СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

ЕЛЕМЕНТИ

МАТЕМАТИЧКЕ ФЕНОМЕНОЛОГИЈЕ

ОД

МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

ПРОФ. УНИВЕРЗИТЕТА

У БЕОГРАДУ
ШТАМПАНО У ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ КРАЉЕВИНЕ СРБИЈЕ
1911.

САДРЖАЈ.

ПРВИ ОДЕЉАК.

Елементи за дескрипцију појава и њихових механизма.

ПРВА ГЛАВА.

ДЕСКРИПТИВНИ ЕЛЕМЕНТИ ПОЈАВА.

II. Елементи за аналитичку дескрипцију.

Геометриски и кинетички елементи појаве. — Дескриптивни системи и њихове конфигурације. — Фигуративна тачка система. — Трајекторија система. — Ток појаве. — Интензитет појаве. — Брзина модификација, њени коефицијенти правца и њен смисао. — Акцелерација појаве. — Стационарна стања у појави. — Тоталитет једнога елемента. — Тоталитет појаве. — Редукција дескрипције појаве на дескрипцију кретања фигуративне тачке њеног дескриптивног система. · · стр. 90.

ДРУГА ГЛАВА.

МЕХАНИЗМИ ПОЈАВА.

I. Елементи за шематску дескрипцију.

Улога, аналогија улога, језгро аналогије. — Активне улоге, активитет, тежња, утицај, јачина узрока. — Пасивне улоге. — Улоге импулсивних, појачавајућих узрока; улоге депресивних, антагонистичких узрока; улоге активних и реактивних узрока. — Специјалније врсте улога: улога изазивача, улога тренутних узрока, координативне улоге, регулаторске улоге, улоге терена, улоге веза, улоге препрека. — Квантитативне и квалитативне аналогије улога. — Природа и шематисање улога. — Шематисање механизма појава. — Сличност састава механизама. · стр. 95.

II. Елементи за аналитичку дескрипцију.

А). **Активне улоге.**

Тежња улога, њена јачина и њен смисао. — Перманентни закони тежња — Асимилација тежња механичким силама. — Резултанта тежња и њене компоненте. — Величине X_i. — Коефицијенат утицаја тежња. · · · · · · · · · · · · · стр. 106.

В). **Пасивне улоге.**

Дескрипција пасивних улога. — Виртуелне модификације у дескриптивном систему. — Виртуелне промене појединих елемената. — Слободан систем. — Систем са везама. — Примери веза у неколиким конкретним појавама. — Остварљиве виртуелне модификације конфигурација. — Степен слободе система. — Редукција најопштије остварљиве модификације на кретање фигуративне тачке по једноме одређеном варијетету у полидимензионалном простору. — Ефективне модификације у дескриптивном систему. — Редуковани дескриптивни систем. — Проучавање појаве сведено на проучавање слободног кретања фигуративне тачке редукованог система, или кретања фигуративне тачке првобитног система по једноме одређеном варијетету у полидимензионалном

ДРУГИ ОДЕЉАК.

Спона између механизма и манифестације појава: диференцијалне једначине појава.

ПРВА ГЛАВА.

ОСНОВНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ.

Примарни и секундарни систем. — Спона међу активним и пасивним улогама: једначине модификација у примарном и секундарном систему. — Искључиви и делимични непосредни узрок. — Основне једначине комплексних појава. — Слободан систем. — Систем са везама прве и друге врсте. — Реакције веза и њихова одредба.

ДРУГА ГЛАВА.

ГЕНЕРАЛНА ТРАНСФОРМАЦИЈА ОСНОВНИХ ЈЕДНАЧИНА.

Случај веза прве врсте. — Најпростији облик једначина појава са везама прве врсте. — Одредба функције Θ. — Одредба функција Q_i — Случај веза друге врсте. — Најпростији облик једначина појава са везама друге врсте. — Одредба функције S. — Одредба функција Q_i. — Appell-ов канонични тип једначина. — Развијени облик једначина за редуковани систем. — Проблем трансформације система. — Непосредна редукција датих једначина појаве на Appell-ов канонични тип. — Примењене и инертне тежње у једначинама појава. — Редукција једначина неколиких конкретних појава на Appell-ов канонични тип: кретање чврстог тела око једне утврђене тачке; кинетички ток зависних симултаних хемиских реакција; међусобна акција система непокретних струја; варијације струја у покретним дво-димензионалним проводницима; мале осцилације покретних система око стабилног равнотежног положаја; међусобна акција система покретних струја; међусобна акција система струја при деформацији проводника; међусобна акција струја и магнета.

ТРЕЋА ГЛАВА.

ТРАНСФОРМАЦИЈА ЈЕДНАЧИНА ЗА ПОЈАВЕ СА ХОЛОНОМНИМ СИСТЕМОМ.

Редукција једначина на Lagrange-ев облик, за системе слободне или са везама друге врсте. — Одредба и опште значење појединих чланова у Lagrange-евим једначинама: функција T, функције Q_i и моменти модификација. — Lagrange-еве једначине за неколике врсте конкретних појава. — Формирање једначина за цикличне: моноцикличне, бицикличне и полицикличне појаве. — Формирање једначина према специјалним погодбама које се буду имале у виду. — Формирање једначина према констатованим, или претпостављеним аналогијама. — Примедба о Lagrange-евим једначинама за појаве са нехолономним системом. — Корективни чланови таквих једначина. — Lagrange-еве једначине за појаве са нехолономним системом и веома лаганим модификацијама.

ЧЕТВРТА ГЛАВА.

ТРАНСФОРМАЦИЈА ОСНОВНИХ ЈЕДНАЧИНА ЗА ПОТЕНЦИЈАЛНЕ ПОЈАВЕ.

Потенцијал узрока. — Потенцијалне појаве. — Консервативне појаве. — Општи случајеви егзистенције потенци-

ПЕТА ГЛАВА.

КОНДЕНЗОВАНИ ОБЛИЦИ ЈЕДНАЧИНА.

* * *

ТРЕЋИ ОДЕЉАК.

Непосредне последице феноменолошких диференцијалних једначина.

ПРВА ГЛАВА.

СТАЦИОНАРНЕ ФАЗЕ ПОЈАВА.

Стационарна стања и стационарне фазе. — Асимтотна стања. — Одредба стационарних конфигурација. Слободан систем. Системи са везама. — Стабилна стационарна стања. — Стационарна стања у неколиким врстама конкретних појава. Механичка стационарна стања. Хемиска стационарна стања. Стационарни распореди стања у феноменским пољима. Хидродинамичне стационарне фазе кретања. Термични стационарни распореди при провођењу топлоте. Стационарни распореди у електромагнетним пољима. Распореди осветлења. Моменат и центар дистрибуције стања у скаларним пољима.

ДРУГА ГЛАВА.

ТЕОРЕМА ЖИВИХ СИЛА И ЊЕНЕ ФЕНОМЕНОЛОШКЕ ПОСЛЕДИЦЕ

Рад примењених и инертних тежња. — Виртуелни и ефективни елементарни рад. — Појаве са слободним системом. — Појаве са везама друге врсте у систему. — Кинетичка енергија појаве. — Израз кинетичке енергије у неколиким конкретним појавама. — Општа теорема живих сила.

Принцип одржања енергије у конзервативним појавама. — Рад примењених тежња и независност тоталног рада од трајекторије фигуративне тачке. Рад при кружним процесима. Нивоске површине и нивоски варијетети. — Интеграл живих сила за конзервативне појаве. — Кинетичка, потенцијална и тотална енергија. — Принцип одржања. — Енергија и принцип одржања у неколиким врстама конкретних при-

ТРЕЋА ГЛАВА.

АКЦИЈА ДИСКОНТИНУАЛНИХ УЗРОКА.

ЧЕТВРТИ ОДЕЉАК.

Манифестација појаве као последица састава њенога механизма.

ПРВА ГЛАВА.

КВАНТИТАТИВНА СЛИКА ПОЈАВЕ.

ДРУГА ГЛАВА.

КВАЛИТАТИВНА СЛИКА ПОЈАВЕ.

Квалитативне појединости импозиране фактима што изазивају јачање или слабљење појединих узрока у појави. — Осцилаторни карактер појава, везан за акцију депресивних узрока пропорционалних тоталитету свога непосредног објекта, са коефициентима утицаја, који се, остајући у току појаве непрестано већи од једнога одређеног броја, мењају, за то време, на ма какав начин. — Амортизирано-осцилаторни карактер појава, везан за симултану акцију последњих узрока и депресивних узрока пропорционалних величинама својих непосредних објеката, чији се коефицијенти утицаја мењају експлицитно са временом. — Интермедијерни карактер појаве, према одређеним појавама P_1 и P_2, као последица интермедијерног карактера њеног механизма, према механизмима појава P_1 и P_2 — Квалитативне појединости у појавама, везане за симетрију и дисиметрију узрока или феноменског поља у коме се појава дешава. — Квалитативне појединости импозиране егзистенцијом и природом економских момената у појави. . . . . стр. 571.

ПЕТИ ОДЕЉАК.

Састав и шеме феноменолошких механизама.

ПРВА ГЛАВА.

КОМБИНАЦИЈЕ И ДИСТРИБУЦИЈА УЛОГА У МЕХАНИЗМИМА ПОЈАВА.

Одређеност механизма. — Разноврсност фактора карактерисаних истим улогама. — Шеме механизама.

Примери комбинација и дистрибуција улога у неколиким врстама конкретних појава: механизми у појавама кретања и деформације маса; механизми у електричним појавама; механизам фотохемиске акције светлости на осетљиву плочу; механизам варијација хлорних састојака при гастричном хемизму; механизам формације и коагулације колоида; механизам периодичности мирисних еманација у биљкама; механизми органских ондулација; механизам одбране организма против акције микроба; механизам нормалних и патолошких појава при продукцији вољних аката. стр. 613.

ДРУГА ГЛАВА.

ВАРИЈАЦИЈЕ АКТИВИТЕТА У МЕХАНИЗМИМА ПОЈАВА.

Проблем одредбе начина варијација активитета за разне конкретне појаве.

Квантитативни закони варијација активитета. — Очевидни закони: колективни активитет комплекса међу собом једнаких носилаца активитета; централни активитети обрнуто пропорционални квадрату растојања. — Емпирички и експериментални закони: тежа; отпор трења; отпор средине; електрична атрактивна и репулсивна сила, магнетна репулсивна и атрактивна сила; еластична сила при истезању или контракцији; торсиони спрег при упредању жице; електромоторна сила у термоелектричним колима; утицајна тежња праволиниске струје на магнетни пол; магнетна утицајна тежња електричне струје облика затворене контуре; елементарне утицајне тежње магнета и струја; индукована електромоторна сила; статистички узроци. — Аналитички изведени закони: интуитивна правила за законе активитета, изведене из диференцијалних једначина појава. — Хипотетички закони верификовани својим последицама: универсална атракција; међу собна утицајна тежња материјалних делића при распростирању топлоте и електрицитета; хемиске силе што регулишу брзине реакција; активитети у експоненцијалним појавама; интра-молекуларни отпор у механизму фосфоресценције.

Квалитативне појединости варијација активитета: хемиски, физиолошки, психички узроци. Врсте квалитативних појединости.

Реципроцитет између састава механизма, начина варијација активитета и појединости у манифестацији појава.

* * *

ШЕСТИ ОДЕЉАК.

Феноменолошке аналогије.

ПРВА ГЛАВА.

МАТЕМАТИЧКЕ АНАЛОГИЈЕ.

Аналошке групе и њихови хомологи елементи. — Погодбе за аналитичку еквиваленцију појава. — Хомологи елементи неколиких простијих аналошких група: група експоненцијалних појава; група амортизираних осцилаторних појава; кретање чврстог тела око утврђене осовине и њему одговарајућа електрична појава; стационарна стања електрицитета, стационарна термична стања и перманентно, иротационо кретање некомпресибилних течности; појаве обухваћене Thomson-овим и Lippmann-овим аналогијама; осмотичне, еластичне и економске појаве; група моноцикличних појава; група бицикличних појава; механичке илустрације и механички модели појава. — Феноменолошки, философски и практични, значај математичких аналогија.

ДРУГА ГЛАВА.

КВАЛИТАТИВНЕ АНАЛОГИЈЕ.

* * *

УВОД

У бескрајном шаренилу природних појава, међу заједничким цртама, које у њима открива непосредно посматрање или дубља анализа, има их и таквих, које се распростиру на најразнородније појаве, према којима конкретна природа појава не игра никакву улогу, а које, при свему томе, површније или дубље задиру баш у карактеристичне, каткад и у најбитније појединости појава.

Остављајући на страну безброј површних, безначајних, заједничких црта међу диспаратним појавама, потсетићемо само н. пр. на оне, што се могу запазити:

1° у начину на који се узастопна тренутна стања нижу у току појаве једно за другим (разноврсне појединости при модификацијама у којима се састоји суштина појаве; осцилаторан, периодичан или апериодичан карактер модификација; непромењивост, симултано рашћење или опадање појединих елемената у појавама; поступност или нагли скокови при тим модификацијама; поступно и непрекидно приближавање једноме одређеном асимтотном стању и т. д.);

2° у механизмима појава т. ј. у скупу улога оних прилика и фактора чији стицај одређује појаву, у начину на који су се улоге међу собом комбиновале, у смислу модификација које поједине улоге импозирају појави, у начину на који се утицаји појединих фактора, за који су те улоге везане, комбинују и мењају у току појаве, у сличности прилика у којима је реализиран стицај једнога комплекса улога и т. д.;

3° у природи улоге, коју једна одређена појава игра према другој једној уоченој појави или једноме уоченом комплексу појава;

4° у пермаментним законима или математичким релацијама што регулишу појаве, или што везују промене појединих елемената и фактора у појавама.

То су оне заједничке црте у појавама, које и у обичном животу чине да каква појава једним својим аспектом, или извесним својим појединостима поменуте врсте, потсећа на другу какву појаву од ње сасвим различну по конкретној природи и које дају повода оним честим метафорама што се и у животу, и у књижевности, и у наукама на свакоме кораку употребљују, идентификујући једну уочену појаву са другом каквом, која је сасвим друге природе и са којом она не стоји ни у каквој конкретној вези. Довољно је н. пр. потсетити како се са ударом идентификују изненадне, нагласне промене свих врста; како се са бујицом, чија деструктивна моћ расте са препонама што јој се стављају на супрот, идентификују интезивни узроци ма какве конкретне природе, чији утицаји јачају упоредо са сметњама, на које наилазе; како се појаве ма које врсте, механичке, физичке, физиолошке, социолошке, и т. д. које се састоје у непрекидном, лаганом, периодичком осциловању извесног стања између двеју крајности, идентификују са лаганим, одмереним, периодичким кретањем клатна, или са приливом и одливом, или са перисталтичким кретањима у физиологији; како се извесна жива, а неодређена унутрашња кретања великих људских маса, идентификују са врењем, атавизам са хистерезиским појавама при променама еластичног или магнетног стања, извесна душевна стања са узбурканим морем, напраситости, иза којих долази душевна утишаност, са експлозијом или електричним испражњавањем и т. д.

Свака од оваких метафора има за подлогу какву заједничку, више или мање карактеристичну, црту уочену међу диспаратним појавама; та се црта тада јаче и изразитије истиче на видик поређењем дате појаве са другом каквом, у којој се таква црта сама собом јаче истиче, или је чак и улепшана, као што је случај у поезији, где употребљена слика, на којy наводе заједничке црте међу појавама, има да изазива живље представе и интезивније осећаје, но што би чинила сама уочена појава, онаква каква је.

Кад се средствима, којима располажу поједине науке, уђе дубље у појединости тока и механизма појава, у сплет прилика, које их одређују, у скуп закона, који их регулишу, заједничке црте постају у толико многобројније, одређеније и потпуније, у колико је дубље и потпуније познавање појаве. Јер, са једне стране, те су црте понајчешће тако маскиране разновсношћу и шаренилом специфичких облика у којима се оне јављају у разновсним природним појавама, да их је могућно открити тек онда, кад се дубљим упознавањем појединих појава кроз такву маску сагледа оно, што је у појави битно. Каква оптичка појава, која би се састојала у поступном прелазу боје каквога тела од црвене до љубичасте, по реду означеном у спектру беле светлости, и појава поступног напредовања једне болести могу имати једну карактеристичну заједничку црту: мењање карактеристичног елемента појаве по једноме истом закону. Кад је то случај, ту је црту могућно запазити само ако се зна да се промене боја састоје у променама таласке дужине, а да је поступно напредовање болести карактерисано варијацијама једнога подесно изабраног елемента, који има да буде прецизиран дубљим познавањем суштине болести.

Са друге стране, најдиспаратнији елементи могу у разним појавама играти једну исту улогу, у чијој се истоветности тада и састоји једна од заједничких црта таквих појава. Електромоторна сила електричне батерије игра у електричним променама ону исту улогу, коју игра механичка сила при праволиниском кретању тачке или моменат силе при обртању чврстог тела око утврђене осовине; количина електрицитета игра исту улогу коју и угао обртања и т. д. Ту је истоветност улога, међу тим, у највећем броју случајева могућно тек онда сагледати, кад математичка анализа истакне на видик улоге свих фактора, што одређују појаву. Обично па и најпажљивије посматрање не запажа на пр. никаквих заједничких црта у појавама кретања клатна и испражњавања електричних кондензатора. Feddersenови експерименти истичу на видик заједнички осцилаторни карактер тих појава са постуйним слабљењем осцилација, а математичка анализа открива и потпуну аналогију начина на који се те појаве дешавају, истоветност улога појединих фактора, који их изазивају, као и истоветност математичких релација и закона што их регулишу. — Обично посматрање не запажа никакве сличности међу појавама кретања електрицитета у проводницима, промена дистрибуције топлоте у телима и кретања течности; математичка анализа открива у тим појавама толико заједничких црта, да се са аналитичког гледишта све три врсте појава своде на један исти проблем, чије појединости само треба конкретно протумачити на три разна начина, па да се непосредно добију појединости одговарајућих електричних, термичких или хидродинамичких појава.

Такве су заједничке црте, површне или дубље, у диспаратним појавама веома многобројне. Оне су подлога у разним наукама познатим и данас толико многобројним *аналогијама између диспаратних појава*, чији су најпотпунији, најсавршенији тип *математичке аналогије* међу појавама. Поједине су од њих биле и од судбоносног значаја за развитак читавих грана науке, као што је н. пр. случај са онима, што чине аналогију међу разноврсним теоријама данашње Математичке Физике и које су, наслућене у напред, биле водиље при едификацији тих теорија. Такав је случај и са онима, што чине запажене аналогије између физичких и економских појава, и из којих су потекле гдекоје данашње теорије у Политичкој Економији. Оне су и у осталим наукама у много прилика одређивале правац испитивањима и уносиле светлости онде, где се за експликацију појава није имало никакве друге полазне тачке, нити наговештеног правца.

* * *

У недогледној маси појава са заједничким цртама, за циљ, који се овде има пред очима, од важности су случајеви, у којима је један одређени скуп заједничких црта могућно схватити *као неминовну последицу стицаја једног одређеног скупа заједничких факата у свакој од групе појава, на које се такве црте распростиру.*

Ма у коликој мери биле диспаратне две појаве, несумњиво је да егзистенција једног скупа *(E)* заједничких факата у њима повлачи собом као последицу извесан скуп заједничких црта *(O)* у обема појавама. Као што је горе казано у опште за заједничке црте појава, истоветност скупа *(O)* у једној и другој појави може бити маскирана конкретним специфичким облицима, у којима се те црте манифестују, и које је тешко а каткад и немогућно сагледати у оној бескрајној разноврсности облика, у коме се једна иста појединост јавља у разнородним природним појавама. Али о томе, да те истоветности мора бити, кад је већ утврђена истоветност једног скупа *(E)*, и да се она, ако не површним посматрањем, а оно бар дубљом анализом мора сагледати, не може бити никакве сумње. Заједнички н. пр. факт: егзистенција активних и реактивних узрока, који се мењају по истим квантитативним законима, повлачи собом у појави кретања клатна и у појави испражњавања електричних кондензатора једну исту заједничку одлику: осцилаторни карактер и једне и друге појаве, који се при кретању клатна видљиво манифестује у облику осцилација самог клатна, а у електричној се појави констатује само нарочитим осетљивим експерименталним диспозицијама у облику наизменичних промена смисла електричне струје у току испражњавања. — Егзистенција једнога узрока, који сам слаби у оној мери у којој му ефекат јача, повлачи собом у појави апсорбције светлости при пролазу кроз какав апсорбујући слој и у појави варијација барометарског притиска при поступном пењању у земљиној атмосфери једну исту заједничку одлику: поступно слабљење резултујуће појаве по логаритамском закону. Та се одлика специфички манифестује у првој појави у основном закону апсорбције светлости а у другој појави у Laplaceовом закону опадања барометарског притиска са висином.

Свака од оваквих група појава, у којима се може разликовати један скуп *(E)* и један скуп *(O)* представља по једну *аналошку групу појава*, карактерисаних једном међусобном аналогијом, која се састоји у истоветности скупова *(E)* и *(O)* за све појаве, што припадају групи. Везе, што постоје између скупа *(E)* и скупа *(O)*, а које су такве врсте, да је егзистенција скупа *(O)* неминовна последица егзистенције скупа *(E)*, састављају једну *општу шему*, која обухвата све појаве такве једне аналошке групе и према којој се може, кад год је у једној датој појави, ма какве конкрекне природе, утврђена егзистенција скупа *(E)*, *предвидети* одмах и егзистенција скупа *(O)* и сва факта садржана у њему.

Природно је да у оваквој једној општој шеми појаве, као и поједини елементи и фактори у њима, губе своју специфичну конкретну природу и све што их специјално везује за једну одређену конкретну појаву. Од појава остаје једна врста скелета, који се састоји само из онога, што је у њима заједничко и што је апсолутно потребно да постоји, да би се уочени скуп *(O)* могао схватити као нужна последица егзистенције скупа *(E)*. Тако би н. пр. од појаве вертикалног кретања баченог тешког тела, или појаве електричних промена, што их изазива стална електромоторна сила у електричном колу са занемарљивим отпором и коефициентом ауто-индукције, остао само један овакав скелет: униформно рашћење или опадање једнога карактеристичног елемента у појави (брзине тела или јачине струје) као последица стицаја инерције у појави и једнога импулсивног или депресивног узрока сталне јачине (атракционе или електромоторне силе). — Од појаве варијација кинетичког тока у једној мономолекуларној хемиској реакцији, или од појаве поступног развијања једне болести проузроковане акцијом бацила, кад би се ови затирали у мери у којој извршују своју акцију, а од тренутка, кад би се престали множити, остао би скелет овакве врсте: постунно слабљење карактеристичног елемента у појави (брзине хемиске реакције или елемента који мери напредак болести) као последица стицаја инерције у појави и једнога узрока, који се тропи у мери у којој му ефекат јача. — Од појаве поступног распростирања топлоте или електрицитета остао би овакав један скелет: поступне промене у дистибруцији једнога стања, које се распростире по једноме телу од тачке до тачке тако, да стање у једној тачки има утицаја само на тачке у непосредној близини, да се оно распростире од тачке где је јаче, ка тачкама где је слабије и да при том утицај једне тачке на другу не зависи од саме јачине стања у тим тачкама, већ искључиво од вредности разлике тих јачина.

Свакој би аналошкој групи појава одговарао по један такав скелет, у коме би се на место конкретних факата, елемената, фактора, у скупу *(Е)* јављале само њихове улоге према скупу *(О)*, а у овоме само оно, што неминовно резултује, из онакве комбинације улога, каква је реализирана у скупу *(Е)*. На место н. пр. гравитационих, електричних, магнетних, хемиских, виталних и т. д. сила јавио би се у таквом скелету општи појам узрока и њихових активитета; посматране механичке, физичке, хемиске, физиолошке и т. д. појаве биле би смењене апстрактном концепцијом ефеката, дефенисаних величинама нарочитих карактеристичних елемената; на место специјалних закона, по којима делају поменути конкретни узроци, и чија је истоветност за све појаве дате аналошке групе маскирана шаренилом облика, у којима се ти закони манифестују у појавама разних конкретних природа, имали би се генерални закони, које само треба на разне начине протумачити у разним појавама једне аналошке групе, па да се то шаренило на мах јави онакво, какво је било пре оваквих апстракција. Свака, дакле, аналошка група делажирањем и генералисањем онога што је карактерише, наводи на по једну општу шему за експликацију појава најразличнијих конкретних природа, које би биле сводљиве на један исти скелет. Таква би шема, из општих релација, што постоје између појединих улога и појединости које оне собом повлаче, предвиђала заједничке облике свих појава групе и дала кључ за разумевање аналогија што у њима, поред све њихове диспаратности, постоје.

Међу тим овакве се поједине шеме, ставши на једно још узвишеније гледиште, могу схватити и *као делови једне исте целине.* По самој природи онога што оне садрже и по начину на који су склопљене: ослобођавањем појаве свега онога што не игра какву улогу у појединостима обухваћеним таквом шемом, јасно је да су појмови, који су предмет тих шема, са једне стране мање многобројни но они на које се наилази у посебним теоријама појединих појава, а са друге стране по обиму пространији од ових. Са таквим појмовима, као елементима, издвојеним из великог броја оваквих шема могућно је едифицирати једну генералну теорију са пространством једне нарочите гране Природне Философије, која би обухватила све поједине поменуте шеме као своје саставне делове и *која би се састојала из генералних метода за предвиђање појединости појава према природи улога оних фактора, из чијег стицаја појава резултује као нужна последица.*

Као што Механика и Математичка Физика предвиђају појединости механичких и физичких појава према датим приликама у којима се ове дешавају, тако би и теорија, о којој је реч, имала *предвиђати* појединости појава свих врста једино из *дате* комбинације улога што појаву одређују, као премиса, независно од тога на какве ће се конкретне појаве добијени закључци примењивати.

Овакво би предвиђање имало за основу *генералне релације између природе појединих улога и појединости које резултују из учешћа тих улога у изазивању појаве.* Истраживање пак таквих релација залази у област математичке анализе. Оно, као и у свима проблемима анализе, претпоставља да су појмови, са којима се има оперисати, већ редуковани на такав један облик, који би у једно исто време имао и ону генералност, која карактерише објекте математичке анализе и ону одређеност и прецизност, без које им је немогућан улазак у њене области. Према томе грана Природне Философије, која је мало час поменута, имала би за први претходан задатак *дескрипцију појава* на такав један начин, да у њој сваки појам добије горњи карактер и постаје припремљен за објекат Математичкој анализи. Други један претходни задатак састајао би се у довођењу на нарочити облик *дескрипције механизма појава* т. ј. комбинације свих улога из чијег стицаја резултује појава онаква, како је на горњи начин описана. И та би дескрипција требала да буде таква, да сваки појам, што у њу улази, има основни карактер математичких објеката: генералност, одређеност и прецизност, и то онакву, каква је потребна и довољна да се уочене појединости у дескрипцији појава могу схватити као нужне последице тако описаног механизма. Кад је то све учињено, математичка анализа налази на припремљено и сигурно земљиште и *предвиђање*, о коме је напред била реч, постаје један чист аналитички проблем.

Ови проблеми: дескрипција појава и њихових механизама на поменути начин, истраживање релација између једних и других и предвиђање појединости, које у појави повлаче собом дате појединости механизма; саставни су делови једнога генералног проблема: *математичке експликације заједничких појединости диспаратних појава свих врста и свију конкретних природа као нужних последица сличности механизма*. То би био основни проблем *Математичке Феноменологије* чији ће елементи бити предмет овога дела.

Формирање овакве једне дисциплине могло би се извршити на два начина:

Један чисто индуктиван, који сасвим природно и наводи на идеју за целу ствар и у коме је лако увидети и једну сигурну, али и спору методу за поступно развијање ове дисциплине, састојао би се у томе да се, пошавши одоздо, од конкретних појава, апстракцијом уочених заједничких одлика и поступном генерализацијом појмова, на које се при томе буде наилазило, поступно пење до оне висине, са које ти појмови и запажене одлике неће више изгледати везани за поједине специјалне конкретне појаве, већ добити облик што карактерише чисте и генералне појмове математичких дисциплина, а који би обухватио све што је карактеристично у ономе из чега је апстрахован. Полазне тачке за овакав начин формирања ове дисциплине биле би *математичке аналогије* међу диспаратним појавама. Дегажирајући из једне аналошке групе таквих појава оно што им је заједничко, што их спаја у једну групу, што им поред све диспаратности даје један исти тип, добила би се једна општа шема за ту групу појава, у којој не би била прецизирана конкретна природа појава и појединих фактора у њима, већ би се свему томе дало у онолико генералан облик, колико је потребно и довољно па да шема обухвати све поједине теорије посебних појава из којих је апстрахована. Тако би се н. пр. могла формирати једна шема, која би обухватила као специјалне случаје теорије све три појаве познате аналошке групе: кретања клатна кроз отпорну средину, кретања течности у савијеним цевима и испражњавања електричних кондензатора, и која би се свела на прву, другу или трећу од ових теорија према томе какво се кад конкретно значење буде придало појединим концепцијама у њој. — Друга једна таква шема обухватила би посебне теорије аналошке групе појава: распростирања топлоте, распростирања електрицитета и пермаментног кретања течности без компресије и трења. — Трећа би шема обухватила н. пр. теорију вихорастих кретања једне флуидне масе и електродинамичких појава, које, заједно са таквим кретањима, припадају једној аналошкој групи и т. д.

У колико би се, у току развијања и напредовања појединих грана наука дубље продирало у састав механизма појава и тачније запажале заједничке црте на диспаратним појавама, у толико би и број оваквих шема све више растао. На тај би се начин поступно сама од себе формирала једна математичка дисциплина, која би све више обухватала генерални проблем, који је овде истакнут као основни проблем *Математичке Феноменологије*.

На место оваквих општих шема за поједине аналошке групе појава може се једна од ових узети за *типску појаву* и њена теорија сматрати као *типска теорија* за све појаве такве групе. Оваква једна типска теорија играла би улогу шеме те аналошке групе, под условом да јој се прида упуство о начину, на који се од ње може прећи на посебну теорију једне, ма које, од појава те групе. Кретање н. пр. клатна у отпорној средини сматрало би се као типска појава за све горе поменуте појаве, које са њиме припадају једној истој аналошкој групи; теорија тога кретања, сматрана као типска теорија за све те појаве, била би у исто време и општа теорија свих ових појава, кад јој се прида упуство да н. пр. при њеној примени на појаву испражњавања електричних кондензатора треба у њој сменути типске факторе: елонгацију електричним оптерећењем кондензатора, масу клатна коефицијентом аутоиндукције, тежину јединице дужине клатна реципрочном вредношћу капацитета кондензатора, инерцију клатна електромоторном индукционом силом, отпор средине кроз коју се креће клатно контра-електромоторном силом, хоризонталну компоненту тежине клатна Coulomb-овом електромоторном силом, а у другим појавама исте групе одговарајућим, хомологим факторима.

Овакав индуктиван начин формирања ове дисциплине, поред спорости и ограничености на само познате аналошке групе, као своје слабе стране, имао би ту корисну страну што би се при таквој поступној формацији непрестано одржавала веза са конкретним појавама: свака од формираних општих шема имала би за основицу по једну аналошку групу конкретних појава из којих је апстрахована и на које би се сводила прецизирањем општих појмова што је састављају или пермутовањем фактора типске теорије са онима што одговарају поједним појавама групе. Свака шема носила би на тај начин собом и своје непосредне примене на конкретне појаве.

Други би се, чисто *дедуктиван* начин састојао у томе, да се пошавши од генералних, апстрактних и довољно прецизних појмова, на какве је претходно сведена дескрипција појава и њихових механизама, на начин сличан ономе, на који је едифицирана Рационална Механика, дедуктивно формирају генералне релације између природа улога и њихових комбинација са једне стране, и резултујућих појединости појава са друге стране, у облику квантитативних закона којима ће појаве са датом комбинацијом улога бити регулисане. Као водиља при таквој едификацији може служити аналогија ове дисциплине са Рационалном Механиком, али користећи се таквом аналогијом само у онолико, у колико је могућно сагледати јој и схватити битни разлог.

Овакво формирање *Математичке Феноменологије*, не полазећи одоздо од конкретних појава, нема потребе ићи упоредо са поступним акумулисањем аналогија међу појавама; оно би, на против, спуштајући се од генералних концепција, које су му полазна тачка, ка конкретним појавама, поступно наилазило на поједине аналошке групе, давало кључ за разумевање већ констатованих аналогија, откривало и образложавало нове дотле не запажене аналогије и реконструисало онај материјал, који би се имао као основица и полазна тачка при индуктивној едификацији ове дисциплине.

На овакав ће један дедуктивни начин бити формирани Елементи Математичке Феноменологије, који састављају ово дело. План, по коме је то извршено, биће у главним потезима овде изложен.

* * *

Појава се, ма какве врсте, конкретне природе и компликованости она била, може схватити као низ узастопних промена једнога одређеног скупа елемената — *дескриптивних елемената* појаве — у току времена. Узастопна тренутна стања, кроз која пролази један дескриптиван елеменат у току појаве, могу се схватити и представити на један нарочити начин, истоветан за појаве свих врста: она се могу представити вредностима једнога параметра, који би у мислима био придат уоченоме елементу и чије би квантитативне варијације ишле упоредо са променама самога елемента.

Скуп дескриптивних елемената једне појаве састављa њен *дескриптивни систем*; скуп вредности самих елемената у датом тренутку представља *конфигурацију система* у томе тренутку. Једна конфигурација дефинише у простору од n димензија (где је n број елемената што састављају систем) једну тачку M: то је *фигуративна тачка дескриптивног система*. Дескрипција појаве може се тада свести на *опис кретања фигуративне тачке у простору од n димензија за време трајања појаве*. Број n представља *димензионалност* појаве: ова је *n-димензионална*, кад јој је дескриптивни систем састављен из n елемената.

Кретање је ове тачке *слободно* или *ограничено* према томе да ли је у систему могућан ма какав скуп виртуелних промена дескриптивних елемената, или су само неке — чији број нека је k — произвољне, а остале везане са овима системом линеарних релација. Број k је *систем слободе* таквог система и такве појаве. *Везе* у систему јесу скуп свега онога што собом повлачи такве линеарне релације између могућних виртуелних промена.

Везе су *непромењљиве (перманентне)* или *промењљиве* у току времена према томе, да ли могућне виртуелне модификације зависе само од конфигурације система или поред ове још и од тренутка у коме се посматрају. И у једном и у другом случају *најопштије могућно кретање фигуративне тачке система своди се на њено слободно кретање по једноме варијетету k-тог реда у n-димензионалном простору.* Скуп k међусобно независних параметара, који у свакоме тренутку дефинишу положај тачке M на томе варијетету, може се сматрати као скуп координата једне тачке N у k-димензионалном *тачке* M простору: *најопштије могућно кретање фигуративне своди се тада на слободно кретање тачке* N *у томе простору.* Скуп тих k параметара представља *редуковани систем* у датој појави, а тачка је N *фигуративна тачка тога редукованог система.*

Дескрипција једне n-димензионалне појаве ма какве конкретне природе а са k степена слободе може се тада по вољи свести:

1° или на опис ефективног кретања тачке M по извесном варијетету k-тог реда у n-димензионалном простору *(M)*.

2° или на опис ефективног кретања тачке N у k-димензионалном простору *(N)*.

Дескриптивни ће систем појаве бити *холономан* или *нехолономан* према томе да ли је реципроцитет између тачака M и N такав, да сам положај тачке N у простору *(N)* поступно одређује положај тачке M у простору *(M)* или је за ту одредбу потребно познавати још и појединости кретања тачке N, које ју је довело у уочени положај. За холономност система везане су нарочите аналитичке појединости при математичкој експликацији појаве као последице датог механизма.

За дескриптивни, односно редуковани, систем појаве везане су *пасивне улоге* у механизму појаве; за све оно што тим системима импозира модификације које се манифестују као појединости уочене појаве, везане су *активне улоге* у томе механизму. И једна и друга врста улога може бити разне природе и стајати једна према другој у најразноврснијим релацијама: *такве релације, изражене аналитички, доводе непосредно до диференцијалних једначина појаве.*

Облици су ових једначина разни према природи уоченога система пасивних и активних улога и релацијама, којима су оне међусобно везане. Међу тим при формирању једначина од важности је, између разних могућних таквих система, изабрати онај, за који су те релације најпростије: то је случај код система, у којима се пасивне улоге своде на улоге *непосредних објеката* датих *тежња* везаних за уочени систем активних улога.

Једна таква тежња има своју *јачину*, мерену величинама промена, сведених на јединицу времена, које она импозира своме непосредном објекту, и свој *смисао*, према коме је она *импулсивна* (појачавајућа) или *депресивна* (антагонистичка). Она је у исто време карактерисана и једним одређеним законом, по коме јој се јачина мења у току промене непосреднога објекта. Све то чини да се тако схваћене тежње могу *асимилирати механичким силама*, а таква асимилација ствара могућност да се целокупна математичка теорија акције сила генералише и распростре и на акцију узрока свих врста, који са механичким силама немају ничега другог заједничког до улоге коју играју у механизмима појава. Проблем Математичке Феноменологије, онакав како је схваћен у овом делу, своди се тада на проблем кретања у полидимензионалном простору и решава се у свима својим најразноврснијим облицима и варијантама генерализацијом метода, којима се решава проблем кретања у обичноме простору.

Тако, сама дефиниција јачине тежње, примењене на елеменат *u* као непосредни објекат, доводи до релације:

$$k\frac{du}{dt} = X \tag{1}$$

где је k коефицијенат инерције појаве, у погледу на елеменат u, а X јачина тежње, која је у размаку времена dt изазвала промену du тога елемента. *У тој основној релацији садржана је аналитичка спона између активних и пасивних улога у појавама*; то је извор из кога потичу једначине што регулишу ток појава и релације између појединих њених фактора. Формирање основних диференцијалних једначина појава бива применом релације (1.) на *примарни систем* у појави, т. ј. на онај систем

$$v_1 \cdots\cdots v_n$$

међу разноврсним могућним дескриптивним системима појаве, у коме се за сваки елеменат v_i понаособ зна перманентни закон тежње, чијом акцијом он мења у току појаве. Те су, на тај начин непосредно добијене, диференцијалне једначине облика

$$\begin{array}{c} k_1\dfrac{dv_1}{dt} = \sum\limits_{(i)} X_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_n\dfrac{dv_n}{dt} = \sum\limits_{(i)} X_{in} \end{array} \tag{2.}$$

где су

$$X_1, X_2\, X_3 \cdots\cdots\cdots$$

јачине одговарајућих тежња везаних за поједине активне улоге, примењених непосредно на елеменат v_p.

Ако се, што у извесним приликама има свога интереса, на место примарног система уведе у рачун *секундарни систем* у појави, састављен из *тоталитета*

$$\eta_i = \int_{t_2}^{t_2} v_i \, dt \qquad (i = 1, 2 \cdot \cdots \cdot n)$$

елемената v_i у посматраноме размаку времена (t_1, t_2) једначине се јављају у облику

$$k_1 \frac{d^2 \eta_1}{dt^2} = \sum_{(i)} X_{i,1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$k_n \frac{d^2 \eta_n}{dt^2} = \sum_{(i)} X_{i,n}$$

Према облику закона тежња X_{ip} ове једначине могу бити: обичне диференцијалне једначине, систем обичних симултаних једначина, парцијалне диференцијалне једначине, систем симултаних парцијалних једначина, функционално-диференцијалне једначине или систем таквих симултаних једначина.

Кад је примарни систем слободан, једначине се (2) могу по вољи кондензовати у једначину

$$(3) \qquad \sum_{(j)} \left[k_j \frac{dv_j}{dt} - \sum_{(i)} X_{ij} \right] \delta v_j = o$$

која треба да постоји за *произвољан* систем виртуелних варијација

$$(\delta v_1, \cdots\cdots\cdots \delta v_n)$$

елемената примарног система, или у једначину

$$(4) \qquad \sum_{(j)} \left[k_j \frac{d^2 \eta_j}{dt^2} - \sum_{(j)} X_{i,j} \right] \delta \eta_j = o \qquad (j = 1, 2, \cdots n)$$

која треба да постоји за *произвољни* систем виртуелних варијација

$$(\delta\eta_1 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \delta\eta_n)$$

тоталитета елемената примарног система.

Кад је систем са везама, чији број нека је m, систем се, употребом Lagrange-ових мултипликатора своди на слободан систем, али састављен из $n - m = k$ елемената

(5) $$(v_1, \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot v_k)$$

Једначине се појаве опет могу кондензовати у једначину (3) или (4) где је

$$j = 1, 2, \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot k$$

и где свакоме од збирова

$$\sum_{(i)} X_{i, j}$$

треба придодати одговарајући члан у низу извесних израза

(6) $$\boldsymbol{\Phi}_1, \; \boldsymbol{\Phi}_2, \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \boldsymbol{\Phi}_k$$

формираних помоћу једначина веза и који представљају *компоненте реакције веза* у правцима

$$Ov_1 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot Ov_k$$

односно

$$O\eta_1 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot O\eta_k$$

у k-димензионалном простору (5). Систем је (5) на тај начин ослобођен веза, које тада прелазе у комплекс узрока, као саставни делови тога комплекса. *У томе лежи аналитички разлог факту да се везе у системима имају сматрати као фактори, за које су везане активне* *улоге у механизмима појава.* Саме, пак, диференцијалне једначине појава за примарни систем тада су

$$
(7) \qquad \begin{aligned}
k_1 \frac{dv_1}{dt} &= \sum_{(i)} X_{i1} + \Phi_1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
k_k \frac{dt_k}{dt} &= \sum_{(i)} X_{ik} + \Phi_k
\end{aligned}
$$

и број им је једнак степену слободе у појави.

Овако добијене једначине, како за појаве са слободним системима, тако и кад су системи са везама, могу се на разне начине трансформисати, уводећи на место првобитног примарног система друге системе елемената, који са елементима примарног система стоје у каквој одређеној вези.

Једна од таквих трансформација, која се између осталих нарочито истиче својом великом генералношћу и простотом, јесте она што своди диференцијалне једначине појава на тип, који је Appell дао диференцијалним једначинама Динамике и који ће бити назван *Appell-овим каноничним типом.* Тако трансформисане једначине су униформног облика

$$
(8) \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, 2, \cdots k)
$$

где су $(q \cdots q_k)$ елементи редукованог система у појави, Θ одређен израз што зависи само од тих елемената и веза у систему, а

$$
(9) \qquad Q_1 \cdots\cdots Q_k
$$

одређени изрази што зависе од веза и од примењених тежња у појави.

Једначинама се, у осталом, може дати и још једноставнији облик

$$
(10) \qquad \frac{\partial R}{\partial q_i} = o \qquad (i = 1, 2, \cdots k)
$$

где је R извесан одређен израз, који се увек може формирати из података садржаних у дескрипцији механизма појаве (елемената редукованог система, веза и примењених активних и реактивних тежња).

Облици су (8) и (10) генерални и обухватају како појаве са холономним, тако и оне са нехолономним системима. У случајевима кад је систем холономан, једначине се (8), односно (10) могу трансформисати у један облик истоветан са оним, који је Lagrange дао диференцијалним једначинама Динамике, на име у облик

$$(11) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

$$(i = 1, 2, \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot k)$$

где израз T зависи само од елемената редукованог система и веза у систему, а Q_i од тих веза и примењених тежња. У случајевима, кад је систем нехолономан, на десним се странама једначина (11) јављају извесни компликованији изрази, из чијег се састава у исто време види и аналитички разлог факту да Lagrange-ов облик једначина вреди само за појаве са холономним системима.

На послетку, кад је систем холономан, а примењене тежње деривирају из једнога потенцијала *(потенцијалне појаве)*, општим се једначинама може дати још један значајан облик: то је канонични облик који је Hamilton дао диференцијалним једначинама Динамике. Једначине су тада облика

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$(i = 1, 2, \cdot \cdot \cdot \cdot k)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

где $p_1 \cdots p_k$ представљају количине назване *моментима промена* у редукованом систему $(q_1 \cdots q_k)$, а H извесан израз што зависи од појединости система, веза и потенцијала.

Једначинама се појаве могу дати и разноврсни кондензовани облици, тако да оне, било да су диференцијалне, било да су у коначном облику, буду обухваћене или једном једином једначином, или једном нарочитом погодбом, коју треба да задовољи једна одређена функција елемената појаве, или један интеграл, у коме под интегралним знаком фигурише одређена комбинација тих елемената.

Тако, диференцијалне једначине појава могу се обухватити само једном једначином са познатим законом формације, а која треба да је задовољена за све виртуелне варијације елемената дескриптивног система којима се не противе везе у систему. Таква би једна једначина била она што исказује *принцип виртуелних модификација*, или она у којој је исказан *принцип виртуелних радова*. Ове једначине важе за ма какав систем, холономан или нехолономан, за ма какве везе и за ма какве примењене тежње.

Диференцијалне једначине појава, написане у Appell-овом каноничном облику, могу се добити и непосредно из једне одређене и коначне функције **Ф** елемената појава, којој се зна генерални закон формације. На име: постоји таквих функција **Ф**, да се диференцијалне једначине појаве, којој таква функција одговара, подударају са оним, што се добијају тражећи погодбе за минимум те функције. Генерални *принцип минимума*, који на тај начин обухвата једначине појаве и који важи како за холономне, тако и за нехолономне системе, одликује се апсолутношћу, коју немају слични принципи у којима, је функција **Ф** какав одређен интеграл: функција **Ф,** о којој је овде реч, *увек је ми-*

нимум за природни ток појава. Из тога је јасан њен философски значај; практична јој важност долази од једноставности и простоте начина, на који из ње деривирају диференцијалне једначине појава. Поменућемо и то, да овакав генерални принцип минимума обухвата као специјални случај Gauss-ов динамички *принцип најмањег присиљавања* за кретања ма које врсте.

Улога коју у Аналитичкој Динамици игра *Jacobi-ева парцијална једначина* према једначинама кретања, може се распрострти и на опште једначине појава. Те се једначине, *и то у коначном облику*, а у случају потенцијалних појава, могу добити интеграцијом једне Jacobi-еве једначине, везане за дату појаву и која се може формирати према подацима садржаним у дескрипцији механизма појаве. Али оно што највише даје важности улози те једначине у Математичкој Феноменологији, јесте значајан резултат до кога се долази интерпретацијом једначине у случају *конзервативних појава* и који се састоји у овој теореми:

Свакој конзервативној појави одговара по једна класа варијетета онолికога реда, колики је степен слободе у појави и која је таква, да су проучавање геометриских и кинетичких појединости појаве, и одредба геодезиских линија на тој класи варијетета два идентичка проблема.

Тиме је целокупна теорија конзервативних појава сведена на један чисто *геометриски проблем* у полидимензионалном простору. У специјалном случају кад је степен слободе у појави $k = 2$, теорија се појаве своди на одредбу геодезиских линија на површинама у обичном простору, па дакле на један проблем обичне инфинитезималне Геометрије.

На послетку, диференцијалне се једначине појава могу сматрати и као садржане у једној погодби овакве врсте: оне су потребан и довољан услов да би прва варијација једнога одређеног интеграла, везаног за дату појаву, била равна нули. Један од таквих интеграла доводи до генералисаног *Hamilton-овог принципа*; други један доводи до генералисаног *принципа најмање акције*. Први је принцип генералнији: он претпоставља само холономност система, и кад је та погодба задовољена, он резимује кинетичке појединости појаве. Принцип, пак, најмање акције претпоставља да је појава конзервативна и кад је то случај, он у себи резимира геометриске особине појаве. Међу тим, нарочита важност ових принципа лежи у томе, што практички знатно олакшавају формирање диференцијалних једначина појава у случајевима, у којима је непосредно формирање тих једначина скопчано са тешкоћама.

Једна од непосредних последица већ формираних диференцијалних једначина појава била би одредба *стационарних стања* у појавама. Ова се своди на одредбу *стационарних конфигурација* т. ј. таквих положаја фигуративне тачке M појаве, у које кад је тачка једном дошла, она од тада остаје непокретна. Сам склоп диференцијалних једначина показује да се једначине, што карактеришу стационарне конфигурације, у опште добијају ставивши да су равне нули компоненте активних и реактивних тежња у редукованоме систему; у случајевима кад је систем слободан, или са везама између тоталитета његових елемената, те се једначине добијају формирајући израз виртуелног рада свих активних и реактивних тежња и изразивши да је он раван нули за све остварљиве виртуелне модификације система. На послетку, у конзервативним појавама стационарне су конфигурације оне, за које прва варијација потенцијала примењених тежња равна нули при свима остварљивим виртуелним модификацијама система. Ако је, при том, потенцијал за такву једну конфигурацију минимум, стационарно је стање, што јој одговара, *стабилно*.

Одређивање стационарних конфигурација своди се, у опште, на решавање обичних, коначних једначина са једном или више непознатих. Међу тим дешава се, да вредности елемената, који дефинишу једно стационарно стање, зависе од једнога или више параметара, мењајући се са променама ових али тако, да при томе мењању стање не губи стационаран карактер. Тада се одредба стационарних конфигурација може свести и на интеграцију обичних или парцијалних диференцијалних једначина. У случајевима кад је такав комплекс параметара везан за елементе обичног простора, стационарно је стање карактерисано нарочитом *стационарном дистрибуцијом* елемената дескриптивног система у простору или једној области простора, а до које се дистрибуције долази интеграцијом поменутих једначина.

Друга једна непосредна последица диференцијалних једначина састојала би се у скупу *енергетичких особина* појава. Једна интуитивна генерализација појма рада и кинетичке енергије у Динамици доводи до сличних појмова у Математичкој Феноменологији; једна проста комбинација диференцијалних једначина појава доводи тада до *опште теореме живих сила*, према којој је прираштај кинетичке енергије у појави раван раду примењених тежња, што томе прираштају одговара. Теорема важи како за холономне, тако и за нехолономне системе, под погодбом да су везе између тоталитета елемената система, у случајевима, кад их буде било, перманентне.

За неконсервативне појаве теорема има значај једне обичне аналитичке комбинације, која је од интереса једино са гледишта аналогија између проблема обичне Динамике и проблема Математичке Феноменологије. Међу тим она има много дубљи значај у случајевима конзервативних појава. Пре свега, у таквим појавама, и само у таквим, рад примењених тежња, при прелазу из једне конфигурације C_1 на другу C_2 независан је, у опште, од начина на који систем прелази од C_1 на C_2; он тада зависи једино од тих конфигурација. Општа теорема живих сила доводи тада до *интеграла живих сила*, који изражава факт, да је и ма какав коначан прираштај кинетичке енергије, при прелазу са једне конфигурације на другу, раван раду непосредних тежња што одговара томе прелазу. Непосредна је, пак, аналитичка последица тога факта *принцип одржања енергије* у конзервативним појавама, где се под енергијом у појави има разумети *тотална* енергија, као збир кинетичке и потенцијалне енергије. Кад је, међу тим, принцип у таквој генералности једном утврђен, из њега је, на начин сличан ономе, на који се то ради у данашњој *Енергетици*, лако извести читав низ последица што формирају тај одељак Природне Философије, али са проширеном облашћу њихове применљивости, која одговара генералности у њима садржаних појмова.

Интеграцијом на поменути начин формираних диференцијалних једначина добијају се закони, у којима је садржана *квантитативна дескрипција* појаве. А пошто је скуп диференцијалних једначина једне појаве један нарочити израз њеног механизма, у коме сви фактори губе своја специфична конкретна значења, задржавајући само оно што битно карактерише природу њихових улога, природно је да ће се за појаве са механизмима једног истог типа, па ма како диспаратне биле њихове конкретне природе, као и природа фактора што улазе у састав механизма, имати једна иста квантитативна дескрипција. Свака таква дескрипција, везана за један одређени тип механизма, представља по једну *општу шему*, по којој се за време трајања појаве нижу једно за другим сукцесивна тренутна стања, чији континуални низ састављa *ток појаве*.

Међу таквим шемама за просте појаве, једна би н. пр. обухватала појаве што резултују из акције узрока сталне јачине; друга оне што резултују из акције узрока пропорционалних величинама свога непосредног објекта; трећа би н. пр. обухватала симултану акцију једнога импулсивног узрока сталне једначине и једнога депресивног а задоцњеног узрока, чија се јачина мења упоредо са мењањем величине непосредног објекта; или симултану акцију једнога импулсивног узрока сталне јачине и једнога депресивног, пропорционалног квадрату величине непосредног објекта; или симултану акцију једнога импулсивног узрока са независним варијацијама, и два депресивна, од којих би један био пропорционалан величини непосредног објекта, а други тоталитету тога објекта; једна би шема обухватала пертурбације које у једну од набројаних шема уноси напрасан улазак каквога тренутног узрока дате јачине у механизам појаве која се већ дешава и т. д.

Међу оним шемама што обухватају комплексне појаве, једна би н. пр. одређивала појединости појава што резултују из акције једнога комплекса узрока, од којих би сваки био пропорционалан по једноме од непосредних објеката, или квадрату величине таквога објекта, или који се, у опште, мењају са током појаве по датом одређеном закону; друга би н. пр. обухватала општи проблем пертурбација, које у какву периодичку појаву, што се већ дешава, уносе слаби периодички узроци; трећа би обухватала општи проблем модификација једнога првобитно стабилног стационарног стања под утицајем једнога комплекса слабих узрока и т. д.

Свака од овакvих шема обухвата непрегледан број диспаратних конкретних појава свих врста, на које се оне примењују спецификовањем конкретних значења појединих шематизираних фактора. Свака је од њих у исто време и скуп свега онога што чини *математичку* *аналогију* међу појавама обухваћених шемом, а која се састоји у истоветности математичких релација, што регулишу појаву, како у погледу на број једначина (диференцијалних и експлицитних), којима су те релације изражене, тако и у погледу на њихов аналитички облик. Појаве, обухваћене једном шемом, састављају једну *аналошку групу*, у којој је за *хомологе елементе* везана у механизму појаве по једна улога исте природе за све појаве што припадају групи. Та истоветност улога и чини да дескрипције таквих појава представљају један исти аналитички проблем, т. ј. да су појаве међу собом *аналитички еквивалентне*.

Опште погодбе за аналитичку еквиваленцију појава могу се формулисати у једноме простом и прецизном облику. Пошто су све појединости квантитативне дескрипције појава већ садржане у њиховим диференцијалним једначинама, а ове се у најопштијем случају, написане у Appell-овом каноничном облику, добијају деривацијом из једне једине функције R везане за механизам дате појаве и која се увек може формирати из података садржаних у механизму, *за аналитичку еквиваленцију једне групе појава потребно је и довољно да механизми доводе до таквих одговарајућих функција R, чији ће онај део, што зависи од брзина промена елемената редукованог система (односно од акцелерација тих промена у случају, кад ове фигуришу у тој функцији), бити једнога истог облика за све појаве такве групе.*

То важи како за холономне, тако и за нехолономне системе, па било да су примењене тежње са потенцијалом или без овога. За потенцијалне појаве погодба се своди на то *да је **Hamilton**-ова функција H једнога истог облика за све појаве у групи.* За конзервативне појаве тој се погодби може дати и овај геометриски облик: *За аналитичку еквиваленцију једне* *групе конзервативних појава довољно је да класа варијетета, на одредбу чијих се геодезиских линија своди квантитативна дескрипција појаве, буде једна иста за све појаве у групи.* У специјалном случају, кад је група конзервативних појава једног истог степена слободе $k = 2$, погодба се своди на то, *да им свима одговара једна иста класа површина, које својим геодезиским линијама одређују појединости појаве.*

Математичке аналогије, које једној маси диспаратних појава дају један заједнички тип и доводе до могућности груписавања појава по таквим типовима, независним од конкретне природе појава, а за које је Математичка Феноменологија један обилат извор, имају своје нарочите и философске и практичне важности за Природну Философију. Философска им се важност састоји у њима истакнутом јединству плана механизма појава, у униформности начина на који појединости појаве резултују из одређених појединости у механизму, и у томе што сазнавање аналогија те врсте чини један осетан напредак у поступној редукцији броја пропозиција у Природној Философији на што мању меру, а што је један од поглавитих циљева у сазнавању природних појава. Практички им, пак, значај лежи у улози водиље, коју оне играју у проучавању појава, наговештујући појединa факта, која би без њих често било много теже, каткад и немогућно, запазити.

Квантитативна дескрипција појаве, међу тим, могућна је само онда, кад дескрипција механизма садржи све што је потребно, у погледу прецизности аналитичког облика, за формацију диференцијалних једначина појаве. Кад је дескрипција механизма у том погледу непотпуна, на место квантитативне може се, ако дескрипција механизма садржи бар за то довољних података, имати само *квалитативна дескрипција* појаве. И у таквим се случајевима, квалитативним проучавањем недовољно прецизираних диференцијалних једначина или компарацијом појава, чији механизми имају у себи чега заједничког, што повлачи собом какве заједничке квалитативне појединости у дескрипцији одговарајућих појава, могу формирати *опште шеме*, према којима одређене појединости механизма импозирају одређене појединости у квалитативној дескрипцији појаве. Међу таквим појединостима најчешће су: смисао варијација појединих дескриптивних елемената појаве; убрзавање или успоравање рашћења или опадања; егзистенција максимума и минимума; осцилаторни карактер, ритам и честина осцилација; појачавање или амортисање осцилација; егзистенција асимтотних стања; границе варијација појединих елемената; овлашни облик дијаграма варијација појединих елемената или њихове зависности; симетрија у појави и т. д. *Квалитативне аналогије* међу појавама, обухваћеним којом од таквих шема, имају у великом броју случајева нарочитог интереса за предвиђање извесне врсте факата у појавама, наговештених егзистенцијом квалитативних појединости, са којима су они у вези.

Остаје још питање, које се само собом намеће, о реципроцитету између механизма појаве и њене дескрипције. Веза између састава механизма и дескриптивних појединости појаве, која је подлога свему овоме што претходи, такве је природе, да кад је тачно одређена прва, биће тако исто одређена и та друга страна у појави. Важи ли и реципрочни факт? Да ли је датом, довољном потпуном, дескрипцијом појаве одређен и њен механизам? Одговор је, бар за општи случај, негативан: једна иста појава, са свима њеним дескриптивним појединостима, може резултирати из разноврсних механизама и, *у општем случају*, те појединости, ма колико оне биле одређене и потпуне, недовољне су да реше питање о томе који је, између таквих могућних механизама, онај што одговара реалности. Међу тим има и изузетака: дешава се у појединим случајевима и при квантитативној и при квалитативној дескрипцији, да такве нарочите појединости, или какве суплементарне погодбе, чине инверсни проблем ипак одређенијим. У другим случајевима извесне појединости као: осцилаторни карактер, начин промена амплитуда у току времена, убрзавање или успоравање ритма и т. д. чине вероватним поједине од бескрајно многих могућних механизама, или бар наговешћују у датој појави могућност, па и вероватност, извесних механизама, иначе распрострањених у природним појавама.

Из тако изложених *Елемената*, којима је поглавити циљ да даду јасну идеју о природи проблема Математичке Феноменологије и о њеном општем изгледу, може се створити слика о томе, како би она изгледала, кад би скица, овде овлаш извучена, била допуњена и раширена на све, оно што би могло и требало да уђе у њен састав. По себи се разуме да би у њен састав, између осталога, имале ући многе од данашњих већ довољно разрађених генералних теорија Математичке Физике, које би се могле, по неке и незнатним изменама, довести на за то потребан облик. Таква би н. пр. била модерна теорија *векторских поља*, у којој векторска анализа спаја у једно толике, међу собом диспаратне појаве, а понаособ оне, у којима улоге параметара при променама дескриптивних елемената појава играју елементи обичнога простора. Генералисана векторска анализа, која је врло вероватно могућна и за полидимензионални простор, и где би улоге координата тачака, па дакле и улоге параметара, играли разноврсни елементи, различни од елемената обичног простора, проширила би у знатној мери и општу теорију поља, ослободивши је чак и онога, што је специјално везује за ове последње елементе.

Модерна *Термодинамика, ослобођена* онога што је везује специјално за термичке појаве и генералисана у смислу у коме је схватају *Gibbs, Duhem* и др. била би такође један важан саставни део Математичке Феноменологије.

Општа *теорија симетрије*, у смислу у коме су је разрадили *Voigt, Curie, Bouasse* и др. такође је једна од оних теорија, које дају математичку експликацију једне масе заједничких појединости диспаратних природних појава, везаних за елементе обичнога простора као параметре, и која би том својом страном имала ући у оквир математичке дисциплине о којој је реч.

Такав је случај и са општом теоријом континуалних средина и њихових деформација, у облику у коме су је разрађивали *Lord Kelvin, Helmholtz* и *Cosserat*.

Такав би, на послетку, случај био и са још многим већ разрађеним теоријама, које би — пошто се у њима на место појмова, са којима оне оперишу, уведу генерални појмови Математичке Феноменологије, апстракцијом улога које играју поједини појмови у таквим теоријама — било могућно свести на облик осталих делова ове дисциплине.

* * *

Примена резултата Математичке Феноменологије на поједине конкретне природне појаве имала би да одреди или ток појаве, и разноврсне конкретне или аналитичке појединости, које су за овај везане, према у напред познатом и датом механизму, или сам механизам појаве, према познатом њеном току и разним, за овај везаним, појединостима.

Оба проблема претпостављају извесну претходну припрему земљишта за примену општих резултата: ономе, што се о појави зна, треба да је претходно дат нарочити облик, који ту примену чини могућном.

На првоме месту, појава, или бар оне њене појединости, о којима се има водити рачуна, треба да су представљене у таквоме облику, да их је могућно схватити као одређене одлике варијација појединих дескриптивних елемената. Тим се елементима тада придају параметри, којима су *скалиране* њихове релативне величине. За велики број елемената могућно је *апсолутно скалирање*: то су елементи за које је могућно наћи једну апсолутну, непроменљиву и безусловну везу између таквога елемента и другога једног одређеног, практички мерљивог елемента, тако, да свакој датој вредности овога безусловно одговара једна тачно одређена величина уоченог дескриптивног елемента, и обрнуто. За остале дескриптивне елементе могућно је увек *вештачко скалирање*: постављање такве једне везе између уоченог елемента и другога једног, конкретног или фиктивног помоћног елемента, да свакој промени вредности овога последњег у једноме одређеном смислу одговара промена дескриптивног елемената у томе истом смислу, и обрнуто.

Кад је тако изабран и скалиран систем дескриптивних елемената, карактеристичне одлике дате конкретне појаве јавиће се као одлике сукцесије промена тих елемената. Сведена на такву шему, каква се и претпоставља за примене Математичке Феноменологије, појава се јавља трансформисана у једну слику, у којој од њених специфичких конкретних појединости остају само њихови шематски представници: појединости и одлике начина варијација параметара, везаних за поједине дескриптивне елементе.

Проблем шематисања механизма појаве, у циљу да се из његовог састава предвиде појединости тока појаве, решен је кад је појава схваћена као последица једне одређене комбинације улога са познатом дистрибуцијом тих улога на поједине факторе у појави, и кад се сазна начин, на који се јачине активитета оних улога, што импозирају промене дескриптивним елементима у појави, мењају у одређеном размаку времена, у коме се појава посматра. *Тај посао, међу тим, спада у специфичне проблеме појединих наука, којима буде припадала проучавана појава.* Он би се састојао у томе, да се у појави прецизира све оно, што у изазивању уочених појединости игра одређену улогу: активни узроци које импозирају промене дескриптивним елементима, отпори и инерције које они имају да савлађују, секундарни узроци који регулишу утицаје појединих активних и реактивних узрока, чинећи да један дати комплекс таквих узрока има за ефекат осетније или слабије модификације у дескриптивном систему појаве и т. д. То је, у осталом, проблем, који се и иначе стално има пред очима при експликацијама појава свих наука; тај је посао за масу појава, потпуно или делимично, већ извршен, а извршљив је и за недогледну масу појава, у које таква врста анализе још није продрла. Дистрибуција поменутих улога на поједине факторе у природним појавама и чини оно привидно бескрајно шаренило њихових механизма и даје им оне диспаратне облике, у којима површно посматрање не открива никаквих заједничких црта. Активни импулсивни узрок јавља се, према природи појаве, час као атрактивна сила међу телима, час као термична или електрична утицајна тежња једне тачке на околину, час као магнетишућа сила, час као утицајна тежња околине на једну одређену биолошку ћелу, или као фотохемиска акција светлосних зракова, или као осмотички притисак у органским ћелијама, или као акција бацила при прогресивном развитку једне болести и т. д. Реактивни се узрок јавља час у облику трења или отпора средине при кретању, час у облику индукционих реактивних тежња регулисаних Lenz-овим законом, или у облику коерцитивне силе магнета, час у разним врстама отпора организма, или у разним врстама социјалних реакција и т. д. Инертни се узрок манифестије час као механичка инерција, или као центрифугална сила, час као електромагнетна или индукована електромоторна сила, час у облику социјалних инерција, навика, предрасуда и т. д.

Исто се тако и проблем мењања јачина појединих активитета у једној одређеној конкретној појави решава на начин, који се мења са природом случаја: проблеми те врсте не припадају Математичкој Феноменологији, чије примене претпостављају да су они на који било начин већ решени.

У појединим случајевима закон је варијације уоченог активитета сам по себи очевидан. Јачина н. пр. колективног активитета једне групе међу собом једнаких носилаца тог активитета (електричних елемената, микроба, органских индивидуа и т. д.) пропорционална је броју таквих носилаца; она расте или опада у току појаве у мери, у којој буде растао или опадао број ових последњих. Тако је исто очевидна и пропорционалност централних утицаја, тако честих у природним појавама, реципрочним вредностима квадрата одстојања.

У другим случајевима, према запаженим или наслућеним аналогијама једне појаве са другом, у којој је закон једнога активитета већ несумњиво утврђен, претпоставља се сличан закон и за одговарајући активитет у првој појави, па се покушава верификовати га и утврдити по његовим последицама. Такав је н. пр. случај са Coulomb-овим законима електричног привлачења, на које наводи аналогија са законом гравитације; Pellat-ов закон елекричног испаравања, на који наводи аналогија са Newton-овим законом хлађења.

У маси случајева до закона се активитета долази аналитичким путем, пошавши од каквога већ познатог таквог закона, или од једнога одређеног скупа факата, који такав закон имплицитно садрже, или од једне одређене хипотезе у којој би већ било садржано оно што је карактеристично и битно за уочени активитет. Такав је н. пр. случај при одређивању активних сила при обртању чврстог тела око утврђене тачке или осовине; или при одређивању закона гравитације из скупа факата садржаних у Kepler-овим законима; или при одређивању утицајне тежње у појавама распростирања топлоте или електрицитета.

У појединим случајевима, у појавама што се састоје у променама врло великог броја елемената једне исте врсте, и које се бар у својим карактеристичним цртама дешавају тако, као да постоји једна колективна тежња са одређеним активитетом, која регулише ток појаве, закон варијације активитета, везаног за такву тежњу, могућно је одредити статистички. Такав је н. пр. случај са активитетом тежња, које се у статистици називају силом смртности, силом репродукције и т. д.

Проблем такве врсте у маси је случајева или потпуно решљив, или се бар о њему може имати индиција довољних за схватање појединих факата као последица стицаја улога, за које би били везани такви активитети.

Такав је, пре свега, случај са свима чисто механичним појавама, у којима улоге узрока играју активне и реактивне силе познатих активитета, који се у току појаве мењају или непосредно са временом, или као одређене функције појединих карактеристичних елемената у појави, као што су: непосредни ефекат таквих узрока, интензит појаве, тоталитет непосредног ефекта и т. д.

Такав је, такође, случај и у непрегледној маси физичких појава, у којима се опет наилази било на активне и реактивне конкретне узроке познатих активитета, било на разноврсне фиктивне узроке који се означавају као силе, моћи, способности, реакције, разноврсни утицаји и т. д. и који се, ма да им је и непозната интимна природа, могу асимилирати другим каквим по динамичкој природи тачније познатим узроцима.

У хемиским се појавама наилази на сплетове континуалних и дисконтинуалних узрока, од којих се велики број може сматрати као тачно или овлашно познат по своме смислу, начину утицаја, начину на који се он у току појаве мења сам по себи или под утицајем других секундарних узрока. Такав би н. пр. један од континуалних узрока био онај оличен у трансформаторској тежњи, што регулише брзину хемиских реакција и која се у току реакције мења на познати начин као функција концентрације смеше по реагенсима и продукцима реакције; или узрок оличен у пертурбационој тежњи, која има за објекат коефиценат утицаја те трансформаторске тежње (константу брзина при хомогеним реакцијама). Такви би, такође, међу дисконтинуалним узроцима, били и они, по својој интимној природи непознати узроци, који изазивају измене у физичким или хемиским особинама тела и који су и сами изазвани хемиским променама на телима. Такви су, понаособ, они узроци што чине да у извесним случајевима супституција једнога елемента, у саставу једнога одређеног хемиског тела, другим којим, или супституција једнога хемиског комплекса другим, има за ефекат одређену модификацију једне одређене физичке или хемиске особине тела, у коме је супституција извршена, и то тако, да су те модификације једног унапред познатог смисла за једну одређену серију елемената или комплекса, па чак су у извесним случајевима и приближно константне, или им се бар зна приближан закон варијације.

При прогресивној акцији бацила, колективни активитет једне групе истоветних бацила расте пропорционално њиховом броју; он може бити појачан, ослабљен, или потпуно неутралисан активитетом друге какве групе бацила; у случају, кад се бацили затиру у мери, у којој врше своју акцију, тај би активитет слабио у мери у којој напредује сама њиме изазвана трансформација.

У Физиологији и Психологији за многе активитете постоје и методе за практично мерење њихових јачина, за испитивање начина на који они јачају или слабе при одређеним променама прилика. У Медицини се води рачун о јачини активитета појединих терапетичких средстава, о начину на који се он мења према комбинацији прилика у којима су употребљени, о начинима за њихово појачавање или паралисање и т. д.

Таквих се података о активитетима узрока има у непрегледном броју најразноврснијих појава свих наука, па чак и онда, кад је појава резултат и веома великог броја непознатих, можда и случајних, тренутних, узрока. Дешава се, да се у таквој маси узрока налази по један или више преовлађујућих узрока, чији је утицај претежан и којима се има приписати главни карактер појаве, тако, да се поред свих сићушних пертурбација, које у појаву уносе остали ситнији, по утицају много незнатнији узроци, ипак истичу *главне* тежње, у којима се манифестују преовлађујући узроци. Такав би н. пр. случај био са великим доминирајућим узроцима у маси биолошких и социолошких појава, у којима је број сићушних, случајних, узрока врло велики, а међу тим никаква нарочита околност не чини да пертурбације, које они уносе у појаву, имају један нарочити смисао и карактер. За пертурбације, које уносе у појаву такви узроци, важи познати закон вероватноће, што важи и за случајне, сићушне, грешке при мерењима: оне су подједнако вероватне и у смислу импулсивне и у смислу депресивне акције, и кад су у врло великом броју, саме се међу собом потиру. Закон је у толико ближи истини, у колико је број таквих ситних узрока већи. Колективни активитет целога комплекса своди се, бар у првој апроксимацији, на збир активитета доминирајућих узрока, о чијим је законима варијације врло често могућно имати довољно одређених података.

Област конкретних случајева са активитетима познате динамичке природе још је пространија, ако се има пред очима да је маса квалитативних појединости, у најразноврснијим појавама свих наука, везана баш за податке, који садрже само овлашне, кад што на први поглед и безначајне индикације о начину, на који се такви активитети мењају у току појаве. За масу је таквих појединости н. пр. довољно знати да један или више одређених и познатих фактора утичу, као секундарни узроци, на поједине од активних или реактивних узрока, који току појаве дају његов тип и битни карактер, појачавајући их или слабећи, или мењајући им у одређеном смислу коефициенат утицаја, или коефициенат инерције, или убрзавајући или успоравајући им јачање или слабљење. Сам факт, да су поједини од таквих активитета стални по својој јачини, или периодични, континуални или дисконтинуални, или да у току појаве и сами јачају или слабе упоредо са каквим одређеним факторима у појави, или да се наизменце суперпозирају и парализују међу собом, или да се јављају са сталним или промењљивим задоцњењем и т. д. импозира у много прилика, сам собом, одређене квалитативне појединости у појави. Података, међу тим, те врсте о појединим активитетима могућно је имати у појавама свих врста, и тај факт поглавито чини, да се област конкретних примена Математичке Феноменологије проширује на далеко ван ужега оквира, у коме се обично крећу примене математичких дисциплина.

* * *

У чему би лежао интерес *Математичке Феноменологије*, схваћене на начин на који је она, у својим главним цртама, изложена у овим *Елементима?*

Она би, пре свега, спајала и сводила на једну заједничку основу разноврсне диспаратне теорије, које иначе неби имале никакве међусобне везе. Потреба таквог свођења постаје све очевиднија и осетнија, у колико се, у току развијања појединих области позитивних наука, запажа више заједничких црта међу диспаратним појавама и у колико постаје јаснији и очевиднији факт, да такве заједничке црте нису случајности, већ да имају своје подлоге и дубљег разлога у егзистенцији нечега заједничког у самој суштини појава и њихових механизама. Експликација, међу тим, онога, што је код појава заједничко у последицама, помоћу онога што је заједничко у стицају факата, који те последице одређују, и jесте оно у чему би баш лежала суштина ове гране Природне Филосoфије. Она би имала дати кључ не само за разумевање многобројних, до данас запажених, аналогија међу диспаратним појавама, већ и за предвиђање оних, на које ће се, у току развијања појединих области наука, несумњиво све више наилазити.

Са друге стране, резултати Математичке Феноменологије, било у облику *општих* теорија, што је састављају, било у облику *типских* теорија, разрађених за једну одређену врсту појава као *тип*, али промењљивих у свима приликама сводљивим на једно исто језгро аналогије, уносили би светлости и у разумевање појава, за чију се теорију иначе нема довољне подлоге нити наговештених праваца за истраживање. Историја развитка читавих грана наука, као што су Математичка Физика, Модерна Социјална Физика, Политичка Економија, довољно истиче на видик услуге, које се имају очекивати од таквих начина за предвиђање конкретних и аналитичких појединости појава. Нису, шта више, ретки случајеви да се, благодарећи наслућеној могућности редукције механизма једне појаве на тип који карактерише механизам друге какве, са првом диспаратне појаве, чија је теорија већ обрађена, ова теорија таква каква је, само са потребним изменама конкретних значења појединих фактора, пренесе на саму посматрану појаву, где би се за тим имала верификовати по конкретним последицама на које би наводила. Ohm-ова теорија распростирања електрицитета, која није ништа друго до типска Fourier-ова теорија распростирања топлоте; примена термодинамичког Carnot-овог принципа у електричним, магнетним, еластичним и т. д. појавама и теорије на које та примена наводи; теорија осмотичног притиска, формирана по аналогији са типском теоријом гасова, јасни су примери за врсту услуга, које могу чинити такве типске теорије.

То би већ и само по себи могло бити довољно да оправда покушај формирања овакве једне математичке дисциплине и да јој осигура право на егзистенцију међу осталим гранама Природне Философије. Али при томе је од важности још и питање о изгледима да ће она, кад једном буде у довољној мери разрађена, моћи у приликама довести до чега новог, наводити на експерименте, подстицати на истраживања, или им одређивати правац. Одговор на таква питања садржан је у конкретним случајевима, наведеним у овој књизи.

Појам н. пр. симетрије, и опште релације између симетрије узрока и симетрије ефеката, наводе на предвиђање извесних врста кад што неочекиваних термичких, електричних, магнетских и т. д. појава (упредање гвоздене жице, намагнетисане у правцу дужине, при пропуштању електричне струје; изазивање електромоторне силе у жици при њеном упредању; магнетисање жице при симултаном упредању и проласку струје; разноврсне пироелектричне и пиезоелектричне појаве и т. д.).

Генералисан Carnot-ов принцип, комбинован са генералним принципом одржања енергије у конзервативним појавама, на начин на који су то учинили Lord Kelvin и Lippman, наводи, такође, на предвиђање конкретних појава нарочите врсте (термичне појаве изазване међусобним приближавањем и удаљавањем магнета и загрејаног метала; конкретне појединости пироелектричних појава у кристалима; конкретне појединости електро-капиларних појава; пропорционалност капацитета гасних кондензатора притиску гаса, и запремине гаса разлици потенцијала у арматурама; конкретне појединости електричне дилатације стакла, електричне поларизације турмалина при компресији и т. д.)

Опште релације између механизма и резултујућих појединости појава стварају могућност, између осталога, да се у појединим случајевима, према одређеним и познатим појединостима појава, и пре но што се сазна за конкретну дистрибуцију улога у њиховим механизмима, чине тачни или вероватни закључци, или према тим појединостима оправдане хипотезе, о типу таквог једног механизма, његовом могућном саставу, о динамичкој природи активитета појединих активних улога у њему и т. д. Тиме би био знатно олакшан природњачки посао прецизирања конкретне природе таквих фактора и самога реалног, интимног, механизма појаве. Свака од одговарајућих могућних шема дала би по једну могућну хипотезу за експликацију уочених појединости појаве; од ових би се хипотеза имала зауставити пажња на оној, која у датоме случају најбоље одговара конкретном стању ствари, о чему би пресудну реч имало детаљно, природњачко испитивање појаве. Ово би се састојало н. пр. у томе, да се експериментом, или оштријим проматрањем, истакне на видик каква импулсивна или депресивна тежња, отпор, инерција и т. д. предвиђени општом шемом, на којој се буде зауставило покушавајући одредити механизам појаве; да се тражи конкретна природа носилаца шемом предвиђених улога и погодбе, што изазивају јављање таквих улога у посматраној појави и т. д. или да се нађу конкретни факти, који такав један одређен хипотетични механизам чине немогућним. Осцилаторне појаве, на које се тако често наилази у свима гранама наука, дају за то подесне примере.

Све то иде у прилог основној идеји, која је и изазвала појаву ових *Елемената:* да би формирање овакве једне *Математичке Феноменологије* имало својих неоспорних и философских и практичних разлога, и да би било од несумњиве и потребе и користи да се оно у појединостима изведе.

◆

Неколики елементарни појмови из полидимензионалне геометрије

Тачка, правац, смисао, растојање, координатни систем, координате. — Линије, елеменат лука, дужина лука. — Површине, линиски елеменат, геодезиске линије на површинама у n-димензионалноме простору и њихова одредба. — Варијетети разних редова у n-димензионалном простору; елеменат лука; геодезиске линије на варијететима и њихова одредба.

I. Тачка, правац, смисао и растојање.

Један скуп реалних вредности:

$$(\alpha_1, \cdots\cdots \alpha_n)$$

једног низа параметара:

$$(x_1, \cdots\cdots x_n)$$

сматраће се као да у n-димензионалном простору одређује положај једне *тачке*, а према овим конвенцијама:

1° Скуп вредности параметара

$$(o, o, \cdots\cdots . o)$$

биће назван *координатним почетком*. Овај је, дакле, дефинисан скупом једначина:

$$x_i = o$$

где је:

$$(i = 1, 2, \quad \cdots n)$$

2° За један низ скупова:

$$(x_1, \cdots\cdots x_n)$$

у којима сваки параметар, осим параметра x_k, има за вредност нулу, а међутим x_k нема једну исту вредност у свима тим скуповима, казаће се да представља један низ тачака на координатној осовини x_k. Скуп свију овакви тачака представљаће *координатну осовину* ox_k. Координатна осовина ox_k дефинисана је, дакле, скупом једначина:

$$x_i = o \quad \text{где је } i = 1, 2, \cdots\cdots n \quad \text{осим } i = k.$$

3° Један низ скупова:

$$(x_1, \cdots\cdots x_n)$$

у којима сваки параметар понаособ, осим параметра x_k, има једну исту, произвољну али константну, вредност, а међу тим се ти скупови међу собом разликују вредностима x_k, сматраће се да представља један низ тачака, што леже у једној истој правој паралелној ox_k и такав правац зваће се *правац k*. Према томе правац k дефинисан је скупом једначина

$$x_i = const., \text{ где је } i = 1, 2, \cdots\cdots n \text{ осим } i = k.$$

4° Један низ скупова

$$(x_1, \cdots\cdots x_n)$$

где је

$$x_i = \alpha_i \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots n \quad \text{осим } i = k$$

и где су:

$$(\alpha_1\, \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n)$$

дати стални бројеви, заједнички за све ове скупове, сматраће се да дефинише низ тачака што леже на једној одређеној линији L_k, за коју ће се казати да има правац k. Сваки такав скуп

$$(\alpha_1, \cdots\cdots \alpha_n)$$

кад се параметру α_k да ма каква одређена, реална, вредност, представља по једну тачку на линији L_k.

5° Две тачке на једној истој линији L_k разликују се само вредностима параметара x_k што им одговарају. Апсолутна вредност разлике тих параметара сматраће се као међусобно *растојање* тих тачака на линији L_k.

6° На свакој од координатних осовина ox_k биће утврђена два међу собом супротна *смисла:* позитиван и негативан. Један скуп:

$$(x_1, \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot x_n)$$

у коме сви параметри, осим x_k, имају за вредност нулу, а параметар x_k ма какву позитивну вредност, представља по један низ тачака на осовини ox_k на растојању x_k од почетка пренесеном у позитивном смислу те осовине. Обрнуто ће правило важити кад је x_k негативно.

7° На сваком правцу k разликоваће се такође позитиван и негативан смисао. Пошто правац k није ништа друго до правац осовине ox_k, то, кад је једном утврђен правац за осовину ox_k, биће утврђен и за правац k.

8° Скуп координатних осовина

$$(ox_1, \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot ox_n)$$

саставља један *координатни систем* у n-димензионалном простору. Величине параметара:

$$(x_1, \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot x_n)$$

биће назване *координатама* једне тачке M у таквом систему, а један скуп тих вредности н. пр.

$$(\alpha_1, \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \alpha_n)$$

одређује положај једне тачке M на овај начин: одреди се на осовини ox_1 тачка M_1 на одстојању α_1 од почетка, пренесеном у позитивном или негативном смислу те осовине према знаку α_1. На линији L_2, што пролази кроз M_1, одреди се тачка M_2 на одстојању α_2 од M_1, пренесеном у позитивном или негативном смислу према знаку α_2. На линији L_3, што пролази кроз M_2, одреди се тачка M_3 на одстојању α_3 и т. д. Завршна тачка M_n тако добијеног низа тачака: $M_1, M_2, \cdots M_n$ била би геометриски представник скупа вредности

$$(\alpha_1, \cdots\cdots \alpha_n)$$

у координатном систему:

$$(ox_1, \cdots\cdots ox_n)$$

Положај тачке M_n независан је од реда индекса, који придаје координатним осовинама.

9° Под *растојањем* MN двеју тачака:

$$M\ (x_1, \cdots\cdots x_n)$$
$$N\ (\xi_1, \cdots\cdots \xi_n)$$

разумеће се вредност израза:

$$MN = \pm \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + \cdots\cdots + (x_n - \xi_n)^2}$$

10° Низ вредности:

$$\mu_1 = \frac{x_1 - \xi_1}{MN} \cdots\cdots \mu = \frac{x_n - \xi_n}{MN}$$

где су $(x_1, \cdots\cdots x_n)$ и $(\xi_1, \cdots\cdots \xi_n)$ координате тачака M и N, сматраће се да одређује правац MN и зваће се *коефицијентима тога правца*. Пошто је по апсолутној вредности

$$x_i - \xi_i \leqslant MN$$

то сваки од коефицената правца варира између—и $1 + 1$.

Између коефициената правца постоји стална релација:

$$(1) \qquad \mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots \cdot \mu_n^2 = 1$$

У специјалном случају кад је $x_i = \xi_i$ за све вредности i осим за $i = k$, правац се MN поклапа са правцем k. Тада је:

$$MN = \pm (x_k - \xi_k)$$

и према томе:

$$\mu_k = \pm 1$$

И обрнуто, кад је $\mu_k = \pm 1$, сви су остали $\mu_i = o$ па дакле $x_i = \xi_i$. Услов, дакле, да би две тачке M и N лежале на једној правој правца k, јесте тај да коефицијенат μ_k има једну од својих граничних вредности $+ 1$ или $- 1$.

11° Сматраће се да знак + или — дефинише *смисао* у коме се рачуна растојање MN: кад се овоме, рачунајући од тачке M, да један, у осталом произвољно изабрат знак, треба му дати супротан знак, кад се буде рачунало од тачке N.

II. Линије. Кад се један скуп параметара

$$(x_1, \cdots \cdot x_n)$$

континуално мења и то тако, да се све могуће његове вредности добијају, кад се у изразима:

$$(2) \qquad \begin{aligned} x_1 &= f_1(\lambda) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= f_n(\lambda) \end{aligned}$$

[где је λ један промењљив параметар, а $f_1 \cdots f_n$ одређене и дате функције тога параметра] параметру λ дају разне произвољне вредности, сматраће се да скуп тачака, добијених на тај начин, представља једну **линију** у n-димензионалном простору и да горње једначине представљају једначине те линије. Сматраће се такође да облик те линије зависи од облика ових једначина.

За једну такву линију казаће се да пролази кроз дату тачку:

$$M_1\,(x_1^{(1)}, \cdots x_n^{(1)})$$

ако постоји таква једна вредност $\lambda = \lambda_1$ параметра λ, која кад се смени у једначинама (2) добија се као резултат:

$$x_1 = x_1^{(1)}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = x_n^{(1)}$$

Под *елементом лука* ds једне линије C између двеју бескрајно блиских тачака M_1 и M_2 што на њој леже, разуме се израз:

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + \cdots\cdots + dx_n^2}$$

пошто се у њему смене $dx_1, \cdots\cdots dx_n$ њиховим вредностима добијеним из једначине (1) саме криве, тако да тај резултат буде:

$$ds = M \cdot d\lambda$$

где ће M бити дата функција параметра λ.

Под *дужином лука* s између тачака M_1 и M_2 на линији C разумеће се вредност одређеног интеграла:

$$s = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M \cdot d\lambda$$

где су λ_1 и λ_2 вредности параметра λ што одговарају тачкама M_1 и M_2.

III. Површине. Кад се један скуп параметара:

$$(x_1, \cdots\cdots x_n)$$

континуално мења и то тако, да се све могуће његове вредности добијају, кад се у изразима:

$$(3) \qquad \begin{aligned} x_1 &= f_1(\lambda_1, \lambda_2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= f_n(\lambda_1, \lambda_2) \end{aligned}$$

(где су λ_1 и λ_2 међу собом независни параметри а f_1 и f_2 одређене и дате функције тих параметара) параметрима дају разне произвољне вредности, сматраће се да скуп тачака:

$$(x_1, \cdots\cdots x_n)$$

добијених на тај начин припада једној *површини* у n-димензионалном простору, тако, да једначине (3) представљају једначину те површине и да је облик саме површине дефинисан обликом те једначине.

Под *линијским елементом* површине дефинисане једначином (3) разумеће се израз ds, који се добија, кад се у обрасцу:

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + \cdots\cdots + dx_n^2}$$

смене $dx_1, dx_2 \cdots dx_n$ вредностима добијеним из једначина (3), тако да је

$$ds = \sqrt{A_1\, d\lambda_1^2 + 2A_2\, d\lambda_1\, d\lambda_2 + A_3\, d\lambda_2^2}$$

Ма каква веза:

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2) = o$$

придата једначинама (3), дефинише једну *линију* повучену на посматраној површини. Тако ће н. пр. бити ако су параметри λ_1 и λ_2 изражени као функције једног истог параметра λ

$$\lambda_1 = \varphi_1 (\lambda)$$
$$\lambda_2 = \varphi_2 (\lambda)$$

Помоћу познатих метода интегралног рачуна могу се тада решавати задаци овакве врсте: знајући облик линијског елемента једне површине у n-димензионалном простору, прецизирати класу површина карактерисану таквим елементом.

Једна линија, дефинисана релацијом:

$$\varphi (\lambda_1, \lambda_2) = o$$

на горе наведени начин, пролазиће кроз једну дату тачку M_1 површине (3), ако постоји такав један пар λ_1, λ_2 вредност тих параметара, који ће задовољавати релацију:

$$\varphi (\lambda_1, \lambda_2) = o$$

и за које ће се сменом у једначинама (2) вредности

$$(x_1, \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot x_n)$$

свести на координате тачке M. Једна таква линија пролазиће кроз две дате тачке M_1 и M_2, ако свака од ових тачака задовољава горњу погодбу.

Под елементом $d\sigma$ лука једне линије на површини, дефинисање скупом једначина (3) и једном датом релацијом

$$\varphi (\lambda_1, \lambda_2) = o$$

а између двеју бескрајно блиских тачака $M_1 (\lambda_1, \lambda_2)$ и $M_2 (\lambda_1 + d\lambda_1, \lambda_2 + d\lambda_2)$ површине кроз које та линија пролази, разумеће се вредност:

$$d\sigma = H \cdot d\lambda.$$

који се добија кад се у изразу линијског елемента посматране површине смене λ_1 и λ_2, као и $d\lambda_1$ и $d\lambda_2$, својим изразима као функцијама онога параметра λ, што линији одговара.

Под дужином лука σ између двеју тачака M_1 и M_2 једне површине **дуж** посматране линије, разумеће се вредност одређеног интеграла:

$$\sigma = \int_{c_1}^{c_2} N\, d\lambda$$

где су c_1 и c_2 вредности параметра λ што одговарају крајњим тачкама M_1 и M_2 лука.

На послетку под *геодезиском линијом* између двеју тачака M_1 и M_2 на једној површини (3) разумеће се она од бескрајно многих линија што пролазе кроз M_1 и M_2, за коју је варијација $\delta\sigma$ лука при прелазу од посматране линије на њој бескрајно блиску линију равна нули.

Ако је:

$$ds_2 = A_{11}\, d\lambda_1^2 + 2\, A_{12}\, d\lambda_1\, d\lambda_2 + A_{22}\, d\lambda_2^2$$

израз линијског елемента дате површине, где су A_{11}, A_{12} и A_{22} функције променљивих λ_1 и λ_2, њене су геодезиске линије одређене скупом једначина (3) и једначином:

$$\text{(4)} \qquad \frac{\partial W}{\partial c} = const. = b$$

где је $W(\lambda_1, \lambda_2, c)$ један интеграл парцијалне диференцијалне једначине:

$$\Delta W = 1$$

а где ΔW означује диференцијални параметар:

$$\Delta W = \frac{A_{22}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\right)^2 - 2A_{12}\frac{\partial W}{\partial \lambda_1} \cdot \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} + A_{11}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2}{A_{11}\, A_{22} - A_{12}^2}$$

везан за дати линијски елеменат; c је једна произвољна неадитивна константа, која интеграцијом улази у састав израза W.

Једначина (4), понаособ, дефинише λ_1 и λ_2 као функције једног параметра λ, што кад се смени у једначинама (3), довршује одредбу геодезиских линија.

Разлика вредности, које добија функција $W(\lambda_1, \lambda_2, c)$ у двема датим тачкама површине, представља дужину лука геодезиске линије између тих тачака.

IV. Варијетети разних редова. У опште, кад координате $x_1 \cdots\cdots x_n$ зависе од p параметара: $\lambda_1 \cdots\cdots \lambda_p$ тако да је:

$$(5)\qquad \begin{aligned} x_1 &= f_1(\lambda_1, \cdots\cdots \lambda_p) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= f_n(\lambda_1, \cdots\cdots \lambda_p) \end{aligned}$$

казаће се да ове једначине дефинишу један *варијетет* p-ог *реда* у n-димензионалном простору.

Под линијским елементом једног таквог варијетета разумеће се израз

$$(6)\qquad ds = \sqrt{\Sigma A_{ik}\, d\lambda_i\, d\lambda_k}$$

који постаје, кад се у изразу:

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + \cdots\cdots + dx_n^2}$$

смене диференцијали њиховим изразима добијеним из једначина (5).

Ако се између параметара $\lambda_1 \cdots\cdots \lambda_p$ уведе (p-1) нових веза, што се може н. пр. учинити ако се $\lambda_1 \cdots\cdots \lambda_p$ изразе као функције једнога истог параметра λ, тако да је

$$(7)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= \varphi_1(\lambda) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_p &= \varphi_p(\lambda) \end{aligned}$$

онда ће према обрасцима (4) $x_1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot x_p$ бити изражени као функције параметра λ. Према томе увођењем (p-1) веза између параметара своди се дати варијетет p-тог реда на линију т. j. на варијетет првог реда. Једна таква линија пролазиће кроз једну дату тачку M у n-димензионалном простору, ако постоји таква једна вредност λ, која кад се смени у обрасцима (5), (7), па се затим добијене вредности $\lambda_1 \cdot \cdot \cdot \lambda_p$ смене у обрасцима (4), добијене се вредности $x_1 \cdot \cdot \cdot x_n$ поклапају са координатама тачке M.

Елеменат лука $d\sigma$ једне такве линије, дефинисане скупом једначина (5) и (7), а између бесконачно блиских тачака M_1 и M_2 што леже на линији, биће вредност израза

$$d\sigma = = M \cdot d\lambda$$

која се добија кад се у изразу:

$$ds = \sqrt{dx_1{}^2 + \cdot \cdot \cdot + dx_p{}^2}$$

смене диференцијали њиховим вредностима добијеним из једначина (5), па се затим диференцијали $d\lambda_1, \cdot \cdot \cdot d\lambda_p$ што буду фигурисали у добијеним изразима, смене њиховим вредностима израчунатим из образаца (7).

Дужина лука σ између двеју тачака M_1 у M_2 биће:

$$\sigma = \int_{c_1}^{c_2} M \, d\lambda$$

где c_1 и c_2 означују оне вредности параметра λ, што одговарају крајњим тачкама лука.

На послетку, под *геодезиском линијом* једног варијетета p-тог реда у n-димензионалном простору, а између његових двеју тачака M_1 и M_2, разумеће се она од бескрајно многих линија, што пролазе кроз тачке

M_1 и M_2 и што одговарају бескрајно разноврсним облицима функција $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ у једначинама (7), која задовољава погодбу, да је за њу прва варијација лука равна нули.

Ако је:

$$ds^2 = \Sigma A_{ik}\, d\lambda_i \cdot d\lambda_k$$

$$\begin{pmatrix} i = 1, 2, 3, \cdots\cdots p \\ k = 1, 2, 3, \cdots\cdots p \end{pmatrix}$$

израз линијског елемента датог варијетета p-тог реда, где су A_{ik} функције промењљивих $\lambda_1 \cdots\cdots \lambda_p$ и ако се са

$$\Omega (\lambda_1 \cdots\cdots \lambda_p;\ g_1 \cdots\cdots g_p)$$

означи израз:

$$-\frac{\begin{vmatrix} A_{11} \cdots\cdots\cdots\cdots A_{1p}\ g_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{p1} \cdots\cdots\cdots\cdots A_{pp}\ g_p \\ g_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots g_p \quad 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{11} \cdots\cdots A_{1p} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{p1} \cdots\cdots A_{pp} \end{vmatrix}}$$

па се формира парцијална диференцијална једначина:

$$(8) \qquad \Omega\left(\lambda_1 \cdots\cdots \lambda_p;\ \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} \cdots\cdots \frac{\partial W}{\partial \lambda_p}\right) = 1$$

геодезиске су линије варијетета одређене скупом једначина (5) и системом:

$$(9) \qquad \frac{\partial W}{\partial a_1} = b_1 \cdots \qquad \frac{\partial W}{\partial a_{p-1}} = b_{p-1}$$

где су:

$$W (\lambda_1 \cdots\cdots \lambda_p;\ a_1 \cdots\cdots a_{p-1})$$

један интеграл једначине (8), a_i интеграционе константе, од којих ни једна није адитивна, а b_i произвољне константе.

Једначине (9) дефинишу *p-1* релацију између $\lambda_1 \cdots \lambda_p$. Према томе скуп ће једначина (5), са једначинама (9), дефинисати промењљиве $x_1 \cdots x_n$ као функције једнога параметра λ, што довршује одредбу геодезиских линија на датом варијетету.

ПРВИ ОДЕЉАК

Елементи за дескрипцију појава и њихових механизама

ПРВА ГЛАВА

ДЕСКРИПТИВНИ ЕЛЕМЕНТИ ПОЈАВА

I. Елементи за шематску дескрипцију.

Дескриптивни елементи. — Скалирање тренутних стања дескриптивних елемената. — Природно и вештачко скалирање. — Дескриптивни параметри. — Дескрипција мењања једнога елемента. — Квантитативна и квалитативна дескрипција. — Квантитативне и квалитативне аналогије тока једнога елемента. — Шематска дескрипција појава. — Шематска дескрипција неколиких конкретних појава.

Дескриптивни елементи. Једна одређена појава, у смислу у коме ће се овде посматрати, ма какве врсте, конкретне природе и компликованости она била, може се схватити као низ одређених модификација у току времена. Слика, која се о њој ствара у свести, састоји се у низу деформација једне исте одређене слике т. ј. у сукцесији тренутних слика, које се континуално или дисконтинуално нижу једна за другом у току времена, и од којих свака представља по једно *тренутно стање* у појави.

Оно, што се мења у току такве деформације, јесте један одређен скуп елемената, који ће бити назван *дескриптивним елементима* појаве. Дескрипција се појаве своди на скуп дескрипција низа узастопних тренутних стања свакога од таквих елемената и резултујуће шематске слике формиране таквим скупом дескрипција.

Она ће бити у толико одређенија и потпунија, у колико су одређенији и са гледишта, са кога се појава посматра, карактеристичнији изабрани дескриптивни елементи, и у колико су тачније обележена стања кроз која они сукцесивно пролазе.

Избор, међу тим, тих елемената може бити веома различан према гледиштима са којих се појава посматра, према оштрини опажања, дубини анализе која се буде унела у дескрипцију појаве и према везама разних елемената дескрипције са оним што се у појави мисли истаћи. Све што се у току једне појаве мења, не мора бити од подједнаког интереса за једно одређено гледиште. Са друге стране, оштрије посматрање истакне по кадшто већу компликованост појаве но што изгледа по површнијем посматрању, и потребу да се ради прецизније дескрипције изабраним елементима придодаду још неки, или да се они разложе на извесан број простијих елемената, чија би колективна дескрипција дала тачнија рачуна о појединостима појаве.

У дескрипцији каквог кретања дескриптивни елементи могу бити геометриски елементи што дефинишу положаје тачака или тела, или њихову међусобну оријентацију (дужине, углови), или кинетички елементи што дефинишу транслаторне или ротационе брзине, акцелерације и т. д. У дескрипцији геометриских деформација дескриптивни су елементи они што дефинишу облик тела. При термичким променама то би била н. пр. температура, за електричне промене јачина струје или количина електрицитета, за оптичке јачина осветлења или боја, код акустичких тон, висина или јачина звука, и т. д. Поред оваквих очевидних елемената може их бити и таквих, до којих се долази тек по дубљем познавању појаве или оштријим опажањем, као што је случај са бојом звука као дескриптивног елемента акустичких појава, различног од непосредно уочљивих елемената: јачине и висине звука; или са извесним хроматичким карактерима (висина боје, тон, хроматичка моћ висине или тона, хроматичка моћ осветлења), који се запажају тек дубљом анализом сензација боја, а без којих је немогућна прецизна дескрипција сензација изазваних комбинацијама боја (н. пр. оркестрација боја); или са магнетним пермеабилитетом, који се открива тек математичком анализом и т. д. Иначе, најчешћи су дескриптивни елементи разноврсни атрибути, који се придају како конкретним, тако и апстрактним појавама сваке врсте и који се и у обичном животу и у наукама означују као особине, аспекти, карактеристичне црте и т. д.

Скалирање тренутних стања дескриптивних елемената. Узастопна стања, кроз која пролази један дескриптивни елеменат у току појаве, могу се схватити и представити на један нарочити начин, подједнак за појаве свих врста и који је основа аналитичкој дескрипцији појава: она се могу представити вредностима једнога параметра, који би у мислима био придат уоченом дескриптивном елементу и чије би квантитативне варијације ишле упоредо са мењањем самога елемента. Дескрипција низа узастопних тренутних стања таквог елемента своди се тада на дескрипцију узастопних вредности, кроз које пролази одговарајући параметар у току појаве. Овај други низ вредности *илустровао би* начин варијације онога првог.

Улога таквог једног параметра састоји се, у првоме реду, у томе да *скалира* разна стања одговарајућег елемента, било да је овај квантитативне, било квалитативне природе. За велики број елемената могућно је *апсолутно скалирање*, које се састоји у томе да се нађе такав један практички мерљив елеменат, који ће са првим бити у једној непромењивој и безусловној вези, тако, да свакој датој величини првога безусловно одговара једна тачно одређена величина другога, и обрнуто, а да се, поред тога, оба елемента мењају симултано у једноме истом смислу. Параметром, придатим овоме другом елементу, скалиран је тада и први. Такве би врсте било н. пр. скалирање боја помоћу таласких дужина, или скалирање висине звука помоћу броја вибрација у секунди, скалирање брзина дужинама и т. д.

За све, пак, врсте дескриптивних елемената, ма какве природе ови били, могућно је *вештачко скалирање*, које се састоји у томе да се постави веза између уоченог елемента и другога једног, конкретног или фиктивног, помоћног елемента, чије је варијације лакше у мислима представити; веза треба да је такве врсте, да свакој промени вредности параметра, придатог овоме помоћном елементу, одговара промена првога елемента у оном истом смислу у коме је била и промена параметра. Такво је скалирање једна врста *нумерисања* узастопних тренутних стања једнога дескриптивног елемента, тако да се разна таква стања једнога истог елемента разликују међу собом по вредностима параметра такве нумерације. Свако је такво скалирање, у исто време, и једна врста координатног система за фиксирање и међусобно упоређивање разних узастопних стања једнога елемента. Апсолутно је скалирање један од могућних таквих система. Вредност параметра, која има да дефинише и фиксира једно такво одређено стање и која игра улогу једне врсте координата, зависи, као и у Аналитичној Геометрији, не само од места које то стање заузима у нумерисаноме низу свих могућних стања истога елемента, већ и од самих конвенција унесених при избору и фиксирању таквога једног координатног система.

Вештачко скалирање носи на себи тип генералности, која и чини да се њиме могу обухватити и елементи неприступни апсолутном скалирању, као што су разноврсни *квалитети*, несводљиви на елементе какви се претпостављају при апсолутном скалирању. Њиме је, шта више, у великом броју случајева подесно заменити и само апсолутно скалирање баш и кад је ово могућно. Скалирање се н. пр. боја може извршити и поређавши боје у један линеаран ред, пројектујући н. пр. спектар сунчане светлости на какав заклон и дефинишући сваку специјалну боју њеним одстојањем од почетне тачке таквога низа. Оно се исто тако може извршити и дефинишући боје одговарајућим индексима преламања за једну одређену средину. Оно се, за разне нијансе једне сложене боје може извршити и илуструјући њена разна стања варијацијама једнога скупа параметара, који би представљали пропорције разних простих боја што улазе у њен састав. Блеђа или затворенија нијанса једне исте боје, може се тако исто скалирати и степеном бледила или затворености те боје, а према једној унапред усвојеној и утврђеној скали (разни степени црнила, зеленила, црвенила и т. д.). На сличан би начин био скалиран и мирис сложен из више простих мириса, чије би пропорције играле улогу параметара нумерације. Ацидитет или безицитет каквога хемиског тела или какве смеше може се скалирати једним параметром који би му мерио јачину по једној произвољној, али утврђеној скали. Узастопне фазе у прогресивној еволуцији једне ма какве органске особине, једног биолошког карактера, биле би скалиране једним параметром, који би им дефинисао место у њиховом природном реду у току еволуције. Промене физичких, хемиских, терапетичких и др. особина једне смеше више хемиских тела могу се, поред осталих начина, скалирати и једним скупом параметара који би, дефинишући непосредно пропорције састојака у смеши у једноме датом тренутку, дефинисали у исто време посредно и стање тих особина у томе тренутку.

У опште, један ма какав квалитет, једна особина, и све оно што може играти улогу дескриптивних елемената у дескрипцијама појава, може се скалирати једним параметром или једним скупом параметара, који играју улогу једне врсте координата при томе скалирању и који ће бити названи *дескриптивним параметрима* датог елемента.

Као што се дешава, да се један дескриптивни елеменат, ради дескрипције и скалирања његових узастопних тренутних стања, може раставити на скуп од више елемената, чији скуп стања у датом тренутку састављa стање првобитног елемента у томе тренутку (сложене боје, сложен мирис, звук сложен из хармониских звукова), тако се дешава и да се један скуп елемената при скалирању може схватити као једна целина и као таква скалирати нарочитим параметром или скупом параметара. Такав би један скуп параметара, кад што и један параметар, скалирао н. пр. узастопне фазе једне болести, развитка једног организма, напретка једне установе и т. д.

Дескрипција мењања једног елемента. Кад је већ утврђен један дескриптивни параметар за један уочени елеменат, мењање тога елемента у току појаве може се описати описом начина на који се овај параметар мења за то време. Тај је начин илустрован диаграмом, у коме се време преноси на апцисну, а одговарајуће вредности параметра на ординатну осовину. Тако добијена крива илуструје *кинетички ток* дескриптивног елемента коме одговара. За део линије, што представља кинетички ток у једноме датом размаку времена, казаће се да представља *фазу* тога тока у том размаку. Јединице мере за дескриптивне елементе и за време произвољне су и не утичу на облик диаграма, са погодбом да се, кад су једном изабрате за једну дату конструкцију, одрже непромењене у целом току те конструкције.

Једна фаза дескриптивног елемента биће *квантитативно* описана, ако је одговарајући део дијаграма оцртан с довољном тачношћу, да би се са њега могао с довољном тачношћу одредити положај тачке чија би ордината својом величином, а према изабратим јединицама мере, одређивала вредност одговарајућег параметра.

Ток ће бити *квантитативно* описан, ако су на дијаграму представљене само извесне квалитативне појединости тока, као што су: сталност, знак у датом размаку времена, растење или опадање, егзистенција максимума или минимума, тежње каквом асимтотном стању, осцилаторни карактер, брзина рашћења или опадања, континуалност или дисконтинуалност, периодичност, прекиди, нагли скокови, промене знака, пролазак кроз нулу и т. д.

Квантитативна дескрипција. Могућна је само код оних дескриптивних елемената, који су практички мерљиви, тако, да им се стања за сваки тренутак могу са довољном тачношћу бројно изразити изабраним јединицама мере. Такав је н. пр. случај са непосредно или посредно мерљивим елементима у механичким, физичким, хемиским, физиолошким и т. д. појавама (дужине, површине, запремине, углови и разни геометриски параметри што дефинишу положаје, облике или распореде; индекси преламања, јачина осветлења, количина електрицитета, интензитет струје, јачина магнетисања, притисак, густине, електрични отпори, разноврсни коефицијенти што дефинишу физичке, хемиске и физиолошке особине тела и т. д.).

Дијаграм варијација може се резимирати једним математичким обрасцем, у коме ће параметар, што одговара дескриптивном елементу, бити изражен као функција времена и који ће бити тачан или приближан према томе, да ли је изведен из тачнога познавања закона варијације тога параметра у току времена, или из познавања приближног закона, или емпирички, интерполацијом. Такав ће образац тада бити *аналитички представник* закона кинетичког тока за уочени елеменат. За два елемента казаће се да у једној фази показују међусобну *квантитативну аналогију тока*, ако имају исте аналитичке представнике закона тока у тој фази, т. ј. ако су им једначине диаграма у тој фази истога облика и са истим бројним коефицентима.

Квалитативна дескрипција. Могућна је за све врсте дескриптивних елемената, од најконкретнијих до најапстрактнијих. Сваки појам, свака идеја, сваки осећај, има у себи нечега мерљивог, ако не у практичном, а оно у математичком смислу, т. ј. нечега што се може схватити као веће или мање, јаче или слабије, и по чему се разна тренутна стања једног истог дескриптивног елемента могу међу собом упоређивати. Јачина ацидитета или базицитета једнога хемиског тела или једне смеше; јачина једне дражи, акутност једне болести, јачина једнога осећаја, интензитет једне представе у свести, јачина пажње, величина телесног или душевног напора, степен једне културе, степен осетљивости, брзина напредовања или ретроградације при каквој прогресивној еволуцији, важност једнога акта, замашност једне дужности, једне кривице, једне заслуге и т. д. јесу елементи код којих, и ако они сами по себи могу бити неприступачни практичноме мерењу и прецизном изражавању у каквим одређеним јединицама мере, ипак је могућно схватити им све оне квалитативне појединости, на које се наилази у варијацијама практички мерљивих елемената: рашћење или опадање, анулисање елемената, континуални, дисконтинуални, осцилаторни, периодички и т. д. карактер, максимуме и минимуме и т. д.

Зна се н. пр. да интензитет осећаја расте знатно спорије него интензитет дражи која га изазива. Осцилаторне појаве најразноврснијих природа састоје се у периодичном или апериодичном осциловању једнога елемента или комплекса елемената око једнога одређеног стања, или у наизменичном приближавању томе стању и удаљавању од њега, на начин сличан кретању клатна. Такви елементи, међу тим, могу бити практички немерљиви, па да им се ипак може схватити и истаћи на видик осцилаторни карактер. Маса ритмичких појава у биологији, маса трајних историских појава, поступни развитак разних социјалних институција у дугим периодама времена, који би се састојао у низу таквих наизменичних приближавања и удаљавања, али све слабијих у току времена, јасни су и довољни пример за то. Егзистенција максимума и минимума може се такође схватити за дескриптивне елементе свих врста; изрази као што су: кулминација једне болести, врхунац силе, каријере, моћи, богаства, и т. д. то јасно показују. Изрази као што су: удвостручити пажњу или интересовање; изгубити (анулисати) вољу, наклоност или укус за какав акт и т. д. исказују ма и овлашно ценење релативних величина дескриптивних елемената неприступних прецизном мерењу. Факт, да је покретачка тежња, везана за једну идеју, у толико већа, у колико акт, који она има да импозира, изазива више задовољства или у колико је он у већој сагласности са личним интересима; приписивање одређеног правца људским радњама или социјалним покретима; уочавање циља, као асимптотне тачке којој конвенгирају такве радње, покрети или идеје, у једној одређеној периоди времена, такође су факта која непосредно исказују схватање квалитативних појединости у варијацијама елемената свих врста и свих природа. То исто, на послетку, исказују и оне многобројне, баналније или дубље, метафоре и компарације једних појава са другима познатијим, које се и у обичном животу, и у књижевности, и у наукама на сваком кораку употребљују и у којима се уочена појава, са одређеним квалитативним појединостима у варијацијама њених дескриптивних елемената, упоређује са другом којом, у којој су те појединости јасније, очевидније, или где оне изазивају интензивније представе или осећаје. Довољно је подсетити на поређење наглих варијација појединих елемената са бујицом (н пр. бујица страсти); на поређење наглих, напрасних скокова у варијацијама са ударом; на поређење душевних немира са узбурканим морем, јаких напраситости са експлозијом (н. пр. експлозија осећаја) или електричним испражњавањем, атавизам са еластичним или магнетним хистерезичним појавама; на поређење разноврсних физиолошких, социолошких или психолошких ритмичких појава са осцилаторним кретањем клатна, или са приливом и одливом; на нервну акцију упоређену са електричним појавама, на неодлучност и колебање упоређено са балансирањем теразија изведених из равнотежног положаја и тако даље.

Овакве су метафоре и компарације у исто време и нарочити израз *квалитативних аналогија* тока појединих елемената у појавама на које се односе. Језгро је такве аналогије у факту, да дијаграми одговарајућих елемената, у размаку времена у коме се посматрају, показују симултано квалитативне појединости једне исте врсте. Аналогија је у толико потпунија, у колико је већи број и интерес таквих заједничких квалитативних појединости. Она је н. пр. врло потпуна у групи ритмичких појава са поступно амортизираним осцилацијама, или између појаве поступне магнетизације гвоздене шипке и поступне акумулације продукта једне мономолекуларне хемиске реакције у току времена (одговарајући дескриптивни елеменат и у једној и у другој појави полази од вредности нуле, почиње у први мах нагло расти, а за тим све лакше, тежећи при том поступно једној финалној одређеној вредности, као својој асимтотној граници, или између магнетних пертурбација на земљи и честине сунчаних протуберанца (симултано рашћење, опадање, пролазак кроз максимуме и минимуме, варијације у једном истом смислу релативних величина узастопних максимума и минимума) и т. д. Аналогија је, на против, врло овлашна у компарацијама напрасних скокова, при варијацијама појединих елемената, са ударом, или у компарацији душевних колебања са балансирањем теразија и т. д.

Шематска дескрипција појава. Описати шематски појаву значи описати сукцесију узастопних тренутних стања сваког од њених изабраних дескриптивних елемената и формирати резултујућу шематску слику из скупа појединих начина варијација тих елемената.

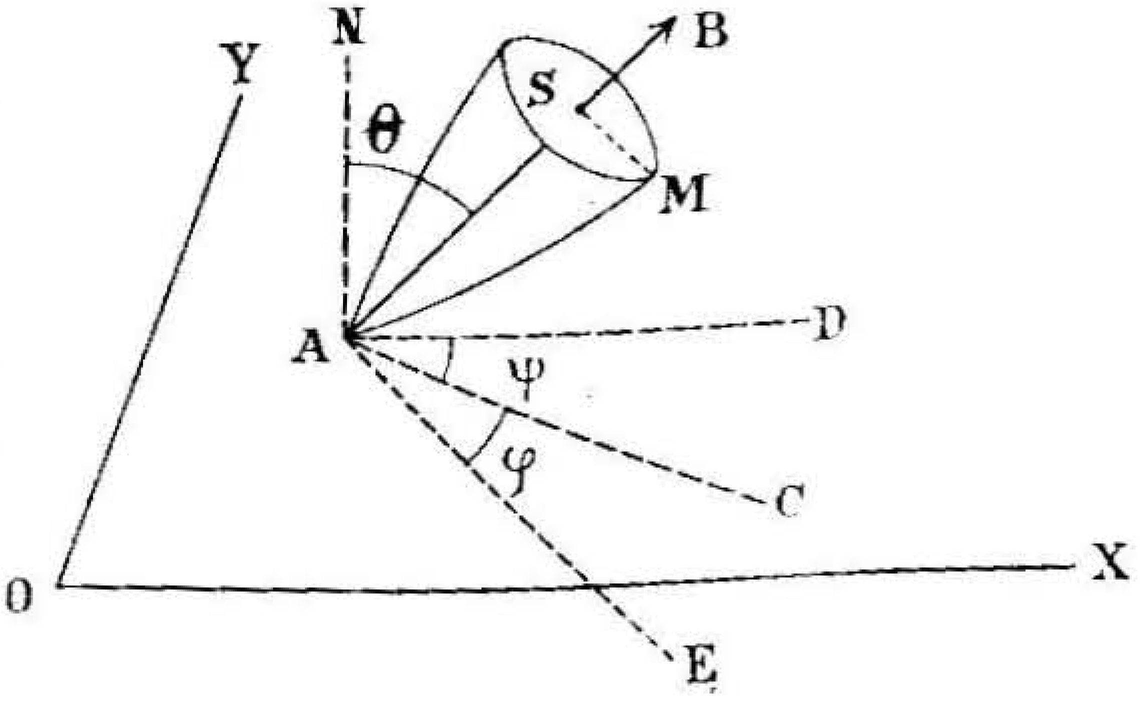
Ако је у појави од интереса само један дескриптиван елеменат, њена се дескрипција састоји у дескрипцији његових узастопних тренутних стања у датоме размаку времена. Ако их је више, поред њиховог појединачног описа, дешава се да се компарацијом њихових симултаних варијација у току појаве запазе какве релације, које су од интереса у дескрипцији појаве. Оне су од нарочитог интереса ако су *перманентне* т. ј. ако су увек исте кад год је остварен један одређен скуп прилика, па ма какав био начин на који се такви елементи посебице мењају. Дешава се, осим тога, да стицај таквих симултаних начина варијације изазива у резултујућој слици појаве нарочите појединости од интереса, које излазе на видик тек онда, кад се варијације дескриптивних елемената посматрају *симултано* и које су резултат комбинација таквих симултаних промена. Тако н. пр. чисто геометриска одлика у кретању, као што је путања покретне тачке, постаје тек комбиновањем симултаних варијација координата тачке, било изоловане, било као саставног дела каквог чврстог тела. Исти је случај и са сликама геометриске деформације тела у току времена, н. пр. са сликом поступног спљоштавања једног елипсоида, која резултира из симултаних варијација изабраних геометриских параметара. Исто је тако и са резултујућом сликом нарочитих кретања чврстих или течних тела, као што су кретање чигре, кретање усталасане течности и т. д. или са оптичким појавама Lissajous-ових фигура, које резултују из симултаности вибрација два међу собом укрштена диапазона, или са оптичким сликама Wheatston-овог калејдофона, или са резултујућим бојама танких листића, које постају комбиновањем вибрација разних праваца и т. д.

Таквом врстом дескрипције појава је *шематисана*, т. ј. трансформисана у једну слику, у којој од првобитних дескриптивних елемената остају само њихови квантитативни преставници т. ј. параметри, који им својим начином варијације илуструју низ узастопних тренутних стања и у којима је специфичка конкретна природа сваког појединог елемента потпуно исчезла. То је једна врста скице, у којој су исчезле и боје, и сенке првобитне слике, а остале само црте и контуре, али довољно одређене да би се по њима, по потреби, могла реконструисати првобитна слика. Да би реконструкција била могућна т. ј. да би се могла створити права слика појаве онакве, каква је она у реалности и каква је шематисана у тој слици, са свима њеним конкретним специфичким одликама, потребно је у мислима задржати везу између конкретне природе дескриптивних елемената и параметара који их представљају у скици. Помоћу те везе, придајући сваком параметру оно што му је шематисањем одузето, вратили би се на првобитни дескриптивни елеменат, чији је он представник. Начин варијације параметара изазива тада једну слику, која даје низ узастопних тренутних стања одговарајућих елемената, а скуп таквих слика формираће праву, конкретну, слику појаве, онакву, каква је била у реалности.

Шематска дескрипција неколиких конкретних појава.

I. Кретање чигре по хоризонталној равни.

Непосредним посматрањем појаве, кад је ова довољно брза, види се да се она састоји:



Сл. 1.

1° у кретању врха *A* у равни;

2° у обртању осовине *AB* око нормале *AN* на равни, у тачки која се поклапа са врхом чигре;

3° у приближавању и одмицању осовине *AB* према нормали *AN*;

4° у обртању чигре око осовине *AB*.

Разна тренутна стања у првоме кретању дефинишу координате *x* и *y* врха чигре у равни, по којој се он креће.

Стања у другоме кретању дефинисана су углом ψ који гради пројекција *AC* осовине чигре у равни *xoy* са правом *AD* паралелном осовини *ox*.

Стања у трећем кретању дефинисана су углом $BAN = \Theta$ који гради осовина *AB* са нормалом *AN*.

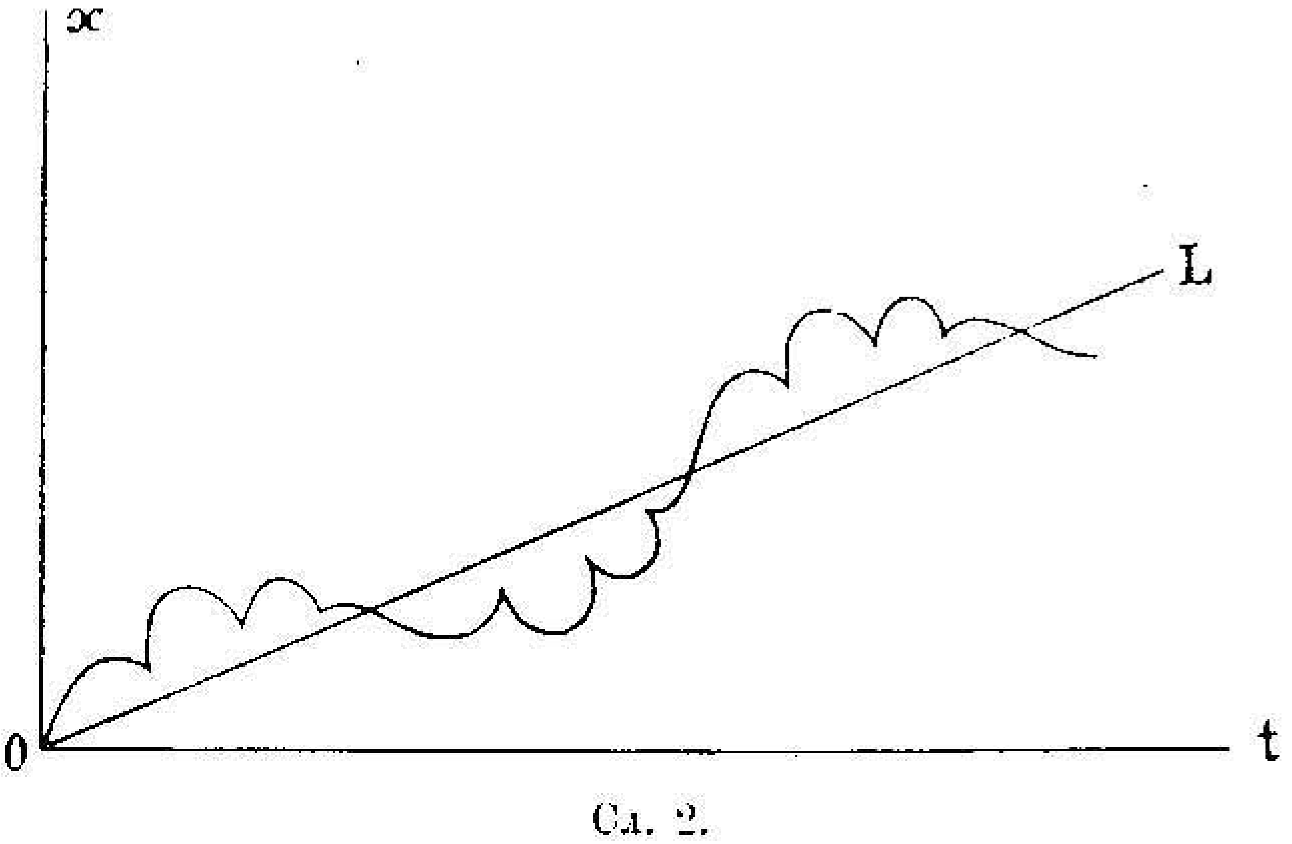
На послетку, стања у четвртом кретању дефинисана су углом φ, добијеним на овај начин: нека је *AE* пројекција, у равни *xoy*, праве *SM* што пролази кроз једну произвољну тачку чигре и стоји управно на осовини *AB*; тада је φ угао, који гради права *AE* са правом *AC*.

Све појединости при кретању чигре резултују из комбинације ова четири симултана кретања. Дескриптивни су, дакле, елементи појаве: координате x и y врха и углови ψ, Θ, φ. Овде ће бити описане сукцесије узастопних тренутних стања свих ових елемената појединце.

А) Квалитативна дескрипција.

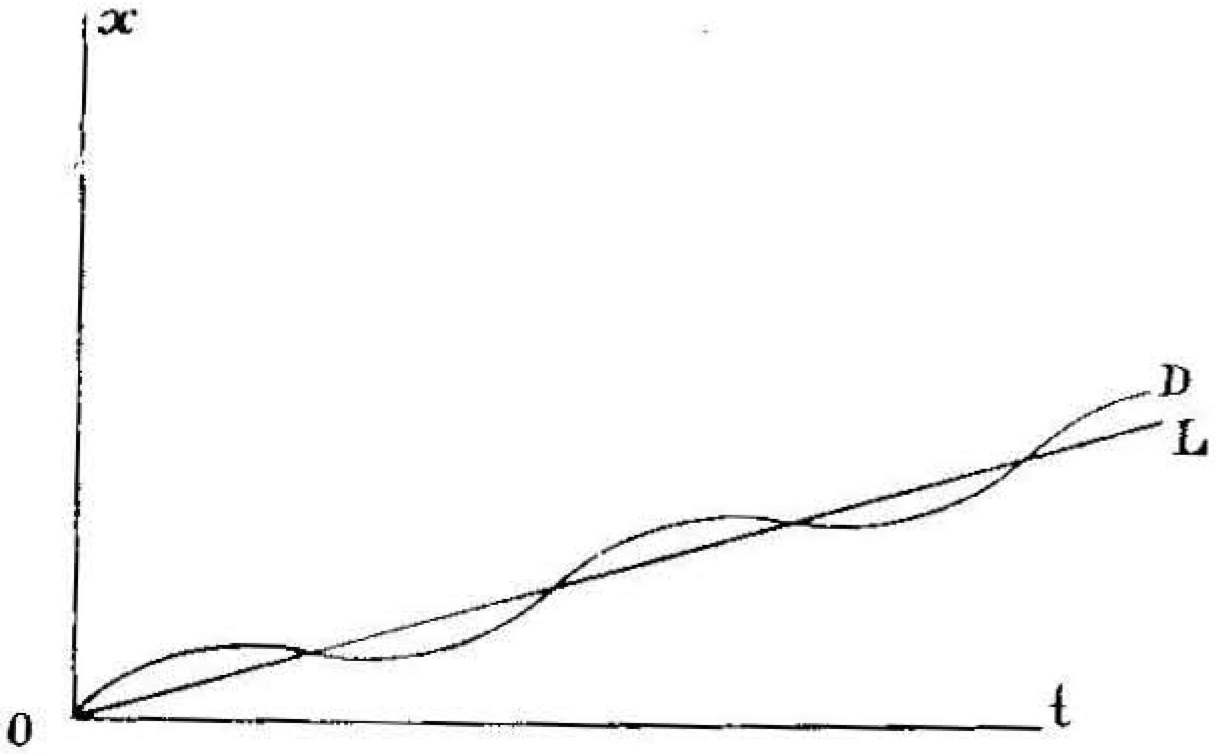
1. Параметар x.

Посматрачу из даљине, који би пратио мењање апцисе у току времена, изгледало би да се ова мења пропорционално времену, тако, да би дијаграм имао облик праве линије L (сл. 2). Кад се ове промене изближе



Сл. 2.

загледају, на место праве линије добија се једна крива линија D, која равномерно осцилује око праве L (сл. 2). Али кад се те промене још нажљивије загледају, види се да то нису просте осцилације око једне праве, већ још компликованије криве линије које осцилују између двеју осцилаторних кривих облика означеног у сл. 3. Осцилације су епициклоидалног облика, т. ј. криве осцилујући додирује ону од осцилаторних кривих, чија је амплитуда већа, а стоји управно на оној од тих кривих, чија је амплитуда мања, тако, да је тачка у којој се срећу, повратна тачка криве, диаграма параметра x.



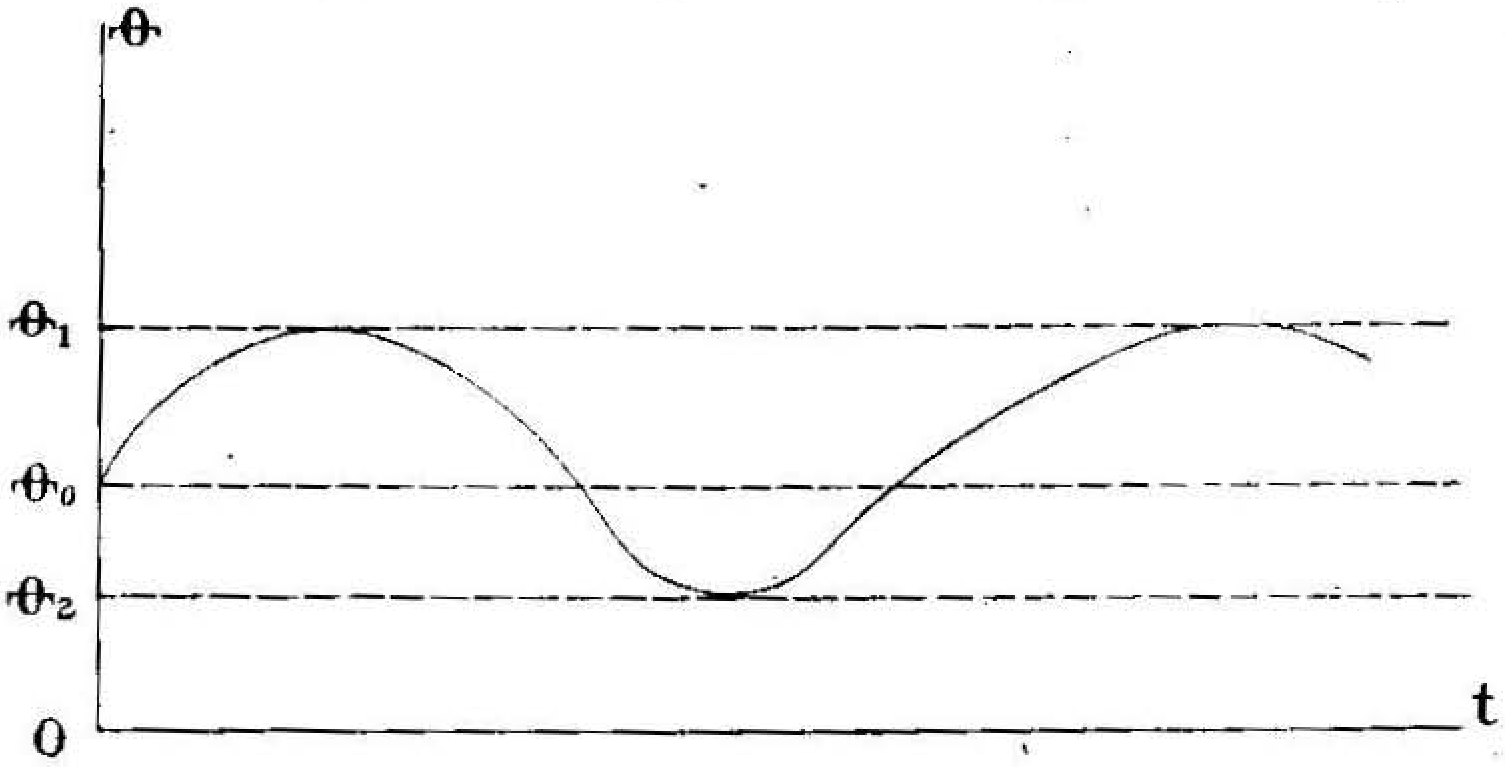
Сл. 3.

2. *Параметар y.*

Исти ток као код параметра x, само са том разликом, што су: права L и поменуте криве нешто више нагнуте према осовини ot.

3. *Параметар θ.*

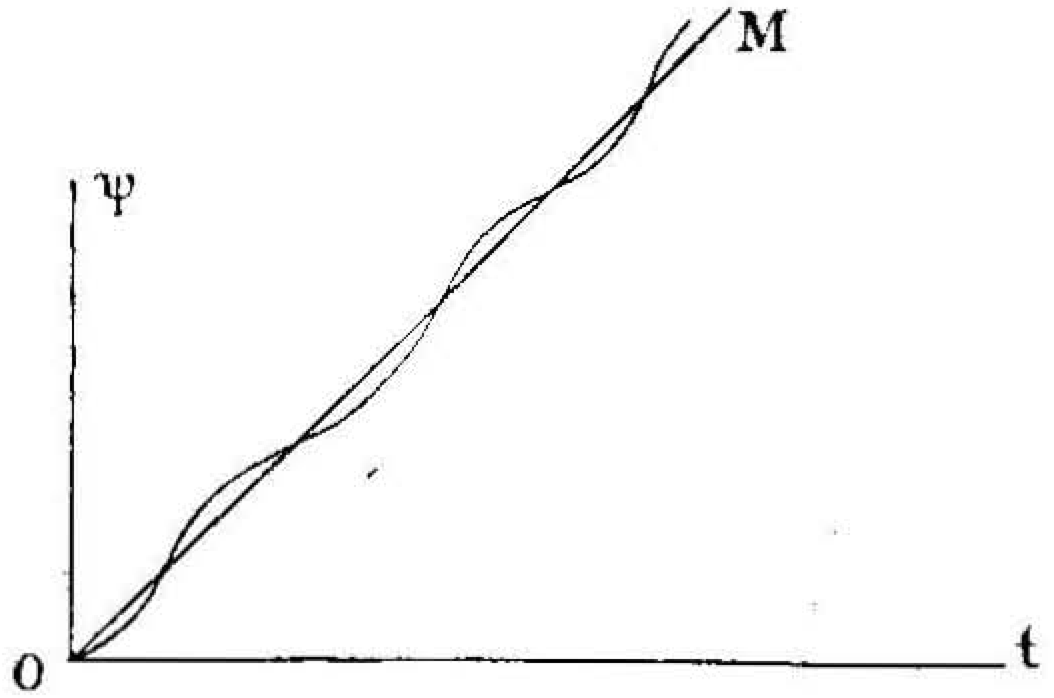
Овај параметар показује низ правилних периодичких осцилација око своје почетне вредности θ_0 и варира између двеју вредности θ_1 и θ_2 које су такве, да је разлика $\theta_1 - \theta_0$ нешто већа од разлике $\theta_0 - \theta_2$. Диаграм варијација представљен је сликом 4.



Сл. 4.

4. *Параметар ψ.*

Посматрачу из даљине изгледало би да овај параметар равномерно расти у току времена, тако да би диаграм имао облик праве *M* (сл. 5). Ближи посматрач уочио би извесно наизменично убрзавање и закашњавање у томе рашћењу, тако да би фактични диаграм имао облик једне криве линије, која лагано и периодички осцилује око праве *M*.

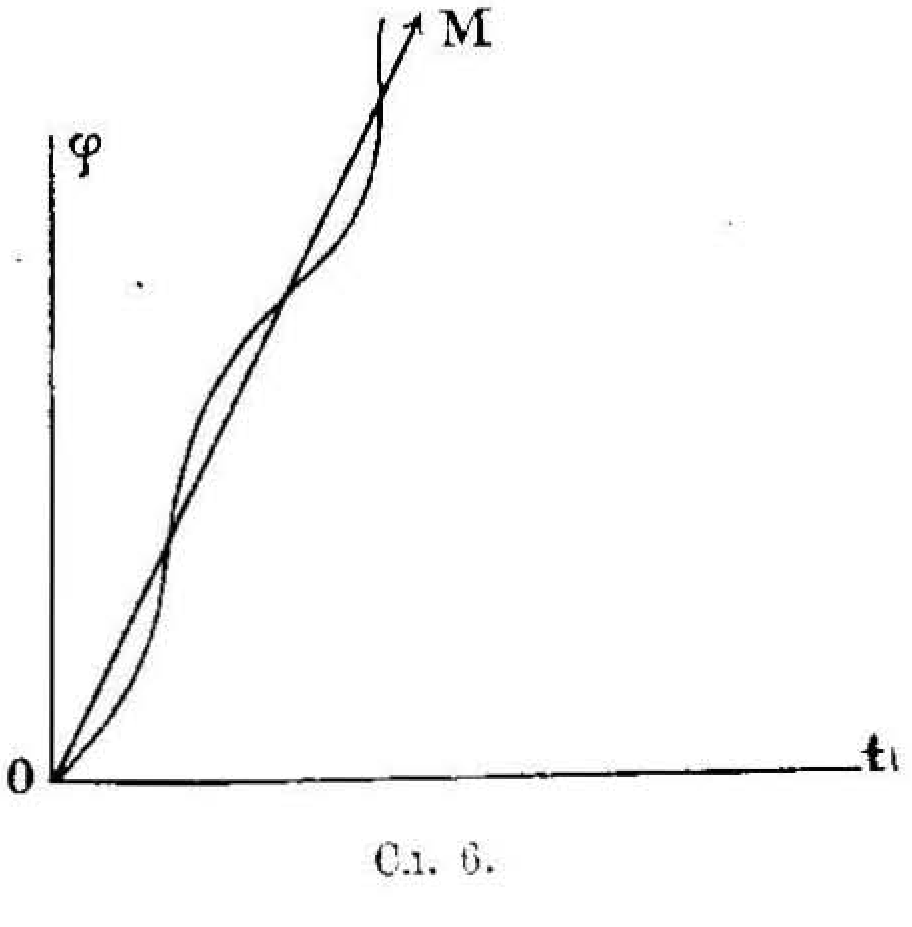


Сл. 5.

5. *Параметар φ.*

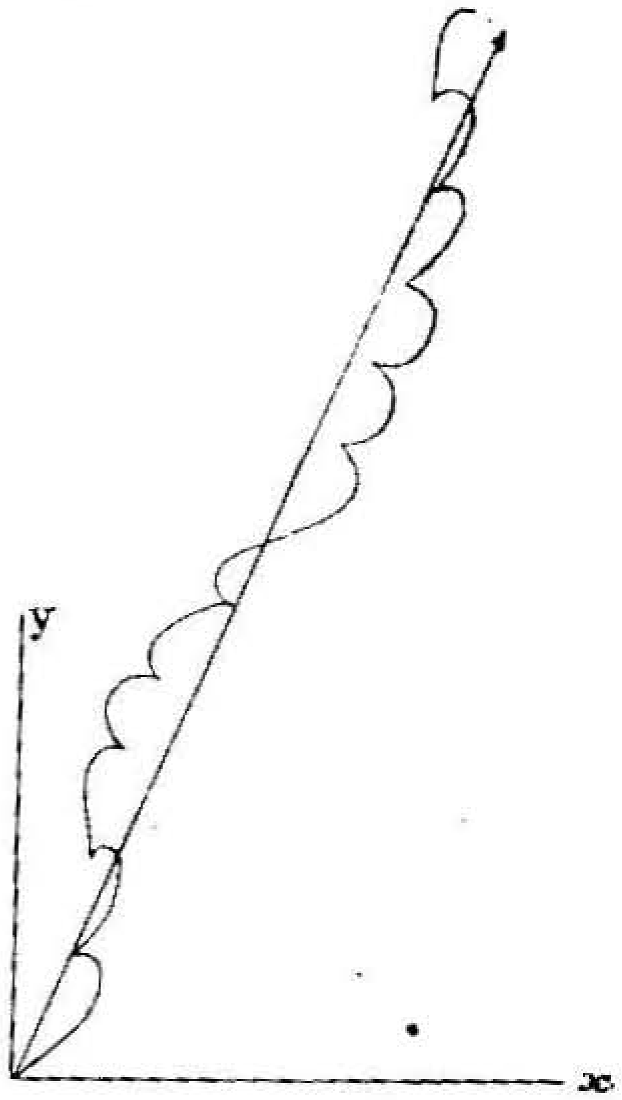
Варира на исти начин као и параметар ψ, само са том разликом што му је рашћење, у опште, много брже, а осцилације око праве *M* спорије. Дијаграм има облик слике 6.

Симултане варијације параметара x и y чине да путања, коју описује врх чигре у хоризонталној равни у којој се креће, има облик линије која, гледана из далека, изгледа као права. Гледана мало изближе, она има облик синусне линије која осцилује око горње праве. Међу тим, тачније посматрање показује да је та крива компликованија: она варира између двеју линија синусног облика са



Сл. 6.

једнаким периодама, а различних амплитуда, додирујући ону чија је амплитуда већа, а стојећи управно на оној чија је амплитуда мања, тако, да је у тој тачки повратна тачка саме путање. Облик путање представљен је сликом 7.



Сл. 7.

В) **Квантитативна дескрипција.**

Означимо са $u(t)$ функцију добијену инверсијом интеграла

$$dt = \int \frac{du}{\sqrt{U}}$$

где је краткоће ради стављено

$$U = \frac{Mu^2 + N}{Au^3 + Bu^2 + Cu + D}$$

и где су A, B, C, D, M, N константе. Закони варијација дескриптивних елемената x, y, o, ψ, φ у току времена биће тада представљени обрасцима облика:

$$x = bt + c\sqrt{1 - u^2} \cdot \cos\psi$$

$$y = nt + c\sqrt{1 - u^2} \cdot \sin\psi$$

$$\Theta = \arccos u$$

$$\psi = \int du \frac{K + Hu}{(L + Tu^2)\sqrt{U}}$$

$$\varphi = R - \int du \frac{H - Ku}{(L + Tu^2)\sqrt{U}}$$

где су b, c, n, k, K, H, L, T, · · · · константе.

Ови се закони могу заменити својим приближним облицима:

$$x = bt + c\sqrt{1 - u^2} \cdot \cos\psi$$

$$y = nt + c\sqrt{1 - u^2} \cdot \sin\psi$$

$$\psi = \alpha t + \beta \cos pt$$

$$\varphi = \gamma t + \delta \cos qt$$

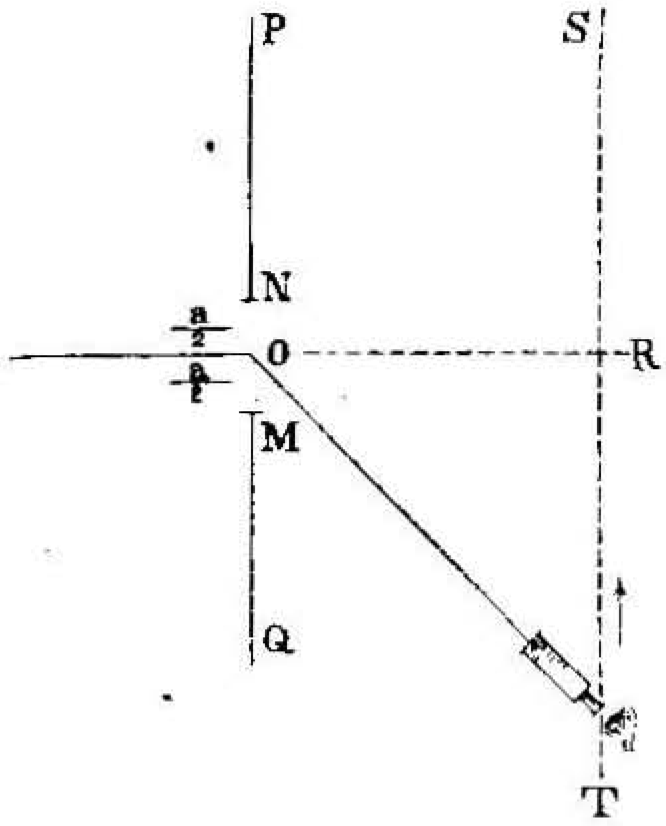
$$\Theta = \operatorname{arc}\cos u$$

где је:

$$u = \lambda + \mu \sin pt$$

и где су све количине, осим t, константе.[1]

II. Појава дифракције паралелне светлости.



Сл. 8.

Нека се пусти да један сноп паралелних светлосних зракова падне управно на заклон *PQ* са једним врло уским, а врло дугачким отвором *MN*. Нека се замисли да је на тај отвор управљен доглед, који се креће у равни управној на заклону тако да непрестано при томе кретању буде управљен на отвор а да се, међу тим, око посматрача при томе кретању непрестано помера једнаком брзином дуж праве *ST* паралелне са заклоном. Посматрач ће, гледајући кроз такав покретан доглед, видети осветљен отвор, али ће се и јачина осветлења и боја непрекидно мењати у току кретања догледа.

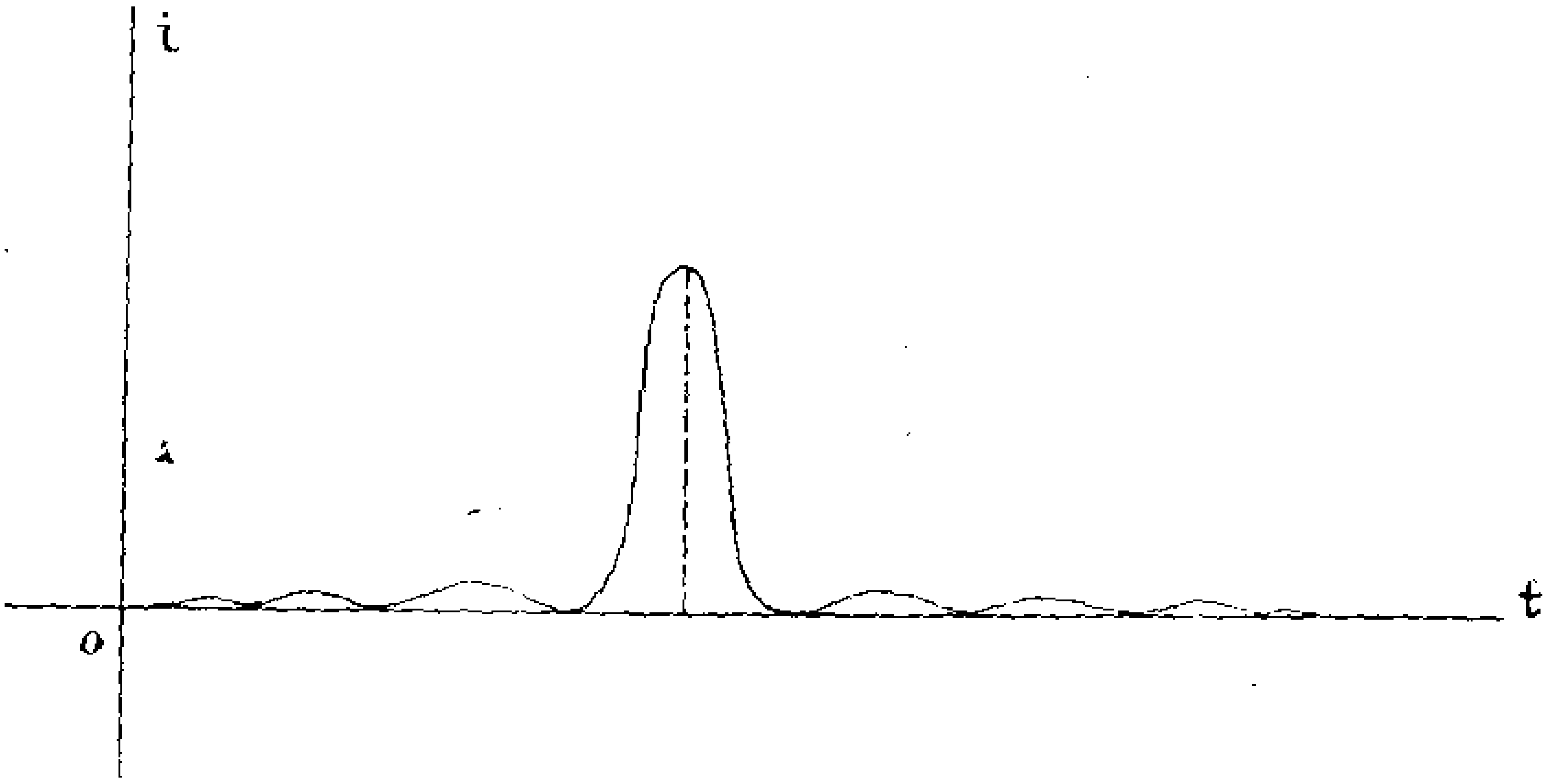
А) Квалитативна дескрипција.

У случају, кад је светлост монохроматична, појава ће се састојати само у променама осветлења. Као дес-

---

[1] Klein u Sommerfeld: Ueber die Theorie des Kreisels, II. III; Graindorge: Cours de Mécanique analytique t. II.

криптивни елеменат појаве сматраћемо јачину осветљења (параметар *i*) који ће се у току појаве мењати на овај начин: претпоставимо да померање ока почиње од једнога положаја *T*, а да се врши у правцу стрелице. Ако је почетни положај *T* ока такав, да се правац *TO* довољно разликује од правца *NR* зрака, отвор ће изгледати неосветљен. У даљем току померања појавиће се прво једно врло слабо осветлење, које ће јачати, достићи један врло слаб максимум почевши од кога ће опет слабити и нестаће га. За тим ће се опет јавити слабо осветлење које ће поступно јачати, достићи један максимум, јачи од првог, и од тада се опет поступно гасити, исчезнути, опет се појавити и т. д., показујући један низ максимума и нестајања. Ти су максимуми све јачи до једног извесног тренутка, почевши од кога они постају поступно све слабији, док се осветлење најпосле поступно са свим не угаси. У тренутку, у коме максимум јачине осветлења достиже свој најјачи максимум, отвор је веома интензивно осветљен, много интензивније но код осталих максимума, како пре њега, тако и после њега, који су веома слаби према њему и који врло брзо слабе при померању на једну



Сл. 9.

и другу страну од *R*. Крива линија, која преставља ток дескриптивног елемента *i*, има облик слике 9.

Ако је, на место монохроматичне, узета сунчана светлост, мењаће се при померању догледа не само јачина осветлења, већ и сама боја: видно ће поље бити колорисано на разне начине и имаће облик спектра, у коме ће на једном крају бити црвена, а на другом љубичаста боја, и то тако, да је љубичаста увек ближа правцу *OR* упадних зракова.

В) Квантитативна дескрипција.

Закон варијације дескриптивног параметра *i* у току времена *t*, рачунатог од тренутка кад је око у почетном положају, престављен је обрасцем:

$$i = A\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \tag{10}$$

где је:

$$u = \frac{B + Ct}{\sqrt{1 + (M + Nt)^2}}$$

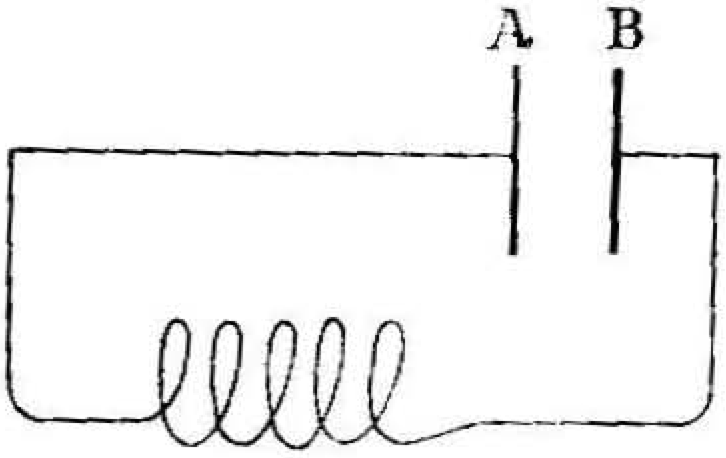
и где су *A*; *B*, *C*, *M*, *N* константе које зависе: од ширине отвора на заклону; од брзине померања ока; од растојања заклона од праве *ST*; од почетног растојања ока од отвора и од таласке дужине посматране светлости. Константе су *A*, *M*, *N* независне од таласке дужине, а константе *B* и *C* су обрнуто пропорционалне тим дужинама. Прве три константе остају, дакле, исте за све боје, а *B* и *C* се мењају од једне боје до друге.

Јачине осветлења у тренутцима, што одговарају максимумима осветлења, добијају се кад се у обрасцу (10) смењује *u* узастопним коренима једначине

$$u - \tan g\, u = o$$

Ако се јачина осветлења у тренутку, кад се око налази у положају *R*, узме за јединицу, први максимум пре и после тога тренутка има за вредност око 0,050; други вредност око 0,018; трећи вредност око 0,009 и т. д.

III. Појава испражњавања електричног кондензатора.



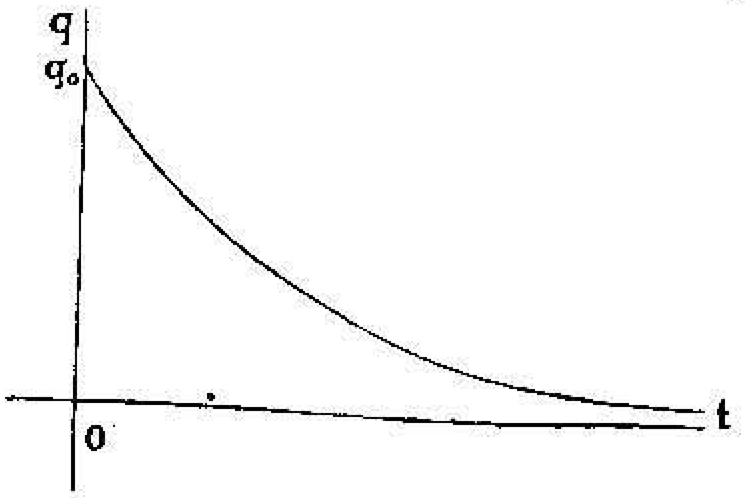
Сл. 10.

Кад се арматуре једнога електричног кондензатора, напуњене одређеним количинама позитивног и негативног електрицитета, вежу међу собом проводном жицом (за чији ће се капацитет претпоставити да је занемарљив), кондензатор се одмах почиње испражњавати. Испражњавање није тренутно; за време, за које оно траје, кроз спроводну жицу креће се електрицитет у облику струје испражњавања, чија се и јачина и смисао мењају од једног тренутка до другог. Појава у једним случајевима има осцилаторни карактер; у другима је континуална, без осцилација. Које ће од тога двога бити, зависи од релативних величина физичких констаната кондензатора и жице.

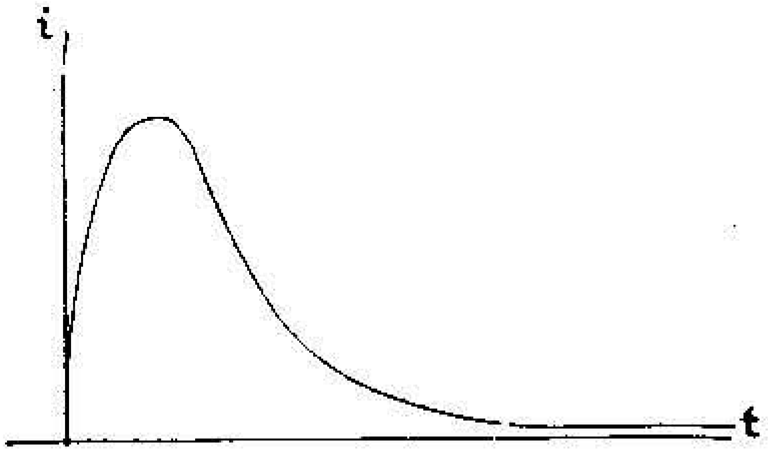
Дескриптивни елементи појаве могу бити: електрично оптерећење кондензатора (параметар *q)* или јачина струје (параметар *i)* што пролази кроз жицу у току испражњавања (струја испражњавања). Јачина ће се сматрати као позитивна онда, кад струја постаје смањивањем електричног оптерећења кондензатора.

A) Квалитативна дескрипција.

У случају континуалног испражњавања параметар *q*, почевши од једне почетне вредности q_0, опада стално до нуле, којој тежи као својој асимтотној вредности. Диаграм има облик слике 11, где је *ot* асимтота криве линије. — Параметар *i* полази од вредности *o*, почиње нагло расти, достиже извесан максимум и од тада стално опада до нуле, којој асимтотно тежи. Дијаграм је представљен сликом 12, где је ot асимтота.

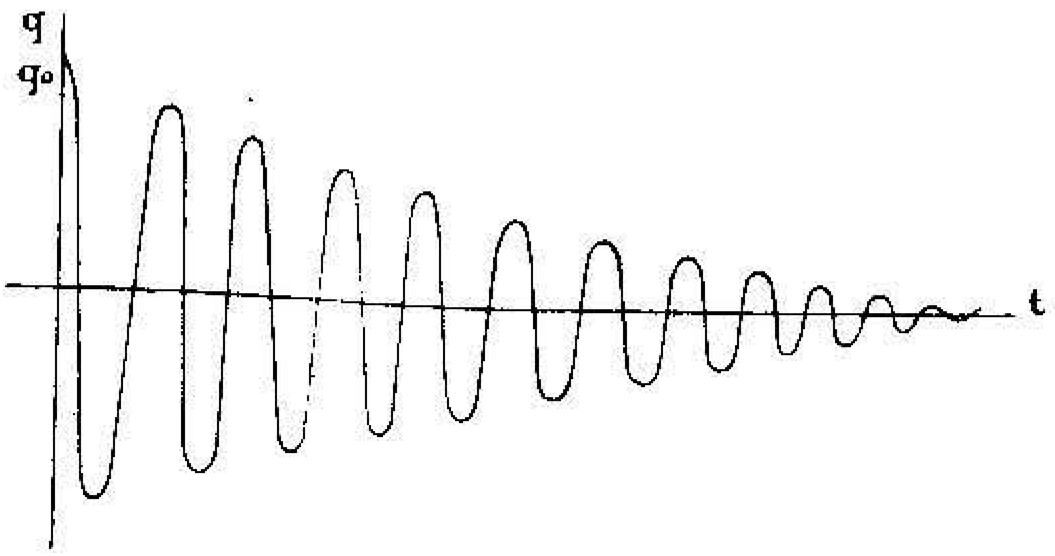


Сл. 11.



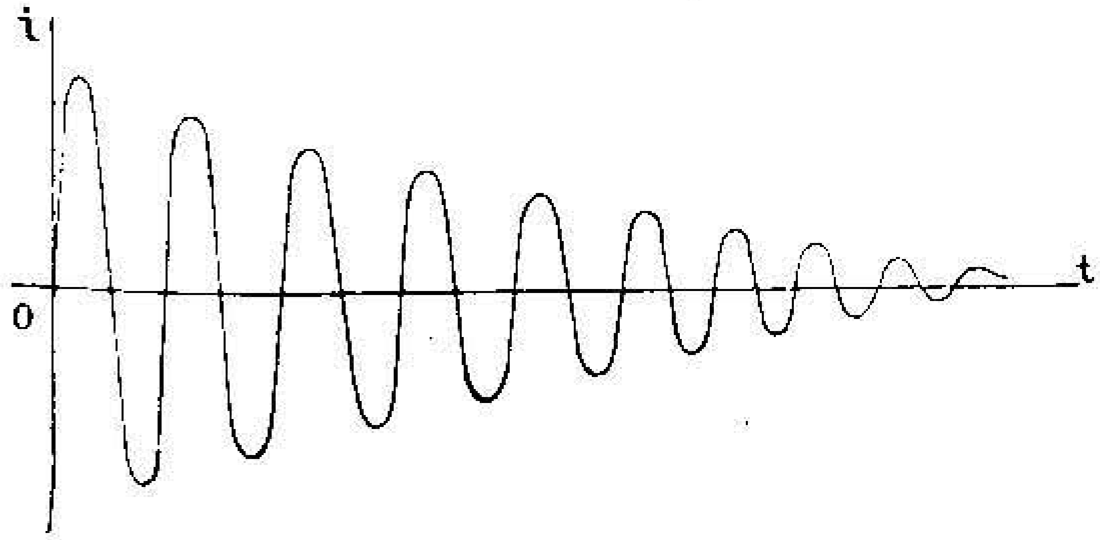
Сл. 12.

У случају осцилаторног испражњавања параметар q, почевши од једне почетне вредности q_0, опада, постаје раван нули, за тим негативан, достиже један негативан минимум; за тим расти, постаје поново раван нули, достиже један позитиван максимум после кога опет опада и т. д. Наизменични максимуми и минимуми непрестано су све мањи у току времена и теже нагло нули (сл. 13).



Сл. 13.

Параметар i у почетку је раван нули, за тим расти до извесног позитивног максимума, после кога опада до нуле, постаје негативан, достиже један негативан минимум и т. д. као и параметар q (сл. 14.).



Сл. 14.

Варијације оба параметра састоје се, дакле, у једноме низу амортизираних осцилација око вредности нуле, којој они поступно теже и на коју се своде после извесног времена: од тога тренутка испражњавање је кондензатора довршено.

B. Квантитативна дескрипција.

У случају континуалног испражњавања узастопна стања параметра q могу се резимирати обрасцем облика

$$q = ae^{a_1 t} + b\, e^{a_2 t}$$

а узастопна стања параметра i обрасцем облика

$$i = k\, e^{a_1 t} + h\, e^{a_2 t}$$

где су a, b, k, h, α_1, α_2 константе за један исти кондензатор и исту жицу.

У случају осцилаторног испражњавања обрасци су облика:

$$q = e^{-at}(A \cos \beta t + B \sin \beta t)$$

$$i = C\, e^{-at} \sin \beta t$$

где су A, B, C, β, α, константе за исту жицу и исти кондензатор. Узастопни максимуми и минимуми опадају као чланови једне опадајуће геометриске прогресије. Осцилације су правилне и имају као сталну периоду

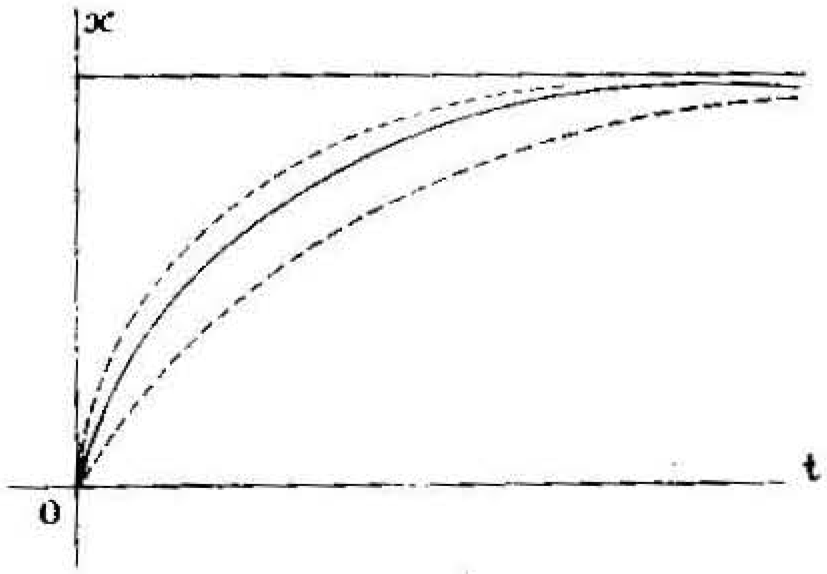
$$T = \frac{2\pi}{\beta}$$

IV. Поступна хемиска трансформација у мономолекуларним реакцијама.

Нека се претпостави да каква течност L мења поступно свој хемиски састав под утицајем каквога физичког узрока (н. пр. светлости, електрицитета и т. д.) или каквог фермента, распадајући се н. пр. на *n* продуката $P_1, P_2, \cdots \cdot P_n$, где у опште x_k представља количину продукта P_k у посматраноме тренутку.

А. **Квалитативна дескрипција.**

Ако је температура реакције стална за све време трајања појаве, сваки од параметара x. почевши од вредности $x = x$, поступно расте, и то најбрже у почетку реакције, а за тим све спорије, тако, да после извесног времена то рашћење постаје неосетно и x задржава од тада једну сталну вредност. Крива, што представља ток тога елемента, има једну асимптоту паралелну осовини *ot* и престављена је сликом 15.



15.

Ако се температура мења у току реакције, имаће се опет крива истога облика, али у неколико деформисана: она ће лежати изнад или испод горње криве, према томе да ли температура расте или опада за време реакције.

В. **Квантитативна дескрипција.**

Сваки од параметара x, кад је температура T реакције стална. мења се у току времена по закону облика

$$x = a\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$$

где су a и λ позитивне константе, тако да израз

$$\frac{1}{t}\log\frac{a}{x-a}$$

задржава сталну вредност за све време трајање појаве.

Ако је температура T променљива у току реакције, тако, да се T мења са временом по закону облика

$$T = \Theta(t)$$

параметар x мењаће се у току времена по закону облика:

$$x = a\left[1 - e^{\varphi(t)}\right]$$

где је:

$$\varphi(t) = -\mu \int_0^t \theta_k \, e^{\frac{h}{\theta}} \, dt$$

где су a, μ, k, h константе[1]).

V. Појаве гастричног хемизма у организму.

Испитујући гастричну течност у разним тренуцима за време варења, Winter је константовао извесне правилности у поступном мењању њеног хемиског састава у току варења, као резултат физиолошких процеса што се тада дешавају. Ограничимо се на промене гастричног сока искључиво у погледу хлорних елемената у разним фазама варења.

Хлор, који се у једноме датом тренутку налази у томе соку, може се јављати: 1° у облику слободне хлороводоничне киселине; 2° у облику анорганских хлорида; 3° у облику органских хлорних деривата.

Узмимо за дескриптивне елементе:

1° целокупну количину хлора (параметар u_1),

2° количину хлора сједињену у анорганским хлоридима (параметар u_2),

3° количину хлора сједињену у хлороводоничној киселини (параметар u_3),

4° количину хлора сједињену у органским хлорним једињенима у 100^{cc} гастричног сока (параметар u_4).

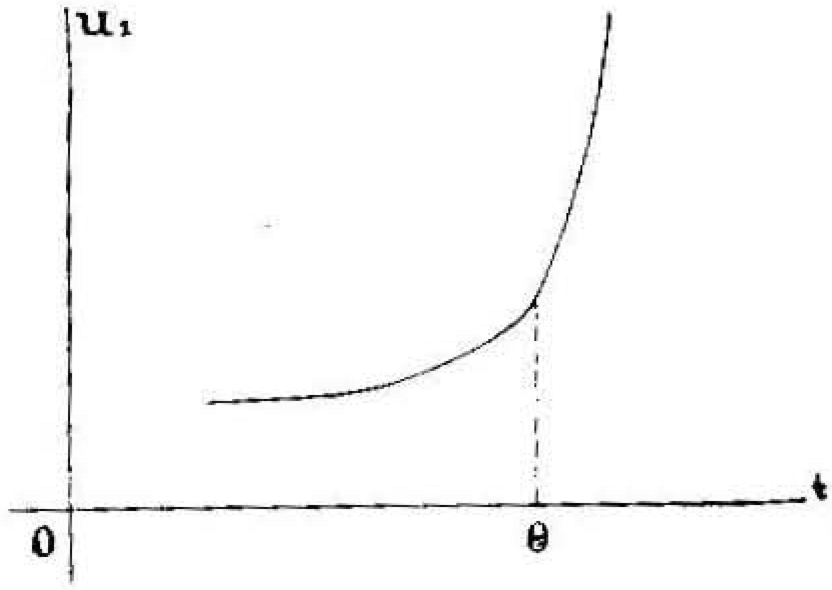
---

[1]) **Мих. Петровић**: Прилози **хемиској кинетици** [Глас Срп. Краљ. **Акад.** 57].

У приликама, у којима су вршени експерименти, констатовано је, да се u_1, u_2, u_3, u_4 мењају у току варења на начин, који је овде описан.

А. **Квалитативна дескрипција.**

1° *Параметар* u_1.

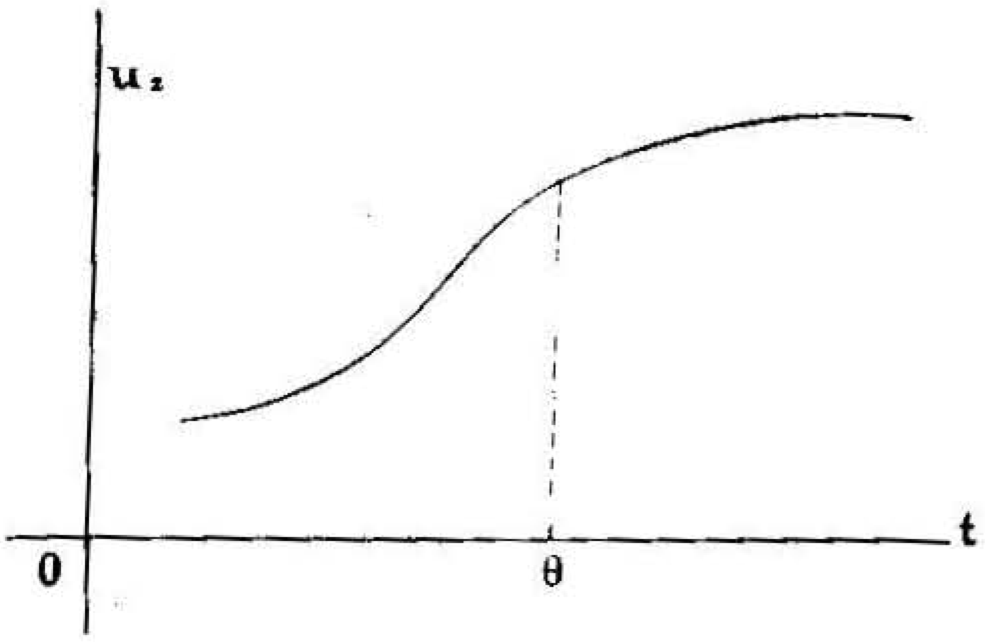


Сл. 16.

Чим почне варење, u_1 почиње расти и стално расти за све време појаве. После извесног времена θ рашћење од једном почиње бивати брже но до тада, тако да на томе месту крива, која има облик слике 16., показује прелом.

2° *Параметар* u_2

Расти непрестано од почетка појаве па до краја, али после времена θ, истог као и код параметра u_1, рашћење од једном почиње бивати спорије но до тада. Крива, која има облик слике 17., има прелом на томе месту. Почевши од тога тренутка, лук се криве приближно поклапа са правом линијом.

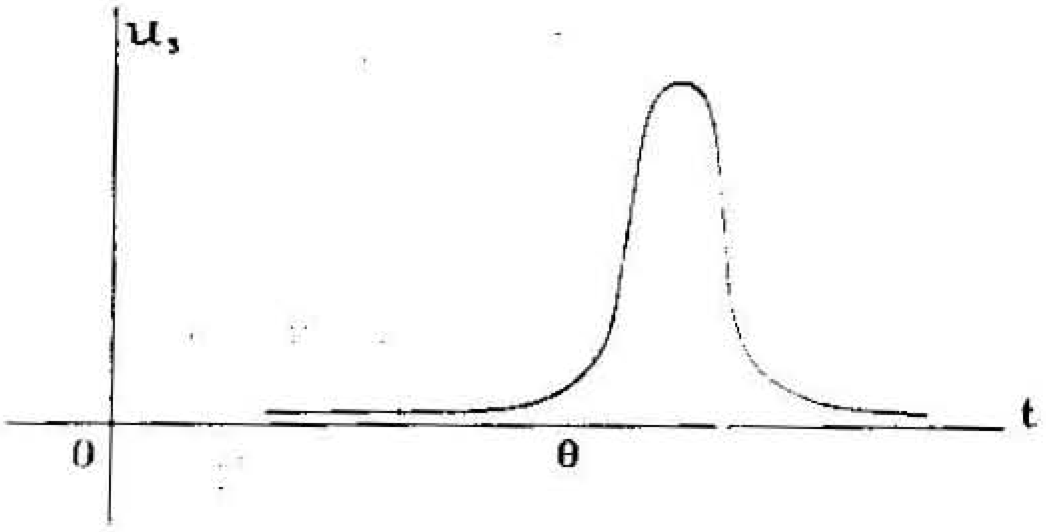


Сл. 17.

3° *Параметар* u_3.

Од почетка појаве, па све до тренутка θ, вредност је u_3 врло приближно равна нули. Од тренутка θ параметар u_3 почиње веома нагло расти, достиже један знатно велики максимум, после кога доста нагло, али ипак спорије но што је пре тога растио, опада до нуле. Крива такође показује прелом у том тренутку.

4° *Параметар u_4.*



Сл. 18.

Крива је истог облика као сл. 1. само са овом разликом: у почетку је рашћење спорије но код параметра u_1; почевши од једног тренутка θ', после тренутка θ, рашћење је брже но код u_1. Крива линија ту показује прелом.

B. **Квантитативна дескрипција.**

Квантитативном анализом гастричног сока у разним тренутцима варења, у приликама у којима је вршио експерименте, Winter[1]) је констатовао ове величине параметара u_1, u_2, u_3, u_4 за време трајања појаве, где t значи размак времена од почетка појаве, рачунат у минутама, и где су вредности параметара изражене у милиграмима садржаног хлора у 100_{cc} гастричног сока:

t	u_1	u_2	u_3	u_4
7	58,4	36,8	0	11,6
14	73,0	58,4	0	14,6
21	83,9	65,7	0	18,2
28	94,9	69,3	7,9	17,7
60	169,0	76,6	38,0	54,4
124	299,0	94,9	0	204,1

---

[1]) Winter: Lois de l'evolution des fonctions digestives [Comp. rend. t. 117. 1893. p. 65.—68.].

Преглед ових бројних података показује да се у кинетичком току појаве могу разликовати две, једна од друге различне, фазе и да се у свакој од њих начин варијације дескриптивног елемента може резимирати овим приближним емпиричким обрасцима:

Прва фаза: од почетка појаве до тренутка $\theta = 24$ минута:

$$u_1 = 30\ t^{\frac{1}{3}}$$

$$u_2 = 24\ t^{\frac{1}{3}}$$

$$u_4 = 6\ t^{\frac{1}{3}}$$

За све време, док се појава налази у овој фази, постоји пропорционалност између одговарајућих вредности параметара u_1, u_2, u_4.

Друга фаза: од тренутка $\theta = 24$ мин. до краја појаве

$$u_1 = 8\ t^{\frac{3}{4}}$$

$$u_2 = 63,78, + 0,2383\ t$$

$$u_4 = 0,136\ t^2$$

Пропорционалност између вредности параметра престаје.

У обема фазама вредности су параметара везане непромењивом релацијом:

$$u_1 - u_2 - u_3 - u_4 = o$$

према којој u_3 у првој фази има за вредност нулу, а у другој вредности дате горњом таблицом.

Тренутак се θ, у опште, поклапа са појавом елемента u_3, или бар никад није пре појаве тога елемента.

VI. Шематска дескрипција тока једне болести.

Једна одређена болест састоји се у нарочитим модификацијама органа и органских функција, које се у великом броју случајева састоје у променама недогледнога броја познатих и непознатих елемената. Међу тим, обично се у таквој маси елемената може уочити један ограничен број њих, који су нарочито карактеристични за болест што се мисли описати и чије варијације, кад су описане, довољне су да бар у овлашним цртама илуструју ток болести у једноме одређеном размаку времена.

Тако су н. пр. грозничава стања, која прате велики број болести, дефинисана у свом развитку непрегледном масом елемената, од којих би једни карактерисали термичне промене у организму, други промене у органима за дисање, трећи промене у функционисању органа за крвоток или функционисању органа за секрецију, промене у нервном систему и т. д. Међу тима, пак, елементима нарочито се истичу својом важношћу њих неколико, у чијем се начину варијације огледа, бар у главним потезима, слика начина на који се у једном датом конкретном случају морбидно стање развијало. Такви би н. пр. елементи били: они што дефинишу термично стање организма (температура, параметар θ), респирацију (број респирација у једној минути, параметар r), и пулс (број удара у минути, параметар p).

Начин варијације тих елемената у грозничавом стању, које је пратило пнеумонију једнога одређеног пацијента, одређен је квалитативно и квантитативно на овај начин[1]:

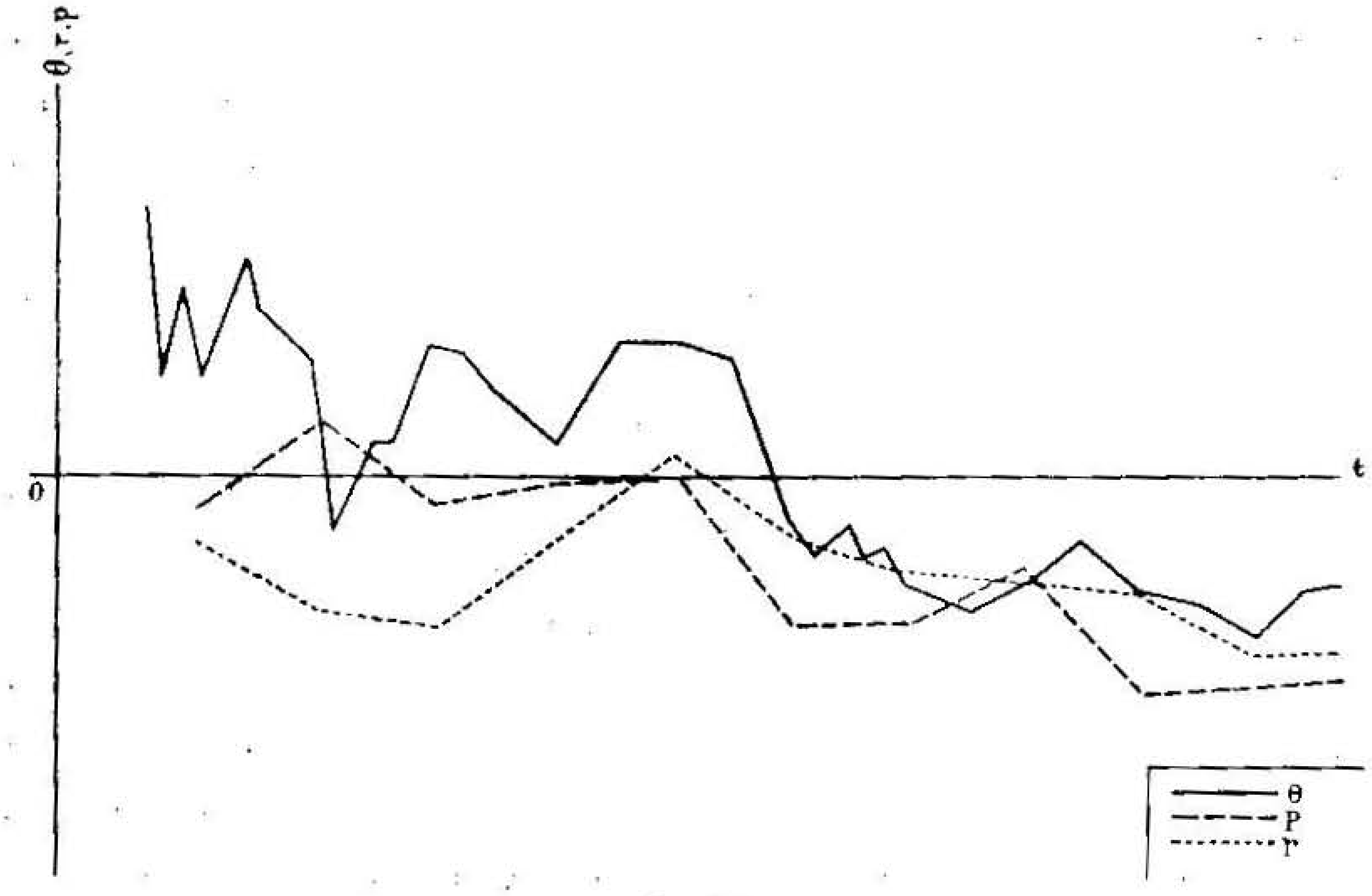
А. Квалитативна дескрипција.

Сваки од параметара показује по једну неправилну сункцесију рашћења и опадања, која су најјача у време

---

[1] Deutsche Klinik Bd. II. S. 245.

кад је болест била акутна и која су све више слабила у колико се повраћало нормално стање у организму. Максимуми и минимуми су у првој, акутној, фази болести, већином изнад прве линије што одговара нормалном стању; у другој фази, у којој болести поступно нестаје, они су испод те линије. Начин варијација представљен је кривим линијама на слици 19.



Сл. 19.

В. **Квантитативна дескрипција.**

Квантитативне појединости начина, на који су горњи дескриптивни елементи варирали за време трајања појаве, види се из ових бројних података, који им представљају њихове величине за то време (јединица мере времена *t* је размак времена од три часа).

t	θ	p	r
0	41,3	—	—
1	39,3	—	—
2	40,3	—	—

t	θ	p	r
3	39,3	112	45
6	40,7	120	39
7	40,1	121	38
11	39,5	133	35
12	38,7	132	34
13	37,5	131	34
14	37,8	131	33
15	38,5	125	32
16	38,5	120	36
19	39,7	113	32
21	39,6	116	34
23	39,0	117	37
28	38,5	118	43
32	39,7	119	48
35	39,7	120	53
36	39,7	116	51
39	39,5	105	48

◆

II. Елементи за аналитичку дескрипцију.

Геометриски и кинетички елементи појаве. — Дескриптивни системи и њихове конфигурације. — Фигуративна тачка система. — Трајекторија система. — Ток појаве. — Интензитет појаве. — Брзина модификација, њени коефицијенти правца и њен смисао. — Акцелерација појаве. — Стационарна стања у појави. — Тоталитет једнога елемента. — Тоталитет појаве. — Редукција дескрипције појаве на дескрипцију кретања фигуративне тачке њеног дескриптивног система.

Шематској дескрипцији појаве може се дати још један облик, униформан за све врсте појава, и који чини могућном непосредну примену математичке анализе на проучавање појава.

Геометриски и кинетички елементи појава. Скуп:

$$(u_1, u_2, \cdots u_n)$$

дескриптивних елемената појаве зваћемо њеним *дескриптивним системом*. Скуп вредности самих елемената:

$$u_1. u_2, \cdots u_n$$

у једном датом тренутку саставља *конфигурацију* система у томе тренутку. Конфигурација система у тренутку t представља његово *стање* у том тренутку.

Једна конфигурација дефинише у n-димензионалном простору једну тачку M, чије координате имају за вредност величине $u_1, u_2, \cdots u_n$, што одговарају тој конфигурацији. Та ће тачка бити названа *фигуративном тачком* њеног дескриптивног система. Сукцесивни низ конфигурација, кроз које систем пролази у току појаве, састављa *трајекторију* система за то време: то је линија коју описује тачка M у n-димензионалном простору (M) за време појаве.

Трајекторија ће бити *геометриски* позната, ако се за једну произвољну тачку на њој знају координате $u_1, u_2, \cdots u_n$ као функције једног, ма каквог, параметра λ, тако, да је н. пр.:

$$u_1 = f_1(\lambda)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$u_n = f_n(\lambda)$$

Трајекторија ће, пак, бити и *геометриски* и *кинетички* позната, ако се овај параметар λ поклапа са самим временом t. *Током појаве* зваћемо начин кретања тачке M по трајекторији. Он ће бити познат ако у горњим једначинама улогу параметра λ игра само време. *Брзина промене* елемента u у тренутку t представљена је вредношћу извода $\frac{du}{dt}$ у том тренутку. *Интензитет* појаве у датом тренутку t дефинисан је брзином тачке M по трајекторији. Она је мерило величине целокупне промене у систему у датом бескрајно малом размаку времена, што непосредно долази иза тренутка t. Ако су се за то време координате $u_1, u_2, \cdots u_n$ промениле за $du_1, du_2, \cdots du_n$, нове ће вредности координата $u + du_1$, $u_2 + du_2, \cdots$ дефинисати једну тачку M'. Брзина тачке M добија се кад се растојање MM' подели са dt, а пошто је:

$$MM' = \pm \sqrt{du^2_1 + du^2_2 + \cdots + du^2_n}$$

то ће брзина тачке M имати за вредност:

$$v = \pm \sqrt{\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{du_n}{dt}\right)^2} \tag{11}$$

Правац брзине тачке *М* одређен је низом коефицијената

$$\mu_i = \frac{u'_i}{v} \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

(који ће бити названи *коефицијентима правца брзине*), а *смисао* те брзине знаком који буде придат величини v у обрасцу (11). Приметимо да је брзина појаве у случају једног параметра равна угаоном коефицијенту дирке на трајекторији (брзина транслаторног и ротаторног кретања, брзина хемиске реакције, интензитет струје и т. д.). Брзина промене интензитета појаве у тренутку t дефинише *акцелерацију* појаве у том тренутку. То је у исто време акцелерација тачке *М*. Ако се за време dt, одмах за тренутком t, координате тачке M' промене за: d^2u_1; $d^2u_2, \cdots d^2u_n$, скуп нових координата:

$$u_1 + du_1 + d^2u_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_n + du_n + d^2u_n$$

дефинише једну тачку M''. Акцелерација тачке *М*, па дакле и акцелерација појаве, добија се, кад се растојање $M'M''$ подели са dt^2; то ће дакле бити:

$$a = \sqrt{\left(\frac{d^2u_1}{dt}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{d^2u_n}{dt}\right)^2}$$

За једну ће се појаву казати да се почевши од једног одређеног тренутка t налази у *стационарном стању*, ако се, почевши од тога тренутка, елементи више не мењају у току времена. Конфигурација, коју од тада систем стално задржава, дефинише то стање. У таквом су стању како брзине и убрзања промена појединих елемената, тако и брзине и убрзања тачке M равни нули. Тако исто и за поједине елементе: $u_1, u_2, \cdots u_n$ казаће се да су у стационарном стању, ако су им брзине и убрзања промена, почевши од једног одређеног тренутка, равни нули.

Под *тоталитетом елемента* u у датом размаку времена (t_1, t_2) разумеће се вредност одређеног интеграла:

$$\xi = \int_{t_1}^{t_2} u\, dt$$

Ако су $\xi_1, \cdots, \xi_n$ тоталитети елемената $u_1, \cdots u_n$ у размаку времена (t_1, t_2), систем

$$(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n)$$

има ту особину, да је брзина тачке, коју он представља, равна одстојању одговарајуће тачке M од почетка.

Под *тоталитетом појаве* у размаку времена (t_1, t_2) разумеће се одстојање одговарајуће тачке $N(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n)$ од почетка. Он је дакле представљен изразом

$$s = \sqrt{\xi^2_1 + \cdots + \xi^2_n}$$

Тоталитет елемента u у размаку времена (t_1, t_2) представља површину, на диаграму елемента u, ограничену осовином Ot, луком криве линије $u = f(t)$ и двама ординатама што одговарају апцисама t_1, t_2. При транслаторном кретању, кад је елеменат u брзина транслације, улогу тоталитета игра пређени пут. Ту исту улогу игра обртни угао у ротаторном кретању према угловној брзини. При кретању клатна, при вибрисању еластичне шипке, при вибрацијама етра из којих резултују светлосне појаве, улогу тоталитета према брзини осцилација или вибрација игра елонгација. Ту исту улогу игра количина електрицитета, мерена количином разложенога електролита, према јачини струје, или количина светлости, садржане у једном снопу светлосних зракова, према флуксу снопа, или количина топлоте, потребна да једном телу повиси температуру на одређен број степени, према специфичкој топлоти тела, или количина течности која се гомила истицањем кроз какав отвор, према брзини истицања или количина продукта хемиске реакције наспрам брзине реакције, или количина дестилата наспрам брзине дестилације и, у опште, количина резултата једнога процеса ма какве конкретне врсте наспрам брзине тога процеса и т. д.

Трајекторија система представља *геометриске елементе*, а конфигурација система у датом тренутку, брзина промена појединих елемената, интензитет појаве и тоталитет појединих елемената *кинетичке елементе* појаве.

Кад је познат кинетички ток појаве, из њега се на прост начин изводе сви елементи, и геометриски и кинетички. Ток ће међу тим бити познат, кад је познат закон кретања одговарајуће фигуративне тачке система у току појаве. Према томе *дескрипција једне појаве са n дескриптивних елемената у свима њеним појединостима своди се на дескрипцију кретања фигуративне тачке њеног дескриптивног система у n-димензионалном простору.*

◆

ДРУГА ГЛАВА

МЕХАНИЗМИ ПОЈАВА.

I. Елементи за шематску дескрипцију.

Улога, аналогија улога, језгро аналогије. — Активне улоге, активитет, тежња, утицај, јачина узрока. — Пасивне улоге. — Улоге импулсивних, појачавајућих узрока; улоге депресивних, антагонистичких узрока; улоге активних и реактивних узрока. — Специјалније врсте улога: улога изазивача, улога тренутних узрока, координативне улоге, регулаторске улоге, улоге терена, улоге веза, улоге препрека. — Квантитативне и квалитативне аналогије улога. — Природа и шематисање улога. — Шематисање механизма појава. — Сличност састава механизма.

Свака одређена промена *(δ)* сматра се као неминовна последица стицаја каквог одређеног скупа *(о)* прилика, које је безусловно изазивају, тако, да се та промена, таква каква је, увек јавља кад је остварен стицај тих прилика. Тај се стицај сматра тада као *узрок* промене *(δ)*.

За све што улази у састав скупа *(о)*, што узима удела у јављању промене *(δ)* и што не може изостати или се изменути, а да се тиме не измени и сама та промена, каже се да *игра одређену улогу* у јављању те промене. Улога се тада састоји у начину на који уочени део скупа *(о)* суделује у јављању промене *(δ)*. Под узроком, дакле, једне појаве, као скупа одређених промена, има се разумети стицај свега онога што игра какву улогу у јављању тога скупа промена.

За две улоге у једној истој појави, или у двама разним појавама, казаће се да су *сличне*, ако у одговарајућим појединостима, у којима се оне састоје, има један скуп *(е)* заједничких факата. *Аналогија улога*, коју собом повлачи егзистенција скупа *(е)*, а који ће скуп бити назван *језгром аналогије*, биће више или мање потпуна према обиму, одређености и важности онога што је у језгру садржано. Та три елемента одређују *степен аналогије*, према коме се могу имати сви поступни прелази од најудаљенијих сличности до потпуне истоветности улога.

Тако, приближавање једног магнета чини да се једна гвоздена шипка, обешена о какав конац, непомична пре тога присуства, почне кретати. Додавање сумпорне киселине каквоме раствореном карбонату мења поступно хемиске и физичке особине раствора. Уношење бацила у организам изазива у овоме промене којих пре тога није било. Сви ти скупови прилика: присуство магнета, сумпорне киселине, бацила, играју у одговарајућим појавама међу собом сличне улоге *(активне улоге; улоге узрока)*; језгро се аналогије састоји у заједничком факту да такви скупови импозирају промене одређеним елементима појава. Ради лакшег схватања ових промена свакоме се таквом скупу приписује извесан *активитет*; овај се састоји у једној одређеној *тежњи, којој се придаје извесна јачина*, која се замишља као привлачна сила, одбојна сила, покретачка моћ, пертурбациона моћ, утицајна тежња, модификаторска тежња, деструктивна моћ и т. д. и чија се *акција* или *утицај* огледа у модификацијама што их стицај скупа прилика, којима је она приписана, намеће одређеним елементима. За сам узрок, као и за придати му активитет, каже се да је *јачи* или *слабији* према томе да ли је та тежња јача или слабија. Сам се узрок често идентификује са овим фиктивним елементом, тежњом.

Језгро аналогије између улога таквих скупова свело би се тада на сам факт егзистенције такве тежње.

Дескриптивни елементи појава свих врста играју такође међу собом сличне улоге *(пасивне улоге)* и језгро је аналогије у томе, што су они сви носиоци промена у одговарајућој појави.

Скупови *(о)*, чији стицај повлачи собом рашћење параметра, везаног за један дескриптивни елеменат појаве, играју међу собом сличне улоге и језгро аналогије састоји се у импозирању тога рашћења *(улоге импулсивних, појачавајућих узрока)*.

Скупови *(о)*, чији стицај повлачи собом опадање параметра, везаног за један дескриптивни елеменат, играју међу собом сличне улоге *(улоге депресивних, антагонистичких узрока)* и језгро се аналогије састоји у импозирању тога опадања.

При кретању једне материјалне тачке под утицајем какве привлачне или одбојне силе, а услед самих промена правца и брзине, јавља се једна тежња: сила инерције, које нестаје, или која се поново јавља кад тих промена нестане, или се поново јаве и која н. пр. у случају, кад се мења само брзина тачке, има час појачавајући, час депресивни карактер према томе, да ли у томе тренутку брзина опада или расти. У случајевима, кад се у кретању мења и правац, она је депресивног карактера и у толико јача, у колико су те промене јаче (центрифугална сила). — При кретању чврстих тела по каквој површини, саме промене положаја изазивају једну тежњу: отпор трења, кога нестаје или који се понова јавља са престанком или појавом кретања и који је увек депресивног карактера. — Таква је једна врста тежње отпор средине, који се јавља и при кретању чврстих тела кроз течне или гасовите средине. — Такве су врсте и тежње изазване спонтано, без утицаја других узрока, самим ефективним модификацијама у разновrсним другим појавама и које носе називе *отпора, реактивних, резистентних, амортизирајућих* и т. д. узрока и које се у сваком тренутку противе варијацијама одговарајућих елемената у ономе смислу, у коме се саме варијације у томе тренутку ефективно дешавају. Такви би н. пр. узроци били: отпор изазван индукцијом према Lenz-овом закону; еластични отпор при вибрацијама какве шипке или мембране; амортизујући отпор у великом броју појава (при осцилаторном испражњавању електричних кондензатора, при осцилацијама нивоа течности у савијеним цевима и т. д.); хемиски отпор при хомогеним хемиским реакцијама, пропорционалан концентрацији смеше по продуктима реакције; реактивни отпор који се јавља у ретини под утицајем светлосних зракова и нестаје га са нестанком ових; разне врсте реактивних отпора организма (отпор акцији микроба, хладноћи, разним надражајима и т. д.). Све такве тежње играју, у разним појавама, међу собом сличне улоге — *улоге реактивних узрока* — и језгро аналогије састоји се у факту, да се сваки такав узрок јавља услед самих модификација у одговарајућој појави и да га нестаје, или да се поново јавља, кад тих модификација нестане или се поново јаве, опирући се у сваком тренутку модификацијама онаквога смисла, какав ове буду имале у томе тренутку.

На против, привлачна или одбојна сила у динамичким појавама сматра се да ни у колико не зависи од егзистенције самих промена брзине или правца, а да би без ње такве промене биле и немогућне. — Исти је случај и са електричним или магнетним силама у физичким појавама. — Егзистенција трансформаторске тежње, која регулише брзине хемиских реакција, сматра се такође да је независна од егзистенције хемиских промена у посматраној смеши, а да без ње не би тих промена ни било. Све такве тежње играју, такође, међу собом сличне улоге *(улоге активних узрока)*; језгро се аналогије састоји у факту да такав један узрок импозира промене и да његова егзистенција ни у колико не зависи од егзистенције модификација које он изазива, а да, међу тим, без његовог присуства тих модификација не би било.

Како међу активним, тако и међу реактивним и пасивним улогама могу се, према разним појединостима садржаним у језгру аналогије што их обухвата, разликовати многобројне и разноврсне специјалније и одређеније улоге, на које се наилази у механизмима појава. Такве би н. пр. биле:

Улога изазивача (улога варнице у појавама изазваним експлозијом експлозивне смеше; улога покрета којим се затвара електрично коло у механичким или хемиским појавама које тиме буду изазване; улога светлости у извесним хемиским реакцијама; улога слабих, ништавних мотива који изазивају експлозије осећаја), где се језгро аналогије састоји у факту да фактор, за који је улога везана, изазива непосредно веома слабе модификације, које за тим, у врло кратком размаку времена, изазивају нагле и врло јаке модификације са потпуном диспропорцијом између величина једних и других модификација.

Улога тренутних узрока (улога механичког удара, наглог тренутног осветлења осетљиве плоче чуване ван домашаја светлости, тренутног затварања електричног кола у чијем се саставу налази једна електромоторна сила) са овим језгром аналогије: узрок врши своју акцију у толико кратком размаку времена, да су модификације, њиме непосредно изазване за само то време, неосетне.

Координативне улоге (улога магнетног поља при оријентацији једног система магнетних игала или гвоздених делића; улога координативне моћи у продукцији вољних аката; улога дисциплине у једној организованој друштвеној средини са нарочитим циљем) са језгром аналогије оличеним у факту да фактор, за који је везана једна таква улога, изазива модификације *оријентисане* на један одређен начин, у једноме одређеном правцу, према једном одређеном циљу и т. д.

Регулаторске улоге (улога центрифугалног регулатора при кретању парних махина; улога крила при ротационом кретању извесних машинских делова; улога регулатора на термостатима; улога Киповог апарата у продукцији водоника; улога минералних соли при регулисању осмотичког притиска у организму; улога гасних мехурића на површини акватичних организама у појавама њихове респирације), код којих се језгро аналогије састоји у факту да су модификације, што их фактор, за који је улога везана, у сваком тренутку импозира, онаквог смисла и онолике јачине, како је потребно да се ефективне модификације, објекат такве регулаторске улоге, одржавају у једноме датом размаку времена непрестано у одређеним врло уским границама.

Улога терена (улога распореда масе при распростирању једнога термичног или електричног стања; улога општег стања једног организма изложеног деструктивној акцији бацила; улога опште политичке ситуације у једној земљи, општег расположења у једној епоси, општег карактера једне личности; улога земљишта у борби, улога средине у којој се дешавају посматрани догађаји), где се језгро аналогије састоји у егзистенцији једнога скупа прилика, у којима посматрани узрок врши своју акцију на једноме одређеном објекту, а који скуп чини да је та акција за један исти узрок и један исти објекат осетнија или неосетнија.

Улоге веза, код којих се језгро аналогије састоји у томе, да оно, за што је везана улога, импозира *ограниченост* извесних модификација, у томе смислу, да промене једнога скупа елемената повлаче саме собом, без утицаја других узрока, промене другога једног скупа елемената, али тако, да одређене, у осталом произвољне, промене првих повлаче или потпуно одређене промене других, или такве промене, које се могу кретати само у одређеним границама. Везе су квантитативне или квалитативне природе према томе да ли се зависност између једних и других модификација може изразити математичким релацијама или не. У првоме случају те релације имају облик једначина (веза између варијација притиска и запремине гасова, исказана Mariotte-овим законом; веза између варијација брзине истицања течности и висине течног стуба, исказана у Toricelli-евом закону; везе исказане законима одржања материје, електрицитета, запремине нестишљивих тела, ентропије; везе исказане Kirchhoff-љевим законима гранања струје; везе при кретању тачке по утврђеној површини или линији, при обртању чврстог тела око утврђене тачке или осовине; везе у хемиским релацијама, које се састоје у пропорционалности између количина образованих продуката реакције и утрошених количина реагенаса), или облик неједначина (унилатералне везе при транслаторним или ротационим кретањима, или у појавама хемиске динамике) и повлаче собом квантитативне појединости у низу промена њима обухваћених елемената. — У другоме случају оне повлаче собом само квалитативне појединости у томе низу промена, као што су: заједнички смисао симултаних варијација неколико елемената, симултано убрзавање или успоравање рашћења или опадања таквих елемената, или само факт да појава варијација једне групе елемената изазива спонтано, без утицаја других узрока, појаву варијација друге једне групе елемената (веза између варијација дражи и њима изазваних осећаја; веза између варијација разноврсних диспаратних елемената у корелативним појавама у биологији, физиологији, психологији, као што су везе оличене у рефлексном утицају нервног система на нутритивне и секретивне функције организма, везе при асоцијацијама идеја и т. д.).

Улога препреке (улога материјалне везе, која држи једно чврсто тело непомично, па ма какви били спољни узроци који теже да га покрену; улога заклона при осветлењу једне површине; улога изолатора уметнутог у састав једног електричног кола; улога дувара једнога суда, који спречава додир и мешање два хемиска тела у каквој реакцији) са језгром аналогије које се састоји у томе, да фактор, за који је улога везана, чини немогућним варијације једне групе елемената акцијом једнога одређеног комплекса узрока, па ма какве јачине ови били а да се међу тим та акција, оличена у варијацијама такве групе елемената, јави са престанком присуства тога фактора.

У опште, аналогије ће међу улогама бити *квантитативне* или *квалитативне* према томе да ли се оно, што је садржано у језгру аналогије, може изразити математичким релацијама или не. Међу свима пасивним улогама постоје квалитативне аналогије: њено језгро обухвата само факт да су елементи, за које су оне везане, носиоци промена импозираних утицајем једнога одређеног скупа прилика. Исте је врсте аналогија и међу свима активним улогама: језгро обухвата само факт да скуп фактора, за које су оне везане, импозира промене једноме одређеном скупу елемената у појави. На против, међу специјалнијим активним улогама: атракције, електричних и магнетних привлачних сила, постоји квантитативна аналогија, чије се језгро састоји у факту да су промене, које они импозирају брзинама механичких, електричних или магнетних маса, обрнуто пропорционалне квадрату одстојања масе од извора силе. Тада, у исто време, постоји аналогија исте врсте и међу пасивним улогама ових брзина, носилаца тих промена.

Најпотпунији, најсавршенији тип квантитативних аналогија међу улогама јесте онај, чији су израз *математичке аналогије међу појавама*, оличене у истоветности математичких релација што регулишу појаве, како у погледу броја једначина, диференцијалних и експлицитних, тако и у погледу њиховог аналитичког облика. Појаве, обухваћене таквом једном аналогијом, припадају *једноме истом типу*; оне састављају једну *аналошку групу*, у којој су за *хомологе елементе* везане улоге, међу којима постоји поменути облик квантитативних аналогија. Хомологи елементи играју, у исто време, у једначинама одговарајућих појава *истоветне математичке улоге*; од једначине једне појаве прелази се на једначине друге пермутовањем њихових хомологих елемената.

Природа и шематисање улога. Заједничка *природа* једнога низа од n међусобно сличних улога у n разних појава огледа се у самоме језгру њихове аналогије и може се сматрати да то језгро у исто време дефинише и саму ту природу. Ова ће бити у толико одређеније или овлашније дефинисана, у колико је већа или мања одређеност факата садржаних у језгру аналогије улога, из којих је та заједничка природа апстрахована. За природу једне улоге казаће се да је одређена квантитативно или квалитативно према томе, да ли је аналогија између улога, из којих је она апстрахована, квантитативна или квалитативна.

Све оно што је приликом апстраховања заједничке природе једнога низа улога отпало из појединих чланова таквога низа, не улазећи у језгро аналогије, па, према томе, ни у дефиницију природе улоге, одређује, кад се буде придодало језгру аналогије, *специфичне облике*, у којима се заједничка природа посматраних улога манифестује у појединима од појава, из којих је апстрахована. Разни специфични облици, у којима се јављају улоге једне исте природе, јесу оно што и чини бескрајну разноврсност и шаренило појава у природи.

Појединим улогама једне заједничке природе даје се или општи назив, на који наводи каква карактеристична појединост самога језгра аналогије, из кога је она изведена (улоге: дескриптивних елемената, активних и реактивних узрока), или назив једнога специфичког облика у коме се та улога јавља у једној специјалнијој појави, обично у оној, у којој ју је најлакше схватити (улога силе, на место узрока, н. пр. силе морталитета; улога варнице, на место изазивача; улога удара, на место тренутних или напрасних узрока; улога бујице, на место интензивних узрока који јачају са препонама што им се стављају на супрот).

За један ће се низ међу собом сличних улога *(r)*, као и за сваку посебну улогу тога низа, казати да су *шематисане*, ако је свака од њих у мислима смењена једном фиктивном улогом, чија природа није ништа друго до заједничка природа улога *(r)*. То ће шематисање бити квантитативног или квалитативног карактера према томе каквога је карактера само језгро аналогије, из кога је та природа апстрахована. Тако би фиктивна улога импулсивног узрока шематисала улоге свих могућних фактора, чији стицај импозира промене у смислу рашћења (квалитативно шематисање). Фиктивна, пак, улога централне утицајне тежње, која слаби пропорционално квадрату одстојања, шематисала би улоге разноврсних конкретних узрока који повлаче собом мењање јачине светлости, термичних стања, звука, мириса, потреса и т. д. мењањем положаја изворне тачке (квантитативно шематисање).

Шематисање механизма појава. Описати механизам дате појаве значи:

1° набројати и описати све што саставља скуп *(o)* прилика, чији стицај повлачи собом и регулише модификације у којима се појава састоји;

2° описати појединачне улоге свега онога што саставља тај скуп.

Шематисати какав механизам значи шематисати скуп (о) и улоге везане за оно што га саставља, задржавши од сваке само оно, што улази у опис њене природе. Од првобитне слике механизма појаве остаје тада само једна врста скице, ослобођене свега што је специфичко у разним појавама и где је остало само оно што је стриктно потребно да би се промене, у којима се појава састоји, могле схватити. У таквој скици, шеми механизма појаве, све што игра какву улогу у појави, губи своје специфичко конкретно значење и све што га везује за ову или ону специфичку појаву. Оно, што остаје, јесу само улоге описане на најгенералнији могућан начин и редуковане у исто време на своје најкарактеристичније црте али ипак довољно одређене да би се у њима могла сагледати слика појаве као неминовна последица такве комбинације улога. До које границе треба ићи при томе шематисању, видеће се из идућих одељака.

За две на такав начин добијене шеме казаће се да имају *сличне саставе*, кад свакој улози у једној од њих одговара по једна улога сличне природе у другој шеми. Кад су такве улоге истоветне, шеме механизама имају *истоветан састав*, а одговарајуће појаве припадају једном истом типу.

И код такве скице, што шематизира механизам појаве, као и код оне што шематизира саму дескрипцију појаве, реконструкција првобитне слике механизма, онаквог какав је он у реалности, са свима његовим специфичким одликама, захтева да у мислима буде задржана веза између природе шематисаних улога и њиховог специфичког облика у специјалној појави, чија се слика мисли реконструисати.

II. Елементи за аналитичку дескрипцију.

А. Активне улоге.

Тежња улога, њена јачина и њен смисао. — Перманентни закони тежња. — Асимилација тежња механичким силама. — Резултанта тежња и њене компоненте. — Величине X_i. — Коефицијенат утицаја тежње.

Тежња узрока, јачина и смисао. Кад се један елеменат u мења у присуству каквога скупа (o) прилика тако, да тих промена нестаје кад скупа (o) нестане, а да се оне мењају, кад се он у чему измени, таквоме скупу (o), сматраном за узрок промене елемента u, приписује се тежња да мења тај елеменат и сматра се да је ова *у толико јача*, у колико су осетније те промене. Елеменат u сматраће се тада као *непосредан објекат* те тежње. Као мерило *јачине* те тежње, у једном датом тренутку t, сматраће се производ

$$k\,u'$$

где u' означава величину промене елемента u у размаку времена од t до $t + dt$, сведену на јединицу времена. Број k означава извесан реалан и позитиван коефициенат, независан од величине промена елемента u. *Смисао* тежње сматраће се као позитиван или негативан према томе, да ли параметар u у размаку времена од t до $t + dt$, а у присуству скупа (o), за који је тежња везана, расти или опада. У првоме је случају тежња *импулсивна*, а у другом је *депресивна* (антагонистична).

Перманентни закони тежња. Претпоставићемо да се у механизмима појава, на које ће се наилазити, има посла са таквим скуповима *(о)* и елементима *и*, да је за тежњу *X*, приписану таквоме једном скупу, а која има за непосредан објекат елеменат *и*, везан по један *закон (L)*, по коме се јачина тежње мења у току мењања елемента *и* и који задовољава ове погодбе:

1. Он је *перманентан* у том смислу, да се не мења ни онда, кад се тежњи скупа *(о)* придруже тежње ма коликог броја других скупова *(о₁)* који би утицали на мењање елемента *и*.

2. Кад ма колики број скупова *(о₁)* утиче на један исти објекат *и* тако, да је овај непосредан објекат таквога комплекса *(о)* (т. ј. да варијације елемента *и* нестају или се појављују са нестанком или појавом комплекса), елеменат се *и* мења по таквом једном закону, као да из целокупног комплекса произлази једна једина тежња, која има за непосредан објекат *и* а за јачину алгебарски збир свих посебних тежња приписаних понаособ свакоме од скупова *(о₁)* што састављају комплекс, а под условом да се свака од ових тежњи мења по свом одговарајућем перманентном закону *(L)*.

Такав принцип перманентности закона тежње може се, у осталом, сматрати као нарочити облик принципа, да се при симултаној акцији *сваки од узрока понаша тако, као да је сам*. У таквом облику он је једна интуитивна генерализација принципа независности ефеката симултаних сила у Механици, која је утврђена слагањем факата са резултатима добијеним претпостављајући ту независност.

Асимилација тежња механичким силама. Таква дефиниција тежња и њихових перманентних закона чини да се тежње, са гледишта улога које играју у механизмима појава, могу асимилирати механичким силама познатих динамичких природа, чија би се јачина мењала у току појаве по одређеним законима. Другим речима, појава се може замислити да се збива тако, као да се на место њених ефективних, активних и пасивних узрока, који су често пута веома многобројни и компликовани и по својој интимној природи непознати, има један одређен комплекс простијих фиктивних узрока, карактерисаних једним системом непосредних објеката и јачинама тежња, које су за њих везане и које би у појави, према својим непосредним објектима, играле ону исту улогу, што је играју механичке силе према брзинама. У великоме броју случајева, ма да су интимни, ефективни узроци појаве компликовани и многобројни, у њиховој се симултаној акцији огледа једна нарочита тежња, која има одређену и видну улогу у изазивању појаве и којом је, као фиктивним узроком, могућно сменити целокупни сплет сићушних ефективних узрока појаве, па да се, ипак, има све што је потребно за проучавање њенога тока. Тако се н. пр. не морају познавати све сићушне и бескрајно многе појединости из којих резултује трење двеју површина и које потичу из бескрајно много малих деформација; све се оне могу колективно сменити, бар у првој апроксимацији, једном депресивном реактивном тежњом која се опире кретању. Тако се исто не мора познавати интимна природа светлости, топлоте, електрицитета и т. д. већ само извесне тежње, везане за те агенсе у одређеним појавама, па да се ипак може проучити ток појаве. Исто се тако не мора познавати интиман механизам једне хемиске реакције, већ само факт да постоји извесна трансформаторска тежња пропорционална концентрацијама смеше по њеним активним састојцима, па да се ипак може проучити кинетички ток хемиског процеса и т. д.

Асимилација, међу тим, тако одређених тежња механичким силама даје могућности да се целокупна математичка теорија акција сила генералише и распростре и на акцију узрока сваке врсте, који са механичким силама немају ничег другог сличног, до улоге које играју у механизмима појава.

Резултанта тежња и њене компоненте. Један од првих резултата такве једне асимилације био би појам и одредба *резултанте* и *компонената* појединих тежња или комплекса тежња. Приметимо, најпре, да ће се под величином X једне тежње, непосредно примењене на један дати објекат u, увек разумети вредност израза F где једначина

$$X = F$$

представља перманентни закон мењања тежње X у току промена елемента u, а под утицајем скупа прилика коме се приписује тежња X. Тиме ћемо сматрати да је обухваћен и знак тежње X: то је знак израза F у горњем закону.

Нека је дата каква појава, која би се састојала у варијацијама елемената система

$$(u_1, \cdots\cdots u_n)$$

Нека је X_i величина тежње непосредно примењене на објекат u_i тако да је:

$$\frac{X_1}{u'_1} = k_1 \tag{13}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{X_n}{u'_n} = k_n \tag{14}$$

где су $k_1,\ k_2, \cdots\cdots k_n$ реалне, позитивне константе.

Појава ће се састојати у кретању фигуративне тачке M у простору од n димензија, под утицајем тежња: $X_1,\ X_2, \cdots\cdots X_n$. Брзина ће тачке M у тренутку t бити

$$v = \pm \sqrt{u'^2_1 + \cdots + u'^2_n} \tag{15}$$

њен правац биће одређен низом коефициената

$$\mu_1 = \frac{u'_1}{v} \qquad \qquad \qquad$$

$$(16) \qquad \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$\mu_n = \frac{u'_n}{v}$$

а смисао знаком пред квадратним кореном у обрасцу (15)

Потражимо, према горњим обрасцима, величину тежње X, којом би требало сменити комплекс тежња $X_1, \cdots X_n$, па да величина брзине тачке M не буде тим измењена. То ће бити ако је:

$$(17) \qquad \frac{X}{v} = k$$

где је k реална и позитивна константа. Заменом вредности $u_1 \cdots u_n$ и v из образаца (15) и (16) у обрасцу (17) добија се:

$$(18) \qquad X = \pm \sqrt{\left(\frac{k X_1}{k_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{k X_n}{k_n}\right)^2}$$

па пошто је v у исто време и мерило интензитета појаве, то се добија овај закључак:

Интензитет појаве неће се изменити ако се комплекс узрока, карактерисаних тежњама $X_1 \cdots X_n$, примењеним непосредно на објекте $u_1 \cdots u_n$, смени једним фиктивним узроком, за који би била везана тежња X, чија је величина дефинисана обрасцем (18) а која би била непосредно примењена на објекат v.

Коефициенти правца брзине v мењаће се тада по закону облика

$$\mu_i = \frac{u'_i}{v} = \frac{X_i}{k_i v}$$

т. ј.

$$\mu_i = \frac{k}{k_i} \cdot \frac{X_i}{X}$$

према чему је:

$$X_1 = \frac{k_1 \mu_1}{k} X$$

$$(19) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_n = \frac{k_n \mu_n}{k} X$$

тако да се величине тежња: $X_1 \cdots X_n$, примењених непосредно на објекте: $u \cdots u_n$, могу израчунати помоћу величине тежње X примењене непосредно на брзину фигуративне тачке M, и коефицијента правца те брзине.

Тежња X зваће се *резултантом* тежња $X_1 \cdots X_n$; ове су, пак, њене *компоненте* у правцима осовина $Ou_1 \cdots Ou_n$. Резултанта има величину, правац и смисао растојања ON између почетка и тачке N, чије су координате:

$$k \frac{X_1}{k_1}, \dots k \frac{X_n}{k_n}$$

У специјалном случају кад је $n = 3$ то ће бити дијагонала паралелипипеда, чије су ивице дужине:

$$k \cdot \frac{X_1}{k_1}, \qquad k \cdot \frac{X_2}{k_2}, \qquad k \cdot \frac{X_3}{k_3}$$

На послетку, кад је $n = 2$ резултанта ће бити дијагонала правоугаоника чије су стране:

$$k \frac{X_1}{k_1} \quad \text{и} \quad k \frac{X_2}{k_2}$$

Величине X_i. Облици закона варијација ових величина у току појаве бескрајно су разноврсни. Међу њима се у природним појавама најчешће наилази на ове:

I. Облик:

$$X = f(t)$$

где је f каква одређена функција времена t (случај *узрока са независним варијацијама*, чији закони варијације јачина за време њихове акције ни у колико не зависе од појединости те акције). Такви су н. пр.:

1° Узроци сталне јачине, где је

$$X = const.$$

(тежа, отпори трења или клизања).

2° Узроци са периодичким варијацијама, где је

$$X = \Sigma \left(A_n \sin \frac{2n \pi}{T} t + B_n \cos \frac{2n \pi}{T} t \right)$$

(периодичка електромоторна сила у разноврсним електродинамичким појавама; компоненте привлачне силе сунца и месеца у појавама прилива и одлива; акција сунчане светлости на биљке, која се мења ритмички, растући и опадајући периодички са појавом дана и ноћи; разноврсни други ритмички узроци у природи).

3° Узроци са амортизираним осцилаторним варијацијама, где је

$$X = e^{-\alpha t} (A \sin \beta t + B \cos \beta t)$$

који се јављају у великом броју електродинамичких појава.

4° Узроци са експоненцијалним варијацијама, где је

$$X = Ae^{-\lambda t}$$

као што је деструктивни активитет микроба које се умножавају делењем.

II. Облик:

$$X = f(u)$$

где је f једна одређена функција самога елемента u, непосредног објекта тежње везане за посматрани узрок. Такви су н. пр.

1° Узроци са законом варијације облика

$$X = \lambda u$$

или

$$X = - \lambda u$$

где је λ позитиван коефицијенат (случај *експоненцијалних појава*, као што су: апсорпција светлости у проласку кроз апсорбујући слој; појава електричног испаравања течности; појава варијација барометарског притиска при пењању; хлађење каквога чврстог тела зрачењем; отпор ваздуха при лаганом кретању чврстих тела).

2° Узроци са законом

$$X = \lambda (a - u)$$

где је a позитивна константа (случај трансформаторске тежње у мономолекуларним хемиским реакцијама, или колективног активитета једне групе бацила, који би се уништавали у мери у којој извршују своју деструктивну акцију).

3° Узроци са законом

$$X = - \lambda \sqrt{a - u}$$

где је a позитивна константа (случај узрока што изазива промене брзине истицања течности кроз отвор на дну суда).

4° Узроци са законом

$$X = \lambda u^2$$

(случај отпора ваздуха при брзом кретању чврстог тела, пропорционалног квадрату брзине тела; случај интермолекуларног отпора којим се објашњава начин поступног гашења светлости при фосфоресценцији, пропорционалног квадрату брзине молекула).

III. Облик:

$$X = f(\xi)$$

где је f једна одређена функција тоталитета ξ елемента u. Такви су н. пр.

1° Узроци са законом облика

$$X = \lambda \xi$$

(случај механичке силе пропорционалне пређеном путу; случај торсионе силе при упредању, пропорционалне углу торсије; случај еластичног отпора при вибрацијама еластичне шипке, пропорционалног елонгацији; случај депресивне силе при испражњавању електричних кондензатора, пропорционалне електричном оптерећењу; случај еластичне силе при истезању опруге, пропорционалне величини истезања).

2° Узроци са законом

$$X = \frac{\lambda}{\xi^2}$$

(случај атрактивне силе небеских тела, обрнуто пропорционалне квадрату растојања; случај електричних и магнетних атрактивних сила).

3° Узроци са законом

$$X = \lambda \sin \xi$$

(случај хоризонталне компоненте теже при осцилацијама клатна са великим амплитудама).

IV. Облик:

$$X_i = \lambda \frac{du_k}{dt}$$

где су $u_1, u_2, u_3, \cdots$ непосредни објекти појединих тежња $X_1, X_2, X_3, \cdots$ (случај електродинамичке индукције у једноме систему струја са међусобном индукцијом, где су u_i јачине струја; случај оптичке индукције, изазване наглим променама јачине светлосних надражаја у ретини).

V. Облик:

$$X_i = \lambda_i u_1 u_2 \cdots u_n$$

(случај трансформаторских тежња y у полимолекуларним хомогеним хемиским реакцијама, пропорционалних концентрацијама смеше по активним телима у реакцији).

VI. Облик:

$$X = \lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial p_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial p_n^2}\right)$$

где је $(p_1, p_2, \cdots p_n)$ један комплекс параметара, са којим се у току времена мења упоредо елеменат u (случај утицајне тежње околине на температуру или на величину електричног потенцијала, пропорционалне другим изводима тих елемената по координатама тачке).

VII. Облик:

$$X = \lambda \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial p_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 \xi}{\partial p_n^2}\right)$$

(случај силе непосредно примењене на брзину трептања затегнуте жице, где је сила пропорционална другоме парцијалном изводу ординате по апсциси; случај силе непосредно примењене на брзину трептања затегнуте мембране, где је сила пропорционална збиру других парцијалних извода оне координате, која се трептањем мења, по осталим двема координатама).

VIII. Облик:

$$X = \lambda F[u(t - \theta)]$$

где је F једна одређена функција елемента u, али не онаквог, какав је у актуелном тренутку t, већ онаквог какав је био у једноме ранијем трентку $t - \theta$, где θ има једну сталну вредност (случај реактивне депресивне тежње са задоцњеном акцијом, којом се објашњавају амортизиране осцилације црнила при акцији светлости на фотографску плочу, и која је у сваком тренутку пропорционална јачини црнила, али онаквога какво је било у једном ранијем тренутку.

IX. Облик: разноврсне комбинације горњих облика међу собом и са појединим геометриским или кинетичким елементима појаве, као што је комбинација

$$X = \Sigma (x_i X_i - y_i Y_i)$$

која одређује јачину силе примењене непосредно на брзину ротације једнога чврстог тела при обртању око утврђене осовине oz (тотални моменат сила према обртној осовини), или комбинације

$$X_1 = L + (B - C)\, qr$$
$$X_2 = M + (C - A)\, rp$$
$$X_3 = N + (A - B)\, pr$$

које одређују јачине сила примењених непосредно на тренутне ротације p, q, r, триедра $oxyz$, утврђеног у једноме чврстом телу, при његовом обртању око утврђене тачке (где су L, M, N тотални моменти датог комплекса сила према осовинама ox, oy, oz, а A, B, C моменти инерције тела према тим осовинама) и т. д.

Коефицијенат пропорционалности λ у свима набројаним изразима величина X може се произвољно мењати од једне до друге појаве једне исте конкретне врсте, а да тиме динамичка природа одговарајућег узрока и механизам његове акције не буду ни у чему измењени. Величина овог коефицијента одређује јачину утицаја једнога таквог узрока у датом случају и с тога се може назвати *коефицијентом утицаја* узрока у посматраној појави. У Механици н. пр. улогу тога коефицијента игра косинус угла између правца силе и правца кретања. У појави апсорпције светлости, при пролазу кроз апсорбујући слој, улогу коефицијента утицаја тежње слабљења јачине светлости игра специфична моћ апсорпције слоја (коефицијенат апсорпције). При акцији микроба коефицијенат утицаја њихове колективне деструктивне тежње игра специфична деструктивна способност те врсте микроба. У прирашћивању броја индивидуа једне органске феле у једној области улогу тога коефицијента игра специфична репродуктивна моћ те феле. У разноврсним природним појавама са амортизираним осцилацијама величина таквог коефицијента одређује брзину амортизирања осцилација у току појаве.

В. **Пасивне улоге.**

Дескрипција пасивних улога. — Виртуелне модификације у дескриптивном систему. — Виртуелне промене појединих елемената. — Слободан систем. — Систем са везама. — Примери веза у неколиким конкретним појавама. — Остварљиве виртуелне модификације конфигурација. — Степен слободе система. — Редукција најопштије остварљиве модификације на кретање фигуративне тачке по једноме одређеном варијетету у полидимензионалном простору. — Ефективне модификације у дескриптивном систему. — Редуковани дескриптивни систем. — Проучавање појаве сведено на проучавање слободног кретања фигуративне тачке редукованог система, или кретања фигуративне тачке првобитног система по једноме одређеном варијетету у полидимензионалном простору. — Везе прве и друге врсте. — Холономни системи. — Конкретни примери хололомних система. — Нехолономни системи. — Конкретни примери нехолономних система.

Дескрипција пасивних улога у саставу механизма дате појаве своди се на прецизирање дескриптивних елемената у појави и на дескрипцију варијација, које ови могу, у опште, имати у датоме, произвољном, трепутку, без обзира на то, какве ће варијације комплекс активних улога у појави ефективно импозирати тим елементима. О првоме проблему било је речи у одељку о дескрипцији појаве; овде ће бити проучен други од та два проблема.

Виртуелне модификације у дескриптивном систему. Један ће се дескриптивни систем звати *слободан систем*, ако су у његовим конфигурацијама остварљиве *произвољне* симултане варијације свих елемената u_i, т. ј. ако кретање фигуративне тачке система у n-димензионалном простору није ничим ограничено. Он ће се, пак, звати *систем са везама*, ако су у његовој конфигурацији остварљиве произвољне симултане варијације само неких елемената, а кад су ове ефективно извршене, њима су *одређене* остварљиве варијације осталих елемената: Кретање фигуративне тачке таквога система ограничено је, и то у толико јаче, у колико је мање елемената са произвољним варијацијама.

Под *виртуелним променама* δu_i елемента u_i у једноме датом тренутку разумеће се замишљене бескрајно мале промене тих елемената у том тренутку, без обзира на то, да ли су оне у систему, таквом какав је, остварљиве у том тренутку или не.

Слободан систем карактерисан је тиме, што је у њему остварљив ма какав скуп

$$(\delta u_1, \cdots\cdots \delta u_n)$$

виртуелних промена.

Систем са везама карактерисан је тиме, што је у њему остварљив ма какав скуп

$$(\delta u_1, \cdots\cdots \delta u_k)$$

произвољних виртуелних промена једнога извесног броја k елемената, а остварљиве су варијације осталих елемената везане са овима релацијама облика

$$
(20) \qquad \begin{aligned}
a_{11}\,\delta u_1 + \cdots + a_{1n}\,\delta u_n &= o\\
a_{21}\,\delta u_1 + \cdots + a_{2n}\,\delta u_n &= o\\
\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\
a_{m1}\,\delta u_1 + \cdots + a_{mn}\,\delta u_n &= o
\end{aligned}
$$

где коефицијенти a_{ik} могу, у опште, зависити од самих елемената $u_1, u_2, \cdots u_n$ и времена t. Релације (1) представљају једну интимну одлику система. Оне су везане за сам систем, такав какав је, и не мењају се ни у чему па ма на који се начин мењали сами елементи система и активне улоге које изазивају варијације тих елемената. Све оно што собом повлачи релације (1) између могућних виртуелних промена у њему зваћемо *везама* у систему.

Примери веза у неколиким конкретним појавама.

1° При кретању тачке по датој утврђеној површини

$$f(x, y, z) = o$$

остварљиве виртуелне промене δx, δy, δz везане су релацијом

$$a_{11}\,\delta x + a_{12}\,\delta y + a_{13}\,\delta z = o$$

где је

$$a_{11} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad a_{12} = \frac{\partial f}{\partial y}; \quad a_{13} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

2° При кретању тачке по утврђеној линији

$$f(x, y, z) = o$$

$$\varphi(x, y, z) = o$$

е су промене везане двема релацијама

$$a_{11}\,\delta x + a_{12}\,\delta y + a_{13}\,\delta z = o$$

$$a_{21}\,\delta x + a_{22}\,\delta y + a_{23}\,\delta z = o$$

где је

$$a_{11} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad a_{12} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad a_{13} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$a_{21} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad a_{22} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad a_{23} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

3° При котрљању кугле полупречника r по хоризонталној равни, узетој за раван xoy, промене су координата ξ и η центра кугле и Euler-ових углова ψ, φ, θ везане двема релацијама

$$a_{11}\,\delta\xi + a_{12}\,\delta\theta + a_{13}\,\delta\varphi = o$$

$$a_{21}\,\delta\eta + a_{22}\,\delta\theta + a_{23}\,\delta\varphi = o$$

где је

$$a_{11} = 1 \qquad a_{12} = -r \sin\psi \qquad a_{13} = r \sin\theta \cos\psi$$

$$a_{21} = 1 \qquad a_{22} = r \cos\psi \qquad a_{23} = r \sin\theta \sin\psi$$

4° При деформацијама и кретању фуникуларног полигона од n страна, са непромењљивим дужинама

$$l_1, l_2, \cdots\cdots l_n$$

где су координате крајњих тачака стране l_i

$$(x_i\, y_i, z_i) \text{ и } x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$$

а кад су крајеви полигона утврђени у двема сталним тачкама, имало би се n веза облика

$$(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2 = l_i^2$$

$$(i = 1, 2, 3 \cdots n)$$

тако да су остварљиве промене крајњих тачака појединих страна међу собом везане системом од n релација облика

$$a_{i1}\,\delta x_i + a_{i2}\,\delta y_i + a_{i3}\,\delta z_i + a_{i4}\,\delta x_{i+1} + a_{i5}\,\delta y_{i+1} + a_{i6}\,\delta z_{i+1} = o$$

где a_{ik} зависе од координата темена полигона.

5° Кад се више линеарних проводника, кроз које пролази електрична струја, рачвају из једне исте тачке јачине су струја

$$i_1, i_2, \cdots\cdots i_n$$

у њима везане релацијом (први Kirchoff-љев закон)

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_n = o$$

а њихове промене релацијом

$$\delta i_1 + \delta i_2 + \cdots + \delta i_n = o$$

6° Кад више проводника, који не садрже никакав извор електромоторне силе, формирају какав затворен полигон, јачине су струја у њима и електрични отпори везани релацијом (други Kirchoff-љев закон)

$$i_1 r_1 + \cdots\cdots i_n r_n = o$$

а њихове промене релацијом

$$r_1 \delta i_1 + \cdots + r_n \delta i_n + i_1 \delta r_1 + \cdots + i_n \delta r_n = o$$

У случају кад се у саставу полигона налази и електромоторна сила *E*, десна страна последње једначине има се сменути изразом δE.

7° Релације 5° и 6°, проширене на тродимензионалне проводнике, доводе до ових генералних закона, који играју улоге веза у појавама дистрибуције струја у перманентном режиму:

a) Тотални флукс струје кроз једну ма какву затворену површину раван је нули;

b) Јачина електромоторне силе дуж једне произвољно узете контуре у проводнику, равна је нули.

8° При хемиским реакцијама једна се врста веза састоји у пропорционалности количина

$$x_1, x_2, \cdots\cdots x_m$$

продуката реакције, образованих до једнога произвољног тренутка, и дотле утрошених количина реагенаса

$$\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$$

тако, да је у сваком тренутку

$$x_i = M_i x_1 \qquad (i = 1, 2, \cdots m)$$

$$\xi_k = N_k x_1 \qquad (k = 1, 2 \cdots n)$$

где су M_i и N_i одређени позитивни и рационални бројеви, непромењиви за једну дату реакцију. Промене елемената x_i и ξ_k везане су дакле системом релација

$$\delta x_i = M_i \, \delta x_1 \qquad (i = 1, 2, \cdots m)$$

$$\delta \xi_k = N_k \, \delta x_1 \qquad (k = 1, 2, \cdots n)$$

9⁰ Осмотички притисак P једнога раствора, концентрација C раствора по ономе телу коме одговара тај притисак, и температура T везани су релацијом

$$\frac{P}{C} = RT$$

где је R константа за дати раствор. Промене тих елемената везане су, дакле, релацијом

$$\delta P - RT \cdot \delta C - CR \cdot \delta T = o$$

10⁰ Температура T смеше у једном произвољном тренутку и дотле утрошена количина x једнога од реагенаса у каквој хемиској реакцији, која сама собом мења температуру смеше, везани су релацијом

$$(a + bx)(m + nT) = h$$

где су a, b, m, n, h константе за једну дату реакцију. Промене тих елемената везане су, дакле, релацијом

$$n(a + bx)\,\delta T + b(m + nT)\,\delta x = o$$

11° Једна од најопштијих и најважнијих врста веза јесте она оличена у *законима одржања*, који се распростиру на најразноврсније појаве у разним гранама Природне Философије. Такви су н. пр.

a) *Закон одржања материје* (Lavoisier-ов закон): У једној изолованој групи тела, целокупна количина материје, мерена својом масом, остаје стална па ма какве биле физичке или хемиске појаве, које се у групи дешавају.

Ако се са $m_1, m_2, \cdots m_n$ означе масе саставних делова уочене групе. биће

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n = const.$$

а веза између промена маса изражена је релацијом

$$\delta m_1 + \delta m_2 \cdots + \delta m_n = o$$

b) *Закон инкомпресибилитета течности*, према коме, при макаквој геометриској деформацији запремине једне течности, величина те запремине остаје непромењива. Ако се са $v_1, \cdots v_n$ означе запремине појединих саставних делова целокупне запремине течности, њихове су виртуелне варијације везане релацијом

$$\delta v_1 + \cdots + \delta v_n = o$$

c) *Закон одржања електрицитета* (закон Faraday-Lippmann-ов): у једноме изолованом систему целокупна количина електрицитета остаје стална, па ма какве се појаве дешавале у систему, под условом да се позитивна оптерећења рачунају са знаком + а негативна са знаком —.

Ако се са $q_1, \cdots q_n$ означе електрична оптерећења разних саставних делова система, биће

$$q_1 + \cdots + q_n = const.$$

а веза између промена електричних оптерећења изражена је релацијом

$$\delta q_1 + \cdots + \delta q_n = o.$$

d) *Carnot* — *Clausius*-ов закон о *одржању ентропије.* Кад је какав систем тела потпуно изолован, ма какве се реверсибилне појаве у њему дешавале, ентропија система остаје стална.

Ако се са $l_1, \cdots l_n$ означе ентропије разних саставних делова система, биће

$$l_1 + \cdots + l_n = const.$$

и према томе

$$\delta l_1 + \cdots + \delta l_n = o$$

Везе, које су такве, да повлаче собом релације (1), у којима не фигурише експлицитно време t, зваће се *непромењљивим (перманентним) везама*; оне ће, на против, бити *промењљиве* у току времена кад те релације садрже експлицитно и t.

Непромењљиве су н. пр. горе наведене везе у набројаним појавама.

Промењљиве би везе биле н. пр.

1⁰ Она при кретању тачке по једној површини, која се и сама креће или се деформише, тако да јој је једначина облика

$$f(x, y, z, t,) = o$$

2⁰ Оне при кретању тачке по једној линији, која се креће или деформише, тако да су јој једначине облика

$$f(x, y, z, t) = o$$

$$\varphi(x, y, z, t) = o$$

3° Она при варијацијама осмотичног притиска P, кад се температура раствора T поступно мења у току времена по једноме закону облика

$$T = f(t)$$

у коме ће случају веза бити облика

$$\frac{P}{C} = R\, f(t)$$

4° Она при варијацијама јачина једнога система струја у затвореном полигоналном проводнику, кад се отпори појединих његових делова мењају у току времена по датим законима

$$r_2 = f_1(t) \cdots r_n = f_n(t)$$

или електромоторна сила у саставу проводника по датом закону

$$E = \varphi(t)$$

тако да је веза облика

$$i_1 F(t) + \cdots + i_n f_n(t) = \varphi(t)$$

5° Она при апсорпцији светлости у пролазу кроз растворе, оличена у релацији (Beer-ов закон)

$$i = i_0 e^{-\alpha\beta\lambda}$$

(где је i јачина светлости, α концентрација раствора, β дебљина апсорбујућег слоја, λ специфична константа за један одређени раствор и одређену светлост) а при мењању једнога или другог од елемената α и β по каквом одређеном закону.

Остварљиве виртуелне модификације конфигурација. Степен слободе система. Скуп

$$(\delta u_1 \cdots \delta u_n)$$

виртуелних промена елемената u_i, у једноме датом тренутку t, саставља једну *виртуелну модификацију конфигурације система* у томе тренутку. Таква ће једна модификација бити *остварљива*, т. ј. неће се противити везама, кад се она састоји из скупа промена које задовољавају релације (1) у уоченом тренутку t.

Кад је скуп веза у једноме систему такав, да повлачи собом m релација (1), у систему има

$$k = n - m$$

елемената, за које су остварљиве произвољне виртуелне промене у једноме, ма коме, тренутку. Број k представља тада *степен слободе* система. У једноме систему од n елемената, са степеном слободе k, постоји дакле

$$m = n - k$$

веза међу његовим елементима; све остварљиве виртуелне модификације његових конфигурација добијају се дајући елементима

$$u_1, u_2, \cdots u_k$$

произвољне варијације

$$(\delta u_1, \delta u_2, \cdots \delta u_k)$$

а осталим елементима

$$u_{k+1}, u_{k+2}, \cdots u_n$$

варијације

$$(\delta u_{k+1}, \delta u_{k+2}, \cdots \delta u_n)$$

које тада буду одређене скупом линеарних релација (20), што потичу из k веза у систему. Тада се, и то на бескрајно много начина, може изабрати k нових параметара

$$q_1, \cdots q_k$$

таквих, да систем једначина (20) буде еквивалентан систему

$$
\begin{aligned}
\delta u_1 &= \alpha_{11}\,\delta q_1 + \cdots + \alpha_{1k}\,\delta q_k \\
\delta u_2 &= \alpha_{21}\,\delta q_1 + \cdots + \alpha_{2k}\,\delta q_k \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\delta u_n &= \alpha_{n1}\,\delta q_1 + \cdots + \alpha_{nk}\,\delta q_k
\end{aligned}
\tag{21}
$$

где су α_{ik} у опште функције параметара $(q_1, \cdots q_k)$ које ће садржати експлицитно време t, или га не садржати, према томе да ли га садрже коефициенти a_{ik} у првобитним једначинама (20) т. ј. према томе да ли су везе променљиве или непроменљиве у току времена.

Ма какве произвољне вредности имале виртуелне варијације

$$(\delta q_1, \cdots \delta q_k)$$

скуп

$$(\delta u_1, \cdots \delta u_n)$$

виртуелних варијација елемената u_i, одређен једначинама (21), представљаће једну остварљиву виртуелну модификацију конфигурације

$$(u_1, \cdots u_n)$$

и обрнуто, све такве остварљиве виртуелне модификације добијају се дајући варијацијама

$$\delta q_1, \cdots \delta q_k$$

произвољне вредности и израчунавајући из њих и вредности самих параметара

$$(q_1, \cdots q_k)$$

а помоћу једначина (21), вредности

$$(\delta u_1, \cdots \delta u_n)$$

које ће тада састављати једну остварљиву модификацију.

Према томе: *најопштије остварљиве модификације, у систему од n елемената са k степена слободе, јесу оне, што се своде на кретање фигуративне тачке система по једноме варијетету k-тог реда у n-димензионалном простору.*

Ефективне модификације у дескриптивном системү. Под таквим ће се модификацијама у систему разумети оне, међу остварљивим модификацијама, које се у њему у датом тренутку и датој прилици ефективно и дешавају и у чијој се дескрипцији и састоји дескрипција саме појаве. Оне се састоје из ефективних варијација елемената u_i у посматраном размаку времена и такве варијације, у размаку времена од t до $t + dt$, биће означене са

$$du_1, \cdots du_n$$

Ефективна брзина варијација елемената u_i биће

$$\frac{du_i}{dt}$$

а ефективна акцелерација

$$\frac{d^2u_i}{dt^2}$$

У случајевима, кад су везе у систему непромењиве, ефективна модификација, у размаку од t до $t + dt$, биће једна од остварљивих виртуелних модификација у томе тренутку, које тада зависе само од актуелних конфигурација система. Она је, дакле, састављена из варијација du_i што задовољавају m релација

$$(22) \qquad \begin{aligned} a_{11}\, du_1 + \cdots + a_{1n}\, du_n &= o \\ a_{21}\, du_1 + \cdots + a_{2n}\, du_n &= o \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\, du_1 + \cdots + a_{mn}\, du_n &= o \end{aligned}$$

и према томе такође и n њима еквивалентних релација

$$\begin{aligned} du_1 &= \alpha_{11}\, dq_1 + \cdots + \alpha_{1k}\, dq_k \\ du_2 &= \alpha_{21}\, dq_1 + \cdots + \alpha_{2k}\, dq_k \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ du_n &= \alpha_{n1}\, dq_1 + \cdots + \alpha_{nk}\, dq_k \end{aligned} \tag{23}$$

где су

$$(dq_{1,} \cdots dq_k)$$

ефективне варијације изабраних параметара q_i.

У случајевима веза променљивих у току времена, свака од ефективних варијација $du_{i,}$ у размаку времена од t до $t + dt$, биће равна збиру од једне између остварљивих виртуелних варијација $\delta u_{i,}$ у тренутку t и једне варијације која произлази од модификација самих веза у размаку времена dt и која ће имати за израз

$$A_i\, dt$$

где A_i такође зависи од конфигурације система у тренутку t, или и од самог времена t. За ефективне ће се варијације du_i имати, дакле, обрасци

$$\begin{aligned} du_1 &= \alpha_{11}\, dq_1 + \cdots + \alpha_{1k}\, dq_k + A_1\, dt \\ du_2 &= \alpha_{21}\, dq_1 + \cdots + \alpha_{2k}\, dq_k + A_2\, dt \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ du_n &= \alpha_{n1}\, dq_1 + \cdots + \alpha_{nk}\, dq_k + A_n\, dt \end{aligned} \tag{24}$$

где α_{ik} и A_i могу зависити од елемената $q_{1,} \cdots q_k$ и времена t.

Редуковани дескриптивни систем. — Кад је у једном систему од k степена слободе изабран и уведен један од остварљивих, бескрајно многих, система параметара $q_{1i} \cdots q_{k,}$ тако, да су њихове ефективне варијације и одговарајуће варијације елемената u_i везане релацијама (23), односно (24), из ових варијација, кад год је познат закон по коме се $q_1, \cdots q_k$ мењају у току времена, може се наћи и сам закон варијације елемената $u_1 \cdots u_n'$. Проучавање се ефективних модификација првобитног система

$$(u_1, \cdots u_n)$$

своди, дакле, на проучавање ефективних модификација новога система

$$(q_1 \cdots q_k)$$

који је, по броју својих елемената, простији од првог. Овај ће се систем звати *редукованим дескриптивним системом* дате појаве. Дескрипција тих модификација сведена је, дакле, на дескрипцију начина на који се њој одговарајући редуковани систем мења у току времена. Таквих редукованих система може за једну појаву бити бескрајно много према изабраном систему параметара q_i. При томе се, међу тим, бира онај систем параметара, који је најлакше проучити, или чијим се варијацијама најјасније истиче на видик какав факт у појави који се нарочито има у виду.

Проучавање тока појаве своди се, дакле, у последњој анализи на проучавање слободног кретања фигуративне тачке редукованог система у простору од k димензија. Ако се, пак, хоће да се при том проучавању не губи веза са првобитним системом.

$$(u_1, \cdots u_n)$$

ток се појаве, као што је горе казано, своди на кретање фигуративне тачке првобитног система по једном варијетету k-тог реда у n-димензионалном простору.

Везе прве и друге врсте. Довде проучене везе у систему

$$(u_1, \cdots u_n)$$

зваће се *везама прве врсте.* Међу тим у дескрипцији механизма појаве играју важне улоге везе још једне врсте, али које се своде опет на везе о којима је до сада била реч. Ако се са

$$\xi_1, \cdots \xi_n$$

означе тоталитети елемената

$$u_1, \cdots u_n$$

у размаку времена од t_0 до t, онда ће се за систем

$$(u_1, \cdots u_n)$$

казати да у њему постоје *везе друге врсте,* ако у систему

$$(\xi_1, \cdots \xi_n)$$

постоје везе прве врсте. Тада би се, ако је k степен слободе система, имале за виртуелне варијације елемената ξ_i релације

$$\begin{aligned} \delta\xi_1 &= \alpha_{11}\,\delta q_1 + \cdots + \alpha_{1k}\,\delta q_k \\ \delta\xi_2 &= \alpha_{21}\,\delta q_1 + \cdots + \alpha_{2k}\,\delta q_k \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta\xi_n &= \alpha_{n1}\,\delta q_1 + \cdots + \alpha_{nk}\,\delta q_k \end{aligned} \tag{25}$$

а за њихове ефективне варијације

$$\begin{aligned} d\xi_1 &= \alpha_{11}\,dq_1 + \cdots + \alpha_{1k}\,dq_k + A_1\,dt \\ d\xi_2 &= \alpha_{21}\,dq_1 + \cdots + \alpha_{2k}\,dq_k + A_2\,dt \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d\xi_n &= \alpha_{n1}\,dq_1 + \cdots + \alpha_{nk}\,dq_k + A_n\,dt \end{aligned} \tag{26}$$

Проучавање модификација система

$$(\xi_1, \cdots \xi_n)$$

своди се на проучавање модификација његовог редукованог система

$$(q_1, \cdots q_n)$$

Кад су ове познате, релације

$$(27)\qquad \begin{aligned} u_1 &= \alpha_{11}\, q'_1 + \cdots + \alpha_{1k}\, q'_k + A_1 \\ u_2 &= \alpha_{21}\, q'_1 + \cdots + \alpha_{2k}\, q'_k + A_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n &= \alpha_{n1}\, q'_1 + \cdots + \alpha_{nk}\, q'_k + A_n \end{aligned}$$

које резултују из једначина (7) и релације

$$u_i = \frac{d\xi_i}{dt}$$

дају непосредно закон модификација у првобитном систему

$$(u_1, \cdots u_n)$$

Холономни системи. За један се дескриптивни систем

$$(28)\qquad (u_1, \cdots u_n)$$

са k степена слободе каже да је *холономан*, ако постоји такав један, за њега везани, редуковани систем

$$(29)\qquad (q_1, \cdots q_k)$$

да положај фигуративне тачке N редукованог система у одговарајућем q-димензионалном простору, а у једноме ма коме тренутку, потпуно одређује положај фигуративне тачке M у одговарајућем n-димензионалном простору, а у истоме тренутку. Елементи q_i играју тада улоге *координата* тачке M или система (28).

Кад за дати дескриптивни систем (28) постоји један систем координата (29), постојаће их бескрајно много: ако су

$$(p_1, \cdots p_k) \quad \text{и} \quad (q_1, \cdots q_k)$$

два таква система координата за један исти дескриптивни систем једне појаве, они су међу собом везани релацијама коначног облика

$$
(30) \qquad
\begin{aligned}
p_1 &= f_1\,(q_1 \cdots q_k,\ t) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
p_k &= f_k\,(q_1 \cdots q_k,\ t)
\end{aligned}
$$

где су f_i одређене функције означених промењљивих количина.

Ако је (28) дати дескриптивни систем, а (29) један од његових система координата, између елемената p и елемената q постоје такође релације коначног облика

$$
(31) \qquad
\begin{aligned}
u_1 &= \varphi_1\,(q_1 \cdots q_k,\ t) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u_n &= \varphi_n\,(q_1 \cdots q_k,\ t)
\end{aligned}
$$

Везе, које постоје између виртуелних варијација δu_i и δq_i и које су тада облика

$$
(32) \qquad
\begin{aligned}
\delta u_i &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1}\,\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_k}\,\delta q_k \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\delta u_n &= \frac{\partial \varphi_n}{\partial q_1}\,\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial q_k}\,\delta q_k
\end{aligned}
$$

као и везе између ефективних варијација du_i и dq_i, а које су облика

$$
(33) \qquad
\begin{aligned}
du_1 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1}\,dq_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_k}\,dq_k + A_1\,dt \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
du_n &= \frac{\partial \varphi_n}{\partial q_1}\,dq_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial q_k}\,dq_k + A_n\,dt
\end{aligned}
$$

само су специјални случаји општега облика веза између тих варијација, о којима је напред била реч. У таквом су случају, као што се види, десне стране једначина веза (24) *тотални диференцијали* функција $\varphi_1, \cdots \varphi_n$ што не мора бити у општем случају.

Конкретне примере холономних система представљали би:

I. Систем састављен из скупа геометриских координата, ма које врсте, при кретању једне тачке на датој сталној или покретној површини S, или по датој сталној или покретној линији C, н. пр. правоугле или поларне геометриске координате. Улоге координата q_i игра скуп параметара q_1 и q_2, помоћу којих се изражавају координате једне ма које тачке површине S, или параметар q, помоћу кога се изражавају координате једне, ма које, тачке линије C.

II. Систем при хеликоидалном кретању једнога чврстог тела (обртање око једне утврђене осовине и клизање дуж те осовине), састављен од каквих елемената који су функције угла обртања q_1 почевши од једног одређеног положаја, и величине померања q_2 дуж осовине, почевши од тога положаја. Степен слободе система је 2, а вредности елемената q_1 и q_2 у датом тренутку потпуно одређују положај тела у томе тренутку. Угао обртања и величина транслаторног померања играју улоге координата у систему.

III. Систем при обртању једног чврстог тела око једне утврђене тачке, састављен од елемената који су какве функције трију Euler-ових углова. Степен слободе система је 3, а вредности Euler-ових углова у датом тренутку потпуно одређују положај тела у томе тренутку. Та три угла играју улоге координата у систему.

IV. Систем при мењању количина електрицитета у једноме систему покретних електричних кола са међусобном акцијом, састављен од елемената, који су какве функције количина електрицитета $q_1, \cdots q_n$ у колима кроз која пролазе струје, и геометријских елемената $x_1, \cdots x_m$ који дефинишу положај кола. Степен слободе система је $m + n$, а вредности $q_1, \cdots q_n, x_1, \cdots x_m$ у сваком тренутку дефинишу конфигурацију система у томе тренутку и играју улоге координата у систему.

V. Дескриптивни систем при мењању количина продуката у току једне хемиске реакције, састављен од каквих функција количине q једнога од продуката у току реакције. Степен слободе система је *1* и величина елемента q у датом тренутку потпуно одређује количине свију осталих продуката реакције. Тај елеменат игра улогу координате у таквом дескриптивном систему.

Нехолономни системи. За један се дескриптивни систем (28) са k степена слободе каже да је *нехолономан*, ако не постоји никакав за њега везан редуковани систем (29), чија би фигуративна тачка N својим положајем у једноме ма коме тренутку потпуно одређивала положај фигуративне тачке M система (28) у томе тренутку.

Очевидно је, да ако један скуп елемената $(q_1 \cdots q_k)$ не задовољава услове, који треба да су испуњени, па да један дати дескриптиван систем буде холономан, неће их задовољавати никакав скуп елемената $(p_1 \cdots p_k)$ који би били какве одређене функције елемената q_i и времена t.

Релације

$$\begin{array}{c} du_1 = \alpha_{11}\, dq_1 + \cdots + \alpha_{1k}\, dq_k + A_1\, dt \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ du_n = \alpha_{n1}\, dq_1 + \cdots + \alpha_{nk}\, dq_k + A_n\, dt \end{array}$$

између ефективних варијација елемената u_i, q_i и времена t, таквог су облика, да им десне стране *нису то-*

тални диференцијали никакве функције елемената q_i *и времена* t, тако, да их је немогућно написати у коначном облику

$$u_1 = \varphi_1 (q_1, \cdots q_k, t)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_n = \varphi_n (q_1, \cdots q_k, t)$$

Оне допуштају да се за један ма који скуп бескрајно малих виртуелних варијација $\delta q_1, \cdots \delta q_k$ израчунају одговарајуће бескрајно мале виртуелне варијације $\delta u_1 \cdots \delta u_n$ као и то, да се за један, ма који, скуп ефективних варијација $dq_1, \cdots dq_k$, учињених у бескрајно малом размаку времена dt, израчунају одговарајуће варијације $du_1, \cdots du_n$, али су недовољне да се помоћу њих може из једног датог скупа вредности $g_1, \cdots q_k$ одредити сама конфигурација $(u_1, \cdots u_n)$ система, која томе скупу одговара. Ово би последње било могућно само онда, кад би се познавао целокупан низ бескрајно многих бескрајно малих варијација $(du_1, \cdots du_n)$, којима се поступно у току појаве прешло од једне дате почетне конфигурације $(u_0, u_0, \cdots u_0)$ на конфигурацију која има да се одреди за један дати тренутак. Другим речима: за одредбу положаја фигуративне тачке M у датоме тренутку, а помоћу елемената редукованог система, потребно је знати не само положај одговарајуће тачке N у томе тренутку, већ и појединости кретања ове тачке до тога тренутка, које ју је довело у тај положај.

Конкретне примере нехолономних система представљали би:

I. Ма какав дескриптивни систем при котрљању (без клизања) каквога чврстог тела по једној утврђеној површини S. Јер, положај је чврстог тела потпуно одређен помоћу 6 елемената $u_1, \cdots u_6$, н. пр.: помоћу три координате његовог тежишта и три Euler-ова угла. Котрљање је, међу тим, кретање такве природе, да је у сваком тренутку t брзина оне тачке тела, која је у томе тренутку у додиру са површином S, равна нули. Тај се услов изражава једначинама облика

$$c_1\, du_1 + \cdots + c_6\, du_6 = o$$

где су $c_1, \cdots c_6$ одређене функције елемената $u_1, \cdots u_6$ а које су, у опште таквог облика, да им леве стране нису тотални диференцијали никакве функције, нити имају интегрантних фактора. Везе су, дакле, такве природе, да их је немогућно изразити у облику коначних релација између елемената $u_1, \cdots u_6$, и према томе и ове је немогућно изразити као одређене функције елемената q_i са произвољним варијацијама и таквих, да скуп вредности q_i одређује конфигурацију система $(u_1, \cdots u_6)$. Овај је систем дакле нехолономан.

То се, у осталом, још одређеније види из ових специјалних примера:

a) Котрљање једне хомогене кугле полупречника a по једној утврђеној хоризонталној равни P. Уочимо један утврђен координантни систем осовина $o\xi$, $o\eta$, $o\varphi$, такав, да се осовине $o\xi$ и $o\eta$ налазе у равни P, а да је осовина $o\xi$ управна на ту раван и да се налази са оне стране равни, на којој се налази кугла. Нека су ξ, η, ξ координате центра c кугле у томе систему (координата ξ је стална и има вредност a). Повуцимо кроз центар c три осовине cx_1, cy_1, cz_1, паралелне осовинама $o\xi$, $o\eta$, $o\xi$, и нека су θ, φ, ψ три Euler-ова угла једнога система осовина cx, cy, oz везаног за куглу, а према осовинама cx_1, cy_1, cz_1. Изразивши да је кретање кугле котрљање, т. ј. да је брзина додирне тачке кугле и равни P у свакоме тренутку равна нули, налази се да су остварљиве виртуелне варијације елемената ξ, η, ξ, θ, φ, ψ везане релацијама¹):

---

¹) Appell: Traité de Mécanique rationelle 2. ed. t. II. p. 364.

$$\delta\xi - a \sin\psi\, \delta\theta + a \sin\theta \cos\psi \cdot \delta\varphi = o$$
$$\delta\eta + a \cos\psi\, \delta\theta + a \sin\theta \sin\psi \cdot \delta\varphi = o$$

а остварљиве ефективне варијације релацијама

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & d\xi - a \sin\psi\, d\theta + a \sin\theta \cos\psi\, d\varphi = o \\ & d\eta + a \cos\psi\, d\theta + a \sin\theta \sin\psi\, d\varphi = o \end{aligned} \right.$$

Пошто је координата ξ стална, положај кугле зависи од пет параметара ξ, η, θ, φ, ψ, везаних двама релацијама (1), чије леве стране нису тотални диференцијали и које су неинтегребилне. Систем $(\xi, \eta, \theta, \varphi, \psi)$ је, дакле, нехолономан и са три степена слободе.

b) Котрљање обруча полупречника a по једној утврђеној хоризонталној равни P. Нека су ξ, η, ξ координате тежишта C обруча према једноме утврђеном систему осовина, таквих, да су осовине $o\xi$ и $o\eta$ у равни P, а осовина $o\xi$ вертикална и изнад те равни. Нека су за тим, θ, φ, ψ три Euler-ова угла који одређују положај обруча према једном покретном систему осовина $c\xi$, $c\eta$, $c\xi$, што пролазе кроз тежиште C, а паралелне су утврђеним осовинама $o\xi$, $o\eta$, $o\xi$. Изразивши да је брзина додирне тачке обруча и равни P равна нули, налази се[1]) да су остварљиве виртуелне варијације елемената $\xi, \eta, \xi. \theta, \varphi, \psi$ везане релацијама

$$\delta\xi - a \sin\psi \sin\theta \cdot \delta\theta + a \cos\psi \cos\theta \cdot \delta\psi - a \cos\psi\, \delta\varphi = o$$
$$\delta\eta + a \cos\psi \sin\theta \cdot \delta\theta + a \sin\psi \cos\theta \cdot \delta\psi - a \sin\psi\, \delta\varphi = o$$
$$(34) \qquad \delta\xi - a \cos\psi \cdot \delta\theta = o$$

а остварљиве ефективне варијације релацијама

$$d\xi - a \sin\psi \sin\theta \cdot d\theta + a \cos\psi \cos\theta \cdot d\psi - a \cos\psi \cdot d\varphi = o$$
$$d\eta + a \cos\psi \sin\theta \cdot d\theta + a \sin\psi \cos\theta \cdot d\psi - a \sin\psi \cdot d\varphi = o$$
$$(35) \qquad d\xi - a \cos\psi \cdot d\theta = o$$

---

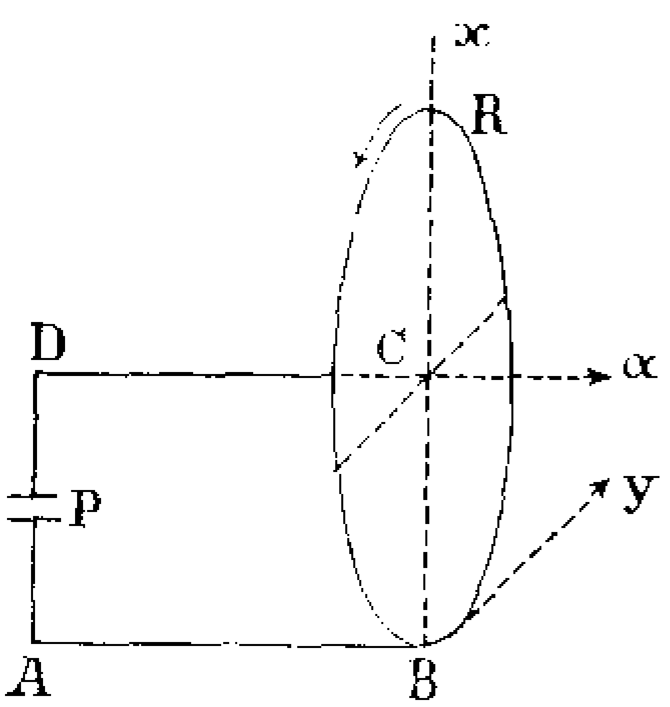
[1]) Appell: loc. cit. p. 365.

Трећа од релација (2) је интеграбилна и даје

$$\xi = a \sin \theta$$

али прве су две неинтеграбилне и показују да је систем $(\xi, \eta, \zeta, \theta, \varphi, \psi)$ нехолономан систем са три степена слободе.

II. Дескриптивни систем при променама електричног стања у покретним полидимензионалним проводницима. Уочимо н. пр. систем (Barlow-љев точак) од два електрична кола, састављен на овај начин: прво коло $ABCD$, које ће бити означено са C_1, налази се у равни слике; AB и CD су две хоризонталне жице, DA вертикална жица прекинута електричним елементом P. На послетку другу вертикалну страну BC саставља вертикални полупречник једнога точка R, управног на CD, који је металан, пун и покретан око своје осовине DC. Друго коло C_2 образује један соленоид који ствара једно магнетно поље правца DC.



(Сл. 20)

Кад се точак почне обртати, јачине ће се струја i_1 и i_2 у колима C_1 и C_2 и количине електрицитета q_1 и q_2 у њима мењати поступно у току кретања. Узмимо за дескриптивне елементе: количине електрицитета q_1 и q_2 и угао ротације θ точка. Дескриптивни систем појаве је систем са три степена слободе: свакоме се од три елемента q_1, q_2, θ могу дати произвољне, једна од друге независне варијације и на тај се начин добија најопштија могућна виртуелна модификација у систему. Кад би проводник био линеаран, н. пр. врло танка жица, где струја непрестано пролази кроз једне исте материјалне делиће, скуп та три елемента (q_1, q_2, θ) својим вредностима у датом тренутку потпуно би одређивао електрично стање у колима и геометриске положаје саставних делова материјалног система. Међу тим то није случај код овде описанога система, где се струја при окретању точка непрестано помера у овоме. Пропустимо н. пр. кроз коло c_2 количину електрицитета q_1 па затим окренимо точак за угао θ; топлота, која се производи Joule-овим ефектом, производи се на вертикалном полупречнику точка. Но ако се прво точак окрене за угао θ, па тек тада пропусти струја, топлота ће се произвести на другоме једном полупречнику, који са првим гради угао θ. Да би се познавало електрично и геометриско стање материјалног система у датоме тренутку t, није довољно познавати само величине елемената q_1, q_2, θ у томе тренутку, већ треба да је дат и начин на који се симултано мењају елементи θ и q_1, а који се не може добити из диференцијалних релација између тих елемената.

Случај је сличан са оним при кретању обруча: да би се могло знати да ли је обруч, пошавши од једног почетног места A, стигао у једно одређено место B, потребно је, поред познавања три елемента у местима A и B: угла хода, угла скретања од правца AB и угла пада, познавати још и закон симултаних варијација прва два угла почевши од места A а овај се не може добити из диференцијалних релација између тих елемената. Дескриптиван систем, о коме је реч, јесте дакле нехолономан систем.

* * *

ДРУГИ ОДЕЉАК

Спона између механизма и манифестације појава: диференцијалне једначине појава.

ПРВА ГЛАВА.

ОСНОВНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ.

Примарни и секундарни систем. — Спона међу активним и пасивним улогама: једначине модификација у примарном и секундарном систему. — Искључиви и делимични непосредни узрок. — Основне једначине комплексних појава. — Слободан систем. — Систем са везама прве и друге врсте. — Реакције веза и њихова одредба.

Спона између механизма појаве и појединости, у којима се она манифестује, има за непосредан аналитички израз скуп диференцијалних једначина, у којима су експлицитно резимиране појединости механизма, а имплицитно појединости њене манифестације, као нужне последице датога састава механизма.

Једначине су разноврснога облика према природи изабратога дескриптивног система. Оне су најпростијега могућног облика за примарни и секундарни систем у датој појави.

I. Опште једначине за модификације у примарном и секундарном систему.

Примарни и секундарни систем у појави. Познавати акцију једнога одређеног узрока, или комплекса узрока, на један дати објекат, или комплекс објеката, значи познавати у сваком тренутку t модификације, које комплексу објеката импозира присуство тих узрока. Ове се, пак, модификације састоје у једноме низу позитивних или негативних прираштаја одређених елемената $u_1, \cdots u_n$, којих прираштаја нестаје кад се уклони присуство узрока, а који се безусловно појављују кад се ово присуство оствари.

Да би се ови прираштаји могли израчунавати за сваки дати тренутак, потребно је познавати величине тежња примењених непосредно, било на саме елементе $u_1, \cdots u_n$, било на какве друге елементе, који су са овима у таквој вези, да се из њихових прираштаја могу израчунати одговарајући прираштаји првих елемената.

Нека је

$$(v_1 \cdots v_n)$$

такав један скуп елемената, везаних за посматрани систем

$$(u_1 \cdots u_n)$$

и карактерисаних тиме, да се за сваки елеменат v_i понаособ познаје величина тежње, чијом се акцијом он мења у току појаве, т. ј. да се познају компоненте X_i посматраног узрока у правцу осовине ov_i. Такав скуп састав a један систем, који ће бити назван *примарним* системом посматране појаве. У појавама механичких кретања примарни би систем био скуп компонената брзина, јер компоненте сила имају за непосредне објекте компоненте брзина. У појавама кретања електрицитета примарни је систем скуп од јачина струја, јер су ове непосредни објекат електромоторних и реактивних електричних сила. При хемиским трансформацијама примарни систем је скуп брзина којима се поједина тела трансформишу, јер су ове непосредни објекти трансформаторских хемиских тежња. При термичним модификацијама какхог тела примарни систем састављају саме температуре и т. д.

У извесним случајевима дешава се да проучавање појаве постаје простије, кад се, посматрају промене система састављеног од тоталитета елемената система

$$(v_1 \cdots v_n)$$

у размаку од почетног тренутка t_0 до датог тренутка t_1 т. ј. систем састављен од елемената

$$(\eta_1 \cdots \eta_n)$$

дефинисаних једначинама

$$\eta_i = \int_{t_0}^{t_1} v_i \, dt$$

Систем

$$(\eta_1 \cdots \eta_n)$$

зваће се *секундарним* системом појаве. При механичким кретањима секундарни систем састављао би скуп координата. При кретању електрицитета тај би систем састављао скуп електричних оптерећења. При хемиским трансформацијама он би био састављен од количина продуката награђених за време реакције у датом размаку времена и т. д.

Проблем проучавања акције датог комплекса узрока своди се, тада, на ова два проблема:

1. Одредити законе по којима се елементи примарног система мењају у току времена под утицајем датих тежња, чије су величине познате а кад се знају везе у систему.

2. Из познатих закона варијација елемената примарног или секундарног система извести законе варијација елемената првобитног система

$$(u_1 \cdots u_n)$$

За решавање другога од ова два проблема треба да су познате везе или примарног или секундарног система и првобитног, и он се тада лако решава. Релације, које исказују те везе, могу бити такве, да кад се зна конфигурација примарног или секундарног система v_i или η_i у једном датом тренутку, може се одмах знати и конфигурација првобитног система u_i у том тренутку. Такав је случај у појавама са холономним системом.

Међу тим, те везе могу бити и такве, да се из њих помоћу познатих прираштаја елемената v_i у једном датом тренутку могу израчунати одговарајући прираштаји елемената u_i у истом тренутку, али да при том сама дата конфигурација првога система није довољна за одредбу одговарајуће конфигурације другога у том тренутку. Такав је случај појава са нехолономним системом.

Први се, пак, проблем своди на формирање и интеграцију диференцијалних једначина, које везују промене непосредних објеката и величине тежња које су непосредно на њих примењене.

Спона међу активним и пасивним улогáма: једначине модификација у примарном и секундарном систему. За један ће се узрок C, коме се приписује перманентна тежња X да мења елеменат v као непосредан објекат, казати да је *искључиви непосредни узрок* промена тога елемента, ако се v престаје мењати кад узрока C нестане, а почиње се изнова мењати, кад се узрок опет појави.

За узрок ће се C казати да је *делимични непосредни узрок* промена елемента v, кад варијације тога елемента, ма да су модификоване присуством узрока C, ипак не престају са његовим престанком, али да кад се акцији овога узрока придода симултана акција извесног скупа узрока C_1, скуп се $C + C_1$ понаша као искључиви непосредни узрок тих варијација.

При падању тела у безваздушном простору тежа је искључиви и непосредни узрок променама брзине, као њеног непосредног објекта. При падању кроз ваздух скуп теже и ваздушног отпора представља искључиви и непосредни узрок, док је, међу тим, сама тежа делимични непосредни узрок променама брзина.

Разликујмо према томе ова два случаја:

1. Нека је узрок C искључиви и непосредни узрок промена елемента v. Према самој дефиницији величине тежња X, везане за v као непосредни објекат, биће

$$k \frac{dv}{dt} = X \tag{36}$$

где је k известан реалан и позитиван коефицијенат, независан од величина промена елемента v. Кад је познат перманентни закон тежње X, једначина (36) регулише начин на који се мења v т. ј. регулише акцију узрока C.

2. Нека су

$$C_1, C_2, C_3, \cdots$$

делимични непосредни узроци промена елемента v, тако да се комплекс тих узрока понаша као искључиви непосредни узрок тих промена. Нека су

$$X_1, X_2, X_3 \cdots$$

величине одговарајућих тежња тих узрока, па ће се из онога, што је напред казано, имати једначина

$$k \frac{dv}{dt} = X_1 + X_2 + X_3 \cdots \tag{37}$$

која у томе случају регулише промене елемента v, па дакле и акцију комплекса узрока $C_1, C_2, C_3 \cdots$

Оба ова случаја претпостављају да се примарни систем састоји само из једног елемента v. Нека се, сад, тај систем састоји из n елемената

$$(v_1, \cdots v_n)$$

таквих, да се за сваки од њих понаособ познаје комплекс делимичних непосредних узрока, примењених непосредно на тај елеменат. Нека су

$$X_{1i}, X_{2i}, X_{3i}, \cdots$$

величине одговарајућих тежња појединих узрока таквога комплекса примењеног непосредно на елеменат v_i. Према ономе, што је напред казано, имаће се систем једначина

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_1 \frac{dv_1}{dt} = X_{11} + X_{21} + X_{31} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_n \frac{dv_n}{dt} = X_{1n} + X_{2n} + X_{3n} + \cdots \end{array} \right.$$

које у томе случају регулишу промене елемената $v_1, \cdots v_n$.

Према облику перманентних закона тежња X_{ik}, једначине (36), (37), (38), које регулишу промене у примарном систему, могу бити: или обичне диференцијалне једначине, или систем симултаних једначина, или парцијалне диференцијалне једначине, или систем симултаних парцијалних диференцијалних једначина, или мешовите функционално-диференцијалне једначине, или систем функционално-диференцијалних једначина.

Из тих се једначина, у осталом, лако изводе и *основне једначине за секундарни* систем

$$(\xi_1, \cdots \xi_n)$$

простом сменом

$$v_1 = \frac{d\xi_1}{dt}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$v_n = \frac{d\xi_n}{dt}$$

II. Основне једначине простих појава.

Под *простом појавом* има се разумети свака појава, чији се примарни систем своди на само један елеменат v и где у одговарајући израз тежње X не улази никакав други елеменат, осим комбинација времена t и елемента v. Такве би н. пр. појаве биле:

1° Праволинијско кретање једне тачке, где улогу елемента v игра брзина, а улогу тежње X сила;

2° апсорпција светлости, где улогу елемента v игра јачина светлости, а улогу тежње X депресивна тежња апсорбујућег слоја;

3° појава електричног испаравања, где је параметар v електрично оптерећење површине течности, а тежња X тежња површине да изједначи своје електрично стање са стањем околине;

4° испражњавање електричног кондензатора, где улогу v игра количина електрицитета на арматурама, а улогу тежња X_1 и X_2 играју индукциона реактивна сила и контра-електромоторна сила, и т. д.

Ток појаве регулисан је једначином

$$k\frac{dv}{dt} = X \tag{39}$$

где X означује алгебарски збир величина тежња, везаних за комплекс делимичних непосредних узрока, који мењају објекат v.

Једначина (39) изражава, у исто време, и један постулат, коме се може дати овај облик:

Назовимо *финалним ефектом* посматраног комплекса узрока X, у размаку времена од t до t_1, разлику

$$v - v_1$$

(где v и v_1 означавају вредности параметра v у тренуцима t и t_1). *Елементарни ефекат* у бескрајно малом размаку времена од t до $t + dt$ биће тада dv и једначина (39), написана у облику

$$dv = \frac{1}{k} X\, dt \tag{40}$$

тада изражава овај принцип:

Елементарни ефекат каквог комплекса непосредних узрока пропорционалан је величини тежње, приписане томе комплексу, и величини размака времена у коме је тај ефекат извршен.

Иста једначина (39) показује и то, да је *интензитет појаве у сваком тренутку пропорционалан величини тежње комплекса непосредних узрока у томе тренутку.*

Реалан и позитиван коефициенат k игра улогу масе при кретањима и генералише тај појам. Израз

$$V = -k \frac{dv}{dt}$$

генералише појам силе инерције у Механици и биће назван *инерцијом појаве.* Кад величина тежње остаје непромењена, према једначини (39) промене елемента v биће у толико слабије, у колико је већи коефициенат k. Тај ће се коефициенат с тога звати *коефициенат инерције* објекта v.

При транслаторном кретању, које је регулисано једначином

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

где је m маса, v брзина, F сила, улогу коефициента инерције игра механичка маса.

При ротационом кретању, за које важи једначина

$$J \frac{dw}{dt} = F$$

где J означава моменат инерције, w угао обртања, а F моторни спрег, улогу тога коефициента игра моменат инерције.

При кретању електрицитета, које је регулисано једначином

$$r\frac{dq}{dt}=E$$

где је r електрични отпор, q количина електрицитета, E електромоторна сила електричног извора, н. пр. батерије, ту улогу игра електрични отпор.

Према модерној теорији кретања гасовитих јона у каквом електричном пољу, слободни се јони крећу брзином пропорционалном интензитету X поља, тако, да те брзине имају за вредност $k_2 X$ за позитивне јоне у правцу линија сила, и $k_2 X$ за негативне јоне у супротном правцу. Коефициенти k_1 и k_2, који се називају коефициентима покретљивости јона, мењају се са природом и стањем гаса и у опште су различни међу собом, пошто су негативни јони покретљивији од позитивних. Изврнуте вредности

$$\frac{1}{k_1} \text{ и } \frac{1}{k_2}$$

ових коефициената играју у појави улогу коефициената инерције и т. д.

Приметимо и то, да ако се *импулс тежње* X у размаку времена од t_0 до t буде дефинисао изразом

$$\int_{t_0}^{t} X\,dt$$

из једначине се (39), написане у облику

$$v-v_0=\frac{1}{k}\int_{t_0}^{t} X\,dt$$

види да је *финални ефекат једне тежње, у једном датом размаку времена, пропорционалан импулсу тежње у том размаку*.

III. Основне једначине комплексних појава.

Под *комплексном појавом* има се разумети свака појава која се своди на модификације у једном систему

$$(41) \qquad (v_1, \cdots v_n)$$

што садржи више од једног елемента v_i и код које:

1. Или тежње X_i, примењене на v_i, зависе и од осталих елемената v_i;

2. или елементи v_i нису међу собом потпуно независни, већ н. пр. у систему постоје везе прве или друге врсте.

Нека је дата једна појава такве врсте, којој одговара систем (41), изложен акцији једнога комплекса узрока таквих, да је X_i величина тежње примењене непосредно на објекат v_i. Нека је V_i инерција елемента v_i, а k_i одговарајући коефицијенат инерције. Разликујмо тада ове случајеве:

Први случај: слободан систем. — Ако се образује израз

$$(42) \qquad \Omega_1 = (X_1 + V_1)\,\delta v_1 + \cdots + (X_n + V_n)\,\delta v_n$$

пошто је у случају слободног система увек

$$(43) \qquad -V_i = X_i$$

биће и $\Omega_1 = o$ за произвољан систем варијација $(\delta v_1, \cdots \delta v_n)$; и обрнуто, ако једначина $\Omega_1 = o$ важи за произвољне варијације δv_i, онда ће постојати и једначине (43).

Тако исто ако се образује израз

$$(44) \qquad \Omega_2 = (X_1 + V_1)\,\delta \eta_1 + \cdots + (X_n + V_n)\,\delta \eta_n$$

где су η_i тоталитети елемената v_i, биће $\Omega_2 = o$ за произвољан систем варијација $\delta\eta_i$; и обрнуто, кад год једначина $\Omega_2 = o$ важи за произвољне варијације $\delta\eta_i$, имаће се и једначина (43). Према томе: *кад год је систем слободан, једначине појаве (43) скупљене су у којој се хоће од једначина* $\Omega_1 = o$ *или* $\Omega_2 = o$.

Други случај: системи са везама. — Нека је дат систем

$$(v_1, \cdots v_n)$$

са k степена слободе, тако, да је број веза у њему

$$m = n - k$$

Кад неби било веза, имале би се једначине: $\Omega_1 = o$ и $\Omega_2 = o$. Овде ће бити показано, да у случају и кад постоје везе, било прве, било друге врсте, једначине појаве могу се свести на једначине једног слободног система, тако, да ће бити обухваћене једним обрасцем облика

$$(45) \quad \Omega_1 = (Y_1 + V_1)\,\delta v_1 + \cdots + (Y_k + V_k)\,\delta v_k = o$$

ако су везе прве врсте; или обрасцем облика

$$(46) \quad \Omega_2 = (Y_1 + V_1)\,\delta\eta_1 + \cdots + (Y_k + V_k)\,\delta\eta_k = o$$

ако су везе друге врсте, где су

$$(\delta v_1, \cdots \delta v_k)$$

односно

$$(\delta\eta_1, \cdots \delta\eta_k)$$

произвољне варијације елемената $v_1, \cdots v_k$ односно $\eta_1, \cdots \eta_k$, тако, да се систем $(v_1, \cdots v_n)$ може сматрати као сведен на систем $(v_1, \cdots v_k)$, који је потпуно слободан, и да ће према томе једна или друга од једначина

$$\Omega_1 = o \text{ односно } \Omega_2 = o$$

опет обухватити једначине модификација система.

a) **Случај веза прве врсте.** — Нека су

$$(47) \quad \begin{cases} a_{11}\, \delta v_1 + \cdots + a_{1n}\, \delta v_n = o \\ a_{21}\, \delta v_1 + \cdots + a_{2n}\, \delta v_n = o \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\, \delta v_1 + \cdots + a_{mn}\, \delta v_n = o \end{cases}$$

једначине које исказују везе између виртуелних промена елемената $v_1, \cdots v_n$. Множећи прву од тих једначина са λ_1, другу са λ_2 и т. д. последњу са λ_m, где су $\lambda_1, \cdots \lambda_m$ за сад неодређени коефициенти, и сабирајући тако добијене једначине са једначином

$$\Omega_1 = (X_1 + V_1)\, \delta v_1 + \cdots + (X_n + V_n)\, \delta v_n$$

добија се

$$(48) \quad \Omega_1 = [X_1 + \Psi_1 + V_1]\, \delta v_1 + \cdots + [X_n + \Psi_n + V_n]\, \delta v_n$$

где је

$$(49) \quad \begin{cases} \Psi_1 = \lambda_1\, a_{11} + \cdots + \lambda_m\, a_{m1} \\ \Psi_2 = \lambda_1\, a_{12} + \cdots + \lambda_m\, a_{m2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Psi_n = \lambda_1\, a_{1n} + \cdots + \lambda_m\, a_{mn}. \end{cases}$$

Одредимо сад коефициенте $\lambda_1, \cdots \lambda_m$ тако да буде

$$(50) \quad \begin{cases} X_{k+1} + \Psi_{k+1} + V_{k+1} = o \\ X_{k+2} + \Psi_{k+2} + V_{k+2} = o \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n + \Psi_n + V_n = o \end{cases}$$

па се једначина (48) своди на

$$\Omega_1 = (Y_1 + V_1)\,\delta v_1 + \cdots + (Y_k + V_k)\,\delta v_k \tag{51}$$

где је

$$\left| \begin{array}{l} Y_1 = X_1 + \Phi_1 \\ Y_2 = X_2 + \Phi_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_k = X_k + \Phi_k \end{array} \right. \tag{52}$$

а где $\Phi_1, \cdots \Phi_k$ означују вредности $\Psi_1, \cdots \Psi_k$, дефинисане помоћу k првих једначина (49), пошто се у овима $\lambda_1, \cdots \lambda_m$ смене вредностима израчунатим из једначина (50), којих има тачно m.

Израз на левој страни једначине (51) представља функцију Ω_1 што одговара систему $(v_1, \cdots v_n)$ са m веза прве врсте и са тежњама $X_1, \cdots X_n$. Израз на десној страни представља функцију Ω_1 што одговара потпуно слободном систему $(v_1, \cdots v_k)$, код кога би на елементе $v_1, \cdots v_k$ биле непосредно намењене тежње $Y_1, \cdots Y_k$; па пошто је за овај последњи систем тај израз раван нули, јер је систем слободан, биће функција Ω_1 за првобитни систем такође равна нули.

Отуда закључак: *израз*

$$\Omega_1 = (X_1 + V_1)\,\delta v_1 + \cdots + (X_n + V_n)\,\delta v_n$$

биће раван нули, било да је систем слободан, било да у њему има веза прве врсте. У првом случају он повлачи собом низ једначина:

$$\left| \begin{array}{l} X_1 + V_1 = o \\ X_2 + V_2 = o \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n + V_n = o \end{array} \right. \tag{53}$$

које се имају сматрати као једначине што одређују законе промена елемената $v_1, \cdots v_n$. У другом случају она повлачи собом низ једначина

$$(54) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X_1 + \boldsymbol{\Phi}_1 + V_1 = o \\ X_2 + \boldsymbol{\Phi}_2 + V_2 = o \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ X_k + \boldsymbol{\Phi}_k + V_k = o \end{array} \right.$$

које, придодате једначинама (50) и једначинама веза (47), одређују законе промена елемената $v_1, \cdots v_n$.

b) **Случај веза друге врсте.** Нека су

$$(55) \qquad \left\{ \begin{array}{l} b_{11}\,\delta\eta_1 + \cdots + b_{1n}\,\delta\eta_n = o \\ b_{21}\,\delta\eta_1 + \cdots + b_{2n}\,\delta\eta_n = o \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{m1}\,\delta\eta_1 + \cdots + b_{mn}\,\delta\eta_n = o \end{array} \right.$$

једначине веза између варијација $\delta\eta_i$ тоталитета елемената v_i. Множећи прву од једначина (55) са λ_1, другу са λ_2 и т. д. и сабирајући тако добијене једначине са једначином

$$\boldsymbol{\Omega}_2 = (X_1 + V_1)\,\delta\eta_1 + \cdots + (X_n + V_n)\,\delta\eta_n$$

добија се

$$\boldsymbol{\Omega}_2 = [X_1 + \boldsymbol{\Psi}_1 + V_1]\,\delta\eta_1 + \cdots + [X_n + \boldsymbol{\Psi}_n + V_n]\,\delta\eta_n$$

где $\boldsymbol{\Psi}_i$ имају вредности:

$$(56) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\Psi}_1 = \lambda_1\, b_{11} + \cdots + \lambda_m\, b_{m1} \\ \boldsymbol{\Psi}_2 = \lambda_1\, b_{12} + \cdots + \lambda_m\, b_{m2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{\Psi}_n = \lambda_1\, b_{1n} + \cdots + \lambda_m\, b_{mn} \end{array} \right.$$

Ако се $\lambda_1, \cdots \lambda_m$ изберу тако, да буду задовољене једначине

$$(57) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X_{k+1} + \Psi_{k+1} + V_{k+1} = o \\ X_{k+2} + \Psi_{k+2} + V_{k+2} = o \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n + \Psi_n + V_n = o \end{array} \right.$$

израз се Ω_2 своди на

$$(58) \qquad \Omega_2 = (Y_1 + V_2)\,\delta\eta_1 + \cdots + (Y_k + V_k)\,\delta\eta_k$$

где $Y_1, \cdots Y_k$ имају исте вредности као и у случају а), само што су коефициенти a_{ik} смењени коефициентима b_{ik}.

Израз на левој страни једначине (58) представља функцију Ω_2 што одговара систему $(v_1, \cdots v_n)$ са m веза друге врсте и тежњама $X_1, \cdots X_n$. Израз на десној страни те једначине представља функцију Ω_2 што одговара потпуно слободном систему $(v_1, \cdots v_k)$, код кога би на елементе $v_1, \cdots v_k$ биле непосредно примењене тежње $Y_1, \cdots Y_k$. Па пошто је за овај последњи систем тај израз раван нули, биће, дакле, $\Omega_2 = o$ и за првобитни систем. Отуда исти *закључак као и у случају веза прве врсте*, само с том разликом, што су варијације δv_i смењене варијацијама $\delta\eta_i$, а коефициенти a_{ik} смењени коефициентима b_{ik}.

Из свега тога види се још и ово:

Систем $(v_1 \cdots v_n)$ са m веза, било прве, било друге врсте, и тежњама $X_1, \cdots X_n$ понаша се као слободан систем $(v_1, \cdots v_k)$, пошто се свакој тежњи $X_1, \cdots X_n$ придода једна тежња Φ_i примењена непосредно на објекат v_i, и чији су јачина Ψ_i и знак дефинисани једначинама (57).

Ове тежње, којима се у систему могу потпуно заменити везе, а да се тиме ни у колико не промени ток појаве, биће назване *реакцијама веза* у систему. Такве би тежње биле н. пр. нормалне реакције при кретању тачке по датој површини или датој линији. Мењање запремине и притиска једнога гаса под утицајем датих узрока дешава се тако, као да та два елемента нису међу собом везана, али да је комплексу узрока, што изазивају те промене, придата и једна одређена тежња што, као реакција веза, одговара вези тих елемената, израженој у Mariotte-овом закону. Мењање јачина једнога система струја, којима би унапред биле импозиране везе, дешава се као да је систем ослобођен тих веза, али да су ефективним узроцима промена, као што су електромоторне силе електричних елемената и реактивне индукционе силе, придодате нарочите фиктивне силе као реакције веза.

Одредба реакција веза Φ_i. Одредба ових реакција, као функција тежња X_i елемената v_i и времена t, била би извршена на овај начин:

a) **Случај веза прве врсте.** Пошто $\Phi_1, \cdots \Phi_k$ нису ништа друго до $\Psi_1, \cdots \Psi_k$ са прецизираним вредностима $\lambda_1, \cdots \lambda_m$, које тога ради треба израчунати из ранијих једначина (50), то се проблем своди на израчунавање:

1) n количина $v_1, \cdots v_n$;
2) m количина $\lambda_1, \cdots \lambda_m$;
3) k количина $\Psi_1, \cdots \Psi_k$.

Тога ради из n једначина

$$\begin{aligned} \Psi_1 - k_1 v_1' &= - X_1 \\ \Psi_2 - k_2 v_2' &= - X_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Psi_n - k_n v_n' &= - X_n \end{aligned}$$

m једначина веза

$$\begin{aligned} a_{11} v_1' + \cdots + a_{1n} v_n' &= - A_1 \\ a_{21} v_1' + \cdots + a_{2n} v_n' &= - A_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} v_1' + \cdots + a_{mn} v_n' &= - A_m \end{aligned}$$

n једначина

$$\begin{aligned}
\Psi_1 - a_{11}\lambda_1 - \cdots - a_{1m}\lambda_m &= 0\\
\Psi_2 - a_{21}\lambda_1 - \cdots - a_{2m}\lambda_m &= 0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\
\Psi_n - a_{n1}\lambda_1 - \cdots - a_{nm}\lambda_m &= 0
\end{aligned}$$

[свега $2n + m$ једначина] треба израчунати $2n + m$ непознатих

$$\begin{gathered}
v_1', \cdots v_n'\\
\lambda_1, \cdots \lambda_m\\
\Psi_1, \cdots \Psi_n;
\end{gathered}$$

између тако одређених израза ψ_i изрази

$$\Psi_1, \Psi_2, \cdots \Psi_k$$

представљаће тражене изразе за одговарајуће реакције веза

$$\Phi_1, \Phi_2, \cdots \Phi_k)$$

Експлицитни облик ових израза био би овај: формирајмо детерминанте

$$\Delta = (-1)^m \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} & 0 & & \cdot & \cdot & 0\\
a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} & 0 & & \cdot & \cdot & 0\\
\cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot & & & & \cdot\\
\cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot & & & & \cdot\\
\cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot & & & & \cdot\\
a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} & 0 & & \cdot & \cdot & 0\\
k_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{11} & a_{21} & \cdot & \cdot & 0\\
0 & k_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{12} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{m2}\\
\cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot & & & & \cdot\\
\cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot & & & & \cdot\\
\cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot & & & & \cdot\\
0 & 0 & \cdot & \cdot & k_{n-1} & 0 & a_{1n-1} & a_{2n-1} & & \cdot & a_{mn-1}\\
0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & k_n & a_{1n} & a_{2n} & \cdot & \cdot & a_{mn}
\end{vmatrix}$$

$$D_1 = (-1)^m \begin{vmatrix} -X_1 & -k_1 & o & \cdots & o & o & & \cdots & o \\ A_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & o & & \cdots & o \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & o & & \cdots & o \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & o & & \cdots & o \\ X_1 & k_1 & o & \cdots & o & a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ X_2 & o & k_2 & \cdots & o & a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n-1} & o & o & \cdots\, k_{n-1} & o & a_{1n-1} & a_{2n-1} & \cdots & a_{mn-1} \\ X_n & o & o & \cdots\, o & k_n & a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

као и низ детерминаната

$$D_2, D_3, \cdots D_k$$

таквих, да се у опште D_i добија кад се у D_1 смени

$$\begin{array}{ccc} k_1 & \text{са} & k_i \\ k_2 & \text{са} & k_{i+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ k_n & \text{са} & k_{i-1} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} a_{r1} & \text{са} & a_{ri} \\ a_{r2} & \text{са} & a_{r,i+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{rn} & \text{са} & a_{r,i-1} \end{array}\right\} \quad r = 1, 2, \cdots m$$

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \text{са} & X_i \\ X_2 & \text{са} & X_{i+1} \\ \cdot & & \cdot \\ X_n & \text{са} & X_{i-1} \end{array}$$

па се за реакције веза добијају изрази

$$\Phi_1 = \frac{D_1}{\Delta} \quad . \; . \; . \quad \Phi_k = \frac{D_k}{\Delta}$$

Тако н. пр. у специјалном случају, кад је број елемената 3, а број веза 1, и ако та веза повлачи релацију

$$a_{11} v_1' + a_{12} v_2' + a_{13} v_3' + A_1 = 0$$

биће $k = 2$ и

$$\Delta = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ k_1 & 0 & 0 & a_{11} \\ 0 & q_2 & 0 & a_{12} \\ 0 & 0 & k_3 & o_{13} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = - \left| \begin{array}{c|cccc} -X_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{2-5} -A_1 & & & & \\ X_1 & \multicolumn{4}{c}{-\Delta} \\ X_2 & & & & \\ X_3 & & & & \end{array} \right|$$

$$D_2 = - \left| \begin{array}{c|cccc} -X_2 & 0 & -k_2 & 0 & 0 \\ \cline{2-5} -A_1 & & & & \\ X_1 & \multicolumn{4}{c}{-\Delta} \\ X_2 & & & & \\ X_3 & & & & \end{array} \right|$$

$$D_3 = - \left| \begin{array}{c|cccc} -X_3 & 0 & 0 & -k_3 & 0 \\ \cline{2-5} -A_3 & & & & \\ X_1 & \multicolumn{4}{c}{-\Delta} \\ X_2 & & & & \\ X_3 & & & & \end{array} \right|$$

тако да су реакције веза

$$\Phi_1 = \frac{D_1}{\Delta}, \quad \Phi_2 = \frac{D_2}{\Delta}, \quad \Phi_3 = \frac{D_3}{\Delta}$$

У случају, кад је број елемената 3, а постоје две везе што повлаче релације

$$\begin{aligned} a_{11} v_1' + a_{12} v_2' + a_{13} v_3' + A_1 = o \\ a_{21} v_1' + a_{22} v_2' + a_{23} v_3' + A_2 = o \end{aligned}$$

биће $k = 1$ и:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & o & o \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & o & o \\ k_1 & o & o & a_{11} & a_{21} \\ o & k_2 & o & o_{12} & a_{22} \\ o & o & k_3 & a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \left|\begin{array}{r|c} -X_1 & -k_1 \;\; o \;\; o \;\; o \\ \cline{2-2} -A_1 & \\ -A_2 & \\ X_1 & +\Delta \\ X_2 & \\ X_3 & \end{array}\right|$$

$$D_2 = \left|\begin{array}{r|c} -X_2 & o \;\; -k_3 \;\; o \;\; o \;\; o \\ \cline{2-2} -A_1 & \\ -A_2 & \\ X_1 & +\Delta \\ X_2 & \\ X_3 & \end{array}\right|$$

$$D_3 = \left|\begin{array}{r|c} -X_3 & o \;\; o \;\; -k_3 \;\; o \;\; o \\ \cline{2-2} -A_1 & \\ -A_2 & \\ X_1 & +\Delta \\ X_2 & \\ X_3 & \end{array}\right|$$

тако да су реакције веза

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = \frac{D_1}{\Delta} \quad \boldsymbol{\Phi}_2 = \frac{D_2}{\Delta} \quad \boldsymbol{\Phi}_3 = \frac{D_3}{\Delta}$$

Скуп израза

$$\boldsymbol{\Psi}_1 = \boldsymbol{\Phi}_1, \cdots \boldsymbol{\Psi}_n = \boldsymbol{\Phi}_n$$

добијених на наведени начин, представља скуп компонената реакција веза, које утичу на кретање фигуративне тачке M појаве у правцима

$$ov_1, \cdots ov_n.$$

Ове, пак, одређују резултујућу реакцију веза $\boldsymbol{\Phi}$ примењену на тачку M и чија је величина одређена обрасцем

$$\boldsymbol{\Phi} = \sqrt{\boldsymbol{\Phi}_1^2 + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_n^2}$$

а чији су коефицијенти правца

$$\mu_1 = \frac{\boldsymbol{\Phi}_1}{\boldsymbol{\Phi}}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\mu_n = \frac{\boldsymbol{\Phi}_n}{\boldsymbol{\Phi}}$$

Између ових компонената, при формирању редукованих једначина појаве

$$X_1 + \boldsymbol{\Phi}_1 + V_1 = o$$

$$X_2 + \boldsymbol{\Phi}_2 + V_2 = o$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_k + \boldsymbol{\Phi}_k + V_k = o$$

од важности је знати само k компонената $\boldsymbol{\Phi}_1, \cdots \boldsymbol{\Phi}_k$.

При кретању н. пр. једне материјалне тачке, кад би компоненте брзина v_1, v_2, v_3 биле везане каквом релацијом

$$f(v_1, v_2, v_3, t) = o$$

непроменљивом или променљивом у току времена, било би

$$a_{11} = \frac{\partial f}{\partial v_1} \qquad a_{12} = \frac{\partial f}{\partial v_2} \qquad a_{13} = \frac{\partial f}{\partial v_3}$$

$$k = 2 \quad A_1 = \frac{\partial f}{\partial t}$$

При променама јачина струја у једноме систему проводника, кад између јачина струја $i_1, \cdots i_n$ у појединим проводницима постоји релација

$$f(i_1, \cdots i_n) = o$$

било би

$$A_1 = o \qquad a_{im} = \frac{\partial f}{\partial i_m} \qquad m = 1, 2, \cdots n)$$

При мењању запремине, притиска и температуре једнога гаса под утицајем датих узрока, са везом израженом у првој апроксимацији Gay-Lussac-овим законом

$$pv = RT$$

било би

$$k = 2 \qquad A_1 = o$$

$$a_{11} = v \qquad a_{12} = p \qquad a_{13} = -R$$

b) **Случај веза друге врсте.** Једначине (55) за виртуелне варијације тоталитета $\eta_1, \cdots \eta_n$ елемената $v_1, \cdots v_n$ постају у случају ефективних варијација

$$b_{11}\, d\eta_1 + \cdots + b_{1n}\, d\eta_n + B_1\, dt = o$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_{m1}\, d\eta_1 + \cdots + b_{mn}\, d\eta_n + B_m\, dt = o$$

где коефициенти b_{ik} и B_i могу зависити од тоталитета $\eta_1, \cdots \eta_n$ и времена t. Оне се могу написати у облику

$$\begin{aligned}
b_{11} v_1 + \cdots + b_{1n} v_n + B_1 &= o \\
b_{21} v_1 + \cdots + b_{2n} v_n + B_2 &= o \\
\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\
b_{m1} v_1 + \cdots + b_{mn} v_n + B_m &= o
\end{aligned}$$

одакле се, диференцијалењем по времену t, добија систем једначина

$$\begin{aligned}
b_{11} v_1' + \cdots + b_{1n} v_n' + \left(\frac{\partial B_1}{\partial t} + E_1\right) &= o \\
b_{21} v_1' + \cdots + b_{2n} v_n' + \left(\frac{\partial B_2}{\partial t} + E_2\right) &= o \\
\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\
b_{m1} v_1' + \cdots + b_{mn} v_n' + \left(\frac{\partial B_m}{\partial t} + E_m\right) &= o
\end{aligned}$$

где је у опште

$$E_i = v_1 \frac{db_{i1}}{dt} + \cdots + v_n \frac{db_{in}}{dt}$$

Пошто, је за ма који од коефициената b_{ik},

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial b}{\partial \eta_1} v_1 + \cdots + \frac{\partial b}{\partial \eta_n} v_n + \frac{\partial b}{\partial t},$$

то E_i зависи од елемената $(v_1, \cdots v_n)$, $(\eta_1, \cdots \eta_n)$ и t.

Према томе сви горњи обрасци, који су се имали за случај веза прве врсте, остају исти и за случај веза друге врсте, само с том разликом, што у њима треба сменити

$$a_{ik} \quad ca \quad b_{ik}$$

$$A_i \quad ca \quad \frac{\partial B_i}{\partial t} + E_i$$

Треба приметити још то, да у случају веза прве врсте компоненте реакција веза, зависе, у опште, од $(v_1, \cdots v_n)$, и t, а у случају веза друге врсте од $(v_1, \cdots v_n)$, $(\eta_1, \cdots \eta_n)$ и t.

При кретању н. пр. материјалне тачке по датој сталној или покретној површини

$$f(x, y, z, t) = o$$

биће

$$b_{11} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad b_{12} = \frac{\partial f}{\partial y} \quad b_{13} = \frac{\partial f}{\partial z} \quad B_1 = \frac{\partial f}{\partial t}$$

При кретању материјалне тачке по датој сталној или покретној линији, дефинисаној једначинама

$$f(x, y, z, t) = o \quad \text{и} \quad \varphi(x, y, z, t) = o$$

биће

$$b_{11} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad b_{12} = \frac{\partial f}{\partial y} \quad b_{13} = \frac{\partial f}{\partial z} \quad B_1 = \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$b_{21} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad b_{22} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad b_{23} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad B_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

◆

ДРУГА ГЛАВА.

ГЕНЕРАЛНА ТРАНСФОРМАЦИЈА ОСНОВНИХ ЈЕДНАЧИНА.

Случај веза прве врсте. — Најпростији облик једначина појава са везама прве врсте. — Одредба функције Θ. — Одредба функција Q_i — Случај веза друге врсте. — Најпростији облик једначина појава са везама друге врсте. — Одредба функције S. — Одредба функција Q_i. — Appell-ов канонични тип једначина. — Развијени облик једначина за редуковани систем. — Проблем трансформације система. — Непосредна редукција датих једначина појаве на Appell-ов канонични тип. — Примењене и инертне тежње у једначинама појаве. — Редукција једначина неколиких конкретних појава на Appell-ов канонични тип.

I. Appell-ов канонични тип.

Основним једначинама појава може се дати један веома прост, генералан и за све врсте појава подједнак облик, у којима је број елемената сведен на могућни минимум и које, кад су једап пут написане, не захтевају више вођење рачуна о везама у систему.

A. **Случај веза прве врсте.**

Нека је

$$(v_1 \cdots v_n)$$

дати систем елемената на које су непосредно примењене тежње $X_1 \cdots X_n$ са коефицијентима инерције $k_1 \cdots k_n$.

Нека је k степен слободе система, тако, да се систем може свећи на редуковани систем

$$(q_1 \cdots q_k)$$

где су $q_1 \cdots q_k$ такви параметри, да се све остварљиве виртуелне варијације $\delta v_1 \cdots \delta v_n$ добијају кад се у систему једначина

$$(59) \qquad \begin{aligned} \delta v_1 &= \alpha_{11}\,\delta q_1 + \cdots + \alpha_{1k}\,\delta q_k \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta v_n &= \alpha_{n1}\,\delta q_1 + \cdots + \alpha_{nk}\,\delta q_k \end{aligned}$$

променама $\delta q \cdots \delta q_k$ даду произвољне вредности, а да се ефективне варијације $dv_1 \cdots dv_n$ добијају, кад се у систему једначина

$$(60) \qquad \begin{aligned} dv_1 &= \alpha_{11}\,dq_1 + \cdots + \alpha_{1k}\,dq_k + A_1\,dt \\ dv_2 &= \alpha_{21}\,dq_1 + \cdots + \alpha_{2k}\,dg_k + A_2\,dt \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dv_n &= \alpha_{n1}\,dq_1 + \cdots + \alpha_{nk}\,dq_k + A_n\,dt \end{aligned}$$

смене

$$dq \cdots dq_k \text{ и } dt$$

својим ефективним варијацијама. Коефициенти су α_{ik}, као и коефициенти A_i, у опште функције од $q_1 \cdots q_k$ и од t.

Ако се сад у општој основној једначини

$$(61) \qquad (X_1 + V_1)\,\delta v_1 + \cdots + (X_n + V_n\,\delta v_n = o$$

варијације $\delta v_1 \cdots \delta v_n$ смене њиховим изразима (59) једначина (61) постаје

$$(62) \qquad (P_1 - Q_1)\,\delta q_1 + \cdots + (P_k - Q_k)\,\delta q_k = o$$

где P_i и Q_i имају за вредности

$$\begin{aligned} P_i &= \alpha_{1i} V_1 + \cdots + \alpha_{ni} V_n = \\ &= k_1 \alpha_{1i} v_1' + \cdots + k_n \alpha_{ni} v_n' \\ Q_i &= \alpha_{1i} X_1 + \cdots + \alpha_{ni} X_n \end{aligned} \tag{63}$$

Једначина је (62) општа једначина модификација у редукованом систему $(q_1 \cdots q_k)$. Пошто су у њој варијације

$$\delta q_1 \cdots \delta q_k$$

произвољне, она повлачи за собом низ једначина

$$\begin{aligned} P_1 &= Q_1 \\ &\cdots\cdots \\ P_k &= Q_k \end{aligned} \tag{64}$$

У тих k једначина фигурише $n + k$ непознатих

$$(v_1 \cdots v_n) \text{ и } (q_1 \cdots q_k)$$

и те једначине са једначинама

$$\begin{aligned} v_1' &= \alpha_{11} q_1' + \cdots + \alpha_{1k} q'_k + A_1 \\ v_2' &= \alpha_{21} q_1' + \cdots + \alpha_{2k} q_k' + A_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n' &= \alpha_{n1} q_1' + \cdots + \alpha_{nk} q_k' + A_n \end{aligned} \tag{65}$$

[које резултују из једначина (60)] довољне су за одредбу свих непознатих.

Горњим једначинама може се дати један још простији облик. Из релација

$$v_j' = \alpha_{j1} q_1' + \cdots + \alpha_{jk} q_k' + A_j \tag{66}$$

види се да је у опште

$$\alpha_{ji} = \frac{\partial v_j'}{\partial q_i'}$$

према чему прва од једначина (63) постаје

$$P_i = k_1 v_1' \frac{\partial v_1'}{\partial q_i'} + \cdots + k_n v_n' \frac{\partial v_n'}{\partial q_i'}$$

Ако се, дакле, формира функција

$$\Theta = \frac{1}{2}\left[k_1 v_1'^2 + \cdots + k_n v_n'^2\right] \tag{67}$$

биће у опште

$$P_i = \frac{\partial \Theta}{\partial q_i'} \tag{68}$$

и према томе једначине се појаве (64) могу написати у облику

$$\begin{gathered} \frac{\partial \Theta}{\partial q_1'} = Q_1 \\ \frac{\partial \Theta}{\partial q_2'} = Q_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial \Theta}{\partial q_k'} = Q_k \end{gathered} \tag{69}$$

На цослетку, тим се једначинама може дати и овај још кондензованији облик:

Ако се формира израз

$$P = \Theta - [Q_1 q_1' + \cdots + Q_k q_k'] \tag{70}$$

једначине (69) постају

$$\begin{gathered} \frac{\partial P}{\partial q_1'} = o \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial P}{\partial q_k'} = o \end{gathered} \tag{71}$$

То је најпростији облик који се, у опште, може дати једначинама појаве свих врста и у којима је концентрисано све оно у механизму појаве, што регулише модификације у којима се појава манифестује: активне, реактивне, инертне тежње и везе у систему. Као што се види, формирање једначина на овакав начин претпоставља познавање само једне функције P, која одговара датој појави. Формирање пак те функције своди се на одређивање ова два израза:

1. израза Θ, који зависи само од природе пасивних улога и веза у систему а никако не и од примењених тежња, којима је он изложен.

2. израза

$$[Q_1\, q_1' + \cdots + Q_k\, q_k']$$

који је линеарна хомогена функција јачина тих тежња.

Скуп једначина (71) и (65) саставља систем од $n + k$ диференцијалних једначина, из којих се интеграцијом израчунава $n + k$ непознатих

$$(v_1 \cdots v_n) \text{ и } (q_1 \cdots q_k) \cdot$$

Одредба функције Θ. Кад је дат редуковани систем

$$q_1 \cdots q_k$$

и скуп једначина (66), које му служе као дефиниција, треба из ових једначина односно из једначина (65), сменити

$$v_1 \cdots v_n$$

у изразу (67) па се добија Θ, као полином другог степена по

$$q_1' \cdots q_k'$$

а са коефициентима који су функције од

$$q_1 \cdots q_k \text{ и } t$$

који ће бити полиноми по α_{ik} и A_i. У општем је, дакле, случају

$$\Theta = \Theta_2 + \Theta_1 + \Theta_0 \tag{72}$$

где је Θ_2 одређен квадратан облик по изводима

$$(q_1' \cdots q_n'),$$

Θ_1 линеарна хомогена функција тих извода, а Θ_0 скуп чланова независних од извода. Коефицијенти ће функција Θ_2 и Θ_1 као и саме функције Θ_0 бити функције промењљивих

$$(q_1 \cdots q_k) \text{ и } t$$

У осталом, за формирање горњих једначина није потребно познавање функције Θ_0.

У случајевима, кад је дефиницпја редукованог система, т. ј. скуп једначина (60), независан од времена t, биће:

$$\Theta_1 = o \quad \text{и} \quad \Theta_0 = o$$

и тада је Θ увек облика

$$\Theta = \frac{1}{2} \Sigma M_{ij} q_i' q_j'$$

$$\begin{bmatrix} i = 1, 2, \cdots k \\ j = 1, 2, \cdots k \end{bmatrix} \tag{73}$$

где је

$$M_{ij} = M_{ji}$$

а где су M_{ij} функције елемената $q_1 \cdots q_k$ и то полиноми другог степена по α_{ij}. У специјалном случају кад су α_{ij} стални бројеви, тај ће случај бити и са коефицијентима M_{ij}.

При кретању н. пр. једне материјалне тачке, кад су компоненте u, v, w брзине, везане каквом релацијом облика

$$f(u, v, w, t) = o$$

пошто је $k = 2$, имаће се у редукованом систему два параметра q_1 и q_2, и ако су ови дефинисани једначинама

$$u = \varphi_1 (q_1, q_2, t)$$

$$v = \varphi_2 (q_1, q_2, t)$$

$$w = \varphi_3 (q_1, q_2, t)$$

имаће се

$$u' = \alpha_{11} q_1' + \alpha_{12} q_2' + A_1$$

$$v' = \alpha_{21} q_1' + \alpha_{22} q_2' + A_2$$

$$w' = \alpha_{31} q_1' + \alpha_{32} q_2' + A_3$$

где је

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} \qquad A_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$$

и према томе је

$$\Theta_2 = \frac{1}{2} [M_{11} q_1'^2 + 2 M_{12} q_1' q_2' + M_{22} q_2'^2]$$

$$\Theta_1 = N_1 q_1' + N_2 q_2'$$

$$M_{11} = \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2$$

$$M_{12} = \alpha_{11} \alpha_{12} + \alpha_{21} \alpha_{22} + \alpha_{31} \alpha_{32}$$

$$M_{22} = \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2$$

$$N_1 = \alpha_{11} A_1 + \alpha_{21} A_2 + \alpha_{31} A_3$$

$$N_2 = \alpha_{12} A_1 + \alpha_{22} A_2 + \alpha_{32} A_3$$

$$\Theta_0 = \frac{1}{2} [A_1^2 + A_2^2 + A_3^2]$$

Одредба функција Q_i. Показано је да, ако су α_{ij} коефицијенти што фигуришу у једначинама веза; количине су Q_i дефинисане низом образаца

$$(74)\qquad \begin{aligned} Q_1 &= \alpha_{11} X_1 + \cdots + \alpha_{n1} X_n \\ Q_2 &= \alpha_{12} X_1 + \cdots + \alpha_{n2} X_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_k &= \alpha_{1k} X_1 + \cdots + \alpha_{nk} X_n \end{aligned}$$

Према томе количине $Q_1 \cdots Q_k$ увек су линеарне и хомогене комбинације непосредно примењених тежња $X_1 \cdots X_n$.

Развијени облик једначина за редуковани систем. Из израза

$$(75)\qquad \Theta = \Sigma M_{ij} q_i{}' q'_j + \Sigma N_i q_i' + \Theta_0$$

где је

$$M_{ij} = M_{ji}$$

и где су M_{ij} и N_i функције промењивих

$$q_1 \cdots q_k \text{ и } t$$

види се да ће једначине (69), на које се своди појава, бити облика

$$(76)\qquad \begin{aligned} M_{11} q_1' + \cdots + M_{1k} q_k' + N_1 &= Q_1 \\ M_{21} q_1' + \cdots + M_{2k} q_k' + N_2 &= Q_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots \\ M_{k1} q_1' + \cdots + M_{kk} q_k' + N_k &= Q_k \end{aligned}$$

В. Случај веза друге врсте.

Претпоставимо да између тоталитета $(\eta_1 \cdots \eta_n)$ елемената $(v_1 \cdots v_n)$ постоји m веза таквих, да се виртуелне варијације $\delta\eta_1 \cdots \delta\eta_n$ могу изразити помоћу виртуелних варијација $\delta q_1 \cdots \delta q_k$ једнога низа међу собом независних параметара $q_1 \cdots \cdots q_k$ а помоћу релација облика

$$(77)\qquad \begin{aligned} \delta\eta_1 &= \beta_{11}\,\delta q_1 + \cdots + \beta_{1k}\,\delta q_k \\ \delta\eta_2 &= \beta_{21}\,\delta q_1 + \cdots + \beta_{2k}\,\delta q_k \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta\eta_n &= \beta_{n1}\,\delta q_1 + \cdots + \beta_{nk}\,\delta q_k \end{aligned}$$

тако, да су ефективне варијације тоталитета дефинисане обрасцима

$$(78)\qquad \begin{aligned} \eta_1' &= \beta_{11}\,q_1' + \cdots + \beta_{1k}\,q_k' + B_1 \\ \eta_2' &= \beta_{21}\,q_1' + \cdots + \beta_{2k}\,q_k' + B_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_n' &= \beta_{n1}\,q_1' + \cdots + \beta_{nk}\,q_k' + B_n \end{aligned}$$

где су у опште коефицијенти β_{ij} и B_i функције елемената $(q_1 \cdots q_k,\ t)$.

Заменом вредности (77) у ранијој основној једначини

$$(X_1 + V_1)\,\delta\eta_1 + \cdots + (X_n + V_n)\,\delta\eta_n = o$$

ова постаје

$$(79)\qquad (P_1 - Q_1)\,\delta q_1 + \cdots + (P_k - Q_k)\,\delta q_k = o$$

где је

$$(80)\qquad \begin{aligned} P_1 &= \beta_{11}\,V_1 + \cdots + \beta_{n1}\,V_n = k_1\,\beta_{11}\,v_1' + \cdots + k_n\,\beta_{n1}\,v_n' \\ P_2 &= \beta_{12}\,V_1 + \cdots + \beta_{n2}\,V_n = k_1\,\beta_{12}\,v_1' + \cdots + k_n\,\beta_{n2}\,v_n' \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_k &= \beta_{1k}\,V_1 + \cdots + \beta_{nk}\,V_n = k_1\,\beta_{1k}\,v_1' + \cdots + k_n\,\beta_{nk}\,v_n' \end{aligned}$$

и за тим

$$(81)\qquad \begin{aligned} Q_1 &= \beta_{11}\,X_1 + \cdots + \beta_{n1}\,X_n \\ Q_2 &= \beta_{12}\,X_1 + \cdots + \beta_{n2}\,X_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_k &= \beta_{1k}\,X_1 + \cdots + \beta_{nk}\,X_n \end{aligned}$$

Пошто су варијације $\delta q_1 \cdots \delta q_k$ произвољне, то једначина (79) повлачи собом низ једначина

$$
\begin{aligned}
P_1 &= Q_1 \\
P_2 &= Q_2 \\
&\cdots\cdots \\
P_k &= Q_k
\end{aligned}
\tag{82}
$$

Међу тим те се једначине могу трансформисати на овај начин: из општег обрасца (78)

$$v_j = \beta_{j1}\, q_1' + \cdots + \beta_{jk}\, q_k' + B_j$$

диференцијалењем по t добија се

$$
\begin{aligned}
v_j' = {} & [\beta_{j1}\, q_1'' + \cdots + \beta_{jk}\, q_k''] + \\
& + \left[\frac{\partial\beta_{j1}}{\partial q_1}\, q_1' + \cdots + \frac{\partial\beta_{j1}}{\partial q_k}\, q_k'\right] q_1' + \cdots
\end{aligned}
$$

из чега се види да је у опште

$$\beta_{ji} = \frac{\partial v_j}{\partial q_i''}$$

Заменом у изразу

$$P_i = k_1\, \beta_{1i}\, v_1' + \cdots + k_n\, \beta_{ni}\, v_n'$$

добија се

$$P_i = k_1\, v_1' \frac{\partial v_1'}{\partial q_i''} + \cdots + k_n\, v_n' \frac{\partial v_n'}{\partial q_i''}$$

тако, да ако се стави да је

$$S = \frac{1}{2}\,[k_1\, v_1'^2 + \cdots + k_n\, v_n'^2] \tag{83}$$

последњи образац показује да је

$$P_i = \frac{\partial S}{\partial q_i''}$$

Једначине (82) добијају, дакле, облик

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial S}{\partial q_1''} = Q_1 \\
&\frac{\partial S}{\partial q_2''} = Q_2 \\
(84)\qquad &\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{\partial S}{\partial q_k''} = Q_k
\end{aligned}
$$

и могу се помоћу функције

$$
(85)\qquad R = S - [Q_1\, q_1'' + \cdots + Q_k\, q_k'']
$$

написати у још краћем облику

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial R}{\partial q_1''} = o \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{\partial R}{\partial q_k''} = o
\end{aligned}
$$

То је најпростији облик који се, у опште, може дати једначинама појаве. у случају веза друге врсте. Формирање једначина појаве у том облику претпоставља познавање само једне функције, и то функције R, која одговара датој појави. Познавање, пак, те функције своди се на одређивање ова два израза:

1. Израза S, који зависи само од природе пасивних улога и веза у систему, а никако не и од примењених тежња, којима је овај изложен;

2. Израза

$$
[Q_1\, q_1'' + \cdots + Q_k\, q_k'']
$$

који је линеарна и хомогена функција јачина тих тежња.

Скуп једначина (86) и једначина (78) написаних у облику

$$v_j = \beta_{j1} q_1' + \cdots \beta_{jk} q_k' + \beta_j$$

$$(j = 1, 2, \cdots n)$$

саставља систем од $n + k$ једначина са $n + k$ непознатих:

$$(q_1 \cdots q_k) \quad \text{и} \quad (v_1 \cdots v_n)$$

Одредба функције S. Кад је дат редуковани систем $(q_1 \cdots q_k)$ и скуп једначина (78) које га дефинишу, треба из ових једначина диференцијалењем по t и сменивши η_j'' са v_j', одредити $v_1' \, v_2' \cdots v_n'$, сменити те вредности у изразу (75), па се добија S у облику полинома другог степена по изводима $q_1'' \cdots q_k''$, где ће коефициенти тога полинома у опште бити функције променљивих

$$(q_1 \cdots q), \;)q_1' \cdots q_k') \; \text{и} \; t.$$

Функција ће S, у осталом, бити облика

$$S = S_1 + S_1 + S_0$$

где је S_2 скуп чланова другог степена по q_i'', S_1 скуп чланова првог степена по тим количинама, а S_0 скуп чланова независних од тих количина. Према самом начину, на који се дошло до S, очевидно је:

1. да ће S_2 бити облика

$$S_2 = \Sigma H_{ij} q_i'' q_j''$$

где су H_{ij} полиноми по коефицијентима β_{ij}, и према томе, функције од

$$(q_1 \cdots q_k, t)$$

2. да је

$$S_1 = \Sigma L_i q_i''$$

где су L_i полиноми по изразима β_{ij} и $\frac{d\beta_{ij}}{dt}$ тако да зависе од

$$\text{(a)} \qquad (q_1 \cdots q_k), (q_1' \cdots q_k') \text{ и } t.$$

Изводи $\frac{d\beta_{ij}}{dt}$ фигуришу тако, да је $S_1 = o$ кад су сви ти изводи равни нули.

3. да S_0 зависи такође од елемената (а). У осталом, овај је члан S_0 без интереса за формирање једначина (86), јер он не утиче на склоп тих једначина.

У специјалном случају кад су коефициенти β_{ij} стални т. ј.

$$\frac{d\beta_{ij}}{dt} = o$$

биће у опште

$$L_i = o \qquad H_{ij} = const.$$

и S се своди на S_2, где су коефициенти стални бројеви.

Одредимо, примера ради, функцију S при кретању једне материјалне тачке по датој кривој линији у равни, кад је једначина криве дата, у поларним координатама,

$$(87) \qquad r = f(\theta)$$

Из једначина

$$x = r \cos\theta \qquad y = r \sin\theta$$

и (87) добија се

$$(88) \qquad \delta x = \varphi\, \delta\theta \qquad \delta y = \psi\, \delta\theta$$

где је

$$\text{(b)} \qquad \begin{aligned} \varphi &= f'(\theta) \cos\theta - f(\theta) \sin\theta \\ \psi &= f'(\theta) \sin\theta + f(\theta) \cos\theta \end{aligned}$$

тако да је

$$x' = \varphi \, \theta' \qquad y' = \psi \, \theta' \tag{c}$$

Улогу елемената v_1 и v_2 играју компоненте брзине x' и y'; улоге тоталитета η_1 и η_2 координате x и y покретне тачке, а улогу параметра q поларни угао θ.

Из обрасца (c) је

$$x'' = \varphi \, \theta'' + \frac{d\varphi}{d\theta} \theta'^2$$

$$y'' = \psi \, \theta'' + \frac{d\psi}{d\theta} \theta'^2$$

и заменом у

$$S = \frac{1}{2} (x''^2 + y''^2)$$

добија се

$$S = \frac{1}{2} [\lambda(\theta) \, \theta''^2 + \lambda'(\theta) \, \theta'^2 \, \theta''] \tag{89}$$

где је

$$\lambda(\theta) = f'(\theta)^2 + f(\theta)^2$$

Одредба функција Q_i. Показано је да, ако су β_{ij} коефициенти, што фигуришу у једначинама веза, количине су Q_i дефинисане низом образаца

$$Q_1 = \beta_{11} X_1 + \cdots + \beta_{n1} X_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Q_k = \beta_{1k} X_1 + \cdots + \beta_{nk} X_n$$

тако, да су и у овоме случају Q_i линеарне и хомогене функције непосредно примењених тежња $X_1 \cdots X_n$. Доцније ће бити показано како се исте функције израчунављају помоћу израза виртуелнога рада примењених тежња у појави.

Одредимо, примера ради, функцију Q_1 при кретању материјалне тачке по датој кривој линији у равни.

$$r = f(\theta)$$

Пошто је према једначинама (88)

$$\beta_{11} = \varphi \qquad \beta_{1i} = o$$

$$\beta_{21} = \psi \qquad \beta_{2i} = o$$

то је, означивши са X и Y тоталне компоненте примењених сила у правцу осовина ox, oy

$$Q_1 = \varphi X + \psi Y$$

или према једначинама (b)

$$\text{(d)} \qquad Q_1 = P f(\theta) + R f'(\theta)$$

где је

$$P = Y \cos\theta - X \sin\theta$$

$$R = X \cos\theta + Y \sin\theta$$

и где, према томе, R и P означују тоталне компоненте примењених сила у правцу потега и правцу управном на овоме.

Једначина кретања биће, дакле

$$\frac{\partial S}{\partial \theta''} = Q_1$$

где је функција S обрасцем (89) а Q_1 обрасцем (d).

Appell-ов канонични тип једначина. У својим испитивањима о најпростијем могућем облику, који би се могао дати једначинама Аналитичке Динамике, Арpell је показао[1], да би то, за најгенералнији динамички случај, био облик

$$\frac{\partial S}{\partial q_i''} = Q_i \tag{90}$$

где је S полином другог степена по промењивима

$$q_1'' \cdots q_k''$$

са коефициентима који могу зависити од

$$(q_1' \cdots q_k'),\ (q_1 \cdots q_k) \text{ и } t$$

а $Q_1 \cdots Q_k$ извесне линеарне и хомогене комбинације компонената сила примењених на систем. Функција S тада представља *енергију акцелерација* при кретању материјалног система.

Једначине се (90), у осталом, могу написати у облику

$$\frac{\partial R}{\partial q_i''} = o$$

где R има за израз

$$R = S - [Q_1'' q_1'' + \cdots + Q_k q_k'']$$

Закон формације функција S, Q_i и R истоветан је са оним, који је напред изведен за генерални случај појава ма какве врсте, код којих у дескриптивном систему постоје везе друге врсте. Он је у неколико различан, али у главним цртама исти и код појава са везама прве врсте.

---

[1] P. Appell: Sur une forme générale des équations de la Dynamique (C. R. 7. et 28. Aout 1899). — Développements sur une forme nouvelle des égnations de la Dynamique (Journ. d. mathem. pures et appl. t. VI. 1900. p. 5—40). — Remarques d'ordre analytique sur une nouvelle forme des équations de la Dynamique (Journ. d. mathem. pures et appl. t. VII. 1901. p. 5—12). — Traité de Mecanique rationnelle 2-e edit. t. II. p. 364—387.

Сам аналитички облик

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}}{\partial p_i} = Q_i$$

односно

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial p_i} = o$$

где p_i представљају прве или друге изводе дескриптивних параметара система, а на који се своде како једначине појава са везама прве врсте, тако и једначине оних са везама друге врсте, и који обухвата како специјални случај обичних динамичких једначина, тако и генерални случај појава свих врста, биће с тога овде назван *Appell-овим каноничним типом* једначина Математичке Феноменологије. Његова велика генералност долази, као што се види, од тога, што он важи за све врсте веза, како за оне у холономним, тако и за оне у нехолономним системима, као и за све врсте примењених тежња у појави, ма какав им био закон формације. Другим речима: *генералност тога типа једначина долази отуда, што његова формација не претпоставља ничега нарочитог у механизму појаве.*

Развијени облик једначина за редуковани систем. Према самом склопу функције **S**, једначине (84) појаве имаће облик

$$(91)\qquad \begin{array}{l} H_{11}\, q_1'' + \cdots + H_{1k}\, q_k'' + L_1 = Q_1 \\ H_{21}\, q_1'' + \cdots + H_{2k}\, q_k'' + L_2 = Q_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ H_{k1}\, q_1'' + \cdots + H_{kk}\, q_k'' + L_k = Q_k \end{array}$$

где H_{ij} зависе од

$$(q_1 \cdots q_k), \text{ и } t$$

а L_i зависе од

$$(q_1 \cdots q_k),\ (q_1' \cdots q_k') \text{ и } t.$$

III. Проблем трансформације система.

Нека је

$$(v_1 \cdots v_n) \tag{92}$$

примарни систем за дату појаву, тако, да су варијације елемената v_i дефинисане низом једначина

$$\begin{gathered} k_1 \frac{dv_1}{dt} = X_1 \\ k_2 \frac{dv_2}{dt} = X_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_n \frac{dv_n}{dt} = X_n \end{gathered} \tag{93}$$

и нека су

$$\eta_1 \cdots \eta_n$$

тоталитети тих елемената. Дешава се, да се укаже потреба увести, на место елемената (92), један нов систем елемената

$$(\omega_1 \cdots \omega_n)$$

који са првима стоји у једној одређеној и познатој вези. Задатак је тада да се помоћу једначина (93) и оних, до којих доводе везе између та два система, формирају једначине, које ће регулисати промене елемената v_i. Овде ће бити наведена два проблема такве врсте.

Први проблем: формирати једначине за ω_i, кад су везе између v_i и ω_i такве природе, да повлаче собом релације

(94)

$$\begin{gathered} \delta v_1 = \alpha_{11}\, \delta\omega_1 + \cdots + \alpha_{1n}\, \delta\omega_n \\ \delta v_2 = \alpha_{21}\, \delta\omega_1 + \cdots + \alpha_{2n}\, \delta\omega_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta v_n = \alpha_{n1}\, \delta\omega_1 + \cdots + \alpha_{nn}\, \delta\omega_n \end{gathered} \tag{95}$$

између виртуелних варијација елемената v_i и ω_i, тако, да су ефективне варијације тих елемената међу собом везане релацијама

$$
\begin{array}{l}
dv_1 = \alpha_{11}\, d\omega_1 + \cdots + \alpha_{1n}\, d\omega_n + A_1 \\
dv_2 = \alpha_{21}\, d\omega_1 + \cdots + \alpha_{2n}\, d\omega_n + A_2 \\
\dotfill \\
dv_n = \alpha_{n1}\, d\omega_1 + \cdots + \alpha_{nn}\, d\omega_n + A_n
\end{array}
\tag{96}
$$

Проблем је решен ранијим једначинама (69), где само треба узети $k = n$ и сменити елементе q_i елементима ω_i.

Такав би се случај н. пр. имао у задатку: од једначина првог реда, које регулишу варијације јачина једног система струја, што се међу собом индукују, прећи на једначине, које ће се имати кад се, на место јачина струја, узме један ма какав систем промењљивих количина које су са њима у везама горњега облика.

Други проблем: формирати једначине за ω_i кад су везе између v_i и ω_i такве природе да повлаче собом релације

$$
\begin{array}{l}
\delta\eta_1 = \beta_{11}\, \delta\omega_1 + \cdots + \beta_{1n}\, \delta\omega_n \\
\delta\eta_2 = \beta_{21}\, \delta\omega_1 + \cdots + \beta_{2n}\, \delta\omega_n \\
\dotfill \\
\delta\eta_n = \beta_{n1}\, \delta\omega_n + \cdots + \beta_{nn}\, \delta\omega_n
\end{array}
\tag{97}
$$

између виртуелних варијација елемената ω_i и тоталитета елемената v_i, тако, да су ефективне варијације тих елемената регулисане једначинама

$$
\begin{array}{l}
d\eta_1 = \beta_{11}\, d\omega_1 + \cdots + \beta_{1n}\, d\omega_n + B_1 \\
\delta\eta_2 = \beta_{21}\, d\omega_1 + \cdots + \beta_{2n}\, d\omega_n + B_2 \\
\dotfill \\
d\eta_n = \beta_{n1}\, d\omega_n + \cdots + \beta_{nn}\, d\omega_n + B_n
\end{array}
\tag{98}
$$

из којих резултују једначине

$$
\begin{aligned}
& v_1 = \beta_{11}\,\omega_1' + \cdots + \beta_{1n}\,\omega_n' + B_1 \\
(99)\qquad & v_2 = \beta_{21}\,\omega_1' + \cdots + \beta_{2n}\,\omega_n' + B_2 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(100)\qquad & v_n = \beta_{n1}\,\omega_1' + \cdots + \beta_{nn}\,\omega_n' + B_n
\end{aligned}
$$

Проблем је решен ранијим једначинама (84), где опет треба узети $k = n$ и сменити елементе q_i елементима w_i.

Такав би се случај н. пр. имао у проблему смене правоуглих координата поларним, при кретању материјалне тачке у равни или простору. Ако је н. пр. кретање у равни, придавши улоге елемената ω_1 и ω_2 поларним координатама r и θ, из обрасца

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

добија се

$$
(101)\qquad
\begin{aligned}
x' &= r'\cos\theta - r\,\theta'\sin\theta \\
y' &= r'\sin\theta + r\,\theta'\cos\theta
\end{aligned}
$$

одакле је

$$
\begin{aligned}
x'' &= r''\cos\theta - 2\,r'\,\theta'\sin\theta - r\,\theta''\sin\theta - r\,\theta'^2\cos\theta \\
y'' &= r''\sin\theta + 2\,r'\,\theta'\cos\theta + r\,\theta''\cos\theta - r\,\theta'^2\sin\theta
\end{aligned}
$$

тако да се заменом у

$$S = \frac{m}{2}\,(x''^2 + y''^2)$$

добија

$$S = \frac{m}{2}\,[(r'^2 - r\,\theta'')^2 + (r\,\theta'' + 2\,r'\,\theta')^2]$$

Међу тим, пошто је према једначинама (101)

$$
\begin{aligned}
\beta_{11} &= \cos\theta & \beta_{12} &= -\,r\sin\theta \\
\beta_{21} &= \sin\theta & \beta_{22} &= r\cos\theta
\end{aligned}
$$

биће, означивши са X и Y компоненте примењених сила у правцима ox и oy

$$Q_1 = X \cos\theta + Y \sin\theta = R$$

$$Q_2 = -rX \sin\theta + rY \cos\theta = Pr$$

где су R и P тоталне компоненте примењених сила у правцу потега и правцу управном на овоме.

Једначине кретања у поларном систему биће дакле

$$\frac{\partial S}{\partial r''} = R$$

$$\frac{\partial S}{\partial \theta''} = Pr$$

Приметимо, да у оба наведена општа проблема трансформације изрази Q_i, што фигуришу на десној страни једначина (69) и 84), имају један исти закон формације. Десна ће, дакле, страна трансформисаних једначина, написаних у горњим облицима, бити у оба проблема једна иста. Леве ће, пак, стране у првом проблему бити облика

$$M_{i1}\omega_1' + \cdots + M_{in}\omega_n' + M_i$$

где коефицијенти M_{ik} и M_i зависе од

$$(102) \qquad (\omega_1 \cdots \omega_n) \text{ и } t$$

а у другом проблему облика

$$N_{n1}\,\omega_1'' + \cdots + N_{in}\,\omega_n'' + N_i$$

где N_{ik} зависе од елемената (102) а N_i, поред тих елемената, зависе још и од

$$(\omega_1' \cdots \omega_n').$$

Поред тога увек је

$$M_{ij} = M_{ji}$$
$$M_{ij} = N_{ji}$$

Према томе, на скраћене облике једначина

$$(103) \qquad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial \omega_1''} = o \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial P}{\partial \omega_n''} = o \end{array} \right.$$

или

$$(104) \qquad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial R}{\partial \omega_1''} = o \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial R}{\partial \omega_n''} = o \end{array} \right.$$

могу се свести једначине појаве било да је систем са везама прве, или друге врсте, било да је слободан. У овом другом случају, кад је систем слободан, може се по вољи свести или на облик (103), или на облик (104), према новом систему промењивих $(\omega_1 \cdots \omega_n)$, који се буде узео.

Између разних бескрајно разноврсних трансформација, које се могу извршити у једном систему, од нарочитог је интереса таква трансформација, која скуп чланова другог степена Θ_2, у ранијој функцији Θ, своди на облик

$$(105) \qquad g_1 z_1'^2 + g_2 z_2'^2 + \cdots + g_n z_n'^2$$

а скуп чланова S_2 у ранијој функцији S на облик

$$l_1 z_1''^2 + l_2 z_2''^2 + \cdots + l_n z_n''^2$$

Скуп ће н. пр. Θ_2, у функцији Θ, бити један реалан одређен квадратан облик и према ономе, што се зна из теорије облика, може се линеарним трансформацијама, и то на бескрајно много начина, представити у облику збира n квадрата. Између осталих начина, то се може учинити и једном ортогоналном трансформацијом

$$\begin{aligned}\omega_1 &= b_{11} z_1'^2 + \cdots + b_{1n} z_n'^2 \\ \omega_2 &= b_{21} z_1'^2 + \cdots + b_{2n} z_n'^2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \omega_n &= b_{n1} z_1'^2 + \cdots + b_{nn} z_n'^2\end{aligned}$$

која ће израз Θ_2, написан у облику

$$\Theta_2 = \Sigma A_{ik} \omega_i' \omega_k'$$

свести на облик (105). Коефициенти

$$g_1 g_2 \cdots g_n$$

облика (105) биће тада корени алгебарске једначине n-тог степена

$$\begin{vmatrix} A_{11} - g & A_{12} \cdots A_{1n} - g \\ A_{21} \quad A_{22} - g & A_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ A_{1n} \quad A_{n2} & \cdots A_{nn} - g \end{vmatrix}$$

чији су сви корени, као што се зна, реални. Коефициенти b_{ij} саме ортогогоналне трансформације добијају се на начин познат у теорији квадратних облика.

На сличан би се начин радило и са скупом S_2 у функцији S.

III. Непосредна редукција датих једначина појаве на Appell-ов канонични тип.

Први случај: нека су на који било начин познате једначине појаве у облику

$$\begin{array}{l} M_{11}\,\omega_1' + \cdots + M_{1n}\,\omega_n' + M_1 = o \\ M_{21}\,\omega_1' + \cdots + M_{2n}\,\omega_n' + M_2 = o \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_{n1}\,\omega_1' + \cdots + M_{nn}\,\omega_n' + M_n = o \end{array} \tag{106}$$

где су M_{ik} и M_i функције промењивих

$$(\omega_1 \cdots \omega_n) \text{ и } t \tag{107}$$

и нека је у опште

$$M_{ik} = M_{ki}$$

Једначине се (106) могу, пре свега, написати у облику

$$M_{i_1}\,\omega_1' + \cdots + M_{in}\,\omega_n' + [M_i + G_i] = G_i \tag{108}$$

где је $G\,(z)$ једна произвољна функција промењивих (107).

Проблем редукције ових једначина на облик

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \omega_i'} = G_i \tag{109}$$

$$[i = 1, 2, 3 \cdots n]$$

састоји се, тада, у одредби функције Φ, која ће бити таква, да једначине (109) буду еквивалентне једначинама (108). Ако се леве стране једначина (108) краткоће ради означе са

$$\Delta_1 \cdots \Delta_n$$

тражена функција Φ треба да је таква, да буде идентички

$$\begin{array}{c} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \omega'_1} = \Delta_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \omega_n'} = \Delta_n \end{array}$$

Ако се образује израз

$$(110) \qquad \omega_1' \Delta_1 + \cdots + \omega_n' \Delta_n$$

он се може написати у облику

$$(111) \qquad \omega_1' \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_1'} + \cdots + \omega_n' \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_n'}$$

Да би се једначине (109) могле идентификовати са једначинама (108), функција Φ мора бити полином другог степена по количинама

$$(\omega_1' \cdots \omega'_n)$$

Напишимо је, дакле, у облику

$$(112) \qquad \Phi = \Phi_2 + \Phi_1 + \Phi_0$$

где је Φ_2 скуп чланова другог степена по изводима ω_i', Φ_1 скуп чланова првог степена а Φ_0 скуп чланова независних од тих извода; израз (93) тада постаје

$$\left[\omega_1' \frac{\partial \Phi_2}{\partial \omega_1'} + \cdots + \omega_n' \frac{\partial \Phi_2}{\partial \omega_n'}\right] + \left[\omega_1' \frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega_n'} + \cdots + \omega_n' \frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega_n'}\right]$$

Пошто су Φ_2 и Φ_1 хомогене функције другог и првог степена, то ће прва заграда имати за вредност $2\Phi_2$, а друга заграда вредност Φ_1, тако да израз (101), односно (110), има за вредност

$$2\Phi_2 + \Phi_1$$

А пошто је у траженој функцији Φ без интереса Φ_0, то се може узети $\Phi_0 = o$ и онда се добија ово правило:

Да би се одредила функција Φ, треба прву од једначина (108) помножити са ω_1', другу са ω_2' и т. д.; тако помножене једначине треба сабрати, па ће лева страна добијеног резултата, кад се у њему удвоји скуп чланова првог степена по количинама ω_i представљати 2Φ.

Други случај: нека су, на који било начин, познате једначине појаве у облику

$$\begin{aligned} & N_{11}\,\omega_1'' + \cdots + N_{1n}\,\omega_n'' + N_1 = o \\ (113) \qquad & N_{21}\,\omega_1'' + \cdots + N_{2n}\,\omega_n'' + N_2 = o \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & N_{n1}\,\omega_1'' + \cdots + N_{nn}\,\omega_n'' + N_n = o \end{aligned}$$

где су N_{ik} функције променљивих ω_i и t, а N_i функције променљивих $\omega_i,$ ω_i' и t. Тада је могуђно свести овај систем једначина на облик

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \omega_i''} = F_i$$

$$[i = 1, 2, \cdots n]$$

где је Π полином другог степена по

$$\omega_1'' \cdots \omega_n''$$

са коефицнентима који зависе од ω_i и t, а F_i ма каква функција променљивих $\omega_i,$ ω_i' и t.

Проблем се састоји у одредби функције Π, која ће бити таква, да је систем једначина (114) еквивалентан систему једначина (113). Радећи, међутим, онако исто као и мало час, долази се до овог правила:

Да би се одредила функција Π, што одговара датим једначинама (113), треба прву од тих једначина помножити са ω_1'', другу са ω_2'' и т. д. сабрати тако помножене једначине, удвојити скуп чланова првог степена по изводима ω_i'' на левој страни тако добијене једначине, па ће добијени резултат представљати израз 2Π.

IV Примењене и инертне тежње у једначинама појаве.

Кад су једначине појаве дате непосредно за примарни систем у облику

$$k_i \frac{dv_i}{dt} = X_i$$

израз

$$-k_i \frac{dv_i}{dt}$$

представља инерцију елемента v_i, а израз X_i тоталну компоненту примењених (активних и реактивних) тежња у правцу ov_i.

Ако су једначине појаве дате у облику

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_i'} = G_i \quad (i = 1, 2, \cdots n)$$

и ако се, на који било начин, зна (н. пр. према изразу виртуелног рада), или се претпоставља да

$$G_1\, G_2 \cdots G_n$$

представљају одговарајуће тоталне компоненте примењених тежња у правцима

$$oq_1, oq_2 \cdots oq_n$$

при кретању фигуративне тачке система $(q_1 \cdots q_n)$ у одговарајућем од тих праваца, израз ће Φ играти улогу функције Θ, а изрази G_i улоге функција Q_i Appell-овог каноничног типа. У таквом случају израз

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_i'}$$

представља одговарајућу тоталну компоненту комплекса инертних тежња у правцу oq_i при кретању фигуративне тачке у томе правцу.

Тако исто, ако су једначине појаве дате у облику

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i''} F_i$$

и ако се зна, или претпоставља, да

$$F_1 F_2 \cdots F_n$$

представљају горе поменуте тоталне компоненте, ти ће изрази играти улоге функција Q_i, а израз Π улогу функције S Appell-овог каноничног типа. Израз

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i''}$$

представља, тада, одговарајућу тоталну компоненту инертних тежња у правцу oq_i, при кретању фигуративне тачке система у томе правцу.

Дешава се, да у састав израза

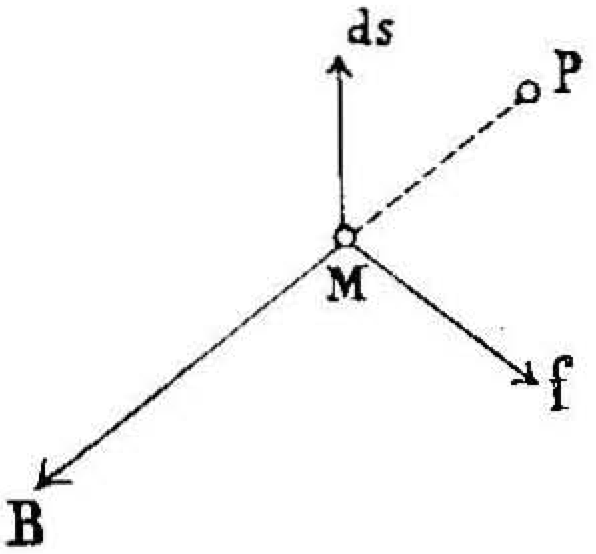
$$\frac{\partial \Phi}{\partial q^1} \text{ односно } \frac{\partial \Pi}{\partial q_i''}$$

у једначинама појаве, сведене на Appell-ов канонични тип, улазе као чланови извесни изрази са нарочитим конкретним значењем, као изрази нарочитих тежња са одређеним *физичким* значењем, а за које је од интереса знати да ли се имају сматрати као примењене (активне или реактивне) или као инертне тежње.

Питање је н. пр. од интереса при одредби знака који у извесним сумњивим случајевима, при формирању једначина појаве, треба придати каквој познатој тежњи, кад се зна да она треба да фигурише као сабирак у каквоме одређеном комплексу тежња. Невођење рачуна о томе, да ли се н. пр. извесне индукционе електромоторне силе имају сматрати као активне силе или као силе инерције, учинило је да су се у применама и развијању Helmholtz-ове теорије индукованих струја чиниле грешке у знацима, а ове доводиле до погрешних резултата [1]).

Од не мањег је интереса питање и за *физичко* схватање извесних математичких факата у механизму појаве. Дешава се, да је извесна појединост, при акцији сила једне одређене врсте, само тако физички схватљива, ако се ове асимилирају силама инерције и схвате као такве у теорији појаве.

Уочимо, као пример, један магнетни пол P и једну тачку M у области његовог магнетног поља, у којој пол изазива магнетну индукцију представљену по правцу, величини и смислу вектором B. Претпоставимо да кроз тачку M пролази у исто време елеменат струје, представљен вектором ds. Ако је i јачина те струје, пондеромоторна сила у томе елементу представљена је векторским продуктом



Сл. 21.

$$f = i\,[ds\,B]$$

што значи, да је та сила управна на равни вектора B и ds, т. ј. на равни што пролази кроз магнетни пол и елеменат струје.

На први поглед веома је тешко физички схватити егзистенцију овакве једне силе: 1° с тога, што она потиче од изолованог магнетног пола, који је у реалности неостварљив; 2° с тога, што она није управљена дуж

---

[1]) E. Carvallo: L'électricité deduite de l'expérience (Scientia № 19) p. 49.—50.

праве што везује пол и елеменат, већ је управна на тој правој; 3⁰ што се реакција елемента струје на пол не врши у тачки *M*, у којој се врши акција пола, већ на самоме полу, па према томе акција и реакција не леже у истој правој.

Међу тим такву једну силу лако је схватити, ако се она асимилира једној нарочитој врсти инертних сила: сложеној центрифугалној сили. И одиста, кад се материјална тачка масе m креће у једноме систему, који је и сам креће, и то релативном брзином v_r према том систему, и ако сам систем изврши ротацију представљену вектором w, сложена центрифугална сила, која делује на материјалну тачку, имаће за израз

$$P = 2m\,[v_r\,w_r]$$

Ако се, дакле, елеменат струје ds асимилира вектору брзине једне материјалне тачке масе

$$m = \frac{i}{2}$$

а магнетна се индукција B асимилира вектору ротације, то ће на ову фиктивну материјалну тачку, која се креће брзином ds у једноме систему који и сам врши тренутну ротацију B, деловати једна центрифугална сила

$$i\,[ds\,B]$$

која је по правцу, величини и смислу еквивалентна пондеромоторној сили.

Као што се, дакле, види *ако се електромагнетна сила асимилира једној од сила инерције, а понаособ једној центрифугалној сили, њени елементи: величина, правац и смисао постају физички разумљиви.*

Такве су исте асимилације могуће и за електродинамичке силе, које се, према модерним идејама, не разликују од електромагнетних сила. Оне се могу распрострти и на саме магнетне силе. Као што је познато, гироскоп непрестано тежи да оријентише своју осовину обртања паралелно осовини земље. Исто тако магнет тежи да оријентише своју осовину магнетисања паралелно магнетном пољу у коме је. Шта више, спрег, што одређује ту оријентацију, има у обадва случаја један исти аналитички израз: он је представљен оријентисаним паралелограмом конструисаним помоћу два одговарајућа вектора: ротације земље и ротације гироскопа са једне стране, магнетног поља и осовине магнетисања са друге стране.

На тај начин магнетне, као и електромагнетне и електродинамичке силе, па и индукционе електромоторне силе, могу се асимилирати силама инерције и та асимилација чини физички схватљивим све њихове особине, као и појединости начина њихове акције. Laplace-ов закон за електромагнетне силе има се, тада, схватити као нарочити облик Coriolis-ове теореме у Кинематици.

V. Редукција једначина неколиких конкретних појава на Appell-ов канонични тип.

1° **Кретање чврстог тела око једне утврђене тачке,** кад се за координатне осовине узму главне осе инерције за ту тачку, своди се на Euler-ове једначине

$$
\begin{aligned}
&Ap' + (C-B)\,qr = L \\
(115)\qquad &Bq' + (A-C)\,rp = M \\
&Cr' + (B-A)\,pq = N
\end{aligned}
$$

где су

p, q, r компоненте тренутне ротације дуж поменутих координатних осовина;

A, B, C моменти инерције тела према тим осовинама;

L, M, N суме момената датих активних сила према истим осовинама.

Улоге израза Q_1, Q_2 Q_3 играју моменти L, M, N. Множећи леву страну прве од једначина (115) са p', другу са q', трећу са r', сабирајући их и удвајајући чланове првог степена по p', q', r' налази се да улогу функције Θ игра функција

$$\Theta = \frac{1}{2} [Ap'^2 + Bq'^2 + Cr'^2 + 2(C-B)\,qrp' + 2(A-C)\,rpq' + \\ + 2(B-A)\,pqr']$$

тако, да једначине кретања добијају облик

$$\frac{\partial\Theta}{\partial p'} = L$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial q'} = M$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial r'} = N$$

Инертне тежње у правцу op, oq, or јесу

$$-Ap' \text{ и } (B-C)\,qr$$

$$-Bq' \text{ и } (C-A)\,rp$$

$$-Cr' \text{ и } (A-B)\,pq$$

2° **Кинетички ток завионих симултаних хемиских реакција** т. ј. реакција које се у једно време дешавају у једној истој смеши и имају једно или више заједничких активних тела. Такав би н. пр. случај био кад се једно или више активних тела троше у двема различним реакцијама у истој смеши, или кад који од продуката ступа у реакцију са којим од активних тела, чијом акцијом он постаје, или кад продукти међусобном реакцијом регенеришу које од првобитних активних тела и т. д. Поступно мењање количине продуката у току реакције регулисано је једним системом диференцијалних једначина облика

$$\frac{d\varrho i}{dt} = X_i$$

где су ϱ_i концентрације смеше по продукту S_i реакције, X_i непосредне трансформаторске тежње примењене на елементе S_i које су, према основним законима Хемијске Кинетике, пропорционалне концентрацијама смеше по оним активним телима, што суделују у реакцији при формирању продукта S_i.

Задржимо се, примера ради, на специјалном случају кад је дата реакција са две активне течности L, L' која даје продукте $S_1 \cdots S_m$. Претпоставимо да се између течности L и једне нове течности T збива у исто време, и у истој смеши, секундарна реакција која даје продукте $R_1 \cdot \cdot \cdot \cdot R_n$ тако, да се течност L симултано троши и у реакцији (LL') и у реакцији (TL). Нека су

a, a', b првобитне количине течности L. L' T

$y_1 \cdots y_m$ утрошене количине течности L на продукте $S_1 \cdots S_m$ за време t;

$z_1 \cdots z_n$ утрошене количине течности L на продукте $R_1 \cdots R_n$ за време t.

Варијације количина y_i и z_i у току реакције регулисане су двема диференцијалним једначинама облика

$$\frac{dy_1}{dt} = C_1 (a - \alpha y_1 - \beta z_1) (a' - \alpha' y_1)$$

$$\frac{\partial z_1}{dt} = C_2 (a - \alpha y_1 - \beta z_1) (b - \beta' z'_1)$$

и системом једначина веза прве врсте

$$y_i = k_i y_1 \quad (i = 2, 3, \cdots m)$$

$$z_j = h_j z_1 \quad (j = 2, 3, \cdots n)$$

где су

$$C_1, C_2, \alpha, \beta, \alpha', \beta', k_i, h_i$$

стални бројеви[1]. Улогу компонената Q_1 и Q_2 активних тежња играју, дакле, трансформатске тежње чије су величине

$$Q_1 = C_1 (a - \alpha y_1 - \beta z_1) (a' - \alpha' y_1)$$
$$Q_2 = C_2 (a - \alpha y_1 - \beta z_1) (b - \beta' z_1)$$

а улогу функције Θ израз

$$\Theta = \frac{1}{2} (y'^2_1 + z'^2_1)$$

тако, да се једначине могу написати у облику

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y'_1} = Q_1$$
$$\frac{\partial \Theta}{\partial z'_1} = Q_2$$

Инертне су тежње у правцима oy_1 и oz_1 дате самим изводима y'_1 и z'_1.

3° **Међусобна акција система непокретних струја.** Нека је дат систем од n непокретних струја које се међусобно индукују и нека су

$$E_1 \cdots E_n$$

електромоторне силе електричног извора (н. пр. електричне батерије), које се налазе у саставу посматраних n електричних кола;

$$R_1 \cdots R_n$$

електрични отпори проводника; M_{ik} коефицијенти међусобне индукције i-те и k-те струје, тако да M_{ik} пред-

---

[1] Мих. Петровић: Прилози Хемијској Кинетици Глас С. К. Акад. 57. стр. 224.).

ставља индукциони флукс који пролази кроз i-то електрично коло, кад кроз k-то коло пролази струја јачине $n = +1$. Тај коефициенат зависи једино од облика слике коју образује скуп ова два кола и задовољава погодбу

$$M_{ik} = M_{ki}$$

На послетку нека су

$$L_1 \cdots L_n$$

коефициенти ауто-индукције сваке од n струја.

Промене јачине струја $i_1 \cdots i_n$ биће, као што је познато, регулисане системом симултаних диференцијалних једначина

$$
(116) \quad
\begin{aligned}
L_1 i'_1 + M_{12} i'_2 + \cdots M_{1n} \; i'_n &= E_1 - R_1 i_1 \\
L_2 i'_2 + M_{21} i'_1 + \cdots M_{2n} \; i'_n &= E_2 - R_2 i_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
L_n i'_n + M_{n1} i'_1 + \cdots M_{n,d-1} i'_{n-1} &= E_n - R_n i_n
\end{aligned}
$$

Количине $E_1 \cdots E_n$ на десној страни представљају активне силе, примењене непосредно на варијације јачина струја; изрази $-R_1 i_1 \cdots -R_n i_n$ представљају реактивну контра — електромоторну силу, која је увек по смислу супротна смислу струје, а која је, по начину акције и склопу израза што је представља, аналога отпорним механичким силама пропорционалним брзинама и која је израз Joule-овог ефекта при проласку струје кроз електрично коло.

Улоге функција Q_k играју изрази

$$E_k - R_k i_k$$

Према ранијем упуству налази се да улогу функције Θ у проблему игра функција дефинисана обрасцем

$$2\,\Theta = \Sigma L_k i'^2_k + 2\,\Sigma M_{kh} i'_k i'_h$$

тако, да се једначине појаве могу написати у облику

$$\frac{\partial \Theta}{\partial i'_1} = Q_1$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial i'_n} = Q_n$$

Тоталне компоненте сила инерције у правцима $oi_1 \cdots oi_n$ јесу

$$\frac{\partial \Theta}{\partial i'_1} = L_1 \, i'_n + M_{12} \, i'_2 + \cdots + M_{1n} \quad i'_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial i'_n} = L_1 \, i'_n + M_{n1} \, i'_1 + \cdots + M_{n,n-1} \, i'_{n-1}$$

Међутим израз $- L_k \, i'_k$ представља електромоторну силу што произлази од ауто-индукције струје i_k, а израз $- M_{kh} \, i'_k$ електромоторну силу што произлази од међусобне индукције струја i_k и i_h. Све се те врсте сила имају, дакле, сматрати као инертне тежње у појавама.

4° **Варијације струја у покретним дво-димензионалним проводницима.** Вратимо се раније наведеном примеру модификација електричног стања при обртању Barlow-љевог точка (стр. 139) и узмимо за дескриптивне елементе јачине i_1 и i_2 струја, што при обртању точка пролазе кроз кола C_1 и C_2, и угао ротације θ, који ће се рачунати као позитиван, у тригонометриском смислу, за посматрача који би стајао у продужењу C_2 осовине точка (сл. 20).

Нека су

$$(R_1, R_2), \ (L_1, L_2), \ (E_1, E_2)$$

електрични отпори, коефицијенти ауто-индукције и активне електромоторне силе што карактеришу кола C_1 и C_2;

$$Q_1 = E_1 - R_1 \, i_1 \quad \text{и} \quad Q_2 = E_2 - R_2 \, i_2$$

тоталне компоненте активних и реактивних електромоторних сила;

J моменат инерције точка;

Q моменат механичке силе X при обртању точка;

K један коефициенат што зависи искључиво од геометриских облика и димензија система и који остаје сталан у току појаве;

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

угловна брзина точка.

Једначине ће појаве бити[1])

$$\begin{aligned} J\omega' - Ki_1 i_2 &= Q \\ L_1 i'_1 - K\omega i_2 &= Q_1 \\ L_2 i'_2 &= Q_2 \end{aligned}$$

Улогу функције Θ игра функција

$$2\Theta = J\omega'^2 + L_1 i'_1{}^2 + L_2 i'_2{}^2 - Ki_1 i_2 \omega' - K\omega i_2 i'_1$$

и једначине појаве могу се написати у облику

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\omega'} = Q$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial i'_1} = Q_1$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial i'_2} = Q_2$$

Инертне су тежње

1° центрифугална сила $J\omega'$ при обртању точка;

2° електромагнетне инертне силе

$$Ki_1 i_2 \quad \text{и} \quad - K\omega i_2$$

---

[1]) Carvallo: loc. cit. p. 80.

5° Мале осцилације покретних система око стабилног равнотежног положаја. Нека је дат какав механички систем са непромењивим везама и нека је он под утицајем сила које деривирају из једног потенцијала— U.) Нека су

$$q_1\, q_2 \cdots q_k$$

параметри што дефинишу положај система, изабрани тако, да су сви равни нули кад је систем у своме положају O стабилне равнотеже. Тако се исто увек може претпоставити да је за тај положај и функција U равна нули, пошто она садржи једну произвољну адитивну константу.

Померен врло мало из тога положаја и остављен сам себи, систем ће почети осциловати око положаја O и осцилације ће бити регулисане познатим системом k линеарних једначина другог реда

$$a_{11}\, q_1'' + \cdots + a_{1k}\, q_k'' = A_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{k1}\, q_1'' + \cdots + a_{kk}\, q_k'' = A_k$$

где је у опште

$$A_i = b_{i1}\, q_1 + \cdots + b_{ik}\, q_k$$

и где су a_{ij} и b_{ij} сталне количине и $a_{ij} = a_{ji}$. Коефициенти a_{ij} зависе само од система а b_{ij} од сила којима је он изложен: ови последњи фигуришу у потенцијалу U на такав начин да је

$$U_2 = \Sigma\, b_{ij}\, q_i\, q_j$$

скуп оних чланова у функцији U, који имају осетног утицаја на ток кретања, тако, да се U у првој апроксимацији може идентификовати са U_2.

Пошто је тада

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = A_i$$

то израз A_i игра улогу тежње Q_i. Функција ће S Appell-овог каноничног типа бити облика

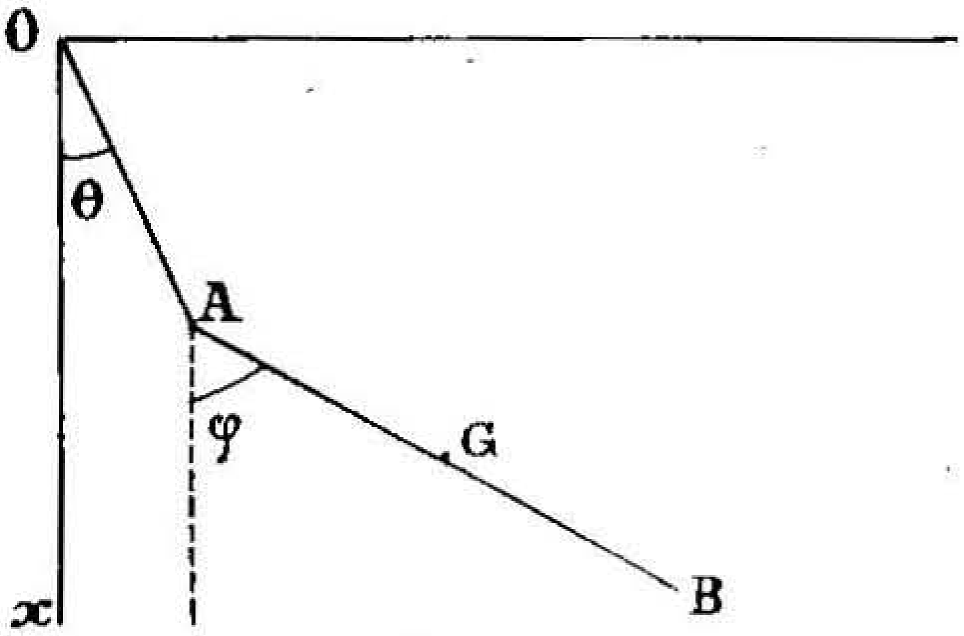
$$2S = \Sigma\, a_{ij}\, q_i''\, q_j''$$

и једначине кретања добијају каноничан тип

$$\frac{\partial S}{\partial q_1''} = Q_1 \cdots\cdots \frac{\partial S}{\partial q_k''} = Q_k$$

Уочимо, као одређенији конкретан пример, кретање једне хомогене тешке полуге AB дужине $2a$, обешене једним концем дужине $OA = l$ о утврђену тачку O и присиљене да се креће само у вертикалној равни xoy.

Положај је система у сваком тренутку одређен вредностима углова θ и φ које чини вертикала Ox са правцима конца и полуге. Те су вредности, у осталом, равне нули у равнотежном положају полуге, тако да елементи θ и φ играју улоге елемената q_1 и q_2 при посматраном кретању.



Сл. 22.

Варијације су тих елемената регулисане системом двеју једначина другог реда

$$l^2\,\theta'' + al\varphi'' = -\,gl\theta$$

$$\frac{4}{3}\,a\varphi'' + l\theta'' = -\,g\varphi$$

Улогу функције S игра функција

$$2S = l^2\,\theta''^2 + \frac{4}{3}\,a^2\,\varphi''^2 + 2\,al\theta''\,\varphi''$$

а улога израза Q_1 и Q_2 изрази

$$Q_1 = -\,gl\theta$$

$$Q_2 = -\,ga\varphi$$

тако, да се једначине кретања полуге могу написати у облику

$$\frac{\partial S}{\partial\theta''} = Q_1$$

$$\frac{\partial S}{\partial\varphi''} = Q_2$$

Компоненте инертних тежњи су

у правцу θ: $\quad l^2\,\theta'' + al\varphi''$

у правцу φ: $\frac{4}{3}\,a^2\,\varphi'' + al\theta''$

6° **Međусобна акција система покретних струја.** Нека је дат систем од два електрична кола C_1 и C_2, од којих је једно н. пр. C_1 покретно и креће се транслаторно у једном датом правцу. Струје, које буду пролазиле кроз та кола, индуковаће се и саме собом и међусобно и мењаће се по јачини у току времена.

Узмимо за дескриптивне елементе појаве јачине струја i_1 и i_2 и елеменат x, који дефинише геометријски положај кола C_1 у једноме ма коме тренутку. Нека су R_1 и R_2, L_1 и L_2 отпори и коефициенти ауто-индукције у колима, M_{12} коефициенти њихове међусобне индукције, X механичка сила која производи кретање кола C_1; Q_1 и Q_2 компоненте активних и реактивних електричних сила у колима, тако, да је

$$Q_1 = E_1 - R_1 i_1$$
$$Q_2 = E_2 - R_2 i_2$$

где су E_1 и E_2 активне електромоторне силе у колима (н. пр. електромоторне силе електричних елемената), а $-R_1 i_1$ и $-R_2 i_2$ реактивне, контра-електромоторне силе, m механичка маса, а v брзина кретања покретног кола C_1.

Коефициенти L_1 и L_2 су стални у току појаве, а коефицијенат се M_{12} мења кретањем кола C_1 и зависи непосредно од геометриског елемента x, а преко овога, и то само преко њега, посредно и од времена t.

Појава је регулисана системом Maxwell-ових једначина

$$\begin{aligned} mv' - \frac{dM_{12}}{dx} i_1 i_2 &= X \\ \frac{d}{dt}(L_1 i_1 + M_{12} i_2) &= Q_1 \\ \frac{d}{dt}(M_{12} i_1 + L_2 i_2) &= Q_2 \end{aligned} \tag{117}$$

које су у развијеном облику

$$mx'' + N = X$$
$$L_1 q_1'' + M_{11} q_2'' + P = Q_1$$
$$L_2 q_2'' + M_{12} q_1'' + H = Q_2$$

где q_1 и q_2 представљају количине електрицитета, као тоталитета елемената i_1 и i_2 и где је, краткоће ради, стављено

$$N = -\frac{dM_{12}}{dx} i_1 i_2 = -\frac{dM_{12}}{dx} q_1' q_2'$$
$$P = q_2' \frac{dM_{12}}{dx} x'$$
$$H = q_1' \frac{dM_{12}}{dx} x'$$

тако да су N, P и H функције променљивих

$$x, x', q_1', q_2'$$

Улогу функције S игра функција

$$2S = mx''^2 + L_1 q_1''^2 + 2M_{12} q_1'' q_2'' + + N x'' + \\ + P q_1'' + H q_2''$$

тако, да се једначине појаве могу написати у облику

$$\frac{\partial S}{\partial x''} = X$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_1''} = Q_1$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_2''} = Q_2$$

Функција је $2S$, као што се види, збир два израза:

$$L_1 q_1''^2 + L_2 q_2''^2 + 2M_{12} q_1'' q_2''$$

који није ништа друго, до функција $2S$ за случај кад је коло C_1 непокретно, и

$$mx''^2 + Nx'' + Pq_1'' + Hq_2''$$

који произлази од покретљивости тога кола.

Инертне тежње представљене су:

1° изразом

$$-mx''^2$$

који представља механичку инерцију покретног кола C_1;

2° изразом

$$\frac{dM_{12}}{dx} i_1 i_2$$

који представља Ampère-ову електро-магнетну силу;

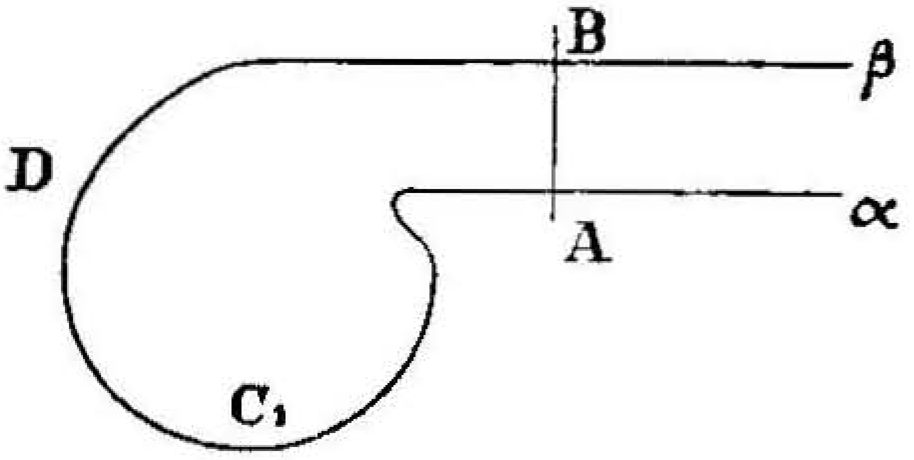
3° изразима

$$-\frac{d}{dt}(L_1 i_1 + M_{12} i_2)$$

$$-\frac{d}{dt}(L_2 i_2 + M_{12} i_1)$$

који представљају индуковане електромоторне силе у колима C_1 и C_2.

7° **Међусобна акција система струја при деформацији проводника.** Претпоставимо, вративши се на пример VI, не да је коло C_1 покретно и непроменљивог облика, као у томе примеру, већ да му се у току појаве постепено мења и геометриски облик и то н. пр. на овај начин: један део кола D непрестано задржава свој првобитни облик, отворено је и продужава се у две жице α и β; један покретни проводник AB, крећући се транслаторно и паралелно жицама α и β, затвара коло при томе кретању. Начин на који ће се мењати јачине струја у колима C_1 и C_2 биће измењен том модификацијом на овај начин.



Сл. 23.

Задржимо сва означавања из ранијег примера I, имајући на уму да сад m и x представљају масу и координату покретног проводника AB, а X механичку силу која производи кретање тога проводника. Осим тога, и коефициенти ауто-индукције L_1 и L_2 биће сад промењљиви у току појаве, због кретања проводника AB, и то ће, као и коефициенат M_{12}, зависити непосредно од координате x, а преко ове посредно и од времена t.

Појава је регулисана системом Maxwell-ових једначина

$$mv' - \frac{1}{2}\left[\frac{dL_1}{dx} i_1{}^2 + 2\frac{dM_{12}}{dx} i_1 i_2\right] = X$$

$$\frac{d}{dt}(L_1 i_1 + M_{12} i_2) = Q_1$$

$$\frac{d}{dt}(L_2 i_2 + M_{12} i_1) = Q_2$$

или у развијеном облику

$$m x'' + A = X$$

$$L_1 q_1{}'' + M_{12} q_2{}'' + B = Q_1$$

$$L_2 q'' + M_{12} q_1{}'' + C = Q_2$$

где је краткоће ради стављено

$$A = -\frac{1}{2}\left(\frac{dL_1}{dx} q_1{}'^2 + 2M_{12} q_1{}' q_2{}'\right)$$

$$B = \left(\frac{dL_1}{dx} q_1{}' + \frac{dM_{12}}{dx} q_2{}'\right) x'$$

$$C = \left(\frac{dL_2}{dx} q_2{}' + \frac{dM_{12}}{dx} q_1{}'\right) x'$$

тако да су A, B, C функције променљивих x, x', $q_1{}'$ $q_2{}'$.

Улогу функције S игра функција

$$2S = mx''^2 + L_1 q_1{}''^2 + L_2 q_2{}''^2 + 2M_{12} q_1{}'' q_2{}'' + Ax'' + \\ + Bq_1{}'' + Cq_2{}''$$

тако, да се једначине појаве могу написати у облику

$$\frac{\partial S}{\partial x''} = X$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_1{}''} = Q_1$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_2{}''} = Q_2$$

Функција $2S$ је, као што се види, збир два израза:

$$L_1 q_1''^2 + 2 M_{12} q_1'' q_2'' + L_2 q_2''^2$$

који представља ту функцију за случај кад је коло C непокретно и непроменљивог облика, и

$$mx''^2 + Ax'' + Bq_1'' + Cq_2''$$

који произлази од геометриске деформације кола C_1

Инертне су тежње представљене овим изразима:

1° изразом

$$-mx''$$

који представља механичку инерцију проводника AB при његовом транслаторном кретању;

2° изразом

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dL_1}{dx} i_1^2 + 2 \frac{M_{12}}{dx} i_1 i_2\right)$$

који представља Ampère-ову електромагнетну силу;

3° изразима

$$-\frac{d}{dt}(L_1 i_1 + M_{12} i_2)$$

$$-\frac{d}{dt}(L_2 i_2 + M_{12} i_1)$$

који представљају индуктивне електромоторне силе у колима C_1 и C_2.

8° **Међусобна акција струја и магнета.** Кад се једно електрично коло C_1 поступно приближава каквоме магнету, или удаљава од њега, мењаће се поступно у току тога кретања и јачина струје у колу C_1. Претпоставимо да је магнет перманентан. Поље, произведено магнетом, у опште се ни у чему не разликује од поља произведеног струјом. Са друге стране, магнетизација је једна особина самих делића материје, тако да је н. пр. магнетни моменат једне игле резултанта момената свих њених делића. Деобом магнетног момента једнога делића његовом запремином добија се вектор магнетизације у томе делићу. Сваки магнетни делић, може се, према томе, асимилирати једноме малом електричном колу чија је раван управна на правцу вектора магнетизације тога делића (Ampère-ова хипотеза). Кад је магнет перманентан, јачина струје у таквоме колу непромењиве је јачине.

Перманентан магнет може се, дакле, асимилирати једном фиктивном електричном колу C_2 које би било карактерисано:

1° јачином i_2 фиктивне струје која кроз њега пролази и која је непромењива, пошто је магнет перманентан;

2° једном фиктивном електромоторном силом E_2 која се мења тако, како ће имати за ефекат перманентност магнета т. ј. тако, да јачина струје i_1 непрестано остаје стална: то је *коерцитивна сила* посматраног магнета.

Приметимо да у колу C_2 не може постојати никаква реактивна контра-електромоторна сила $-R_2\, i_2$, пошто се у магнетима не опажа ништа, што би се могло асимилирати Joule-овом ефекту при кретању струје кроз електрична кола. Према томе фиктивно електрично коло C_1 има се сматрати као карактерисано вредношћу $R_2 = o$ електричног отпора.

Пошавши од такве асимилације, узмимо за дескриптивне елементе појаве: јачине i_1 и i_2 реалне и фиктивне струје и геометриску координату x која дефинише растојање магнета од кола C_1.

Означимо још са X механичку силу која креће магнет, са v брзину тога кретања и са Φ флукс индукције у колу C_1 који произлази од утицаја тога магнета, тако, да је коефиценат те индукције, према општем правилу, дефинисан обрасцем

$$M_{12} = \frac{\Phi}{i_1} \tag{118}$$

према чему ће и Φ бити непосредна функција геометриске координате x. а преко ове посредна функција времена t.

Појава је, као што је познато, регулисана системом једначина (117) из ранијег примера VI водећи рачуна о обрасцу (118) и о томе, да је у овом случају

$$L_1 = const. \qquad L_2 = o \qquad R_2 = o$$

Те једначине тада постају[1].

$$m v' + K = X \tag{119}$$

$$L_1 i_1' + N = E_1 - R_1 i_1 \tag{120}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\Phi \frac{i_1}{i_2}\right) = E_2 \tag{121}$$

где K и N имају вредности

$$K = -\frac{d\Phi}{dx} i_1 \qquad N = \frac{d\Phi}{dx} v$$

Приметимо, да пошто се количине Φ и i_1 сматрају у проблему као познате, једначине (119) и (120) одређују елементе x и i као функције времена t, тако, да се оне имају сматрати као праве једначине проблема. Кад су из њих, интеграцијом, одређена ова два елемента, заменом у (121) добија се једначина која одређује коерцитивну силу E_2 магнета, као функцију времена.

---

[1] Carvallo: loc. cit. p. 47.

Кад се једначине (119) и 120) напишу у облику

$$m x'' + K = X$$

$$L_1 q_1'' + N = E_1 - R_1 i_1$$

улогу функције S игра функција

$$2 S = m x''^2 + L_1 q_1''^2 + K x'' + N q_1''$$

и једначине се (119) и (120) могу написати у облику

$$\frac{\partial S}{\partial v'} = X$$

$$\frac{\partial S}{\partial i_1'} = E_1 - R_1 i_1$$

Компоненте сила инерције јесу: механичка инерција кола C_1

$$- m x''$$

и две електромагнетне силе чије су величине

$$- \frac{d\Phi}{dx} i_1 \quad \text{и} \quad \frac{d\Phi}{dx} x'$$

ТРЕЋА ГЛАВА.

ТРАНСФОРМАЦИЈА ЈЕДНАЧИНА ЗА ПОЈАВЕ СА ХОЛОНОМНИМ СИСТЕМОМ.

Редукција једначина на Lagrange-ев облик за системе слободне или са везама друге врсте. — Одредба и опште значење појединих чланова у Lagrange-евим једначинама: функција *T*, функције Q_i и моменти модификација. — Lagrange-eве једначине за неколике врсте конкретних појава. — Формирање једначина за цикличне: моноцикличне, бицикличне и полицикличне појаве. — Формирање једначина према специјалним погодбама које се буду имале у виду. — Формирање једначина према констатованим или претпостављеним аналогијама. — Примедба о Lagrange-евим једначинама за појаве са нехолономним системом. — Корективни чланови таквих једначина. — Lagrange-eве једначине за појаве са нехолономним системом и веома лаганим модификацијама.

До сада наведени облици диференцијалних једначина важе како за појаве са холономним, тако и за оне са нехолономним системом, па било да је систем слободан, било да је он са везама прве или друге врсте.

У случајевима, кад је систем *холономан*, а при том *слободан* или са везама *друге врсте*, тим се једначинама могу дати још и разноврсни други облици, који су од интереса и сами по себи, и за даља, на њима основана, истраживања. Једна таква трансформација доводи, тада, до једначина истога облика, које је Lagrange дао диференцијалним једначинама Аналитичне Механике.

Исти облик вреди и за појаве са холономним системом и са везама *прве врсте*, са погодбом да се, на место примарног, узме секундарни редуковани систем и трансформација примени на овај, као на слободан систем.

I. Lagrange-ев облик једначина.

Нека је дат систем

$$v_1 \cdots v_n \tag{122}$$

на који су непосредно примењене тежње

$$X_1 \cdots X_n$$

са коефициентима инерције

$$k_1 \cdots k_n$$

Претпоставимо да између тоталита

$$\eta_1 \cdots \eta_n$$

елемената (122), постоји $m = n - k$ веза, таквих, да су ефективне варијације тих тоталитета дефинисане једначинама

$$\begin{aligned} \eta'_1 = v_1 &= \beta_{11} q'_1 + \cdots + \beta_{1k} q_k + B_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta'_n = v_n &= \beta_1 q_1 + \cdots + \beta_{nk} q'_k + B_n \end{aligned} \tag{123}$$

где су

$$q_1 \cdots q_k$$

међу собом независни параметри, а β_{ij} и B_i функције од

$$(q_1 \cdots q_k, t)$$

Образујмо функције

$$2T = k_1 v_1^2 + \cdots + k_n v_n^2 \tag{124}$$

$$2S = k_1 v'^2_1 + \cdots + k_n v_n^2 \tag{125}$$

и трансформишимо израз

$$(126)\qquad \frac{\partial S}{\partial q''_i} = P_i = k_1\,\beta_{1i}\,v'_1 + \cdots + k_n\,\beta_{ni}\,v'_n$$

на овај начин: ставимо да је

$$(127)\qquad R_1 = k_1\,\beta_{1i}\,v_1 + \cdots + k_n\,\beta_{ni}\,v_n$$

$$(128)\qquad R_2 = k_1\,v_1\,\frac{d\beta_{1i}}{dt} + \cdots + k_n\,v_n\,\frac{d\beta_{ni}}{dt}$$

па ће бити

$$(129)\qquad P_i = \frac{dR_1}{dt} - R_2$$

А пошто је према једначинама (123)

$$(130)\qquad \beta_{ji} = \frac{\partial v_j}{\partial q'_i}$$

то је према (124) и (127)

$$(131)\qquad R_1 = \frac{\partial T}{\partial q'_i}$$

Са друге стране, пошто је, опет из (124)

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = k_1\,v_1\,\frac{\partial v_1}{\partial q_i} + \cdots + k_n\,v_n\,\frac{\partial v_n}{\partial q_i}$$

то ће бити

$$(132)\qquad R_2 - \frac{\partial T}{\partial q_i} = k_1\,D_1\,v_1 + \cdots + k_n\,D_n\,v_n$$

где је

$$(133)\qquad \begin{aligned} D_1 &= \frac{d\beta_{1i}}{dt} - \frac{\partial v_1}{\partial q_i} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_n &= \frac{\partial\beta_{ni}}{dt} - \frac{\partial v_n}{\partial q_i} \end{aligned}$$

Трансформишимо, најпосле, ове вредности D_i. Пошто су β_{jh} функције променљивих $q_1 \cdots q_k$, t то је

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\beta_{2i}}{dt} = \frac{\partial\beta_{1i}}{\partial q_1} q'_1 + \cdots + \frac{\partial\beta_{1i}}{\partial q_k} q'_k + \frac{\partial\beta_{1i}}{\partial t} \\
(134)\qquad &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{d\beta_{ni}}{dt} = \frac{\partial\beta_{ni}}{\partial q_1} q'_1 + \cdots + \frac{\partial\beta_{ni}}{\partial q_k} q'_k + \frac{\partial\beta_{ni}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

Са друге стране, из једначине веза (123) добија се

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial v_1}{\partial q_i} = \frac{\partial\beta_{11}}{\partial q_i} q'_1 + \cdots + \frac{\partial\beta_{1k}}{\partial q_i} q'_k + \frac{\partial B_1}{\partial q_i} \\
(135)\qquad &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{\partial v_n}{\partial q_i} = \frac{\partial\beta_{n1}}{\partial q_i} q'_1 + \cdots + \frac{\partial\beta_{nk}}{\partial q_i} q'_k + \frac{\partial B_n}{\partial q_i}
\end{aligned}
$$

Заменивши у једначинама (133) изводе $\frac{\partial u_j}{\partial q_i}$ њиховим вредностима (135), добија се

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \left(\frac{\partial\beta_{1i}}{\partial q_1} - \frac{\partial\beta_{11}}{\partial q_i}\right) q'_1 + \cdots + \left(\frac{\partial\beta_{1i}}{\partial q_k} - \frac{\partial\beta_{1k}}{\partial q_i}\right) q'_k + \\
(136)\qquad &\qquad + \left(\frac{\partial\beta_{1i}}{\partial t} - \frac{\partial B_1}{\partial q_i}\right) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
D_n &= \left(\frac{\partial\beta_{ni}}{\partial q_1} - \frac{\partial\beta_{n1}}{\partial q_i}\right) q'_1 + \cdots + \left(\frac{\partial\beta_{ni}}{\partial q_n} - \frac{\partial\beta_{nk}}{\partial q_i}\right) q'_k + \\
&\qquad + \left(\frac{\partial\beta_{ni}}{\partial t} - \frac{\partial B_n}{\partial q_i}\right)
\end{aligned}
$$

Помоћу тако израчунатих вредности $D_1 \cdots D_n$, сменивши их у обрасцу (132), као и вредности $v_1 \cdots v_n$, њиховим вредностима (123), добија се разлика

$$
(137)\qquad R_2 - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \Delta_i
$$

изражена помоћу β_{ji} и q'_i. Знајући ову, из једначина (129), (131) и (137) добија се

$$(138) \qquad P_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \varDelta_i$$

где је према (132) и (137)

$$(139) \qquad \varDelta_i = k_1 D_1 v_1 + \cdots + k_n D_n v_n$$

и где су $D_1 \cdots D_n$ дати обрасцима (136).

Ако је сад систем $(v_1 \cdots v_n)$ *холономан*, свака је од десних страна једначина (123) тоталан диференцијал; тада је свака заграда, понаособ, у обрасцима (136) равна нули, тако, да је

$$(140) \qquad D_1 = o \cdot \cdots \cdot D_n = o$$

и према томе

$$(141) \qquad \varDelta_i = o$$

Код холономних система је, дакле, идентички

$$(142) \qquad \frac{\partial S}{\partial q''_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

и према томе се једначине појаве своде на облик

$$(143) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad i = 1, 2, \cdots k$$

на који је Lagrange, на познати начин, свео једначине Аналитичне Механике. Такве ће једначине и у генералном случају, са којим се овде има посла, бити назване *Lagrange-евим једначинама*.

Одредба и опште значење појединих чланова у Lagrange-евим једначинама. Функција T, што фигурише у једначинама (143), добија се, кад се у изразу

$$2T = k_1 v_1^2 + \cdots + k_n v_n^2$$

смени

$$
(144) \qquad \begin{aligned} u_1 &= \beta_{11} q'_1 + \cdots + \beta_{1k} q'_k + B_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n &= \beta_{n1} q'_1 + \cdots + \beta_{nk} q'_k + B_r \end{aligned}
$$

из једначина веза у систему.

Та је функција, дакле, полином другом степена по

$$q'_1 \cdots q'_k$$

са коефициентима, који у опште могу бити функције промењљивих

$$q_1 \cdots q_k, t.$$

Према томе, једначине су (143) диференцијалне једначнне другог реда, које би интеграцијом дале

$$q_1 \cdots q_k$$

као функције времена и $2k$ констаната.

Кад је дефиниција параметара q_i независна од времена, т. ј. кад једначине (144) не садрже експлицитно t, функција ће T бити један одређен и позитиван квадратан облик

$$
(145) \qquad 2T = M_1 q_1'^2 + \cdots + M_k q_k'^2
$$

где коефициенти M_i не садрже t. Међу тим T може бити облика (145) и у извесним случајевима, кад једначине (144) садрже t експлицитно, тако да M_i ипак садржи t.

Израз

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i}$$

биће назван *моментом система у правцу* oq_i. У појави транслаторног кретања једне тачке, чија је маса m, у правоуглом координатном систему, моменти су

$$p_1 = mx' \qquad p_2 = my' \qquad p_3 = mz'$$

тако, да p_1 представља моменат кретања у правцу осовине ox, p_2 моменат кретања у правцу осовине oy и т. д.

При обртању каквог чврстог тела око једне утврђене осовине, израз p је обртни моменат тела

$$p = J \frac{d\omega}{dt}$$

где је J моменат инерције тела за ту осовину, а ω обртни угао.

При варијацијама јачина $i_1 \cdots i_n$ струја, са међусобном и ауто-индукцијом, моменти су електричних модификација у систему представљени изразима

$$\begin{array}{l} L_1 i'_1 + M_{12} i'_2 + \cdots + M_{1n} i'_n \\ L_2 i'_2 + M_{21} i'_1 + \cdots + M_{2n} i'_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_n i'_n + M_{n1} i'_1 + \cdots + M_{n,n-1} i_{n-1} \end{array}$$

где су M_{jk} и L_k коефицијенти индукције у систему и т. д.

Приметимо и то да је, у опште, p_i облика

$$p_i = \Sigma a_{ij} q'_j + b_i \qquad (j = 1, 2, \cdots k)$$

према чему је

$$a_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial q'_j}$$

тако, да коефициенти a_{ij} играју улоге коефициената инерције. Код транслаторног кретања тачке коефициенти a_{ij} имају као заједничку вредност масу тачке; при обртању тела око утврђене осовине коефициенат је а моменат инерције тела; у појавама међусобне и ауто-индукције система струја улогу тога коефицијента играју коефицијенти индукције и т. д.

Израз

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

који у једначини (142) има за израз

$$\frac{\partial S}{\partial q''_i}$$

представља тоталну компоненту комплекса инертних тежња у правцу oq_i, у случају кад се фигуративна тачка система $(q_1 \cdots q_k)$ креће у томе правцу. Свака се, дакле, тежња која улази у састав овога израза, има сматрати као једна од инертних тежња у појави.

На послетку, раније је показано како се одређују функције Q_i, које су оне исте што фигуришу и у Appell-овом каноничном типу једначина: Q_i представља тоталну компоненту комплекса примењених тежња у правцу осовине oq_i, кад се фигуративна тачка система $(q_1 \cdots q_k)$ креће у правцу те осовине. Њена је величина одређена изразом

$$Q_i = \beta_{1i} X_1 + \cdots + \beta_{ni} X_n$$

где су $X_1 \cdots X_n$ непосредно примењене тежње на примарни систем $(v_1 \cdots v_n)$.

II. Lagrange-еве једначине за неколике врсте конкретних појава.

Формирање Lagrange-евих једначина, или редукција већ датих једначина другога каквог облика, на тип што карактерише Lagrange-еве једначине, може се извршити на разне начине, према природи података који се при томе формирању, или свођењу, буду имали на расположењу и према употреби која се мисли чинити са једначинама сведеним на такав облик.

Овде ће бити наведено неколико таквих начина, као и неколико врста конкретних појава, на које су поједини од тих начина непосредно примењени.

Први начин.

Кад је дат примарни систем

$$v_1 \cdots v_n,$$

непосредно примењене тежње

$$X_1 \cdots X_n$$

на сваки од елемената v_i посебице, и везе друге врсте, које постоје у систему, могу се на напред наведени начин непосредно одредити функције T и Q_i, па помоћу њих непосредно формирати одговарајуће Lagrange-еве једначине.

На исти би се начин формирале Lagrange-еве једначине и у случају кад је систем слободан: улоге једначина веза друге врсте играле би раније наведене једначине за трансформацију система, које изражавају релације између промена елемената првобитног система и оних у трансформисаном систему.

Такав се начин формирања једначина види из ових примера:

1° При кретању тешке материјалне тачке по површини кугле. Ако је r полупречник кугле, једначине веза између координата (x, y, z) тачке, њене лонгитуде, и колатитуде су

$$x = r \sin\theta \cdot \cos\psi$$
$$y = r \sin\theta \cdot \sin\psi$$
$$z = r \cos\theta$$

или, означивши са v_1, v_2 и v_3 компоненте брзине у правцу осовина ox, oy, oz

$$v_1 = r \cos\theta \cdot \cos\psi \cdot \theta' - r \sin\theta \cdot \sin\psi \cdot \psi'$$

$$v_2 = r \cos\theta \sin\psi \cdot \theta' + r \sin\theta \cdot \cos\psi \cdot \psi'$$

$$v_3 = - r \sin\theta \cdot \theta'$$

тако, да улоге параметра q_i играју променљиве

$$\theta = q_1 \quad \text{и} \quad \psi = q_2$$

Тада је

$$2T = m(v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_{32}) = r^2\, \theta'^2 + r^2 \sin^2\theta \cdot \psi'^2$$

одакле је

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = r^2\, \theta'$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi'} = r^2 \sin^2\theta \cdot \psi'$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = r^2 \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \psi'^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = o$$

Са друге стране, компоненте Q_1 и Q_2 теже, при променама лонгитуде и колатитуде, су

$$Q_1 = - rg \sin\theta$$

$$Q_2 = o$$

тако, да су Lagrange-еве једначине кретања за овај случај

$$\frac{d}{dt}(r^2\, \theta') - r^2 \sin\theta \cos\theta \cdot \psi'^2 = - rg \sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}(r^2 \sin^2\theta \cdot \psi') = o$$

II. Претпоставимо да се у једном материјалном хомогеном систему дешавају модификације овакве врсте:

1° Материјални делићи, из којих је састављен систем, крећу се веома брзо са приближно сталном брзином и то тако, да чим је при томе кретању један делић померен са свога места, он је, по истеку једнога врло кратког размака времена, замењен другим делићем, који тада има исту брзину и исти правац кретања као и први. У једној, дакле, ма којој, тачки простора, који систем заузима, неће бити осетних промена: целокупно стање система, услед оваквих промена, не мења се осетно у току времена.

Такву врсту кретања Helmholtz[1]) назива *цикличким кретањем*. Такво је н. пр. кретање у систему, састављеном од материјалних делића једнога чврстог тела, које се креће око једне утврђене осовине, или кретање у систему, састављеном од материјалних делића какве нестишљиве течности, која струји у једној прстенастој цеви и т. д.

Нека је $(q_1 \cdots q_h)$ редуковани систем при таквоме једном цикличком кретању, тако, да је положај свакога делића у тренутку t утврђен вредностима елемената $q_1 \cdots q_h$ у томе тренутку.

2° Једно стање, особина и т. д. E, везани за такав систем, мењају се веома споро у току цикличких кретања у њему, тако, да су те промене неосетне за један краћи размак времена, али осетне за дуже размаке. Нека је

$$q_{h+1} \cdots q_k$$

редуковани систем елемената, који својом величином у тренутку t одређују стање E у томе тренутку.

Скуп елемената

$$q_1 \cdots q_h$$

зваће се *цикличким координатама*, а скуп

$$q_{h+1} \cdots q_h$$

---

[1]) Helmholtz: Principien der Statik monocyklischer Systeme (Journ. f. die reine und angewandte Mathematik, Bd. 97. 1884. S. 111—140; 317—336.).

координатама са спорим варијацијама у посматраној појави. Појаве, које се састоје у променама цикличких координата и координата са спорим варијацијама, зваће се (по Helmholtz-у) *цикличким појавама.*

Уочимо функцију T у случају цикличких појава. Она у опште зависи:

1^0 од елемената q_i т. ј. од конфигурације система у датом размаку времена.

2^0 од извода q_i' т. ј. од брзина са којом се мењају елементи конфигурације у току времена.

Пошто се у цикличким појавама стање материјалнога система не модификује мењањем цикличких координата, функција се T може сматрати да зависи само од брзина промена цикличких координата q_i' а не и од самих вредности тих координата.

Код координата са спорим варијацијама обрнути је случај: пошто су брзине промене q_i' тих координата неосетне, може се узети да су чланови функције T, који садрже те изводе, занемарљиви наспрам оних што садрже изводе цикличких координата, тако да T зависи само од елемената

$$q_{h+1} \cdots q_k$$

а не и од њихових извода.

Према томе за цикличке појаве биће

$$T = f(q_1' \cdots q_h'; \; q_{h+1} \cdots q_k)$$

и Lagrange-еве једначине за цикличке координате биће

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) = Q_i \qquad i = (1, 2 \cdots h)$$

а за координате са спорим варијацијама

$$-\frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = h + 1 \cdots k)$$

где је Q_i тотална компонента комплекса примењених тежња у правцу oq_i.

Координате са спорим варијацијама играју, дакле, *улоге параметара* у диференцијалним једначинама које регулишу промене цикличких координата. Ако размак времена, у коме се појава посматра, не прелази једну одређену границу, ови се параметри могу сматрати као стални у томе размаку, тако, да се може сматрати, да се уочена циклична појава за то време састоји само у цикличком кретању материјалних делића, што састављају систем. Она ће таква иста бити и у следећем размаку времена, али са у неколико промењеним вредностима параметара.

Према броју цикличких координата, цикличке појаве се разликују на *моноцикличне*, *бицикличне* и т. д. појаве.

а.) *Моноцикличне* су оне са једном цикличном координатом; број координата са спорим варијацијама може, у осталом, бити ма колики. За ове ће се предпоставити да се тако споро мењају, да се у размаку времена, у коме се појава посматра, могу сматрати за сталне. Функција T има тада за израз

$$2\,T = A\,q'^2$$

где је q циклична координата система, а A одређена функција координата са спорим варијацијама.

Lagrange-ева једначина за цикличку координату q биће облика

$$\frac{d}{dt}\,(A\,q') = Q \tag{146}$$

а за координате са спорим варијацијама q_2, q_3, $\cdots$ то ће бити

$$-\frac{q'^2}{2}\cdot\frac{\partial A}{\partial q^i} = Q_i \qquad (i = 2.\ 3,\cdots) \tag{147}$$

Једначине (147) дају јачине тежња Q_i потребне да би се брзине q' и координате q_i мењале толико споро да се могу сматрати као сталне.

Према Maxwell-овој теорији електрицитета, кретање електричне струје кроз жицу има се сматрати као једна моноциклична појава. Брзина q' промене цикличне координате q расте упоредо са јачином струје; компонента Q спољних сила у, правцу oq, расти упоредо са електромоторном силом која се налази у електричном колу. Циклично се кретање дешава делимично у етру, а делимично у самоме материјалу проводника. Оно се мења кад жица мења свој облик или положај. Параметри $q_2\ q_3 \cdots$ који одређују тај облик или тај положај, играју улоге координата са спорим варијацијама. Брзина једнога, ма кога, пондерабилног или непондерабилног, делића жице или околине (управо брзина у једној тачки система, са којом ти делићи кроз ову тачку пролазе) игра улогу извода q'. Величине

$$Q, Q_2, Q_3, \cdots$$

биле би спољне пондеромоторне силе, које треба да делују на систем, да би се брзина q' и параметри $q_2, q_3, \cdots$ мењали неосетно у току појаве и имали онакве вредности, какве се хоће. Према томе

$$-Q, -Q_2, -Q_2, \cdots$$

биле би реактивне силе, изазване самим цикличким кретањем у систему (као што је центрифугална сила изазвана обртањем тела) и које држе равнотежу силама $Q, Q_2, Q_3, \cdots$ (као центрифугална сила центрипеталној)[1]).

По Helmholtz-у се и термичке промене имају сматрати као једна нарочита врста моноцикличких појава.

---

[1]) Boltzmann: Vorlesungen über die Maxwells Theorie der Electricitäts und des Lichtes, I. S. 22.

Строго узевши, кретање топлоте не би била права моноциклична појава: сваки материјални делић при томе кретању мења, у току времена, сам начин свога кретања, чиме то кретање, у опште, губи карактер цикличког кретања. Али појава, ипак, задржава циклички карактер ако се има на уму, да се сви, бескрајно разноврсни, начини кретања веома великог броја делића стапају — бар у колико се тиче спољних манифестација особина материјалног система, у једно средње кретање, са којим се, у осталом, и рачуна у кинетичкој теорији гасова и механичкој теорији топлоте. Брзина је тога средњег кретања приближно стална, ако размак времена $t_2 - t_1$, у коме се појава посматра, не прелази извесну границу; носиоци ће те брзине бити час један, час други материјални делић, али су те пермутације делића тако брзе, да се може узети да у једној, ма којој, тачки простора, који заузима систем, а у размаку времена $t_2 - t_1$, неће бити осетних промена, тако, да је у томе размаку времена стање система непромењено.

Улогу цикличке координате q играла би средња брзина кретања делића, а улогу параметара $q_2, q_3, \cdots$ ма који елементи чије споре варијације буду пратиле промене координате q (геометриски елементи при ширењу тела; електрично стање тела и т. д.).

b) *Бицикличне* су појаве оне са двема цикличким координатама. Нека је дат један систем који се састоји из ма колнкога броја материјалних делића

$$m_1, m_2, \cdots m_p$$

чије брзине нека су

$$v_1, v_2, \cdots v_p$$

(v_i као и раније означује брзину, са којом делић m_i пролази кроз једну одређену тачку простора, који систем заузима). Нека је положај једнога, ма кога, делића одређен ма колики бројем споро промењивих координата

$$q_3, q_4, \cdots$$

и двема цикличким координатама q_1 и q_2. Нека су

$$v_1 = a_1 q_1' + b_1 q_2'$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_p = a_p q_1' + b_p q_2'$$

везе друге врсте у систему, и ставимо

$$A = m_1 a_1^2 + \cdots + m_p a_p^2$$

$$B = m_1 b_1^2 + \cdots + m_p b_p^2$$

$$C = m_1 a_1 b_1 + \cdots + m_p a_p b_p$$

па ће бити

$$2\,T = A\,q_1'^2 + 2\,C\,q_1'\,q_2' + B\,q_2'^2$$

и Lagrange-еве једначине су за цикличке координате

$$\frac{d}{dt}(Aq_1' + Cq_2') = Q_1$$

$$\frac{d}{dt}(Cq_1' + Bq_2') = Q_2$$

а за координате са спорим варијацијама

$$-\frac{q_1^2}{2}\frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{q_2'}{2}\frac{\partial B}{\partial q^i} - q_1 q_2'\frac{\partial C}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 3, 4 \cdots)$$

Према Maxwell-овој теорији, кретање електрицитета, у систему састављеном из две електричне струје, које се међусобно индукују, може се сматрати као једна бициклична појава. Улоге цикличких координата и координата са спорим варијацијама очевидне су из онога што је казано код моноцикличких појава.[1])

Исти је случај и са системом састављеним од једне електричне струје и једнога перманентног магнетна, кад се овај сматра као агрегат непроменљивих молекуларних струја.

Maxwell-ове једначине за појаве овакве врсте, више пута поменуте у овоме делу, нису ништа друго, до опште Lagrange-еве једначине за бицикличке појаве, примењене на систем цикличких координата и координата са спорим варијацијама, онаквих, какве би према Maxwell-овој теорији одговарале систему електричних струја, сматраном као један циклички систем.

Други начин.

Кад су, на ма који начин и у ма коме аналитичком облику познате диференцијалне једначине дате појаве, оне се могу на разноврсне начине, подесним избором функција T и Q_i, написати у облику Lagrange-евих једначина.

Облик Lagrange-евих једначина, који се даје првобитним једначинама појаве, зависиће од специјалних услова који се од њих буду тражили. Може се н. пр. тражити да компоненте Q_i буду линеарне и хомогене функције извесних непосредно датих и физички познатих сила у појави; или да Q_i буду парцијални изводи какве функције по елементима на које се односе формиране Lagrange-еве једначине и т. д. Тиме се н. пр. добија то, да се једначине појаве, која иначе, сама по себи, не би припадала типу *потенцијалних*[2]) појава, таквом трансформацијом своде на облик, у коме су изрази, што играју улоге примењених, тежња истога типа као и у потенцијалним појавама. На појаву се, тада, могу

---

[1]) В. о томе Boltzmann: loc. cit. S. 29.—32.

[2]) В. II. одељак IV. главу ове књиге.

примењивати аналитички резултати везани специјално за ту појединост Lagrange-евих једначина за потенцијалне појаве.

Такав ће се циљ имати у виду при трансформацијама уових неколико примера:

I Уочимо групу појава у којима се сваки елеменат v_i примарног система

$$v_1 \cdots v_n$$

мења под утицајем једне непосредне тежње X_i, која зависи од скупа тоталитета елемената самога система и времена t и једне тежње пропорционалне величини самога елемента v_i.

Појава се своди на систем једначина:

$$\begin{aligned} k_1 v_1' &= X_1 + \lambda_1 v_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_n v_n' &= X_n + \lambda_n v_n \end{aligned} \tag{148}$$

где k_i и λ_i могу бити константе или функције времена.

Ставивши да је

$$\mu_i = e^{-\int \frac{\lambda_i}{k_i} dt}$$

једначине се могу написати у облику

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mu_1 \eta_1') &= \frac{\mu_1}{k_1} X_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d}{dt}(\mu_n \eta_n') &= \frac{\mu_n}{k_n} X_n \end{aligned}$$

тако, да ако се формира функција

$$2\,T = \mu_1 \eta_1'^2 + \cdots + \mu_n \eta_n'^2$$

и узме да је

$$\frac{\mu_1 X_1}{k_1} = Q_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\mu_n X_n}{k_n} = Q_n$$

једначине се појаве јављају у облику

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta_1'}\right) = Q_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta_n'}\right) = Q_n$$

Такав би се случај н. пр. имао у проблему варијација јачина једнога система струја

$$i_1 \cdots i_n$$

без бeђусобне индукције, изазваних електромоторним силама које би зависиле од дебитираних количина електрицитета

$$q_1 \cdots q_n.$$

Према Ohm-овом закону проблем се своди на систем једначина

$$L_1 i_1' = E_1 - R_1 i_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$L_n i_n' = E_n - R_n i_n$$

где L_i, R_i, E_i имају раније наведена значења, тако, да ако се стави да је

$$\alpha_1 = \frac{R_1}{L_1} \cdots \alpha_n = \frac{R_n}{L_n}$$

и формира функција

$$2\,T = e^{a_1 t}\, q_1'^2 + \cdots + e^{a_n t}\, q_n'^2$$

као и изрази

$$Q_1 = \frac{e^{a_1 t}}{L_1}\, E_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Q_n = \frac{e^{a_n t}}{L_n}\, E_n$$

једначине се појаве своде на систем Lagrange-евих једначина

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{\partial q_k'}\right) = Q_k$$

$$(k = 1, 2, \cdots n)$$

Вратимо се горњим општим једначинама (148) за појаве поменуте врсте и претпоставимо да су коефициенти инерције k_i и коефициенти λ_i једни исти за све елементе v_i, тако, да су једначине појаве за примарни систем

$$(149) \qquad \begin{aligned} v_1' - \alpha\, v_1 &= \beta\, X_1 \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ v_n' - \alpha\, v_n &= \beta\, X_n \end{aligned}$$

где је

$$\alpha = -\frac{\lambda}{m} \qquad \beta = \frac{1}{m}$$

(m је заједничка вредност коефициената инерције). Уведимо, на место примарног система, ма какав други систем елемената, чије би произвољне варијације одређивале остварљиве варијације тоталитета

$$\eta_1 \cdots \eta_n$$

примарног система.

Нека је k степен слободе примарног система $(v_1 \cdots v_n)$ а

$$q_1 \cdots q_k$$

елементи једнога, ма кога, од одговарајућих редукованих система, тако да је

$$\eta_1 = \varphi_1 (q_1 \cdots q_k)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\eta_n = \varphi_n (q_1 \cdots q_k)$$

из чега је

$$v_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} q_1' + \cdots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_k} q_k'$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_n = \frac{\partial \varphi_n}{\partial q_1} q_1' + \cdots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial q_k} q_k'$$

Ако се међу собом саберу леве и десне стране једначина (149), пошто се прва помножи са $\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i}$, друга са $\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_i}$ и т. д. добија се

$$\sum_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i} v_j' - \alpha \sum_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i} v_j = \beta \sum_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i} X_j \tag{150}$$

Познато је, међу тим, да се први збир у последњој једначини, ако се стави да је

$$2\, T_1 = v_1^2 + \cdots + v_n^2$$

може написати у облику

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial q_i}$$

Са друге стране, према идентичности

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i} = \frac{\partial v_j}{\partial q_i'}$$

лако се увиђа да други збир на левој страни једначине (150) представља израз

$$\frac{\partial T_1}{\partial q_i'}$$

и према томе се једначина (150) може написати у облику

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial q_i}\right) - \alpha\frac{\partial T_1}{\partial q_i'}\right] = \frac{\partial T_1}{\partial q_i} = \beta\sum_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i} X_j \tag{151}$$

Ако се, сад, стави да је

$$\mu = e^{-\int \alpha\, dt}$$

$$T = \mu\, T_1$$

$$Q_i = \mu \sum_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i} X_j$$

једначина се (151) своди на Lagrange-ев облик

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

У идућем одељку, при трансформацији једначина потенцијалних појава, видеће се значај и интерес оваквога начина редукције једначине појаве, о којима је овде реч, на Lagrange-ев тип. Овде ће такве редукције бити извршене на два специјална примера:

1° При кретању материјалне тачке, под утицајем сила што зависе од положаја тачке и једнога отпора пропорционалног брзини кретања, имале би се за примарни систем једначине

$$u' = X - \lambda u$$

$$v' = Y - \lambda v$$

$$w' = Z - \lambda w$$

где су u, v и w компоненте брзине; X, Y, Z компоненте сила у правцима правоуглих координатних осовина, а λ стални коефициенат пропорционалности отпора и брзине (маса тачке претпоставља се да је равна јединици).

Сменивши

$$u = x' \qquad v = y' \qquad w = z'$$

и ако се формира функција

$$2\,T = e^{\lambda t}(x'^2 + y'^2 + z'^2) \tag{152}$$

једначине се кретања своде на облик

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x'}\right) &= e^{\lambda t}\,X \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y'}\right) &= e^{\lambda t}\,Y \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial z'}\right) &= e^{\lambda t}\,Z \end{aligned} \tag{153}$$

Ако се, на место елемената примарног система u, v, w, уведу ма какви други елементи $q_{i,}$ и ако је кретање тачке слободно, а дефиниција система q_i дата системом једначина

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1\,(q_1, q_2, q_3) \\ y &= \varphi_2\,(q_1, q_2, q_3) \\ z &= \varphi_3\,(q_1, q_2, q_2) \end{aligned} \tag{154}$$

једначине кретања добијају облик

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= Q_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= Q_2 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_3}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_3} &= Q_3 \end{aligned} \tag{155}$$

где су T, Q_1, Q_2, Q_3 изрази који се добијају кад се у обрасцима (152) и

$$
(156)\qquad
\begin{aligned}
Q_1 &= e^{\lambda t}\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1} X + \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1} Y + \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1} Z\right]\\
Q_2 &= e^{\lambda t}\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2} X + \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2} Y + \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2} Z\right]\\
Q_5 &= e^{\lambda t}\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3} X + \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3} Y + \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3} Z\right]
\end{aligned}
$$

смене x, y, z изразима (154)

Ако се тачка креће по утврђеној површини, тако, да је

$$
\begin{aligned}
x &= \varphi_1 (q_1, q_2)\\
y &= \varphi_2 (q_1, q_2)\\
z &= \varphi_3 (q_1, q_2)
\end{aligned}
$$

имале би се прве две од једначина (155).

На послетку, ако се тачка креће по утврђеној линији, тако, да је

$$
\begin{aligned}
x &= \varphi_1 (q_1)\\
y &= \varphi_2 (q_1)\\
z &= \varphi_3 (q_1)
\end{aligned}
$$

имала би се само прва од једначина (9).

2° При модификацијама једнога система струја са занемарљивом међусобном индукцијом, кад су те модификације изазване једним скупом електромоторних сила што зависе од дебитираних количина електрицитета $q_1 \cdots q_n$, имао би се, при раније употребљеним означивањима, систем једначина

$$
(157)\qquad
\begin{aligned}
L_1 \frac{di_1}{dt} &= E_1 - R_1\, i_1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
L_n \frac{di_n}{dt} &= E_n - R_n\, i_n
\end{aligned}
$$

Ако сви количници

$$\frac{R_1}{L_1}, \dots \dots \frac{R_n}{L_n}$$

имају једну исту, заједничку, вредност λ, и ако се формирају изрази

$$2\,T = e^{\lambda t}\,(i_1^{\,2} + \cdots + i^2_{\,n})$$

$$Q_1 = e^{\lambda t}\,E_1$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$Q_n = e^{\lambda t}\,E_n$$

једначине појаве (157) своде се на систем од n једначина Lagrange-евог типа.

II. Уочимо групу појава у којима се сваки елеменат v_i примарног система $(v_1 \cdots v_n)$ мења под утицајем једне непосредне тежње X_i, која зависи од скупа тоталитета елемената система, за тим, једне тежње пропорционалне тоталитету η_i самога елемента v_i, и једне тежње пропорционалне величини елемента v_i.

Појава се своди на систем једначина

$$k_1\,v_1' = X_1 + h_1\,\eta_1 + \lambda_1\,v_1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$k_n\,v_n' = X_n + h_n\,\eta_n + \lambda_n\,v_n$$

које се, пошто је

$$v_i = \eta_i'$$

могу написати у облику

$$\eta_1'' - \frac{\lambda_1}{k_1}\,\eta' = \frac{X_1 + h_1\,\eta_1}{k_1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\eta_n'' - \frac{\lambda_n}{k_n}\,\eta_n' = \frac{X_n + h_n\,\eta_n}{k_n}$$

Ако се стави да је

$$\mu_i = e^{-\int \frac{\lambda_i}{k_i} dt}$$

и ако се формирају изрази

$$2\,T = \mu_1 \eta_1'^2 + \cdots + \mu_n \eta_n'^2$$

$$Q_1 = \frac{\mu_1}{k_1}(X_1 + h_1 \eta_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Q_n = \frac{\mu_n}{k_n}(X_n + h_n \eta_n)$$

једначине се појаве јављају у облику

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta_i'}\right) = Q_i \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

Такав би се случај н. пр. имао у овим појавама:

1° подржано испражњавање једне групе електричних кондензатора, кад се испражњавање подржава једним скупом електромоторних сила $E_1\ E_2 \cdots$, од којих би свака зависила од скупа дебитираних количина електрицитета $q_1\ q_2 \cdots$

Основни систем једначина појаве облика је

$$L_k q_k'' + R_k q_k' + \frac{1}{C_k} q_k = E_k$$

где су L и R коефициенти ауто-индукције и отпора, C капацитет кондензатора; Lagrange-еве су једначине

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) = Q_i$$

где је

$$2T = \mu_1 q_1'^2 + \cdots + \mu_n q_n'^2$$

$$Q_k = \frac{\mu_k}{L_k}\left(E_k - \frac{q_k}{C_k}\right)$$

$$\mu_k = e^{\frac{R_k t}{L_k}}$$

2° Подржано вибрисање једнога скупа дијапазона, са унутарњим отпором који је пропорционалан елонгацији, а кад се вибрисање подржава једним скупом спољних сила E_1, $E_2 \cdots$, од којих би свака зависила од скупа елонгација $(q_1, q_2, \cdots)$.

Трећи начин.

Према аналогијама које постоје, или за које се претпоставља да постоје међу појавама, може се унапред претпоставити да ће за дату појаву важити Lagrange-еве једначине са подесно изабраним функцијама T и Q_i за један дати систем елемената q_i. Ови последњи били би, тада, они за које би се имало разлога претпоставити да у датој појави играју улоге аналоге улогама елемената у другој каквој аналогој појави, за које се већ зна да су им варијације везане Lagrange-евим једначинама. Подударање последица, које би се извеле из тако написаних једначина, са реалним појединостима појаве, или експериментална верификација извесних појединости, везаних непосредно за онакав облик функција T и Q_i, какав је узет, потврђивали би тада легитимност таквих Lagrange-евих једначина у датој појави. Такав је н. пр. био пут којим је Maxwell дошао до својих основних једначина за електродинамичке појаве.

Први пример: *електричне модификације у систему покретних струја.* Покушајмо формирати, и то на горе наведени начин, једначине што регулишу промене јачина двеју покретних струја које се међусобно индукују, узевши као дескриптивне елементе појаве: јачине i_1 и i_2 покретних струја и геометриски елеменат x, који дефинише њихов међусобни положај у једноме датом тренутку, а при њиховом праволиниском међусобном приближавању или удаљавању.

Најопштији квадратан облик, који се може претпоставити за функцију T, био би

$$2T = av^2 + b_1 i_1^2 + b_2 i_2^2 + 2c_1 vi_1 + 2c_2 vi_2 + 2c_3 i_1 i_2$$

где су: v брзина међусобног приближавања или удаљавања струја; а a, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3 ма какве функције елемената x, q_1, q_2, (q_1 и q_2 су количине електрицитета дебитиране у једном и другом од електричних кола, а i_1 и i_2 јачине струја).

Међу тим:

1° Члан av представља живу силу материје покретних кола, а пошто би ова жива сила, кад у колима не би било електричних акција, била mv^2, а међу тим се m не мења електричним акцијама, то је $a = m$.

2° Скуп чланова

$$b_1 i_1^2 + b_2 i_2^2 + 2c_3 i_1 i_3$$

представља електрокинетичку енергију струја. Кад би ове биле непокретне, та би енергија имала за израз

$$L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2 + 2M_{12} i_1 i_2$$

а пошто L_1 и L_2 зависе једино од облика електричних кола и не мењају се кад се ова крећу без деформације, и пошто M_{12} зависи од релативног међусобног положаја кола, то је

$$b_1 = L_1 = const$$

$$b_2 = L_2 = const$$

$$c_3 = M_{12} = \text{функција елемента } x.$$

3° Извесни експерименти и теориска посматрања навели су Maxwell-а на идеју да су коефициенти c_1 и c_2 равни нули. Пре свега, факт да M_{12}, као коефициенат производа $i_1\ i_2$ у изразу за T, не зависи од количина електрицитета q_1 и q_2, чини вероватним закључак, да ни коефициенти c_1 и c_2 производа vi_1 и vi_2 не зависе од q_1 и q_2. Поред тога, кад би израз

$$2T_1 = 2c_1\, vi_1 + 2c_2\, vi_2$$

фигурисао као саставни део функције T, њему би при мењању елемената q_1 и q_2 одговарале као инертне тежње силе које би имале за израз

$$(158)\qquad \begin{aligned} F_1 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial i_1}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}(c_1\, v) \\ F_2 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial i_2}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial q_2} = \frac{d}{dt}(c_2\, v) \end{aligned}$$

Пошто су те инертне тежње изазване варијацијама количина електрицитета, силе (158) би биле једна нарочита врста електромоторних сила, које би се појављивале у електричним колима кад се ова буду почела међусобно приближавати или удаљавати. Те силе, као што се види из израза (158), не би зависиле од елемената електричне природе, т. ј. од магнетног поља у коме се јављају, већ једино од геометриских и кинематичких елемената при кретању кола. Међу тим, никад, и ни на који начин, није запажена никаква индукциона појава код проводника у кретању, који би били ван каквога магнетног поља. Може се, дакле, сматрати као експериментално доказано да силе F_1 и F_2 не постоје, што може бити само тако, ако су коефициенти c_1 и c_2 равни нули. Приметићемо да овакав експерименталан доказ тога факта има у толико већу важност, што се данас за мерење електромоторних сила имају веома осетљиви галванометри, који би били у стању показати егзистенцију и веома слабих таквих сила, кад би се ове одиста јављале у приликама о којима је овде реч.

Функција T имаће, дакле, за израз

$$2T = mv^2 + L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2 + 2M_{12} i_1 i_2$$

одакле је, водећи рачуна о томе, да су m, L_1, L_2 константе а M_{12} функција елемента x

$$\frac{\partial T}{\partial v} = mv$$

$$\frac{\partial T}{\partial i_1} = L_1 i_1 + M_{12} i_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial i_2} = L_2 i_2 + M_{12} i_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dM_{12}}{dx} i_1 i_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = o \qquad \frac{\partial T}{\partial q_2} = o$$

тако, да Lagrange-eве једначине појаве добијају облик

$$\begin{aligned} & m\frac{dv}{dt} - \frac{dM_{12}}{dt} i_1 i_2 = X \\ (159) \qquad & \frac{d}{dt}\left(L_1 i_1 + M_{12} i_2\right) = Q_1 \\ & \frac{d}{dt}\left(L_3 i_2 + M_{12} l_1\right) = Q_2 \end{aligned}$$

где су Q_1 и Q_2 компоненте активних и реактивних електричних сила

$$\begin{aligned} Q_1 &= E_1 - R_1 i_1 \\ Q_2 &= E_2 - R_2 i_2 \end{aligned}$$

а X механичка сила, која изазива кретање електричних кола.

Једначине су у сагласности са реалношћу, јер из њих резултује егзистенција онаквих електромагнетних и електромоторних сила, какве се одиста констатују експериментом. Тако

1° Прва од једначина (159) показује да механичкој активној сили X држе равнотежу две силе: механичка инерција

$$-m\frac{dv}{dt}$$

и једна сила која има за израз

$$-\frac{dM_{12}}{dt}i_1 i_2$$

Овај израз, међу тим, није ништа друго до извод, по елементу x, функције електромагнетних сила

$$T_e=\frac{1}{2}\left| L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2 + 2\, M_{12}\, i_1\, i_2 \right|;$$

он представља познату електромагнетну силу, која се одиста констатује експериментом и и коју је проучио Ampère.

2° Друга од једначина (2) показује да компоненти активних и реактивних тежња

$$E_1 - R_1 i_1$$

држи равнотежу електромоторна сила

$$-\frac{d}{dt}\left(L_1 i_1 + M_{12} i_2\right)$$

Међу тим израз

$$L_1 i_1 + M_{12} i_2 \tag{160}$$

представља флукс магнетне индукције што одговара првоме електричном колу. Према томе израз је (160) извод овога флукса, узет са промењеним знаком: то је, дакле, индукована електромоторна сила, каква се одиста констатује експериментом.

Исти је случај и са трећом од једначина (159).

На тај начин може се сматрати, да је и теориским посматрањима и експерименталном верификацијом утврђена легитимност Lagrange-евих једначина (159) у проблему покретних електричних струја.[1]

Други пример: *струје у колима која се деформишу.* У случају, кад би се, на место покретних струја, имале струје у колима која се поступно деформишу у току појаве, тако, да је деформација н. пр. кола C_1 дефинисана начином на који се у току времена мења известан геометриски елеменат x, функција би T опет имала облик

$$2\,T = mx'^2 + L_1\,i_1^{\,2} + L_2\,i_2^{\,2} + 2\,M_{12}\,i_1\,i_2$$

но само са том разликом што би коефициенат L_1 био функција елемента x, као што је и M_{12}. Према томе би се имало

$$\frac{\partial T}{\partial x'} = mx'$$

$$\frac{\partial T}{\partial i_1} = L_1\,i_1 + M_{12}\,i_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial i_2} = L_2\,i_2 + M_{12}\,i_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{2}\left[\frac{dL_1}{dx}\,i_1^{\,2} + 2\,\frac{dM_{12}}{dx}\,i_1\,i_2\right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = o \qquad \frac{\partial T}{\partial q_2} = o$$

тако, да ће Lagrange-еве једначине појаве бити облика

$$m\,\frac{dx'}{dt} - \frac{1}{2}\left[\frac{dL_1}{dx}\,i_1^{\,2} + 2\,\frac{dM_{12}}{dx}\,i_1\,i_2\right] = X$$

---

[1] в. Carvallo: l'Electricité (Scientia № 19.) p. 38—44.

$$\frac{d}{dt}\Big[L_1 i_1 + M_{12} i_2\Big] = E_1 - R_1 i_1$$

$$\frac{d}{dt}\Big[L_2 i_2 + M_{12} i_1\Big] = E_2 - R_2 i_2$$

и оне доводе, као и оне пређашње, до познатих експерименталних закона за електромагнетне и индуковане електромоторне силе.[1])

Трећи пример: *међусобна акција струје и магнета.* Уочимо пример наведен на стр. 211, задржавши у њему иста означавања и исте претпоставке о перманентности магнета и фиктивном електричном колу, коме се може асимилирати један перманентан магнет. Пошто се, тада, проблем своди на проблем двеју покретних струја, који смо мало час проучили, имаће се, као и у томе проблему

$$2\,T = m\,v^2 + L\,i^2 + L_1\,i_1{}^2 + M\,i\,i_1$$

У томе су изразу m и L (маса материје кола и његов коефициенат ауто-индукције) сталне количине, а тако исто и L_1 и i_1; коефициенат је M функција елемента x. Према томе је

$$\frac{\partial T}{\partial v} = mv$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dM}{dx}\,i_1\,i_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial i} = L\,i + M\,i_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial i_1} = L_1\,i_1 + M\,i$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = o \qquad \frac{\partial T}{\partial q_1} = o$$

---

[1]) Carvallo: loc. cit.

и Lagrange-еве једначине појаве биће облика

$$m\frac{dv}{dt}-\frac{dM}{dx}ii_1=X$$

$$L\frac{di}{dt}-i_1\frac{dM}{dt}=E-Ri \tag{161}$$

$$\frac{d}{dt}\left(Mi\right)=E_1$$

А пошто је

$$Mi_1=\Phi$$

где је Φ флукс индукције у електричном колу, која произлази од утицаја магнета, који је флукс непосредна функција елемента x, а преко овога и посредна функција времена t, то је

$$\frac{dM}{dt}=\frac{dM}{dx}v$$

и према томе једначинама се (161) може дати облик

$$m\frac{dv}{dt}-\frac{d\Phi}{dx}i=X$$

$$L\frac{di}{dt}+\frac{d\Phi}{dx}v=E-Rt$$

$$\frac{d}{dt}\left(Mi\right)=E_1$$

На послетку, у томе облику оне доводе непосредно — као и оне у ранијим примерима — до резултата који су у сагласности са експерименталним фактима.[1])

Четврти пример: *непокретан систем састављен од ма коликога броја струја и магнета.* Означимо са i_k јачине правих електричних струја у систему, са j_k јачине еле-

---

[1]) Carvallo: loc. cit.

ментарних магнетних струја, сматрајући при том магнете као засебне системе нарочитих затворених струја.

Функција T биће облика

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

где је T_1 извесна квадратна функција промењивих i_k, T_2 билинеарна функција промењивих i_k и j_k, и, на послетку. T_3 квадратна функција промењивих j_k.

Задржимо у виду само оне од једначина појаве, које се односе на варијације јачина i_k правих струја. Пошто је

$$2\,T_1 = \Sigma\, L_k\, i_k^4 + 2\,\Sigma\, M_{kh}\, i_k\, i_h$$

$$2\,T_2 = 2\,\Sigma\, N_{kh}\, i_k\, j_h$$

[где су L_k коефицијенти ауто-индукције проводника, M_{kh} коефицијенти њихове узајамне индукције, а N_{kh} коефицијенти електромагнетне индукције у систему], и пошто функција T_3 не зависи од промењивих i_k, то је

$$\frac{\partial T}{\partial i_k} = \frac{\partial T_1}{\partial i_k} + \frac{\partial T_2}{\partial i_k}$$

Са друге стране, пошто су коефицијенти L, M, N сталне количине, то је

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = 0$$

На послетку, компоненте Q_k активних и реактивних сила имаће за израз

$$Q_k = E_k - R_k\, i_k$$

Према томе Lagrange-еве једначине за промене у систему своде се на облик

$$L_k \frac{di_h}{dt} + \sum_h M_{kh} \frac{di_k}{dt} + \sum_h N_{kh} \frac{dj_h}{dt} = E_k - R_k\, i_k$$

и поклапају се са познатим једначинама комбиноване електродинамичке и електромагнетне индукције.

III Примедба о Lagrange-евим једначинама за појаве са нехолономним системом.

Напред је показано да се лева страна једначине

$$\frac{\partial S}{\partial q''_i} = Q_i \tag{162}$$

може у сваком случају, било да је систем холономан или не, написати у облику

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \Delta_i \tag{168}$$

где је

$$\Delta_i = k_1 D_1 v_1 + \cdots + k_n D_n v_n \tag{164}$$

и где су $D_1 \cdots D_n$ функције променљивих t, q_i и q'_i, дате обрасцима

$$\begin{aligned} D_1 = \left(\frac{\partial \beta_{1i}}{\partial q_1} - \frac{\partial \beta_{11}}{\partial q_i}\right) q'_1 + \cdots + \left(\frac{\partial \beta_{1i}}{\partial q_k} - \frac{\partial \beta_{1k}}{\partial q_i}\right) q'_k + \\ + \left(\frac{\partial \beta_{1i}}{\partial t} - \frac{\partial B_1}{\partial q_i}\right) \end{aligned} \tag{165}$$

. . . .

$$\begin{aligned} D_n = \left(\frac{\partial \beta_{ni}}{\partial q_1} - \frac{\partial \beta_{n1}}{\partial q_i}\right) q'_1 + \cdots + \left(\frac{\partial P_{ni}}{\partial q_k} - \frac{\partial \beta_{nk}}{\partial q_i}\right) q'_k + \\ + \left(\frac{\partial \beta_{ni}}{\partial t} - \frac{\partial B_n}{\partial q_i}\right) \end{aligned}$$

У случајевима, кад је систем *холономан*, свака је заграда, понаособ, у обрасцима (165) идентички равна нули, тако, да је свако Δ_i равно нули и једначине се (162) своде на систем Lagrange-евих једначина.

Међу тим, за *нехолономне* системе изрази у заградама у обрасцима (165) нису сви равни нули, па према томе нити су све количине $D_1 \cdots D_{n_1}$ нити Δ_{i_1} идентички равне нули. Једначине се (162) тада могу написати у облику

$$\text{(166)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \Delta_i$$

дакле опет у облику Lagrange-евих једначина, али *пошто се у овима чланови са десне стране измене на тај начин, што се компонентама примењених тежња придодају чланови* Δ_i. Ови се, дакле, чланови Δ_i могу назвати *корективним члановима* Lagrange-евих једначина за нехолономне системе.

Од интереса је, бар у једноме примеру, видети *физички смисао* ових аналитичких факата. Тога ради уочимо појаву која се састоји у варијацијама електричног стања у Barlow-љевом точку, о којој је била реч на стр. 139 и 202. За појаву је показано да се своди на нехолономан систем (ω, i_1, i_2), где су: ω ротациона брзина точка, i_1 и i_2 јачине струја у двама електричним колима која састављају систем. Задржавши иста означавања као и раније, и претпоставивши да се Lagrange-еве једначине у своме типском облику могу применити, имало би се, из истих разлога као и у ранијим примерима, да је

$$2\,T = J\omega^2 + L_1\, i_1^{\,2} + L_2\, i_2^{\,2} + 2\, M_{12}\, i_1\, i_2$$

Међу тим, пошто оно од два кола, што је састављено из соленоида, ствара једно магнетно поље управно на равни точка, то је магнетни флукс, који ни услед тога, пролази кроз оно коло, што је управно на равни точка, (коло што се налази у равни слике на стр. 139), раван нули.

Према томе је и узајамни потенцијал та два кола раван нули, па дакле и $M_{12} = o$. Електрокинетична енергија система своди се на збир енергија што одговарају аутоиндукцијама та два кола, т. ј. на израз

$$\frac{1}{2}\left[L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2\right]$$

Функција T имала би, дакле, облик

$$2\,T = J\omega^2 + L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2$$

и Lagrange-еве би једначине имале бити

$$J\frac{d\omega}{dt} = Q$$

$$L_1\frac{di_1}{dt} = E_1 - R_1 i_1$$

$$L_2\frac{di_2}{dt} = E_2 - R_2 i_2$$

где је Q моменат механичких сила које производе обртање точка.

Оне, међу тим, написане у таквоме облику, изражавају два факта која се не слажу са реалношћу:

1° Прва једначина показује да никаква електродинамичка сила не утиче на обртање точка, што је у супротности са реалношћу: експеримент показује да се точак окреће спонтано, и без утицаја икакве механичке силе, једино акцијом електродинамичких сила;

2° Друга једначина показује да обртање точка не изазива јављање никакве електромоторне силе, што је такође у супротности са реалношћу: експеримент показује да се обртањем точка изазива једна индукована електромоторна сила.

Тим је фактима експериментално доказана немогућност Lagrange-евих једначина за овај случај. Међу тим је Carvallo,[1]) ослањајући се баш на експерименталне резултате, показао да се према Maxwell-овим погледима појава може сматрати као регулисана системом модификованих Lagrange-евих једначина

$$J\frac{d\omega}{dt} = Q + K i_1 i_2$$

$$L_1\frac{di_1}{dt} = E_1 - R_1 i_1 - K i_2 \omega$$

$$L_2\frac{di_2}{dt} = E_2 - R_2 i_2$$

где је k известан позитиван коефиценат, који зависи једино од геометриских димензија система.

Корективни чланови Lagrange-евих једначина имају, дакле, за изразе

$$\varDelta_1 = K i_1 i_2$$

$$\varDelta_2 = - K i_2 \omega$$

$$\varDelta_3 = o$$

Корективни члан $\varDelta_1$ представља једну нарочиту електродинамичку силу, која се придружује механичким силама у њиховој акцији при обртању точка, имајући као непосредни објекат ротациону брзину точка. То је она сила, констатована експериментом, која изазива и одржава обртање точка и онда, кад нестане спољне механичке силе.

Корективни члан $\varDelta_2$ представља једну нарочиту електромоторну силу, која се јавља услед обртања точка и која расти пропорционално самој његовој ротационој брзини. То је она индукована електромоторна сила, о којој је напред поменуто да се констатује експериментом.

---

[1]) Carvallo: loc. cit. p. 76—82.

На послетку, корективни је члан $\varDelta_3$ раван нули, што значи да се на елеменат i_2 може применити немодификована Lagrange-ева једначина.

На сличан факт, да се немодификоване Lagrange-еве једначине могу применити на један извесан број елемената система, поред свега тога што је систем нехолономан, наилази се и у другим системима такве врсте. На такав се случај наилази н. пр. при кретању обруча, моноцикла, и бицикла по хоризонталној равни. Carvallo је н. пр. показао да ће, при кретању обруча, за елеменат који одређује нагиб равни обруча према хоризонталној равни, важити немодификована Lagrange-ева једначина. Разлог лежи у једноме генералнијем, аналитичком факту, који се састоји у овоме: *кад год један елеменат* q_1, *тиме што се остали елементи* $q_2, q_3 \cdots q_k$ *знају као функције времена, постаје права координата система, на њега се може применити одговарајућа немодификована Lagrange-ева једначина.*[1]

Постоји и један општи случај појава са нехолономним системом, у коме Lagrange-еве једначине *без корективних чланова* представљају *приближне* једначине појаве. То је случај *појава са веома лаганим модификацијама* система, а кад су везе, ако их буде било, непромењливе за време трајања појаве. Тада су брзине

$$q'_1 \cdots q'_k \tag{167}$$

промена елемената q_i веома мале, тако, да се њихови степени и производи могу у првој апроксимацији сматрати као занемарљиви наспрам њих самих. Па пошто је сваки од корективних чланова

$$\varDelta_1 \cdots \varDelta_k$$

---

[1] Appell: Les mouvements de roulement (Scientia № 4) p. 44—45.

квадратан облик по елементима (167), то, занемаривши их, добијају се, као приближне једначине појаве, систем Lagrange-евих једначина

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \tag{168}$$

у којима још треба изоставити скуп чланова другога степена по елементима (167) који буду фигурисали у изразима

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

Једначине ће (168) дати у толико већу апроксимацију, у колико су модификације, у којима се појава састоји, спорије.

◆

ЧЕТВРТА ГЛАВА

ТРАНСФОРМАЦИЈА ОСНОВНИХ ЈЕДНАЧИНА ЗА ПОТЕНЦИЈАЛНЕ ПОЈАВЕ

Потенцијал узрока. — Потенцијалне појаве. — Конзервативне појаве. — Општи случајеви егзистенције потенцијала. — Егзистенција потенцијала реализирана фиктивном изменом механизма појаве. — Неколике врсте конкретних потенцијалних појава. — Hamilton-ов канонични тип једначина за потенцијалне појаве. — Функција H и Hamilton-ове каноничне једначине за неколике конкретне потенцијалне појаве.

I. Потенцијалне и консервативне појаве.

Дешава се да су примењене тежње

$$X_1 \cdots X_n$$

везане за дати примарни систем

$$(v_1 \cdots v_n),$$

сматране као функције елемената v_i или њихових тоталитета η_i, парцијални изводи какве функције U, која зависи од v_i или η_i, поред тога што може зависити и од времена t, тако, да је

$$X_1 = \frac{\partial U}{\partial v_i} \cdots X_n = \frac{\partial U}{\partial v_n}$$

или

$$X_1 = \frac{\partial U}{\partial \eta_1} \cdots X_n = \frac{\partial U}{\partial \eta_n}$$

Тако се исто дешава да су компоненте

(169) $$Q_1 \cdots Q_k$$

што фигуришу у напред формираним једначинама, као функције елемената q_i трансформисаног система, парцијални изводи какве функције U, тако да је

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} \cdots Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k}$$

Очевидно је да, ако за једну појаву постоји једна функција U, постоји их бескрајно много, али се све оне међу собом разликују само једном адитивном константом.

Таква функција U са промењеним знаком биће названа *потенцијалом* датога скупа тежња (169); за ове ће се, тада, казати да *деривирају из потенцијала* $-U$. Појаве са холономним системом и примењеним тежњама, које деривирају из једнога потенцијала, биће назване *потенцијалним појавама*.

У специјалнијем случају, кад у једној потенцијалној појави везе, дефиниција система и потенцијал не зависе експлицитно од времена t, појава ће бити названа *консервативном појавом*.

За потенцијалне појаве уопште, и понаособ за консервативне, везане су важне аналитичке особине, које им дају нарочиту важност у Математичкој Феноменологији.

Егзистенција потенцијала $-U$ за компоненте

$$X_1 \cdots X_n$$

примењене непосредно на примарни систем (x_i) у појави, повлачи собом, у општим случајевима, егзистенцију потенцијала $-V$ за компоненте

$$Q_1 \cdots Q_k$$

примењене на редуковани систем (q_i). Тако:

Кад год је систем (v_i) *слободан, или са везама прве врсте, егзистенција потенцијала*

$$-U(v_1 \cdots v_n, t)$$

за компоненте X_i *повлачи собом за компоненте* Q_i *егзисгенцију потенцијала*

$$-V(q_1 \cdots q_k, t)$$

који се добија сменивши у $-U$ *елементе* v_i *њиховим вредностима, израженим помоћу* q_i.

Јер, нека су

$$(170) \quad \begin{array}{l} dv_1 = \alpha_{11}\, dq_1 + \cdots + \alpha_{1k}\, dq_k + A_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dv_n = \alpha_{n1}\, dq_1 + \cdots + \alpha_{nk}\, dq_k + A_n \end{array}$$

једначине веза, или једначине за трансформацију система (v_i) у (q_i), према томе да ли је систем са везама *прве* врсте или слободан.

Пошто је

$$Q_i = \alpha_{1i} X_1 + \cdots + \alpha_{ni} X_n$$

$$\alpha_{ji} = \frac{\partial v_j}{\partial q_i}$$

$$X_j = \frac{\partial U}{\partial v_j}$$

то је

$$Q_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

где $V(q_1 \cdots q_k, t)$ означује резултат, који се добија кад се у функцији $U(v_1 \cdots v_n, t)$ смене елементи v_i њиховим вредностима из једначина (170).

У специјалном случају, кад су компоненте $Q_1 \cdots Q_k$ сталне по јачини (што ће бити кад су саме тежње

$X_1 \cdots X_n$ сталне, а дефиниција система $(q_1 \cdots q_k)$ независна од времена t) потенцијал ће бити облика

$$(171) \qquad -V = A_1 q_1 + \cdots + A_k q_k$$

где је A_k стална вредност јачине компоненте Q_k.

Тако исто:

Кад год је систем (v_i) *слободан, или са везама друге врсте, егзистенција потенцијала*

$$-U(\eta_1 \cdots \eta_n, t)$$

за компоненте X_i *повлачи собом за компоненте* Q_i *егзистенцију потенцијала*

$$-W(q_1 \cdots q_k, t),$$

који се добија кад се у $-U$ *смене тоталитети* η_i *елемента* v_i *њиховим вредностима израженим помоћу* q_i.

Јер, нека су

$$(172) \qquad \begin{aligned} d\eta_1 &= \beta_{11}\, dq_1 + \cdots + \beta_{1k}\, dq_k + B_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d\eta_n &= \beta_{n1}\, dq_1 + \cdots + \beta_{nk}\, dq_k + B_n \end{aligned}$$

једначине веза, или једначине за трансформацију система $(v_1 \cdots v_n)$ у $(q_1 \cdots q_k)$, према томе да ли је систем са везама *друге* врсте или слободан.

Пошто је

$$Q_i = \beta_{1i} X_1 + \cdots + \beta_{ni} X_n$$

$$\beta_{ji} = \frac{\partial \eta_j}{\partial q_i}$$

$$X_j = \frac{\partial U}{\partial \eta_j}$$

то се добија

$$Q_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}$$

где $W(q_1 \cdots q_k, t)$ означује резултат, који се добија кад се у функцији $U(\eta_1 \cdots \eta_n, t)$ смене елементи η_i њиховим вредностима из једначина (172).

У случају, кад су компоненте Q сталне јачине, биће

$$-W = B_1 q_1 + \cdots + B_k q_k$$

где је B_k стална вредност јачине компоненте Q_k.

Тако се исто лако увиђа овај факт:

Кад год се тоталне компоненте X_i могу изразити као збирови

$$\begin{gathered} X_1 = X_{11} + X_{12} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n = X_{n1} + X_{n2} + \cdots \end{gathered}$$

тако, да сваки комплекс тежња

$$X_{i1}, X_{i2} \ldots$$

деривира из једнога потенцијала $-U_i$, *и компоненте ће* X_i *деривирати из једнога потенцијала, који ће тада бити*

$$U = U_1 + \cdots + U_r.$$

У томе реду мисли очевидан је и овај факт:

Кад се тоталне компоненте X_i, непосредно примењене на примарни систем (v_i), састоје из компонената активних тежња Y_i, које деривирају из једнога потенцијала

$$-U(v_1 \cdots v_n, t)$$

и компонената једнога отпора, пропорционалних величинама одговарајућих елемената v_i, тако, да је

$$(173) \qquad \begin{gathered} X_1 = Y_1 + \lambda_1 v_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n = Y_n + \lambda_n v_n \end{gathered}$$

где су λ_i одређене константе или одређене функције времена, *и компоненте ће X_i деривирати из једнога потенцијала, а овај ће бити*

$$V = -U - \frac{1}{2}[\lambda_1 v_1^2 + \cdots + \lambda_n v_n^2].$$

Приметимо и то, да се свака појава са холономним системом и степеном слободе 1 има сматрати за потенцијалну појаву, кад год примењене тежње у њој не зависе ни од чега другог, осим елемената примарног система (кад је систем слободан или са везама прве врсте), или од елемената секундарног система (кад је систем слободан или са везама друге врсте). Тада и компонента Q примењених тежња у правцу oq, где је q елеменат редукованог система, неће зависити ни од чега другог, осим елемента q и времена t. Потенцијал је облика

$$-U = -\int Q\,dq = \Phi(q, t)$$

Тако исто, појава ће бити потенцијална, ако је са холономним системом ма кога степена слободе, а примењене су тежње у њој са независним варијацијама, тако, да су им перманентни закони облика

$$X_1 = f(t), \cdots\cdots X_n = f_n(t)$$

где су $f_1 \cdots f_n$ унапред дате функције времена t, независне од геометриских и кинетичких елемената појаве. Потенцијал је, тада, облика

$$-U = q_1\,\varphi_1(t) + \cdots + q_k\,\varphi_k(t)$$

где су $\varphi_1 \cdots \varphi_k$ одређене експлицитне функције времена, линеарне комбинације функција $f_1 \cdots f_n$ и коефициената у једначинама веза.

У специјалнијем случају, кад су примењене тежње $X_1 \cdots X_n$ сталне јачине, а везе и дефиниција редукованог система непромењиве у току трајања појаве, ова је конзервативна а потенцијал је облика (171).

Дешава се, у извесним општим случајевима, да се каква појава, која по себи није потенцијална, може једном одређеном аналитичком трансформацијом асимилирати другој једној, фиктивној, потенцијалној појави, која је са првом аналитички еквивалентна, али којој одговарају функција T и компоненте Q_i различне од оних што карактеришу прву појаву. На име, један исти систем једначина, типа карактеристичног за једначине Математичке Феноменологије, може се, као што је напред поменуто, на разноврсне начине свести на Lagrange-ев облик; сви ће се ти облици међу собом разликовати по изразима T и Q_i. Дешава се, да је међу свима могућним изразима Q_i, који се за један дати конкретни случај могу изабрати, нађе такав један скуп Q_i да све њиме дефинисане ефективне или фиктивне компоненте Q_i деривирају из једнога потенцијала, поред свега тога што првобитна, дата, појава сама по себи није потенцијална. У таквим случајевима она се може, у циљу да би се на њено проучавање могли применити резултати везани искључиво за потенцијалне појаве, асимилирати фиктивној, њој аналитички еквивалентној, појави са таквим фиктивним компонентама Q_i.

Овде ће бити наведена два таква општа случаја, на која се често наилази у природним појавама.

I Уочимо групу појава у којима се тоталне компоненте X_i непосредно примењене на примарни систем (v_i) састоје из компонената активних тежња Y_i које деривирају из једнога потенцијала

$$-U(\eta_1 \cdots \eta_n; t)$$

и компонената једнога отпора, пропорционалних величинама одговарајућих елемената v_i, тако да се опет имају једначине (173), али где су Y_i функције тоталитета елемената v_i.

Раније је показано да се једначине појаве, поред осталих облика, могу свести и на такав један Langrange-ев облик, у коме ће бити

$$Q_1 = \frac{\mu_1}{k_1} Y_1 \cdots Q_n = \frac{\mu_n}{k_n} Y_n$$

где су k_i коефицијенти инерције елемената v_i, а

$$\mu_i = e^{-\int \frac{\lambda_i}{k_i} dt}$$

Кад су коефицијенти λ_i *и* k_i *једни исти за све елементе примарног система, тако, да је*

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n$$

компоненте ће Q_i *деривирати из једнога потенцијала* V *који је облика*

$$V = -\frac{\mu}{k} U$$

где су μ и k заједничке вредности μ_i и k_i.

У специјалнијем случају, кад су коефицијенти инерције k_i и коефицијенти пропорционалности λ_i непроменљиви у току појаве и једни исти за све елементе система, *компоненте ће* Q_i *деривирати из потенцијала*

$$V = -\frac{1}{k} e^{\frac{\lambda t}{k}}$$

Према ономе што је напред казано, исти ће резултат вредити и у случају кад се на место примарног система (v) уведе ма какав систем елемената

$$(q_1 \cdots q_k)$$

везаних са тоталитетима η_i елемената v_i релацијама

$$\begin{array}{ll} & \eta_1 = \varphi_1 (q_1 \cdots q_k) \\ (174) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \eta_n = \varphi_n (q_1 \cdots q_k) \end{array}$$

где k означује степен слободе примарног система.

II. Уочимо групу појава у којима се компоненте X_i, непосредно примењене на примарни систем (v), састоје:

1° из компонената активних тежња Y_i које деривирају из потенцијала

$$- V (\eta_1 \cdots \eta_n, t);$$

2° из компонената једнога отпора, пропорционалних тоталитетима η_i одговарајућих елемената v_i;

3° из компонената једнога отпора пропорционалних величинама одговарајућих елемената v_i, тако, да је

$$\begin{array}{l} X_1 = Y_1 + h_1 \eta_1 + \lambda_1 v_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n = Y_n + h_n \eta_n + \lambda_n v_n \end{array}$$

где су h_i и λ_i одређене константе, или одређене функције времена.

Раније је показано да се једначине појаве своде на Lagrange-ев облик, у коме ће се, као компоненте Q, имати изрази

$$\begin{array}{l} Q_1 = \dfrac{\mu_1}{k_1} \left(Y_1 + h_1 \eta_1 \right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_n = \dfrac{\mu_n}{k_n} \left(Y_n + h_n \eta_n \right) \end{array}$$

где је

$$\mu_i = e^{- \int \frac{\lambda_i}{k_i} dt}$$

Кад су коефицијенти λ_i и k_i једни исти за све елементе v_i, компоненте ће Q_i деривирати из једнога потенцијала који ће бити облика

$$V = -\frac{\mu}{k} U - \frac{\mu}{2k}\left(h_1 \eta_1^2 + \cdots + h_n \eta_n^2\right)$$

где су μ и k заједничке вредности μ_i и k_i.

У специјалнијем случају, кад су коефицијенти λ_i и k_i непромењиви у току појаве, потенцијал је облика

$$V = -\frac{1}{k} e^{\frac{\lambda t}{k}}\left[U + \frac{1}{2}(h_1 \eta_1^2 + \cdots + h_n \eta_n^2)\right]$$

Према ономе што је напред казано, исти ће резултат вредети и за случај кад се на место примарног система (v_i) уведе ма какав систем

$$(q_1 \cdots q_k)$$

везан са тоталитетима η_i елемената v_i релацијама (174).

Од интереса је запазити факт, истакнут у горе наведеним групама појава: *да се једна појава, која сама по себи није потенцијална, може у доста генералним случајевима учинити потенцијалном модификујући јој фиктивно механизам*, тако, да јој тиме буде измењена и функција T и компоненте примењених тежња, везане за њен механизам, али тако, да тиме појединости манифестације појаве, везане за такав механизам, ни у чему не буду измењене. Компоненте примењених тежња, у фиктивној појави којом је замењена првобитна дата појава, добиле су ту особину, да деривирају из једнога потенцијала, а функција T, која првобитно није експлицитно зависила од времена t, или је од овога зависила на један одређени начин, постаје експлицитно зависна од времена и то на начин различан од онога на који је првобитно зависила. А пошто функција T, за један утврђен систем елемената q_i, зависи још само од веза у систему, то се таква једна трансформација може схватити и тако, као да су првобитне тежње, које не деривирају ни из каквога потенцијала, смењене другима са потенцијалом, а да су у исто време *првобитне непромењиве везе у систему смењене новим везама, промењивим у току времена.*

II. Неколике врсте конкретних потенцијалних појава.

Прва врста: кретање (слободно, по датој површини **или** по датој линији) материјалне тачке M, под утицајем скупа сила **нормалних** на једној сталној површини S и које зависе од дужине нормале MS. Специјални случајеви:

1° Кретање тачке под утицајем сила управних на једној утврђеној равни P и чији је скуп функција $\varphi(z)$ одстојања $MP = z$. Узевши ту раван за xOy биће

$$X = o \qquad Y = o \qquad Z = \varphi(z)$$

тако, да силе деривирају из потенцијала

$$V = -\int \varphi(z)\, dz$$

Кад се н. пр. тачка креће под утицајем теже, узевши за осовину oz вертикалу, управљену ка зениту, и означивши са m масу тачке, биће

$$V = m g z$$

2° Кретање тачке под утицајем сила управних на једној утврђеној правој L и које су функције $\varphi(\varrho)$ одстојања ϱ тачке M од праве L. Узевши ову за осовину oz биће

$$X = \frac{x}{\varrho}\varphi(\varrho)$$

$$Y = \frac{y}{\varrho}\varphi(\varrho)$$

$$Z = o$$

тако, да силе дериврају из потенцијала

$$V = -\int\varphi(\varrho)\,d\varrho = \Phi(x^2 + y^2)$$

3° Кретање тачке под утицајем централне силе, која је функција $\varphi(r)$ одстојања тачке M од непомичног центра силе. Узевши центар за координатни почетак, биће

$$X = \frac{x}{r}\varphi(r)$$

$$Y = \frac{y}{r}\varphi(r)$$

$$Z = \frac{z}{r}\varphi(r)$$

тако, да компоненте сила деривирају из потенцијала

$$V = -\int\varphi(r)\,dr = \Phi(x^2 + y^2 + z^2)$$

Кад је н. пр. централна сила обрнуто пропорционална квадрату растојања, тако, да је

$$\varphi(r) = \frac{\lambda}{r^2}$$

биће

$$V = \frac{\lambda}{r}$$

Друга врста: кретање система материјалних тачака под утицајем теже. Узевши за раван oy једну хоризонталну раван, а за осовину oz једну вертикалу управљену ка зениту, тоталне компоненте теже у правцу осовина ox, oy, oz биће

$$X_i = 0 \qquad Y_i = 0 \qquad Z_i = - m_i\, g \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots)$$

где су m_i масе тачака, а g константа теже, и потенцијал ће бити

$$V = g \, \Sigma \, m_i \, z_i$$

или

$$V = M g Z$$

где је M тотална маса система, а Z висина његовог тежишта.

Трећа врста: кретање система материјалних тачака под утицајем међусобних атрактивних и репулсивних сила што зависе само од међусобних растојања тачака.

Уочимо најпре две материјалне тачке m и m' и нека је r њихово растојање. Тачка је m изложена утицају силе F, управљене од m' ка m, која има за величину

$$m \, m' \, \varphi(r)$$

где је $\varphi(r)$ функција растојања r, позитивна или негативна према томе, да ли је сила репулсивна или атрактивна. Тачка је, пак, m' изложена утицају силе F' која је једнака са силом F, али супротно управљена.

Компоненте силе F имају за изразе

$$X = - \, m \, m' \, \varphi(r) \, \frac{x - x'}{r}$$

$$Y = - \, m \, m' \, \varphi(r) \, \frac{y - y'}{r}$$

$$Z = - \, m \, m' \, \varphi(r) \, \frac{z - z'}{r}$$

где су (x, y, z) и (x', y', z') правоугле координате тачака m и m'. Компоненте, пак, X', Y', Z' силе F, биће X, Y, Z са промењеним знаком. Ако се, дакле, стави да је

$$U = -m m' \int \varphi(r)\, dr$$

биће

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$X' = \frac{\partial U}{\partial x'} \qquad Y' = \frac{\partial U}{\partial y'} \qquad Z' = \frac{\partial U}{\partial z'}$$

тако, да улогу потенцијала V игра функција $-U$.

Ако се, сад, уочи систем, састављен од ма коликог броја материјалних тачака, онда, претпоставивши да се међусобне силе могу сматрати као скуп међусобних атрактивних или репулсивних сила између сваке две и две тачке, имаће се као функција U израз

$$U = -\Sigma\, m_i\, m_k\, F(r_{ik})$$

где је

$$F(r) = \int \varphi(r)\, dr$$

и где се знак Σ односи на све комбинације без понављања, које се могу образовати узимајући по две и две тачке система; потенцијал је функција $-U$.

Четврта врста: кретање материјалне тачке под утицајем сила што зависе од положаја тачке и једнога отпора пропорционалног брзини тачке.

Кад се Lagrange-еве једначине кретања напишу у облику наведеном на стр. 237 и кад компоненте X, Y, Z спољних сила деривирају из једнога потенцијала

$$-U(x, y, z)$$

компоненте ће Q_i у тим једначинама деривирати из потенцијала

$$-e^{\lambda t}\, U(x, y, z)$$

Тако исто, кад су Lagrange-еве једначине написане у облику наведеном на стр. 237 и кад компоненте X, Y, Z деривирају из једнога потенцијала

$$- U(q_1 \cdots q_k)$$

компоненте ће Q_i деривирати из потенцијала

$$- e^{\lambda t}\, U(q_1 \cdots q_k)$$

Пета врста: електричне модификације у систему од n непокретних струја, које се међусобно и саме собом индукују, а кад су отпори у електричним колима, кроз која она пролазе, занемарљиви.

Изразивши да је тотална електромоторна сила у k-том колу, као збир електромоторне силе електричних елемената и оне што произлази од међусобне индукције, равна — према Ohm-овом закону — производу $R_k\, i_k$, добија се познати систем симултаних једначина које регулишу промене јачина струја

$$
\begin{aligned}
& L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{di} + \cdots + M_{1n} \frac{di_n}{dj} = E_1 - R_1\, i_1 \\
& L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{21} \frac{di_1}{dt} + \cdots + M_{2n} \frac{di_n}{dt} = E_2 - R_2\, i_2 \\
(175) \quad & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& L_n \frac{di_n}{dt} + M_{n1} \frac{di_1}{dt} + \cdots + M_{n,\, n-1} \frac{di_{n-1}}{dt} = E_n - R_n\, i_n
\end{aligned}
$$

Пошто су коефициенти L и M стални, ако се за функцију T узме функција

$$2\, T = \Sigma\, L_k\, i_k^{\,2} + 2\, \Sigma\, M_{kh}\, i_k\, i_h$$

или

$$2\, T = \Sigma\, L_k\, q'^{\,2}_k + 2\, \Sigma\, M_{kh}\, q'_k\, q'_h$$

где q_k означује количину електрицитета коју дебитира k—то коло, једначине се (175) могу написати, пошто су R_k занемарљиви, у Lagrange-евом облику

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial i_1}\right) = E_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial i_n}\right) = E_n$$

тако, да кад год електромоторне силе дериврају из једнога потенцијала

$$-\,U(q_1 \cdots q_k)$$

појава је потенцијална.

Шеста врста: електричне модификације у систему од n струја, без међусобне индукције, а са ауто-индукцијом и осетним отпором проводника.

Кад се једначине појаве

$$\begin{aligned} &L_1\, i'_1 = E_1 - R_1\, i_1 \\ (176) \qquad &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &L_n\, i'_n = E_n - R_n\, i_n \end{aligned}$$

напишу у облику

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial i_k}\right) = E_k - R_k\, i_k$$

где је

$$2\,T = L_1\, i_1^2 + \cdots + L_n\, i_n^2$$

види се, да кад електромоторне силе E_k дериврају из једног потенцијала

$$-\,U(i_1 \cdots i_n)$$

компоненте ће Q_k у одговарајућим Lagrange-евим једначинама дериврати из потенцијала

$$- U + \frac{1}{2}\left(R_1 i_1^2 + \cdots + R_n i_n^2\right)$$

Ако, пак, силе E_k деривирају из потенцијала

$$- U(q_1 \cdots q_n)$$

где су q_k дебитиране количине електрицитета, то пошто се систем једначина (176) може свести и на Lagrange-еве једначине облика

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_k}\right) = Q_k$$

где је

$$Q_k = \frac{E_k}{L_k} e^{\frac{R_k t}{L_k}}$$

ако су коефицијенти L_k и R_k једни исти за свих n електричних кола, компоненте ће Q_k деривирати из потенцијала

$$- \frac{1}{L} e^{\frac{Rt}{L}} U(q_1 \cdots q_n)$$

Седма врста: појаве, у којима се електричне промене, о којима је реч код пете врсте појава, врше под утицајем не само електромоторних, већ и механичких сила, које, поред електромоторних, и саме деривирају из једног потенцијала, или и магнетних сила такве врсте.

Такав би се н. пр. случај имао у проблему електричних модификација у једноме систему електричних кола, која за време трајања појаве мењају свој међусобни положај, или се деформишу под утицајем какве механичке силе, а кад је, при том, електрични отпор проводника занемарљив.

У примеру такве врсте, наведеном на стр. 241—246 (једно од два кола покретно, а непромењљивог облика) ако механичка сила X зависи од геометриског елемента x, који утврђује положај кола, или још и од времена, тако, да је н. пр.

$$X = \varphi(x, t)$$

а електромоторне силе E_1 и E_2 деривирају из једног потенцијала

$$-U(q_1, q_2, t),$$

компоненте Q_1, Q_2, Q_3 у Lagrange-евим једначинама појаве, пошто се у њима изоставе чланови са R_i, деривираће из потенцијала

$$W(x, q_1, q_2, t) = -U(q_1, q_2, t) - \int \varphi(x, t)\, dx$$

Такав ће се исти потенцијал имати у примеру сличне врсте, наведеном на стр. 246 (једно од два кола промењљивог облика и оба кола непокретна), као и у примеру стр. 247 (међусобна акција струје и перманентног магнета). Кад су н. пр. електромоторне силе E_1 и E_2 сталне, биће

$$U = E_1 q_1 + E_2 q_2$$

тако, да је

$$-W = E_1 q_1 + E_2 q_2 + \int \varphi(x, t)\, dx$$

Осма врста: мале осцилације покретних система око стабилног равнотежног положаја, при отпору средине пропорционалном брзини кретања, а под утицајем сила што деривирају из једнога потенцијала.

Нека су

$$q_1 \cdots q_k$$

параметри који дефинишу положај система, изабрани тако, да су сви равни нули кад је систем у своме положају o стабилне равнотеже. Претпоставимо да је и произвољна адитивна константа у потенцијалу $-U$ изабрана тако, да је овај раван нули за положај o.

Ако су

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial q_i} = R_i$$

познате Lagrange-еве једначине, које регулишу мале осцилације система помереног из положаја o и остављеног утицају првобитних сила, а без отпора пропорционалног брзини, имаће се у случају кад има таквога отпора, Lagrange-еве једначине

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

где је

$$T = e^{\lambda t}\, T_1$$

$$Q_i = e^{\lambda t}\, R_i$$

Према томе имаће се и у овом случају као потенцијал функција

$$-\, e^{\lambda t}\, U(q_1 \cdots q_k,\, t).$$

Девета врста: појава испражњавања једнога система електричних кондензатора, кад је испражњавање подржавано једним системом електромоторних сила $E_1 \cdots E_n$ везаних међу собом тако, да им јачине зависе од количина електрицитета $q_1 \cdots q_n$ дебитираних при испражњавању, и од времена t. Појава се, као што је показано на стр. 240 своди на систем Lagrange-евих једначина облика

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k'}\right) = Q_k$$

где је

$$Q_k = \frac{e^{\alpha_k t}}{L_k} \left(E_k - \frac{q_k}{C_k} \right)$$

$$\alpha_k = \frac{R_k}{L_k}$$

Кад год, дакле, изрази

$$\frac{e^{\alpha_1 t}}{L_1} E_1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{e^{\alpha_n t}}{L_n} E_n$$

деривирају из једнога потенцијала

$$- U (q \cdot \cdot \cdot q_n, t)$$

компоненте ће $Q_1 \cdots Q_n$ такође деривирати из једног потенцијала, а овај ће бити

$$- U + \frac{1}{2} \left[\frac{e^{\alpha_1 t}}{L_1} \cdot \frac{q_1^{\,2}}{C_1} + \cdots + \frac{e^{\alpha_n t}}{L_n} \cdot \frac{q_k^{\,2}}{C_k} \right]$$

III. Hamilton-ов канонични тип.

Нека је

$$(v_1 \cdots v_n)$$

дати примарни систем са k степена слободе, т. ј. са $n - k$ веза друге врсте, а

$$(q_1 \cdots q_k)$$

узети редуковани систем, чија дефиниција, као и везе у систему, могу зависити и од времена t.

Нека је

$$- U (q_1 \cdots q_k, t)$$

потенцијал компонената

$$Q_1 \cdots Q_k$$

примењених тежња у правцима $oq_1 \cdots oq_k$.

Формирајмо функцију

$$2\,T = k_1 v_1^2 + \cdots + k_n v_n^2$$

која ће, за редуковани систем, бити полином другог степена по $q_1' \cdots q_k'$, са коефицијентима који су функције промењљивих $q_1 \cdots q_k,\ t$.

Означимо са

$$p_1 \cdots p_k$$

моменте промена у систему, тако, да је

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'} \quad \cdots\cdots \quad p_k = \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

Из ових се последњих једначина, које су линеарне по промењљивима $q_1' \cdots q_k'$, могу те промењљиве израчунати у облику

$$(177) \qquad \begin{array}{l} q'_1 = f_1\,(q_1 \cdots q_k;\, p_1 \cdots p_k;\, t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q'_k = f_k\,(q_1 \cdots q_k;\, p_1 \cdots p_k;\, t) \end{array}$$

где су функције $f_1 \cdots f_k$ линеарне по $p_1 \cdots p_k$. Тако је решење, у осталом, увек могућно, јер се лако налази да је детерминанта коефицијената непознатих q_i' увек различна од нуле.

Ако се тада образује функција

$$(178) \qquad H = [p_1 q_1' + \cdots + p_k q_k'] - U - T$$

и у њој смене q_i' вредностима (177), та ће функција бити извесан полином другога степена по $p_1 \cdots p_k$, са коефицијентима који су функције промењљивих $q_1 \cdots q_k,\ t$.

Lagrange-еве једначине појаве, које су тада

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots k)$$

своде се тада, познатом Hamilton-овом трансформацијом, на систем од $2k$ симултаних једначина првога реда

$$(179) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \cdots k)$$

које дефинишу $2k$ промењљивих количина

$$q_1 \cdots q_k$$

$$p_1 \cdots p_k$$

као функције времена t.

Једначине се (170) поклапају, по облику, са онима на које је Hamilton редуковао диференцијалне једначине Аналитичке Динамике за кретања са холономним системом, под утицајем сила што зависе од положаја тачака и деривирају из једнога потенцијала. Оне ће бити назване *једначинама Hamilton-овог типа* за посматрану појаву. Њихово формирање захтева познавање једне једине функције H, везане за посматрану појаву.

У случајевима, кад је T хомогена функција другога степена по $q_k' \cdots q_k'$, она ће бити у исто време и хомогена функција другог степена по $p_1 \cdots p_k$. Пошто је тада идентички

$$p_1 q_1' + \cdots + p_k q_k' = q_1' \frac{\partial T}{\partial q_1} + \cdots q_k' \frac{\partial T}{\partial q_k} = 2T$$

то функција H добија прост облик

$$H = T - U$$

и постаје полином другог степена по $p_1 \cdots p_k$, у коме не фигуришу чланови првога степена по тим количинама.

Такав случај наступа н. пр. кад су задовољене ове погодбе:

1° везе перманентне и дефиниција редукованог система независна од времена t;

2° потенцијал — U независан од t.

У осталом, тада се може имати непосредно и експлицитан израз функције H: ако је

$$2T = \Sigma a_{ik} q_i' q_k' \qquad (a_{ki} = a_{ki})$$

лако се налази да је

$$H = -\frac{l}{2D} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & p_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & p_k \\ p_1 & \cdots & p_k & o \end{vmatrix} - U$$

где D означује детерминанту

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

IV. Функција H и Hamilton-ове каноничне једначине за неколике конкретне потенцијалне појаве.

I. Кретање једне тачке у равни, под утицајем централних сила које су функције одстојања. Ако се центар сила узме за почетак, а за параметре q_1 и q_2 узму поларне координате r и θ, узевши да је маса тачке равна јединици, биће

$$2T = r'^2 + r^2 \theta'^2$$

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial r'} = r' \qquad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \theta} = r^2 \theta'$$

тако, да је

$$r' = p_1 \qquad \theta' = \frac{p_2}{r^2}$$

Потенцијал је облика

$$-U = F(r)$$

тако, да је H облика

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^{2} + \frac{p_2^{2}}{r^2}\right) + F(r)$$

а каноничне једначине облика

$$\frac{dr}{dt} = p_1 \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{p_2}{r^2}$$

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{p_2^{2}}{r^3} + F'(r) \qquad \frac{dp_2}{dt} = o$$

II. Појаве, у којима се сваки елеменат v_i примарног система мења под утицајем једне активне тежње, која зависи од скупа тоталитета η_i елемената система и времена t, и једне реактивне тежње пропорционалне величини елемената v_i.

Означивши са k_i коефициенат инерције за елеменат v_i, са λ_i коефициенат пропорционалности реактивне тежње и елемента v_i, појава се, као што је раније показано, своди на систем Lagrange-евих једначина, којима одговара функција

$$2T = \mu_1 \eta_1'^2 + \cdots + \mu_n \eta_n'^2$$

где су μ_i експлицитне функције времена t, дате општим обрасцем

$$\mu_i = e^{-\int \frac{\lambda_i}{k_i} dt}$$

Према томе је

$$p_1 = \mu_1 \eta_1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$p_n = \mu_n \eta_n'$$

а из тога

$$\eta_1' = \frac{p_1}{\mu_1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\eta_n' = \frac{p_n}{\mu_n}$$

Ако је, дакле, $-U(\eta_1 \cdots \eta_n, t)$ потенцијал у појави, функција ће H бити облика

$$H = \left[\left(\frac{p_1}{\mu_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{p_n}{\mu_n}\right)^2\right] - U$$

У специјалном случају, кад је

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = const = \lambda$$
$$k_1 = \cdots = k_n = const = k$$

биће

$$H = \frac{e^{-\frac{\lambda t}{k}}}{2}(p_1^2 + \cdots + p_n^2) - U$$

Такав је н. пр. случај у овим појавама:

I. Кретање материјалне тачке под утицајем сила што зависе од положаја тачке и једнога отпора пропорционалног брзини тачке. Као што је напред наведено, узевши за елементе система компоненте брзина у правцу осовина ox, oy, oz, појава се своди на систем Lagrange-евих једначина којима одговарају функције (узевши масу тачке као равну јединици)

$$2T = e^{\lambda t}(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$
$$-U = e^{\lambda t} F(x, y, z)$$

где $F(x, y, z)$ представља потенцијал компонената сила при кретању без отпора.

Функција H биће, дакле,

$$H = \frac{e^{-\lambda t}}{2} (p_1^2 + p_2^2 + p_2^3)\, e^{\lambda t}\, F(x, y, z)$$

а каноничне једначине

$$\frac{dx}{dt} = p_1 e^{-\lambda t}$$

$$\frac{dy}{dt} = p_2 e^{-\lambda t}$$

$$\frac{dz}{dt} = p_3 e^{-\lambda t}$$

$$-\frac{dp_1}{dt} = e^{\lambda t} \frac{\partial F}{dx}$$

$$-\frac{dp_2}{dt} = e^{\lambda t} \frac{\partial F}{dy}$$

$$-\frac{dp_3}{dt} = e^{\lambda t} \frac{\partial F}{\partial z}$$

II. Електричне модификације у једноме систему струја без међусобне индукције, са ауто-индукцијом, отпором проводника и променљивим електромоторним силама, а кад су задовољене ове погодбе:

a) да су коефицијенти R и L отпора и ауто-индукције једни исти за све проводнике;

b) да електромоторне силе деривирају из једнога потенцијала

$$F(q_1 \cdots q_n)$$

где су $q_1 \cdots q_n$ дебитиране количине електрицитета у колима.

Као што је напред показано, појава се своди на систем Lagrange-евих једначина којима одговарају функције

$$2T = e^{\frac{Rt}{L}} (q_1'^2 + \cdots q_n'^2)$$

$$U = \frac{1}{2} e^{\frac{Rt}{L}} F (q_1 \cdots q_n)$$

Функција H биће дакле облика

$$H = \frac{1}{2} e^{-\frac{Rt}{L}} (p_1^2 + \cdots + p_n^2) + \frac{1}{L} e^{\frac{Rt}{L}} F (q_1 \cdots q_n)$$

а канонично једначине

$$\frac{dq_i}{dt} = p_i e^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$(i = 1, 2, 3 \cdots n)$$

$$-\frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{L} e^{-\frac{Rt}{L}} \frac{\partial F}{\partial q_i}$$

III. Електричне модификације у систему непокретних струја са међусобном индукцијом и ауто-индукцијом, кад су отпори проводника занемарљиви и кад су електромоторне силе сталне, или у опште деривирају из једног потенцијала $F(q_1 \cdots q_n)$.

Напред је наведено да се појава своди на систем Lagrange-евих једначина, којима одговарају функције

$$2T = \Sigma M_{kj} q_k' q_j'$$

$$U = -F (q_1 \cdots q_n)$$

где је

$$M_{kj} = M_{jk}$$
$$M_{kk} = L_k$$

Према томе је

$$p_1 = M_{11} q_1' + \cdots + M_{1n} q_n'$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_n = M_{n1} q_1' + \cdots + M_{nn} q_n'$$

а одатле

$$q_1' = \frac{A_{11}}{D} p_1 + \cdots + \frac{A_{n1}}{D} p_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$q_n' = \frac{A_{1n}}{D} p_1 + \cdots + \frac{A_{nn}}{D} p_n$$

где D означује детерминанту

$$D = \begin{vmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & \cdots & M_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{vmatrix}$$

а A_{kj} коефицијенат елемента M_{kj} у развијеном изразу те детерминанте.

Функције H биће, дакле, облика

$$H = -\frac{1}{2D} \begin{vmatrix} M_{11} & \cdots M_{1n} & p_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{n1} & \cdots M_{nn} & p_n \\ p_1 & \cdots M_{nn} & o \end{vmatrix} + F(q_1 \cdots q_n)$$

а каноничне једначине облика

$$\frac{dq_i}{dt} = -\frac{1}{2D} \sum_k A_{ki} p_k$$

$$-\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_i}$$

$$\begin{pmatrix} k = 1, 2, \cdots n \\ i = 1, 2, \cdots n \end{pmatrix}$$

IV. Електричне модификације у систему двеју линеарних, а покретних, струја непромењивог геометриског облика, са међусобном и ауто-индукцијом, са занемарљивим отпорима проводника и таквим електромоторним силама, које деривирају из једног потенцијала $F\, q_1, q_2)$.

Напред је показано, да се појава своди на систем од три Lagrange-еве једначине, којима одговарају функције

$$2T = mv^2 + L_1\, q_1'^2 + L_2\, q_2'^2 + 2M_{12}\, q_1'\, q_2'$$

$$U = -F(q_1, q_2) + \int \varphi(x)\, dx$$

где $\varphi(x)$ означује израз механичке силе која креће покретно електрично коло, претпостављајући да величина те силе не зависи ни од чега другог, до вредности параметра x који дефинише геометриски положај покретнога кола.

Према томе је

$$p_1 = mx'$$

$$p_2 = L_1\, q_1' + M_{12}\, q_2'$$

$$p_3 = L_2\, q_2' + M_{11}\, q_1'$$

а одатле

$$x' = \frac{p_1}{m}$$

$$q_1' = \frac{L_2\, p_2 - M_{12}\, p_3}{L_1\, L_2 - M_{12}^2}$$

$$q_2' = \frac{L_1\, p_3 - M_{12}\, p_2}{L_1\, L_2 - M_{12}^2}$$

Функција H биће, дакле, облика

$$H = \left(\frac{p_1^2}{m} + Ap_2^2 + 2Bp_2p_3 + Cp_3^2\right) + F(q_1, q_2) - \int \varphi(x)\, dx$$

где су A, B, C комбинације коефициената L_1, L_2, M_{12}, које је лако формирати. Из ње је лако формирати каноничне једначине појаве, кад се зна начин на који коефицienат међусобне индукције M, па, дакле, и коефициенти A, B, C, зависе од параметра x.

◆

ПЕТА ГЛАВА

КОНДЕНЗОВАНИ ОБЛИЦИ ЈЕДНАЧИНА.

Принципи виртуелних модификација и виртуелних радова. — Диференцијалне једначине појава садржане у аналитичним изразима тих принципа.

Принципи минимума. — Случај веза прве врсте: принцип $P = min.$ — Случај веза друге врсте: принцип $R = min.$ — Принцип најмањег присиљавања. — Слободни системи. — Непосредна редукција једначина појаве на облик $P = min.$ или $R = min.$ — Функције P и R за неколике врсте конкретних појава.

Jacobi-ева парцијална једначина за потенцијалне појаве. — Случај конзервативних појава. — Појаве са једним степеном слободе. — Појаве са два степена слободе. — Предвиђање геометриских и кинетичких појединости појава сведено на одредбу геодезиских линија површина у обичноме простору. Одредба површина што одговарају датој појави са два степена слободе. — Појаве са k степена слободе. — Предвиђање појединости појава сведено на одредбу геодезиских линија варијетета у полидимензионалноме простору. — Конкретни примери.

Принципи првиҳ варијација. — Генералисан Hamilton-ов принцип. — Генералисан принцип најмање акције. — Израчунавање акције дуж једне трајекторије. — Примедба о принципима првих варијација.

Диференцијалним једначинама појава могу се, и то на разноврсне начине, дати извесни *кондензовани облици* такве врсте, да оне буду обухваћене једном јединим једначином, везаном за посматрану појаву, или једном нарочитом погодбом, коју треба да задовољи једна одређена функција елемената појаве, или један интеграл таквих функција. Свака је, од таквих погодаба, оличена у једноме *принципу*, чији аналитички израз повлачи собом целокупан низ једначина које карактеришу проучавану појаву. Овде ће бити наведено неколико таквих кондензованих облика феноменолошких једначина.

I. Принципи виртуелних модификација и виртуелних радова.

Нека је

$$(v_1 \cdots v_n)$$

дати примарни систем, са коефицијентима инерције

$$k_1 \cdots k_n$$

и непосредно примењеним тежњама

$$X_1 \cdots X_n$$

Нека су

$$V_1 \cdots V_n$$

инерције одговарајућих елемената v_i, тако, да је

$$V_i = - k_n \frac{dv_i}{dt}$$

Формирајмо изразе

$$\Omega_1 = \Sigma (X_i + V_i) \delta v_i \tag{180}$$

$$\Omega_2 = \Sigma (X_i + V_i) \delta \eta_i \tag{181}$$

$$(i = 1, 2, \cdots n)$$

где су δv_i и $\delta \eta_i$ произвољне виртуелне промене елемената v_i и њихових тоталитета η_i, које нису у супротности са везама у примарном систему.

Тада, као што је раније показано,

1° ако је систем *слободан*, диференцијалне су једначине појаве обухваћене којом се хоће од двеју једначина

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= o \\ \Omega_2 &= o \end{aligned} \tag{182}$$

за *произвољне* виртуелне промене δv_i или $\delta \eta_i$, и потпуно су еквивалентне једној или другој од тих двеју једначина.

2° ако је систем са везама *прве врсте*, а међу тим нема деформације веза у систему, диференцијалне су једначие појаве обухваћене једначином

$$\Omega_1 = o \tag{183}$$

за све *остварљиве* виртуелне промене δv_i, и та је једначина еквивалентна скупу једначина појаве.

3° ако је систем са везама *друге врсте*, које се не деформишу у току појаве, једначине су појаве обухваћене једначином

$$\Omega_2 = o \tag{184}$$

за све *остварљиве* виртуелче промене $\delta \eta_i$, и та је једначина еквивалентна скупу једначина појаве.

Према томе: *диференцијалне се једначине појаве могу сматрати као садржане у једној или другој од једначина (182, где су δv_i и $\delta \eta_i$ произвољне виртуелне варијације елемената v_i или њихових тоталитета η_i, које нису у супротности са везама у примарном систему.* Једначине појаве, које су за слободан систем

$$X_i + V_i = o \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

а за систем са везама

$$X_i + \Phi_i + V_i = o \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

(поред једначина веза), и где су Φ_i раније одређене реакције веза, представљају *потребне и довољне* условѐ за егзистенцију прве или друге од једначина (182).

Раније је показан закон формације израза Ω_1 и Ω_2 за редуковани систем у појави. На име:

1° кад је систем са n-k веза прве врсте, ако се са

$$\Theta\,(q_1 \cdots q_k;\; q_1' \cdots q_k';\; t)$$

означи резултат, који се добија кад се функција

$$\frac{1}{2} k_i v'^2_i$$

изрази помоћу елемената $q_1 \cdots q_k$ редукованог система и њихових првих извода по t, а са

$$Q_1 \cdots Q_k$$

компоненте примењених тежња у правцима

$$Oq_1 \cdots Oq_k$$

израз ће Ω_1 бити облика

$$\Omega_1 = \Sigma \left(Q_i - \frac{\partial \Theta}{\partial q'_i}\right) \delta q. \tag{185}$$

Такав ће се исти израз за Ω_1 имати и онда, кад је систем слободан, па се изврши трансформација система наведена на стр. 184; тада је само

$$i = 1, 2, \cdots n.$$

2⁰ Кад је систем са n-k веза друге врсте, ако се са

$$S (q_1 \cdots q_k ; \; q'_1 \cdots q'_k ; \; q''_1 \cdots q''_k ; \; t)$$

означи резултат, који се добија кад се функција

$$\frac{1}{2} \Sigma k_i \eta''^2_i$$

изрази помоћу елемената $q_1 \cdots q_k$ редукованог система и њихових првих и других извода по t, а са Q_i горе поменуте компоненте, израз ће Ω_2 бити облика

$$\Omega_2 = \Sigma \left(Q_i - \frac{\partial S}{\partial q''_i}\right) \delta q_i \tag{186}$$

Он вреди и за слободан систем, кад се у њему изврши трансформација наведена на стр. 185; тада је само

$$i = 1, 2, \cdots n$$

Диференцијалне су, дакле, једначине појаве садржане у једној или другој од једначина

$$(187) \qquad \Sigma\left(Q_i - \frac{\partial \Theta}{\partial q'_i}\right) \delta q_i = o$$

$$(188) \qquad \Sigma\left(Q_i - \frac{\partial S}{\partial q''_i}\right) \delta q_i = o$$

где $\delta q_1 \cdots \delta q_n$ *представљају произвољне варијације елемената* q_i *редукованог система.*

Једначине појаве

$$\frac{\partial \Theta}{\partial q'_i} = Q_i$$

односно

$$\frac{\partial S}{\partial q''_i} = Q_i$$

представљају потребне и довољне услове за егзистенцију једначине (187) односно (188).

У једначинама (182) написаним у горњим облицима, састоји се *принцип виртуелних модификација*, који обухвата, као специјални случај, принцип виртуелних брзина у Рационалној Механици и који се може исказати у овоме облику:

У природноме току појаве, а према врсти веза у систему, одговарајући је израз Ω_1 *или* Ω_2 *раван нули за све виртуелне варијације* δv_i *елемената примарног система, односно њихових тоталитета* $\delta \eta_i$, *који нису у супротности са везама у систему.*

Израз Ω_2 дат у примарном систему обрасцем (181) а у редукованом систему обрасцем (186) има једно конкретно значење које је од нарочитог интереса за Математичку Феноменологију: он представља *тотални виртуелни рад* примењених и инертних тежња, извршен при *остварљивим* виртуелним варијацијама

$$\delta\eta_1 \cdots \delta\eta_n$$

елемената секундарног система у појави, т. ј. при *произвољним* варијацијама

$$\delta q_1 \cdots \delta q_k$$

елемената редукованог система.[1])

Приметимо, само, да оба принципа: принцип виртуелних модификација и виртуелних радова претпостављају, као апсолутну погодбу, да виртуелне модификације у систему нису такве природе да повлаче собом *деформацију веза*, већ да су у свакоме тренутку у сагласности са везама у систему, онаквим, какве оне буду у том тренутку. При тој погодби, оба су принципа апсолутно генерална: они важе за ма какав систем, холономан или нехолономан, за ма какве везе прве или друге врсте, и за ма какве примењене тежње.

II. Принципи минимума.

Диференцијалне једначине појава могу се формирати непосредно и из погодбе, да једна одређена функција геометриских и кинетичких елемената појаве, којој се зна генерални закон формације, буде *минимум* за природан ток појаве. На име, постоји таквих функција поменуте врсте, да се диференцијалне једначине појаве, којој таква функција одговара, подударају

---

[1]) В. трећи одељак, друга глава.

са онима, што се добијају тражећи погодбе за минимум те функције.

A.) **Случај веза прве врсте.**

Нека је дат примарни систем

$$(v_1 \cdots v_n)$$

са *n-k* веза *прве врсте* и нека је

$$(q_1 \cdots q_n)$$

одговарајући редуковани систем, чија аналитичка дефиниција може експлицитно садржати време t или не.

Образујмо, на раније наведени начин, функције Θ и систем компонената $Q_1 \cdots Q_k$, па помоћу њих формирајмо функцију

$$(189) \qquad P = \Theta - (Q_1 q_1' + \cdots + Q_k q_k')$$

која ће бити полином другог степена по изводима $q_1' \cdots q_k'$, са коефициентима који ће у опште зависити од $q_1 \cdots q_k$ и од t.

Раније је показано, да се диференцијалне једначине појаве могу написати у облику

$$(190) \qquad \frac{\partial P}{\partial q_1'} = o \cdots \frac{\partial P}{\partial q_k'} = o$$

Те су једначине идентичне са онима, што одређују вредности $(q_1' \cdots q_k')$ за које функција P, а за један дати скуп вредности $(q_1 \cdots q_k, t)$, постаје минимум. Али и обрнуто: за вредности $(q_1' \cdots q_k')$, добијене решењем једначина (190), функција P одиста постаје минимум. То излази непосредно из факта, да скуп чланова другога степена по изводима q_i' у функцији P није ништа друго до скуп чланова другог степена по q_i' у функцији Θ, а овај представља један одређен позитиван квадратан облик.

Отуда овај резултат:

У сваком тренутку, а за већ постојеће вредности $q_1 \cdots q_k$, *у том тренутку, ефективне брзине модификација у редукованоме систему биће оне, за које функција* P *постаје у томе тренутку минимум.*

Томе се резултату може дати и овај облик:

Брзина је фигуративне тачке редукованог система у току појаве, у свакоме тренутку, таква, да функција P *има у томе тренутку што је могуће мању вредност.*

Диференцијалне једначине појаве, ма колики био њихов број, могу се, дакле, кондензовати у једну једину

$$P = minimum \tag{191}$$

имајући при томе на уму, да се у овој као непознате имају сматрати компоненте брзине фигуративне тачке, т. ј. вредности извода $q'_1 \cdots q'_k$ у свакоме тренутку t за време трајања појаве, а за дати низ вредности које елементи $q_1 \cdots q_k$ имају у томе тренутку. Једначина (191) еквивалентна је, тада, низу једначина (190), које представљају диференцијалне једначине појаве.

Приметимо и то, да и једначине (190) и принцип минимума остају неизмењени кад се функцији P дода ма какав израз F, који може зависити на какав било начин од t и $q_1 \cdots q_k$, али који би био независан од извода $q'_1 \cdots q'_k$. Према томе, за једну исту појаву постоји бескрајно много функција, које имају ту особину, да се једначине појаве добијају тражећи минимум таквих функција, али онај део тих функција што садржи изводе $q'_1 \cdots q'_k$ један је исти за све њих.

В) **Случај веза друге врсте.**

Нека је дат примарни систем

$$(v_1 \cdots v_n)$$

са n-k веза *друге врсте*, а са редукованим системом

$$(q_1 \cdots q_k)$$

чија дефиниција може експлицитно садржати време t или га не садржати.

Образујмо, на раније поменути начин, функцију S и систем компонената $Q_1 \cdots Q_k$, и помоћу њих формирајмо функцију

$$(192) \qquad R = S - (Q_1 q_1'' + \cdots + Q_k q_k'')$$

која ће бити полином другог степена по изводима $q_1'' \cdots q_k''$ са коефицијентима који у опште могу зависити од елемената $q_1 \cdots q_k$, њихових првих извода $q_1' \cdots q_k'$ и времена t.

Напред је показано да се диференцијалне једначине појаве тада могу написати у облику

$$(193) \qquad \frac{\partial R}{\partial q''_1} = o \cdots \frac{\partial R}{\partial q''_k} = o$$

Ове су једначине идентичне са онима, што одређују вредности $(q_1'' \cdots q_k'')$ за које функција R, а за један дати скуп вредности q_i, q_i' и t, постаје минимум. Али и обрнуто: за вредности $(q_1'' \cdots q_k'')$, добијене решењем једначина (193), функција R одиста постаје минимум. То долази непосредно отуда, што скуп чланова другога степена по изводима q_i'' није ништа друго, до скуп чланова другога степена по q_i'' у функцији S, а овај представља један одређен позитиван квадратни облик.

Отуда овај резултат:

У свакоме тренутку, а за већ постојеће вредности q_i *и* q_i' *у томе тренутку, акцелерације модификација у редукованоме систему биће оне за које функција* R *постаје у томе тренутку минимум.*

Томе се резултату може дати и овај облик:

Акцелерација је фигуративне тачке редукованог система, у току појаве, у сваком тренутку таква, да функција R има у томе тренутку што је могуће мању вредност.

Диференцијалне једначине појаве могу се, дакле, па ма колики био њихов број, кондензовати у једну једину

$$R = minimum$$

имајући при томе на уму да се у овој једначини као непознате имају сматрати компоненте акцелерације фигуративне тачке, т. ј. вредности $q''_1 \cdots q''_k$ у свакоме тренутку t за време трајања појаве, а за дати низ вредности које елементи q_i и први изводи q'_i имају у томе тренутку. Једначина $R = min$, еквивалентна је тада низу једначина (193), па, дакле, садржи у себи диференцијалне једначине појаве.

Приметимо да једначине (193) и принцип минимума остају неизмењени кад се функцији R дода ма какав израз Φ, који може зависити на какав било начин од t, $q_1 \cdots q_k$ и $q'_1 \cdots q'_k$, али који би био независан од других извода $q''_1 \cdots q''_k$. Према томе, за једну исту појаву постоји бескрајно много функција са том особином, да се диференцијалне једначине појаве добијају тражећи минимум таквих функција, али онај део тих функција, што садржи изводе $q''_1 \cdots q''_k$ један је исти за све њих.

Узевши н. пр. за функцију Φ израз

$$\Phi = \frac{1}{2}\left[\frac{X_1^2}{k_1} + \cdots + \frac{X_n^2}{k_n}\right] \tag{194}$$

где су $k_1 \cdots k_n$ коефициенти инерције елемената примарног система, а $X_1 \cdots X_n$ непосредне, активне и реактивне тежње, примењене на те елементе, добија се за функцију R један израз

$$R_1 = R + \Phi \tag{195}$$

који је од нарочитог интереса.

Јер, из једначина веза друге врсте

$$v_j = \beta_{j1} q'_1 + \cdots + \beta_{jk} q'_k + B_j$$

диференцијалењем по t, добија се

$$v'_j = [\beta_{j1} q''_1 + \cdots + \beta_{jk} q''_k] +$$
$$+ \left[\frac{\partial \beta_{j1}}{\partial q_1} q'_1 + \cdots + \frac{\partial \beta_{jk}}{\partial q_k}\right] q'_1 + \cdots\cdots$$

тако, да израз

$$(196) \qquad X_1 v'_1 + \cdots + X_n v'_n$$

изражен помоћу елемената $q_1 \cdots q_k$, постаје

$$(197) \qquad Q_1 q''_1 + \cdots + Q_k q''_k + G$$

где G представља скуп чланова добијенога трансформисаног израза (196), који не садржи друге изводе $q''_1 \cdots q''_k$.

Са друге стране, израз

$$\frac{1}{2}\left(k_1 v'^2_1 + \cdots + k_n v'^2_n\right)$$

истом трансформацијом, постаје функција S. Према томе израз

$$\frac{1}{2}\sum k_i v'^2_i - \sum X_i v'_i$$

изражен помоћу елемената $q_1 \cdots q_k$, постаје

$$R - G = R_1 - \Phi - G$$

тако, да је, према обрасцу 194

$$R_1 = \frac{1}{2}\sum k_i \left(v'_i - \frac{X_i}{k_i}\right)^2 + G$$

А пошто је, према једначинама (195),

$$\frac{\partial R_1}{\partial k''_i} = \frac{\partial R}{\partial q''_i}$$

и пошто функција G не утиче на ове парцијалне изводе, *то се, у горњем принципу минимума функција* R *може сменити оним делом израза* R_1, *што произлази од израза*

$$R_2 = \frac{1}{2}\sum k_i\left(v'_i - \frac{X_i}{k_i}\right)^2 \tag{198}$$

Међу тим, у појавама кретања, кад су v_i компоненте брзина у правоуглом координатном систему, а k_i масе материјалних тачака, израз

$$R_2\, dt^4 \tag{199}$$

представља *присиљавање* (Zwang, contrainte) у појави, у размаку времена од t до $t + dt$. Горњи факт о минимуму обухвата, дакле, као специјални случај Gauss-ов *принцип најмањег присиљавања*, који гласи:

Кретање једнога система материјалних тачака, везаних међу собом на ма који начин, под утицајем ма каквих сила, дешава се у свакоме тренутку у највећој могућној сагласности са кретањем, које би систем имао кад би ове тачке биле потпуно слободне, т. ј. са најмањим могућним присиљавањем, при чему се, као мерило присиљавања система у размаку времена од t до $t + dt$, има сматрати израз (199).

Тај би израз, у случају кад би систем био слободан, био раван нули; он је, међу тим, различан од нуле кад има веза у систему, али тада ипак има најмању могућну вредност.

Оно, што у опште даје интереса и важности принципима минимума ове врсте, јесте:

1° генералност тих принципа, који обухватају и потенцијалне појаве свих врста, са ма каквим, холономним или нехолономним системом, ма каквим везама прве или друге врсте и ма каквим примењеним тежњама;

2° факт да су одговарајуће функције P или R *безусловни минимуми* за природан ток појаве;

3° простота закона формације тих фукција.

C) Слободни системи.

Слободан систем може се, по вољи, сматрати да је или са $n - k = o$ веза прве врсте, или са $n - k = o$ веза друге врсте. Једначине ће појаве бити, према томе, за такав систем написане у облику

$$k_i v_i' = X_i \tag{200}$$

или у облику

$$k_i \eta_i'' = X_i \tag{201}$$

Функција P за први облик једначина је

$$P = \frac{1}{2} \Sigma k_i v_i'^2 - \Sigma X_i v_i'$$

а функција R за други облик једначина је

$$R = \frac{1}{2} \Sigma k_i \eta_i''^2 - \Sigma X_i \eta_i''$$

Кад, дакле, тежње X_i не зависе од брзина промена v_i', *за појаву ће вредети оба принципа минимума*

$$P = minimum$$

$$R = minimum$$

и једначине се појаве добијају у облику (200) одређујући брзину фигуративне тачке појаве тако, да функција P постане минимум, а у облику (201) одређујући акцелерацију те тачке тако, да функција R буде минимум.

Ако, пак, тежње X_i зависе од v'_i, *за појаву ће важити само други принцип*

$$R = minimum;$$

одређујући акцелерацију фигуративне тачке по томе принципу, долази се непосредно до диференцијалних једначина појаве.

У првоме случају може се, по вољи, извршити или таква смена, да везе између елемената v_i првобитнога и елемената ω_i новога система повлаче собом релације

$$(220)\qquad \begin{array}{l} dv_1 = \alpha_{11}\, d\omega_1 + \cdots + \alpha_{1n}\, d\omega_n + A_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dv_n = \alpha_{n1}\, d\omega_1 + \cdots + \alpha_{nn}\, d\omega_n + A_n \end{array}$$

или таква смена, да су те релације облика

$$(203)\qquad \begin{array}{l} d\eta_1 = \alpha_{11}\, d\omega_1 + \cdots + \alpha_{1n}\, d\omega_n + A_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d\eta_n = \alpha_{n1}\, d\omega_1 + \cdots + \alpha_{nn}\, d\omega_n + A_n \end{array}$$

Сменом (202) функција P постаје ранији израз

$$(204)\qquad \Theta - (Q_1\, q_1' + \cdots + Q_n\, q_n')$$

пошто се у овоме елементи q_i буду сменили елементима ω_i.

Сменом (4) функција R постаје ранија функција

$$S - (Q_1\, q_1'' + \cdots + Q_n\, q_n'')$$

где, такође, треба елементе q_i сменити елементима ω_i.

У другом случају могућна је само смена (203), којом ће функција R бити сведена на облик (192).

D) Непосредна редукција датих једначина појаве на облике P = min. или R = min.

Први случај: претпоставимо да су, на ма који начин, познате једначине једне појаве у облику

$$(205)\qquad \begin{array}{l} M_{11}\,\omega_1' + \cdots + M_{1n}\,\omega_n' + M_1 = o \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_{n1}\,\omega_1' + \cdots + M_{nn}\,\omega_n' + M_n = o \end{array}$$

где су M_{ik} и M_i функције променљивих

$$(\omega_1 \cdots \omega_{n,}\ t)$$

са претпоставком да је

$$M_{ik} = M_{ki}$$

и да су то позитивне функције поменутих променљивих за време трајања појаве

Напред је показано (в. стр. 189—192) како се једначине (205) могу написати у облику

$$(206)\qquad \begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \omega_1'} = G_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \omega_n'} = G_n \end{array}$$

где су $G_1 \cdots G_n$ произвољне функције променљивих ω_i и t: функција се Φ одређује сабирањем једначина (205), пошто се у њима смени M_i са $M_i + G_{i,}$ па за тим помножи прва једначина са ω_1', друга са ω_2', и т. д.; лева страна добијене једначине, пошто се у њој буде удвојио скуп чланова првога степена по елементима ω_i', представљаће функцију 2Φ.

Претпоставимо, дакле, да је на тај начин одређена функција P за један произвољно изабрани скуп функција G_i. *Тада ће функција P, која својим минимумом одређује једначине појаве, бити*

$$P = \Phi - (G_1 \omega_1' + \cdots + G_n \omega_n'$$

У специјалном случају, кад се узме

$$G_1 = \cdots = G_n = o$$

функција се P поклапа са Φ.

Други случај: претпоставимо да су, на ма који начин, познате једначине појаве у облику

$$(207) \qquad \begin{array}{l} N_{11} \omega_1'' + \cdots + N_{1n} \omega_n'' + N_1 = o \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ N_{n1} \omega_1'' + \cdots + N_{nn} \omega_n'' + N_n = o \end{array}$$

где су N_{ik} функције променљивих ω_i, t, позитивне за време трајања појаве, а N_i могу поред ових променљивих зависити још и од извода ω_i', са претпоставком да је

$$N_{ik} = N_{ki}$$

Напред је показано (в. стр. 192) како се једначине (207) могу написати у облику

$$\begin{array}{c} \dfrac{\partial \Pi}{\partial \omega_1''} = F_1 \\ \dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial \omega_n''} = F_n \end{array}$$

где су $F_1 \cdots F_n$ произвољно изабране функције променљивих ω_i, ω_i', t. Функција се Π одређује сабирањем једначина (207), пошто се у њима смени N_i са $N_i + F_i$, па се, за тим, помножи прва једначина са ω_1'', друга са ω_2'' и т, д.; лева страна добијене једначине, пошто се у њој буде удвојио скуп чланова првога степена по елементима ω_i'', представљаће функцију 2Π.

Претпостављајући, да је на тај начин одређена функција Π за један произвољно изабрани скуп функција $F_1 \cdots F_n$, *функција* R, *која својим минимумом одређује једначине појаве, биће*

$$R = \Pi - (F_1 \omega_1'' + \cdots + F_n \omega_n'')$$

Узевши

$$F_1 = \cdots = F_n = 0$$

функција се R поклапа са Π.

Приметимо, на послетку, да у случају појава са једним степеном слободе, функције P и Q, сведене на најпростији облик, јесу

$$P = \frac{1}{2} M_{11} \omega_1'^2 + M_1 \omega_1'$$

$$R = \frac{1}{2} N_{11} \omega_1''^2 + N_1 \omega_1''$$

Е) Функције P и R за неколике врсте конкретних појава.

Напред изложени принципи минимума, везани за функције P и R, генерални су и распростиру се како на појаве са слободним системом, тако и на оне са везама прве или друге врсте. Они обухватају како појаве са холономним, тако и оне са нехолономним системима. Они, тако исто, обухватају како потенцијалне појаве, тако и оне код којих примењене тежње не деривирају ни из каквог потенцијала.

Закон формације функција P и R један је исти за све појаве и наведен је у овоме, што је горе казано. Међу тим, конкретни облици тих функција, што одговарају разним појавама, бескрајно су разноврсни и мењају се како са обликом веза у систему, тако и са природом примењених тежња, под утицајем којих се дешава посматрана појава. Овде ће бити, примера ради, изложени такви конкретни облици ових функција за неколике врсте појава.

Прва врста: експоненцијалне појаве, (хлађење чврстог тела уједначавањем температуре тела и околине; губљење електрицитета наелектрисане течности услед испаравања; опадање количине хемиског тела, које се поступно трансформише акцијом каквога физичког агенса, фермента и т. д.) које се састоје у променама једнога елемента v. под утицајем једне активне тежње која је у сваком тренутку пропорционална величини тога елемента.

Појава се дешава тако, како ће у свакоме тренутку функција

$$P = \frac{1}{2} kv'^2 - \lambda vv'$$

бити минимум.

Друга врста: осцилаторне појаве (кратке осцилације клатна у безваздушном простору; осцилације нивоа течности кад нема трења; вибрације еластичне металне шипке и т. д.) које се састоје у променама једнога елемента v под утицајем једне депресивне тежње, пропорционалне тоталитету η тога елемента.

Појава се дешава тако, како ће у свакоме тренутку функција

$$R = \frac{1}{2} k\eta''^2 + \lambda\eta\eta''$$

бити минимум.

Трећа врста: амортизиране појаве, у којима се један елеменат v мења симултаном акцијом једне сталне импулсивне тежње и једне промењиве депресивне тежње, пропорционалне величини тога елемента (кретање каквога чврстог тела око једне осовине, кад постоји отпор пропорционалан угаоној брзини тела; поступно мењање јачине струја, под утицајем једне сталне електромоторне силе и кад у проводнику има отпора; поступно трансформисање каквога хемиског тела у хомогеним хемиским реакцијама првога реда и т. д.).

Функција, чији минимум карактерише ток појаве, јесте

$$P = \frac{1}{2} kv'^2 + \lambda vv' - \mu v'$$

Четврта врста: амортизиране осцилаторне појаве (лагано кретање клатна кроз какву отпорну средину, са отпором пропорционалним брзини кретања; вибрисање дијапазона, кад је унутарни отпор пропорционалан брзини вибрација; испражњавање електричних кондензатора и т. д.), које се састоје у променама једнога елемента v под утицајем двеју депресивних тежња: једне, пропорционалне величини елемента v и друге, пропорционалне његовом тоталитету η.

Функција, чији минимум карактерише ток појаве, јесте

$$R = \frac{1}{2} k\eta''^2 + \lambda\eta'\eta'' + h\eta\eta''$$

Пета врста: кретање чврстог тела око једне утврђене тачке. Означивши са

p, q, r компоненте тренутне ротације дуж главних осовина инерције за ту утврђену тачку;

A, B, C моменте инерције тела према тим осовинама;

L, M, N суме момената датих активних сила према тим осовинама, кретање се врши тако, како ће у сваком тренутку функција

$$P = \frac{1}{2} [Ap'^2 + Bq'^2 + Cr'^2 + 2(C-B)qrp' +$$
$$+ 2(A-C)rpq' + 2(B-A)pqr'] - Lp' - Mq' - Nr'$$

бити минимум.

Шеста врста: кинетички ток зависних хемиских реакција. Уочимо раније наведени случај реакција, које се симултано дешавају у једној истој смеши и имају једно или више заједничких активних тела (стр. 198). Задржавши ранија означавања, налази се н. пр. да, кад симултане реакције имају два заједничка активна тела, брзине ће реакција бити у свакоме тренутку такве, да функција

$$P = \frac{1}{2}(y_1'^2 + z_1'^2) - C_1 (a - \alpha y_1 - \beta z_1)(a' - \alpha' y_1)\, y_1' -$$
$$- C_2 (a - \alpha y_1 - \beta z_1)(b - \beta' z_1)\, z_1'$$

буде минимум.

Седма врста: међусобна акција система непокретних струја. Задржавши означавања наведена на стр. 200, функција чији минимум карактерише начин варијација јачина струја биће

$$P = \frac{1}{2}\left[\, \Sigma L_k i_k'^2 + 2\, \Sigma M_{kh} i_k' i_h' \right] -$$
$$- \Sigma (E_k - R_k{}' i_k)\, i_k'$$

Осма врста: међусобна акција система покретних струја. Задржавши означавања на стр. 207 функција, чији минимум карактерише појаву, јесте

$$R = \frac{1}{2}\left[m x''^2 + L_1 q_1''^2 + L_2 q_2''^2 + 2 M_{12} q_1'' q_2''\right] +$$
$$+ \left(\frac{N}{2} - X\right) x'' + \left(\frac{P}{2} + R_1 q_1' - E_1\right) q_1'' +$$
$$+ \left(\frac{\Pi}{2} + R_2 q_2' - E_2\right) q_2''$$

Девета врста: међусобна акција система струја при деформацији проводника. Са означавањима, наведеним на стр. 209 функција, што постаје минимум у току појаве, јесте

$$R = \frac{1}{2}\left[mx''^2 + L_1\, q_1''^2 + L_2\, q_2''^2 + 2M_{12}\, q_1'^2\, q_2''\right] +$$
$$+ \left(\frac{A}{2} - X\right) x'' + \left(\frac{B}{2} + R_1\, q_1' - E_1\right) q_1'' +$$
$$+ \left(\frac{C}{2} + R_2\, q'_2 - E_2\right) q''_2$$

Десета врста: међусобна акција струја и магнета. Са означавањима на стр. 211 функција, што постаје минимум у току појаве, биће

$$R = \frac{1}{2}(mx''^2 + L_1\, q_1''^2) + \left(\frac{K}{2} - X\right) x'' +$$
$$+ \left(\frac{N}{2} + R_1\, q_1' - E_1\right) q_1''$$

Једанаеста врста: електричне промене у покретним полидимензионалним проводницима. Задржавши означавања на стр. 202, функција, која својим минимумом дефинише у сваком тренутку електричне промене у систему, јесте

$$P = \frac{1}{2}\left[J\omega'^2 + L_1\, i_1'^2 + L_2\, i_2'^2 \right| - \left(\frac{K}{2} i_1\, i_2 + Q\right) \omega' -$$
$$- \left(\frac{K}{2} \omega i_2 - R_1\, i_1 + E\right) i_1' - (E_2 - R_2\, i_2)\, i_2'$$

Дванајеста врста: распростирање топлоте по каквоме телу. Означивши са V температуру у једној тачки x, y, z тела, а са

$$V' = \frac{\partial V}{\partial t}$$

брзину њене промене у току појаве, ова се дешава тако, како ће у сваком тренутку брзина промене V' бити она, за коју ће функција

$$P = \frac{1}{2}\, c\, V'^2 - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) V'$$

(где је c позитивна стална количина), а за већ постојећи распоред температура V у томе тренутку, бити минимум.

У случају распростирања топлоте по жици, изолованој од утицаја околине, за промене температуре удаљене за дужину s од изворне тачке топлоте, функција ће P бити

$$P = \frac{1}{2} cV'^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} V'$$

а кад има утицаја околине, она ће бити

$$P = \frac{1}{2} cV'^2 - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} - \lambda V\right) V'$$

где је λ позитивна константа.

Тринаеста врста: промене концентрације c јона, у току времена, регулисане су Warburg-овом једначином[1])

$$\frac{\partial c}{\partial t} = k \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$$

где је k брзина дифузије а z одстојање од електроде. Функција ће, дакле, P бити облика

$$P = \frac{1}{2} c'^2 - k \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} c'$$

III. Jacobi-ева парцијална једначина за потенцијалне појаве.

Нека је дата једна ма каква потенцијална појава и нека је

$$H(p_1 \cdots p_k ; q_1 \cdots q_k ; t)$$

---

[1]) Wiedem. Ann. 1899. S. 694.

Hamilton-ова функција *H*, што јој одговара. Формирајмо парцијалну диференцијалну једначину првог реда

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(\frac{\partial V}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial q_k}; q_1 \cdots q_k; t\right) = o \tag{208}$$

која дефинише *V* као функцију промењивих

$$(q_1 \cdots q_k, t)$$

сматраних као независно промењиве количине.

Нека је

$$V(q_1 \cdots q_k, t, a_1 \cdots a_k) + const \tag{209}$$

један потпун интеграл једначине (208) који садржи k произвољних констаната $a_1 \cdots a_k$, од којих ни једна није адитивна.

Једначине појаве, у њиховом коначном облику, добијају се, тада, ставивши да је сваки од парцијалних извода

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial a_k}$$

раван по једној произвољној константи $b_1 \cdots b_k$, *а сваки од парцијалних извода*

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

раван одговарајућем моменту $p_1 \cdots p_k$.

Једначине ће појаве, дакле, бити у коначном облику

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1 \cdots \frac{\partial V}{\partial a_k} = b_k \tag{210}$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1 \cdots \frac{\partial V}{\partial q_k} = p_k \tag{211}$$

Теорема је специјални случај опште Jacobi-еве теореме, према којој, кад је H ма каква функција променљивих p_i, q_i, t, а V један потпун интеграл парцијалне једначине (208), систем једначина (210) и (211) представља систем општих интеграла симултаних једначина

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} \cdots\cdots \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \cdots\cdots \frac{dq_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{aligned} \tag{212}$$

Проучавање тока појаве своди се, дакле, на интеграцију једне једине једначине (208), везане за посматрану појаву.

Кад је одређен један потпун интеграл V наведене врсте, једначине (210) дефинишу елементе система $(q_1 \cdots q_k)$ као експлицитне функције времена t и $2k$ констаната a_i и b_i: те једначине одређују, дакле, потпуно ток појаве и то у коначном облику. Једначине (211) одређују за тим помоћне променљиве p_i.

Случај конзервативних појава. Претпоставимо да функција H не зависи експлицитно од времена t. Тај случај, као што је раније наведено, наступа, кад су испуњене ове погодбе:

1° да су везе у систему непроменљиве, тако, да дефиниција редукованог система не зависи експлицитно од времена;

2° да потенцијал $-U$ не зависи експлицитно од времена.

Тада је Jakobi-ева једначина задовољена једном функцијом облика

$$V = -ht + W \tag{213}$$

где је h константа, а W функција елемената $(q_1 \cdots q_k)$, која има да задовољи парцијалну једначину првог реда

$$(214) \qquad H\left(\frac{\partial W}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial W}{\partial q_k};\ q_1 \cdots q_k\right) = h$$

Нека је, на ма какав начин, познат један потпун интеграл

$$(215) \qquad W(q_1 \cdots q_k;\, a_1 \cdots a_{k-1};\, h) + const.$$

једначине (214), који би, осим константе h, садржавао још $k-1$ константу, од којих ни једна није адитивна. Тада ће

$$(216) \qquad V = -ht + W(q_1 \cdots q_k;\, a_1 \cdots a_{k-1};\, h)$$

бити један потпун интеграл Jakobi-еве једначине (208) са k констаната

$$(a_1 \cdots a_{k-1},\, h).$$

Ако се, дакле, означи b_k са $-t_0$, једначине тока појаве, у коначном облику, биће

$$(217) \qquad \frac{\partial W}{\partial a_1} = b_1 \cdots \frac{\partial W}{\partial a_{k-1}} = b_{k-1}$$

$$(218) \qquad t - t_0 = \frac{\partial W}{\partial h}$$

$$(219) \qquad p_1 = \frac{\partial W}{\partial q_1} \cdots p_k = \frac{\partial W}{\partial q_k}$$

Једначине (217) не садрже t експлицитно; оне представљају $k-1$ релацију између k параметара $(q_1 \cdots q_k)$. Из њих се, према томе, могу ови параметри изразити као функције једног истог параметра λ:

$$q_1 = f_1(\lambda) \cdots q_k = f_k(\lambda)$$

Варијацијом овога параметра λ добија се низ конфигурација $(q_1 \cdots q_k)$, кроз које систем сукцесивно пролази у току времена. Те једначине дефинишу, дакле, трајекторију фигуративне тачке система у току трајања појаве, т. ј. геометриску страну појаве.

Једначина (218) одређује време, за које фигуративна тачка система прелази од једнога положаја на други, т. ј. кинетичку страну појаве.

На исти је начин упрошћено одређивање потпуног интеграла једначине (208) и онда, кад један, ма који, од елемената q_i не фигурише експлицитно у функцији H. Ако је то случај н. пр. са елементом q_1, имало би се ставити да је

$$V = a_1 q_1 + W(q_2 \cdots q_k, t)$$

и тиме свести на случај са једном променљивом мање.

А. Појаве са једним степеном слободе.

Поменуто је, да се појаве са холономним системом, једнога степена слободе, увек имају сматрати за потенцијалне, кад год примењене тежње не зависе ни од чега другог осим времена t и елемента q и да је тада потенцијал облика

$$- U = \int Q\, dq = \Phi(q, t)$$

Кад T и U зависе експлицитно од времена t, тако, да је

$$2\, T = a_1 q'^2 + 2\, a_2 q' + a_3$$

где су a_1, a_2, a_3 функције елемената q и времена t, Jacobi-еве једначине појаве биће облика

$$\frac{\partial V}{\partial t} + A_1 \left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)^2 + 2\, A_2 \frac{\partial V}{\partial q} + A_3 = 0$$

где су, A_1, A_2, A_3 функције променљивих q и t.

Кад ни T, ни U, не зависе од t (случај конзервативних појава са једним степеном слободе), биће

$$2\,T = a\,q'^2$$

и према томе Jacobi-ева је једначина облика

$$\frac{\partial V}{\partial t} + A_1 \left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)^2 + A_2 = o$$

Тада ће се имати као потпуни интеграл

$$V = -\,h\,t + W\,(q, c, h)$$

где су c и h произвољне константе, а W интеграл обичне диференцијалне једначине првога реда

$$A_1 \left(\frac{dW}{dq}\right)^2 + A_2 = h$$

Први пример: појаве које се састоје у променама једнога елемента v, под утицајем једне депресивне тежње, пропорционалне тоталитету η тога елемента. Означивши са k коефициенат инерције елемената v, а са λ коефициенат поменуте пропорционалности, биће

$$2\,T = k\,\eta'^2$$

$$U = -\,\frac{\lambda\eta^2}{2}$$

према чему ће Jacobi-ева једначина појаве бити

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{k}\left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{\lambda}{2}\,\eta^2 = o$$

тако, да се проблем своди на интеграцију обичне једначине првог реда

$$\frac{1}{k}\left(\frac{dW}{d\eta}\right) + \frac{\lambda}{2}\,\eta^2 - h = o$$

Конкретни примери:

1° кратке осцилације клатна у безваздушном простору, где би улогу елемента v играла брзина кретања, улогу његовог тоталитета елонгација, а улогу депресивне тежње сила која стално тежи да врати клатно у његов равнотежни положај;

2° осцилације разлике нивоа једне течности у двама судовима, везаним међу собом хоризонталном цеви, а кад је отпор трења неосетан. Улогу би елемента v играла брзина промене разлике нивоа, а улогу тоталитета сама та разлика.

Други пример: појаве које се састоје у променама једнога елемента v, под утицајем двеју депресивних тежња: једне пропорционалне величине самога елемента и друге пропорционалне његовом тоталитету η. Једначина је појаве

$$k \frac{dv}{dt} = - \lambda v - \mu \eta$$

и може се написати у облику

$$\frac{d}{dt} \left(kv \, e^{\frac{\lambda t}{k}} \right) = - \mu \eta \, e^{\frac{\lambda t}{k}}$$

тако, да се може узети

$$\frac{\partial T}{\partial \eta'} = k \eta' e^{\frac{\lambda t}{k}}$$

$$2 T = k e^{\frac{\lambda t}{k}} \eta'^2$$

$$U = - \frac{\mu}{2} e^{\frac{\lambda t}{k}} \eta^2$$

према чему је Jacobi-ева једначина појаве

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{k} e^{-\frac{\lambda t}{k}} \left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{\mu}{2} e^{\frac{\lambda t}{k}} \eta^2 = o$$

и ова се сменом

$$\eta e^{\frac{\lambda t}{2k}} = \xi$$

своди на облик

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{k} \left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{\mu}{2} \xi^2 = o$$

тако да је проблем сведен на непосредно извршљиву интеграцију обичне једначине првог реда

$$\frac{1}{k} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{\mu}{2} \xi^2 - h = o$$

Конкретни примери:

1° лагано кретање клатна кроз какву отпорну средину, при чему би отпор био пропорционалан брзини кретања;

2° вибрације дијапазона, кад је унутрашњи отпор овога пропорционалан брзини вибрација;

3° испражњавање једнога електричног кондензатора, кад му се саставе арматуре или споје са земљом;

4° осцилације нивоа течности у двама судовима, везаним једном хоризонталном цеви, кад има отпора при кретању течности.

B. Појаве са два степена слободе.

Jacobi-ева је једначина

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}; q_1, q_2, t\right) = o$$

а ако је

$$V(q_1, q_2, t, a_1, a_2) + const.$$

један њен потпун интеграл са две произвољне константе, од којих ни једна није адитивна, једначине

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1 \qquad \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1 \qquad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2$$

биће једначине појаве у коначном облику.

Тај је факт од нарочитог значаја за *консервативне* појаве са два степена слободе: он тада доводи до једне значајне теореме, *која своди математичку експликацију појединости појава на један чисто геометриски проблем у обичноме простору.*

За консервативне појаве са два степена слободе функција је T облика

$$2\,T = a_{11}\, q_1'^2 + 2\, a_{12}\, q_1'\, q_2' + 2\, a_{22}\, q_2'^2$$

где су a_{11}, a_{12}, a_{22} функције елемената q_1 и q_2, према чему $2\,T$, изражено помоћу момената p_1 и p_2, има за израз

$$2\,T = \frac{a_{22}\, p_1^2 - 2\, a_{12}\, p_1\, p_2 + a_{11}\, p_2^2}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2}$$

Ако се, дакле, са ΔV означи Beltrami-ев диференцијални параметар

$$\Delta V = \frac{a_{22} \left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)^2 - 2\, a_{12} \frac{\partial V}{\partial q_1} \frac{\partial V}{\partial q_2} + a_{11} \left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)^2}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2}$$

Jacobi-ева једначина појаве биће

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta V = U \tag{220}$$

Ако је

$$W(q_1, q_2, c, h)$$

један интеграл (где константа c није адитивна) парцијалне једначине

$$\Delta W = 2(U + h) \tag{221}$$

једначине појаве, у коначном облику, биће

$$\frac{\partial V}{\partial c} = b \qquad \frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1 \tag{222}$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = t - t_0 \qquad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2 \tag{223}$$

Претпоставимо сад да се тражи трајекторија фигуративне тачке система за једну одређену и дату вредност константе h: проблем се своди на интеграцију једначине (221), где треба h сменути том вредношћу.

Уочимо површину P која има за линиски елеменат

$$ds_1^2 = 2(U + h)\, ds^2 \tag{224}$$

где је

$$ds^2 = a_{11}\, dq_1^2 + 2\, a_{12}\, dq_1\, dq_2 + a_{22}\, dq_2^2 \tag{225}$$

Диференцијални параметар $\Delta_1 V$ линиског елемента ds_1 има за израз

$$\Delta_1 V = \frac{\Delta V}{2(U + h)} \tag{226}$$

што значи да се једначина (221) поклапа са једначином

$$\Delta_1 V = 1 \tag{227}$$

Али, као што је познато у теорији површина, једначина (227) дефинише геодезиске линије површине P.

Одредба трајекторије фигуративне тачке, у једној појави са два степена слободе, и одредба геодезиских линија површине P јесу, дакле, идентични проблеми.

Отуда овај значајан резултат:

Свакој појави са два степена слободе и са функцијама T и U независним од времена, одговара по једна класа површина P, таква, да се проучавање и геометриских и кинетичких појединости појаве своди на одредбу геодезиских линија површине P.

Из теорије геодезиских линија познато је, у осталом, да су оне одређене једначином површине P и једначином

$$\frac{\partial W}{\partial c} = b \tag{228}$$

где је

$$W(q_1, q_2, c, h) \tag{229}$$

један интеграл парцијалне једначине (221) са једном константом c која није адитивна, а b произвољна константа. Разлика вредности, које добија функција (229) у тачкама

$$M_1(q_1, q_2) \quad \text{и} \quad M_2(q_1, q_2)$$

на уоченој површини P, представља дужину лука геодезиске линије, која пролази кроз те две тачке.

Кад су на тај начин одређене геодезиске линије површине P, што одговара проучаваној појави, једначина

$$\frac{\partial W}{\partial c} = b$$

кад се у њој прецизирају вредности констаната b, c и h, према датим условима у појави, дефинише у равни $q_1 O q_2$ трајекторију фигуративне тачке $N(q_1, q_2)$ система т. ј. континуални низ сукцесивних стања, кроз која појава пролази у току њенога трајања. Једначина

$$t - t_0 = \frac{\partial W}{\partial h}$$

кад се у њој, на исти начин, прецизирају константе b, c и h, одређује начин кретања фигуративне тачке N по трајекторији, па, дакле, и стање појаве у сваком датом тренутку t.

Према таквим резултатима, један интересантан проблем, који се јавља при проучавању геометриских и кинетичких појединости појава, био би овај:

Одредити класу површина P, што одговара једној датој појави са два степена слободе.

Проблем се своди на геометриски задатак одредбе површина које имају један дати линиски елеменат

$$(230) \qquad ds_1^2 = b_{11}\, dq_1^2 + 2\, b_{12}\, dq_1\, dq_2 + b_{22}\, dq_2^2$$

где су b_{11}, b_{12}, b_{22} дате функције промењивих количина q_1 и q_2, које у овом случају имају за вредности

$$b_{11} = 2\,(U + h)\, a_{11}$$

$$b_{12} = 2\,(U + h)\, a_{12}$$

$$b_{22} = 2\,(U + h)\, a_{22}$$

У осталом, извесном сменом

$$q_1 = \varphi\,(\lambda, \mu)$$

$$q_2 = \psi\,(\lambda, \mu)$$

линиски се елеменат ds_1^2 своди на облик

$$ds_1^2 = L\, d\lambda^2 + M\, d\mu^2$$

где су L и M функције параметара λ и μ, и облик површина P зависи, на познати начин, од облика тих функција. Тако н. пр. линиски елеменат, сводљив на облик

$$ds_1^2 = d\,\lambda^2 + d\,\mu^2$$

карактерише *развојне* површине; елеменат сводљив на облик

$$ds_1^2 = d\,\lambda^2 + f\,(\lambda, \mu)\,d\mu^2$$

где је f полином другог степена по λ, са коефициентима који могу бити ма какве функције параметра μ, карактерише *праволиниске* површине; елеменат сводљив на

$$ds_1^2 = d\,\lambda^2 + f\,(\lambda)\,d\mu^2$$

дефинише *ротационе* површине; елеменат

$$ds_1^2 = X\,[d\,\lambda^2 + (\lambda + Y)\,d\,\mu^2]$$

где су X и Y функције параметра μ, карактерише *спиралне* површине и т. д.

Свакој од ових класа површина одговара по једна класа појава, чије се проучавање своди на одредбу геодезиских линија тих површина.

Потражимо н. пр. класу површина P што одговара појави кретања једне материјалне тачке у равни, под утицајем централних сила, које су функције растојања. Тада је, у поларним координатама, и сматрајући масу тачке као равну јединици

$$2T = r'^2 + r^2\,\theta'^2$$

$$U = f\,(r)$$

тако, да је н. пр. за вредност o константе h

$$ds_1^2 = f\,(r)\,dr^2 + f\,(r)\,r^2\,d\theta^2$$

Сменом

$$dr \sqrt{f(r)} = d\lambda$$

линиски се елеменат своди на облик

$$ds_1^2 = d\lambda + \varphi(\lambda)\, d\theta^2$$

што показује да таквој врсти појава одговарају *ротационе површине*. У специјалнијем случају, кад је централна сила привлачна и обрнуто пропорционална квадрату растојања, одговарајућа класа обртних површина има за једначине[1])

$$x = a \sqrt{cr(r-b)} \cos \frac{\theta}{a}$$

$$y = a \sqrt{cr(r-b)} \sin \frac{\theta}{a}$$

$$z = \sqrt{c} \int dr \sqrt{\frac{a^2 \left(\frac{b}{2} - r\right)^2 - (b-r)^2}{r(b-r)}}$$

Уочимо, као други пример, електричне промене у систему, састављеном од двеју струја које се међусобно и саме собом индукују, а у случају кад су отпори проводника веома слаби и електромоторне силе у електричним колима сталне. Тада је

$$2T = L_1 q_1'^2 + 2M_{12} q_1' q_2' + L_2 q_2'^2$$

$$U = E_1 q_1 + E_2 q_2$$

тако да је

$$ds_1^2 = 2(E_1 q_1 + E_2 q_2 + h)(L_1 dq_1^2 + 2M_{12} dq_1 dq_2 + L_2 dq_2^2)$$

што се лако своди на облик

$$(231) \qquad ds_1^2 = (a\lambda + b\mu)(d\lambda^2 + d\mu^2)$$

---

[1]) Darboux: Leçons sur la théorie des surfaces t. II. p. 454.

где су a и b константе. Појави одговара, дакле, класа површина за коју је линиски елеменат сводљив на облик (231).

C. Појаве са k степена слободе.

Одговарајућа Jacobi-ева једначина биће једначина (208) и њен један потпун интеграл (209) потпуно одређује геометриске и кинетичке елементе појаве.

У случају *консервативних* појава тај факт доводи до једне значајне теореме, *која своди математичку експликацију ма какве консервативне појаве на један чисто геометриски проблем у k-димензионалном простору.*

За консервативне је појаве са k степена слободе

$$2T = \Sigma\, a_{ij}\, q_i'\, q_j' \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

Означивши, краткоће ради, израз

$$-\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & p_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & p_k \\ p_1 & \cdots & p_k & o \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}}$$

са

$$\Omega\,(q_1 \cdots q_k;\ p_1 \cdots p_k)$$

Jacobi-ева је једначина облика

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\Omega\left(q_1 \cdots q_k ; \frac{\partial V}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = U$$

тако, да ако се стави

$$V = -\,ht + W$$

функција W има да задовољи парцијалну једначину

$$\Omega\left(q_1 \cdots q_k; \frac{\partial W}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial W}{\partial q_k}\right) = 2\,(U + h) \tag{232}$$

Одредба трајекторије фигуративне тачке система своди се, за једну одређену дату вредност константе h, на одредбу потпуног интеграла једначине (232), који би, поред константе h, садржао још $k - 1$ констаната $a_1 \cdots a_{k-1}$ и трајекторија би тада била дефинисана системом једначина

$$\frac{\partial W}{\partial a_1} = b_1 \cdots\cdots \frac{\partial W}{\partial a_{k-1}} = b_{k-1} \tag{233}$$

а време, потребно фигуративној тачки да пређе од једне тачке трајекторије на другу, једначином

$$t - t_0 = \frac{\partial W}{\partial h} \tag{234}$$

Кад би компоненте примењених тежња, у свима правцима $oq_1 \cdots oq_k$, биле равне нули, било би

$$U = const$$

тако, да би се могло узети

$$2\,(U + h) = 1$$

и да се једначина (232) своди на

$$\Omega\left(q_1 \cdots q_k; \frac{\partial W}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial W}{\partial q_k}\right) = 1 \tag{235}$$

Трајекторије, добијене на горњи начин интеграцијом ове једначине, биле би, пошто их фигуративна тачка описује без утицаја примењених тежња, геодезиске линије онога варијетета k-тог реда, који има за линиски елеменат израз

$$ds^2 = \Sigma a_{ij}\, dq_i\, dq_j$$

Претпоставимо, сад, да се појава дешава под утицајем скупа примењених тежња које деривирају из једнога потенцијала

$$-U(q_1 \cdots q_k)$$

Ако се уочи систем за који функција T има облик

$$2T = \Sigma b_{ij}\, q_i'\, q_j'$$

где је

$$b_{ij} = 2(U + h)\, a_{ij}$$

функција Ω, за такав систем, постаје

$$\Omega_1 \left(q_1 \cdots q_k ; \frac{\partial V}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial q_k} \right) =$$

$$= \frac{1}{2(U + h)}\, \Omega \left(q_1 \cdots q_k ; \frac{\partial V}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial q_k} \right)$$

тако, да ако се стави

$$V = -ht + W$$

и ако се води рачуна о једначини (231), одредба се функције W своди на интеграцију једначине

$$\Omega_1 \left(q_1 \cdots q_k ; \frac{\partial W}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial W}{\partial q_k} \right) = 1 \tag{236}$$

Па пошто, према ономе што је горе наведено, ова једначина дефинише геодезиске линије онога варијетета k-тог реда, који има за линиски елеменат израз

$$ds_1{}^2 = \Sigma b_{ij}\, dq_i\, dq_j$$

то се добија овај, за Феноменологију конзервативних појава, значајан резултат:

Свакој конзервативној појави одговара по једна класа варијетета онноликога реда, колики је степен слободе у појави, и која је таква, да су математичка експликација геометриских и кинетичких појединости појаве и одредба геодезиских линија те класе варијетета, два идентичка проблема.

Геометриске појединости појаве дефинисане су скупом једначина (233), а кинетичке једначином (234), где је W један потпун интеграл парцијалне једначине (236), т. ј. једначине (235), пошто се у овој коефициенти a_{ij} смене коефициентима $2\,(U+h)\,a_{ij}$.

Први пример: кретање чигре по хоризонталној равни. Сукцесивна тренутна стања појаве дефинисана су (в. стр. 71—72):

1° координатама x и y врха чигре у равни кретања P;

2° углом ψ који гради пројекција осовине чигре, у равни P, са осовином ox;

3° углом θ који гради осовина чигре са управном на раван P;

4° углом φ који гради пројекција осовине чигре, у равни P, са пројекцијом једнога утврђеног полупречника чигре у тој истој равни.

Ових 5 промењивих количина

$$x,\ y,\ \varphi,\ \psi,\ \theta$$

играју улоге елемената $q_1 \cdots q_5$. Узевши масу чигре као равну јединици, појави одговарају функције

$$2T = x'^2 + y'^2 + (l^2 \sin^2\theta + A)\,\theta'^2 + A\sin^2\theta\cdot\psi'^2 + \\ + c\,(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2$$

$$U = -\,gl\cos\theta$$

где су l, A, B, C, g константе, и то: l растојање између врха чигре и њенога тежишта; A, B, C главни моменти инерције око осовина ox, oy и осовине обртања чигре; g константа теже.

Моменти p_i биће, дакле,

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial x'} = x'$$

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial y'} = y'$$

$$p_3 = \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = C(\varphi' + \psi' \cos\theta)$$

$$p_4 = \frac{\partial T}{\partial \psi'} = A \sin^2\theta \cdot \psi' + C\cos\theta(\varphi' + \psi' \cos\theta)$$

$$p_5 = \frac{\partial T}{\partial \theta'} = (l^2 \sin^2\theta + A)\,\theta'$$

Функција H биће, према томе,

$$H = \frac{1}{2}\Big[p_1^2 + p_2^2 + \frac{p_5^2}{l^2 \sin^2\theta + A} + \frac{p_3^2}{C} + \\ + \frac{(p_4 - p_3 \cos\theta)^2}{A \sin^2\theta}\Big] + gl \operatorname{sos}\theta$$

тако, да је Jacobi-ева једначина појаве

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial V}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial V}{\partial y}\Big)^2 + \frac{1}{l^2 \sin^2\theta + A}\Big(\frac{\partial V}{\partial \theta}\Big)^2 + \\ + \frac{1}{C}\Big(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\Big)^2 + \frac{1}{A \sin^2\theta}\Big(\frac{\partial V}{\partial \psi} - \frac{\partial V}{\partial \varphi}\cos\theta\Big)^2\Big] + gl\cos\theta = o$$

Она има као потпун интеграл функцију

$$V = -ht + a_1 x + a_2 y + a_3 \varphi + a_4 \psi + \\ + \int \sqrt{l^2 \sin^2\theta + A}\;\sqrt{\Phi}\, d\theta$$

где је, краткоће ради, стављено да је

$$\Phi = 2\,h - 2\,gl\cos\theta - a_1{}^2 - a_2{}^2 - \frac{a_3{}^2}{c} -$$

$$- \frac{1}{A\sin^2\theta}\left(a_4 - a_3\cos\theta\right)^2$$

са пет произвољних констаната h, a_1, a_2, a_3, a_4, од којих ни једна није адитивна. Једначине

$$\frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = -t_0$$

представљају једначине појаве у коначном облику. Оне су, овде, у своме развијеном облику

$$(237) \qquad x - a_1\int\sqrt{\frac{l^2\sin^2\theta + A}{\Phi}}\,d\theta = b_1$$

$$(238) \qquad y - a_2\int\sqrt{\frac{l^2\sin^2\theta + A}{\Phi}}\,d\theta = b_2$$

$$(239) \qquad \varphi - \int\sqrt{\frac{l^2\sin^2\theta + A}{\Phi}}\left[\frac{a_3}{C} -\right.$$

$$\left. - \frac{\cos\theta}{A\sin^2\theta}\,(a_4 - a_3\cos\theta)\right]d\theta = b_3$$

$$(240) \qquad \psi - \int\sqrt{\frac{l^2\sin^2\theta + A}{\Phi}}\;\frac{a_4 - a_3\cos\theta}{A\sin^2\theta}\,d\theta = b_4$$

$$\int\sqrt{\frac{l^2\sin^2\theta + A}{\Phi}}\,d\theta = t - t_0$$

Прве четири једначине дефинишу геометриску страну појаве: низ узастопних положаја чигре при кретању.

Последња једначина одређује време, за које чигра прелази из једног у други од тих узастопних положаја.

Према ономе, што је напред казано, проблем је идентичан са проблемом одредбе геодезиских линија класе тела петога реда, која имају за линиски елеменат израз

$$ds_1^2 = [dq_1^2 + dq_2^2 + (l^2 \sin^2 q_5 + A)\, dq_5^2 + A \sin^2 q_5\, dq_4^2 + \\ + C(dq_3 + \cos q_5\, dq_4)^2]\,(2\, gl \cos q_5 + h)$$

Те су геодезиске линије дефинисане једначинама (237), (238), (239), (240), пошто се у свима смени x, y, φ, ψ, θ са q_1, q_2, q_3, q_4, q_5.

Други пример: електричне модификације у систему непокретних струја, са међусобном индукцијом и аутоиндукцијом, кад су отпори проводника занемарљиви (в. стр. 282).

Ако се стави да је

$$\frac{1}{D} \begin{vmatrix} M_{11} \cdots M_{1n}\, p_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_{n1} \cdots M_{nn}\, p_n \\ p_1 \cdots p_n\, o \end{vmatrix} = \Delta(q_1 \cdots q_n;\, p_1 \cdots p_n)$$

где је

$$D = \begin{vmatrix} M_{11} \cdots M_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ M_{n1} \cdots M_{nn} \end{vmatrix}$$

Jacobi-ева је једначина појаве

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\, \Delta\left(q_1 \cdots q_n;\, \frac{\partial V}{\partial q_1} \cdots\cdots \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = U(q_1 \cdots q_n)$$

Функција

$$V = -\, ht + W$$

где W представља интеграл једначине

$$\varDelta\left(q_1 \cdots q_n ; \frac{\partial W}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = 2\,(U + h)$$

са $n-1$ константом, биће тражени потпуни интеграл Jacobi-еве једначине.

У специјалном случају, кад су електромоторне силе

$$E_1 \cdots E_n$$

у електричним колима сталне јачине, биће

$$U = E_1\, q_1 + \cdots + E_n\, q_n$$

Проблем је идентичан са проблемом одредбе геодезиских линија класе варијетета n-тог реда, чији се линиски елеменат своди на израз облика

$$ds_1^{\,2} = (h_1\, q_1 + \cdots + h_n\, q_n)\,(dq_1^{\,2} + \cdots + dq_n^{\,2})$$

где су $h_1 \cdots h_n$ сталне количине.

Такве се геодезиске линије, према познатој Liouville-овој теореми, одређују помоћу квадратура.

Трећи пример: електричне модификације у систему двеју линеарних покретних струја, које се међусобно и саме собом индукују, кад су отпори проводника слаби, а електромоторне силе у колима сталне (в. стр. 284).

Jacobi-ева је једначина појаве (узевши механичку масу равну *1*)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + A\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)^2 + 2\,\frac{\partial V}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial V}{\partial q_2} + C\left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)^2\right] -$$

$$- E_1\, q_1 - E_2\, q_2 - \int \varphi\,(x)\, dx = o$$

и проблем је идентичан са проблемом одредбе геодезиских линија класе варијетета трећега реда, чији је линиски елеменат сводљив на облик

$$ds_1^2 = [h_1 q_1 + h_2 q_2 + F_3] [dq_1^2 + dq_2^2 + dq_3^2 + \\ + 2 \psi_3 dq_1 dq_2]$$

где су F_3 и ψ_3 функције параметра q_3 а h_1, h_2, h_3 константе.

IV. Принципи првих варијација.

Диференцијалне се једначине посматране појаве могу сматрати и као садржане у једној погодби овакве врсте: оне су потребни и довољни услови, да би прва варијација једнога одређеног интеграла, коме се за све врсте појава зна закон формације, а који зависи од састава самога механизма појаве, била равна нули за природни ток појаве. Један од таквих интеграла доводи до генералисаног Hamilton-овог принципа; други један доводи до генералисаног принципа најмање акције.

A. **Hamilton-ов принцип.**

Нека је дата каква појава са k степена слободе и са холономним системом, коме одговара $(q_1 \cdots q_k)$ као редуковани систем, тако, да елементи q_i играју улоге координата у појави.

Нека су

(241) $$(q_1 \cdots q_k)_1$$
(242) $$(q_1 \cdots q_k)_2$$

две конфигурације система у току појаве, од којих прва одговара тренутку $t = t_1$ а друга тренутку $t = t_2$. Прва ће дефинисати један положај P_1, а друга један положај P_2 фигуративне тачке M система.

У природном току појаве, под утицајем датих тежња и веза, елементи ће $q_1 \cdots q_k$ система бити одређене функције времена t, такве да се систем $(q_1 \cdots q_k)$ своди за $t = t_1$ на конфигурацију (241), а за $t = t_2$ на конфигурацију (242)

Нека су сад

$$(243) \qquad q_1 + \delta q_1,\ q_2 + \delta q_2, \cdots,\ q_k + \delta q_k$$

ма какве функције времена t, које се бескрајно мало разликују од функција $q_1 \cdots q_k$ што одговарају природном току појаве, са погодбом да се и систем (243) за $t{=}t_1$ и $t{=}t_2$ своди на (241) и (242). На тај начин варијације ће

$$\delta q_1 \cdots \delta q_k$$

бити функције времена t, са бескрајно малим вредностима, које се за $t = t_1$ и $t = t_2$ своде на нулу.

Означимо са δT модификацију, коју добија функција T, што одговара систему $(q_1 \cdots q_k)$, кад се функција q_i природног тока измени за δq_i, а са

$$Q_1 \cdots Q_k$$

компоненте примењених тежња у правцима

$$oq_1 \cdots oq_k$$

Уочимо тада интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta T + (Q_1\, \delta q_1 + \cdots + Q_k\, \delta q_k)]\, dt$$

Ако се у (244) смене $q_1 \cdots q_k$ оним функцијама времена t, што одговарају природном току појаве, интеграл ће бити раван нули, па ма какве биле варијације $\delta q_1 \cdots \delta q_k$ горе наведене врсте.

У томе се састоји генералисан *Hamilton-ов принцип* за појаве ма какве врсте са холономним системом.

Он је непосредна последица теореме рачуна варијација, према којој, водећи рачуна о томе, да је

$$\delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\,\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q_k}\,\delta q_k\right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\,\delta q_1' + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q_k'}\,\delta q_k'\right)$$

и да је поред тога

$$d\,\delta q_i = \delta\, d q_i$$

(пошто је систем холономан), да би интеграл (244) био раван нули за произвољне вредности варијација

$$\delta q_1 \cdots \delta q_k$$

потребно је и довољно да $q_1 \cdots q_k$, сматрани као функције времена t, задовољавају систем Lagrange-евих једначина

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

У случају потенцијалних појава принцип добија један још кондензованији облик и тада, означивши са $-U$ потенцијал примењених тежња, он гласи овако:

Кад су дате две конфигурације (241 и 242) у току појаве, што одговарају двама тренуцима t_1 и t_2, варијација, коју ће добити интеграл

(245) $$J = \int_{t_1}^{t_2} (T + U)\,dt$$

кад се природни ток појаве измени бескрајно мало варијацијама $\delta q_1 \cdots \delta q_k$ *горе наведене врсте, равна је нули.*

Другим речима:

Кад су дата два положаја P_1 *и* P_2 *фигуративне тачке* M, *што одговарају тренуцима* t_1 *и* t_2, *и начин* (Φ) *на који тачка, у природном току појаве, прелази из* P_1 *у* P_2, *варијација, коју ће добити интеграл* J, *кад тачка тај прелаз изврши у истоме размаку времена на ма какав други начин, бескрајно мало различан од начина* (Φ), *равна је нули.*

Природни ток појаве добија се, дакле, тражећи између свију бескрајно разноврсних функција $q_1 \cdots q_k$ оне, за које интеграл J постаје максимум или минимум. То, у осталом, не значи да за природни ток појаве J мора бити максимум или минимум. Међу тим, *кад потенцијал* $-U$ *не садржи експлицитно време* t *и кад је размак времена* (t_1, t_2) *довољно мали, за природни ток појаве интеграл ће* J *бити минимум.* То је непосредна последица једне познате теореме, која се односи на интеграле облика (245).[1]

Hamilton-ов принцип обухвата, дакле, у једноме кондензованом облику рачуна варијација, диференцијалне једначине појава свих врста са холономним системом. Hamilton-ов интеграл (244), односно (245), чији је закон формације генералан и један исти за све такве појаве, има бескрајно разноврсне облике, према појавама на које се примењује.

Први пример: при кретању слободне материјалне тачке (x, y, z), под утицајем сила чије су резултујуће компоненте у правцу координатних осовина X, Y, Z, Hamilton-ов је интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} [m\,(x'\,\delta x' + y'\,\delta y' + z'\,\delta z') + (X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)]\,dt$$

---

[1] В. н. пр. Darboux: Leçons sur la théorie générale des surfaces t. II., livres V, VI, VII, VIII.

са релацијама

$$\delta x' = \frac{d}{dt}\,\delta x$$

$$\delta y' = \frac{d}{dt}\,\delta y$$

$$\delta z' = \frac{d}{dt}\,\delta z$$

Други пример: при међусобној акцији система непокретних струја тај је интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\, \Sigma\, [M_{k1}\, i_1 + \cdots + M_{kn}\, i_n]\, \delta i_k + (E_k - R_k\, i_k)\, \delta q_k]$$

са релацијама

$$\delta i_k = \frac{d}{dt}\,\delta q_k \qquad (k = 1, 2, \cdots n)$$

Трећи пример: при међусобној акцији једне струје и једнога перманентног магнета (в. стр. 211) тај је интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d\Phi}{dx}\, i\, \delta x + m x'\, \delta x' + (Li + \Phi)\, \delta i + X\, \delta x + (E - Ri)\, \delta q\right]$$

са релацијама

$$\delta x' = \frac{d}{dt}\,\delta x$$

$$\delta i = \frac{d}{dt}\,\delta q$$

Четврти пример: при кретању једне материјалне тачке, под утицајем сила што деривирају из једног потенцијала $-U$ и једнога отпора пропорционалног брзини тачке, Hamilton-ов ће интеграл (у облику 245) бити, у ма каквом систему координата:

a) за слободно кретање тачке

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{\lambda t} \, U + \Sigma \, a_{ij} \, q_i' \, q_j') \, dt \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3 \end{pmatrix}$$

где је λ коефициенат пропорционалности отпора и брзине, a_{ij} функције параметара $q_1 \cdots q_k$, чији облик зависи од дефиниције система $(q_1 \cdots q_k)$;

b) за кретање по каквој површини

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{\lambda t} \, [U + a_{11} \, q_1'^2 + 2 \, a_{12} \, q_1' \, q_2' + a_{22} \, q_2'^2] \, dt$$

где су a_{11}, a_{12}, a_{22} функције параметара q_1, q_2 што фигуришу у линиском елементу

$$ds^2 = a_{11} \, dq_1^2 + 2 \, a_{12} \, dq_1 \, dq_2 + a_{22} \, dq_2^2$$

саме површине;

c) за кретање по каквој линији

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{\lambda t} \, (U + aq'^2) \, dt$$

где је a функција елемента q што фигурише у елементу лука

$$ds^2 = adq^2$$

саме линије.

B. **Принцип најмање акције.**

Нека је дата каква *конзервативна* појава, којој одговара редуковани систем

$$(q_1 \cdots q_k)$$

и потенцијал примењених тежња — U. Нека су

$$(q_1 \cdots q_k)_1 \tag{246}$$

$$(q_1 \cdots q_k)_2 \tag{247}$$

две конфигурације система у току појаве, које дефинишу два положаја P_1 и P_2 фигуративне тачке M система.

Кроз тачке P_1 и P_2 пролазе бескрајно много трајекторија; свака се од њих добија изразивши $q_1 \cdots q_k$ као функције једнога параметра λ

$$q_1 = f_1(\lambda) \cdots \cdots q_k = f_k(\lambda) \tag{248}$$

које се за једну одређену вредност $\lambda = \lambda_1$ своде на вредности (246), а за другу одређену вредност $\lambda = \lambda_2$ на вредности (247).

Свакој од трајекторија, што пролазе кроз P_1 и P_2, одговара по један систем функција

$$f_1 \cdots f_k$$

који је потпуно одређује. Између свих таквих бескрајно многих трајекторија, *природном трајекторијом* фигуративне тачке зваћемо ону, којом та тачка ефективно прелази од положаја P_1 на положај P_2 у природном току појаве.

Формирајмо функцију $2\,T$ за систем $(q_1 \cdots q_k)$; она ће, пошто је појава конзервативна, бити један квадратан облик

$$2\,T = \Sigma\, a_{ij}\, q_i'\, q_j' \tag{249}$$

где су коефицијенти a_{ij} функције елемената $q_1 \cdots q_k$.

Акцијом дуж једне произвољне трајекторије C, између двеју тачака P_1 и P_2 кроз које она пролази, а за *једну утврђену вредност константе h,* зваће се вредност одређеног интеграла

$$L = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \Phi(\lambda)\, d\lambda \tag{250}$$

који се добија кад се у интегралу

$$(251) \qquad N = \int \sqrt{2\,(U+h)}\,\sqrt{\Sigma\, a_{ij}\, dq_i\, dq_j}$$

смене елементи $q_1 \cdots \dot{q}_k$ оним системом функција (248) параметра λ, што одговара трајекторији C, а $dq_1 \cdots dq_k$ вредностима

$$dq_1 = f_1{}'(\lambda)\, d\lambda$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$dq_k = f_k{}'(\lambda)\, d\lambda$$

па се добијени интеграл узме у границама $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$. Генералисани принцип најмање акције тада гласи:

Између свију бескрајно многих трајекторија C, што пролазе кроз два положаја P_1 и P_2 фигуративне тачке система, природна ће трајекторија бити она, дуж које акција између P_1 и P_2, а за једну, ма коју, утврђену вредност константе h, постаје минимум.

Доказ је теореме онај исти, којим се у обичној Динамици доказује принцип најмање акције за појаве кретања[1], а тако су исто исте и рестрикције о минимуму. Теорема своди једначине појаве на кондензовани облик

$$(252) \qquad \delta N = o$$

Ова последња једначина, као што је познато у рачуну варијација, еквивалентна је систему једначина

$$(253) \qquad d\left(\frac{\sqrt{2\,U + 2\,h}}{\sqrt{2\,\Delta}}\right) - \frac{\sqrt{2\,\Delta}}{\sqrt{2\,U + 2\,h}}\,\frac{\partial V}{\partial q_i}\, d\lambda -$$
$$- \frac{\sqrt{2\,U + 2\,h}}{\sqrt{2\,\Delta}}\,\frac{\partial \Delta}{\partial q_i}\, \partial\lambda = o$$
$$(i = 1, 2, \cdots k)$$

---

[1] В. н. пр. Appell: Traité de Mécanique, 2-me edit. t. II. p. 425 etc.

где је λ један параметар, а $\varDelta$ квадратан облик

$$\varDelta = \frac{1}{2}\,\Sigma\, a_{ij}\frac{dq_i}{d\lambda}\cdot\frac{dq_j}{d\lambda} \tag{254}$$

Једначине (253), и услов да трајекторија пролази кроз P_1 и P_2, одређују функције $f_1 \cdots f_k$ из образаца (248), што карактеришу трајекторију за коју је задовољена једначина (252). Сменом, пак

$$\frac{\sqrt{2\varDelta}}{\sqrt{2(U+h)}}\, d\lambda = dt \tag{255}$$

која је еквивалентна интегралу живих сила за конзервативне појаве[1]

$$T = U + h \tag{256}$$

и показује да параметар t није ништа друго до време, једначине се (253) своде на систем Lagrange-евих једначина

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

које показују да трајекторија, дефинисана једначинама (253), одиста представља природну трајекторију.

Кад је помоћу једначина (253), положаја P_1 и P_2 фигуративне тачке и константе h, одређена једначина те трајекторије у облику (248), једначина (255) одређује параметар λ као функцију времена t. Тиме ће једначине појаве бити изражене у облику

$$q_1 = \varphi_1(t) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot q_k = \varphi_k(t)$$

чиме је и ток појаве потпуно одређен.

---

[1] в. трећи одељак, другу главу.

Израчунавање акције дуж једне трајекторије. Уочимо једну, ма коју, од трајекторија C_i што пролазе кроз положаје P_1 и P_2 фигуративне тачке, водећи рачуна о томе, да је начин кретања те тачке на њој карактерисан једначином живих сила за конзервативне појаве (256).

Та једначина, са једначином (249), показује да, кад су q_i изражени као функције времена t, акција ће дуж C_i, а између P_1 и P_2, бити

$$\int_{t_1}^{t_2} (\Sigma\, a_{ij}\, q_i'\, q_j')\, dt$$

а да, ако су q_i изражени помоћу другога каквога параметра λ, она ће бити

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\Sigma\, a_{ij} \frac{\partial q_i}{d\lambda} \frac{dq_j}{d\lambda} \right) d\lambda$$

За појаве са једним степеном слободе биће

$$2\, T = a\, q'^2$$

и релација (11), која је тада

$$aq'^2 = 2\, (U + h)$$

са једном или другом од конфигурација P_1 и P_2 потпуно одређује трајекторију C_i: природна је трајекторија једина која, пролазећи кроз P_1 и P_2, задовољава погодбу (256). Акција је тада дуж трајекторије

$$\int_{t_1}^{t_2} aq'^2\, dt$$

Она се н. пр. у појави транслаторног кретања једне материјалне тачке може написати у облику

$$\int_{s_2}^{s_1} m\, v\, ds$$

где је s пређени пут а v брзина кретања тачке.

При кретању електричне струје јачине i кроз проводну жицу, за коју би коефициенат електричног отпора био R, акција је

$$R \int_{t_1}^{t_2} i^2 \, dt$$

а овај израз, према Joule-овом закону, представља количину топлоте, која се развија у жици при пролазу струје и т. д.

У случају појава са два степена слободе биће

$$2\, T = a_{11}\, q_1'^2 + 2\, a_{12}\, q_1'\, q_2' + a_{22}\, q_2'^2$$

Ако се, тада, са P означи класа површина која има као линиски елеменат израз

$$ds^2 = b_{11}\, dq_1^2 + 2\, b_{12}\, dq_1\, dq_2 + b_{22}\, dq_2^2$$

где је

$$b_{11} = 2\,(U + h)\, a_{11}$$
$$b_{12} = 2\,(U + h)\, a_{12}$$
$$b_{22} = 2\,(U + h)\, a_{22}$$

акција постаје

$$\int_{s_1}^{s_2} ds$$

и поклапа се са луком трајекторије, која ће тада бити извесна крива линија на површини P. А пошто прва варијација тога лука треба да је равна нули за природну трајекторију, то се добија овај резултат: *акција дуж природне трајекторије, а између двају датих конфигурација P_1 и P_2, равна је дужини лука геодезиске линије површине P између њених тачака P_1 и P_2.*

У појави н. пр. кретања једне материјалне тачке у равни, под утицајем централних сила које су функције растојања, површине су P оне, чији је линиски елеменат

$$ds^2 = f(r)\, dr^2 + f(r)\, r^2\, d\theta$$

т. ј. сводљив на прост облик

$$ds^2 = d\lambda^2 + \varphi(\lambda)\, d\theta^2$$

то су, дакле, ротационе површине и израчунавање акције своди на проблем одредбе дужине лукова геодезиских линија таквих површина.

При електричним модификацијама, у систему двеју струја са међусобном индукцијом и ауто-индукцијом, површине су P оне чији је линиски елеменат

$$ds^2 = 2(E_1 q_1 + E_2 q_2 + h)(L_1 dq_1{}^2 + 2M_{12}\, dq_1\, dq_2 + L_2\, dq_2{}^2)$$

т. ј. сводљив на прост облик

$$ds^2 = (a\lambda + b\mu)(d\lambda^2 + d\mu^2)$$

где су a и b константе и т. д.

На исти се начин налази да и у општем случају појава са k елемената $q_1 \cdots q_k$, акција је дуж једне трајекторије, а кад су кинетички елементи на њој регулисани релацијом (256), равна дужини лука те трајекторије између њених двеју крајних тачака што одговарају конфигурацијама P_1 и P_2. *Акција, пак, дуж природне трајекторије равна је дужини лука геодезиске линије варијетета k-тог реда који има за линиски елеменат израз*

$$ds^2 = \Sigma\, b_{ij}\, dq_i\, dq_j$$

где је

$$b_{ij} = 2(U + h)\, a_{ij}$$

Међу тим, као што је познато из теорије геодезиских линија у полидимензионалном простору, ове су одређене Jacobi-евом парцијалном једначином

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial W}{\partial q_k};\, q_1 \cdots q_k\right) = h$$

где је H раније дефинисана функција, примењена на случај о коме је овде реч: ако је W један потпун интеграл ове једначине, са $k-1$ констананата $a_1 \cdots a_{k-1}$ осим константе h, од којих ни једна није адитивна, геодезиске ће линије поменутога варијетета k-тог реда бити у коначном облику, одређене системом једначина

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = b_1 \cdots \cdots \frac{\partial W}{\partial a_{k-1}} = b_{k-1}$$

где су $b_1 \cdots b_{k-1}$ нове константе.

Изразивши да геодезиска линија пролази кроз тачке P_1 и P_2 тела k-тог реда, и означивши са W_1 и W_2 резултате који се добијају кад се у W смене елементи q_i својим вредностима што одговарају тачкама P_1 и P_2, имаће се одузимањем систем једначина

$$\frac{\partial (W_2 - W_1)}{\partial q_1} = o \cdots \cdots \frac{\partial (W_2 - W_1)}{\partial a_{k-1}} = o$$

који одређује константе $a_1 \cdots a_{k-1}$. Претпоставимо да су тако одређене вредности тих констананата смењене у изразима W_2 и W_1. Тада се доказује овај резултат:

Акција дуж природне трајекторије, а између две конфигурације P_1 и P_2, има за вредност $W_2 - W_1$.

Јер, ако се са dW означи промена функције W, кад фигуративна тачка M у природном току појаве пређе из конфигурације

$$(q_1 \cdots q_k)$$

на конфигурацију

$$(q_1 + dq_1, \cdots q_k + dq_k)$$

биће

$$\text{(257)} \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial q_1} q_1' + \cdots + \frac{\partial W}{\partial q_k} q_k'$$

А пошто је, као што је раније показано, за природан ток појаве

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1 \cdots \cdots \frac{\partial W}{\partial q_k} = p_k$$

то једначина (257) постаје

$$(258) \qquad \frac{dW}{dt} = \Sigma\, p_i\, q_i' = \Sigma\, \frac{\partial T}{\partial q_i'}\, q_i' = 2T$$

или

$$(259) \qquad 2T\, dt = dW$$

Са друге стране, према интегралу живих сила

$$(260) \qquad T = U + h$$

израз акције се може написати у облику

$$\int_{t_1}^{t_2} 2T\, dt$$

или, према релацији (259), у облику

$$\int_{t_1}^{t_2} dW = W_2 - W_1$$

као што је и требало доказати.

Тако н. пр. у проблему електричних промена у систему двеју електричних струја које се међусобно и саме собом индукују, у случају кад су отпори проводника занемарљиви а електромоторне силе сталне, функција *W* дефинисана је Jacobi-евом једначином

$$L \left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 - 2\, M_{12}\, \frac{\partial W}{\partial q_1}\, \frac{\partial W}{\partial q_2} + L \left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 = 2\, (L_1\, L_2 - M_{12}{}^2)\; h$$

и акција у систему, за време њенога трајања, а за једну дату вредност константе *h*, добија се непосредно интеграцијом ове једначине.

Приметимо и то, да кад функција T остаје стална у току појаве [што ће према релацији (260) бити случај кад се функција U своди на једну константу. т. ј. кад се појава дешава без утицаја икаквих примењених тежња], акција се (261) своди на

$$\lambda (t_2 - t_1)$$

т. ј. на посматрани размак времена, помножен са једном константом. Према томе: *између свију трајекторија, што пролазе кроз два положаја P_1 и P_2 фигуративне тачке, дуж којих би кинетички елементи појаве били регулисани једначином (260), природна је трајекторија она, дуж које фигуративна тачка прелази за најкраће време од P_1 у P_2*. Рестрикције о минимуму су познате рестрикције у теорији геодезиских линија.

На послетку, аналитичкоме изразу акције може се дати још један облик, подесан за разна истраживања, и који је од интереса због аналогија до којих доводи.

Означимо са dS^2 квадратан облик

$$ds^2 = \Sigma\, a_{ij}\, dq_i\, dq_j$$

где су a_{ij} коефицијенти што фигуришу у изразу

$$2T = \Sigma\, a_{ij}\, q_i'\, q_j'$$

Водећи рачуна о интегралу живих сила (260), акција се може написати у облику

$$\int ds\ \sqrt{2T}$$

или

$$\int ds\ \sqrt{2(U+h)} \tag{262}$$

Тај је облик од нарочитог значаја у случајевима кад функције T и U на какав познат начин зависе само од елемената $q_1 \cdots q_k$, због значајних особина везаних, тада, за интеграле таквог облика.

Примедба о принципима првих варијација. Hamilton-ов је принцип генералнији од принципа најмање акције. Он претпоставља само холономност система и тада упоређује међу собом разне начине на које фигуративна тачка система, у опште, може прећи од једне дате конфигурације P_1 на другу дату конфигурацију P_2, у једноме датом размаку времена. Њиме је, дакле, изражена једна *кинетичка* особина појаве.

На против, принцип најмање акције претпоставља да је појава *конзервативна* и он тада упоређује међу собом разне трајекторије које пролазе кроз две дате конфигурације P_1 и P_2. Њиме је изражена једна *геометриска* особина појаве.

Нарочита важност ових принципа лежи у томе, што они, обухватајући у једноме подесном и генералном облику диференцијалне једначине појаве, јако олакшавају формирање тих једначина у случајевима, у којима би непосредно формирање једначина било скопчано са тешкоћама.

Познато је н. пр. са коликом се лакошћу решава општи проблем рефракције светлости и астрономске аберације у хетерогеним срединама, знајући да су диференцијалне једначине светлосне трајекторије обухваћене једначином

$$\int n\, ds = minimum$$

где је n индекс преламања светлости у једној, ма којој, тачки посматране средине, а

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

елеменат лука светлосне трајекторије [1]).

Осим тога, израз акције у облику (262) и израз диференцијалних једначина појаве у облику погодбе да

---

[1]) O. Bonnet: Théorie de la refraction astronomique et de l'aberation (Nouv. Ann. 1887. p. 335—368; 554—580).

је прва варијација акције дуж природне трајекторије равна нули, доводе, непосредно и на врло лак начин, до великог броја геометриских особина те трајекторије [1]).

Асимилирајући, пак, дату појаву другој каквој са особинама изохронизма или брахистохронизма трајекторије, које су особине аналитички изражене једначином облика

$$\delta \int \varphi\, ds = o$$

долази се, за читаве класе појаве свих конкретних врста, до значајних особина, геометриских и кинетичких, њихових трајекторија, које се саме собом истичу на видик кад су једначине појава дате у кондензованом облику, који је израз горњих принципа првих варијација.

Нека је, на послетку, поменуто да се из принципа најмање акције може извести целокупна теорија деформабилних линија, површина и средина, увођењем проширенога појма акције дуж деформабилне линије, на деформабилној површини и у деформабилној средини. [2]) Тако разрађена механичка теорија обухватила би се оне многобројне посебне физичке теорије за појаве, којима се суштина тражи у кретањима и деформацијама, као што су модерне оптичке, термичне, електричне, магнетне и т. д. теорије појава, схваћених на такав један механистички начин.

* * *

---

[1]) В. н. пр. Jordan: Rapport sur un Mémoire de M. Vicaire [C. R. t. 108. 1889. p. 330].

[2]) В. н. пр. E. et F. Cosserat: Théorie des corps déformables (Paris 1909); Appell: Traité de Mec. rat. t. III.

ТРЕЋИ ОДЕЉАК

Непосредне последице феноменолошких диференцијалних једначина.

ПРВА ГЛАВА.

СТАЦИОНАРНЕ ФАЗЕ ПОЈАВА.

Стационарна стања и стационарне фазе. — Асимтотна стања. — Одредба стационарних конфигурација. Слободан систем. Системи са везама. — Стабилна стационарна стања. — Стационарна стања у неколиким врстама конкретних појава. Механичка стационарна стања. Хемиска стационарна стања. Стационарни распореди стања у феноменским пољима. Хидродинамичне стационарне фазе кретања. Термични стационарни распореди при спровођењу топлоте. Стационарни распореди у електромагнетним пољима. Распореди осветлења. Моменат и центар дистрибуције стања у скаларним пољима.

I. Стационарна стања и стационарне фазе.

Појава ма које врсте, у смислу у коме је овде сматрана, може се схватити као континуалан низ бескрајно многих сукцесивних тренутних стања која се, у бескрајно малим размацима времена, нижу једно за другим. Узастопни тренутни положаји фигуративне тачке у k-димензионалноме простору илуструју тај континуалан низ тренутних стања.

Кад се ова стања, почевши од једнога одређеног тренутка $t = t_1$ међусобом изједначе и та међусобна једнакост стања траје у једноме коначном размаку времена $(t_1\ t_2)$, појава улази у једну фазу карактерисану непокретношћу фигуративне тачке. Једначине

$$q_1 = f_1(t) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot q_k = f_k(t)$$

тока њених дескриптивних елемената своде се на облик

$$(1) \qquad q_1 = a_1 \cdots\cdots q_k = a_k$$

где су $a_1 \cdots a_k$ количине независне од времена t. Дијаграми варијација тих елемената своде се на праве линије паралелне осовини ot.

Стање, дефинисано конфигурацијом (1), назива се *стационарним стањем* у појави, а конфигурација (1) *стационарном конфигурацијом*. За појаву се каже да је у размаку времена *(t_1 t_2)* у једној својој *стационарној фази*, карактерисаној величинама (1) њених дескриптивних елемената.

Каква појава, која би се састојала у променама положаја једнога система материјалних делића, или у променама геометриског облика и положаја каквога тела или система тела, била би у размаку времена *(t_1 t_2)* у *статичном стационарном стању (статичној равнотежи)* ако свака тачка система задржава у томе размаку један непроменљив положај, или кад тело, или тела што састављају систем, задржавају један исти облик и један исти положај (дескриптивни елементи су геометриски параметри што одређују положаје и облике). Такав је један систем материјалних делића у *динамичком стационарном стању (динамичкој равнотежи)* ако се у поменутом размаку времена не мењају величине кинетичких параметара $r_1 = q_1' \cdots r_k = q_k'$ што мере брзине промена геометриских параметара $q_1 \cdots q_k$ (дескриптивни су елементи $r_1 \cdots r_k$). Тако исто, једно тело, или систем тела, биће у динамичком стационарном стању ако се величине кинетичких параметара, што мере брзине кретања и геометриских деформација, не мењају у томе размаку времена.

Електричне модификације, што се састоје у променама јачина једне струје или система струја, ушле су у тренутку t_1 у своју стационарну фазу *(електрични* *перманентни режим)* ако се, почевши од тога тренутка, јачине струје више не мењају (дескриптивни елементи јачине струје). Модификације, што се састоје у променама електричних потенцијала, ушле су у тренутку t_1 у стационарну фазу *(електричну равнотежу)* ако се, почевши од тога тренутка, више не мењају електрични потенцијали (сматрани као дескриптивни елементи појаве).

Термичне модификације, карактерисане променама температуре материјалних делића или тела, ушле су у своју стационарну фазу *(термичну равнотежу)* од тренутка кад се температуре делића или тела (сматране као дескриптивни елементи) престају мењати.

Једна се хемиска реакција свршава стационарним стањем (уласком у фазу *хемиске равнотеже)* од тренутка кад се у смеши, у којој се она дешава, не врши више никаква хемиска реакција (дескриптивни елементи количине продуката реакције).

Процес поступног кондензовања каквога гаса у течност, или поступна солидификација каквога течног тела (дескриптивни елеменат количина кондензованог гаса у течност или количина счврснуте течности) ушао је у стационарну фазу од тренутка кад се кондензовани гас, или солидификована течност, више не принављају.

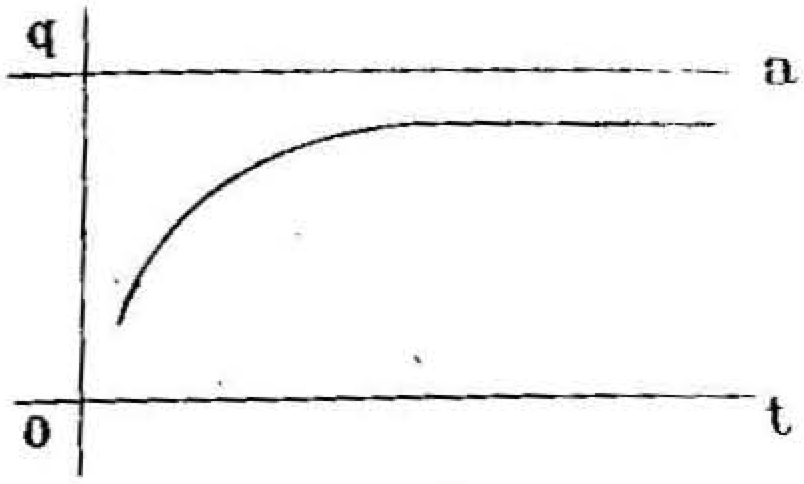
Процес дестилације једне смеше хемиских тела ушао је у своју динамичку стационарну фазу од тренутка кад се количине дестилата, сведене на јединицу времена више не мењају (дескриптивни елементи брзине дестилације појединих састојака смеше); процес је ушао у своју статичку стационарну фазу од тренутка кад се количине дестилата више не принављају (дескриптивни елементи количине дестилата). Сличан је случај и са процесом дисоцијације.

И у опште, један ма какав процес: физички, хемиски, физиолошки, биолошки, геолошки, социолошки и т. д. ушао је у једну динамичку стационарну фазу од тренутка кад интензитет процеса, мерен величинама брзина промена изабраних елемената, постане непромењив. Процес је ушао у статичку стационарну фазу од тренутка кад сами ти елементи постану непромењиви. И један и други случај карактерисани су престанком модификација у дескриптивноме систему, који је у првоме случају представљен скупом брзина промена одређених елемената q_i, а у другоме скупом величина самих тих елемената.

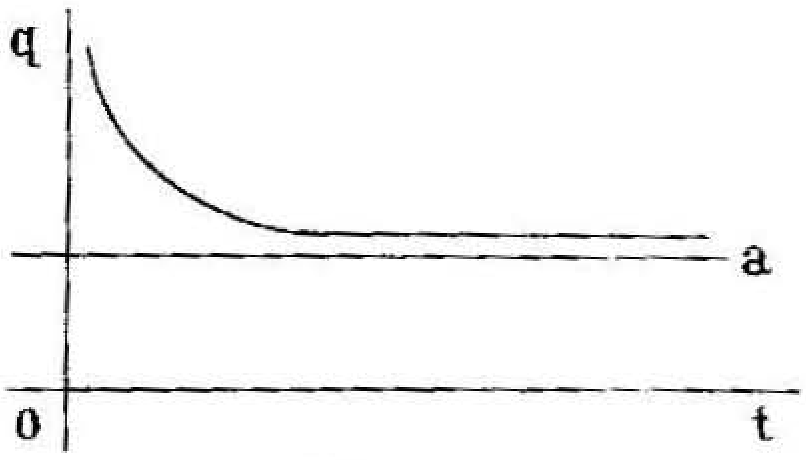
Једна нарочита врста стационарних стања јесу *асимтотна стања* појава, којима се узастопна стања (*s*), чија сукцесија саставља појаву, асимтотно приближују тако, да се стања (*s*) и такво једно асимтотно стање, по истеку једнога већег или мањег размака времена, све мање међу собом разликују. Такво је једно стационарно стање карактерисано једном утврђеном конфигурацијом система, којој се узастопне конфигурације у току појаве асимтотно приближују. Поједини елементи конфигурације система теже утврђеним вредностима, што карактеришу асимтотну конфигурацију, као својим граничним вредностима, и то или тако, да од ових остају непрестано мањи, или тако, да од њих остају непрестано већи, или, на послетку, тако, да им вредности осцилују, али све слабије у току времена, око вредности што одговарају асимтотној конфигурацији. Дијаграми варијација елемената система, у фази у којој се сукцесивна стања у појави приближују њеноме асимтотном стању, а које је представљено правом паралелном осовини *ot*, имају један од облика означених у сликама 24—28.

За појаву се каже да се *приближила своме асимтотном стању*, ако од тренутка, у коме се она од тада посматра, сваки од дијаграма варијација елемената њеног дескриптивног система има један од облика 24—28.

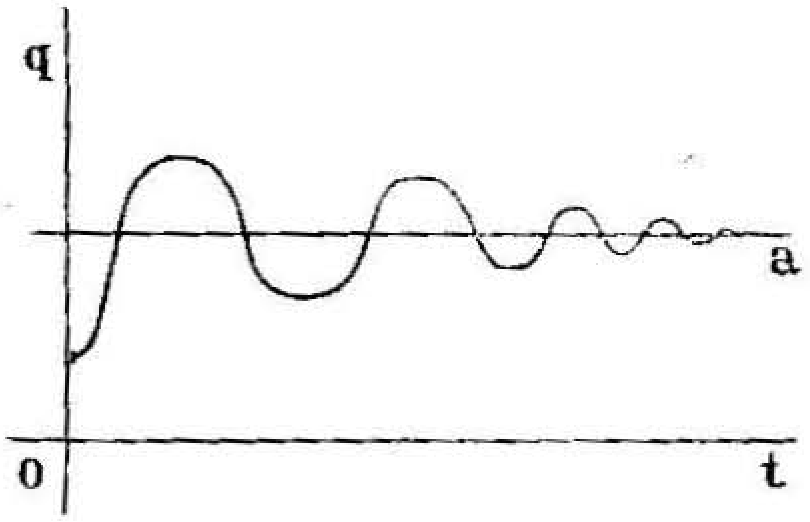
Почевши од тога тренутка, фигуративна се тачка система поступно приближује једној утврђеној тачки у k-димензионалном простору (где је **k** степен слободе система), као своме *асимтотном положају*, који је карактерисан *асимтотном конфигурацијом система*. Приближавање је све спорије у току времена, тако, да по истеку једнога, већег или мањег, размака времена, кад је фигуративна тачка веома близу положаја карактерисаног асимтотном конфигурацијом, њено кретање постаје неосетно и тачка се од тога тренутка може сматрати као непокретна. Опадање брзине приближавања асимтотноме положају такође је континуално или осцилаторно, као што је и облик саме трајекторије фигуративне тачке у близини таквога положаја.



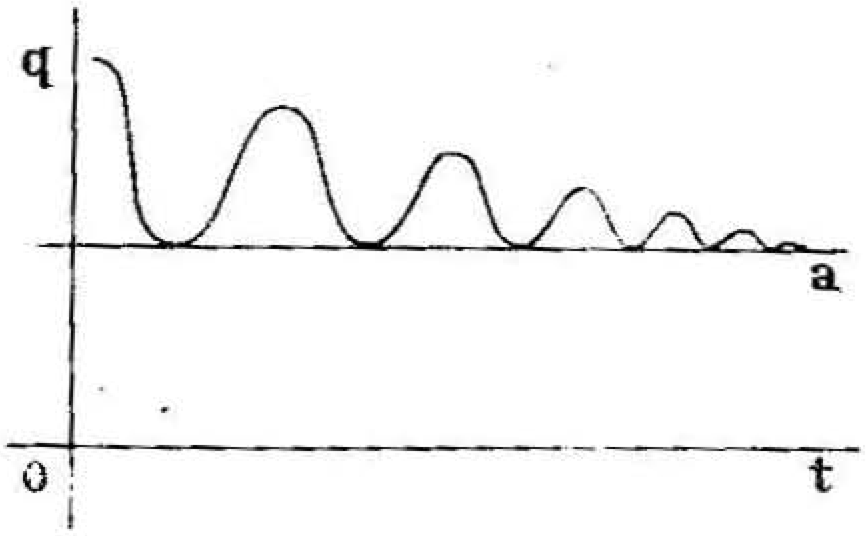
Сл. 24.



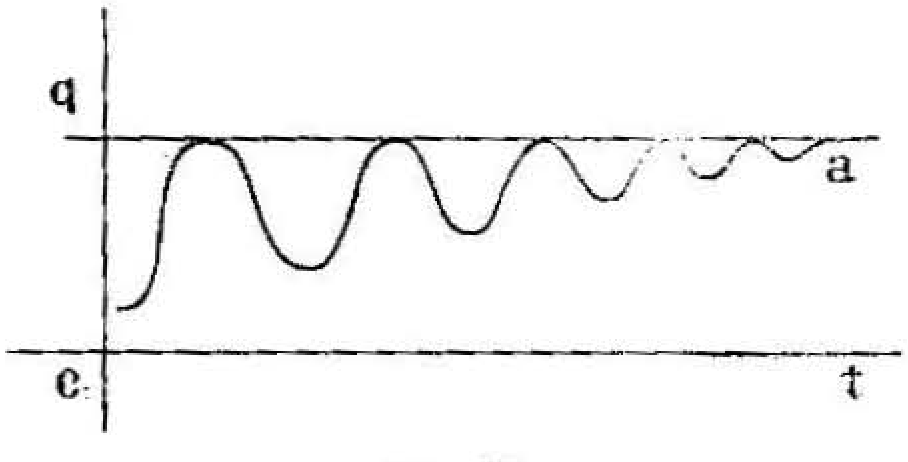
Сл. 25.



Сл. 26.



Сл. 27.



Сл. 28.

При постепеној трансформацији каквога хемиског тела, у једној мономолекуларној хемиској реакцији, трансформисана количина q тела, од почетка реакције до уоченог тренутка t, мења се континуално, растући све слабије у току реакције и приближујући се, као својој асимтотној вредности, првобитној количини a тога тела. Конфигурација $q = a$ дефинише асимтотно стање појаве, а начин приближавања томе стању је онај представљен дијаграмом (24).

Гвоздена шипка, магнетишући се под утицајем каквога магнетног поља, издужује се постепено у току времена. Дужина шипке, повећавајући се, тежи асимтотно једној финалној вредности, са којом се осетно поклапа по истеку једнога размака времена и коју никако не прелази: та вредност дефинише асимтотно стање појаве магнетне дилатације. Начин приближавања томе стању представљен је дијаграмом (24).

У појави дифракције паралелне светлости, описаној на стр. 76, јачина осветлења i отвора опада осцилаторно у току времена, и то врло нагло, на начин представљен дијаграмом (24), тежећи нагло своме асимтотном стању, дефинисаном јачином $i = o$ осветлења.

Својом акцијом на сребрну сô на фотографској плочи, светлост је редукује и ослобођено сребро чини да плоча у току времена постаје све црња. То је појачавање осцилаторно: оно у почетку донекле расте, затим у нешколико опадне, опет почне расти и т. д. Осцилације су све слабије и представљене су дијаграмом (26), тако, да по истеку једнога врло кратког размака времена црнило добије једну од тада непроменљиву јачину, која дефинише асимтотно стање појаве.

При осцилаторном испражњавању електричних кондензатора (дескриптиван елеменат јачина струје или количина дебитираног електрицитета) појава се, после врло кратког времена од свога почетка, нагло приближује своме асимтотном стању, на начин представљен дијаграмом (26). Исти је дијаграм и за поступно слабљење осцилација клатна у средини што даје отпора кретању, или за амортизирано вибрисање дијапазона (дескриптивни елеменат брзина осцилација или сама елонгација).

II. Одредба стационарних конфигурација.

Карактеристична одлика једнога стационарног стања у каквој појави, ма које врсте, та је, да су у таквоме једном стању инерције свих дескриптивних елемената појаве сведене на нулу.

Слободан систем. За просту појаву, у којој је X скуп тежња примењених непосредно на објекат v, као дескриптивни елеменат појаве, инерција ће бити равна нули, кад је $X = o$.

За комплексну појаву са слободним примарним системом

$$(v_1 \cdots v_n)$$

на који су непосредно примењене тежње

$$X_1 \cdots X_n$$

инерције ће бити равне нули за ону конфигурацију $v_1 \cdots v_n$, за коју је

$$X_1 = o \cdots X_n = o \tag{263}$$

Те се погодбе могу написати, по вољи, у једној или другој једначини

$$X_1 \, \delta v_1 + \cdots + X_n \, \delta v_n = o \tag{264}$$

или

$$X_1 \, \delta \eta_1 + \cdots + X_n \, \delta \eta_n = o \tag{265}$$

где су η_i тоталитети елемената v_i.

Једначина (265) изражава принцип виртуелних радова примењених тежња: тај је рад раван нули за све виртуелне модификације секундарног система.

Ако је, на место примарног система, узет један систем

$$q_1 \cdots q_n$$

такав да је

$$(266) \qquad \begin{aligned} \delta v_1 &= \alpha_{11}\, \delta q_1 + \cdots + \alpha_{1n}\, \delta q_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta v_n &= \alpha_{n1}\, \delta q_1 + \cdots + \alpha_{nn}\, \delta q_n \end{aligned}$$

једначина (263) постаје

$$(267) \qquad (P_1 - Q_1)\, \delta q_1 + \cdots + (P_n - Q_n)\, \delta q_n = o$$

где је

$$(268) \qquad \begin{aligned} P_i &= \alpha_{1i}\, V_1 + \cdots + \alpha_{ni}\, V_n \\ Q_i &= \alpha_{1i}\, X_1 + \cdots + \alpha_{ni}\, X_n \end{aligned}$$

а пошто је

$$V_1 = o \cdots V_n = o$$

то је и

$$P_1 = o \cdots P_n = o$$

па, дакле, се једначина своди на

$$(269) \qquad Q_1\, \delta q_1 + \cdots + Q_n\, \delta q_n = o$$

и пошто она мора постојати за произвољне варијације $\delta q_1 \cdots \delta q_n$, то мора бити

$$Q_1 = o \cdots Q_k = o$$

Исти се резултат добија и кад се, па место примарног система (v_i), узме такав један систем (q_i) да је

$$(270) \qquad \begin{aligned} \delta \eta_1 &= \beta_{11}\, \delta q_1 + \cdots + \beta_{1n}\, \delta q_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta \eta_n &= \beta_{n1}\, \delta q_1 + \cdots + \beta_{nn}\, \delta q_n \end{aligned}$$

Једначина се (264), тада, своди на

(271 $$Q_1\,\delta\eta_1 + \cdots + Q_n\,\delta\eta_n = o$$

и изражава принцип виртуелних радова у систему (q_i).

Системи са везама. Примарни систем

$$(v_1 \cdots v_n)$$

са m веза, било прве било друге врсте, и непосредно примењеним тежњама

$$X_1 \cdots X_n$$

понаша се, при својим модификацијама, као слободан систем, пошто се свакој тежњи X_i придода одговарајућа компонента Φ_i реакција веза. Стационарна су стања, према томе, карактерисана фактом да је у тренутку, кад појава уђе у такво једно стање,

(272) $$\begin{aligned} X_1 + \Phi_1 &= o \\ &\cdots\cdots \\ X_n + \Phi_n &= o \end{aligned}$$

Међу тим, последњих $m = n - k$ једначина (272) своде се на идентичности, према самој дефиницији компонената Φ_i, тако, да се стационарно стање има сматрати као карактерисано скупом од k једначина

(273) $$X_1 + \Phi_1 = o$$

$$\cdots\cdots$$

(274) $$X_k + \Phi_k = o$$

и m једначина веза.

Ако се, на место примарног система (v_i), уведе редуковани систем (q_i), дефинисан једначинама веза прве врсте

$$\begin{aligned} \delta v_1 &= \alpha_{11}\,\delta q_1 + \cdots + \alpha_{1k}\,\delta q_k \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \delta v_n &= \alpha_{n1}\,\delta q_1 + \cdots + \alpha_{nk}\,\delta q_k \end{aligned}$$

за све трајање појаве биће

$$(275) \qquad (P_1 - Q_1)\,\delta q_1 + \cdots + (P_k - Q_k)\,\delta q_k = o$$

где је

$$P_i = \alpha_{1i} V_1 + \cdots + \alpha_{ki} V_k$$

$$Q_i = \alpha_{1i} X_1 + \cdots + \alpha_{ki} X_k$$

Пошто су у стационарноме стању све инерције V_i равне нули, то је и

$$P_1 = o \cdots P_k = o$$

према чему се једначина (12) своди на

$$(276) \qquad Q_1\,\delta q_1 + \cdots + Q_k\,\delta q_k = o$$

и пошто ова једначина треба да буде задовољена за произвољне варијације $\delta q_1 \cdots \delta q_k$, то је стационарно стање дефинисано скупом једначина

$$(277) \qquad Q_1 = o \cdots Q_k = o$$

Ако се, на место примарног система (v_i), уведе редуковани систем, дефинисан једначинама веза друге врсте, једначина је (276) смењена једначином

$$Q_1\,\delta\eta_1 + \cdots + Q_k\,\delta\eta_k = o$$

која изражава принцип виртуелних радова при модификацијама секундарног система (η_i) и доводи опет до k једначина (277), којима ће бити карактерисано стационарно стање у појави.

Као што се, дакле, види: *свако стационарно стање карактерисано је тиме што су, у тренутку кад појава улази у такво једно стање, компоненте примењених тежња, у правцима елемената редукованог система, све равне нули.*

У случају кад је систем слободан, или за везама друге врсте, *једначине, што карактеришу стационарна стања, добијају се образујући израз виртуелног рада примењених тежња на елементе редукованог система и изразивши да је он раван нули за све остварљиве виртуелне модификације система.*

Ако је тако добијени систем једначина немогућан, у појави не постоји стационарних стања. Ако је он могућан за одређене вредности елемената q_i а за све вредности t у једноме коначном или бескрајно великом размаку времена, такве вредности q_i дефинишу једну од стационарних конфигурација система. Ако је такав систем једначина могућан само за подесно изабране вредности елемената q_i као функције одређених параметара $\alpha_1 \cdots \alpha_m$, такве вредности тада дефинишу један *стационарни распоред* конфигурација система (q_i) у m-димензионалноме простору $\alpha_1 \cdots \alpha_m$.

У случају *конзервативних појава* са потенцијалом $- U$, једначине што дефинишу стационарно стање јесу

$$(278) \qquad \frac{\partial U}{\partial q_1} = o \cdots \cdots \frac{\partial U}{\partial q_k} = o$$

које су обухваћене једначином

$$\delta U = o$$

Стационарна су, дакле, стања она, за која прва варијација потенцијала постаје равна нули за ма какву остварљиву модификацију система.

Једначине (278) представљају, у исто време, потребне, али не и довољне услове да би потенцијал $- U$ био максимум или минимум.

Као што се, дакле, види, кад примењене тежње не зависе експлицитно од времена t, нити од брзина варијација дескриптивних елемената појаве на које су непосредно примењене, нити од вредности самих тих елемената, или њихових извода, али што одговарају једном тренутку различном од онога у коме узрок, за који је тежња везана, врши своју акцију, проблем одредбе стационарних конфигурација у појави своди се:

1° или на решавање обичних, алгебарских или трансцендентних једначина (случај кад примењене тежње зависе само од конфигурације система, т. ј. од положаја фигуративне тачке система);

2° или на интеграцију обичних или парцијалних диференцијалних једначина, које не садрже експлицитно време t, ни изводе елемената система по времену (случај кад примењене тежње зависе од величине извода елемената система по једноме или више параметара, независних од времена).

У случајевима кад те тежње не задовољавају горње погодбе, једина могућна стационарна стања јесу асимтотна стања у појави.

III. Стабилна стационарна стања.

За једно се стационарно стање S каже да је *стабилно*, ако, придавши, акцијом какве нове тежње X одговарајућој стационарној конфигурацији система, једну ма коју од могућних бескрајно малих и бескрајно спорих модификација, и уклонивши затим тежњу X, појава се, ма колико се она продужила, налази у једној фази која се бескрајно мало разликује од стања S, т. ј. у којој се фигуративна тачка појаве налази непрестано у бескрајној близини тачке што одговара стању S.

За таква стања може се доказати овај резултат:

Кад год је у једноме стационарном стању једне конзервативне појаве потенцијал минимум, такво је стање стабилно.

Пре свега, очевидно је да се увек може претпоставити да су вредности елемената q_i које дефинишу стање S

(279) $$q_1 = o \cdots\cdots q_k = o$$

и да је функција U равна нули за то стање, пошто у њој фигурише једна адитивна константа. Стабилност тога стања S карактерисана је, тада, овим аналитичким фактом: нека је ε један, у напред дати, колико се хоће мали број; кад је појава у стабилном стационарном стању, у коме елементи $q_1 \cdots q_k$ имају вредности (279) увек постоји такав један, позитиван, колико се хоће мали број, да ако су, изменивши за врло мало стање S, вредности елемената $q_1 \cdots q_k$ и брзине њихових промена у једном тренутку мање, по апсолутној вредности, од броја η, вредности ће $q_1 \cdots q_k$ за све време трајања појаве бити по апсолутној вредности мање од ε.

Претпоставимо да је функција U максимум и равна нули за вредности (279). Тада је увек могућно наћи такав један позитиван, колико се хоће мали број ε, да за ма какав систем вредности $q_1 \cdots q_k$, које се буду налазиле између $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$, или буду једнаке са овим граничним вредностима, функција U буде непрестано негативна, осим за сам систем вредности (279) за који је она равна нули. Дајмо, тада, једноме од елемената q_i н. пр. елементу q_h, граничне вредности $\pm\varepsilon$, а осталим елементима

(280) $$q_1, q_2, \cdots q_{h-1}, q_{h+1}, \cdots q_k$$

ма какав систем вредности које се налазе између $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$, и од којих се неке могу и поклапати са овим граничним вредностима. Нека је $-P_h$ највећа вредност функције U за разне такве системе вредности елемената q_i; број ће P_h тада бити позитиван и различан од нуле, јер пошто је $q_h = \pm\varepsilon$, функција U не може бити равна нули за све могућне системе вредности елемената (280) које се налазе између означених граница. Узимајући узастопце да је $h = 1, 2, \cdots k$, добија се низ позитивних бројева $P_1 \cdots P_k$, и ако се са P означи најмањи међу њима, биће очевидно

$$U \leqslant -P$$

т. ј.

$$U + P \leqslant o$$

кад год један од елемената q_i достигне једну од граничних вредности $\pm \varepsilon$, а остали буду имали ма какве вредности између тих граница или једнаке са овима.

Изведимо, сад, појаву из стања S, придавши елементима q_i систем вредности

$$q_1^0 \cdots q_k^0$$

које се налазе између $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$ и саопштивши им брзине промена

$$q_1'^0 \cdots q_k'^0$$

У појави која ће тада наступити, биће, према теореми живих сила за конзервативне појаве

$$T - U = T_0 - U_0 \tag{281}$$

где је T кинетичка енергија појаве, неминовно позитивна, па ма какве биле вредности

$$q_i, q_i', q_i^0, q_i'^0$$

Пошто је вредност U_0 негативна, вредност ће $T_0 - U_0$ бити позитивна. Она се може учинити колико се хоће малом, јер је то континуална функција почетних вредности q_i^0 и $q_i'^0$ и равна нули кад су све те вредности равне нули. Према томе, може се наћи један број η, мањи од ε и довољно мали да би за све вредности q_i^0 и $q_i'^0$ мање по апсолутној вредности од η било

$$T_0 - U_0 < P$$

Из једначине живих сила (281) тада се добија

$$T < U + P \tag{282}$$

Из тога се, сад, лако закључује да, ако почетне вредности елемената q_i леже између $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$, ни један од тих елемената не може достићи граничну вредност $-\varepsilon$ или $+\varepsilon$ за време трајања појаве, па ма колико се ова продужила. Јер кад би то био случај, чим би један, ма који од тих елемената, достигао једну од ових граничних вредности, израз би $U + P$ постао негативан и онда би, према неједначини (282) то био случај и са кинетичном енергијом T, што је у опште немогућно и што доказује горњи резултат.

Приметимо само да тај резултат не важи кад један или више елемената $q_1 \cdots q_k$ не фигуришу у изразу U, јер тада ти елементи могу у току појаве добити и какве се хоће коначне вредности, па да израз $P + U$, који је независан од тих елемената, не буде негативан. Такав је н. пр. случај при кретању једног ротационог тела обешеног о једну тачку O своје осовине симетрије: функција је U облика

$$U = H \cos \theta$$

где је H стална количина а θ угао осовине симетрије и вертикале; појава се међу тим састоји, поред мењања угла θ, још и у променама остала два Euler-ова угла φ и ψ, који не улазе у израз за U. Функција је U максимум за $\theta = \pi$, али једно стационарно стање, које одговара тој вредности елемента θ, није стабилно, пошто, саопштивши телу, у таквоме једном стању, ротацију око вертикале, имаће се једно кретање у коме се углови φ и ψ могу удаљити колико се хоће од вредности што одговарају првобитном стационарном стању.

IV. Стационарна стања у неколиким врстама конкретних појава.

А. Механичка стационарна стања.

1° При слободном кретању материјалне тачке улоге компонената примењених тежња играју пројекције X, Y, Z примењених сила на осовинама Ox, Oy, Oz.

Кад би н. пр, тачка била привлачена од n центара, пропорционално одстојању и масама центара, било би

$$\begin{aligned} X &= \lambda \Sigma m_k (a_k - x) \\ Y &= \lambda \Sigma m_k (b_k - y) \\ Z &= \lambda \Sigma m_k (c_k - z) \end{aligned}$$

где су a_k, b_k, c_k координате k-тог атрактивног центра, x, y, z координате покретне тачке, m_k маса центра а λ коефициенат пропорционалности атрактивне силе одстојању. Стационарно је стање дефинисано вредностима координата

$$x = \frac{\Sigma m_k a_k}{\Sigma m_k} \qquad y = \frac{\Sigma m_k b_k}{\Sigma m_k} \qquad z = \frac{\Sigma m_k c_k}{\Sigma m_k}$$

што показује да оно наступа само онда, кад је тачка у тежишту G система атрактивних центара.

Компоненте X, Y и Z деривирају из потенцијала

$$- U = \frac{\lambda}{2\mu}\Big[\Sigma m_k (a_k - x)\Big]^2 + \frac{\lambda}{2\mu}\Big[\Sigma m_k (b_k - y)\Big]^2 + \\ + \frac{\lambda}{2\mu}\Big[\Sigma m_k (c_k - z)\Big]^2$$

где је

$$\mu = \Sigma m_k$$

Ова је функција равна нули у тежишту G, позитивна у свима осталим тачкама; она је дакле минимум у тачки G, што показује да је стационарно стање стабилно.

2° При кретању тачке по површини

$$x = \varphi (q_1, q_2)$$

$$y = \psi (q_1, q_2)$$

$$z = \theta (q_1, q_2)$$

улоге компонената играју тежње дефинисане изразима

$$Q_1 = X \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + Y \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + Z \frac{\partial \theta}{\partial q_1}$$

$$Q_2 = X \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + Y \frac{\partial \psi}{\partial q_2} + Z \frac{\partial \theta}{\partial q_2}$$

где су X, Y, Z непосредно примењене активне силе. Стационарна су стања дефинисана једначинама

$$Q_1 = o \qquad Q_2 = o$$

3° При кретању тачке по линији

$$x = \varphi (q)$$

$$y = \psi (q)$$

$$z = \theta (q)$$

компонента је Q дата изразом

$$Q = X \frac{\partial \varphi}{\partial q} + Y \frac{\partial \psi}{\partial q} + Z \frac{\partial \theta}{\partial q}$$

и стационарно је стање дефинисано једначином

$$Q = o$$

4° При слободном кретању једнога чврстог тела, које се састоји из транслације и ротације, изразивши да су компоненте сила при транслацији равне нули, добијају се три једначине

$$X = o \qquad Y = o \qquad Z = o$$

где су X, Y, Z компоненте примењених спољних сила; а изразивши да су компоненте сила при ротацији равне нули, добијају се још три једначине

$$L = o \qquad M = o \qquad N = o$$

где су L, M и N моменти непосредно примењених сила према координатним осовинама.

5° При кретању једнога, ма каквог, система материјалних тачака стационарно ће стање бити оно, у коме су збирови пројекција спољних сила на координатним осовинама, као и збирови момената тих сила према осовинама, сви равни нули.

6° При кретању чврстог тела око једне утврђене тачке O стационарно ће стање бити оно, у коме су збирови пројекција примењених сила и реакције тачке O на координатним осовинама равне нули, као и збирови момената тих сила према осовинама.

7° При кретању чврстог тела око једне утврђене осовине OL стационарно је стање оно, у коме је збир момената примењених сила према осовини OL раван нули.

В. Хемиска стационарна стања.

Једна хемиска реакција улази у једну *хемиску стационарну фазу* од тренутка кад се у смеши, у којој се она дешавала, не врши више никаква реакција. Такво једно стационарно стање наступа:

1° или кад се један од реагенаса, поступним трошењем у току реакције, исцрпе, тако да реакција траје све дотле, док нестанком таквога реагенса не постане хемиски немогућна (случај *неограничених реакција*)

2° или кад се у току реакције нађе на стање које је заједничка граница посматране и њој инверсне реакције: такво је стање тада стационарно (случај *ограничених реакција*).

Случај неограничених реакција. Стање 1° има се сматрати као *асимтотно стање* реакције: брзина ове опада у мери у којој поступно нестаје једнога од реагенаса: она, упоредо са концентрацијом смеше по томе реагенсу, асимтотно тежи нули, а количине продуката реакције при томе теже одређеним финалним вредностима што карактеришу завршно, асимтотно стање у реакцији. Компоненте трансформаторске тежње (што резултира из комплекса хемиских сила), која поступно слаби и тежи нули кад поступно нестаје једнога од реагенаса, све су у таквоме једном стању равне нули. Реакција се, у осталом, каткад и врло нагло приближује своме асимтотном стању, тако да се по истеку врло кратког размака времена њена узастопна тренутна стања више не разликују осетно од тога асимтотног стања: такав је н. пр. случај при сједињавању хлора и водоника, изложених акцији светлости.

Нека је дата каква хомогена n-молекуларна реакција са реагенсима

$$A_1, A_2, A_3, \dots$$

и продуктима реакције

$$B_1, B_2, B_3, \dots$$

дефинисана хемиском једначином

$$n_1 A_1 + n_2 A_2 + \cdots\cdots = m_1 B_1 + m_2 B_2 + \cdots\cdots$$

где су n_i и m_i одређени цели и позитивни бројеви.

Према основном закону Хемиске Кинетике трансформаторске тежње $X_1, X_2, \cdots X_n$ (све антагонистичне, непосредно примењене на концентрације

$$C_1, C_2, \cdots C_n \tag{283}$$

смеше по реагенсима, пропорционалне су, у сваком тренутку свима концентрацијама (283), тако, да су промене ових регулисане системом једначина

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} &= -k_1 C_1 C_2 \cdots C_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dC_n}{dt} &= -k_n C_1 C_2 \cdots C_n \end{aligned} \tag{284}$$

Из ових је једначина

$$\begin{aligned} \frac{dC_2}{dt} &= \lambda_2 \frac{dC_1}{dt} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dC_n}{dt} &= \lambda_n \frac{dC_1}{dt} \end{aligned}$$

где је

$$\lambda_i = \frac{k_i}{k_1}$$

према чему је

$$\begin{aligned} C_2 &= \lambda_2 C_1 + \mu_2 \\ C_3 &= \lambda_3 C_1 + \mu_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_n &= \lambda_n C_1 + \mu_n \end{aligned} \tag{285}$$

где су μ_i позитивне константе, одређене почетном конфигурацијом $(C_1 \cdots C_n)$.

Ако се за C_1 узме конфигурација онога од реагенаса A_{i_1} кога нестаје на завршетку реакције (или једнога од њих, ако их има више), асимтотно је стационарно стање реакције дефинисано конфигурацијом

$$(286) \qquad (C_1 = o, C_2 = \mu_2, \cdots C_n = \mu_n)$$

Начин, на који се реакција у току времена поступно приближује томе стању, изражен је једначином

$$C_1 = \varphi(t)$$

где је $\varphi(t)$ инверзија интеграла

$$(287) \qquad t = -\frac{1}{k_1}\int_{C_1}^{o}\frac{dC}{P(C)} = \frac{1}{k_1}\int_{0}^{C_1}\frac{dx}{P(x)}$$

и где $P(x)$ означује полином n-тог степена

$$(288) \qquad P(x) = x(\lambda_2 x + \mu_2)(\lambda_3 x + \mu_3)\cdots(\lambda_n x + \mu_n)$$

Ако је q параметар, који у свакоме тренутку одређује стање концентрација према једначинама веза прве врсте (285), (елеменат редукованог система), тако да је

$$(289) \qquad \begin{array}{c} C_1 = \alpha_1 q + \beta_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_n = \alpha_n q + \beta_n \end{array}$$

где су α_i и β_i одређене константе које зависе од избора елемента q, начин приближавања реакције асимтотном стационарном стању дефинисан је једначином

$$q = \theta(t)$$

где је $\theta(t)$ инверсија извесног интеграла

$$t = \int_{q_0}^{a} \frac{dq}{Q(q)}$$

у коме $Q(q)$ означује одређен полином n-тог степена по q, са свима својим коренима реалним. Асимтотно је стање реакције дефинисано вредношћу

$$q = -\frac{\beta_1}{\alpha_1}$$

која је у исто време и један од корена једначине

$$Q(q) = o$$

У специјалном случају, кад су реагенси измешани у својим еквивалентним количинама, тако да у свакоме тренутку постоји једна иста пропорционалност концентрација, биће

$$\mu_2 = \mu_3 = \cdots = \mu_n = o$$

тако, да се полиноми P и Q своде на облике

$$P(x) = ax^n$$
$$Q(q) = b(\alpha + \beta q)^n$$

где су a, b, α и β константе за дату реакцију.

У случају *мономолекуларних реакција* приближавање асимтотном стању бива по експоненцијалном закону облика

$$C = C_0\, e^{-kt}$$

где је C концентрација смеше по реагенсу који се трансформише. Такав је н. пр. случај у реакцији

$$A_s H_s = A_s + 3H$$

у којој константа k има, на обичној температури и обичном притиску, вредност

$$k = 0,0906$$

Ако се, на место елемента C примарног система, уведе елеменат q што представља притисак гаса израженог у милиметрима, биће

$$C = C_0 \left(3 - \frac{2q}{q_0}\right)$$

где је q_0 притисак гаса у почетку реакције; асимтотно је стање, тада, дефинисано вредношћу

$$q = \frac{3}{2} q_0$$

елемента q. Начин приближавања томе стању изражен је једначином

$$q = \frac{1}{2} q_0 (3 - e^{-kt})$$

и у сагласности је са овом експерименталном таблицом[1]).

ВРЕМЕ У ЧАСОВИМА t	ПРИТИСАК У mm. q	НАЂЕНА ВРЕДНОСТ k
0	784,84	—
3	878,50	0,09076
4	904,05	0,09051
5	928,02	0,09079
6	949,28	0,09051
7	969,08	0,09056
8	987,19	0,09060

---

[1]) E. Cohen: Studien zur Chem. Dynamik, Amsterdam 1896. S. 2.

У случају *бимолекуларних* реакција приближавање асимтотном стању бива по закону облика

$$C = \frac{\lambda\, C_0\, e^{-ht}}{\lambda - C_0\, e^{-ht}}$$

где су λ и h позитивне константе. Такав је н. пр. случај у реакцији

$$C_2\,H_5\,OOC_2\,H_3 + Na\,OH = CH_3\,COO\,Na + C_2\,H_5\,OH$$

Између елемената примарног система C_1 и C_2 постоји веза, исказана једном линеарном релацијом између тих елемената. За елеменат редукованог система може се узети елеменат q што мери јачину базицитета смеше према утрошеној тежини н. пр. сумпорне киселине, којом се, тога ради, неутралише заостала количина $NaOH$ једнога одређеног и измереног дела смеше. Асимтотно стање реакције дефинисано је, тада, вредношћу

$$q = q_{\infty}$$

параметра q, где q_{∞} означује тежину сумпорне киселине, потребну за неутралисање преостале количине натријум-хлорида, кад реакција буде потпуно довршена. У једноме таквом експерименту, у коме је било

$$q_{\infty} = 14{,}92$$

(у јединицама мере изабране при титрисању смеше), реакција се поступно приближавала своме асимтотном стању на начин који се огледа у овој таблици и који је у сагласности са горњим једначинама [1]).

---

[1]) E. Cohen: loc. cit. S. 9.

ВРЕМЕ У МИНУТАМА t	БАЗИЦИТЕТ СМЕШЕ ОДРЕЂЕН ТИТРИСАЊЕМ q
0	61,95
4,89	50,59
11,36	42,40
29,18	29,35
∼	14,92

Ако су етар и натријум-хлорид измешани у еквивалентним количинама, тако да постоји међусобна пропорционалност концентрација у току реакције, једначине се обе своде на једну

$$\frac{dC}{dt} = kC^2$$

где је C н. пр. концентрација смеше по $Na\,OH$, а k одређена позитивна константа. Реакција се своме асимтотном стању приближује по закону облика

$$C = \frac{1}{a + bt}$$

где су a и b константе дате реакције.

Случај ограничених реакција. То су случајеви у којима се, према релативним величинама концентрација смеше по реагенсима, мења смисао реакције, тако, да се за један скуп концентрација н. пр.

$$C_1\, C_2 \cdots C_n \tag{290}$$

има реакција једног одређеног смисла, а за други један скуп

$$C_1'\, C_2' \cdots C_n' \tag{291}$$

инверсна реакција, супротног смисла. При поступном прелазу од скупа (290) на скуп (291), а у одређеним физичким приликама, наилази се на један интермедијерни скуп

$$c_1 c_2 \cdots c_n$$

који дефинише *гранично стање* између реакције што одговара скупу концентрација (290) и њој инверсне реакције што одговара скупу (291). Такво једно гранично стање има се сматрати као *стационарно стање* реакције, у смислу који се овде има у виду.

Уочимо једну хомогену n-молекуларну реакцију, регулисану системом диференцијалних једначина (284), које се, према везама што постоје у примарном систему $C_1 C_2 \cdots C_n$ могу кондензовати у једначину

$$\frac{dC_1}{dt} = - k_1 C_1 \cdots C_n \tag{292}$$

и систем једначина (285).

Тако исто, означивши са

$$D_1 \cdots D_m$$

концентрације смеше по продуктима реакције, инверсна реакција биће регулисана диференцијалном једначином

$$\frac{dD_1}{dt} = - h D_1 \cdots D_m \tag{293}$$

и системом линеарних једначина аналогих систему (285).

Кад су реагенси измешани у својим еквивалентним количинама, тако да је у једначинама (285)

$$\mu_2 = \mu_3 = \cdots = \mu_n = o$$

једначина (20) постаје

$$\frac{dC_1}{dt} = - k_1 C_1^n \tag{294}$$

а једначина (293)

$$(295) \qquad \frac{dD_1}{dt} = - h_1 D_1^m$$

Пошто је поменуто стационарно стање карактерисано фактом, да се у њему брзине промена концентрација C_1 и D_1, које су једна према другој инверсне, међу собом изједначују, у томе је стању

$$\frac{dC_1}{dt} = \frac{dD_1}{dt}$$

и према томе

$$k_1 C_1^n = h_1 D_1^m$$

тако да је стационарно стање те врсте дефинисано релацијом

$$\frac{C_1^n}{D_1^m} = \frac{h_1}{k_1} = const$$

између концентрација C_1 и D_1.

Такав је н. пр. случај у ограниченој реакцији

$$N_2 O_4 \rightleftarrows 2N O_2$$

у којој је стационарно стање карактерисано релацијом

$$\frac{C}{D^2} = \frac{h}{k}$$

где је C концентрација смеше по $N_2 O_4$ а D концентрација по NO_2; или у ограниченој реакцији

$$CH_3 COOH + C_2 H_5 OH \rightleftarrows CH_3 COOC_2 H_5 + H_2 O$$

за коју експерименти Berthelot-а и Péan de St. Gilles-а дају за вредност константе

$$\frac{C_1}{D^2} = \frac{h_1}{k_1} = 0,25$$

или у ограниченој реакцији

$$C_6H_5COOH + C_2H_5OH \rightleftarrows C_6H_5COOC_2H_5 + H_2O$$

у које се стационарно стање на температури од 200° јавља у тренутку кад количина продукованог етра бензолне киселине буде равна 0,664 пута оној количини истога тела, која би се имала на завршетку реакције, у случају кад би ова била неограничена; или у ограниченој реакцији

$$Sr(CH_2COO)_2 + 2KNO_3 \rightleftarrows 2CN_2COOK + Sr(NO_3)_2$$

где је стационарно стање, на обичној температури, дефинисано конфигурацијом

$$q_1 = 0{,}667 \qquad q_2 = 1{,}333$$
$$q_3 = 0{,}333 \qquad q_4 = 0{,}667$$

где су q_1, q_2, q_3 и q_4 количине калијум-ацетата, калијум нитрата, стронцијум-нитрата, и стронцијум-ацетата, изражене у деловима молекуларних тежина ових тела.

Велики број *физичких равнотежа* при променама физичких стања тела могу се, на сличан начин, сматрати као гранична, стационарна стања између једнога одређеног и њему инверсног процеса трансформације супротних правацa, који се врши са истим брзинама. Такав је н. пр. случај при променама агрегатног стања тела, као:

1° при преласку из чврстог у течно стање и обрнуто (топљење или растварање чврстих тела, счвршћавање течних тела);

2° при преласку из течног у гасовито стање и обрнуто (испаравање течности, кондензовање гаса);

3° при кристализацији, или преласку из једнога кристалног облика у други (прелазак н. пр. сумпора из ромбичног у моносиметрични облик).

Таква једна физичка стационарна фаза у току појаве може бити и симултана са хемиском стационарном фазом исте појаве; у великоме броју случајева улазак појаве у једну и улазак у другу фазу не одговарају истоме тренутку[1].

C. **Стационарни распоред стања у феноменским пољима.**

Кад вредности дескриптивних елемената $q_1, q_2, q_3, \cdots$ појаве, што дефинишу једну њену стационарну фазу, зависе од једнога комплекса параметара $x, y, z, \cdots$, мењањем ових мењаће се и стање у појави што одговара тој фази, али не губећи при томе свој стационарни карактер, пошто су такве промене независне од времена. У случају, кад су параметри $x, y, z, \cdots$ везани за обичан простор, као његови геометриски параметри, посматрано стационарно стање карактерисано је једним нарочитим својим *стационарним распоредом* у области простора која се добија варијацијама тих параметара, и то тако, да је свака тачка те области карактерисана једним одређеним скупом вредности елемената $q_1, q_2, q_3, \cdots$ Тај се скуп може мењати од једне тачке до друге, али остаје, за време стационарне фазе у појави, непромењлив за једну исту тачку.

Распоред је тада *униформан* или *неуниформан*, према томе, да ли свакој тачки области одговара један исти скуп вредности q_i, или се тај исти скуп мења од тачке до тачке. Он може бити *симетричан* према извесним утврђеним тачкама (центрима симетрије), утврђеним правим линијама (осовинама симетрије или равнима (равни симетрије), или потпуно *дисиметричан*.

---

[1] В. н. пр. Naumann: Sitz. d. d. chem. Ges. IV. 646. 780.
Frowein: Zeitschr. f. phys. Chem. Bd. I. 1.

Неколики елементарни појмови о феноменским пољима. Под *феноменским пољем* разуме се део простора, у коме се свакој тачки приписује једно одређено стање. Према конкретној природи тога стања имају се разне врсте поља, као што су: поље масе, густине, брзине, гравитације, механичке енергије, топлоте; електрична, магнетна, звучна, светлосна, економска и т. д. поља. У осталом, може и више таквих поља, разне конкретне природе, бити суперпонирано у једноме истоме делу простора.

Једно феноменско поље, одређене врсте, карактерисано је, у сваком тренутку, једним нарочитим распоредом стања, на које се односи, у делу простора у коме се посматра. Стање, пак, једне ма које тачке поља карактерисано је у сваком тренутку:

1° или једном бројном величином (скаларом), у коме се случају има *скаларно поље* (поље температура, електричног потенцијала, јачине осветлења, густине насељености, величине богаства, јачине једне епидемије);

2° или једном управљеном величином (вектором), у коме се случају има *векторско поље* (поље брзина, сила, електростатично поље, магнетно поље, поље струјања топлоте, гаса, течности);

3° или једним низом бројних, или управљених величина чији је скуп апсолутно потребан за потпуну карактеристику посматраног стања у уоченој тачки: тада се има *хипервекторско поље* (стање еластичног напона, дефинисано управљеним елипсоидом, т. ј. са 6 скалара; стање пондеромоторних сила у једноме магнетном пољу, дефинисано скупом од три управљене величине т. ј. девет скалара и т. д.).

У свакоме од ова три случаја, одговарајућа скаларна или управљена карактеристична величина функција је положаја тачке у посматраном пољу.

Скаларно поље. Ако је

$$u = f(x, y, z)$$

једначина што дефинише величину скалара u у тачки x, y, z, распоред стања, за које је везан тај скалар у посматраноме пољу, дефинисан је *еквискаларним површинама*

$$f(x, y, z) = const$$

као скупом тачака поља, карактерисаним једном истом вредношћу скалара. У случају, кад се поље своди на једну раван, еквискаларне се површине своде на *еквискаларне линије* у тој равни. Вектор

$$grad\ u$$

даје, по правцу и величини, најјачу промену скалара u и стоји управно на еквискаларној површини. У скаларноме пољу u скалар се најјаче мења онде, где се еквискаларне површине највише једна другој приближују.

Векторско поље. Ако је стање у једној тачки поља дефинисано вектором **r**, распоред стања у пољу дефинисан је *векторским линијама* тога поља, т. ј. линијама у простору са том особином, да вектор, везан за сваку тачку поља, додирује ту линију у тој тачки (линија сила кад вектор представља силу; линија брзина кад вектор представља брзину и т. д.). Векторске су линије дефинисане системом симултаних диференцијалних једначина.

$$\frac{dx}{r_x} = \frac{dy}{r_y} = \frac{dz}{r_z}$$

где су r_x, r_y и r_z компоненте вектора r у правцима координантних осовина ox, oy и oz.

Систем векторских линија датога поља даје представу распореда праваца вектора у томе пољу (правци дирака). Распоред, пак, интензитета вектора, као скаларне величине, биће дефинисан системом еквискаларних површина за те интензитете *(површине једнаких интензитета)*.

У специјалнијем случају, кад су векторске линије поља управне на површинама једнаких интензитета, распоред је стања, за које је везан вектор, одређен познавањем само тих површина.

Стационарне промене и стационарни распореди у скаларним и векторским пољима. Скалар u, за једно одређено стање (E), коме је придат, функција је положаја тачке и времена. Величина његове промене du, што одговара размаку времена dt и промени da положаја тачке у произвољно изабраном правцу јединичног вектора a_0, дата је, у векторској анализи, једначином

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{dt} + v \, grad \, u \tag{296}$$

или

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + v \nabla u \tag{297}$$

где је v брзина померања тачке у правцу a_0:

$$v = \frac{da}{dt}$$

Тако је исто и вектор r, који дефинише једно стање (E), функција положаја тачке и времена, и његове су варијације у току времена, а при померању тачке, дефинисане векторском једначином

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial t} + (v\nabla) \, r \tag{298}$$

Изрази

$$\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$$

представљају *локалну промену* скалара u и вектора $\mathbf{r}$ у једној одређеној тачки поља, јер је тада брзина померања $v = o$. Изрази

$$v \bigtriangledown u \quad \text{и} \quad (v \bigtriangledown) \mathbf{r}$$

представљају *стационарну промену* тих елемената, јер се на њих своде тоталне промене ових елемената, кад се ови не мењају експлицитно са временом t (т. ј. кад су локалне промене равне нули), већ им промене долазе само од померања тачке у којој се посматрају.

Кад посматрана карактеристична особина поља није везана за једну покретну средину (н. пр. при распростирању топлоте или електрицитета у непокретном чврстом телу), стационарно је стање дефинисано једначинама

$$\frac{\partial u}{\partial t} = o \quad \text{и} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = o$$

и његов је стационарни распоред дефинисан једначином која се добија кад је у динамичкој једначини за модификације поља

$$\frac{du}{dt} = X \tag{299}$$

где је X модификаторска тежња у једној тачки поља, а којој се приписују његове модификације, равна нули.

Кад је особина поља везана за једну покретну средину, носиоца те особине (н. пр. при распростирању топлоте у течностима или гасовима, као покретним срединама), стационарно је стање карактерисано једначином

$$\frac{\partial u}{\partial t} = o$$

тако, да се општа кинетичка једначина за такве случајеве своди, у случају скаларних поља, на

$$\frac{du}{dt} = v\, grad\, u \tag{300}$$

или

$$\frac{du}{dt} = v \bigtriangledown u \tag{301}$$

а у случају векторских поља на

$$\frac{dr}{dt} = (v \bigtriangledown) r \tag{302}$$

Стационарни распоред биће дефинисан једначином која се добија, кад се у одговарајућој једначини (300), (301), (302) смени

$$\frac{du}{dt} \text{ односно } \frac{dr}{dt}$$

својом вредношћу из динамичких једначина за модификације поља

$$\frac{du}{dt} = X$$

односно

$$\frac{dr}{dt} = Y$$

где су X и Y модификаторске тежње у једној тачки поља.

Хидродинамичке стационарне фазе кретања. Означивши са r вектор брзине једнога произвољног делића течности, са ϱ специфичку густину течности у томе делићу, са P силу која у томе делићу делује на јединицу масе (н. пр. тежу), са p скаларну вредност притиска на јединицу површине око уоченог делића, основна једначина за промене у хидродинамичком пољу брзина биће, у векторском облику,

$$(303) \qquad \rho \frac{dr}{dt} = \rho P - (\nabla p)$$

којој још ваља придодати: 1° једначину

$$(304) \qquad div\, r = o$$

што изражава погодбу инкомпресибилитета; 2° карактеристичну једначину хидродинамичког медиума

$$\lambda (p, \rho, \tau) = o$$

која исказује релацију између густине, притиска и температуре за дати медиум. У случају нестишљивих течности, та се релација своди на

$$\rho = const;$$

у случају савршених гасова она је облика

$$\frac{p}{\rho (1 + \alpha \tau)} = const$$

где је

$$\alpha = \frac{1}{273}$$

Једначина (304), за случај, непотпуног инкомпресибилитета, има се сменити једначином

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div (\rho r) = o$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\, div\, r + r\, grad\, \rho = o$$

где $\frac{\partial \varrho}{\partial t}$ означује брзину промена густине медиума у једној одређеној тачки поља.

Комбинована са ранијом општом кинематичком векторском једначином

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial t} + (r \nabla) r$$

једначина се (303) претвара у Euler-ову хидродинамичну једначину, написану у векторском облику

$$(305) \qquad \frac{\partial r}{\partial t} + (r \nabla) r = P - \frac{1}{\varrho} \nabla p$$

где парцијални извод

$$\frac{\partial r}{\partial t}$$

означује брзину промене вектора брзине у једној одређеној тачки простора (локалну брзину промене).

У стационарној је фази кретања локална брзина промене равна нули, тако, да се Euler-ова једначина своди на

$$(306) \qquad (r \nabla) r = P - \frac{1}{\varrho} \nabla p$$

Ако се примети, да се у стационарној фази ни сила P не мења у току времена и узме да се она може представити као градијент једнога потенцијала u (што је случај код великога броја природних сила кад нема трења), тако, да је

$$P = \nabla u$$

једначина се (306) може написати у облику

$$(307) \qquad (r \nabla) r - \nabla Q = o$$

где Q означује скалар

$$Q = u - \frac{1}{\rho} p$$

Једначина се (307), скаларизирана, раставља на три диференцијалне једначине

$$r_x \frac{\partial r_x}{\partial x} + r_y \frac{\partial r_x}{\partial y} + r_z \frac{\partial r_x}{\partial z} - \frac{\partial Q}{\partial x} = o$$

$$r_x \frac{\partial r_y}{\partial x} + r_y \frac{\partial r_y}{\partial y} + r_z \frac{\partial r_y}{\partial z} - \frac{\partial Q}{\partial y} = o$$

$$r_x \frac{\partial r_z}{\partial x} + r_y \frac{\partial r_z}{\partial y} + r_z \frac{\partial r_z}{\partial z} - \frac{\partial Q}{\partial z} = o$$

Она не садржи време t и дефинише вектор брзина r као функцију положаја тачке (x, y, z), у облику трију скаларних једначина

$$r_x = \frac{dx}{dt} = f_1 (x, y, z)$$

$$r_y = \frac{dy}{dt} = f_2 (x, y, z)$$

$$r_z = \frac{dz}{dt} = f_3 (x, y, z)$$

где су f_1, f_2 и f_3 одређене функције положаја тачке.

Векторске линије дефинисане су системом симултаних једначина

$$(308) \qquad \frac{dx}{f_1 (x, y, z)} = \frac{dy}{f_2 (x, y, z)} = \frac{dz}{f_3 (x, y, z)}$$

и пошто дирке на тим линијама дају правце у којима се крећу делићи течности, то ове векторске линије представљају, у исто време, и *линије тока* у уоченој стационарној фази кретања; то су материјалне линије, састављене из низа делића у кретању и чије су те линије путање.

Пошто елеменат лука ds пада у правац јединичног вектора $\mathbf{r}_0$, то је, према правилима векторске анализе,

$$(\mathbf{r}_0 \nabla)\,\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

а одатле

$$(\mathbf{r} \nabla)\,\mathbf{r} = v\,\frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

где v означује интензитет вектора $\mathbf{r}$. Једначина (307) постаје

$$v\,\frac{d\mathbf{r}}{ds} - \nabla Q = o$$

или, множењем са јединичним вектором $\mathbf{r}_0$

(309) $$\mathbf{r}\,\frac{d\mathbf{r}}{ds} - \mathbf{r}_0 \nabla Q = o$$

А пошто је

$$\mathbf{r}\,\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{1}{2}\,\frac{d\mathbf{r}^2}{ds} = \frac{1}{2}\,\frac{dv^2}{ds}$$

и

$$\mathbf{r}_0 \nabla Q = \frac{dQ}{ds}$$

једначина (309) постаје

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2} - Q\right) = o$$

т. ј.

(310) $$\frac{v^2}{2} - Q = const$$

и изражава Bernoulli-еву теорему за стационарна кретања: величина

$$\frac{v^2}{2} - Q$$

задржава, дуж целе путање једнога делића течности у стационарном кретању, непрестано једну исту вредност.

Ако се теорема н. пр. примени на кретање тешке течности, која истиче из једнога резервоара кроз један отвор, а у коме се течност одржава на истоме нивоу h, мереном од слободне површине течности, биће

$$P = g \qquad u = gz$$

и према Bernoulli-евој теореми

$$(311) \qquad \frac{1}{2} v^2 - u + \frac{1}{\varrho} p = \frac{1}{2} v_0{}^2 - u_0 + \frac{1}{\varrho} p_0$$

Изабравши за тачку, карактерисану вредностима (v_0, u_0, p_0), једну тачку на слободној површини течности, (коју ћемо претпоставити да је врло велика, тако да је $v_0 = o$), биће

$$z_0 = o \qquad u_0 = o$$

$$v_0 = o \qquad p_0 = p_a$$

где је p_a атмосферски притисак. Једначина се (311) своди на

$$\frac{1}{2} v^2 = gh + \frac{1}{\varrho} (p_a - p)$$

где је h одстојање отвора од слободне површине. Ако течност истиче слободно у ваздух, биће

$$p = p_a$$

тако, да ће брзина истицања у таквој стационарној фази бити регулисана Torricelli-евом једначином

$$v^2 = 2\ gh$$

Стационарне фазе при потенцијалном (иротационом) кретању течности. Вектор брзине r, при таквоме кретању, деривира из једнога потенцијала брзина V и у свакоме је тренутку управан на еквипотенцијалним површинама.

$$V = const$$

Euler-ова једначина за модификације поља вектора r добија облик

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\ r^2 - Q = \psi\,(t)$$

где је $\psi\,(t)$ функција времена t, или, пошто је то скаларна једначина, облик

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] - Q - \psi\,(t) = o$$

која једначина, са једначином континуитета, одређује V и p као функције промењљивих x, y, z и t.

При стационарном је кретању

$$\psi\,(t) = const = k$$

где је k једна иста константа за цело поље, и

$$\frac{\partial V}{\partial t} = o$$

Стационарно је, дакле, потенцијално кретање течности регулисано релацијом

$$\frac{v^2}{2} - Q = k$$

или, у развијеном облику, релацијом

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]-Q=k$$

где се константа k не мења од тачке до тачке поља. Путање делића течности поклапају се са линијама тока и управне су на еквипотенцијалним површинама, пошто је дирка тих путања r градиент потенцијала.

Стационарне фазе при вихорастом кретању течности. Вихорасто је кретање карактерисано тиме, што су поједини делићи течности у једноме сталном ротационом кретању. Оно је, у једноме датом тренутку и за дати делић, дефинисано вектором W ротације брзине делића у томе тренутку. Означивши са r вектор брзине делића, кретање је регулисано Helmholtz-овом једначином

$$\frac{dW}{dt}=(W\nabla)r$$

где је

$$W=rot\, r$$

У стационарној је фази кретања

$$\frac{dW}{dt}=o$$

што значи да су и вектори r и W независни од времена. Њихова поља су, дакле, перманентна.

Линије тока представљене су једначинама

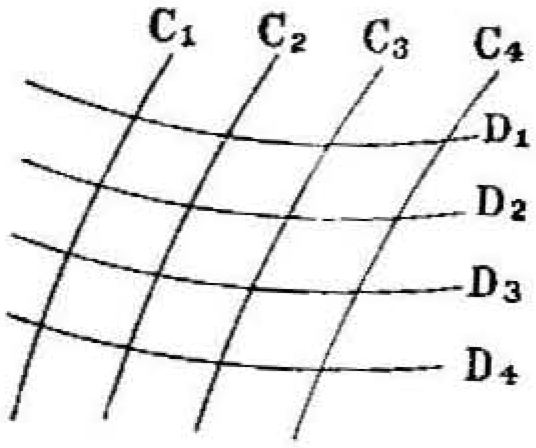
$$\frac{dx}{r_x}=\frac{dy}{r_y}=\frac{dz}{r_z}$$

Оне су независне од времена и представљају један систем непроменљивих матерјалних кривих $C_1, C_2, C_3, \cdots$ у простору, образованих од низа матерјалних делића у кретању, који перманентно остају на оној од тих кривих, на којој су у уоченом тренутку.

Једначине

$$\frac{dx}{W_x}=\frac{dy}{W_y}=\frac{dz}{W_z}$$

дефенишу *линије вртлога* при таквоме стационарном кретању. И оне су, као и линије тока, независне од времена и представљају један систем непроменљивих кривих $D_1, D_2, D_3, \cdots$ таквих да кроз сваку тачку поља пролази по једна таква крива. Материјални делићи, чији континуални низ формира одговарајућу од кривих $C_1, C_2, C_3, \cdots$ наилазе при кретању поступно на криву D_1, за тим на криву D_2 и т. д. Појава се дешава као да криве D клизе по кривама C; при томе клизењу оне описују једну површину и један делић, који се у једноме уоченом тренутку налази на таквој једној површини, остаје перманентно на њој.



Сл. 29.

У стационарној, дакле, фази једнога вихорастог кретања идеалне течности постоји у пољу један систем непроменљивих и перманентних површина, на којима се налази бескрајан број непроменљивих линија, од којих су једне линије тока, које један материјални делић никако не напушта, а друге су линије вртлога, које су геометриски непомичне, али на којима се у сваком тренутку мењају материјални делићи што на њих наилазе.

Термични стационарни распореди при спровођењу топлоте. Кад се термично стање, дефинисано температуром u сваке тачке једнога непокретног чврстог тела (поље скалара u), мења у току времена спровођењем топлоте од тачке до тачке, по обичним законима тога спровођења, промене су температуре у тачки (x, y, z) поља регулисане једном или другом од ових динамичких једначина:

1° ако је простор, обухваћен чврстим телом, у исто време и поље извора топлоте, чија је специфична издашност e (количина топлоте коју даје јединица запремине бескрајно малог паралелипипеда што обухвата посматрану тачку поља), има се једначина

$$c\,\varrho\,\frac{du}{dt} = e + div\, \mathbf{k}\, \mathbf{grad}\, u$$

где c означује специфичну топлоту материје тела, ϱ његову густину, а k коефициенат проводљивости у телу.

2° ако се у пољу не ствара топлота (поље без извора) осим, евентуално, на граничним површинама тела, има се једначина

$$c\,\varrho\,\frac{du}{dt} = div\, \mathbf{k}\, \mathbf{grad}\, u$$

Стационарни распореди температура у пољу дефинисани су, дакле, једном или другом од једначина

$$e + div\, \mathbf{k}\, \mathbf{grad}\, \mathbf{u} = o$$

$$div\, \mathbf{k}\, \mathbf{gdad}\, u = o$$

или у развијеном облику

$$e + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial z}\right) = o$$

односно

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = o$$

Кад је распоред коефициента проводљивости k у пољу униформан, једначине се стационарног распореда температура своди на

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\,e$$

односно

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = o$$

Те једначине, при одредби термичних стационарних распореда, имају се допунити граничним условима и специјалним погодбама које прецизирају термично стање у једној одређеној тачки, правој, равни и т. д. посматраног термичног поља.

Стационарни термични распоред н. пр. у квадратној призми неограничене дужине, кад се основица одржава на сталној температури $u = 1$, а стране јој се хладе зрачењем топлоте, одређен је једначином (1) са почетним условом

$$u = 1 \quad \text{за} \quad z = o \quad -a < x < a \quad -a < y < a$$

и граничним условима

$$\left.\begin{array}{l} \pm \dfrac{\partial u}{\partial x} + k\,u = o \\[2ex] \pm \dfrac{\partial u}{\partial y} + k\,u = o \end{array}\right\} \text{за} \left\{\begin{array}{l} x = \pm\, a \\[2ex] y = \pm\, a \end{array}\right.$$

где је k специфична физичка константа призме, $2a$ дужина стране њене основице. Он је експлицитно дефинисан обрасцем

$$u = \sum_i \sum_j A_i\, A_j\, e^{-t\sqrt{\mu_i^2 + \mu_j^2}} \cos \mu_i\, x \cos \mu_j\, y$$

где су μ_i и μ_j два ма која реална и позитивна корена трансцендентне једначине

$$\mu \operatorname{tang} a\mu = k$$

помоћу којих су одређене и вредности коефициената A_i и A_j.

У специјалном случају, кад се тело, за које се тражи распоред температура, своди на жицу, проблем се своди на обичну диференцијалну једначину другог реда

$$k\frac{d^2 u}{dx^2} - au = o$$

која даје

$$u = C_1 \, e^{x\sqrt{\frac{a}{k}}} + C_2 \, e^{-x\sqrt{\frac{a}{k}}}$$

Интеграционе константе C_1 и C_2 имају се одредити из података о температури двају одређених пресека жице.

Стационарни распореди у електромагнетним пољима. Промене у датом електромагнетном пољу регулисане су системом Maxwell-ових једначина које су, у векторском облику,

$$c \, rot \, M = \alpha \frac{\partial F}{\partial t} + 4\pi \, k \, F \tag{313}$$

$$c \, rot \, F = - \mu \frac{\partial M}{\partial t} \tag{314}$$

где су: F електрични вектор силе, M магнетни вектор силе, α, k, μ диелектрична константа, коефицијенат проводљивости и магнетни пермеабилитет медијума.

Стационарно је стање у пољу онда, кад је

$$\frac{\partial F}{\partial t} = o \qquad \frac{\partial M}{\partial t} = o \tag{315}$$

што ће, према једначинама (313) и (314), бити онда, кад је

$$\begin{aligned} rot \, F &= o \\ k \, F &= \frac{c}{4\pi} \, rot \, M \end{aligned} \tag{316}$$

Применивши на последњу једначину операцију дивергенције, добија се

$$\frac{c}{4\pi} \, div \, rot \, M = div \, k \, F$$

а пошто је за сваки вектор r

$$div \, rot \, r = o$$

то је и

$$div \, rot \, M = o$$

па, дакле, и

$$div\, \mathbf{k}\, F = o$$

Једначина, пак, (316) показује да је F потенцијални вектор, који се, према томе, може извести из потенцијала и операцијом

$$F = -\nabla u = -grad\ u$$

тако, да услов за стационарно стање поља постаје

$$div\ k\ grad\ u = o$$

или, у развијеном облику

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = o$$

У случају, кад је коефициенат проводљивости k униформно распоређен у целоме пољу, једначина стационарног стања постаје

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = o$$

и она, са почетним и граничним погодбама, одређује стационарни распоред потенцијала у посматраном електромагнетном пољу.

Распоред осветлења једне површине. Под *потенцијалом осветлења* у једној тачки P простора, осветљеној једним скупом светлосних извора јачине

$$i_1,\ i_2,\ i_3, \cdots$$

који су на одстојањима

$$r_1,\ r_2,\ r_3, \cdots$$

од тачке P, разумеће се функција

$$V = \frac{i_1}{r_1} + \frac{i_2}{r_2} + \cdots = \Sigma \frac{i}{r}$$

Распоред осветлења на једној датој површини, променљив при кретању светлосних извора, постаје стационаран кад извори постану непокретни, и може се извести непосредно из потенцијала.

Извод потенцијала за тачку P, а у једном произвољном правцу PN, у коме бескрајно мало померање тачке има за вредност dn, дат је изразом

$$\frac{dV}{dn} = - \Sigma \frac{i}{r^2} \frac{dr}{dn}$$

Међу тим

$$\frac{i}{r^2}$$

представља јачину осветлења површинског елемента (s) у P, управљеног на правац P_i што саставља тачку P са светлосним извором јачине i. Извод

$$\frac{dr}{dn}$$

има за вредност косинус угла α који гради елеменат (s) са елементом (s'), управним на правац PN. Према томе израз

$$\frac{i}{r^2} \frac{dr}{dn} = \frac{i \cos \alpha}{r^2}$$

представља јачину осветлења елемента (s') осветљеног извором i, а израз

$$- \frac{dV}{dn}$$

представља тотално осветлење тога елемента, осветљенога скупом извора $i_1, i_2, i_3, \cdots$ Узевши, дакле, за правац *PN* правац нормале на датој површини у тачки *P*, распоред осветлења на површини, осветљеној једним скупом извора, дефинисан је распоредом вредности извода потенцијала, узетог са промењеним знаком, у правцу нормале, у свакој тачки површине т. ј. распоредом вредности израза

$$(317) \qquad -\left(\lambda \frac{\partial V}{\partial x} + \mu \frac{\partial V}{\partial y} + \nu \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

где су λ, μ, ν коефициенти правца нормале у тачки (x, y, z).

При кретању извора, растојања $r_1, r_2, r_3 \cdots$ па, дакле, и израз (317), мењају се у току времена по закону који ће бити познат кад се зна сам закон кретања. При стационарним распоредима те су вредности сталне и распоред вредности (317) на датој површини дефинише распоред осветлења на њој.

Проучимо, примера ради, распоред осветлења једнога ротационог елипсоида, осветљеног једном од својих жижа. За то је довољно познавати распоред осветлења на једној, ма којој елипси, меридијанском пресеку елипсоида. Ако је

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

једначина уочене елипсе, косинуси λ и μ углова нормале са осовинама *ox* и *oy*, а за тачку (x, y), имају за вредности

$$\lambda = \frac{bx}{\sqrt{a^4 - c^2 x^2}}$$

$$\mu = \frac{a\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^4 - c^2 x^2}}$$

А пошто је

$$V = \frac{i}{r} = \frac{i}{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{i\,(x+c)}{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = - \frac{iy}{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}}$$

јачина осветлења елипсоида у тачки, чија је апциса x, има за вредност

$$E = - \lambda \frac{\partial V}{\partial x} - \mu \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{a^3\, bi}{\sqrt{(a^2 - cx)\,(a^2 + cx)^5}}$$

Извод је осветлења

$$\frac{dE}{dx} = - \frac{a^3\, bc\,(2a^2 - 3cx)\, i}{\sqrt{(a^2 - cx)^3\,(a^2 + cx)^7}}$$

и он постаје раван нули за

$$x = \frac{2a^2}{3c} = \frac{2a}{3e}$$

где је e ексцентрицитет елипсе. Кад је, дакле,

$$e > \frac{2}{3}$$

у коме је случају горња вредност x мања од а, осветлење елипсоида, које је највеће на крајевима велике осовине, опада постепено при приближавању пресеку

$$x = \frac{2a}{3e}$$

у коме оно достиже свој минимум. Кад је

$$e < \frac{2}{3}$$

тај минимум не постоји и осветлење поступно опада од једнога темена елипсоида до другог[1]).

Кад би обе жиже били светлосни извори интензитета i_1 и i_2, осветлење би тачке елипсоида, чија је апциса x, било дато изразом

$$E = a^3 b \left[\frac{i_1}{\sqrt{(a^2 - cx)(a^2 + cx)^5}} + \frac{i_2}{\sqrt{(a^2 + cx)(a^2 - cx)^5}} \right]$$

који му дефинише распоред од једне тачке до друге.

Моменат и центар дистрибуције стања у скаларним пољима. Под *моментом дистрибуције* једнога стања (S), у датом скаларном пољу (α), а према једној уоченој тачки O тога поља, разумеће се вредност израза

$$J = \Sigma \alpha \rho^2$$

где је α вредност карактеристичног скалара поља у његовој произвољној тачки M, а ρ одстојање тачке M од O, и где се знак Σ односи на све тачке поља. Кад би се скалар α асимилирао маси, која би се, у мислима, придала тачкама поља и чија би величина за сваку тачку била једнака вредности скалара у тој тачки, моменат би се J подударио са моментом инерције тела, у које би се тада претворило посматрано поље, према тачки O.

Под *центром дистрибуције* стања (S) у пољу (α) разумеће се она тачка O поља, за коју је моменат дистрибуције J *минимум*. Из једначине

$$J = \Sigma \alpha \left[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \xi)^2 \right]$$

---

[1]) L. Houllevigue: **Note sur la Photometrie** (Journ. de Physique, 1891. p. 126—130).

где су ξ, η, ξ координате тачке O, налази се да је

$$\frac{\partial J}{\partial x} = 2\Sigma\,\alpha\,(x - \xi)$$

$$\frac{\partial J}{\partial y} = 2\Sigma\,\alpha\,(y - \eta)$$

$$\frac{\partial J}{\partial z} = 2\Sigma\,\alpha\,(z - \xi)$$

тако да је J апсолутни минимум за тачку O, дефинисану координатама

$$\xi = \frac{\Sigma\alpha x}{\Sigma\alpha} \qquad \eta = \frac{\Sigma\alpha y}{\Sigma\alpha} \qquad \xi = \frac{\Sigma\alpha z}{\Sigma\alpha}$$

Тачка (ξ, η, ξ) је центар дистрибуције стања *(S)*. У случају, кад се скалар α асимилира маси, та се тачка поклапа са тежиштем тела: *у њој је садржана једна генерелализација тога појма за распореде ма каквих стања у простору.* Па како је тежиште једнога тела тачка, око које је маса распоређена са најмањом могућном дисиметријом, према дисиметрији која би се имала за ма коју другу тачку, то се тачка (ξ, η, ξ) има сматрати као тачка поља око које је стање *(S)* распоређено са мање дисиметрије но око ма које друге тачке поља. *Она је, дакле, у исто време и центар минималне дисиметрије распореда стања (S) у пољу* (α).

У томе погледу, центар дистрибуције од интереса је не само за специјални случај кад се скалар α своди на масу, већ и у генералноме случају, кад α представља бројну величину ма какве конкретне природе, везану за једно, ма какво, стационарно стање, распоређено у једној датој области простора (центар дистрибуције термичног или електричног стања у једноме ограниченом телу, на једној површини или линији; центар дистрибуције осветљења у једноме ограниченом делу простора; центар дистрибуције густине насељености у датој области једне територије, јачине једне епидемије у таквој једној области, величине богаства, једнога ма кога од разноврсних стања о којима води рачуна Статистика и т. д.).

За одредбу тога центра важе, у осталом, обична правила по којима се одређује тежиште једнога тела, површине, линије, или дисконтинуалног низа тачака. Густина ρ поља, према скалару α, а око једне уочене тачке M поља, има се дефинисати као гранична вредност количника суме вредности скалара, везаних за све тачке једног малог паралелипипеда што обухвата тачку M, и запремине тога паралелипипеда, кад се пусти да ова бескрајно опада. Тада су, у правоуглом координатном систему, координате центра дистрибуције посматраног стања, за једно тело, дате обичним изразима за координате тежишта:

$$\xi = \frac{\int\int\int \rho\, x\, dx\, dy\, dz}{\int\int\int \rho\, dx\, dy\, dz}$$

$$\eta = \frac{\int\int\int \rho\, y\, dx\, dy\, dz}{\int\int\int \rho\, dx\, dy\, dz}$$

$$\zeta = \frac{\int\int\int \rho\, z\, dx\, dy\, dz}{\int\int\int \rho\, dx\, dy\, dz}$$

са сличним изразима за случај површина или линија, (а са одговарајућом изменом појма густине за те специјалне случаје) аналогим онима при одређивању тежишта површина и линија.

Нека је, на послетку, наведена и ова релација између момента и центра дистрибуције једнога, ма каквог, скаларног поља, која се доказује на начин истоветан са оним у специјалном случају, кад је скаларно поље

поље маса: моменат дистрибуције поља, према једној произвољној тачки P; једнак је збиру момената дистрибуције поља према центру дистрибуције O, и момента тачке O према P, претпостављајући да је у O сконцентрисан целокупан збир вредности скалара, распоређених по целоме пољу.

◆

ДРУГА ГЛАВА

ТЕОРЕМА ЖИВИХ СИЛА И ЊЕНЕ ФЕНОМЕНОЛОШКЕ ПОСЛЕДИЦЕ.

Рад примењених и инертних тежња. — Виртуелни и ефективни елементарни рад. — Појаве са слободним системом. — Појаве са везама друге врсте у систему. — Кинетичка енергија појаве. — Израз кинетичке енергије у неколиким конкретним појавама. — Општа теорема живих сила.

Принцип одржања енергије у конзервативним појавама. — Рад примењених тежња и независност тоталног рада од трајекторије фигуративне тачке. Рад при кружним процесима. Нивоске површине и нивоски варијетети. — Интеграл живих сила за конзервативне појаве. — Кинетичка, потенцијална и тотална енергија. — Принцип одржања. — Енергија и принцип одржања у неколиким врстама конкретних природних појава: механичке, термодинамичке, електричне и магнетне појаве.

I. Рад примењених и инертних тежња.

Кад се елеменат v мења акцијом узрока C, тако, као да су му варијације изазване и регулисане једном тежњом јачине X, непосредно примењеном на објекат v, вредност израза

$$X\,d\eta \tag{318}$$

где је $d\eta$ промена тоталитета η елемента v у размаку времена од тренутка t до тренутка $t+dt$, представља *елементарни рад* узрока C, или *рад тежње* X у томе размаку времена, а при таквој промени тоталитета η.

При кретању материјалне тачке, под утицајем силе јачине F, израз (318) је облика

$$F\ ds$$

(механички рад) где је ds пређени пут у размаку времена dt.

Кад се истегнут еластични конац, остављен сам себи, враћа од дужине $l + dl$ на првобитну дужину l, рад еластичних сила, при томе враћању, има за израз

$$F\,dl$$

где је F резултујућа компонента еластичних сила у правцу истезања (еластичан рад при истезању).

При променама запремине каквога тела, под утицајем спољних притисака, израз је (318) облика

$$p\ dv$$

где је p притисак, а v запремина тела (еластични рад гаса). У специјалном случају, кад је тело гас, за који би промене запремине и притиска биле везане Mariotte-овим законом

$$pv = a$$

израз је (318) облика

$$a\,\frac{dv}{v} = a\,d\,log\,v$$

При електричним модификацијама, што се састоје у променама јачине струје у проводнику, израз је (318) облика

$$E\,dq$$

где је E електромоторна сила електричног извора, која и изазива те модификације, а q количина у проводнику дебитираног електрицитета (електрични рад).

При хемиским трансформацијама израз (318) има облик

$$\mu\, dm$$

где је m маса тела које се трансформише, а μ јачина активне хемиске силе при тој трансформацији, и т. д.

Ако се са V означи инерција (јачина инертне тежње) елемента v, израз ће

$$V\, d\eta \tag{319}$$

представљати елементарни рад те инерције, при промени $d\eta$ тоталитета елемента v. А пошто је

$$V = -\, k \frac{dv}{dt}$$

где је k коефициенат инерције елемента v, и

$$d\eta = v\, dt$$

то се елементарни рад инерције може написати и у облику

$$-\, k\, v\, dv \tag{320}$$

Тај ће израз н. пр. при праволиниском кретању материјалне тачке масе m, при брзини v, имати облик

$$-\, m\, v\, dv\,;$$

рад учињен варијацијом магнетног поља, у проводнику карактерисаном коефициентом ауто-индукције L, имао би за израз

$$-\, L\, i\, di$$

где је i јачина струје у проводнику и т. д.

Изрази (318) и (319) представљаће *виртуелни* или *ефективни* елементарни рад примењених и инертних тежња, према томе, да ли су посматране варијације $d\eta_i$ виртуелне или ефективне.

Кад се дати примарни систем

$$(v_1 \cdots v_n)$$

модификује под утицајем непосредно примењених тежња

$$X_1 \cdots X_n$$

тотални елементарни рад ових тежња, при променама

$$d\eta_1 \cdots d\eta_n$$

тоталитета елемената v_i, имаће за израз

$$X_1\, d\eta_1 + \cdots + X_n\, d\eta_n$$

а тотални елементарни рад инертних тежња биће

$$V_1\, d\eta_1 + \cdots + V_n\, d\eta_n$$

Ти ће радови, такође, бити виртуелни или ефективни, према томе, да ли су промене $d\eta_i$ виртуелне или ефективне.

Појаве са слободним системом. За такве је системе израз

$$(321) \qquad \Omega_2 = \Sigma\,(X_i + V_i)\, \delta\eta_i$$
$$(i = 1, 2, \cdots n)$$

раван нули за ма какве, произвољне, виртуелне промене $\delta\eta_i$. Према томе: *за слободан систем тотални је виртуелни елементарни рад примењених и инертних тежња раван нули при ма каквој, произвољној, модификацији секундарног система.*

За трансформисани систем

$$(q_1 \cdots q_n)$$

дефинисан једначинама

$$(322)\qquad \begin{aligned} \delta\eta_1 &= \beta_{11}\,\delta q_1 + \cdots + \beta_{1n}\,\delta q_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta\eta_n &= \beta_{n1}\,\delta q_1 + \cdots + \beta_{nn}\,\delta q_n \end{aligned}$$

(секундарни трансформисани систем) за виртуелне промене, и једначинама

$$(323)\qquad \begin{aligned} d\eta_1 &= \beta_{11}\,dq_1 + \cdots + \beta_{1n}\,dq_n + B_1\,dt \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d\eta_n &= \beta_{n1}\,dq_1 + \cdots + \beta_{nn}\,dq_n + B_n\,dt \end{aligned}$$

за ефективне промене елемената η_i и q_i, раније је показано

1° да се израз

$$(324)\qquad V_1\,\delta\eta_1 + \cdots + V_n\,\delta\eta_n$$

своди на облик

$$(325)\qquad -\left[\frac{\partial S}{\partial q_1''}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial S}{\partial q_n''}\,\delta q_n\right]$$

где

$$S\,(q_1 \cdots q_n\,;\, q_1' \cdots q_n'\,;\, q_1'' \cdots q_n''\,;\, t)$$

означује резултат који се добија кад се функција

$$\frac{1}{2}\,\Sigma\,k_i\,\eta_i''^2$$

изрази помоћу елемената

$$q_1 \cdots q_n$$

трансформисаног система и њихових првих и других извода по t, а према једначинама (323). *Израз (325) представља, дакле, тотални виртуелни рад инертних тежња за трансформисани систем.*

Пошто је за холономне системе идентички[1])

$$\frac{\partial S}{\partial q_i''} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

то се израз тоталног виртуелног рада инертних тежња, за такве системе, може написати и у облику

$$(326)\quad \left[\frac{\partial T}{\partial q_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right)\right]\delta q_1 + \cdots + \left[\frac{\partial T}{\partial q_n} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_n'}\right)\right]\delta q_n$$

Исти израз вреди и за појаве са нехолономним системом, у случајевима кад су модификације у систему веома споре[2]).

2° да се израз

$$(327)\qquad X_1\,\delta\eta_1 + \cdots + X_n\,\delta\eta_n$$

своди на

$$(328)\qquad Q_1\,\delta q_1 + \cdots + Q_n\,\delta q_n$$

где су

$$Q_1 \cdots Q_n$$

тоталне компоненте примењених тежња у правцима

$$Oq_1 \cdots Oq_n$$

Према томе, *израз (328) представља тоталан виртуелан рад примењених тежња за трансформисани систем.*

Приметимо да кад се, на који било начин, зна израз тоталног виртуелног рада примењених тежња за један дати систем

$$(q_1 \cdots q_n)$$

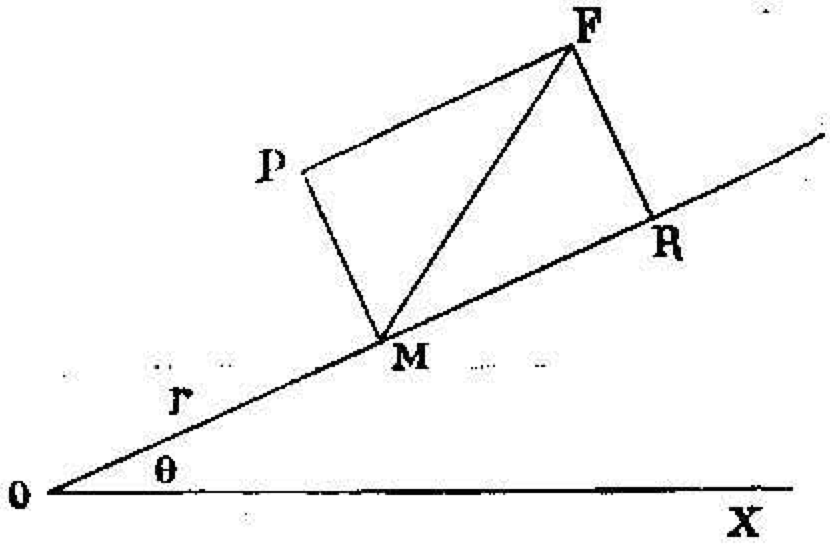
из њега се могу непосредно сазнати изрази појединих компонената Q_i: компонента Q_i има за израз коефици-

---

[1]) в. стр. 219.

[2]) в. стр. 254.

енат варијације δq_i у изразу тога рада. Тако н. пр. кад се, у појави кретања материјалне тачке, за систем (q_1, q_2) узме систем поларних координата (r, θ) и ако се са R и P означе компоненте силе, под чијим се утицајем врши кретање, у правцу потега и правцу управном на потег, рад при виртуелном померању δr тачке по потегу, а за $\theta = const.$, као збир радова компонената P и Q, има за вредност



Сл. 30.

$$R\,\delta r$$

пошто је рад компоненте P, при таквоме померању раван нули. Тако исто, при виртуелном померању тачке дуж круга описаног око O са полупречником r, при чему је пређени пут

$$r\,\delta\theta$$

рад се своди на рад компоненте P, који има за вредност

$$P\,r\,\delta\theta$$

Тотални је виртуелни рад примењене силе, при произвољним виртуелним варијацијама δr и $\delta\theta$, дакле,

$$R\,\delta r + P\,r\,\delta\theta$$

што показује, да је

$$Q_1 = R \qquad Q_2 = Pr$$

Приметимо да горњи резултати вреде и за системе са везама ма које врсте, претпостављајући да су примењени на одговарајући редуковани систем, који је увек слободан. Међу тим, у случају веза друге врсте тим се резултатима поред тога може дати и овај облик.

Појаве са везама друге врсте у систему. За такве је системе израз

$$\Omega_2 = \Sigma (X_i + V_i)\,\delta\eta_i$$

$$(i = 1, 2, \cdots k)$$

(где је k степен слободе система) раван нули за све виртуелне промене $\delta\eta_i$ што су у сагласности са везама у систему. Према томе, *за системе са везама друге врсте, тотални је виртуелни елементарни рад примењених и инертних тежња раван нули при ма каквој остварљивој модификацији секундарног система.*

Ако су

$$\begin{array}{c} b_{11}\,\delta\eta_1 + \cdots + b_{1n}\,\delta\eta_n = o \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{m1}\,\delta\eta_1 + \cdots + b_{mn}\,\delta\eta_n = o \end{array}$$

релације између виртуелних промена, до којих доводе везе у систему, множећи прву од њих са λ_1, другу са λ_2 и т. д. где су

$$\lambda_1\ \lambda_2 \cdots \lambda_m$$

раније дефинисани мултипликатори[1] одређени тако, да изрази

$$\begin{array}{c} \Psi_1 = \lambda_1\, b_{11} + \cdots + \lambda_m\, b_{m1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Psi_n = \lambda_1\, b_{1n} + \cdots + \lambda_m\, b_{mn} \end{array}$$

представљају компоненте реакција веза у правцима промена елемената система, резултат је једначина

$$\Psi_1\,\delta\eta_1 + \cdots + \Psi_n\,\delta\eta_n = o$$

---

[1] В. стр. 156 и т. д.

која исказује факт: *да је тотални виртуелни рад реакција веза, при ма каквој остварљивој модификацији секундарног система у појави, раван нули.*

Ако се, на место примарног, уведе секундарни редуковани систем

$$(q_1 \cdots q_k)$$

дефинисан једначинама

$$d\eta_1 = \beta_{11}\, dq_1 + \cdots + \beta_{1m}\, dq_m + B_1\, dt$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d\eta_n = \beta_{n1}\, dq_1 + \cdots + \beta_{nm}\, dq_m + B_m\, dt$$

израз тоталног виртуелног рада постаје за примењене тежње

$$Q_1\, \delta q_1 + \cdots + Q_k\, \delta q_k$$

где је Q_i тотална компонента примењених тежња у правцу Oq_i, а за инертне тежње

$$-\left[\frac{\partial S}{\partial q_1''}\, \delta q_1 + \cdots + \frac{\partial S}{\partial q_k''}\, \delta q_k\right]$$

где је S раније дефинисана функција. У случају холономних система, или нехолономних система са веома спорим модификацијама, последњи израз постаје

$$\left[\frac{\partial T}{\partial q_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right)\right] dq_1 + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \left[\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k'}\right)\right] dq_k$$

Компонента Q_i има за израз коефицијенат варијације δq_i у изразу виртуелног рада примењених тежња.

Горњи резултат о тоталном виртуелном раду примењених и инертних тежња, примењен на појаве кретања, доводи непосредно до познате комбинације статичког принципа виртуелних радова са D'Alembert-овим принципом, која обухвата диференцијалне једначине кретања тачке и система. Улоге елемената примарног система v_i играју компоненте брзина у правцу координатних осовина, или угловне брзине; улоге тоталитета луци кривих линија, координате покретних тачака, или углови ротације; улоге примењених тежња компоненте механичких сила у правцима осовина, или моменти таквих сила према једној осовини или тачки; улоге инертних тежња компоненте динамичке инерције при кретању (н. пр. компоненте центрифугалне силе).

При електричним модификацијама у једноме систему струја, што циркулишу кроз линеарне покретне или непокретне, деформабилне или непромењљиве проводнике, улоге елемената примарног система v_i играле би:

1° кинетички елементи што дефинишу брзине кретања и брзине деформација електричних проводника (компоненте брзина кретања; брзине варијација параметара што дефинишу геометриски облик проводника).

2° јачине струја што циркулишу по проводницима.

Улоге тоталитета η_i играли би:

1° геометриски елементи што дефинишу положаје и облике електричних проводника;

2° количине електрицитета, дебитиране у проводницима и мерене н. пр. количинама разложених електролита.

Улоге компонената примењених тежња X_i играле би компоненте механичких сила, примењених на промене положаја и облика проводника, и електромоторне силе што произлазе од генератора, рецептора и Joule-овог ефекта у проводницима.

На послетку, улоге инертних тежња играле би: компоненте динамичке инерције при кретању (н. пр. компоненте центрифугалне силе), или при деформацији проводника; за тим, разноврсне електромагнетне и електродинамичке силе, (електромоторне силе што произлазе од међусобне индукције струја, или од ауто-индукције и т. д.).

По себи се разуме, да горње једначине и пропозиције о тоталном виртуелном раду примењених и инертних тежња, и о раду реакција веза, претпостављају *да везе нису деформисане* при модификацијама система, већ да су ове у свакоме тренутку у сагласности са везама онаквим, какве буду постојале у томе тренутку. Ако у току појаве буде деформације веза, изазване каквим секундарним узроцима, или самим модификацијама у систему, јављају се нове тежње што произлазе од таквих деформација, а у исто време и саме ће реакције веза бити промењене. У таквим случајевима, нити ће тотални виртуелни рад примењених и инертних тежња, нити виртуелни рад реакција веза, бити раван нули.

Овакви би се случајеви деформације имали н. пр. при кретањима, при којима има трења: ово у крајњој анализи није ништа друго, до скуп веома многобројних, а веома малих деформација површина, линија и у опште веза при кретању. — Такав је случај и при кретању машина код којих се поједини органи, што остварују везе у систему, услед еластичности савијају, упредају, компримују или издужују. — При мењању запремине и притиска једнога гаса, за који се претпоставља да задовољава Mariotte-ов закон, имаће се такође случај деформације веза, ако стање гаса у току појаве изађе ван физичких граница у којима тај закон важи. — У хидродинамичким појавама, у којима се претпоставља инкомпресибилитет течности, имаће се случај деформације веза ако је течност, ма и најмање, компресибилна и т. д.

II. Кинетичка енергија појаве и њена релација са радом примењених тежња.

Кад се елеменат v мења акцијом непосредно примењене тежње X тако, да је у свакоме тренутку

$$k\frac{dv}{dt}=X$$

где је k коефицијенат инерције елемента v, израз

$$T=\frac{1}{2}kv^2$$

представља *кинетичку енергију* просте појаве при таквим променама.

При кретању матерцијалне тачке масе m, под утицајем механичких сила, улогу елемента v игра брзина тачке и кинетичка је енергија (жива сила при кретању)

$$\frac{1}{2}mv^2$$

При обртању чврстог тела око утврђене осовине та енергија има за израз

$$\frac{1}{2}J\omega^2$$

где је ω угловна брзина при обртању, J моменат инерције тела према обртној осовини.

При апсорпцији светлости, звука, мириса и т. д. при проласку кроз апсорбујући слој, улогу елемента v игра јачина ових фактора и кинетичка је енергија пропорционална квадрату те јачине.

У појави електричног испаравања течности она би била пропорционална квадрату електричног оптерећења површине што испарава.

У мономолекуларним хемиским реакцијама је енергија пропорционална квадрату преостале, нетрансформисане, количине тела које се у реакцији трансформише.

Кад се примарни систем

$$(v_1 \cdots v_n) \tag{329}$$

модификује акцијом скупа компонената непосредно примењених тежња

$$X_1 \cdots X_n \tag{330}$$

тако, да је у свакоме тренутку

$$\begin{gathered} k_1 \frac{dv_1}{dt} = X_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_n \frac{dv_n}{dt} = X_n \end{gathered} \tag{331}$$

где су $k_1 \cdots k_n$ коефицијенти инерције елемената v_i, *кинетичком енергијом* појаве при таквим променама биће назван израз

$$T = \frac{1}{2}[k_1 v_1^2 + \cdots + k_n v_n^2] \tag{332}$$

Кад је систем слободан, или са везама друге врсте, трансформација

$$\begin{gathered} d\eta_1 = \beta_{11} dq_1 + \cdots + \beta_{1k} dq_k + B_1 dt \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d\eta_n = \beta_{n1} dq_1 + \cdots + \beta_{nk} dq_k + B_n dt \end{gathered}$$

(где је k степен слободе система), еквивалентна трансформацији

$$v_1 = \beta_{11} q_1' + \cdots + \beta_{1k} q_k'$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_n = \beta_{n1} q_1' + \cdots + \beta_{nk} q_k'$$

претвара T у полином другог степена по изводима

$$q_1' \cdots q_k'$$

и коефициентима који могу зависити од елемената q и времена t.

У случају, кад су везе, па дакле и дефиниција елемената q_i, независне од времена, T постаје одређен и позитиван квадратан облик по изводима q_i'.

Израз кинетичке енергије у неколиким конкретним појавама. При кретању материјалне тачке по кугли полупречника r, означивши са θ и ψ лонгитуду и колатитуду покретне тачке, кинетичка енергија за систем (θ, ψ), који у сваком тренутку одређује положај тачке, има за израз

$$T = \frac{r^2}{2} (\theta'^2 + sin^2 \theta \psi'^2)$$

При обртању чврстог тела око утврђене тачке та је енергија облика

$$Ap^2 + B q^2 + C r^2 + 2 D q r + 2 E rp + 2 F pq$$

где су p, q и r компоненте тренутне ротације, $A \cdots F$ константе за дато тело и утврђену тачку.

У цикличним појавама кинетичка је енергија квадратан облик по изводима цикличних координата, са коефициентима који су функције координата са спорим варијацијама. Тако је за моноцикличне појаве

$$T = \frac{1}{2} A q_1'^2$$

за бицикличне

$$T = \frac{1}{2} (A q_1'^2 + B q_2'^2)$$

где A и B зависе од координата са спорим варијацијама.

При електричним модификацијама у систему двеју покретних струја i_1 и i_2, кинетична енергија има за израз

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2 + 2 M_{12} i_1 i_2)$$

са означавањима наведеним на стр. 206.

Исти ће облик имати израз кинетичке енергије и у случају, кад се проводници при електричним модификацијама деформишу, само што би, тада, коефициенти ауто-индукције L_1 и L_2 зависили од геометриских елемената што карактеришу начин деформације проводника.

При међусобној акцији покретног система струје и магнета, проученој на стр. 211, кинетичка је енергија

$$T = \frac{1}{2} (m v^2 + L i + L_1 i_1 + M i i_1)$$

За непокретан систем, састављен од ма коликог броја струја и магнета та је енергија облика

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

где је T_1 квадратна функција јачина струја

$$i_1, i_2 \cdots i_k$$

T_2 билинеарна функција тих јачина струја и јачина

$$j_1, j_2, \cdots j_k$$

елементарних магнетних струја, сматрајући при том магнете као засебне системе нарочитих затворених струја; T_3 је квадратна функција променљивих j_k. Понаособ, изрази T_1 и T_2, који једино и играју улогу при проучавању варијација јачина правих струја, облика су

$$T_1 = \frac{1}{2} \Sigma (L_k i_k^2 + 2 M_{kh} i_k i_h)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \Sigma N_{kh} i_k j_h$$

где су L_k коефицијенти ауто-индукције проводника, M_{kh} коефицијенти њихове узајамне индукције, N_{kh} коефицијенти електромагнетне индукције у систему. Израз T_1 представља *електрокинетичку енергију* система струја.

При варијацијама електричног стања у појави кретања Barlow-љевог точка (нехолономан систем)[1], кинетична је енергија

$$T = \frac{1}{2} (J w^2 + L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2)$$

где је w ротациона брзина точка, i_1 и i_2 јачине струја у двама електричним колима што састављају систем; J моменат инерције точка, L_1 и L_2 коефицијенти ауто-индукције кола.

Простране класе појава разноврсних конкретних природа дешавају се тако, да се по појединостима свога тока могу асимиловати другој једној фиктивној појави, која јој је аналитички еквивалентна, али којој одговарају кинетична енергија и примењене тежње различне од оних што карактеришу посматрану конкретну појаву. Такве су асимилације од великог аналитичког интереса у случајевима кад се на фиктивној појави,

---

[1] В. стр. 139.

којој је асимилирана конкретна појава, јаче истичу какве аналитичке појединости, које су од интереса, или кад се на једначине фиктивне појаве могу применити трансформације, непримењиве на конкретну појаву и т. д. Раније је н. пр. наведено[1]) да се таквом асимилацијом простране класе непотенцијалних појава могу учинити потенцијалним и на тај начин уочити на њима извесне појединости, везане за егзистенцију потенцијала у механизму појаве.

Такав је н. пр. случај са групом појава у којима се тоталне компоненте тежња, непосредно примењених на примарни систем

$$(v_1 \cdots v_n)$$

састоје из компонената X_i једнога комплекса активних тежња, које деривирају из једнога потенцијала, и компонената једнога отпора пропорционалних величинама одговарајућих елемената v_i. Такве се појаве, као што је раније показано,[2]) могу асимилирати једној фиктивној појави, у којој би кинетична енергија имала за израз

$$T = \frac{1}{2} (\mu_1 \eta_1'^2 + \cdots + \mu_n \eta_n'^2)$$

где је η_i тоталитет елемента v_i, а

$$\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_n$$

експлицитне функције времена, које зависе од коефициената k_i инерције система (v_i) и коефициената λ_i пропорционалности компонената отпора елементима v_i, и који се у случају, кад су ти коефицијенти непроменљиви у току појаве, своде на функције

$$\mu_i = e^{-\frac{\lambda_i t}{k_i}}$$

---

[1]) В. стр. 262—266.

[2]) В. стр. 232.

Компоненте примењених тежња своде се, за такву фиктивну појаву, на фиктивне тежње дефинисане обрасцима

$$Q_1 = \frac{\mu_1}{k_1} X_1$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$Q_n = \frac{\mu_n}{k_n} X_n$$

тако, да је фиктивна појава потенцијална кад год су коефициенти λ_i и k_i једни исти за све елементе система.

Такав би се случај имао н. пр. за ове конкретне појаве:

1° Кретање материјалне тачке под утицајем сила што зависе од положаја тачке и једнога отпора пропорционалног брзини кретања, при чему ће кинетичка енергија фиктивне појаве, којој се асимилира такво кретање, имати за израз

$$T = \frac{1}{2} e^{\lambda t} (x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

$(\lambda = const)$, а примењене тежње бити

$$Q_1 = e^{\lambda t} X$$
$$Q_2 = e^{\lambda t} Y$$
$$Q_3 = e^{\lambda t} Z$$

2° Модификације једнога система струја, јачина $i_1 \cdots i_n$, са занемарљивом међусобном индукцијом, кад су те модификације изазване једним скупом електромоторних сила $E_1 \cdots E_n$ што су у саставу електричних кола. Појава се може асимилирати једној фиктивној појави, карактерисаном кинетичном енергијом

$$T = \frac{1}{2} e^{\lambda t} (i_1^2 + \cdots + i_n^2)$$

и системом непосредно примењених тежња

$$Q_1 = e^{\lambda t} E_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Q_n = e^{\lambda t} E_n$$

где је λ одређена константа система.

Исти је случај и са раније наведеном групом појава, у којима се компоненте X_i тежња, непосредно примењених на примарни систем (v_i), састоје: 1° из компонената активних тежња Y_i које деривирају из једнога потенцијала; 2° из компонената једнога отпора пропорционалних тоталитетима η_i елемената v_i; 3° из компонената једнога отпора пропорционалних величинама самих елемената v_i. Група се може асимилирати фиктивној појави у којој би кинетичка енергија имала за израз

$$T = \frac{1}{2} (\mu_1 v_1^2 + \cdots + \mu_n v_n^2)$$

а примењене тежње

$$Q_1 = \alpha_1 (Y_1 + h_1 \eta_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Q_n = \alpha_n (Y_n + h_n \eta_n)$$

где су α_i одређене експлицитне функције времена, а h_i одређене константе.

Општа теорема живих сила. Напред је показано, да је елементарни рад инерције једнога елемента v, као непосредног објекта једне уочене тежње, аналитички еквивалентан изразу

$$- k v dv = - d \left(\frac{1}{2} k v^2 \right)$$

где је k коефицијенат инерције тог елемента. Тотални елементарни рад инерције једнога примарног система

$$(v_1 \cdots v_n)$$

т. ј. израз

$$V_1\, d\eta_1 + \cdots + V_n\, d\eta_n$$

аналитички је, дакле, еквивалентан изразу

$$-\Sigma k_i\, v_i\, dv_i = -d\left[\frac{1}{2}(k_1\, v_1^2 + \cdots + k_n\, v_n^2)\right]$$

т. ј. изразу $-dT$. где је T кинетичка енергија система.

Према томе *кинетичка енергија система. узета са промењеним знаком. може се, по бројној вредности, само једном адитивном константом разликовати од величине тоталног рада инерције система, што одговара преласку овога од једне утврђене конфигурације на ону у посматраном тренутку.*

Са друге стране, пошто је ефективна модификација система, претпостављајући да нема деформације веза, увек једна од оних виртуелних модификација, што су у сагласности са везама у систему, биће, према ономе што је горе казано, тотални елементарни рад примењених и инертних тежња раван нули. Па пошто је рад инертних тежња еквивалентан изразу $-dT$, тотални елементарни рад примењених тежња биће по вредности једнак диференцијалу dT.

Према раније наведеним изразима за тај рад у примарном и секундарном трансформисаном, или редукованом систему, за ма какав систем, у коме нема деформације веза, имаће се једна или друга од једначина

$$X_1\, d\eta_1 + \cdots + X_n\, d\eta_n = dT \tag{333}$$

$$Q_1\, dq_1 + \cdots + Q_k\, dq_k = dT \tag{334}$$

где се претпоставља да је функција T изражена у једначини (333) као функција елемената примарног, а у

(334) као функција елемената трансформисаног, или редукованог система.

Једначина (333) исказује факт: *да је прираштај тоталног елементарног рада примењених тежња у појави, при прелазу секундарног система из једне конфигурације*

$$\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$$

на њој бескрајно блиску конфигурацију

$$\eta_1 + d\eta_1, \cdots \eta_n + d\eta_n$$

једнак прираштају кинетичке енергије појаве при томе прелазу.

Једначина (334) исказује факт: *да је прираштај тоталног елементарног рада примењених тежња при прелазу секундарног трансформисаног, или редукованог, система од једне конфигурације*

$$q_1 \cdots q_k$$

на њој бескрајно блиску конфигурацију

$$q_1 + dq_1, \cdots q_k + dq_k$$

једнак прираштају кинетичке енергије појаве при томе прелазу.

У осталом, једначина (333) обухваћена је, као специјални случај, једначином (334). Ова последња представља *општу једначину живих сила*, а њоме исказана теорема јесте *општа теорема живих сила* у Математичкој Феноменологији. Она важи како за холономне, тако и за нехолономне системе и претпоставља само непроменљивост веза друге врсте у случајевима кад ових, у опште, има у систему, и независност дефиниције секундарног трансформисаног или редукованог система од времена.

III. Принцип одржања енергије у конзервативним појавама.

А. Рад примењених тежња.

За консервативне појаве[1]) је

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} \cdots\cdots Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k}$$

где је

$$-U(q_1 \cdots q_k)$$

потенцијал тежња. Тотални елементарни рад примењених тежња, при ефективној, бескрајно слабој, модификацији секундарног система, има за израз

$$Q_1\, dq_1 + \cdots + Q_k\, dq_k = dU$$

тако, да, ако се тотални рад тих тежња, при преласку секундарног система из једне конфигурације C_1 на другу конфигурацију, означи са R, биће

$$(335) \qquad R = \int_{(C_1)}^{(C_2)} dU = U_2 - U_1$$

где U_1 и U_2 означују вредности функције U што одговирају конфигурацијама C_1 и C_2.

У једначини је (335) оличена ова значајна особина консервативних појава:

Величина тоталног рада примењених тежња у једној консервативној појави, при преласку секундарног система од једне конфигурације C_1 на другу конфигурацију C_2, независна је од начина на који систем прелази од C_1 на C_2, и зависи само од тих конфигурација.

Теореми се може дати и овај облик:

---

[1]) В. стр. 256. и т. д.

Величина тоталног рада примењених тежња, при преласку фигуративне тачке система од једнога положаја P_1 на други положај P_2, независна је од облика трајекторије, дуж које тачка извршује тај прелаз и од начина кретања тачке при томе прелазу; она се мења само онда, кад се положаји P_1 и P_2 буду мењали.

Међутим, може се доказати и обрнута теорема: *кад год рад примењених тежња зависи само од полазне и завршне конфигурације секундарног система, појава је конзервативна.* Јер, ако се уочи једна утврђена полазна конфигурација C_0 и једна промењљива завршна конфигурација C, пошто при прелазу од C_0 на C рад, по претпоставци, зависи само од C_0 и од C, то ће он бити извесна функција оних вредности елемената $q_1 \cdots q_k$, што карактеришу те две конфигурације. Ако се, дакле, са

$$q_{10}, q_{20}, \cdots q_{k0}$$

означе те вредности што одговарају конфигурацији C_0, а са

$$q_1, q_2, \cdots q_k$$

вредности што карактеришу конфигурацију C, биће

$$R = F(q_{10} \cdots q_{k0};\ q_1 \cdots q_k)$$

Ако се, сад, пусти да систем пређе из конфигурације C на једну, овој бескрајно блиску, конфигурацију, која би била карактерисана вредностима

$$q_1 + dq_1, \cdots q_k + dq_k$$

параметара q_i, рад ће R бити измењен за величину

$$dR = \frac{\partial F}{\partial q_1} dq_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial q_k} dq_k$$

што показује да је појава одиста конзервативна.

Приметимо, само, да горња теорема о независности рада примењених тежња од начина на који се прелази од почетне конфигурације на завршну, т. ј. теорема о непромењивости величине рада при деформацији трајекторије, претпоставља да се та деформација може извршити тако, да при томе трајекторија не пролази ни кроз какву тачку $(q_1 \cdots q_k)$, у којој престаје континуитет компонената $Q_1 \cdots Q_k$ и функције U. То излази непосредно из познатих аналитичких особина интеграла

$$\int_{P_2}^{P_1} [Q_1\, dq_1 + \cdots + Q_k\, dq_k]$$

Као последица исте теореме, добија се и овај резултат:

Кад се у једној појави, у једној њеној фази, почетно стање поклапа са завршним, каже се да се у тој фази појаве дешава један *кружни процес*. Фигуративна тачка система полази од једног одређеног положаја P и враћа се, описавши у току појаве једну *затворену трајекторију*, опет у свој првобитни положај P. *У једноме кружном процесу рад је примењених тежња раван нули*, пошто је, тада, једна од могућих трајекторија таква, да је дуж ње тај рад раван нули, а међутим се свака затворена трајекторија, што пролази кроз P, може на ову свести поступном деформацијом.

Међу тим, као и раније, изузетака може бити ако се при тој деформацији наилази на какву тачку $(q_1 \cdots q_k)$ у којој престаје континуитет компонената $Q_1 \cdots Q_k$ и функције U: *у једноме кружном процесу, у коме је такав случај, рад примењених тежња може бити различан од нуле.* О томе је најлакше уверити се из ових примера.

a) *механички пример*: при кретању материјалне тачке, под утицајем једне силе чије су компоненте у правоуглим координатама

$$X = -\frac{y}{r^2} \qquad Y = \frac{x}{r^2} \qquad Z = o$$

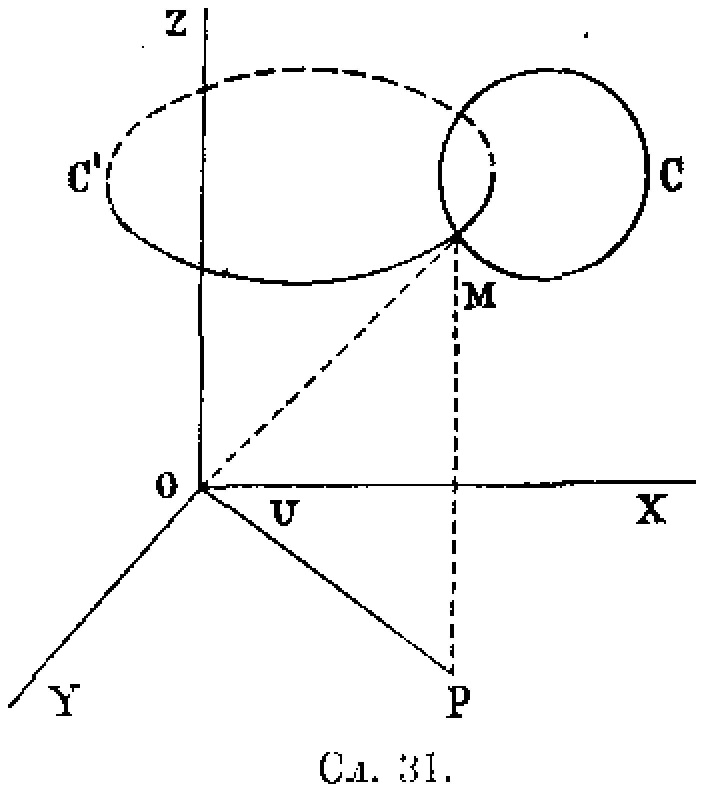
и где је

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

одстојање тачке од центра силе, функција ће U имати облик

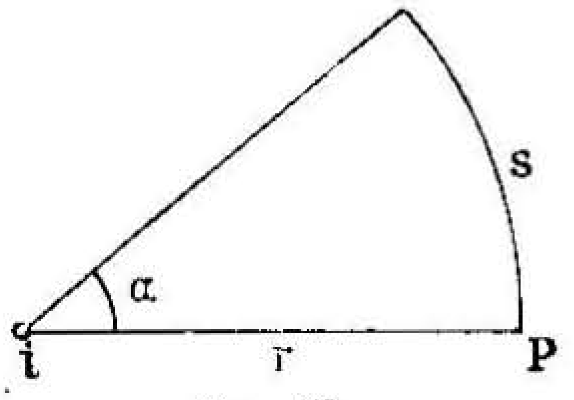
$$U = arc\,tg\,\frac{y}{x}$$

Компонентне силе и функција U непрекидне су функције за све тачке простора што се налазе изван ротационог цилиндра, врло малог полупречника, чија је осовина oz (сл. 31.). Функција U тада има ово конкретно значење: то је угао xoP који граде међу собом осовина ox и пројекција OP потега покретне тачке M у равни xy. Према томе, кад год тачка M опише какву затворену путању MCM која не опкољава осовину oz, функција ће U, па, дакле, и рад силе бити равни нули, пошто се почетна вредност угла U тада поклапа са завршном. На против, кад тачка M опише какву затворену путању $MC'M$, обрнувши се један пут, у позитивном смислу, око oz, варијација угла U, па, дакле, и рад силе, имаће за вредност 2π при једном обрту, а $2n\pi$ за n обрта.



Сл. 31.

b) *физички пример*: према закону Biot-Savart-a, акција једне праволиниске струје, јачине i, на једну магнетну масу, управна је на равни што пролази кроз правац струје и магнетну масу, и има за израз $\frac{hi}{r}$, где је r растојање те масе од струје, h једна константа независна од i и од r.



Сл. 32.

Према томе, ако магнет опише један кружни лук, у равни нормалној на правац струје и са центром у пресечној тачки те равни и правца струје, рад ће горње силе бити

$$\frac{hi}{r}s = h\alpha i$$

Кад, дакле, магнет опише потпун круг $s = 2r\pi$ око струје, тај ће рад, при једном таквом обрту бити $2h\pi i$, а за n обрта $2nh\pi i$. Он, дакле, није раван нули, као што би био случај кад каква затворена путања магнета не опкољава струју. Разлог томе факту лежи у томе што, у равни коју описује магнет, њена пресечна тачка са правцем струје (тачка $r = o$) представља један дисконтинуитет тежње $\frac{hi}{r}$ и функције U, која у овоме случају има за израз

$$U = hi \log r$$

Факт је, као и онај у првоме примеру, аналог ономе, на који се наилази у општој теорији функција: интеграл је функције, дуж једне затворене путање, раван нули, или не, према томе да ли путања опкољава, или не, извесне сингуларитете функције. Лако се, у осталом, увиђа и сам аналитички разлог те аналогије: он је у томе, што и сам рад примењених тежња у конзервативним појавама није ништа друго, до један криволински интеграл у простору од k димензија.

Нивоски варијетети. Горња теорема о раду примењених тежња, при преласку система из једне конфигурације на другу, може се дати још и овај интересантан облик.

Једначина

$$U(q_1 \cdots q_k) = const = \lambda$$

представља у k-димензионалном простору $(q_1 \cdots q_k)$ један варијетет $k - 1$-ог реда, који ће бити назван *нивоским варијететом* фигуративне тачке

$$N(q_1 \cdots q_k)$$

Таквих варијетета, за један исти потенцијал у датоме простору (N), има бескрајно много и сви се међусобно разликују вредношћу константе λ која их карактерише. Кроз сваку тачку тога простора пролази по један нивоски варијетет и вредност константе λ, што му одговара, једнака је вредности функције U за ту тачку; све тачке на једноме истом варијетету карактерисане су једном истом вредношћу константе λ и ова ће константа, с тога, бити названа *нивоским параметром* тих тачака.

Кад су дате две конфигурације

$$(q_1 \cdots q_k)_1$$
$$(q_1 \cdots q_k)_2$$

карактерисане вредностима λ_1 и λ_2 нивоских параметара, једначина (335) даје за тоталан рад примењених тежња, при прелазу од прве конфигурације на другу, израз

$$R = \lambda_2 - \lambda_1$$

што показује да је *рад R раван разлици вредности нивоских параметара што карактеришу те конфигурације.*

Док се, дакле, фигуративна тачка система, при модификацијама овога у току појаве, креће по једноме истом нивоском варијетету, тотални је рад примењених тежња, за све то време, раван нули. *Тај се рад јавља тек онда, кад фигуративна тачка при своме кретању мења нивоски варијетет. и он је, тада, у једноме датом размаку времена, раван разлици нивоских параметара што одговарају почетном и завршном тренутку тога размака.*

За појаве са једним степеном слободе нивоски се варијетет своди на једну тачку $q = \lambda$ на бројној линији Oq, где је q елеменат редукованог система. За појаве са два степена слободе он се своди на линију (*нивоска линија*)

$$U(q_1, q_2) = const$$

а за појаве са три степена слободе на површину (*нивоска површина*)

$$U(q_1, q_2, q_3) = const.$$

При кретању н. пр. тачке под утицајем силе управне на једну сталну раван P и која је функција одстојања тачке од равни, нивоске су површине равни паралелне равни P; такав је н. пр. случај теже.

Кад је сила управљена по управној из покретне тачке на једној утврђеној правој D, а функција је одстојања тачке од праве, нивоске су површине ротационе цилиндричне површине, чија је осовина ротације права D.

За централне силе, функције одстојања покретне тачке од центра O сила, те су површине концентричне сфере са центром у O.

При међусобној индукцији система од n електричних струја, које се и саме собом индукују, а при занемарљивим отпорима проводника и сталним електромоторним силама што су у саставу електричних кола, нивоски је варијетет дефинисан једначином

$$E_1 q_1 + \cdots + E_n q_n = const$$

где су E_i електромоторне силе, а q_i дебитиране количине електрицитета. То је у случају двеју струја једна права, а у случају три струје једна раван.

Кад се систем од две такве струје још и креће праволиниски, под утицајем једне механичке силе X што зависи само од положаја покретног кола, тако, да је

$$X = \varphi(x)$$

где је x параметар што дефинише тај положај, нивоски је варијетет површина

$$E_1 q_1 + E_2 q_2 + \int \varphi(x)\, dx = const.$$

Исти је случај и при деформацији једнога од електричних кола, у коме је случају x параметар те деформације.

В. **Интеграл живих сила и принцип одржања енергије.**

Једначина живих сила (334) добија у случају конзервативних појава један нарочити значајан облик: заменом њене леве стране изразом dU она постаје

$$dU = dT$$

из чега је

(336) $$T = U + h$$

где је h произвољна константа. *Једначина (336) представља интеграл живих сила за конзервативне појаве.*

Написана у облику

$$T - T_0 = U - U_0$$

једначина (336) изражава факт: *да је ма какав, коначан или бескрајно мали, прираштај кинетичке енергије у појави, при прелазу из једне конфигурације у другу, по* *вредности једнак раду примењених тежња што одговарају томе прелазу.*

Под изразом T *кинетичне енергије* у једначини (336) има се разумети израз

$$T = \frac{1}{2} \Sigma k_i v_i^2$$

или онај који се добија кад се, на место елемената примарног система (v_i), уведу елементи секундарног, трансформисаног или редукованог, система (q_i). У првоме случају тај израз зависи само од елемената v_i, а у другоме од елемената q_i и њихових извода q_i'.

Потенцијална енергија конзервативне појаве има за израз функцију

$$\Pi = - U + const$$

и зависи једино од конфигурације секундарног система (η_i) или (q_i). Константа се може прецизирати погодбом да потенцијална енергија Π буде равна нули за једну одређену конфигурацију C_0 $(\eta_1 \cdots \eta_n)$ односно C_0 $(q_1 \cdots q_k)$. *Тада је вредност потенцијалне енергије у појави, у једноме датом тренутку, равна раду примењених тежња који би се извршио при преласку система* $(\eta_1 \cdots \eta_n)$, *односно* $(q_1 \cdots q_k)$, *из конфигурације* C *коју он има у томе тренутку, на конфигурацију* C_0. То је непосредна последица једначине рада (335), која тада постаје

$$R = - \int_{(c_0)}^{(c)} d\Pi = \Pi - \Pi_0 = \Pi$$

Избор је специјалне конфигурације C_0 произвољан. Међу тим, кад између свију могућих конфигурација C постоји и једна таква, за коју је функција U максимум, т. ј. функција Π минимум, треба њу узети за C_0, јер ће онда све остале конфигурације C потенцијалне енергије бити позитивне. Кад функција U има више максимума, треба за C_0 узети ону конфигурацију што даје највећи максимум.

Тотална енергија E у појави представљена је збиром кинетичке и потенцијалне енергије

$$E = T + \Pi \tag{337}$$

Интеграл (336) живих сила тада доводи до овога основног резултата:

У једној конзервативној појави тотална је енергија стална за све време трајања појаве.

Пошто се, пак, обе енергије: кинетичка и потенцијална, мењају у току појаве, али тако, да њихов збир, при свему томе, остаје сталан, каже се да се оне у току појаве *трансформишу једна у другу.*

У томе се састоји *принцип одржања енергије* у конзервативним појавама у своме генералном облику.

Претпоставимо, сад, да се већ постојећим примењеним тежњама у једној конзервативној појави придружи један скуп нових примењених тежња ϑ_i и нека је

$$\vartheta_1\, dq_1 + \cdots + \vartheta_k\, dq_k$$

онај део целокупног елементарног рада, што одговара скупу тих примењених тежња, при модификацији $(dq_1 \cdots dq_k)$ система $(q_1 \cdots q_k)$. Једначина ће живих сила бити

$$dT = \Sigma\, Q_i\, dq + \Sigma\, \vartheta_i\, dq_i$$

или

$$\Sigma\, \vartheta_i\, dq_i = d\,(T - U) = d\,(T + \Pi) = dE \tag{338}$$

из чега се види, да се тотална енергија у једној уоченој конзервативној појави може само онда мењати, ако се већ постојећим непосредним тежњама у појави придода какав скуп нових тежња, које би у току појаве извршиле какав позитиван или негативан рад: *прираштај тоталне енергије првобитне консервативне појаве био би, тада, раван одговарајућем елементарном раду нових тежња ϑ_i који је тај прираштај произвео.*

Интеграцијом једначине (338) добија се

$$(338) \qquad \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = \int_{t_0}^{t} \Sigma\, \vartheta_i \, dq_i$$

где $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_0$ означују величину тоталне енергије у тренутцима t и t_0. Кад не било тежња ϑ_i, енергија би непрестано задржавала исту вредност $\mathcal{E}_0$ коју има у тренутку t_0. Ако се, сад, пусти да тежње ϑ_i својом акцијом доведу појаву у такво једно стање, у коме ће њена енергија $\mathcal{E}$ бити равна нули, из (35) се добија

$$(339) \qquad \mathcal{E}_0 = -\int_{t_0}^{t} \Sigma\, \vartheta_i \, dq_i$$

из чега се види: *да је стална тотална енергија у једној консервативној појави по величини једнака супротно означеном раду, који би требале да изврше какве нове тежње, да би појаву из актуелнога стања довеле у оно специјално стање, у коме би њена тотална енергија била равна нули.*

Једначина (338) показује да ће енергија $\mathcal{E}$ прирасти или опасти, према томе да ли је елементарни рад

$$\Sigma\, \vartheta_i \, dq_i$$

позитиван или негативан, т. ј. да ли је то *утрошен* или *произведен* рад. У првоме случају енергија се $\mathcal{E}$ *ствара*, у другоме она се *губи*. Принцип одржања енергије показује да ово стварање или губљење енергије може бити једино трошењем или произвођењем рада нових тежња.

С. Енергије и принцип одржања у неколиким врстама конкретних природних појава.

Све појаве са једним степеном слободе, у којима дефиниција елемента q редукованог система не зависи експлицитно од времена t, а примењене тежње не зависе ни од чега другог, до од елемената q, имају се сматрати за конзервативне. Кинетична енергија има за вредност

$$T = \boldsymbol{B} q'^2$$

где је $\boldsymbol{B}$ константа; потенцијална је енергија

$$\Pi = -\int X\, dq$$

где је израз X дефинисан погодбом да $X\,\delta q$ означује тотални виртуелни рад примењених тежња, при виртуелној промени δq елемента q. Тотална је, дакле, енергија

$$\mathfrak{E} = T + \Pi = \boldsymbol{B} q'^2 - \int X\, dq$$

и она је, према принципу одржања, непроменљива за све време трајања појаве, док се год не појаве нови узроци, који ће јој изменити вредност.

Све појаве са ма коликим степеном слободе, у којима дефиниција дескриптивних елемената (систем слободан, или редукован са везама ма које врсте) не зависи експлицитно од времена, а примењене тежње деривирају из једнога потенцијала што зависи само од тих елемената, такође су конзервативне.

Појаве, што се дешавају у материјалним системима, имају у крајњој анализи, као узроке, међусобну акцију материјалних или етарских делића, која зависи једино од међусобних растојања делића. Такве се појаве имају, дакле, сматрати за конзервативне и обухваћене принципом одржања енергије. Само, при томе треба водити рачуна о факту, да у материјалним системима, осим осетних кретања, која чула осећају као промене геометриских положаја, има и неосетних кретања, као што су невидљиве вибрације материјалних или етарских делића, које се могу констатовати само као топлота, светлост, електрицитет и т. д. Под кинетичком енергијом има се, тада, подразумевати тотална жива сила свих кретања, како видљивих механичких кретања, тако и невидљивих вибрација и стационарних кретања, која се манифестују као топлота, динамички електрицитет, разноврсне радијације, можда и као магнетизам, статички електрицитет и т. д. Другим речима: под кинетичком енергијом појаве треба разумети збир од механичке, термичке, светлосне, електричне и т. д. кинетичке енергије, сматрајући ове као живе силе при видљивим или невидљивим кретањима делића, што састављају систем у коме се појава дешава.

Под потенцијалном, пак, енергијом треба разумети збир од потенцијалне енергије што произлази од осетних механичких сила, и оних што произлазе од топлотних утицаја, електричних напона, електромоторних сила, хемиских афинитета и т. д.

Принцип одржања енергије тада је применљив за све такве појаве: тотална енергија у појави, изолованој од утицаја нових сила, непроменљива је за све време док траје изолација; енергија се може променити само акцијом каквих нових сила и онда је њена промена у једноме датом размаку времена равна утрошеном или произведеном раду ових сила у томе размаку времена.

Привидни губитци, или приращтаји, који се констатују при раду машина, кретању течности, у електричним појавама и т. д. и који прате трења, вискозитет течности, електричне отпоре при кретању струје и т. д. имају се приписати *трансформацији* видљивих кретања у невидљива и обратно, т. ј. трансформацији механичке кинетичке енергије у топлотну, електричну, светлосну и т. д. и обрнуто. Трење н. пр. производи топлоту, и експеримент показује да је количник изгубљене механичке енергије и количине топлоте сталан број: механички еквиваленат топлоте.

Од интереса је истаћи и факт, да и само квалификовање једне енергије, као кинетичке или потенцијалне енергије појава у материјалним системима, зависи од начина, на који је појава схваћена. Тако н. пр. енергија, која се приписује статичком притиску једнога гаса и која се, без дубљег анализања његовога механизма, сматра као потенцијална енергија, сматра се у кинетичкој теорији гасова као кинетичка енергија, сматрајући притисак гаса као манифестацију бескрајнога броја удара гасних молекула о дуварове суда. Тако исто, енергија једнога магнета има се према Ampère-овој теорији, сматрати за кинетичку, а према Maxwell-овој теорији за потенцијалну. Принцип одржања енергије није, међу тим, ни у колико тиме измењен: обе се врсте енергија могу мерити једним истим јединицама мере, обе се могу трансформисати једна у другу, без икаквог губитка или добитка у тоталној енергији[1]).

На послетку, лако је запазити и факт, да недовољно познавање механизма појава, прецизних закона који регулишу јачине примењених тежња, закона отпора и т. д. чини да механизам многих појава, схваћен онако какав изгледа у првој апроксимацији, не задовољава погодбе везане за консервативност, ма да би те погодбе биле задовољене кад би се он дубље и тачније познавао. Појаве се, н. пр. Хемиске Кинетике дешавају тако, да се у првој апроксимацији, при одре-

---

[1]) В. н. пр. Appell: Traité de Mécanique, 2-me ed. t. II. p. 78.

ђеним хемиским и физичким приликама, трансформаторске тежње у смеши могу сматрати као пропорционалне концентрацијама смеше по њеним активним телима. Тежње, међу тим, регулисане таквим законима, не деривирају, у опште, ни из каквога потенцијала. Тако, у примеру наведеном на стр. 198 такви би закони тежња, за скуп симултаних зависних хемиских реакција, на које се односе, били

$$X_1 = (a - \alpha y_1 - \beta z_1)(a' - \alpha' y_1)$$
$$X_2 = (a - \alpha y_1 - \beta z_1)(b - \beta' z_1)$$

где су y_1 и z_1 дескриптивни елементи појаве (утрошене количине реагенаса до тренутка t), $a, b, a', b', \alpha, \beta, \alpha' \beta'$ константе смеше; очевидно је да не постоји никакав потенцијал

$$- U(y_1, z_1)$$

из кога би те тежње деривирале. Несумњиво је, међу тим, да ће, кад се у току развитка Хемиске Механике, горњи нетачан закон буде сменио прави, тачним, за сад непознатим законом тих тежња, изражених као функције међусобних растојања материјалних делића и специфичних константата везаних за конкретну хемиску природу активних тела у смеши, такав потенцијал постојати и појава и по појединостима свога механизма моћи бити схваћена као конзервативна.

Сличан је случај и са великим бројем других природних појава, за данас у првој апроксимацији неконзервативних, као што су: појаве са трењима, оне што произлазе од егзистенције електричних отпора и т. д.

Енергије и принцип одржања у неколиким механичким појавама. 1° При кретању двеју материјалних тачака, које се међусобно привлаче пропорционално своме растојању r, непосредно примењена је сила

$$-\mu r \qquad (\mu > o)$$

а њен рад

$$-\mu r\,dr = d\left(-\frac{1}{2}\,\mu r^2\right)$$

Потенцијална је, дакле, енергија

$$\Pi = \frac{1}{2}\,\mu r^2$$

и она је увек позитивна, осим за $r = o$. Конфигурација C_0 је она, у којој се обе тачке поклапају; кинетичка је енергија

$$T = \frac{1}{2}\,(mv^2 + m'v'^2)$$

где су m и m' масе, а v и v' брзине двеју тачака.

Тотална енергија има за израз

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\,[mv^2 + m'\,v'^2 + \mu r^2]$$

Она се у току кретања може изменити само учешћем нових сила, чији ће тада рад, учињен при тој измени, бити раван прираштају енергије ε.

2° При осциловању клатна масе m, изложеног акцији теже, означивши са z висину клатна изнад његовог равнотежног положаја, рад атракције mg је

$$-\,mg\,dz$$

а рад силе, примењене на центар земље, раван је нули, пошто је та тачка непокретна. Тотални елементарни рад је, дакле,

$$-\,mg\,dz = d\,(-\,mgz)$$

према чему је потенцијална енергија појаве

$$\Pi = mgz$$

тако, да је ова позитивна за све положаје клатна, а равна нули само у његовом равнотежном положају.

Кинетичка енергија има за израз

$$T = \frac{1}{2} mv^2$$

где је v брзина клатна; према томе тотална је енергија

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2} mv^2 + mgz$$

и она остаје стална за све време кретања, под претпоставком, да се за то време не појављују нове силе које би је измениле.

3^0 Нека су x, y и z координате једног елемента датог чврстог, течног или гасовитог, савршено еластичног медијума, μ његова густина, ∂v његова запремина, а X, Y и Z компоненте спољних сила што делају на јединицу масе елемента.

Потенцијална енергија имаће при померању dx, dy, dz елемента прираштај

$$d\Pi = -(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)\,\mu\,dv = \mu V\,\partial v$$

где је V потенцијална енергија јединице масе елемента.

Кинетичка је енергија

$$T = \frac{\mu}{2}\,\partial v \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$

тако, да је прираштај тоталне енергије при томе померању, претпостављајући непромењљивост густине μ и запремине са временом

$$\frac{\mu}{2}\,\partial v \cdot d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] + \mu\,V\,\partial v$$

или

$$(340) \qquad \mu\, \partial v \left[\frac{d^2x}{dt^2}\, dx + \frac{d^2y}{dt^2}\, dy + \frac{d^2z}{dt^2}\, dz + V \right]$$

Ако се, при тим померањима, мењају и притисци којима је са свих страна изложен материјални елеменат, вршећи при том одређен рад, прираштају (340) тоталне енергије треба још придодати, и то са супротним знаком, и израз тога рада. Да би се овај одредио, нека се замисли око материјалног елемента паралелипипед, са дужинама страна ∂x, ∂y, ∂z, и нека су

$$(341) \qquad X_x, \; Y_x, \; Z_x$$

компоненте притисака, дефинисане тиме, да елементарни рад свих притисака на страну $\partial y \cdot \partial z$ паралелипипеда, што пролази кроз тачку (x, y, z) и паралелна је равни yz, има при померању dx, dy, dz елемента за вредност

$$(342) \qquad (X_x\, dx + Y_x\, dy + Z_x\, dz)\, \partial y \cdot \partial z$$

За супротну страну паралелипипеда, ону што пролази кроз тачку $(x + \partial x, y, z)$ извршени ће рад, опет, имати за вредност израз (342), али пошто се у овоме, оставивши y и z непромењене, x промени за ∂x и промени знак компонената (341).

Резултујући рад притисака, за те две стране, биће, дакле, вредност разлике

$$- \frac{\partial}{\partial x} (X_x\, dx + Y_x\, dy + Z_x\, dz)\, \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z$$

тако, да ће ти радови за три пара страна паралелипипеда, пошто је

$$\partial x \cdot \partial y \cdot \partial z = \partial v$$

имати за изразе

$$
\begin{aligned}
&-\left[\frac{\partial X_x}{\partial x}\,dx+\frac{\partial Y_x}{\partial x}\,dy+\frac{\partial Z_x}{\partial x}\,dz\right]\partial v-\\
&-\left\{X_x\frac{\partial dx}{\partial x}+Y_x\frac{\partial dy}{\partial x}+Z_x\frac{\partial dz}{\partial x}\right\}\partial v\\
&-\left[\frac{\partial X_y}{\partial y}\,dx+\frac{\partial Y_y}{\partial y}\,dy+\frac{\partial Z_y}{\partial y}\,dz\right]\partial v-\\
&-\left\{X_y\frac{\partial dx}{\partial y}+Y_y\frac{\partial dy}{\partial y}+Z_y\frac{\partial dz}{\partial y}\right\}\partial v\\
&-\left[\frac{\partial X_z}{\partial z}\,\partial x+\frac{\partial Y_z}{\partial z}\,dy+\frac{\partial Z_z}{\partial z}\,dz\right|\partial v-\\
&-\left\{X_z\frac{\partial dx}{\partial z}+Y_z\frac{\partial dy}{\partial z}+Z_z\frac{\partial dz}{\partial z}\right\}\partial v
\end{aligned}
$$

Елементарни радови, представљени првима од ових заграда, јављају се само при неуниформном просторном распореду притисака и равни су нули кад је тај распоред униформан.

Радови, представљени другим заградама, јављају се само при неуниформном просторном распореду брзина кретања и ишчезавају кад је тај распоред униформан. Њихов скуп саставља прираштај *унутрашње енергије* материјалног медиума, који, дакле, има за израз

$$
\begin{aligned}
\mu\cdot dW\cdot\partial v=&-\left(X_x\frac{\partial dx}{dx}+Y_x\frac{\partial dy}{\partial x}+Z_x\frac{\partial dz}{\partial x}\right)\partial v-\\
&-\left(X_y\frac{\partial dx}{\partial y}+Y_y\frac{\partial dy}{\partial y}+Z_y\frac{\partial dz}{\partial y}\right)\partial v-\\
&-\left(X_z\frac{\partial dx}{\partial z}+Y_z\frac{\partial dy}{\partial z}+Z_z\frac{\partial dz}{\partial z}\right)\partial v
\end{aligned}
\tag{343}
$$

где W означује унутрашњу енергију јединице масе медијума.

Према карактеристичној особини течних и гасовитих медијума је

$$X_y = Y_z = Z_x = o$$
$$X_x = Y_y = Z_z = p$$

где је p одређена функција густине μ, чији облик зависи од материјалне природе медијума. Једначина (343) постаје

$$-\mu\, dW = p\left(\frac{\partial dx}{\partial x} + \frac{\partial dy}{\partial y} + \frac{\partial dz}{\partial z}\right)$$

и придата једначини везе

$$d\mu + \mu\left(\frac{\partial dx}{\partial x} + \frac{\partial dy}{\partial y} + \frac{\partial dz}{\partial z}\right) = o$$

доводи до једначине

$$dW = \frac{p d\mu}{\mu^2}$$

из које се за унутарњу енергију јединице масе медијума добија израз

$$W = \int \frac{p}{\mu^2}\, d\mu + const$$

који ће бити одређен и познат као функција густине, кад је позната карактеристична функција p медијума, изражена помоћу те густине.

Тако је н. пр. за савршене гасове (кад нема провођење топлоте)

$$p = A\,\mu_k$$

где је A специфичка константа гаса, а k количник двеју специфичких топлота, према чему је

$$W = \frac{A}{k-1}\,\mu^{k-1} + const$$

За инкомпресибилне течности је

$$\mu = const$$

па, према томе,

$$W = const$$

У овоме н. пр. последњем случају приараштај тоталне енергије у медијуму има за израз

$$\mu \cdot \partial v \left(\frac{d^2 x}{dt^2} dx + \frac{d^2 y}{dt^2} dy + \frac{d^2 z}{dt^2} dz \right) -$$

$$- (X\, dx + Y\, dy + Z\, dz)\, \mu \cdot \partial v +$$

$$+ \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{dy} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dv$$

и он је према хидродинамичким једначинама

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = \mu X - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\mu \frac{d^2 y}{dt^2} = \mu Y - \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\mu \frac{d^2 z}{dt^2} = \mu Z - \frac{\partial p}{\partial z}$$

одиста раван нули, у сагласности са принципом одржања енергије.

Енергија и принцип одржања у термодинамичким појавама. Нека је у једном материјалном систему извршена каква бескрајно мала модификација (промене геометриских, кинетичких, физичких, хемиских и т. д. стања), праћена променом термичког стања у систему, а под утицајем комплекса S спољних сила, које при тој трансформацији извршују рад R. Претпоставивши да акција ових сила има за ефекат:

1° промене брзина при видљивим кретањима система;

2° промене брзина при невидљивим кретањима материјалних делића у систему;

3° у опште, промене елемената што дефинишу међусобне положаје материјалних делића, разноврсна физичка, хемиска и т. д. стања у систему, тотална енергија у појави, са чијим прираштајем треба уједначити рад R, састоји се из прираштаја:

1° кинетичне енергије T система при кретањима 1°;

2° кинетичне енергије T' делића при кретањима 2°;

3° потенцијалне енергије у систему, чија величина зависи од међусобних средњих положаја вибришућих делића и од скупа физичких и хемиских стања система у посматраноме тренутку, тако, да се она, претпостављајући конзервативност модификација, враћа на једну одређену, првобитну, вредност кад год се систем буде вратио у одговарајуће, одређено, првобитно стање. У састав ове енергије не улази потенцијална енергија што произлази од комплекса S спољних сила.

Прираштај 1° има за израз $T_2 - T_1$, где су T_1 и T_2 величине кинетичке енергије у завршном и почетном тренутку модификације.

Прираштај 2° има за израз $T_2' - T_1'$ и, према механичкој теорији топлоте, манифестује се као прираштај *термичне енергије* система. Према принципу еквиваленције механичне и термичне енергије, тај је прираштај еквивалентан изразу

$$J(Q_2 - Q_1)$$

где је $Q_2 - Q_1$ прираштај количине топлоте при посматраној модификацији, а J коефиценат независан од конкретне природе материјалног система и низа модификација кроз које систем пролази (механички еквиваленат топлоте).

Означивши прираштај 3° са

$$J(U_2 - U_1)$$

функција U представља у Термодинамици *унутрашњу енергију* система.

Општи израз принципа одржања енергије у појавама наведене врсте тада је

$$(344) \quad (T_2 - T_1) + J(Q_2 - Q_1) + J(U_2 - U_1) = R$$

У специјалном случају кад је материјални систем под утицајем комплекса S у равнотежи, биће

$$T = o$$

и једначина се (344) своди на

$$(345) \qquad R = J(Q_2 - Q_1) + J(U_2 - U_1)$$

или у диференцијалном облику на

$$dR = J(dQ + dU)$$

која показује да је у таквим приликама рад комплекса S пропорционалном збиру ослобођене количине топлоте и прираштаја унутрашње енергије материјалног система.

На послетку, ако је, при томе, модификацијом система извршен какав кружни процес, израз принципа одржања енергије своди се на прост облик

$$dR = J\,dQ$$

Приметимо да количина топлоте, ослобођена при једној одређеној модификацији система, па, дакле, и прираштај термичне енергије система, зависи, у опште, не само од почетног и завршног стања, већ и од низа модификација кроз које се прешло од првога на друго стање. Јер, ако се учини да систем пређе из стања (1) у стање (2), претпостављајући да је, при томе, непрестано непокретан под утицајем комплекса сила S, из (345) се добија, да је

$$(346) \qquad Q_2 - Q_2 = -(U_1 - U_1) + \frac{R}{J}$$

Прираштај унутрашње енергије $U_2 - U_1$ зависи само од стања (2) и (1), али са радом R комплекса S тај ће случај бити само онда, кад тај комплекс буде деривирао из каквог потенцијала, што није увек случај. Тако, ако се m грама каквога савршеног гаса, који је у стању (1) карактерисан температуром t_1, притиском p и запремином v_1, загревањем под сталним притиском p доведе на температуру $t_2 > t_1$, гас ће заузети извесну запремину $v_2 > v_1$ и ослободиће количину топлоте

$$(347) \qquad Q = - mC(t_2 - t_1)$$

где је C специфична топлота гаса под сталним притиском. Међутим, гас се из стања (1) може довести на стање (2) и овим низом модификација:

1° доводећи, најпре, грејањем, гас са температуре t_1 на температуру t_2, без промене запремине v_1, при чему ће ослобођена топлота имати за израз

$$(348) \qquad - mc(t_2 - t_1)$$

где је c специфичка топлота гаса под сталном запремином;

2° пустивши за тим да гас, довођењем у везу суд у коме је, са другим празним судом, заузме запремину v_2 и да се поступно врати на температуру t_2. Таква једна операција, према Gay-Lussac-овом закону, не повлачи собом ни апсорпцију ни ослобођавање топлоте.

Систем се, дакле, после операције 2^0 налази у стању (2), а количина топлоте, ослобођене при таквоме прелазу из стања (1) у (2) има за тоталну вредност

$$Q' = -mc\,(t_2 - t_1)$$

Разлика количина топлоте

$$Q' - Q = m\,(C - c)\,(t_2 - t_1)$$

очевидно није равна нули, што показује да ослобођена количина топлоте одиста зависи од низа модификација, којима се из почетног стања прелази у завршно.

На сличан је начин лако уверити се и о томе, да кад је низ извршених модификација такав, да је њиме извршен један кружни процес, прираштај термичне енергије, у опште, није раван нули и да се, понављајући такав један процес довољно велики број пута, може учинити да ослобођена, или апсорбована, количина топлоте буде колико се хоће велика[1]).

Међутим, једначина (346) истиче у исто време на видик и овај резултат: *да би прираштај термичне енергије, при прелазу система из почетног стања (1) у завршно стање (2), био независан од низа модификација којим се прешло из једнога стања у друго, потребно је и довољно да комплекс сила S деривира из једнога потенцијала независног од времена.*

Такве су н. пр. погодбе задовољене у ова два случаја, који су од важности за Хемиску Калориметрију:

1^0 кад је посматрани материјални систем какав савршен гас, изложен непроменљивоме притиску p; комплекс S има, тада, за потенцијал израз pv, и израз се (346) своди на

$$Q_2 - Q_1 = -(U_2 - U_1) + \frac{p}{J}(v_2 - v_1)$$

---

[1]) В. н. пр. Duhem: Thermodynamique et Chimie, 2-me ed. p. 40—42.

2° кад запремина гаса остаје непромењена у току модификације; комплекс S има за потенцијал сталну количину и израз се (346) своди на

$$Q_2 - Q_2 = -(U_2 - U_2)$$

Енергије и принцип одржања у електричним појавама. — 1° **Електрична енергија наелектрисаних проводника.** Под *електричном енергијом* једнога система проводника разуме се потенцијална енергија коју он у себи садржи, и која се манифестује у облику позитивнога рада који извршује систем, кад се, доведен у везу са земљом, сам собом враћа у електрично равнотежно стање. Тако исто, електризација једнога система проводника повлачи собом потрошњу одређенога рада, једнаког прираштају електричне енергије, који тада систем добија. Ти су радови, по својој величини и смислу, мерило саме електричне енергије система.

Ако се *електричним потенцијалом* V проводника, у једној његовој датој тачки, назове рад, који би се требао извршити, да би се у ту тачку довела са земље, или каквога другог тела у вези са земљом, једна електрична маса равна јединици, електрична се енергија, за ма какав систем наелектрисаних проводника, може изразити помоћу потенцијала. Она, у случају једнога проводника, чији капацитет нека је C, има за израз рад

$$V\,dM = \frac{M}{C}\,dM$$

утрошен при повећању електричног оптерећења M за dM; према томе, и пошто се енергија своди на нулу за $M = o$, она ће, у случају једнога проводника, имати за израз

$$\frac{M^2}{2\,C} = \frac{1}{2}\,C\,V^2 = \frac{1}{2}\,M\,V$$

т. ј. бити пропорционална квадрату оптерећења, или квадрату потенцијала.

У случају ма колико броја наелектрисаних проводника енергија има за израз

$$\frac{1}{2} \Sigma M V$$

где се знак Σ односи на све проводнике.

Енергија, акумулисана електризацијом једнога система проводника, троши се при електричном испражњавању проводника, трансформишући се, при том, у механички рад, ослобођену топлоту, хемиску акцију и т. д. Тако, кад је тотална електрична енергија једне батерије, при испражњавању ове, трансформисана у топлоту, означивши са J механички еквиваленат топлоте а са Q ослобођену топлоту, биће

$$\frac{1}{2} \Sigma M V = J Q$$

тако, да, ако је батерија састављена из n међу собом идентичких кондензатора везаних по површини, биће

$$Q = \frac{n}{2J} C V^2 = \frac{1}{2nJ} \frac{M^2}{C} \quad .$$

из кога се види да је ослобођена топлота, за једно утврђено оптерећење M, обрнуто пропорционална броју проводника, а за један утврђени потенцијал пропорционална томе броју.

На против, ако су кондензатори везани у низу, биће

$$Q = \frac{1}{2nJ} C V^2 = \frac{n}{2J} \frac{M^2}{C}$$

дакле, обрнуто ономе што се имало код кондензатора везаних по површини.

2° **Електрични рад при кретању проводника.** Нека је дат систем покретних проводника код којих се, при њиховом кретању, одржава непромењљиво оптерећење. Кад се проводници крећу без међусобне комуникације, производи се извесан рад електричних сила, позитиван или негативан, и тиме се мења електрична енергија система; ако се каквим спољним радом систем деформише у супротном смислу електричних акција, електрична ће се енергија повећати у извесној мери која одговара утрошеном спољном раду. Кад се проводници оставе сами себи, они ће се кретати у правцима електричних сила. Рад ће ових сила тада бити позитиван и одговараће смањеној електричној енергији система. Ако се са dR означи рад тих сила а са dW одговарајући прираштај електричне енергије, биће, према принципу одржања, у сваком тренутку

$$dW + dR = o \tag{349}$$

или

$$dW = -dR$$

што значи да енергија покретних проводника са сталним оптерећењем, остављених својим међусобним акцијама, постаје све мања и тежи једноме минимуму.

Нека је, сада, дат систем покретних проводника, код којих се, при њиховоме кретању, одржава сталан потенцијал, помоћу каквих електричних извора који се налазе ван области акције електричних сила у систему, н. пр. помоћу затворених кондензатора, чија је спољна арматура везана са земљом. Означивши, тада, са W_1 енергију проводника, са W_2 енергију кондензатора, енергија ће система бити

$$W = W_1 + W_2$$

Кад се систем деформише без учешћа какве спољне енергије, биће опет

$$dT + dW = o$$

т. ј.

$$dT + dW_1 + dW_2 = o$$

Енергија проводника има за израз

$$W_1 = \frac{1}{2} \Sigma MV$$

према чему је

$$dW_1 = \frac{1}{2} \Sigma M dV + \frac{1}{2} \Sigma V dM; \tag{350}$$

енергија, пак, кондензатора, чији је капацитет сталан, има за израз

$$W_2 = \frac{1}{2} \Sigma CV^2$$

према чему је

$$dW_2 = \Sigma CV dV$$

Међу тим, за сваки систем, састављен од једног проводника и једног кондензатора, тотално је оптерећење $M + CV$ стално, према чему је

$$dM + C dV = o$$

па, дакле, и

$$V dM + CV dV = o$$

тако, да је за целокупан систем проводника и кондензатора

$$\Sigma V dM + \Sigma CV dV = o$$

Једначина (350), према томе, постаје

$$dW_1 = \frac{1}{2} \Sigma M dV - \frac{1}{2} \Sigma CV dV = \frac{1}{2} \Sigma M dV - \frac{1}{2} dW_2$$

одакле је

$$(351) \qquad 2dW_1 + dW_2 = \Sigma M\, dV = -\, \Sigma \frac{M\, dM}{C}$$

Та једначина вреди, па ма колики били капацитети кондензатора. Она ће, дакле, вредети и онда, кад су ти капацитети бескрајно велики према оптерећењима M проводника, тако, да су варијације потенцијала dV и варијације енергије MdV занемарљиве. Тада се има случај кондензатора одржаваних на сталним потенцијалима помоћу спољних електричних извора, и једначина се (351) своди на

$$2dW_1 + dW_2 = o$$

или

$$-(dW_1 + dW_2) = dW_1$$

или, према једначини (349)

$$dR = dW_1$$

То показује, да кад се проводници одржавају на сталним потенцијалима, енергија се система, у току једне, ма какве, деформације система, повећава за једну количину, равну раду спољних сила. Кад је систем остављен сам себи, тај је рад позитиван, и утрошен је од стране електричних извора, који одржавају поменуте потенцијале сталне. Ти извори придају, дакле, систему у свакоме тренутку извесну количину енергије, која се дели на два дела: један део служи на произвођење рада dR електричних сила, други део на повећање електричне енергије dW_1 система. Та електрична енергија тежи, дакле, тада, једноме максимуму[1]).

3° **Губитак електричне и њена трансформација у друг врсте енергија.** Кад се у једноме систему наелектриса

---

[1]) Mascart: Leçons sur l'electricité et le magnétisme, t. I. p. 96. etc.

них проводника изврши ма каква модификација, а без учешћа какве спољне силе, тако, да систем пређе из једнога датог стања (1) у друго једно дато стање (2), електрична је енергија у (2) увек мања но у (1). Изгубљена енергија може, међу тим, бити утрошена у другоме каквом облику, тако да н. пр. изврши какав механички рад, да повећа живу силу једнога система, да се повећа количина топлоте у једноме систему, да произведе другу какву одређену физичку или хемиску промену система и т. д.

Нека је н. пр. дат какав проводник са капацитетом C (н. пр. каква електрична батерија), и чије је електрично стање дефинисано потенцијалом V. Његова ће потенцијална енергија имати за израз

$$W = \frac{1}{2} MV = \frac{1}{2} CV^2$$

Ако се проводник састави са земљом, помоћу жице чији је електрични отпор R, за време dt проћи ће кроз жицу маса електрицитета dM, а потенцијал ће се смањити за dV, тако, да је

$$dM = i\,dt = C\,dV;$$

где је i јачине струје при томе кретању електрицитета; губитак енергије проводника биће за то време

$$dW = CV \cdot dV = V \cdot dM = i\,V\,dt$$

Ако је, за то време, јачина струје i остала осетно стална, тако, да буде важио Ohm-ов закон

$$i = \frac{V}{R}$$

последња једначина даје

$$\frac{dW}{dt} = iV = Ri^2$$

што значи да је губитак енергије проводника у јединици времена раван производу отпора жице и квадрата јачине струје. Ако је тај губитак утрошен на загревање жице, и ако је Q прираштај количине топлоте у жици, мерен калориметриским методама, а J механички еквиваленат топлоте, тако, да је према принципу одржања енергије

$$\frac{dW}{dt} = JQ$$

последња једначина доводи до релације

$$JQ = Ri^2$$

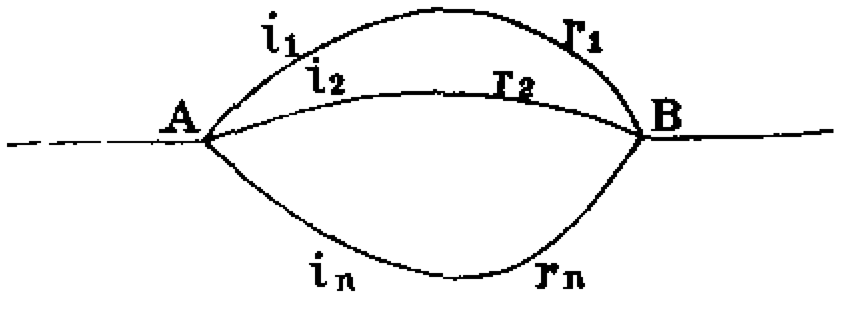
која исказује Joule-ов закон: *ослобођена количина топлоте (прираштај термичне енергије) у жици равна је производу електричног отпора жице и квадрата јачине струје.*

Joule-ов је закон, дакле, последица принципа одржања енергије и Ohm-овог закона. Обрнуто, Ohm-ов се закон може сматрати и као последица принципа одржања и Joule-овог закона.

У опште, кад год је пад потенцијала, између две тачке A и B наелектрисаног система, континуалан и регулисан Ohm-овим законом, губитак ће енергије, што одговара томе паду, имати за вредност

$$W = Ri^2$$

где је R отпор проводника између тачака A и B, а i јачина струје што циркулише од A ка B.



Сл. 33.

За Ohm-ов закон везан је и један, са феноменолошког гледишта интересантан, факт у проблему губитка електричне енергије. Претпоставимо да се струја у кретању из тачке A до тачке B рачва на n грана, као у слици и нека су $R_1 \cdots R_n$ отпори одговарајућих жица; $i_1 \cdots i_n$ јачине струја у овима, одређене, за сваку грану струје, Ohm-овим законом.

$$i_1 = \frac{V_1 - V_2}{R_1} \tag{352}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$i_n = \frac{V_1 - V_2}{R_n}$$

где је $V_1 - V_2$ разлика потенцијала у тачкама A и B. Губитак енергије у јединици времена, при прелазу од A на B, има за вредност

$$\frac{dW}{dt} = \Sigma R_k i_k^2 \tag{353}$$

Лако се уверити да, при једноме одређеном паду потенцијала $V_1 - V_2$, а при разним дистрибуцијама јачина струја при грањању, израз (353) има своју најмању могућну вредност за ону дистрибуцију, при којој су јачине струја дефинисане једначинама (352). Јер, ако се уочи друга каква дистрибуција, при којој би јачине струја при грањању биле

$$i_1' = i_1 + h_1, \cdots\cdots i_n' = i_n + h_n$$

где су $h_1 \cdots h_n$ разлике првобитних и тако измењених јачина, израз

$$\Sigma R_k i_k'^2 = \Sigma R_k i_k^2 + 2 \Sigma R_k i_k h_k + \Sigma R_k h_k^2 \tag{354}$$

постаје, према једначинама (352),

$$\Sigma R_k i_k^2 + 2 (V_1 - V_2) \Sigma h_k + \Sigma R_k h_k^2$$

А пошто грањањем целокупна јачина струја није измењена, то је

$$\Sigma i_k' = \Sigma i$$

па дакле

$$\Sigma h_k = o$$

тако, да се израз (354) своди на

$$\Sigma R_k (i_k^2 + h_k^2)$$

и постаје минимум за

$$h_1 = h_2 = \cdots = h_n = o$$

Израз се, дакле,

$$\Sigma R_k i_k^2$$

при гранању струја своди на минимум, кад је дистрибуција јачина струја онаква, каква је она у реалности у природноме току појаве.

Од интереса је приближити тај факт сличном факту, наведеном при излагању принципа најмање акције.

Претпоставимо, сад, да се између тачака A и B, за које је претпостављено да се одржавају на сталним потенцијалима V_1 и V_2, потенцијал нагло промени у једној тачки P, тако да у тој тачки добије дисконтинуалан пад

$$H = U_1 - U_2$$

Јачина струје, што тада циркулише између A и B, биће измењена и дата изразом

$$i = \frac{V_1 - U_1}{R_1} = \frac{U_2 - V_2}{R_2} = \frac{V_1 - V_2 - (U_1 - U_2)}{R_1 + R_2}$$

или

$$i = \frac{(V_1 - V_2) - H}{R}$$

где су R_1 и R_2 отпори проводника пре и после тачке P, а

$$R = R_1 + R_2$$

Тотални губитак електричне енергије, при прелазу од *A* на *B* тада је

$$W = i(V_1 - V_2) = i(iR + H) = Ri^2 + Hi$$

и састоји се, као што се види, из два дела:

1° једнога пропорционалног квадрату јачине струје, који представља, по Joule-овом закону, прираштај термичне енергије проводника *AB*;

2° једнога пропорционалног самој јачини струје и који је локализиран на дисконтинуалност *P*. Овај је губитак позитиван кад је пад потенцијала у правцу кретања струје, а негативан у супротном правцу. У првоме случају, ако је тај део губитка енергије употребљен на промене температуре проводника, наступиће загревање, а у другоме случају хлађење проводника. То је *Peltier-ова појава* при додиру два наелектрисана метала. На место трансформације у термичну енергију, може се имати и изазивање какве хемиске реакције, која ће тада трошити топлоту кад је *H* позитивно, а производити топлоту кад је *H* негативно.

Губитак електричне енергије, изазван падом потенцијала може бити утрошен и на хемиско разлагање течних тела или раствора (електролиза). Faraday-ев закон, према коме је количина електролитички разложене воде пропорционална количини електрицитета која за то време прође између електрода, допушта да се израчуна пад потенцијала *H*, потребан за такво разлагање. Ако је *M* количина електрицитета која пролази између електрода за време електролизе, *P* њоме разложена количина воде, количник

$$\frac{P}{M} = p$$

који је, према Faraday-овом закону, сталан за све време појаве, представља тежину воде разложене јединицом количине електрицитета. Са друге стране, означивши са Q топлоту, везану при формацији јединице количине воде на сталноме притиску, енергија, потребна за разлагање количине P воде, имаће за израз JaP, где је J механички еквиваленат топлоте. А пошто ова енергија треба да се добије падом H потенцијала, коме одговара губитак енергије

$$W = MH$$

то треба да је

$$MH = JaP$$

из чега је

$$H = \frac{JaP}{M} = Jap$$

Између двеју електрода волтаметра, у коме се врши електролиза, осим разлике потенцијала што произлази од електричног отпора течности, постоји, дакле, и један дисконтинуалан пад потенцијала, који има за бројни израз механички рад што одговара енергији апсорбованој количином воде, разложеном јединицом количине електрицитета[1].

4° **Појаве индукције као последице принципа одржања енергије**[2]. Нека је какав магнетни систем стављен у близину каквога проводника S, који је у вези са каквим електричним извором (елементом, батеријом и т. д.). Кад би магнетни систем био непокретан, јачина би i_0

---

[1] Helmholtz: Ueber die Erhaltung der Kraft, 1847; Mascart: loc. cit. 562—572.

[2] Mascart: loc. cit. p. 278.

перманентне струје, што пролази кроз проводник, била дата Ohm-овим законом

$$E = R\,i_0 \tag{355}$$

где је E електромоторна сила извора, а R отпор проводника.

Множећи једначину са $i_0\,dt$ добија се једначина

$$E\,i_0\,dt - R\,i_0^2\,dt = o \tag{356}$$

која исказује факт, да је за време dt енергија, произведена у електричном извору (хемиском акцијом), једнака термичној енергији, утрошеној, за то време, у проводнику, а по Joule-овом закону.

Ако се, сад, магнетни систем почне кретати, остајући при томе непрестано под утицајем електромагнетних акција, спољни рад, што резултује из тога кретања, може бити извршен само на рачун јединог извора енергије у систему, т. ј. на рачун енергије што произлази из хемиских акција. Сувишак хемиског рада над термичном енергијом, утрошеном у проводнику за време dt, употребљен је, тада, да изврши спољни рад dT што одговара електромагнетним силама при томе кретању, према чему је

$$E\,i\,dt - R\,i^2\,dt = dT \tag{357}$$

где је i јачина струје што пролази кроз проводник.

Овај, пак, рад има за вредност

$$dT = i\,d\,Q$$

где је Q флукс силе што произлази из магнетног система и која пролази кроз проводник. Једначина (357), дакле, постаје

$$E = R\,i + \frac{dQ}{dt}$$

или

$$(358) \qquad E - \frac{dQ}{dt} = Ri$$

из чега се види, да израз $\frac{dQ}{dt}$ игра улогу извесне електромоторне силе, која је антагонистична према електромоторној сили E: то је електромоторна индукциона струја.

Кад је вредност dQ позитивна, т. ј. кад флукс Q расти, електромоторна индукциона струја тежи да смањи јачину струје i и рад је електромагнетних сила позитиван. Кад је вредност dQ негативна, магнетни се систем креће опирући се електромагнетним силама, из чега произлази једна нова енергија у систему и јачина је струје i тада већа, но у случају кад се систем не креће.

Као што се, дакле, види, једначина (358), као последица принципа одржања енергије, доводи до ових последица:

1° Електромоторна индукциона сила такве је природе, да се непрестано противи кретању система, пошто се првобитна јачина струје смањује, или повећава, према томе да ли се магнетни систем креће под утицајем електромагнетних сила, или се овима противи: то је Lenz-ов закон индукције.

2° Кад би јачина струје била равна јединици, извршени спољни рад dT одговарао би раду $\frac{dQ}{dt}$, извршеном у јединици времена. Електромоторна индукциона сила равна је, дакле, таквоме раду: то је Neumann-ова теорема за ту силу.

3° Електромоторна индукциона сила независна је од електромоторне силе електричног извора; индукција ће, дакле, остати једна иста, па ма колико слаба била првобитна струја. Она ће се, дакле, имати и онда, кад је проводник у неутралном електричном стању, са погодбом да образује једно затворено коло. То се потврђује Faraday-евим експериментима о индукцији.

Ови се закључци, у осталом, распростиру и на разноврсне друге случајеве индукционих појава. Тако:

У случају, кад у проводнику има ауто-индукције, флукс силе, која пролази кроз проводник у једноме датом тренутку, састоји се из флукса Q што произлази од спољних утицаја и флукса произведеног самом струјом у проводнику. Ако је L вредност овога последњег за јединицу јачине струје, он ће имати вредност Li за јачину струје i. Једначина индукције за тај случај, а према принципу одржања енергије, је

$$E - \frac{d\,(Q + Li)}{dt} = Ri$$

Ако је индуктор каква магнетна ламела, чија магнетна моћ нека је $\boldsymbol{\Phi}$, биће

$$Q = M\,\boldsymbol{\Phi}$$

где је M коефицијенат индукције, и једначина се може написати у облику

$$(E - Ri)\,dt = d\,(M\boldsymbol{\Phi} + Li) \tag{359}$$

Кад је моћ $\boldsymbol{\Phi}$ стална и кад се узме да је магнетна ламела пренесена из бескрајности у један одређен положај према индукованом непокретном проводнику, једначина се може написати у облику

$$(E - Ri)\,dt = \boldsymbol{\Phi}\,dM + L di$$

Множећи је са i и интегралећи је од $t = o$ до тренутка t у коме је ламела заузела свој дефинитивни положај, добија се једначина

$$\int_0^t (Ei - Ri^2)\, dt = \Phi \int_0^t \frac{dM}{dt}\, i\, dt + \left[\frac{L i^2}{2}\right]_0^t$$

Лева страна једначине представља сувишак хемиске енергије елеткричног извора, у размаку времена (o, t), над термичном енергијом у проводнику. Први сабирак на десној страни представља тотални рад електромагнетних сила и зависи од начина кретања система. Други сабирак на десној страни представља прираштај потенцијалне енергије струје; тај је прираштај раван нули кад се завршна јачина струје поклапа са почетном.

У случају кад ламела, остајући непокретна, има променљиву моћ Φ, имала би се једначина

$$(E - Ri)\, dt = M\, d\Phi + L\, di$$

а из ове је једначине

$$\int_0^t (Ei - Ri^2)\, dt = M \int_0^t \frac{d\Phi}{dt}\, i\, dt + \left[L\, \frac{i^2}{2}\right]_0^t$$

где поједини чланови имају слично енергетичко значење.

Најпосле, у општем случају, кад ламела мења у току појаве и положај и облик и своју моћ, а и сам се проводник струје деформише, имала би се општа једначина (359) из које се за електромоторну индукциону силу добија израз

$$\frac{d}{dt}(M\Phi + Li) = M\frac{d\Phi}{dt} + \Phi\,\frac{dM}{dt} + L\,\frac{di}{dt} + i\,\frac{dL}{dt}$$

У случају, кад се индуктор своди на једну струју што произлази из каквог електричног извора сталне јачине, такав се индуктор може сматрати као еквивалентан једној ламели и обухватити горњим општим случајем; али тада, међусобним утицајем, и индуктор ће бити индукован, тако, да ће електричне модификације, у оба међусобно индукована електрична кола, бити регулисане скупом једначина

$$(E - Ri)\,dt = d\,(Mi' + Li)$$

$$(E' - R'\,i')\,dt = d\,(Mi + L'\,i')$$

где су R и R' коефициенти отпора у оба кола, L и L' њихови коефицијенти ауто-индукције, E и E' електромоторне силе извора које она садрже, i и i' јачине струја у њима, M коефицијенат међусобне индукције.

Множећи прву од ових једначина са i, другу са i' и сабирајући их, добија се једначина

$$Ei + E'i' - Ri^2 - R'i'^2 =$$

$$(360) \qquad = \frac{1}{2}\,d\,(Li^2 + 2\,M\,ii' + L'i'^2) +$$

$$+ \frac{1}{2}\,i^2\,dL + ii'\,dM + \frac{1}{2}\,i'^2\,dL'$$

Лева страна представља сувишак енергије извора у оба електрична кола над термичном енергијом, утрошеном на загревање проводника. Десна страна представља тотални прираштај потенцијалне енергије двају кола и спољни рад електродинамичних сила.

Кад су оба електрична кола непомична и непромењивог облика, коефицијенти су M, L и L' константе; део енергије, нетрансформисане у топлоту, има за израз

$$\frac{1}{2}\,d\,(Li^2 + 2\,Mii' + L'i'^2)$$

Сваки од израза

$$\frac{1}{2} Li^2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} L'i'^2$$

представља властиту енергију одговарајуће струје; ова је бројно једнака раду, који би се требао утрошити да би се изазвала таква струја у одговарајућем колу, или спољашњем раду, који би могла извршити та струја, остављена сама себи и сводећи своју јачину на нулу.

Израз

$$Mii'$$

представља једну колективну енергију обеју струја: ова је бројно једнака раду који би се требао утрошити да би се оба електрична кола, кроз која пролазе струје јачине i и i', довела из бескрајности у свој актуелни положај.

У општем случају кад су коефицијенти M, L и L' променљиви (електрична кола покретна и деформабилна), први члан на десној страни једначине (360) опет представља тотални прираштај потенцијалне енергије двају кола; израз

$$\frac{1}{2} (i^2 \, d\,L + 2\, ii' \, dM + i'^2 \, dL')$$

представља рад који извршују електродинамичне силе у проводницима, при променама положаја и облика ових.

5⁰ **Принцип одржања при испражњавању електричних кондензатора.** Кад се арматуре кондензатора, помоћу проводне жице, споје са земљом, или међу собом, кондензатор се испражњује. Електричне модификације у жици дешавају се, за све време трајања појаве, тако, како ће бити задовољен принцип одржања енергије, који, у томе конкретном случају, добија овај облик:

у бескрајно малом размаку времена dt тотална енергија, произведена електро-моторном силом употребљенога извора (н. пр. електричног елемента) и испражњавањем кондензатора, једнака је збиру:

1° количине топлоте, развијене отпором проводне жице;

2° варијације електро-магнетне енергије у систему за време dt.

Означивши са E, i, R, L, q, C, Q електро-моторну силу извора, јачину струје испражњавања, отпор и коефициенат ауто-индукције жице, електрично оптерећење и капацитет кондензатора, и флукс индукције проузроковане спољним утицајима, који пролази кроз проводну жицу, имаће се за те енергије ови изрази:

1° енергија, произведена електро-моторном силом E у размаку времена dt је

$$E\,i\,dt\,;$$

2° енергија, развијена испражњавањем кондензатора у размаку dt, а која одговара његовој разлици потенцијала

$$V_2 - V_1 = \frac{q}{C}$$

има за израз

$$\frac{q\,i}{C}\,dt\,;$$

3° количина топлоте, развијена отпором проводне жице, биће по Joule-овом закону

$$R\,i^2\,dt\,;$$

4° варијација електро-магнетне енергије у систему једнака је, према основном закону електро-магнетне индукције, јачини i струје, помноженој прираштајем збира флукса Q спољне индукције и флукса Li аутоиндукције при пролазу струје кроз жицу; та ће варијација, дакле, имати за израз:

$$i\,d\,(Q + Li)$$

Према принципу одржања енергије имаће се, дакле, једначина

$$Ei\,dt + \frac{q\,i}{C}\,dt = R\,i^2\,dt + i\,d\,(Q + Li)$$

у којој ако се стави да је

$$i = -\frac{dq}{dt}$$

(што значи да се сматра као позитивна јачина струје испражњавања кад ова постаје умањавањем електричног оптерећења кондензатора) добија се најопштиј једначина за појаву испражњавања кондензатора

$$L\frac{d^2 q}{dt^2} + \left(R + \frac{dL}{dt}\right)\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = \frac{dQ}{dt} - E$$

која вреди како за случај кад су C, R, L, Q непр менљиви у току појаве, тако и онда, кад су ти ко фициенти ма какве функције времена t. Сменивши новом непознатом y, таквом, да је

$$q = \frac{y}{\sqrt{L}}\,e^{-\frac{1}{2}\int\frac{R}{L}\,dt}$$

једначина појаве постаје

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \bar{\omega}\,(t)\,y = o$$

где је $\bar{\omega}(t)$ функција времена, чији је општи израз[1])

$$\bar{\omega}(t) = \frac{1}{CL} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{R}{L} + \frac{d}{dt}\log L\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{R}{L} + \frac{d}{dt}\log L\right)^2$$

и која се своди на константну вредност

$$\bar{\omega}(t) = \frac{1}{L}\left(\frac{1}{C} - \frac{R^2}{4L}\right)$$

у случајевима кад C, R, L не зависе од времена.

* * *

---

[1]) M. Petrovitch: Théorié de la décharge des conducteurs à capacité, résistance et coefficient de self-induction variables (Eclairage éléctrique 1899, Paris: Глас С. К. Акад. 61.).

ТРЕЋА ГЛАВА

АКЦИЈА ДИСКОНТИНУАЛНИХ УЗРОКА.

Дисконтинуални узроци и везе. — Импулс дисконтинуалних узрока и веза. — Пертурбације изазване таквим узроцима и везама, и њихово одређивање. — Конкретни примери одредбе пертурбација.

Дисконтинуални узроци и везе. Дешава се, да се у току једне већ постојеће појаве, у једноме тренутку, какав узрок *напрасно појави* или да га *напрасно нестане* ако је пре тога већ фигурисао као саставни део механизма појаве. У оба случаја он ће се звати *дисконтинуалним узроком* појаве.

Таквих дисконтинуалних узрока може бити тренутних и трајних. Један је узрок C, који има за непосредан објекат елеменат v, *тренутан* ако је размак времена у коме он врши своју акцију, толико кратак да је промена тоталитета елемента v за то време неосетна, поред свега тога што се сам елеменат за то време осетно изменио. Дати је дисконтинуалан узрок, на против, *трајан* кад он, појавивши се у једноме тренутку t_1 персистира у једноме довољно великом размаку времена, који почиње са тренутком t_1, да би за то време и елеменат v и његов тоталитет били осетно измењени. Пре тренутка t_1, као и после једнога тренутка $t_2 > t_1$ врло блиског тренутку t_1, у механизму појаве фигуришу само обични, континуални узроци; веома мали размак времена $(t_1\ t_2)$, у коме се, акцијом уоченог дисконтинуалног узрока, осетно мења елеменат v, али без осетне промене свога тоталитета, карактерисан је напрасном појавом тога дисконтинуалног узрока, који у томе размаку времена има карактер тренутног узрока.

Кад се н. пр. са стране удари еластична кугла, непомична на једној хоризонталној равни, у врло маломе размаку времена, у коме ударач додирује куглу, кугла нагло добија једну осетну брзину, не мењајући у томе размаку времена осетно свој положај; механичка сила при удару игра улогу тренутног дисконтинуалног узрока. — Кад се оствари трајни електрични контакт у електричноме колу, у чијем се саставу налази каква електромоторна сила, која би у каквој појави имала да мења, као свој непосредан објекат, какав елеменат v, таква сила постаје у механизму ове појаве трајни дисконтинуални узрок, који се има сматрати као тренутан само у врло маломе размаку времена који почиње са тренутком у коме је остварен контакт. Контакт, у осталом, може и сам бити тренутан, т. ј. постојати само у време једнога врло уског размака времена $(t_1,\ t_2)$; тада је и стављена у акцију електромоторна сила, у опште, тренутан дисконтинуалан узрок у посматраној појави

Сличан је случај и са *напрасно уведеним*, или *напрасно ишчезлим* везама у каквој већ постојећој појави са слободним системом, или са системом у коме је пре тога већ имало веза. Такве *дисконтинуалне* везе могу и саме бити *тренутне*, т. ј. постојати само за један толико мали размак времена $(t_1,\ t_2)$. да се за то време тоталитет непосредних објеката примењених тежња није осетно изменуо; или *трајне*, кад је размак времена њихове егзистенције довољно велики да се за то време и поменути објекти и њихови тоталитети могу осетно изменути. У случају, кад су дисконтинуалне везе трајне, ефективне су модификације, од тренутка њихове појаве, непрестано у сагласности са њима; кад су оне тренутне, ове су модификације у сагласности са њима само у краткоме размаку времена њихове егзистенције; одмах за тим та сагласност престаје.

Код балистичког клатна судар уводи једну напрасну, а трајну, везу, јер клатно и пројектил остају после судара спојени. — При судару две еластичне кугле уводи се напрасно једна веза међу њима, јер им се површине додирују; веза је тренутна, јер се тела одмах по судару раздвајају. — Кад се два тешка тела, везана за два краја олабављеног конца, баце у вис, па се, после извесног кратког времена, једно од њих нагло задржи, тако, да се конац, затегнувши се нагло, прекине, тиме је напрасно у систем уведена једна дисконтинуална трајна веза: задржано тело постаје и остаје непомично. — Исте је врсте и веза уведена напрасним оптерећењем, или напрасним олакшањем каквога чврстог тела у кретању. — Напрасна интервенција фактора ма које врсте, који би у каквој већ постојећој појави, од тренутка кад се јави, право играо улогу препреке, а чије присуство перзистира и даље, јесте увођење једне дисконтинуалне везе у механизам појаве, која је трајна и којој се, од тада, морају прилагодити варијације елемената у појави. — Напрасни нестанак какве дотле постојеће везе има се такође сматрати као увођење једне дисконтинуалне, тренутне или трајне везе, пошто се и тиме мења начин ограничавања виртуелних варијација елемената појаве.

Импулс дисконтинуалних узрока и веза. Према ранијој дефиницији импулса узрока, импулс дисконтинуалног узрока C, у веома малом размаку времена (t_1, t_2)

у коме он врши своју акцију, био би дат вредношћу одређеног интеграла

$$\int_{t_1}^{t_2} X\, dt$$

где X означује величину тежње X, везане за узрок C, у једноме тренутку t у размаку времена (t_1, t_2), а примењену на непосредни објекат тога узрока.

Кад узрок C није врло јак, његов је импулс, због краткоће размака (t_1, t_2), врло слаб. Такав је случај континуалних узрока, чије су варијације јачина постепне и у малим размацима времена неосетне. На против, кад је узрок веома јак, тако да му је јачина у размаку (t_1, t_2) величина истога реда као

$$\frac{1}{t_2 - t_1}$$

импулс има осетну вредност, која може бити и веома велика. Такав је случај јачих дисконтинуалних узрока, који у размаку (t_1, t_2), имају нагле варијације, што чине осетност импулса у томе размаку.

Дисконтинуалне се везе, као и континуалне, могу — а да се, при том, појава ни у чему не измени — сменути одговарајућим *реакцијама веза*, које ће и саме бити дисконтинуалне, тренутне или трајне, према томе, које су врсте саме везе што им одговарају. Под импулсом таквих веза разумеће се импулс одговарајућих њихових реакција.

Једначине пертурбација изазваних дисконтинуалним узроцима и везама. Увођење у већ постојећу појаву, у врло кратком размаку времена (t_1, t_2), једнога одређеног комплекса напрасних узрока и напрасних веза, изазива у овој нагле пертурбације које се састоје:

1° или у наглим скоковима величина појединих елемената појаве са једне вредности на другу, а у маломе размаку времена;

2° или у наглој промени самих закона, по којима се поједини елементи мењају са временом;

3° или у суперпозицији факата 1° и 2°.

У току појаве могу се тада разликовати три, једна од друге различне, фазе:

1° Фаза *(A)* што се свршује са тренутком $t = t_1$;

2° Фаза *(B)* што одговара размаку времена (t_1, t_2);

3° Фаза *(C)* што почиње са тренутком $t = t_2$.

У фази *(A)* у механизму појаве фигуришу само обични, континуални узроци и континуалне везе. За ту фазу вреде, дакле, диференцијалне једначине о којима је у ранијем одељку била реч.

Фаза *(B)* јесте *фаза пертурбација* у појави: све што у појави има дисконтинуалнога, како у њеном механизму, тако и у појединостима њене манифестације, припада тој фази. Почетно стање појаве у овој фази јесте оно, са којом она излази из фазе *(A)*.

У фази *(C)* фигуришу опет само континуални узроци и континуалне везе, који се могу, и једни и други поклапати са онима у фази *(A)*, или се од њих разликовати, према томе да ли су дисконтинуитети, уведени у фази *(B)*, тренутни или трајни. Према томе ће и за ову фазу вредити диференцијалне једначине ранијега одељка. Почетно стање појаве је оно, са којим она излази из фазе *(B)*.

Остаје, дакле, само још да се формирају једначине за пертурбације тока појаве у фази *(B)*. Те су једначине и саме последица раније већ формираних диференцијалних једначина појава за случајеве кад механизам појаве не показује никаквих дисконтинуитета. Оне ће бити овде наведене и проучене.

Пре свега, под *пертурбацијом појаве у правцу* α_i, где је

$$(\alpha_1, \cdots \alpha_n)$$

један ма какав систем елемената, који игра какву улогу у механизму појаве, а у поменутоме врло кратком размаку времена (t_1, t_2), разумеће се разлика

$$\varDelta \alpha_i = (\alpha_i)_2 - (\alpha_i)_1$$

вредности елемента α_i у почетноме и завршном тренутку тога размака. Из познатог *почетног* стања $(\alpha_i)_1$ елемента α_i са којим се ушло у фазу (B), и пертурбације појаве у правцу тога елемента у фази (B), одмах се добија и *завршно* стање $(\alpha_i)_2$ тога елемента у овој фази, са којим се улази у фазу (C).

За један елеменат v, на који је у размаку (t_1, t_2) непосредно примењена једина тежња X, основна једначина

$$k \frac{dv}{dt} = X$$

доводи до једначине

$$k \varDelta v = \int_{t_1}^{t_2} X \, dt$$

која показује *да је пертурбација појаве у правцу v пропорционална импулсу непосредно примењене тежње.*

Кад се н. пр. у галванометар, чији је моменат инерције игле J, напрасно и за размак времена (t_1, t_2), занемарљив наспрам периоде осцилације игле, пусти електрична струја јачине i, улогу непосредне тежње, примењене на брзину ротације ω игле, игра моменат

$$X = ai$$

где је a константа галванометра. Импулс те тежње у размаку времена (t_1, t_2), има за вредност

$$\int_{t_1}^{t_2} ai\,dt = aq$$

где је q количина електрицитета што пролази кроз галванометар за време (t_1, t_2).

Пертурбација, коју у кретање игле уноси напрасан утицај тога момента и која се огледа у наглој промени брзине ω ротације игле, дата је једначином

$$J\varDelta\omega = aq$$

тако, да ако је брзина ротације при уласку у фазу (B) била ω_1, она ће при изласку из те фазе имати за вредност

$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{aq}{J}$$

и да, кад је игла у почетном тренутку фазе (B) била непокретна, њена ће ротациона брзина, при изласку из те фазе, бити пропорционална количини електрицитета.

Општија једначина

$$k\frac{dv}{dt} = \Sigma X_i$$

написана у облику

$$k\varDelta v = \Sigma \int_{t_1}^{t_2} X_i\,dt \tag{361}$$

показује *да је пертурбација појаве по елементу v, као ефекат једнога комплекса непосредно примењених тежња, пропорционална алгебарском збиру импулса тих тежња.*

Према ономе што је горе казано, импулси су континуалних узрока веома слаби и занемарљиви, тако, да у збиру на десној страни једначине (361) остају само импулси дисконтинуалних узрока. Дакле: *пертурбације, које у једноме врло кратком размаку времена уносе у појаву дисконтинуални узроци, зависе само од природе и јачине ових, а никако не и од осталих, континуалних, узрока у појави.*

Нека је, сад, дата каква појава са системом

$$(q_1 \cdots q_k)$$

холономним или нехолономним. Фаза *(B)* пертурбације у појави карактерисана је напрасном појавом једнога комплекса дисконтинуалних узрока, чије компоненте у правцима

$$Oq_1 \cdots Oq_k$$

нека су

$$Y_1 \cdots Y_k$$

и напрасним увођењем једнога скупа нових веза, или напрасним нестанком једнога скупа веза које су дотле постојале у механизму појаве и које се, према ономе што је раније казано, имају сматрати као нове везе, уведене за време фазе *(B)*.

У фази *(B)* интензитет је појаве нагло и осетно промењен, ма да за то време саме вредности елемената q_i нису осетно измењене: брзина је фигуративне тачке

$$N(q_1 \cdots q_k)$$

нагло прешла са једне вредности на другу, од ове осетно различну, али се за то време положај те тачке није осетно изменио. То би аналитички значило да су вредности извода

$$q_1' \cdots q_k'$$

у тој фази нагло прешле од вредности

$$(q_1')_1 \cdots (q_k')_1$$

које су имале у тренутку t_1, на вредности

$$(q_1')_2 \cdots (q_k')_2$$

које имају у тренутку t_2, а да се, међу тим, саме вредности q_i нису за то време изменуле. Задржавши се на тој првој апроксимацији, овде ће бити претпостављено да је то одиста начин, на који је напрасна појава дисконтинуалних узрока и веза пореметила у фази *(B)* нормални ток појаве.

Нека је m број уведених веза и нека су оне изражене системом једначина

$$\begin{aligned} &\varphi_1 (q_1 \cdots q_k) = o \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\varphi_m (q_1 \cdots q_k) = o \end{aligned} \tag{362}$$

Уведимо, на место елемената

$$q_{h+1} \; q_{h+2} \cdots q_k$$

где је $h = k - m$, нове елементе

$$r_{h+1} \; r_{h+2} \cdots r_k$$

дефинисане системом једначина

$$\begin{aligned} r_{h+1} &= \varphi_1 (q_1 \cdots q_k) \\ r_{h+2} &= \varphi_2 (q_1 \cdots q_k) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_k &= \varphi_k (q_1 \cdots q_k) \end{aligned} \tag{363}$$

тако, да везе, уведене у нови систем

$$q_1 \, q_2 \cdots q_h \; r_{h+1} \cdots r_k \tag{364}$$

дефинисане у првобитном систему једначинама (362), буду у новоме систему (364) дефинисане једначинама

$$r_{h+1} = o$$
$$\cdots\cdots\cdot$$
$$r_k \;= o$$

Пре но што су уведене нове везе, остварљиве виртуелне модификације у систему састојале су се у произвољним варијацијама

$$\delta q_1 \cdots \delta q_k$$

елемената $q_1 \cdots q_k$. Кад те везе буду уведене, остварљиве се виртуелне модификације система, у размаку времена (t_1, t_2), састоје у произвољним варијацијама

$$\delta q_1 \cdots \delta q_h$$

елемената $q_1 \cdots q_h$, при чему елементи

$$r_{h+1} \cdots r_k$$

имају остати непромењиви, тако да буде

$$\delta r_{h+1} = o$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta r_k \;= o$$

По истеку размака времена (t_1, t_2) ове ће последње варијације остати непрестано равне нули, ако су везе, уведене у томе размаку времена, трајне; оне ће престати бити равне нули, ако су те везе тренутне.

Принцип виртуелних радова, у своме раније наведеном облику[1]), примењен на модификације у систему

---

[1]) Стр. 287—291.

(364) у размаку времена (t_1, t_2), доводи тада до једначине

$$(365)\quad \sum_{i=1}^{i=h}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i''} - Q_i\right)\delta q_i + \sum_{j=h+1}^{j=k}\left(\frac{\partial S}{\partial r_j''} - Q_j\right)\delta r_j = o$$

где је S Appel-ова функција за систем (364) са везама онаквим какве су у фази (B), а Q_i и Q_j компоненте примењених тежња у правцима Oq_i и Oq_j, оних које у тој фази буду фигурисале у механизму појаве.

Пошто су, према везама уведеним у размаку времена (t_1, t_2), једине остварљиве виртуелне модификације система оне, за које су варијације

$$(366)\quad \delta q_1 \cdots \delta q_h$$

произвољне, а варијације

$$(367)\quad \delta r_{h+1} \cdots \delta r_k$$

равне нули и пошто је, као што ја раније показано[1]), идентички

$$(368)\quad \frac{\partial S}{\partial q_i''} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \varDelta_i$$

где је T Lagrange-ева функција за систем

$$(q_1 \cdots q_h, r_{h+1} \cdots r_k)$$

а $\varDelta_i$ одговарајући корективни члан у случају нехолономног система, то се једначина (365), за остварљиве виртуелне модификације система у размаку времена (t_1, t_2) своди на систем једначина

$$(369)\quad \begin{array}{c} \dfrac{dp_1}{dt} - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} - \varDelta_1 = Q_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dp_h}{dt} - \dfrac{\partial T}{\partial q_h} - \varDelta_h = Q_h \end{array}$$

---

[1]) Стр. 216—219.

где су

$$p_1 \cdots p_h$$

моменти модификација у појави:

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'}$$

Док су све варијације

(370) $$\delta q_1 \cdots \delta q_h,\ \delta r_{h+1} \cdots \delta r_k$$

у једначини (365) произвољне, а пошто изрази

$$\frac{\partial S}{\partial q_1''} \cdots \frac{\partial S}{\partial q_h''},\ \frac{\partial S}{\partial r_{h+1}} \cdots \frac{\partial S}{\partial r_k}$$

представљају тоталне компоненте инертних тежња у правцима

$$Oq_1 \cdots Oq_h,\ Or_{h+1} \cdots Or_k$$

у састав тоталних компонената

(371) $$Q_1 \cdots Q_h,\ Q_{h+1} \cdots Q_k$$

примењних тежња улазе и компоненте реакција уведених веза. Кад се, међу тим, уоче само оне варијације (370) што су у сагласности са свима везама које буду постојале у фази (*B*), т. ј. кад се само варијације (366) сматрају као произвољне, а варијације (367) као равне нули, самим су тиме из састава компонената (371) елиминисане компоненте реакција веза, како оних које су постојале до тренутка t_1, тако и оних што су уведене у размаку времена $(t_1,\ t_2)$.

Изрази ће Q_i бити линеарне и хомогене функције компонената $X_1 \cdots X_k$ континуалних примењених тежња које су постојале и до тренутка $t = t_1$, и компонената

$Y_1 \cdots Y_k$ дисконтинуалних примењених тежња које су се напрасно појавиле у фази *(B)*. Па пошто су величине

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial T}{\partial q_h} \tag{372}$$

као и величине корективних чланова

$$\Delta_1 \cdots \Delta_h$$

у размаку $(t_1,\ t_2)$ коначне, а импулси компонената X_i веома слаби и занемарљиви, то се из једначина (369), множећи их са dt и интегралећи у границама t_1 и t_2, добија са апроксимацијом о којој је овде реч

$$\begin{aligned} \Delta p_1 &= J_1 \\ &\cdots\cdots \\ \Delta p_h &= J_h \end{aligned} \tag{373}$$

где у опште J_i означује компоненту импулса комплекса дисконтинуалних примењених тежња у правцу Oq_i: то је интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} P_i\, dt \tag{374}$$

где је P_i скуп чланова у изразу Q_i што садрже компоненте дисконтинуалних узрока који интервенишу у фази *(B)*. Импулси ће J_i, у опште, имати осетне вредности.

Једначине (373) исказују овај резултат:

Кад је у једној појави са дисконтинуалним узроцима и везама већ извршена трансформација (363) система, *у фази ће (B) пертурбације појаве у правцима оних момената модификација, којима одговарају елементи система различни од нуле, бити равне тоталној компоненти импулса дисконтинуалних примењених тежња у правцу одговарајућег елемента система.*

У специјалнијем случају, кад дисконтинуитети у механизму, у Фази *(B)*, произлазе само од напрасно уведених или напрасно несталих веза у систему, једначине се (373) своде на

$$\begin{array}{c} \Delta p_1 = o \\ \cdots\cdots\cdot \\ \Delta p_h = o \end{array} \tag{375}$$

и показују *да су, у фази (B),* ***пертурбације*** *појаве у правцима оних момената модификација, којима одговарају елементи система различни од нуле, све равне нули.*

Према склопу функције T, моменти су $p_1 \cdots p_h$ линеарне функције извода

$$q_1' \cdots q_h' \ r'_{h+1} \cdots r_k' \tag{376}$$

са коефициентима који су функције елемената

$$q_1 \cdots q_h \ r_{h+1} \cdots r_k \tag{377}$$

и времена t. Према томе ће и леве стране једначина (373), односно (375), бити линеарне и хомогене функције пертурбација

$$\Delta q_1' \cdots \Delta q_h' \ \Delta r_{h+1}' \cdots \Delta r_k' \tag{378}$$

са коефицинентима који су функције елемената (16) и времена t.

У тим једначинама елементи $q_1 \cdots q_h$ имају оне вредности које су имали у почетном тренутку $t = t_1$ Фазе *(B)*, којом вредношћу треба сменити и t у једначинама; елементи $r_{h+1} \cdots r_k$ сви су равни нули. Међутим, вредности извода

$$r_{h+1}' \cdots r_k'$$

не морају бити равне нули: оне ће то бити само онда, кад су дисконтинуалне везе у Фази *(B)* трајне, тако, да остају и по истеку те фазе, пошто би тада непрестано било:

$$r_{h+1} = o \cdots r_k = o \tag{379}$$

па дакле и

$$r_{h+1}' = o \cdots r_k' = o \tag{380}$$

У томе би случају једначине (373), односно (375), са једначинама (380), потпуно одређивале низ пертурбација (378), чиме би, у исто време, биле одређене и вредности извода (376) са којима се у току појаве излази из фазе *(B)*, па, дакле, и *завршни интензитет* појаве у тој фази, који је у њој осетно измењен. То би, у исто време, дефинисало и стање брзина промена елемената система, које се има рачунати као почетно стање за идућу фазу *(C)*.

У случају, пак, кад су дисконтинуалне везе само тренутне и остају само у фази *(B)*, једначине (380) неће више постојати по истеку те фазе, тако да се за одредбу пертурбација (378), па дакле и завршног стања појаве има само низ од h једначина (373), односно (375), које су недовољне за ту одредбу. Остале једначине, у потребном броју, могу се добити само из других каквих суплементарних података који се буду имали или претпостављали о појединостима појаве у фази *(B)* и непосредно по истеку ове.

Као што се, дакле, види, *проблем одредбе пертурбација појаве у фази (B) своди се, не на интеграцију диференцијалних, већ на решавање обичних, и то линеарних једначина.*

Први пример: нека су R_1 и R_2 полупречници, а m_1 и m_2 масе двеју кугала чији се центри крећу по утврђеној правој ox и нека је кретање кугала транслаторно. Као дескриптивни систем појаве кретања може се сматрати скуп елемената (x_1, x_2), где су x_1 и x_2 апцисе средишта двеју кугала.

Претпоставимо да се кугле у једноме тренутку $t=t_1$ сударе; тиме је напрасно уведена веза изражена релацијом

$$x_2 - x_1 - R_1 - R_2 = o$$

која исказује да је у тренутку судара међусобно растојање центара равно збиру полупречника. Ако се за елементе система узму елементи

$$q_1 = x_1 \qquad q_2 = x_2 - x_1 - R_1 - R_2$$

тако да је напрасно уведена веза изражена једначином

$$q_2 = o$$

биће

$$2T = m_1 x_1'^2 + m_2 x_2'^2 = m_1 q_1'^2 + m_2 (q_1'^2 - q_2'^2)$$

Моменат кретања, што одговара елементу q_1 који после судара има вредност различну од нуле, јесте

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'} = (m_1 + m_2) q_1' - m_2 q_2'$$

и изразивши да је пертурбација у правцу p_1 равна нули, пошто дисконтинуитет за време судара произлази само од напрасно уведене везе, добија се једначина

$$(381) \qquad (m_1 + m_2) \Delta q_1' - m_2 \Delta q_2' = o$$

и то је за овај конкретни случај једина једначина до које доводи општа теорија дисконтинуалних узрока. Да би се добила још једна једначина, потребна за одредбу пертурбација

$$\Delta q_1' \text{ и } \Delta q_2'$$

као и вредности

$$(q_1')_2 \text{ и } (q_2')_2$$

брзина после судара, треба имати података о еластичности двеју кугала.

Ако н. пр. кугле остају у додиру и после судара, тако да је елеменат q_2 и после овога раван нули, биће

$$(q_2')_2 = o \qquad \Delta q_2' = -(q_2')_1$$

а једначина (381) тада даје

$$\Delta q_1' = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}(q_2')_1$$

$$(q_1')_2 = \frac{m_1 (q_1')_1 + m_2 \; q_2')_1}{m_1 + m_2}$$

Други пример: нека је дат систем од n непокретних струја са међусобном и ауто-индукцијом, тако, да су промене њихових јачина регулисане раније изведеним Lagrange-евим једначинама[1])

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k'}\right) = Q_k$$

где је

$$q_k = \int i_k \, dt$$

$$2T = \Sigma L_k \, q_k'^2 + 2\Sigma M_{kh} \, q_k' \, q_h'$$

$$Q_k = E_k - R_k \, i_k$$

Претпоставимо да се, у једноме одређеном тренутку $t = t_1$, у поједина или у сва електрична кола, реализирањем електричног контакта, напрасно пусти врло јака електромоторна сила (н. пр. из врло јаке електричне батерије) и нека је F_k таква сила напрасно пуштена у електрично коло струје i_k, а

$$J_k = \int_{t_1}^{t_2} F_k \, dt$$

импулс те силе у току фазе електричних пертурбација.

---

[1]) Стр. 248—250.

Моменти електричних модификација у дескриптивном систему $(q_1 \cdots q_n)$ имају за вредности

$$\begin{aligned} p_1 &= L_1 q_1' + M_{12} q_2' + \cdots + M_{1n} q_n' \\ p_2 &= L_2 q_2' + M_{21} q_1' + \cdots + M_{2n} q_n' \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_n &= L_n q_n' + M_{n1} q_1' + \cdots + M_{n,\,n-1} q_{n-1}' \end{aligned}$$

Једначине

$$\begin{aligned} \Delta p_1 &= J_1 \\ &\cdots\cdots \\ \Delta p_n &= J_n \end{aligned}$$

представљају систем од n линеарних једначина са n непознатих количина

$$\Delta p_1 \cdots \Delta p_n$$

или, што је једно исто,

$$\Delta i_1 \cdots \Delta i_n$$

из којих се могу израчунати електричне пертурбације у фази (B) у правцима $i_1 \cdots i_n$, а из ових и јачине струја са којима се улазе у фазу (C). Пертурбације би н. пр. биле дате обрасцима облика

$$\begin{aligned} \Delta i_1 &= a_{11} J_1 + a_{12} J_2 + \cdots + a_{1n} J_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta i_n &= a_{n1} J_1 + a_{n2} J_2 + \cdots + a_{nn} J_n \end{aligned}$$

где су a_{kh} одговарајући минори детерминанте

$$\begin{vmatrix} L_1 \, M_{12} \cdots\cdots\cdots M_{1n} \\ L_2 \, M_{21} \cdots\cdots\cdots M_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_n \, M_{n1} \cdots\cdots\cdots M_{n,\,n-1} \end{vmatrix}$$

и према томе су *константе електричног система.*

У случају, кад је импулс, произведен јаком електромоторном силом, осетан само у једноме електричном колу, н. пр. у првоме (електрични контакт којим се пушта у коло таква сила реализиран само у томе колу), електричне пертурбације имају за вредности

$$\begin{gathered}\Delta i_1 = a_{11}\, J_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta i_n = a_{n1}\, J_1\end{gathered}$$

па, дакле, су *све пропорционалне међу собом.*

* * *

ЧЕТВРТИ ОДЕЉАК

Манифестација појаве као последица састава њенога механизма

ПРВА ГЛАВА.

КВАНТИТАТИВНА СЛИКА ПОЈАВЕ.

Опште шеме за квантитативне појединости тока појаве, према типу њенога механизма.

Прва шема: просте појаве што резултују из акције узрока сталне јачине.

Друга шема: просте појаве што резултују из акције узрока са независним варијацијама.

Трећа шема: просте појаве што резултују из акције узрока који се мењају пропорционално величини свога непосредног објекта.

Четврта шема: просте појаве што резултују из акције депресивног узрока који се мења пропорционално тоталитету свога непосредног објекта.

Пета шема: просте појаве што резултују из симултане акције два узрока, једнога са независним варијацијама и једнога који се мења пропорционално величини свога непосредног објекта.

Шеста шема: просте појаве што резултују из акције два узрока, једнога импулсивног, сталне јачине и једнога депресивног и задоцњеног, чија се јачина мења упоредо са мењањем величине непосредног објекта.

Седма шема: просте појаве што резултују из симултане акције два променљива депресивна узрока, једнога пропорционалног непосредном објекту и једнога пропорционалног тоталитету тога објекта.

Осма шема: просте појаве што резултују из симултане акције два узрока, једнога импулсивног, сталне јачине, и једнога депресивног, пропорционалног квадрату величине непосредног објекта.

Девета шема: просте појаве што резултују из симултане акције два променљива депресивна узрока, једнога пропорционалног квадрату величине непосредног објекта и једнога пропорционалног тоталитету тога објекта.

Десета шема: просте појаве што резултују из симултане акције три узрока, једнога са независним варијацијама, једнога депресивног, пропорционалног величини непосредног објекта, и једнога, такође депресивног, пропорционалног тоталитету тога објекта.

Једанаеста шема: просте појаве у линеарним феноменским пољима, што резултују из акције једнога узрока пропорционалног дивергенцији поља.

Дванајеста шема: просте појаве у линеарним феноменским пољима, што резултују из симултане акције два узрока, једнога пропорционалног дивергенцији поља, и једнога пропорционалног величини непосредног објекта.

Тринајеста шема: комплексне потенцијалне појаве што се састоје у слабим модификацијама једнога првобитно стабилног стационарног стања, под утицајем једнога комплекса слабих узрока.

Четрнајеста шема: комплексне потенцијалне појаве, обухваћене тринајестом шемом, са пертурбацијама што произлазе од слабих периодичних узрока.

Петнајеста шема: комплексне појаве у којима се сваки од дескриптивних елемената мења акцијом једнога комплекса узрока, једних сталне јачине, једних пропорционалних величини тога елемента и једних пропорционалних инерцијама осталих елемената.

Шеснајеста шема: комплексне појаве што резултују из акције једнога комплекса узрока који се мењају са стањем појаве, а кад су им непосредни објекти везани међу собом непромењивим везама са једним степеном слободе.

◆

Интеграцијом диференцијалних једначина појава, формираних на напред изложени начин, а пошто се у добијеним интегралима, према подацима, који се већ имају или претпостављају, о стању појаве у једноме или у неколико одређених тренутака, спецификују интеграционе константе или произвољне функције, које буду у њима фигурисале, имаће се вредности дескриптивних елемената појаве као функције времена t. Тиме ће, за сваки дати тренутак у току појаве, бити познато одговарајуће тренутно стање свакога од тих елемената, чиме ће и сам ток појаве бити квантитативно описан. Другим речима: знаће се, за сваку од координата фигуративне тачке појаве, начин на који се она мења у току времена, чиме ће бити познат и закон кретања те тачке у току појаве.

Скуп појединости, у којима се састоји на тај начин изведена дескрипција појаве, саставља њену *квантитативну слику*. Како та слика резултује непосредно из диференцијалних једначина појаве, а ове су један нарочити израз њенога механизма, пошто се у овоме фактори ослободе својих специфичних конкретних значења и задржи се у виду само оно, што битно карактерише природу њихових улога, природно је да ће појавама са механизмима једнога истог типа, па ма како диспаратне биле њихове конкретне природе, као и природа фактора, што улазе у састав механизма, одговарати једна иста квантитативна слика.

Свака таква слика, везана за један одређени тип механизма, представља по једну *општу шему*, по којој се за време трајања појаве нижу једно за другим сукцесивна тренутна стања, чији низ саставља ток појаве. Овде ће бити наведено неколико најпростијих таквих шема, које обухватају непрегледан број диспаратних конкретних појава, са њиховим непосредним применама на механичке, физичке, хемиске и т. д. појаве, на које се оне примењују спецификовањем конкретних значења у њима шематизираних фактора.

Прва шема.

Просте појаве што резултују из акције узрока сталне јачине. Диференцијална је једначина појаве

$$k\frac{dv}{dt} = A$$

где је

$$A = X = const$$

и дескриптивни се елеменат v мења по линеарном закону

$$v = v_0 + \frac{A}{k}t$$

где је v_0 почетна вредност тога елемента. Тај елеменат расти бескрајно у позитивном или негативном смислу са рашћењем времена t, према томе да ли је примењени узрок импулсиван или депресиван. Његова вредност пролази кроз нулу кад су v_0 и A супротних знакова, и тај прелаз бива у тренутку

$$t = \frac{kv_0}{A}$$

Његов тоталитет η расти бескрајно са рашћењем времена t, и то по параболичком закону

$$\eta = \eta_0 + v_0 t + \frac{A}{2k} t^2$$

Таква шема обухвата н. пр.

1° Вертикално кретање једнога тешког тела у безваздушном простору, при чему улогу v игра брзина кретања, улогу η висина тела над једном хоризонталном равни.

2° Кретање електрицитета, изазвано електромоторном силом сталне јачине, у проводнику без осетне аутоиндукције. Улогу v игра количина електрицитета, улогу X електромоторна сила, улогу k електрични отпор проводника.

3° Све комплексне појаве са једним степеном слободе, непромењивим везама и узроцима сталне јачине.

Друга шема.

Просте појаве што резултују из акције узрока са независним варијацијама. Ако је закон варијације узрока представљен једначином

$$X = f(t)$$

где је $f(t)$ каква одређена и позната функција времена t, ефекат ће у току времена јачати или слабити према томе, да ли је сам узрок импулсиван или депресиван. Он ће достизати своје максимуме и минимуме у тренуцима, кад је интензитет узрока раван нули.

Такав је н. пр. случај:

1° при праволиниском кретању материјалне тачке под утицајем силе чија се јачина мења, као функција времена по каквом у напред импозираном закону, (улогу v игра брзина кретања);

2° при кретању електрицитета, изазваном каквом електромоторном силом, чија се јачина мења, као функција времена, по у напред импозираном закону, а у проводнику без осетна отпора и осетне ауто-индукције (улогу v игра количина електрицитета);

3° при варијацијама карактеристичног дескриптивног елемента какве болести, чија величина у датоме тренутку дефинише стање болести у томе тренутку, а кад је болест ефекат једне или више врста бацила које се множе по геометриској прогресији, (улогу v игра број бацила);

4° у ма каквој комплексној појави са једним степеном слободе, непромењљивим везама и узроцима који се, као функције времена, мењају по у напред импозираним законима.

У специјалном случају, кад је узрок периодичан, ефекат ће такође бити периодичан и показиваће у својим варијацијама ону исту периоду, која какактерише и сам узрок. Ако су, код узрока, просте осцилације, оне ће се манифестирати и на ефекту. Величина удаљавања ефекта од једнога одређеног средњег стања, дефинисаног утврђеном вредношћу дескриптивног елемента појаве, мењаће се обрнуто пропорционално коефицијенту инерције у појави. Осцилације ефекта показиваће, према осцилацијама узрока, једно стално задоцнење, равно четвртини осцилаторне периоде. Тоталитет се дескриптивног елемента мења, у току времена, по закону који се добија суперпозицијом једнога просто-осцилаторног и једнога линеарног закона.

Трећа шема.

Просте појаве што резултују из акције узрока који се мењају пропорционално величини свога непосредног објекта. Закон варијације узрока је

$$X = \lambda v$$

где је λ његов коефицијенат утицаја. Ток је појаве карактерисан експоненцијалним законом

$$v = v_0 \, e^{\frac{\lambda}{k}(t-t_0)}$$

или, за тоталитет η елемента v

$$\eta = \eta_0 + v_0 \frac{k}{\lambda} \left[e^{\frac{\lambda}{k}(t-t_0)} - 1 \right]$$

где су v_0, η_0 вредности промењљивих количина v, η у утврђеноме тренутку $t = t_0$.

Дескриптивни се елеменат v мења непрестано у једном истом смислу, растући или опадајући, према смислу узрока. Он, у првоме случају, бескрајно расти са временом t, а у другоме случају асимтотно тежи нули. Брзина рашћења или опадања у толико је већа, у колико је коефицијенат утицаја узрока већи, а коефицијенат инерције елемента мањи. Израз

$$\frac{\log v - \log v_0}{t - t_0} = \frac{\lambda}{k}$$

задржава сталну вредност за све време трајања појаве и позитиван је или негативан, према томе, да ли је узрок импулсиван или депресиван.

Та шема обухвата просте појаве, као и комплексне појаве са једним степеном слободе и непромењљивим везама у којима узроци, делајући, јачају пропорционално произведеноме ефекту (као што је н. пр. случај у појавама у којима ефекат постаје, са своје стране, узрок и појачава својом акцијом акцију првобитног узрока) или слабе н. пр. трошећи се у мери, у којој производе свој ефекат. Такве би н. пр. појаве биле:

1° хлађење чврстог тела по Newton-овом закону, уједначавањем температуре тела и околине (улогу *v* игра температура тела);

2° гублење електрицитета какве наелектрисане течности њеним испаравањем (улогу *α* игра електрично оптерећење на површини течности);

3° трошење каквога хемиског тела, које се постепно трансформише акцијом каквога физичког агенса или фермента (улогу *v* игра заостала количина првобитног хемиског тела);

4° смањивање брзине једне кугле при њеном хоризонталном једнаком кретању у течности исте специфичке тежине које је и кугла (улогу *v* игра брзина кугле);

5° опадање барометарског притиска при пењању са сталном брзином (улогу *v* игра величина притиска).

Под исту се шему може подвести и велики број појава, за које важи исти експоненцијални закон, али у којима време не игра експлицитну улогу независно променљиве количине, већ такву улогу игра друга једна одређена количина, која се тада, према тој улози, може асимилирати времену. Такве би појаве н. пр. биле:

1° слабљење јачине светлости при пролазу кроз какво провидно тело, које је апсорбује (улогу *t* игра дебљина апсорбујућег слоја, улогу *v* јачина светлости);

2° опадање барометарског притиска са висином (улогу *t* игра висина, улогу *v* величина притиска);

По кадшто се таква независно променљива количина, која у појави игра улогу сличну феноменолошкој улози времена, мења дисконтинуално, тако да јој варијације састављају један низ узастопних целих бројева. То су н. пр. појаве код којих узрок, пошто је већ једном произвео свој ефекат, делује понова и на исти начин на резултат своје акције, за тим опет на резултат те поновне акције и т. д., и за које важи закон

$$v = v_0 \, e^{\lambda n}$$

где је n цео број који показује колико је пута узастопце поновљена акција узрока, а λ позитивна или негативна константа, према томе да ли је узрок импулсиван или депресиван. Такве би н. пр. биле ове конкретне појаве:

1° разређивање ваздуха у каквоме затвореном суду помоћу обичног ваздушног шмрка (улогу n игра број удара, улогу v густина ваздуха);

2° умножавање једне биолошке феле, у претпоставци да свака индивидуа оставља исти број потомака (улогу n игра број генерација, улогу v број индивидуа);

3° опадање, у току времена, какве органске особине природном или вештачком селекцијом, примењеном на велики број генерација једне исте феле (улогу n игра број генерација, улогу v карактеристични параметар везан за уочену особину) и т. д.

Четврта шема.

Просте појаве што резултују из акције депресивног узрока који се мења пропорционално тоталитету свога непосредног објекта. Означивши са λ коефицијенат утицаја датога депресивног узрока, биће

$$X = -\lambda\eta = -\lambda \int v dt$$

и појава је регулисана једначином

$$k \frac{dv}{dt} = -\lambda\eta$$

или

$$k \frac{d^2\eta}{dt^2} + \lambda\eta = o$$

Сматрајући као почетан тренутак онај, у коме је тоталитет η раван нули, закон варијације тоталитета дат је једначином

$$\eta = v_0 \sqrt{\frac{k}{\lambda}} \sin t \sqrt{\frac{\lambda}{k}}$$

а закон варијација самога дескриптивног елемента v је

$$v = v_0 \cos t \sqrt{\frac{\lambda}{k}}$$

Појава је осцилаторна; она се састоји из бескрајног низа међу собом једнаких осцилација око једнога одређеног стања, дефинисаног вредношћу тоталитета равном нули и вредношћу v_0 елемента v. Периода ових осцилација, било тоталитета, било елемента v, има за вредност

$$T = \pi \sqrt{\frac{k}{\lambda}};$$

она је, дакле, у толико већа, у колико је већи коефицијенат инерције појаве, а у толико мања, у колико је већи коефицијенат утицаја депресивнога узрока. Највећа удаљења тоталитета од вредности нуле стална су и имају за вредност

$$v_0 \sqrt{\frac{k}{\lambda}};$$

она расту и опадају са вредностима коефицијената k и λ на исти начин као и периоде T осцилација.

Најпростији пример појава са оваквим узроцима представљале би кратке осцилације клатна у безваздушном простору. Улогу v игра брзина кретања, улогу η елонгација, а улогу депресивног узрока X хоризонтална компонента теже.

Шема би обухватала и појаву вибрација еластичне металне шипке, утврђене једним својим крајем, изведене из свога равнотежног положаја и остављене самој себи, као и појаву осцилације разлике нивоа течности у двама судовима, везаних међу собом хоризонталном цеви, кад се не води рачуна о отпору трења (улогу v игра брзина промене нивоске разлике, улогу η сама та разлика). Она би обухватала и појаву испражњавања електричних кондензатора, кад је електрични отпор занемарљив (улогу v игра јачина струје испражњивања, улогу η количину електрицитета).

Пета шема:

Просте појаве што резултују из симултане акције два узрока: једнога са независним варијацијама и једнога који се мења пропорционално величини свога непосредног објекта. Тада је

$$X_1 = f(t) \qquad X_2 = \lambda v$$

где је $f(t)$ унапред дата функција времена, и за појаву ће важити једна или друга од једначина

$$k\frac{dv}{dt} = f(t) + \lambda v$$

$$k\frac{dv}{dt} = f(t) - \lambda v \tag{382}$$

према томе, да ли је узрок X_2 импулсиван или депресиван.

Кад је узрок X_1 сталне јачине, елеменат са v мења у току појаве по закону

$$v = v_0 e^{\pm \frac{\lambda}{k}(t-t_0)} \mp \frac{X_1}{\lambda}$$

[где горњи знаци вреде кад је узрок X_2 импулсиван, а доњи кад је он депресиван]. У томе је случају израз

$$\frac{1}{t-t_0} \log \frac{v \pm \frac{X_1}{\lambda}}{v_0 \pm \frac{X_1}{\lambda}}$$

задржава сталну вредност за све време трајања појаве и та је вредност тада $\pm \frac{\lambda}{k}$. Кад је узрок X_2 импулсиван, крива линија што представља начин варијације елемента v биће бескрајно растућа експоненцијална крива линија. Кад је тај узрок депресиван, крива ће линија имати асимтоту паралелну t — осовини, којој ће се приближавати растући или опадајући, према почетној вредности v_0 и јачини сталног узрока X_1; интензитет појаве постаје све слабији и појава престаје бити осетна после извеснога времена: на место појаве јавља се једно одређено перманентно стање, карактерисано вредношћу $\frac{X_1}{\lambda}$ елемента v.

Такав би случај био н. пр. са овим појавама:

1° Кретање чврстог тела око утврђене осовине, кад постоји отпор пропорционалан угаоној брзини тела (као што је н. пр. при лаганом обртању точка са крилима, чијем се кретању опире ваздух). (Улогу v игра угаона брзина, улогу узрока X_1 активни спрег, улогу узрока X_2 отпор при обртању, улогу k моменат инерције тела).

2° Мењање јачине струје у проводнику са осетним отпором и осетном ауто-индукцијом, под утицајем сталне електромоторне силе, која произлази н. пр. из каквог електричног елемента или батерије (улогу v игра јачина i струје, улогу узрока X_1 електромоторна сила, улогу узрока X_2 контра-електромоторна сила

$$X_2 = \lambda v = - Ri,$$

улогу λ електрични отпор R, улогу k коефициенат ауто-индукције проводника).

3° Процес трансформисања каквога хемиског тела у хомогеним хемиским реакцијама првога реда, регулисан једначином Хемиске Кинетике

$$\frac{dx}{dt} = C\,(a - x) \qquad C = const$$

(где је а првобитна, а x трансформисана количина тела, до тренутка t) може се подвести под горњу шему сматрајући тежњу

$$C\,(a - x)$$

као резултанту двеју тежња, једне сталне и импулсивне Ca и друге депресивне — Cx, пропорционалне трансформисаној количини тела. Конкретни пример: процес трансформације арсен-водоника при његовом распадању на арсен и водоник.

У општем случају, кад је узрок X_1 променљив, имаће се разноврсни начини варијације елемената v. У свима случајевима појава се може сматрати као суперпозиција двеју простијих појава:

1° једне дефинисане једним партикуларним интегралом једначине (382), која се састоји у варијацијама елемента v по извесном закону, који се и сам мења кад се буде мењао начин промена узрока X_1, али који остаје непромењен кад се мења почетно стање појаве без промене закона варијације узрока X_1.

2° једне појаве дефинисане општим интегралом једначине (382). Ова се појава састоји у варијацијама промењиве v по експоненцијалном закону, који остаје неизмењен кад се мења закон варијације узрока X_1 а при томе почетно стање појаве остаје исто. Она постаје све интензивнија, или све слабија, према смислу узрока X_2.

Кад је узрок X_2 депресиван, појава 2° постаје у току времена све неосетнија и исчезава после извесног времена. Од тада резултујућа појава улази у један дефинитиван, перманентни режим, који ће бити један исти, па ма какво било њено почетно стање, и тај се режим поклапа са појавом 1°.

Такав је случај н. пр. са овим конкретним појавама:

1° Кад алтернативне струје пролазе кроз какав проводник, температура се овога поступно мења по одређеном закону. Нека се, при томе, претпостави: a) да је проводник каква метална жица, довољно танка да би се акција струје могла сматрати као униформна по целој површини једнога њеног пресека; b) да хлађење жице бива по Newton-овом закону; c) да се јачина алтернативне струје i мења по обичном осцилаторном закону, тако, да је

$$i = i_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$$

Температура θ жице тада је непосредни објекат двеју тежња: једне, коју изазива разлика температура тела и околине, и једне што произлази непосредно од самих струја. Прва, која игра улогу узрока X_2, мења се, према Newton-овом закону, пропорционално самој температури жице; друга, која игра улогу узрока X_1, мења се по Joule-овом закону пропорционално квадрату јачине i струје. Диференцијална једначина за појаву термичних промена у жици биће, дакле, горњега облика

$$k\frac{d\theta}{dt} = a\theta + b\sin^2\frac{2\pi}{T}t$$

$$(k, a, b) = const$$

а појединости појаве, садржане у горњој шеми, и које резултују из ове једначине, потврђују се експериментално. Тако се исто потврђује и факт, имплициран у горњој диференцијалној једначини, а везан за нарочити облик који има функција $f(t)$ у овој конкретној појави: да је периода осцилација температуре θ у пола мања од периоде осцилација узрока X_1.[1])

2_0 Кад једна проста светлосна радијација трансформише какву провидну течност, јачина ће светлости, у проласку кроз течност, слабити услед двојаке апсорпције: једне, *физичке*, која долази од тога што течност није савршено провидна, и једне, *хемиске*, која долази од тога што радијација трансформише хемиски течност, смањујући јој провидност, и то у толико јаче, у колико је јачина i радијације већа. Мењање јачине i са дубином продирања x, која у овоме случају игра улогу сличну феноменолошкој улози времена, биће непосредни ефекат двају делимичних непосредних узрока: једнога, јачине X_1, што долази од физичке, и једнога, јачине X_2, што долази од хемиске апсорпције, тако да ће се имати једначина

$$k\frac{di}{dt} = X_1 + X_2$$

(где би се t имало сменити промењивом x).

Кад би узрок X_1 био сам, он би варијацијама јачине i импозирао закон

$$i = Ae^{-at}$$

---

[1]) Ch. Guye: Quelques remarques sur les variations de temperature d'un conducteur parcouru par des courants alternatifs [Archives des Sciences physiques et naturelles de Génève, 1897. p. 254.

где су A и a позитивне константе, према чему је

$$X_1 = k\frac{di}{dt} = -be^{-at}$$

где је b такође позитивна константа.

Узрок је X_2 такође депресиван и има, бар у првој апроксимацији за израз

$$X_2 = -ci$$

где је c позитивна константа.

Диференцијална једначина појаве биће, дакле,

$$k\frac{di}{dt} = -be^{-at} - ci$$

и на појаву се непосредно примењују закључци садржани у горњој општој шеми[1]).

3° Случај, у коме је узрок X_2 депресиван, а узрок X_1 промењљив са простим осцилацијама, од нарочитога је интереса, јер се јавља доста често у физичким појавама. Тада је

$$X_1 = f(t) = a\sin\frac{2\pi}{T}t$$

где је a амплитуди осцилација узрока X_1, а диференцијална је једначина појаве

$$k\frac{dv}{dt} = a\sin\frac{2\pi}{T}t - \lambda v$$

Закон варијације елемента v облика је

$$v = Ce^{-\frac{\lambda t}{k}} + A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \varphi\right)$$

---

[1]) G. Lemoine. C. R. de l'Acad. des Sciences 1891. p. 936 и 992 ; 1894 p. 525.

где је C константа чија вредност зависи од почетног стања појаве, A и φ две константе независне од тога стања, чије су вредности

$$A = \frac{a}{\sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{2k\pi}{T}\right)^2}}$$

$$\varphi = \frac{1}{2\pi}\ arctg\ \frac{2\,k\pi}{\lambda T}$$

После извеснога времена, које је у толико краће у колико је коефициенат утицаја λ депресивног узрока X_2 већи, а коефициенат инерције k мањи, појава улази у свој дефинитивни режим и од тада се састоји из низа простих осцилација по закону

$$v = A\ sin\ 2\pi\left(\frac{t}{T} - \varphi\right)$$

Тај режим ни у колико не зависи од почетног стања појаве, пошто су константе A и φ независне од тога стања. Појава ће, тада, имати исту осцилаторну периоду, коју има и сам узрок X_1, али ће њене осцилације показивати, према осцилацијама узрока, једно стално задоцнење, чија је вредност φT и које је у толико веће, у колико је већи коефициенат инерције k. Повећавање тога коефициента има, такође, за ефекат смањивање амплитуде осцилација A појаве у њеноме дефинитивном режиму; тај слабећи утицај биће у толико осетнији, у колико је мања осцилаторна периода узрока X_1.

Под ову шему потпада н. пр. појава мењања јачине струје симултаном акцијом једне обичне контраелектромоторне силе

$$X_2 = -Ri$$

и једне периодичне електромоторне силе

$$X_1 = a \, sin \frac{2\pi}{T} t$$

произведене обртањем металног котура у униформном магнетном пољу, око осовине управне на правцу поља. Улогу v игра јачина струје, улогу k коефициенат L ауто-индукције, улогу λ електрични отпор R. Поменута количина

$$\varphi T = \frac{T}{2\pi} \, arctg \, \frac{2l\pi}{RT}$$

представља размак времена између тренутка кад периодична електромоторна мења знак, и онога кад мења знак јачина струје; то је једна врста задоцнења трансмисије електромоторне силе.

Шеста шема.

Просте појаве што резултују из симултане акције два узрока: једнога импулсивног сталне јачине и једнога депресивног и задоцњеног, чија се јачина мења упоредо са мењањем величине непосредног објекта. Тада је

$$X_1 = const$$

$$X_2 = - F [v (t - t_0)]$$

где $v (t - t_0)$ представља величину елемента v у једном ранијем тренутку $t - t_0$, који се од актуелнога тренутка разликује сталном величином t_0. Појава је регулисана функционално-диференцијалном једначином

$$(383) \qquad k \frac{dv}{dt} = X_1 - F [v (t - t_0)]$$

Ма какав био закон варијације задоцњеног узрока F, оличен у спефичном облику функције F, појава ће бити карактерисана овом особином:

Кад год у њој постоји једно финално, асимтотно стање, од кога се она све мање разликује у току свога трајања, и чија карактеристика нека је $v = a$, увек, кад елеменат v прође кроз вредност a растући или опадајући, он, по истеку времена t_0 после тога тренутка, пролази кроз један свој максимум или минимум.

Јер, пошто је за $t = \infty$

$$v(t) = a \qquad \frac{dv}{dt} = o$$

то је из (383)

$$X_1 = F(a)$$

Са друге стране, ако је $t = t_1$ тренутак у коме v пролази кроз вредност a, биће

$$v(t_1) = a$$

тако да ако се стави

$$t_2 = t_1 + t_0$$

биће

$$F[v(t_2 - t_0)] = F[v(t_1)] = F(a) = X_1$$

из чега се види да је за $t = t_2$

$$\frac{dv}{dt} = o$$

што карактерише максимуме и минимуме елемента v.

Задржимо се, сад, на случају кад је закон варијације узрока X_2 линеаран и облика

$$X_2 = \lambda v(t - t_0)$$

где је λ коефицијенат утицаја тога узрока. Једначина (1) постаје

$$k\frac{dv}{dt} = X_1 - \lambda v(t - t_0) \tag{384}$$

и има као интеграл

$$(385)\qquad v = \frac{X_1}{\lambda} + A_1\, e^{r_1 t} + A_2\, e^{r_2 t} + \Sigma C_i\, e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i\, t + \varphi_i)$$

где су A_1, A_2, C_i, φ_i произвољне константе, r_1 и r_2 корени једначине

$$(386)\qquad r + \frac{\lambda}{k}\, e^{-rt_0} = o$$

а α_i и β_i решења система

$$\alpha_i + \frac{\lambda}{k}\, e^{-\alpha_i t_0} \cos \beta_i\, t_0 = o$$

$$\beta_i + \frac{\lambda}{k}\, e^{-\alpha_i t} \sin \beta_i\, t_0 = o$$

Једначина ће (386) имати два реална корена, оба негативна, или један реалан корен, или све корене имагинарне, према томе како је кад

$$\frac{\lambda t_0}{k} \overset{\leqslant}{\geqslant} \frac{1}{e} = o,345 \cdots$$

Појава се јавља као суперпозиција једне просте појаве, чији се интензитет не мења у току времена, и једнога комплекса парцијалних појава разних интензитета, од којих се једне дешавају по експоненцијалном закону, а друге су, изазване задоцнењем узрока X_2, осцилаторне, са амортизираним осцилацијама и са разним амплитудама и осцилаторним периодама.

Чисто експоненцијални чланови

$$A\, e^{r_1 t} \qquad \text{и} \qquad A_2\, e^{r_2 t}$$

слабе у току времена у толико брже, у колико су количник $\frac{\lambda}{k}$ и задоцнење t_0 депресивног узрока већи. На против, осцилаторни чланови

$$C_i\, e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i\, t + \varphi_i)$$

слабе у толико спорије у колико су ове количине веће. Вредност елемента v тежи граници $\frac{X_1}{\lambda}$ једним низом амортизираних осцилација, и та граница дефинише асимтотно стање појаве.

Кад би узрок X_1 сталне јачине, почевши од једнога одређеног тренутка, престао деловати, појава би се, једним низом амортизираних осцилација, вратила на своје почетно стање. И у овоме, као и у горњем случају, асимтотно је стање појаве онакво, какво би било и кад депресивни узрок X_2 не би имао у својој акцији задоцнења.

Ред (385) игра, у проучавању промењљивог режима појаве, ону исту улогу, коју игра Fourier-ов ред у проучавању перманентних осцилаторних режима у периодичним појавама. Константе Fourier-овог реда овде су опадајуће експоненцијалне функције. Задоцнење t_0 депресивног узрока игра улогу сличну улози основне периоде периодичких појава, а коефицијенти амортизације $-\alpha_i$ су по улози слични коефицијентима што дефинишу хармоничне тонове при вибрацијама жица.

Као што познавање тока једне периодичне појаве, за време једне њене основне периоде, повлачи собом познавање тока појаве за све време њеног трајања, тако и познавање оваквих појава, са задоцњеним узроком, за време размака t_0, повлачи собом познавање појаве у ма коме тренутку ван тога размака. Јер једначина (383) одређује брзину промене $\frac{dv}{dt}$ у размаку t_0 што долази непосредно за оним који се пре тога посматрао; тиме је одређена и вредност $v(t)$ у томе размаку, па дакле и вредност $v(t - t_0)$, чиме је опет одређена и вредност $\frac{dv}{dt}$ за идући размак t_0 и т. д. Та би се одредба, у појединостима, извршила на овај начин:

Сматрајмо као почетни тренутак $t = o$ онај, у коме улази у акцију узрок X_1 и претпоставимо да је у томе тренутку стање у појави карактерисано вредношћу $v = o$ елемента v. Тада, пошто се узрок X_2 јавља тек по истеку времена t_0, према чему је у току целог размака времена t_0

$$X_2 = v\,(t - t_0) = o$$

биће у току целога тога размака, према једначини (383)

$$k\,\frac{dv_1}{dt} = X_1 \tag{387}$$

где v_1 означује вредност елемента v у једноме, ма коме, тренутку у првоме размаку t_0 од појаве узрока X_1. Из (387) је

$$v_1 = \frac{X_1}{\lambda}\,t + C_1$$

где је C_1 интеграциона константа, а пошто је за $t = o$ и $v_1 = o$, то је и $C_1 = o$.

У другоме, идућем, размаку t_0, т. ј. у размаку од $t = t_0$ до $t = 2t_0$, одговарајућа вредност $v_2\,(t - t_0)$ биће она, што одговара варијацији елемента v у првоме размаку; то је дакле

$$v_2\,(t - t_0) = \frac{X_1}{\lambda}\,(t - t_0)$$

и једначина (383) постаје

$$k\,\frac{dv_2}{dt} = X_1 - X_1\,\frac{\lambda}{k}\,(t - t_0)$$

или

$$k\,\frac{dv_2}{dt} = \frac{X_1}{k}\left[\,t + \frac{\lambda t_0}{k}\,t - \frac{\lambda}{k}\,\frac{t^2}{2} + C_2\right]$$

где је интеграциона константа C_2 одређена погодбом да

$$\text{за } t = o \qquad \text{буде} \qquad v_2 = \frac{X_1}{k} t_0 \; .$$

што даје

$$v_2 = \frac{X_1}{k} \left[t - \frac{1}{2} \frac{\lambda}{k} (t - t_0)^2 . \right]$$

Тако би се исто нашло да је за трећи размак t_0, док t расте од $t = 2t_0$ до $t = 3t_0$

$$v_3 = \frac{X_1}{k} \left[t - \frac{1}{2} \frac{\lambda}{k} (t - t_0)^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{\lambda}{k} \right)^2 (t - 2t_0)^3 \right]$$

и у опште за n-ти размак t_0

$$v_n = \frac{X_1}{k} \left[t - \frac{1}{2} \frac{\lambda}{k} (t - t_0)^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{\lambda}{k} \right)^2 (t - 2t_0)^2 + \right.$$

(388)

$$\left. + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdots n} \left(- \frac{\lambda}{k} \right)^{n-1} (t - \overline{n-1}\, t_0)^n \right]$$

Посматрајмо, сад, повратак појаве на њено почетно стање $v = o$, пошавши од њенога асимтотног стања дефинисаног, као што је горе показано, вредношћу

$$v = \frac{X_1}{\lambda}$$

елемента v. Означивши са w_n вредност v у n-томе размаку t_0 при томе повратку, налази се да је

$$w_n = \frac{X_1}{\lambda} - v_n$$

где је вредност v_n дата једначином (388). Елеменат v, дакле, опада постепено на онај исти начин, на који је растио у мало час проученоме случају, под утицајем сталнога узрока X_1 и пошавши од почетног стања $v = o$. Дијаграми ових двеју, међу собом инверсних, појава разликују се међу собом само једном транслацијом за сталну количину $\frac{X_1}{\lambda}$ и обртом око једне осовине паралелне осовини *ot*. Кад први дијаграм осцилује око граничне вредности $\frac{X_1}{\lambda}$, други осцилује око граничне вредности нуле.

На овакву је једну шему Sagnac[1] свео тумачење механизма извесних фотохемиских појава са амортизираним осцилацијама, а понаособ експликацију једнога загонетног факта уоченог при фотохемиској акцији светлости на осетљиву плочу. Својом акцијом на сребрну сô, светлост је редукције и ослобођено сребро чини да плоча постаје све црња. Ово појачавање црнила, међу тим, не иде упоредо са временом експонирања: црнило у први мах јача, за тим у неколико опадне, опет почне расти и т. д. пролазећи наизменце кроз један низ максимума и минимума, који су све слабији и брзо се губе, постајући неосетни. Jansen је констатовао три таква минимума; остале је врло тешко констатовати због брзине којом се осцилације амортизирају. Једну од могућних експликација таквог осцилаторног карактера појаве даје горња шема. По овој би се интензитет црнила, или, што се своди на једно исто, количина редуковане соли на плочи, имао сматрати као непосредан објекат двају узрока горе проучене природе: директна хемиска акција светлости непрестано тежи да, редукујући сребрну сô, појачава црнило и та је тежња стална по смислу и јачини, играјући улогу узрока X_1 у горњој шеми; ова директна акција изазива, после некога времена, у редукованоме слоју једну секундарну, супротну акцију, која игра

---

[1] G. Sagnac: L'Optique des rayons de Roentgen. Paris 1900, p. 29—35. M. Petrovitch: Scientia № 27. p. 53—55.

улогу узрока X_2 и тежи да потре ону прву, изазивајући инверсну модификацију осетљивог слоја, и то тако, да је јачина те тежње у свакоме тренутку пропорционална величини ефекта директне акције, али не онаквој, каква је у томе тренутку, већ онаквој каква је била у једном извесном тренутку пре тога.

Случај кад је узрок X_1 периодичан. Нека је закон варијације тога узрока облика

$$X_1 = h\left(1 + \cos 2\pi \frac{t}{T}\right)$$

где је h позитивна константа. Једначина (1) постаје

$$k\frac{dv}{dt} + \lambda v(t - t_0) = h\left(1 + \cos 2\pi \frac{t}{T}\right) \tag{389}$$

и има као интеграл збир интеграла једначине (7) без деснога члана, и партикуларног интеграла

$$M\cos\left(2\pi\frac{t}{T} + \delta\right) + \frac{h}{\lambda}$$

где су M и δ константе чије су вредности

$$M = \frac{h}{k\sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{k}\right)^2 - \frac{4\pi\lambda}{kT}\sin 2\pi\frac{t_0}{T}}}$$

$$tang\,\delta = \frac{\frac{2\pi}{T} - \frac{\lambda}{k}\sin 2\pi\frac{t_0}{T}}{\frac{\lambda}{k}\cos 2\pi\frac{t_0}{T}}$$

тако, да ће закон варијације елемента v бити облика

$$v = \frac{h}{\lambda} + M\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right) -$$

$$+ A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \Sigma C_i e^{\alpha_i t}\sin(\beta_i t + \varphi_i)$$

Коначно је асимтотно стање појаве, у случају кад постоји, оно у коме је

$$v = \frac{h}{\lambda} + M \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right);$$

појава се, у току свога трајања, све више приближује томе стању, у коме се њена периода поклапа са периодом узрока X_1, али разликујући се фазом δ од осцилација тога узрока.

Седма шема.

Просте појаве, што резултују из симултане акције два променљива депресивна узрока: једнога пропорционалног непосредном објекту и једнога пропорционалног тоталитету тога објекта. Означивши са X_1 и X_2 јачине тих узрока, биће

$$X_1 = -\lambda v$$

$$X_2 = -\mu\eta = -\mu \int v\, dt$$

где су λ и μ коефицијенти утицаја узрока X_1 и X_2. Диференцијална је једначина појаве

$$k \frac{dv}{dt} = -\lambda v - \mu\eta$$

или

$$k \frac{d^2\eta}{dt^2} + \lambda \frac{d\eta}{dt} + \mu\eta = o$$

Карактер тока појаве зависи поглавито од релативних величина коефицијента инерције и коефицијената утицаја оба узрока. Ставимо, краткоће ради, да је

$$\frac{\lambda^2 - 4\mu k}{k^2} = \varrho$$

и разликујмо ова три случаја:

Први случај: $\varrho < o$. Ако се стави да је

$$\varrho = - h^2$$

и ако се као почетна вредност времена t сматра она, за коју је тоталитет η раван нули, варијације ће тоталитета бити регулисане једначином

$$\eta = A\, e^{-\frac{\lambda t}{2k}} \sin ht$$

а варијације елемента v једначином

$$v = B e^{-\frac{\lambda t}{2k}} \sin h\, (t - \theta)$$

где су A, B, θ константе дате обрасцима

$$B = - A \sqrt{h^2 + \left(\frac{\lambda}{2k}\right)^2}$$

$$tang\, \theta = \frac{2kh}{\lambda}$$

Појава се састоји у амортизираним осцилацијама; размаци времена, што одговарају једној осцилацији, исти су за све такве осцилације и стална им је вредност

$$T = \frac{2\pi}{h}$$

Узастопне амплитуде постају све мање, опадајући *по геометриској прогресији,* чији је количник

$$e^{-\frac{\lambda T}{2k}}$$

Осцилације, дакле, слабе у толико брже, у колико је већа вредност количине $\frac{\lambda T}{k}$.

Други случај: $\rho > o$. Ако се стави да је

$$\rho = h^2$$

биће

$$\eta = A_1 e^{-\left(\frac{\lambda}{2k}+h\right)t} + A_2 e^{-\left(\frac{\lambda}{2k}-h\right)t}$$

где су A_1 и A_2 константе одређене почетним стањем појаве. Варијације елемента v регулисане су једначином

$$v = B_1 e^{-\left(\frac{\lambda}{2k}+h\right)t} + B_2 e^{-\left(\frac{\lambda}{2k}-h\right)t}$$

где су B_1 и B_2 константе одређене једначинама

$$B_1 = -A_1\left(\frac{\lambda}{2k}+h\right)$$

$$B_2 = -A_2\left(\frac{\lambda}{2k}-h\right)$$

Пошто су вредности

$$\frac{\lambda}{2k}+h \quad \text{и} \quad \frac{\lambda}{2k}-h$$

позитивне, елеменат v може имати највише један максимум или минимум, после кога се он непрестано мења у једном истом смислу, растући или опадајући, а тежећи, међу тим, једнако нули као граници.

Трећи случај: $\rho = o$. Тада је

$$\eta = A\left(1+\frac{\lambda t}{2k}\right)e^{-\frac{\lambda t}{2k}}$$

$$v = B\,t\,e^{-\frac{\lambda t}{2k}}$$

где су A и B константе одређене почетним стањем појаве. Елеменат v достиже највише један максимум, после кога стално опада до нуле.

Као што се, дакле, види, појава ће, у опште, бити континуална или осцилаторна. У првоме случају, који ће се имати онда, кад је коефицијенат инерције мали према коефицијенту утицаја узрока X_1, елеменат v може само једном достићи максимум или минимум, па ће се за тим стално мењати у једноме истоме смислу и поступно бивати све неосетнији. У другоме случају, који наступа кад је први коефицијенат довољно велики према другоме, појава се састоји у једноме низу осцилација које у току времена постају све слабије; елеменат се v наизменце приближује једноме одређеном стању, дефинисаном својом вредношћу o, и удаљавати се од њега, али тако, да су та удаљавања све слабија, док најпосле и саме осцилације не постану неосетне. Појава је тада ушла у своје асимтотно стационарно, стање.

Шема обухвата велики број појава најразноврсније конкретне природе, као што су:

1° Лагано кретање клатна кроз какву средину, у којој је отпор пропорционалан брзини кретања; улогу v игра брзина, улогу η елонгација, улогу X_1 отпор средине, а улогу X_2 тежа.

2° Вибрације диапазона, кад је унутрашњи отпор пропорционалан брзини вибрација; улогу v игра та брзина, улогу η елонгација, улогу X_1 унутрашњи отпор, а улогу X_2 еластична сила.

3° Испражњавање електричних кондензатора, при чему је v јачина струје, η електрично оптерећење кондензатора, X_1 контра-електромоторна, а X_2 електростатична сила.

4° Осцилације нивоа течности у двама судовима, везаним једном хоризонталном цеви, при чему је v брзина померања нивоа, η нивоска разлика течности, X_1 сила трења, X_2 тежина померенога дела течности.

Осма шема.

Просте појаве што резултују из симултане акције два узрока: једнога импулсивног, сталне јачине, и једнога депресивног, пропорционалног квадрату величине непосредног објекта. Тада је

$$X_1 = const. \qquad X_2 = -\lambda v$$

тако, да је диференцијална једначина појаве

$$k\frac{dv}{dt} = X_1 - \lambda v^2 \tag{390}$$

Рачунајући време од почетног тренутка $t = o$ у коме је $v = o$, појава ће бити регулисана законом облика

$$v = \sqrt{\frac{X_1}{\lambda}}\,\frac{e^{\alpha t} - 1}{e^{\alpha t} + 1}$$

где је α константа, чија је вредност

$$\alpha = \frac{2}{k}\sqrt{\lambda X_1}$$

Дескриптивни елеменат α непрестано расти у току појаве, тежећи, при томе, граничној вредности

$$v = \sqrt{\frac{X_1}{\lambda}}$$

која карактерише асимтотно стање појаве.

Кад би импулсивнога узрока X_1 напрасно нестало, једначина би се појаве свела на

$$k\frac{dv}{dt} + \lambda v^2 = o$$

а закон би варијације елемента v био облика

$$v = \frac{1}{\frac{\lambda t}{k} + \frac{1}{v_0}}$$

где је v_0 величина тога елемента у тренутку кад је узрока X_1 нестало. Појава је, од тада, све слабија у току времена, тежећи асимтотно, и то све спорије, своме првобитноме почетном стању, карактерисаном вредношћу $v = o$.

На такву се шему наилази н. пр. при извесним физичким и хемиским модификацијама, ограниченим реактивним отпорима, које оне саме собом изазивају. Системи, изложени првобитно једној сталној акцији, добијају модификације, које би их, кад би се та акција довољно продужила, довеле у једно одређено асимтотно стање, из кога више не би излазили. Али, кад се та акција напрасно прекине, систем се поступно, и то на горе наведени начин, враћа у своје првобитно стање. Такав је н. пр. случај са модификацијама на површини селена, изложеној једној сталној радијацији, а које се могу пратити посматрањем варијација његове електричне проводљивости, или са модификацијама при бимолекуларном сједињавању јона у гасовима. Тражећи релацију између јачине светлости, коју емитује једно фосфоресцентно тело, и размака времена, који је прошао од тренутка кад је престала спољна светлосна акција, и узевши, при томе, 1^0 да сваки јон, сједињујући се, емитује одређену количину светлости; 2^0 да се сједињавање јона, од тренутка кад је спољна акција престала, врши под утицајем једнога отпора пропорционалног квадрату величине v модификације; 3^0 да је јачина i луминисценције у свакоме тренутку пропорционална брзини $-\frac{dv}{dt}$ сједињавање јона у томе тренутку, Sagnac је, применом горње шеме, дошао до релације

$$i = -h\frac{dv}{dt} = -\frac{h\lambda}{k}v^2 = \frac{1}{\left(t\sqrt{\frac{\lambda}{kh}} + \sqrt{\frac{k}{X_1 h}}\right)^2}$$

где су k, h, λ физичке константе тела. То је закон облика

$$i = \frac{1}{(a + bt)^2}$$

до кога је, експериментално, дошао H. Becquerel[1]) тражећи закон, по коме јачина луминисценције једнога сулфида поступно опада у току времена.

Девета шема.

Просте појаве што резултују из симултане акције два промењива депресивна узрока: једнога пропорционалног квадрату величине непосредног објекта, и једнога пропорционалног тоталитету тога објекта. Тада је

$$X_1 = -\lambda v^2 \qquad X_2 = -\mu\eta$$

где су λ и μ коефицијенти утицаја уочена два депресивна узрока. Једначина је појаве

$$k\frac{dv}{dt} = -\lambda v^2 - \mu\eta$$

или

$$(391) \qquad k\frac{d^2\eta}{dt^2} + \lambda\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \mu\eta = o$$

Претпоставивши да је почетни тоталитет η_0 елемента v довољно мали, да би се могли занемарити ње-

---

[1]) H. Becquerel: Sur les lois de l'intensité de la lumière émise par les corps phosphorescents (C. R. de l'Acad. des Sciences t. 113. 1891. p. 618).

гови степени виши од другога; закон варијације тоталитета η у току појаве биће дат приближном једначином[1].

$$(392)\qquad \eta = -\frac{\lambda}{2k}\eta_0^2 - \eta_0\left(1 - \frac{2\lambda}{3k}\eta_0\right)\cos t\sqrt{\frac{\mu}{k}} - $$
$$-\frac{\lambda}{6k}\eta_0^2\cos 2t\sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

а закон варијације самога дескриптивнога елемента v једначином

$$v = \eta_0\left(1 - \frac{2\lambda}{3k}\eta_0\right)\sqrt{\frac{\mu}{k}}\sin t\sqrt{\frac{\mu}{k}} +$$
$$+\frac{\lambda}{3k}\eta_0^2\sqrt{\frac{\mu}{k}}\sin 2t\sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

Појава је, дакле, периодична и периода је осцилација

$$(393)\qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

Она се, дакле, мења пропорционално квадратном корену из коефициента инерције у појави, а обрнуто пропорционално квадратном корену из коефициента утицаја узрока X_2, а ни у колико не зависи од коефициента утицаја узрока X_1.

Задржимо се на варијацијама тоталитета η, које су од нарочитог интереса у конкретним појавама, обухваћеним овом шемом. Те су варијације осцилаторне и имају за периоду вредност T, дату обрасцем (393). Амплитуда η_1 растуће полу-осцилације, која долази одмах за почетном опадајућом полу-осцилацијом и која

---

[1] За приближну интеграцију једначине (11) в. н. пр.
Poisson: Mécanique 1-e edit. 1811. t. I. p. 405;
Mascart-Joubert: Leçons sur l'Electr. et le magnetisme, t. II. p. 25.

се добија из једначине (392) ставивши да је $t = T$, има за вредност

$$\eta_1 = \eta_0 - \frac{4\lambda}{3k}\eta_0^2$$

Амплитуда идуће полу-осцилације биће, тако исто,

$$\eta_2 = \eta_1 - \frac{4\lambda}{3k}\eta_1^2$$

или, са усвојеном апроксимацијом,

$$\eta_2 = \eta_0 - \frac{8\lambda}{3k}\eta_0^2$$

тако, да ће, у опште, за n-ту полу-осцилацију бити

$$\eta_n = \eta_0 - \frac{4n\lambda}{3k}\eta_0^2$$

Осцилације, дакле, *слабе по аритметичкој прогресији* и постају неосетне после једнога одређеног броја осцилација, датог најмањим целим бројем m, који задовољава погодбу

$$m > \frac{3k}{4\lambda}\frac{1}{\eta_0}$$

Размак времена t_1, што одговара једној растућој полу-осцилацији и који се добија ставивши у једначини (392) да је $\eta = o$, биће, према усвојеној апроксимацији, дат обрасцем

$$t_1 = \frac{T}{4} + \frac{\lambda\eta_0}{3}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

Размак времена $\frac{T}{2}$, што одговара једној целој осцилацији, није, дакле, подељен на два једнака дела тренутком у коме осцилација мења знак: размак, што одговара растућој полу-осцилацији, већи је од онога што одговара опадајућој полу-осцилацији, а који има за израз

$$t_2 = \frac{T}{4} - \frac{\lambda\eta_0}{3}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

пошто мора бити

$$t_1 + t_2 = T$$

Таква шема обухвата н. пр. појаву осцилација каквога чврстог тела у средини која даје отпора, и то тако, да је тај отпор пропорционалан брзини кретања; такав случај наступа у природноме току појаве, кад су брзине довољно велике. Улогу v игра тада брзина кретања, улогу η елонгација, улогу X_1 отпор средине, а улогу X_2 депресивна моторна сила.

Иста би шема обухватила и Becquerel-ову теорију механизма фосфоресценције[1]. Покушавајући да постави релацију између јачине светлости коју емитује једно фосфоресцентно тело, и времена протеклог од тренутка кад је престала директна спољна акција светлости на тело, Becquerel полази од хипотезе да је емитована светлост, у појави фосфоресценције, резултат извесног интра-молекуларног вибраторног кретања и да се слабљење те светлости, које произлази од постепеног умањавања амплитуда вибрација, може сматрати као ефекат једнога реактивног узрока, чија би јачина била у свакоме тренутку пропорционална квадрату брзине делића што трепере. Тако схваћена појава потпада под горњу шему и појединости њенога тока обухваћене су оним што је горе казано. Тако, вибрације ће бити све слабије и постати неосетне после извеснога времена,

---

[1] H. Becquerel: loc. cit.

предвиђенога у шеми: између амплитуда η_n n-те вибрације и амплутуде η_0 почетне вибрације постојеће релација

$$\eta_n = \eta_0 - \frac{4n\lambda}{3k}\eta_0^2$$

или, према усвојеној апроксимацији,

$$\eta_n = \frac{\eta_0}{1 + \frac{4n\lambda}{3k}\eta_0} \tag{394}$$

А пошто је број n пропорционалан времену t, а амплитуда пропорционална квадратном корену из јачине i светлости, једначина се (394) своди на релацију облика

$$i = \frac{1}{(a + bt)^2} \tag{395}$$

$$(a, b) = const$$

између јачине емитоване светлости и времена протеклог од престанка директне спољне акције светлости на тело. То је закон, за који је Becquerel показао непосредно експериментом, да са великом приближношћу представља начин варијације јачине емитоване светлости при фосфоресценцији, за тела која је у томе погледу испитивао.

Десета шема.

Просте појаве што резултују из симултане акције три узрока: једнога са независним варијацијама, једнога депресивног, пропорционалног величини непосредног објекта, и једнога, такође депресивног, пропорционалног тоталитету тога објекта. Тада је

$$X_1 = f(t) \qquad X_2 = -\lambda v \qquad X_3 = -\mu\eta$$

где је $f(t)$ одређена и дата функција времена t, λ и μ коефициенти утицаја депресивних узрока. Појава се своди на једначину

$$k\frac{dv}{dt} = f(t) - \lambda v - \mu\eta$$

т. ј. на линеарну једначину другога реда

$$k\frac{d^2\eta}{dt^2} + \lambda\frac{d\eta}{dt} + \mu\eta = f(t) \tag{396}$$

Ако је

$$\lambda^2 - 4\mu k < o$$

и ако се стави да је

$$\frac{1}{k}\sqrt{4\mu k - \lambda^2} = \text{a}$$

закон варијације тоталитета η облика је

$$\eta = Ae^{-\frac{\lambda t}{2k}}\sin(\text{a}t + \varphi) + \Phi(t)$$

где су A и φ константе, чије вредности зависе од почетнога стања у појави, а $\Phi(t)$ један партикуларан интеграл једначине (396).

Закон варијације самога елемента v облика је

$$v = Be^{-\frac{\lambda t}{2k}}\sin(\text{a}t + \psi) + \frac{d\Phi}{dt} \tag{A}$$

где су B и ψ константе, везане са A и φ релацијама

$$B = A\sqrt{\text{a}^2 + \left(\frac{\lambda}{2k}\right)^2}$$

$$tang\,\psi = \frac{\text{a}\sin\varphi + \frac{\lambda}{2k}\cos\varphi}{\frac{\lambda}{2k}\sin\varphi - \text{a}\cos\varphi}$$

Резултујућа појава биће суперпозиција двеју простијих појава:

1° једне, која се састоји у варијацијама елемента v по извесном закону, чији облик зависи од начина на који се мења узрок X_1;

2° једнога, који се састоји у поступно амортизираним осцилацијама појаве око једнога одређеног стања, карактерисаног вредношћу $v = o$ елемента v.

У своме перманентном режиму, у који појава, због наглог амортизирања осцилација под 2°, у брзо улази, варијације су елемента v регулисане законом

$$v = \frac{d\Phi}{dt}$$

а варијације његовог тоталитета законом

$$\eta = \Phi(t)$$

Пре уласка у такав режим, појава му се наизменце приближује и од њега удаљује, али су та удаљавања све слабија, тако, да по истеку извесног времена постају неосетна. Слабљење тих удаљавања ефекат је искључиво депресивнога узрока X_2; оно је у толико јаче, у колико је коефицијенат утицаја тога узрока већи, а коефицијенат инерције у појави мањи.

Између многобројних разноврсних појава обухваћених овом шемом овде ће бити наведене:

1° Појаве што се састоје у варијацијама једне карактеристичне промењиве количине у великоме броју физичких апарата за аутоматско бележење тока појаве, у којима, обично, главну улогу игра какав покретан орган (игла, писаљка, мембрана, огледало), удешен за праволиниско или кружно померање и изложен овим трима симултаним акцијама:

а) акцији једне активне силе, која се хоће да измери;

b) акцији једне антагонистичне силе, пропорционалне померању покретног органа, рачунатом од једнога сталног положаја;

c) акцији једне депресивне амортизирајуће силе, пропорционалне брзини померања покретног органа.

Улогу елемента v игра, тада, брзина померања покретног органа, улогу тоталитета величина померања или скретања тога органа од његовог првобитног положаја. Узрок се X_1 поклапа са силом a), узрок X_2 са силом c), а узрок X_3 са силом b).

Конкретан пример: скретање игле галванометра при проласку струје, где улоге сила a), b), c) играју: једна сила пропорционална јачини струје, који се мери; једна пропорционална углу скретања, исте врсте које је и торсиона сила при упредању; једна реактивна сила пропорционална брзини кретања игле, а која произлази од трења или индукције.

2° Подржано испражњавање електричних кондензатора, кад се ово подржава каквим извором електрицитета (елементом, батеријом), који кондензатору за време испражњавања придаје сталну или промењљиву електромоторну силу. Улогу v тада игра јачина струје испражњавања, улогу η електрично оптерећење кондензатора, које се мења у току испражњавања; улогу узрока X_1 електромоторна сила електричног извора, улогу узрока X_2 контра-електромоторна сила у проводнику, и, на послетку, улогу узрока X_3 електро-моторна сила што произлази од разлике потенцијала у кондензатору.

3° Violle је нашао да, кад се нагло загреје један од полова каквог термоелектричног елемента, комбинованог са галванометром, игла се овога помера, премаши положај који би требала да стално заузме, враћа се опет у овај, премаши га, поново се враћа и после једнога низа све слабијих осцилација дефинитивно се на њему заустави. Појава постаје разумљива кад се примети, да се разлика температура двају полова термоелектричног елемента мења са временом по Newtonовом закону, од тренутка кад се почне грејати један од полова, и да ће, према томе, јачина струје бити функција времена облика

$$i = h\,(1 - e^{-gt})$$
$$(h, g) = const$$

Ова струја игра улогу узрока X_1 са независним варијацијама, и ако се скретању игле галванометра и брзини овога скретања прида улога тоталитета η и елемента v горње шеме, ток је појаве обухваћен том шемом. За законе варијација тих елемената налазе се тада облици, који се потпуно подударају са онима, до којих се долази непосредним посматрањем[1].

4° Кретање електрицитета у резонаторима, при чему је закон варијације одговарајућег узрока X_1 облика[2]).

$$X_1 = he^{-gt} \sin (mt + n)$$
$$(h, g, m, n) = const \qquad g > o$$

Улогу тоталитета η игра разлика потенцијала на двама половима резонатора, а улогу v брзина мењања те разлике.

Случај кад је узрок X_1 периодичан. Тај је случај од нарочитог интереса по броју и разноврсности појава у којима се на њега наилази.

Пре свега, у извесном броју појава та се периодичност манифестује у простим осцилацијама облика

$$(397) \qquad X_1 = P \sin 2\pi \left(\frac{t}{\theta} - \varrho\right)$$
$$(P, \theta, \varrho) = const$$

---

[1]) Ernest Merritt (American Journal of Science, t. XLI. 1891. p. 417.

[2]) V. Bjerkness (Wiedem. Annalen Bd. LV. p. 121).

Горња функција Φ тада је облика

$$\Phi(t) = M \sin 2\pi \left(\frac{t}{\theta} - \gamma\right) \tag{398}$$

где су M и γ константе дефинисане једначинама

$$\begin{aligned} M &= \frac{P}{\sqrt{\frac{4\pi^2\lambda^2}{\theta^2} + \left(\mu - \frac{4k\pi^2}{\theta^2}\right)^2}} \\ \tan g\, 2\pi(\gamma - \varrho) &= \frac{2\pi\lambda}{\mu\theta - \frac{4k\pi^2}{\theta^2}} \end{aligned} \tag{399}$$

Функција $\Phi'(t)$ истога је облика

$$\Phi'(t) = N \sin 2\pi \left(\frac{t}{\theta} - \delta\right) \tag{400}$$

где су N и δ константе чије су вредности

$$N = \frac{2\pi M}{\theta} \qquad \delta = \gamma + \frac{1}{4} \tag{401}$$

Резултујућа појава састоји се, дакле, у суперпозицији двеју врста осцилација:

1° једних са периодом T, датом обрасцем $T = \frac{2\pi}{a}$, на које би се појава свела кад не би било узрока X_1, и које брзо слабе и поступно ишчезавају услед присуства експоненцијалног фактора $e^{-\beta t}$ у једначини (A).

2° једних са оном истом периодом θ коју имају и осцилација узрока X_1, а са непромењивом амплитудом N:

Ова друга врста осцилација одговара сталноме, дефинитивном, режиму појаве. Кад ова буде једном ушла у тај режим, дескриптивни се елеменат мења по закону

$$v = \Phi'(t)$$

а тоталитет η по закону

$$\eta = \Phi(t)$$

Осцилације тоталитета показују, према осцилацијама узрока X_1, са којима имају једну исту периоду, сталну фазну разлику $\gamma - \varrho$, које само у томе случају може нестати, ако је $\lambda = o$ т. ј. ако нестане узрока X_2. Ова разлика, последица поступног слабљења осцилација, одговара једној врсти задоцњења осцилација тоталитета према осцилацијама узрока X_2. Приметимо и то, да ће и сама појава показивати, у своме дефинитивном режиму, а према осцилацијама узрока X_1, једну сталну фазну разлику, која ће имати за вредност $\delta - \varrho$.

Факт, међу тим, који се нарочито истиче међу осталим појединостима појаве, и који игра важну улогу у механизму многих појава, јесте овај: кад год је узрок X_1 периодичан са простим осцилацијама, у току појаве поступно се уводи једна врста *синхронизације осцилација узрока и ефекта*: појава, која се испрва налази у једноме променљивом режиму, улази поступно у један сталан, дефинитиван режим, *у коме се њена периода изједначује са периодом узрока.* Овај сталан режим наступа у толико брже, у колико је већи коефициенат утицаја амортизујућег узрока X_2.

Претпоставимо, сад, случај ма каквога периодичног узрока X_1. Функција, која представља његов интензитет, може се, у опште, развити у Fourier-ов ред облика

$$(402) \qquad X_1 = \Sigma P_n \sin 2\pi \left(\frac{nt}{\theta} - \varrho_n\right)$$

а одговарајућа функција $\Phi(t)$ биће збир ограниченог или бескрајног броја чланови облика

$$(403) \qquad M_n \sin 2\pi \left(\frac{nt}{\theta} - \gamma_n\right)$$

где су M_n и γ_n константе дефинисане обрасцима (399), пошто се у овима смени P са P_n, ϱ са ϱ_n и θ са $\frac{\theta}{n}$

Појава ће се састојати у суперпозицији осцилација разне врсте:

1° једних са периодом T, на које би се свела појава кад неби било узрока X_1 и које брзо слабе и нестаје их;

2° једних, у ограниченом или бескрајном броју, са одговарајућим периодама

$$\theta, \ \frac{\theta}{2}, \ \frac{\theta}{3}, \ \frac{\theta}{4}, \ldots\ldots$$

од којих свака одговара по једном члану функције $\Phi(t)$.

Свака врста варијација 2° представља по једну елементарну појаву; такве појаве играју, наспрам целокупне посматране појаве, познату улогу коју играју *хармониски звуци* у специјалнијем, акустичном проблему. Утицај ових елементарних појава све је слабији у колико им је виши ранг n, и постаје неосетан почевши од једног довољно високог ранга: максималне амплитуде, како карактеристичне променљиве v, тако и тоталитета η. теже нули кад n бескрајно расте. Дефинитиван режим појаве своди се, дакле, на један мали број таквих елементарних појава, што одговарају малим вредностима n.

Између механичких појава, које потпадају под ову шему, овде ће се навести н. пр. кретање двеју тачака A и B, покретних по једној истој правој линији, везаних међу собом једном опругом, чија се маса може занемарити, а кад је кретање такво, да тачка A периодички осцилује око једнога сталног положаја, а тачка B наилази у своме кретању на отпор пропорционалан брзини њеног кретања. Механизам и ток појаве обухваћени су горњом шемом. Да би се остварио отпор пропорционалан величини непосредног објекта узрока, чију улогу овде игра брзина тачке *B*, може се та тачка везати са слободним крајем какве дугачке вертикалне шипке, која осцилује око једне сталне тачке *O*, и утврдити на шипци у близини тачке *O* какво крило, чије би кретање наилазило на отпор ваздуха пропорционалан брзини тачке *B*. Додавање ових делова има само утицаја на промену масе тачке *B* т. ј. коефициента инерције у појави, а међу тим служи на изазивање врсте отпора, која се овде има у виду и која игра улогу узрока X_2. Улогу узрока X_1 игра извесна еластична сила, пропорционална елонгацији тачке *A*, која се по претпоставци мења периодички; на послетку, улогу узрока X_3 игра једна сила пропорционална елонгацији саме тачке *B*, која са своје стране игра улогу тоталитета појаве [1].

Горња шема обухвата и појаву подржаног испражњавања електричних кондензатора, кад се подржавање врши каквом периодичном електромоторном силом. Такав је случај н. пр. остварен кад се ова електромоторна сила производи обртањем једнога металног контура у каквом униформном магнетном пољу, око једне осовине управне на правцу линија сила. Улогу периодичног узрока X_1 игра електромоторна сила, а улогу осталих елемената шеме елементи наведени на стр. (516) и (505).

Под исту би шему потпало и осцилаторно кретање игле каквога галванометра, кад се електрично коло, у вези са галванометром, затвори преко једнога соленоида, у близини кога осцилује какав магнет. Брзина померања игле игра улогу карактеристичне променљиве количине, величина скретања улогу тоталитета појаве. Улоге узрока X_1, X_2, X_3 распоређене су овако: торсиони

---

[1] L. Lecornu: C. R. de l'Acad. des sciences t. 118. 1894. p. 398.

спрег, пропорционалан величини скретања игле, игра улогу узрока X_3; амортизујући спрег (који резултује из електромагнетних реакција у оквиру галванометра и од магнета), пропорционалан брзини скретања, игра улогу узрока X_2; и, на послетку акција, индуковане струје на солсноиду игра улогу периодичног узрока X_1.

На исту се шему наилази и у разноврсним другим појавама, између којих ће се навести: вибрације мембрана на телефону, вибрације покретних органа на осцилографима, многобројне осцилаторне појаве изазвате алтернативним струјама и т. д.

Један специјалан случај периодичких случаја X_1, који је од нарочитог интереса, јесте онај, кад су остварене ове погодбе:

a) Узрок је X_1 периодичан и врло слаб, континуалан или тренутан. (Узрок ће се сматрати за врло слаб ако производи веома слабе вибрације на своме непосредном објекту, а за тренутан ако је размак времена, у коме такав узрок врши своју акцију, толико кратак, да су модификације толалитета η у појави за само време те акције неосетне).

b) Периода се узрока X_1 врло мало разликује од оне, коју би имала појава, кад овога узрока не би било;

c) Коефицненат утицаја узрока X_2 врло је мали.

Претпоставивши да се функција, која представља интензитет периодичног узрока X_1, може развити у Fourier-ов ред (402), за варијације тоталитета појаве, кад ова буде једном ушла у свој дефинитивни режим, важиће закон

$$\eta = \Phi(t)$$

где ће Φ бити збир ограниченог или бескрајног броја чланова облика (403). Појава ће опет бити суперпозиција хармонских елементарних појава, од којих свака одговара по једној посебној вредности n.

Ако се, на место коефициента утицаја μ, уведе вредност осцилаторне периоде T, што би одговарала случају, кад узрок X_1 не постоји, а која је са тим коефицијентом везана релацијом

$$T = \frac{4\pi k}{\sqrt{4\mu k - \lambda^2}} \tag{404}$$

константе M_n и γ_n, што одговарају општем члану (403) функције $\Phi(t)$, биће дефинисане обрасцима

$$M_n = \frac{P_n}{\sqrt{\frac{4n^2\pi^2\lambda^2}{\theta^2} + \left[\frac{\lambda^2}{4k} + 4k\pi^2\left(\frac{1}{T^2} - \frac{n^2}{\theta^2}\right)\right]^2}} \tag{405}$$

$$tang\, 2\pi(\gamma_n - \varrho_n) = \frac{\frac{2n\pi\lambda}{\theta}}{\frac{\lambda^2}{4k} + 4k\pi^2\left(\frac{1}{T^2} - \frac{n^2}{\theta^2}\right)} \tag{406}$$

Ако се, сад, води рачуна о погодбама $a)$, $b)$, $c)$ тако, да

$$P_n,\ T - \theta,\ \lambda$$

имају веома мале вредности, обрасци (405) и (406) своде се, са довољном апроксимацијом, на

$$\begin{aligned} M_n &= \frac{P_n T^2}{4k\pi^2} \cdot \frac{1}{1 - n^2} \\ tang\, 2\pi(\gamma_n - \varrho_n) &= \frac{\lambda T}{k\pi} \cdot \frac{1}{1 - n^2} \end{aligned} \tag{407}$$

и то за све вредности n осим за $n = 1$.

Пошто је коефицијенат P_n, што одговара амплитуди осцилација узрока X_1, према погодби $a)$, веома мали, исти ће случај бити и са коефицијентом M_n: амплитуде осцилација, што одговарају елементарним хармониским појавама, у којима је $n = 2$, $n = 3$, $n = 4, \cdots$ биће, дакле, веома мале и постаће неосетне за такве елементарне појаве вишега ранга. На против, коефициенат M_1, што одговара елементарној појави ранга $n = 1$, поред свега тога, што је коефициенат P_1 врло мали, имаће релативно велику вредност, јер се P_1 множи са једним чиниоцем чији је именилац врло мали. Функција $\varPhi(t)$ своди се, дакле, са великом апроксимацијом на свој први члан

$$M_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{\theta} - \gamma_1\right)$$

што одговара првоме члану Fourier-овог реда (402); остали чланови немају осетна утицаја на вредност те функције. Исто ће то бити и са функцијом $\Phi'(t)$ из чега излази овај општи закључак, који обухвата механизме веома великог броја разноврсних појава:

Један, ма какав, периодичан и врло слаб узрок X_1, по својој акцији на карактеристичну променљиву количину у каквој осцилаторној појави са лагано слабљеним осцилацијама и периодом мало различном од периоде узрока X_2, изједначује се са једним, такође периодичким, изроком C, но који има просте осцилације и чији је интензитет представљен првим чланом Fourier-овог реда, у који се може развити интензитет узрока X_1.

Потражимо н. пр. закон варијације периодичног узрока C са простим осцилацијама, који се, по својој акцији, изједначује са каквим сталним а периодички прекиданим узроком

$$X_1 = const = H$$

Ако се стави да је

$$X_1 = C = M \sin 2\pi \left(\frac{t}{\theta} - \varrho\right) = A \sin 2\pi \frac{t}{\theta} + B \cos 2\pi \frac{t}{\theta}$$

према познатим обрасцима из теорије тригонометриских редова, и приметивши да је величина X_1 стална и равна H у размаку (t_1, t_2) времена t, а да је, међутим, равна нули за остали размак осцилаторне периоде, биће

$$A = \frac{2}{\theta}\int_{t_1}^{t_2} H \sin 2\pi \frac{t}{\theta}\, dt =$$

$$= \frac{2H}{\theta} \sin \frac{\pi (t_2 - t_1)}{\theta} \sin \frac{\pi (t_2 + t_1)}{\theta}$$

$$B = \frac{2}{\theta}\int_{t_1}^{t_2} H \cos 2\pi \frac{t}{\theta}\, dt =$$

$$= \frac{2H}{\theta} \sin \frac{\pi (t_2 - t_1)}{\theta} \cos \frac{\pi (t_2 + t_1)}{\theta}$$

из чега излази да је

$$M = \frac{2H}{\pi} \sin \frac{\pi (t_2 + t_1)}{\theta} \tag{408}$$

$$\varrho = \frac{t_2 + t_1}{2} - \frac{1}{4}$$

Према томе: *један сталан узрок X_1, импулсиван или депресиван, који врши своју акцију у једноме размаку времена $t_2 - t_1 < \theta$ изједначује се, по акцији, са једним просто-осцилаторним узроком, чија је амплитуда осцилацији M дата обрасцем (408) и чији максимум одговара тренутку* $\frac{t_1 + t_1}{2}$.

На исти би се начин извео и овај закључак:

Један тренутан периодичан узрок X_2, импулсиван или депресиван, чији је импулс

$$\int X_1\,dt = H$$

изједначује се, по својој акцији, са једним периодичким просто-осцилаторним узроком, чија је амплитуда

$$M = \frac{2H}{\theta}$$

и чији максимум одговара вредности t у тренутку напрасне појаве узрока X_1.

Горе доказана општа теорема о еквиваленцији акције једнога ма каквог периодичног узрока са акцијом просто-осцилаторних узрока C, до које је, у једном њеном нарочитом облику, први дошао и експериментално је верификовао Cornu у својим испитивањима о синхронизацији механичких система[1]), своди на узроке C бескрајан број најразноврснијих сложенијих периодичних узрока. Она истиче генералност механизма синхронизације у природним појавама, и то је тај механизам, који у непрегледном броју најразноврснијих осцилаторних појава повлачи собом наступање сталног, дефинитивног режима у њима. Такав је н. пр. случај код Blondel-овог осцилографа, или код осцилација бродова услед таласа, са којима се синхронизују друге осцилације, н. пр. оне, што проистичу из кретања машинских органа на броду. На исти се механизам наилази и у појавама прилива и одлива; у појавама синхронизације код разноврсних акустичних апарата (н. пр. код Helmholtz-ових резонатора, Bourget-ових мембрана, Mercadier-ових монотелефона и т. д.); при кретању електричне струје, изазване каквом периодичном елек-

---

[1]/ A. Cornu: Sur un théorème reliant la théorie de la synchronisation à celle des résonances (C. R. l'Acad. des Sciences t. 119. 1894. p. 313.).

тромоторном силом; при синхронизацији код Hertz-овог електричног ексцитатора и резонатора; при појавама синхронизације механичких и електричних система у експериментима Cornu-a и т. д. Вероватно је да исти механизам синхронизације игра важну улогу и у светлосним појавама и да из њега резултују извесне оптичке особине пондерабилне материје (апсорпција, емисија, флуоресценција).[1] Вероватно је, такође, да ће се на сличне механизме наићи и у физиолошким појавама, у којима се симултано јављају периодични и извесни антагонистични, реактивни, узроци, тако да прва врста уноси пертурбације у какву осцилаторну појаву, која поступно и лагано слаби услед утицаја узрока ове друге врсте, а на начин предвиђен горњом шемом.

Врло инструктивни експерименти Cornu-a, којима се физички потврђују горње појединости о синхронизацији осцилаторних појава и осцилација периодичких узрока, при пертурбацијама које ови својом акцијом уносе у једну такву већ постојећу појаву, састоје се у овоме:

Два метална оквира, везани један са другим једном крутом шипком, намештени један изнад другога, и кроз који састављају два једно од другог независна електрична кола, осцилују у врло интензивном магнетном пољу. Кроз једно од ових кола пропушта се периодична струја, која у експерименту игра улогу узрока X_1; друго коло, у чијем се саставу налази један део са променљивим електричним отпором, служи на то да се осцилације система амортизирају у коликој се мери хоће. На тај је начин постигнута потпуна независност узрока X_1 и коефициента утицаја λ узрока X_2, реализираног другим колом. Периодичност узрока X_1 добијена је проласком струје кроз једну еластичну пло-

---

[1] Cornu: loc. cit

чицу која вибрира и чија је вибраторна периода блиска периоди осцилација двају оквира. Разни типови периодичног узрока X_1 проучени у горњој шеми добијају се н. пр. на овај начин:

a) Узрок X_1 са простим синусоидалним осцилацијама добија се помоћу индуковане алтернативне струје, изазване једним малим магнетом, везаним за плочицу што вибрира у унутрашњости једнога калема;

b) узрок X_1 сталне јачине, са прекидима, добија се кад се вибрисање плочице одржава електричним елементом сталне јачине;

c) тренутан узрок X_1 добија се редукујући трајање електричног додира тога елемента на један веома кратак размак времена.

Слагање кретања оквира и варијација периодичног узрока који га изазива, може се извршити оптички, пројектујући лик једнога истог непокретног светлог предмета на какав заклон, пошто се светлост одбије од два мала огледала, од којих је једно утврђено за плочицу што вибрира, а друго за један од покретних оквира.

Док је друго електрично коло отворено (чиме је амортизујући узрок X_2 одстрањен, т. ј. његов коефицијенат утицаја λ сведен на нулу), крива линија, што на заклону резултује из слагања поменута два кретања, непрекидно се деформише и пролази кроз све могућне Lissajous-ове облике, што показује потпуну међусобну независност вибраторних периода плочице и оквира. Али, чим се затвори поменуто електрично коло у другоме оквиру, те деформације нестаје и крива линија постаје елипса, која показује, у сагласности са појединостима предвиђеним горњом шемом, да је постигнута синхронизација горњих двеју врста осцилација.

Ако се прекине електрична веза између плочице и оквира, ови престају вибрисати; ако се између једних и других уведе каква механичка веза (реализирана н. пр. једном крутом шипком), треперења плочице преносе се на оквир у облику комплексних вибрација, које се оптички слажу са вибрацијама плочице и изазивају у пројекцији на заклону извесне компликоване криве линије. Кад је одстрањен узрок X_2 (т. ј. кад је друго електрично коло), та је крива једна неправилна елипса са искрзаном контуром, која се непрекидно и неправилно деформише у току појаве и која показује неједнакост и међусобну независност периода осцилација једних и других органа. Међу тим, чим се пропусти струја кроз друго коло, чиме је стављен у акцију амортизирајући узрок X_2, кретање оквира постаје правилно, неправилности на контури елипсе и њене деформације брзо нестаје, тако, да се крива линија на заклону убрзо претвара у једну правилну и стабилну елипсу, која је знак изједначавања периода осцилација једних и других органа и њихове потпуне синхронизације. Кад се поново отвори друго електрично коло, елипса се, после неколико тренутака, опет почиње деформисати и у брзо добија поменуте неправилности, које показују да је нестало синхронизације. Ова се, дакле, има приписати акцији амортизујућег узрока, везаног за друго електрично коло, као што је предвиђено и општом шемом за синхронизацију осцилација у појавама овакве врсте.

Једанаеста шема.

Просте појаве у линеарним феноменским пољима, што резултују из акције једнога узрока пропорционалног дивергенцији поља. Јачина узрока има за израз

$$X = \lambda \, div \, v = \lambda \frac{d^2 v}{ds^2} \tag{409}$$

где је s дужина лука линије на коју се своди поље,

λ коефициенат утицаја узрока. Диференцијална је једначина појаве

$$k\frac{\partial v}{dt} = \lambda\frac{\partial^2 v}{ds^2}$$

Она дефинише вредност елемента v као функцију времена и положаја тачке, коју још имају да прецизирају у напред дате *локалне* или *тренутне* погодбе, које прецизирају закон промене стања у једној утврђеној тачки поља у току времена, или распоред стања у пољу у једноме утврђеном тренутку.

Проучимо један одређен случај те врсте. Нека је дато неограничено, линеарно феноменско поље (v), са оваквим локалним и тренутним погодбама при мењању стања које га карактерише: у почетном тренутку $t=o$ појаве све су тачке поља у неутралном стању, карактерисаном вредношћу $v = o$ елемента v, а почетна тачка $s = o$ напрасно доведена у стање $v = \mathbf{a}$, које се, за тим, одржава неизмењено у тој тачки за све време трајања појаве; после извеснога, довољно дугог, времена све тачке поља изједначавају своја стања, тако, да се од тада неосетно разликују од стања $v = \mathbf{a}$.

Стање у тачки s мењаће се у току времена по закону дефинисаном парцијалном једначином

$$\alpha^2\frac{\partial v}{dt} = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \tag{410}$$

где је

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{\lambda}} \tag{411}$$

и наведеним локалним и тренутним погодбама.

У другоме каквом феноменском пољу исте врсте, карактерисаном истим елементом v, али другом константом α', стање у једној тачки s' у тренутку t', дефинисано је једначином

$$\alpha'^2 \frac{\partial v'}{\partial t'} = \frac{\partial^2 v'}{\partial s'^2} \tag{412}$$

где v' означује вредности елемента v у овоме феноменском пољу.

Ако се стави да је

$$s' = gs \quad . \quad t' = ht$$

где су g и h константе, једначина (3) постаје

$$\frac{g^2 \alpha'^2}{h} \frac{\partial v'}{\partial t} = \frac{\partial^2 v'}{\partial s^2}$$

Изабравши константе g и h тако, да буде

$$\alpha^2 = \frac{g^2}{h} \alpha'^2$$

т. ј.

$$\frac{\alpha^2 s^2}{t} = \frac{\alpha'^2 s'^2}{t'}$$

обе ће величине v и v' задовољавати једну исту парцијалну једначину (410), и при једнаким локалним и тренутним погодбама оне ће представљати једну исту функцију времена и положаја тачке. У исто време, пошто се вредност те функције не мења кад вредност количника

$$\frac{\alpha^2 s^2}{t}$$

која ће бити означена са $4z^2$ остаје непромењена, то се v може сматрати као функција само једне промењљиве z. Увођењем ове промењљиве у рачун, једначина се (410) своди на обичну диференцијалну једначину

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + 2z \frac{dv}{dz} = o$$

чији је општи интеграл

$$v = C_1 \int_0^z e^{-z^2} dz + C_2$$

где су C_1 и C_2 интеграционе константе, одређене погодбама да је

$$\begin{array}{lll} v = o & \text{за } t = o & \text{т. ј. за } z = \infty \\ v = a & \text{за } t = \infty & \text{т. ј. за } z = o \end{array}$$

Према интегралном обрасцу

$$\int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

закон ће варијације елемента v бити представљен обрасцем

$$v = a\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2} dz\right) \tag{413}$$

у коме се z има сматрати као функција времена и положаја тачке, представљена обрасцем

$$z = \frac{\alpha s}{2\sqrt{t}} \tag{414}$$

Локалне промене, које ће се дешавати у једној произвољно изабраној тачки s, добиле би се графички на овај начин:

1° нека је конструисана алгебарска крива линија L_1 трећег степена

$$tz^2 = \beta$$

где је β константа тачке дефинисана једначином

$$\beta = \frac{\alpha^2 s^2}{4}$$

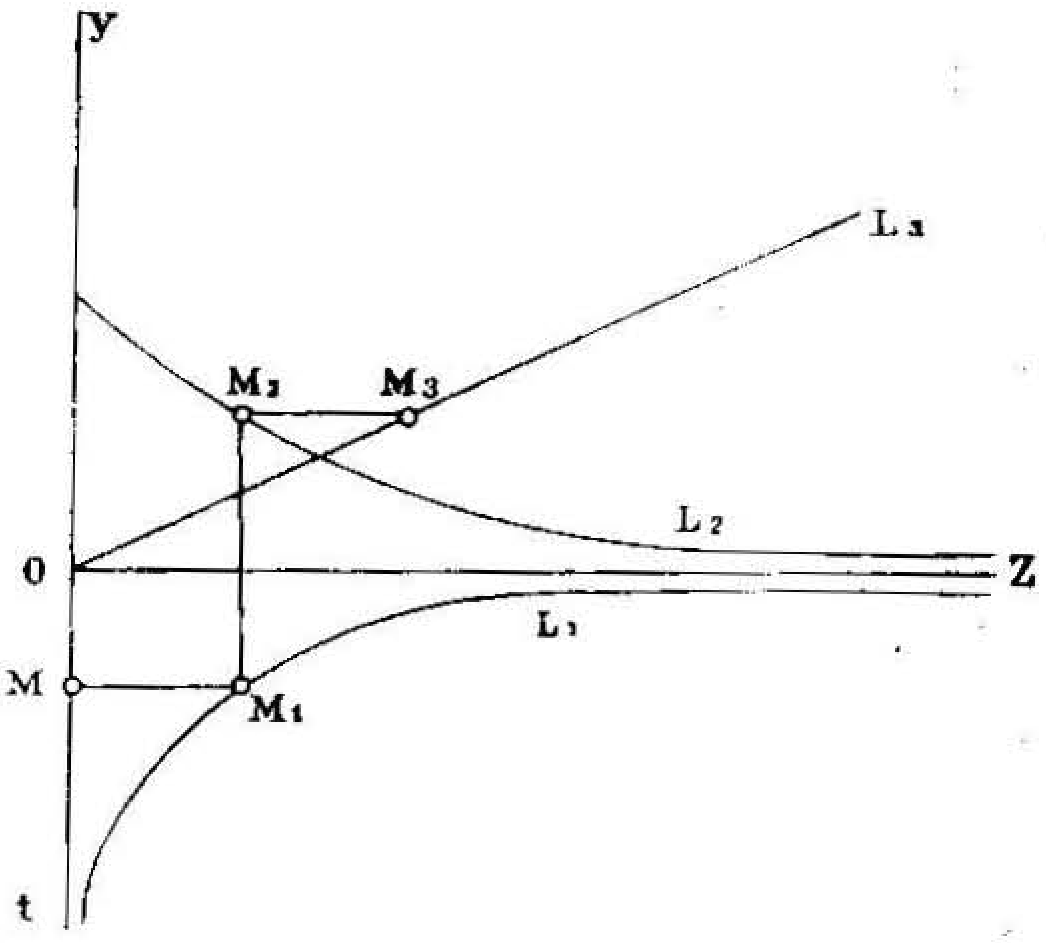
2° нека је конструисана утврђена крива L_2 дефинисана једначином

$$y = 1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{z} e^{-z^2} dz$$

3° нека је конструисана права L_3 дефинисана једначином

$$v = ay$$

Поставивши линије L_1, L_2 и L_3 у положај означен у слици (34), величина v дескриптивног елемента појаве, у време t, а у довде посматраној тачки феноменског поља, биће равна растојању тачке M_3 од праве Oy, где се до тачке M_3 долази овом конструкцијом: из тачке M на осовини yot, такве да је $OM = t$, повуче се права паралелна осовини oz; из пресечне тачке M_1 те праве са кривом L_1 повуче се права паралелна осовини yot; из пресечне тачке M_2 ове праве са кривом L_2 повуче се паралелна осовини oz до пресека M_3 са правом L_3: тражена величина елемента v једнака је одстојању тачке M_3 од осовине yot.



Сл. 34.

Интензитет i појаве у тренутку t, а у тачки s, има за израз

$$i = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{a\,\alpha\,s}{2t\sqrt{\pi t}}\; e^{-\frac{\alpha^2 s^2}{4t}}$$

Дијаграм интензитета представља криву линију која полази, растући, од почетног тренутка $t = o$, достиже свој максимум у тренутку

$$t = \frac{\alpha^2 s^2}{6}$$

после кога стално опада тежећи асимтотно нули. Размак времена, у коме појава, у датој тачки поља, постаје најинтензивнија, пропорционалан је, дакле, квадрату одстојања тачке од почетне тачке поља.

Сама конструкција показује да елеменат v, за једну дату тачку s, непрекидно расти у току времена, почевши од неутралнога стања $v = o$, али све спорије, тежећи при томе асимтотно вредности a. Дијаграм локалних варијација тога елемента представљен је једном растућем кривом која има праву $v = a$ као асимтоту. Кад се на место тачке s буду посматрале једна по једна од осталих тачака поља, крива ће задржати исти облик, пролазећи непрестано кроз почетак и задржавајући исту асимтоту, али ће се поступно деформисати, постајући у толико више конвексна према асимтоти, у колико је посматрана тачка ближа почетној тачки линеарнога поља.

Горе наведени факт, да се вредност елемента v у току појаве не мења кад количник

$$\frac{\alpha^2 s^2}{t} = \frac{ks^2}{\lambda t}$$

остаје по вредности неизмењен, показује да је време, потребно да би у разним тачкама поља елеменат v достигао једну дату вредност $v = v_1$, пропорционално квадрату одстојања тачке од почетне тачке поља и коефициенту инерције k у појави, а обрнуто пропорционално коефицијенту утицаја λ узрока X, који је коефицијенат специфична константа поља.

Таква би шема обухватила конкретне физичке појаве које се састоје у варијацијама једнога стања (v), у жици довољно дугачкој да на промене стања у једној уоченој тачки жице не утиче стање на њеним крајевима, а кад се те промене врше у приликама овакве врсте: стање у једној, ма којој, тачки жице тежи да се изједначи са стањем тачака у њеној непосредној близини, и то тако, да је таква тежња, између двеју суседних тачака, у толико јача, у колико се стања у њима јаче разликују, а да она врло брзо опада са растојањем тачака и да постаје неосетна кад се изађе из непосредне близине посматране тачке. Такав је н. пр. случај:

1^0 при распростирању топлоте по дугачкој жици, изолованој од утицаја средине, доведеној најпре на температуру $T = o$, па за тим напрасно изложеној, једним својим крајем, акцији топлотног извора чија се температура $T = a$ одржава неизмењена у току појаве. Улогу v игра температура T тачке на жици, чије је одстојање s од загрејанога краја жице; улогу i брзина загревања, улогу α термични коефицијенат материјала жице. Топлота се, тада, поступно распростире од тачке до тачке жице на начин предвиђен горњом шемом.

2^0 кад се један крај дугачке изоловане жице, на којој је, изолацијом, спречен латералан губитак електрицитета, а која је првобитно у неутралном електричном стању, напрасно доведе на потенцијал $V = a$, који се, од тада, на томе крају одржава неизмењен, а други се крај веже са земљом. Електрично се стање, пре но што буде ушло у свој перманентни режим, распростире по жици на начин предвиђен шемом; улогу v игра електрични потенцијал тачке на одстојању s од почетног краја жице, а у тренутку t; улогу α електрични коефициенат материјала жице. Једначина (413) и основна релација

$$J = -\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial s}$$

где је J јачина струје у тачки s, а r електрични отпор жице, одређују варијације јачине струје у промењивом режиму за сваку тачку жице: она је одређена једначином

$$J = = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{1}{\varrho}\frac{dv}{ds}\frac{dz}{dz} = \frac{\alpha}{\varrho\sqrt{\pi}}\frac{e^{-z^2}}{\sqrt{t}}$$

Дијаграм јачина струје [J изражено као функција времена помоћу релације (414)] представља криву линију која полази, растући, од вредности $J = o$, достиже свој максимум у тренутку

$$t = \frac{\alpha^2 s^2}{2}$$

после кога нагло опада, тежећи асимтотно нули, када и улази у свој перманентни режим.

На шему се исте врсте, само са нешто другојачим локалним и тренутним погодбама, наилази и у појави поступних варијација концентрације јона у волтаметру, при чему се концентрација мења са временом и са одстојањем z посматране тачке раствора од електроде. Активни узрок има за израз (409), где улогу v игра концентрација јона у тачки z у тренутку t, улогу α^2 брзина дифузије која карактерише раствор; диференцијална једначина појаве је парцијална једначина (410)[1].

Дванаеста шема.

Просте појаве у линеарним феноменским пољима, што резултују из симултане акције два узрока: једнога пропор-

---

[1] Warburg: Wied. Ann. 1899. s. 494.

ционалног дивергенцији поља и једнога пропорционалног величини непосредног објекта. Јачина ће првог узрока имати за израз

$$X_1 = \lambda\, div\, v = \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}$$

а јачина другога

$$X_2 = \mu v$$

тако, да је диференцијална једначина појаве парцијална једначина

$$k = \frac{\partial v}{dt} = \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \mu v$$

Ставивши да је

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{\lambda}} \qquad \gamma = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$$

једначина постаје

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \alpha^2 \frac{\partial v}{\partial t} - \gamma^2 v = o \tag{415}$$

и она, са локалним и тренутним условима, дефинише v као функцију времена и положаја тачке.

Уочимо један одређен случај те врсте. Нека је дато затворено линеарно феноменско поље и нека је почетни распоред стања v у њему, у тренутку $t = o$, дат једначином

$$v = f(s) \tag{416}$$

где је f дата функција положаја тачке. Симултаном акцијом два узрока наведене врсте стање ће се v постепено мењати, у току времена, по закону који је изражен оним интегралом једначине (415) што се за $t = o$

своди на (416). Изабравши јединицу мере за одстојања тако, да дужина поља буде 2π, а јединицу мере з време тако, да буде $k = 1$, тај је закон облика

$$v = \Sigma\,[(a_n \cos ns + b_n \sin ns)\, e^{-n^2 t}]$$

где су a_i и b_i коефициенти Fourier-овог реда

$$f(s) = \Sigma\,(a_n \cos ns + b_n \sin ns)$$

Појава асимтотно тежи стационарном стању $v = a$ по опадајућем експоненцијалном закону облика

$$v = A\, e^{-t}$$

где се вредност константе A мења од тачке до тачк поља.

Такав је н. пр. случај при поступном хлађењу затворене контуре од жице, изложене утицају средине кад хлађење почиње од тренутка у коме је термичн стање по жици дато једначином (416), где улогу v игр температура тачке на одстојању s од изабране почетн тачке на жици; улогу узрока X_1 тежња суседних тачака ка уједначавању температура, а улогу узрока X_2 утицајна тежња средине у којој се жица хлади.

У случају, кад је распоред коефицијената α и β у феноменском пољу *хетероген*, тако, да су ти коефицијенти функције положаја тачке, стање v у тачки s, а у тренутку t, може се сматрати као резултат суперпозиције бескрајнога низа елементарних стања, која се у току времена мењају по законима облика

$$C_i\, u_i\, e^{-r_i t}$$

где су

$$C_1, C_2, C_3 \cdots$$

константе, независне од времена и положаја тачке, одређене једном датом тренутном погодбом;

$$u_1, u_2, u_3 \cdots$$

функције положаја тачке, дефинисане линеарном једначином другог реда

$$(417) \qquad \frac{d^2u}{ds_1} + (r\,\alpha^2 - \beta^2)\,u = o$$

кад се у интегралу ове параметар r поступно смењује вредностима констаната

$$r_1, r_2, r_3 \cdots$$

Ове су, пак, вредности корени извесне трансцендентне једначине

$$(418) \qquad \Phi\,(r) = o$$

формиране помоћу интеграла u једначине (417) и граничних погодаба. У проблемима Математичке Физике, у којима се наилази на шему овакве врсте (као што је н. пр. случај у проблему хлађења жице неједнаке дебљине, или са неједнаким распоредом материјала, тако да се густина, специфичка топлота и проводљивост мењају од тачке до тачке жице), ти су корени реални и позитивни. Функције u_i имају, тада, особине сличне особинама синуса и косинуса умножених углова, што фигуришу у Fourier-овим редовима. Свака од њих мења знак пролазећи кроз нулу. Прва од њих, функција u_1, што одговара најмањем корену r_1 једначине (418), задржава један исти знак дуж целог поља. Функција u_2 мења један пута знак између крајњих тачака поља, функција u_3 два пута, и т. д. Али размаци између узастопних тачака у којима једна, ма која, од тих функција мења знак, нису међу собом једнаки, као што је случај код синуса и косинуса; они се мењају са распоредом коефицијената α и β т. ј. са распоредом специфичних особина материјала у пољу, и то по одређеним законима, упоредо са променама распореда материјала, који утиче непосредно на вредности корена једначине (7). Тако, кад се на једноме крају поља повећа коефициенат y (што у горе наведеној конкретној појави значи повећати емисиону моћ, чија величина зависи од материјала и степена глаткости површине жице) сви се корени r_i повећавају и тачке у којима функције u_i мењају знак удаљавају се од тога краја поља[1].

По истеку једнога, довољно дугачког, размака времена свако се од елементарних стања (s) неосетно разликује од неутралног стања $u_i = o$, коме оно асимтотно тежи. Пре но што то буде и са резултујућим стањем v, као суперпозицијом стања u_i, наступиће један тренутак, кад се стање v неосетно разликује од елементарног стања

$$v = C_1 u_1 e^{-r_1 t}$$

и према томе ће у толико брже тежити своме асимтотном, неутралном стању у колико је већи корен r_1 једначине (418) т. ј. у колико је већи коефициенат y.

На сличну се шему своде и појаве кретања електрицитета по жици у промењивоме режиму, при латералном губљењу електрицитета и локалним и тренутним погодбама сличним онима претпостављеним у горњој шеми.

Тринаеста шема.

Комплексне потенцијалне појаве што се састоје у слабим модификацијама једнога првобитно стабилног стационарног стања, под утицајем једнога комплекса слабих узрока. Нека је k степен слободе дескриптивног система у појави, претпостављајући да су везе у њему, у случају кад их има, непромењиве у току појаве и нека је

$$(419) \qquad (q_1 \cdots q_k)$$

---

[1] Sturm: Mémoire sur une classe d'équations à différences partielles (Journ. d. Math. pures et appliquées, t. I. p. 373—444).

редуковани систем. Нека је

$$X_1, X_2, X_3, \cdots$$

комплекс врло слабих узрока, примењених непосредно на елементе дескриптивног система, и који се могу, у току појаве, мењати као функције стања појаве (положаја фигуративне тачке система), али не и као непосредне, експлицитне функције времена t. Тада ће компоненте

$$Q_1, Q_2, \cdots Q_k$$

тих узрока, примењене непосредно на елементе редукованог система, бити функције елемената $q_1 \cdots q_k$. Кад је појава потенцијална, биће

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} \cdots Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k}$$

где је

$$-U(q_1 \cdots q_k)$$

потенцијал узрока, за који ће се претпоставити да зависи од свих елемената q_i. Нека је, поред тога, између свих, бескрајно многих могућних редукованих система, изабран један такав за систем (419), да је потенцијал $-U$ минимум и раван нули за конфигурацију

$$(420) \qquad q_1 = o \qquad q_2 = o \cdot \cdot \cdot q_k = o$$

Та конфигурација дефинише, тада, једно стабилно-стационарно стање *(S)* у појави, из кога кад би ова била изведена, па затим остављена сама себи, узастопна би се њена стања, од тада, непрестано налазила у близини тога стања за све време њенога трајања. За све то време, пошто је стање *(S)* стабилно, појава ће се састојати у слабим модификацијама својих тренутних стања на начин предвиђен у овој шеми.

При тим модификацијама вредности q_i остају непрестано врло мале; исти је случај и са кинетичком енергијом T у појави, па према томе и са вредностима q'_i, пошто је та енергија квадратан, одређен и позитиван облик по тим вредностима:

$$T = \Sigma A_{ij} q'_i q'_j \qquad A_{ij} = A_{ji}$$

$$\begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots k \\ j = 1, 2, \cdots k \end{pmatrix}$$

Означивши са a_{ij} вредности на које се своди коефициенат A_{ij} за конфигурацију (420), биће

$$(421) \qquad T = \Sigma a_{ij} q'_i q'_j + T_1 \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

где је T_1 скуп чланова вишег степена, по изводима, од 2.

Са друге стране, пошто је функција $-U$ минимум и равна нули за конфигурацију (420), према чему су јој и први парцијални изводи, за ту конфигурацију, равни нули, то, ако се са b_{ij} означе вредности на које се за њу своде коефицијенти чланова другог степена по изводима q_i и q_j, биће

$$(422) \qquad -U = \Sigma b_{ij} q_i q_j + U_1$$

где је U_1 скуп чланова вишег степена од 2, по елементима q.

Пошто скуп чланова под знаком Σ у изразима (421) и (422) одређује знак функције T и U, и како су ове обе позитивне за све време трајања појаве, то је такав скуп у (421) непрестано позитиван, а у (422) непрестано негативан.

Појава ће бити регулисана системом Lagrange-евих једначина

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q'_1} = \frac{\partial U}{\partial q_1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{\partial U}{\partial q_k}$$

које се, и то са у толико већом апроксимацијом, у колико су слабије модификације што састављају појаву, своде на систем симултаних једначина

$$\begin{array}{l} \alpha_{11} q_1'' + \cdots + \alpha_{1k} q_k'' + b_{11} q_1 + \cdots + b_{1k} q_k = o \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{k1} q_1'' + \cdots + \alpha_{kk} q_k'' + b_{k1} q_1 + \cdots + b_{kk} q_k = o \end{array}$$

Ток је појаве представљен низом интеграла

$$\begin{array}{l} q_1 = C_{11} \cos (r_1 t + \rho_1) + \cdots + C_{1k} \cos (r_k t + \rho_k) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_k = C_{k1} \cos (r_1 t + \rho_1) + \cdots + C_{kk} \cos (r_k t + \rho_k) \end{array} \tag{423}$$

где су $r_1 \cdots r_k$ корени алгебарске једначине

$$\begin{vmatrix} b_{11} - r^2 a_{11} & b_{12} - r^2 a_{12} \cdots b_{1k} - r^2 a_{1k} \\ b_{21} - r^2 a_{21} & b_{22} - r^2 a_{22} \cdots b_{2k} - r^2 a_{2k} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{k1} - r^2 a_{k1} & b_{k2} - r^2 a_{k2} \cdots b_{kk} - r^2 a_{kk} \end{vmatrix} = o \tag{424}$$

решене по r. Корени су сви реални, по два и два једнаки а супротно означени, и таква два корена одговарају у интегралима (423) једноме истоме члану, пошто су и константе $\rho_1 \cdots \rho_k$ произвољне. Међу константама C_{ik} има их k произвољних, тако да систем (424) садржи свега $2k$ произвољних констананата, чије се вредности имају прецизирати н. пр. подацима о почетноме стању појаве.

Појава је осцилаторна; осцилације се око стабилног стања (S) могу сматрати као суперпозиција простих осцилација са периодама

$$\frac{2\pi}{r_1}, \frac{2\pi}{r_2}, \ldots\ldots \frac{2\pi}{r_k};$$

те су периоде непромењиве за све системе параметара q_i, пошто су корени r_i, према особинама алгебарске једначине (424), инваријанте система.

Шема обухвата н. пр. као специјални случај појаве малих осцилација покретних механичких система око једнога стабилног равнотежног положаја (в. н. пр. стр. 205), кад кретање не наилази ни на какав отпор. Улоге параметара q_i играју разноврсни геометриски елементи што дефинишу положај, или облик, покретног система.

Четрнаеста шема.

Комплексне потенцијалне појаве, обухваћене тринаестом шемом, са пертурбацијама што произлазе од слабих периодичних узрока. Уочимо какву појаву која би се, у приликама предвиђеним тринаестом шемом, дешавала на начин описан у тој шеми. Претпоставимо да се акцији узрока X_i придружила акција једнога комплекса слабих периодичних узрока

$$Y_1, Y_2, Y_3 \cdots \tag{425}$$

који се могу, у току појаве, мењати и експлицитно са временом t. и са стањем појаве и са њеним интензитетом, тако да је, у опште

$$y_i = \psi_i (t, q_1 \cdots q_k; q_1' \cdots q_k')$$

Lagrange-еве једначине резултујуће појаве биће

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_1} + R_1$$

$$(426) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{\partial U}{\partial q_k} + R_k$$

где су

$$R_1, R_2, \cdots R_k$$

компоненте комплекса (425), примењене непосредно на елементе $q_1 \cdots q_k$ редукованог система. То су компоненте независне од узрока X_i и, у опште, не постају равне нули у тренутку кад појава буде у стабилном стању *(S)*. Према томе, компонента R_i, развијена у ред, уређен по степенима елемената $q_1 \cdots q_k$, имаће један члан независан од тих елемената; узевши да је тај члан, од кога ће се R_i, за све време појаве, неосетно разликовати, периодична функција времена *t*, биће, у опште,

$$R_i = 2\,A_i \cos(at + \alpha) + 2 \cdot B_i \cos(bt + \beta) + \cdots$$
$$+ 2\,L_i \cos(lt + \lambda)$$

где су

$$A_i\, B_i \cdots L_i;\ a, b, \cdots l;\ \alpha, \beta, \cdots \lambda$$

константе и где сваки члан представља по један прост периодичан пертурбаторски узрок, тако да су периоде тих узрока

$$\frac{2\pi}{a}, \frac{2\pi}{b}, \cdots \frac{2\pi}{l}$$

Са друге стране, имаће се, са довољном апроксимацијом, да је

$$T = \Sigma\, a_{ij}\, q_i'\, q_j'$$

$$-U = \Sigma\, b_{ij}\, q_i\, q_j$$

који се квадратни облици, једном линеарном и хомогеном трансформацијом, могу свести на

$$(427) \qquad \begin{aligned} T &= q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_k^2 \\ -U &= (r_1 q_1)^2 + \cdots + (r_k q_k)^2 \end{aligned}$$

(где су r_i реалне константе и корени извесне алгебарске једначине k-тог степена), тако, да се може узети да су изабрани елементи редукованог система q_i баш они, за које се T и $-U$ јављају у облику (427)

Једначине се (426) тада јављају у развијеном облику

$$(428) \qquad \begin{aligned} q_1'' + r_1^2 q_1 &= A_1 \cos(at + \alpha) + \cdots + L_1 \cos(lt + \lambda) \\ q_k'' + r_k^2 q_k &= A_k \cos(at + \alpha) + \cdots + L_k \cos(lt + \lambda) \end{aligned}$$

Облик интеграла, као и ток појаве, који је њиме дефинисан, зависи од тога да ли се периода кога од простих пертубаторских узрока R_i' поклапа са периодом ω кога од елемената q_i, што би одговарала случају кад је одстрањена акција комплекса пертурбаторских узрока Y_i, или се све те периоде међу собом разликују. Разликујмо, према томе, ова два случаја:

1° ни једна се од периода узрока R_i'' не поклапа са којом од периода ω; тада се ни једна од вредности $a, b, \cdots$ не поклапа са којом од вредности r_i и закони су варијација елемената q_i у току појаве облика

$$(429) \qquad \begin{aligned} q_1 &= \mu_1 \cos(r_1 t + \rho_1) + \\ &+ \lambda_{11} \cos(at + \alpha) + \cdots + \lambda_{1h} \cos(lt + \lambda) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_k &= \mu_k \cos(r_k t + \rho_k) + \\ &+ \lambda_{k1} \cos(at + \alpha) + \cdots + \lambda_{kh} \cos(lt + \lambda) \end{aligned}$$

где су μ и ϱ_i константе, одређене подацима о почетноме стању појаве, а λ_{ij} константе чије су вредности

$$(430)\qquad \begin{array}{l} \lambda_{11} = \dfrac{A_1}{r_1^{\,2} - a^2} \cdots \lambda_{1k} = \dfrac{L}{r_1^{\,2} - l^2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_{k1} = \dfrac{A_k}{r_k^{\,2} - a^2} \cdots \lambda_{kh} = \dfrac{L}{r_k^{\,2} - l^2} \end{array}$$

(h је индекс последњега члана у горњем изразу компоненте R_i)

Из једначина се (429) види да сваки од простих периодичних узрока, што улазе у састав компоненте R_i, и чије јачине имају изразе облика

$$(431)\qquad R_i' = 2A \cos (at + \alpha)$$

уносе у ток појаве пертурбације осцилаторног облика

$$(432)\qquad \lambda_{ij} \cos (at + \alpha),$$

исте периоде коју има и сам узрок, а непромењиве амплитуде која је независна од почетног стања појаве; појава се има сматрати као суперпозиција низа таквих осцилација и оних на које би се она свела кад не би било акције пертурбаторских узрока Y_i. Кад се периода простога узрока врло мало разликује од периоде ω осцилација кога од елемената q_i, што одговара случају кад је одстрањена акција комплекса Y_i, (а што ће бити кад се a врло мало разликује од једне међу вредностима r_i), одговарајући коефицијенат λ_{ij} има врло велику вредност и амплитуда осцилације, уведена интервенцијом простога пертурбаторског узрока, постаје врло велика: њена је вредност обрнуто пропорционална разлици поменутих периода.

2° Периода се једнога од простих узрока R_i' поклапа са којом од периода ω; нека је то случај са периодом осцилација елемента q_1 (и то само са њиме), тако, да је

$$a = r_1$$

За све остале елементе $q_2 \cdots q_k$ имаће се закони варијација (429), а за q_1 закон облика

$$q_1 = \mu_1 \cos(r_1 t + \varrho_1) + P \sin(r_1 t + \alpha) +$$
$$+ \lambda_{12} \cos(bt + \beta) + \cdots + \lambda_{1k} \cos(lt + \lambda)$$

где је

(433) $$P = \frac{A_1 t}{2r_1}$$

Као што се, дакле, види, осцилаторна пертурбација

$$P \sin(r_1 l + \alpha)$$

коју, тада, уноси у појаву уочени прост периодични узрок, има амплитуду која постаје све већа у току времена, тако, да по истеку једнога извесног размака времена модификације у појави, везане за елеменат q_i, излазе, по својим величинама, ван граница претпостављених за апроксимацију о којој је реч у овој шеми.

Овде наведена шема истиче на видик један значајан факт за Математичку Феноменологију, у коме лежи кључ за експликацију једнога великог броја природних појава. Па име: *једна појава, која се састоји у слабим осцилацијама свога дескриптивног система око једног стабилног стања, може бити знатно појачана акцијом једнога комплекса слабих простих периодичних узрока R_i' и то тако, да величина модификација у појави ни у колико не зависи од јачине ових нових узрока, нити од почетног стања појаве, већ једино од релативних вредности периоде појаве пре интервенције узрока R_i', и периоде самих тих узрока;* у колико је разлика периода мања, у толико ће амплитуда пертурбација, унесених у појаву узроцима R_i', бити већа и она, према величини те разлике, може достићи сваку коначну вредност.

У томе факту лежи н. пр. експликација пертурбираног кретања локомотиве, где се пертурбације састоје у балансирањима и другим врстама осцилација које су каткад знатно јаче но што би одговарало јачини узрока који их изазивају. Маса локомотиве, због опруга, на којима лежи њен већи део, представља један систем који се за време кретања махине налази у једном слабом осцилаторном кретању око једнога стабилног равнотежног положаја, са осцилацијама које имају једну одређену периоду ω. Са друге стране, пертурбаторски узроци, као што су силе што произлазе од инерције појединих покретних органа: клипа, моторних делова и т. д. имају као периоду размак времена једнога обрта точка. Амплитуде ће, дакле, пертурбаторских осцилација бити знатно велике кад се у току кретања махине деси, да се размак времена једнога обрта точка поклапа са периодом ω. То су оне, веома осетне, периодичне пертурбације којима треба тражити експликацију не у јачини узрока што их изазивају, већ у једнакости или врло малој разлици њихових периода.

На исту се шему своде и појаве резонанције, појаве апсорпције топлотних и светлосних радијација, при којима апсорбујући слој апсорбује само радијације једне одређене таласке дужине, као и велики број других природних појава сличне врсте[1]).

Петнаеста шема.

Комплексне појаве у којима се сваки од дескриптивних елемената мења акцијом једнога комплекса узрока: једних

---

[1]) Vicaire: C. R. de l'Acad. des Sciences, t. 112. p. 82.

сталне јачине, једних пропорционалних величини тога елемента и једних пропорционалних инерцијама осталих елемената. Нека је

$$(v_1, v_2, \cdots v_n)$$

дескриптивни систем у појави; F_i компонента узрока сталне јачине примењена непосредно на елеменат v_i;

$$X_i = \lambda_i v_i$$

компонента узрока друге врсте, примењена на тај елеменат, а

$$X_{ij} = \mu_{ij} v_j'$$

компонента узрока треће врсте, примењена на исти елеменат, са погодбом да је

$$\mu_{ij} = \mu_{ji}$$

Појава се своди на систем симултаних једначина

$$\begin{gathered} k_1 \frac{dv_1}{dt} = F_1 + X_1 + \Sigma X_{1j} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_n \frac{dv_n}{dt} = F_n + X_n + \Sigma X_{nj} \end{gathered}$$

или, у развијеном облику, на систем

$$\begin{gathered} \lambda_1 v_1 + k_1 v_1' + \mu_{12} v_2' + \cdots + \mu_{1n} v_n' = F_1 \\ \lambda_2 v_2 + k_2 v_2' + \mu_{21} v_1' + \cdots + \mu_{2n} v_n' = F_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_n v_n + k_n v_n' + \mu_{n1} v_n' + \cdots + \mu_{n-1,2} v_{n-1}' = F_n \end{gathered} \tag{434}$$

Ток је појаве представљен низом интеграла тога система

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{F_1}{\lambda_1} + C_{11}\, e^{\alpha_1 t} + \cdots + C_{1n}\, e^{\alpha_n t} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_n &= \frac{F_n}{\lambda_n} + C_{n1}\, e^{\alpha_1 t} + \cdots + C_{nn}\, e^{\alpha_n t}
\end{aligned}
\tag{435}
$$

где су α_1 $\alpha_2 \cdots \alpha_n$ корени алгебарске једначине n-тог степена по α

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} - x & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - x
\end{vmatrix} = 0
\tag{436}
$$

у којој је краткоће ради стављено

$$
\begin{gathered}
x = -\frac{1}{\alpha} \qquad \frac{k_i}{\lambda_i} = a_{ii} \\
\frac{\mu_{ij}}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} = \frac{\mu_{ji}}{\sqrt{\lambda_j \lambda_i}} = a_{ij} = a_{ji}
\end{gathered}
\tag{437}
$$

и чији су корени увек сви реални. Константе C_{ij} одређене су подацима о стању појаве у једноме датом тренутку, или у неколико таквих тренутака.

Појава се може сматрати као суперпозиција једнога скупа простијих појава, чији би ток био регулисан простим експоненцијалним законима

$$
\begin{aligned}
v_1 &= C_{11}\, e^{\alpha_1 t} \cdots\cdots v_1 = C_{1n}\, e^{\alpha_n t} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_n &= C_{n1}\, e^{\alpha_1 t} \cdots\cdots v_n = C_{nn}\, e^{\alpha_n t}
\end{aligned}
$$

По истеку једнога, довољно дугог, размака времена појава се неосетно разликује од оне, у којој се дескриптивни елементи мењају по простим законима облика

$$v_i = C_{ik}\, e^{\alpha_k t}$$

где је α_k највећи корен једначине (436) у изразу (435) за v_i. Кад су сви корени α негативни т. ј. сви корени једначине (3) позитивни, појава асимтотно тежи своме стационарном стању, дефинисаном конфигурацијом

$$v_1 = \frac{F_1}{\lambda_1} \cdots v_n = \frac{F_n}{\lambda_n}$$

и то у толико брже, у колико је по апсолутној вредности мањи највећи корен једначине (436).

Од интереса је случај кад су коефициенти инерције k_i у појави и коефициенти утицаја μ_{ij} депресивних узрока треће врсте такви, да је једна, ма која, од детерминаната

$$\varDelta_p = \begin{vmatrix} k_1 & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1p} \\ \mu_{21} & k_2 & \cdots & \mu_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{p1} & \mu_{p2} & \cdots & k_p \end{vmatrix}$$

за коју од целих вредности p, што се налазе између 1 и n, равна нули. Према познатој особини линеарних једначина, између вредности елемената $v_1 \cdots v_p$ постоји тада у свакоме тренутку непроменљива веза изражена линеарном релацијом облика

$$(438) \qquad A_1 (F_1 - \lambda_1 v_1) + \cdots + A_p (F_p - \gamma_p v_p) = o$$

где су A_i константе чија вредност зависи од коефициената k_i и μ_{ij}. Једначина

$$\varDelta_p = o$$

у осталом, представља у исто време и потребан услов за егзистенцију везе (438).

Шема обухвата н. пр. као специјалан случај ток појаве која се састоји у варијацијама јачина струја у систему од n електричних кола са међусобном и ауто-индукцијом. Улоге елемената v_p играју јачине струја; улоге узрока F_p сталне електромоторне силе електричних елемената у колу; улоге узрока X_p контра-електромоторне силе, пропорционалне јачини одговарајуће струје; улоге узрока X_{pq} реактивне електромоторне силе што произлазе од индукције. Коефициенти су k_i тада; коефициенти ауто-индукције проводне жице, λ_i електрични отпор жице, а μ_{ij} коефициенти међусобне индукције у електричним колима.

Погодба за егзистенцију непроменљиве везе између јачина струја i_1 и i_2 у систему од два електрична кола овде је

$$\begin{vmatrix} L_1 & M_{12} \\ M_{12} & L_2 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$L_1 L_2 - M_{12}^2 = 0 \tag{B}$$

Њу је н. пр. могућно приближно задовољити оваквом једном простом експерименталном диспозицијом: две изоловане жице, од истог материјала, које образују два засебна електрична кола, омотане су на једну исту цилиндарску површину, тако, да завијутци једне и друге жице буду непосредно један уз други, па се кроз прво коло пропусти једна, а кроз друго друга струја, из два разна електрична извора. Ако је у првоме колу број завијутака m а у другоме n, и ако се са L означи коефициенат ауто-индукције једнога завијутка, биће за систем од оваква два електрична кола приближно[1])

$$L_1 = m^2 L \qquad L_2 = n^2 L$$

$$M_{12} = M_{21} = mn\,L$$

---

[1]) **M. Brillouin**: Thèse de doctorat, Paris 1880.

тако, да је релација *(В)* приближно задовољена. У систему постоји, тада, непроменљива линеарна веза облика

$$n\,(E_1 - R_1\,i_1) - m\,(E_2 - R_2\,i_2) = o$$

која ће се одржати за све време проласка струје.

Шеснаеста шема.

Комплексне појаве што резултују из акције једнога комплекса узрока који се мењају са стањем појаве, а кад су им непосредни објекти везани међу собом непроменљивим везама са једним степеном слободе. Нека су

$$(439)\qquad \begin{array}{c} X_1 = f_1\,(v_1 \cdots v_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n = f_n\,(v_1 \cdots v_n) \end{array}$$

компоненте комплекса узрока, примењене непосредно на елементе v_i дескриптивног система, где су f_i одређене функције тих елемената, тако, да су диференцијалне једначине појаве

$$(440)\qquad \begin{array}{c} k_1\,\frac{dv_1}{dt} = X_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_n\,\frac{dv_n}{dt} = X_n \end{array}$$

Нека су

$$(441)\qquad \begin{array}{c} \varphi_1\,(v_1 \cdots v_n) = o \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{n-1}\,(v_1 \cdots v_n) = o \end{array}$$

непроменљиве везе у систему, који га своде на систем са једним степеном слободе.

Изразивши, према једначинама (441), величине v_i као функције једне од њих (н. пр. као функције величине v_1, која ће бити означена са v), и сменивши их у диференцијалним једначинама (440), ове се своде на једну обичну диференцијалну једначину првога реда

$$(442) \qquad k\frac{dv}{dl} = F(v)$$

из које се v добија инверсијом интеграла

$$(443) \qquad t - t_0 = k\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{F(v)}$$

и која са једначинама веза (441) одређује ток појаве.

Помоћу једначина (441) могу се, у осталом, елементи $v_1 \cdots v_n$ изразити као функције једнога произвољно изабраног параметра q, тако да н. пр. буде

$$(444) \qquad v_1 = \psi_1(q) \cdots\cdots v_n = \psi_n(q)$$

Систем се једначина (440), на раније наведени начин, своди на једну обичну једначину првог реда

$$(445) \qquad \frac{dq}{dt} = \Phi(q)$$

из које се q добија инверсијом интеграла

$$(446) \qquad t - t_0 = \int_{q_0}^{q}\frac{dq}{\Phi(q)}$$

и која одређује закон варијација параметра q у току појаве, и са једначинама (444) одређује начин варијација свих њених дескриптивних елемената.

Фигуративна тачка система креће се по утврђеној трајекторији у n-димензионалном простору, независној од броја и природе узрока у појави, и дефинисаној скупом једначина (444); од ових фактора зависи само кинетичка страна појаве, т. ј. начин кретања фигуративне тачке по већ утврђеној трајекторији, а тај начин зависи непосредно од особина интеграла диференцијалне једначине (445). Према томе, да ли је, у датом размаку времена, то кретање дуж трајекторије прогресивно, ретроградно или осцилаторно, узастопна ће се стања, чији низ саставља појаву, таквим редом низати једно за другим у томе размаку времена; појава ће за то време јачати, слабити, осциловати око једног утврђеног стања, асимтотно се приближавати једноме одређеном стационарном стању и т. д. Тренутак у коме ће се појава налазити у једноме датом стању, одређен је обрасцем (443), односно (446), где је v, односно q, вредност једне или друге од ових величина, која, према једначинама веза (441), односно (444), одговара конфигурацији система у томе стању.

На такву се шему наилази н. пр. у нормалним хомогеним хемиским реакцијама, које се дешавају између n течности, по хемиској једначини

$$p_1 A_1 + \cdots + p_n A_n = m_1 B_1 + \cdots + m_k B_k$$

где A_i означују активна тела у реакцији, B_i продукте реакције, а p_i и m_i целе и позитивне бројеве.

Нека су означене са:

$a_1 \cdots a_n$ првобитне количине (рачунате н. пр. у грамовима) течности $A_1 \cdots A_n$, које се налазе у смеши у почетку реакције; $X_1 \cdots X_n$ тежине истих течности, утрошене у току реакције од њеног почетка до времена t;

$\xi_1 \cdots \xi_k$ количине продуката у тренутку t;

Q тежина целокупне смеше;

ω_i концентрација смеше по течности A_i, дата обрасцем

$$\omega_i = \frac{a_i - x_i}{Q};$$

ρ_i концентрација смеше по продукту B_i дата обрасцем

$$\rho_i = \frac{\xi_i}{Q}$$

Ток реакције, према основном принципу Хемиске Кинетике, регулисан је системом једначина

$$(448) \qquad \begin{array}{c} \dfrac{d\rho_1}{dt} = X_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d\rho_k}{dt} = X_k \end{array}$$

где је

$$(449) \qquad \begin{array}{c} X_1 = \lambda_1 \, \omega_1 \, \omega_2 \cdots \omega_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_k = \lambda_k \, \omega_1 \, \omega_2 \cdots \omega_n \end{array}$$

Међутим, у свакоме тренутку, за време трајања реакције, постоји пропорционалност, са једне стране између количина утрошених активних тела у реакцији и количина образованих продуката до тога тренутка, а са друге стране између количина образованих продуката међу собом, тако да је

$$(450) \qquad \begin{array}{ll} x_i = m_i \, x_1 & (i = 2, 3, \cdots n) \\ \xi_j = M_j \, x_1 & (j = 2, 3, \cdots k) \end{array}$$

где су M_i и m_j позитивни бројеви, који се одређују из хемиске једначине реакције.

Релације (450) играју улогу једначина веза (441). Из њих се добија

$$\frac{\rho_1}{M_1} = \frac{\rho_2}{M_2} = \cdots = \frac{\rho_k}{M_k} = \frac{x_1}{Q}$$

тако, да ће закони варијација свих концентрација ρ_i бити познати кад буде познат такав закон за концентрацију ρ_1 или за количину x_1. Изрази (449) тада постају

$$X_1 = \mu_1 (a_1 - m_1 x_1) (a_2 - m_2 x_1) \cdots a_n - m_n x_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_k = \mu_k (a_1 - m_1 x_1) (a_2 - m_2 x_1) \cdots (a_n - m_n x_1)$$

где је у опште

$$\mu_i = \frac{\lambda}{M_i Q^{n-1}}$$

Једначине се појаве, према томе да ли ће се за непознату функцију узети x_1 или ρ_1, своде на једну или другу од обичних диференцијалних једначина првог реда

$$(451) \quad \frac{dx}{dt} = \mu_1 (a_1 - m_1 x) (a_2 - m_2 x) \cdots (a_n - m_n x)$$

$$(452) \quad \frac{d\rho}{dt} = \lambda_1 (\alpha_1 - \beta_1 \rho) (\alpha_2 - \beta_2 \rho) \cdots (\alpha_n - \beta_n \rho)$$

где је

$$\alpha_i = \frac{a_i}{Q} \qquad \beta_i = \frac{m_i}{Q} \qquad m_1 = 1$$

које, са првима или другима од једначина (450), дефинишу законе варијација елемената x_i и концентрација ρ_i у току реакције. Улоге дескриптивних елемената v горње шеме играју x_i; улоге параметара q_i концентрације ρ_i; улоге примењених узрока трансформаторске тежње (449); улоге количника $\frac{\lambda_i}{k_i}$ у шеми специфичне константе брзина реакције λ_i, односно μ_i; улоге веза са једним степеном слободе релације (450).

Сваки од елемената x_i и ρ_i, полазећи од вредности нуле, расти поступно у току реакције, али све спорије, тежећи асимтотно стационарноме стању дефинисаном конфигурацијом

$$x_h = a_h$$

$$x_i = a_i - \frac{m_i}{m_h} a_h \qquad (i = 1, 2, \cdots h - 1, h + 1, \cdots n)$$

где је h индекс онога од реагенаса A_i, који се у току реакције буде први истрошио.

Кад би се коефициенти утицаја $\lambda_1 \cdots \lambda_s$ трансформаторских тежња $X_1 \cdots X_k$ мењали у току времена независно од тока појаве, количина би x (а помоћу ове и све количине x_i, ω_i, ρ_i) била дефинисана једначином (451) где је μ_1 одређена и у напред позната функција времена t. Закони варијација количина x_i добијају се из закона тока појаве, што одговара случају са непромењивим коефициентима λ_i, кад се у тим законима смени t са

$$\int \mu_1 \, dt$$

Дијаграми варијација тих елемената добијају се деформацијом одговарајућих дијаграма што одговарају овоме последњем случају. Деформација зависи од природе функције μ_1: њоме добијени нови дијаграми били изнад или испод онога што одговара непромењивом коефициенту μ_1, према томе да ли функција μ_1 расти или опада са временом. Они, у осталом, сви представљају криве линије које, пролазећи кроз почетак, поступно расту и приближују се асимтоти паралелној осовини времена. Такав би се случај н. пр. имао грејући или хладећи, на један одређени начин, суд у коме се збива реакција: температура ће се T смеше мењати са временом по одређеном закону

$$T = \theta(t) \tag{453}$$

(датом н. пр. једном емпиричком таблицом), и тада је закон варијације коефициента μ_1 дат познатом једначином

$$\log \mu_1 = \frac{A}{T} + B \log T + C$$

где су A, B, C константе, пошто се у овој смени T вредношћу (453).

◆

ДРУГА ГЛАВА.

КВАЛИТАТИВНА СЛИКА ПОЈАВЕ.

Квалитативне појединости импозиране фактима што изазивају јачање или слабљење појединих узрока у појави. — Осцилаторни карактер појава, везан за акцију депресивних узрока пропорционалних тоталитету свога непосредног објекта, са коефициентима утицаја, који се, остајући у току појаве непрестано већи од једнога одређеног броја, мењају, за то време, на ма какав начин. — Амортизирано-осцилаторни карактер појава, везан за симултану акцију последњих узрока и депресивних узрока пропорционалних величинама својих непосредних објеката, чији се коефицијенти утицаја мењају експлицитно са временом. — Интермедијерни карактер појаве, према одређеним појавама P_1 и P_2, као последица интермедијерног карактера њеног механизма, према механизмима појава P_1 и P_2. — Квалитативне појединости у појавама, везане за симетрију и дисиметрију узрока или феноменског поља у коме се појава дешава. — Квалитативне појединости импозиране егзистенцијом и природом економских момената у појави.

Квантитативна дескрипција појава, садржана у напред наведеним општим шемама, могућна је само онда, кад дескрипција механизма садржи прецизне податке, потребне за формацију диференцијалних једначина појаве. Кад то није случај, кад је дескрипција механизма *непотпуна*, имаће се непотпуна дескрипција и само појаве.

Непотпуност дескрипције механизма може се састојати н. пр. у томе што нису тачно прецизирани закони активних и реактивних узрока у појави, или начин на који се мењају коефициенти инерције у току појаве, или начин међусобне зависности појединих фактора и елемената (везе у систему) и т. д. већ се о томе имају само овлашни подаци, који се састоје у извесним *квалитативним* или *недовољно прецизираним* квантитативним појединостима. Такве, пак, појединости механизма повлаче собом, у дескрипцији појаве, извесне, више или мање одређене квалитативне појединости варијација појединих њених дескриптивних елемената, као што су:

1° смисао варијација појединих елемената (рашћења или опадања) у датоме размаку времена;

2° смисао у коме се мења брзина варијација појединих елемената (убрзавање или успоравање рашћења или опадања) у датоме размаку времена;

3° егзистенција максимума, минимума или сингуларних тачака на дијаграму појаве;

4° осцилаторни карактер, ритам и честина осцилација;

5° појачавање или амортизирање осцилација у току времена;

6° егзистенција асимтотних стања у појави;

7° овлашни облик дијаграма варијација појединих дескриптивних елемената, или њихове међусобне зависности (затвореност, отвореност, спирални облик и т. д. тих дијаграма);

8° гранична стања, између којих се крећу узастопне тренутне фазе појаве у датоме размаку времена;

9° врсте симетрија у појави и т. д.

Скуп таквих појединости саставља *квалитативну слику појаве*, која ће бити у толико потпунија и прецизнија, у колико то буду биле само те квалитативне појединости. До такве се слике долази:

а) или непосредним проучавањем диференцијалних једначина појаве, ако се о појединим, недовољно прецизираним, факторима у њима има довољно података за квалитативне појединости које се имају у виду;

b) или компарацијом појава чији механизми имају у себи чега заједничког, што у дескрипцији појаве повлачи собом какве заједничке квалитативне појединости.

И у једном и у другом случају, задржавши појединим факторима њихово опште значење, апстраховано из заједничког механизма појава чији механизми показују међусобну квалитативну аналогију у једноме одређеном погледу, и у коме је задржано само оно, што улази у састав језгра те аналогије, добијена квалитативна слика представљаће једну *општу шему*, која, у њој предвиђеним појединостима, обухвата све појаве карактерисане таквом квалитативном аналогијом механизма, па ма како диспаратне биле њихове конкретне природе. Шема ће бити одређенија или неодређенија, према обиму и важности њоме обухваћених квалитативних појединости.

Неколико, овде наведених, примера такве врсте дају идеју о облику, одређености и врстама појединости, које би такве шеме имале обухватити; њихове конкретне примене на природне појаве, дају идеју о бескрајној разноврсности у којој се њима предвиђене појединости манифестују у области конкретних појава.

Први пример: Квалитативне појединости импозиране фактима што изазивају јачање или слабљење појединих узрока у појави. Све оно што изазива јачање импулсивних, или слабљење депресивних узрока у једној појави, има за ефекат *убрзавање рашћења* или *успоравање опадања* њихових непосредних објеката; све оно што појачава депресивне, или слаби импулсивне узроке, има за ефекат *успоравање рашћења* или *убрзавање опадања* тих објеката.

Тако н. пр. ако је скуп (E) импулсивних узрока био у почетку појаве јачи, по интензитету, од скупа (E') депресивних узрока, и ако, току појаве, какав секундаран, индиректан узрок (X) тежи да појача скуп (E') или да ослаби скуп (E), дијаграм ће тока појаве престављати криву линију која се испрва пење, али све спорије, са рашћењем времена t; у тренутку, кад се једначине узрока (E) и (E') међу собом изједначе, крива линија достиже свој максимум, после кога ће све брже опадати. Тако исто, ако секундарни узрок (X) тежи да појача скуп (E) или да ослаби скуп (E'), крива ће линија испрва опадати, и то све спорије, у току времена, достићи свој миниум у тренутку кад се јачине узрока (E) и (E') међу собом изједначе, и од тада се све брже пењати.

Кад се у каквој појави, што се састоји у амортизираним осцилацијама дескриптивнога елемента, јави какав реактиван, депресиван, узрок C који јача упоредо са јачањем дескриптивног елемента, сваки секундаран узрок, који изазива повећавање коефициента утицаја узрока C, изазива, у исто време, и *убрзавање амортисања* осцилација, у којима се појава састоји; сваки секундаран узрок, који изазива повећавања коефициента инерције у појави, *смањује*, у исто време и *брзину тога амортисања*, тако, да кад је он довољно интензиван, појава добија чисто периодичан карактер, сводећи се на дуги низ осцилација, које се неосетно једна од друге разликују.

Ако се, у току какве осцилаторне појаве, појави један периодичан, а врло слаб узрок D, чија се периода мало разликује од периоде саме појаве, у току се ове уводи поступно *синхронизација* осцилација појаве и узрока D; појава, која се за прво време акције овога узрока налази у једноме несталноме режиму, улази поступно у један сталан, дефинитиван режим у коме се њена периода изједначује са периодом узрока *D*. Овај стални режим наступа *у толико брже*, у колико је *јачи* утицај оних узрока, што изазивају амортисање осцилација.

Шеме такве врсте обухватају непрегледан број најразноврснијих појава, у којима се нема довољно прецизираних података за потпуну квантитативну слику појаве. За примену таквих шема довољно је н. пр. знати да уочена појава резултује из стицаја датог комплекса непосредних импулсивних и депресивних узрока, између којих се, у смислу горње шеме, познају бар они, који току појаве дају његов тип и битни облик; да један или више одређених фактора утичу, као секундарни узроци, на поједине од ових непосредних узрока, појачавајући их или слабећи их, или мењајући им, у једноме одређеном смислу, коефициенат утицаја, или убрзавајући, или успоравајући њихово јачање или слабљење. Таквих се, међутим, података има о појавама свих конкретних природа. За велики се број н. пр. физиолошких особина, које играју улогу импулсивних или депресивних узрока у виталним појавама, зна *начин*, *смисао*, а по каткад и сама *брзина*, њиховог мењања под утицајем разних секундарних фактора, који својим индиректним утицајем одређују сам тип појаве или уносе у њу омање пертурбације. Крвни серум има н. пр. две врсте особина, које се јављају као импулсивни или депресивни узроци у великоме броју виталних појава: токсичну и коагулаторску моћ; обе моћи слабе под утицајем топлоте, али тако, да прва *слаби у јачој мери* но друга. Утицај светлости на развиће микроба депресивног је карактера; јачина тога депресивног узрока *расти* упоредо са рашћењем јачине светлости. У развићу какве болести, изазване акцијом патогених микроба, утицај се једнога, ма каквог, спољнег или унутарњег секундарног узрока *C* (каквога лека, спољних прилика, режима храњења и т. д.) на ток болести састоји у једној двогубој акцији: једној, са тежњом X_1, примењеној на непосредни импулсивни узрок (активитет микроба), и другој, са тежњом X_2, примењеној на отпор организма, као непосредни депресивни узрок (на бактерицирне и антитоксичне особине сокова у организму). Свака од тих акција може и сама бити импулсивна или депресивна, како за активитет микроба, тако и за отпор организма, чему ће одговарати знаци тежња X_1 и X_2. Па како се акција узрока C састоји у симултаној акцији ове две тежње, то ће се за њу, према томе која од тих двеју акција одиста буде постојала, и каквога је смисла, имати ове могућне комбинације:

КОМБИНАЦИЈЕ ТЕЖЊА X_1 И X_2		СМИСАО КОМБИНАЦИЈЕ		КАРАКТЕР РЕЗУЛТУЈУЋЕ АКЦИЈЕ НА ТОК БОЛЕСТИ
		ЗА АКТИВИТЕТ МИКРОБА	ЗА ОТПОР ОРГАНИЗМА	
1.	$X_1 - X_2$	импулсиван	депресиван	јако отежавајућа
2.	$- X_1 + X_2$	депресиван	импулсиван	јако олакшавајућа
3.	$X_1 + X_2$	импулсиван	импулсиван	неизвесна
4.	$- X_1 - X_2$	депресиван	депресиван	неизвесна
5.	$X_1 + 0$	импулсиван	индиферентан	лако отежавајућа
6.	$0 + X_2$	индиферентан	импулсиван	лако олакшавајућа
7.	$- X_1 + 0$	депресиван	индиферентан	лако олакшавајућа
8.	$0 - X_2$	индиферентан	депресиван	лако отежавајућа
9:	$0 + 0$	индиферентан	индиферентан	никаква

Од ових девет, једино могућних комбинација активитета, један је, дакле, са *никаквом*, две са *индиферентном*, три са *отежавајућом*, а три са *олакшавајућом* акцијом на ток болести. Подаци, ма у којој мери они били овлашни, о смислу варијација узрока C, односно тежња X_1 и X_2, у току трајања болести, или о брзини њиховог појачавања или слабљења, или о пертурбацијама које при акцији тога узрока изазива појава каквога новога спољнег или унутарњег узрока и т. д. дају могућности да се предвиди карактер резултујуће акције и квалитативне појединости њенога ефекта. Шема се може практички остварити на много начина; она обухвата велики број разноврсних случајева из медицинске праксе [1]).

Између шема такве врсте, које, поред све своје привидне безначајности, могу, подесно примењене, чинити реалних услуга у појединим конкретним случајевима, доводећи до квалитативних појединости, које су од интереса, нека је наведена и ова: кад за какав скуп непосредних узрока

$$C_1, C_2, C_3 \cdots$$

који су сви једног истог смисла, импулсивни или депресивни, постоји независност ефекта, т. ј. кад сваки од њих тежи, да на њиховоме заједничкоме објекту O изазове одређену модификацију, а та тежња, међутим, постоји било да узрок C_i врши акцију сам, било да је он интегрантни састојак комплекса осталих активних узрока, суперпозиција m таквих узрока имаће за ефект модификације на објекту O које ће увек бити *једнога истог смисла*, па ма колики био број m; осим тога модификације m узрока и ма коликог броја осталих узрока C_i увек су *јаче* од оних које изазива сам тај првобитни комплекс.

Тако, познато је да, код хомогених органских халоген-деривата, температуре кључања расту од флуорних једињења до јодних, тако, да је та температура најнижа код флуорних, виша код хлорних, још виша код бромних, а највиша код јодних једињења. Правило је независно од конституције једињења и од природе

---

[1]) Ch. Bouchard: Immunité et spécificité (C. R. de l'Acad. des Sciences t. 129. 1899. p. 308.).

комплекса са којима се халогене налазе у јединењу. Са друге стране, код изомерних халоген-деривата, што садрже по једну огену, опажа се правило, да на најнижој температури кључају онајединења, код којих се халогена налази у групи CH, на вишој она у којима је халогена у групи CH_2, а на највишој она која садрже халогену у групи CH_3. Ако се, дакле, свакој од халогена да ранг по овоме реду

$$Fl,\ Cl,\ Br,\ J$$

смењивање једне халогене другом, вишега ранга, у каквоме одређеном јединењу, еквивалентно је акцији једнога фиктивног импулсивног узрока C_1, која би имала за ефекат промене температуре кључања. Тако исто, ако се свакој од поменутих трију органских група

$$CH,\ CH_2,\ CH_3$$

да ранг по тако означеном реду, премештање једне исте халогене из једне групе у другу вишега ранга, еквивалентно је акцији једнога фиктивног импулсивног узрока C_2, која би такође имала за ефекат промене температуре кључања. Акција једнога, ма кога, од ова два узрока независна је од акције другога, тако да ће, према горњој шеми, суперпозиција узрока C_1 и C_2 имати за ефекат повишавање температуре кључања јединења, и то *у јачој мери*, но што би било кад би вршио акцију само један од тих узрока. Другим речима: од два изомерна поли-халогенска јединења, која садрже у исти мах, више различних халогена, увек ће кључати на *вишој* температури оно, које халогену вишега ранга садржи у групи вишега ранга. Од два изомерна јединења н. пр. са једним атомом хлора и једним атомом брома, оно, које садржи групе $CHCl$ и CH_2Br, кључаће на *вишој* температури од онога што садржи групе

$C\,Cl\,Br$ и CH_3 а на *нижој* температури од онога што садржи групе CH_2 и $CH\,Cl\,Br$. Конкретни примери таквих случајева виде се н. пр. из овога прегледа:

ЈЕДИНЕЊЕ	ТЕМПЕРАТУРА КЉУЧАЊА
$CH_3 - CH\,Br - CH_2\,Cl$	112°
$CH_3 - CH\,Cl - CH_2\,Br$	119°
$CH_2\,Br - CH\,Br - CH_2\,Cl$	195°
$CH_2\,Br - CH\,Cl - CH_2\,Br$	202°

Такве квалитативне појединости могу чинити услуга при одређивању конституције појединих органских јединења. Оне се, као последица горње шеме, могу распрострти и на друге серије елемената и друге органске комплексе.

Други пример: Осцилаторан карактер појава, везан за акцију депресивних узрока, пропорционалних тоталитету свога непосредног објекта, са коефицијентима утицаја, који се, остајући у току појаве непрестано већи од једнога одређеног броја, мењају за то време на ма какав начин. Уочимо, најпре, случај просте појаве што се састоји у варијацијама дескриптивног елемента v под утицајем непосредног узрока

$$X = \lambda\,\xi$$

где је коефицијенат утицаја λ једна, ма каква, функција времена t, елемента v и ма којих других елемената $v_1, v_2 \cdots$, али таква, да остаје непрестано позитивна кад се t буде мењало у размаку времена (a, b) у коме се појава посматра, и већа од једнога утврђеног позитивног броја N, па ма којим се системом реалних вредности сменили ти елементи.

Такав би н. пр. случај био кад је

$$\lambda = P\,(t, v, \xi, v_1, v_2 \cdots\cdots) + f\,(t)$$

где је P ма какав полином који садржи само *парне* степене елемената $v, \xi, v_1, v_2 \cdots$, са коефициентима који су, или сталне позитивне количине, или ма какве функције времена t, позитивне у размаку времена (a, b); на послетку, $f(t)$ је такође ма каква функција времена, позитивна у томе размаку. Такав је случај и кад је

$$\lambda = f(t) + \varphi(t)\, e^{-P(t, v, \xi, v_1, v_2 \cdots)} \tag{A}$$

где је P опет који од горњих полинома, а $f(t)$ и $\varphi(t)$ ма какве функције времена t коначне и позитивне у размаку (a, b).

Такав би се случај имао и онда, кад коефициенат λ не зависи од елемента $v, \xi, v_1, v_2 \cdots$, већ је ма каква експлицитна функција времена t, позитивна у размаку времена (a, b) и која никако не достиже вредност нуле у томе размаку.

Појава је, у свима тим случајевима, регулисана диференцијалном једначином

$$k\frac{dv}{dt} = k\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\lambda\xi \tag{454}$$

чији интеграли у томе случају имају ове квалитативне особине[1]:

1° кад је размак (a, b) довољно велики, сви интеграли једначине (454) имају у њему осцилаторан карактер;

2° сваки интеграл има у њему најмање онолико нула, колико има целих јединица у вредности

$$\frac{(b-a)\sqrt{N}}{\pi} \tag{455}$$

3° кад су парцијални изводи коефициента λ по $t, v, \xi, v_1, v_2 \cdots\cdots$ сви коначни за сваки реалан и ко-

---

[1] Мих. Петвовић: **Диференцијалне** једначине **са осцилаторним интегралима** (Глас. С. **Краљ. Акад. 77. 1909**).

начан систем вредности тих елемената, и за све вредности t у размаку (a, b), сваки интеграл при проласку кроз једну, ма коју, своју нулу мења знак.

4° кад коефицијенат λ задовољава горње погодбе за све позитивне вредности t (што ће н. пр. бити кад он не зависи експлицитно од времена t), сваки интеграл има бескрајно много реалних нула и сви су интеграли осцилаторне функције времена t, са бескрајно многим осцилацијама.

Појава ће, дакле, при таквим погодбама, бити *осцилаторна*; при тим осцилацијама дескриптивни елеменат мења знак *најмање* онолико пута у једноме датоме размаку времена (a, b), колико има целих јединица у вредности (455).

Уочимо, сад, случај кад су варијације коефициента утицаја λ ограничене и у једном и у другом смислу, тако, да док се t мења у размаку (a, b), вредност се λ непрестано налази између два утврђена позитивна броја M и N, па ма каквим се системом реалних вредности сменили елементи v, ξ, v_1 $v_2 \cdots$ Такав би н. пр. био случај кад је

$$\lambda = \frac{f_1(t) + \varphi_1(t)\,\xi^2}{f_2(t) + \varphi_2(t)\,\xi^2}$$

где су f_1, f_2, φ_1, φ_2 или сталне позитивне количине, или коначне и позитивне функције за вредности t што се налазе у размаку (a, b); или кад је λ облика (A) и т. д.

Такав би се случај имао и онда, кад λ не зависи од елемената v, ξ, v_1 $v_2 \cdots$ већ је ма каква експлицитна функција времена t, која, док се мења у размаку (a, b), варира између двеју коначних, позитивних и од нуле различитих вредности M и N.

Интеграли једначине (454) имају, у томе случају ове квалитативне особине[1]).

---

[1]) Глас Кр. С. Акад. 77. 1909.

1° кад је размак (a, b) довољно велики, сви су интеграли осцилаторне функције времена t;

2° сваки интеграл има у њему најмање онолико нула, колико има целих јединица у вредности

$$\frac{(b-a)\sqrt{N}}{\pi} \tag{456}$$

а највише онолико нула, колико има целих јединица у вредности

$$1+\frac{(b-a)\sqrt{N}}{\pi} \tag{457}$$

3° број је осцилација бескрајан, кад варијације коефициента λ задовољавају горње погодбе за све позитивне вредности t (што ће н. пр. бити кад су функције $f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2$ у горњем примеру стални бројеви)

4° Ако, при померању размака (a, b), у правцу позитивних вредности времена, број M везан за тај размак непрестано расти, разлика двеју узастопних интегралних нула постаје све мања, али не постаје, при томе, никако мања од вредности

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \tag{458}$$

Кад M, при померању размака у бескрајност, тежи асимтотно једној коначној граници ϱ, разлика између узастопних нула тежиће асимтотно сталној граници

$$\frac{\pi}{\sqrt{\varrho}} \tag{459}$$

тако, да кад се знају неколико најмањих узастопних нула α_i, остале нуле, што долазе за овима, имаће се приближно помоћу обрасца

$$\alpha_{i+1}=\alpha_i+\frac{\pi}{\sqrt{\varrho}} \tag{460}$$

На против, кад M нема никакве асимтотне вредности, већ бескрајно расти, узастопне разлике нула бескрајно опадају.

5° Ако, при поменутоме померању размака (a, b), број N, везан за тај размак, непрестано опада, разлика двеју узастопних интегралних нула постаје све већа, али не постајући, при томе, никако већа од вредности

$$\frac{\pi}{\sqrt{N}} \tag{461}$$

Кад N при померању размака у бескрајност тежи од нуле различној граници η, разлика између узастопних нула тежи асимтотно сталној граници

$$\frac{\pi}{\sqrt{\eta}} \tag{462}$$

и за нуле довољно високог ранга i вреди релација

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i + \frac{\pi}{\sqrt{\eta}} \tag{463}$$

Појава је, дакле, при таквим погодбама, увек *осцилаторна*; при тим осцилацијама дескриптивни елеменат мења знак *најмање* онолико пута, колико има целих јединица у вредности (456) а највише онолико пута, колико има целих јединица у вредности (457). У случајевима, кад горња граница M варијација коефицијента утицаја λ, у току времена непрестано расти, осцилације су све *збијеније* и њихов ритам све *убрзанији* у току трајања појаве, док ова не доспе у једну фазу, у којој се размаци времена трајања узастопних осцилације неосетно разликују међу собом и ритам не постане *униформан*. У случајевима, кад доња граница N коефицијента λ у току времена непрестано опада, осцилације су све *разређеније* и њихов ритам све *успоре-*

нији, док појава опет не доспе у једну фазу у којој тај ритам постаје осетно *униформизиран*. У оба случаја појава, у опште, поступно тежи једноме режиму у коме ритам осцилација постаје сталан; изузетка може бити само у случајевима кад граница N па, дакле, и сама вредност коефициента утицаја λ, бескрајно опада у току времена, т. ј. кад утицај депресивног узрока X, по истеку једнога довољно великог размака времена, постане неосетан, па ма каква од тада била узастопна тренутна стања чији низ састављa појаву.

Све ове појединости вреде за ма какву комплексну појаву са дескриптивним системом

$$(v_1, v_2 \cdots v_n)$$

изложеним акцији комплекса непосредних депресивних узрока

$$X_1, X_2 \cdots X_n$$

пропорционалних одговарајућим тоталитетима

$$\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n$$

елемената система, кад коефициенти утицаја

$$\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

тих узрока задовољавају напред наведене погодбе. Појава је регулисана системом једначина

$$k_1 \frac{dv_1}{dt} = k_1' \frac{d^2\xi_1}{dt^2} = -\lambda_1 \xi_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$k_n \frac{dv_n}{dt} = k_n \frac{d^2\xi_n}{dt^2} = -\lambda_n \xi_n$$

од којих, према њиховоме склопу, за сваку понаособ вреде резултати везани за једначину (454). Сваки се од елемената $v_1 \cdots v_n$ мења осцилаторно; ритам осцилације зависиће, на напред наведени начин, од начина на који коефициенти утицаја $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ депресивних узрока X_i зависе од времена t и од осталих фактора у појави.

Трећи пример: Амортизирано-осцилаторан карактер појава, везан за симултану акцију узрока предвиђених другом шемом, и депресивних узрока пропорционалних величинама својих непосредних објеката, чији се коефициенти утицаја мењају експлицитно са временом. Проста појава *(v)* обухваћена таквом шемом регулисана је диференцијалном једначином

$$k \frac{dv}{dt} = -\lambda\xi - \mu v$$

или (464) $$k \frac{d^2\xi}{dt^2} + \mu \frac{d\xi}{dt} + \lambda\xi = o$$

где коефициенат утицаја λ задовољава погодбе предвиђене другом шемом, а коефициенат је μ произвољна функција времена t, позитивна за позитивне вредности t. Ако се стави да је

(465) $$v = w\,e^{-\frac{1}{2k}\int \mu\,dt}$$

варијације су елемента w регулисане једначином

(466) $$k \frac{d^2w}{dt^2} + \omega\, w = o$$

где је

$$\omega = \lambda - \frac{1}{2}\frac{d\mu}{dt} - \frac{\mu^2}{2k}$$

Кад функција ω задовољава погодбе предвиђене у другој шеми за функцију λ, појава, што се састоји у варијацијама елемента w, обухваћена је у својим појединостима том шемом и она је, у опште, осцилаторног карактера. Према томе, и према обрасцу (465), првобитна ће појава *(v)* такође бити осцилаторна, али са осцилацијама које се у току времена у толико брже амортизирају, у колико коефицијенат утицаја μ депресивног узрока има већу вредност.

Таква шема обухвата н. пр. као специјалне случајеве:

1° осцилаторно кретање клатна са промењивом масом и отпором средине, кроз коју се креће са распоредом улога наведеним на стр.

2° осцилаторно кретање течности у пресавијеним цевима, при промењивој густини течности и пресеку цеви, са распоредом улога означеног на стр. 516.

3° осцилаторно истраживање електричних кондензатора при промењивом електричном отпору R, коефициенту ауто-индукције L и капацитету C кондензатора, у коме случају (в. стр. 464—466) улогу k игра коефициенат L, улогу λ изврнута вредност $\frac{1}{C}$ капацитета, улогу μ израз

$$R + \frac{dL}{dt}$$

Капацитет се мења н. пр. међу собним приближавањем или удаљавањем арматура кондензатора, н. пр. њиховим вибрисањем.

Мењање електричног отпора обично је праћено симултаним мењањем коефициента ауто-индукције. Такве се варијације имају н. пр. у случају кад се испражњавање кондензатора врши преко реостата, или на начин примењен при конструкцији микрофона, где су варијације отпора произведене вибрацијама двају тела у додиру (н. пр. комада угљена), или на начин примењен при конструкцији фотофона са селеном, где се отпор мења са временом због неједнаког осветљења проводника, начињеног од селена, чија провидљивост, па, дакле, и отпор, зависи од јачине осветљења.

Коефициенат ауто-индукције проводне жице мења се кад се буду мењали облик или дужина жице, или магнетни пермеабилитет средине у којој се ова налази. Први ће се случај имати н. пр. кад је жица спиралног облика и кад вибрира у току испражњивања кондензатора. Други ће се случај имати н. пр. кад је проводна жица увијена у облику калема, у чијој унутрашњости вибрира један гвоздени ваљак и т. д.

Четврти пример: Интермедијаран карактер појаве, према одређеним појавама (P_1) и (P_2), као последица интермедијарног карактера њеног механизма, према механизмима појава (P_1) и (P_2). Кад је, у току једне просте појаве, непосредни узрок X, примењен на њен дескриптивни елеменат v, по својој јачини непрестано слабији од једнога познатог узрока X_1, а јачи од другога једног познатог узрока X_2 појава ће, по закону свога тока, бити једна од *интермедијерних* појава између оних двеју што би резултирале из акције узрока X_1 и X_2 на елеменат v, а при једном истом коефицијенту инерције: дијаграм варијација елемента v престављаће криву линију која, у уоченоме размаку времена, лежи сва *између двеју кривих* што престављају законе варијација тога елемента при акцији узрока X_1 и X_2. Према ономе, што се тада буде знало о овим двема *граничним* појавама, добија се више или мање одређена квалитативна слика и о самој посматраној појави.

Такав се најпростији случај има онда, кад је X какав узрок са независним варијацима, који у размаку времена остаје непрестано импулсиван или непрестано депресиван, остајући, при томе у исто време и непрестано слабији од једнога узрока X_1 са законом варијације

$$X_1 = \varphi (t)$$

а непрестано јачи од другога једног узрока X_2 са законом варијације

$$X_2 = \psi (t)$$

где су φ и ψ две одређене функције времена t. Једно, ма које тренутно стање у току појаве налазиће се, по величини свога дескриптивног елемента v, између одговарајућих стања дефинисаних вредностима

$$v_1 = v_0 + \frac{1}{k}\int_0^t \varphi(t)\,dt$$

$$v_2 = v_0 + \frac{1}{k}\int_0^t \psi(t)\,dt$$

где је v_0 вредност елемента v у почетноме тренутку појаве.

Кад би се н. пр. таласна дужина λ, у каквој оптичкој појави, која би се састојала у поступном мењању боја, мењала под утицајем једнога промењљивог непосредног узрока, који, остајући непрестано импулсиван, не постаје у току појаве никако слабији од једнога непромењљивог узрока јачине M, нити јачи од другога једног непромењљивог узрока јачине N, стање појаве у једноме датоме тренутку t биће оличено у једној од боја, што у спектралноме низу лежи између боје таласне дужине

$$\lambda_0 + \frac{Mt}{k}$$

и боје таласне дужине

$$\lambda_0 + \frac{Nt}{k}$$

где је λ_0 таласна дужина што карактерише боју у почетноме тренутку реакције.

Једна би се конкретна појава такве врсте имала кад би н. пр. мењање таласне дужине било произведено кретањем једнога материјалног система, које би собом повлачило померање спектра беле светлости тако, да то померање буде пропорционално брзини кретања система; или мењањем јачине електричне струје, које би, такође, собом повлачило то померање спектра, тако, да ово буде пропорционално јачини струје и т. д. а да се, при томе, посматрана појава састоји у мењању боја у једноме уском отвору, испод кога се тај спектор помера. Јачина непосредног узрока, који тада у отвору изазива мењање боја што кроз њега промичу, била би пропорционална јачини механичке силе што изазива кретање материјалног система, или збиру јачина електромоторне и контра-електромоторне силе што изазивају варијације јачине струје. Подаци ограницама варијација тих сила довели би, тада, до квалитативних појединости тока појаве, предвиђених горњом шемом.

Сличан би се случај имао н. пр. и онда, кад би се дескриптивни елеменат v, у поступном развитку једне болести, мењао као непосредан објекат акције бацила једне врсте, који би се у организму размножавали по каквоме познатом закону, али за чији би се број знало да ни у коме тренутку није већи од утврђеног броја M или мањи од утврђеног броја N. Стадијум болести биће, у сваком тренутку t, један од интермедијерних стадијума између двају граничних стања, која би била карактерисана вредностима

$$v_0 + \frac{Mt}{k} \quad \text{и} \quad v_0 + \frac{Nt}{k}$$

дескриптивног елемента, где је k један специфични коефициенат пацијента. Кад би се уочена врста патогених бацила размножавала делењем, брже него друга једна врста, чија је спецична репродуктивна моћ λ, а спорије него једна врста, за коју је та моћ μ, гранични стадијуми, између којих се у тренутку t налази ефективни стадијум посматране болести, били би карактерисани вредностима

$$v_0 + \frac{e^{\lambda t}}{k\lambda} \quad \text{и} \quad v_0 + \frac{e^{\mu t}}{k\mu}$$

дескриптивног елемента болести.

Такви би се, на послетку, случајеви имали и онда кад се јачина X непосредног узрока мења експлицитно и са временом t и са величином дескриптивног елемента појаве, задовољавајући, при томе, извесне опште погодбе, предвиђене аналитичким теоремама о средњим вредностима интеграла обичних диференцијалних једначина првога реда[1]).

Сличне теореме о средњим вредностима интеграла симултаних диференцијалних једначина доводе и до квалитативних појединости горње врсте за комплексне појаве. Применом н. пр. на појаве кретања материјалних система, при којима би се за дескриптивне елементе узела међусобна растојања његових делова (материјалних тачака или тела), имале би се горње и доње границе њихових варијација у уоченоме размаку времена. Кад су обе врсте граница коначне и различне од нуле, у размаку времена *(о, ∞)*, делови система нити се могу међу собом сударити, нити се бескрајно један од другог удаљавати, што је карактеристика *стабилности* система.

Пети пример: Квалитативне појединости у појавама, везане за симетрију и дисиметрију узрока или феноменског поља у коме се појава дешава. Елементи симетрије, везани за механизам појаве, остављају трага и на самој појави, као последици свога механизма. Елементи симетрије узрока огледају се у одређеним појединостима њихових ефеката; кад појединe појаве показују какву нарочиту карактеристичну дисиметрију, ова се мора наћи и у узроцима који те појаве производе. Поједина

---

[1]) в. н. пр. расправе:

M. Petrovitch: Matthem. Annalen Bd. 54; Bull. de la Société mathem de France t. 25. 1897; Sitzber. d. kgl. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften 1896.

E. Cotton: C. R. de l'Acad. des Sciences, févr. 1908; Acta mathematica t. 31.

E. Maillet: C. R. de l'Acad. des Sciences, nov. 1908.

феноменска поља у каквој средини која је седиште појаве, или поједине врсте варијација тих поља, могућни су само онда, кад средина показује извесну симетрију или дисиметрију, карактеристичну за посматрано поље, или за посматране варијације тога поља. Кад се више разних поља, или више појава везаних за та поља, суперпонирају у једној истој средини, дисиметрије се, додавањем једне другој, потенцирају, а од елемената симетрије остају они, који су заједнички свима тим пољима, или појавама.

Симетрија једнога феноменског поља може, у опште, бити двојаке природе: дистрибутивне и кинетичке. Кад је карактеристични елеменат v поља, у једном тренутку, распоређен по тачкама поља на такав један начин, да је симетричан према једној утврђеној тачки, правој или равни, поље је у томе тренутку *централно-симетрично*, у другоме *аксиално-симетрично*, у трећем *плани-симетрично*; у сва три случаја поље је, у томе тренутку, карактерисано *дистрибутивном симетријом*. Кад се елеменат $\mathbf{v}$, у једној тачки P поља, мења у току појаве тако, да постоји један тренутак θ, карактерисан фактом, да су апсолутне вредности елемената v, у тренутцима $\theta + t$ и $\theta - t$, међу собом једнаке за све вредности t за време трајања појаве, промене су тога елемента у тачки P карактерисане *кинетичком симетријом*. Ова ће бити *прве* или *друге врсте*, према томе, да ли су поменуте вредности елемента v у исто време и једнако означене или су супротнога знака.

Ако је начин мењања елемента v, у тачки P поља, представљен једначином

$$v = f(t)$$

кинетичка симетрија прве врсте оличена је у релацији

$$f(\theta + t) = f(\theta - t)$$

а кинетичка симетрија друге врсте у релацији

$$f(\theta + t) = -f(\theta - t)$$

које релације вреде за све вредности времена t у току појаве.

Кинетичка симетрија може бити везана или за поједине изоловане тачке поља, или за све тачке једне утврђене линије или равни, или, на послетку, за све тачке поља. Обе врсте симетрија: дистрибутивна и кинетичка, могу бити и суперпониране у једноме истом пољу. Једна или друга од њих, или обадве, могу симултано бити везане и за више дескриптивних елемената

$$v_1,\ v_2,\ v_3 \cdots$$

распоређених по тачкама феноменског поља. Оне саме собом, или својом суперпозицијом, импозирају појавама, везаним за таква поља, нарочите квалитативне појединости, о којима ће дати идеју неколико овде наведених случајева такве врсте.

I. Симетрија у појавама са два степена слободе, сводљивим на кретање фигуративне тачке редукованог система у централно-симетричном потенцијалном пољу. Означивши са

$$V = U(q_1)$$

потенцијал тачке поља на одстојању q_1 од центра поља, кретање је фигуративне тачке одређено интегралом живих сила

$$\frac{k v^2}{2} = U(q_1) + h \tag{467}$$

и једначином површина

$$q_1^2 \frac{d q_2}{dt} = c \tag{468}$$

где су: k коефицијенат инерције, v брзина тачке, q_2 њен поларни угао, h и c константе. Релација

$$(469) \qquad v^2 = \left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + \left(q_1 \frac{dq_2}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{{q_1}^2}$$

своди једначину појаве на облик

$$(470) \qquad \frac{dq_1}{dt} = \frac{2}{k} U(q_1) - \frac{c^2}{q^2} + \frac{2\,h}{k}$$

Нека је $q_1 = \rho$ један реалан корен једначине

$$(471) \qquad U(q_1) - \frac{k\,c^2}{2} \frac{1}{{q_1}^2} + h = o$$

Дирка дијаграма $(q_1\ t)$ редукованог система у тачки $q_1 = \rho$ паралелна је осовини вредности t, а пошто, према једначини (470), једнаким ординатама лево и десно од те тачке одговарају и једнаки нагиби дирака дијаграма према осовини t, тај ће дијаграм представљати криву линију *симетричну* према ординати тачке $q_1 = \rho$.

Једначине (468) и (469) дају

$${q_1}^2 \left(\frac{dq_2}{dr}\right)^2 = \frac{k\,c^2}{2\,{q_1}^2\,U(q_1) + 2\,h\,{q_1}^2 - kc^2}$$

што значи да симетричним тачкама дијаграма (r, t) одговарају једнаке вредности извода $\frac{d\,q_2}{d\,q_1}$. Према томе и сама ће трајекторија (q_1, q_2) фигуративне тачке бити симетрична према потегу $q_1 = \rho$. Са друге стране, пошто према једначинама (469) и (470), симетричним положајима те тачке одговарају једнаке брзине, кретање ће тачке, па, дакле, и ток уочене појаве бити карактерисани *кинетичком симетријом*, везаном за тачке на кругу $q_1 = \rho$.

Једначина (467) показује да се целокупна трајекторија фигуративне тачке налази у области простора (q_1, q_2) у којој је израз $U(q_1) + h$ позитиван. Сферна површина

$$U(q_1) + h = o$$

преставља дакле геометриско место граничних положаја те тачке.

II. Симетрија у појавама са два степена слободе, сводљивим на кретање фигуративне тачке редукованог система у аксиално-симетричном потенцијалном пољу. Означивши са

$$V = - U(q_1, q_2)$$

потенцијал тачке поља, чије су координате q_1 и q_2, и узевши осовину симетрије поља за осовину oq_2, биће

$$U(q_1, q_2) = U(- q_1, q_2)$$

одакле је

$$\frac{\partial}{\partial q_1} U(q_1, q_2) = - \frac{\partial}{\partial q_1} U(- q_1, q_2)$$

што показује да је за $q_1 = o$

$$\frac{\partial U}{\partial q_2} = o$$

т. ј. да еквипотенцијалне линије

$$U(q_1, q_2) = const.$$

у опште пресецају нормално осовину oq_2 и достижу у тим пресецима своја екстремна одстојања од осовине oq_1.

Кретање фигуративне тачке регулисано је системом једначина

$$k \frac{d^2 q_1}{d t^2} = \frac{\partial U}{\partial q_1}$$

$$k \frac{d^2 q_2}{d t^2} = \frac{\partial U}{\partial q_2}$$

које се не мењају кад се q_1 смени са $-q_1$. Ако је, дакле, почетно стање у појави тако, да је у њему, дуж једне тачке на осовини oq_2,

$$\frac{d\,q_2}{dt} = o$$

фигуративна тачка сече у почетном тренутку појаве осовину симетрије поља нормално, прелазећи симетрично из једне области поља у другу, овој симетричну, област. То указује на симетрију трајекторије те тачке; интеграл живих сила, који се, такође, не мења сменом вредности q_1 вредношћу $-q_1$, показује, са друге стране, да симетричним тачкама трајекторије одговарају исте брзине. Та факта указују на *кинетичку симетрију* посматране појаве.

Ако се, при том, посматрано потенцијално поље мења у току појаве експлицитно са временом, тако, да је

$$V = -U\,(q_1, q_2, t)$$

где је U симетрично-периодична функција времена, и ако фигуративна тачка, у двама тренуцима што одговарају максималним или минималним вредностима функције U, прође нормално кроз осовину симетрије поља, кретање је те тачке периодично и, према томе, и сама је уочена појава *периодична*.

Карактер *периодичности* појаве, као последица симетрије поља, јавља се, између осталих случајева, и онда кад аксиално-симетрично потенцијално поље, које се мења као експлицитна симетрично-периодична функција времена, ротира око једне осовине управне на равни $q_1\,o\,q_2$ и ако, при томе, фигуративна тачка прође нормално кроз осовину симетрије поља у двама тренуцима што одговарају екстремалним вредностима функције U. Да би појава, при том, била још и *симетрично-периодична*, потребно је и довољно да још и периоде варијација поља и његове брзине ротације буду међу собом мерљиве и да те варијације имају својих заједничких екстремалних вредности. Такав се случај јавља н. пр. у једном специјализираном проблему трију тела: кад се ова крећу у једној равни, а при томе је маса једнога од њих довољно мала да не пертурбира осетно кретање остала два тела. Прва ће маса изводити симетрично-периодично кретање, ако су почетне погодбе кретања такве, да она са осталим двама телима ступи у симетричне конјункције или опозиције у тренутку, кад се ова два тела налазе на максималним или минималним међусобним растојањима¹).

III. Дистрибутивна симетрија или дисиметрија као погодба за могућност појединих врста физичких појава. Многобројне термичне, електричне, магнетне и т. д. појаве могуће су само онда, кад средина, у којој се оне дешавају, показује извесну нарочиту симетрију или дисиметрију, карактеристичну за такву једну појаву. P. Curie је формирао таблицу типова симетрије, на које се наилази у појавама што се састоје у континуалним променама дистрибуција у ограниченим феноменским пољима²). Кад се више појава, од којих је свака карактерисана по једним од таквих типова симетрије, суперпонирају у једној истој средини, и ако таква суперпозиција повлачи собом какву нову резултујућу појаву, та појава може бити само једна од оних које би биле карактерисане резултујућим типом симетрије,

---

¹) Случајеви овакве врсте проучени су принципје у расправи Д-ра М. Миланковића: О кинематичној симетрији и њеној примени на квалитативна решења проблема Динамике (Глас С. К. А. 1911).

²) P. Curie: Sur la symétrie dans les phénomènes physiques (Journal de Physique 1894).

т. ј. оним што резултира из суперпозиције типова симетрије који карактеришу суперпониране појаве.

Суперпонирајући н. пр. у једној истој средини једно електрично и једно магнетно поље истога правца, у средини се, као што је показао Curie, ствара једна дисиметрија која има тип оне, што се добија торсијом цилиндра. То указује на физичку могућност појаве коју је констатовао Wiedemann: да кад се кроз гвоздену жицу, намагнетисану у правцу дужине, пропусти електрична струја, жица се упреда.

Магнетишући једну жицу и упредајући је у исто време, добија се једна резултујућа симетрија истога типа, кога је и она што карактерише електрично поље. То објашњава појаву коју је констатовао Wiedemann: да се у тренутку, кад се таква жица почне при магнетисању упредати, одиста јавља у њој једна електромоторна сила.

Резултујућа симетрија, што постаје суперпозицијом једнога електричног поља и торсионе дисиметрије, има тип симетрије магнетног поља; Wiedemann је констатовао да гвоздена жица, кад се при поласку електричне струје буде упредала, одиста бива намагнетисана.

Таквом се суперпозицијом симетрија предвиђа н. пр. и могућност магнетне поларизације у једноме хемиском телу са дисиметричним молекулима, кад ово буде унешено у какво електрично поље; или могућност реализације извесних дисиметричних хемиских реакција комбинованом акцијом електричног и магнетног поља[1]). Voigt је, тако исто, показао[2]) како се посматрањем симетрије и дисиметрије узрока и ефеката могу схва-

---

[1]) P. Curie: loc. cit.

[2]) Voigt: All. Ges. der Wissenschaften, Göttingen 1890. — Wied. Ann. t. 45. 1893. S. 523.

тити и предвиђати разноврсне конкретне појединости пироелектричних и пиезоелектричних појава и т. д.

Шести пример: Квалитативне појединости импозиране егзистенцијом и природом економских момената у појави. Показано је, да су појединости тока једне појаве резимиране у разним кондензованим једначинама облика

$$\Delta = minimum$$

где су изрази Δ разноврсне комбинације активних и пасивних елемената и фактора у појави, чији облик зависи од састава механизма појаве и за које су познати закони формације кад су познате појединости механизма. Варијације су појединих елемената, у којима се појава састоји, такве, да у свакоме тренутку такав један израз Δ што појави одговара, има вредност *мању*, но што би је имао кад би се на место ових *природних* варијација имао ма какав други, од овога различан, систем варијација. Фиктивни фактори Δ јесу, дакле, у појавама оно, у чему се при природном току појаве *економише*, и појединости се појаве могу схватити и предвиђати по егзистенцији и склопу тих фактора и начину на који се за њих везана економија конкретно манифестује у појединостима појаве. По себи се разуме, да та економија, сама по себи, није ништа друго до нарочити израз непосредне споне која постоји између тока појаве и њеног механизма, као што су и саме диференцијалне једначине појава, за које је таква економија само један њихов кондензовани облик, такође један нарочити израз те споне. Фактори Δ, везани за једну дату појаву, биће названи *економским моментима* у тој појави. Тих момената, за једну исту појаву, има бескрајно много са познатим законом формације. Овде ће бити наведено неколико врста таквих момената.

I Ако је примарни систем у појави, холономан или нехолономан, карактерисан везама прве врсте, или је слободан, и ако се помоћу елемената редукованог система формира појави одговарајућа, раније формирана, функција, (в. стр. 170—172)

$$P = \Theta - (Q_1 q_1' + \cdots + Q_k q_k')$$

појава се, као што је раније показано, дешава тако, да је брзина фигуративне тачке њеног редукованог система у свакоме тренутку она, за коју функција P има у томе тренутку што је могуће мању вредност. Са друге стране, функција је P полином другога степена по изводима $q_1' \cdots q_k'$, са коефицијентима који у опште зависе од $q_1 \cdots q_k$ и од времена t. Горњи факт о минимуму остаје, дакле, неизмењен и онда кад се изразу P дода ма какав израз F који би зависио, на ма какав начин, од t и $q_1 \cdots q_k$, али који би био независан од извода $q_1' \cdots q_k'$. *Израз P, као и свака од бескрајно многих комбинација $P + F$, играју, према томе, улоге економских момената у посматраној појави.*

Тако, у простим експоненцијалним појавама (в. стр. 303) такав један економски моменат има за израз

$$\frac{1}{2} k v'^2 - \lambda v v' + F(v, t)$$

где је v дескриптивни елеменат система, k његов коефицијенат инерције, λ коефицијенат утицаја непосредно примењеног узрока, а F произвољна функција елемената v и t.

У простим појавама, у којима се један елеменат v мења симултаном акцијом једнога сталног импулсивног и једног депресивног узрока, пропорционалног величини тога елемента. (в. стр. 303). Такав момент има за израз

$$\frac{1}{2} k v'^2 + \lambda v v' — \mu v' + F(v, t)$$

где је μ јачина сталног, а λ коефицијенат утицаја депресивног узрока.

При кретању чврстог тела око утврђене тачке тај је момент облика

$$\frac{1}{2} [A p'^2 + Bq'^2 + Cr'^2 + 2 (C — B) qrp' + 2 (A — C) rpq' +$$

$$+ 2 (B — A) pqr'] — Lp' — Mq' — Nr' + F (p, q, r, t)$$

где су: p, q, r, компоненте тренутне ротације дуж главних осовина инерције за ту утврђену тачку; A, B, C моменти инерције тела, L, M, N суме момената примењених сила према тим осовинама, F произвољна функција елемената p, q, r, t.

При зависним хемиским реакцијама, проученим на стр. 198, економски је моменат дат изразом

$$\frac{1}{2} (y_1'^2 + z_1'^2) — C_1 (a — \alpha y_1) y_1' — C_2 (a — \alpha y_1 — \beta z_1) \cdot ($$

$$— \cdot (b — \beta' z_1) z_1' + F (y_1, z_1, t)$$

При међусобној акцији система непокретних струја (в. стр. 200) тај је момент облика

$$\frac{1}{2} [\Sigma L_k i_k'^2 + 2 \Sigma M_{kh} i_k' i_h'] —$$

$$— \Sigma (E_k — R_k i_k) i_k' + F (i_1 \cdots i_n, t)$$

При распростирању топлоте по каквоме чврстом те́лу моменат је

$$\frac{1}{2} c V'^2 - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) V' + F(V, t)$$

где је V температура тачке (x, y, z), c специфична термична константа тела и т. д.

II Ако је примарни систем у појави, холономан или нехолономан, карактерисан везама друге врсте, или је слободан, и ако се помоћу елемената редукованог система формира појави одговарајућа, раније формирана функција (в. стр. 177—178)

$$R = S - (Q_1 q_1'' + \cdots + Q_k q_k'')$$

појава се дешава тако, да је акцелерација фигуративне тачке њеног редукованог система у свакоме тренутку она, за коју функција R има у томе тренутку што је могуће мању вредност. Са друге стране, функција је R полином другога степена по изводима $q_1'' \cdots q_k''$, који, у опште, зависе од $q_1 \cdots q_k$; $q_1' \cdots q_k'$ и од t, према томе горњи факт минимума остаје неизмењен и онда, кад се изразу R дода ма какав израз $\varPhi$, који би зависио, на ма какав начин, од q_i, q_i' и од t али који би био независан од извода q_i''. *Израз R, као и свака од бескрајно многих комбинација $R + \varPhi$, имају, дакле, улоге економских момената појаве.*

Тако, у осцилаторним појавама које се састоје у променама једнога елемента v под утицајем једнога депресивног узрока, пропорционалног тоталитету η тога елемента, економски је моменат облика

$$\frac{1}{2} k \eta''^2 + \lambda \eta \eta'' + F(\eta, \eta', t)$$

где је λ коефицијенат утицаја депресивног узрока. Кад се акцији тога узрока придружи и акција једнога, такође депресивног, узрока пропорционалног величини самог елемента v, моменат је облика

$$\frac{1}{2} k \eta''^2 + \lambda \eta \eta'' + \mu v \eta'' + F(\eta, \eta', t)$$

III Кад је појава конзервативна, и ако су

$$P_1 (q_1 \cdots q_k) \quad \text{и} \quad P_2 (q_1 \cdots q_k)$$

две конфигурације у њеноме току, а (t_1, t_2) један, довољно мали, размак времена, у коме редуковани систем $q_1 \cdots q_k$ појаве прелази са конфигурације P_1 на P_2, природан ток појаве карактерисан је скупом таквих закона тока

$$q_1 = f_1 (t) \cdots q_k = f_k (t)$$

за које интеграл

$$J = \int_{t_1}^{t_2} (T + U)\, dt$$

где су T и $U - U$ кинетичка енергија и потенцијал у појави, постоје минимум (в. стр. 332). *Интеграл J игра, дакле, такође, улогу економскога момента у посматраној конзервативној појави.*

IV. Кад се, у случају конзервативних појава, формира израз кинетичке енергије

$$2\, T = \Sigma\, a_{ij}\, q_i'\, q_j'$$

и са

$$q_1 = \varphi_1 (\lambda) \cdots\cdots q_k = \varphi_k (\lambda)$$

означе параметарске једначине једне произвољне трајекторије фигуративне тачке система, што пролази кроз две дате конфигурације P_1 и P_2, карактерисане вредностима λ_1 и λ_2 параметра λ, између свију бескрајно многих трајекторија, што пролазе кроз P_1 и P_2, у природном ће се току појаве имати она, дуж које интеграл

$$L = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{2(U+h} \cdot \sqrt{\Sigma\, a_{ij}\, dq_i \cdot dq_j}$$

за утврђену вредност константе живих сила h постаје минимум (в. стр. 336). *Интеграл L је, дакле, такође, један од економских момената у таквим појавама.*

Водећи рачуна о интегралу живих сила томе се економском моменту могу дати још и облици (в. стр. 338—343)

$$L = \int_{t_1}^{t_2} (\Sigma\, a_{ij}\, q_i' \cdot q_j')\, dt$$

$$L = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\Sigma\, a_{ij}\, \frac{dq_i}{d\lambda} \cdot \frac{dq_j}{d\lambda}\right) d\lambda$$

$$L = \int_{o}^{s} ds\, \sqrt{2(U+h)}$$

За појаве са једним степеном слободе моменат је облика

$$L = \int_{t_1}^{t_2} aq'^2 \cdot dt$$

а за појаве са два степена слободе

$$L = \int_{o}^{s} ds = s$$

где је

$$ds^2 = 2\,(U + h)\,(a_{11}\,dq_1^{\,2} + 2a_{12}\cdot dq_1\,dq_2 + a_{21}\,dq_2^{\,2})$$

Помоћу таквих момената, који су и сами по себи многобројни и по облику разноврсни, могућно их је аналитички формулисати још и недогледан број других, који ће бити аналитичке комбинације ових. Јер, са једне стране, кад постоји један систем израза

$$(472) \qquad \Delta_1, \Delta_2 \cdots \Delta_n$$

од којих сваки достиже свој минимум кад је испуњен један дати скуп погодаба *(C)*, постоји у исто време и бескрајно много комбинација

$$(473) \qquad \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \cdots$$

израза (472) чије ће вредности такође достизавати свој минимум кад је остварен тај исти скуп погодаба *(C)*. Са друге стране, кад се из генералности, везане за горе наведене економске факторе, пређе на специјалне случајеве, дешава се, да се поједини фактори у изразима тих генералних економских момената упрошћавају и да, на тај начин, моменти за поједине, специјалне, врсте појава добијају нарочите облике, који вреде само за такве врсте појава. Између бескрајно многих и бескрајно разноврсних економских момената, везаних за генералне феноменолошке случајеве, или за поједине специјалне врсте појава, има их и таквих, које имају какво нарочито одређено феноменолошко значење, што им даје нарочиту важност међу осталим моментима чисто аналитичког карактера.

Тако, у генералном феноменолошком случају, између бескрајно многих момената облика $R + \Phi$ (в.

стр. 295—297) постоји и један који је сводљив на израз

$$(474) \qquad \frac{dt^4}{2} \Sigma k_i \left(v_i' - \frac{X_i}{k_i} \right)^2$$

где су $k_1 \cdots k_n$ коефицијенти инерције елемената примарног система $v_1 \cdots v_n$, а $X_1 \cdots X_n$ тежње непосредно примењене на те елементе. Израз, међутим, (474) има, као што је раније наведено, за феноменолошко значење *присиљавање* у појави у размаку времена t до $t + dt$, и факт о минимуму, везан за такав специјалан облик овога економског момента, примењен на појаве кретања, доводи непосредно до Gauss-овог *принципа најмањег присиљавања*, наведеног на стр. 297.

У случају консервативних појава, кад се ове дешавају без утицаја икаквих примењених тежња, интеграл живих сила

$$T = U + h$$

показује да је

$$T = \Sigma a_{ij} q_i' q_j' = const.$$

тако, да се економски моменат L (в. стр.) своди на облик

$$L = \lambda (t_2 - t_1)$$

и има за феноменолошко значење *размак времена* за који појава прелази из стања, дефинисаног једном датом конфигурацијом (P_1), на другу једну конфигурацију (P_2). Тај размак постаје минимум у природноме току појаве (в. стр. 343).

У случају консервативних појава са k степена слободе, које се дешавају под утицајем примењених тежња чији је потенцијал $-U$, моменат L има за фе номенолошко значење *дужину лука једне произвољне трајекторије* фигуративне тачке појаве, између њених двеју крајњих тачака што одговарају двема датим конфигурацијама (P_1) и (P_2), које дефинишу два дата тренутна стања у појави. Та је дужина минимум за природну трајекторију и своди се, тада, на *дужину лука геодезиске линије* варијетета k-тог реда, који има за линиски елеменат израз

$$ds^2 = \Sigma\, b_{ij}\, dq_i\, dq_j$$

где је

$$b_{ij} = 2\,(U + h)\, a_{ij}$$

а где су a_{ij} коефицијенти извода у изразу кинетичне енергије T у појави (в. стр. 340).

За конзервативне појаве са два степена слободе моменат L има значење дужине лука произвољне криве линије на површини чији је линиски елеменат

$$ds^2 = b_{11}\, dq_1^{\,2} + 2\, b_{12}\, dq_2 + b_{22}\, dq_2^{\,2}$$

између њених двеју тачака P_1 и P_2: он се за природан ток појаве своди на дужину лука геодезиске линије на површини, између тих двеју тачака (в. стр. 339).

У општем случају конзервативних појава економски се моменат своди и на облик

$$L = \int_{t_1}^{t_2} T\, dt$$

и тада има за феноменолошко значење *тоталитет кинетичне енергије* у појави за време преласка из једног њеног датог тренутног стања у друго дато стање. Тај тоталитет постаје минимум у природноме току појаве.

У појавама кретања под утицајем сила што деривирају из каквог потенцијала тај моменат има за значење *тоталитет живе силе при кретању*, између два дата положаја покретне тачке или покретног система.

При кретању електричне струје кроз проводне жице економски моменат L има за значење *количину топлоте*, која се, по Joule-овом закону, развија у жицама при пролазу струје (в. стр. 339—456).

Поред оваквих економских момената, чија егзистенција, аналитички облик и феноменолошка природа резултују непосредно из формираних диференцијалних једначина појаве, има их и таквих, који се у појединим конкретним случајевима истичу на видик непосредно сами собом, својом феноменолошком природом, која наговештава или чини вероватним за њих везани факт минимума, а који се на конкретним појавама потврђује скупом нарочитих квалитативних појединости, као њихових непосредних последица. Такве је врсте велики број економских момената везаних за поједине генералније или специјалних врста појава који су подлога оним многобројним и разноврсним *принципима минимума*, у којима се непосредно, без потребе познавања интимног механизма појаве и једначина које би му биле аналитички израз, резимирају квалитативне појединости тока појаве. Факт минимума, било да је безуслован, било да је везан за нарочити скуп погодаба у механизму појаве, имплицира собом одређене, више или мање прецизне такве појединости; интерес економских момената, на које се односе такви принципи и лежи једино у кондензованости облика у коме су, на тај начин, ове резимиране, поред све своје, често и врло велике, међусобне диспаратности. Те су врсте н. пр. принципи *најмањег утрошка енергије* и *најмањег напора* у виталним, психолошким и социјалним појавама.

Сам факт минимума, везан за један уочени економски моменат у датој појави импозира у току ове један одређен скуп квантитативних и квалитативних појединости које су у толико одређеније, у колико је прецизнија шема механизма појаве и начина на који је за овај везана сама манифестација појаве.

Кад су те шеме довољно прецизне, да се по њима могу формирати и саме диференцијалне једначине појаве, као спона између механизма и појединости у којима се појава у реалности манифестује, факт о минимуму, везан за који од напред наведених економских момената, није ништа друго до један нарочити кондензован израз свих, како квантитативних тако и квалитативних појединости у манифестацији појаве. Ове су, тада, у њему имплициране и могу се све предвидети из егзистенције и састава економских момената. Такав је случај са свима појединостима везаним за типове појава, наведене раније у опису квантитативне и квалитативне слике појава.

Тако исто, поједини специјални економски моменти, у појединим специјалним врстама конкретних појава, повлаче собом скуп одређених или овлашнијих појединости за такву слику. Знајући н. пр. да, при кретању светлости, израз

$$\int nds$$

— где је n индекс преламања светлости за бескрајно узак слој средине око њене произвољне тачке (x, y, z) а ds елеменат лука произвољне трајекторије — игра улогу једнога од економских момената, могу се из самога тога факта извести све квантитативне и квалитативне појединости појава рефракције светлости и аберације, како у хомогеним, тако и у хетерогеним срединама[1]). Исто тако из факта минимума, везаног з економски момент

$$\Sigma Ri^2$$

---

[1] O. Bonnet: Nouvelles Annales 1887. p. 335—368; p. 554—580.

при гранању система струја кроз проводнике са отпорима $R_1, R_2, R_3 \cdots$ излази, као непосредна последица Ohm-ов закон (в. стр. 454—456) и остале појединости појаве.

Велики број квалитативних појединости најразноврсније конкретне природе везан је непосредно за егзистенцију овакних економских фактора са простим феноменолошким значењем и може се, самим тиме, предвиђати у облику факата, што су му, у датим приликама, крајњи израз у коме се опажа. Такав је случај са појединостима које су последице поменутог факта минимума утрошене енергије, или минимума напора (мереног количином утрошене енергије у јединици времена, или јачином умора који он изазива) и које се н. пр. манифестују у скупу конкретних факата овакве врсте :

1° у виталним појавама: у начину функционисања појединих делова организма, н. пр. у функционалној адаптацији појединих мишића, тако, да функционисање ових, према ефекту који има да се произведе и приликама у којима мишић функционише, повлачи собом најмањи могућни утрошак енергије, или најмањи могући напор (факти које је запазио Haughton, при кретању моторних органа организма; факти које је запазио Marey при кретању тежишта тела при корачању; Listing-ов закон торзионе ротације ока на начин који, према испитивањима Fick-а и Wundt-а, изазива најмању могућу потрошњу енергије и т. д.[1]).

2° у маси факата што потичу из перманентне тежње у унутарњим социјалним процесима и еволуцији друштва, да се животне и друштвене потребе подмире са што мањим утрошком енергије, или са што мање

---

[1] A. Imbert: Mode de fonctionnement économique de l'organisme (Scientia № 14).

напора (подела рада, размена и начини размене продуката, струјање тих размена и правци тих струјања, начини и правци комуникација и дистрибуције животних намирница и индустриских продуката и т. д.).

Безброј ситнушних факата, у свем њиховом бескрајном шаренилу, у којима су овакви генерални факти, у разноврсним приликама, конкретно оличени, обухваћени су фактом егзистенције поменутих економских момената у појавама те врсте и нису ништа друго до нарочити израз квалитативних појединости, везаних за улогу и феноменолошку природу тих момената.

◆

ПЕТИ ОДЕЉАК.

Састав и шеме феноменолошких механизама.

ПРВА ГЛАВА.

КОМБИНАЦИЈЕ И ДИСТРИБУЦИЈА УЛОГА У МЕХАНИЗМИМА ПОЈАВА.

Одређеност механизма. — Разноврсност фактора карактерисаних истим улогама. — Шеме механизама.

Примери комбинација и дистрибуција улога у неколиким врстама конкретних појава: механизми у појавама кретања и деформације маса; механизми у електричним појавама; механизам фотохемиске акције светлости на осетљиву плочу; механизам варијација хлорних састојака при гастричном хемизму; механизам формације и коалугације колоида; механизам периодичности мирисних еманација у биљкама; механизми органских ондулација; механизам одбране организма против акције микроба; механизам нормалних и патолошких појава при продукцији вољних аката.

Механизам је једне појаве довољно одређен, да би у њему биле имплициране феноменолошке појединости, које се при дескрипцији појаве буду имале у виду, ако је појава схваћена као последица једне одређене комбинације улога, распоређених на одређене конкретне факторе у њој, и ако се, са довољном одређеношћу према тим појединостима, знају феноменолошке природе улога и начин на који се активитети оних улога, што импозирају промене дескриптивним елементима у појави, мењају у размаку времена у коме се појава посматра.

Одредба комбинације улога, што саставља механизам дате појаве, њихове феноменолошке природе и њихове дистрибуције на конкретне факторе, спада у специфичне проблеме појединих наука којима проучаване појаве буду припадале. Она се састоји у томе, да се непосредним опажањем, експериментом, по аналогијама са већ испитаним случајевима, хипотезама које се потврђују фактима и т. д. у појави прецизира оно, што у изазивању њених појединости, које се буду имале у виду, игра одређену улогу: активни и реактивни, импулсивни и депресивни узроци; секундарни узроци, и прилике које регулишу утицаје појединих активних и реактивних узрока и чине да дати комплекс таквих узрока има осетнији или слабији ефекат; разноврсне друге специјалније, како активне тако и пасивне улоге, као што су: улоге изазивача, координативне улоге, регулаторске улоге, улоге терена, улоге веза, улоге препрека и т. д. Дистрибуција тих улога на поједине факторе у природним појавама и чини оно привидно бескрајно шаренило њихових механизама и даје им оне безбројне диспаратне облике, у којима тек оштрије посматрање, или дубља анализа, откривају каквих заједничких црта или сводљивост на исте типове.

Активни импулсивни узрок јавља се н. пр. према природи појаве, час као атрактивна сила међу телима, час као трансформаторска тежња реагенаса у хемиским реакцијама, час као термична или електрична утицајна тежња стања једне тачке на стање тачака у околини, час као магнетишућа сила, час као фотохемиска трансформаторска тежња светлосних зракова, као осмотички притисак у органским ћелијама, као деструктивна тежња бацила при прогресивном развитку једне болести, као утицајна тежња средине при трансформацијама једне одређене биолошке феле и т. д.

Реактивни се узрок јавља час као трење или отпор средине при кретању, час као индукциона реактивна сила регулисана Lenz-овим законом, час као коерцитивна сила магнета, час у облику разних врста отпора организма, мишићних и нервних реакција, час у облику разних врста социјалних реакција и т. д.

Инерција се јавља час као механичка инерција при транслаторном кретању, час као центрифугална сила при ротацијама, час као електромагнетна или индукована електромоторна сила, час у облику социјалних инерција, навика, предрасуда и т. д.

Тренутни, нагласни и, у опште, дисконтинуални узрок јавља се час као механични удар, час као напрасно, тренутно, осветљење осетљиве плоче чуване ван домашаја светлосних зракова, час као тренутно затварање или отварање електричног кола у чијем се саставу налази каква електромоторна сила, час као интензиван тренутни импулс у свести и т. д.

Улогу везе у појави игра час веза између варијација притиска и запремине гаса, исказана Mariotte-овим или Gay-Lussac-овим законом, час веза између брзине истицања течности и висине течног стуба, исказана Toricelli-евим законом, час који од закона одржања (материје, запремине нестишљивих тела, ентропије, електрицитета), час везе исказане Kirchhoff-љевим законима грањања струја, час везе при кретању материјалне тачке по утврђеној, или покретној, или деформабилној линији или површини, или веза при обртању чврстог тела око утврђене тачке или осовине; час веза у хемиским реакцијама, која се састоји у пропорционалности између утрошених количина реагенаса и количина образованих продуката реакције; час квалитативна веза између варијација разноврсних елемената у корелативним биолошким, физиолошким или психолошким појавама, као што су везе оличене у рефлексном утицају нервног система на нутритивне и секретивне функције организма, везе при асоцијацијама идеја и т. д.

Улогом изазивача постаје, у појавама једне врсте, улога експлозије експлозивне смеше; у појавама друге врсте улога покрета којим се затвара електрично коло у механичким или хемиским појавама које тиме буду изазване, или улога светлости у извесним тренутним хемиским реакцијама, или улога слабих, ништавних мотива, који изазивају бурне изливе осећаја и т. д.

Координативна улога час је улога магнетног поља при оријентацији једнога система магнетних игала или гвоздених опиљака; час је улога координативне моћи при продукцији вољних аката; час је улога дисциплине у једној организованој друштвеној средини са нарочитим циљем и т. д.

Регулаторску улогу играју: час центрифугални регулатор при кретању парне махине, час крила при ротационом кретању извесних махинских делова, час регулатор на термостату, или Кипов апарат при продукцији гасова, или минералне соли при регулисању осмотичког притиска у организму, или гасни мехурићи на површини акватичких организама у појавама њихове респирације и т. д.

Улогом терена постаје, у појавама једне врсте, распоред масе или каквога другога скалара при распростирању једнога механичког, термичног, електричног, економског и т. д. стања; у појавама друге врсте опште стање једнога организма изложеног н. пр. деструктивној акцији бацила, или општа политичка ситуација у једној земљи, или опште расположење у једној епоси, или општи карактер једне личности, теренске прилике у борби, средина у којој се дешавају догађаји и т. д.

Улоге препрека играју: час материјалне везе које држе какво чврсто тело непомично, па ма какви били спољни узроци који теже да га покрену; час заклони при осветљењу једне површине, час изолатор уметнут у састав каквог електричног кола, час дувар једнога суда, који спречава додир и мешање два реагенса у каквој хемиској реакцији и т. д,

Свега тога шаренила нестаје кад су улоге, а са њима и сами механизми, *шематизирани* и доведени на облик објеката Математичке Феноменологије, у коме све, што игра какву улогу у појави, губи своје специфично конкретно значење и све што га везује за ову или ону специфичну конкретну појаву. У скици, *шеми* механизма појаве, остају само улоге описане на најгенералнији могућан начин и редуковане, у исто време, на своје најбитније карактерне црте, али које ипак морају бити довољно одређене да би се у њима могле сагледати слике појаве, или бар оних њених појединости што се буду имале у виду, као нужне последице такве једне комбинације и дистрибуције улога.

Неколико најпростијих случајева таквих комбинација и дистрибуција у механизмима појава дато је у неколико конкретних примера, који ће овде бити наведени.

1° **Механизми у појавама кретања или деформације маса.** То су они обични механизми, са којима оперише Динамика тачака или система (континуалних или дисконтинуалних, деформабилних или индеформабилних) и у којима

1° улоге дескриптивних елемената играју н. пр. компоненте транслаторних, ротационих или торсионих брзина, пређени путеви, описани углови, разноврсни геометриски елементи што дефинишу положаје или облике, масе и њихове брзине промена и т. д.;

2° улоге примењених тежња играју: компоненте механичких сила, активних или реактивних, импулсивних или депресивних, (н. пр. атрактивних или репулсивних, еластичних и т. д.), примењене н. пр. непосредно на компоненте брзина, или на елементе што дефинишу распоред маса;

3° улоге инертних тежња играју: механичка инерција при транслаторном кретању, центрифугална сила при ротацијама и т. д.;

4° улоге веза материјалне (геометриске или кинематичке) везе у систему, диференцијалне или изражене у коначном облику, билатералне или унилатералне.

На типове се исте врсте, са компликацијама које собом повлаче нарочите погодбе, везане за посматрану појаву и које се састоје у комбинацијама простијих механизама, своде и механизми разних других врста појава, које модерне теорије своде на појаве кретања материјалних делића или етра, или на деформацију континуалних средина.

Према н. пр. Maxwell-овој теорији, кретање електричне струје кроз жицу има се сматрати као нарочита моноциклична појава, у којој брзина промене цикличне координате расти упоредо са јачином струје, компонента спољних сила, непосредно примењена на мењање те јачине, расти упоредо са електро-моторном силом која се буде налазила у електричном колу. Циклично се кретање дешава делимично у етру, а делимично у материјалу проводника. Улоге координата са спорим варијацијама играју геометриски елементи што дефинишу положај и облик проводника. Механизам је појаве, тада, онај исти који се има у појавама моноцикличног кретања.

Према истој теорији, кретање електрицитета у систему, састављеном из две електричне струје, које се међу собом и саме собом индукују, има се сматрати као нарочита бициклична појава, са истом дистрибуцијом улога, као и у горе поменутој моноцикличној појави.

Узимајући, као што се то узима у кинетичној теорији гасова и механичкој теорији топлоте, да се бескрајно разноврсна кретања материјалних делића, при термичним променама у једноме телу, стапају у једно средње кретање, које има особине моноцикличних кретања, по Helmholtz-у се и термичне појаве имају сматрати као једна нарочита врста моноцикличних појава, у којој би улогу цикличне координате играла брзина поменутога средњег кретања делића (статистичка брзина), улоге координата са спорим варијацијама ма који елементи чије споре варијације буду пратиле убрзавање или успоравање тога средњег кретања (н. пр. геометриски елементи при ширењу тела).

Модерне хидродинамичке теорије, теорија деформација еластичних средина, електро-магнетна теорија светлости, теорија јона и т. д. своде масу разноврсних, тако механистички схваћених, појава на овакве, чисто динамичке, механизме и њихове међусобне комбинације.

2° **Механизми у електричним појавама.** И не улазећи у питање о суштини појединих електричних појава, водећи рачуна само о природи улога које у њима играју поједини фактори, без потребе да им се зна сама суштина и крајње механистичко значење, могу им се механизми схватити у облику, у коме су они обухваћени општим шемама Математичке Феноменологије: као скуп одређених дескриптивних елемената, који се мењају под утицајем једнога одређеног комплекса активних и реактивних узрока, а при одређеним квантитативним или квалитативним везама, тачно прецизираним другим улогама и т. д.

Тако, Ohm-ов закон, са законом ауто-индукције, своди појаву варијација једне електричне струје, у непокретном и индеформабилном електричном колу, у чијем се саставу налази какав електрични елеменат, на овај механизам: *дескриптивни се елеменат*, чију улогу игра јачина струје, са коефицијентом инерције, чију улогу игра коефицијенат ауто-индукције проводника), *мења акцијом једнога активног импулсивног узрока* (електро-моторне силе елемента) *и једнога реактивног узрока* (реактивне контра-електромоторне силе у проводнику), *који је увек, по смислу, супротан смислу свога непосредног објекта* (смислу струје).

Исти закони доводе и до механизма варијациј једнога система струја са међусобном и ауто-индукцијом, у једноме систему електричних кола са отпорима и електричним елементима који су у њиховом саставу: *систем се дескриптивних елемената* (јачин струја) *мења под утицајем једнога комплекса од тр врсте узрока: једних активних и импулсивних* (електро моторних сила елемената), *једних реактивних, који су, п смислу, увек супротни смислу струје, на чије су вари јације примењени* (реактивне контра-електромоторн силе у проводницима), *и једних, такође реактивних које произлазе од инерција у појави* (електромагнетн индуковане силе).

Механизам испражњавања електричних кондензатора карактерисан је оваквом комбинацијом и дистрибуцијом улога: *дескриптивни се елеменат* (јачина струј испражњавања) са коефицијентом инерције, чију улог игра коефицијенат ауто-индукције проводника, *мен акцијом једнога реактивног узрока, супротног, по смисл самоме своме непосредном објекту* (реактивна контра електро-моторна сила у проводнику), *и једнога, такођ реактивног, који је, по смислу, увек супротан тоталитет непосреднога објекта* (Coulomb-ова електро-моторна сил по смислу супротна електричном оптерећењу арматур у кондензатору).

Комбинација и дистрибуција улога при распрост рању електрицитета, у његовоме промењивом режим своди се на шему оваквога облика: *дескриптивни елеменат* (електрични потенцијал) *мења од тачке до тач* *посматранога поља, акцијом једне утицајне тежње што долази од тачака у непосредној близини посматране тачке и која је импулсивна или депресивна, према томе да ли дескриптивни елеменат у овој тачки има мању или већу вредност но у непосредној околини те тачке* (улогу тога узрока игра електрични флукс у посматраној тачки поља).

Према Van t'Hoff-овој и Arrhenius-овој теорији електролитичног растварања, механизам функционисања електричних елемената састоји се у оваквој простој комбинацији улога: *дескриптивни се елеменат* (број растворених јона) *мења симултаном акцијом двају непосредних узрока: једнога импулсивног* (електролитична моћ растварања, са тежњом да увуче што већи број јона у раствор), *и једнога депресивног* (осмотични притисак металних јона, који спречава то растварање). Смисао н. пр. наелектрисавања метала и раствора зависи непосредно од тога, који је од та два узрока јачи: кад је импулсивни јачи од депресивног, метал је наелектрисан негативно, а раствор позитивно; кад је први слабији од другога, биће обрнуто. Разлика потенцијала на површини једне електроде зависи, такође, од релативних величина та два узрока; кад је први јачи, она је позитивна и расте упоредо са јачањем првога и са слабљењем другога узрока; кад је други јачи, биће обрнуто[1].

3° **Механизам фотохемиске акције светлости на осетљиву плочу**[2]. Осцилаторан карактер црњења, као ефекта те акције, са врло интензивном амортизацијом осцилација, која чини да појава врло брзо улази у свој перманентни режим, карактерисан једним, од тада сталним, степеном црњења, Sagnac своди на један механизам

---

[1] Max Le Blanc: Les idées nouvelles sur la théorie des piles (Révue générale des sciences pures et appliqueés 1899, p. 725).

[2] в. дескрипцију појаве на стр. 511—512.

са оваквом комбинацијом и дистрибуцијом улога и који даје једну од могућних експликација појаве: *варијације дескриптивног елемента* (чију улогу игра степен црнила, или количина редуковане соли на плочи) *што резултују из симултане акције два међу собом антагонистичка узрока: једнога импулсивног, сталног по јачини и смислу, и једнога реактивног, депресивног, који се јавља, не у тренутку кад импулсивни узрок отпочне своју акцију, већ са извесним задоцнењем, које се, за тим, непрестано провлачи кроз цели ток појаве као стално задоцнење у варијацијама јачине тога депресивног узрока.* Улогу првога узрока играла би директна и стална тежња, везана за акцију светлосних зракова, да, редукујући сребрну со, појачава црнило; та директна акција изазива, после некога времена, у редукованоме слогу једну реактивну акцију, која игра улогу депресивнога узрока изазивајући инверсну модификацију осетљивог слоја, мењајући се, при том, и сама тако, да је јачина те депресивне тежње пропорционална величини ефекта директне акције, али онаквог какав је био у једном извесном тренутку пре тога.

4° **Механизам варијација хлорних састојака при гастричноме хемизму**[1]). По Winter-у тај се механизам, у својим главним цртама, своди на комбинацију улога којој се може дати овај облик: *дескриптивни се елементи* (количине хлора у анорганским продуктима хемизма, у образованој хлороводоничној киселини и у органским хлорним једињењима, рачунате на 100^{cc} гастричног сока) *мењају симултаном акцијом два, један другоме антаго-*

---

[1]) в. дескрипцију појаве на стр. 83—86.

[2]) J. Winter: De l'évolution des fonctions de l'estomac (C. R. de l'Acad. des Sciences t. 115. 1892. p. 1328).
Lois de l'évolution des fonctions digestives (C. R. de l'Acad. des Sciences t. 117. 1893. p. 65).
Lois de l'évolution de la digestion (C. R. de l'Acad. des Sciences t. 117. 1893. p. 179).

нистична, узрока, од којих један, и то импулсиван, постепено слаби, а други, депресиван постепено јача у току појаве, са напрасном интервенцијом једнога трећег узрока, који се јавља у једноме одређеном тренутку пошто је појава већ неко време пре тога трајала, и који је карактерисан тежњом да убрза јачање депресивнога узрока. Улогу импулсивнога узрока у таквоме механизму игра осмотични напон, који се јавља услед напонске разлике желудачних течности са једне стране и крвне и ћелиске плазме са друге стране; улогу депресивнога узрока игра извесна врста отпора дифузији ћелиских и крвних састојака; улогу напраснога узрока игра, опет, једна врста отпора, изазваног самим гастричким хемизмом у току процеса.

5° **Механизам формације и коагулације колоида.** Кад се у какав алкални раствор кане једна кап уља и смеша добро промућка, уље се растури по раствору у облику безбројних сићушних, једна од друге изолованих капљица, образујући једну емулсију. Величина се тих капљица може смањивати до те мере, да се емулсија претвори у колоид. У таквој фази појаве, поред кохезионих сила које су веома јаке, пошто су међусобна растојања капљице веома мала, капљице, ипак, остају изоловане једна од друге и понашају се као самосталне јединке. Међу тим, често какав напрасан, тренутан узрок (п. пр. електрично испражњавање) учини да се такав колоид нагло, у тренутку, стапањем капљица, коагулише.

J. Perrin своди експликацију појаве на један механизам коме се може дати овакав облик: *узајамно контра-балансирање два међу собом антагонистична узрока, једнога импулсивнога* C_1 *и једнога депресивног* C_2, *зависних, по јачини, од величине тоталитета и при чему се депресивни узрок може мењати дисконтинуално, са* *напрасним падом, који има за последицу наглу варијацију ефекта у смислу импулсивнога узрока.*

На име, капљице уља, растурене по алкалној течности, електришу се додиром са течношћу и све у једноме истом смислу, услед чега се међу њима јавља репулсивна електрична сила (депресиван узрок C_2). Ова је сила контра-балансирана кохезионом силом (импулсиван узрок C_1) међу капљицама, која се јавља кад су ове врло блиске једна другој, која је атрактивна и зависи, као и она прва, од међусобних растојања капљица (која играју улогу тоталитета ефекта). Појава је ушла у стационарно стање од тренутка кад су та растојања тачно толика, колика би била потребна да би се те две силе држале међусобно у равнотежи. Али, ако се, на који било начин, капљице напрасно ослободе за њих везаног електрицитета (напрасни пад депресивнога узрока), атрактивна кохезиона сила, оставши некомпензована, извршује, у тренутку, своју акцију, стапајући међу собом капљице и изазивајући коагулацију колоида[1]).

То је, у осталом, и принцип једнога начина вештачког растурања магле. Ова није ништа друго до један нарочити колоид, састављен из сићушних капљица, растурених по ваздуху, у коме остају одвојене једна од друге акцијом репулсивне силе што произлази од њихове електризације у једноме истоме смислу. Ако се у атмосфери изврши напрасно испражњавање електрицитета супротног смисла ономе, кога је електрицитет везан за капљице, ове се изложене, тада' акцији само кохезионих сила, у тренутку згушњавају у крупне кишне капи, остављајући атмосферу чисту и провидну.

---

[1]) J. Perrin: Mécanisme de l'éléctrisation de contact et solutions colloides (Journal de Physique, Jan. 1905).

6° **Механизам периодичности мирисних** еманација **у биљкама.** Јачина се мирисних еманација код биљака, чији цвет испушта мирис, мења периодички, пролазећи наизменце кроз максимуме и минимуме који одговарају наизменичности дана и ноћи. Констатовано је да те еманације појачава влага, а да их слаби утицај сунчане светлости. Начин, на који Mesnard[1], на основу тога, експлицира појединости појаве, своди се на један прост механизам овакве врсте: *симултана акција два периодична, међу собом антагонистична, узрока*. Улогу импулсивног узрока игра тежња, везана за влагу, да појачава ослобођавање мирисних састојака у цветним ћелијама, помажући, у исто време, и избацивање таквих материја из епидерме цвета. Улогу депресивнога узрока игра тежња, која карактерише акцију сунчане светлости, да паралише такав утицај влаге, са једне стране својом хемиском акцијом, којом олакшава трансформације мирисних састојака, а са друге стране својим механичким утицајем, којим слаби притисак у цветним ћелијама. Оба су узрока периодична, растући и слабећи, наизменце, са појавом дана и ноћи.

7° **Механизми органских ондулација.** Запажено је да се срчани мишић не понаша подједнако према електричним надражајима једне исте јачине: у извесним тренуцима ти су надражаји врло осетни, у другима потпуно неосетни, са свима градуацијама између тих екстрема, и то тако, да надражљивост зависи од величине размака времена који је протекао од последњег надражаја до онога који се посматра. На име, Marey је запазио ове појединости такве појаве: кад је надражај извршен у једноме тренутку врло блиском ономе, у коме срце почиње једну од својих нормалних кон-

---

[1] E. Mesnard: Sur l'action de la lumière et de l'eau dans le dégagement du parfum des plantes (C. R. de l'Acad. des Sciences t. 122. 1896. p. 491).

тракција, јачина је контракција, у први мах, у толико већа, у колико је тренутак надражаја даљи од почетка нормалне контракције; кад се ексцитирање буде вршило у разним тренуцима, рачунајући од почетка једне нормалне контракције, надражљивост, мерена величином контракције коју је у стању да изазове у датоме тренутку један исти надражај, показује извесан ритмички карактер, пролазећи, редом, кроз све фазе, почевши од фазе неосетљивости (Marey-ева рефракторна периода надражљивости), до фазе максималне осетљивости. Такве се ритмичке варијације огледају и у величини размака времена, који протиче између тренутка кад је извршен надражај, и тренутка у коме почиње контракција (изгубљено време): овај, кад је електрични надражај врло близак почетку нормалне контракције, има једну своју максималну вредност и смањује се у мери у којој се тренутак надражаја удаљује од тога почетно тренутка, пролазећи кроз један минимум, растући од тад опет до једне максималне вредности, опадајући до једног минимума и т. д. Срчани је, дакле, мишић карактерисан не само ритмичким функционисањем, већ и ритмичком надражљивошћу.

Једна од експликација појаве садржана је у ова воме једном механизму: један интензиван, тренута узрок C_1 својим импулсом изведе дати систем из ње говог стационарног стања *(S)*, у које се он, остављe сам себи, враћа једним дужим или краћим низом амо тизираних осцилација. У једноме тренутку θ, у то тог враћања у стационарно стање, јавља се, опет н прасно, исти тренутни узрок C_1, пертурбирајући но мално враћање у стање *(S)*. Према тренутку θ, т. према томе да ли је у томе тренутку смисао вари ција његовог непосреднога објекта *(o)* онај исти, ко је и његов импулс, или су супротног смисла, узр ће имати за ефекат нагло удаљавање система од ста

(S) или напрасно слаблење тога удаљавања, тако, да ова постају и неосетна. То би се исто понављало и са интермитентним низом импулса, који би узастопце извршивао тренутан узрок C_1. Шема би, механизма била дакле сведена на овај тип: *акција једнога дисконтинуалног низа међу собом једнаких, интермитентних, интензивних, тренутних узрока на један објекат који, чим акције таквога једног узрока престане, тежи да се врати у своје стационарно стање једним низом амортизираних осцилација.*

Улоге тренутних узрока играли би надражаји мишића; улогу удалења од стационарног стања (нормалног стања мишића), које се има сматрати као тоталитет непосредног објекта тих узрока, игра позитивна или негативна величина контракције мишића; улогу непосредног објекта брзина контракције. Надражљивост мишића (мерена величином контракције) биће већа или мања, или и сведена на нулу (као што је за време рефракторне периоде), према тренутку θ у коме се врши надражај, на име, према томе, да ли је у томе тренутку брзина контракције мишића истога смисла као и она кога је и импулс надражаја, или су супротног смисла.

Кад би, у горњем механизму, импулси, везани за поједине узастопне надражаје, били међу собом неједнаки, дијаграм би надражљивости у разним тренутцима између тих надражаја имао најразличније облике, према релативним величинама и смислу тих надражаја. У специјалним случајевима, кад би ти импулси били увек супротног смисла брзини контракције у тренутку у коме се они врше, а по својој апсолутној вредности у толико јачи, у колико је та брзина јача, дијаграми би се надражљивости, у размацима времена између надражаја, свели на криве линије са врло малим бројем и врло јаким амортизирањем осцилација: кад би импулси били подесно одмерени према контракцијама, такав би се дијаграм свео на криву са само једном осцилацијом, која се одмах за тим неосетно разликује од осовине вредности времена.

Према испитивањима, која су вршили Richet и Broca, о надражљивости нервнога центра (мереној, такође, њоме изазваним позитивним и негативним контракцијама), у дијаграмима те надражљивости има се овај последњи случај: надражљивост у једноме датом тренутку θ зависи од размака времена који је протекао од ранијега надражаја до тренутка θ и то на начин, представљен дијаграмом облика (сл. 37), где је надражљивост е представљена као функција времена θ. Експликација се појаве може имати у механизму наведеног облика: *акција једнога дисконтинуалног, ритмичког низа тренутних, по смислу и јачини неједнаких узрока* $C_1, C_2, C_3 \cdots$ *на какав систем који би се, остављен сам себи, једним низом амортизираних осцилација, изазваних једним ранијим импулсом, враћао у своје нормално, стационарно стање, и кад је, при томе, сваки доцнији импулс, везан за узроке* $C_1, C_2, C_3 \cdots$ *супротног смисла непосредноме објекту своје акције а по апсолутној вредности у толико јачи, у колико је овај по вредности већи.*

Сл. 35.

То је, одиста, механизам на који се своди експликација појаве у облику у коме су је дали Richet и Broca. Према овим испитивачима, кад се у нервноме центру деси какав надражај, овај изазива, у исто време, извесним физиолошким процесом, један реактиван импулс, супротног смисла првоме, који се противи модификацијама што их овај тежи да изазове и који је у толико јачи, у колико у томе тренутку буде већа надражљивост. Сваки би, од таквих реактивних импулса, играо улогу једнога од тренутних узрока C_1, C_2, $C_3 \cdots$ предвиђених горњом шемом. Њихову егзистенцију чини, у осталом, врло вероватном и појава „мишићног звука“, коју је раније констатовао Helmholtz: кад се тетанизира какав мишић електричном струјом, са прекидима произведеним вибрацијама једнога дијапазона, може се, пажљивим слушањем, чути у мишићу исти звук који издаје и дијапазон, што показује да се у мишићу врше наизменичне контракције и истезања акордирана са узроком који их је произвео. Међу тим, кад се мишић тетанизира вољним актом, у њему се и тада може разликовати извесан звук, за који је Helmholtz нашао да има за периоду вибрација $\frac{1}{20}$ секунде. Кад се тај факт приближи ономе при вештачком тетанизирању мишића електричним импулсима, оправдан је закључак, да узрок мишићним ондулацијама, при вољном тетанизирању треба тражити у церебралним импулсима са периодом од $\frac{1}{20}$ секунде, а што, у исто време, чини вероватном и ефективну егзистенцију горе наведених, реактивних, тренутних узрока C_1, C_2, $C_3 \cdots$.

Од интереса је и физиолошка улога коју Richet и Broca придају овим реактивним импулсима при продукцији вољних аката.

Та се улога састоји у томе, да сведу на што мању меру размак времена потребан ондулацијама, изазваним једним импулсом при каквоме вољном акту, да се амортизирају до мере у којој ће постати неосетне, и да, на тај начин, припреме терен акцији новога вољног импулса, како би ова била што одређенија, без пертурбација унесених већ постојећим ондулацијама од ранијега вољног импулса, и то у што краћем размаку времена после овога. Улога је, по својој феноменолошкој природи, идентична са улогом тренутних, променљивих и по смислу и по јачини, електро-моторних сила, које, по методи Lord Kelvin-a, треба пуштати у подморски кабл при трансмисији сигнала, да би ова била што рационалнија и што економичнија, т. ј. да би се кабл после једнога трансмитованог сигнала, што пре довео у своје нормално, неутрално стање, у коме би био спреман за трансмисију новога сигнала. Она је идентична и са улогом импулса, који, у разним моментима за време лагано амортизираних осцилација балистичног галванометра, треба придавати овоме, да би се овај у што краћем времену после тога првобитног датог му електричног импулса, чија се јачина имала мерити, довео у своје равнотежно стање и тиме учинио спремним за примање и мерење нових електричних импулса. Експеримент, шта више, показује да је периода поменутих ритмичких, реактивних физиолошких импулса у толико *краћа*, у колико је вољни акт *енергичнији*, што је такође у сагласности са појединостима које се предвиђају из горње шеме механизма[1]).

Слични механизми дају експликацију и великога броја других органских ондулација, као што су н. пр.

1° нервне ондулације при екситирању нерава, које је проучио Charpentier и које се састоје у томе, што нервна надражљивост, у размаку времена између два узастопна надражаја, пролази кроз максимум и кроз рефракторну периоду, на начин сличан ономе, горе наведеном, при екситирању срчаног мишића. Механизам би био исте врсте као и у овој последњој појави.

---

[1]) A. Broca: Les transformations de l'énergie dans l'organisme (Rapports présentés au Congrès international de Physique, Paris 1900. t. III p. 495—522)

2° ондулације у ретини при светлосним надражајима, које је констатовао и проучио Charpentier. Светлосни знаци изазивају у ретини извесне реактивне отпоре, позитивне или негативне, који се јављају не само у тренуцима кад зрак падне на ретину, или га нестане, већ и ма каквој напрасној промени, у позитивном или негативном смислу, светлосних надражаја на ретини. Те отпоре, који су увек по смислу супротни директној акцији светлости, и у толико јачи, у колико је ова енергичнија, Charpentier приписује једној врсти електричне индукције у нервном систему, на шта указује и сама структура нерава и закон варијације тих отпора, који је истога облика као и Lenz-ов закон индукције. Егзистенцију и феноменолошку улогу таквих отпора истиче, у осталом, непосредно на видик Charpentier-ов експеримент (expérience de la bande noire), при коме се један кружни сектор, јако осветљен белом светлошћу пред црним заклоном, окреће, умереном брзином и гледа се у једноме сталном правцу, не крећући при томе око: на сектору се, тада, јављају једна, две или три тамне пруге, које такође имају облик сектора, на једнаким угловним одстојањима једна од друге и чије величине опадају по њиховом бројном реду. Пруге су последица симултане акције директних светлосних импулса на ретину, и реактивних импулса о којима је горе била реч[1]).

На механизме се сличних облика своди и маса других, физиолошких, физичких, хемиских и т. д., појава, као што су н. пр. оне што се састоје у моле-

---

[1]) A. Charpentier: Oscillations rétiniennes (C. R. de l'Acad. des Sciences t. 113. 1891. p. 147).
Oscillations rétiniennes consécutives à l'impression lumineuse (C. R. de l'Acad. des Sciences t. 122. 1896. p. 87).
Nouvelle forme de réaction négative sur la rétine (C. R. de l'Acad. des Sciences t. 122. 1896. p. 207).

куларним модификацијама, произведеним енергичним импулсима ма какве конкретне природе и тежње да се систем, објекат акције импулса, врати у своје првобитно, нормално стање[1]).

8° **Механизам одбране организма против акције микроба.** У борби организма против акције патогених микроба главну улогу играју извесне хуморалне особине, које постоје још пре морбидног напада, а развијају се нарочито у току овога, заостајући још дуго после њега. Међу овим особинама има их које су неповољне за живот, или кретање, или лучење микроба и које састављају скуп бактерицидних особина. Овима се, у одбрани организма, придружују још и антитоксичне особине крвног серума, које, и ако остају без акције на саме микробе, помажу ипак организам у његовој одбрани против њихових отрова. Све што има утицаја, нарочито трајнијег, на нутритивни активитет ћелија, у стању је да мења хемиски састав сокова, а тиме самим и њихове бактерицидне и антитоксичне особине, утичући тиме на рецептивитет или отпор организма наспрам болести, као и на трајање и озбиљност ње саме. А пошто мењање састава сокова има, у исто време, и непосредног утицаја на сам активитет микроба, њихово кретање, лучење и т. д. то се за механизам утицаја једнога, ма каквог, спољњег или унутарњег узрока *C* (утицај каквога лека, спољних прилика, режима храњења и т. д.) на ток болести има шема са оваквом комбинацијом улога: *узрок C врши двогубу акцију, једну на непосредни активни узрок* (на активитет микроба) *и другу на деиресивни узрок* (на бактерицидне и антитоксичне особине сокова, на отпор ор-

---

[1]) в. за такве случајеве расправу J. Ch. Bose: De la généralité des phénomènes moléculaires produits par l'éléctricité sur la matière inorganique et sur la matière vivante (Rapports présentés au Congrès international de Physique, Paris 1900. t. III. p. 560—585).

ганизма); *обе се акције међу собом комбинују на начин наведен на стр. 576.*

9° **Механизам нормалних и патолошких појава при продукцији вољних аката.** Према теорији Ribot-a[1]), механизму се продукције вољних аката може дати облик овакве једне комбинације улога: *један комплекс импулсивних, и један комплекс депресивних, дисконтинуалних узрока, чија је акција регулисана једним фактором са одређеном координативном улогом, а врши се у једноме скупу прилика који при тој акцији игра теренску улогу.*

Улоге импулсивних узрока играју импулсивне моторне тежње, везане, у опште, за свако стање свести, за сваки осећај, за сваку идеју и које би, ничим некомпензоване, незадржане, чиниле да стање свести одмах пређе у акт. Тежња је јача или слабија, у колико је јача афективна страна тога стања, од најинтензивнијих тежња, везаних за јаке емоције, страсти које у тренутку, брзо и брутално као код рефлекса, изазивају акт, до неосетних тежња, везаних за апстрактне идеје, где су оне сведене на свој минимум.

Улоге депресивних узрока играју депресивне, активне или реактивне тежње, везане за извесна афективна стања која су, најчешће, изазвана самим импулсивним узроцима, и које се, јаче или слабије, противе акцији импулсивних тежња. И јачина тих депресивних узрока јако варира од једног до другог афективног стања за који су везани, од интензивне депресије која паралише сваку акцију (страх, ужас) до минималнога, једва осетног, отпора који само у неколико умерава акцију импулсивних тежња.

Координативну улогу игра моћ индивидуе да своја акта координира међу собом, да их управи у одређеном правцу, да их субординира одређеном циљу,

---

[1]) Th. Ribot: Les maladies de la volonté (Paris, 4-me ed. 1887).

и да им, у потребној мери, према циљу, регулише јачину и смисао.

Улогу терена игра општи карактер личности, резултат бескрајнога броја унутарњих узрока, психолошки израз организма, колективни израз непрегледнога броја стања и тежња, који као колективитет олакшавају или отежавају акцију једнога истога импулсивног или депресивног узрока, чинећи га осетнијем или неосетнијем, чинећи, код једне индивидуе, преподерантним какав активни или реактивни узрок, једва осетан за другу личност, маскирајући или чинећи немогућним кадшто и најинтензивније импулсе.

Продукција је аката (вољна акција), као последица тако распоређених улога, *нормална* кад релативне јачине импулсивних или депресивних узрока варирају у извесним, одређеним, границама, у којима се оне, у одређеним случајевима, крећу код нормалних индивидуа; кад је, поред тога, координативна подобност индивидуе довољно развијена, а терен акције није такве природе да ту акцију чини немогућном или је слаби до мере која карактерише неактивност.

Кад све те погодбе скупа нису задовољене, вољна акција улази у *патолошку фазу: механизам је тада карактерисан одређеним аномалијама импулсивних или депресивних узрока, или теренске, или координативне улоге*, и има за последице одређене типове аномалија у самој продукцији аката, као што су н. пр. ове:

1° кад је код индивидуе ослабљена н. пр. осетљивост (*аномалија теренске улоге*, што у већини случајева долази од једне опште депресије виталних функција), акција је импулсивних и депресивних узрока ослабљена кадшто у толикој мери, да међу њима и нема борбе и да се резултат своди на неактивност, индоленцију, а у крајњим случајевима на општу непокретљивост, при којој стања свести никако не доводе до аката.

2° кад су импулсивни елементи сувише интензивни или сувише нагли, неодољиви (*аномалије импулсивних узрока*), акт се остварује одмах, брутално, и има карактер аутоматског, рефлексног акта, без претходне борбе импулсивних и депресивних узрока, или са борбом која се брзо свршава у корист таквих неодољивих импулсивних узрока;

3° кад су депресивни узроци сувише интензивни (*аномалије депресивних узрока*), као што је н. пр. случај великог страха), тако да их импулсивни узроци не могу савладати, наступа неактивност, при којој стања свести не доводе до акта. Томе се обично придружују и аномалије самога терена: општа реактивна немоћ индивидуе, која обележава слабост карактера или дефекат виталних функција и која, каткад, придружена сувише интензивном депресивноме узроку, доводи и до потпуног уништења вољне акције;

4° дешава се да је састав вољног механизма у свему осталом нормалан, али да *аномалија координативне улоге*, спречава нормалну вољну акцију. На име, дешава се да су и импулсивни и депресивни елементи нормални и у нормалним пропорцијама, али да им недостаје међусобне координације и субординације, која чини да импулси конвергирају према одређеноме циљу, која задржава и регулише импулсивне или депресивне тежње, а које би, без ње, могле сувише ојачати, и т. д. Сваки узрок делује, тада, сам, на свој начин, у своме правцу; у општем нереду тежње, које побеђују, јесу најчешће бруталне тежње, трагови инстиката, које, као најјаче, најобузданије, дају дефинитиван карактер резултујућем акту. Једна је варијанта таквих случајева она, на коју се наилази у ћудљивости или хистерији, са том разликом што, тада, тежње које преовлађују, могу бити извесне импулсивне или депресивне тежње вишега ранга. Активност је индивидуе врло променљива, мобилна, нестабилна, напрасна, са наглим скоковима при своме јављању, нестанку или варијацијама. Слабост или осуство координативне, регулаторске моћи чини да су акти недисциплиновани, несређени, као и сама стања свести што их изазивају.

* * *

ДРУГА ГЛАВА

ВАРИЈАЦИЈЕ АКТИВИТЕТА У МЕХАНИЗМИМА ПОЈАВА.

Проблем одредбе начина варијација активитета у разним конкретним појавама.

Квантитативни закони варијација активитета. — Очевидни закони. — Емпирички и експериментални закони. — Аналитички изведени закони. — Хипотетични закони верификовани својим последицама.

Квалитативне појединости варијација активитета.

Реципроцитет између начина варијација активитета и појединости манифестације појаве.

Активитети, везани за поједине улоге, које импозирају промене пасивним елементима појаве, могу се у току ове мењати на бескрајно разноврсне начине. У тим начинима оличен је, у великоме броју случајева, какав универсалан, перманентан природни закон, по коме се конкретни фактор, на који се односи такав начин варијација, увек и у свима приликама, у којима он интервенише у механизму какве појаве, мења по томе истом закону; такав је н. пр. случај универсалне атрактивне силе међу делићима, материје, пропорционалне масама, а обрнуто пропорционалне квадрату растојања. У другим случајевима такав је начин варијација специфичан, везан за специфични случај и нарочите прилике са којима се има посла.

Проблем варијација јачина појединих активитета у једној одређеној, конкретној, појави решава се на начин који се мења са природом случаја; проблеми те врсте не припадају општим теоријама што састављају Математичку Феноменологију, и које претпостављају да су они, на који било начин, већ решени. Они су, у осталом, у маси случајева, или потпуно решљиви, тачно или са потребном апроксимацијом, или се бар о њима може имати квалитативних индикација, довољних да би се појединости појаве, које се буду имале у виду, могле схватити као њихове последице.

Такав је, пре свега, случај свих механичких појава, у којима се активне улоге приписују одређеним активним и реактивним, импулсивним и депресивним силама, чији активитети варирају у току кретања или деформације, било као експлицитне и познате функције времена, било као одређене функције карактеристичних елемената при кретању, као што су: координате тачака, пређени пут, брзина или поједине њене компоненте, растојање између тачака и т. д.

Такав је, такође, случај и у непрегледној маси физичких појава, како оних, у којима се, схватајући их механистички, наилази на механичке, активне и реактивне, импулсивне и депресивне силе са познатим законима варијација (атрактивне или репулсивне, еластичне силе), тако и оних у којима се, без таквих механистичких експликација, разноврсни фиктивни узроци, који се означавају као моћи, подобности, реакције, утицаји и т. д. без познавања њихове интимне природе, асимилирају другим каквим, по активитету сличним, али тачније познатим узроцима.

У хемиским се појавама јављају комплекси континуалних и дисконтинуалних узрока, од којих су неки познати и квантитативно, по своме прецизном или апроксимативном закону варијација у току појаве, док су други само овлашно познати по смислу своје акције, по начину утицаја на одређене факторе у појави, по квалитативним појединостима њихових варијација у току ове, по утицају других, секундарних, узрока на њихов активитет и т. д.

У физиолошким и психолошким појавама, за велики број активитета постоје и методе за практично мерење њихових јачина и за проучавање начина на који они јачају или слабе при одређеним променама прилика. У медицинским се случајевима води рачуна о апсолутним или релативним јачинама активитета појединих терапетичких средстава, о начину на који се ови мењају према разним комбинацијама прилика и разним дозама у којима су употребљени, о начинима за њихово појачавање или парализање, о њиховим међусобним утицајима и т. д.

Података се о активитетима узрока има и у бескрајно разноврсним појавама осталих наука, па чак и у случајевима кад је појава резултат и веома великог броја непознатих, по својој акцији неправилних, по својој интервенцији случајних, континуалних или напрасних узрока, који механизму резултујуће појаве дају тип, сам по себи, и по непознавању елемената што га састављају, неприступан предвиђањима Математичке Феноменологије. Дешава се н. пр. да се у таквоме комплексу узрока нађе по један или више преовлађујућих узрока, чији је утицај знатно претежан међу свима осталима, којима се има приписати главни карактер и тип посматране појаве, према којима се губи остала маса ситнијих, по утицају незнатнијих узрока са својим ситнушним пертурбацијама што их уносе у ток појаве, онакав, какав би овај био као резултат акције само тих претежних узрока. За такве су узроке везани одређени предоминирајући активитети, којима је у маси случајева могућно схватити законе варијација, или имати о њима довољно квалитативних индикација за предвиђање појединости које би се њима имале приписати у току појаве. Такав би н. пр. случај био са привлачним силама сунца и месеца у појавама плиме и осеке, од којих зависи битни део појаве; локалне и случајне прилике, као што су: конфигурација месног морског дна, јачина стешњености воде сувом земљом, правац ветрова и т. д. играју само споредније улоге и могу се занемарити, а да тиме битни карактор појаве не буде измењен. Такав би случај био и са великим доминирајућим узроцима у маси биолошких и социолошких појава, у којима је број сићушних, случајних, неправилних узрока веома велики, а међутим ови не делају сви у једноме истом правцу нити каква нарочита околност чини да пертурбације, које оне уносе у појаву, имају све један нарочити смисао. За пертурбације, унесене таквом масом непознатих узрока, важи, тада, познати закон вероватноће, што важи и за случајне, мале, грешке при мерењима: оне су подједнако вероватне и у позитивном и у негативном смислу, и кад су у великоме броју, саме се међу собом у знатној мери потиру, и то у толико потпуније у колико су многобројније. Колективни ктивитет целога комплекса своди се, бар у првоја апроксимацији, и у колико се тиче битних карактера и појединости појаве,. на збир активитета само великих, доминирајућих узрока, о чијим је законима варијација врло често могућно имати довољно одређених података.

Идеју о облицима закона и квалитативних појединости варијација активитета у разним природним појавама, као и о начинима на које се, у најчешћим случајевима, долази до њиховог сазнавања, довољног бар за прву апроксимацију, даће овде наведени конкретни случајеви те врсте.

А. Квантитативни закони варијација активитета.

I. Очевидни закони.

У појединим случајевима закон је варијације уоченог активитета сам по себи очевидан и његово сазнавање не тражи никаквих нарочитих истраживања.

Тако, јачина колективног активитета једног комплекса међу собом једнаких носилаца активитета пропорционална је броју таквих носилаца и мења се онако, како се тај број буде мењао. Електромоторна сила једне електричне батерије пропорционална је броју у њој уједињених елемената; деструктивна моћ једне групе бацила, исте врсте, пропорционална је самоме броју бацила; јачина трансформаторске тежње, која у мономолекуларним хемиским реакцијама регулише брзину реакције, пропорционална је заосталој количини тела које се хемиски трансформише; какав колективни активитет једнога хомогеног социјалног комплекса пропорционалан је, по јачини, броју индивидуа што састављају комплекс; репродуктивна и експанзивна тежња једне хомогене популације мењају се упоредо са бројним стањем становништва и т. д. Сви се ти бројеви могу, у току појаве, мењати на најразличније начине, чему ће одговарати и разноврсни начини варијација одговарајућих активитета. У извесним је појавама н. пр. број носилаца узрока непроменљив, или је са независним варијацијама, којима су тада одређене варијације и њиховог колективног активитета. У другим случајевима број таквих носилаца постаје поступно све мањи, у мери у којој узрок врши своју акцију; тада у истој мери слаби и сам активитет узрока за време трајања појаве.

На овај се последњи случај наилази н. пр. при прогресивној деструктивној акцији бацила, који би се затирали у мери у којој деструкција напредује. Колективни је деструктивни активитет, у свакоме тренутку, пропорционалан броју активних бацила у томе тренутку; са друге стране, тај број опада у колико је деструкција ближа своме крају. У појави би се, дакле, имало посла са једним активним узроком чија се јачина мења пропорционално произведеном ефекту, т. ј. величини његовога непосреднога објекта.

Исти је случај и са колективном трансформаторском тежњом у каквој мономолекуларној хемиској реакцији, која је у толико слабија, у колико је реакција ближа крају, и у сваком је тренутку пропорционална заосталој количини хемиски активног тела.

Колективни се активитет једне групе бацила може, у осталом, мењати и по другим законима, остајући непрестано пропорционалан њиховоме бројном стању. Он може бити појачан, ослабљен, или потпуно неутралисан активитетом друге какве врсте бацила; начин њиховога множења и специфички коефицијенти при њиховој акцији одређују начин на који ће се колективни активитет мењати у току појаве. Тако, кад се бацили множе дељењем, па, дакле, по геометриској прогресији, њихов ће се активитет X, у току појаве, мењати по закону облика

$$X = \lambda m e^{kt}$$

где m означује број бацила у почетку појаве, λ извесан коефицијенат који представља специфични активитет уочене врсте бацила, у приликама у којима они, у датоме случају, врше своју акцију; напослетку, k означује један коефицијенат чија величина дефинише специфичну репродуктивну моћ исте врсте бацила.

У случају комплекса, састављеног од неколико врста бацила, карактерисаних специфичким коефицијентима

$$\lambda_1, \ \lambda_2, \ \lambda_3 \cdots$$
$$k_1, \ k_2, \ k_3 \cdots$$

и њиховим почетним бројним стањима

$$m_1,\ m_2,\ m_3 \cdots$$

колективни ће се активитет X мењати по закону облика

$$X = \lambda_1\, m_1\, e^{k_1 t} + \lambda_2\, m_2\, e^{\lambda_2 t} + \lambda_3\, m_3\, e^{\lambda_3 t} + \cdots$$

и биће импулсивног или депресивног карактера, према релативним величинама коефицијената m_i, k_i, λ_i и знацима ових последњих, који су, за поједине врсте бацила, одређене тиме, да ли им је акција, према њиховоме непосредном објекту, импулсивна или депресивна. У свакоме од тих случајева у појави се има посла са узроцима карактерисаним независним варијацијама, које се врше по линеарним комбинацијама експоненцијалних закона.

Као пример друге врсте очевидних закона варијације активитета, нека је наведен закон једне врсте централних активитета, обрнуто пропорционалних квадрату одстојања посматране тачке простора од центра активитета. Такав је случај активитета светлосних или термичних радијација, звука, мириса и т. д., који се, полазећи од изворне, централне тачке, из које се радиално распростиру, разређују у току распростирања тако, да им је јачина, за јединицу површине управне на правцу простирања, а на одстојању r, обрнуто пропорционална површини кугле полупречника r, па, дакле, обрнуто пропорционална квадрату одстојања.

II. Емпирични и експериментални закони.

Велики се број закона активитета добија као непосредан израз запажених факата, експерименталних резултата и емпиричких бројних података о њиховим варијацијама, или се из ових изводе као њихове непосредне или аналитичке последице. Такве су врсте активитети н. пр. ових узрока:

I. тежа у непосредној близини површине земље, за коју најпростији експеримент (вертикално падање тела са мале висине, без почетне брзине, или бројање осцилација простога клатна у јединици времена) показује да је управљена вертикално на ниже, да је за једно исто место на површини земље по јачини *стална*, имајући н. пр. за Париз вредност 9,808 m, где је m маса тела, и мењајући се од места до места са латитудом и алтитудом.

II. отпор трења при клизању покретног тела по утврђеној површини, за који је Coulomb експериментом нашао ове прве апроксимативне законе варијација: отпор се има асимилирати једној тангенцијалној сили на површини, по којој тело клизи, управљеној у смислу супротном ономе у коме се врши кретање; та сила зависи од физичке природе површина што се при томе додирују, независна је од пространства тих површина и од брзине клизања, а по јачини је пропорционална међусобном притиску површина у правцу нормале. Коефицијенат те пропорционалности (коефицијенат трења) за разне супстанце одређен је експериментима. Новија истраживања, међутим, истакла су на видик недовољност такве, прве апроксимације[1]. Његова је н. пр. јачина, у опште функција брзине, која се, за поједине супстанце, може одредити емпирички.

III. отпор средине при транслаторном, или ротационом кретању чврстих тела, који је, за једну исту површину, изложену његовој акцији, функција $f(v)$ транслаторне или ротационе брзине тела. Експеримент показује, да се за довољно мале брзине може узети приближно

$$f(v) = av$$

---

[1] в. н. пр. Appell: Traité de Méc. rat. II. ed. t. I. p. 297; t. II. p. 120—124.

за веће брзине

$$f(v) = av^2$$

а за врло велике брзине

$$f(v) = a + bv^2 + cv^3$$

(где су *a*, *b*, *c* константе за дато тело и дату средину), или друга која емпиричка функција са брзим рашћењем1).

IV. електрична атрактивна и репулсивна сила међу наелектрисаним телима, за коју је Coulomb нашао експериментом, да има правац праве што везује тела, да је по јачини пропорционална електричним масама m_1 и m_2 тела, а обрнуто пропорционална квадрату њиховог међусобног растојања r: сила има за израз

$$F = \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

V. магнетна атрактивна и репулсивна сила, којом се привлаче или одбијају полови два магнета, за коју је, такође, Coulomb експериментом нашао исти закон као и за електричну силу под 4°.

VI. еластична сила при истезању или контракцији еластичних тела, за коју се експериментом налази да је по јачини, бар у првој апроксимацији, пропорционална самој величини истезања или контракције;

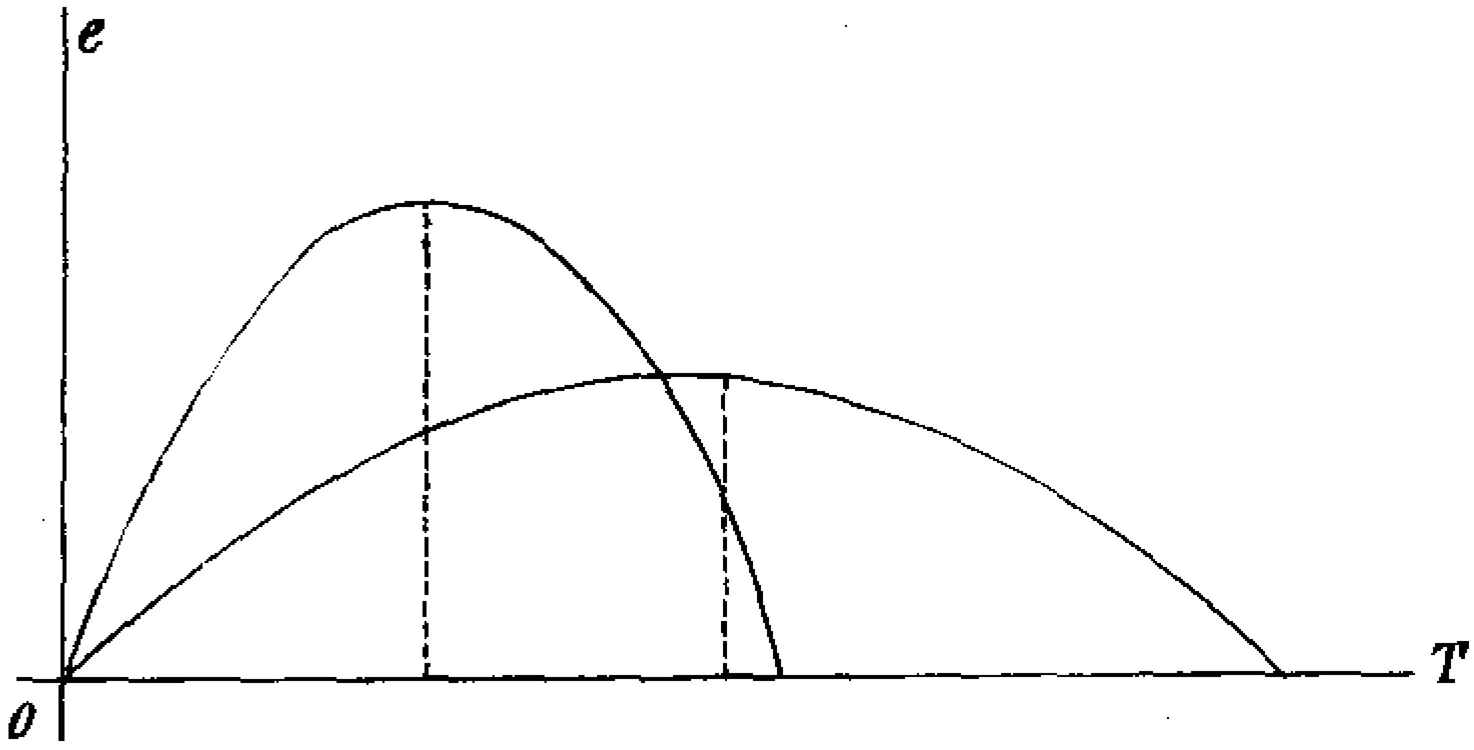
VII. торсиони спрег при упредању жице, за који се налази да је пропорционалан величини угла торсије;

VIII. електро-моторна сила у термо-електричним колима, која се мења са разликом температура на споју два метала што састављају коло, по закону који је експериментално констатовао Gaugain, и који је, узевши

---

2) в. н. пр. E. Vallier: Etude sur les lois de la résistance de l'air (Journal d. Math. pures et appl. 1883. p. 147—194).

ту разлику температура за акцису, а величину електромоторне силе за ординату, представљен дијаграмом у сл. 36. у коме крива линија има облик параболе, симетричне према максималној ординати;



Сл. 36.

IX. утицајна тежња праволиниске електричне струје на један магнетни пол, истакнута на видик Oersted-овим експериментом, по јачини обрнуто пропорционална, као што су Biot и Savart експериментално утврдили, одстојању r пола од струје. Са друге стране, она је, према експериментима Colladon-а и Faraday-а, пропорционална магнетној маси m пола и јачини i струје, тако, да јачина тежње има за израз

$$X = \frac{\lambda m i}{r}$$

где је λ бројни коефицијенат који се одређује мерењем. Правац је тежње, у осталом, управан на равни што пролази кроз струју и пол, а смисао јој је одређен Ampère-овим правилом;

X. магнетна утицајна тежња електричне струје што има облик затворене контуре, по јачини, правцу и смислу еквивалентна сили магнетне ламеле са истом контуром (Ampère-ова теорема, изведена из експерименталних резултата).

XI. елементарне утицајне тежње магнета и елемената струја, одређене Ampère-овим експериментима и теориским, на њима основаним, посматрањима. Тако, експериментални принципи, од којих полази Ampère, доводе, за утицајну тежњу dF магнетног пола на елеменат ds струје, који заклапа угао α са правом што га везује за пол, непосредно до обрасца

$$dF = m\, i \sin \alpha\, f(r)\, ds$$

где је m магнетна маса пола, i јачина струје у елементу ds, а $f(r)$ неодређена функција растојања r између пола и елемента струје. Међутим, експериментални закон Biot-Savart-ов, према коме је утицајна тежња праволиниске струје на један магнетни пол, по јачини, обрнуто пропорционална растојању r пола од магнета, доводи непосредно до закључка да је[1]

$$f(r) = \frac{\lambda}{r^2} \text{ где је } \lambda \text{ константа}$$

Из тога се н. пр. налази да компоненте $d\xi$, $d\eta$, $d\varsigma$ утицајне тежње пола масе m, кад је овај у почетку координатног система, на елеменат ds струје, који се налази у тачки (x, y, z), имају за израз

$$d\xi = \frac{\lambda i}{r^3} (ydz - zdy)$$

$$d\eta = \frac{\lambda i}{r^3} (zdx - xdz)$$

$$d\varsigma = \frac{\lambda i}{r^3} (xdy - ydx)$$

---

[1] в. н. пр. Mascart—Joubert: Leçons sur l'éléctricité et le magnetisme, t. I. p. 506.

а да су компоненте тоталне утицајне тежње струје на пол

$$X = -\mu i \int \frac{ydz - zdy}{r^3}$$

$$Y = -\mu i \int \frac{zdx - xdz}{r^3}$$

$$Z = -\mu i \int \frac{xdy - ydx}{r^3}$$

где је μ константа.

XII. индукована електро-моторна сила, изазвана варијацијама флукса магнетне силе, што пролази кроз индуковано електрично коло, а која је, према Lenz-овом закону, таквога смисла, да се увек противи кретању кола у правцу у коме се оно ефективно креће. Пошавши од експерименталних факата при индукцији, Neumann је, поред осталих резултата своје теорије, извео и овај о јачини те силе: индукована електро-моторна сила F једнака је, по својој јачини, раду који би у јединици времена учинио магнетни систем, кад би јачина струје у индукованоме колу била једнака јединици. Означивши са Q флукс магнетне силе што пролази кроз коло, улазећи на његову негативну страну, Neumann-ова је теорема изражена једначином

$$F = \frac{dQ}{dt}$$

Флукс се Q, у једноме датом тренутку, састоји из флукса q што одговара акцији спољних агенса, струја или магнета, и онога што одговара ауто-индукцији кола. Пошто је овај последњи, према експерименталним резултатима, пропорционалан јачини i струје у колу, он ће, означивши му са L величину што одговара јединици јачине струје, имати за израз *Li*, тако, да ће јачина индуковане електро-моторне силе имати за израз

$$F = \frac{d}{dt}(q + Li)$$

У случају кад нема спољне индукције, већ постоји само ауто-индукција, и то са коефицијентом *L* непромењљивим у току појаве, биће

$$F = L\frac{di}{dt}$$

Применом н. пр. на Faraday-ев котур (метални котур који се, у униформном пољу, окреће око осовине паралелне правцу поља) налази се да произведена индукована електро-моторна сила има за израз

$$F = \frac{\omega a^2}{2} f$$

где је *f* сила што карактерише поље, *ω* угловна брзина при ротацији, *a* полупречник котура.

Применом на униформно намагнетисану куглу, по којој се један лучни проводник, чији један крај остаје на полу, а други на екватору, окреће једнаком брзином, налази се да ће индукована електро-моторна сила, изазвана тим кретањем, имати за израз

$$F = \frac{1}{2} vfa$$

где је *a* полупречник кугле, *v* брзина кретања лучнога краја на екватору, *f* магнетна сила на полу. Асимилацијом земље униформно намагнетисаној кугли, постаје вероватан факт, да таква једна индукована електро-моторна сила игра важну улогу у извесним природним појавама, као што су: поларна светлост, магнетне пертурбације на површини земље, електричне пертурбације у телеграфским жицама и т. д.

XIII. Разноврсни статистички узроци, пропорционални броју својих носилаца, чије су варијације представљене у статистичким таблицама, или се из ових изводе на прост начин. Такав је н. пр. случај колективних активитета социјалних комплекса, пропорционалних броју индивидуа које су им носиоци, сила морталитета или репродуктивна моћ једне одређене популације, чије се варијације јачина огледају у таблицама морталитета, односно таблицама рађања, или су изражене емпиричким обрасцима (обрасци: Moivre-a, Laurent-a, Gompertz-a, Makeham-a, Quiquet-a, и т. д.[1]).

III. Аналитички изведени закони.

Закони извесних активитета изводе се аналитички, рачуном, из података о другим активитетима, који су са траженима у једној одређеној и познатој вези; или из већ формираних, на који било начин, диференцијалних једначина појаве, или бар оних чланова тих једначина, за које би се знало да им облик, на један одређени начин, зависи од тражених закона активитета; или из познатих закона по којима би се мењали непосредни објекти тих активитета кад би њихове промене биле ефекат појединих изолованих узрока за који су ти активитети везани и т. д.

Општа и интинуитивна правила, која ће се овде навести, обухватају велики број случајева такве одредбе непознатих закона активитета, везаних како за примењене, тако и инертне тежње у појавама.

---

[1] в. A. Quiquet: Aperçu historique sur les formules d'interpolation des Tables de survie et de mortalité (Bull. de l'Institut des Actuaires français t. III).

Прво правило: *ако се, на ма који начин, комбинацијом датих, диференцијалних или коначних, једначина појаве, једна од једначина јави у облику*

$$k \frac{dv}{dt} = F$$

где k не зависи од геометриских и кинетичких елемената појаве, а F не зависи од извода елемента v, има се сматрати да се тај елеменат мења у току појаве тако, као да је на њега непосредно примењена тежња чија је јачина

$$X = \lambda F$$

где λ такође не зависи од геометриских и кинетичких елемената појаве. Узевши да *k* игра улогу коефицијента инерције при варијацијама елемента *v*, има се сматрати да је $\lambda = 1$.

Правило је само по себи очевидно, према општем начину формације диференцијалних једначина за варијације појединих елемената појаве, као ефеката датих примењених тежња. Оно ће овде бити примењено на неколико врста конкретних случајева.

I. Нека су *X*, *Y*, *Z* тоталне компоненте сила у правцима осовина *ox*, *oy*, *oz* правоуглог координатног система, при обртању чврстог тела око једне осовине, узете за осовину *oz*, и нека се тражи закон варијације тоталне компоненте сила примењене непосредно на угловну брзину тела.

Једначина живих сила

$$\frac{1}{2} d \Sigma mv^2 = \Sigma (Xdr + Ydy + Zdz)$$

трансформацијом

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

по којој је, пошто се при обртању тела мења само θ,

$$dx = - r \sin \theta \, d\theta = - y \, \omega \, dt$$

$$dy = r \cos \theta \, d\theta = x \, \omega \, dt$$

$$dz = o$$

где је ω угловна брзина при обртању, дата обрасцем

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

постаје

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Sigma \, (xY - yX)$$

где је J моменат инерције тела према обртној осовини. Узевши, дакле, да J игра улогу коефицијента инерције при варијацијама угловне брзине, тотална компонента Φ тежња, примењена непосредно на ту брзину, мењаће се у току кретања по закону облика

$$\Phi = \Sigma \, (xY - yX)$$

II. Euler-ове једначине

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B) \, qr = L$$

$$B \frac{dq}{dt} + (A - C) \, rp = M$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A) \, pq = N$$

за кретање чврстог тела око утврђене тачке [где су: L, M, N збирови момената примењених сила према осовинама ox, oy, oz (главне осовине инерција); A, B, C моменти инерција тела, p, q, r компоненте тренутне ротације према тим осовинама], показују да, ако се A, B, C сматрају као коефицијенти инерције при варијацијама елемента p, q, r, има се сматрати, да се ти елементи мењају тако, као да су на њих непосредно примењене тежње Φ, Ψ, Θ које се у току појаве мењају по законима облика

$$\Phi = L + (B - C)\,qr$$

$$\Psi = M + (C - A)\,rp$$

$$\Theta = N + (A - B)\,pq$$

III. Из датога закона

$$\varphi(v, t) = o \tag{476}$$

по коме би се мењао, у току појаве, елеменат v кад би уочени узрок C делао сам, може се извести закон по коме би требао да се мења његов активитет, да би елементу v имповирао начин варијације облика (476): тежња F непосредно примењена на тај елеменат имала би за израз

$$F = \lambda \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}{\frac{\partial\varphi}{\partial v}} \tag{477}$$

где λ не зависи од геометриских и кинетичких елемената појаве.

Десна ће страна једначине (477), која је експлицитна функција променљивих t и v, садржати произвољних констаната или их неће садржати, према томе какав је, у томе погледу, случај са једначином (476), т. ј. према томе, да ли ова једначина изражава закон тока појаве у *општем случају*, кад су почетне погодбе непрецизиране и константе, што их карактеришу, ма какве, или закон вреди само за *посебан случај*, кад те константе имају одређене, прецизиране, вредности. Сличан је случај и са произвољним функцијама у једначинама (476) и (477).

Међутим, од егзистенције и броја ових произвољности у тим једначинама зависи одређеност проблема одредбе траженог закона варијације активитета. Кад н. пр. једначина (476) садржи једну произвољну константу, елиминацијом ове из (476) и (477) добија се један тачно одређен закон активитета

$$F = f(t, a)$$

који ће важити, у исто време, за све прилике чијим се варијацијама мења поменута константа. Па против, ако горње једначине не садрже никаквих произвољних констаната, тако да важе само за један посебан случај у посматраној појави, помоћу (476) и (477) може се F на бескрајно много начина изразити као функција промењивих t и v: проблем је одредбе закона активитета неодређен. Поред тога, сваки од бескрајно многих, тако добијених, закона важио би само за посебан случај за који је и изведен.

На такву се врсту проблема своди и одредба јачине тежња *делимичних непосредних узрока*: та јачина, за један дати узрок C, који улази као саставни део у збир на десној страни једначине

$$k \frac{dv}{dt} = \Sigma X$$

што регулише варијације елемента v, пропорционална је вредности извода $\frac{dv}{dt}$, израчунатој из закона

$$\varphi(v, t) = o$$

варијација тога елемента, који би се имао кад би ове варијације изазивао *само* узрок C, као непосредно примењени узрок.

Тај је начин одредбе јачина X од нарочитог интереса у случајевима кад се има више узрока, од којих се, за сваки понаособ, зна закон који би он импозирао у посматраној појави, кад би делао сам. Уочимо као прост пример, појаву поступног слабљења једнога стања, дефинисаног вредношћу једнога карактеристичног елемента v, које се од једне изворне тачке, са једнаком брзином, простире радијално кроз какву хомогену или хетерогену средину, а под симултаним утицајем два непосредна депресивна узрока:

1° једнога, који произлази од удаљавања од изворне тачке и који би, кад би делао сам, чинио да интензитет стања у једној тачки буде обрнуто пропорционалан квадрату одстојања од изворне тачке;

2° једнога што произлази од какве врсте апсорпције, коју врши средина и која је, у сваком тренутку, у толико јача, у колико је стање интензивније.

Таква би се два узрока имала н. пр. у појави слабљења јачине светлости, топлоте, звука, мириса, потреса и т. д. удаљавањем од изворне тачке и апсорпцијом што се врши у средини кроз коју се стање распростире.

Делимичноме узроку 1°, кад би овај делао сâм, одговарао би закон варијације

$$v = \frac{C}{x^2}$$

где је C константа, x растојање између изворне и посматране тачке. Пошто је

$$x = bt$$

где је b брзина радијалног распростирања посматраног стања, то ће јачина X_1 првога узрока имати за израз

$$X_1 = \lambda \frac{dv}{dt} = - \frac{2\,b\,\lambda\,C}{x^3} = - \frac{2\,b\,\lambda\,v}{x}$$

Јачина узрока 2° била би одређена обичним законом

$$v = De^{-hx}$$

где је D константа, одређена почетним стањем појаве, а h специфична абсорбујућа моћ средине, стална кад је средина хомогена, зависна од x кад је средина хетерогена и симетрична око изворне тачке, а зависна од x и од једнога или два угла кад је средина хетерогена и асиметрична. Та јачина има, дакле, за израз

$$X_2 = \lambda \frac{dv}{dt} = -\mu v$$

где је μ одређена позитивна константа.

Нека је, на послетку, примећено, да се на горњи проблем своди и одређивање јачина $X_1, X_2 \cdots X_m$ тежња непосредно примењених на дати систем непосредних објеката $v_1, v_2 \cdots v_m$, у случајевима кад су одговарајући узроци $D_1, D_2 \cdots D_m$ *индиректни* и имају за непосредне објекте извесне елементе $w_1, w_2 \cdots w_m$, везане са параметрима v_i каквим сталним релацијама. Ако су X_{ij} јачине тежња D_i, примењених непосредно на објекте w_i, а

$$(478) \qquad \Phi_1 = o, \ \Phi_2 = o \cdots \Phi_m = o$$

сталне релације (коначне или диференцијалне) између параметара v_i и w_i, помоћу једначина

$$h_1 \frac{dw_1}{dt} = \Sigma Y_{1j}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h_m \frac{dw_m}{dt} = \Sigma Y_{mj}$$

које важе за непосредну акцију узрока D_i на објекте w_i, и релација (478) израчунале би се вредности извода

$$\frac{dv_1}{dt}, \frac{dv_2}{dt}, \dots \frac{dv_m}{dt}$$

које би биле пропорционалне траженим јачинама тежња X_i.

Друго правило: *кад су једначине појаве дате у ранијем облику*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q'_i} = G_i \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

па се, на који било начин, зна да G_i представљају одговарајуће тоталне компоненте примењених тежња у правцима oq_i, израз се $-\frac{\partial \Phi}{\partial q_i'}$ *има сматрати као израз јачине тоталне компоненте комплекса инертних тежња у правцу oq_i.*

Ако је, дакле, познат начин варијације једних инертних тежња у посматраној појави, он се и за остале може сазнати према саставу израза $\frac{\partial \Phi}{\partial q_i'}$.

При н. пр. електричним променама у покретним дво-димензионалним проводницима (в. стр. 202—203) улогу израза Φ игра израз

$$\frac{1}{2}\left[J\omega'^2 + L_1 i_1'^2 + L_2 i_2'^2 - K i_1 i_2 \omega' - K \omega i_2 i_1'\right]$$

(са означавањима употребљеним на наведеној страни), тако, да компоненте Φ_1, Φ_2, Φ_3 инертних сила имају за изразе

$$\Phi_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial \omega'} = -J\omega'$$

$$\Phi_2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial i_1'} = -K i_1 i_2$$

$$\Phi_3 = -\frac{\partial \Phi}{\partial i_2'} = K \omega i_2$$

Прва компонента представља центрифугалну силу при обртању точка; друга и трећа представљају електро-магнетне инертне силе, којима се, на тај начин, зна закон варијације у току појаве.

Треће правило: *кад су једначине појаве дате у ранијем облику*

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i''} = F_i \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

па се, на који било начин, зна да F_i *представљају одговарајуће тоталне компоненте примењених тежња у правцима* oq_i, *израз се* $-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i''}$ *има сматрати као израз јачине тоталне компоненте комплекса инертних тежња у правцу* q_i.

И то правило истиче на видик законе варијација појединих инертних тежња у појавама. Тако н. пр. при међусобној акцији система покретних струја (в. стр. 206—209) улогу Π игра израз

$$\frac{1}{2}[mx''^2 + L_1 q_1''^2 + M_{12} q_1'' q_2'' + Nx'' + Pq_1'' + Hq_2''$$

(са означавањима употребљеним на наведеноме месту) тако, да компоненте Φ_1, Φ_2, Φ_3 инертних сила имају за изразе

$$\Phi_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x''} = -mx'' - N$$

$$\Phi_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2''} = -\frac{d}{dt}(L_1 i_1 + M_{12} i_2)$$

$$\Phi_3 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2''} = -\frac{d}{dt}(L_2 i_2 + M_{12} i_1)$$

Прва је састављена из механичке инерције $-mx''$ покретнога електричнога кола и Ampère-ове електромагнетне силе

$$-N = \frac{dM_{12}}{dx} i_1 i_2$$

којој је, на тај начин, одређен закон варијација у току појаве. Друга и трећа представљају индуковане електромоторне силе у електричним колима.

IV. Хипотетични закони верификовани својим последицама.

Најчешћи су случајеви у којима се до траженог закона активитета, у облику који представља бар његову прву апроксимацију, дошло пошавши од какве хипотезе, више или мање вероватне према констатованим фактима, запаженим или наслућеним аналогијама и т. д. и која се, за тим, верификује којом од својих крајњих конкретних последица

1° Класичан пример таквог начина одредбе активитета у природним појавама даје одредба закона универсалне гравитације, према коме се два делића материје, чије су масе m и m', а међусобно растојање r, привлаче међу собом тако, да јачина атрактивне силе F има за израз

$$F = \frac{f m m'}{r^2}$$

где је f сталан коефицијенат.

Непосредна је последица овога хипотетичног закона та, да акцелерација масе m има за израз $\frac{f\,m'}{r^2}$, а да за масу m' она има вредност $\frac{f\,m}{r^2}$. То исто би имало важити и за тела, као агломерате делића, са погодбом да се маса тела замишља као концентрисана у тежишту тела.

Значајну верификацију ових последица, па, дакле, и самога закона, дају појединости кретања планетарног система. Тако, прва верификација, коју је учинио Newton, састоји се у компарацији теже, на површини земље, са силом која импозира месецу приближно кружну путању око земље као центра, са полупречником прилично једнаким 60 пута полупречнику земље. Из трајања сидералне револуције месеца, које износи 2 360 591 секунду, изводи се средња линеарна брзина месеца v, која износи

$$v = \frac{2\,R\pi}{2\;360\;591}$$

где је R растојање између месеца и земље. Тотална центрипетална акцелерација, у униформном кружном кретању, има за вредност

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{2\pi\,S}{(2\;360\;591)^2}$$

где је S дужина месецеве путање, која је, пошто јој је полупречник 60 пута већи од земљиног, једнака 60 пута периферији земље, т. ј.

$$S = 60 \cdot 40\;000\;000^{m} = 240\;000\;000^{m}$$

тако да се налази

$$a = 0,0027061^{m} \tag{479}$$

Са друге стране, акцелерација теже на површини земље, т. ј. на растојању од центра земље једнаком полупречнику R, има посматрањем нађену вредност $9{,}8088^m$ (за латитуду Париза). Претпоставивши пропорционалност акцелерације обрнутој вредности квадрата растојања, као последицу Newton-овог закона, акцелерација би a требала, дакле, да има за вредност

$$a = \frac{9{,}8088^m}{60^2} = 0{,}0027246^m \tag{480}$$

Незнатност разлике $0{,}0000185^m$ између вредности (479) и (480), која је мања од $\frac{1}{100}$ њихове средње вредности, има се сматрати као верификација хипотетичног закона од кога се пошло; незнатно одступање има се приписати разним омањим нетачностима у горњем рачуну, као што су: величина акцелерације $9{,}8088^m$ која одговара само једној, одређеној, латитуди; непокретност земље, чије властито кретање, које није ни праволиниско, ни униформно, утиче на релативно кретање месеца; кружна путања месеца око земље, која је, у ствари, елипса врло мало различна од круга; стална брзина кретања по тој путањи, која се, у ствари, мења у врло уским границама и т. д.

Другу једну верификацију закона даје његово слагање са фактима исказаним у Kepler-овим законима, који, са једном доста великом апроксимацијом, резимирају резултате директних астрономских опсервација и дефинишу релативно кретање планета око сунца:

1° свака планета описује око сунца елипсу, у чијој је једној жижи сунце;

2° потег, повучен из центра сунца ка центру планете, описује, у равни елипсе, једнаке површине у једнаким размацима времена;

3° квадрати времена сидералних револуција планета у истој су међусобној пропорцији, као кубови великих осовина њихових путања.

Из прва два закона излази, према законима Кинематике, да је акцелерација тежишта сваке планете, у свакоме тренутку, управљена ка центру сунца и да, ако се она означи са ω, њена је вредност у свакоме тренутку

$$\omega = \frac{4\pi^2 a^3}{r^2 T^2} \tag{481}$$

где је a велика полу-осовина елипсе, коју планета описује, r растојање између центра планете и центра сунца, T време једне сидералне револуције планете.

Трећи закон показује да је количник $\frac{a^3}{T^2}$ апсолутна константа, независна од посматране планете, што би значило да је акцелерација ω обрнуто пропорционална квадрату растојања r не само при посматрању једне исте планете у току њенога кретања, већ и при међусобној компарацији разних планета.

Кад би сунце било непокретно, ти би кинематични резултати довели непосредно до израза централне силе којом сунца привлачи планету; ова би имала за вредност акцелерацију ω помножену масом планете. Да би се имао случај што одговара реалности, треба уочити кретање покретног система, састављеног од сунца и планете, према покретним координатним осовинама сталнога правца, што пролазе кроз центар сунца.

Ако су F и F' атрактивне, међу собом по вредности једнаке силе, којима делује сунце на планету и ова на сунце, а M и m масе сунца и планете, акцелерација планете у правцу силе F имаће за вредност $\frac{F}{m}$, а акцелерација сунца вредност $\frac{F}{M}$. Ова се последња има сматрати као да произлази од антренираног кретања система; према томе антренирајућа инертна сила планета, према уоченим покретним осовинама, има за апсолутну вредност

$$\Phi = \frac{mF}{M}$$

а по смислу је супротна антренирајућој акцелерацији система. Сунце се, дакле, при кретању система, може сматрати за непокретно, ако се атрактивној сили F, којом оно делује на планету, придода фиктивна сила Φ, која делује у истоме правцу и истоме смислу као и сила F. Сила ψ, чији је ефекат релативно кретање планете има, дакле, за израз

$$\psi = F + \Phi = \left(1 + \frac{m}{M}\right) F$$

Са друге стране, та иста сила има за израз $m\omega$, где је акцелерација ω дата обрасцем (481), према чему је

$$\left(1 + \frac{m}{M}\right) F = \frac{4m\pi^2 a^3}{r^2 T^2}$$

а из тога

$$F = \frac{\lambda m M}{r^2} \tag{482}$$

где је

$$\lambda = \frac{4\pi^2 a^3}{(m + M) T^2} \tag{483}$$

Хипотеза, међутим, универсалне атракције доводи до израза силе

$$F = \frac{\mu m M}{r^2} \tag{484}$$

где је μ апсолутна константа за све планете. Она би била верификована кад би било

$$(485) \qquad \frac{4\pi^2 a^3}{(m + M) T^2} = \mu = const$$

Кад би трећи Kepler-ов закон био апсолутно тачан, погодба би (485) била задовољена само апроксимативно, јер би се лева страна једначине, због незнатности масе m према маси M, мењала од планете до планете у релативно врло уским границама. Али, пошто је тај закон само апроксимативан, узима се да је израз (485) одиста апсолутна константа за цео планетарни систем, а да се вредност количника $\frac{a^3}{T^2}$ мења пропорционално вредности $m + M$, која се и сама мења од планете до планете у врло уским границама, тако да је приближно стална. На тај начин, емпирички подаци, добијени непосредним опажањем и резимирани у Kepler-овим законима, имају се сматрати као верификација закона (484) универсалне атрактивне силе међу делићима материје. Слична је верификација добијена и из података о кретању комета око сунца, сателита око својих планета и релативног кретања двојних звезда.

II. Хипотеза, да се распростирање топлоте, електрицитета и др. појава може свести на генералну шему која ће овде бити наведена, наводи на асимилацију извесних активитета, у тима конкретним појавама, фиктивним активитетима што састављају ту шему, са познатим законима варијација. Слагање крајњих последица састава механизма, претпостављеног у таквој шеми, са оним што се позитивно зна о току посматране конкретне појаве, подведене под ту шему, има се сматрати као верификација претпостављеног закона варијација активитета за уочени конкретни случај.

Уочимо, на име, једно стање $\triangle$, распрострто по датоме телу тако, да је свака тачка тела карактерисана одређеном вредношћу дескриптивнога елемента v што дефинише то стање у тој тачки. Претпоставимо да се распоред стања, перманентан за све време док је униформан, почне мењати од тренутка кад, ма каквим спољним узроком, та униформност буде нарушена, и да се то мењање врши као последица механизма овакве врсте: чим униформност буде нарушена, јавља се једна општа тежња, која се манифестује, у свакој тачки тела, да се та униформност поврати, и то на овај начин: стање у свакој тачки тежи да се, међусобним утицајем, изједначи са стањем тачака у својој непосредној околини; таква међусобна утицајна тежња двеју тачака по јачини је пропорционална разлици вредности дескриптивнога елемента v у тим тачкама и опада врло брзо са растојањем тачака, тако, да постаје неосетна кад се изађе из непосредне брзине посматране тачке.

Чим се таква тежња буде јавила, стање ће се, у свакој тачки тела, почети поступно мењати у току времена, на начин који зависи од облика тела, његове симетрије или дисиметрије, његове хомогености или хетерогености, и од утицаја средине у којој се буде налазило.

Да би се одредила тотална утицајна тежња околине на једну дату тачку $M(x, y, z)$ тела, карактерисану вредношћу v дескриптивнога елемента, уочимо у бескрајној близини те тачке један елеменат површине $d\omega$ и на овоме тачку

$$M_i\,(x + \xi_i,\ y + \eta_i,\ z + \zeta_i)$$

карактерисану вредношћу v_i дескриптивнога елемента. Према горњој шеми, утицајна тежња F_i тачке M_i на тачку M имаће за израз

$$F_i = \varphi (p) (v_i - v) \tag{486}$$

гпе $\varphi (p)$ означује какву функцију растојања $p = MM_i$ која врло брзо опада кад p расти. Погодба да, пошто је F_i тежња изједначавања стања $\triangle$, треба да буде

$$\begin{array}{lll} F_i > o & \text{кад је} & v < v_i \\ F_i < o & \text{кад је} & v > v_i \end{array}$$

захтева да $\varphi (p)$ буде позитивна функција за све позитивне вредности растојања p.

Ставивши да је

$$v = v_i + dv$$

тако, да се утицај тежње F_i огледа у прираштају dv вредности v, израз (486) постаје

$$F_i = - \varphi (p) \, dv$$

а пошто је, сматрајући v као функцију положаја тачке, а ξ_i, η_i, ζ_i као диференцијале координата

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} \xi_i + \frac{\partial v}{\partial y} \eta_i + \frac{\partial v}{\partial z} \zeta_i$$

то ће јачина утицајне тежње тачке M_i на M имати за израз

$$F_i = - \varphi (p) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \xi_i + \frac{\partial v}{\partial y} \eta_i + \frac{\partial v}{\partial z} \zeta_i \right)$$

Тотална се, пак, утицајна тежња $F (d\omega)$ свију тачака елемента $d\omega$ добијају сумирањем свих тежња F_i што се односе на разне тачке тога елемента. Вредности парцијалних извода

$$\frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial z}$$

имају се, при томе сумирању, сматрати да су исти за све тачке M_{i}, пошто они представљају величине везане само за тачку M. Према томе, ако се стави да је

$$\begin{aligned} \Sigma\,\varphi(p)\,\xi_{\mathrm{i}} &= K_1\,d\omega \\ \Sigma\,\varphi(p)\,\eta_{\mathrm{i}} &= K_2\,d\omega \qquad (487) \\ \Sigma\,\varphi(p)\,\zeta_{\mathrm{i}} &= K_3\,d\omega \end{aligned}$$

биће

$$F(d\omega) = -\left(K_1\,\frac{\partial v}{\partial x} + K_2\,\frac{\partial v}{\partial y} + K_3\,\frac{\partial v}{\partial z}\right) \qquad (488)$$

Кад је елеменат $d\omega$ бескрајно мали квадрат, управан на осовини ox, са средиштем на правој повученој кроз M паралелно тој осовини, растојање се p не мења сменом η_{i} са $-\eta_{\mathrm{i}}$ или ζ_{i} са $-\zeta_{\mathrm{i}}$; кад, дакле, функција $\varphi(p)$ зависи само од p, у изразима

$$\Sigma\,\varphi(p)\,\eta_{\mathrm{i}} \quad \text{и} \quad \Sigma\,\varphi(p)\,\zeta_{\mathrm{i}} \qquad (489)$$

свакоме сабирку одговара други један сабирак исте вредности, а супротног смисла, који се из њега добија поменутом сменом. Изрази су (489), према томе, једнаки нули, што, према обрасцима (487) значи да је $K_2 = o$ и $K_3 = o$, тако да је

$$F(d\omega) = -K_1\,\frac{\partial v}{\partial x}\,d\omega \qquad (490)$$

Тако је исто, за елеменат $d\omega$ управан на осовини oy

$$F(d\omega) = -K_2\,\frac{\partial v}{\partial y}\,d\omega \qquad (491)$$

за елеменат управан на oz

$$F(d\omega) = -K_3\,\frac{\partial v}{\partial z}\,d\omega \qquad (492)$$

и, у опште, за један ма какав елеменат $d\omega$

$$F(d\omega) = -K \frac{\partial v}{\partial n} d\omega$$

где $\frac{\partial v}{\partial n}$ означује извод у правцу нормале на елеменат.

Посматрајмо, сад, два таква елементарна квадрата $d\omega_1$ и $d\omega_2$, што пролазе кроз две тачке M_1 и M_2, бескрајно блиске уоченој тачки M, на једној истој правој са овом, распоређене са једне и друге стране тачке M, и нека су ти елементи управни на овој правој. Лако се увиђа, да су утицајне тежње елемената $d\omega_1$ и $d\omega_2$ на тачку M међу собом супротнога смисла. Јер, идући од једне тачке M' елемента $d\omega_1$ ка једној тачки M'' елемента $d\omega_2$, а преко тачке M, вредност дескриптивног елемента v варира, у опште, у једноме истоме смислу, растући или опадајући (изузимајући специјалне тачке M у којима v достиже који од својих максимума или минимума). Ако н. пр. елеменат v расти од M' до M'', он ће у M имати већу вредност но у M' и утицај елеменат $d\omega_1$ био би у томе смислу, да *смањи* вредност v у тачки M. На против, та ће вредност у M бити мања но што је у M'', тако да би утицај елемента $d\omega_2$ на M био у томе смислу, да *повећа* ту вредност у M. Обрнуто ће бити кад v опада од M' до M'', тако да су поменуте две утицајне тежње, у оба случаја, одиста супротнога смисла.

Посматрајмо, на послетку, око тачке M један елементарни паралелипипед, са средиштем у M, и са странама dx, dy, dz, паралелним координатним осовинама. Да би одредили тоталну утицајну тежњу, што произлази од свих шест страна паралелипипеда, на стање у тачки M, уочимо прво страну управну на осовини ox. Према горњим обрасцима њена утицајна тежња на M имаће за израз

$$(493) \qquad -K_1 \frac{\partial v}{\partial x} d\omega = -K_1 \frac{\partial v}{\partial x} dy\, dz$$

Величина утицајне тежње супротне стране паралелипипеда биће једнака изразу (493), увећаном својим диференцијалом цо x: она, дакле, има за израз

$$(494) \quad -K_1 \frac{\partial v}{\partial x} dy\, dz - dy\, dz \frac{\partial}{\partial x}\left(K_1 \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx$$

Резултујућа утицајна тежња тих двеју паралелних страна страна биће једнака алгебарском збиру израза (493) и (494), пошто се изразу (494), водећи рачуна о томе, да се посматране стране налазе са једне и друге стране тачке M, према горњој примедби промени знак. Она ће, дакле, имати за израз

$$(495) \qquad F_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_1 \frac{\partial v}{\partial x}\right) dw$$

где је dw запремина паралелипипеда.

Тако би исто резултујућа тежња двеју паралелних страна, управних на осовини oy, имала за израз

$$(496) \qquad F_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(K_2 \frac{\partial v}{\partial y}\right) dw$$

и, на послетку, за стране паралелне осовини oz, она би била

$$(497) \qquad F_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_3 \frac{\partial v}{\partial z}\right) dw$$

Тотална утицајна тежња X непосредне околине тачке M, т. ј. свих шест страна елементарног паралелипипеда, биће једнака алгебарском збиру израза (495), (496) и (497), тако да је

$$(498) \; X = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K_1 \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_2 \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_3 \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] dw,$$

и она је непосредно примењена на дескриптивни елеменат v, који јој је непосредни објекат.

У случају, кад је тело хомогено и изотропно, коенаки, тако су K_1, K_2, K_3 константни и међу собом једфицијенти да израз (498) постаје

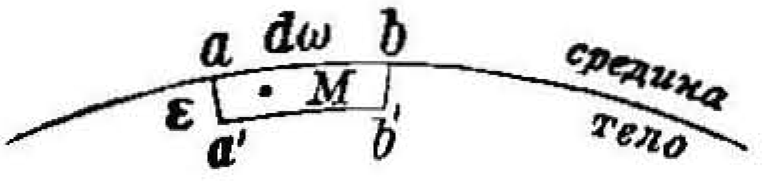
$$X = K\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \tag{499}$$

где је K заједничка вредност та три коефицијента.

Лева страна једначине (498), односно (499), представља дивергенцију поља скаларе (v) у тачки M: утицајна је тежња. дакле, једнмка тој дивергенцији.

Израз је те тежње, међутим, измењен за тачке на граничној површини тела. Нека се тело, у коме је распоред посматранога стања дефинисан распоредом вредности дескриптивнога елемента v, изложено утицају средине у којој се налази. Неједнакост вредности v у тачкама тела и средине изазива тежњу између једних и других тачака да им се стање изједначи, и та тежња, према њеној, раније наведеној претпостављеној особини, има за ефекат узајамни утицај између сваке тачке M површине тела и тачака N_i средине у непосредној близини тачке M.

Уочимо елеменат површине $d\omega$ средине, бескрајно близак површини тела; кроз сваку тачку тога елемента повуцимо нормалу у правцу унутрашњости тела и на тим нормалама пренесимо сталну дужину ε, бескрајно малу према линеарним димензијама елемента $d\omega$. Нека је M једна тачка у унутрашњости елементарног, тако добијеног цилиндра, карактерисана вредношћу v дескриптивног елемента. Тотална утицајна тежња свих тачака цилиндра, на тачку M, одређена је на овај начин:



Сл. 37.

a) тежња што произлази од елемента површине ab има за вредност

$$-h(v-v_0)\,d\omega$$

где је v_0 вредност елемента v у једној тачки тога елемента (и која се може сматрати да је једна иста за све тачке тога елемента), а h позитивна константа (пошто, кад је $v_0 > v$, вредност v расти);

b) тежња што произлази од елемента површине $a'b'$, пошто се овај налази у самоме телу, имаће, као што је горе нађено, за израз

$$-K\frac{\partial v}{\partial n}\,d\omega$$

где $\frac{\partial v}{\partial n}$ означује извод у правцу нормале, и то у правцу ка спољашности тела;

c) тежња што произлази од бочних површина цилиндра занемарљива је према тежњама a) и b), као бескрајно мала количина истога реда кога је и та бочна површина, која је бескрајно мала према површини $d\omega$, пошто је ε бескрајно мала количина према линеарним димензијама ове површине.

Тотална утицајна тежња тачака површине цилиндра на тачку M, као збир ових тежња, имаће, дакле, за израз

$$X=-\left[K\frac{\partial v}{\partial n}+h(v-v_0)\right]d\omega \tag{500}$$

Појава мењања стања (v) у телу регулисана је тада једначином

$$k\,\frac{\partial v}{\partial t}=X$$

где је израз X, за тачке у унутрашњости тела, дат обрасцем (498), односно (499), а за тачке на граничној површини тела обрасцем (500). Међутим, у овоме последњем случају, пошто је коефицијенат инерције k величина истога реда кога је и запремина цилиндра, а ова има за вредност $\varepsilon d\omega$, диференцијална је једначина појаве облика

$$-H\varepsilon\frac{\partial v}{\partial t}=K\frac{\partial v}{\partial n}+h\,(v-v_0)$$

где је H коначна количина. За тачке на самој површини тела, т. ј. за $lim\ \varepsilon=o$, једначина се своди на

$$K\frac{\partial v}{\partial n}+h\,(v-v_0)=o \tag{501}$$

и представља граничну погодбу при варијацијама стања (v). У специјалном случају, кад је тело изоловано од утицаја средине, биће $h=o$ и гранични се услов своди на

$$\frac{\partial v}{\partial n}=o \tag{502}$$

Кад се тело своди на жицу једнаке дебљине, довољно малог пресека да би у свима његовим тачкама стање (v) било једно исто, утицајна се тежња дуж жице мења са дужином лука, мереним од једне, произвољно изабране, утврђене тачке O на њој, на овај начин: нека су ab и $a'b'$ два нормална пресека жице, на лучним одстојањима s и $s+ds$ од тачке O; нека је ω површина тих пресека а σ њихов обим, где су ω и σ, врло мале, али ипак коначне величине. Нека је M једна тачка у унутрашњости елементарне запремине ограничене пресецима ab и $a'b'$; тотална утицајна тежња свих тачака њене површине састоји се:

a) из утицајне тежње што произлази од пресека ab, и која ће, према ономе што је горе казано, имати за израз

$$-K\omega\frac{\partial v}{\partial s} \tag{503}$$

b) из оне што произлази од елемента $a'b'$ и која је једнака изразу (503), увећаном својим диференцијалом, пошто се резултату промени знак, тако, да ће она имати за израз

$$K\omega\left(\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\ \partial s\right) \tag{504}$$

c) из оне што произлази од бочне површине, изложене утицају средине, којој одговара вредност v_0 дескриптивног елемента v; та тежња, према ономе што је горе казано, има за израз

$$h\,(v_0-v)\,\sigma\,ds \tag{505}$$

Тражена тотална резултујућа утицајна тежња биће, дакле

$$X=\left[K\omega\,\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}+h\,(v_0-v)\,\sigma\right]ds \tag{506}$$

а диференцијална једначина појаве

$$k\,\frac{\partial v}{\partial t}=X$$

Коефицијенат је инерције k величина истога реда кога је и запремина посматранога цилиндра, а пошто је ова истога реда кога је и ds, то, ако се стави да је

$$\frac{K\,\omega\,ds}{C}=p \qquad \frac{h\,\sigma\,ds}{C}=q$$

p и q су коначне позитивне количине и једначина појаве постаје

$$\frac{\partial v}{\partial t} = p\,\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + q\,(v_0 - v)$$

или, додавши елементу v једну константу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = p\,\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - qv$$

У спêцијалноме случају, кад је жица изолована од утицаја средине, биће $h = o$, па, дакле и $q = o$, тако, да једначина постаје

$$\frac{\partial v}{\partial t} = p\,\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}$$

и она повлачи собом, у манифестацији појаве, појединости предвиђене шемама на стр. 539—550.

Основна Fourier-ова хипотеза, за појаве распростирања топлоте провођењем, од тачке до тачке, своди се, у својим битним цртама, на то, да се појава може подвести под горњу генералну шему у којој:

1° улогу дескриптивног елемента v игра температура посматране тачке тела;

2° улогу утицајне тежње X игра флукс топлоте што пролази кроз један елеменат површине у телу, дефинисан као алгебарски збир придошле и изашле количине топлоте у томе елементу;

3° улогу коефицијента K игра коефицијенат термичне проводљивости тела;

4° улогу коефицијента h игра једна константа тѐла, чија вредност зависи од његових физичких особина, н. пр. од степена углађености његове површине.

Основна Ohm-ова хипотеза за појаве распростирања електрицитета састоји се, такође, у томе да се и појаве те врсте дешавају на начин предвиђен горњом шемом, у којој тада:

1° улогу елемента v игра електрични потенцијал у посматраној тачки тела;

2° улогу утицајне тежње X игра флукс електрицитета што пролази кроз посматрани елеменат површине, пропорционалан изводу потенцијала у правцу нормале на површини;

3° улогу коефицијента K игра коефицијенат електричне проводљивости тела;

4° улогу h нарочита физичка константа тела.

Вредност израза $-\dfrac{\partial v}{\partial n}$ јесте мерило електромоторне силе у посматраној тачки тела. Флукс електрицитета, што у јединици времена пролази кроз један нормални пресек линеарног проводника, и који је, у перманентном режиму појаве, један исти за све нормалне пресеке, јесте мерило јачине струје, и т. д.

Експериментална потврда свих последица, обухваћених горњом шемом и примењених на конкретне појаве распростирање топлоте и електрицитета, како у њиховом перманентном, тако и у променљивом режиму, као и могућност предвиђања конкретних појединости тих појава, у претпоставци да су ове обухваћене том шемом, имају се сматрати као верификација хипотетичних закона активитета којима се приписују такве појаве.

Нека је, као један од таквих закона, наведен закон варијација контра-електромоторне силе, при кретању електрицитета кроз проводну жицу малога пресека према њеној дужини, која, према Ohm-овом закону као последици горње шеме, има за израз Ri, где је R електрични отпор жице, а i јачина струје што кроз ову пролази; или закон варијација тих сила при гранању струје кроз систем конвергентних проводника, оличен у Kirchoff-љевим законима и т. д.

III. Једна од основних хипотеза Хемиске Кинетике, која, са везама што се састоје у међусобној пропорционалности између количина утрошених активних тела, у хомогеним хемиским реакцијама, у датоме размаку времена, и количина образованих продуката у томе размаку, доводи до диференцијалних једначина што, бар у првој апроксимацији и у одређеним приликама регулишу ток хемиских реакција, састоји се у овоме: у једноме елементу времена dt прираштај концентрације смеше, у којој се збива реакција, по једноме, ма коме, од продуката, пропорционална је концентрацијама смеше у томе тренутку, по оним телима што активно суделују у реакцији при формирању тога продукта, и елементу времена dt. Као концентрација смеше, по једноме одређеном телу, има се сматрати тежина тела у јединици тежине смеше.

Према томе хипотетичком закону прираштаји би

$$d\rho_1, \; d\rho_2 \cdots d\rho_k$$

продуката $B_1 \cdots B_k$ реакције, која се дешава између n активних тела $A_1 \cdots A_n$, били дати низом једначина

$$d\rho_1 = \lambda_1 \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n dt$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$d\rho_k = \lambda_k \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n dt$$

где су: ω_i концентрација смеше по реагенсу A_i; λ_i коефицијенат независан од количина реагенаса и продуката у смеши. Јачина трансформаторске тежње X_i, примењене на концентрацију ρ_i, као свој непосредни објекат, имаће, дакле за израз

$$X_i = \lambda_i \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n$$

где λ_i игра улогу коефицијента утицаја. Те су јачине међу собом пропорционалне и количник им је једнак количнику одговарајућих коефицијената утицаја.

Концентрације су ω_i дате обрасцем

$$\omega_i = \frac{a_i - x_i}{Q}$$

где је: a_i првобитна количина тела A_i која се налази у смеши у почетку реакције; x_i количина истога тела, утрошена у току реакције од њеног почетка до тренутка t; Q тежина целокупне смеше.

Тако исто, концентрације ϱ_i дате су обрасцем

$$\varrho_i = \frac{\xi_i}{Q}$$

где је ξ_i количина образованога продукта B_i до тренутка t.

Са друге стране, везе између x_i и ξ_i, изражене у обрасцима

$$x_i = m_i x_1 \qquad (i = 1, 2 \cdots n)$$

$$\xi_i = M_i x_1 \qquad (i = 1, 2 \cdots k)$$

где су m_i и N_i позитивни рационални бројеви, добијени из хемиске једначине реакције, доводе до релација

$$\frac{\varrho_1}{M_1} = \frac{\varrho_2}{M_2} = \cdots = \frac{\varrho_k}{M_k} = \frac{x_1}{Q}$$

тако, да се изразу јачине трансформаторске тежње X_i може дати један или други од облика

$$X_i = \mu_i (a_1 - m_1 x_1)(a_2 - m_2 x_1) \cdots (a_n - m_n x_1)$$

или

$$X_i = \lambda_i (\alpha_1 - \beta_1 \varrho_1)(\alpha_2 - \beta_2 \varrho_1) \cdots (\alpha_n - \beta_n \varrho_1)$$

где је

$$\alpha_i = \frac{a_i}{Q} \qquad \beta_i = \frac{m_i}{Q}$$
$$\mu_i = \frac{\lambda_i}{M_i\, Q^{n-1}} \qquad m_1 = 1$$

Уочимо, сад, случај хомогених зависних симултаних реакција, т. ј. оних које се, у једно време, дешавају у једноме истоме суду и имају једно или више заједничких активних тела. Такав би се случај н. пр. имао кад се једно или више активних тела троше у двама разним реакцијама; или кад који од продуката ступа у реакцију са којим од активних тела чијим дејством он постаје; или кад продукти, међусобном реакцијом, регенеришу које од првобитних активних тела и т. д. Концентрације се ω_i, па, дакле, и јачине тежња X_i, јављају у облицима који се виде из ових неколиких специјалнијих случајева:

1° нека је дата реакција са два активна тела L и L', која даје продукте S_1, $S_2 \cdots S_m$, а при томе се и L у исто време распада на n продуката L_1, $L_2 \cdots L_n$. Означивши са:

a и a' првобитне количине тела L и L';

$x_1, \cdots x_n$ утрошене количине тела L на продукте $L_1 \cdots L_n$ за време t;

$y_1, \cdots y_m$ утрошене количине тела L на продукте $S_1 \cdots S_m$ за исто време;

$y'_1 \cdots y'_m$ утрошене количине тела L' на продукте $S_1 \cdots S_m$;

$\xi_1 \cdots \xi_n$ количине продуката $L_1 \cdots L_n$;

$\eta_1 \cdots \eta_m$ количине продуката $S_1 \cdots S_m$;

ρ_i и ω_i концентрације смеше по продуктима L_i и S_i;

ω и ω' концентрације смеше по активним телима L и L', биће

$$d\rho_i = \lambda_i\, \omega\, dt \qquad (i = 1, 2 \cdots n)$$
$$d\omega_i = \mu_i\, \omega\, \omega'\, dt \quad (i = 1, 2 \cdots m)$$

гд су λ_i и μ_i коефициенти независни од количине активних тела и продуката у реакцији.

А пошто је

$$\rho_i = \frac{\xi_i}{Q} = \frac{M_i x_1}{Q} \qquad (i = 1, 2 \cdots n)$$

$$\omega_i = \frac{\eta_i}{Q} = \frac{N_i y_1}{Q} \qquad (i = 1, 2 \cdots m)$$

$$\omega = \frac{a - \Sigma x_i - \Sigma y_i}{Q} = \frac{a - x_1 \Sigma m_i - y_1 \Sigma n_i}{Q}$$

$$\omega' = \frac{a' - \Sigma y'_i}{Q} = \frac{a' - y_1 \Sigma p_i}{Q}$$

где су m_i, p_i M_i N_i позитивни рационални бројеви, то тежње X_1 и X_2, примењене непосредно на објекте x_1 и y_1 имају за изразе

$$X_1 = C_1 (a - \alpha x_1 - \beta y_1)$$

$$X_2 = C_2 (a - \alpha x_1 - \beta y_1)(a' - \gamma y_1)$$

где су константе одређене обрасцима

$$\alpha = \Sigma m_i \qquad \beta = \Sigma n_i \qquad \gamma = \Sigma p_i$$

$$C_1 = \frac{\lambda_1}{M_1} \qquad C_2 = \frac{\mu_1}{N_1 Q}$$

2° нека је дата реакција са два активна тела L и L', која даје продукте $S_1 \cdots S_m$; између L и једног другог тела T збива се, у исто време и у истоме суду, реакција која даје продукте $R_1 \cdots R_n$ тако, да се тело T симултано троши и у реакцији (LL') и у реакцији (LT). Означивши са:

a, a', b првобитне количине тела L, L', T;

$y_1 \cdots y_m$ утрошене количине тела L на продукте $S_1 \cdots S_m$ за време t;

$y'_1 \cdots y'_m$ утрошене количине тела L' на продукте $S_1 \cdots S_m$ за то време;

$z \cdots z_n$ утрошене количине тела L на продукте $R_1 \cdots R_n$;

$z' \cdots z'_n$ утрошене количине тела T на продукте $R_1 \cdots R_n$;

$\eta \cdots \eta_m$ количине продуката $S_1 \cdots S_m$;

$\xi_1 \cdots \xi_n$ количине продуката $R_1 \cdots R_n$;

ϱ_i и ω_i концентрације смеше по продуктима S_i и R_i;

ω, ω', π концентрације смеше по активним телима L, L', T, биће

$$d\varrho_i = \lambda_i \, \omega \, \omega' \, dt \qquad (i = 1, 2 \cdots m)$$

$$d\omega_i = \mu_i \, \omega \, \pi \, dt \qquad (i = 1, 2 \cdots n)$$

А пошто је

$$\omega = \frac{a - \Sigma y_i - \Sigma z_i}{Q} = \frac{a - y_1 \, \Sigma n_i - z_1 \, \Sigma p_i}{Q}$$

$$\omega' = \frac{a' - \Sigma y'_i}{Q} = \frac{a' - y_1 \, \Sigma n'_i}{Q}$$

$$\pi = \frac{b - \Sigma z'_i}{Q} = \frac{b - z_1 \, \Sigma p'_i}{Q}$$

$$\varrho_i = \frac{\eta_i}{Q} = \frac{N_i \, y_1}{Q} \qquad (i = 1, 2 \cdots m)$$

$$\omega_i = \frac{\xi_i}{Q} = \frac{P_i \, z_1}{Q} \qquad (i = 1, 2 \cdots n)$$

то тежње X_1 и X_2, примењене непосредно на y_1 и z_1 имају за изразе

$$X_1 = C_1 (a - \alpha y_1 - \beta z_1) (a' - \alpha' y_1)$$

$$X_2 = C_2 (a - \alpha y_1 - \beta z_1) (b - \beta' z_1)$$

где је

$$\alpha = \Sigma n_i \qquad \beta = \Sigma p_i \qquad \alpha' = \Sigma n'_i$$

$$C_1 = \frac{\lambda_1}{N_1 \, Q} \qquad C_2 = \frac{\mu_1}{P_1 \, Q}$$

3° нека једно исто тело L симултано суделује у трима реакцијама, и то:

a) са телом L', дајући продукте $S_1 \cdots S_m$;

b) са телом T, дајући продукте $R_1 \cdots R_n$;

c) са телом T', дајући продукте $T_1 \cdots T_p$.

Означивши, поред онога у случају 2°, са:

b' првобитну количину тела T';

$u_1 \cdots u_p$ утрошене количине тела T на продукте $T_1 \cdots T_p$;

$u'_1 \cdots u'_p$ утрошене количине тела T' на продукте $T \cdots T_p$;

$\xi'_1 \cdots \xi'_p$ количине продуката $T_1 \cdots T_p$;

ω'_i и π' концентрације смеше по продуктима T_i и по телу T' биће

$$d\varrho_i = \lambda_i \, \omega \, \omega' \, dt \qquad (i = 1, 2 \cdots m)$$

$$d\omega_i = \mu_i \, \omega \, \pi \, dt \qquad (i = 1, 2 \cdots n)$$

$$d\omega_i' = k_i \, \omega' \, \pi' \, dt \qquad (i = 1, 2 \cdots p)$$

а пошто је

$$\omega = \frac{a - \Sigma y_i - \Sigma z_i - \Sigma u_i}{Q} = \frac{a - \alpha y_1 - \beta z_1 - \gamma u_1}{Q}$$

$$\omega' = \frac{a' - \Sigma y'_i}{Q} = \frac{a' - \alpha' y_1}{Q}$$

$$\pi = \frac{b - \Sigma z'_i}{Q} = \frac{b - \beta z_1}{Q}$$

$$\pi' = \frac{b' - \Sigma u'_i}{Q} = \frac{b' - \gamma' u_1}{Q}$$

$$\varrho_i = \frac{N_i \, y_1}{Q} \qquad \omega_i = \frac{P_i \, z_1}{Q} \qquad \omega'_i = \frac{P'_i \, u_1}{Q}$$

тежње X_1, X_2, X_3, примењене непосредно на објекте y_1, z_1, u_1 имају за изразе

$$X_1 = C_1 (a - \alpha y_1 - \beta z_1 - \gamma u_1) (a' - \alpha' y_1)$$

$$X_2 = C_2 (a - \alpha y_1 - \beta z_1 - \gamma u_1) (b - \beta' z_1)$$

$$X_3 = C_3 (a' - \alpha' y_1) (b' - \gamma' u_1)$$

Експериментална верификација ових хипотетичних, апроксимативних, закона трансформаторских тежња X_i састоји се у подударању непосредно мерених количина активних тела и продуката у току реакције у једноме, ма коме, тренутку и оних које су израчунате из једначина, до којих доводе такви закони тих тежња.

Тако, у случају изолованих, хомогених, мономолекуларних реакција. чији би кинетички ток, према таквим законима тежња, имао бити регулисан једначином облика

$$\frac{dx}{dt} = C (a - x)$$

где је a првобитна количина активног тела, а x његова количина трансформисана до тренутка t, било би

$$x = a (1 - e^{-ct})$$

и верификација се састоји у експерименталној потврди да, у таквим реакцијама, израз

$$(C) \qquad \frac{1}{t} \log \frac{a}{a - x}$$

задржава приближно сталну вредност за све време трајања реакције. Конкретан пример: распадање арсенводоника на арсен и водоник по једначини

$$As\,H_3 = As + 3H$$

при чему, ако се за параметар q, који у сваком тренутку одређује количину водоника у смеши, узме притисак гаса, изражен у милиметрима, нађено је да се q у току појаве мења на начин изражен у напред наведеној експерименталној таблици[1]:

ВРЕМЕ У ЧАСОВИМА t	ПРИТИСАК У mm. q	НАЂЕНА ВРЕДНОСТ C
0	784,84	—
3	878,50	0,09076
4	904,05	0,09051
5	928,02	0,09079
6	949,28	0,09051
7	969,08	0,09056
8	987,19	0,09060

која потврђује сталност вредности израза C.

У случају изолованих, хомогених, бимолекуларних реакција, чији би кинетички ток имао бити регулисан једначином облика

$$\frac{dx}{dt} = C(x - a)(x - b)$$

где су a и b првобитне колиине једнога и другог активног тела, имало би бити

$$x = ab\,\frac{1 - e^{(a-b)Ct}}{b - ae^{(a-b)Ct}}$$

Верификација се састоји у експерименталној потврди, да у таквим реакцијама израз

$$(D) \qquad \frac{1}{t}\left|\,log\,\frac{b}{a} - log\,\frac{x-a}{x-b}\right|$$

---

[1] E. Cohen: Stud. zur Chem. Dynamik, S. 2.

задржава приближно сталну вредност за све време трајања реакције. Конкретан пример: реакција између калијум-хлорида и феро-сулфата у киселом раствору, по једначини

$$KClO_3 + 6FeO = KCl + 3Fe_2 O_3$$

Одређујући, од тренутка до тренутка, помоћу калијум-перманганата, количину феро-оксида заосталу до тога тренутка, и израчунавајући, помоћу ове, количину x тога оксида трансформисану до тога тренутка, нађено је, једним низом експеримената, при којима је било $b = \frac{a}{2}$, да се x у току времена мења по овој таблици:

t	$a - x$	ВРЕДНОСТ ИЗРАЗА D
30,5	7,30	0,001965
55	5,98	0,002027
89	4,74	0,001970
112,2	4,06	0,001973
143,2	3,30	0,002000
180,5	2,63	0,001996
206,8	2,30	0,001983
237,5	1,93	0,001978
272	1,58	0,001998
336,3	1,14	0,001986
360	0,98	0,002020

(где је време рачунато у минутама и где је било узето $a = 9{,}45$, $b = 4{,}72$)[1]) која потврђује приближну сталност вредности израза D.

У специјалном случају кад је $a = b$ једначина се појаве своди на

$$\frac{dx}{dt} = C x - a)^2$$

---

[1] Hood: Phil. Mag. (5) 6. 371.

одакле је

$$x = \frac{Ca^2 t}{1 + Ca t}$$

и експериментална се верификација састоји у констатовању да израз

$$\frac{x}{(a - x).t}$$

задржава сталну вредност за све време трајања реакције.

Нека је примећено и то: да се коефицијенти утицаја λ_i, μ_i, k_i, C_i и т. д. ових трансформаторских тежња мењају од једне реакције до друге и да за једну исту реакцију, њихове величине зависе од веома многих фактора, као што су: температура на којој се збива реакција, притисак, природа суда у коме се она дешава и т. д. Од свих ових фактора најосетнији утицај на њихово мењање има температура смеше. Реакцију, у опште, прати ослобођавање или апсорпција топлоте; у оба случаја температура се смеше мења континуално са временом. Осим тога, температура се мења загревањем смеше, да би се реакција могла произвести и довршити.

До закона, по коме се ти коефицијенти утицаја, за једну исту реакцију, мењају са температуром, може се доћи емпирички, одређујући вредности тих коефицијената за разне температуре $T_1 \cdots T_n$ које би се мењале од једног експеримента до другог, али би остале сталне у току једнога истог експеримента; из добијених података може се, интерполацијом, наћи израз $F(T)$ у коме је, приближно, и за дати размак температуре, оличен тражени закон зависности; апроксимација ће бити у толико већа, у колико су мањи узастопни размаци испитиваних температура. Тако је Schwab[1]) испитивао утицај температуре на коефицијенат утицаја трансформаторске тежње у реакцији између натријумхлор-ацетата и натријум-хидрата, и при распадању хлор-сирћетне киселине у воденом раствору, Warder и Reicher[2]) су вршили слична истраживања при сапонификацији етил-етра сирћетне киселине. Hood[3]) је испитивао утицај температуре на одговарајући коефицијенат у поменутој реакцији између калијум-хлората и феро-сулфата, у присуству сумпорне киселине. Urech[4]) и Spohr[5]) су одређивали тај утицај при инверсији шећера, Hecht и Conrad[6]) при реакцији између етил-алкохолата и метил-јодида и т. д.

Из тако добијених, емпиричних резултата нађено је, да се сви они могу представити једним заједничким емпиричким обрасцем облика

$$(507) \qquad log\, \lambda = \frac{A}{T} + B\, log\, T + C$$

где је λ одговарајући коефицијенат утицаја, T апсолутна температура, A, B, C три константе, које за сваку реакцију имају нарочите вредности и које се, за сваки дати случај, одређују експериментом.

Van t' Hoff[7]) је показао како се до обрасца истога облика долази и теориским путем, применом основних образаца Термодинамике, доказавши образац

$$(508) \qquad \frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dT} = \frac{\Phi\,(T)}{2T^2}$$

---

[1]) Doct. Disssert, (Amsterdam 1883).
[2]) Liebigs Annal. 232, 103.
[3]) Phil. mag. (5) (1885) 20. p. 323.
[4]) Ber. d. d. chem. Ges. 16, 765; 17, 2175.
[5]) Zeitschr. f. Phys. Chem. Bd. 2. 196.
[6]) Zeitschr. f. Phys. Chem. Bd. 3, 437.
[7]) Lois de l'èquilibre chimique dans l'état dilué, gazeux ou dissous (Kongl. Svenska Vet. Akad. 21. № 17. 1885).

где *Φ (T)* означује количину топлоте, ослобођене или апсорбоване датом хемиском реакцијом на апсолутној температури *T*, а која одговара потрошњи јединице тежине једнога од активних тела у реакцији.

Функцију је *Φ (T)* проучио Berthellot[1]) и нашао да, кад се̑ специфичне топлоте реагенаса и продуката не мењају осетно у границама температура реакције, *Φ* је линеарног облика

$$\Phi (T) = \alpha + \beta T \qquad (509)$$

где су α и β константе за једну дату реакцију. Заменом вредности (509) у 508), добија се образац истога облика кога је и емпирички образац (507):

$$log\, \lambda = -\, \frac{\alpha}{2T} + \frac{\beta}{2}\, log\, T + conts$$

одакле је

$$\lambda = H\, T^{\frac{\beta}{2}}\, e^{\frac{\alpha}{2T}}$$

где је *H* специфична константа реакције.

У општем случају, кад *Φ* није линеарног облика (што ће бити кад се специфичне топлоте осетно мењају са температуром у току реакције), коефицијенат ће се λ мењати са апсолутном температуром *T* по закону облика

$$\lambda = H\, e^{\frac{1}{2}\int \frac{\Phi (T)}{T^2}\, dt}$$

добијеном интеграцијом једначине (508).

Утицај осталих фактора (притиска, материјала суда и т. д.) на величине коефицијената утицаја трансформаторских тежња одређује се експериментално, мењајући величине тих фактора и одређујући мерењем и рачуном одговарајуће вредности тих коефицијената.[2])

---

[1]) Mécanique chimique t. I. Chap. VIII.

[2]) Cohen: Stud. zur chem. Dyn. S. 33—44; 45—89.

IV. Хипотетични закони варијација активитета у експоненцијалним појавама, према којима је јачина тежње, непосредно примењене на одговарајући дескриптивни елеменат, у свакоме тренутку пропорционална вредности тога елемента у томе тренутку, верификују се непосредним мерењем. Кад би, на име, у једначини појаве

$$k\frac{dv}{dt} = X \tag{510}$$

јачина тежње X имала за израз

$$X = \lambda v \tag{511}$$

било би у сваком тренутку t

$$v = v_0\, e^{\frac{\lambda t}{k}}$$

где је v_0 вредност елемента v у почетноме тренутку $t = o$. Верификација би се хипотетичног закона (511) састојала у констатовању, мерењем, да израз

$$\frac{1}{t}(\log v - \log v_0)$$

задржава једну сталну вредност за све време трајања појаве. Та је вредност једнака количнику коефицијента утицаја примењенога узрока и коефицијента инерције у појави; она је позитивна или негативна, према томе да ли је узрок импулсиван или депресиван.

Верификација се може извршити и константовањем да, ако се стави

$$\log v = y \qquad \log v_0 = b$$

дијаграм је зависности дужина t и y права линија. Коефицијенат правца те праве једнак је поменутом количнику, а начин његове зависности од фактора што пертурбирају нормални ток појаве може се одређивати емпирички, експериментом.

Такав је н. пр. случај са хипотетичним законима варијација:

1° депресивног узрока коме се има приписати поступно опадање температуре тела, при хлађењу по Newton-овом закону: јачина овога има за израз (511) где је v температура тела, а λ његова специфична, негативна константа;

2° депресивног узрока коме се има приписати постепено опадање електричног оптерећења на површини наелектрисане течности која испарава (Pellat-ов закон електричног испаравања): јачина овога има за израз (511), где је v електрично оптерећење, а λ специфична, негативна, константа течности.

3° фракциона дестилација смеше двеју течности може се, бар у првој апроксимацији, сматрати тако, као да свака од течности тежи да пређе у дестилат под непосредним утицајем једнога импулсивног узрока, пропорционалног количини v те течности у заједничкој смеши, а при чему је коефицијенат те пропорционалности специфична, позитивна, константа смеше. Верификацију таквога хипотетичног закона активитета даје Brown-ов закон франкционе дестилације, који се, у приликама које претпоставља, потврђује експериментално са довољном апроксимацијом [1]) и према коме је вредност пропорције двеју супстанца, у тренутном дестилату, пропорционалан пропорцији тих супстанца у заосталој смеши.

V. хипотетични закон варијација интра-молекуларног отпора, пропорционалног квадрату брзине молекула, у механизму фосфоресценције, наведеном на

---

[1]) F. D. Brown,: Trans. chem. soc. 1879. p. 550; 1880 p. 49, 304; 1881 p. 517. Barrell, Thomas a Young: On the separation of three liquides by fractional distillation (Phil. mag. 1894. 8—31.).

стр. 522., чија је последица закон постепеног слабљења емитоване светлости

$$i = \frac{1}{(a + bt)^2}$$

(где су a и b константе) по престанку директне, спољне светлосне акције на фосфоресцентно тело, Becquerel је за испитивана тела (сулфиди калцијума и стронцијума) верификовао, са траженом апроксимацијом, показавши да су експериментални дијаграми зависности дужина t и $y = \frac{1}{i^2}$ праве линије.[1]

Б) Квалитативне појединости варијација активитета.

Напред је казано, да кад се нема довољно прецизних података за потпуну, квантитативну слику појаве, разноврсне се и многобројне квалитативне појединости тока појаве могу извести из квалитативних појединости активитета у њиховом механизму, за које су везане. Таквих се, међутим, појединости, одређенијих или овлашнијих, о активитетима има у појавама свих конкретних природа.

Остављајући на страну непрегледну масу чисто механичких, физичких и механистички схватљивих појава, у којима су активитети, што им улазе у састав механизма, познати по својим, тачним или апроксимативним, квантитативним законима варијација, нека су наведени сплетови континуалних и дисконтинуалних, импулсивних и депресивних узрока у хемиским појавама, познатих, већином, овлашно по своме смислу утицаја на одређени објекат, по начину на који се мењају

---

[1] H. Becquerel: C. R. de l'Acad. des Sciences t. 113. 1891. p. 618; Journal de Physique 1892. p. 137—149.

сами по себи у току појаве, или под утицајем других, секундарних, узрока и т. д. Трансформаторска тежња при хемиским реакцијама, која регулише непосредно брзину реакције, мења се, у току ове, под утицајем многобројних фактора, као што су: температура, притисак, присуство страних тела, осветлење и т. д.; за сваки се од ових зна смисао варијација које импозира јачини поменуте тежње. За најпретежнији од ових утицаја, утицај топлоте, зна се н. пр. да је увек у импулсивном смислу. Међу дисконтинуалним узроцима у хемиским појавама нека су наведени они, по својој интимној природи непознати узроци, за које су везане тежње да изазивају одређене промене особина тела и који су и сами изазвани хемиским променама у телу. Зна се н. пр. да у многим случајевима супституција једнога елемента другим, што припада истој хемиској групи, или супституција једнога хемиског комплекса другим из исте хомолошке групе, има за ефекат одређену модификацију једне уочене физичке или хемиске особине тела у коме је супституција извршена; ове су модификације једног, у напред познатог, смисла за једну одређену серију елемената или комплекса, па су, чак, у извесним случајевима и приближно константне, или им се бар знају приближни закони варијација. Зна се н. пр. да свака група CH_2 у нормалним алкохолима тежи да повиси температуру кључања ових за приближно константан број степени, чија је вредност 20—21. Свака група CH_2 у нормалним угљо-водоницима тежи да им повиси температуру кључања за одређен број степени, који сам опада у колико расти број тих група и који се може емпирички изразити као функција броја тих група. Смена флуора хлором, бромом или јодом, хлора бромом или јодом, брома јодом, повишава температуру кључања јединења за један број степени, приближно константан за једну одређену серију хомологих јединења. Према једној новијој теорији ацидитета хемиских тела[1]), поједини су елементи и хемиски комплекси карактерисани тежњом да уносе одређене измене у ацидитет тела, у чији састав улазе; те су тежње приближно константне за један одређени елеменат или комплекс и јачина им се може изразити бројевима. Један атом н. пр. водоника тежи да ослаби ацидитет за 2,88; један атом угљеника тежи да га појача за 3,01; једна група *OH* тежи, такође, да га појача за 34,07; једна група CH_3 тежи да га ослаби за 5,63; једна група *COOH* тежи да га појача за 52,62 и т. д. И у опште, једна одређена операција са каквим хемиским телом (супституција једнога елемента, или комплекса, другим; измена конституције једињења и т. д.) игра улоги дисконтинуалног узрока који тежи да изазове одређену измену у особинама тела; кад су такве тежње познате бар по смислу и релативним јачинама, може се предвиђати смисао и величина модификација, које ће се имати при њиховој симултаној акцији.

У биолошким појавама, за непрегледан се број активитета, везаних за импулсивне и депресивне узроке у њима, зна начин, смисао, кадшто и сама брзина њиховог мењања у току појаве. Поменуто је н. пр. да крвни серум има две врсте особина, које играју улоге импулсивних или депресивних узрока у великоме броју виталних појава: токсичну и коагулаторску моћ, и да обе моћи слабе под утицајем топлоте, али тако, да прва слаби у јачој мери но друга. — Утицај светлости на развиће микроба депресивног је карактера и расти, у томе смислу, упоредо са рашћењем јачине светлости. — Хуморалне особине, које, као импулсивни или де-

---

[1]) De Forgrand: Chaleur de dissolution de l'eau oxygènée; valeur thermique de la fonction hydroxyle *OH;* influence de l'hydrogène et du carbon (C. R. de l'Acad. des Sciences t. 130. 1900. p. 1620).
Essai d'une théorie générale de l'acidité (C. R. de l'Acad. des Sciences t. 131. 1900. p. 36).

пресивни узроци, играју тако важну улогу у борби организма против акције патогених микроба, мењају се н. пр. под утицајем свега онога што мења нутритивни активитет ћелија, мењајући, при томе, хемиски састав сокова, а тиме и њихове бактерицидне и антитоксичне особине; смисао и релативне јачине тих утицаја познати су за велики број таквих фактора. — Тежња атмосферске влаге да појачава ослобођавање мирисних састојака, појачавајући притисак течности у цветним ћелијама, импулсивног је карактера; тежња, везана за акцију светлосних зракова, да паралише такав утицај влаге својом хемиском акцијом, којом олакшава трансформацију миришљавих продуката, и својим механичким утицајем, који слаби притисак у цветним ћелијама, депресивног је карактера; обе су тежње периодичке, растући и слабећи наизменце са појавом дана и ноћи. — Безброј квалитативних појединости за активитет бацила, за активитет разних медикамената, о начину њихових варијација, према приликама, комбинацијама и дозама у којима су употребљени и т. д. и којих је, упоредо са напрецима Медицине, све више и са све већем одређеношћу, представљају, такође, једну врсту таквих података за виталне појаве.

У психичким појавама, за поједине факторе, за које су везане улоге импулсивних или депресивних узрока, знају се квалитативне појединости начина варијација њихових активитета. Те су појединости, кадшто, одређене у толикој мери, да се мислило резимирати их и у законе квантитативног карактера. Такав је н. пр. случај са Weber-Fechner-овим законом, по коме би јачина осећаја имала расти као логаритам јачине надражаја, који их је изазвао; у закону се, међутим, има задржати, као несумњив, само квалитативан факт, да јачина осећаја расти, у опште, спорије но јачина надражаја, који су их изазвали, и да брзина рашћења прве све више заостаје иза брзине рашћења друге, у колико су надражаји интензивнији. — Зна се да је за идеје везана покретачка тежња да пређу у акте; таква је једна тежња у толико интензивнија, у колико би акт, који би идеја импозирала, повлачио собом више личнога задовољства, или у колико би боље одговарао личним интересима. Те се тежње, такође, мењају, по јачини, према садржини идеје са свима прелазима од врло великог до незнатног интензитета. Максимум је достигнут код идеја у којима је афективни елеменат врло интензиван и где идеја повлачи собом напрасан, неодољив прелаз у акт, са наглошћу готово једнакој оној код рефлекса; минимум је код идеја са врло слабим афективним елементом, које, често, на место преласка у акт, само буде какво ново стање свести.

Сличних се података о активитетима узрока има и у појавама свих осталих наука. Поменуто је да је то случај чак и онда, кад је појава резултат стицаја симултане акције врло великога броја континуалних или напрасних узрока, појединце непознатих активитета, али чији се колективитет може асимилирати, са довољном апроксимацијом, једноме узроку познатог активитета, или ограниченом комплексу од неколико таквих узрока: то је случај активних комплекса, у којима се налази један или више преовлађујућих, по утицају претежних, узрока, према којима се губи остала маса сићушних узрока што уносе само ситне пертурбације у предоминирајући закон тока појаве, онакав какав би се имао кад би ти претежни узроци деловали сами (случај великога броја комплексних физичких појава; случај биолошких, социолошких, историјских и т. д. појава са великим, доминирајућим узроцима, који појави дају тип и битни карактер, и према којима су остали, кадшто и безбројни, ситнији, пертурбаторски узроци занемарљиви, без осетног утицаја на оно што је у појави битно);

Оно, што се, од квалитативних појединости, најчешће зна о појединим активитетима, јесте:

1° њихов *смисао*, према коме одговарајући узрок може бити стално импулсиван, или стално депресиван, или наизменце једног и другог смисла (примери на стр. 620—636);

2° подаци о томе, да ли узрок, у уоченоме размаку времена, и под каквим погодбама, *јача* или *слаби* (пример на стр. 622—623);

3° подаци о *брзини* тога јачања или слабљења, о *убрзавању* или *успоравању* јачања или слабљења и о релативним брзинама ових, за активитете што састављају активни комплекс у појави (примери на страни 575, 623);

4° егзистенција *максимума* или *минимума* јачине;

5° *континуални*, *дисконтинуални*, *персистентни* или *интермитентни* карактер активитета (примери на стр. 620—636);

6° *периодичност* активитета (пример на стр. 625).

7° *ритмички* карактер јачине активитета;

8° егзистенција *асимтотне јачине* уоченог активитета;

9° *границе*, између којих би се, у одређеноме размаку времена кретала јачина датог активитета, а за које би се, на који било начин, знало да их ова не може прећи ни у једном ни у другом смислу (примери на стр. 588—589);

10° подаци о *модификацијама*, које би уочени узрок унео у посматрану појаву кад би делао сам, некомпензован и непертурбиран осталим узроцима што састављају активни комплекс у механизму појаве;

11° *симетрија* или нарочите врсте *дисиметрије* узрока или феноменског поља у коме он врши своју акцију (примери на стр. 596—598);

12° *задоцнење* које може имати акција уоченога узрока, према акцији других узрока што улазе у састав механизма појаве. Напред је поменута улога коју може играти једна врста задоцнења у механизму извесних осцилаторних појава са амортизираним осцилацијама, а понаособ, у механизму фотохемиске акције светлосних зракова на осетљиву плочу, и где би се такав карактер појаве имао приписати задоцњеној акцији једнога реактивног узрока, који је у редукованом слоју изазван, после извеснога времена, самом директном акцијом светлости (в. стр. 505—512). — Узроци се са задоцњеном акцијом јављају у доста великом броју појава. На такав се један узрок наилази н. пр. и у механизму којим Mascart[1]) тумачи појаву обојених прстенова на слици, која се формира на ретини, кад око визира у једноме сталноме правцу, а пред белим заклоном, какав једноставно обојен предмет и кад, за то време, какав црн предмет брзо пролази кроз видно поље. Улогу узрока са задоцњеном акцијом играли би задоцњени светлосни надражаји, чијом је интервенцијом карактеристичној променљивој количини у појави импозиран низ обојених прстенова, све слабијих по интензитету боја, у колико су удаљенији од свога заједничког центра. — На сличне ће се узроке, вероватно, наићи и у осцилаторним појавама које изазивају нервни надражаји, где би улогу узрока са задоцњеном акцијом имала играти једна врста-реакције, којој треба извесно време док се јави и почне утицати на ток појаве. — У механизму одбране организма електролитичком дисоцијацијом[2]), при чему дисоцијација има за улогу регулисање осмотичког притиска, инјекција воде у вене не

---

[1]) Mascart; Sur le retard des impressions lumineuses (C. R. de l'Acad. des Sciences t. 113. 1891. p. 180.).

[2]) L. Maillard: Les applications biologiques de la théorie des ions (Revue générale des Sciences pures et appliquées 1899. p. 768).

изазива одмах екстравазацију хемоглобина, тако, да се плазмолиза јавља са извесним задоцнењем. Та иста инјицирана вода има, међутим, за ефекат појачавање јонизације плазминих соли, т. ј. повећавање броја растворених делића, што, опет, од своје стране, има, у почетку, за ефекат спречавање снижавања осмотичног притиска, тако, да се и ово снижавање јавља са извесним задоцнењем. Једна или друга од ових двеју појава: плазмолиза или снишавање осмотичног притиска, кад се јавља као узрок какве друге појаве, имала би се сматрати као узрок који се јавља са задоцнењем према осталим узроцима, и таквим задоцнењем могла би се објаснити по нека карактеристична црта појаве, као што се задоцњеном реакцијом, у редукованом слоју осетљиве плоче, објашњава амортизирано-осцилаторни карактер појачавања црнила на њој. — У гастричном хемизму, наведеном на стр. 622—623 јавља се, такође, један узрок са задоцњеном акцијом: то је узрок, карактерисан тежњом да убрза јачање депресивних узрока у појави (извесне врсте отпора дифузији ћелиских и крвних састојака) и који се састоји у једној врсти отпора, изазваног самим гастричним хемизмом у току процеса, а у једноме одређеноме тренутку пошто је појава већ неко време пре тога трајала. — Вероватно је, да ће се на сличне факте наићи и у другим виталним појавама.

C) Реципроцитет између састава механизма, начина варијација активитета и појединости манифестације појаве.

Спона између састава механизма, начина варијација активитета што улазе у тај састав, и дескриптивних појединости појаве, такве је природе, да, у колико су тачније одређене прве две, у толико ће тачније бити одређена и ова последња страна у појави. Кад је тачно одређен и познат механизам појаве, са свима квантитативним, за њега везаним, појединостима, биће, исто тако, тачно одређене и познате све појединости тока појаве, на начин наведен у IV. одељку ове књиге. У колико су веће непотпуности у познавању механизма, у толико ће бити неодређеније и само познавање тока појаве, али, ипак, и такви недовољно одређени подаци неминовно повлаче собом, у манифестацији појаве, бар поједине њене квалитативне појединости.

Важи ли и реципрочни факт? Да ли је датом, довољно потпуном, дескрипцијом појаве одређен и њен механизам? Да ли су одређене, квантитативне или квалитативне појединости, у манифестацији појаве, неминовно везане само за извесне, одређене, појединости у њеноме механизму?

Лако је увидети да је одговор, бар за општи случај, негативан: *једна иста појава, са свима својим дескриптивним појединостима, може бити схваћена као последица разноврсних механизама* и, у општем случају, такве појединости, поред све своје одређености и потпуности, недовољне су да реше питање о томе који је, између разних могућних механизама, онај, што у датоме случају одговара реалности. Такав инверсни проблем може постати одређен тек онда, кад се ономе, што се буде знало о самоме току појаве, придода још каква нарочита, суплементарна погодба, или скуп таквих погодаба, које би чиниле могућним само један одређени механизам, искључујући све остале.

О томе је најлакше уверити се на неколиким специјалним случајевима, који ће се овде навести.

Поменуто је н. пр. раније (стр. 654) да је проблем одредбе закона варијације тежње X, непосредно примењене, као искључиви узрок, на објекат v, а према датоме закону

$$\varphi (v, t) = o \tag{512}$$

по коме би се објекат имао мењати под утицајем тога узрока, *неодређен* кад се закон (512) односи на један *посебан случај* такве појаве, т. ј. кад су почетне погодбе и константе, што им одговарају, све прецизиране. Јер, пошто је у свакоме тренутку вредност јачине X пропорционална вредности извода $\frac{dv}{dt}$, израчунатој из једначине (512), помоћу једначине што изражава ту пропорционалност, и (512) може се X на бескрајно много начина изразити као функција промењивих t и v; сваки од тако добијених израза дао би по један закон тежње X, који би појави, у таквоме посебном случају, импозирао закон (512). Проблем би, међу тим, постао одређен кад би се н. пр. унела једна или друга од ових суплементарних погодаба:

1° да закон (512) важи за општији случај кад почетне погодбе у појави нису потпуно прецизиране, тако, да једначина (512) садржи једну произвољну константу C; елиминацијом те константе из (512) и једначине у којој би била изражена пропорционалност јачине тежње X и извода $\frac{dv}{dt}$, израчунатога из (512), имао би се један, потпуно одређен и једини могућан, закон тежње

$$X = F (v, t)$$

који би току појаве импозирао закон (512), па ма колико разноврсне биле почетне погодбе у појави, добијене варијацијом константе C.

2° да тражени закон тежње, који се има извести из закона (512), везаног за посматрани посебни случај, не зависи експлицитно од времена; закон

$$X = F (v)$$

добијен, тада, елиминацијом времена t из поменуте једначине пропорционалности и (512) био би, тада, потпуно одређен и једини могућан.

Као други пример, сличне врсте, нека је наведен познати механички проблем: знајући да покретна тачка описује једну, дату, равну трајекторију, по закону површина, према једној утврђеној тачки O, одредити силу која производи то кретање. Пре свега, закон површина доводи, у правоуглим координатама, до једначине

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C$$

из које је

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = o$$

што показује да убрзање, па, дакле, и тражена сила, пролазе непрестано кроз тачку O. Ако се, тада, у општем изразу за централне силе

$$(513) \qquad X = -\frac{m\,C^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right)$$

(где је m маса покретне тачке, r и θ њене поларне координате за пол O, а C константа површина) води рачуна о томе, да су r и θ везани једначином трајекторије

$$(514) \qquad f(r, \theta) = o$$

израз се (513), делимичном заменом промењиве r или θ из (514), може трансформисати на бескрајно много начина, тако, да се има бескрајно много закона облика

$$X = F(r, \theta)$$

који покретној тачки импозирају горње кретање. Проблем, међутим, постаје потпуно одређен кад се унесе та суплементарна погодба, да сила X зависи експлицитно само од растојања: закон

$$X = F(r)$$

добијен елиминацијом поларног угла θ из (513) и (514) био би, тада, потпуно одређен и једини могућан.

Исте је врсте и механички проблем: знајући појединости кретања покретне тачке у једној равни, које је такво, да се пројекција тачке на осовини Ox креће на један познати начин, н. пр. једнаким кретањем, одредити закон силе паралелне осовини Oy, која би произвела такво кретање. Из једначине трајекторије

$$(515) \qquad y = f(x)$$

и једначине

$$(516) \qquad x = at + b$$

кретања пројекције тачке на осовини Ox добија се

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2 f''(x)$$

тако, да се тражени закон силе добија у облику

$$(517) \qquad X = m\frac{d^2y}{dt^2} = ma^2 f''(x)$$

Тај се израз може, на бескрајно много начина, трансформисати делимичном сменом променљиве x, или y, из једначина (515) или (516), или оних које се добијају диференцијалећи по један пут те једначине; тако се н. пр. може x делимично сменити својом вредношћу, израженом као функција променљивих y, или t, или $\frac{dy}{dt}$, или се може непосредно имати општи закон тражене силе у облику

$$(518) \qquad X = ma^2 f''(x) + \Phi\left(x, y, \frac{dx}{dt,} \frac{dy}{dt,} t\right) [y - f(x)]$$

(где је Φ произвољна функција) која се на трајекторији (515) своди на закон (517). Међу трајекторијама што одговарају једноме, ма коме, од бескрајно многих закона сила, обухваћених општим законом (518), увек се налази и дата трајекторија (515), на коју се своди општа класа одговарајућих трајекторија, спецификовањем погодаба при кретању, онаквих какве одговарају горњем проблему. Тако, ако је н. пр. трајекторија круг

$$x^2 + y^2 = r^2$$

међу могућним законима, обухваћеним општим законом (518), налазе се и ова два:

$$Y = \frac{\lambda}{y^2} \qquad Y = \frac{\lambda}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(где је λ константа). Као трајекторије, добијају се, за оба закона силе, системи коничних пресека: оба та система, међу собом различна, обухватају, као специјални случај, и горњи круг.

Неодређеност је механизма још у знатној мери већа за сложеније појаве, где се за сваки од дескриптивних елемената може наћи колики се хоће број разних закона активитета непосредних узрока, па да се појава, таква каква је, може схватити као последица њихове акције. Та је неодређеност још јаче повећана фактом, да се једна иста појава може схватити не само као последица једнога механизма са датим саставом, са утврђеним комбинацијама и дистрибуцијом улога, а са бескрајно разноврсним законима активитета, везаних за те улоге, већ и као последица, *по самоме саставу*, разноврсних механизама. Тако, у последњем механичком проблему, може се кретање, са свима својим појединостима, схватити и као последица акције бескрајно разноврсних комплекса сила, активних или реактивних, импулсивних или депресивних, које не морају, као што је био случај у горњем проблему, имати један сталан правац. Експериментални закони кинетичког тока хомогених хемиских реакција могу се схватити као последица акције разних комплекса активних и реактивних, хемиских и физичких сила, са разноврсним дистрибуцијама улога и квантитативним законима варијација активитета. *Општи аналитички разлог таквој неодређености лежи у факту: да разни системи диференцијалних једначина могу бити задовољени једним истим системом интеграла.*

На послетку, по себи је јасно, да ће та неодређеност бити још у толико већа, у колико је непотпунија и сама дескрипција појаве, која, при одредби механизма појаве, буде дата као полазна тачка. Кад је н. пр. та дескрипција само квалитативна, неодређеност механизма може бити толика, да, без нарочитих суплементарних погодаба, проблем, у опште, губи и свој смисао.

Међутим, поред све те неодређености, и као што се то види из горе наведених специјалних случајева, дешава се да каква суплементарна погодба, или какве нарочите квантитативне појединости у дескрипцији појаве, чине проблем знатно одређенијим. Шта више, та одређеност може ићи до те мере, да механизам постане потпуно одређен, или да се бар сведе на ограничен број могућних комбинација. Пример такве врсте даје горњи механички проблем одредбе централне силе, где улогу такве суплементарне погодбе игра погодба, да сила зависи само од растојања, а која чини проблем потпуно одређеним. — Сличне је врсте и генерални проблем J. Bertrand-а: одредити закон силе која би зависила само од положаја покретне тачке, знајући да она, па ма какве биле почетне погодбе кретања, увек импозира тачки кретање по коничном пресеку. Сила је, као што су показали Halphen и Darboux[1]), увек или централна, или паралелна једноме утврђеноме правцу. У оба случаја могућна су по два облика закона, по којима би сила имала зависити од положаја тачке. Кад је н. пр. сила централна и зависи само од одстојања покретне тачке од центра силе, а не и од оријентације њенога потега, она мора бити пропорционална самоме одстојању, или обрнуто пропорционална квадрату тога растојања. — Такве је врсте и други проблем J. Bertrand-а: одредити закон силе, која би зависила само од положаја покретне тачке, знајући да она импозира затвореност путање тачке, па ма какве биле почетне погодбе кретања, претпостављајући само, да брзина, у томе кретању, никако не прелази једну одређену, коначну границу. Bertrand[2]) је нашао, да је сила увек централна и пропорционална одстојању, или обрнуто пропорционална квадрату овога. — На послетку, Halphen и Darboux су доказали[3]) да кретање једне тачке, под утицајем какве силе што зависи само од положаја тачке, може само онда бити непрестано у једној истој равни, при свима могућним почетним погодбама у кретању, кад је сила централна или паралелна једноме утврђеноме правцу.

Али треба приметити, да су проблеми те врсте, са оваквом одређеношћу, врло ретки и да се могу сматрати само као изузеци од општега правила: *да је познавање тока једне појаве и његових разних појединости, у опште, само собом недовољно за сазнавање механизма појаве.* Разлог, пак, тим изузецима лежи у нарочитим, специјалним, аналитичким фактима, који у појединим случајевима чине да, иначе неодређени ана-

---

[1]) Compt. rend. de l'Acad. des Sciences t. 84.

[2]) Compt. rend. de l'Acad. des Sciences t. 77.

[3]) Comp, rend. de l'Acad. des Sciences t. 84.

литички проблеми, у таквим случајевима постају одређени, или бар одређенији но што је обично случај.

Па ипак, поред свега тога, у недогледној се маси случајева може у самоме току појаве, или у каквој нарочитој квантитативној, или квалитативној појединости при њеној дескрипцији, сагледати по који податак од интереса за познавање механизма појаве, по нека индикација која би чинила вероватним поједине од бескрајно многих могућних механизама и која би упућивало на то, да се појава покуша схватити као последица једнога од познатих типова механизама.

Тако, праволинијски карактер дијаграма варијација једнога елемента указује на сталност јачине непосредног узрока који производи те варијације, или на сталност тоталне компоненте комплекса узрока, непосредно примењених на тај елеменат. — Кад се дијаграм подудара са којом од опадајућих експоненцијалних кривих линија (облик сл. 25.), варијације се одговарајућега елемента могу схватити као ефекат једнога депресивног узрока, по јачини пропорционалног величини свога непосреднога објекта, тако, да се има посла са узроком који се троши у мери у којој производи свој ефекат. — Кад се дијаграм подудара са којом од кривих линија што имају облик сл. 24., који карактерише и криве дефинисане једначином облика

$$v = a\,(1 - e^{-ht})$$

са правом $v = a$ као асимтотом, појава се може схватити као непосредни ефекат каквога импулсивног узрока, који је у свакоме тренутку у толико слабији, у колико му је непосредни објекат ближи своме финалном, асимтотном, стационарном стању. — Амортизиране осцилаторне појаве, које се састоје у осцилацијама дескриптивних елемената појаве око одређених стања, којима се они, наизменце, приближују и од њих се удаљују једним низом све слабијих осцилација (дијаграми облика сл. 26.—28.) од нарочитога су интереса са тога гледишта. Такве појаве могу бити најразноврснијих конкретних природа; за нека од њих могућно је представити им ток прецизно, графички или аналитички; у другима се запажа само та квалитативна особитост, да појава поступно тежи једноме одређеноме финалном стању, прелазећи преко једнога низа крајности које постају све ближе једна другој, док се, на послетку, не слију у то стање. Појаве те врсте могу резултирати из разноврсних комбинација узрока са познатим законима активитета, као н. пр.:

1° из акције узрока са независним, амортизирано-осцилаторним варијацијама активитета;

2° из симултане акције двеју врста променљивих депресивних узрока: једних, пропорционалних величини непосредног објекта и других, пропорционалних тоталитету тога објекта (в. шему на стр. 513.—516.);

3° из симултане акције двеју врста, међу собом антагонистичких, узрока: једних импулсивних, сталне јачине, и једних депресивних, а задоцњених, чија се јачина мења упоредо са мењањем величине непосредног објекта (в. шему на стр. 505—512);

4° из симултане акције двеју врста променљивих депресивних узрока: једних пропорционалних квадрату величине непосредног објекта и једних пропорционалних тоталитету објекта (в. шему на стр. 519—523).

Свака од таквих шема дала би по једну могућну хипотезу за експликацију тока појаве; од тих би се хипотеза имала усвојити она, која у датоме случају најбоље одговара ефективном стању ствари, о чему би пресудну реч имало детаљно, природњачко, проучавање појаве. Оно би се састојало н. пр. у томе, да се експериментом, или дубљим и оштријим посматрањем, уочи каква деструктивна акција, предвиђена општом шемом на којој се буде зауставило при избору могућних механизама појаве; да се тражи конкретна природа таквог, шемом предвиђеног узрока, да се истакну на видик: ефективна егзистенција предвиђених реакција, отпора, конкретне појединости у којима се огледају карактеристичне црте њихових активитета и т. д. или да се нађу факти који такав уочени механизам чине немогућним. При подвођењу н. пр. раније наведене осцилаторне појаве, при фотохемиској акцији светлости на осетљиву плочу, под одговарајућу шему (механизам под 3°), импулсивни се узрок налази у директној и, по интензитету, сталној хемиској акцији светлосних зракова, а депресивни узрок у реактивној тежњи за инверсном модификацијом, која се јавља у осетљивом слоју после неког времена. — При шематизирању наведенога гастричног процеса, активни се, импулсивни, узрок налази у осмотичноме напону, који се, као што је казано, јавља услед напонске разлике желудачних течности, са једне стране, и крвне и ћелиске плазме, са друге стране; депресивни узрок у реактивном отпору дифузији ћелиских и крвних састојака. — У појави мирисних еманација код миришљавих биљака, импулсивни се узрок налази у притиску течности у цветним ћелијама, депресивни, реактивни узрок у инверсној акцији светлосних зракова. — При развијању какве болести, изазване акцијом патогених бацила, импулсивни узрок лежи у активитету бацила, депресивни у бактерицидним и антитоксичним особинама сокова. — Вероватно је, да ће се, у маси социјалних појава, као последица симултане акције комплекса многобројних, по активитетима, конкретној природи и утицајима најразноврснијих узрока, претежан, доминирајући, импулсиван узрок наћи у каквоме перманентном утицају узастопних генерација, једне на другу, у једноме одређеном, сталном правцу и смислу; да ће се доминирајући реактивни узрок наћи у разним врстама социјалних инерција, које су н. пр. у толико осетније, у колико је појава интензивнија, или у колико је њена тренутна фаза удаљенија од једне одређене фазе, у коју би појава ушла и у којој би перманентно остала, кад не би било импулсивних и пертурбирајућих узрока, који то не допуштају; да ће се други реактивни узроци, поред масе сићушних и занемарљивих таквих узрока, наћи и у разним врстама навика, предрасуда, атавизма, у реакцијама изазваним каквим нарочитим догађајима и т. д.

Такви се конкретни узроци, предвиђени општим шемама, примењеним на посматрану специјалну појаву, имају истаћи на видик експериментом, непосредним посматрањем, или довођењем у везу факата који им егзистенцију, улогу и конкретну природу чине несумњивом, или бар вероватном. У механизму н. пр. којим Mascart објашњује оптичку појаву, наведену на стр. 696, као и у механизму на који Charpentier своди ондулације у ретини при светлосним надражајима (в. стр. 631), предвиђени се узроци констатују експериментом, оптички. — У механизму којим Richet и Broca тумаче ондулације надражљивости нервнога центра (в. стр. 628) претпостављени ритмички, интермитентни узроци, чију би улогу имали играти интермитентни церебрални импулси, постају вероватни кад се доведу у везу са фактом мишићног звука, који је констатовао Helmholtz при тетанизирању мишића испрекиданом електричном струјом. — У механизму којим Ribot тумачи патолошке појаве при продукцији вољних аката (в. стр. 633) улоге и конкретна природа шемом предвиђених узрока постају несумњиви непосредним посматрањем појава које настају кад поједини такви импулсивни, или депресивни узроци, или поједини фактори, за које су везане теренске или координативне улоге, буду ојачани или ослабљени до крајњих могућних граница; каузална веза између појединости тиме изазваних патолошких појава и фактора у претпостављеном механизму појаве, који се буду на тај начин мењали, сама је по себи очевидна, а компарацијом тако пертурбираног режима појаве са нормалним, као и одговарајућег, измењеног, механизма са првобитним, нормалним, може се извести шта се коме од тих фактора има приписати у продукцији појаве.

Тако се исто могу, по кадшто, уочити на појави какве појединости, које би одмах, без потребе дубљих испитивања, указивале на немогућност једнога уоченог механизма, или појачавале вероватноћу да такав механизам одиста одговара реалности за дати случај. Ако би се н. пр. у каквој амортизирано-осцилаторној појави експериментом констатовало, да амплитуде осцилација опадају, са својим рангом, као чланови какве *аритметичке* прогресије, механизам појаве извесно не може бити онај под 2° (стр. 706), коме одговара опадање амплитуде по *геометриској* прогресији; на против, такав начин слабљења осцилација јако повећава вероватноћу да ће ефективни механизам појаве бити онај под 4° (на наведеној страни), који је карактерисан опадањем амплитуде баш по аритметичкој прогресији. Заслуга би Математичке Феноменологије, у сличним случајевима, била у томе, што је, и без дубљег улажења у појединости појаве, на основи каткад и најповршнијих података, она у стању дати идеју о могућним и вероватним механизмима појаве, и унапред наговестити хипотезе за њену експликацију, које би имале бити полазне тачке за дубља, природњачка, испитивања.

О томе, да једна појава игра одређену улогу у механизму друге једне посматране појаве, даје, кадшто, појединих индикација и непосредно поређење самих дијаграма појава. Ма какве правилности, које се, према својој природи и своме броју, не би могле приписати простоме случају, запажене у јављању појединих особитости двају дијаграма, као што су: симултано рашћење и опадање; убрзавање или успоравање рашћења и опадања; симултани максимуми и минимуми; стално задоцнење, у једној од тих појава, у јављању таквих особитости, према њиховоме јављању у другој појави, са којом се прва упоређује и т. д. јесу индикације те врсте. Оне су, у највећем броју случајева, маскиране пертурбацијама једне масе узрока, који делују у најразличнијим правцима; ако се, тада, редукујући дијаграм појаве на дијаграм средњих вредности посматранога дескриптивног елемента, или, ослободивши га ситнијих одступања, задржи у њему само његов општи ток, могу се, често, сагледати поменуте правилности, које би имале важити за акцију најпретежнијих узрока у појави, и о којима би се, тада, могли чинити закључци поменуте врсте. Таква н. пр. компарација дијаграма истиче на видик улогу коју игра атмосферска влага у механизму мирисних еманација у цвету миришљавих биљака. — Дијаграми периодичних варијација елемената земног магнетизма и појединих елемената при кретању сунца и месеца, као и они за варијације честине сунчаних тела у току времена, истичу на видик утицај сунца и месеца, а нарочито утицај активнога фактора, што се манифестује у сунчаним пегама, на извесне магнетне појаве на земљи. — Статистички дијаграми састављају једну пространу област случајева те врсте[1]).

---

[1]) Нека је, примера ради, наведен веома инструктиван случај те врсте, на који се наилази при компарацији статистичких података о броју издатих патената за ацетиленско осветлење и, података о висини курса акција друштва за експлоатацију Auer-овог патента, као и података о појединим факторима који су давали импулса и подстрека за проналаске у тој области; одговарајући дијаграми, својим појединостима поменуте врсте, јасно истичу на видик међусобну каузалну везу појединих таквих импулса и њихових ефеката, оличених у честини броја патената у уоченом размаку времена, као дескриптивном елементу тих ефеката (в. податке и дијаграме у делу: A. Du Bois-Reymond: Erfindung und Erfinder, Berlin 1906. S. 172–180).

По себи се разуме, да би одређенији подаци, добијени таквом компарацијом, доводили и до одређенијих закључака о међусобној каузалној вези појава. Тако, најодређенији и најпотнунији међу њима: пропорционалност ордината дијаграма двеју појава (хомологи дијаграми) може се, поред осталих могућних начина схватања, сматрати и као знак могућности једнога или другога од ових фатата:

1° да је једна, од упоређених појава, непосредан и искључив узрок оне појаве, чији интензитет има за мерило дужине ордината у дијаграму друге од тих појава. Пропорционалност н. пр. између ордината дијаграма акцелерација при праволиниском кретању, и дијаграма друге какве појаве може се приписати и факту, да је ова друга појава непосредан и искључив узрок тога кретања;

2° да су обе појаве резултат акције једнога истог непосредног и искључивог узрока, која се акција, у једним конкретним приликама, манифестује у облику једне, а у другим приликама у облику друге од тих појава.

Поједини се закључци о механизму појава могу, у приликама, чинити и на геометриским облицима и распореду извесних кривих линија и површина, за које се претпоставља да играју улоге сила и еквипотенцијалних површина за активитете, из чијег стицаја резултује посматрана појава. Те су две врсте елемената, по своме облику и дистрибуцији у посматраноме феноменском пољу, карактеристични за поједине типове закона активитета, и они, кад су емпирички познати са довољном тачношћу, указују на облик таквога закона, што одговара посматраноме конкретноме случају. Тако, слике, формиране дистрибуцијом гвоздених опиљака у магнетном пољу, идентичне са онима које дају распоред линија сила у пољу какве централне силе, обрнуто пропорционалне квадрату растојања, истичу на видик факт, да су магнетне силе, силе те врсте. Геометриске слике, што представљају распореде ћелија у пресецима разних биљних делова (корена, стабла, семена) и које се са великом прецизношћу, и у свима појединостима, подударају са линијама сила или пресецима еквипотенцијалних површина што одговарају централним силама поменуте врсте[1]), указују на несумњиво учешће таквих сила при стварању целуларних поља.

На послетку, између разноврсних других појединости које се могу, о механизму појаве, сазнати из емпиричких података о њеноме току, изражених бројно, или у облику дијаграма, или у облику нарочитих, карактеристичних квалитативних особитости, нека је наведена једна, која може бити од великог интереса у применама на поједине конкретне природе појаве и која је садржана у решењу феноменолошког проблема: *одредити шта се у посматраној појави, а у датоме размаку времена, има нарочито приписати акцији једнога уоченог узрока C, за који се претпоставља да улази у састав механизма појаве.* Другим речима: шта се нарочито, у ефекту целокупнога комплекса узрока, у датоме размаку времена, истиче као последица акције тога узрока, које не би било, кад би се узрок отклонио?

Просто, интуитивно правило, које обухвата решење проблема у свима могућним случајевима, и у свима његовим варијантама, било би ово: *тражени је ефекат разлика између скупа појединости које се, у манифестацији појаве, јављају при заједничкој акцији целокупнога комплекса узрока, и оних које би се имале кад би се из комплекса уклонио узрок C.* У простим појавама, и кад је, при томе, узрок C искључиви непосредан узрок посматране просте појаве, це-

---

[1]) в. интересантне податке о томе у расправи проф. Ђ. М. Станојевића: Les forces centrales dans la Nature (Belgrade 1906).

локупна промена њенога дескриптивног елемента има се приписати искључиво акцији тога узрока. — Кад је узрок само један од делимичних непосредних узрока појаве, разлика између вредности коју би, у једноме тренутку, имао дескриптивни елеменат при заједничкој акцији целога комплекса узрока што улазе у механизам појаве, и оне која би се имала, у истоме тренутку, кад би се из комплекса уклонио узрок *C*, имала би се сматрати као непосредан и искључив ефекат тога узрока. Разлика н. пр. између брзине тешкога тела при падању кроз отпорну средину, и оне коју би тело, у истоме тренутку, имало у безваздушном простору, при истим почетним брзинама, имала би се сматрати као непосредни и искључиви ефекат отпора средине. — Кад *C* није саставни део комплекса непосредних узрока појаве, разлика вредности дескриптивнога елемента појаве није више његов непосредни и искључиви ефекат, али се, ипак, има приписати томе узроку, као један од његових посредних ефеката. Разлика н. пр. између дужине пута коју пролази тело, у датоме размаку времена, у безваздушном простору, и оне коју би тело, пошавши од исте почетне тачке и са истом почетном брзином, прешло крећући се кроз отпорну средину, један је од посредних ефеката отпора средине. — У комплексним појавама као тражени се ефекат има сматрати одступање фигуративне тачке система, при заједничкој акцији целога комплекса узрока, од положаја који би тачка, у истоме тренутку, имала кад би био отклоњен узрок *C*.

На исти би се начин, као један од ефеката уоченога узрока, имао сматрати и скуп нарочитих квалитативних појединости, који би се јављао као разлика између поменута два режима појаве; у колико те појединости буду одређеније, у толико ће то бити и сам тражени ефекат. Поменута патолошка метода Ribot-a при анализи и одређивању ефеката појединих фактора што улазе у састав механизма продукције вољних аката, и која се, у својим битним цртама, састоји у посматрању појединости манифестације појаве, које се јављају кад уочени фактор слаби до неосетности, или јача до својих екстремних граница, један је од инструктивних примера примене горњега општег правила.

Такве разлике, које би се, уочене, имале сматрати као ефекти посматраних узрока, по каткад својом незнатношћу исчезавају према ефектима осталих, претежнијих узрока, или су толико заклоњене и претрпане у маси осталих пертурбација, да их је немогућно непосредно у тој маси сагледати и разликовати од осталих појединости у манифестацији појаве. Оне се, тада, могу истаћи на видик посредно, на нарочите специјалне начине, који се мењају са природом случаја, али који се могу и шематисати, тако, да су опште, тако добијене, шеме примењиве, на један исти начин, на појаве најразноврснијих конкретних природа.

Те би врсте била н. пр. ова проста шема, која, у приликама, чини могућним констатовање неосетности утицаја претпостављенога узрока *C*: ако се један одређени аналитички израз, састављен од чланова од којих је сваки поједини везан за учешће по једнога од претпостављених узрока у механизму појаве, приступачан прецизноме мерењу, па се буде нашло да он, кад се у њему буду анулисали чланови везани за учешће узрока *C*, а у осталима се коефицијенти смене једним одређеним скупом бројних вредности, тачно одговора мерењем добијеним бројним подацима, *узрок се C има сматрати да је без осетног утицаја на ток појаве и да не улази у састав њенога механизма.* Под такву се шему може н. пр. подвести начин, на који је константовано да у састав вертикалне компоненте земног магнетизма не улазе никакве спољне магнетне силе, већ само унутарње. Gauss је, на име, из великога броја бројних података, добијених прецизним мерењем те компоненте на разним тачкама земљине површине, [чији се аналитички израз[1]) може раставити на два дела, од којих један зависи само од унутарњих, а други само од спољних магнетних маса], нашао да су сви ти подаци тачно обухваћени општим обрасцем, који се добија, кад се у поменутоме изразу занемаре сви чланови што произлазе од спољних маса, а коефицијенти чланова, што произлазе од унутарњих маса, смене скупом подесно изабраних бројних вредности.

Претпоставимо, као пример друге врсте, да је потреба, у једној маси ма каквих, познатих и непознатих, периодичних узрока, уочити и издвојити ефекат једнога одређеног, а врло слабог, периодичног узрока C, чија је акција једва осетна према акцији осталих, много јачих и претежнијих узрока, а ефекат му је, и сам по себи веома слаб, маскиран масом разноврсних пертурбација у појави. Ако се континуалан дијаграм појаве, што представља ток ове за један врло велики број периода узрока C, подели на делове, од којих сваки тачно одговара дужини једне периоде тога узрока, па се тако добијени делови суперпонирају један на други, тако, да им почетне тачке одговарају почетку, а завршне свршетку једне периоде, *дијаграм средњих вредности међу собом, тада, поклопљених ордината представљаће оне, нарочите, варијације у појави које се имају, као ефекат, приписати узроку C*, и то у толико тачније у колико је већи број тих делова, т. ј. у колико је дужи размак времена на који се распростире првобитни дијаграм. Јер, на свакоме од тих делова акција ће се узрока C вршити на један исти начин: рашћење, опадање, максимуми и минимуми одговараће истим

---

[1]) В. н. пр. Mascart-Joubert: Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme, t. I. p. 475.

тачкама на свима тим деловима дијаграма; на против, акције осталих узрока, са периодама различним од периоде узрока *C*, због периодичности тих узрока, час су у једноме, час у другоме смислу, а међутим ће се све те неправилности, по закону великих бројева, међу собом потрти у дијаграму средњих вредности ордината, тако, да ће у овоме остати само оно, што се има приписати акцији узрока *C*. — Под такву се шему може н. пр. подвести начин, на који је откривен и прецизно одређен утицај месеца на промене облика земаљске коре, чији се ефекат манифестује у облику периодичних, врло слабих, деформација коре. Улогу слабога периодичног узрока *C* играла је, при томе, атрактивна сила месеца, са периодом разлнчном од периода осталих, много претежнијих узрока (атрактивне силе сунца, термичних утицаја на кретање клатна, чији је дијаграм био основица за решење проблема и т. д.).[1] Максимална деформација коре (која се јавља периодично, у размацима од 12 сах.) и која се има сматрати као ефекат утицаја месеца, износи н. пр. за Потсдам 20 сантиметара. Иста је шема применљива и на одредбу утицаја слабих периодичних узрока у појавама океанских плима и осека.

◆

---

[1] Revue gènèrale des Sciences pures et appliquées, № du 30. Mars 1909 p. 241—242.

ШЕСТИ ОДЕЉАК

Феноменолошке аналогије.

ПРВА ГЛАВА.

МАТЕМАТИЧКЕ АНАЛОГИЈЕ.

Аналошке групе и њихови хомологи елементи. — Погодбе за аналитичку еквиваленцију појава. — Хомологи елементи неколиких простијих аналошких група: група експоненцијалних појава; група амортизираних осцилаторних појава; кретање чврстог тела око утврђене осовине и њему одговарајућа електрична појава; стационарна стања електрицитета, стационарна термична стања и перманентно, иротационо кретање некомпресибилних течности; појаве обухваћене Thomson-овим и Lippmann-овим аналогијама; осмотичне, еластичне и економске појаве; група моноцикличних појава; група бицикличних појава; механичке илустрације и механички модели појава. — Феноменолошки, философски и практични, значај математичких аналогија.

Из свега, што је напред изложено, нарочито се издваја један факт, који и наводи на идеју о оваквој концепцији целокупности појава, каква је изведена у овој књизи: *феноменолошке аналогије међу разнородним појавама*, у којима конкретна природа ових не игра никакву улогу, поред свега тога што оне задиру баш у карактеристичне, каткад и најбитније појединости појава. То су аналогије које се могу запазити: у механизмима појава, у природи и комбинацијама улога појединих, међу собом разнородних, фактора у њима; у начину на који се узастопна тренутна стања, у току појаве, нижу једно за другим; у перманентним законима и математичким релацијама што регулишу појаве, или што везују промене појединих елемената и фактора у њима и т. д.

Аналогије су, међу појавама, *квантитативне* или *квалитативне*, према томе да ли су појединости, обухваћене у њиховоме језгру, квантитативне или квалитативне природе. Најсавршенији, најпотпунији тип феноменолошких аналогија јесу *математичке аналогије*, које се састоје у истоветности математичких релација што регулишу њима обухваћене појаве. Та се истоветност, тада, распростире и на *број* једначина (диференцијалних или експлицитних), којима су те релације изражене, и на њихов *аналитички облик* у погледу на елементе и параметре појава, њихове изводе, или друге комбинације, и на константе што фигуришу у тим једначинама.

Нека је

$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \cdots \tag{512}$$

једна група појава, карактерисана међусобном математичком аналогијом (једна *аналошка група* појава); формирајмо таблицу елемената, параметара, њихових извода или других комбинација, и констаната што фигуришу у једначинама појава:

$$\begin{array}{l} \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1, \cdots \\ \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2, \cdots \\ \alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3, \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \tag{513}$$

где се елементи i-те линије односе на појаву Φ_i. Факт, да је група (512) једна аналошка група, повлачи собом могућност, да се таблица (513) уреди на такав један начин, да се од једначине једне, ма које, од појава Φ_i прелази на другу, ма коју, појаву Φ_j исте аналошке групе, сменивши у једначинама прве

$$\begin{array}{lcl} \alpha_i & \text{са} & \alpha_j \\ \beta_i & \text{са} & \beta_j \\ \gamma_i & \text{са} & \gamma_j \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Елементи таблице, који на тај начин одговарају један другоме, јесу *хомологи елементи* аналошке групе. Јасно је, из свега што је напред изложено, да је за један низ хомологих елемената везана, у механизму појаве, по једна улога исте природе за све појаве што припадају групи.

I. Погодбе за аналитичку еквиваленцију појава.

Непосредни аналитички разлог егзистенције математичких аналогија, међу појединостима појава једне аналошке групе, лежи у истоветности броја и аналитичког облика самих диференцијалних једначина групе, које у себи обухватају све те појединости. Та истоветност чини да квантитативне дескрипције тих појава, ма колико ове биле међу собом диспаратне, представљају један исти аналитички проблем, који се састоји у интеграцији, дискусији и интерпретацији једних истих једначина, а што чини да су одговарајуће појаве међу собом *аналитички еквивалентне*. Математичке су аналогије међу појавама једна од непосредних последица њихове аналитичке еквиваленције.

Међутим, и то је оно што је од највећега феноменолошког интереса, *погодбе се за еквиваленцију могу резимирати у једној јединој погодби, везаној за састав самога механизма појаве*. На име, за механизам је сваке појединe појаве везана таква једна функција Δ њених дескриптивних елемената и извода ових по времену, а чији аналитички облик зависи непосредно од састава тога механизма, *да се потребна и довољна погодба за еквиваленцију једне групе појава састоји у томе, да та функција има за све појаве у групи један исти облик.*

Тако, раније је показано, да се, за појаве са слободним системом, или са везама прве или друге врсте, било да је систем холономан или нехолономан, и ма колики му био степен слободе, једначине добијају деривацијом из једне једине функције, везане за састав механизма појаве и која се увек може формирати у експлицитноме облику, кад се знају: примарни систем у појави, везе у овоме и закони варијација активитета, везаних за активне улоге у њеноме механизму. На име:

1° кад је систем са везама *прве* врсте и са k степена слободе, ако се формира одговарајућа функција Θ, (чији је закон формације наведен на стр. 171), која зависи само од елемената система и веза између ових, и за тим функција

$$J = Q_1 q_1' + \cdots + Q_k q_k'$$

која зависи само од динамичке природе активних и реактивних узрока што изазивају појаву (в. стр. 171—174), па се, помоћу њих, формира функција

$$P = \Theta - J$$

диференцијалне су једначине појаве

$$\frac{\partial P}{\partial q_1'} = o \cdots \frac{\partial P}{\partial q_k'} = o$$

Означимо са Ψ скуп оних чланова у функцији P, који зависе од *првих* извода елемената редукованог система по времену; поменута је погодба, за уочени случај, исказана у овој теореми:

Да би једна група појава, са везама прве врсте, представљала једну аналошку групу, потребно је и довољно да одговарајуће функције Ψ буду једнога истог облика за све појаве у групи.

2° кад је систем са везама *друге* врсте и са k степена слободе, ако се формира одговарајућа функција S (чији је закон формације наведен на стр. 178), која зависи само од елемената система и веза између ових, и за тим функција

$$K = Q_1 q_1'' + \cdots + Q_k q_k''$$

која зависи само од природе узрока што изазивају појаву, па се, помоћу њих, формира функција

$$R = S - K$$

диференцијалне су једначине појаве

$$\frac{\partial R}{\partial q_1''} = o \cdots \cdot \frac{\partial R}{\partial q_k''} = o$$

Означимо са ***Φ*** скуп оних чланова у функцији R, који зависи од *других* извода елемената редукованог система по времену: горња је погодба, за такав случај, исказана у овој теореми:

*Да би једна група појава, са везама друге врсте, представљала једну аналошку групу, потребно је и довољно да одговарајуће функције **Φ** буду једнога истог облика за све појаве у групи.*

3° кад је систем *слободан*, са k елемената примарног система, погодба је исказана једном или другом од теорема наведених под 2° и 3°.

Ове опште теореме, које дају критеријум за аналитичну еквиваленцију појава свих врста, обухватају како појаве са холономним, тако и оне са нехолономним системом, и са узроцима ма какве динамичке природе. У специјалнијем случају, кад су појаве посматране групе *потенцијалне*, погодбе се за еквиваленцију могу исказати још на један начин, независан од природе веза у систему. Раније је показано да се, за такву једну појаву, једначине што је регулишу добијају, и то у своме коначном, експлицитном облику, деривацијом из једне једине функције V, која се добија као потпун интеграл

Jacobi-еве парцијалне диференцијалне једначине, везане за дату појаву. Ова се, пак, диференцијална једначина и сама добија деривацијом из Hamilton-ове функције H што одговара појави, из које се, у осталом, и диференцијалне једначине појаве добијају у своме каноничном облику. *Једна група потенцијалних појава представљаће, дакле, једну аналошку групу, кад год је функција H једнога истог облика за све појаве у групи.*

На послетку, за случај кад су појаве *конзервативне*, раније је показано да свакој појави одговара по једна класа варијетета (C), оноликога реда, колики је степен слободе у појави, и која је таква, да су проучавање геометриских и кинетичких појединости појаве, и одредба геодезиских линија те класе варијетета два идентичка проблема. Према томе се, за тај случај, горњој теореми може дати и овај геометриски облик:

Једна ће група конзервативних појава представљати једну аналошку групу, кад год свима појавама групе одговара једна иста класа варијетета (C).

Језгро аналогије међу аналитички еквивалентним појавама састоји се у егзистенцији заједничке функције Δ (чију улогу играју горе наведене функције Ψ, Φ, H), чијом се деривацијом добијају заједничке диференцијалне једначине појава, или у егзистенцији заједничких варијетета (C).

II. Хомологи-елементи неколиких простијих аналошких група.

I. Група експоненцијалних појава, која обухвата непрегледан број диспаратних појава, регулисаних заједничком диференцијалном једначином

$$q' + \lambda q = 0$$

где је q дескриптивни елеменат појаве, а λ константа. Појединости су појава обухваћене општом шемом наведеном на стр. 494—496.

Група постаје још пространија кад јој се придодају и појаве у којима феноменолошку улогу времена игра какав просторни елеменат; као што је поменуто, она н. пр. обухвата:

1° појаву апсорпције једне радијације у хомогеној средини, кроз коју ова пролази;

2° појаву мењања барометарског притиска са висином, у атмосфери униформне температуре;

3° појаву хлађења чврстог тела зрачењем;

4° појаву електричног испаравања на површини наелектрисане течности и т. д.

Хомологи су елементи групе истакнути у овој таблици:

Редни број појаве	q	t	λ
1°	интензитет радијације	дебљина апсорбујућег слоја	специфична апсорбујућа моћ слоја за јединицу дебљине
2°	барометарски притисак	висина	специфична депресивна моћ атмосфере за јединицу висине
3°	температура тела	време хлађења	специфична депресивна моћ средине за јединицу времена
4°	електрично оптерећење на површини течности	време испаравања	специфична депресивна моћ средине за јединицу времена

Улогу функције **Δ** игра израз

$$\Psi = \frac{1}{2} q'^2 - \lambda q q'$$

II. Група амортизирано-осцилаторних појава, регулисаних заједничком диференцијалном једначином

$$k q'' + m q' + n q = o$$

где је q дескриптивни елеменат појаве, k, m, n позитивне константе, и где улогу функције Δ игра израз

$$\Phi = \frac{1}{2} kq''^2 + mq'q'' + nqq''$$

Појединости су појава обухваћене шемом, наведеном на стр. 513—516; група обухвата н. пр. раније наведене конкретне појаве:

1° лагано кретање клатна кроз какву отпорну средину, која би давала отпор пропорционалан брзини кретања;

2° вибрисање дијапазона кад је унутарњи отпор овога пропорционалан брзини вибрација;

3° испражњавање електричних кондензатора;

4° осцилације нивоа течности у двама судовима, везаним каквом хоризонталном цеви и т. д.

Хомологи су елементи дати овим таблицама:

РЕДНИ БРОЈ ПОЈАВЕ	q	k	m	n
1°	елонгација	маса клатна	коефицијенат отпора	тежина јединице дужина клатна
2°	елонгација	моменат инерције	коефицијенат отпора	коефицијенат еластичности
3°	електрично оптерећење	коефицијенат ауто-индукције	електрични отпор	реципрочна вредност капацитета
4°	разлика нивоа	маса течности	коефицијенат отпора	тежина јединице висине течног стуба

РЕДНИ БРОЈ ПОЈАВЕ	$-kq''$	mq'	nq
1°	сила инерције	механички отпор	хоризонтална компонента теже
2°	сила инерције	механички отпор	еластична сила
3°	електромоторна индукована сила	контра-електромоторна сила	електростатична сила
4°	сила инерцчје	трење	тежина помереног дела течности

III. Појава кретања чврстог тела око утврђене осовине, са отпором средине пропорционалним брзини кретања, и појава мењања јачине електричне струје у проводнику са осетним електричним отпором и аутоиндукцијом, регулисане су заједничком диференцијалном једначином

$$kq' + nq - m = 0$$

где су k, n, m позитивне константе. Појединости су појава обухваћене шемом навеленом на стр. 498—500; улогу функције Δ игра израз

$$\Psi = \frac{1}{2} kq'^2 + nqq' - mq'$$

а хомологи се елементи виде из ове таблице:

ПОЈАВА	q	k	m	n
механичка	угловна брзина	моменат инерције	моторни спрег	специфични отпор средине
електрична	јачина струје	коефицијенат ауто-индукције	електромоторна сила	електрични отпор

IV. Стационарна стања електрицитета, стационарна стања топлоте при њеноме распростирању кроз хомогене средине, и перманентно иротационо кретање некомпресибилних течности, састављају једну аналошку групу која је играла једну важну улогу у развићу читавих одељака модерне Математичке Физике.

Уочимо, најпре, један скуп наелектрисаних проводника у каквој диелектричној средини. Означивши са V електрични потенцијал система (који је функција геометриских координата), стационарно је стање карактерисано таквом једном дистрибуцијом потенцијала у тој средини, која задовољава Laplace-ову једначину [1])

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = o\,; \tag{514}$$

на површинама свих проводника потенцијал има, тада, једну исту, сталну вредност.

Означивши са X, Y, Z компоненте електростатичног поља у једној тачки $P\,(x, y, z)$, а са k специфичну индукторску моћ диелектричне средине, израз

$$k\,\Delta V = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \tag{515}$$

где ΔV означује леву страну једначине (514), представља флукс електростатичне силе, који излази из јединице запремине, посматране у тачки P. Једначина (514) или

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = o \tag{516}$$

изражава факт, да је тај флукс једнак нули за све тачке диелектричне средине: то је *једначина континуитета* посматранога поља. Електрично је поље у једној, ма којој, тачки управно на еквипотенцијалној површини што пролази кроз ту тачку; линије сила у пољу секу све те површине ортогонално.

Претпоставимо, сад, да је диелектрична средина смењена каквом средином што проводи топлоту, хомогеном и изотропном; да је, за тим, сваки од наелектрисаних проводника смењен по једним топлотним извором, који ослобођава или апсорбује топлоту и да му се на површини одржава стална температура, једна иста за све те изворе. Нека су X, Y, Z компоненте топлотног флукса у тачки $P\,(x, y, z)$, карактерисаној

---

[1]) В. трећи одељак, другу главу.

температуром V, и нека је k коефицијенат проводљивости средине. Кад је појава термичких модификација у систему ушла у стационарно стање, поменути су фактори непрестано везани једначином (515), а једначина (514) исказује факт, да је топлотни флукс, што излази из јединице површине посматране у тачки P, једнак нули за све тачке средине: то је једначина континуитета за тај флукс. Једначина

$$V = const$$

дефинише изотермичне површине; топлотни је флукс, у свакој тачки управан на изотермичној површини што пролази кроз ту тачку; линије флукса, у проводној средини, секу све те површине ортогонално.

Уочимо, на послетку, одговарајућу хидродинамичку појаву: претпоставимо да је диелектрична средина, у првој појави, смењена каквом течношћу, некомпресибилном и без трења, а да су наелектрисани проводници смењени порозним површинама, и да је брзина течности, у свакој тачки једне такве површине, управна на овој. Претпоставимо, за тим, да је кретање течности иротационо; зна се, да тада постоји једна функција V геометриских координата (потенцијал брзина), која постаје једнака нули за тачке у бескрајности (као и одговарајуће функције V: електрични потенцијал и температуре у првој и другој од појава аналошке групе, о којој је овде реч), и која, за све тачке P (x, y, z) течности задовољава Laplace-ову једначину (514). Између компонената X, Y, Z брзине у тачки P, потенцијала брзина V и коефицијента пермеабилитета k постоји, и у овоме случају, у теорији појаве позната релација (515), чија лева и десна страна дају разне изразе за флукс течности који излази из јединице запремине, посматране у тачки P. Једначина 515), тада, исказује факт, да је тај флукс једнак нули за све тачке простора заузетог течношћу. т. ј. да ни у једној тачки тога простора не може бити нагомилавања течности: то је, дакле, једначина континуитета за брзине. Једначина

$$V = const$$

дефинише еквипотенцијалне површине; брзина је, у свакој тачки P, управна на еквипотенцијалној површини што пролази кроз ту тачку; линије флукса (трајекторије молекула течности) секу све те површине ортогонално.

И у опште, аналогија је, између појава ове аналошке групе, тако потпуна, да се сваки резултат, добијен у једној, ма којој, од њих, може, придавши му само одговарајуће конкретно значење, пренети на остале појаве у групи; хомологи су елементи, при томе, истакнути у овој таблици:

ПОЈАВА	V	X, Y, Z	k
електрична	електрични потенцијал	компоненте електростатичног поља	специфична индукторска моћ средине
термичка	температура	компоненте топлотног флукса	коефицијенат проводљивости
хидродинамичка	потенцијал брзина	компоненте брзина	коефицијенат пермеабилитета

V. У Thomson-овим и Lippmann-овим аналогијама, које обухватају принцип одржања материје, принцип одржања електрицитета и Carnot-ов термодинамички принцип у његовим разним манифестацијама, као и разноврсне и многобројне аналитичке последице тих принципа[1]), хомологи су елементи дати овом таблицом:

---

[1]) Lippmann: Extension du principe de Carnot etc. (C. R. de l'Acad. des Scienes t. LXXXII. 1876. p. 1425. — Journal de Physique 1881. 381—394. — Unités electriques (Paris).

ПОЈАВА	I ЕЛЕМЕНАТ	II ЕЛЕМЕНАТ	III ЕЛЕМЕНАТ
атракција	Newton-ов потенцијал	количина материје	механичка енергија
електрична	електрични потенцијал	количина електрицитета	електрична енергија
термодинамичка	апсолутна температура	ентропија	количина топлоте

Од нарочитога је интереса, у тој аналошкој групи, факт да количина електрицитета има за хомологи елеменат, у термодинамичким појавама, не количину топлоте, већ ентропију S, дефинисану обрасцем

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

где је Q количина топлоте, а T апсолутна температура. Принцип одржања електрицитета постаје, тада, аналог Carnot-овом принципу, који доводи до једначине

$$\int dS = o$$

за све кружне, реверзибилне, процесе, и изражава се погодбом да је dS потпун диференцијал; Carnot-ов принцип се, према томе, и по аналогији са принципом одржања електрицитета, може сматрати и као принцип одржања ентропије.

VI. У аналогијама између појава, које у семи-пермеабилним дијафрагмама изазива осмотични притисак јако разређених раствора, и оних, које у савршеним гасовима изазива еластична сила гаса, најважнији су хомологи елементи истакнути у овој таблици:

ПОЈАВА	I ЕЛЕМЕНАТ	II ЕЛЕМЕНАТ
еластична	еластична сила гаса	запремина гаса
осмотична	осмотични притисак раствора	реципрочна вредност концентрације раствора

Mariotte-овом н. пр. закону за савршене гасове

$$pv = const$$

одговара, за осмотичне појаве, закон

$$\frac{P}{C} = const$$

где је P осмотични притисак раствора, а C концентрација овога; Gay-Lussac-овом закону

$$pv = RT$$

одговара закон

$$\frac{P}{C} = R'T$$

где су R и R' независни од елемената што фигуришу у тим једначинама (Pfeffer, Hamburger, Donders, de Vries и т. д.); Avogadro-вом закону за савршене гасове, одговара, за извесне растворе, закон према коме: у једним истим погодбама, у погледу температуре и осмотичног притиска, једнаке запремине разних раствора садрже један исти број молекула. На обе су врсте појава примењљиви принцип одржања енергије и Carnot-ов принцип, са свима својим аналитичким последицама, које су, разликујући се само у конкретном значењу фактора на које се односе, једнога истога облика за обе врсте појава.[1]

Иста би аналошка група, према једној од новијих економских теорија, имала обухватити и извесне економске појаве у социјалним срединама. Према теорији, о којој је реч, између термичних појава у гасовима и економских појава постоје тако потпуне математичке

---

[1] В. о појединостима ових аналогија н. п. расправу R. Lespieau: Sur la pression osmotique [Conférences faites au laboratoire de M. Friedel III. fasc. 1889—1890].

аналогије, да се целокупна Термодинамика, подесном интерпретацијом њених једначина и резултата, може, у границама тачности основних, при томе учињених хипотеза, трансформисати у једну математичку теорију економских појава.[1] Најважнији су хомологи елементи истакнути у овој таблици:

ПОЈАВА	I ЕЛЕМЕНАТ	II ЕЛЕМЕНАТ	III ЕЛЕМЕНАТ	IV ЕЛЕМЕНАТ	V ЕЛЕМЕНАТ	VI ЕЛЕМЕНАТ
термична	притисак	температура	**запремина**	**количина топлоте**	енергија	**механички рад**
економска	понуда	тражња	**вредност**	**капитал**	богаство	**економски рад**

Они играју истоветне улоге у одговарајућим физичким и економским појавама: са једне стране, у мењању запремине, притиска, температуре и т. д. у физичким појавама, са друге стране у променама економских вредности, акумулацијама капитала, репартицији богаства и т. д. при променама у једној економској средини, и фигуришу на истоветан начин у одговарајућим једначинама што регулишу те појаве.

Тако, вредност v, понуда p и тражња T везане су, за довољно мале промене тих елемената, релацијом

$$pv = RT$$

где је R константа чија вредност зависи од природе објекта, за који је везана вредност v. Истоветност те релације са оном, која исказује Gay-Lussac-ов закон за промене запремине, притиска и температуре савршених гасова, допушта н. пр. да се тражња (економска температура) скалира и мери променама које капитал изазива на вредностима, на начин сличан ономе на

---

[1]) Коста Стојановић: Основе **теорије економских** вредности (С. Кр. Академија, 1810).

који се температура мери по променама, које топлота изазива на запреминама. За њено је мерење, шта више, могућно удесити и једну конвенционалну скалу, потпуно аналогу оној за температуру, и где би н. пр. апсолутна нула одговарала економскоме стању у коме су вредности нуле, где нема никаквих размена, и где се, као што је случај у почецима јављања културе, економска средина изједначује са обичном, физичком средином.[1])

Процес је стварања економских вредности, у опште, а према тој теорији, аналог појави ширења тела, и на горњој једначини, као и на општијим једначинама облика

$$f(p, v, T) = o$$

(које би у термичким појавама одговарале случајевима одступања од Gay-Lussac-овог закона) могу се проучавати економске промене за $T = const$, или за $p = const$ на начин истоветан са оним, на који се проучавају изотермне и адиабатичне промене у термичним појавама, или као што би се могле проучавати одговарајуће, сличне промене у појавама осмозе.

Принцип одржања енергије и Carnot-ов принцип примењиви су, према истој теорији, на један исти начин, са свима својим последицама, у обема врстама појава. Количник н. пр.

$$\frac{Q}{\tau} = A$$

између капитала и економског рада, кад би се водио рачун о свима утрошцима рада на стварање капитала, и на све начине његовог трошења у економским појавама, имао би бити сталан број, коме би, у термодинамичким појавама, одговарао термички еквиваленат

---

[1]) К. Стојановић: loc. cit. стр. 65—71.

рада, а његова би изврнута вредност $B = \frac{1}{A}$ одговарала механичком еквиваленту топлоте J.

Првој енергетичкој једначини

$$dE = d\tau + JdQ$$

где је dE прираштај тоталне енергије у систему, $d\tau$ прираштај рада, dQ прираштај количине топлоте, имала би одговарати економска једначина истога облика, где би dE био прираштај капитала, и где би се J имало сменути економском константом B. Једначина би, тада, имала изражавати принцип одржања енергије у економским појавама, према коме би прираштај богаства једне економске средине био једнак збиру прираштаја економског рада и акумулисаног капитала у тој средини.

Кад би се рад $d\tau$ трошио на стварање вредности по закону облика

$$p\,dv = -d\tau$$

(где је p понуда, а v вредност), сличном ономе по коме се рад троши на промене запремине гаса, горња би једначина добила облик

$$dE = J\,dQ - p\,dv$$

истоветан са обликом одговарајуће термодинамичке једначине.

Тако би исто, на обе врсте појава, а у случају кад су ове реверсибилне, имала бити примењива и друга енергетичка једначина

$$\int \frac{dQ}{T} = o$$

или, у случају кад су појаве иреверсибилне, енергетичка неједначина

$$\int \frac{dQ}{T} < o$$

где би се Q и T имали сменути хомологим елементима датим у горњој таблици, а чиме би се добио заједнички облик закона ентропије за појаве обе врсте, са свима својим енергетичким последицама. Тако дефинисана ентропија играла би, при економским трансформацијама, улогу фактора трансформације, сличну оној што је везана за такав фактор у термодинамичким трансформацијама, и т. д.

VII. Група моноцикличних појава, о којој је била реч у применама Lagrange-евих једначина, и која обухвата велики број диспаратних појава, представља једну, са општег феноменолошког гледишта, врло интересантну аналошку групу. Функција T, што фигурише у Lagrange-евим једначинама тих појава, има, као што је раније казано, облик

$$2T = Aq_1'^2$$

где је q_1 циклична координата система, а A одређена функција координата са спорим варијацијама. Једначина је, за ту координату, облика

$$\frac{d}{dt}(Aq_1') = Q_1 \tag{517}$$

а за координате са спорим варијацијама $q_2, q_3 \cdots$

$$-\frac{q_1'^2}{2}\frac{\partial A}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 2, 3 \cdots) \tag{518}$$

Једначине (518) дају израз компонената тежња Q_i у правцима q_i, потребних да би се брзина q_1' и координате q_i мењале толико споро, да би се могле сматрати као сталне за време трајања појаве.

Из тих се једначина непосредно изводе ове последице, које су од интереса по математичким аналогијама што се у њима скривају и које је запазио Helmholtz[1]). Множећи н. пр. једначину (517) са

$$q_1' \, dt$$

добија се

$$q_1' \, d(Aq_1') = Q_1 \, q_1' \, dt = Q_1 \, dq_1$$

тако, да ако се стави да је

$$Q_1 \, dq_1 = - dT_1 \tag{519}$$

$$\frac{dT}{dq_1'} = Aq_1' = - s_1 \tag{520}$$

добија се једначина

$$q_1' \, ds_1 = dT_1 \tag{521}$$

Међутим, израз dT_1, дефинисан обрасцем (519), представља, очевидно, рад спољних сила које успоравају промене цикличке координате q_1; израз s_1, дефинисан обрасцем (520), представља моменат промена те исте координате. Према једначини (521) има се овај резултат:

Израз је

$$\frac{dT_1}{q_1'}$$

тоталан диференцијал и једнак је диференцијалу момента промена цикличке координате.

Исто тако, из израза за T и једначине (519) налази се да је

$$\frac{dT_1}{T} = \frac{2ds_1}{Aq_1'}$$

а пошто је из (520)

$$Aq_1' = - s_1$$

---

[1]) Journ. f. die reine und angewandte Mathematik Bd. 97. 1884; Bd. 100. 1887.

то се добија

$$\frac{dT_1}{T} = -\frac{2ds_1}{s_1} = d\,log\frac{1}{s_1^2} \tag{522}$$

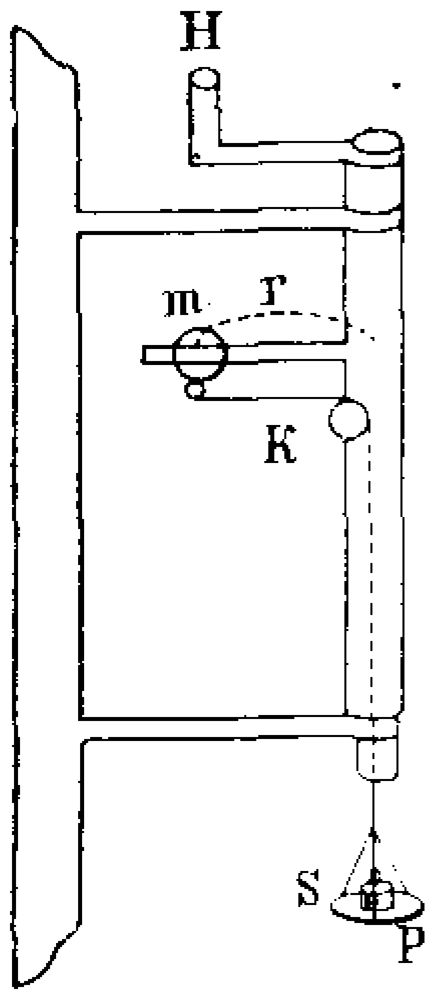
што исказује овај резултат:

Израз је

$$\frac{dT_1}{T}$$

за сваку моноцикличну појаву тоталан диференцијал.

Ови основни резултати имају, као своје непосредне или удаљеније последице, велики број аналитичких резултата, а понаособ оне што састављају данашњу Термодинамику. Они су извор многобројних математичких аналогија међу појавама, од којих ће се овде, примера ради, навести неке што су уочене за механичке и термичне појаве.



Сл. 38.

Уочимо, као пример механичке моноцикличне појаве, Boltzmann-ов механички систем[1]), састављен из једне вертикалне цилиндричне цеви (сл. 38), која се ручицом *H* може окретати око своје осовине и која на једној, на њој управној, полузи носи тешко тело масе *m*, врло мале запремине, покретно дуж те полуге. За тело је утврђен крај једнога конца који прелази преко колотура *K*, улази у цев, силази низ ову и на своме доњем крају носи један терет *p*. Претпоставља се, поред тога, да је транслаторно кретање масе *m*, као и ротационо кретање цеви, без осетнога трења, и да су, осим тешкога тела *m* и терета *p*, сви остали делови система без осетне масе.

---

[1]) Boltzmann: Vorlesungen über Maxwells Theorie der Electricität und des Lichtes, I. Th. S. 8.

Појава кретања система је са два степена слободе и одређена је са два дескриптивна елемента: одстојањем q_2 масе m од осовине цеви, и углом q_1 за који се цев, при своме окретању, померила од једнога утврђеног почетног положаја.

Нека се стави, краткоће ради, да је

$$q_2 = r \qquad q_1 = l \qquad q_1' = l_1' = \omega$$

Мењајући терет p на подесан начин, може се учинити, да се брзина r' мења на какав се хоће начин, па, дакле, и тако, да она буде неосетна, т. ј. да се r одржава приближно стално у току кретања система. Растојање r играће, тада, улогу координате са спорим варијацијама, а угао l улогу цикличке координате у посматраноме кретању, као моноцикличној појави.

Функција се T своди на израз

$$T = \frac{1}{2} A q_1'^2 = \frac{1}{2} A\omega^2$$

где је

$$A = mq_2^2 = mr^2$$

и Lagrange-еве ће једначине бити: за цикличку координату

$$\frac{d}{dt}(mr^2\,\omega^2) = Q_1$$

(где је Q_1 механичка сила, непосредно примењена на кретање ручице), а за координату са спорим варијацијама

$$-m\omega^2 r = Q_2 \tag{523}$$

где је Q_2 сила непосредно примењена на мењање растојања r.

Пошто је, при виртуалној промени δr растојања r учињен рад $-p\delta r$, (јер се Q_2 противи повећавању растојања r), то је

$$Q_2 = - p$$

тако, да једначина (523) постаје

$$p = m\omega^2 r$$

и исказује начин на који би се имао мењати терет p, да би се растојање r одржало приближно стално.

Рад dT_1 спољне силе, примењене на кретање ручице H, употребљен је, делом на повећање живе силе

$$\frac{1}{2} mr^2 \omega^2$$

масе m, делом на дизање терета p за дужину dr, тако, да је

$$dT_1 = d\left(\frac{1}{2} mr^2 \omega^2\right) + pdr =$$

$$= mr^2 \omega \, d\omega + 2m\omega^2 r \, dr = \frac{mr^2 \omega^2}{2} \left(\frac{2d\omega}{\omega} + \frac{4dr}{r}\right) =$$

$$= T \, d \log (r^4 \omega^2)$$

Израз је, дакле,

$$\frac{dQ}{T}$$

тотални диференцијал једне функције V, као што је и предвиђено у горњој општој шеми моноцикличних појава; функција V има, за овај специјални случај, облик

$$V = \log (r^4 \omega^2)$$

Уочимо, сад, овој механичкој појави аналоге термичне појаве. Нека је посматрано стање једнога тела, или система тела, одређено његовом апсолутном температуром θ и извесним бројем параметара $q_1, q_2, \dots$ изабраних тако, да промена температуре θ, кад се, при томе, не би у једно исто време мењали и параметри q_i, не захтева никакви други облик рада, до једну одређену количину топлоте. Ти параметри могу н. пр. дефинисати геометриске елементе (запремину и т. д.), или количину материје у одређеној запремини, или количину електрицитета и т. д.

Нека је

$$Q_i \, dq_i$$

рад спољних узрока, који није трансформисан у топлоту и који одговара преласку вредности параметра q_i на $q_i + dq_i$. Нека је, за тим, U тотална унутарња енергија система, а S његова ентропија. Све ће ове количине

$$Q_i, \ U, \ S$$

бити функције температуре θ и параметара q_i.

Ако се са dQ означи количина топлоте, која је придошла у систем кад се величине θ и q_i буду бескрајно мало измениле (и то кад се топлота мери својим радним еквивалентом), између свих ових количина постоје релације

$$dQ = dU + \Sigma Q_i \, dq_i$$

$$dQ = \theta \, dS$$

које представљају основне термодинамичке једначине.

Међутим, ако се, по Helmholtz-у, и као што је раније објасњено, термичне промене сматрају као једна врста моноцикличних појава, тако да улогу цикличне координате игра средња брзина материјалних делића у кретању, а улогу параметара q_i елементи чије споре варијације буду пратиле промене те брзине (геометриски елементи при ширењу тела, електрично стање тела и т. д.) и ако се са dT_1 означи тоталан рад силе, примењене на циклично кретање система, а са T жива сила при томе кретању, према напред нађеној особини моноцикличких кретања израз ће

$$\frac{dT_1}{T}$$

бити тотални диференцијал једне функције.

Али, по механичкој теорији топлоте рад је dT_1 пропорционалан количини dq топлоте произведене тим радом, са погодбом да је овај целокупан употребљен на промене термичног стања система. Тако исто, температура је θ пропорционална живој сили при цикличном кретању.

Према томе, и према једначини (519) израз ће

$$\frac{d\dot{q}}{\theta}$$

бити тоталан диференцијал једне функције S пропорционалне функцији V, тако, да је

$$dq = \theta \, dS$$

и та функција, према томе, није ништа друго до ентропија систнма.

Основне једначине Термодинамике биле би, дакле, обухваћене математичким аналогијама, које проистичу из опште шеме моноцикличних појава. У њима су садржане све појединости тих аналогија, које би се из њих, до најситнијих факата, извеле на исти начин, на који се резултати, што састављају Термодинамику, изводе из поменутих двеју основних термодинамичких једначина. Хомологи би елементи н. пр. између горе наведене механичке појаве те врсте и термодинамичких промена, били дати овом таблицом:

ПОЈАВА	I ЕЛЕМЕНАТ	II ЕЛЕМЕНАТ	III ЕЛЕМЕНАТ	IV ЕЛЕМЕНАТ	V ЕЛЕМЕНАТ
механичка	угловна брзина	одстојање масе од обртне осовине	функција V	жива сила система	рад спољне силе
термичка	средња брзина цикличног кретања	геометриски елементи при ширењу тела	ентропија	температура	количина топлоте

Нека је поменуто и то, да постоје и специјалније аналогије између термодинамичких појава и истицања воде из каквога резервоара, при којима су хомологи елементи дати овом таблицом:

ПОЈАВА	I ЕЛЕМЕНАТ	II ЕЛЕМЕНАТ	III ЕЛЕМЕНАТ
термодинамичка	висина воде	механичка енергија воде у паду	количина истекле воде
хидродинамичка	температура	количина топлоте	ентропија

VIII. Група бицикличних појава такође је од интереса због аналогија, на које се у њој наилази, између многобројних, њоме обухваћених диспаратних појава. Као што је раније казано, ако су q_1 и q_2 цикличке координате у појави, q_3, $q_4 \cdots$ координате са спорим варијацијама, функција је T облика

$$T = Aq_1'^2 + 2Cq_1'q_2' + Bq_2'^2$$

где су A, B, C функције самих координата са спорим варијацијама; Lagrange-еве су једначине за цикличке координате

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(Aq_1' + Cq_2') = Q_1 \\ (524) \qquad &\frac{d}{dt}(Cq_1' + Bq_2') = Q_2 \end{aligned}$$

а за координате са спорим варијацијама

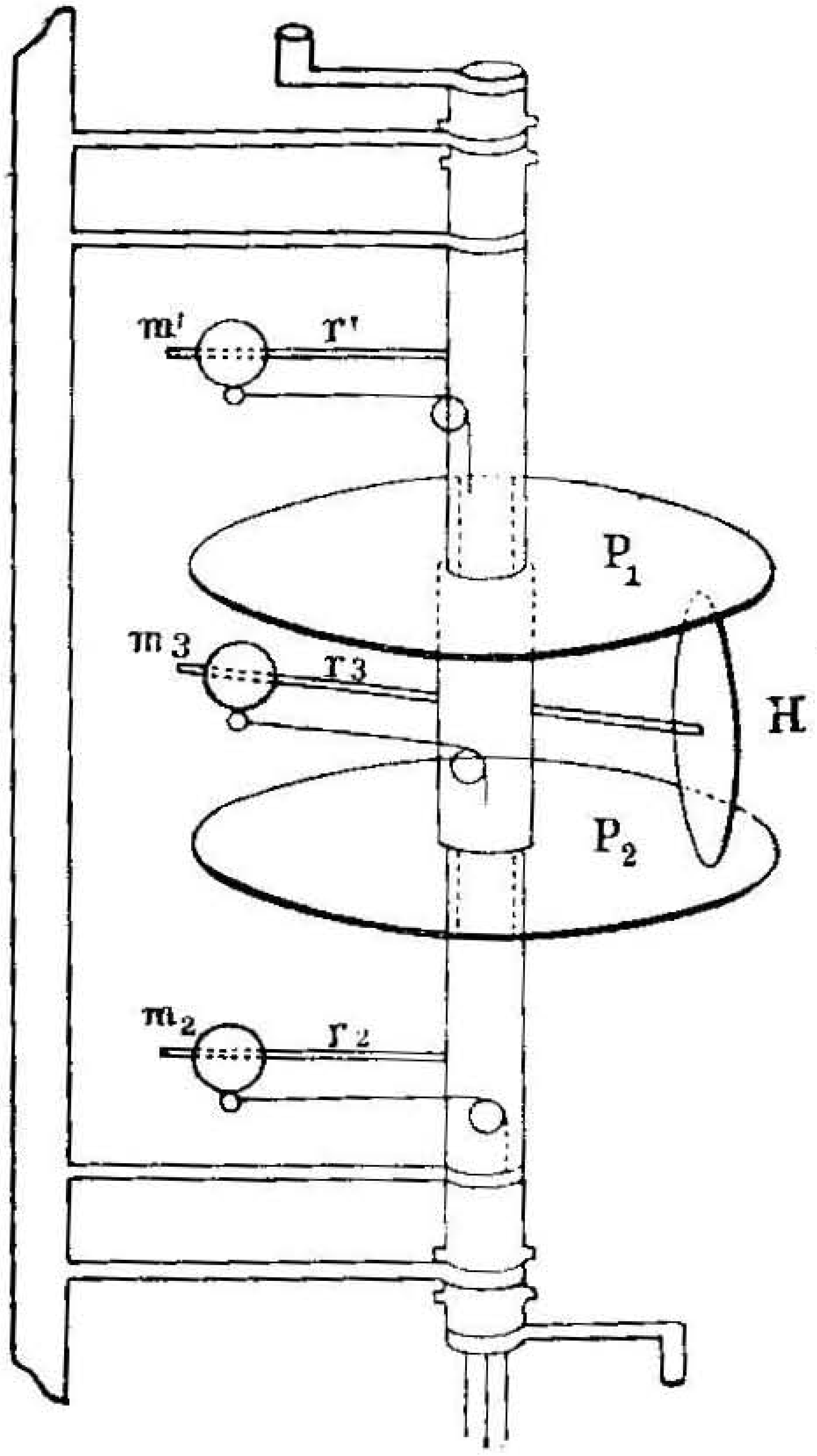
$$(525)\qquad -\frac{q_1'^2}{2}\frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{q_2'}{2}\frac{\partial B}{\partial q_i} - q_1' q_2' \frac{\partial C}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 3, 4, \cdots)$$

Изрази Q_1 и Q_2 представљају компоненте примењених тежња у правцима q_1 и q_2; изрази $Q_3, Q_4 \cdots$ дају компоненте тежња у правцима $q_3, q_4 \cdots$ које би се имале применити на одговарајуће од ових координата, да се оне не би осетно мењале у току појаве.

Од многобројних врста конкретних појава, обухваћених аналошком групом бицикличних појава, (струјање течности у кружним каналима, испаравање са кондензацијом, хемиске појаве при дисоцијацији, електролизи и т. д.) овде ће бити наведене две, које истичу на видик аналогије између механичких и електричних појава.

Уочимо н. пр. Boltzmann-ов механички систем, састављен из три коаксиалне цеви (сл. 39.), углављене једна у другу тако, да се све три могу самостално окретати око заједничке им осовине, и то без трења. На свакој од три цеви налази се по једна маса (m_1 на првој, m_2 на другој, m_3 на трећој) која се може кретати на начин описан у сличноме систему за моноцикличне појаве; све су три масе везане, на начин који се види из слике, за крај по једнога конца који излази кроз доњу цев. Горња и доња цев могу се, свака за се, и помоћу једне ручице, окретати око заједничке осовине. Са тима је цевима на нарочити начин везана средња цев: горња и доња цев носе по један, на заједничкој осовини управан котур P_1 и P_2, а средња цев једну, такође на осовини управну шипку, на којој је, и то управно на њој, утврђен други један котур H, који се може окретати око те шипке, као осовине; котур се H при своме окретању котрља, и то без трења, по котурима P_1 и P_2.

Зависност кретања средње цеви, од кретања осталих двеју, лако се види на овај начин: кад би се горња и доња цев окренуле за један исти угао и у једноме истоме смислу, и средња би се цев окренула за исти угао и, такође, у истоме смислу, а котур се H, међу тим, не би покренуо око своје осовине. На против, кад би се горња и доња цев окренуле за један исти угао, али у супротним правцима, котур би се H, такође, покренуо око своје обртне осовине, али би средња цев остала непомична. Према томе, кад би се горња цев окренула за један произвољан угао l_1, а доња за произвољан угао l_2, и то обе у истоме смислу, резултат би, за кретање средње цеви, био исти као кад би се најпре обе цеви покренуле, у истоме смислу, за угао



Сл. 39.

$$\alpha = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$$

па би се, за тим, горња окренула, опет у истоме смислу, за угао

$$\beta = \frac{1}{2}(l_1 - l_2)$$

а доња за толики исти угао у супротноме смислу; очевидно је, да би се средња цев кретала само за време првога процеса, и то за угао α. Померање и угловна брзина средње цеви биће, дакле, увек аритметичке средине између померања и угловне брзине горње и доње цеви.

Систем се, дакле, има сматрати као одређен двема цикличким координатама l_1 и l_2, и трима параметрима r_1, r_2, r_3, што представљају одстојања маса од обртне осовине цеви, а која у појави играју улоге координата са спорим варијацијама. Брзине су појединих маса

$$v_1 = r_1 l_1' \qquad v_2 = r_2 l'_2$$

$$v_3 = \frac{1}{2}(r_1 l_1' + r_2 l_2')$$

тако, да је у одговарајућим обрасцима на стр. 230.

$$a_1 = r_1 \qquad a_2 = b_1 = o$$

$$b_2 = r_2 \qquad a_3 = b_3 = \frac{1}{2} r_3$$

што, према поменутим обрасцима, даје

$$A = m_1 r_1^2 + \frac{1}{4} m_3 r_3^2$$

$$B = m_1 r_2^2 + \frac{1}{4} m_3 r_3^2$$

$$C = \frac{1}{4} m_3 r_3^2$$

Функција је T облика

$$2T = Al_1'^2 + 2Cl_1' l_2' + Bl_2'^2$$

а Lagrange-еве једначине су

$$\frac{d}{dt}(Al_1' + Cl_2') = Q_1$$

(526)

$$\frac{d}{dt}(Cl_1' + Bl_2') = Q_2$$

за цикличке координате l_1 и l_2, а

$$-\frac{1}{2}\, l_1'^2 \frac{\partial A}{\partial r_i} - \frac{1}{2}\, l_2'^2 \frac{\partial B}{\partial r_i} - l_1' l_2' \frac{\partial C}{\partial r_i} = Q_i$$

(527)

$$(i = 1, 2, 3)$$

за координате r_1, r_2, r_3.

Покренимо, сад, помоћу горње ручице, горњу цев за један произвољан угао l_1 и потражимо величину силе Q_2 која би требала да делује на доњу ручицу, да би се доња цев одржала, при томе, непомична. Пошто би, тада, требало да буде $l_2' = o$, тражена би сила, према другој од једначина (526) имала бити

$$Q_2 = \frac{d}{dt}(Cl'_1)$$

Док се год брзина l_1' и одстојање r не мењају осетно, биће $Q_2 = o$, тако, да на доњу ручицу не делује никаква сила; кад брзина l_1' почне расти, мора и на ту ручицу, да би се она одржала непомична, деловати једна сила пропорционална коефицијенту C и убрзању l_1'' ротације прве цеви. Кад не би било те силе, друга би се цев, за време убрзавање ротације прве цеви, кретала у супротном правцу од ове. Обрнути би се резултат имао за време успоравања првога кретања.

Слични би се, међутим, резултати имали и при константној ротационој брзини прве цеви, али кад би се, при томе, спорим померањем масе m_3, мењало одстојање r_3 ове масе од осовине цеви, чиме би се изазвало лагано мењање коефицијента C у току појаве: доња би се цев кретала у једноме или другом смислу, према смислу померања масе m_3, и сила Q_2 била пропорционална константној брзини l'_1 и брзини промене $\frac{dC}{dt}$ коефицијента C.

Лако се увиђа аналогија такве механичке појаве са појавом индукције између два електрична кола без осетног електричног отпора, при чему би улогу горње и доње цеви играла сама кола; улогу углова l_1 и l_2 количине електрицитета q_1 и q_2, дебитиране електричним изворима што се налазе у њиховом саставу; улогу ротационих брзина јачине струја i_1 и i_2; улогу коефицијента C коефицијенат M међусобне индукције; улогу коефицијената A и B коефицијенти ауто-индукције L_1 и L_2 проводника у једноме и другоме колу; улогу силе Q_2 индукована електромоторна сила и т. д.

Тако, кретање доње ручице у смислу супротном ономе у коме се мења ротациона брзина прве цеви, одговарало би електричним варијацијама које су регулисане Lenz-овим законом индукције. Једначинама (526), за механичку појаву, одговарају једначине.

$$\frac{d}{dt}(L_1 i_1 + M i_2) = E_1$$

$$\frac{d}{dt}(L_2 i_2 + M i_1) = E_2$$

за појаву индукције у двама колима, где су E_1 и E_2 електромоторне силе извора.

Једначине (527) дају изразе компомената сила примењених, при кретању механичког система, на параметре $r_1, r_2, r_3,$ (н. пр. терети, обешени о сваки од три конца, везаних за масе $m_1, m_2, m_3,$). Кад су промене тих параметара такве, да се њима мења само коефицијенат A, одговарајућа је сила пропорционално квадрату угловне брзине $l_1'^2$; кад се њима мења само коефицијенат B, сила је пропорционална квадрату брзине $l_1'^2$; на послетку, кад су оне такве, да се њима мења само коефицијенат C, сила је пропорционална продукту l_1' l_2' двеју брзина.

И у томе постоји потпуна аналогија између посматране механичке и електричне појаве. Кад се, при индукцији, изазове, н. пр. деформацијама или померањем проводника, мењање коефицијента ауто-индукције првога или другога електричног кола, јавља се једна пондеромоторна сила, чија је јачина пропорционална квадрату јачине струје у одговарајућем колу; кад се на сличан начин, изазове лагано мењање коефицијента међусобне индукције кола, јавља се једна таква сила пропорционална продукту јачина двеју струја.

Аналогија је, у осталом, тако исто потпуно и за многобројне остале квантитативне појединости посматраних двеју диспаратних појава[1]), при чему улоге хомологих елемената играју горе наведени њихови елементи.

IX. У опште, у *механичким илустрацијама* физичких појава, извршеним помоћу *механичких модела*, који шематизирају ток и појединости појава, и у којима сваки део и његова функција играју улогу истоветну са оном коју игра одговарајући фактор у физичкој, моделом шематизираној, појави, огледа се један значајан тип математичких аналогија међу диспаратним

---

[1]) в. н. пр. Boltzmann: loc. cit.; J. Kunz: Theoretische Physik (Stuttgart 1907) S. 428—445.

појавама. Основна се идеја таквих илустрација појава своди, у крајној анализи, на ову: кад се, у каквој појави *Ф*, ма какве конкретне природе она била, знају улоге појединих фактора, па ма ти фактори и не били познати по својој интимној природи, могуће је наћи такав механизам, за чије ће функционисање важити исти математички закони што важе и за појаву *Ф*. Између кретања система, што саставља тај механизам, и промене у којима се састоји појава *Ф*, постоји, тада, математичка аналогија и такве две појаве припадају једној аналошкој групи, у којој су одговарајући елементи, карактерисани истоветним улогама, хомологи елементи групе.

Један од најподеснијих примера таквих механичких илустрација појава дају Boltzmann-ови механички модели за термичне и електричне појаве, н. пр. они што су описани на стр. 738 и 745, са хомологим елементима наведеним при томе опису.

Сличне су врсте и механички модели које је конструисао Garbasso за шематизирање појаве испражњавања електричних кондензатора, и у којима улогу електричног кола играју извесна чврста тела што се обрћу око утврђене осовине; улогу електромоторне силе игра механичка сила која креће систем; улогу количине електрицитета (електричног оптерећења) игра угао ротације; улогу електричног отпора механички отпор; улогу коефицијента ауто-индукције моменат инерције механичког система и т. д. Математички закони и целокупна математичка теорија испражњавања кондензатора потпуно су аналоги онима, што важе за законе кретања механичког система, оличеног у тим моделима. — Такве су врсте и модели истога физичара што механички илуструју математичке законе индукционих појава у спреговима електричних кола са међусобним индукционим утицајима.

Sir W. Thomson, доследан своме начелу, према коме „разумети какву појаву, значи умети начинити њен механички модел“, конструисао је такве моделе за велики број најразноврснијих физичких појава. — Такви су и механички модели којима је Maxwell илустровао појаве индукције и поларизације диелектрика; разни модели којима је Boltzmann илустровао Maxwell-ове теорије електрицитета; механички системи којима је Lord Rayleigh илустровао аналогије између разних електромагнетних појава и кретања течности; системи које је дао J. D. Everet за илустрацију извесних компликованих оптичких појава, као: аномалне дисперсије и фосфоресценције; Lorentz-ов електро-оптички модел и т. д.

III. Феноменолошки значај математичких аналогија.

И саме по себи, независно од услуга које могу чинити као водиље у појединим истраживањима, математичке аналогије имају свога нарочитога философског интереса. Велики проблем Природне Философије, чије је решење идеални, асимтотни циљ свих наука, и који се састоји у томе, да се све оно, што се мора претпостављати ради разумевања природних појава, као и број пропозиција, које обухваћају све што се у Природи дешава, сведу на што је могуће мању меру, постаје у толико приступачнији и у толико више олакшан, у колико буде већи број запажених аналогија међу диспаратним појавама.

Очевидно је пре свега, да све што доприноси груписавању појава по њиховим механизмима, законима њиховога тока и математичким релацијама међу факторима што у тим механизмима играју одређене улоге, доприноси, у исто време, и томе да се приђе за који корак ближе поменутоме асимтотноме циљу. Математичке аналогије, које једној маси диспаратних појава дају један исти, заједнички тип, једно су од најмоћнијих средстава за такво приближавање томе циљу. Ослобођавајући из једне аналошке групе оно што је њоме обухваћеним појавама заједничко, што их спаја, што им, поред све диспаратности, даје један исти тип, математичке аналогије доводе до једне опште теорије те групе појава, у којој конкретна природа, њихова као и појединих фактора у њима, није прецизирана, нити игра какву улогу, а која се, међутим, спецификовањем те конкретне природе своди на специјалне теорије појединих од тих појава и, на тај начин обухвата једну масу, на први поглед разнородних теорија, без икакве међусобне везе. То чини могућним груписавање појава у типове, по математичким аналогијама што постоје међу њима, а тиме и редукцију недогледнога броја диспаратних појава на ограничен број типова, које је довољно проучити, па да, тиме, и појаве, из којих су они апстраховани, буду проучене. Јасно је, према томе, да ће се бити врло близу горњем идеалном циљу, кад појаве буду тако груписане и подведене под опште шеме, на чије ће проучавање бити, тада, редукован основни проблем Природне Философије.

Међутим, и поред тога, математичке су аналогије, као водиље, чиниле знатних услуга при едификацијама појединих теорија које састављају разне гране модерне Математичке Физике. Кад је већ запажена, или наслућена, таква аналогија међу двема појавама до једне одређене тачке, сматрано је за вероватно, да ће она важити и на даље, преко те тачке, тако, да кад је већ разрађена математичка теорија једне од њих, оне чија је теорија приступачнија, ова је, са одговарајућом својом конкретном интерпретацијом, примењивана и на другу од двеју појава. Верификоване, или нетачне, консеквенце имале су пресуђивати о томе, у колико су претпостављене, или проширене, аналогије у таквим случајевима одговарале реалности. То је био начин на који су Ohm, Lamé, Maxwell, Sir W. Thomson, Kirchhoff, Helmholtz и др. формирали модерне теорије еластичности, атракције, распростирања електрицитета и т. д. вођени наслућеним аналогијама међу појавама. Ohm је н. пр. едификовао своју теорију распростирања електрицитета, преневши у њу и оне исте претпоставке о механизму тога распростирања, и исто математичко извођење, које је Fourier већ био увео, и верификовао као тачне, разрађујући своју теорију распростирања топлоте. Maxwell-ове су теорије, готово све, сугерисане наслућеним аналогијама: његове су н. пр. основне електро-магнетне једначине добијене асимилацијом електромагнетних појава једној извесној врсти вихорастог кретања течности, за које су те једначине очевидније. Аналогије међу законима што важе за савршене гасове, и оних што регулишу осмотичке појаве у семипермеабилним диафрагмама, учиниле су, такође, услуге теорији осмотичких појава. Исти је случај и са великим бројем електричних и хидродинамичких појава и т. д.

Поред теориског интереса, који у себи скривају математичке аналогије, оне могу, у исто време, бити и моћно оруђе за проналажење нових конкретних факата у природним појавама, који би, без аналогија, као водиља, могли остати незапажени, или би, бар, констатовање њихове егзистенције било остављено случајностима. Конкретан пример за то, између многобројних случајева те врсте, дају аналогије, везане за принцип одржања енергије, Carnot-ов принцип и њихове аналитичке последице у разним врстама природних појава. Тако, Lippmann-ове аналогије између термодинамичких и електричних појава, при којима принцип одржања електрицитета игра, у електричним појавама, исту улогу коју игра Carnot-ов принцип у термичним појавама, (хомологи су елементи наведени на стр. 731), доводе за електричне модификације, до низа математичких релација, аналогих онима у Термодинамици, и које су, конкретно интерпретиране, не само довеле до нових факата, већ и истакле на видик егзистенцију нових, дотле незапажених појава. Такви су н. пр. факти и појаве:

1° промене капацитета електричних кондензатора, чије су арматуре растављене слојем гаса, кад се мења притисак овога: капацитет је тада пропорционалан притиску (факт који је експериментом констатовао Boltzmann); при сталноме притиску запремина се гаса смањује пропорционално разлици потенцијала двеју арматура (факт који је констатовао Quincke за угљендиоксид);

2° електричне модификације при компресији кристала, при чему се, кад је кристал комприниран у правцу једне од својих осовина, јавља у њему електрична поларизација истога смисла, као и она коју изазива повишавање температуре: она је пропорционална величини компресије и нестаје је са овом. Обрнуто: кад се кристал наелектрише, он се издужује на исти начин, као што би то било повишавањем температуре, и величина је тога издуживања пропорционална електричном потенцијалу (факти које су експериментом констатовали P. и J. Curie на турмалину, кварцу и топазу). Пошто се таквим модификацијама мења и сама структура кристала, оне морају собом, у исто време, повлачити и промене његових оптичких особина.

3° ширење стаклених арматура електричних кондензатора кад се ови пуне електрицитетом, и контракција при њиховом испражњавању; линеарно је ширење, при томе, пропорционално квадрату разлике потенцијала двеју арматура (факт који су констатовали Govi и Outeri);

4° електро-капиларне појаве, које је Lippmann предвидео као једну од последица поменутих аналогија и констатовао их експериментом, нашавши да јачина ефеката капиларности, између живе и закишељене воде, зависи од разлике потенцијала тих двеју течности и да се, обрнуто, величина те разлике мења кад се на ма који начин, акцијом спољних сила, мења величина њихове додирне површине [1].

На послетку, математичке аналогије могу чинити још једну врсту услуга, које у појединим случајевима имају своје нарочите важности: оне су једно подесно помоћно среотво за *материјализацију аналитичких проблема*. Материјализација се састоји у томе, да се за један дати аналитички проблем нађе конкретна појава, за коју ће важити исте релације и исти закони, што би се добили аналитичким решењем тога проблема. Дешава се да, при таквој материјализацији, каква релација, или каква нарочита појединост, која је скривена у једначинама аналитичког проблема и коју је тешко истаћи на видик чисто аналитичким среотвима, постаје очевидна у конкретној појави која проблем материјализира.

На место конкретних појава, онаквих какве се дешавају у реалности, могу се, при таквој материјализацији, у мислима представљати и фиктивне појаве, са нарочитим подесним претпоставкама о њиховоме механизму, које не морају одговарати реалности, но које би биле такве да, кад би се оне, у таквим претпоставкама дешавале, закони би појаве, са једне стране, били обухваћени датим аналитичким проблемом, а са

---

[1] Начин, на који су ови факти предвиђени према поменутим аналогијама, може се н. пр. видети у Mascart-Joubert: Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme t. I. p. 715—722.

друге стране, извесне би, нарочите појединости тих закона биле саме по себи очевидне у таквој фиктивној појави.

Овакве материјализације, било конкретне, било фиктивне, а *које су знатно олакшаване математичким аналогијама међу дисаратним појавама*, представљају у исто време, и једно интересантно помоћно срество за откривање чисто аналитичких, рачунских факата, скривених н. пр. у диференцијалним једначинама аналитичког проблема, а чиме је, у појединим приликама, олакшана и сама тачна или приближна интеграција таквих једначина.

Као конкретан пример материјализације аналитичких проблема, и услуга које она може чинити при интеграцији диференцијалних једначина, нека је наведена појава која се састоји у померању нивоа једне течности, у суду одређеног облика, кад у течност поступно продире какво чврсто тело *M*, такође одређеног облика. Закон, по коме ће се померати ниво течности, зависи од облика суда, облика тела *M* и начина његовога кретања при продирању у течност; он се добија интеграцијом једне диференцијалне једначине првога реда, чији облик зависи од поменутих елемената, а која се, каткад, или не може аналитички интегралити, или јој је аналитичка интеграција заметна, а добијени интеграл, по компликованости аналитичког израза што га представља, неподесан за даљу употребу. Међутим, то се померање може, на један врло прост начин, непосредно, графички обележавати кретањем једнога пера које прати померање нивоа. Кретање пера материјализира, дакле, закон варијације интеграла поменутих диференцијалних једначина, које су, на тај начин, *графички интеграљене*.[1]

---

[1] M. Petrovitch: Appareil à liquide pour l'intégration graphique de certains types d'équations différentielles [Americ. Journal of Mathematics, Vol. XXII. № 1.].

Нека су, као други пример, наведени материјализација Riccati-еве диференцијалне једначине

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + \varphi_1 y + \varphi_2$$

и аналитички резултати за ту једначину, које таква материјализација истиче на видик.

Означивши, краткоће ради, са f_1 и f_2 једну и другу од вредности

$$f_1 = -\frac{1}{2}\left(\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1{}^2 - 4\varphi_3}\right)$$

$$f_2 = -\frac{1}{2}\left(\varphi_1 - \sqrt{\varphi_1{}^2 - 4\varphi_3}\right)$$

једначина се може написати у облику

$$\frac{dy}{dx} = (y - f_1)\,(y - f_2)$$

Нека се замисли једна бимолекуларна хемиска реакција, која се збива између двеју течности A_1 и A_2 по хемиској једначини

$$m_1 A_1 + m_2 A_2 = p_1 B_1 + p_2 B_2 + \cdots + p_n B_n$$

где A_i означују реагенсе и B_i продукте реакције.

Нека је y_i количина једнога од продуката B_i, награђена у току реакције, а у размаку времена од $t = o$ до уоченог тренутка t; нека су, ω_1 и ω_2 количине реагенаса које су преостале до тренутка t.

Претпоставимо, као што се то и чини у Хемиској Кинетици, да је брзина реакције (па дакле и тежња која има за непосредан објекат количине y_i продуката) у сваком тренутку пропорционална преосталим количинама ω_1 и ω_2 реагенаса, и да је коефицијенат пропорционалности утврђен за једну одређену реакцију и један одређени скуп прилика, у којима се она збива. Тада би било

$$\frac{dy_1}{dt} = C_1 \, \omega_1 \, \omega_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = C_2 \, \omega_1 \, \omega_2$$

где су C_1 и C_2 количине независне од t и y_i.

Количине ω_1 и ω_2 мењају се и саме по себи, у току реакције, непрестаним трошењем реагенаса A_1 и A_2. Али оне се могу мењати и спољним узроцима, независно од варијација произведених самом реакцијом. Нека се н. пр. замисли да се течности A_1 и A_2 уливају у суд, у коме се збива реакција, тако, да се зна закон тога придолажења т. ј. да се у свакоме тренутку t знају придошле количине тих течности z_1 и z_2 као функције времена t.

Ако су a_1 и a_2 првобитне количине реагенаса A_1 и A_2, које се налазе у смеши у почетку реакције, u_1 и u_2, количине тих реагенаса, утрошене до тренутка t, биће

$$\omega_1 = a_1 + z_1 - u_1$$

$$\omega_2 = a_2 + z_2 - u_2$$

Ставивши да је

$$a_1 + z_1 = \theta_1 (t)$$

$$a_2 + z_2 = \theta_2 (t)$$

где ће θ_1 и θ_2 бити одређене и познате функције времена t, и приметивши да су, према основном хемиском закону, количине u_1 и u_2 за све време трајања реакције пропорционалне међу собом и са количинама y_1 и y_2, ток појаве биће регулисан само једном диференцијалном једначином облика

$$\frac{du}{dt} = C \, (u - \theta_1) \, (u - \theta_2)$$

где u означује једну од количина u_1 и u_2, и поменутом пропорционалношћу. Сменивши t са $\frac{x}{C}$, а u са y, једначина се своди на горњи облик Riccati-еве једначине

$$\frac{dy}{dx} = (y - f_1)(y - f_2)$$

где f_1 и f_2 означују резултат смене $t = \frac{x}{C}$ у функцијама θ_1 и θ_2.

На тај начин, ова би једначина била материјализирана кинетичким током бимолекуларне хемиске реакције, кад се ова збива у наведеним приликама. Међутим, из самога начина, на који количине реагенаса у смеши утичу на брзину реакције, очевидно је, да ће ова, а са њоме и количине формираних продукаса, бити у толико веће, у колико је јачи придолазак једнога, или другога, или обадва реагенса. Са друге стране, количине продуката непрестано ће расти у размаку времена у коме се дешава реакција, али остајући, при томе, непрестано мања од оне количине, која би одговарала потпуном утрошку једнога или другога реагента. А пошто су за све време трајања реакције функције f_2 и f_2 непрестано позитивне и никако не опадају, то су из саме појаве, без икакве аналитичке дискусије, очевидни ови чисто аналитички факти:

Кад год су за једну Riccati-еву једначину

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + \varphi_1 y + \varphi_2$$

функције

$$-\frac{1}{2}\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^{\,2} - 4\varphi_3}\,\Big)$$

(F)

и

$$-\frac{1}{2}\varphi_1 - \sqrt{\varphi_1^{\,2} - 4\varphi_3}\,\Big)$$

у једноме размаку од $x = o$ до $x = a$ позитивне и никако не опадају, немајући, при томе, $x = o$ као вишеструку нулу, онда, за све вредности x у томе размаку, интеграл y, који постаје раван нули за $x = o$, има ове особине:

1° он је позитиван и непрестано расти, али при томе рашћењу остаје непрестано мањи од одговарајућих вредности *(F)*.

2° ако се у једначини смене φ_1 и φ_2 другим каквим функцијама, за које ће одговарајуће комбинације *(F)* задовољавати погодбе наведене за *(F)*, али, при томе, бити по вредности веће од *(F)*, интеграл ће дате једначине бити по вредности мањи од интеграла нове једначине.

3° ако су, при томе, нове комбинације по вредности мање од *(F)*, интеграл ће y бити по вредности већи од интеграла нове једначине.

У осталом, непосредним мерењем утрошених количина реагенаса, или формираних продуката реакције, у разним тренуцима за време њеног трајања, и интерполацијом таблице тако добијених података, имала би се *хемиска интеграција* дате Riccati-еве једначине[1].

Нека је, као пример, поменуто и то, да поједини аналитички факти, везани за криволиниске интеграле, постају очевидни у конкретним (н. пр. хидродинамичким) појавама, у којима се на њих наилази; да поједини геометриски факти, на које се наилази у теорији минималних површина, постају очевидни, кад се физички конкретизирају, н. пр. у капиларним појавама, Plateau-овим експериментима и т. д.

* * *

---

[1] M. Petrovitch: Sur l'équation différentielle de Riccati et ses applicatoins chimiques [Sitz. Ber. d. kgl. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften, Prag 1896].

ДРУГА ГЛАВА.

КВАЛИТАТИВНЕ АНАЛОГИЈЕ

Генералност квалитативне дескрипције појединости појава и њихових механизама. — Генералност квалитативних аналогија међу појавама. — Језгро аналогије и скалирање аналогија по њиховој садржини. — Феноменолошки значај квалитативних аналогија.

Појединости, што састављају језгро аналогије двеју појава, и које се могу односити или на начин, на који се узастопна тренутна стања у појави нижу једно за другим у току ове, или на појединости механизма појаве, или на обоје у исти мах, могу бити *квалитативне* природе, тако, да се не могу изразити математичким релацијама: међу појавама постоје, тада, *квалитативне аналогије* њиховога тока, или њихових механизама, или, у исти мах, и једног и другог.

Казано је, да је квалитативна дескрипција могућна за све врсте дескриптивних елемената, од најконкретнијих, до најапстрактнијих. Сваки појам, свака идеја, сваки осећај, има у себи нечега што се може схватити као веће или мање, као јаче или слабије, по чему се поједина стања таквога елемента могу међу собом упоређивати, и чему се могу схватити све оне квалитативне појединости, на које се наилази и у варијацијама практички мерљивих елемената: рашћење или опадање, анулисање, максимуми и минимуми, континуални, дисконтинуални, интермитентни, ритмички, периодички карактер и т. д.

Са друге стране, природе двеју улога, у механизмима двеју појава, могу бити исте, као што може бити један исти и начин на који су, у тим механизмима, комбиноване сличне улоге. Заједничка природа, у таквој аналогији *хомологих* улога, огледа се у самоме језгру њихове аналогије, тако, да то језгро дефинише, у исто време, и саму природу тих улога, и то тачније или овлашније, према одређености у њему садржаних факата.

То су појединости, које карактеришу заједничке црте у диспаратним појавама и које чине да каква појава, посматрана са једнога одређеног гледишта, потсећа на другу какву, од ње по конкретној природи сасвим различну појаву, са којом она не мора имати ничега заједничког, осим сличности улога појединих фактора у њиховим механизмима и сличности у појединостима тока. Оне многобројне, безначајне или дубље, метафоре и компарације једних појава са другима, које се и у обичном животу, и у поезији, и у свима наукама тако радо употребљују, нису ништа друго, до нарочити израз запажених, или наслућених, квалитативних аналогија међу разнородним појавама. Поређење н. пр. наглих појава, ма које врсте, са бујицом (н. пр. освајачка бујица, бујица страсти); поређење напрасних, тренутних, узрока ма које врсте са ударом; поређење физиолошких, социолошких, психичких, историских и т. д. ритмичких појава са плимом и осеком; поређење латентних унутарњих процеса у великим узбурканим људским масама, са врењем; поређење напраситости, иза којих долази душевна утишаност, са експлозијом, или електричним испражњавањем; поређење душевних немира са узбурканим морем; поређење свести са фотографском плочом, у погледу примања утисака, при чему н. пр. рецептивитет за утиске може бити ослабљен утврђеним, укорењеним предрасудама, заблудама, као што рецептивитет плоче може бити ослабљен инертним слојем, којим би плоча била превучена, и т. д. јесу све примери поређења такве врсте.

Оно, што у таквим метафорама и компарацијама, поред свога могућног поетског значаја, може имати и реалистичне, феноменолошке подлоге, јесте егзистенција једнога скупа одређенијих или овлашнијих квалитативних појединости, које састављају језгро аналогије између појава што се међу собом пореде и које су, у великоме броју случајева, и од феноменолошког интереса. Језгро аналогије н. пр. између освајачке бујице једне необуздане хорде, и водене бујице која руши препоне, и то у толико силније, у колико су ове веће, састоји се у факту егзистенције једнога интензивног импулсивног узрока, који постаје у толико јачи, у колико су веће препреке и сметње што се стављају на супрот његовој акцији. — Језгро се аналогије између једне физиолошке, или ма какве друге, ритмичке појаве, и лаганога, одмереног кретања клатна, састоји у осцилацијама појаве око једнога одређеног стања, са наизменичним удаљавањем од тога стања, приближавањем и проласком кроз њега; при томе, језгро може садржати и заједнички факт егзистенције једнога импулсивног периодичног узрока, или једнога депресивнога узрока који јача упоредо са тоталитетом свога непосредног објекта. — У аналогији између појаве плиме и осеке, и мирисних еманација у цвету биљака, језгро се састоји, са једне стране, у периодичности тока појаве, а са друге стране у егзистенцији једнога импулсивнога узрока у њиховим механизмима, који се мења по периодичком закону. — У аналогији између ондулација надражљивости нервнога центра, и начина, на који се, у подморским кабловима, а по методи Lord Kelvin-a, постиже враћање овога, после једнога, већ предатог сигнала, у његово нормално, неутрално стање, у коме би био спреман за примање и провођење новога сигнала, језгро би се аналогије имало, поред заједничког осцилаторног карактера, састојати у заједничкој шеми механизма тих појава, а која је, као што је раније казано, оваквога облика: акција једнога дисконтуалнога, ритмичког, интермитентнога низа тренутних, по смислу и јачини неједнаких импулса на један систем, који би се, остављен сам себи, вратио у своје нормално, стационарно стање, а кад је, при томе, сваки импулс супротног смисла варијацији непосреднога објекта своје акције, а по апсолутној вредности у толико јачи, у колико је овај по вредности већи. — Једна непрегледна маса природних појава показује међусобну квалитативну аналогију, чије се језгро састоји у овоме скупу факата: модификације у једноме систему, који је првобитно у једноме од својих стационарних стања, изазване варијацијама једнога од фактора у појави, чија је сталност потребна за одржање стационарног стања, такве су природе, да се увек противе варијацијама које су их изазвале. Такве су природе електричне појаве, обухваћене Lenz-овим законом индукције; такве су и оне, обухваћене Gibbs-овим и Le Chatelier-овим законом за физичко-хемиске трансформације, или оне, обухваћене биолошким законом сличнога облика, који се манифестује у функционалној асимилацији при одбрани организма и т. д.

У погледу потпуности, квалитативне би се аналогије могле скалирати, по броју и важности њима обухваћених појединости, од најпотпуније до најовлашније, са свима прелазима од једнога до другог екстремума; скалирање би могло бити сличне врсте ономе, што је употребљено у данашњој Геометрографији[1]) при класи-

---

[1]) E. Lemoine: Géométrographie (Scientia № 18).

фикацији конструктивних геометриских проблема по степену простоте њихове конструкције.

Нарочити феноменолошки интерес квалитативних аналогија лежи у ономе, што је наведено у одељку о реципроцитету између састава механизма појава, начина варијација активитета што улазе у тај састав, и појединости манифестације појаве. На првоме месту, по извесним квалитативним појединостима, садржаним у језгру аналогије једне групе појава, може се, са извесном вероватноћом, кадшто и са поузданошћу, закључивати на егзистенцију заједничких факата у њиховим механизмима, необухваћених тим језгром. За тим, заједничке квалитативне појединости тока појава, као што су: симултано рашћење и опадање; убрзавање или успоравање рашћења или опадања; симултани максимуми или минимуми; стално задоцнење, у обема појавама, у јављању таквих особитости и т. д. могу бити индикације о каузалној вези међу таквим појавама.

Дешава се, да разнородне појаве, груписане у квалитативне аналошке групе, по уоченим заједничким квалитативним појединостима, истичу, у језгру међусобне аналогије, какав факт од нарочитога феноменолошког интереса, који може служити као модел за заједничку феноменолошку експликацију диспаратних појава, или који, у приликама, унифицирајући а шематизирајући механизме појава, дају им тип објеката Математичке Анализе, чинећи, тиме, могућним увођење ове у проблем.

Приближимо н. пр. једну другој ове међу собом диспаратне појаве:

1° за раздвајање међу собом врло сродних хемиских елемената може се употребити, поред осталих, и овакав један начин: извршити са смешом, у којој се ти елементи првобитно налазе у облику каквих било једињења, један низ физичких, хемиских или механичких операција, које се не извршују са истом брзином за све елементе у групи; подесним комбиновањем таквих операција у узастопним ће се, тако добијеним делимичним смешама, све више, према осталима, истицати један од елемената, тако, да ће, после довољно великога броја операција, последња смеша садржати у осетној количини само тај један елеменат, а остали ће се налазити, са њиме измешани, у занемарљивим количинама.

2° за раздвајање међу собом сродних врста микроба, које би се налазиле измешане у једној истој култури, може се, поред осталих, употребити и овакав један начин: пренети, на врху игле, из дате смеше, у другу једну културну средину, једну врло малу количину микроба и култивисати их за једно одређено време; из те културе пренети, опет на врху игле, једну такође минималну количину микроба у једну нову културну средину, култивисати их у њој за једно одређено време, пренети их опет, на исти начин, у нову једну средину и т. д. У узастопним ће се, тако добијеним, културама све више, према осталима, истицати једна врста микроба, она која се, у приликама, што их пружа култура, најбрже размножава и најбоље напредује; после довољно великога броја таквих операција у последњој ће се култури налазити, готово искључиво, та једна врста микроба, према којој су, по бројноме стању, остале врсте занемарљиве.

3° центрифугална махина за раздвајање злата од осталих састојака истуцане рудне смеше, којом се, према разлици центрифугалних сила појединих састојака исте запремине, врши раздвајање састојака које махина разбацује по концентричним круговима око обртне осовине, а при чему се операција понавља дотле, док на једноме одређеноме таквом кругу, на коме се највише гомилају делићи злата, ово не буде довољно пречишћено од осталих састојака рудне смеше, није ништа друго, до једна нарочита реализација истога процеса.

4° природна и вештачка селекција, извршена у једноме дугачком низу генерација, на једној првобитној мешавини разних органских фела, или разних индивидуа једне исте феле, није, у својој суштини, ништа друго до један нарочити облик истога феноменолошког процеса: у узастопним ће се генерацијама све више истицати, према осталима, једна одређена фела, варијетет и т. д. (она што се најбоље прилагођава датим животним приликама), која ће, у току генерација, све више бројно предоминирати над осталима.

Заједничка квалитативна шема, у којој се састоји језгро аналогије ове групе појава, своди се на један процес овакве врсте: еволуција дескриптивнога система у једноме одређеноме правцу, постигнута итеративним појачавањем пропорција онога од елемената система, у чијем правцу систем еволвира, према осталим елементима, Ако се са v_{ij} означи величина елемента v_{ij} дескриптивног систета

$$(528) \qquad (v_1, v_2, \cdots v_n)$$

после j-те итерације, систем се има сматрати да *еволвира* у правцу елемента $v_{k,}$ кад у току процеса параметри, дефинисани обрасцима

$$\lambda_{1j} = \frac{v_{1j}}{v_{kj}}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\lambda_{k-1,j} = \frac{v_{k-1,j}}{v_{kj}}$$

$$\lambda_{k+1,j} = \frac{v_{k+1,j}}{v_{kj}}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\lambda_{n,j} = \frac{v_{nj}}{v_{kj}}$$

поступно опадају; систем је *потпуно еволвиран* у правцу тога елемента, кад ти параметри, опадајући у току процеса, спадну на вредности које се не разликују осетно од нуле. Процес је, дакле, карактерисан низом неједначина

$$\lambda_{ij} = 1 < \gamma_{ij}$$

$$\begin{Bmatrix} i = 1, 2, \cdots n \\ j = 1, 2, \cdots p \end{Bmatrix}$$

(где је p целокупни број итерација) и

$$\gamma_{ip} < \varepsilon$$

$$(i = 1, 2, \cdots n)$$

где ε означује један одређен, довољно мали број.

У појави 1° улоге елемената (528) играју концентрације смеше по хемиским елементима које ова садржи; итеративна операција *(O)*, којом се смањују вредности параметара λ_{ij} (релативна концентрација по елементу ранга *i* после j-те итерације) састојала би се у употребљеној физичкој, хемиској, или механичкој операцији; ефекат је итерације поступна еволуција смеше у правцу онога елемента, са којим се та операција најбрже извршује.

У појави 2° улоге елемената (528) играју вредности што представљају бројно стање појединих врста микроба у смеши; итеративна се операција *(O)* састоји у преношењу микроба из једне средине у другу, и она има за ефекат еволуцију смеше у правцу оне врсте микроба, која у приликама, што их пружа употребљена културна средина, најбрже напредују.

У појави 3° елементи су v_i концентрације рудне смеше по њеним састојцима; итеративна је операција *(O)* пропуштање смеше кроз центрифугалну махину.

У појави 4° улоге v_i играју концентрације смеше по индивидуама једне органске феле, или једнога варијетета, мерене њиховим релативним бројним стањем, према укупноме бројном стању индивидуа у смеши; улогу операције *(O)* игра скуп свега онога чиме се врши селекција, и она има за ефекат еволуцију комплекса у правцу оне феле, или варијетета, који се буду најбрже прилагодили животним приликама, пруженим при таквој селекцији.

Шема је процеса исте врсте као и она, на коју се своди Gräffe-ова метода за раздвајање корена бројних једначина итеративним смањивањем међусобних пропорција корена; операција се *(O)* састоји у квадрирању, које, као итеративна операција, има за ефекат трансформацију дате једначине у другу, у којој су корени занемарљиви према једноме од њих, који се издваја својом врло великом вредношћу.

Таква заједничка, и ако веома проста шема, која унифицира механизме толиких диспаратних појава, има битне облике објеката Математичке Анализе; ова би, уведена у проблем, имала и могла да изведе квалитативну, а према подацима који се буду имали о факторима у појави, о особинама употребљене итеративне операције и т. д, и саму квантитативну дескрипцију тока еволуције; да предвиди пертурбације које би у њу уносили поједини нови узроци познатих активитета, убрзавање или успоравање еволуције, моменте кад је она најинтензивнија или најслабија, континуалан или ритмички карактер напредовања процеса према разним предвиђеним приликама, резултујуће појаве што би произлазиле од суперпозиције неколиких таквих процеса у једноме истоме систему и т. д.

Уочимо, као пример друге врсте, и приближимо једну другој ове, међу собом такође диспаратне, појаве:

1° познато је, да мирис једнога, ма и хемиски чистог, тела не мора увек бити прост: у великоме броју случајева он је састављен из више простих мириса који коегзистирају у истоме телу и, делујући симултано на чулни орган, изазивају резултујућу сензацију мириса. Између начина, на које се ови прости мириси, у једноме истоме телу, могу један од другогораздвајати, био би и овакав један: сваки од њих има свој одређени минимум перцептибилитета, испод кога престаје утицати на чулни орган, и ти минимуми нису једнаки за све мирисе; кад се, дакле, буде поступно умањавала количина мирисне супстанце, простих ће мириса поступно нестајати једнога за другим, по реду релативних величина тих минимума. Ти ће се мириси, на против, појачавати поступно, и у обрнутоме реду, кад се количина супстанце буде поступно повећавала.

Jacques Passy[1]) је на тај начин успео дисоцирати комплексне мирисе неколиких хемиских тела. Пошавши н. пр. од једне врло слабе дозе терцијерног амил-алкохола и повећавајући је поступно, констатоване су овакве градације при сензацијама мириса: на количини супстанце од 0,00001 гр., што одговара првоме минимиму перцептибилитета, осећа се један карактеристичан мирис, различан од правога мириса посматранога алкохола и који потсећа на бензин и изо-амил-алкохол; на количини од 0,002 гр., што одговара другоме минимиму, осећа се један, доста јак, мирис који потсећа на камфор; тек се после овога, као резултат суперпозиције та два проста мириса, јавља прави, карактеристични мирис самога алкохола.

Слични су резултати добијени и за велики број других хемиских тела, као за: салицил-алкохол, бензалдехид, бензил-хлорид и т. д. Запажено је, у осталом,

---

[1]) Sur l'analyse d'une odeur complèxe (C. R. de l'Acad. des Sciences t. 115. 1892. p. 689—690).

да већина мириса, врло пријатних кад је супстанца у слабој дози, постају непријатни кад је доза јака. Појава се, у великоме броју случајева, има приписати једноме механизму исте врсте; резултујући се мирис супстанце састоји из два проста мириса: једнога слабог, пријатног, чији је минимум перцептибилитета нижи од минимума другога простог мириса, тако, да се само он осећа кад је супстанца у слабој дози, и једнога јаког, а непријатног мириса, са вишим минимумом перцептибилитета и који, кад је супстанца у јачој дози, маскира први мирис и даје резултујућем мирису ону непријатност што га карактерише.

2° Кад око визира, у једноме сталном правцу, какву белу, униформно осветљену површину, и кад, при томе, какав таван предмет брзо пролази кроз видно поље, констатује се оваква оптичка појава: површина, преко које прелази предмет, а непосредно по проласку овога, изгледа тавна; на ономе делу те површине, на коме је већ повраћено првобитно осветлење, може се запазити интензивна црвена боја, онаква, каква се опажа на спољној периферији обојенога прстена при Newton-овом експерименту.

Експликацију појаве Mascart[1] своди на један механизам овакве врсте: утиска на ретини, од осветљене површине, нестаје брзо при проласку тавнога предмета преко те површине, али се тај утисак не појављује опет тренутно чим предмет буде прешао; он се јавља са извесним задоцнењем, чији је узрок физиолошке природе, и то задоцнење није једно исто за све боје у спектру: оно је у толико мање, у колико је већа таласка дужина боје. Црвеној боји одговара најмање задоцнење, и то је узрок интензивној црвеној боји која карактерише траг предмета на осветљеној

---

[1] Sur le retard des impressions lumineuses [C. R. de l'Acad. des Sciences t. 113. 1891. p. 180—181].

површини; за њом се ређају остале, мање живе боје, према својим таласким дужинама, маскиране црвеном бојом, која се и прва јавља, и најинтензивнија је међу осталима.

Језгро се аналогије између појава 1° и 2° састоји у овој простој заједничкој шеми: дисоцијација једнога комплекса фактора на његове састојке, према градацији ефекта за њих везане, једне исте, врсте активитета, који су, у тим двема врстама појава, физиолошке природе. У појави 1° састојци су комплекса прости мириси; особина, употребљена за дисоцијацију њиховога колективитета јесте она везана за минимум перцептибилитета, различног за разне просте мирисе. У појави 2° састојци су комплекса поједине просте боје; особина, која чини да се оне једна од друге раздвајају, и тиме изазивају поменуту оптичку појаву, јесте та, да се надражаји јављају са задоцнењем, које није исто за све боје.

На исти се механизам, као модел, наилази и у маси других појава. Хемиска квалитативна анализа, као и раздвајање хемиских тела из једне смеше фракционим дестилисањем, нису ништа друго до један низ процеса сличне врсте. Поступно мењање боје водених организама има се приписати процесу исте врсте: комплексна боја, која н. пр. карактерише такав један организам у тренутку кад је извађен из воде, имала би се приписати мешавини пигмената који се, са разним брзинама, трансформишу на ваздуху, и отпадајући, на тај начин, један по један, из те мешавине, изазивају тиме непосредно појаву о којој је реч. Тако би се имао у тумачити прелаз боје ракова од мрке до интензивно црвене боје; промене се врше у кутикули која је састављена из пигмената разних боја, чија мешавина даје љуштури тамну боју. Свих тих пигмената нестаје хемиском трансформацијом, осим онога што је карактерисан црвеном бојом, који, као веома постојан, једини заостаје пошто сви остали исчезну; појава, онаква каква се непосредно манифестује, илуструје ред, по коме пигменти један за другим нестају из првобитнога комплекса.

О томе, да и квалитативне аналогије са овако простим језгром, као што су ове овде наведене само као пример, могу, у приликама, бити и од неочекиваног феноменолошког или практичног интереса, сугерирајући идеју за експликацију по неке привидно компликоване појаве, или за какву практичну, експерименталну или индустриску методу, сведоче многобројни случајеви такве врсте у свима областима позитивних наука и њихових практичних примена.

* * *

У колико која од квалитативних аналогија, у току све дубљега продирања у појединости механизама појава одговарајуће аналошке групе, буде постајала прецизнијом, и у колико јој се, тако допуњавано, језгро буде, по својој садржини, приближавало онима, што карактеришу квантитативне аналогије, у толико ће се и у њему имплициране последице све више приближавати онима, о којима је била реч при квантитативној дескрипцији појава и при одређивању квантитативних појединости у манифестацији појаве, као нужних последица одређених појединости њихових механизама. Том својом страном, квалитативне феноменолошке аналогије, сматране као прелаз ка квантитативним аналогијама, у које ће се поступно претварати кад им језгро, у току потпунијег сазнавања појединости појава, буде допуњавано одређенијим подацима, несумњиво су један увек интересантан прилог сазнавању природних појава. Оне несумњиво доприносе да се сазнавање појава примакне за који корак ближе асимтотноме феноменолошком циљу: *редукцији бескрајно компликоване и шарене слике, што представља свет појава, на што је могуће простију скицу, која јој је подлога и из које би се реална слика имала формирати само придавањем спољних, феноменолошки безначајних појединости, које ни у колико не мењају саму скицу.*

Основна концепција, проведена кроз све делове ове књиге: *истоветност појединости у манифестацији појава, као нужна последица истоветности карактеристичних факата у њиховим механизмима*, допушта да се сагледају облик и основне црте такве скице. Кад та концепција буде разрађена бар у оној мери, у којој би се према, у томе погледу, необрађеном материјалу што га пружа већ данашње стање наука, то могло учинити, биће створена генерална и пространа математичка дисциплина, која би носила име *Математичке Феноменологије*, са облашћу својих објеката, општим обликом и циљем јасно истакнутим у овим њеним првим, на овај начин схваћеним, *Елементима*.

◆