 0,1651 ab C^2,$$

то изједначењем максималних енергија (22) и (23),

$$\frac{\rho}{2} h \omega^2 \cdot 0,1651 C^2 = \frac{\mathfrak{D}}{2} C^2 \left[83,22 \left(\frac{b}{a^3} + \frac{a}{b^3} \right) + \frac{47,56}{ab} \right],$$

следи да је најнижа кружна фреквенција

$$\omega_{11} = \frac{22,45}{ab} \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} + 0,571} \sqrt{\frac{\mathfrak{D}}{\rho h}}. \quad (41)$$

За случај квадратне плоче ($a=b$) најнижа кружна фреквенција биће

$$\omega_{11} = \frac{35,986}{a^2} \sqrt{\frac{\mathfrak{D}}{\rho h}}. \quad (42)$$

Из (37) следи да је за $a = b$ најнижа кружна фреквенција слободно ослоњене квадратне плоче

$$\omega_{11} = \frac{19,739}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (43)$$

Упоредјујући ове две вредности види се да је најнижа кружна фреквенција уклештене квадратне плоче за 82,3% већа од најниже фреквенције исте плоче када је она слободно ослоњена. Укљештење, дакле, повећава брзину осциловања плоче.

За уклештену квадратну плочу Iguchi* је одредио ове вредности:

$\frac{\omega a^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{h\rho}{D}}$	3,646	7,437	10,965	13,393	16,717	24,631
---	-------	-------	--------	--------	--------	--------

а за слободну квадратну плочу Ritz:**

$k_{mn} a^2$	24,68	52,80	71,46
--------------	-------	-------	-------

Ако је правоугаона плоча слободно ослоњена по двама супротним ивицама ($x=0$) и ($x=a$), док су на осталим двама ивицама произвољни гранични услови (сл. 20.2. c), гранични су услови

$$\text{за } x=0 \text{ и } x=a \text{ су } W=0 \text{ и } \partial^2 W/\partial x^2=0.$$

Решење једначине (16) претпоставићемо у облику реда

$$W(x, y) = \sum_m Y_m(y) \cdot \sin(m\pi/a)x, \quad (44)$$

где је $Y(y)$ непозната функција. Уношењем у (16) ова се једначина своди на обичну диференцијалну једначину четвртог реда са константним коефицијентима

$$Y^{IV} - 2(m\pi/a)Y'' + [(m\pi/a)^4 - k^4]Y = 0. \quad (45)$$

* Iguchi S. — Die Biegeschwingungen der vierseitig eingespannten rechteckigen Platte . Ing. Arch. 1937.

** W. Ritz. — Ann. Physik. Vol. 28., p. 737, 444 (1909).

S. Tomatika — Phil. Mag. ser. 7, Vol. 21. (1936).

Њена карактеристична једначина је облика

$$\lambda^4 - 2\alpha^2 \lambda^2 + (\alpha^4 - k^4) = u^2 - 2\alpha^2 u + (\alpha^4 - k^4) = 0; \quad \alpha = m\pi/a,$$

са коренима

$$\lambda_1 = -\lambda_3 = [\alpha^2 - k^2]^{1/2}; \quad \lambda_2 = -\lambda_4 = (\alpha^2 + k^2)^{1/2}.$$

Непозната функција је облика

$$Y_m(y) = A_m \operatorname{Sh} \lambda_1 y + B_m \operatorname{Ch} \lambda_1 y + C_m \operatorname{Sh} \lambda_2 y + D_m \operatorname{Ch} \lambda_2 y. \quad (46)$$

Интеграционе константе A_m , B_m , C_m и D_m одређују се из граничних услова на другим двама ивицама.

На пример, када је плоча ивицом $y=0$ слободно ослоњена а ивицом $y=b$ уклештена, услови су:

$$\text{за } y=0 \text{ је } W=0 \text{ и } M'_x=0 \text{ то јест } \partial^2 W/\partial y^2=0;$$

$$\text{за } y=b \text{ је } W=0 \text{ и } \partial W/\partial y=0,$$

те су константе $A=C=0$. Друге две једначине су

$$B \operatorname{Sh} \lambda_1 b + D \operatorname{Sh} \lambda_2 b = 0; \quad \lambda_1 B \operatorname{Ch} \lambda_1 b + \lambda_2 D \operatorname{Ch} \lambda_2 b = 0.$$

Како ове константе не могу једновремено бити једнаке нули, јер не би било осциловања, то мора бити задовољен услов

$$\frac{1}{\lambda_1} \operatorname{Th} \lambda_1 b = \frac{1}{\lambda_2} \operatorname{Th} \lambda_2 b, \quad (47)$$

који представља фреквентну једначину.

Код осцилација плоча Ritz је за функције φ_k узео нормалне функције хомогених греди.

На пример, ако је плоча уклештена само по једној ивици ($y=0$) а слободна на осталим странама, узећемо за нормалне функције функцију код конзоле (X) и функцију за слободну греду $Y=1$ (сл. 20.2.d.), па је због $Y'=Y''=0$ и $W=X''Y=X''$, те су екстремне вредности енергија

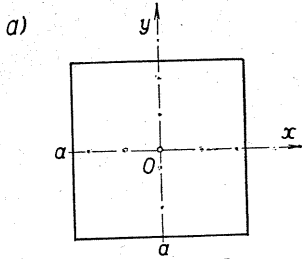
$$E_{k\max} = 0,5 \rho h \omega^2 \int_0^a \int_0^b X^2 Y^2 dx dy = 1,8556 \rho h \omega^2 ab/2;$$

$$E_{p\max} = 0,5 \mathfrak{D} \int \int X''^2 Y dx dy = 22,933 D b/2a^3,$$

где је $X=A \mathbf{S}(\xi)+B \mathbf{T}(\xi)+C \mathbf{U}(\xi)+D \mathbf{V}(\xi)$; $\xi=kx$. Изједначењем енергија добија се најнижа кружна фреквенција $\omega_1 = 3,52 a^{-2} [\mathfrak{D}/\rho h]^{1/2}$.

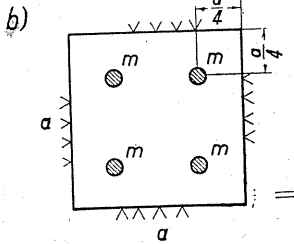
Дакле, дужина плоче (b) не ушће на кружну фреквенцију плоче.

Код пошћуно слободне квадратне плоче Rayleigh је узео за чворну линију функцију $W = W_{22} = xy$. Према томе су екстремне вредности енергија (сл. 20.3.a):



$$E_{kmax} = 2 \frac{\rho h \omega^2}{2} \int_0^a \int_0^a x^2 y^2 dx dy =$$

$$= \frac{\rho h \omega^2}{2} \cdot \frac{a^6}{144}; \quad (48)$$

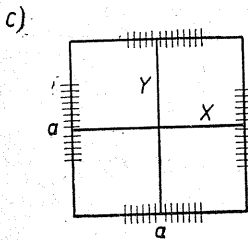


$$E_{pmax} = 2(1-\mu) \frac{\mathfrak{D}}{2} \int_0^a \int_0^a dx dy = \mathfrak{D} (1-\mu) a^2,$$

па је најнижа кружна фреквенција

$$\omega = 12 a^{-2} [2 \mathfrak{D} (1-\mu) / \rho h]^{1/2};$$

$\omega = 14,64 K$ за $\mu = 0,25$ и $\omega = 13,8 K$ за $\mu = 1/3$, где је $K = a^{-2} [\mathfrak{D} / \rho h]^{1/2}$. Међутим, Ritz је нашао вредност $\omega = 14,10 K$.



Када дејствују и концентрисане масе може се применити метода енергије или Ritz-ова метода. У овоме су случају (сл. 20.3.b) енергије:

$$E_{kmax} = \frac{\rho h \omega^2}{2} \iint W^2 dx dy + \frac{m \omega^2}{2} \sum W_i^2;$$

$$E_{pmax} = \frac{\mathfrak{D}}{2} \iint (\Delta W)^2 dx dy. \quad (49)$$

Сл. 20.3. — Квадратна плоча

Функцију ћемо узети у облику

$$W(x, y) = X(x) Y(y) = \sin \alpha x \cdot \sin \alpha y; \quad \alpha = \pi/a,$$

те из услова једнаких екстремних вредности енергија следи

$$E_{kmax} = E_{pmax}; \quad \frac{\rho h \omega^2 a^2}{8} + \frac{m \omega^2}{2} \cdot \frac{4 \cdot 1}{4} = \frac{\mathfrak{D} \pi^4}{2 a^2};$$

те је најнижа кружна фреквенција

$$\omega = 2 \frac{\pi^2}{a^2} \left[\frac{\mathfrak{D}}{\rho h + (4m/a^2)} \right]^{1/2}. \quad (50)$$

Код потпуно уклештене плоче (сл. 20.2. b) узећемо нормалне функције обострано уклештених греда

$$X = A_1 \mathbf{S}(\xi) + B_1 \mathbf{T}(\xi) + C_1 \mathbf{U}(\xi) + D_1 \mathbf{V}(\xi);$$

$$Y = A_2 \mathbf{S}(\eta) + B_2 \mathbf{T}(\eta) + C_2 \mathbf{U}(\eta) + D_2 \mathbf{V}(\eta); \quad \xi = k_1 x; \quad \eta = k_2 y,$$

па пошто је Gauss-ова кривина једнака нули

$$(\partial^2 W / \partial x^2) \cdot (\partial^2 W / \partial y^2) - \partial^2 W / \partial x \partial y = 0,$$

биће екстремне вредности енергија:

$$E_{kmax} = 0,5 \rho h \omega^2 \int_0^a \int_0^b X^2 Y^2 dx dy;$$

$$E_{pmax} = 0,5 \mathfrak{D} \int_0^a \int_0^b (\Delta W)^2 dx dy.$$

Овде су

$$W = XY; \quad W'' = X'' Y + X Y''; \quad (\Delta W)^2 = X''^2 Y + 2 X X'' Y'' + X^2 Y''^2,$$

а пошто су интеграли

$$\int_0^a X^2 dx = 1,0359a; \quad \int_0^b Y^2 dy = 1,0359b;$$

$$\int_0^a X'' X dx = -12,775/a; \quad \int_0^a X''^2 dx = 518,52/a^3,$$

биће

$$E_{kmax} = E_{pmax}; \quad \omega^2 = \frac{\mathfrak{D}}{\rho h} \left[\frac{518,52}{1,0359} \left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} \right) + 2 \left(\frac{12,775}{1,0359} \right)^2 \frac{1}{a^2 b^2} \right].$$

За квадрaтну уклештeну плочу (сл. 20.3.с) биће најнижа кружна фреквенција

$$\omega = 36 a^{-2} [\mathfrak{D}/\rho h]^{1/2}.$$

При примени Галеркинове методе имаћемо

$$W = \sum C_k \varphi_k; \quad \delta W = \sum \varphi_k \delta C_k;$$

$$\iint (\mathfrak{D} \Delta \Delta W - \rho h \omega^2 W) \delta W. dx dy = 0, \quad (51)$$

па се добија систем алгебарских једначина и детерминанта

$$\Delta(\lambda) = |c_{ik} - \lambda a_{ik}| = 0; \quad \lambda = \rho h \omega^2 / \mathfrak{D}, \quad (52)$$

са коефицијентима

$$a_{ik} = \iint \varphi_i \varphi_k \, dx \, dy; \quad (53a)$$

$$c_{ik} = \iint \varphi_i (\Delta \Delta \varphi_k) \, dx \, dy. \quad (53b)$$

20.3.2. Принудне осцилације. У случају принудних осцилација потпуно слободно ослоњене плоче користићемо генералисане координате

$$w_0 = q_{mn} \sin(m\pi/a)x \sin(n\pi/b)y, \quad (54)$$

те су енергије, (22) и (23),

$$E_k = \frac{\rho a b h}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_{mn}^2;$$

$$E_p = \frac{3 a b \pi^4 \mathfrak{D}}{2 h^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) q_{mn}^2 \quad (55)$$

па Лагранжеве једначине дају једначину

$$\ddot{q}_{mn} + \frac{12}{h^3} \omega_{mn}^2 q_{mn} = \frac{4}{\rho a b h} Q_{mn}^*, \quad (56)$$

где је Q_{mn}^* генералисана поремећајна сила за координату q_{mn} која се одређује по закону рада.

За случај концентрисаних сила F_v , које дејствују у тачкама N_v (ξ_v, η_v), управно на средњу раван плоче, добијамо као и код мембране, генералисану силу

$$Q_{mn}^* = \sum_{v=1}^p F_v \sin \frac{m\pi}{a} \xi_v \sin \frac{n\pi}{a} \eta_v = \varphi(t), \quad (57)$$

па је партикуларно решење — режим принудног кретања —

$$q_{mn}^{(p)} = \frac{4}{\rho a b h \omega_{mn}} \int_0^t Q_{mn}^*(\tau) \sin \omega_{mn}(t-\tau) \, d\tau. \quad (58)$$

Нека је плоча у тренутку $t=0$ била у равнотежи и изложена дејству континуалног променљивог оптерећења $p=p_0 \sin \Omega t$, тада је генералисана сила

$$Q_{mn}^* = \int_0^b dy \int_0^a p \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y dx =$$

$$= \frac{p_0 ab \sin \Omega t}{\pi^2 mn} (1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & \text{(за } m \text{ или } n \\ & \text{парно)} \\ 4 p_0 ab \sin \Omega t & \text{(за } m \text{ и } n \\ & \text{непарно)} \\ \pi^2 mn & \end{cases}$$

па је режим принудног кретања

$$q_{mn}^{(p)} = \frac{16 p_0}{\rho h \pi^2 m n \omega_{mn} (\omega_{mn}^2 - \Omega^2)} \left[\omega_{mn} \sin \Omega t - \Omega \sin \omega_{mn} t \right].$$

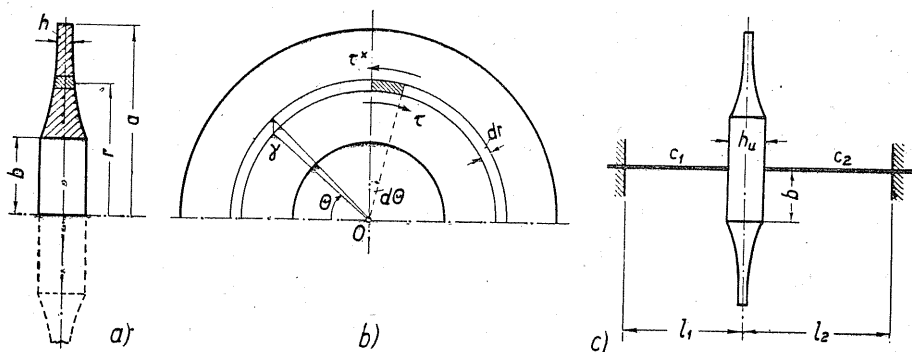
Уносећи ово у (54) добија се

$$w_0 = \frac{16 p_0}{\pi^2 \rho h} \left[\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{mn (\omega_{mn}^2 - \Omega^2)} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \right] \sin \Omega t -$$

$$- \frac{16 p_0 \Omega}{\pi^4 \sqrt{\rho h} \mathfrak{D}} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) (\omega_{mn}^2 - \Omega^2)} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \omega_{mn} t.$$

Буде ли у неком члану ових збирова кружна фреквенција $\Omega = \omega_{mn}$ тада наступа резонанса, па је период поремећајне силе $T_p = 2\pi/\Omega$ једнак периоду једног нормалног облика осцилација.

20.4. Торзијске (увртне) осцилације плоче променљиве дебљине*. — Нека се дебљина плоче h мења у зависности од r по за-



Сл. 20.4. — Торзијске осцилације плоче променљиве дебљине

кону $h=f(r)$, (сл. 20.4.a), онда је момент инерције елементарног прстена за осу Oz :

$$dJ_z = \rho \cdot 2 r \pi \cdot h \cdot dr \cdot r^2 = 2 \pi \rho h r^3 \cdot dr. \quad (59)$$

* Grammel R. — Drilling und Drillingsschwingungen von Scheiben. Z. M. A. A., 1925.

На унутрашњој страни прстена, (сл. 20.4.b), јавиће се тангенцијални напон коме одговара торзијски (увртни) момент

$$\mathfrak{M}_t = \int \int r \, dA = \tau \int \int r \cdot hr \cdot d\theta = 2\pi \tau h r^2;$$

на спољашњој страни прстена дејствује такође увртни момент

$$\mathfrak{M}_t^* = \mathfrak{M}_t + \frac{\partial \mathfrak{M}_t}{\partial r} dr,$$

па је основна динамичка једначина обртања прстена

$$dJ_z \ddot{\theta} = \mathfrak{M}_t^* - \mathfrak{M}_t = \frac{\partial \mathfrak{M}_t}{\partial r} dr = 2\pi \frac{r}{\partial r} (\tau h r^2) dr. \quad (60)$$

С обзиром да постоји померање само у циркуларном правцу ($v=r\dot{\theta}$) то су клизање и тангенцијални напон,

$$\gamma = \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial \theta} = r \frac{\partial \theta}{\partial r}; \quad \tau = \tau_{xy} = G \gamma_{xy} = G r \frac{\partial \theta}{\partial r}.$$

Уносећи ову вредност у (60), с обзиром на (59), добија се шаласна једначина торзијских осцилација плоче

$$\rho h r^3 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = G \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 h \frac{\partial \theta}{\partial r} \right). \quad (61)$$

Решење ове таласне једначине тражићемо у облику производа функција $R(r)$ и $T(t)$, те је за *стојеће шаласе*

$$\theta(r, t) = R(r) \cdot T(t) = R(r) \cdot \sin(\omega t + \alpha). \quad (62)$$

Уносећи ово у једначину (61) добија се диференцијална једначина

$$\frac{d}{dr} \left(r^3 h \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^3 h R = 0, \quad (63)$$

са уведеном сменом

$$k^2 = \rho \omega^2 / G.$$

У пракси је важан случај промене дебљине плоче по закону

$$h = C/r^n, \quad C = \text{const}, \quad (64a)$$

те се у томе случају, због $h' = -n h/r$, једначина (52) своди на Беселову диференцијалну једначину

$$R'' + \frac{3-n}{r} R' + k^2 R = 0. \quad (64b)$$

Њено решење је облика

$$R = r^\nu [A J_\nu(kr) + B N_\nu(kr)]; \quad \nu = 1/2 p - 1 \quad (65)$$

где су J_ν, N_ν Беселове и Нојманове функције ν -ог реда.

За различите вредности p решења су облика:

$$\begin{aligned} p=0 & \quad R = \frac{1}{r} [A J_1(kr) + B N_1(kr)]; \\ p=1 & \quad R = \frac{1}{r} [A \cos kr + B \sin kr]; \\ p=2 & \quad R = A J_0(kr) + B N_0(kr); \\ p=3 & \quad R = A \cos kr + B \sin kr, \\ p=4 & \quad R = r [(A J_1(kr) + B N_1(kr))]. \end{aligned} \quad (66)$$

Ова решења морају задовољити граничне услове.

20.5. Осцилације обртних дискова. — Код диска насађеног на вратилу, које се обрће угаоном брзином Ω , разликујемо три врсте осцилација: трансверзалне (осцилације савијања), торзијске и издужне.

Трансверзалне (савојне) осцилације. — Према Southwell-у* кружна фреквенција обртног диска може се одредити обрасцем $\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_s^2$ где је ω_0 кружна фреквенција трансверзалних осцилација истог диска када нема обртања; ω_s је кружна фреквенција услед самог обртања. Прва фреквенција се одређује према чл. 20.2, а друга се може одредити помоћу методе енергије, ако је дебљина диска мала према његовом пречнику. Међутим, за случај диска једнаке дебљине може се та фреквенција одредити и на начин који су дали Lamb и Southwell.

Означимо са w компоненту померања у аксијалном правцу, тада су нагиби тангенте на еластичну површину плоче у радијалном и циркуларном правцу и њихове промене

$$\frac{\partial w}{\partial r}; \quad \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} dr; \quad \frac{\partial w}{r \partial \varphi}; \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) d\varphi.$$

Ако се из диска исече клин, површине $r dr d\varphi$, (сл. 20.5.a), онда су силе које дејствују на бочним странама у оба правца:

$$F_r = \sigma_r h d\varphi; \quad F_r^* = \sigma_r r h d\varphi + d(\sigma_\Omega r h d\varphi); \quad (67)$$

$$F_\varphi = \sigma_\varphi h dr; \quad F_\varphi^* = \sigma_\varphi h dr + d(\sigma_\varphi h dr),$$

* Lamb, H. — R. V. Southwell — The Vibration of a Spinning Disk. P. R. S., (1921).

па су њихове пројекције у аксијалном правцу

$$Z_r = \sigma_r r h d\varphi \frac{\partial w}{\partial r}; \quad Z_r^* = Z_r + \frac{\partial}{\partial r} (Z_r) dr;$$

$$Z_\varphi = \sigma_\varphi h dr \frac{\partial w}{r \partial \varphi}; \quad Z_\varphi^* = Z_\varphi + \sigma_\varphi h dr \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right) d\varphi.$$

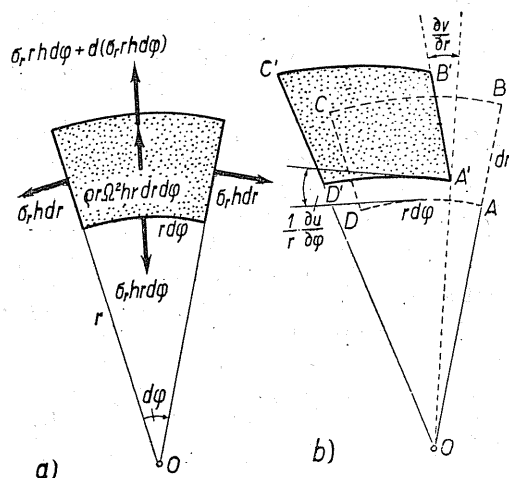
Стога је основна динамичка једначина :

$$\rho hr dr d\varphi \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -Z_r + Z_r^* - Z_\varphi + Z_\varphi^*. \quad (68)$$

При $h = \text{const}$ шаласна једначина ових осцилација постаје :

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sigma_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\sigma_\varphi}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}. \quad (69)$$

У њој се јављају као непознате величине нормални напони у радијалном и циркуларном правцу (σ_r и σ_φ).



Сл. 20.5. — Радијални и циркуларни напони код диска

С обзиром на дејство центрифугалне силе при обртању, основна динамичка једначина за радијални правац је :

$$d(\sigma_r r h d\varphi) - \sigma_\varphi h dr d\varphi + \rho \Omega^2 r^2 h dr d\varphi = 0,$$

односно

$$\frac{r}{h} \frac{d}{dr} (\sigma_r h) + \sigma_r - \sigma_\varphi + \rho \Omega^2 r^2 = 0. \quad (70)$$

Означимо са u и v поларне координате вектора померања. Ако је u померање стране AD елемента $ABCD$ (сл. 20.5.b), онда је $[u + (\partial u / \partial r)] dr$ померање елемента BC , па је радијална дилатација $\epsilon_r = \partial u / \partial r$. На циркуларну дилатацију утичу оба компонентна померања. Услед радијалног померања дужина лука \widehat{AD} мења се од $r d\varphi$ на $(r + u) d\varphi$, па је дилатација $\epsilon'_\varphi = [d\widehat{AD} - \widehat{AD}] / \widehat{AD} = u/r$. Радијална померања страна AB и DC биће v и $v + (\partial v / \partial \varphi) d\varphi$, па је дилатацији $\epsilon''_\varphi = (\partial v / \partial \varphi) d\varphi / r d\varphi = (1/r) (\partial v / \partial \varphi)$. Према томе су компонентне дилатације

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \epsilon_\varphi = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}. \quad (71)$$

Елемент $ABCD$ после деформације прећи ће у положај $A'B'C'D'$. Страна AD заокренуће се за угао $(1/r) (\partial u / \partial \varphi)$, а страна AB за угао $\partial v / \partial r$, у коме је садржан угао обртања v/r и угао деформације, тако да је клизање

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{u}{r}. \quad (72)$$

Веза између напона и дилатација за ова два управна правца дата је овим једначинама

$$\epsilon_r = (\sigma_r - \mu \sigma_\varphi) / E; \quad \epsilon_\varphi = (\sigma_\varphi - \mu \sigma_r) / E. \quad (73)$$

Елиминисањем померања u из (71), јер је за овај случај $v = 0$, добија се веза између компонентних напона

$$r \left(\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial r} - \mu \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \right) + (1 + \mu) (\sigma_\varphi - \sigma_r) = 0. \quad (74)$$

Када је дебљина диска константна ($h = \text{const}$) тада једначине (70) и (74) постају

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\varphi = -\rho \Omega^2 r^2; \quad (75)$$

$$r \left(\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial r} - \mu \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \right) + (1 + \mu) (\sigma_\varphi - \sigma_r) = 0.$$

Њихова су решења

$$\sigma_r = A + B r^{-2} - \alpha \Omega^2 r^2;$$

$$\sigma_\varphi = A - B r^{-2} - \beta \Omega^2 r^2,$$

где су A и B константе и

$$\alpha = \frac{1}{8} \rho (3 + \mu);$$

$$\beta = \frac{1}{8} \rho (1 + 3 \mu).$$

Како је за $r=0$, $\sigma_\varphi=0$ то је $B=0$, и за $r=a$, $\sigma_r=0$ то је $A = \alpha \Omega^2 a^2$, па су компонентни напони

$$\sigma_r = \alpha \Omega^2 (a^2 - r^2);$$

$$\sigma_\varphi = \Omega^2 (\alpha a^2 - \beta r^2), \quad (76)$$

те таласна једначина (69) постаје

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\alpha \Omega^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r (a^2 - r^2) \frac{\partial w}{\partial r} \right] + \frac{\Omega^2}{r^2} \left[\alpha a^2 - \beta r^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}. \quad (77)$$

За *штојеће* таласе њено решење ћемо претпоставити у овом облику

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_m \left(\frac{r}{a} \right)^m \cos n \varphi \cos \omega_s t, \quad (78)$$

где су m и n цели бројеви који представљају бројеве чворних пречника (n), односно чворних кругова (m). Када се унесе (78) у (77) добијају се померања и кружна фреквенција осцилација, коју изражавамо следећим односом

$$\rho (\omega_s / \Omega) = \alpha [(2m+n)^2 + 2(2m+n)] - \beta n^2. \quad (79)$$

21. ОСНОВИ НЕЛИНЕАРНИХ ОСЦИЛАЦИЈА

У првом делу проучили смо осцилације система са једним степеном слободе претпостављајући да је деформација опруге *линеарно зависна од дејства силе*, то јест да је реституциона сила била $-sx$, што значи да је деформација била у складу са Хуковим законом (сл. 21.1. а). Исто смо тако углавном посматрали и амортизоване осцилације када је отпор сразмеран првом степену брзине. У овим случајевима се проблем осцилација дао математички приказати *хомогеном или нехомогеном диференцијалном једначином другог реда са константним коефицијентима*. Међутим, у пракси се срећу и случајеви са нелинеарним коефицијентима, као код математичког и физичког клатна коначне амплитуде, где је карактеристика опруге крива — *синусна линија*. У другим случајевима су криве линије параболе вишег реда.

Док су се у случају линеарних осцилација могла наћи тачна решења дотле се у случају нелинеарних осцилација могу срести интеграбилни и неинтеграбилни случајеви. Општа метода рада је интегралне помоћу редова, односно нумеричка и графичка квадратура.

21.1. Слободне нелинеарне осцилације. — У случају слободне нелинеарне осцилације основна динамичка једначина биће

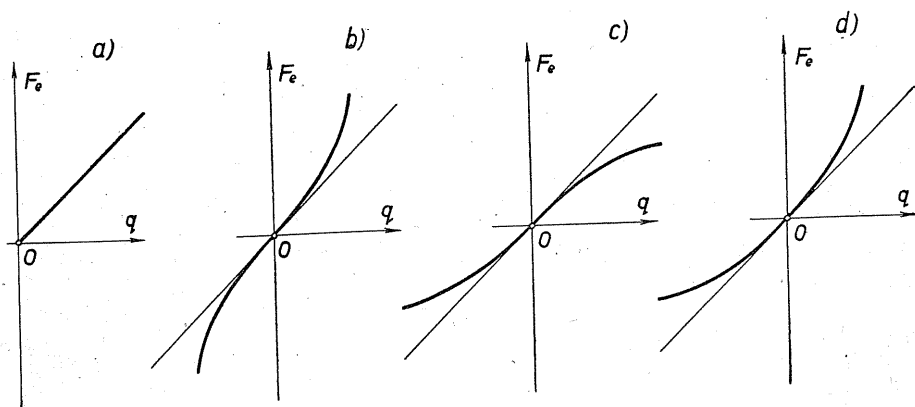
$$a\ddot{q} + F_e(q) = 0, \quad (1)$$

где је a *инерциони коефицијент* а $F_e(q)$ *реституциона сила* која зависи од генерализане координате q . Ова се једначина може написати у облику

$$\ddot{q} + k^2 f(q) = 0, \quad (2)$$

где је k *коефицијент пропорционалности* такве димензије да једначина буде димензионо задовољена, на пример ако $f(q)$ има димензију коор-

динате q онда k^2 има димензију $[T^{-2}]$. У случају да је $f(q) = q$, биће k једнако кружној фреквенцији слободне хармонијске линеарне осцилације (ω); у сваком другом случају разликује се од ње ($k \neq \omega$). Сила $-F_e(q)$ представља релативну (еластичну) силу осцилатора а њен извод по деформацији dF_e/dq крутост опруге овог осцилатора. Код хармонијског осцилатора она је линеарна, међутим, када се при повећању деформације повећава крутост она је *јака* (сл. 21.1. *b*) па је и осциловање *јако*. Обратно, када се при повећању деформације снижава крутост онда се каже да је *слаба*, па је и осциловање *слабо* („меко“). Крутост може бити *симетрична* (сл. 21.1. *a, b, c*) и *несиметрична* у односу на равнотежни положај (сл. 21.1. *d*).



Сл. 21.1. — Крутости опруга нелинеарних система:
 а) линеарна, б) јака, с) мека, д) несиметрична

Једначина (2) раздваја променљиве па се множењем са $dq = \dot{q} dt$ може извести прва квадратура

$$\dot{q}^2 = v^2 = -k^2 \int_{q_0}^q 2f(\xi) d\xi, \quad (3)$$

где је q_0 амплитуда за коју је $v=0$ а ξ је нова променљива. Из једначине (3) следи да је први интеграл

$$\dot{q}(q) = v(q) = \mp k \sqrt{2 \int_{q^-}^{q_0} f(\xi) d\xi}. \quad (3a)$$

Поновном квадратуром, због $v = \dot{q}$, добијамо да је

$$f(q) = \int_0^q \frac{d\eta}{v(\eta)} = \frac{1}{k\sqrt{2}} \int_0^q \frac{d\eta}{\sqrt{\int_{\eta}^{q_0} f(\xi) d\xi}}, \quad (4)$$

где је узето да је $t=0$ када је и $q=0$, а η је нова променљива. Ако се време рачуна од тренутка $t=0$ када је $q=q_0$, онда је

$$t(q) = - \int_{q_0}^q \frac{d\eta}{k\sqrt{2} \sqrt{\int_{\eta}^{q_0} f(\xi) d\xi}}. \quad (4a)$$

Знак минус показује да координата q опада када време t расте. Како се у овом случају добија зависност $t(q)$ то се инверзијом добија закон кретања $q = q(t)$.

Када је функција $f(q)$ дата аналитичким изразом, што је чест случај, тада се интеграл под кореном у једначини (4) може лако израчунати, јер је

$$\int_{\eta}^{q_0} f(\xi) d\xi = J(q_0) - J(\eta), \quad (5)$$

па је време

$$t(q) = \frac{1}{k\sqrt{2}} \int_0^q \frac{d\eta}{\sqrt{J(q_0) - J(\eta)}}. \quad (6)$$

С обзиром на могућност интегралења интеграла (5) разликују се интегрални и неинтегрални случајеви. У овом другом случају примењују се или нумеричке или графичке методе.

На пример, код праволинијског хармонијског осциловања је $f(q) = q = x$, па је $k = \omega = \sqrt{c/m}$. Тада, према (5), добијамо

$$\int_{\eta}^{x_0} \xi d\xi = 1/2 (x_0^2 - \eta^2),$$

па је, с обзиром на (6), закон кретања

$$t = \frac{1}{\omega} \int_0^x \frac{d\eta}{\sqrt{x_0^2 - \eta^2}} = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{x}{x_0},$$

односно $x = x_0 \sin \omega t$, како смо добили и раније.

21.1.1. Синусна карактеристика (клатна). — Код математичког и физичког клатна, (чл. 2.1. и 2.3.), карактеристика је *синусна линија*, коју смо за мале амплитуде заменили тангентом у координатном почетку. Генералисана координата је угао φ , па је, према (6),

$$t = \frac{1}{k\sqrt{2}} \int_0^{\varphi} \frac{d\eta}{\sqrt{\cos \eta - \cos \varphi_0}}, \quad (7)$$

где је $k^2 = g/l$; l је дужина математичког клатна или редукована дужина физичког клатна (l_r). Како је $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2(\alpha/2)$, то се сменама

$$\sin^{1/2} \varphi_0 = \varepsilon; \quad \sin^{1/2} \varphi = \varepsilon \frac{\sin \theta}{\cos \theta},$$

интеграл (7) своди на *нормални елиптички интеграл прве врсте*:

$$t = \frac{1}{k} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1}{k} F(\varepsilon; \theta), \quad (7a)$$

модула ε и амплитуде θ .

Период осцилације је

$$T = \frac{4}{k} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta}} = \frac{4}{k} K(\varepsilon; 1/2\pi); \quad (8)$$

$K(\varepsilon; 1/2\pi)$ је *пошпуни елиптички интеграл прве врсте*, модула ε и амплитуде $1/2\pi$. Период осцилације зависи, дакле, од модула ε

$$T = \frac{2\pi}{k} \left[1 + \frac{1}{4} \varepsilon^2 + \frac{9}{64} \varepsilon^4 + \frac{25}{256} \varepsilon^6 + \dots \right] = f(\varepsilon). \quad (8a)$$

Однос периода T и периода T_0 када је карактеристика права линија (случај малих осцилација) износи

$$T = T_0(1 + \Delta); \quad \Delta = (2/\pi)K - 1 \approx 19 \cdot 10^{-6} (\varphi^0)^2 \quad (9)$$

на су зависности $kT/4$ и Δ од амплитуде φ_0 приказане на сл. 21.2. а.

Закон кретања изражава се помоћу Јакобијеве елиптичке функције*

$$\varphi = 2 \arcsin [\varepsilon \operatorname{sn} kt]. \quad (10)$$

Облици осцилација показани су на сл. 21.2. б.

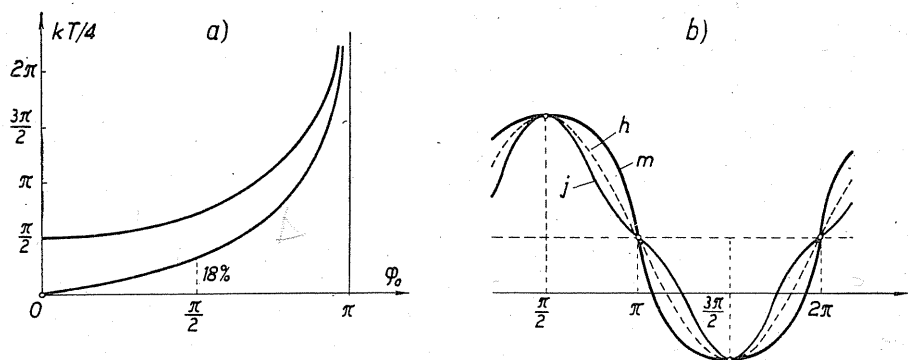
* $kt = F(\varepsilon; \theta) = u, \quad t = f(\theta); \quad \theta = \theta(t) = \operatorname{am} u = \operatorname{am} kt;$
 $\sin \theta = \sin \operatorname{am} kt = \operatorname{sn} kt; \quad \cos \theta = \cos \operatorname{am} kt = \operatorname{cn} kt; \quad \operatorname{dn} kt = (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 kt)^{1/2}.$

21.1.2. Параболичка карактеристика. — У овоме случају су карактеристике дате као параболе вишег реда, те је

$$f(q) = (\text{sign } q) q^{2p}; \quad f(q) = q^{2p+1}, \quad p=0, 1, 2, \dots, \quad (11)$$

па су једначине кретања

$$\ddot{q} + (\text{sign } q) k^2 q^{2p} = 0, \quad \ddot{q} + k^2 q^{2p+1} = 0.$$



Сл. 21.2. — а) Утицај коначних амплитуда на период осцилација физичког клатна,
б) Облици осциловања: j јако, m слабо, h хармонијско

Пошто се кретање посматра само за четвртину периода, то се једначина може написати у облику

$$\ddot{q} + k^2 q^n = 0. \quad (12)$$

Према (6) биће

$$t(q) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{n+1}{2q_0^{n-1}}} \int_0^{q/q_0} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^{n+1}}}, \quad (13)$$

где је уведена смена $\zeta = \eta/q_0$. За $n=0$, $n=1$, $n=2$ и $n=3$ проблем се своди на обичне или елиптичке интеграле.

Период осцилације је

$$T = \frac{4}{k} \frac{1}{\sqrt{q_0^{n-1}}} \left[\sqrt{\frac{n+1}{2}} \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^{n+1}}} \right] = \frac{4}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{q_0^{n-1}}} \Psi(n). \quad (14)$$

Вредности функције $\psi(n)$ и интеграли дати су у табlici 21.1. за вредности од $n=0$ до $n=3$.

Таблица 21.1.

n	0	1	2	3
$t(q)$	$\frac{1}{k} \sqrt{2q_0} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{q}{q_0}}\right)$	$\frac{1}{k} \arcsin \frac{q}{q_0}$	$\frac{1}{k} \sqrt{\frac{3}{2q_0}} \int_0^{q/q_0} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{k q_0} \int_0^{q/q_0} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}}$
$\psi(n)$	$\sqrt{2}$	$\pi/2$	1,714	1,8541

На елиптичке интеграле своди се и случај симетричне карактеристике у односу на координатни почетак (сл. 21.1. b, c). У овоме случају је диференцијална једначина

$$a\ddot{q} + c_1 q + c_2 q^3 = 0, \quad \text{односно} \quad \ddot{q} + k^2(q + \alpha q^3) = 0. \quad (15)$$

Због тога што је

$$J(q) = \int_0^q f(\xi) d\xi = \int_0^q (\xi + \alpha \xi^3) d\xi = \frac{1}{2}(q^2 + \frac{1}{2}\alpha q^4),$$

то је, према (6),

$$\begin{aligned} t(q) &= \frac{1}{k} \int_0^q \frac{d\eta}{\sqrt{(1/2\alpha q_0^4 + q_0^2) - (1/2\alpha \eta^4 + \eta^2)}} = \\ &= \frac{1}{k} \int_0^q \frac{d\eta}{\sqrt{(q_0^2 - \eta^2)[1 + 1/2\alpha(q_0^2 + \eta^2)]}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Уводећи смене $\eta/q_0 = \zeta$, $q/q_0 = z$, $\theta = \alpha q_0^2$, горњи интеграл своди се на елиптички интеграл прве врсте

$$t = \frac{1}{k} \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1+2\theta^{-1}+\zeta^2) \cdot 1/2\theta}}. \quad (16a)$$

У случају општијег параболског закона карактеристике примењује се метода апроксимација, а најзгоднија је Линдштејнова метода.* Нека је диференцијална једначина облика

$$a\ddot{q} + c_1 q + c_2 q^2 + c_3 q^3 + \dots = 0, \quad (17)$$

* Линдстедт, Мемуары С. — Петербургской Акад. Наук, 1883. год.

онда се може написати и овако

$$\ddot{q} + k^2 (q + \alpha_1 q^2 + \alpha_2 q^3 + \dots) = 0, \quad (17a)$$

где су коефицијенти $\alpha = c_{v+1}/c_1$. Уведе ли се нова променљива

$$\tau = tk \sqrt{1+p}, \quad (18)$$

која представља „бездимензионо време,“ а p константу, тада једначина (17a) постаје

$$(1+p) \frac{d^2 q}{d\tau^2} + q = -(\alpha_1 q^2 + \alpha_2 q^3 + \dots). \quad (19)$$

Ако је q_0 највећа амплитуда, за $t = \tau = 0$ и $\dot{q} = dq/d\tau = 0$, онда се померање q може развити у *пошенцијални ред* облика

$$q = q_0 \xi_1(\tau) + q_0^2 \xi_2(\tau) + q_0^3 \xi_3(\tau) + \dots, \quad (20)$$

где су $\xi(\tau)$ функције, које због датих почетних услова задовољавају нове услове

$$\begin{aligned} \xi_1(0) = 1; & \quad \xi_2(0) = 0; & \quad \xi_3(0) = 0; & \dots; & \quad \xi = \frac{d\xi}{d\tau}. \\ \dot{\xi}_1(0) = 0; & \quad \dot{\xi}_2(0) = 0; & \quad \dot{\xi}_3(0) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Да би се добила само *периодичка решења*, узимамо и константу у облику реда

$$p = p_1 q_0 + p_2 q_0^2 + p_3 q_0^3 + \dots \quad (22)$$

Унесемо ли (20) и (22) у (19), тада сравњењем коефицијента уз исте степене од q_0 и с обзиром на (21), следи систем диференцијалних једначина:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \xi_1 &= 0; \\ \ddot{\xi}_2 + \xi_2 &= -p_1 \ddot{\xi}_1 - \alpha_1 \xi_1^2; \\ \ddot{\xi}_3 + \xi_3 &= -p_2 \ddot{\xi}_1 - p_1 \ddot{\xi}_2 - 2\alpha_1 \xi_1 \xi_2 - \alpha_2 \xi_1^3; \\ \ddot{\xi}_4 + \xi_4 &= -p_3 \ddot{\xi}_1 - p_2 \ddot{\xi}_2 - p_1 \ddot{\xi}_3 - \alpha_1 \xi_1^2 \xi_2 - 2\alpha_1 \xi_1 \xi_3 - 3\alpha_2 \xi_1^2 \xi_2 - \alpha_3 \xi_1^4. \end{aligned} \quad (23)$$

Прва једначина има решење $\xi_1 = \cos \tau$. Да би решење ξ_2 било периодичко, то јест да не би било *резонансе*, мора на десној страни друге једначине отпасти члан са $\cos \tau$, те мора бити $p_1 = 0$. Због тога је решење

$$\xi_2 = -1/6 \alpha_1 (3 - 2 \cos \tau - \cos 2\tau),$$

па је трећа диференцијална једначина:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_3 + \xi_3 &= -1/3 \alpha_1^2 + (p_2 + 5/6 \alpha_1^2 - 3/4 \alpha_2) \cos \tau - 1/3 \alpha_1^2 \cos 2\tau - \\ &\quad - (1/4 \alpha_2 + 1/6 \alpha_0^2) \cos 3\tau. \end{aligned}$$

Да би се опет избегла резонанса треба ставити да је вредност израза уз $\cos \tau$ једнака нули, те је константа

$$p_2 = \frac{3}{4} \alpha_2 - \frac{5}{6} \alpha_1^2$$

и решење

$$\xi_3 = -\frac{1}{3} \alpha_1^2 + \left(\frac{29}{144} \alpha_1^2 - \frac{1}{32} \alpha_2\right) \cos \tau + \frac{1}{9} \alpha_1^2 \cos 2 \tau + \\ + \left(\frac{1}{48} \alpha_1^2 + \frac{1}{32} \alpha_2\right) \cos 3 \tau.$$

Уношењем ових решења у (20) добија се закон кретања

$$q = \left\{ -\frac{1}{2} \alpha_1 q_0^2 - \frac{1}{3} \alpha_1^2 q_0^3 + \dots \right\} + \\ + \left\{ q_0 + \frac{1}{3} \alpha_1 q_0^2 + \left(\frac{29}{144} \alpha_1^2 - \frac{1}{32} \alpha_2\right) q_0^3 + \dots \right\} \cos \tau + \\ + \left\{ \frac{1}{6} \alpha_1 q_0^2 + \frac{1}{9} \alpha_1^2 q_0^3 + \dots \right\} \cos 2 \tau + \\ + \left\{ \frac{1}{48} \alpha_1^2 + \frac{1}{32} \alpha_2 + \dots \right\} q_0^3 \cos 3 \tau + \dots \quad (24)$$

Период осцилације је

$$T = 2\pi/k \sqrt{1+p}. \quad (25)$$

За другу апроксимацију, према (22), биће константа

$$p = \left(\frac{3}{4} \alpha_2 - \frac{5}{6} \alpha_1^2\right) q_0^2,$$

па како је мала величина у односу на јединицу добија се приближна вредност периода

$$T \approx 2\pi \left[1 + \left(\frac{5}{12} \alpha_1^2 - \frac{3}{8} \alpha_2\right) q_0^2 \right] / k. \quad (25a)$$

За два карактеристична случаја карактеристика симетричних у односу на почетак и на ординатну осу

$$a \ddot{q} + c_1 q + c_3 q^3 = 0; \quad a \ddot{q} + c_1 q + c_2 q^2 = 0,$$

биће периоди и кружне фреквенције

$$T = 2\pi \left(1 - \frac{3}{8} \alpha_2 q_0^2 \right) / k; \quad T = 2\pi \left(1 + \frac{5}{12} \alpha_1^2 q_0^2 \right) / k; \\ \omega = k \left(1 + \frac{3}{8} \alpha_2 q_0^2 \right); \quad \omega = k \left(1 - \frac{5}{12} \alpha_1^2 q_0^2 \right). \quad (25b)$$

На пример, за математичко клатно биће једначина

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi = \ddot{\varphi} + k^2 \left(\varphi - \frac{1}{6} \varphi^3 + \frac{1}{120} \varphi^5 \pm \dots \right) = 0,$$

те су $k^2 = g/l$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -1/6$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 1/120$, $\tau = 2\pi t/T$, па су период осцилације и закон кретања

$$T \approx 2\pi \left[1 + \frac{1}{10} \alpha_2 q_0^2 \right] / k; \quad \varphi \approx \varphi_0 \cos \tau + \frac{1}{192} \varphi_0^3 (\cos \tau - \cos 3 \tau) + \dots$$

Овом методом можемо решити и друге неинтеграбилне случајеве.

Диференцијална једначина амортизованих осцилација са *ошћором* сразмерним квадрату брзине ($F_w = -b \dot{x}^2 \text{sign } \dot{x}$) при кретању налево ($\dot{x} < 0$) има облик $\ddot{x} - 1/2 \delta \dot{x}^2 + k^2 x = 0$. Почетни услови су: за $t=0$, $x = x_0$, $\dot{x}_0 = 0$. Узимајући смену (18) горња диференцијална једначина постаје

$$(1+p)\ddot{x} + x = 1/2 \delta (1+p) \dot{x}^2 = \alpha (1+p) \dot{x}^2; \quad \dot{x} = dx/d\tau$$

са условима: за $\tau=0$ су $\xi_1=1$, $\dot{\xi}_1=0$, $\xi_i=0$, $\dot{\xi}_i=0$ за $i=2, 3, \dots$. Помоћу (20), за $q=x$ и $q_0=x_0$, и (22), задржавајући се до степена x_0^3 добијамо систем једначина

$$\ddot{\xi}_1 + \xi_1 = 0, \quad \xi_1 = \cos \tau, \quad p_1 = 0, \quad \dot{\xi}_1 = -\sin \tau,$$

$$\ddot{\xi}_2 + \xi_2 = -p_1 \dot{\xi}_1 + \alpha \dot{\xi}_1^2 = \alpha \dot{\xi}_1^2 = +\alpha \sin^2 \tau = 1/2 \alpha (1 - \cos 2\tau),$$

$$\ddot{\xi}_3 + \xi_3 = -p_1 \dot{\xi}_2 + p_1 \alpha \dot{\xi}_1^2 - p_2 \dot{\xi}_1 + 2\alpha \dot{\xi}_1 \dot{\xi}_2 = -p_2 \dot{\xi}_1 + 2\alpha \dot{\xi}_1 \dot{\xi}_2.$$

Према предњем поступку биће:

$$\xi_2 = A_2 \cos \tau + B_2 \sin \tau + 1/2 \alpha + 1/6 \alpha \cos 2\tau = 1/6 \alpha [3 - 4 \cos \tau + \cos 2\tau],$$

$$\ddot{\xi}_3 + \xi_3 = -2/9 \alpha^2 + (1/3 \alpha^2 + p_2) \cos \tau + 2/3 \alpha^2 \cos 2\tau - 1/3 \alpha^2 \cos 3\tau,$$

$$p_2 = -1/3 \alpha^2, \quad \text{?}$$

$$\xi_3 = -2/9 \alpha^2 + 61/72 \alpha^2 \cos \tau - 2/9 \alpha^2 \cos 2\tau + 1/24 \alpha^2 \cos 3\tau,$$

па је

$$x \approx (1/2 \alpha x_0^2 - 2/9 \alpha^2 x_0^3) + (x_0 - 2/3 \alpha x_0^2 + 61/72 \alpha^2 x_0^2) \cos \tau + (1/6 \alpha x_0^2 - 2/9 \alpha^2 x_0^3) \cos 2\tau + 1/24 \alpha^2 x_0^3 \cos 3\tau.$$

За $\tau=\pi$ је $\dot{x}=0$; тада је амплитуда

$$x_1 \approx -x_0 + 4/3 \alpha x_0^2 - 16/9 \alpha^2 x_0^3 + \dots$$

За $\alpha=0$ је $x=x_0 \cos \tau$, $x_1 = -x_0$.

Време првог хода (од $x=x_0$ до $x=x_1$) износи

$$T = \pi/k \sqrt{1+p} = \pi/k \sqrt{1 - 1/3 \alpha^2 x_0^2} \approx \pi (1 + 1/6 \alpha^2 x_0^2)/k.$$

21.2. Принудне нелинеарне осцилације. — У случају просте принудне нелинеарне осцилације без отпорне силе чија је диференцијална једначина

$$a \ddot{q} + F_e(q) = Q(t) = Q \sin \Omega t \quad (26)$$

може се приближно решење одредити помоћу *Duffing-ове методе*.*

* Duffing G. — Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. 1918.

Нека је карактеристика опруге симетрична у односу на координатни почетак, онда је диференцијална једначина

$$a \ddot{q} + c_1 q + c_3 q^3 = Q \sin \Omega t \quad (27a)$$

па је

$$\ddot{q} = h \sin \Omega t - k^2 (q + \alpha_2 q^3), \quad (27b)$$

где је $h = Q/a$.

Ако се решење претпостави у облику

$$q = C \sin \Omega t \quad \frac{dq}{dt} = \Omega C \cos \Omega t \quad (28)$$

онда уношењем у (27b) биће

$$\ddot{q} = [h - k^2 (C + \frac{3}{4} \alpha_2 C^3)] \sin \Omega t + \frac{1}{4} k^2 \alpha_2 C^3 \sin 3 \Omega t. = -C \Omega^2 \sin \Omega t$$

Двоструким интегралењем добија се прва апроксимација

$$q \approx \frac{-1}{\Omega^2} \left[h - k^2 C - \frac{3}{4} k^2 \alpha_2 C^3 \right] \sin \Omega t - \frac{k^2 \alpha_2 C^3}{36 \Omega^2} \sin 3 \Omega t. \quad (29)$$

Изједначењем израза (28) и (29) следи однос између кружне фреквенције принудне силе, амплитуде и кружне фреквенције слободних осцилација

$$(\Omega^2 - k^2) C + h = \frac{3}{4} k^2 \alpha_2 C^3; \quad C = q_0. \quad (30)$$

За $h = 0$ добија се вредност (25b).

Закон кретања је

$$q = C \sin \Omega t - \frac{1}{36} (k/\Omega)^2 \alpha_2 C^3 \sin 3 \Omega t. \quad (31)$$

У случају резонансе амплитуда постаје

$$C = \sqrt[3]{4h/3k^2\alpha_2} \quad (32)$$

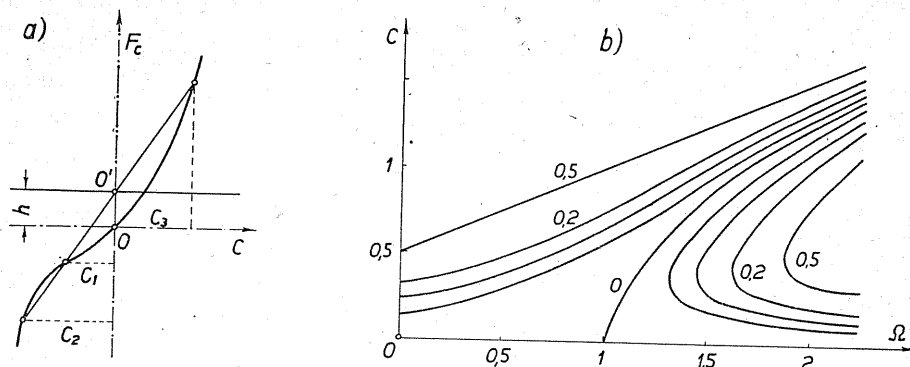
па је за $\alpha_2 < 0$ негативна

Амплитуде се могу одредити и *графички*. Нека је карактеристика симетрична у односу на O , (сл. 21.3. a), онда се из (26), а према (28), добија зависност амплитуде од силе

$$f(C) = h + \Omega^2 C. \quad (33)$$

Ако се из O пренесе вредност h и из O' повуче права коефицијента правца Ω^2 , она ће сећи линију карактеристике (крутости) у трима

тачкама чије апсцисе одређују амплитуде C принудних осцилација. Промена амплитуде у зависности од фреквенције приказана је на сл. 21.3. *b*.



Сл. 21.3. — Графичко одређивање амплитуде за случај симетричне карактеристике

Услов за кружну фреквенцију може се одредити и помоћу закона рада. Интегралом једначине (26) у границама од $q=0$ до $b=C$ добија се

$$\int_0^C a \ddot{q} dq = \int_0^C Q \sin \Omega t dq - \int_0^C F_c(q) dq, \quad (34)$$

а према (28) биће

$$QC + a\Omega^2 C^2 - 2 \int_0^C F_c(q) dq = 0. \quad (35)$$

Назначени интеграл се може израчунати рачунским или графичким путем.

На пример, за случај симетричне карактеристике, (27), биће

$$(\Omega^2 - k^2)C + h = \frac{1}{2} \alpha_2 k^2 C^3.$$

За $h=0$ добија се вредност

$$\omega = k \sqrt{1 + \frac{1}{2} \alpha_2 C^2} \approx k \left(1 + \frac{1}{4} \alpha_2 C^2\right)$$

која се разликује од (25 *b*).

У случају просте принудне осцилације са ошћорном силом која није линеарна функција брзине

$$a \ddot{q} + \Phi(\dot{q}) + cq = Q \sin \Omega t, \quad (36)$$

проблем се своди на просту принудну осцилацију са линеарном отпорном силом ако се одреди, према Jacobsen-у,* *модифицирани коефицијент ошћора* β^* из услова једнакости рада отпорних сила за $1/4$ периода осциловања:

$$\int_0^{\pi/2} \beta^* \dot{q} \, dq = \int_0^{\pi/2} \Phi(\dot{q}) \, dq. \quad (37)$$

У случају када је

$$\Phi(\dot{q}) = b \dot{q}^n \quad (38)$$

тада су, с обзиром на (28), интегрални

$$b \int_0^{\pi/2} C^{n+1} \Omega^{n+1} \cos^{n+1} \Omega t \cdot dt = b C^{n+1} \Omega^n \frac{\pi}{2^{n+2}} \frac{\Gamma(2+n)}{\left[\Gamma\left(\frac{3+n}{2}\right)\right]^2} = b \frac{C^{n+1} \Omega^n}{4} \pi \Psi,$$

$$\int_0^{\pi/2} \beta^* \dot{q} \, dq = \beta \int_0^{\pi/2} C^2 \Omega^2 \cos^2 \Omega t \cdot dt = \frac{\pi}{4} C^2 \Omega \beta,$$

где је Γ гама функција**

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! n^{p-1}}{p(p+1) \cdots (p+n-1)}; \quad \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} x \, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}.$$

* Jacobsen L. S. — Steady Forced Vibration as Influenced by Damping. ASME, 1930.

** Неке особине гама функција јесу:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x \, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}; \quad \Gamma(x+1) = x \Gamma(x); \quad \Gamma(2+n) = (n+1) \Gamma(n+1);$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} x \, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}; \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}; \quad \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}} \frac{\Gamma(2x)}{\Gamma(x)};$$

$$\frac{n+1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right);$$

$$\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \frac{\Gamma(2+n)}{(n+1) \cdot \frac{2}{n+1} \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}} \frac{\Gamma(2+n)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)};$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} x \, dx = \frac{\pi}{2^{n+2}} \frac{\Gamma(2n)}{\left[\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)\right]^2}.$$

Изједначењем ових вредности добија се модифицирани коефицијент отпорне силе

$$\beta^* = b\psi C^{n-1} \Omega^{n-1}, \quad (39)$$

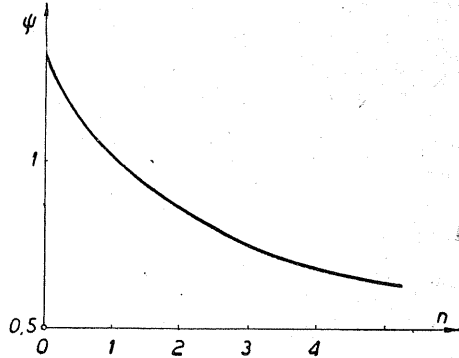
где је ψ коефицијент који зависи само од експонента n .

Промена овог коефицијента од експонента n приказана је на сл. 21.4.

Даље рачунање своди се на поступак изнет у чл. 4.2., обр. 20, па је амплитуда

$$C = N =$$

$$= \frac{h}{\sqrt{(k^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \psi^2 C^{2(n-1)} \Omega^{2n}}}$$



Сл. 21.4. — Графички начин одређивања модифицираног коефицијента отпора

21.3. Примена Галеркинове методе. — У случају нелинеарних осцилација може се такође применити Галеркинова метода, (чл. 18.6.4.). У овоме случају једначина (110) поменутог члана постаје

$$\int_0^T \left[a \ddot{q} + \Phi(q) + F_e(q) - Q(t) \right] \varphi_i(t) dt = 0. \quad (41)$$

а интегралење треба извршити за један циклус кретања.

На пример, за случај осцилације представљене једначином (27a) узећемо да је $q = C \sin \Omega t$ па уношењем у (41) добијамо алгебарску једначину

$$(k^2 - \Omega^2) C - h + \frac{3}{4} k^2 \alpha_2 C^3 = 0.$$

Узмемо ли

$$q = C_1 \sin \Omega t + C_2 \sin 3 \Omega t,$$

дobili бисмо две алгебарске кубне једначине помоћу којих можемо одредити константе C_i када се знају параметри k , Ω , α_2 и h .

У случају просте принудне осцилације са отпорном силом једначина (41) постаје

$$\int_0^T \left[\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + k^2(x + \alpha_2 x^3) - h \cos \Omega t \right] \varphi_i dt = 0.$$

Претпоставимо ли, због гушења, решење у облику

$$x = \sum_{k=1}^2 C_k \varphi_k = C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t = N \cos (\Omega t - \alpha),$$

$$N^2 = C_1^2 + C_2^2; \quad \operatorname{tg} \alpha = C_2 / C_1,$$

где су N и α амплитуда и померање фазе, једначина (41) постаје

$$\int_0^{2\pi} \{ [(k^2 - \Omega^2) C_1 + 2\delta \Omega C_2] \cos \theta + [(k^2 - \Omega^2) C_2 - 2\delta \Omega C_1] \sin \theta + \\ + k^2 \alpha_2 [C_1^3 \cos^3 \theta + C_2^3 \sin^3 \theta] + 3k^2 \alpha_2 C_1 C_2 (C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta) \sin \theta \cos \theta - \\ - h \cos \theta \} \varphi_j(\theta) d\theta = 0, \quad \theta = \Omega t.$$

Интегралем добијамо систем алгебарских једначина

$$\begin{aligned} [(k^2 - \Omega^2) + \frac{3}{4} k^2 \alpha_2 N^2] C_1 + 2\delta \Omega C_2 &= h; \\ -2\delta \Omega C_1 + [(k^2 - \Omega^2) + \frac{3}{4} k^2 \alpha_2 N^2] C_2 &= 0, \end{aligned}$$

из којих одређујемо амплитуду и померање фазе обрасцима

$$\begin{aligned} (h/N)^2 &= \Delta; \quad \operatorname{tg} \alpha = 2\delta \Omega / \sqrt{\Delta - 4\delta^2 \Omega^2}; \\ \Delta &= [(k^2 - \Omega^2) + \frac{3}{4} k^2 \alpha_2 N^2]^2 + 4\delta^2 \Omega^2. \end{aligned}$$

За $\alpha_2 = 0$ добијају се познати обрасци (чл. 4).

21.4. Метода хармонијског баланса. — Ова је метода* у ствари специјалан случај методе Ritz-а и Галеркина а у теорији регулисања позната је као метода *описне функције* (“das Verfahren der Beschreibungsfunktion”). Њу ћемо приказати на једноставном проблему осциловања вођеног диференцијалном једначином

$$m \ddot{x} + f(x, \dot{x}) = m \ddot{x} + f(x, v) = 0, \quad v = \dot{x}. \quad (42)$$

Претпоставићемо да је закон осциловања хармонијски,

$$x = R \cos \omega t, \quad \dot{x} = v = -R \omega \sin \omega t. \quad (43)$$

* Крылов Н. М. — Боголюбов Н. Н. — Введение в нелинейную механику. АН УССР, Киев, (1937).

Ове изразе унећемо у функцију $f(x, \dot{x})$ и развити је у тригонометријски ред, стављајући да је

$$\begin{aligned} f(x, \dot{x}) &= f(R \cos \omega t; -R \omega \sin \omega t) = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t = \\ &\approx \frac{a_1}{R} x - \frac{b_1}{R} \dot{x} = c^* x + b^* \dot{x} \end{aligned} \quad (44)$$

где су c^* и b^* нови коефицијенти

$$\begin{aligned} c^* &= \frac{1}{\pi R} \int_0^{2\pi} f(R \cos \varphi, -R \omega \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi; \\ b &= \frac{-1}{\pi R \omega} \int_0^{2\pi} f(R \cos \varphi, -R \omega \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi; \end{aligned} \quad \varphi = \omega t. \quad (45)$$

Овим се диференцијална једначина (42) свела на „линеаран“ облик

$$m \ddot{x} + b^* \dot{x} + c^* x = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{x} + 2\delta^* \dot{x} + k^{*2} x = 0 \quad (46)$$

где су сада коефицијенти b^* и c^* функције амплитуде (R).

Применимо ову методу на van der Pol-ову једначину

$$\ddot{x} - (\alpha - \beta x^2) \dot{x} + x = 0; \quad f(x, \dot{x}) = x - (\alpha - \beta x^2) \dot{x}. \quad (47)$$

С обзиром на (43) овде ће бити функција

$$f(x, \dot{x}) = R \cos \varphi + R \omega (\alpha - \beta R^2 \cos^2 \varphi) \sin \varphi; \quad \varphi = \omega t;$$

па пошто су интеграли

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \pi; \quad \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi = \pi/4$$

то су коефицијенти $c^* = 1$, $b^* = (\beta R^2 - 4\alpha)/4$. Из (46) добијамо коефицијент гушења и фреквенцију

$$\delta = \frac{\beta R^2 - 4\alpha}{8m}; \quad \omega = \sqrt{1 - \delta^2}.$$

21.5. Метода лагано променљиве амплитуде. — Ова се метода примењује за *непериодичке процесе*, па ћемо је применити на једначини на коју је први пут применио ову методу van der Pol. Претпоставићемо решење у облику (43) али са променљивом амплитудом, те следи

$$x = R(t) \cos \varphi; \quad \dot{x} = \dot{R} \cos \varphi - R \omega \sin \varphi; \quad (48)$$

$$\ddot{x} = \ddot{R} \cos \varphi - 2\dot{R} \omega \sin \varphi - R \omega^2 \cos \varphi; \quad \varphi = \omega t.$$

Главна замисао ове методе је у томе да је функција $R(t)$ таква да се врло *сиоро мења са временом*, те се може ставити

$$\dot{R} \ll R \omega; \quad \ddot{R} \ll R \omega^2; \quad x = R(t) \cos \varphi; \quad \dot{x} \approx -R \omega \sin \varphi; \quad (49)$$

$$\ddot{x} \approx -2\dot{R} \omega \sin \varphi - R \omega^2 \cos \varphi.$$

Ако се сада функција $f(x, \dot{x})$ апроксимира Фуријеовим редом тада се добија

$$f(x, \dot{x}) \approx a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi; \quad (50)$$

$$m \ddot{x} + f(x, \dot{x}) = \sin \varphi (-2\dot{R} \omega + b_1) + \cos \varphi (-R \omega^2 + a_1) = 0.$$

Пошто ова једначина мора бити испуњена за свако t , то морају изрази у заграда бити једнаки нули, те ће бити

$$a_1 = R \omega^2; \quad b_1 = 2 \omega \dot{R}. \quad (51)$$

Када се релације (49) унесу у једначину (47) биће

$$f(x, \dot{x}) = x - (\alpha - \beta x^2) \dot{x} = R \omega [\alpha - (R^2 \beta / 4)] \sin \varphi + R \cos \varphi - (R^3 \omega \beta / 4) \sin 3 \varphi; \quad \varphi = \omega t,$$

па се обзиром на (50) и (51) добијају вредности

$$a_1 = R; \quad b_1 = R \omega [\alpha - (R^2 \beta / 4)]; \quad \omega^2 = 1; \quad \dot{R} = R [\alpha - (R^2 \beta / 4)] / 2. \quad (52)$$

Када је $\dot{R} = 0$ тада је амплитуда стационарног режима $R_{st} = 2 \sqrt{\alpha / \beta}$.

Сменом $y = R^2$, $\dot{y} = 2R\dot{R}$, последња једначина (52) своди се на Abel-ову диференцијалну једначину

$$\dot{y} = dy/dt = \alpha y - (\beta y^2 / 4)$$

чије је решење $y = R^2$, те су

$$y = 4 \alpha / \beta [1 - (1 - 4 \alpha / \beta y_0) e^{-\alpha t}]; \quad R(t) = R_{st} \sqrt{1 - [1 - (R_0 / R_{st})^2] e^{-\alpha t}}, \quad (53)$$

где је R_0 почетна амплитуда за $t = t_0$.

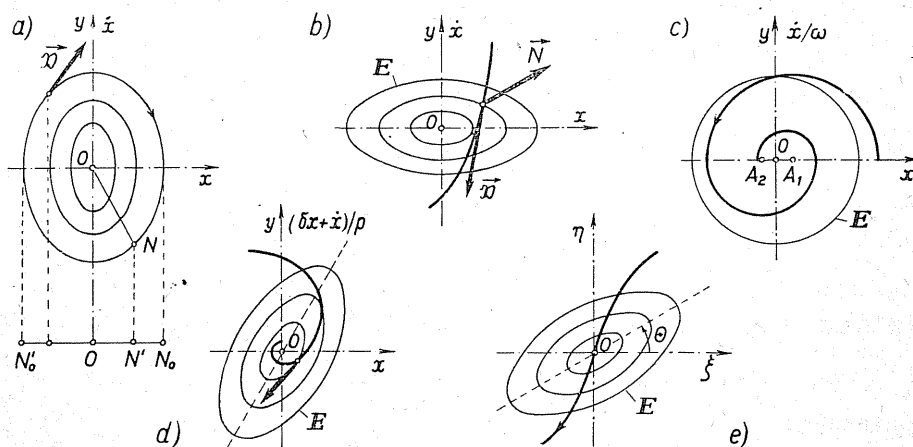
За $\alpha < 0$ амплитуда R асимптотски тежи ка нули када $t \rightarrow \infty$, а за $\alpha > 0$ тежи асимптотски вредности R_{st} , па било да је $R_0 > R_{st}$ или $R_0 < R_{st}$.

21.6. Фазне криве. — За геометријско предочавање осцилаторног процеса много се користе фазне криве, поготово у теорији нелинеарних осцилација.

Кинематичке једначине хармонијског праволинијског осцилатора су (сл. 1.1):

$$x = R \cos \omega t; \quad \dot{x} = -R \omega \sin \omega t; \quad \ddot{x} = -\omega^2 x; \quad (x/R)^2 + (\dot{x}/R\omega)^2 = 1. \quad (54)$$

Последња једначина приказује дијаграм брзине и пута; он је елипса, полуоса R и $R\omega$ (сл. 21.5.a).



Сл. 21.5. — a) Фазне криве; b) фазне трајекторије и линије енергије; c) фазна трајекторија осцилација са трењем; d) фазна трајекторија слабе амортизоване осцилације; e) фазна трајекторија јаке амортизоване осцилације

Пошто је стање осцилаторног процеса одређено величинама x и \dot{x} (елонгацијом и брзином) то овај дијаграм (\dot{x}, x) има велике практичне важности. Раван $Ox\dot{x}$ у којој узимамо координатне осе Ox (елонгације) и $O\dot{x} = Oy$ (брзине) назива се *фазна равна* а координанте x и $\dot{x} = y$ јесу *фазне координате*. Покретној тачки N' на правој Ox (сл. 1.1.) одговара *шачка* $(x; \dot{x} = y)$ у фазној равни $Ox\dot{x}$. Она се назива *рејрезентативна шачка* или *лик покретне шачке*. Док се тачка N' креће осцилаторно од почетног положаја N_0 до конјугованог положаја \bar{N}_0 и натраг, дотле се лик $\mathfrak{N}(x, \dot{x})$ креће по елипси, полуоса R и $R\omega$, па се она назива *фазна крива* или *фазна трајекторија*.

Пошто су енергије и крутост опруге

$$E_k = m \dot{x}^2 / 2; \quad E_p = cx^2 / 2; \quad c = m \omega^2,$$

то уношењем ових вредности у последњу једначину (54) следи интеграл енергије

$$E_k + E_p = cR^2/2 = E = \text{const}; \quad E = (m \dot{x}^2 + c x^2)/2 = E(x, \dot{x}) \quad (55)$$

гда је E тотална механичка енергија.

Код једног осцилатора је $\omega^2 = c/m = \text{const}$, (пошто је исти материјални систем и исти облик поља сила), те се променом кинетичке енергије мења и фазна крива. Овде би се добила фамилија концентричних елипси, где је O центар те фамилије фазних кривих. *Скуп* (фамилија) свих фазних кривих назива се *фазни портрет* осцилаторног система, јер он одређује *сћање осциловања (кретања)* система.

Док се тачка N' креће по својој путањи, дотле се тачка $\mathfrak{N}(x; \dot{x})$ креће по елипси у *смеру кретања сћне казальке*, пошто x расте за $\dot{x} > 0$, а опада за $\dot{x} < 0$. За период T тачка N' ће прећи пут $4R$ а за исто време описаће тачка \mathfrak{N} елиптичну путању.

Слично брзини кретања тачке дефинише се и *фазна брзина*. Она је *брзина репрезентативне тачке на фазној трајекторији*, па је вектор који пада у правац тангенте на фазну трајекторију а има координате

$$\mathfrak{X}_x = \dot{x} = y = -R\omega \sin \omega t; \quad \mathfrak{X}_y = \ddot{x} = -R\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x; \quad (56a)$$

и интензитет

$$\mathfrak{X} = R\omega \sqrt{\sin^2 \omega t + \omega^2 \cos^2 \omega t}, \quad (56b)$$

који се мења у границама од $R\omega$ до $R\omega^2$.

Из (55a) следи да су изводи

$$\dot{x} = y = dx/dt; \quad \ddot{x} = dy/dt = -\omega^2 x; \quad y' = dy/dx = -\omega^2 x/y \quad (57)$$

па је овај систем једначина *аутономан*, јер време фигурише у облику диференцијала (dt). Интегралењем следи

$$y dy = -\omega^2 x dx; \quad (y^2 + \omega^2 x^2)/2 = C = R^2 \omega^2/2, \quad (58)$$

јер је за $x=R$ брзина $x=y=0$. Овим, дакле, добијамо једначину (55). Различитим вредностима тоталне механичке енергије одговарају различите елипсе, сличне једна другој са средиштем у тачки $O(x=0; \dot{x}=0)$. Фазне криве могу се сматрати као интегралне криве диференцијалне једначине (57). Кроз сваку тачку фазне равни пролази по једна фазна крива, изузев центра који је *сингуларна тачка*.

Слично предходном поступку код хармонијског осциловања и амортизована осциловања приказујемо кретањем репрезентативне тачке

$\mathcal{N}(x, x)$ у фазној равни. Тотална механичка енергија је функција фазних координата

$$\mathbf{E} = E_k + E_p = 1/2 (m \dot{x}^2 + c x^2) = 1/2 (m y^2 + c x^2) = \mathbf{E}(x, y), \quad (55')$$

па се може у фазној равни за сваку вредност $\mathbf{E} = h = \text{const}$ нацртати фамилија кривих линија енергије. Пошто се померање x налази у области минимума потенцијалне енергије, ($E_p > 0$), то ће те криве линије бити затворене, (сл. 21.5.b), и окружавају координатни почетак $(0; 0)$. Уколико h расте утолико се криве енергије удаљавају од средишта O . Ове криве линије не представљају фазне трајекторије — путање репрезентативних тачака $\mathcal{N}(x; y)$, јер енергија није константна. Према томе ће се фазне трајекторије сећи са линијама енергије.

Да би се испитао пресек ових фамилија кривих, тј. да ли трајекторије секу линије енергије споља-унутра, или обратно, означимо са \vec{N} орт нормале линије енергије у пресечној тачки и усмеримо га у смеру пораста скалара h . Овај орт гради са координатним осама углове α и β . Косинуси ових углова биће

$$\cos \alpha = \frac{\partial \mathbf{E} / \partial x}{A}; \quad \cos \beta = \frac{\partial \mathbf{E} / \partial y}{A},$$

где је

$$A = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y}\right)^2}. \quad (59)$$

Како фазна брзина пада у правац тангенте на трајекторију то ће у пресечној тачки бити њене координате $\mathfrak{B}_x = \dot{x} = y$, $\mathfrak{B}_y = \dot{y} = -x$. Извод тоталне енергије \mathbf{E} по времену t , према (55) и горњим координатама брзине, износи

$$\frac{d \mathbf{E}}{d t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} \dot{y} = A (x \cos \alpha + y \cos \beta) = A (\mathfrak{B}_x \cos \alpha + \mathfrak{B}_y \cos \beta) = A \mathfrak{B}_N,$$

где је \mathfrak{B}_N пројекција фазне брзине на правац нормале (\vec{N}) . Та је пројекција негативна и износи

$$\mathfrak{B}_N = -2 \Phi / A,$$

где је Φ дисипативна функција.

Ова особина пројекције фазне брзине на правац орта нормале линије енергије показује да фазна трајекторија сече линију енергије споља-унутра, прелазећи од кривих већег скалара h ка кривима са мањом вредности h . При $t \rightarrow \infty$ мора и $\mathbf{E} = h \rightarrow 0$, тј. тежи положају равнотеже $O(x; y)$. Због тога се овакав положај равнотеже назива *асимптотски стабилан*.

Уопште узев, фазне координате не морају се узети у облику x и $\dot{x}=y$, већ их треба бирати тако да једначина трајекторије добије што простији облик. Такав случај имамо баш код осцилација са отпорном силом.

а) *Осцилације са трењем.* — У случају осцилација са Кулоновим трењем као фазне координате узећемо x и $y = \dot{x}/\omega$. За случај кретања *налево* из једначине осциловања за кретање *налево* $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu g$, добијамо

$$x - s = A_1 \cos \omega t, \quad y = \dot{x}/\omega = -A_1 \sin \omega t,$$

па елиминисањем времена t из горњих једначина следи једначина фазне трајекторије

$$(x - s)^2 + y^2 = A_1^2 = (x_0 - s)^2. \quad (60a)$$

Према томе је фазна трајекторија полукруг, полупречника A_1 , са средиштем у тачки $A_1 (s; 0)$, сл. 21.5.с. За случај кретања *надесно*, сличним поступком, добијамо из једначина $\ddot{x} + \omega^2 x = -\mu g$, да је једначина фазне трајекторије

$$(x + s)^2 + y^2 = A_2^2 = (x_0 - 3s)^2, \quad (60b)$$

тј. полукруг, полупречника A_2 , са средиштем у $A_2 (-s; 0)$.

И остале трајекторије су полукругови описани из тачака A_1 и A_2 , полупречника који се смањују у аритметичкој прогресији, разлике $2s$.

Линије енергије имају једначину

$$E = 1/2 (m \dot{x}^2 + c x^2) = 1/2 c (x^2 + y^2) = h, \quad (61)$$

па представљају централне кругове, полупречника $R = \sqrt{2h/c}$, (сл. 21.5.с).

Пошто је извод енергије по времену

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{\partial E}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial E}{\partial y} \dot{y} = A (\mathfrak{B}_x \cos \alpha + \mathfrak{B}_y \cos \beta) = A \mathfrak{B}_N = c R \mathfrak{B}_N = \\ &= c (\dot{x} x + c y \dot{y}), \end{aligned}$$

где је, према (59), $A = cR$ и $\ddot{x} = \dot{y} = -\omega^2 x - g (\text{sign } \dot{x})$, то, уношењем у горњи израз, добијамо да је извод

$$\frac{dE}{dt} = -c s \omega y \text{sign } y = -c s \omega |y| = c R \mathfrak{B}_N,$$

па је

$$\mathfrak{B}_N = -\frac{s\omega}{R} |y| < 0. \quad (62)$$

Пошто је пројекција фазне брзине на правац нормале линије енергије негативна, то фазна трајекторија сече ове линије *своља-унушра*, приближујући се асимптотски равнотежном положају.

b) *Слаба осцилација*. — Из једначина осциловања добијамо

$$x = R e^{-\delta t} \cos (p t - \theta_0); \quad \dot{x} = -[\delta x + p R e^{-\delta t} \sin (p t - \theta_0)],$$

па као фазне координате узимамо

$$x = x; \quad y = \frac{(\delta x + \dot{x})}{p}. \quad (63)$$

Уводећи поларне координате

$$x = r \cos \varphi = R e^{-\delta t} \cos (p t - \theta_0); \quad y = r \sin \varphi = R e^{-\delta t} \sin (p t - \theta_0),$$

елиминисањем времена $t = (\varphi + \theta_0)/p$, добијамо да је

$$r = R e^{-\delta(\varphi + \theta_0)/p} = C e^{-\delta \varphi/p}. \quad (64)$$

Према томе је фазна трајекторија *логаритамска спирала*, јер $r \rightarrow 0$ када $\varphi \rightarrow \infty$, (сл. 21.5.d). Пол O зове се *стабилна жижа*.

Линије енергије имају једначину

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + c x^2) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{1}{2} m [(p y - \delta x)^2 + \omega^2 x^2] = \\ &= \frac{1}{2} m [(\omega^2 + \delta^2) x^2 - 2 p \delta x y + p^2 y^2] = h, \end{aligned} \quad (65)$$

те су елипсе, осе нагнуте за угао θ према оси Ox , чији је

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{-2p\delta}{\omega^2 + \delta^2 - p^2} = \frac{-p}{\delta}.$$

Спирала сече ове криве *своља-унушра*.

c) *Амперидичко крешање*. — Према једначини овог осциловања биће

$$x = C e^{-\delta t} \operatorname{Sh}(q t + \psi_0); \quad \dot{x} = -\delta x + q C e^{-\delta t} \operatorname{Ch}(q t + \psi_0),$$

па фазне координате узимамо у облику

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\eta - \xi) &= x = C e^{-\delta t} \operatorname{Sh}(q t + \psi_0); \\ \frac{1}{2} (\eta + \xi) &= (\delta x + \dot{x})/q = C e^{-\delta t} \operatorname{Ch}(q t + \psi_0). \end{aligned} \quad (66)$$

Дељењем горњих једначина, затим, степеновањем и одузимањем, добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} \operatorname{Th}(q t + \psi_0) &= \operatorname{Th} \psi = (\eta - \xi)/(\eta + \xi) = (1 - e^{-2\psi})/(1 + e^{-2\psi}); \\ \xi \eta &= C^2 e^{-2\delta t}; \end{aligned}$$

односно

$$\frac{\xi}{\eta} = e^{-2\psi}; \quad \xi\eta = C^2 e^{-2\delta t}. \quad (67)$$

Уводећи ознаку $k = \delta/q$ и елиминисањем времена t из горњег система добијамо једначину трајекторија

$$\eta = D \xi^{\frac{k-1}{k+1}}, \quad (68)$$

где је D константа, коју одређујемо из почетних услова кретања, те је

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{\frac{k-1}{k+1}}.$$

Трајекторије су криве сличне гранама парабола које додирују осу $C\eta$ у координатном почетку, (сл.21.5. е).

Линије енергије имају једначину

$$\begin{aligned} E = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) &= \frac{1}{2} m \{ \omega^2 \cdot \frac{1}{4} (\eta - \xi)^2 + \frac{1}{4} [q(\eta + \xi) - \delta(\eta - \xi)]^2 \} = \\ &= \frac{1}{4} m [\delta(\delta + q)\xi^2 - 2\omega^2 \xi\eta + \delta(\delta - q)\eta^2] = h, \end{aligned} \quad (69)$$

те представљају *елипсе*, нагнуте под углом θ према оси $O\xi$, чији је

$$\operatorname{tg} 2\theta = -\omega^2/\delta q.$$

Фазна трајекторија сече ове криве *споља-унушра* и тачка се приближава координатном почетку, који је *стабилни чвор*.

21.7. Метода изоклина. — Диференцијална једначина осциловања

$$m \ddot{x} + f(x) = 0 \quad (70)$$

сменом $y = v = \dot{x} = dx/dt$, због $\ddot{x} = d\dot{x}/dt = (d\dot{x}/dx)/(dx/dt) = \dot{x} d\dot{x}/dx = v dv/dx = y y'$, своди се на диференцијалну једначину првог реда

$$y' = dv/dx = [-f(x)]/mv = [-f(x)]/my = F(x, y). \quad (71)$$

Њен општи интеграл

$$\varphi(x, y, C) = 0 \quad (72)$$

где је C интеграциона константа, представља фамилију *интегралних кривих*, једначине (71). Свакој вредности C одговара по једна интегрална крива која представља партикуларни интеграл једначине (71). Када се у (71) стави на десној страни константна вредност $a_0 = F(x, y) = y'$ онда се добија крива линија (сл. 21.6. а). Кроз сваку тачку M криве (a_0) пролази по једна интегрална крива (C) једначине (72) чији коефицијент правца у тој тачки (M) има вредност a_0 . За разне вредности константи a_i добиће се разне криве (a_i) које пред-

стављају поље праваца интегралних кривих једначине (71) у равни Oxy . Кроз сваку тачку једне криве (a) пролази по једна интегрална крива (C) чији коефицијент правца (тангенс нагибног угла са $+Ox$ осом) има дату вредност a . Криве (a_i) које спајају тачке интегралних кривих (C) са једнаким правцима зову се *изоклине*.

На пример, када је $y' = x$ тада су интегралне (фазне) криве $y = x^2/2 + C$ (параболе) а изоклине су праве $x = a_i$ паралелне Oy оси. За $y' = y$ интегралне (фазне) криве су експоненцијалне криве $y = Ce^x$ па су изоклине праве $y = b_i$ паралелне Ox оси.

Интегрална (фазна) крива може се одредити графички помоћу *методе Liénard-a* поготову у случају када је познат график функције $f(x)$. У равни Oxy нацртајмо криву $[f(x)]/m$ (сл. 21.6. *b*). Нека се у тачки N (\mathfrak{N}) треба да одреди правац фазне криве. Права повучена из ове тачке управно на Ox осу сече прву криву у тачки M а осу у тачки P . Оборимо тачку M на осу Ox у тачку A онда је троугао $\triangle PAN$ правоугли, те следи

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \overline{NP} / \overline{PA} = y / \overline{MP} = \\ &= my / [f(x)] = -1/y', \end{aligned} \quad (73)$$

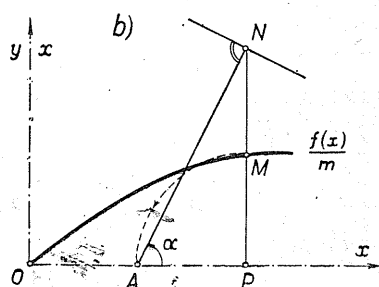
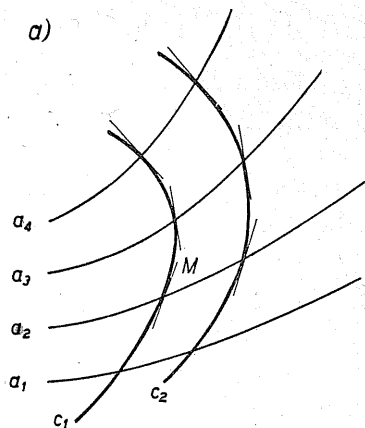
те је правац фазне криве управан на праву AN . Повезујући овако одређене правце може се конструисати интегрална крива, односно фазна крива.

При анализи нелинейног динамичког система важно је испитати облик равнотеже, то јест испитати оно стање када су брзина и убрзање једнаки нули ($\dot{x} = x = 0$; $\dot{y} = y = 0$). Тај положај дакле, одговара оном положају тачке $\mathfrak{N}(x, \dot{x})$ на фазној кривој у којој је фазна брзина једнака нули (56 *a*). Како се многи нелинейни проблеми осциловања свде на једначину

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0; \quad \dot{x} = y, \quad y' = -f(x, y), \quad (74)$$

она се може уопштити и биће

$$y = \dot{x} = P(x, y); \quad \dot{y} = \ddot{x} = Q(x, y), \quad (75)$$



Сл. 21.6. — Изоклине

па је диференцијална једначина фазних кривих

$$d y/d x = y' = [Q(x, y)]/[P(x, y)]. \quad (76)$$

Када функције P и Q не зависе експлицитно од времена тада се каже да је систем *аутономан*, у противном је *неаутономан*.

Фазна брзина је једнака нули у оним тачкама на фазној кривој у којој су једновремено $P(x, y) = 0$ и $Q(x, y) = 0$. Тада је $y' = 0/0$, па се каже да су те тачке *сингуларне тачке* једначине (76), јер се у њима не испуњавају Саучу-јеве услови о јединствености решења диференцијалне једначине. Пошто је важан случај равнотеже у положају $x = 0$ и $y = 0$ то ћемо за функције P и Q узети опште линеарне функције, па је једначина (76) облика

$$y' = \dot{y} = d y/d x = (cx + dy)/(ax + by), \text{ где је } (ad - bc) \neq 0. \quad (77)$$

Овде су a, b, c и d константни коефицијенти. Уведимо смене координата x и y у главне координате ξ и η тако да су

$$\xi = \alpha x + \beta y; \quad \eta = \gamma x + \delta y; \quad \dot{\xi} = \lambda \xi; \quad \dot{\eta} = \mu \eta, \quad (78)$$

онда диференцирањем, обзиром на (77), биће

$$\dot{\xi} = \alpha \dot{x} + \beta \dot{y} = \alpha(ax + by) + \beta(cx + dy) = \lambda(\alpha x + \beta y);$$

$$\dot{\eta} = \gamma \dot{x} + \delta \dot{y} = \gamma(ax + by) + \delta(cx + dy) = \mu(\gamma x + \delta y).$$

односно

$$[\alpha(a - \lambda) + \beta c] x + [\alpha b + \beta(d - \lambda)] y = 0;$$

$$[\gamma(a - \mu) + \delta c] x + [\gamma b + \delta(d - \mu)] y = 0.$$

Из ових једначина добијамо четири алгебарске једначине, па пошто коефицијенти α, β, γ и δ нису једнаки нули, морају бити детерминанте система:

$$\begin{cases} \alpha(a - \lambda) + \beta c = 0; \\ \alpha b + \beta(d - \lambda) = 0; \end{cases} \quad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & c \\ b & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0;$$

$$\begin{cases} \gamma(a - \mu) + \delta c = 0; \\ \gamma b + \delta(d - \mu) = 0; \end{cases} \quad \Delta(\mu) = \begin{vmatrix} a - \mu & c \\ b & d - \mu \end{vmatrix} = \mu^2 - (a + d)\mu + (ad - bc) = 0.$$

Обе једначине су једнаке, те су и корени једначине

$$\begin{vmatrix} a - r & c \\ b & d - r \end{vmatrix} = r^2 - (a + d)r + (ad - bc) = r^2 + pr + q = 0; \quad p = a + d; \quad (79)$$

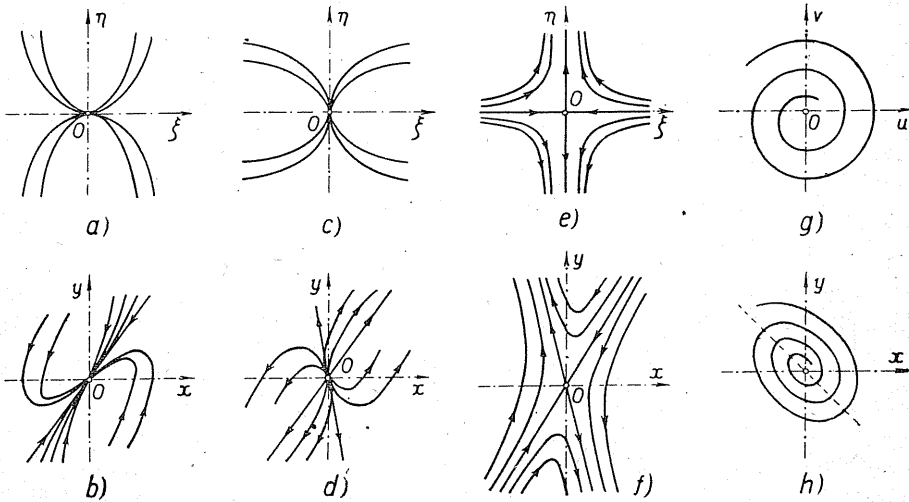
$$q = ad - bc; \quad r_{1,2} = (-p \pm \sqrt{\Delta})/2; \quad \Delta = p^2 - 4q; \quad r_1 = \lambda; \quad r_2 = \mu.$$

Критеријуми стабилности

У зависности од корена једначине (19) зависе и облици интегралних кривих у равни $O\xi\eta$ и Oxy како је показано у доњој табlici (21.2) и на слици 21.7.

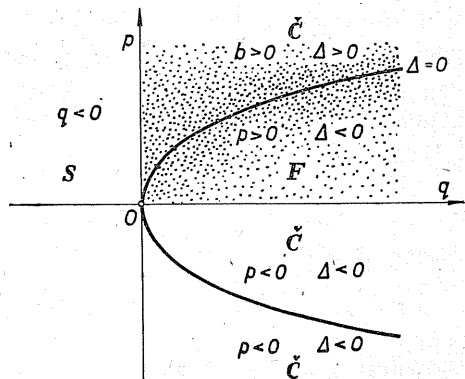
Таблица 21.2.

Корени r_1 и r_2	реални			конјуговано-комплексни	
	негативни	позитивни	разног знака	$\Re(r) > 0$	$\Re(r) < 0$
Врста	чвор			жижа (фокус)	
сингуларитета	стабилан	нестабилан	седло	нестабилна	стабилна
Интегралне криве сл. 21.7.	$a; b$	$c; d$	$e; f$	$g; h$	



Сл. 21.7. — Врсте сингуларних тачака фазних кривих

На сл. 21.8. зоне стабилности и нестабилности приказане су на дијаграму (карти стабилности) у равни Oqr . Шрафиране површине приказују зону стабилности а крива $\Delta = p^2 - 4q = 0$ дели жиже (F) од чворова (Џ). Када су криве затворене онда је сингуларна тачка центар (средиште), као на пример код елипси.



Сл. 21.8. — Карта стабилности

Нека је тачка (x_0, y_0) сингуларна тачка. Љапунов је показао да је равнотежни положај *стабилан*, ако се око дате тачке може за узету област (ϵ) увек наћи одговарајућа област $D(\epsilon)$ таква да репрезентативна тачка померена у почетном тренутку у ту област не би никада достигла границу области (ϵ) .

Означимо са ξ и η координате које карактеришу одступање (померње) репрезентативне тачке од њеног равнотежног положаја, онда су формуле трансформације

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta. \quad (80)$$

Разложимо функције $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ у околини равнотежног положаја (x_0, y_0) по степенима отклона ξ и η , онда ће бити

$$P(x, y) = P(x_0, y_0) + (\partial P / \partial x)_0 \cdot \xi + (\partial P / \partial y)_0 \cdot \eta + R(\xi, \eta); \quad (80')$$

$$Q(x, y) = Q(x_0, y_0) + (\partial Q / \partial x)_0 \cdot \xi + (\partial Q / \partial y)_0 \cdot \eta + S(\xi, \eta).$$

Како је у равнотежном положају тачка сингуларна, то су $P(x_0; y_0) = 0$ и $Q(x_0; y_0) = 0$, и занемарујући више чланове $R(\xi, \eta)$ и $S(\xi, \eta)$, добија се систем линеарних једначина првог реда

$$\dot{\xi} = a\xi + b\eta; \quad \dot{\eta} = c\xi + d\eta, \quad (80'')$$

где су a, b, c и d константни коефицијенти који су једнаки парцијалним изводима на месту x_0 , на пример $a = (\partial P / \partial x)_0$. Ове се једначине називају *једначине прве апроксимације* („систем линейных уравнений первого приближения“).

Карактеристична једначина система (80'') је

$$\Delta(r) = \begin{vmatrix} a-r & c \\ b & d-r \end{vmatrix} = r^2 - (a+d)r + (ad-bc) = 0. \quad (79')$$

Љапунов је доказао да је равнотежни положај *стабилан*, ако оба корена имају реалне делове *негативне*, а *нестабилан* ако имају реалне делове *позитивне*. Ако су реални делови оба корена једнаки нули или је један једнак нули а други *негативан* једначине прве апроксимације не могу дати одговор о *постојању стабилности*.

У пракси се обично јављају просте сингуларне тачке, те су корени једначине (79) различити од нуле.

На пример, за $y' = y/2x$ интегралне криве су параболе $y^2 = Cx$, а изоклине праве $y = 2kx$. Тачка $O(0; 0)$ је сингуларна и то чвор, јер је једначина (79) $r^2 - 3r + 2 = 0$ са коренима 1 и 2, па је чвор *нестабилан*.

21.8. Интегралење помоћу редова. — И у случају линеарних и нелинеарних осцилација претпостављали смо да су квазиеластични (c) и отпорни коефицијенти (b) константне величине, независне од времена (t), али су реституционе и отпорне силе биле линеарне или нелинеарне функције променљиве q (односно x или φ). Међутим, има у пракси случајева када и ови коефицијенти произвољно зависе од времена (t). Овакве осцилације називају се *реолинеарне (реономне) осцилације*.* Општи облик једначине слободних реолинеарних осцилација је

$$\ddot{x} + P(t) \cdot \dot{x} + Q(t) \cdot x = 0 \quad \text{или} \quad m \ddot{x} + b \dot{x} + cx = 0, \quad (81)$$

где су P , Q , m , b , c непрекидне функције променљиве t .

Општа метода решавања оваквих диференцијалних једначина је *интегралење помоћу редова*,** јер је класа диференцијалних једначина које се могу интегралити помоћу квадратура врло уска.

На пример, када се квазиеластични коефицијент c мења линеарно са временом, тада је диференцијална једначина слободних осцилација без амортизације

$$\ddot{x} + tx = 0. \quad (82)$$

Решење ове једначине тражићемо у облику Маклореновог реда

$$x = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots + A_n t^n + \dots = \sum_{v=0}^{\infty} A_v t^v \quad (83)$$

чији су коефицијенти A_v константе које се морају тако одредити да задовољавају једначину (82). Ако се ред (83) два пута диференцира по t и унесе у (82) а затим, после свођења сличних чланова, изједначе са нулом коефицијенти уз исте експоненте од t , добиће се сви коефицијенти реда (3) у функцији од n првих коефицијената A_0, A_1, \dots, A_{n-1} . Унесу ли се ови коефицијенти у (83) добиће се решење једначине (82) само у том случају ако је добијени ред *конвергентан* у извесном размаку око координатног почетка (0; 0).

Пошто су изводи

$$\dot{x} = A_1 + 2 A_2 t + 3 A_3 t^2 + \dots + n A_n t^{n-1} + \dots = \sum_{v=1}^{\infty} v A_v t^{v-1};$$

$$\ddot{x} = 1 \cdot 2 A_2 + 2 \cdot 3 A_3 t + \dots + n(n-1) A_n t^{n-2} + \dots = \sum_{v=2}^{\infty} v(v-1) A_v t^{v-2};$$

* Die parametererregte Schwingungen.

** Т. Пејовић: Диференцијалне једначине II, Београд, 1950.

то изједначењем коефицијената добијамо

$$A_{3\nu-1} = 0; \quad A_{3\nu} = (-1)^k \frac{A_0}{(2 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 6) \dots [(3\nu-1) \cdot 3\nu]};$$

$$A_{3\nu+1} = (-1)^k \frac{A_1}{(3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7) \dots [3\nu \cdot (3\nu+1)]}.$$

Општи интеграл једначине (82) биће

$$x = A_0 p_1(t) + A_1 p_2(t), \quad (84)$$

где су A_0 и A_1 интеграционе константе а $p_1(t)$ и $p_2(t)$ партикуларни интеграли

$$p_1(t) = 1 - \frac{t^3}{2 \cdot 3} + \frac{t^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \dots + (-1)^{\nu} \frac{t^{3\nu}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots [(3\nu-1) \cdot 3\nu]} + \dots; \quad (84a)$$

$$p_2(t) = t - \frac{t^4}{3 \cdot 4} + \frac{t^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} - \dots + (-1)^{\nu} \frac{t^{3\nu+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \dots [3\nu \cdot (3\nu+1)]} + \dots$$

На исти начин поступили бисмо и у случају слободних амортизованих осцилација

$$\ddot{x} + t \dot{x} + x = 0,$$

чије је опште решење

$$x = A_0 p_1(t) + A_1 p_2(t),$$

и партикуларна решења

$$p_1(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2 \cdot 4} - \dots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{2 \cdot 4 \dots 2n} + \dots = e^{-1/2 t^2};$$

$$p_2(t) = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \dots + (-1)^n \frac{t^{2n-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} + \dots$$

Случај интегралења помоћу редова имали смо и код Беселове једначине. Само у случају када је $n = \nu + 1/2$ она се могла интегралити помоћу елементарних функција.*

Општији је случај интегралења помоћу Тејлоровог реда

$$x = x_0 + (t-t_0) \dot{x}_0 + \frac{(t-t_0)^2}{2!} \ddot{x}_0 + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!} x_0^{(n)} + \dots \quad (85)$$

конвергентног у извесном размаку симетричном према тачки $t = t_0$ за коју су задовољени почетни услови кретања, $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0, \dots$.

* Gray, Mathews, Mac Robert — A Treatise on Bessel Functions and their Application to Physics. London, 1931.

На пример, ако је дата диференцијална једначина слободних осцилација

$$\ddot{x} + t^2 x = 0, \quad (86)$$

са почетним условима кретања: за $t=0$ су $x=x_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0=v_0$, онда су изводи

$$x_0^{(4k)} = (-1)^k 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (4k-3) \cdot (4k-2) x_0,$$

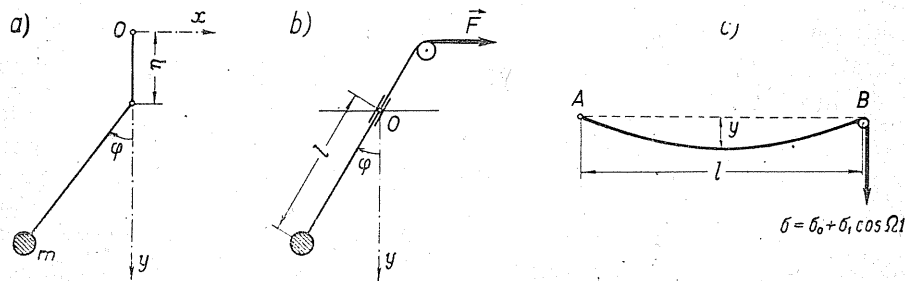
$$x_0^{(4k+1)} = (-1)^k 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (4k-2) \cdot (4k-1) \cdot \dot{x}_0,$$

па је интеграл представљен конвергентним редом

$$x = x_0 \left[1 - \frac{t^4}{3 \cdot 4} + \frac{t^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} + \cdots + (-1)^k \frac{t^{4k}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdots (4k-1) \cdot 4k} + \cdots \right] + \dot{x}_0 \left[t - \frac{t^5}{4 \cdot 5} + \frac{t^9}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} + \cdots + (-1)^k \frac{t^{4k+1}}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdots 4k \cdot (4k+1)} + \cdots \right], \quad (87)$$

уз задовољење почетних услова кретања.

21.9. Mathieu-ова диференцијална једначина. — Нека се тачка вешања A математичког клатна, (сл. 21.9. *a*), креће хармонијски у вер-



Сл. 21.9. — *a*) Математичко клатно са покретном тачком вешања, *b*) Математичко клатно променљиве дужине, *c*) Осцилације жице променљивог напона

тикалном правцу по закону $\eta = a \cos \Omega t$ онда за избрани непомични координатни систем Oxy следе односи:

$$x = -l \sin \varphi; \quad y = \eta + l \cos \varphi = a \cos \Omega t + l \cos \varphi,$$

па су

$$\dot{x} = -l \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{y} = -(a \Omega \sin \Omega t + l \dot{\varphi} \sin \varphi).$$

Кинетичка и потенцијална енергија биће

$$E_k = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m [l^2 \dot{\varphi}^2 + a^2 \Omega^2 \sin^2 \Omega t + 2 a l \Omega \dot{\varphi} \sin \Omega t \sin \varphi],$$

$$E_p = -mgl \cos \varphi,$$

па Лагранжева једначина за координату φ даје диференцијалну једначину

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} + \frac{a\Omega^2}{l} \cos \Omega t \right) \sin \varphi = 0. \quad (88)$$

Претпостављајући мале осцилације и уводећи смене

$$\sin \varphi \approx \varphi; \quad \Omega t = \tau; \quad \lambda = g/l\Omega^2 = \omega^2/\Omega^2; \quad \gamma = a/l; \quad \ddot{\varphi} = \Omega^2 d^2\varphi/d\tau^2, \quad (89)$$

једначина (88) своди се на *Mathieu**-ову (*Маџјеову*) диференцијалну једначину другог реда за променљиву τ :

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + (\lambda + \gamma \cos \tau) \varphi = 0. \quad (90)$$

Уобичајени облик ове диференцијалне једначине је

$$\ddot{x} + (\lambda + \gamma \cos t) x = 0; \quad (90 a)$$

λ и γ су њени параметри. Опште решење једначине (90 a) је облика**

$$x = Ae^{\mu t} p_1(t) + Be^{-\mu t} p_2(t), \quad (91)$$

где су A и B интеграционе константе које морају задовољити почетне услове; μ је „карактеристични експонент“ а $p_i(t)$, $i=1, 2$, периодичке функције од t , периода 2π . Због тога се решење (91) може написати и у облику реда

$$x = Ae^{\mu t} \sum_{-\infty}^{\infty} a e^{i\nu t} + Be^{-\mu t} \sum_{-\infty}^{\infty} b e^{i\nu t}. \quad (91a)$$

Експонент μ функције $p_i(t)$ не зависи од почетних услова кретања већ само од параметара λ и γ једначине (90 a). Нумеричка решења ове једначине су позната а нарочито се испитује проблем *стабилности* односно *нестабилности* кретања с обзиром на вредност експонента μ . Разликују се три карактеристична случаја:

I) $\mu = i\beta$; $\beta \neq 1/2 p$; где је p цео број. — У овоме случају решење (91) може се написати у облику

$$x = C p_1(t) \cdot \cos \beta t + D p_2(t) \cdot \sin \beta t, \quad (92)$$

па је за ма какве велике вредности t амплитуда x ограничена. Кретање је, дакле, *стабилно*.

II) $\mu = \alpha + i\beta$, $\beta = 1/2 p$. — У овоме случају, због хиперболичких функција, кретање је *нестабилно*, јер са рашћењем времена амплитуда x не остаје ограничена.

* E. Mathieu — Cours de Physique Mathématique. Paris, 1873.

** Floquet — Annales de l'Ecole Normale. 1883.

III) $\mu = 1/2$ ил. — Решење је у овом случају облика

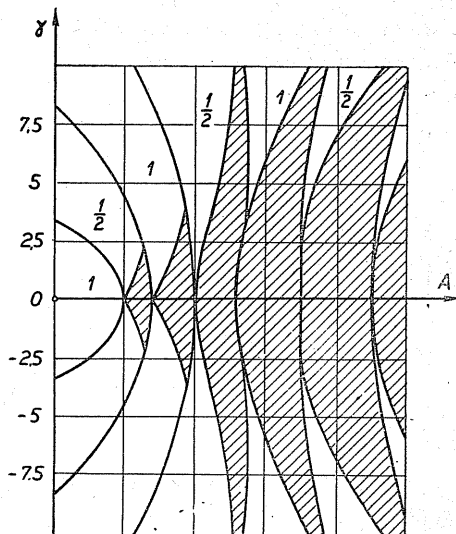
$$x = A p_3(t) + B [t p_3(t) + p_4(t)], \quad (93)$$

где су $p_3(t)$ и $p_4(t)$ периодичке функције, периода 2π , односно 4π , према томе да ли је n *п*р[ан] или *н*е[п]аран број. Функција $p_3(t)$ зове се *Mathieu-ова функција прве врсте*; док је $t[p_3(t) + p_4(t)]$ функција *друге врсте*. Због фактора t у једначини (93) кретање је такође *нестабилно*.

Области стабилности и нестабилности графички су одредили Ince и Strutt за различите вредности параметара λ и γ . Оваква графичка представка зове се *Ince-Strutt-ова карта**, (сл. 21.10.).

Ова је карта симетрична у односу на $O\lambda$ осу, па је довољно цртати само једну половину, изнад те осе. Када је $\gamma = 0$ једначина (90) постаје $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$, то јест хомогена једначина са константним коефицијентима. За $\lambda > 0$ решења су периодичка, кружне фреквенције $\omega = \sqrt{\lambda}$, па су осцилације *стабилне*. У овој карти њима одговара $O\lambda$ оса. Када је $\lambda < 0$ тада нема осцилација, већ је кретање аperiodичко са експоненцијалним функцијама реалног експонента $\sqrt{|\lambda|} \tau$. Ова су решења *нестабилна* (део карте лево од $O\gamma$ осе). Шрафиране области припадају положајима стабилности (I случај) а нешрафиране нестабилности (II случај). Граничне криве припадају трећем случају (нестабилности). У белим пољима цифрама 1 и $1/2$ означене су фреквенције $1/2 \Omega$ или Ω .

Врхови нестабилних подручја додирују се на $O\lambda$ оси у тачкама $\lambda = (n/2)^2$, где је $n = 1, 2, \dots$. Ширине ових подручја опадају са рашћењем индекса n .



Сл. 21.10. — Ince-Strutt-ова карта

* M. J. O. Strutt — Lamésche, Mathiesche und verwandte Funktionen in Physik und Technik. Berlin, 1932.

E. L. Ince — Proc. Roy. Soc. Edinbourgh. 52.—1931/32.

Да бисмо одредили услов нестабилности кретања клатна које је представљено једначином (88) уведемо смене $\tau = 1/2 \Omega t$; $\lambda^2 = 4g/l\Omega^2$; $\gamma = a\Omega^2/g$, онда та једначина постаје

$$\ddot{\varphi} + \lambda^2 [1 + \gamma \cos 2\tau] \varphi = 0. \quad (88a)$$

Претпоставимо да је кретање тачке А клатна *мале амплитуде*, онда је λ мала величина. Проблем се тада своди на то да се одреде две узастопне вредности параметра λ за које горња једначина има два периодичка решења са периодом 2π , тј. два пута већим од периода промене квазиеластичног коефицијента. Због тога претпоставимо да су

$$\varphi = \varphi_0 + \gamma \varphi_1 + \gamma^2 \varphi_2 + \dots; \quad \lambda^2 = \lambda_0^2 + \gamma \lambda_1^2 + \gamma^2 \lambda_2^2 + \dots \quad \gamma^2 \lambda_n^2$$

при чему морају параметри λ_i бити такви да су $\varphi_i(\tau + 2\pi) = \varphi_i(\tau)$, за $i = 0; 1; 2, \dots$. Ставимо ли горње вредности у једначину (88a) и изједначимо коефицијенте уз исте степене од γ добићемо систем једначина:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_0 + \lambda_0^2 \varphi_0 &= 0; \\ \ddot{\varphi}_1 + \lambda_0^2 \varphi_1 &= -\lambda_1^2 \varphi_0 - \lambda_0^2 \varphi_0 \cos 2\tau; \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Општи интеграл прве једначине је $\varphi_0 = R \sin(\tau + \alpha_0)$, јер је $\lambda_0 = 1$, због периода 2π . Друга једначина постаје

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \varphi_1 &= -R [\lambda_1^2 \sin(\tau + \alpha_0) + \sin(\tau + \alpha_0) \cos 2\tau] = \\ &= -R [\lambda_1^2 \cos \alpha_0 - 1/2 \cos \alpha_0] \sin \tau + (\lambda_1^2 \sin \alpha_0 + 1/2 \sin \alpha_0) \cos \tau + \\ &\quad + 1/2 \sin(3\tau + \alpha_0). \end{aligned}$$

Да би решење било периодичко, морају отпасти чланови са $\sin \tau$ и $\cos \tau$ те добијамо да су $\lambda_1^2 = 1/2$, $\lambda_1^2 = -1/2$, па је $\lambda^2 = 1 + 1/2 \gamma$ или $1 - 1/2 \gamma$. *Критеријум нестабилности је*

$$(1 - 1/2 \gamma) < 4g/l\omega^2 < 1 + 1/2 \gamma$$

или

$$\Omega^2 [1 - (a \Omega^2 / 2g)] < 4g/l < \Omega^2 [1 + (a \Omega^2 / 2g)].$$

Mathieu-ове једначине примењују се и у овом облику

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + (k - 2q \cos 2\tau)x = 0; \quad \frac{d^2 x}{d\tau^2} + (k - 2h^2 \cos 2\tau)x = 0, \quad (94)$$

које постају из (90a) сменама

$$t = 2\tau \pm \pi, \quad \lambda = 1/4 k, \quad \gamma = 1/2 q = 1/2 h^2.$$

Диференцијална једначина облика

$$(\lambda + \gamma \cos t)\ddot{x} + x = 0, \quad \ddot{x} + \Phi(t) \cdot x = 0, \quad (95)$$

која карактерише променљивост инерционог коефицијента назива се *Hill-ова (Хилова) диференцијална једначина*. Решио ју је *A. Weigand*.*

На ову једначину наилази се често у *машинским проблемима*. Нека се вертикално вратило обрће око своје осе угаоном брзином Ω а на средини распона насађен је диск чији главни моменти инерције нису једнаки (на пример, елиптички диск или диск са зарезима). Узмимо осу Oy за хоризонталну осу и нека у њеном смеру дејствује сила $Y = F$, онда је угиб пресека диска у Oy правцу

$$f_y = f_1 \cos \varphi - f_2 \sin \varphi = \frac{Y l^3}{48 E} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{I_2} + \frac{\sin^2 \varphi}{I_1} \right), \quad f = f_s,$$

где је $\varphi = \Omega t$. Крутоост вратила износи

$$c = \frac{Y}{f_y} = \frac{48 E}{l^3} \frac{I_1 I_2}{I_1 \cos^2 \varphi + I_2 \sin^2 \varphi} = \frac{48 E}{l^3} \frac{2 I_1 I_2}{I_1 + I_2 + (I_1 - I_2) \cos 2\Omega t}$$

па је диференцијална једначина осцилација

$$m\ddot{y} + cy = 0, \quad \text{или} \quad m(1 + k \cos 2\Omega t)\ddot{y} + c_0 y = 0;$$

$$c_0 = 96 I_1 I_2 E / l^3 (I_1 + I_2), \quad k = (I_1 - I_2) / (I_1 + I_2).$$

Сменама $m/c_0 = \omega^2$; $\omega^2/\Omega^2 = \lambda$; $\gamma = \omega^2/k\Omega^2$; $\Omega t = \tau$, она се своди на облик *Hill-ове једначине (95)*

$$(\lambda + \gamma \cos 2\tau)\ddot{y} + y = 0.$$

Разликују ли се мало главни моменти инерције ($I_1 \approx I_2$) може се ставити $1 + k \cos 2\tau \approx (1 - k \cos 2\tau)^{-1}$ па се добија *Mathieu-ова једначина (90)*:

$$\ddot{y} + (\lambda + \gamma \cos 2\tau)y = 0; \quad \lambda = \omega^2/\Omega^2; \quad \gamma = -k\lambda.$$

Диференцијална једначина облика

$$\ddot{x} + (\lambda \pm \gamma)x = 0 \quad \begin{array}{l} -1/2 \pi < t < 1/2 \pi \\ 1/2 \pi < t < 3/2 \pi \end{array} \quad (96)$$

је *Meissner-ова диференцијална једначина*.**

Диференцијална једначина (81), где су P и Q функције од t , сменом

$$x = z U(t) \quad (97)$$

* Weigand A. — Einführung in die Berechnung rheoliner Schwingungsvorgänge. D. Luftfahrt, 1945.

** Meissner E. — Über Schüttelerscheinungen in System mit periodisch veränderlichen Elastizität. Schweiz. Bauz. Vol 72, 1918.

своди се на једначину

$$U\ddot{z} + (2\dot{U} + PU)\dot{z} + (\ddot{U} + P\dot{U} + QU)z = 0. \quad (98)$$

Ако се функција $U(t)$ изабере тако да у (98) отпадне члан са изводом \dot{z} биће

$$2\dot{U} + PU = 0; \quad U = e^{-1/2 \int P dt},$$

па уношењем у (98) добијамо Hill-ову једначину (95)

$$\ddot{z} + (Q - 1/4 P^2 - 1/2 \dot{P})z = \ddot{z} + I(t). z = 0; \quad (99)$$

израз $I(t)$ назива се *инваријанша* једначине (81).

На пример, једначина $\ddot{x} + (2/t)\dot{x} + x = 0$, због $P = 2/t$, $\dot{P} = -2/t^2$, има $U = 1/t$, па је инваријанта $I(t) = 1$, те се своди на облик $\ddot{z} + z = 0$. Њено је решење $z = A \cos t + B \sin t$, па је $x = A \cos t + B \sin t$.

Једначина амортизоване осцилације са променљивом крутошћу

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \Omega(\lambda + \gamma \cos \Omega t)x = 0, \quad (100)$$

сменом $\Omega t = \tau$ своди се на облик

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{2\delta}{\Omega} \frac{dx}{d\tau} + (\lambda + \gamma \cos \tau)x = 0.$$

Како су $P = 2\delta/\Omega$, $Q = \lambda + \gamma \cos \tau$, то је $I = [\lambda - (\delta^2/\Omega^2)] + \gamma \cos \tau = k + \gamma \cos \tau$, па се једначина своди на Mathieu-ову једначину променљиве τ :

$$\ddot{z} + (k + \gamma \cos \tau)z = 0. \quad (100a)$$

Када се *дужина математичког клатна* периодички мења са временом, (сл. 21.8.b), тако да је $l = l_0(1 + \varepsilon \cos \Omega t)$, диференцијална једначина малих осцилација је

$$\frac{d}{dt}(m l^2 \dot{\varphi}) + mgl\varphi = 0, \quad \text{тј.} \quad l\ddot{\varphi} + 2\dot{l}\dot{\varphi} + g\varphi = 0. \quad (101)$$

Сменом $\Omega t = \tau$ горња једначина постаје

$$\varphi'' + 2\frac{l'}{l}\varphi' + \frac{g}{\Omega^2 l}\varphi = 0; \quad (101a)$$

изводи су узети по променљивој τ . Како је $P = 2l'/l$ то је инваријанта $I(t) = (g/\Omega^2 l) - (l''/l)$, па се једначина своди на Hill-ову једначину (15).

У случају да је код трансверзалних осцилација *жице напон променљив са временом*, (сл. 21.8.c), $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \cos \Omega t$, тада диференцијална

једначина (чл. 16.1. обр. 1), постаје

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (\sigma_0 + \sigma_1 \cos \Omega t) \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}. \quad (102)$$

Претпостави ли се решење у облику производа функција

$$y(z, t) = Z(z) \cdot T(t) \quad (103)$$

онда се диференцијална једначина (102) распада на две обичне диференцијалне једначине другог реда

$$Z'' + k^2 Z = 0; \quad T'' + \frac{k^2}{\rho} (\sigma_0 + \sigma_1 \cos \Omega t) T = 0. \quad (104)$$

Прва једначина има решење

$$Z = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz.$$

Како су гранични услови: $Z(0) = Z(l) = 0$, то су $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$, $\sin kl = 0$, $kl = n\pi$. С обзиром на овај однос и смену $\Omega t = \tau$ друга једначина (24) јесте Mathieu-ова диференцијална једначина за променљиву τ

$$\ddot{T} + (\lambda + \gamma \cos \tau) T = 0, \quad (105)$$

где су параметри

$$\lambda = \frac{\sigma_0 n^2 \pi^2}{\rho \Omega^2 l^2}, \quad \gamma = \frac{\sigma_1 n^2 \pi^2}{\rho \Omega^2 l^2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \lambda = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \frac{\omega^2}{\Omega^2}. \quad (106)$$

Диференцијална једначина

$$\ddot{x} + (k - 2h^2 \cos 2t) x = 0 \quad (107)$$

има велике примене у теорији пошенцијала. За дато h и услове $x(0) = x(2\pi)$; $\dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi)$ могу се одредити сопствене функције и сопствене вредности k .

Сопствене функције су облика:

$$C_{2n+1} = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2n+1, 2m+1} \cos(2m+1)t; \quad C_{2n} = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2n, 2m} \cos 2mt, \quad (108)$$

$$S_{2n+1} = \sum_{m=0}^{\infty} B_{2n+1, 2m+1} \sin(2m+1)t; \quad S_{2n} = \sum_{m=1}^{\infty} S_{2n, 2m} \sin 2mt; n=0; 1; 2; \dots;$$

Узимајући, на пример, функцију S_{2n+1} и уносећи је у (105) добија се

$$-(2m+1)^2 S_{2n+1} + (k - 2h^2 \cos 2t) S_{2n+1} = 0. \quad (109)$$

Користећи тригонометријске односе

$$\sin(2m+1)t \cos 2t = \frac{1}{2} [\sin(2m+3)t + \sin(2m-1)t],$$

за различито m , упоређујући вредности уз исте величине $\sin t, \sin 3t, \sin 5t, \dots$, добија се бесконачни систем алгебарских једначина

$$\begin{aligned}
 (k-1+h^2) B_{2n+1,1} - h^2 B_{2n+1,3} &= 0, \\
 -h^2 B_{2n+1,1} + (k-9) B_{2n+1,3} - h^2 B_{2n+1,5} &= 0, \\
 -h^2 B_{2n+1,3} + (k-25) B_{2n+1,5} - h^2 B_{2n+1,7} &= 0, \\
 \dots & \dots
 \end{aligned} \tag{110}$$

Пошто коефицијенти $B_{2n+1,m} \neq 0$ мора бити једнака нули бесконачна детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix}
 k-1+h^2 & -h^2 & 0 & 0 & \dots \\
 -h^2 & k-9 & -h^2 & 0 & \dots \\
 0 & -h^2 & k-25 & -h^2 & \dots \\
 0 & 0 & -h^2 & k-49 & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{vmatrix} = 0. \tag{111}$$

Сопствене вредности могу се тада одредити итеративним путем помоћу верижног разломка*

$$k = 1 - h^2 + \frac{h^4}{k-9 - \frac{h^4}{k-25 - \frac{h^4}{k-49 - \dots}}} \tag{112}$$

На пример, за $h=1$ биће:

$$k_0=0; \quad k_1=-0,0116; \quad k_2=-0,11023; \quad k_3=-0,110249.$$

Десна страна израза (112) може се приказати и графички, па остале вредности k тражити интерполацијом, с обзиром на добру конвергенцију верижног разломка.

* Collatz L. — Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Leipzig, 1949.

Д Е О П Е Т И

АПАРАТИ ЗА РЕГИСТРОВАЊЕ ОСЦИЛАЦИЈА

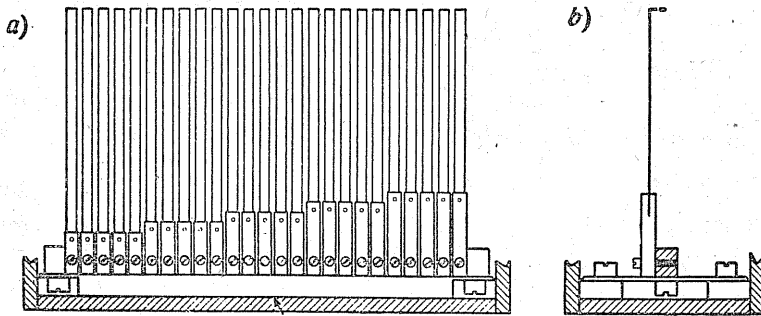
22. МЕХАНИЧКИ АПАРАТИ

Са развојем модерне технике машина упоредо је растао и њихов број обртаја а тиме и утицај динамичких напрезања, те се приликом конструисања мора водити рачуна и о осцилаторним процесима као и при испитивању готове машине. Иако су прорачуни основани на математичком делу излагања теорије осцилација, ипак се машине проверавају, да би се утврдили основни еластодинамички елементи. За овај циљ служе инструменти, било механички или електромеханички, односно комбиновани.

Обично се мере фреквенције, амплитуде, промене принудних сила, убрзања, угиби (померања).

У даљем ћемо изложити само основне принципе конструкције ових инструмената, јер се данас у пракси налази на велики број оваквих инструмената, које израђују најбоље светске фабрике.

22.1. Фреквентометри. — Ови апарати служе за мерење фреквенција. У пракси се много употребљава *Фрамов** (Frahm) *шахметар* који је основан на принципу резонансе. Он се састоји, (сл. 22.1.а) из



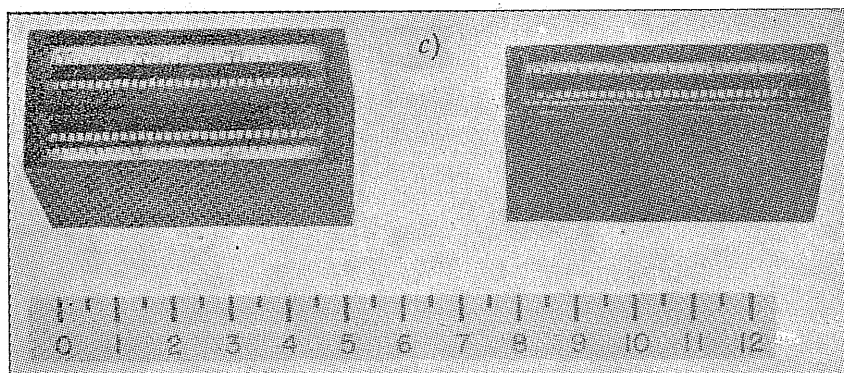
Сл. 22.1. — Фраhm-ов тахиметар

* F. Lux. ETZ, 1905.

више еластичних челичних ламела, различитих дужина које су уклештене на једном крају. Обично се ламеле праве у групама по четири комада, са разликом у фреквенцијама по пола осцилације у секунду. На слободном крају сваке ламеле, (сл. 22.1.b), налази се метални шилак, масе m , те на тај начин свака ламела представља конзолу, дужине l , оптерећену континуалном масом M и концентрисаном масом m на слободном крају. Период осцилације је, (чл. 1.9.),

$$T = 2\pi \sqrt{(M + 3m) l^3 / 9EI_x}. \quad (1)$$

Када се израчунају периоди осцилација свих ламела, тиме су познате и кружне фреквенције, па се уцртавају, (сл. 22.1.c), на траци. Када се тахиметар стави на машину, чија се фреквенција испитује, онда ће она



Сл. 22.1. — c) Трака тахиметра

ламела која је у резонанси са машином показивати на траци фреквенцију. На тај се начин може одредити и број обртаја машине (на пример, турбогенератора).

22.2. Индикатори. — Индикатор служи за одређивање промене притиска у цилиндру парне машине, компресора или пумпе (сл. 22.2.). Из добијених дијаграма може се даље обрачунати и снага машине.

Он се састоји из стублине S , (сл. 4.12.), везане са парним цилиндром. У стублини се налази клип (K), а на крају клипњаче је писаљка (P). На клипњачи се налази опруга, крутости s .

Притисак паре у цилиндру машине је променљив; $p = f(t)$. Ова функционална зависност је врло сложена али се може, са довољном тачношћу за праксу, узети да се мења по закону $p = p_0 + p_0 \sin \Omega t$.

Ако је G тежина покретних делова индикатора, A површина његовог клипа, онда је диференцијална једначина кретања

$$m \ddot{y} = -G - c(y + f_s) + A p_0 (1 + \sin \Omega t), \quad (2)$$

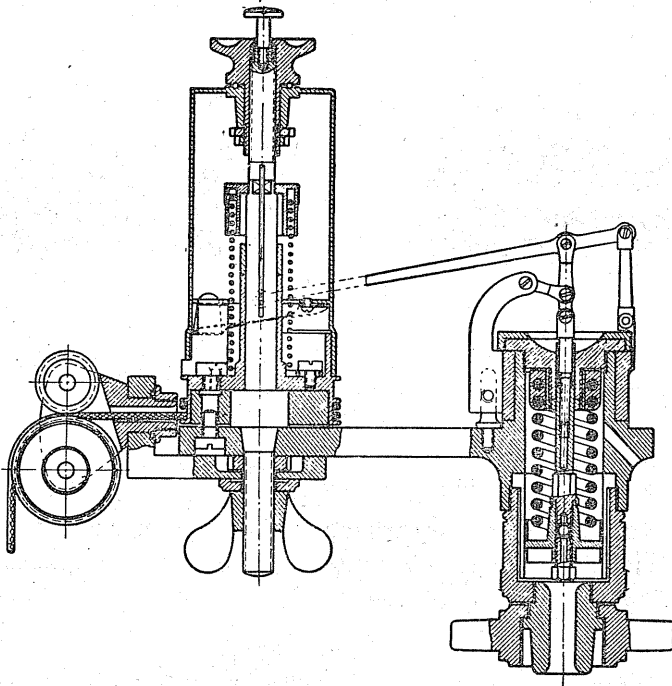
где је f_s издужење опруге услед тежине. Како је $cf_s = Ap_0 - G$, то је динамичка једначина принудних осцилација

$$\ddot{y} + \omega^2 y = h \sin \Omega t; \quad \omega^2 = c/m; \quad h = Ap_0/m, \quad (3)$$

и њено решење

$$y = C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t + \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} (\sin \Omega t - \psi \sin \omega t), \quad (4)$$

јер су за $t=0$, $y=0$, $\dot{y}=0$, $C_1=0$, $C_2 = -\psi h/(\omega^2 - \Omega^2)$, $\psi = \Omega/\omega$.



Сл. 22.2. — Индикатор

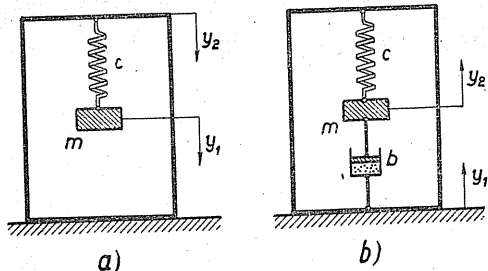
Реституциона сила опруге је cy , те је грешка мерења индикатора

$$\Delta = cy - Ap_0 \sin \Omega t = \frac{A p_0}{(1 - \psi^2)} (\psi^2 \sin \Omega t - \psi \sin \omega t). \quad (5)$$

Та грешка зависи од односа $\psi = \Omega/\omega$, па је утолико мања уколико је ψ мање, тј. ω веће. Обично је однос ψ мањи од 0,05. Број осцилација

у минути индикатора са опругом (на пример фирме *Maihak*) је око 30.000; код прецизног индикатора са осетљивом опругом је око 43.000.

22.3. Виброметри и акцелерометри. — *Виброметри и вибрографи* служе за испитивање и регистровање различитих осцилација. За мерење



Сл. 22.3. — Виброметар

осцилација у вертикалном правцу употребљава се виброметар схематски приказан на сл. 22.3.а. Он се састоји из оквира *o* који је обешена маса (*m*) помоћу опруге, крутости *c*. Ако се апарат стави на машину онда ће тачка вешања опруге вршити осцилације по закону

$$y_1 = A \cos \Omega t,$$

па је динамичка једначина кретања масе (*m*):

$$m \ddot{y}_2 + c (y_2 - y_1) = 0 \quad (6)$$

односно

$$m \ddot{y}_2 + c y_2 - c y_1 = c A \cos \Omega t. \quad (7)$$

Амплитуда принудних осцилација је

$$C = \frac{c A}{c - m \Omega^2} = \frac{A}{1 - \psi^2}; \quad (8)$$

она зависи од односа кружних фреквенција ψ .

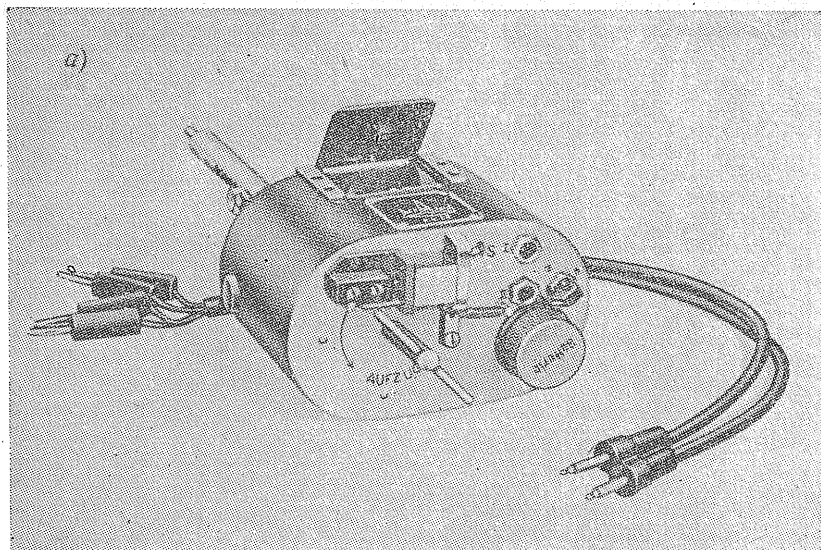
Апарат уствари мери релативно померање масе *m* у односу на оквир, тј. разлику $y = y_2 - y_1$, па како су обе осцилације хармонијске то су закон кретања и амплитуда:

$$y = R \cos \Omega t; \quad R = C - A = \left| \frac{\psi^2}{1 - \psi^2} \right| A, \quad (9)$$

те се амплитуда осцилација машине (*A*) може лако да одреди помоћу измерене амплитуде *R*, ако се знају односи фреквенција. Када је ω мало, тј. када је крутост опруге мала, тада се однос ψ ближи јединици, па се може узети да је $R \approx A$.

Релативно померање се региструје на покретној траци, па се овакав виброметар назива *виброграф*.

На сл. 22.4.a је приказан познати немачки ручни виброграф типа „Askania”. Он је величине $8 \cdot 14 \cdot 25$ (cm), тежине око 1,7 kg. Границе мерења: амплитуде од 0,05 mm до 4 mm, фреквенције до 250 Hz.



Сл. 22.4. — a) Askania виброграф

Повећање 1, 5, 20 и 50; папир ширине 25 mm, креће се брзином 40 mm/sec. Тастер (pickip, штифт) се приљуби уз машину која се испитује а апарат држи у руци (сл. 22.4.b).

На истом принципу се оснива и *акцелерометар*, *апарати за мерење убрзања*. Однос између амплитуда A и R у овом случају је

$$\psi^2 A = R(1 - \psi^2), \quad \text{тј.} \quad \Omega^2 A = (1 - \psi^2) R \omega^2. \quad (10)$$

Ако инструмент има велику сопствену кружну фреквенцију (ω) онда је ψ врло мало, па се може узети да је $\Omega^2 A \approx R \omega^2$.

Незгода овога инструмента је баш у томе што је кружна фреквенција (ω) доста велика те може доћи до резонансе при вишим хармоничима. Због тога се уграђује у апарат и гушитељ, (сл. 22.3.b). У овоме случају је диференцијална једначина кретања масе (m):

$$m \ddot{y}_2 + b(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + c(y_2 - y_1) = 0. \quad (11)$$

Како је релативно померање $y = y_2 - y_1$ и закон кретања $y_1 = A \cos \Omega t$ то уношењем у горњу једначину следи да је

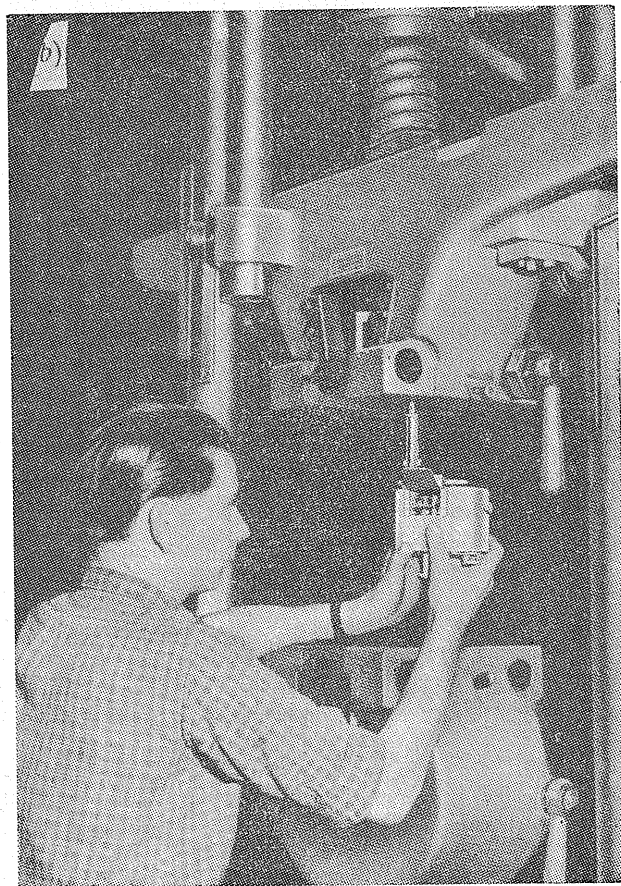
$$m \ddot{y} + b \dot{y} + c y = -m \ddot{y}_1 = m \Omega^2 A \cos \Omega t. \quad (12)$$

Према чл. 4.2. обр. 25, због $h = \Omega^2 A$, амплитуда ових осцилација је

$$N = \frac{A \psi^2}{\sqrt{(1 - \psi^2)^2 + 4 \psi^2 \zeta^2}},$$

те је

$$\Omega^2 A = N \omega^2 \sqrt{(1 - \psi^2)^2 + 4 \psi^2 \zeta^2}. \quad (13)$$



Сл. 22.4. — б) Примена Askaniya вибрографа

Вредности корена на десној страни горње једначине зависе од вредности коефицијената ψ и $\zeta = \delta/\omega$. Неке карактеристичне вредности дате су у табlici 22.1. на стр. 481.

Таблица 22.1.

$\sqrt{(1-\psi^2)^2 + 4\psi^2 \zeta^2}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,6	1	0,9972	0,9895	0,9786	0,9675	0,9605	0,9633	0,9827	1,0253	1,097
0,7	1	0,9998	1,0000	1,0027	1,0096	1,026	1,056	1,105	1,176	1,274

Ако је, дакле, $\zeta = 0,6$ онда за $0 < \psi < 0,8$ разлика износи само око 4%; за $\zeta = 0,7$ и $0 < \psi < 0,4$ разлика износи свега око 1% у односу на јединицу, те се за ове вредности може узети да је $\Omega^2 A \approx \omega^2 N$.

За велике вредности амплитуде A (случај виших хармоника) амплитуда релативног померања (N) је врло мала, те се може измерити апаратом.

На сл. 22.5.a приказан је схематски Geiger-ов виброграф* за хоризонталне а на сл. 22.5.b за вертикалне осцилације. У првом случају је кретање чисто хармонијско а у другом принудно, те су једначине

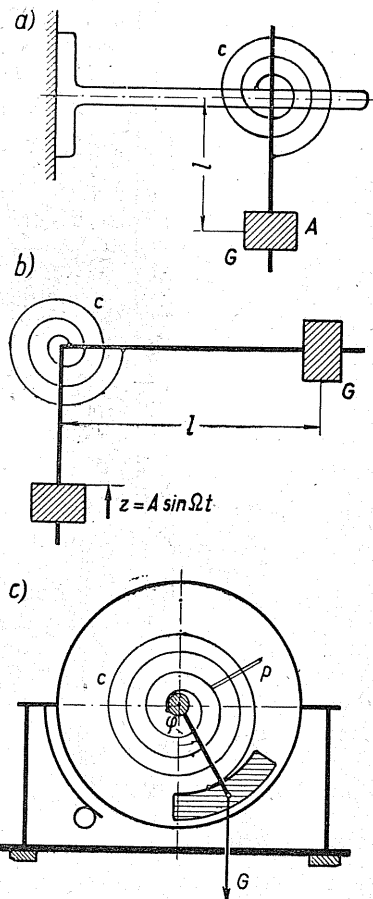
$$a) \quad J \ddot{\varphi} + (c + G l) \varphi = 0; \\ \omega^2 = \frac{c + G l}{J}; \quad (14)$$

$$b) \quad J \ddot{\varphi} + c \varphi = -m l \ddot{z} = m l \Omega^2 A \sin \Omega t; \\ \varphi = \frac{m l \psi^2 A}{J (1 - \psi^2)} \sin \Omega t.$$

Овакав виброграф за регистровање осцилација темеља машина има клатно тежине G , (сл. 22.5.c), које спирална опруга, крутости c , држи нагнуто под углом α према вертикали. Како су енергије

$$E_k = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2; \quad (15)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \mathfrak{M} \varphi = \frac{1}{2} (c + G s \cos \alpha) \varphi^2$$



Сл. 22.5. — Geiger-ов виброграф

* Geiger J. — Mechanische Schwingungen. Berlin, 1927., S 219.

то је период осцилације

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{c + G s \cos \alpha}} \quad (16)$$

На принципу вибрографа основани су и *сеизмографи* за регистравање Земљиних потреса. За случај регистравања хоризонталних Земљиних померања примењује се хоризонтално клатно, као специјални случај косог клатна*.

Један сеизмограф са тастером (pickup) приказан је на сл. 22.6. Када је сандук на растојању x онда је маса m на растојању y од равнотежног положаја па је

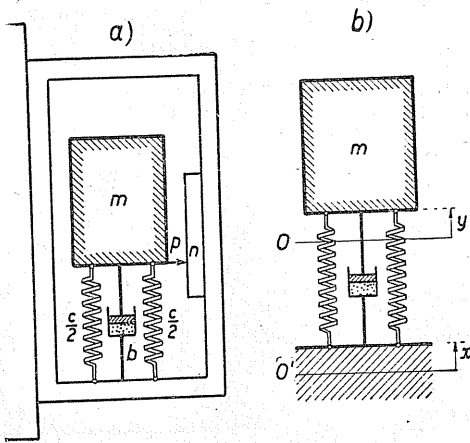
релативно померање $z = y - x$. Ако је закон потреса Земљине коре $x = A \cos \Omega t$, тада се добија диференцијална једначина

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + cz = A m \Omega^2 \sin \Omega t,$$

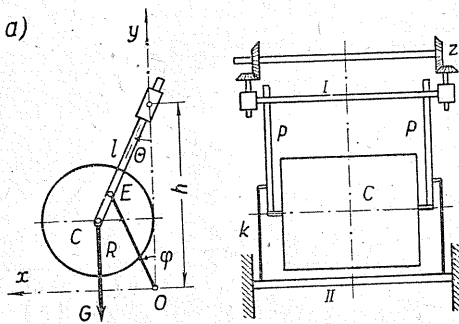
то јест истог облика као (12), па је амплитуда представљена са (13). Када је опруга мека $\omega \ll \Omega$ тада је $N \approx A$ а фазни угао између z и x износи $\alpha = 180^\circ$. Међутим, када је опруга јака ($\omega \gg \Omega$) тада је

$$N \approx A \Omega^2 / \omega^2; \quad \omega^2 = c/m.$$

На принципу сеизмографа је конструисан и *Schlick-ов палограф*** . Овај се апарат састоји из хоризонталног клатна, тежине G , (сл. 22.7.а), обешеног о две полуге (p) које су у вези са вратилом I. Полуге (p) придржавају криваје (k), дужине R , које могу да се обрћу око непомичне осовине II. Вратило I има преносни уређај са ко-



Сл. 22.6. — Сеизмограф



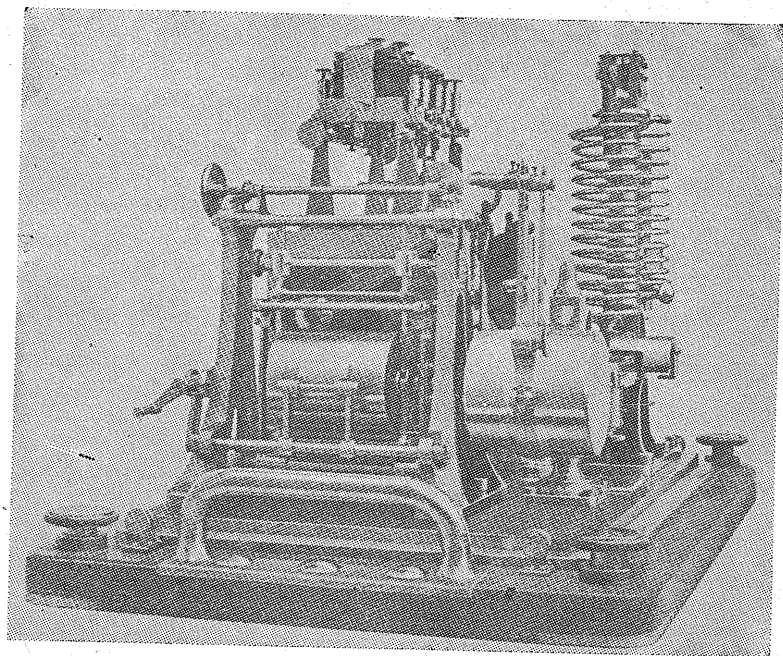
Сл. 22.7.—а) Схема Schlick-овог палографа

ничним зупчаницама (z), тако да се може мењати висина h .

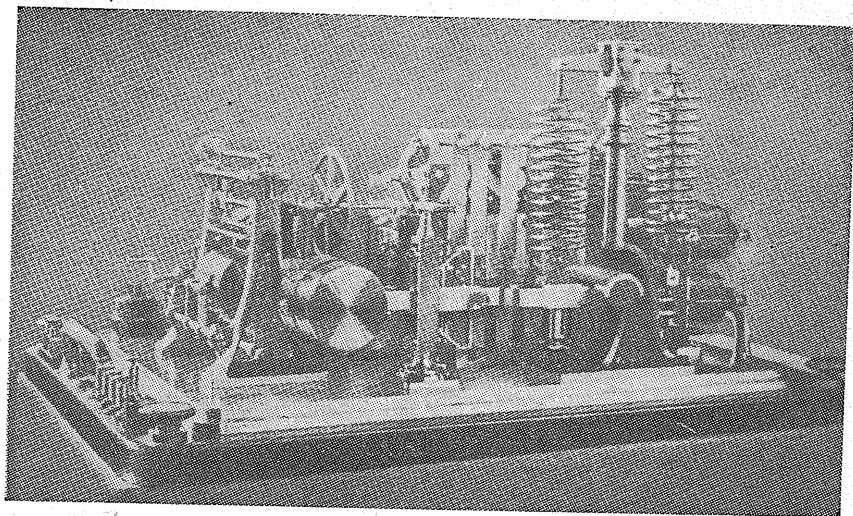
* Динамика, чл. 17, страна 261.

** О. Schlick. — On Apparatus for Measuring and Registering the Vibrations of Steamers; 1893.

Die Untersuchung der Vibrationserscheinungen von Dampfern. Berlin, 1903.



Сл. 22.7. — б) Schlick-ов палограф



Сл. 22.7. — с) Schlick-ов палограф

Узмимо координатни систем у тачки O , онда су координате средишта клатна

$$x_C = R \sin \varphi + l \sin \theta; \quad y_C = R \cos \varphi - l \cos \theta, \quad (17)$$

па су динамичке једначине кретања средишта

$$M \ddot{x}_C = -F \sin \theta; \quad M \ddot{y}_C = -G + F \cos \theta, \quad (18)$$

где је F сила у полузи (p). Елиминишући F из ових једначина, с обзиром на једначину (17), добија се

$$R[\cos(\varphi + \theta) \ddot{\varphi} - \sin(\varphi + \theta) \dot{\varphi}^2] + l \ddot{\theta} = -g \sin \theta. \quad (19)$$

Како је из тригонометријских односа

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{R \sin \varphi}{h - R \cos \varphi} \approx \frac{R \varphi}{h - R} \approx \theta,$$

то се за мале осцилације добија једначина

$$\ddot{\varphi} - \frac{h}{H} \varphi \dot{\varphi}^2 + \frac{g}{H} \varphi = 0 \quad (20)$$

где је $H = h + l - R$.

Једначина (20) сменом $\dot{\varphi} = p$; $\ddot{\varphi} = p (dp/d\varphi) = p p'$, своди се на облик

$$p dp = \frac{h p^2 - g}{H} \varphi d\varphi \quad (21)$$

па интегралењем добијамо

$$\varphi^2 + C_1 = \frac{H}{h} \ln(h p^2 - g); \quad p = \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{g + C e^{h\varphi^2/H}}{h}}. \quad (22)$$

Како је за $t=0$, $\dot{\varphi}=0$, $\varphi=\varphi_0$ то је $C = -g e^{-h\varphi_0^2/H}$, те је

$$\dot{\varphi} = \omega = \sqrt{\frac{g}{h} [1 - e^{h(\varphi^2 - \varphi_0^2)/H}]}. \quad (23)$$

Пошто је за највећу негативну амплитуду — φ_2 такође $\dot{\varphi}=0$, она се може лако одредити из тога услова:

Ако се предњи израз (23) развије у ред и узме само први члан реда добија се

$$\dot{\varphi} = \omega = \sqrt{\frac{g}{he^u} \left\{ \frac{h}{H} (\varphi_0^2 - \varphi^2) + \frac{h^2}{H^2} (\varphi_0^4 - \varphi^4) + \dots \right\}} \approx \sqrt{\frac{g}{He^u}}; \quad u = \frac{h\varphi_0^2}{H}, \quad (24)$$

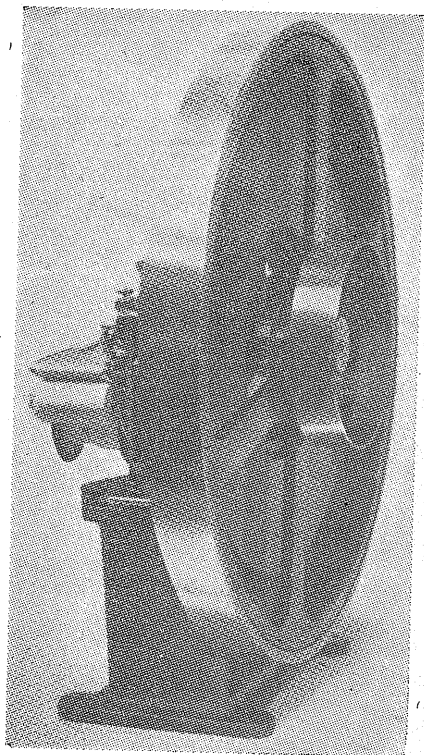
па је период осциловања

$$T \approx \frac{2\pi}{\omega} \approx 2\pi \sqrt{\frac{H}{g} e^{h\varphi_0^2/H}}. \quad (25)$$

Овај период *није изохрон*, јер зависи од амплитуде φ_0 и дужине H .

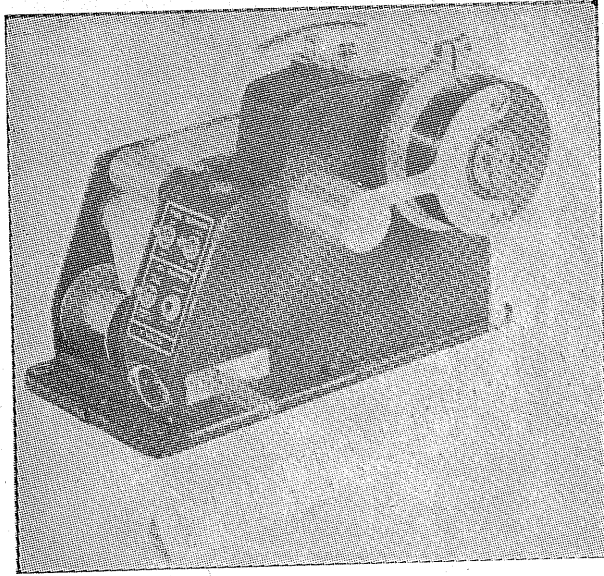
22.4. Торзиометар. — Торзиометар и торзиограф су основани на истом принципу као и виброметар, само служе за одређивање амплитуда и фреквенција торзијских осцилација. Често се један исти апарат може употребити и као виброметар и као торзиометар само ако се промени маса (m). Због тога се ова маса назива *сеизмички* део апарата, јер је основни принцип њене примене сеизмограф.

У примени је и *Amsler-ов торзиометар* који омогућава да се угао торзије чита помоћу светлосног уређаја, а затим се лако може одредити и торзијски момент када се зна крутост вратила. Поред овог торзиометра често се примењује *Geiger-ов торзиометар*. Он се састоји из једне ременице, (сл. 22.8.), која је чврсто насађена на вратилу апарата. Ременицу покреће главно вратило каишним уређајем. На оси апарата налази се замајца са спиралном опругом крутости s , тако да између неравномерног обртања ременице и замајца постоји релативно кретање. Ово се релативно кретање помоћу специјалних полука преобраћа на радијално и аксијално кретање које омогућава регистровање осцилација.

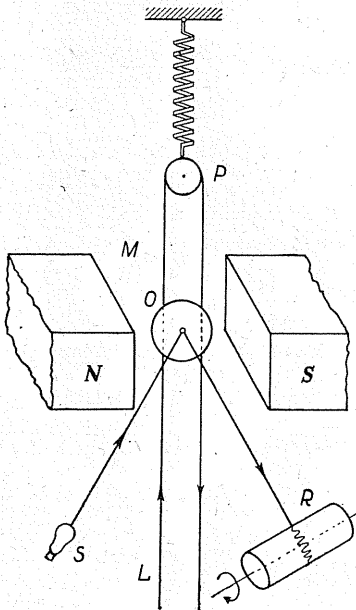


Сл. 22.8. — Geiger-ов торзиометар

На сл. 22.9. приказан је Сох-ов торзиограф који представља модерну верзију Geiger-овог торзиографа. Кривајни уређај преобраћа



Сл. 22.9. — Сох-ов торзиограф



Сл. 22.10. — Светлосни тракасти осцилограф

релативно угаоно померање између сеизмичке масе и точка у линеарно кретање преносног вртила.

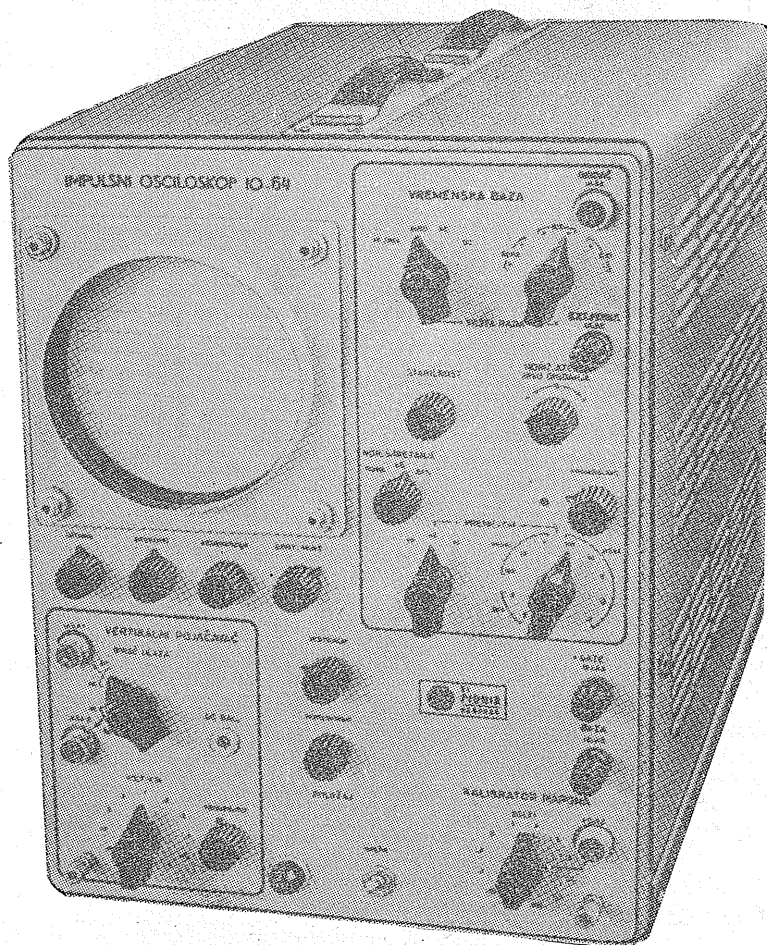
22.5. Осцилографи. — Светлосни тракасти осцилатор је основни и најопштији апарат за мерење осцилаторних карактеристика. Његова принципска схема приказана је на сл. 22.10. Два проводника (L) везана у петљу (P) налазе се у пољу врло јаког магнета (M). Услед тока струје и дејства магнета јављају се две силе које дају момент за обртну тачку петље (P) за коју је везана опруга. На петљи се налази огледало (O) које се због дејства спрега сила обрће, те скреће одбијени светлосни зрак (S) који се региструје на бубњу (R). Скретање овог зрака је мера јачине пропуштене струје.

Као извор светлости раније се примењивао светлосни лук а сада лампе.

Диференцијална једначина осциловања је

$$\ddot{y} + 2\delta \dot{y} + \omega^2 y = h i(t), \quad h = \text{const} \quad (26)$$

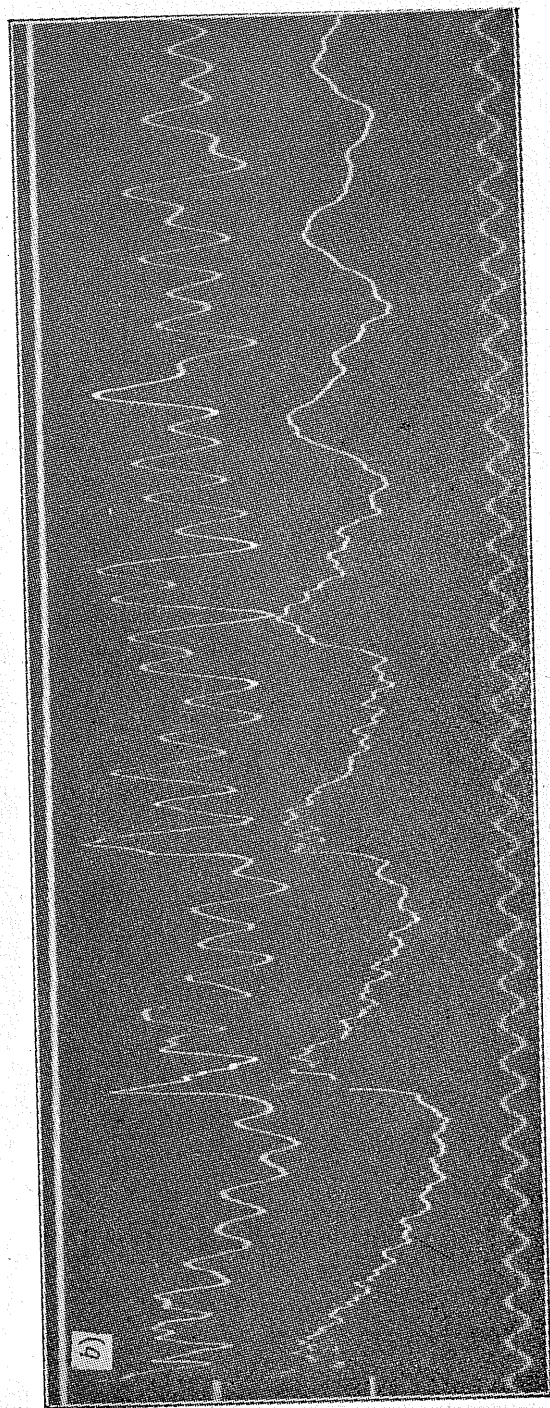
коју смо имали и код акцелерометра (12).



Сл. 22.11. — а) Електронски осцилограф

Електронски осцилограф (сл. 22.11.а) служи за лабораторијска испитивања. Траг светлосне мрље види се на екрану, па се може и фотографисати, (сл. 22.11.б).

На слици је приказан импулсни осцилоскоп који се може, због калибрисане осетљивости и времена трајања временске базе, употребити и као мерни инструмент.



Сл. 22.11. — б) Осцилограм

ЛИТЕРАТУРА

- Айзерман М. А. — Лекций по теории автоматического регулирования. Физматгиз, 1958.
- Ананьев И. В. — Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем. Москва, 1946.
- Андронов А. А. — Chaikin С. Е. — Theory of Oscillations. Princeton, 1949.
- Анђелић Т. — Основы механике непрекидних средина. Београд, 1950.
- Appel P. — Traité de Mécanique Rationnelle. Paris, 1931.
- Арнольевич И. — Основы теоријске механике. Београд, 1947.—49.
- Бабаков И. М. — Теория колебаний. ГИТТЛ, 1959.
- Baker J. G. — Forced Vibration with Nonlinear Spring Constants. ASME, Vol. 54, 1932.
- Bateman H. — Partial Differential Equations of Mathematical Physics. Cambridge, 1932.
- Безухов Н. И. — Динамика сооружений. Москва, 1947.
- Biezeno G. V. — Grամmel R. — Technische Dynamik. Berlin, 1939.
- Билимовић А. — Рационална механика II. Београд, 1951.
- Blanc Ch. — Les équations différentielles de la technique. Neuchatel, 1947.
- Боголюбов Н. Н. — Митропольский Ю. А. — Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, 1958.
- Brown E. W. — Elements of the Theory of Resonance. London, 1932.
- Булгаков Б. В. — Колебания. ГИТТЛ, 1954.
- Бутенин В. Н. — Элементы теории нелинейных колебаний. Ленинград, 1962.
- Бухгольц Н. Н. — Основной курс теоретической механике, ч. II. Москва, 1937.
- Cain B. S. — Vibration of Rail and Road Vehicles. New York, 1940.
- Collatz L. — Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Leipzig, 1949.
- Courant R. — Hilbert D. — Methods of Mathematical Physics. New York, 1953.
- Четаев Н. Г. — Устойчивость движения. Гостехиздат, 1946.
- Den Hartog J. P. — Mechanical Vibrations. New York, 1947.
- Duffing G. — Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz. Braunschweig, 1918

- Favre H. — Cours de Mécanique, t. III. Paris, 1949.
- Филоненко—Бородич М. М. — Теория упругости. Москва, 1947.
- Finci B. — Udeschini P. — Esercizi di Meccanica razionale. Milano, 1952.
- Föppl O. — Grundzüge der Technischen Schwingungslehre. Berlin, 1931.
- Frazer R. A. — Duncan W. J. — Collar A. R. — Elementary Matrices and Some Applications to Dynamics and Differential Equations. London, 1938.
- Гантмахер Ф. Р. — Крейн М. Г. — Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. Москва, 1950.
- Geiger J. — Mechanische Schwingungen, Berlin, 1927.
- Grammel R. — Der Kreisel, seine Theorie und seine Anwendungen, I, II Band, II Aufl. Stuttgart, 1950.
- Hadamard J. — Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique. Paris, 1927.—1930.
- Hahn W. — Theorie und Anwendung der direkten Methoden von Liapunov. Springer, Berlin, 1959.
- Hetényi M. — Handbook of Experimental Stress Analysis, New York, 1957.
- Hildebrand F. B. — Methods of Applied Mathematics. New York, 1952.
- Hlitičijev J. — Poglavlja iz teorije elastičnosti. Beograd, 1950.
- Hohenemser K. — Prager W. — Dynamik der Stabwerke. Berlin, 1933.
- Holba J. J. — Die kritischen Drehzahlen von geraden Wellen. Wien, 1936.
- Hort W. — Technische Schwingungslehre. Berlin, 1922.
- Иориш Ю. И. — Виброметрия. Москва, 1963.
- Jahnke E. — Emde F. — Tables of Functions. Leipzig, 1933.
- Kamke E. — Differentialgleichungen. Leipzig, 1942.
- Карамата Ј. — Комплексан број. Београд, 1950.
- Kármán Th. — Biot M. — Mathematical Methods in Engineering. New York, 1940.
- Кашанин Р. — Виша математика II. Београд, 1950.
- Kimball A. L. — Vibration Prevention in Engineering. New York, 1932.
- Klotter K. — Technische Schwingungslehre, I Band. Berlin, 1951.
- Крылов А. Н. — Лекции о приближенных вычислениях. Ленинград, 1933.
- ” — О неким диференцијалним једначинама математичке физике (превод). Београд, 1952.
- Крылов Н. М. — Боголюбов Н. — Введение в нелинейную механику. Киев, 1937.
- ” — Introduction to Non-linear Mechanics. Princeton, 1947.
- Lamb H. — Higher Mechanics. Cambridge, 1929.
- Lainé E. — Exercices de Mécanique. Paris, 1948.

- Leonhard A. — Die selbsttätige Regelung. Springer, 1949.
- Летов А. М. — Устойчивость нелинейных регулируемых систем. ГИТТЛ, 1955.
- Liénard A. — Etude des oscillations entretenues. Rev. Gén. d'Elect. 1928.
- Лойцянский Л. Г. — Лурье А. И. — Курс теоретической механики, II част. Москва, 1948.
- Лурье А. И. — Чекмарев А. И. — Вынужденные колебания в нелинейной системе с характеристикой, составленной из двух прямолинейных отрезков. ПИММ, АН СССР, т. I. в. 3, 1938.
- Ляпунов А. М. — Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ, 1935.
- Magnus K. — Schwingungen. Teubner, Stuttgart, 1961.
- Малкин И. Г. — Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. ГИТТЛ, 1956.
- Marković Ž. — Uvod u višu analizu. Zagreb, 1948.
- McLachlan N. W. — Bessel Functions for Engineers. New York, 1934.
- Мещерский И. В. — Сборник задач по теоретической механике. XIV изд. Москва, 1947.
- Minorsky N. — Introduction to Non-linear Mechanics. Mich. 1947.
- Myklestad N. O. — Vibration Analysis. New York, 1944.
- Nyquist N. — Regeneration Theory. Tech. Jour. II (1932).
- Николай Е. Л. — Теория гироскопов. Москва, 1948.
- Пејовић Т. — Диференцијалне једначине II. Београд, 1948.
- Poincaré H. — Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Vol. I. Gauth. — Villars, Paris, 1892.
- Pöschl Th. — Lehrbuch der Technischen Mechanik. Berlin, 1930.
- Rausch E. — Maschinenfundamente und andere dynamische Bauaufgaben. Berlin, 1936.
- Rayleigh lord (J. W. Strutt) — The Theory of Sound. New York, 1945.
- Rocard Y. — Dynamique générale des vibrations. Paris, 1949.
- Rocard — Relaxation, synchronisation et demultiplication de frequence. Bull. Franc. des Elect., 1937.
- Routh J. E. — Die Dynamik der Systeme starrer Körper. Leipzig, 1898.
- J. La Salle — S. Lefschetz—Stability by Liapunov's Direct Method with Applications. Academic Press. New York—London, 1961.
- Салтиков Н. — Парцијалне диференцијалне једначине. Београд, 1949.—51.
- Scanlan R. H. — Rosenbaum R. — Introduction to the study of aircraft vibration and flutter. New York, 1951.
- Schneider E. — Mathematische Schwingungslehre. Berlin, 1924.
- Schönfeld H. — Regelungstechnik. Berlin, 1953.
- Schönfeld H. — Regelungstechnik. VEB Ver. Technik. Berlin, 1953.
- Schuler M. — Mechanische Schwingungslehre. Hannover, 1946.

- Смирнов А. Ф. — Статическая и динамическая устойчивость сооружений. Москва, 1947.
- Соболев С. Л. — Уравнения математической физики. Москва, 1954.
- Söchting F. — Berechnung mechanischer Schwingungen. Wien, 1951.
- Степанов В. В. — Курс дифференциальных уравнений. Москва, 1945.
- Stoker J. J. — Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems. Int. Publ. INC. New York—London, 1950.
- Strutt M. J. O. — Lamésche, Mathiesche und verwandte Funktionen. Springer, 1932.
- Thaler G. J. — Broen R. G. — Servomechanism Analysis. New York, 1953.
- Timoshenko P. S. — Theory of Elasticity. New York, 1936.
- ” — Theory of Elastic Stability. New York, 1936.
- ” — Vibration Problems in Engineering. New York, 1937.
- ” — Young D. H. — Advanced Dynamics. New York, 1948.
- ” — ” — Engineering Mechanics. New York, 1951.
- Thomson W. T. — Mechanical Vibration. London, 1950.
- Thomson W. (lord Kelvin) — Popular Lectures and Addresses. London, v. 2., 1894.
- Thornton D. L. — Mechanics Applied to Vibrations and Balancing. London, 1950.
- Tolle M. — Regelung der Kraftmaschinen. Berlin, 1921.
- Tong N. Kin — Theory of Mechanical Vibration, New York—London, 1960.
- Van der Pol B. — Forced Oscillations in a System with Non-linear Resistance. Phil. Mag. 1927.
- Watson G. N. — Theory of Bessel Functions. London, 1922.
- Whittaker E. I. — A treatise on the Analytical Dynamics. Cambridge, 1937.
- Whittaker E. T. — Watson G. N. — A Course of Modern Analysis. Cambridge, 1940
- Ziegler H. — Erzwungene Schwingungen mit konstanter Dämpfung. Ing. Arch. Vol. IX. 1938.
- Zurmühl R. — Matrizen. Berlin, 1950.

РЕГИСТАР ИМЕНА

(Бројеви означавају стране)

- Абел (Abel) 454
 Амслер (Amsler) 485
- Белтрами (Beltrami, E.) 322
 Вернули (Bernoulli, Daniel) 332, 354
 Бесел (Bessel, Wilhelm F.) 95, 413, 423
 Био (Biot, M. A.) 294
 Богољубов (Боголюбов Н. Н.) 452
 Бор (Bohr H.) 34
- Вајерштрас (Weierstrass) 96
 Ван дер Пол (van der Pol) 454
 Ват (Watt, James) 289
 Вејган (Weigand, A.) 471
 Виет (Viète F.) 278
 Вилберфорс (Wilberforce) 223
 Вилис (Willis) 172
 Волф (Wolf) 6, 85
- Гајгер (Geiger, J.) 204, 485
 Галеркин 398, 424, 450
 Галилеј (Galilei, Galileo) 1
 Гаус (Gauss, Carl Friedrich) 95, 431
 Гибз (Gibbs, Josiah Willard) 103
 Грамел (Grammel, Richard) 433
 Греј (Gray) 466
 Грин (Green, George) 19
- Даламбер (d' Alembert, Jean le Rond) 324, 328
 Данкерле (Dunkerley, S.) 199, 392
 Декарт (Descartes R.) 283
 Диамел (Duhamel) 112
 Дирак (Dirac) 121
- Еванс (Evans) 293
 Еуклид 283
 Ери (Airy, G. B.) 58
- Жермен (Germain, Sophie) 421
 Жубер (Joubert) 131
- Игуши (Igushi) 428
 Инс (Ince E. S.) 469
- Јакоби (Jacobi, Charles G.) 297, 442
 Јакобсен (Jakobsen) 450
 Јанг (Young, Thomas) 320
- Карман (Kármán, Theodor von) 294
 Карсон (Carson) 115
 Кастиљано (Castigliano, A.) 322
 Келвин (Lord Kelvin, Thomson W.) 132, 377
 Кениг (König, Samuel) 212
 Кирхоф (Kirchoff, Robert) 391, 418, 422
 Клапейрон (Clapeyron) 158, 322, 379
 Кокс (Cox) 486
 Колац (Collatz) 474
 Коши (Cauchy, Louis Augustin) 315, 462
 Крамер (Cramer) 303
 Крилов (Крыловъ, А. Н.) 371
 Крилов (Крыловъ, Н. М.) 452
 Кулон (Coulomb Ch.) 63, 458
- Лавал (Laval) 258
 Лагранж (Lagrange, Joseph Louis) 43, 46, 51, 75, 109, 139, 145, 158, 186, 207, 226, 421
 Ламе (Lamé, Gabriel) 320
 Лаплас (Laplace, Pierre Simon) 115, 412, 421
 Лежандр (Legendre, Adrien) 442
 Лем (Lamb, H.) 424, 435
 Ленчестер (Lanchester) 255
 Лиенард (Liénard) 461
 Линдштет (Lindstätt) 444
 Лисажу (Lissajours, Jules) 55
 Лопитал (l'Hospital) 83, 376
- Љапунов (Ляпунов А. М.) 164
- Мајснер (Meissner, E.) 471
 Мак Роберт (Mac Robert) 466
 Матје (Mathieu, E.) 467
 Мексвел (Maxwell) 17
 Метјус (Matheus) 466
 Мешнерски И. В. 231
 Мизес (von Mises) 442
 Мичел (Michel, J. H.) 322

Моавр (Moivre) 27
 Мор (Mohr, O.) 202
 Морли (Morley, A.) 201

Навије (Navier, Louis Marie) 315
 Нојман (Neumann) 435

Њутн (Newton, Issac) 174, 294

Обербек (Oberbeck) 215, 224
 Ојлер (Euler, Leonhard) 27, 95, 245, 305,
 378
 Ом (Ohm) 130

Поансо (Poinsot, Louis) 421
 Поасон (Poisson, Siméon-Denis) 320, 332
 Прагер (Prager, W.) 354
 Птоломеј (Клаудије) 32

Рајнштајн (Reinstein, E.) 411
 Раут (Routh Edward John) 274, 282
 Рафсон (Raphson) 174
 Рели (lord Rayleigh) 13, 76, 111, 273, 386,
 430
 Риц (Ritz, Walther) 273, 393, 424
 Рунге (Runge, C.) 103

Саразен (Sarazin) 60
 Саутвил (Southwell) 273, 427, 435
 Сен-Венан (Saint-Venant, B.) 318
 Силвестер (Sylvester, J. J.) 295
 Сименс (Simens) 261
 Стенсфилд (Stansfield, R.) 104
 Стодола (Stodola, A.) 202, 261

Стокс (Stokes, George) 377
 Страт (Strutt, M. Y. O.) 469

Тејлор (Taylor, Brook) 60, 249
 Тимошенко Ст. 195
 Толе (Tolle M.) 180
 Томатика (Tomatika S.) 428
 Томсон (види Келвин)

Флоке (Floquet) 468
 Фрам (Frahm) 255, 475
 Фробениус (Frobenius) 298
 Фуко (Foucault, Léon) 207
 Фурије (baron Fourier, Jean Baptiste)
 95, 332

Хайгенс (Huygens, Christian) 47, 223
 Хамилтон (Hamilton, William Rowan)
 326

Ханкам (Hahnkamm, E.) 254
 Хартог (den Hartog, J. P.) 104
 Хевисайд (Heaviside) 116
 Херц (Hertz) 2, 135
 Хил (Hill) 471
 Хладни (Chladny) 411
 Холцер (Holzer, H.) 180
 Хорнер (Horner) 161
 Хорт (Hort, W.) 268
 Хохенемсер (Hohenemser, K.) 354
 Хук (Hooke, Robert) 14, 316
 Хурвиц (Hurwitz, A.) 288

Шлик (Schlick, Otto) 292, 486
 Штурм (Sturm) 283

РЕГИСТАР

(Бројеви означавају стране)

- Абелова једначина 454
Адјунгована матрица 300
Адмитанца 132
Аксијалне осцилације 341
Активна сила 63
 снага 132
Активни завојак 9
 отпор 132
Акустика 129
Акцелерометар 478
Алгоритам Еуклидов 283
Амортизација 34
Амортизоване осцилације 34
Амортизовано кретање 35
Амплитуда осцилације 1, 80
 принудне силе 79
Анализа хармонијска 98
Анализатор хармонијски 106
Аналогије 129
Антисиметрична матрица 296
Антисиметричне осцилације 365
Апериодичко кретање 68
Апсорбер аутомобилски 255
 динамички 248
 Ленчестеров 255
 са амортизацијом 250
 торзијски 249
 Фрамов 255
Асимптотска стабилност 457
Асинхроне осцилације 30, 33
Асканиа виброграф 479
Астатичко клатно 60
Атрактивна сила 2
Аутономни систем 456
Беселов проблем 103
Беселова једначина 413, 466
 функција 414, 423
Бијење 35
Било 2
Брзина, генералисана 2
 критична 257, 282
 прецесије 265
 сопственог обртања 265
 таласања 329, 332
 угаона 3, 282
Брзина фазна 1, 330
 циклична 274
Брод 49
 ваљање 49
Број, карактеристични 334
 обртаја 2
 осцилација 2
 сопствени 334
 удара 2
Ваљање брода 49
Варијација дејства 326
 констаната 109
 координата 271
Варијациони рачун 398
Ватов регулатор 289
Везе, врсте 135
 геометријске 135
 двостране 135
 динамичке 140
 диференцијалне 135
 задржавајуће 135
 идеалне 135
 једностране 135
 кинематичке 135
 незадржавајуће 135
 реономне 135
 са трећем 63
 склерономне 135
 статичке 140
 стационарне 135
 холономне 135
Вектор, јединични 297
 матрица 297
 модул 304
 норма 304
 обртни 3
 ортогонални 300
 сопствени 306
 таласања 3
Верзор 3
Виброграф 478
 Асканиа 479
 Гајгеров 481
Виброметар 478
Возило 227

- Вратило
 вертикално 257
 лако 171
 са више дискова 262
 тешко 263
 хоризонтално 258
 Време бездимензионо 445
- Гајгеров виброграф 481
 торзиометар 485
- Галеркинова метода 398, 424
- Галопирање локомотиве 231
- Гама функција 450
- Гаусова кривина 431
 метода 95
- Генералисана, координата 136
 принудна сила 373
- Гибањ 396
- Гибзова појава 103
- Гироскопске силе 265
- Гироскопски ефект 265
 момент 265
- Главне координате 151
- Главни облици осцилација 153
 правци 153
- Гранични услови 353, 379, 426
 геометријски 393
 динамички 390
 накнадни 342
- Грета, проста 351, 356
 са еластичним ослоњцима 362
 слободна 359
 уклештена 362
- Грешка 95
- Гринеове функције 19
- Гушитељ 248
- Даламберов принцип 324, 328
- Данкерлеова метода 199, 392
- Деградиција енергије 75
- Дејство 326
- Декремент осцилације 70
- Детерминанта, Лагранжева 145
 Раутова 288
 система 145
 трансформације 302
 Хурвицова 288
- Дефект матрице 298
- Деформација 317
- Деформациони рад 20, 322
- Диадски производ 300
- Дивергенција 318
- Дилатација 317
 главна 318
 запреминска 318
 линеарна 317
 попречна 317
 уздужна 317
- Динамичка једначина трију момената
 379, 384
- Динамичке једначине кретања 137
- Динамички апсорбер 248
 притисак точка 232
 фактор 81
- Дирихлеова теорема 96, 271
- Диск ексцентрични 257
 центрични 257
- Дисконтинуитет прве врсте 95
- Дискриминанта форме 137, 306
- Диференцијална једначина,
 Беселова 413
 Мајснерова 471
 Матјеова 467
 таласна 326, 421
 Хилова 471
- Диференцијалне једначине,
 Белтрамијеве 322
 Лагранжеве 43, 51, 75, 109, 139, 145,
 153, 186, 207, 226, 421
 Ламеове 321
 система 137
- Дужина редукована клатна 47
- Евансово клатно 293
- Експонент карактеристични 468
- Екстремум, дејства енергије 13, 274,
 274
 интеграла 274
- Ексцентрични диск 258
- Експес, ранга 298
- Еластичност 313
- Електрични осцилограф 487
- Елементарни рад 7
- Елипса, енергије 154
 напона 154
- Елипсоид енергије 154
 Ламеов 316
 напона 316
- Елиптичка осцилација 55
- Елиптичке функције 442
- Елиптички интеграл 442
 потпуни 442
- Елиптичко клатно 209
- Елонгација 1
- Енергија, кинетичка 6, 137
 модифицирана 274
 потенцијална 6, 138, 274
 тотална 6, 137, 386
- Епитрохоида 32
- Епициклоида 32
- Еријево клатно 58
- Еуклидов алгоритам 283
- Ефект гироскопски 265
- Ефективне вредности 129
- Жива сила 6, 19, 137
- Жица 325, 331
- Жуберово правило 131
- Закон о одржању енергије 6
 Омов 130
 осциловања слободног 2
 принудног 155, 370
 Хуков 14, 316
- Запреминска густина 313
- Звоно 223
- Зврк, тешки симетрични 275
- Звучна виљушка 58

- Ивица плоче, слободно ослоњена 426
уклештена 427
- Идеалне везе 135
- Идеално тело 319
- Извод вектора, локални 324
стационарни 324
енергије 7
рада 7
- Изоклине 461
- Изохроност 44, 45
- Импеданца, механичка 82, 91
електрична 132
- Импулс силе 114
- Инваријанта 320
- Инверзна матрица 297
- Индикатор 93, 476
- Индуктанца 130
- Ince-Strutt-ова карта 469
- Инструмент за рег. осц. 480
- Интеграл, векторски 6
Диамела 112
елиптички 442
енергије 7
- Интегралне помоћу редова 465
- Интегралне криве 460
- Инфлуентне функције 19
- Јакобијев интеграл 297, 442
- Јакобијева матрица 297
- Јакобијеве функције 442
- Јангов модул 320
- Јединица имагинарна 3
комплексна 3
- Јединична матрица 296
функција 116
- Јединичне импулсне функције 121
- Јединични угиб 17
- Једнакост матрица 298
- Једначина, Абелова 454
Белтрамијева 322
Беселова 413, 466
карактеристична 306
коначних разлика 163, 175
Кошијева 315
Мајснерова 471
Матјеова 468
Навијеова 315
прве апроксимације 464
секуларна 306
таласна 326
трију момената 158, 383
фреквентна 144, 306, 394
- Једначине,
динамичке 4, 324, 383
диференцијалне кретања 4, 324,
383
- Лагранжеве 43, 75, 109, 139, 145,
186, 226
- Ламеове 321
- Мичелове 322
- Ојлерове 305
прве апроксимације 464
- Капацитанца 130
- Теорија осцилација
- Карактеристика 130
клатна 43
опруге 6
параболичка 443
симетрична 444
синусна 442
- Карактеристична вредност 334, 353
једначина 277, 353
- Карактеристични број 334
експонент 468
полином 277
- Карсонова трансформација 115
- Карта стабилности 469
- Кастиљанов образац 323
- Квадратна форма 139, 306
- Квазидијагонална матрица 297
- Квазиеластични коефицијенти 139, 439
- Кенигова теорема 212
- Килоцикл 2
- Кинематичке једначине 2
- Кинетичка енергија 2, 6, 43, 51, 75, 109,
145, 186, 207
- Кирховљеви услови 422
- Клапејронова теорема 158, 322
- Клатно, астатичко 60
двогубо математичко 212
физичко 220
- Евансово 293
елиптичко 209
- Еријево 58
- идеално физичко 47
- конусно 297, 282
- косо 47, 59
- котрљајно 47, 212
- лабилно 60
- математичко 43
- мултифиларно 52, 249
- Обербеково 215
- реверзибилно 47
- са опругом 292
- Саразеново 60
- секундно 44
- симпатично 215
- сложено математичко 217
- сферно 207
- Тејлорово 60, 249
- трогубо 225, 247
- физичко 34, 59, 225
- физичко комбиновано 238
- хоризонтално 59
- циклоидно 44
- Клизање 63
- Клин 396
- Коефицијент, амортизације 68
гибкости греде 19,
гушења 68
еластичности 320
инерцијски 138, 439
квазиеластични 139, 439
отпора 66
отпора, модифиц. 450
расипања 68
смицања 368
спрезања 229

- Коэффициент трења 60
 успостављања 139
 Фуријев 95
 Коксов торзиограф 486
 Коленасто вратило 126
 Колинеарне осцилације 26
 асинхроне 30
 синхроне 26
 Количина кретања 161
 Комплексна, јединица 5
 матрица 295
 Конволуција 119
 Кондуктивност 132
 Конзола 358
 Константа опруге 7
 Континуални носачи 194
 Конусно клатно 207
 Координате, генералисане 136, 338
 главне 151
 нормалне 153
 цикличке 210
 Косо клатно 47
 Котрљајно клатно 47
 Кофактор 147
 Кошијеве једначине 315
 Крамерово правило 303
 Кретање, амортизовано 68
 апериодичко 68
 изохроне 2, 43, 44
 квази-периодичко 34
 конзервативно 6
 нестабилно 277
 опадајуће 69, 277
 осцилаторно 6, 69, 277
 принудно 79
 сложено 79, 107
 стабилно 277
 стационарно 265, 274
 Криве енергије 457
 Кривина Гаусова 431
 Критеријум, Вајерштрасов 96
 нестабилности 272, 470
 Раутов 286
 стабилности 272, 470
 Хурвицов 288
 Критична брзина
 гироскопског дејства 266
 друге врсте 261
 прве врсте 257
 Ојлерова сила 378
 Круг, енергије 154
 Моров 154
 фреквенција 154
 Кружна, учестаност 2
 фреквенција 2
 Кружне фреквенције инкоменсура-
 билне 33
 коменсурабилне 33
 несамерљиве 33
 самерљиве 33
 Кружно клатно 43
- Крутост, аксијална 343
 истезна 343
 јака 440
 мека 440
 опруге 7, 17
 коничне 17
 цилиндричне 17
 плоче 419
 редукована 16
 савојна 19, 351
 торзијска 9, 51
 увојна 50, 401
 упредна 401
 Кулиса, Волфа 6, 85
 Кулисни механизам 6
- Лавалово правило 258
 Лагранжева детерминанта 145
 метода варијације констанатна 109
 мултипликатора 195
 Лагранжеве једначине 43, 75, 109, 139,
 145, 186, 226
 Ламеов елипсоид напона 316
 Ламеове једначине 321
 константе 320
 Ламеови коефицијенти 320
 Ланац везани 164
 слободни 165
 хомогени 164
 Лапласов интеграл 115
 оператор 115, 321
 Лапласова једначина 402
 трансформација 115, 345, 377
 Лежен Дирихлеова теорема 96, 271
 Лежиште, еластично 362
 круто 351
 са опругом 362
 Лик покретне тачке 455
 Линеарна, супституција 302
 трансформација 302
 форма 139, 302
 Линије Хладнијеве 411
 чворне 303, 408
 Лисажуове фигуре 56
 Логаритамска спирала 70, 459
 Логаритамски декремент 70
 Локомотива 231
 Лонгитудинална осцилација 341
 Лук на три зглоба 39
- Мајор матрице 298
 Максвелов коефицијент 17
 Мале осцилације система, са једним
 ст. сл. осц. 1
 више ст. сл. осц. 135
 Математико клатно 43
 Матјеова једначина 468
 Функција друге врсте 469
 прве врсте 469
 Матрица, 295
 адјунгована 300
 антисиметрична 296
 вектор 289
 врста 297

- Матрица, дефект 298
 дијагонална 296
 ексцес 298
 инверзна 297
 Јакобијева 297
 јединична 296
 квадратна 295
 квазидијагонална 297
 колона 297
 комплексна 295
 косохермитска 296
 мајор 298
 модул 297
 несингуларна 297
 нула 295
 нулитет 298
 ортогонална 304
 пад ранга 298
 партиција 301
 правоугаона 295
 ранг 298
 рачунање 298
 реална 295
 реципрочна 297
 симетрична 295
 сингуларна 297
 сопствених вектора 307
 транспонована 295
 трансформације 303
 хермитска 296
- Мегацикл 2
- Мексвелови дуални коефицијенти 238
 утицајни коефицијенти
 за померање 245
 обртање 245
- Мембрана, 325
 квадратна 408
 кружна 412
 кружно-прстенаста 410
 правоугаона 405
 таласна једначина 403
- Мегацентар 50
- Метацикличка висина 50
- Метода, апроксимација 100, 444
 Бернулијева 332
 варијације констаната 109
 Галеркинова 398
 Гаусова 104
 графичка 178, 441
 графоаналитичка 19
 Даламберова 328, 332
 Данкерлеова 199, 392
 деформација 19
 Дуфингова 447
 енергије 12, 24, 273, 386, 395
 изоклина 460
 итерације 311
 Клапејронова 379
 лагано променљиве амплитуде 454
 Лагранжева 109
 Лиенардова 461
 Линдштетова 444
 Љапунова 164
- Метода Мизесова 82
 Морлијева 201, 263
 најмањих квадрата 104
 нумеричка 181, 441
 Њутн-Рафсонова 174, 294
 операциона 115
 описне функције 452
 партикуларних интеграла 332
 приближна 180, 386
 Птоломејева 32
 Релијева 12, 273, 386
 Рицова 273, 393, 416, 424
 Рунгеова 103
 тригонометријска 163
 трију момената 379
 Фуријеова 95
 хармонијског баланса 452
 Холцерова 180
- Механизам кулисни 6
 Wolf-ов 6
- Механичка, аналогија 136
 импеданца 82, 91
- Механички апарати 475
 инструменти 475
 систем 135
- Минутни број обртаја 2
- Множилац, Лагранжев 195
 резонансе 81
- Модифициран коеф. отпора 445, 450
- Модифицирана потенц. енергија 274
- Модул, вектора 304
 еластичности 320
 клизања 30, 320
 компресије
 матрице 297
- Модулација 34
 амплитудна 34
 фреквенцна 34
- Момент, поремећајни 259
 савијања 20
 увијања 35
- Морлијева метода 201, 263
- Моров круг 141
- Мртва зона 67
- Навијеова једначина 315
- Напон, главни 113, 314 316,
 нормални 113, 314
 тангенцијални 113, 314
- Непериодички процес 454
- Нит 167
- Нормалне координате 153
- Нормални елиптички интеграл 442
- Носач, континуалан 194, 379
 прост 185
- Њихање брода 49
- Њутнова метода 174, 294
- Обербеково клатно 215
- Образац, Данкерлов 200
 Кастиљанов 323
 Клапејронов 322

- Образац Морлијев 202
 Релијев 386
 Рицов 393
 Обртни вектор 3
 Одступање
 Ојлерове, једначине 308
 константе 95
 Олакшице 99
 Ојлерова критична сила 378
 резолвента 245
 Оквир 40
 Омов закон 129
 Опadaње, механичке енергије 75
 осцилације 68, 277
 Опруга еквивалентна 11
 карактеристика 7
 конишна 9
 спрезање 10
 цилиндричка 9
 Оператор Лапласов 412
 дупли 421
 Хамилтонов 326
 Опружна вага 60
 оптерећење 19
 Оригинал 115
 Ортогонална, матрица 304
 трансформација 304
 Ортогоналне, осцилације 54, 149
 асинхроне 55
 синхроне 54
 функције 149, 325
 Ортогоналност главних осцилација 149
 Оса, осциловања 30
 смицања 388
 Основни облици осцилација 148
 систем интеграла 148
 Осцилација, амплитудно модулирана
 34
 асинхрона 26, 34
 допунска 34
 елиптичка 55
 јака 54, 72
 криволинијска 43
 опадајућа 34
 основна 34
 праволинијска 4
 принудна 73, 107, 155
 пуна 2
 растућа 35
 синхрона 54
 слаба 68
 фреквентно модулирана 35
 хармонијска 1
 цела 2
 Осцилације, амортизоване 63, 277
 антисиметричне 365, 380
 греде, лонгитудиналне 341
 попречне 351
 трансверзалне 351
 жице 331
 лонгитудиналне 341
 принудне 331
 слободне 331
 Осцилације, нелинеарне 439
 несиметричне 365
 обртних дискова 435
 плоче 417
 принудне 155, 370, 432
 рама 40
 реолинеарне 465
 реономне 465
 симетричне 365, 380
 спрегнуте 401
 течности 38
 Осцилатор, вертикални 7
 Вилберфорсов 223
 спирални 53
 торзијски 50, 62, 178
 увртни 50
 хармонијски 6
 хоризонтални 6
 Осцилограм 488
 Осцилограф, 486
 електрични 487
 светлосни 487
 Отпор, активни 132
 индуктивни 130
 капацитетни 130
 привидни 131
 сразмеран 1. ст. брзине 63, 242,
 2. „ 447
 Пад, осцилације 70
 ранга матрице 290
 Палогограф 292
 Шликов 292, 482
 Параметри, кола електр. 132
 Матјеове једначине 468
 Партиција матрица 301
 Период бијења 35
 подрхтавања 35
 примитивни 94
 осцилације 2
 поремећајне силе 80
 функције 80
 Периодичка функција 3
 Перла 167
 Плоча, кружна 423
 квадратна 427
 правоугаона 426
 Поасонов коефицијент 320
 Површина, еластична 318, 418
 неутрална 418
 Подрхтавање 35, 85
 Плоча 417
 Подскакивање 231
 Покретни терет 114
 Поље безвртложно 327
 вртложно 327
 потенцијално 327
 соленоидно 327
 Померање 316
 вектор 316
 фазе 2, 85

- Попречне осцилације, греде 17, 185
 мембране 325
 плоче 426
- Поремећајна сила 113
- Поремећајни момент 115
- Потенцијална енергија 322
- Правило, Декартово 283
- Крамерово 303
- Лавалово 258
- Прва варијација интеграла 399
- функције 398
- Предводни угао 2
- Пресликавање функције 116
- Прецесија, прогресивна 267
- регуларна 267, 276
- ретроградна 267
- Приближне методе 180, 386
- Примитивни период 94
- Принцип Даламберов 324, 328
- минимума 387
- Хамилтонов 326
- Принудна осцилација, проста 79, 337
- сложена 107
- торзијска 182
- чиста 394
- сила 79, 107, 339, 373
- генералисана 339, 373
- Проводност, активна 132
- реактивна 132
- сложена 132
- Производ диадски 300
- матрица 298
- скаларни 300
- Процес, непериодички 454
- периодички 329
- таласни 325
- Пулзација 2
- Пут заобилазни 398
- суседни 398
- Равнотежа, лабилна 274
- стабилна 274
- Рад, виртуални 339
- деформациони 20, 322
- специфични 30, 322
- тотални 20, 322
- Рам 40
- Ранг матрице 298
- Раутов критеријум 285
- Раутова детерминанта 286
- схема 286
- Реакција кола 132
- Регулатор Ватов 289
- Редукована дужина клатна 47
- крутост 14, 384
- маса 14
- Редуктори 172
- Редукција, крутости 16, 384
- маса 15
- момената инерције 173
- Редукциони коефицијент 172
- Режим осциловања
- принудног 87
- слободног 2
- Резонанса 81, 89
- критична 132
- напонска 132
- Релијева метода енергије 386
- Реолинеарне осцилације 465
- Реономне осцилације 465
- Репрезентативна тачка 455
- Решење, чисто периодичко 330
- Рицова метода 273, 303, 416
- Рунгеова метода 103
- Савојна крутост 19, 351
- Самостабилисање вратила 259
- Светлосни осцилограф 487
- Седло 463
- Сеизмички део апарата 482
- Сеизмограф 59, 482
- Секуларна једначина 306
- Селективност 132
- Сила, активна 63
- атрактивна 2
- генералисана 138
- генералисана конзервативна 138
- еластичности опруге 7
- инерције 324, 364
- конзервативна 5
- критична 13, 273
- неконзервативна 138
- нормална 418
- отпорна 241
- пертурбациона 79, 107
- поремећајна 79, 107
- принудна 79, 107, 339
- реституциона 7
- трансверзална 351, 419
- трења 63
- центрифугална 92
- Сингуларна тачка 456
- Сингуларни центар 463
- чвор 460
- Синхроне осцилације 26
- Системи, аутономни 456
- конзервативни 136
- неаутономни 456
- неконзервативни 136, 241
- нехолономни 136
- холономни 136
- Скок функције 100
- Скретање 32
- Слагање осцилација 33
- колинеарних 26, 30
- ортогоналних 54
- Слика 115
- Сложене осцилације 268
- Снага, активна 132
- привидна 132
- реактивна 132
- Сопствена вредност 306
- значања 306
- Сопствене кружне фреквенције 306, 344

- Сопствено време 306
 Спирала, логаритамска 70
 са два центра 66
 Спирални осцилатор 53
 Спојни суд 38
 Спрега опруга, мешовита 11
 паралелна 11
 редна 11
 Спрегнуте осцилације силама 140
 убрзањима 140
 Спрезање опруга 10
 Стабилна жижа 459
 Стабилни чвор 460
 Стабилност кретања 271
 Ватовог регулатора 289
 Стационарно кретање 265, 274
 Степен модулације 34
 Стодолина метода 202
 Стојећи таласи 330
 Струја 130
 Струна 167
 Суперматрица 297
 Суспективност 132
 Сферно клатно 207

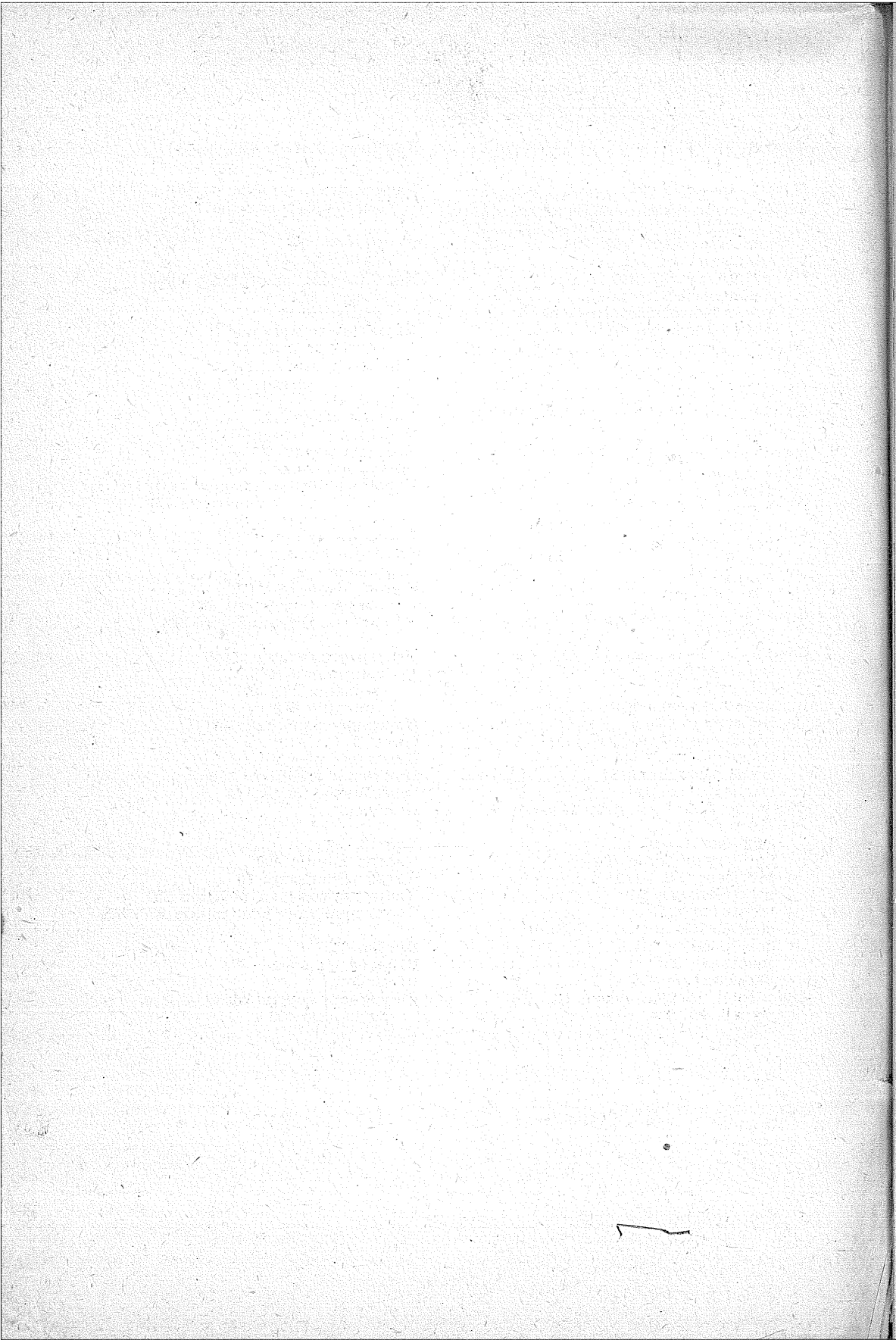
 Таласање, јако 325
 Таласна дужина 232, 330, 357
 једначина 325, 346, 417, 434
 Таласи, безвртложни 327
 вртложни 327
 директни 330
 еквиволумни 327
 индиректни 330
 компресиони 327
 лонгитудинални 327
 равански 327
 стојећи 330, 393, 414, 434
 сферни 327
 трансверзални 327
 Таласни процес 325
 Тахиметар, Фрамов 475
 Тачка репрезентативна 455
 сингуларна 463.
 Тејлоров ред 466
 Тејлорово клатно 249
 Тело, анизотропно 313
 еластично 313
 изотропно 313
 круто 313
 нехомогено 313
 хомогено 313
 чврсто 313
 Теорема конволуције 119
 Лежен Дирихлеова 96, 271
 померања 117
 разлагања 120
 Теорија потенцијала 473
 Терет покретни 114
 стални 2
 Томсонова формула 132
 Торзијски апсорбер 249
 Торзиограм 486

 Торзиограф 486
 Коксов 486
 Торзиометар 485
 Амслеров 485
 Гајгеров 485
 Торзијске осцилације 170, 345
 Торзијски апсорбер 249
 са трењем 250
 осцилатор 50
 Тотална механичка енергија 386
 Трансформација, афина 302
 Лапласова 377
 линеарна 302
 несингуларна 302
 сингуларна 302
 Тренутна сила коначног импулса 114
 Тренутне вредности 129
 Трење 63
 Треперење 325

 Увртање 50
 Увртна крутост 50
 Увртне осцилације 433
 Увртни осцилатор 50
 Угао предводни 2
 Угиб 18, 113
 Углови Ојлерови 305
 Услови,
 Виетови 278
 гранични 302, 342
 Кирховљеви 422
 компатибилности 318
 накнадни 342
 почетни 332, 353
 Раут-Хурвицови 275
 Сен Венанови 318
 стабилности 274
 Утицај аксијалне силе 344, 378
 гироскопског ефекта 261
 диска 347
 инерције обртања 367
 концентрисаних маса 342, 364
 масе опруге 23
 периодичке силе 374
 покретног оптерећења 375
 смицања 368
 трансверзалне силе 368
 Утицајни коефицијент 17
 Учестаност 2
 кружна 2

 Фаза осцилације 1
 Фазна, брзина 1, 330, 456
 координата 455
 крива 455
 раван 455
 разлика 3
 трајекторија 455
 Фазне криве 455
 Фазни портрет 456
 угао 1
 Фактор, динамички 81
 снаге 132
 Фигуре Лисажуове 56

- Филтер 73, 277
 Филтри 166
 Фокус стабилни 459
 Форма, дефинитна негативна 137, 142
 позитивна 137, 142
 дискриминанта 142, 306
 индефинитна 142
 квадратна 137, 306
 линеарна 139
 принудног осциловања 345
 семидефинитна 142
 Формуле коефицијената разлагања 432
 Фрамов апсорбер 255
 тахиметар 475
 Фреквентна једначина 144, 159, 310, 353
 Фреквентни полином 144, 159
 Фреквентометар 459, 475
 Фреквенција 1
 висока 2
 звучна 2
 кружна 2, 330
 модулације 51
 ниска 2
 средња 2
 ултра висока 2
 Фреквенције несамерљиве 31
 самерљиве 31
 Функција, Беселова 414, 423, 435
 гама 445
 Диракова 121
 модифицирана 423
 Нојманова 435
 периодичка 3, 97, 335
 расипања 75, 242
 скоропериодичка 34
 цилиндричка 414
 Функције, бихармонијске 321
 Гринове 19
 инфлуентне 19
 карактеристичне 334
 Матјеове 452
 непериодичке 98
 нормалне 334
 описне 452
 ортогоналне 334
 сопствене 334
 хармонијске 321
 Фуријеови, коефицијенти 95, 334
 редови 96, 334
 Хајгенсов центар 47
 Ханкамов дијаграм 254
 Хармонијска, анализа 94, 107
 осцилација, правоуг. 1
 кривоуг. 43
 синтеза 107
 функција 321
 Хармонијски, анализатор 106
 баланс 452
 осцилатор 6
 Хармонијско кретање 1, 35
 осциловање 1, 441
 Хармоник, виши 336, 357
 основни 336, 357
 Херц 2
 Хипоциклоида 32
 Хладнијеве линије 411
 Ход амплитуде 34
 Холцерава метода 180
 Хомогена форма, квадратна 137
 линеарна 139
 Хомогене машине 175
 Хомогени ланци 162
 Хомогено вратило 175
 Хормананција 130, 135
 Хуков закон 134, 316
 Хурвицов критеријум 288
 Хурвицова детерминанта 288
 Центар осцилације 2, 46
 сингуларни 463
 смицања 388, 401
 стабилни 463
 Центрифугална сила 92
 Цикл 2
 Цикличка координата 210
 Циклички интеграл 210
 Циклоидно клатно 44
 Циклус 2
 Чвор 3, 330
 Чворне линије 408
 Чекрк са опругом 60
 Чиста периодичка решења 330
 Чисте принудне осцилације 330, 374
 Шипка 325
 Шликов палогограф 292
 Штап 325
 Штурмова теорема 283
 функција 283



MAŠINSKI FAKULTET U NIŠU
Katedra za mehaniku i automatiku

Mentor: Prof.dr Katica Hedrih

Autor: Dipl.ing. Slobodan Milovanović

ASPEKTI PROUČAVANJA RAVNOG KRETANJA TELA I NJIHOVA PRIMENA NA REŠAVANJU PROBLEMA IZ TEORIJE OSCILACIJA

REZIME - Ova rad predstavlja pokušaj da se sa nekoliko aspekta sagleda i prouči problem ravnog kretanja tela (ili ploče). I i II aspekt tumačenja navedenog problema su dobro poznati iz Mehanike II, dok III aspekt, koga smatram svojim skromnim doprinosom u rasvetljavanju istog problema, predstavlja prodor u oblast složenog kretanja. III aspektom su tretirane male oscilacije ploče u vertikalnoj ravni, a tri primera, koji su priloženi na kraju ovog rada, ilustruju mogućnost njihovog rešavanja sa III aspekta proučavanja problema ravnog kretanja tela.

UVOD

Kinematički uslov ravnog kretanja krutog tela je da su brzine svih njegovih tačaka za sve vreme kretanja paralelne jednoj stalnoj ravni. Ukoliko se nekom drugom ravni, paralelnoj datoj stalnoj ravni, preseče telo kroz njegovo težište, onda se kretanje tela može proučavati posmatranjem kretanja njegovog preseka u toj presečnoj ravni.

Presek tela nazivamo pločom (p).

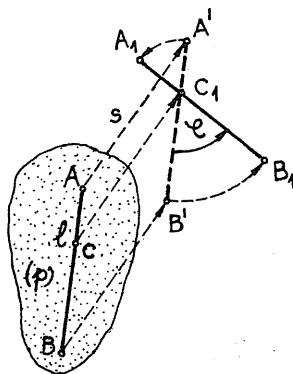
Kretanje ploče (p) poznajemo ukoliko znamo kretanje jedne nje-
ne duži AB, koju nazivamo štapom AB.

Komplano kretanje ploče (p) je moguće sa nekoliko aspekta ras-
tumačiti i s tim u vezi na nekoliko načina matematički ga opisati.

I ASPEKT

Iz kinematike ravnog kretanja je poznato da ploča (p) u ravni
Oxy ima tri stepena slobode kretanja: dva translatorna u pravcima

osa diedra Oxy i obrtanje oko ose Oz . Ovo nam pokazuje da se ploča (ili štap) može prevesti iz jednog položaja u ravni u drugi susjedni položaj sa dva kretanja: jednom translacijom za dužinu (s) iz položaja AB u međupoložaj $A'B'$ i jednom rotacijom za ugao (ϕ) iz međupoložaja $A'B'$ u susjedni položaj A_1B_1 , (slika 1). Pri tome po zakonu krutosti ostaje da je $\overline{AB} = \overline{A'B'} = \overline{A_1B_1} = l$.



Slika 1

Postoji beskonačno mnogo parova translacija + rotacija da se ploča (p) na ovaj način prevede u susjedni položaj, no među njima biram onu translaciju koja dovodi do poklapanja težište ploče (C) sa njegovim narednim položajem (C_1) i zatim rotaciju oko težišta kojom će štap iz međupoložaja $A'B'$ biti doveden u položaj A_1B_1 .

U stvarnosti se oba ova kretanja događaju istovremeno, te izvedena analiza premeštanja ploče iz početnog u konačno blizak susjedni položaj odstupa od realnosti. Svoj puni fizički smisao izvedena analiza zadržava jedino ako se radi o premeštanju ploče iz početnog u beskonačno blizak susjedni položaj, jer se tada elementarna komponentna kretanja mogu posmatrati odvojeno. U tom slučaju dogodiće se za elementarno vreme (dt) translacija ploče za elementarnu dužinu (ds) i rotacija ploče za elementarni ugao ($d\phi$), slično kao na slici 1.

Prema tome se mogu definisati trenutna translatorska brzina ploče (p) koja je zajednička za sve tačke ploče, pa i za samo težište (C) kao: $v_C = \frac{ds}{dt}$ i trenutna ugaona brzina rotacije ploče

oko težišta: $\omega = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}$, jer one važe za jedan vremenski trenutak (t).

Kinetička energija ploče u posmatranom trenutku vremena (t) sastoji se iz dva dela: kinetičke energije elementarne translacije ploče $E_C = \frac{1}{2} M v_C^2$ i kinetičke energije elementarne rotacije ploče $E_r = \frac{1}{2} J_C \omega^2$, pa je ukupna kinetička energija ploče E_k :

$$E_k = E_C + E_r = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2 \quad (1)$$

pri čemu je:

M - masa ploče

J_C - sopstveni polarni moment inercije ploče

Ovo je analitički izraz Kenigove teoreme (Samuel König) za ravno kretanje ploče (ili tela).

II ASPEKT

Može se isti štap sa slike 1, prevesti iz položaja AB u susedni A_1B_1 i samo jednom rotacijom za ugao (ϕ) oko jedne tačke u ravni kretanja i ona se zove obrtni pol (0).

Na slici 2a je prikazan način prevodjenja štapa jednom rotacijom iz položaja AB u položaj A_1B_1 .

Obrtni pol (0) se nalazi u preseku simetrala (n_a) i (n_b) povučениh na duži $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$. Ugao između pravaca OA i OA_1 predstavlja ugao rotacije ($\angle AOA_1 = \phi$). Ugao (α) između pravca OA i duži AB jednak je uglu između pravca OA_1 i duži A_1B_1 zbog krutosti ploče.

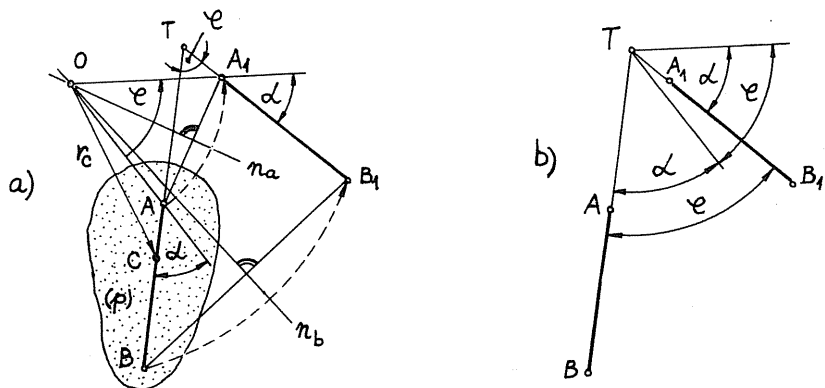
Ako se kroz tačku (T) preseka pravaca AB i A_1B_1 povuku paralelno prenešeni pravci OA i OA_1 , kao na slici 2b, onda se ugao između pravaca AB i A_1B_1 lako određuje prema jednačini:

$$\angle ATA_1 = (\phi - \alpha) + \alpha = \phi$$

Dakle ugao između pravaca AB i A_1B_1 jednak je uglu rotacije (ϕ). Ovo je izraz Šaljove teoreme (Michel Chasles):

"Svaka ravna figura (tanka ploča) može se iz jednog položaja prevesti u drugi obližnji komplani položaj obrtanjem oko određene tačke - pola - za ugao koji proizvoljna prava figure čini u oba položaja".

U slučaju da je susjedni položaj ploče neizmerno blizak početnom, onda se ploča može premestiti iz početnog u susjedni položaj rotacijom za elementarni ugao ($d\phi$), slično kao na slici 2a, oko obrtnog pola koji važi samo u tom vremenskom trenutku (t) i naziva se trenutni pol (P).



Slika 2

Elementarna rotacija se događa u toku elementarnog vremena (dt), pa se trenutna ugaona brzina rotacije oko trenutnog pola može definisati kao: $\omega = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}$.

Trenutna ugaona brzina (ω) je jednaka trenutnoj ugaonoj brzini rotacije ploče oko težišta iz I aspekta razmatranja ravno kretanja ploče.

Dokaz leži u činjenici da se u oba slučaja za elementarno vreme (dt) ploča obrne za ugao ($d\phi$) koga zaklapaju pravci AB i A₁B₁.

Pošto se radi o samo jednoj rotaciji, trenutna kinetička energija ploče iznosi:

$$E_k = \frac{1}{2} J_P \omega^2 \quad (2)$$

pri čemu je:

J_P - polarni moment inercije ploče za tačku trenutnog pola (P).

Obzirom da se kroz dva različita aspekta proučava ravno kreta-

nje iste ploče u istom vremenskom trenutku (t), vrednosti za dobi-
jene kinetičke energije ploče (E_k) bi morale biti jednake, izrazi
(1) i (2).

Dokaz:

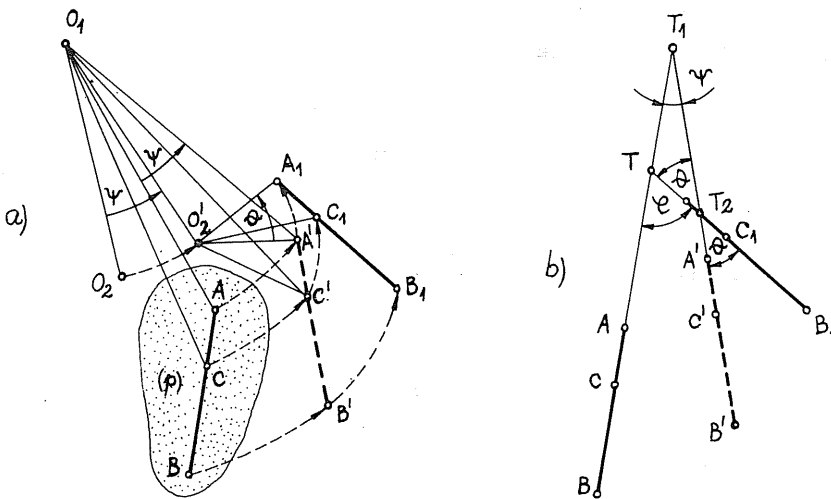
$$E_k = \frac{1}{2} Mv_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2 = \frac{1}{2} M(\omega r_C)^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} (Mr_C^2 + J_C) \omega^2 = \frac{1}{2} J_P \omega^2 = E_k ,$$

jer je prema Štajnerovoj teoremi (Jac.Steiner): $J_P = J_C + Mr_C^2$.
(r_C) je rastojanje od trenutnog pola (P) do težišta ploče (C).

III ASPEKT

Ploča (p) ili štap AB sa slika 1 i 2a se može iz početnog po-
ložaja premestiti u susjedni položaj A_1B_1 i pomoću dve rotacije
slika 3a. Prvom rotacijom oko obrtnog pola (O_1) za ugao (ψ) štap
se premešta iz položaja AB u međupoložaj $A'B'$. Drugom rotacijom
oko obrtnog pola (O_2) za ugao (θ) štap se premešta iz međupoloža-
ja $A'B'$ u susjedni položaj A_1B_1 .



Slika 3

Prema Šaljovoj teoremi (Michel Shasles) važi: $AT_1A'=\theta$ i $B'T_2B_1=\theta$ (slika 3b).

Iz trougla ΔT_1T_2T sa slike 3b može se konstatovati da je

$$\phi = \psi + \theta \quad (3)$$

Napomena: Uglovi (ψ i θ) nose svoje predznake. Predznak ugla je (+) ako je smer njegovog porasta istovetan sa izabranim smerom porasta ugla (ϕ), u suprotnom predznak ugla je (-). Dokaz se prepušta čitaocu.

U stvarnosti se obe komponente rotacije događaju istovremeno, te slično kao kod prvog aspekta proučavanja problema, izvedena analiza premeštanja ploče iz početnog u konačno blizak susedni položaj odstupa od realnosti. Svoj puni fizički smisao izvedena analiza zadržava, jedino ako se radi o premeštanju ploče iz početnog u beskonačno blizak susedni položaj. U tome slučaju dogodiće se za elementarno vreme (dt) rotacija ploče oko trenutnog pola (P_1) on odgovara obrtnom polu (O_1), za elementarni ugao ($d\psi$) i rotacija ploče oko "pokretnog" trenutnog pola (P_2), on odgovara "pokretnom" obrtnom polu (O_2), za ugao ($d\theta$). Slično kao na slici 3a.

Za trenutni pol (P_2) upotrebljen je izraz "pokretni", zbog toga što se on zajedno sa pločom obrće oko trenutnog pola (P_1).

Moguće je sada pokazati fizičko tumačenje jednog ovako shvaćenog kretanja, tako što se može zamisliti da se pokretna ruleta ploče (p) kotrlja bez klizanja po nepokretnoj ruleti ploče nosača (n), koja se opet preko svoje pokretne rulete kotrlja bez klizanja po nepokretnoj ploči (z), slika 4.

Ovo je praktično slučaj složenog kretanja.

Kotrljanjem po nepokretnoj ploči (z), ploča nosač (n) saopštava prenosno kretanje ploči (p), koja se istovremeno kotrljanjem po ploči nosaču (n) relativno kreće u odnosu na nju.

Pokazana kretanja su u stvari rotacije ploče nosača (n) oko trenutnog pola (P_1) i ploče P oko "pokretnog" trenutnog pola (P_2) u datom vremenskom trenutku (t).

Prethodno izvedena veza izmedju:

- ugla ukupne rotacije (ϕ), u daljem tekstu nazivaće se uglom apsolutne rotacije,

- ugla komponentne rotacije (ψ), u daljem tekstu nazivaće se uglom prenosne rotacije,
- i ugla komponentne rotacije (θ), u daljem tekstu nazivaće se uglom relativne rotacije,

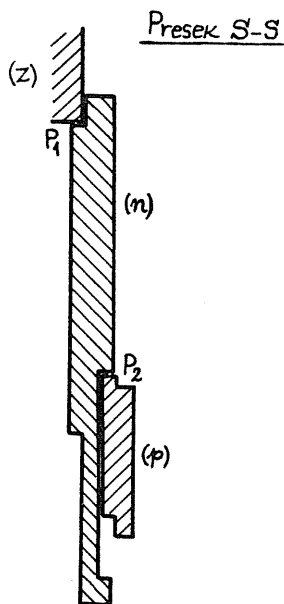
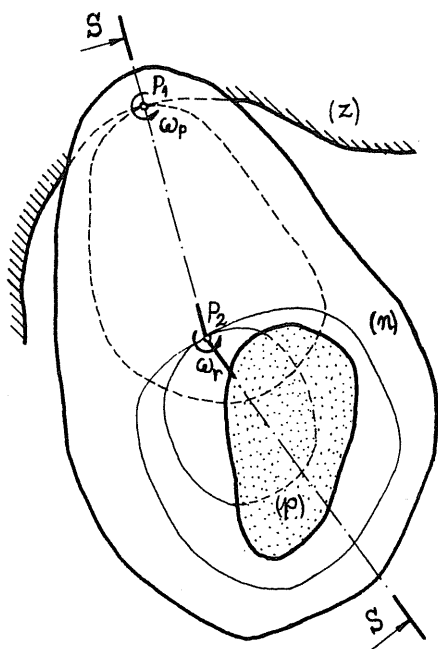
važi u potpunosti i u elementarnom obliku:

$$d\phi = d\psi + d\theta$$

naravno uz istu napomenu o predznacima.

Kako se sve ove tri elementarne rotacije događaju u toku istog elementarnog vremena (dt), gornja jednačina daće vezu izmedju ugaonih brzina, ako se ista podeli sa (dt):

$$\omega = \omega_p + \omega_r \quad (3')$$



Slika 4

pri čemu je:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} \quad - \text{apsolutna ugaona brzina,}$$

$$\omega_p = \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi} \quad - \text{prenosna ugaona brzina,}$$

$$\omega_r = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad - \text{relativna ugaona brzina.}$$

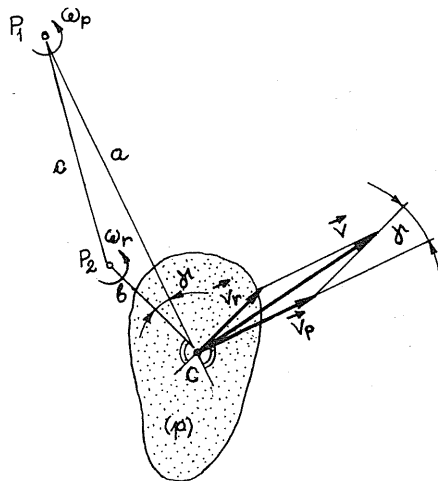
Napomena: U jednačini ugaone brzine (ω_p i ω_r) nose svoje predznake, pri čemu je predznak ugaone brzine (+) ako je njen smer istovetan sa izabranim smerom ugaone brzine (ω), u suprotnom predznak ugaone brzine je (-).

Kvadrat ugaone brzine (ω) iznosi:

$$\omega^2 = \omega_p^2 \pm 2\omega_p\omega_r + \omega_r^2 \quad (3'')$$

Napomena: Znak ispred mešovitog člana je (+) ako su ugaone brzine (ω_p i ω_r) istosmerne, a (-) ako su iste suprotnosmerne, pri čemu u jednačinu unosimo apsolutne vrednosti ugaonih brzina. Doka je lak.

Na slici 5 je prikazana ploča (p) u početnom položaju i neka



Slika 5

taj položaj ploče odgovara istom početnom položaju ploče (p) sa slika 1 i 2a. Naglašavam da se radi o istoj ploči (p) i istom njenom kretanju, koje je već proučavano unutar prethodna dva aspekta.

Intenzitet prenosne brzine težišta ploče (C) iznosi $v_p = a\omega_p$, a intenzitet njegove relativne brzine $v_p = b\omega_r$.

(a) i (b) su rastojanja trenutnih polova (P_1) i (P_2) od težišta (C), dok (c) predstavlja rastojanje između trenutnih polova.

Kvadrat brzine težišta (v_C) iznosi prema kosinusnoj teoremi:

$$v_C^2 = v_p^2 + v_r^2 + 2v_p v_r \cos \gamma = a^2 \omega_p^2 + b^2 \omega_r^2 + 2ab \omega_p \omega_r \cos \gamma$$

Sa druge strane iz trougla $\Delta P_1 P_2 C$ može se ($\cos \gamma$) izraziti primenom kosinusne teoreme kao:

$$\cos \gamma = \frac{1}{2ab} (a^2 + b^2 - c^2).$$

Ako se vrednost za ($\cos \gamma$) uvrsti u izraz za kvadrat brzine težišta, i sprovede analiza o uticaju rasporeda polova (P_1 i P_2) u odnosu na težište (C) u kombinaciji sa smerovima (ω_p i ω_r), dobija se:

$$v_C^2 = a^2 \omega_p^2 + b^2 \omega_r^2 \pm (a^2 + b^2 - c^2) \omega_p \omega_r \quad (4)$$

Napomena: Napomena data uz izraz (3") važi i ovde.

Kinetička energija ploče (E_k) je nezavisna od aspekta proučavanja problema, samo se drugačije izražava, i odgovara brojčano izrazima (1) i (2), jer se radi o istoj ploči (p) i istom njenom kretanju.

Da bih izveo izraz za kinetičku energiju ploče (E_k) sa trećeg aspekta proučavanja problema, polazim od analitičkog izraza Kenigove teoreme (Samuel König) za ravno kretanje ploče - izraz (1).

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2 = \\ &= \frac{1}{2} M |a^2 \omega_p^2 + b^2 \omega_r^2 \pm (a^2 + b^2 - c^2) \omega_p \omega_r| + \\ &+ \frac{1}{2} J_C (\omega_p^2 \pm 2\omega_p \omega_r + \omega_r^2) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(J_C + Ma^2)\omega_p^2 + \frac{1}{2}(J_C + Mb^2)\omega_r^2 \pm \frac{1}{2} |2J_C + M(a^2 + b^2 - c^2)| \omega_p \omega_r =$$

$$= \frac{1}{2} J_{P_1} \omega_p^2 + \frac{1}{2} J_{P_2} \omega_r^2 \pm \frac{1}{2} |2J_C + M(a^2 + b^2 - c^2)| \omega_p \omega_r ,$$

jer je:

$$v_C^2 = a^2 \omega_p^2 + b^2 \omega_r^2 \pm (a^2 + b^2 - c^2) \omega_p \omega_r \quad \text{prema izrazu (4)}$$

$$\omega^2 = \omega_p^2 \pm 2\omega_p \omega_r + \omega_r^2 \quad \text{prema izrazu (3")}$$

$$J_{P_1} = J_C + Ma^2$$

$$J_{P_2} = J_C + Mb^2$$

prema Štajnerovoj teoremi (Jac. Steiner).

Dakle, izraz za kinetičku energiju tela (ili ploče) (E_k) u posmatranom trenutku vremena (t), sa trećeg aspekta proučavanja ravnog kretanja tela, izgleda:

$$E_k = \frac{1}{2} J_{P_1} \omega_p^2 + \frac{1}{2} J_{P_2} \omega_r^2 \pm \frac{1}{2} |2J_C + M(a^2 + b^2 - c^2)| \omega_p \omega_r \quad (5)$$

pri čemu su:

J_{P_1} i J_{P_2} - polarni momenti inercije tela za trenut.
pol. (P_1 i P_2)

ω_p i ω_r - prenosna i ugaona brzina rotacije oko tr.pol. (P_1 i P_2)

J_C - sopstveni polarni moment inercije tela

M - masa tela

a i b - rastojanja trenutnih polova (P_1 i P_2) od težiš.tela (C)

c - rastojanje između trenutnih polova (P_1 i P_2)

Napomena: Znak ispred mešovitog člana u izrazu za (E_k) je (+) ako su ugaone brzine (ω_p i ω_r) istosmerne, a (-) ako su iste suprotno-smerne, pri čemu u izraz unosimo njihove apsolutne vrednosti.

Obzirom da će trećim aspektom proučavanja ravnog kretanja tela biti tretirane njegove oscilacije oko ravnotežnog položaja, potrebno je ukazati na određene aproksimacije koje se uvode da bi se problem pojednostavio i sveo na slučaj linearnih oscilacija tela, koje sada moraju biti male, jer se jedino kod takvih oscilacija može tolerisati greška koja se javlja zbog linearizovanja problema.

1) Za vreme kretanja ploče polovi (P_1 i P_2) menjaju svoja mesta, pa se menjaju i rastojanja (a , b i c). Međutim, za slučaj malih oscilacija, smatramo da je:

$$a \approx \text{const.} \quad b \approx \text{const.} \quad c \approx \text{const.}$$

2) Sa promenom rastojanja (a i b) za vreme kretanja, menjaju se i polarni momenti inercije (J_{P_1} i J_{P_2}), no u slučaju malih oscilacija smatramo:

$$J_{P_1} \approx \text{const.} \quad J_{P_2} \approx \text{const.}$$

Kada se radi o oscilacijama sistema: ploča (p) - ploča nosač (n), slika 4, u vertikalnoj ravni, onda se one mogu javiti u dva vida i to:

1) Oscilacije sistema sa dva stepena slobode. Uglovi (ψ) i (θ) su međjusobno nezavisni ($\theta \neq k\psi$).

2) Oscilacije sistema sa jednim stepenom slobode. Uglovi (ψ) i (θ) su međjusobno zavisni ($\theta = k\psi$).

Unutar oba vida izražavanja oscilacija, razlikuju se dva slučaja:

1) Ploča nosač (n) je realna ($M_n > 0$).

2) Ploča nosač (n) je fiktivna ($M_n = 0$).

Dakle, postoji četiri načina oscilovanja sistema.

Potrebno je da se postavi jedinstveni izraz za potencijalnu energiju sistema (E_{P_s}), koji bi važio za sva četiri načina oscilovanja.

Do jedinstvenog izraza se može doći, tako što će biti postavljeni izrazi za (E_{P_s}) za sva četiri načina oscilovanja i biti ispitani uslovi za postizanje minimuma za (E_{P_s}) u ravnotežnom položaju sistema tj. ($\psi=0$; $\theta=0$).

Uopštavanjem kasnije dobijenih izraza za (E_{P_s}), s obzirom na uslov postojanja minimuma u ravnotežnom položaju, dobija se jedinstveni izraz za (E_{P_s}).

Evo kako bi tekao postupak za izvodjenje izraza za (E_{P_s}) za

prvi način oscilovanja ($\theta \neq k\psi$; $M_n > 0$).

Potencijalna energija sistema (E_{p_s}) u izvedenom položaju u odnosu na ravnotežni položaj iznosi:

$$E_{p_s} = Mg\Delta h + M_n g \Delta h_n$$

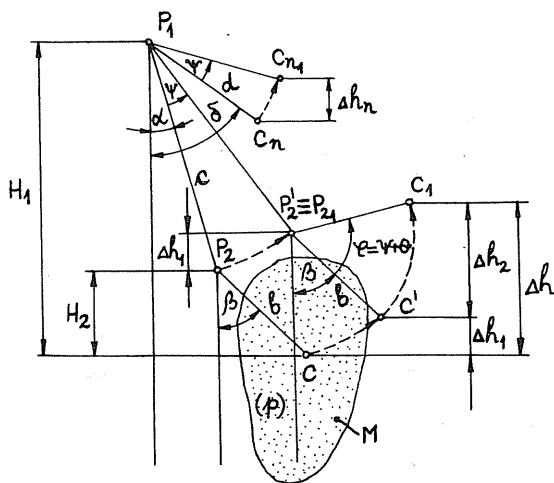
pri čemu je:

Δh - visinska razlika izvedenog položaja težišta (C_1) ploče (p) u odnosu na njegov ravnotežni položaj (C)

Δh_n - isto to samo za ploču nosač (n).

Prema slici 6, visinska razlika (Δh) se može izraziti kao:

$$\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2.$$



Slika 6

Da bi lakše odredili visinsku razliku (Δh), štap ćemo premestiti iz ravnotežnog P_2C u izvedeni položaj P_2C_1 prema prvom aspektu (translacija + rotacija).

Štap je iz ravnotežnog položaja P_2C translirao do međupoložaja P_2C' , a onda je rotirao oko trenutnog pola ($P_2' \equiv P_2$) za ugao ($\phi = \psi + \theta$) do izvedenog položaja P_2C_1 .

Visinska razlika između tačaka (C') i (C) jednaka je visinskoj razlici između tačaka (P₂) i (P'₂ ≡ P_{2,1}), jer se radi o translaciji štapa iz položaja P₂C u položaj P'₂C', i iznosi:

$$\Delta h_1 = c |\cos \alpha - \cos(\alpha + \psi)| = c(\cos \alpha - \cos \alpha \cos \psi + \sin \alpha \sin \psi)$$

Pošto je reč o malim oscilacijama, tj. malom uglu (ψ), može se izvršiti aproksimacija: $\cos \psi \approx 1 - \frac{1}{2}\psi^2$; $\sin \psi \approx \psi$ i pošto se ove približne vrednosti za ($\cos \psi$) i ($\sin \psi$) uvrste u izraz za (Δh_1), konačno se dobija:

$$\Delta h_1 = \frac{1}{2}c(\psi^2 \cos \alpha + 2\psi \sin \alpha)$$

Visinska razlika između tačaka (C₁) i (C') iznosi:

$$\begin{aligned} \Delta h_2 &= b |\cos \beta - \cos(\beta + \psi + \theta)| = \\ &= b |\cos \beta - \cos \beta \cos(\psi + \theta) + \sin \beta \sin(\psi + \theta)| \end{aligned}$$

Ugao (θ) je takodje mali ugao, te se može izvršiti aproksimacija: $\cos(\psi + \theta) \approx 1 - \frac{1}{2}(\psi + \theta)^2$; $\sin(\psi + \theta) \approx \psi + \theta$ i pošto se ove približne vrednosti za $\cos(\psi + \theta)$ i $\sin(\psi + \theta)$ uvrste u izraz za (Δh_2), dobija se:

$$\Delta h_2 = \frac{1}{2}b |(\psi + \theta)^2 \cos \beta + 2(\psi + \theta) \sin \beta|$$

Visinska razlika (Δh) iznosi: $\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2$, pa je:

$$\begin{aligned} \Delta h &= \frac{1}{2}c(\psi^2 \cos \alpha + 2\psi \sin \alpha) + \frac{1}{2}b |(\psi + \theta)^2 \cos \beta + 2(\psi + \theta) \sin \beta| = \\ &= \frac{1}{2}(c \cdot \cos \alpha + b \cos \beta) \psi^2 + \frac{1}{2}(b \cos \beta) \theta^2 + (b \cos \beta) \psi \theta + \\ &\quad + (c \cdot \sin \alpha + b \sin \beta) \psi + (b \sin \beta) \theta \end{aligned}$$

Visinska razlika izvedenog položaja težišta ploče nosača (C_{n1}) u odnosu na početni položaj težišta (C_n), imajući u vidu aproksimacije u vezi sa uglom (ψ), iznosi:

$$\Delta h_n = \frac{1}{2}d(\psi^2 \cos \delta + 2\psi \sin \delta) = \frac{1}{2}(d \cos \delta) \psi^2 + (d \sin \delta) \psi$$

Potencijalna energija sistema je:

$$E_{p_s} = Mg\Delta h + M_n g\Delta h_n = \frac{1}{2} [Mg(c \cdot \cos\alpha + b\cos\beta) + M_n g(d\cos\delta)] \psi^2 + \\ + \frac{1}{2} Mg(b\cos\beta)\theta^2 + Mg(b\cos\beta)\psi\theta + \\ + [Mg(c \cdot \sin\alpha + b\sin\beta) + M_n g(d\sin\delta)] \psi + Mg(b\sin\beta)\theta$$

Dakle:

$$E_{p_s} = \frac{1}{2} A\psi^2 + \frac{1}{2} B\theta^2 + C\psi\theta + D\psi + E\theta$$

gde su koeficijenti:

$$A = Mg(c \cdot \cos\alpha + b\cos\beta) + M_n g(d\cos\delta)$$

$$B = Mg(b\cos\beta)$$

$$C = Mg(b\cos\beta)$$

$$D = Mg(c \cdot \sin\alpha + b\sin\beta) + M_n g(d\sin\delta)$$

$$E = Mg(b\sin\beta)$$

Uslov minimuma u ravnotežnom položaju ($\psi=0$ i $\theta=0$) daje:

$$\frac{\partial E}{\partial \psi} = 0 \quad A\psi + C\theta + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = 0 \quad B\theta + C\psi + E = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \psi^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \theta^2} - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial \psi \partial \theta} \right)^2 = AB - C^2 > 0$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \psi^2} = A > 0; \quad \frac{\partial^2 E}{\partial \theta^2} = B > 0; \quad \frac{\partial^2 E}{\partial \psi \partial \theta} = C$$

Iz uslova ($E=0$) sledi da je ($\beta=0$) ili ($\beta=\pi$) što odgovara i uslovu ($B>C$) za ($\dot{\psi}$ i $\dot{\theta}$) istosmerne ili ($\dot{\psi}$ i $\dot{\theta}$) suprotnosmerne.

Ostali uslovi daju vezu izmedju ugla (α) i (δ) koji može biti bilo koje vrednosti u ravni oscilovanja.

Ako se isti postupak sprovede i kod preostala tri načina oscilovanja, zaključiće se da i ugao (β) može uzimati bilo koje vrednosti te jedinstveni izraz za (E_{p_s}) glasi:

$$E_{p_s} = \frac{1}{2} A\psi^2 + \frac{1}{2} B\theta^2 + C\psi\theta$$

Za nas je interesantan samo deo potencijalne energije sistema koga akumulira ploča (p), te ako se iz izraza za (E_{p_s}) izdvoje članovi koji ne sadrže (M_n), dobiće se:

$$E_p = \frac{1}{2}Mg(c \cdot \cos\alpha + b\cos\beta)\psi^2 + \frac{1}{2}Mg(b\cos\beta)\theta^2 + Mg(b\cos\beta)\psi\theta$$

Sa slike 6 se vidi da je:

$$H_1 = c \cdot \cos\alpha + b\cos\beta ; H_2 = b\cos\beta$$

Uglovi (α i β) mogu uzimati bilo koje vrednosti, pri čemu, istovremeno, uglovi (ψ i θ) mogu da rastu u istom smeru ili u suprotnim smerovima.

Kada se proanaliziraju sve moguće kombinacije rasporeda polova (P_1) i (P_2) u odnosu na položaj težišta (C) u sprezi sa karakterom porasta uglova (ψ i θ), dobiće se jedinstven izraz za (E_p).

Potencijalna energija tela koje osciluje u vertikalnoj ravni samo pod uticajem sile sopstvene težine iznosi:

$$E_p = \frac{1}{2} Mg(H_1\psi^2 + H_2\theta^2 \pm 2H_2\psi\theta) \quad (6)$$

pri čemu je:

M - masa tela

g - ubrzanje Zemljine teže ($g = 9,81 \frac{m}{sec^2}$)

H_1 i H_2 - visina trenutnih polova (P_1) i (P_2) u odnosu na težište tela (C) u ravnotežnom položaju tela

ψ i θ - uglovi prenosne i relativne rotacije.

Napomena: Znak ispred mešovitog člana u izrazu za (E_p) je (+) ako uglovi (ψ) i (θ) rastu u istom smeru, a (-) ako isti rastu u suprotnim smerovima, pri čemu u izraz unosimo njihove apsolutne vrednosti. Visine (H_1) i (H_2) u izraz unositi sa predznacima. Predznak visine je (+) ako je odnosni trenutni pol iznad težišta (C), a (-) ako je isti ispod težišta tela (C). Dokaz se prepušta čitaocu.

Za slučaj da se za sve vreme kretanja trenutni pol (P_2) poklapa sa težištem ploče (C) - $P_2 \equiv C$ - onda je: $b=0$; $H_2=0$; $a=c$, pa se izrazi (5) i (6) uprošćavaju i postaju:

$$E_k = \frac{1}{2} J_{P_1} \omega_p^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_r^2 \pm J_C \omega_p \omega_r \quad (7)$$

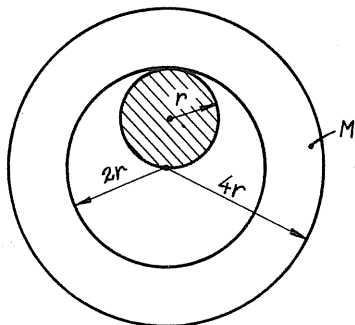
$$E_p = \frac{1}{2} Mg H_1 \psi^2 \quad (8)$$

Napomena: Napomene date uz izraze (5) i (6) važe i ovde.

PRIMERI

Svi priloženi primeri će biti rešeni sa trećeg aspekta proučavanja ravnog kretanja tela.

- 1) Oko kružnog cilindra poluprečnika (r) osciluje tanak kružni prsten mase (M), unutrašnjeg poluprečnika ($2r$) i spoljašnjeg poluprečnika ($4r$), slika 7. Odrediti period malih kotrljajnih oscilacija bez klizanja.

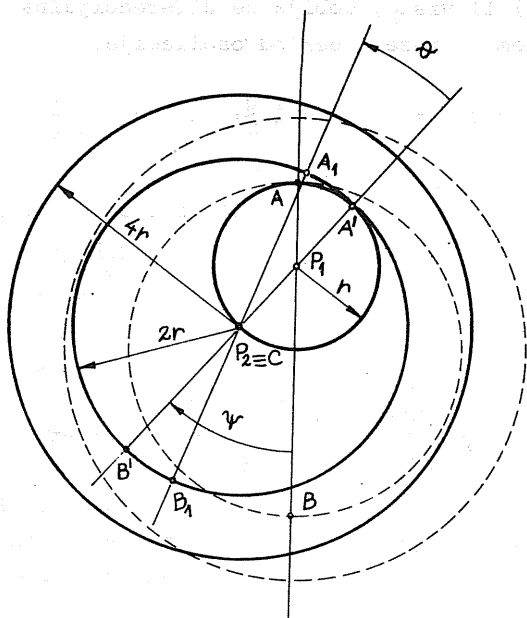


Slika 7

je obrnuta oko trenutnog pola (P_2) tj. svoga težišta (C) za ugao relativne rotacije (θ) do izvedenog položaja $A_1 B_1$, slika 8.

Između uglova (ψ) i (θ) postoji veza ($\theta=k\psi$), jer ploča ima samo jedan stepen slobode kretanja, te za generalisanu koordinatu biram ugao (ψ).

Vežu između uglova (ψ) i (θ) daje uslov kotrljanja bez klizanja, pa moraju odgovarajući lukovi da budu jednaki $AA' = A_1 A_1'$, te je:



Slika 8

$$2r\theta = r\psi \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{1}{2}\psi$$

Obzirom da je u ovom slučaju ($H_1=r$) i ($H_2=0$), kinetičku (E_k) potencijalnu energiju (E_p) odredjujem prema obrascima (7) i (8):

$$E_k = \frac{1}{2} J_{P_1} \omega_p^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_r^2 - J_C \omega_p \omega_r$$

$$J_C = \frac{1}{2} M |(4r)^2 + (2r)^2| = 10Mr^2$$

$$J_{P_1} = J_C + Mr^2 = 10Mr^2 + Mr^2 = 11Mr^2$$

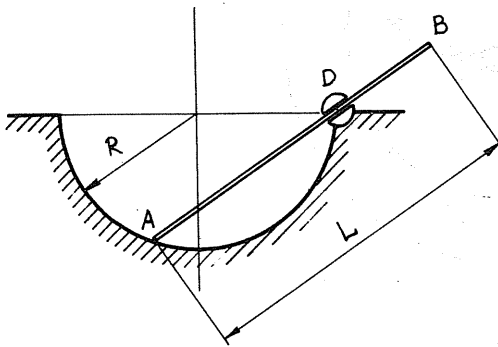
$$\frac{\omega_r}{\omega_p} = \frac{\theta}{\psi} = \frac{1}{2}$$

$$E_k = \frac{1}{2} 11Mr^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} 10Mr^2 \left(\frac{1}{2}\dot{\psi}\right)^2 - 10Mr^2 \dot{\psi} \left(\frac{1}{2}\dot{\psi}\right) = \frac{7}{4} Mr^2 \dot{\psi}^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} Mgr\psi^2$$

Unošenjem ovih vrednosti za (E_k) i (E_p) u Lagranževu jednačinu (J.L.Lagrange) II vrste, dobija se diferencijalna jednačina oscilovanja, a potom i traženi period oscilacija.

$$\frac{7}{2} Mr^2 \ddot{\psi} + Mgr\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{2}{7} \frac{g}{r}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{7}{2} \frac{r}{g}}$$



- 2) Homogeni štap AB dužine $(L = \frac{4\sqrt{3}}{3} R)$ osciluje tako što krajem (A) klizi po unutrašnjoj strani glatkog polukruga, poluprečnika R, prolazeći stalno kroz pokretljivo - obrtno - ležište (D) na obodu polukruga (slika 9). Odrediti period malih oscilacija štapa AB.

Rešenje:

Slika 9

Kotrljanjem pokretne rulete, za koju smatramo da je važan štap, po nepokretnoj ruleti, štap prolazi kroz sve svoje međupoložaje pri njegovom premeštanju iz početnog u konačno blizak susedni položaj.

Rulete definišu kretanje štapa i treba ih pronaći.

Prema slici 10 koordinate apsolutnog trenutnog pola (P) u nepokretnom $(x; z)$ i pokretnom $(\xi; \zeta)$ koordinatnom sistemu, jesu:

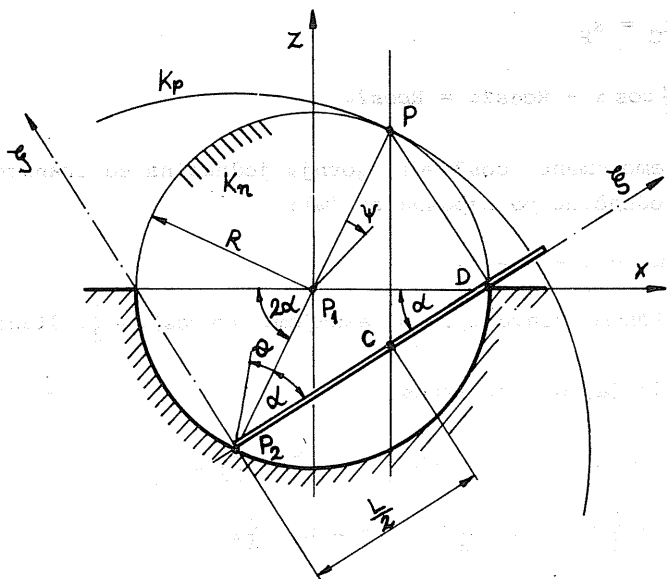
$$x_p = R \cos 2\alpha \quad \xi_p = 2R \cos \alpha$$

$$z_p = R \sin 2\alpha \quad \zeta_p = 2R \sin \alpha$$

Eliminacijom ugla (α) iz koordinata apsolutnog trenutnog pola (P), dobijaju se jednačine pokretne i nepokretne rulete (K_p i K_n).

$$K_n: \quad x_p^2 + z_p^2 = R^2$$

$$K_p: \quad \xi_p^2 + \zeta_p^2 = (2R)^2$$



Slika 10

Rulete su krugovi poluprečnika (R) kod nepokretne (K_n) i poluprečnika ($2R$) kod pokretne rulete (K_p).

Sada se prema trećem aspektu može zamisliti da se pokretna ruleta (K_p) prenosno kreće obrtanjem oko pola (P_1) za ugao (α), a posle relativno, obrtanjem oko pola (P_2), tj. svoga geometrijskog centra, za ugao (α).

Vežu između uglova (α) i (α) daje uslov kotrljanja (K_p) po (K_n) bez klizanja ($R = 2R$), te je:

$$= \frac{1}{2}$$

Na početku je potrebno odrediti ravnotežni položaj štapa, tj. ugao (α) pri kome nastaje ravnoteža.

U ravnotežnom položaju težište štapa (C) nema vertikalnu komponentu brzine, jer u suprotnom to i ne bi bio ravnotežni položaj. Pošto težište štapa (C) ima brzinu horizontalnog pravca, onda se apsolutni trenutni pol (P) u ravnotežnom položaju štapa može naći samo na vertikalnom pravcu koji prolazi kroz težište (C) i to iz-

nad njega. Dakle:

$$x_C = x_P$$

$$\frac{L}{2} \cos \alpha - R \cos 2\alpha = R \cos 2\alpha$$

Ako uvedemo smenu ($\cos 2\alpha = w$), gornja jednačina se transformiše u kvadratnu jednačinu po nepoznatoj (w):

$$6w^2 - w - 1 = 0$$

sa jednim fizičkim prihvatljivim rešenjem: $w = \cos 2\alpha = \frac{1}{2}$. Sledi: $\alpha = 30^\circ$.

Rastojanja (a , b i c) iznose:

$$a^2 = R^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 - 2R \frac{L}{2} \cos 30^\circ = \frac{1}{16} L^2$$

$$a = \frac{1}{4} L; \quad b = \frac{1}{2} L; \quad c = R = \frac{3}{4} L$$

Momenti inercije su:

$$J_C = \frac{1}{12} ML^2$$

$$J_{P_1} = J_C + Ma^2 = \frac{7}{48} ML^2$$

$$J_{P_2} = J_C + Mb^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

Visine (H_1) i (H_2) iznose:

$$H_1 = R \sin 2 \cdot 30^\circ - \frac{L}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{8} L$$

$$H_2 = \frac{L}{2} \sin 30^\circ = -\frac{1}{4} L$$

Kinetičku i potencijalnu energiju izračunavam prema obrascima (5) i (6).

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} J_{P_1} \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} J_{P_2} \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} [2J_C + M(a^2 + b^2 - c^2)] \dot{\psi} \dot{\theta} = (\dot{\theta} = \frac{1}{2} \dot{\psi}) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} ML^2 \right) \dot{\psi}^2 \end{aligned}$$

$$E_p = \frac{1}{2} Mg(H_1 \psi^2 + H_2 \theta^2 - 2H_2 \psi \theta) = (\theta = \frac{1}{2} \psi) = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{16} MgL \right) \psi^2$$

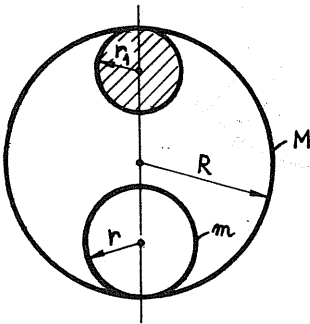
Diferencijalna jednačina oscilovanja je:

$$\frac{1}{12} ML^2 \ddot{\psi} + \frac{5}{16} MgL \psi = 0 \quad | \cdot \frac{1}{12} ML^2$$

$$\ddot{\psi} + \frac{15}{4} \frac{g}{L} \psi = 0$$

Period oscilacija štapa je:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4}{15} \frac{L}{g}}$$



Slika 11

- 3) Homogeni šuplji valjak, poluprečnika R , okačen je preko nepokretnog kružnog cilindra, poluprečnika r_1 , a u njegovoj šupljini nalazi se drugi homogeni šuplji valjak, poluprečnika r (slika 11). Odrediti kružne frekvencije oscilacija sistema, pretpostavljajući da nema trenja između valjaka i da je kotrljanje bez klizanja. Ovaj sistem osciluje se dva stepena slobode.

Za koordinate oscilovanja biram uglove (ψ_1) i (ϕ), slika 12.

Veliki šuplji valjak saopštava prenosno kretanje malom šupljem valjku tako što se obrće oko trenutnog pola (P_1), dok mali šuplji valjak vrši relativno kretanje obrćući se oko trenutnog pola (P_2) unutar velikog šupljeg valjka.

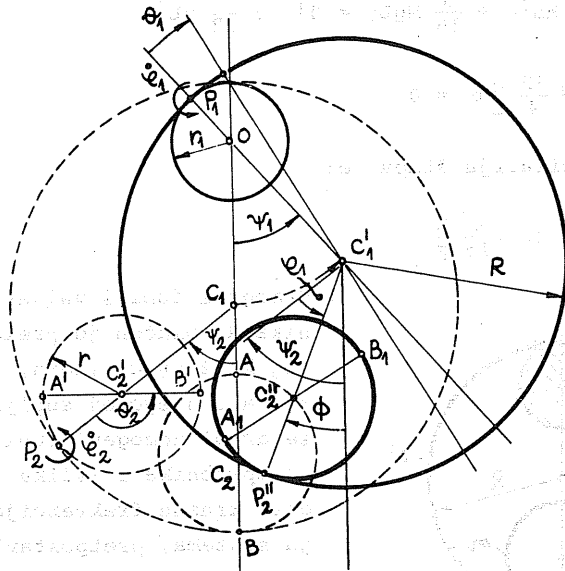
Kinetičku energiju velikog šupljeg valjka (E_{k_1}) izračunavam prema drugom aspektu:

$$E_{k_1} = \frac{1}{2} J_{P_1}^{(1)} \dot{\phi}_1^2 = M(R-r_1)^2 \dot{\psi}_1^2$$

pri čemu su:

$$J_{P_1}^{(1)} = J_C^{(1)} + MR^2 = 2MR^2 - \text{polarni moment inercije velikog šupljeg valjka za trenutni pol } (P_1)$$

$$\phi_1 = \psi_1 - \theta_1 = \frac{1}{R}(R-r_1)\psi_1 - \text{apsolutni ugao rotacije velikog šupljeg valjka, jer je: } R_1 = r_1$$



Slika 12

Kinetičku energiju malog šupljeg valjka (E_{k_2}) izračunavam prema trećem aspektu, obrazac (5).

$$E_{k_2} = \frac{1}{2} J_{P_1}^{(2)} \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} J_{P_2}^{(2)} \dot{\phi}_2^2 + \frac{1}{2} 2J_C^{(2)} + m(a^2 + b^2 - c^2) |\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2| =$$

$$= m(R-r_1)^2 \dot{\psi}_1^2 + m(R-r)^2 \dot{\phi}_2^2$$

pri čemu su polarni momenti inercije malog šupljeg valjka:

$$J_C^{(2)} = mr^2$$

$$J_{P_1}^{(2)} = J_C^{(2)} + m(2R-r)^2 = 2m(2R^2 - 2Rr + r^2)$$

$$J_{P_2}^{(2)} = J_C^{(2)} + mr^2 = 2mr^2,$$

ugaone brzine komponentnih rotacija:

$$\dot{\phi}_1 = \frac{1}{R-r_1} \dot{\psi}_1$$

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_2 &= \dot{\theta}_2 - \dot{\psi}_2 = \left(\frac{R}{r} - 1\right)\dot{\psi}_2 = \frac{1}{r}(R-r)\dot{\psi}_2 = (\text{jer je: } r\theta_2 = R\psi_2) = \\ &= \frac{1}{2}(R-r)\dot{\phi} + \frac{1}{Rr}(R-r)(R-r_1)\dot{\psi}_1\end{aligned}$$

pošto je: $\dot{\psi}_2 = \dot{\phi} + \dot{\phi}_1 = \dot{\phi} + \frac{1}{R}(R-r_1)\dot{\psi}_1$

Ovo dolazi otuda, zato što je ugao između pravca C_1P_2 i njegovog narednog položaja C_1P_2'' jednak prema Šaljovoj teoremi (Michel Shasles) uglu apsolutne ugaone rotacije velikog šupljeg valjka (ϕ_1), jer posmatramo samo prenosno kretanje malog šupljeg valjka. Prema slici 12 je

$$\psi_2 = \phi + \phi_1 = \phi + \frac{1}{R}(R-r_1)\psi_1$$

Potencijalnu energiju velikog šupljeg valjka (E_{P_1}) određujem prema trećem aspektu, obrazac (8):

$$E_{P_1} = \frac{1}{2} MgH_1\psi_1^2 = \frac{1}{2} Mg(R-r_1)\psi_1^2$$

gde je: $H_1 = R-r_1$ - visina prenosnog trenutnog pola (P_1) u odnosu na težište (C_1) velikog šupljeg valjka u ravnotežnom položaju.

Potencijalna energija malog šupljeg valjka (E_{P_2}) se ne može odrediti prema obrascu (6), jer u obrascu ne figurišu parametri geometrijskih karakteristika pokazanih ruleta na slici 4. Drugim rečima, obrazac (6) važi samo za specijalni slučaj, kada su nepokretna ploča (z) i nepokretna ruleta ploče nosača (n) geometrijske tačke na osnovu izvodjenja obrasca (6) prema slici 6.

Stoga će potencijalna energija malog šupljeg valjka (E_{P_2}) biti određena na osnovu sledećeg rezonovanja: Vraćanjem sistema iz izvedenog u ravnotežni položaj, izlomljena linija OC_1C_2'' poklapa se sa vertikalnim pravcem OC_1C_2 , slika 12.

Otuda visinska razlika malog šupljeg valjka iznosi:

$$\Delta h_2 = (R-r_1)(1-\cos\psi_1) + (R-r)(1-\cos\psi) =$$

$$\approx \frac{1}{2}(R-r_1)\psi_1^2 + (R-r)\psi^2$$

Potencijalna energija malog šupljeg valjka (E_{P_2}) iznosi:

$$E_{P_2} = mg\Delta h_2 = \frac{1}{2} mg[(R-r_1)\psi_1^2 + (R-r)\psi^2]$$

Kinetička i potencijalna energija sistema iznose:

$$E_k = E_{k_1} + E_{k_2} = (M+m)(R-r_1)^2\dot{\psi}_1^2 + m(R-r)^2\dot{\psi}^2$$

$$E_p = E_{P_1} + E_{P_2} = \frac{1}{2}(M+m)g(R-r_1)\psi_1^2 + \frac{1}{2}mg(R-r)\psi^2$$

Kada se vrednosti za (E_k) i (E_p) uvrste u Lagranževe jednačine II vrste (J.L.Lagrange), dobija se sistem nesimultanih diferencijalnih jednačina:

$$\ddot{\psi}_1 + \frac{g}{2(R-r_1)} \psi_1 = 0$$

$$\ddot{\psi} + \frac{g}{2(R-r)} \psi = 0$$

Kvadrati kružnih frekvencija su:

$$\omega_1^2 = \frac{g}{2(R-r_1)} ; \quad \omega_2^2 = \frac{g}{2(R-r)}$$

Ako se dozvoli da ($r_1 \rightarrow 0$), onda bi to praktično značilo da veliki šuplji valjak osciluje oko svoje izvodnice. Ovaj slučaj je rešen u primeru 10.5 na stranici 235. udžbenika Teorija oscilacija od D. Raškovića.

Kvadrati kružnih frekvencija bi onda bili:

$$\omega_1^2 = \frac{g}{2R} ; \quad \omega_2^2 = \frac{g}{2(R-r)}$$

ZAKLJUČAK

Problemi iz oblasti malih oscilacija ploče (p) u vertikalnoj ravni se mogu rešavati sa sva tri aspekta ravnopravno.

Medjutim, putevi do rešenja konkretnog problema koje nudi prezentirani aspekti nisu uvek isti, zbog čega je veoma važno pravilno izabrati aspekt sa koga će problem biti rešavan.

III aspekt, koga sam pokazao u ovom radu, može biti od praktične koristi, jer olakšava rešavanje odredjenih tipova problema iz oblasti malih oscilacija tela.

LITERATURA

- |1| Rašković D., "Mehanika II - Kinematika", Beograd, 1966.
- |2| Targ S.M., "Teorijska mehanika - kratak kurs", Beograd, 1979.
- |3| Rašković D., "Teorija oscilacija", Beograd, 1974.
- |4| Rašković D., "Zbirka zadataka iz mehanike III", Beograd, 1968.

(Classification of this document is based on the information
 contained herein and is not to be used for any other purpose
 without the express written approval of the appropriate
 authority. This document is the property of the Department of
 Defense and is loaned to you for your information only.
 It is not to be distributed outside your organization.
 If you are unable to return this document to the
 appropriate authority, please contact the
 appropriate authority for instructions.)

This document contains information that is classified as
 SECRET. It is intended for the use of authorized personnel
 only. It is not to be distributed outside your organization.
 If you are unable to return this document to the
 appropriate authority, please contact the
 appropriate authority for instructions.

UPUTSTVO SARADNICIMA

Časopis prima neobjavljene stručne radove studenata realizovane pod stručnim rukovodstvom, kao i priloge nastavnika i saradnika fakulteta konkretno iz oblasti tehničkih nauka. Pored toga časopis objavljuje tekstove prevedene iz inostrane literature, prikaze časopisa i knjiga kao i članke vezane za stručni i naučni rad studenata. Molimo saradnike da pre definitivne pripreme rukopisa za štampu pored ovog Uputstva pogledaju i zadnji broj časopisa kako bi priloge prilagodili našoj praksi. Radi se o sledećem:

1. Autor šalje rad koji treba da bude u konačnoj formi za publikovanje.
2. Priloge treba pisati na jednoj strani lista. Dimenzije rada odgovaraju A-4 formatu (210 x 297 mm), a površina dozvoljena za kucanje teksta, smeštanje slika, tabela itd. ne sme preći 165 x 247 mm, uz odgovarajuće udaljenosti od ivica papira (kako je to označeno na uglednom primerku prve strane, datom u prilogu). Margina sa leve strane je 3 cm a sa desne strane 1,5 cm.
3. Da bi svi radovi imali približno jednoobraznu strukturu, zbog ofset štampe, potrebno je da se autori drže uobičajenog redosleda pisanja tehničkih članaka: uvod, glavni deo, zaključak. Striktan redosled je sledeći: podaci o fakultetu, odseku, katedri, mentoru i autoru, naslov, sadržaj, abstrakt, uvod, razrada, zaključak, literatura.
4. Naslov treba da sadrži najmanji broj reči neophodnih za objašnjenje teme ukoliko zauzima više od jednog reda kuca se velikim slovima sa proredom jedanipo bez podvlačenja. Sadržaj i abstrakt mogu imati najviše do dvadeset redova i kucaju se bez proreda, a sav ostali tekst uključujući i popis literature sa proredom jedanipo.
Pojedini odeljci počevši od uvoda se numerišu arapskim brojevima (na primer, 1. UVOD), naslovi im se pišu velikim slovima i ne podvlače se.
Matematička izvodenja daju se samo u osnovnim crtama koliko je potrebno za praćenje konteksta rada. Formule se numerišu arapskim brojevima u zagradi na desnoj strani (na primer (1.2), (3.2)) gde prva cifra označava broj odeljka, a druga redni broj matematičkog izraza u tom odeljku.
Slike, dijagrami, fotografije se obeležavaju takođe arapskim brojevima (na primer, Sl. 5), a tabele rimskim brojevima (na primer, TABELA XI).
Fotografije u boji se ne primaju.
5. Sve veličine u radovima moraju da budu izražene u jedinicama SI sistema. Izuzetak čine one veličine koje se mogu izraziti i preko jedinica drugih sistema popisane u Službenom listu SFRJ broj 13 od aprila 1976. godine.
6. Razmatraće se za štampu prvenstveno oni radovi koji budu odgovarali navedenim uputstvima.
7. Na posebnoj listi mentor overava rad i daje recenziju rada.
8. Autor daje svoju punu adresu.
Ukoliko rad ne odgovara ovom Uputstvu redakcija zadržava pravo da ga ne objavi u časopis. Redakcija zadržava pravo da ne objavljuje po redosledu kojim radovi stižu.
Rad i overenu recenziju mentora dostaviti na adresu: "NAUČNI PODMLADAK", Kej Mike Paligorića broj 2, soba 42, 18000 NIŠ ili doneti lično četvrtkom od 12-14 h.

WYOMING
STATE
RECORDS
DIVISION

STATE OF WYOMING
DEPARTMENT OF REVENUE

NOTICE OF SALE OF REAL ESTATE

NOTICE OF SALE

WHEREAS, certain real estate is subject to a tax lien...

and the same is being sold to satisfy said tax lien...

NOTICE OF SALE

WHEREAS, certain real estate is subject to a tax lien...

and the same is being sold to satisfy said tax lien...

NOTICE OF SALE

WHEREAS, certain real estate is subject to a tax lien...

S A D R Ź A J

Stručni radovi

- | | | |
|--|--|----|
| - Vlastimir D. Pavlović | Prelazni Butterworth-Chebyshev-ljevi filtri | 1 |
| - Vlastimir D. Pavlović | Niskofrekventni filtri sa minimalnim gubićima u propusnom opsegu | 7 |
| - dr Gradimir V. Milovanović
dr Igor Ž. Milovanović | Neke diskretne nejednakosti za nizove konveksne reda k | 21 |
| - dr Gradimir V. Milovanović
dr Igor Ž. Milovanović | Neke integralne nejednakosti | 29 |

Odabrane teme

- | | | |
|--|--|----|
| - doc. dr Miroslava Milošević | Konstrukcija skretnice za zvučničku kombinaciju | 35 |
| - Ratko Š. Spaić,
dipl. ing. gradj. | Racionalnost izvodjenja radova na radnim akcijama | 49 |
| - Slobodan Milovanović,
dipl. ing. | Aspekti proučavanja ravnog kretanja tela i njihova primena na rešavanju problema iz teorije oscilacija | 65 |

Informacije

- | | | |
|------------------------|--|----|
| - Uputstvo saradnicima | | 91 |
|------------------------|--|----|