ПОСЕБНА ИЗДАЊА 462 1973

ACADEMIE SERBE DES SCIENCES ET DES ARTS

MONOGRAPHIES

TOME CDLXII

CLASSE DES SCIENCES MATHEMATIQUES ET NATURELLES

TOME 40

MILOŠ RADOJČIĆ

UNE CONSTRUCTION AXIOMATIQUE DE LA THEORIE DE L'ESPACE-TEMPS DE LA RELATIVITE RESTREINTE

BEOGRAD

1973

ACADEMIE SERBE DES SCIENCES ET DES ARTS

MONOGRAPHIES

TOME CDLXII

CLASSE DES SCIENCES MATHEMATIQUES ET NATURELLES

TOME 40

MILOŠ RADOJČIĆ

UNE CONSTRUCTION AXIOMATIQUE DE LA THEORIE DE L'ESPACE-TEMPS DE LA RELATIVITE RESTREINTE

Présenté à la III séance de la Classe des Sciences mathématiques et naturelles, 31. III 1972.

Rédacteur
VOJISLAV V. MIŠKOVIĆ
Membre de l'Académie

BEOGRAD
1973

EDITEUR : ACADEMIE SERBE
DES SCIENCES ET DES ARTS

IMPRIMERIE : „NAUČNO DELO“
BEOGRAD, VUKA KARADŽIĆA 5

INTRODUCTION

Dans le présent travail nous donnons une construction axiomatique de la théorie de l'espace-temps de la Relativité Restreinte, en partant d'un système particulier d'axiomes et en atteignant la transformation de Lorentz. Nous ne dépassons pas le cadre indiqué par ces mots et n'examinons donc pas, d'un point de vue plus large, les différentes structures des espaces-temps ou espaces cinématiques possibles, ou même seulement la structure de l'espace-temps de la Relativité Générale. Nous nous limitons donc (à des exceptions près) à une structure donnée, pour en déduire, jusqu'à un certain point, la théorie qu'elle implique. Dans cette déduction nous ne nous bornons pas toujours au strictement nécessaire pour atteindre la transformation de Lorentz, car les régions que nous traversons et qui se trouvent donc à la base de la Relativité Restreinte, nous paraissent assez intéressantes aussi par elles-mêmes.

En ce qui concerne le choix des axiomes, notre point de vue était de satisfaire, non pas uniquement aux principes de l'axiomatique, mais aussi, autant que possible, au principe d'exprimer par ces axiomes, en ce qui concerne leur interprétation naturelle en Physique, des faits aussi simples et intuitivement clairs, que le sont les axiomes de la géométrie élémentaire. Alors, par exemple, le fait paradoxal de l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide devient une conséquence logique de ces faits simples. C'est pour ces mêmes motifs que nous avons accepté deux espèces d'éléments non définis, les „événements instantanés" et les „points matériels" (ou „particules"), bien que ceux-ci puissent être définis au moyen de ceux-là, ce qu'on accepte de préférence. (Une circonstance analogue se produit en géométrie élémentaire, où les points peuvent figurer comme seuls éléments de l'espace, les droites et les plans pouvant être définis au moyen de points; et pourtant on considère d'ordinaire les droites et les plans également comme éléments primordiaux).

En élaborant ce travail l'auteur a repris un thème dont il s'était occupé encore en 1933 et qui aboutit alors à la publication d'un travail dans lequel il partit des mêmes éléments et relations non définies et dont le contenu a beaucoup en commun avec les quatre premiers chapitres du présent travail.[1] Dans l'ancien travail, comme dans le présent, l'un des buts principaux est d'atteindre dans la déduction la transformation de Lorentz. Ceci ne lui réussit alors que d'une manière incomplète, dans le cas de l'espace-temps de deux dimensions. En outre, dans l'ancien travail l'auteur s'est tenu à la formulation classique, verbale, des propositions et démonstrations, tandis que dans le travail actuel il profite des avantages que présente le symbolisme des théories axiomatiques modernes.

La construction axiomatique de la théorie de l'espace-temps de la Relativité Restreinte a intéressé les mathématiciens depuis la création de celle-ci. La liste des travaux sur les fondements axiomatiques de la Relativité, et surtout de la cinématique relativiste, est assez longue et les conceptions des auteurs diffèrent beaucoup entre elles. Nous ne mentionnerons donc ici que certains travaux dont les idées nous semblent assez proches des nôtres, malgré les différences.

A. A. Robb publia déjà en 1914 une oeuvre remarquable où il exposa sa „théorie du temps et de l'espace", basée sur 21 axiomes et contenant plus de deux cents théorèmes.[2] Il remarqua qu'il eut déjà en 1902 l'idée de construire sa théorie et que, pendant qu'il tâchait de „resoudre le problème", il „entendit parler pour la première fois de l'oeuvre *d'Einstein*" (qui parut en 1905).[3] Le système de Robb a des traits communs avec le nôtre. Les différences s'expliquent en envisageant les points de vue qui ont déterminé le choix des axiomes. Robb donne, en analogie avec la géométrie élémentaire classique, une construction directe de la géométrie à quatre dimensions de Minkowski, en partant de ce que nous appelons „événements instantanés" comme éléments ponctuels de l'espace de Minkowski, et des relations „avant" et „après" du temps, pour définir l'ordre (qu'il appelle „conique") et pour introduire ensuite les droites, les plans et les sous-espaces („optiques", „de séparation" etc.).

H. Reichenbach, dans une oeuvre de valeur surtout phénoménologique[4] remarqua que dans son système d'axiomes „la métrique de l'espace-temps de la Relativité Restreinte est définie uniquement au moyen des signaux de lumière". — „Ainsi résulte une géométrie de lumière... L'idée d'Einstein se laisse alors formuler en disant que la géométrie de lumière et la géométrie des corps [rigides] sont identiques."[5] Ces paroles s'appliquent également à notre système; or l'oeuvre de Reichenbach manque de rigueur.

---

[1] *M. Radojčić (Radoïtchitch)*, Grundlegendes zum axiomatischen Aufbau der speziellen Relativitätstheorie, I et II (Publications Math. de l'Univ. de Belgrade, t. II et III, 1933 et 1934).

[2] *A. A. Robb*, A Theory of Time and Space (C.U.P. 1914). — The absolute relations of Time and Space (C.P.U. 1921). Voir aussi l'exposé préliminaire: Optical Geometry of Motion, A new view of the Theory of Relativity, 1911.

[3] *A. A. Robb*, The absolute relations etc., pages V et VII.

[4] *H. Reichenbach*, Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre (Vieweg, 1924). Voir aussi la traduction, The philosophy of Space and Time (Dover Publ., N.Y, 1958).

[5] Ibid., pages 10 et 11,

K. Schnell, dans sa thèse de philosophie, donna aux idées de Reichenbach une forme logique plus précise et fit usage de certains symboles de la logique symbolique.[6]

A. G. Walker, dirigeant ses recherches dans le sens de la „Relativité cinématique“ de *E. A. Milne*, donna des dévéloppements axiomatiques qui ont des traits communs avec le nôtre.[7] Ses éléments non définis sont les „instants“, tandis que les „particules“ sont définies comme ensembles ordonnés d'instants.

G. Szekeres donna un système d'axiomes pour l'espace-temps de Minkowski, qui diffère beaucoup du nôtre, mais on y trouve aussi des traits communs. Il part des „événements“ comme éléments non définis et des lignes d'univers comme ensembles ordonnés d'événements, homéomorphes à la droite. La géométrie euclidienne de l'espace associé résulte également de ses axiomes.[8]

R. I. Pimenov examine dans une oeuvre détaillée les structures possibles auxquelles on peut arriver dans la construction des espaces cinématiques (purement topologiques ou aussi métriques), leurs éléments étant les „événements“. La fin du travail est dédiée à la fondation de la cinématique de la Relativité Générale.[9]

La nature des phénomènes physiques qui sont à la base des systèmes axiomatiques tels que nous les dévéloppons, exige qu'on opère avec des „éclats“ de lumière, appelés parfois „signaux“, et qui se transmettent d'endroit en endroit par rayonnements et réflexions.

Ces éclats doivent être des événements instantanés et ces endroits des points. Nous appellerons donc ceux-ci „points matériels“, pour souligner qu'ils impliquent la présence de corps matériels (ou particules), et ceux-là „événements instantanés“, en sousentendant qu'il s'agit d'émissions instantanées de lumière (c.-à-d. d'ondes éléctromagnétiques ou photons), et nous supposerons toujours qu'elles se propagent comme dans le vide, en faisant abstraction de l'influence que pourrait exercer un milieu matériel ou autre sur le chemin d'un rayon et sur la vitesse. *Points matériels* et *événements instantanés* sont les deux espèces d'éléments que nous admettons sans définitions explicites. On dira aussi tout court, *points* et *événements*. Dans le paragraphe 8 il sera admis que les événements instantanés sont les seuls élements non définis explicitement.

Tout événement instantané „a lieu“ en un point matériel et il „est perçu“ en d'autres points matériels. En outre, deux événements instantanés peuvent être perçus d'un même point matériel en deux instants

---

[6] *K. Schnell*, Eine Topologie der Zeit in logischer Darstellung (Münster 1938, Thèses).

[7] *A. G. Walker*, Foundations of Relativity, I et II (Proceedings, Roy. Soc. Edinburgh, 1948). Axioms for Cosmology (Studies in Logic and the Foundations of Maths., Amsterdam 1959).

[8] *G. Szekeres*, Kinematic Geometry, An axiomatic system for Minkowski's Space-Time (J. Austral. Math. Soc. 1968).

[9] *Р. И. Пименов*, Пространства кинематическаго типа (Espaces du type cinématique; Записи научн. семинаров Ленингр. отд. матем. институтов, 1968).

différents, l'un „avant" l'autre. Conformément, nous aurons trois relations primitives: *avoir lieu*, *être perçu* et *avant*.

Pour plus de simplicité, nous supposerons que tout événement instantané est perçu de tout point matériel et que tout point matériel existe pendant toute la durée infinie du temps.

La définition exacte et complète des deux espèces d'éléments et des trois relations primitives est donnée implicitement par 27 axiomes, que nous repartissons en neuf groupes comme suit:

I	1—4	axiomes indépendants de la relation du temps,
II	1—7	axiomes de préordre du temps,
III	1—5	axiomes de coordination entre plusieurs points et événements,
IV	1—2	axiomes de continuité,
V	1—4	axiomes de position,
VI		axiome des parallèles,
VII	1—2	axiomes de congruence,
VIII		axiome d'existence d'un espace permanent métrique,
IX		axiome de déplacement.

A partir de ces axiomes et des cinq termes non définis, mentionnés, la géométrie euclidienne de l'espace associé à l'espace-temps et la cinématique de la Relativité Restreinte s'érigent à partir d'une classe particulière d'ensembles de points matériels, qui jouent le rôle fondamental des corps solides, mais que nous définissons indépendamment des corps solides, au moyen, d'événements instantanés: nous dirons qu'ils sont „métriques conformément à la lumière". Alors, après avoir fondé l'édifice de la cinématique, nous introduirons (dans le chapitre IX) les „corps solides" comme une classe additionnelle d'objets non définis, ainsi qu'un axiome supplémentaire (l'axiome X) qui énoncera l'identité des „corps solides" avec certains „corps" définis à partir des ensembles de points, métriques conformément à la lumière.

Remarquons que la non-contradiction du système des axiomes admis se démontre de façon simple sur le modèle de Minkowski, consistant d'un espace euclidien de quatre dimensions et dans lequel les droites renfermant un angle donné, soit de 45°, avec une direction fixe ont un rôle fondamental, attribué à la lumière. On montre facilement que nos axiomes satisfont à ce modèle, dont la non-contradiction est celle de la structure des espaces euclidiens. Quant à l'indépendance de nos axiomes, des raisonnements plus détaillés sont nécessaires. Elle est absolue pour le système partiel des axiomes I à IV, V 4, VI, VIII et IX (ainsi que X), mais non pas pour le système entier.

Le traité comprend sept chapitres. Le premier donne la base discrète de notre système. La continuité n'y étant pas encore, il ne peut y être question ni d'un temps continu, ni d'un espace continu. Nous les construisons par définitions successives en vertu des deux axiomes de continuité. Ainsi naîtront au fur et à mesure la géométrie élémentaire (chapitre V) et la cinématique relativiste (chapitre VI).

Je profite enfin de l'occasion pour mentionner que ce travail a été effectué avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique (Paris).

Thonon-les-Bains, le 7 septembre 1971.

NOTATIONS

Pour raccourcir on écrira:

$x, y \in E$ au lieu de $x \in E \ \wedge \ y \in E$,

$(\forall x, y)$ au lieu de $\forall x \ \wedge \ \forall y$, $\quad (\forall x, y \in E) = \forall x \ \forall y \ [x \in E \ \wedge \ y \in E]$,

et de même manière avec l'opérateur $\exists$.

$\{x \mid \Phi(x)\}$ ensemble des x qui satisfont à la fonction propositionnelle Φ.

$\langle x, y \rangle$ couple ordonné

$x \to a$ x converge vers a

$f\colon X \mapsto Y$ ou $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$: application de X dans Y.

$\hat{y}$ application dont les valeurs sont y. Ainsi, surtout pour réduire le nombre des lettres, $\hat{y} : X \mapsto Y$ et $y = \hat{y}(x)$.

		Définition ou Notation :
$P\alpha$	l'événement α a lieu au point P	au paragraphe 1.
αQ	l'événement α est perçu du point Q	au paragraphe 1.
$\mathbf{M}$, $\overline{\Sigma}$	l'ensemble de tous les points, l'ensemble de tous les événements	Not. 1.1

$\overline{\Sigma}_P$, $\overline{\Sigma}^Q$	l'ensemble des événements qui ont lieu en P, respectivement, qui sont perçus de Q … …	Not. 1.1
ω, ω'	événements impropres — au paragraphe 1	
Σ, Σ_P, Σ^Q	… … … … … … …	Not. 1.2
$\prec$ $\succ$ $\asymp$	avant, après, simultanément … … …	Déf. 2.1
$\alpha P \beta$	β se rattache en P à α … … … …	Déf. 3.1
$A\alpha B\beta C\gamma$, $\{A_n\alpha_n\}_r^s$	etc., chaînes de points et d'événements	Déf. 3.2
$\mathbf{M}_o$	ensemble des points ordinaires … … …	Not. 3.1
$(A \doteq B)\alpha$	coïncidence de A avec B à l'instant de α …	Déf. 4.1
$\langle A\alpha B\beta \rangle C\gamma$	alignement de A, B, C, perçu de C à l'instant de γ	Déf. 4.2
$\alpha \underset{P}{\prec} \beta$	… … … … … … …	Déf. 6.1
$(\alpha, \beta)_P$	intervalle ouvert … … … … …	Déf. 6.2
Δ_P	intervalle ouvert … … … … …	Not. 6.1
$P^{\cdot}$	signifie $P\alpha$ en sousentendant la lettre grecque …	Not. 7.1

$\alpha \prec \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$: α est avant β, α atteint β — au paragraphe 8 (a).

$V_P(\alpha)$ voisinage ouvert de α — au paragraphe 9.

Σ_P^Q, ${}_P\Sigma_Q$	… … … … … … …	Déf. 10.1
s_Q, s_{PQ}	… … … … … … …	Déf. 10.2
$\mathscr{C}_P$	l'ensemble des temps continus de P … …	Not. 11.1
$P\Phi$, ΞP, etc.	… … … … … …	Déf. 12.3
$(P \doteq Q)\Delta$	coïncidence constante dans Δ, de P avec Q …	Déf. 12.4
$\langle PQ \rangle R\Delta_R$	alignement constant … … … …	Déf. 12.5
$P \doteq Q$, $\langle PQ \rangle R$	… … … … … …	Not. 12.1

$(\alpha, \beta)_{P:Q}$, $\Delta_{P:Q}$	intervalles maximaux de non-coïncidence de P avec Q	Déf. 12.6 et Not. 12.2
$(\alpha, \beta)_{P:\mathbf{E}}$, $\Delta_{P:\mathbf{E}}$	... ...	Déf. 12.7
$\mathscr{I}_{P:Q}$	l'ensemble des intervalles $\Delta_{P:Q}$ pour P et Q donnés	Not. 12.2
$\mathscr{I}_{P:\mathbf{E}}$	l'ensemble des intervalles $\Delta_{P:\mathbf{E}}$ pour P et $\mathbf{E}$ donnés	Not. 12.3
$(\alpha, \beta)_{\mathbf{E}}$	réunion d'intervalles en non-coïncidence, ...	Def. 12.8
$\mathscr{N}$, $\mathscr{N}(\alpha, \beta)$	l'ensemble des ensembles en non-coïncidence, ou de ceux en non-coïncidence sur $(\alpha, \beta)_{\mathbf{E}}$	Not. 12.4
$\mathscr{I}_{\mathbf{E}}$	l'ensemble des $(\alpha, \beta)_{\mathbf{E}}$ pour $\mathbf{E}$ donné	Not. 12.4
$(P \dot{\in} \mathbf{A})\, \varphi$ etc.	P est situé dans $\mathbf{A}$ à l'instant de φ, etc. ...	Déf. 12.9
$(\mathbf{B} \dot{\subset} \mathbf{A})(\alpha, \beta)_{\mathbf{B}}$, $(\mathbf{A} \doteq \mathbf{B})(\alpha, \beta)_{\mathbf{A}}$	... ...	Déf. 12.10
$(P \dot{\notin} \mathbf{A})\varphi$, etc, et $P \dot{\in} \mathbf{A}$, $\mathbf{B} \dot{\subset} \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \doteq \mathbf{B}$	... ...	Not. 12.5
$(P_n \to Q)\xi$	... ...	Déf. 13.2
$e(f_{P:Q})$	l'élément métrique de $f \in \mathscr{T}_{P:Q}$	Déf. 14.1
$\mathscr{T}_{P:Q}$	l'ensemble des temps en P, métriques par rapport à Q	Not. 14.1
$d(\alpha, \beta)$	distance de α à β	Déf. 14.2
$\mathscr{F}_a$	l'ensemble des fonctions périodiques et continues d'une variable et de période a	Not. 14.2
$\mathscr{T}_{P:\mathbf{E}}$	l'ensemble des temps en P, métriques par rapport à tout point de $\mathbf{E}$	Déf. 14.3
$\hat{u}$ syn $\hat{t}$	$\hat{u}$ synchrone à $\hat{t}$	Déf. 15.1
$\mathscr{T}_{\mathbf{E}}$, $\mathscr{T}_{\mathbf{E}}(\alpha, \beta)$	l'ensemble des temps communs de $\mathbf{E}$, et des temps communs sur $\mathbf{E}$ en non-coïncidence entre α et β	Not. 16.1
P-X	distance basée sur un temps $\hat{t} \in \mathscr{T}_{P:\mathbf{E}}$	Déf. 17.1

CHAPITRE I

BASE DISCRETE DE LA THEORIE

Deux possibilités se présentent suivant qu'on accepte deux espèces d'éléments, que nous appelons „événements instantanés" et „points matériels", ou bien une seule espèce, les „événements instantanés", puisque les points matériels peuvent être définis comme certains ensembles d'événements instantanés. Nous suivrons dans ce chapitre d'abord la première possibilité, puis, au § 8, nous donnerons un exposé concis de la voie qui s'ouvre à la seconde, et nous établirons son équivalence avec la première. La seconde présente une structure axiomatique plus simple, mais la première a l'avantage d'être, en quelque sorte, plus proche de son interprétation en Relativité. Le reste de ce travail se rattache aussi bien à la seconde voie qu'à la première, bien qu'elle suive, au fond, la première.

1. LES AXIOMES INDEPENDANTS DE LA RELATION DU TEMPS

Nous admettons sans définitions explicites deux espèces d'éléments: les *événements instantanés*, notés par des lettres grecques, α, β, γ, ..., et les *points matériels*, notés par des majuscules A, B, C, ... Nous appellerons tout court les premiers des *événements* et les seconds des *points*.

Entre les événements et les points nous nous donnons les relations binaires externes: *avoir lieu en* et *être perçu de*. L'expression «α a lieu en P» sera notée $P\alpha$, et l'expression «α est perçu de Q», αQ.

NOTATION 1.1. Les ensembles d'événements seront notés par des majuscules grecques, Γ, Δ, Φ, ..., et les ensembles de points par des majuscules romaines grasses, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$

On notera

$\mathbf{M}$ l'ensemble de tous les points,

$\overline{\Sigma}$ l'ensemble de tous les événements,

$\overline{\Sigma}_P$ l'ensemble de tous les événements qui ont lieu en P,

$\overline{\Sigma}^Q$ l'ensemble de tous les événements qui sont perçus de Q.

Nous posons les deux axiomes suivants:

AXIOME I 1. $\forall\varphi\,\exists P\,[P\varphi]$.

AXIOME I 2. $\forall\varphi\,\forall P\,[P\varphi \Rightarrow \varphi P]$.

Notons les trois théorèmes suivants, qui résultent des deux axiomes précédents.

Théorème 1.1 $\overline{\Sigma}_P \subset \overline{\Sigma}^P$.

Théorème 1.2 $\forall\varphi\ \exists P\ [\varphi P]$.

Théorème 1.3 $\bigcup_{P\in\mathbf{M}} \overline{\Sigma}_P = \overline{\Sigma}, \quad \bigcup_{P\in\mathbf{M}} \overline{\Sigma}^P = \overline{\Sigma}$.

L'ensemble $\overline{\Sigma}$ contient deux événements instantanés exceptionnels distincts, que nous appellerons *événements impropres* et noterons ω et ω'. Ils satisfont en premier lieu aux deux axiomes suivants:

AXIOME I 3. $(\exists\,\omega,\omega')\,[\omega \neq \omega' \wedge \forall P\,[P\omega \wedge P\omega']]$.

AXIOME I 4. $\forall\varphi\,[\forall P\,[P\varphi] \Rightarrow \varphi \in \{\omega,\omega'\}\,]$.

NOTATION 1.2. On notera:

$$\Sigma = \overline{\Sigma} \setminus \{\omega,\omega'\},\ \Sigma^P = \overline{\Sigma}^P \setminus \{\omega,\omega'\},\ \Sigma_P = \overline{\Sigma}_P \setminus \{\omega,\omega'\}.$$

R e m a r q u e s. Les relations „avoir lieu en“ et „être perçu de“ sont définies par les sous-ensembles de $\overline{\Sigma}\times\mathbf{M}$:

$$\bigcup_{P\in\mathbf{M}} (\overline{\Sigma}_P \times \{P\}) \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{P\in\mathbf{M}} (\overline{\Sigma}^P \times \{P\}).$$

2. LES AXIOMES DE PREORDRE DU TEMPS

Nous admettons dans l'ensemble $\overline{\Sigma} \times \mathbf{M}$ des couples ordonnés $\langle \varphi, P \rangle$ la relation binaire *être avant* (ou *avant*) notée $\prec$. L'expression

$$\langle \alpha, P \rangle \prec \langle \beta, P \rangle$$

se lit: $\langle \alpha, P \rangle$ *est avant* $\langle \beta, P \rangle$.

On a d'abord les deux axiomes suivants, avec α, β, P et Q quelconques:

AXIOME II 1. $\langle \alpha, P \rangle \prec \langle \beta, Q \rangle \Rightarrow P = Q$.

AXIOME II 2. $\langle \alpha, P \rangle \prec \langle \beta, P \rangle \Rightarrow \alpha P \wedge \beta P$.

En d'autres termes, la relation $\prec$ n'existe qu'entre les couples $\langle \varphi, P \rangle$ qui contiennent le même point P, et qu'avec des événements qui sont perçus de P. Elle est définie sur l'ensemble

$$\bigcup_{P \in \mathbf{M}} (\overline{\Sigma}^P \times \{P\}).$$

DEFINITION 2.1. Soit αP et βP. Lorsque $\langle \beta, P \rangle \prec \langle \alpha, P \rangle$, on écrira aussi $\langle \alpha, P \rangle \succ \langle \beta, P \rangle$, et lira: $\langle \alpha, P \rangle$ *est après* $\langle \beta, P \rangle$.

Lorsque αP et βP, mais ni $\langle \alpha, P \rangle \prec \langle \beta, P \rangle$ ni $\langle \alpha, P \rangle \succ \langle \beta, P \rangle$, on écrira $\langle \alpha, P \rangle \asymp \langle \beta, P \rangle$ et lira: $\langle \alpha, P \rangle$ *est simultané à* $\langle \beta, P \rangle$.

En vertu de l'axiome II 2 nous posons la définition suivante:

DEFINITION 2.2. $\alpha P \prec \beta P \overset{\text{def}}{=} \langle \alpha, P \rangle \prec \langle \beta, P \rangle$,

$$\alpha P \succ \beta P \overset{\text{def}}{=} \langle \alpha, P \rangle \succ \langle \beta, P \rangle,$$

$$\alpha P \asymp \beta P \overset{\text{def}}{=} \langle \alpha, P \rangle \asymp \langle \beta, P \rangle.$$

On lira, respectivement: α *est perçu de* P *avant que* β *soit perçu de* P, ou plus court: α *est perçu de* P *avant* β; α *est perçu de* P *après* β; α *et* β *sont perçus de* P *simultanément*.

Remarquons que: $\alpha P \prec \beta P \Leftrightarrow \beta P \succ \alpha P$,

$$\alpha P \asymp \beta P \Leftrightarrow \beta P \asymp \alpha P.$$

Quels que soient α, β et P, on a les axiomes:

AXIOME II 3. $\alpha P \prec \beta P \Rightarrow$ non $(\beta P \prec \alpha P)$.

AXIOME II 4. $\alpha P \prec \beta P \wedge \beta P \prec \gamma P \Rightarrow \alpha P \prec \gamma P$.

AXIOME II 5. $\alpha P \asymp \beta P \wedge \beta P \asymp \gamma P \Rightarrow \alpha P \asymp \gamma P$.

Par conséquent:

Théorème 2.1. *La relation $\prec$ est une relation de préordre au sens strict, et la relation $\asymp$ est une équivalence.*

R e m a r q u e s. Soit E un ensemble quelconque et soient deux relations binaires, définies dans E, l'une de préordre au sens strict, notée $\prec$, et l'autre une équivalence, qui n'est pas nécessairement l'identité, notée $\sim$ [10]. Nous dirons alors que E est doué d'un *préordre, par les relations* $\prec$ *et* $\sim$. Lorsque l'équivalence est identité, le préordre est appelé *ordre*, et E est un ensemble *ordonné*. Lorsque l'équivalence n'est pas l'identité, nous dirons que E est muni d'un *préordre au sens strict*. Lorsque

$$(\forall x, y \in E)\ [x \prec y \vee x \succ y \vee x \sim y],$$

le préordre et *l'ordre* sont dits *totaux*. S'ils ne sont pas totaux, ils sont dits *partiels*.

Remarquons que $\alpha P \asymp \beta P$ n'implique pas $\alpha = \beta$, et que

$$(\alpha P \asymp \beta P) = [\alpha P \wedge \beta P \wedge \text{non } (\alpha P \prec \beta P) \wedge \text{non } (\alpha P \succ \beta P)].$$

En appliquant ces termes, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème 2.2. *Quel que soit un point P, l'ensemble $\overline{\Sigma}^P \times \{P\}$ des couples $\langle \varphi, P \rangle$ est muni, par les relations „avant" et „simultanément", d'un préordre total.*

DEFINITION 2.3. $$\alpha P \preccurlyeq \beta P \overset{\text{def}}{=} \alpha P \prec \beta P \vee \alpha P \asymp \beta P,$$
$$\alpha P \succcurlyeq \beta P \overset{\text{def}}{=} \alpha P \succ \beta P \vee \alpha P \asymp \beta P.$$

En limitant les relations $\prec$ et $\asymp$ à $\overline{\Sigma}_P \times \{P\}$, nous posons la définition suivante:

DEFINITION 2.4. $$P\alpha \prec P\beta \overset{\text{def}}{=} (\langle \alpha, P \rangle \prec \langle \beta, P \rangle) \wedge P\alpha \wedge P\beta,$$
$$P\alpha \asymp P\beta \overset{\text{def}}{=} (\langle \alpha, P \rangle \asymp \langle \beta, P \rangle) \wedge P\alpha \wedge P\beta.$$

---

[10] D'ordinaire on définit le préordre et l'ordre sur E par la relation $\precsim$, mais nous préférons partir de la relation $\prec$ de „préordre au sens strict", c.-à-d. antisimétrique „au sens strict" ($x \prec y \Rightarrow$ non $(y \prec x)$, où $x, y \in E$) et transitive, qui est donc aussi non-réflexive.

On dira respectivement: α *a lieu en P avant* β, et: α *et* β *ont simultanément lieu en P*.

Nous admettons encore les deux axiomes du temps, suivants:

AXIOME II 6. $\forall P (\forall \alpha, \beta)(\exists \gamma \in \Sigma)[P\alpha \prec P\beta \;\Rightarrow\; P\alpha \prec P\gamma \prec P\beta]$.

AXIOME II 7. $\forall P (\forall \varphi \in \Sigma)[P\varphi \wedge P\omega \wedge P\omega' \;\Rightarrow\; P\omega \prec P\varphi \prec P\omega']$.

Enfin, on a les relations mixtes:

DEFINITION 2.5. $P\alpha \prec \beta P \overset{\text{def}}{=} P\alpha \wedge (\alpha P \prec \beta P)$,

$$P\alpha \asymp \beta P \overset{\text{def}}{=} P\alpha \wedge (\alpha P \asymp \beta P),$$

$$\alpha P \prec P\beta \overset{\text{def}}{=} (\alpha P \prec \beta P) \wedge P\beta,$$

$$\alpha P \asymp P\beta \overset{\text{def}}{=} (\alpha P \asymp \beta P) \wedge P\beta.$$

On dira respectivement: α *a lieu en P avant que* β *soit perçu de P; α a lieu en P et* β *est perçu de P simultanément;* etc.

3. CHAINES DE POINTS ET D'EVENEMENTS. POINTS ORDINAIRES ET POINTS EXCEPTIONNELS

DEFINITION 3.1. $\alpha P \beta \overset{\text{def}}{=} \alpha P \asymp P\beta$.

On lira: β *se rattache à* α *en* P.

DEFINITION 3.2. L'expression

$$\alpha_{r-1} A_r \alpha_r \wedge \alpha_r A_{r+1} \alpha_{r+1} \wedge \alpha_{r+1} A_{r+2} \alpha_{r+2} \wedge \ldots \wedge \alpha_{s-1} A_s \alpha_s,$$

ou plus court,

$$\bigwedge_{r \leq n \leq s} \alpha_{n-1} A_n \alpha_n,$$

où $r \leqslant s$ $(r, s \in \mathbb{N})$ ainsi que la même expression prolongée indéfiniment $(r \to -\infty$ ou $s \to \infty)$ sera appelée une *chaîne complète, finie* ou *infinie, de points et d'événements*, et sera notée:

$$\alpha_{r-1} A_r \alpha_r A_{r+1} \alpha_{r+1} \ldots A_s \alpha_s \quad \text{lorsque la chaîne est finie,}$$

$$\ldots A_{s-1} \alpha_{s-1} A_s \alpha_s, \quad \text{etc.} \quad \text{lorsqu'elle est infinie,}$$

ou bien plus court,

$$\alpha_{r-1}\{A_n\,\alpha_n\}_r^s, \quad \{A_n\,\alpha_n\}_{-\infty}^s, \quad \text{etc.}$$

On dira que cette chaîne est *supportée* par la suite de points

$$(A_n)_{r\leq n\leq s}, \quad \text{ou} \quad (A_n)_{n\leq s}, \text{ etc.}$$

La partie d'une chaîne complète à laquelle l'élément initial ou final manquent, sera encore appelée une *chaîne, incomplète,* pourvu que celle-ci ne se réduise pas à moins de deux éléments.

Remarques. Par exèmple

$$A_r\,\alpha_r\,A_{r+1}\,\alpha_{r+1}\,\ldots\,\alpha_{s-1}A_s=\{A_n\,\alpha_n\}_r^{s-1}A_s$$

est une chaîne incomplète. — Puisque $\alpha P\beta$ est une chaîne, αP et $P\beta$ le sont aussi.

Nous ordonnons les chaînes dont le dernier point est le même, suivant l'ordre du temps du dernier couple d'éléments:

DEFINITION 3.3. Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux chaînes dans lesquelles le dernier point est le même, soit P, et soient α, β les éléments de ces chaînes, qui précèdent P. Alors,

$$\mathbb{A}\prec\mathbb{B}\overset{\text{def}}{=}\alpha P\prec\beta P,$$

$$\mathbb{A}\asymp\mathbb{B}\overset{\text{def}}{=}\alpha P\asymp\beta P,$$

et on dira respectivement: *la chaîne* $\mathbb{A}$ *termine avant la chaîne* $\mathbb{B}$ (ou, $\mathbb{B}$ *termine après* $\mathbb{A}$), et *les chaînes* $\mathbb{A}$ *et* $\mathbb{B}$ *terminent simultanément.*

Ainsi, par exemple,

$$\{A_m\,\alpha_m\}_p^q P\varphi\prec\{B_n\,\beta_n\}_r^s P\psi \Leftrightarrow \{A_m\,\alpha_m\}_p^q P\varphi\wedge\{B_n\,\beta_n\}_r^s P\psi\wedge P\varphi\prec P\psi,$$

$$A\alpha B\beta\asymp\varphi P\psi Q \Leftrightarrow A\alpha B\beta\wedge\varphi P\psi Q\wedge B\beta\asymp\psi Q.$$

Donc on a:

Théorème 3.1. *L'ensemble des chaînes dont le dernier point est le même, est muni d'un préordre total par les relations „avant" et „simultanément".*

Remarque. Dans les cas simples on peut avoir recours à des schémas tels que fig. 1 (a), qui représente une chaîne $A\alpha B\beta C\gamma D\delta$, ou bien (b), qui représente la même chaîne par la ligne brisée $\alpha\beta\gamma\delta$, les points matériels A, B, C, D étant représentés par des lignes de l'Univers. Fig. (c) représente une chaîne supportée par les deux points M et N.

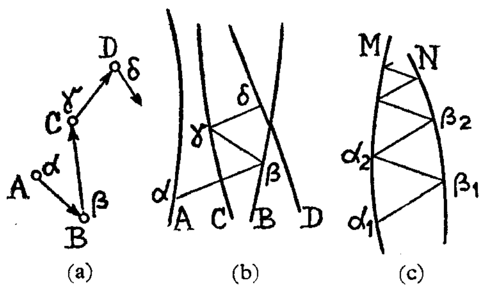

Fig. 1

DEFINITION 3.4. Un point A, tel que pour tout événement φ de Σ un événement ψ_1 de Σ_A existe, qui se rattache à φ, et qu'un événement ψ_2 de Σ_A existe, auquel φ se rattache, sera appelé un *point ordinaire*. Tout point qui n'est pas ordinaire sera dit *exceptionnel*.

NOTATION 3.1. L'ensemble des points ordinaires sera noté $\mathbf{M}_0$.

Remarque. Dans leur interprétation en Physique les points exceptionnels sont ceux qui se déplacent par rapport à un repère galiléen avec des vitesses approchant celle de la lumière lorsque le temps tend vers le passé ou l'avenir infinis, de telle sorte que certains événements ne sont jamais perçus en un tel point, ou bien que certains événements ne se rattachent à aucun événement qui aurait lieu en un tel point. La fig. 2 représente schématiquement un point exceptionnel P, tel que parmi les événements qui ont lieu en un point X, seulement ceux-ci sont perçus en P, qui ont lieu avant γ, et que seulement les événements qui ont lieu après β, se rattachent à des événements qui ont lieu en P ($\beta\omega$ et $\gamma\omega'$ représentant des asymptotes de la courbe P).

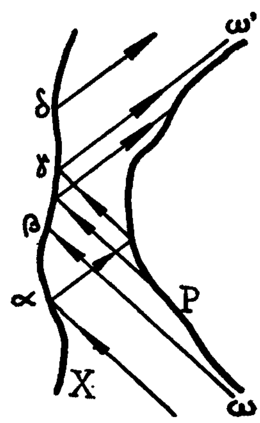

Fig. 2

4. COINCIDENCE ET ALIGNEMENT INSTANTANES DES POINTS

Étant donné que nous construisons une théorie dont l'interprétation principale doit être en Physique, et que les rapports entre les points matériels doivent être fondés sur la „lumière", nous allons définir au moyen des événements instantanés deux relations entre les points, qui joueront un rôle fondamental: la coïncidence instantanée de deux points, et l'alignement instantané de trois points [11].

DEFINITION 4.1. $(A \doteq B)\alpha \overset{\text{def}}{=} A\alpha B\beta A\alpha$.

On dira que A *coïncide avec* B *à l'instant de* α.

DEFINITION 4.2. $\langle A\alpha B\beta\rangle C\gamma \overset{\text{def}}{=} A\alpha B\beta C\gamma \wedge A\alpha C\gamma$.

On appellera la suite des trois couples $\langle A, \alpha\rangle$, $\langle B, \beta\rangle$, $\langle C, \gamma\rangle$ un *alignement instantané d'origine* A, *à l'instant de* α, et dira que *la suite* (A, B, C) est en *alignement instantané perçu de* C *à l'instant de* γ. On dira aussi que *l'ensemble* $\{A, B, C\}$ est en *alignement instantané*, sans préciser l'ordre des points.

S'il n'est pas $(A \doteq B)\alpha$, ou $(B \doteq C)\beta$, ou ni l'un ni l'autre, on écrira respectivement

$$\langle A\alpha\text{-}B\beta\rangle C\gamma \quad \text{ou} \quad \langle A\alpha B\beta\text{-}\rangle C\gamma \quad \text{ou} \quad \langle A\alpha\text{-}B\beta\text{-}\rangle C\gamma.$$

Dans le dernier cas on dira que c'est un *alignement propre*.

Deux alignements, $\langle A\alpha\text{-}B\beta\text{-}\rangle C\gamma$ et $\langle C\lambda\text{-}B\mu\text{-}\rangle A\nu$, dans lesquels l'un seulement des événements est le même (par exemple $\beta = \mu$) seront dits *inverses* l'un à l'autre.

5. LES AXIOMES DE COORDINATION ENTRE PLUSIEURS POINTS ET EVENEMENTS

AXIOME III 1. $(\forall A, B)(\forall \alpha, \beta \in \Sigma)[A\alpha B\beta A\alpha \Rightarrow \alpha = \beta]$.

AXIOME III 2.

$$(\forall A, B)(\forall \alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \Sigma)[A\alpha B\beta \wedge A\alpha' B\beta' \Rightarrow (A\alpha \prec A\alpha' \Leftrightarrow B\beta \prec B\beta')].$$

AXIOME III 3.

$$(\forall A, B, C)(\forall \alpha, \beta \in \Sigma)[A\alpha B\beta \wedge \alpha C \wedge \beta C \Rightarrow A\alpha B\beta C \succcurlyeq A\alpha C].$$

AXIOME III 4. *Quels que soient* A, B, C, D *et* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Sigma$, *on a:*

$$\langle A\alpha\text{-}B\beta\text{-}\rangle C\gamma \wedge \langle B\beta\text{-}C\gamma\text{-}\rangle D\delta \Rightarrow \langle A\alpha\text{-}C\gamma\text{-}\rangle D\delta;$$

---

[11] Dans mes travaux antérieurs la coïncidence fut appelée *union* et l'alignement *conjonction*, empruntant ce dernier terme à l'astronomie.

$$\langle A\alpha\text{-}B\beta\text{-}\rangle C\gamma \wedge \langle A\alpha\text{-}B\beta\text{-}\rangle D\delta \wedge \gamma \neq \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \langle A\alpha\text{-}C\gamma\text{-}\rangle D\delta \vee \langle A\alpha\text{-}D\delta\text{-}\rangle C\gamma;$$

$$\langle A\alpha\text{-}B\beta\text{-}\rangle D\delta \wedge \langle A\alpha\text{-}C\gamma\text{-}\rangle D\delta \wedge \beta \neq \gamma \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \langle A\alpha\text{-}B\beta\text{-}\rangle C\gamma \vee \langle A\alpha\text{-}C\gamma\text{-}\rangle B\beta;$$

$$\langle A\alpha\text{-}C\gamma\text{-}\rangle D\delta \wedge \langle B\beta\text{-}C\gamma\text{-}\rangle D\delta \wedge \alpha \neq \beta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \langle A\alpha\text{-}B\beta\text{-}\rangle C\gamma \vee \langle B\beta\text{-}A\alpha\text{-}\rangle C\gamma.$$

AXIOME III 5. *Quels que soient P, Q, on a:*

$$(\forall\alpha, \beta, \varphi \in \Sigma)\,(\exists\psi \in \Sigma)\,[P\alpha Q\beta \wedge P\varphi \prec P\alpha \Rightarrow P\varphi Q\psi].$$

$$(\forall\alpha, \beta, \psi \in \Sigma)\,(\exists\varphi \in \Sigma)\,[P\alpha Q\beta \wedge Q\psi \succ Q\beta \Rightarrow P\varphi Q\psi].$$

Remarques. On peut appeler III 1 l'axiome d'identité d'événements, III 2 l'axiome de monotonie, III 3 l'axiome du triangle,[12]. III 4 l'axiome d'alignement, III 5 l'axiome d'existence dans le rattachement des événements. — Le rôle de l'axiome III 1 est de simplifier la structure; III 2 exprime le fait bien élémentaire, que les événements qui ont lieu en un point dans un certain ordre de temps, sont perçus en tout autre point dans le même ordre de temps, et inversement; III 3 et 4 expriment, interprétés en Physique, des faits élémentaires de la propagation rectiligne de la lumière, et III 5 assure l'existence d'événements qui se rattachent à d'autres événements, ainsi que d'événements auxquels d'autres événements se rattachent. Remarquons que les événements ω et ω' ne sont pas envisagés dans les axiomes III 1 à 5.

6. L'ENSEMBLE DES EVENEMENTS INSTANTANES QUI ONT LIEU EN UN POINT MATERIEL

Notons tout d'abord la conséquence suivante de l'axiome II 3 et de la définition 2.1:

Théorème 6.1. $\alpha P \prec \beta P \Rightarrow \alpha \neq \beta$.

$$\alpha P \asymp \alpha P.$$

[12] Voir l'axiome équivalent III*3 du § 8.

En vertu des définitions 2.4 et 2.5 on a:

Théorème 6.2. $P\alpha \prec P\beta \Rightarrow$ non $(P\beta \prec P\alpha)$.

$$P\alpha \prec P\beta \Rightarrow \alpha \neq \beta.$$

$$P\alpha \asymp P\alpha, \qquad P\alpha \asymp \alpha P, \qquad \alpha P \asymp P\alpha.$$

En vertu de l'axiome I 2 et des définitions 3.1 et 3.2 on a:

Théorème 6.3. $P\alpha \Rightarrow \alpha P\alpha \wedge P\alpha P \wedge \{P\alpha\}_1^n \qquad (n \in \mathbb{N})$.

Théorème 6.4. $P\alpha \asymp P\beta \Rightarrow \alpha = \beta$.

Démonstration. Suivant la définition 2.4 on a $\alpha P \asymp \beta P \wedge P\alpha \wedge P\beta$, donc, suivant la définition 2.5, $\alpha P \asymp P\beta$ et $P\alpha \asymp \beta P$, d'où $\beta P \asymp P\alpha$. Donc, selon la définition 3.1, $\alpha P\beta$ et $\beta P\alpha$.

Par conséquent, $P\alpha \wedge \alpha P\beta \wedge \beta P\alpha$, donc selon la définition 3.2, $P\alpha P\beta P\alpha$, d'où selon l'axiome III 1, en y posant $A = B = P$,

$$P\alpha P\beta P\alpha \Rightarrow \alpha = \beta.$$

Il en résulte suivant la définition 2.1:

Théorème 6.5. $P\alpha \wedge P\beta \wedge \alpha \neq \beta \Rightarrow P\alpha \prec P\beta \vee P\alpha \succ P\beta$.

Théorème 6.6. $\forall P [P\omega \prec P\omega']$.

Démonstration. Suivant l'axiome I 3, $P\omega$ et $P\omega'$. Comme $\omega \neq \omega'$, on a donc (théorème 6.5) $P\omega' \prec P\omega$ ou $P\omega \prec P\omega'$. S'il était $P\omega' \prec P\omega$, on aurait (axiome II 6)

$$(\exists \gamma \in \Sigma) [P\omega' \prec P\gamma \prec P\omega],$$

d'où $P\omega' \prec P\gamma$. Or, suivant l'axiome II 7, $P\gamma \prec P\omega'$, donc il n'est pas $P\omega' \prec P\gamma$ (axiome II 3) et par conséquent ni $P\omega' \prec P\omega$. Donc $P\omega \prec P\omega'$.

En séparant dans l'axiome II 6 les trois cas $\alpha, \beta \in \Sigma$, $\beta = \omega'$ et $\alpha = \omega$, on obtient:

Théorème 6.7. $\forall P (\forall \alpha, \beta \in \Sigma) (\exists \gamma \in \Sigma) [P\alpha \prec P\beta \Rightarrow P\alpha \prec P\gamma \prec P\beta]$.

$$\forall P (\forall \alpha \in \Sigma) (\exists \gamma \in \Sigma) [P\alpha \Rightarrow P\alpha \prec P\gamma].$$

$$\forall P (\forall \beta \in \Sigma) (\exists \gamma \in \Sigma) [P\beta \Rightarrow P\gamma \prec P\beta].$$

Démonstration. La première proposition est l'axiome II 6 réduit à $\alpha, \beta \in \Sigma$. La seconde résulte lorsque $\beta = \omega'$, car alors

$$P\alpha \prec P\omega' \Rightarrow P\alpha \prec P\gamma \prec P\omega'.$$

Or, selon l'axiome I 3, $\forall P(P\omega')$ et selon l'axiome II 7

$$\forall P\,(\forall\varphi \in \Sigma)\,[P\varphi \Rightarrow P\varphi \prec P\omega'],$$

donc les relations $P\alpha \prec P\omega'$ et $P\gamma \prec P\omega'$ peuvent être omises, et on a $P\alpha \Rightarrow P\alpha \prec P\gamma$. – La troisième proposition résulte de II 6 lorsque $\alpha = \omega$.

Du théorème 6.6 et de l'axiome II 6 découle:

Théorème 6.8. $\forall P(\exists\varphi \in \Sigma)\,[P\varphi]$.

Comme $\overline{\Sigma}_P \subset \overline{\Sigma}^P$, l'ensemble $\overline{\Sigma}_P \times \{P\}$ possède en vertu du théorème 2.2 une structure de préordre total, induite par celle de $\overline{\Sigma}^P \times \{P\}$. Grâce au théorème 6.4 c'est un ensemble *totalement ordonné*, la simultanéité y étant l'identité.

Il est parfois préférable d'envisager l'ordre sur $\overline{\Sigma}_P$ même, lequel est „projeté" par l'ordre établi sur $\overline{\Sigma}_P \times \{P\}$. Nous posons donc:

DEFINITION 6.1. $\alpha \underset{P}{\prec} \beta \overset{\text{def}}{=} P\alpha \prec P\beta,$

$$\alpha \underset{P}{\succ} \beta \overset{\text{def}}{=} P\alpha \succ P\beta.$$

Théorème 6.9. *L'ensemble* $\overline{\Sigma}_P$ *des événements qui ont lieu en un point P est totalement ordonné par la relation „avant".*

En vertu du théorème 6.6 et de l'axiome II 7 on a le théorème suivant:

Théorème 6.10. *Quel que soit P, l'ordre total, défini sur l'ensemble* $\overline{\Sigma}_P$, *est dense, et il existe un premier et un dernier élément,* ω *et* ω'.

Comme $\overline{\Sigma}_P$ est totalement ordonné, on y peut définir les intervalles:

DEFINITION 6.2. Soient $\alpha, \beta \in \overline{\Sigma}_P$ tels que $\alpha \underset{P}{\prec} \beta$. Nous appellerons l'ensemble

$$(\alpha, \beta)_P \overset{\text{def}}{=} \{\xi \mid \alpha \underset{P}{\prec} \xi \underset{P}{\prec} \beta\}$$

un *intervalle ouvert d'événements*. Si $\alpha \neq \omega$ et $\beta \neq \omega'$, c'est un intervalle *borné*, autrement il est dit *non-borné*. Si $\alpha = \omega$, $\beta \preccurlyeq \omega'$, nous l'appellerons intervalle *commençant*, et si $\beta = \omega'$, $\alpha \succcurlyeq \omega$, nous l'appellerons intervalle *terminant*. En ajoutant α, β on obtient les *intervalles fermés* et *mixtes*, $[\alpha, \beta]_P$, $[\alpha, \beta)_P$, etc.

NOTATION 6.1. Les intervalles ouverts d'événements seront souvent notés Δ (soit $\Delta_P \subset \Sigma_P$).

DEFINITION 6.3. Le préordre et l'ordre totaux, définis sur $\bar{\Sigma}^P \times \{P\}$, $\bar{\Sigma}_P \times \{P\}$ et $\bar{\Sigma}_P$ seront dits: *préordre* ou *ordre du temps*.

7. CONSEQUENCES DES TROIS GROUPES D'AXIOMES, I, II ET III

La proposition suivante complète l'axiome III 2.[13]

Théorème 7.1. $$P\alpha Q \wedge P\beta Q \Rightarrow \begin{cases} P\alpha \prec P\beta \Leftrightarrow \alpha Q \prec \beta Q \\ P\alpha \asymp P\beta \Leftrightarrow \alpha Q \asymp \beta Q \\ P\alpha \succ P\beta \Leftrightarrow \alpha Q \succ \beta Q \end{cases}$$

Le théorème suivant est une conséquence des définitions 3.1, 3.2, 3.4 et de l'axiome I 1.

Théorème 7.2.

$$A \in \mathbf{M}_0 \Leftrightarrow \forall X (\forall \varphi \in \Sigma_X)(\exists \psi_1, \psi_2 \in \Sigma_A)[X\varphi \Rightarrow X\varphi\, A\psi_1 \wedge A\psi_2\, X\varphi].$$

Théorème 7.3.

$$B \notin \mathbf{M}_0 \Leftrightarrow \exists X (\exists \varphi \in \Sigma_X)(\forall \psi_1, \psi_2 \in \Sigma_B)[X\varphi \Rightarrow X\varphi\, B\psi_1 \vee B\psi_2\, X\varphi].$$

NOTATION 7.1. Lorsqu'il n'y aura pas d'équivoque nous omettrons les lettres grecques, en les substituant par des points; soit par exemple $A\cdot B\cdot$ ou $\{A_n\cdot\}_r^s$ au lieu de $A\mu B\nu$ ou $\{A_n \alpha_n\}_r^s$.

[13] Les démonstrations des théorèmes ne seront données que dans la mesure où elles nous paraîtront nécessaires. L'opérateur $\forall$ sera souvent omis.

Théorème 7.4 *Les deux chaînes*

$$A\alpha B^{\cdot}C^{\cdot}\ldots \quad et \quad \ldots C^{\cdot}B^{\cdot}A\alpha$$

existent, quels que soient les points $A, B, C, \ldots \in \mathbf{M}_0$, ***et l'événement*** α, ***qui a lieu en*** A, ***supposé que ces points et*** α ***existent.***

Règle pratique. Suivant le théorème 7.1, lorsqu'on a par exemple

$$A^{\cdot}M^{\cdot}P\alpha Q \prec B^{\cdot}N^{\cdot}P\beta Q, \tag{7.1}$$

alors:

1° on peut écrire $Q^{\cdot}$ au lieu de Q (soit, $A^{\cdot}M^{\cdot}P\alpha Q^{\cdot}$) et une majuscule peut être ajoutée, à condition qu'elle soit la même des deux côtés de la relation, soit

$$A^{\cdot}M^{\cdot}P\alpha Q^{\cdot}R \prec B^{\cdot}N^{\cdot}P\beta Q^{\cdot}R;$$

2° la dernière majuscule peut être supprimée, soit Q dans (7.1), des deux côtés de la relation à la fois, à condition que l'avant-dernière soit la même des deux côtés;

3° en procédant du côté gauche dans chacun des deux membres de (7.1) indépendamment, on peut retrancher ou, au contraire, ajouter une ou plusieures lettres munies de points, soit $X^{\cdot}Y^{\cdot}M^{\cdot}P\alpha \prec P\beta$.

Dans les théorèmes 7.5 à 7.16 la coïncidence ou non-coïncidence des points joue un rôle essentiel.

Théorème 7.5. $(\forall P, Q)\, \forall\alpha\, [P\alpha \wedge Q\alpha \Leftrightarrow (P \doteq Q)\alpha]$.

Démonstration. Selon le théorème **6.1** on a $\alpha P\alpha$ et $\alpha Q\alpha$, donc

$$P\alpha \wedge \alpha Q\alpha \wedge \alpha P\alpha,$$

et selon la définition 3.2, $P\alpha Q\alpha P\alpha$, donc d'après la définition 4.1, $(P \doteq Q)\alpha$.

Théorème 7.6. $(\forall P, Q)\, [(P \doteq Q)\,\omega \wedge (P \doteq Q)\,\omega']$.

Théorème 7.7. $(A \doteq B)\varphi \Rightarrow (B \doteq A)\varphi$.

La relation de coïncidence instantanée étant symétrique, nous dirons aussi que A *et* B *coïncident à l'instant de* φ.

Théorème 7.8. $(A \doteq B)\varphi \Rightarrow A\varphi B^{\cdot}A \asymp A\varphi$.

$$(\forall A, B \in \mathbf{M}_0)\,[\text{non}\,(A \doteq B)\varphi \Leftrightarrow A\varphi B^{\cdot}A \succ A\varphi].$$

Démonstration. La première partie du théorème résulte de la définition 4.1, puisque $A\varphi \asymp A\varphi$. Quant à la seconde partie, on a suivant l'axiome III 3 $A\varphi B^{\cdot}A \succcurlyeq A\varphi$. Si $A\varphi B^{\cdot}A\varphi$, on aurait selon la définition 4.1 $(A \doteq B)\varphi$. Donc $A\varphi B^{\cdot}A \succ A\varphi$.

Théorème 7.9. $\alpha A_1^{\cdot} A_2^{\cdot} \ldots A_n^{\cdot} \succcurlyeq \alpha A_1^{\cdot} A_n^{\cdot}, \quad \forall A_n \in \mathbf{M}_0$.

Théorème 7.10. $A\alpha B\beta C \asymp A\lambda C \Rightarrow A\alpha \preccurlyeq A\lambda$;

$$A\alpha C \asymp B\beta C \Rightarrow \alpha B \succcurlyeq B\beta, \quad \forall B \in \mathbf{M}_0.$$

Théorème 7.11. $(A \doteq B)\alpha \Rightarrow (\forall C \in \mathbf{M}_0)\,[\langle A\alpha B\alpha\rangle C^{\cdot} \wedge \langle B\alpha A\alpha\rangle C^{\cdot}]$.

$$(B \doteq C)\beta \Rightarrow (\forall A \in \mathbf{M}_0)\,[\langle A^{\cdot}B\beta\rangle C\beta \wedge \langle A^{\cdot}C\beta\rangle B\beta].$$

Théorème 7.12. $(A \doteq B)\varphi \wedge (A \doteq C)\varphi \Rightarrow (B \doteq C)\varphi$.

NOTATION 7.2. Une chaîne finie ou infinie, supportée par deux points, soit par exemple

$$M\alpha_p\, N\beta_p\, M\alpha_{p+1}\, N\beta_{p+1} \ldots M\alpha_q\, N\beta_q,$$

sera notée

$$\{M\alpha_n\, N\beta_n\}_p^q \quad \text{ou bien} \quad \{M^{\cdot}N^{\cdot}\}_p^q$$

On admet: $-\infty \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$.

Par exemple, la chaîne $A\alpha B^{\cdot}\{M^{\cdot}N^{\cdot}\}_1^q S^{\cdot}T^{\cdot}$ contient une partie supportée q fois par M et q fois par N.

Désignons par Γ_A et Γ_B les ensembles des événements de la chaîne $\{A^{\cdot}B^{\cdot}\}_{-\infty}^{\infty}$, qui ont lieu en A, respectivement en B.

Théorème 7.13. *S'il n'est pas* $(A \doteq B)\alpha_0$ *pour un* $\alpha_0 \in \Gamma_A$, *alors il n'est ni* $(A \doteq B)\alpha$, *ni* $(B \doteq A)\beta$ *quels que soient* $\alpha \in \Gamma_A$, $\beta \in \Gamma_B$, *et l'on a:*

$$\{A^{\cdot}B^{\cdot}\}_{-\infty}^{n} A^{\cdot} \prec \{A^{\cdot}B^{\cdot}\}_{-\infty}^{n+1} A^{\cdot} \quad \text{et} \quad \{A^{\cdot}B^{\cdot}\}_{-\infty}^{n} \prec \{A^{\cdot}B^{\cdot}\}_{-\infty}^{n+1} \qquad (\forall n \in \mathbb{Z}). \tag{7.2}$$

Démonstration. En vertu du théorème 7.8

$$A\alpha_0 \asymp \{A^{\cdot}B^{\cdot}\}_{-\infty}^{n_0} A\alpha_0 \prec \{A^{\cdot}B^{\cdot}\}_{-\infty}^{n_0} A\alpha_0 B^{\cdot} A^{\cdot} \asymp \{A^{\cdot}B^{\cdot}\}_{-\infty}^{n_0+1} A^{\cdot},$$

donc $\{A{\cdot}B{\cdot}\}_{-\infty}^{n_0} A\alpha_0 \prec \{A{\cdot}B{\cdot}\}_{-\infty}^{n_0+1} A{\cdot}$, d'où, de la même manière, en ajoutant des lettres suivant la Règle pratique:

$$\{A{\cdot}B{\cdot}\}_{-\infty}^{n_0+1} \prec \{A{\cdot}B{\cdot}\}_{-\infty}^{n_0+2}, \qquad \{A{\cdot}B{\cdot}\}_{-\infty}^{n_0+1} A{\cdot} \prec \{A{\cdot}B{\cdot}\}_{-\infty}^{n_0+2} A{\cdot}, \qquad \text{etc.},$$

et en retranchant des lettres,

$$\{A{\cdot}B{\cdot}\}_{-\infty}^{n_0} \prec \{A{\cdot}B{\cdot}\}_{-\infty}^{n_0+1}, \qquad \{A{\cdot}B{\cdot}\}_{-\infty}^{n_0-1} A{\cdot} \prec \{A{\cdot}B{\cdot}\}_{-\infty}^{n_0} A{\cdot}, \qquad \text{etc.},$$

donc on a (7.2). La première partie du théorème résulte de la seconde partie du théorème 7.8.

Théorème 7.14. *Si $A\alpha \preccurlyeq A\lambda \preccurlyeq A\alpha B{\cdot}A{\cdot}$, alors, quel que soit λ, on a:*

$$\text{non}(A \doteq B)\alpha \;\Rightarrow\; \text{non}(A \doteq B)\lambda.$$

Théorème 7.15. *Si $\Delta_A \subset \Sigma_A$ est le plus petit intervalle ouvert qui contient Γ_A, on a:*

$$(\exists\alpha_0 \in \Gamma_A)(\forall\lambda \in \Delta_A)[\text{non}(A \doteq B)\alpha_0 \;\Rightarrow\; \text{non}(A \doteq B)\lambda].$$

Théorème 7.16. *Soit $(A \doteq P)\alpha$, $(A \doteq Q)\beta$ et $A\alpha \prec A\beta$. Alors*

$$\alpha Q \;\Rightarrow\; P\alpha Q \prec Q\beta.$$

Démonstration. $A\alpha \prec A\beta \;\Rightarrow\; A\alpha Q \prec A\beta Q$. Or on a aussi $P\alpha$, donc $A\alpha Q \prec P\alpha Q$, d'où $P\alpha Q \prec A\beta Q$. D'un autre côté $A\beta Q\beta A\beta$, donc $A\beta Q \asymp Q\beta$, par conséquent, $P\alpha Q \prec Q\beta$.

Remarque. Ceci signifie dans l'interprétation en Physique: Si le point matériel A part de P à l'instant où α a lieu en P, et si α est perçu de Q, alors α est perçu de Q avant que A arrive à Q.

Dans les sept théorèmes suivants on considère les alignements des points.

Théorème 7.17. $\langle A\alpha B\beta\rangle C\gamma \wedge [(A \doteq C)\alpha \vee (C \doteq A)\gamma] \Rightarrow$

$$\Rightarrow (A \doteq B)\alpha \wedge (B \doteq C)\alpha \wedge (A \doteq C)\alpha \wedge (\alpha = \beta = \gamma).$$

Démonstration. On a $A\alpha B\beta C \asymp A\alpha C\gamma$ (définition 4.2). Si $(A \doteq C)\alpha$ on a $A\alpha C\gamma A\alpha$ (définition 4.1), donc $\alpha = \gamma$ (axiome III 1). Si $(C \doteq A)\gamma$ on a $C\gamma A\alpha C\gamma$, donc $\alpha = \gamma$. Par conséquent, dans l'un et l'autre cas $A\alpha B\beta C\alpha$, d'où $\alpha = \beta$ (axiome III 1) et $(A \doteq B)\alpha$. Donc on a $\alpha = \beta = \gamma$ et les trois coïncidences.

Théorème 7.18.

$\langle A\alpha\text{-}B\beta\rangle C\gamma \vee \langle A\alpha B\beta\text{-}\rangle C\gamma \Rightarrow \text{non}(A \doteq C)\alpha \wedge \text{non}(C \doteq A)\gamma \wedge \alpha \neq \gamma.$

Théorème 7.19. $\langle A\alpha B\beta\text{-}\rangle C\gamma \Rightarrow \forall\delta\,[\text{non}\,\langle B\beta\text{-}C\gamma\rangle A\delta]$.

En d'autres termes: $\langle A\alpha B\beta\rangle C\gamma \wedge \langle B\beta C\gamma\rangle A\delta \Rightarrow (B \doteq C)\beta \wedge \beta = \gamma$.

Démonstration. Supposons d'abord qu'il ne soit pas $(A \doteq B)\alpha$. Si

$$\exists\delta\,[\langle B\beta\text{-}C\gamma\rangle A\delta],$$

on aurait ou bien $(C \doteq A)\gamma$ et d'après le théorème 7.17 aussi $(A \doteq B)\alpha$, contrairement à l'hypothèse, ou bien

$$\langle A\alpha\text{-}B\beta\text{-}\rangle C\gamma \wedge \langle B\beta\text{-}C\gamma\text{-}\rangle A\delta,$$

donc, selon la première proposition de l'axiome III 4,

$$\langle A\alpha\text{-}C\gamma\text{-}\rangle A\delta \quad \text{c.-à-d.} \quad A\alpha C\gamma A\delta \wedge A\alpha A\delta,$$

d'où $\alpha = \delta$ et $A\alpha C\gamma A\alpha$, donc $(A \doteq C)\alpha$, et par conséquent $(A \doteq B)\alpha$, contrairement à l'hypothèse. Donc il n'est pas $\langle B\beta\text{-}C\gamma\rangle A\delta$.

Soit $(A \doteq B)\alpha$, donc aussi $\alpha = \beta$, et supposons que $\langle B\beta\text{-}C\gamma\rangle A\delta$, donc $B\beta C\gamma A\delta \asymp B\beta A\delta$. Selon la définition 4.1 et l'axiome III 1, on a aussi $B\beta A\beta$, donc $\delta = \beta$ et $B\beta C\gamma A\beta$, d'où $B\beta C\gamma A\beta B\beta$ et $B\beta C\gamma B\beta$, donc $(B \doteq C)\beta$, donc ce n'est pas $\langle B\beta\text{-}C\gamma\rangle A\delta$, ni lorsque $(A \doteq B)\alpha$.

Théorème 7.20. *Lorsque* $\langle A\alpha B\beta\rangle C\gamma \wedge \langle B\beta A\alpha\rangle C\gamma$,

ou $\langle C\gamma A\alpha\rangle B\beta \wedge \langle C\gamma B\beta\rangle A\alpha$,

ou $\langle A\alpha C\gamma\rangle B\beta \wedge \langle B\beta C\gamma\rangle A\alpha$,

alors $(A \doteq B)\alpha$. *Dans le troisième cas on a aussi* $(A \doteq C)\alpha$ *et* $(B \doteq C)\alpha$.

Théorème 7.21.

$$\langle A\alpha\text{-}B\beta\text{-}\rangle C\gamma \wedge \langle A\alpha\text{-}C\gamma\text{-}\rangle D\delta \Leftrightarrow \langle A\alpha\text{-}B\beta\text{-}\rangle D\delta \wedge \langle B\beta\text{-}C\gamma\text{-}\rangle D\delta.$$

Théorème 7.22. *L'axiome III 4 et le théorème 7.21 restent vrais quand*

$$(A \doteq B)\alpha \ \textit{ou}\ (B \doteq C)\beta \ \textit{ou}\ (C \doteq D)\gamma.$$

Théorème 7.23. *Si dans l'axiome III 4, ou dans le théorème 7.21 il n'est pas à la fois*

$$(A \doteq B)\alpha \;\; et \;\; (B \doteq C)\beta \;\; et \;\; (C \doteq D)\gamma,$$

alors il n'est ni $(A \doteq D)\alpha$, *ni* $(D \doteq A)\delta$, *et il est donc* $\alpha \neq \gamma$ *et* $A \neq D$.

Le théorème suivant est une conséquence de l'axiome III 5.

Théorème 7.24.

$$Q \notin \mathbf{M}_0 \;\Leftrightarrow\; (\exists \varphi_0 \in \Sigma_P)\, \forall \varphi\, (\exists \psi \in \Sigma_Q)\, [\, (P\varphi \succcurlyeq P\varphi_0 \;\Rightarrow\; P\varphi\, Q\omega') \;\wedge\; (P\varphi \prec P\varphi_0 \;\Rightarrow\; P\varphi\, Q\psi)\,].$$

$$P \notin \mathbf{M}_0 \;\Leftrightarrow\; (\exists \psi_0 \in \Sigma_Q)\, \forall \psi\, (\exists \varphi \in \Sigma_P)\, [\, (Q\psi \preccurlyeq Q\psi_0 \;\Rightarrow\; P\omega\, Q\psi) \;\wedge\; (Q\psi \succ Q\psi_0 \;\Rightarrow\; P\varphi\, Q\psi)\,].$$

Remarque. Il est possible que $(\forall \varphi \in \bar{\Sigma}_P)\,[P\varphi\, Q\omega']$, et que $(\forall \psi \in \bar{\Sigma}_Q)\; [P\omega\, Q\psi]$.

8. L'ORDRE FONDE SUR L'ENSEMBLE $\bar{\Sigma}$ SEUL

Ce furent d'abord *A. A. Robb* et plus tard *A. G. Walker*[14] qui choisirent les événements comme seuls éléments d'un système axiomatique, en les appelant des „instants". L'exposé de ce paragraphe ne suit pas ceux de ces auteurs, ou d'autres, mais indique une manière de traiter le sujet, et de rejoindre les chapitres suivants.

(a) *Les termes primitifs.*

Nous admettons une seule espèce d'éléments, les *événements instantanés*, notés $\alpha, \beta, \ldots$, et désignons par $\bar{\Sigma}$ l'ensemble de tous ces événements. Entre les événements nous admettons les deux relations: *être avant* et *déclencher*. L'expression «α *est avant* β» sera notée $\alpha \prec \beta$, et l'expression «γ déclenche δ» sera notée $\gamma \rightharpoonup \delta$. On peut écrire aussi $\beta \succ \alpha$, ce qui se lit: «β *est après* α», et de même $\delta \leftharpoondown \gamma$, ce qui se lit: «$\delta$ *est declenché par* γ».[15]

---

[14] *A. A. Robb*, A Theory of time and space, C. U. P. 1914. *A. G. Walker*, Foundations of Relativity, I et II, Proc. Roy. Soc. Edinb., 1948.

[15] Dans l'interprétation de cette relation en Physique, l'événement instantané γ produit un rayon instantané de lumière, qui „atteint" le point où δ a lieu, à l'instant de δ même.

(b) *Les axiomes d'ordre du temps. Points matériels.*

Il n'y a aucun axiome indépendant des deux relations $\prec$ et $\frown$. Nous commençons donc par les axiomes d'ordre du temps, et y distinguons les trois axiomes suivants.

AXIOME II* 1. *„Être avant" est une relation d'ordre au sens strict, par laquelle l'ensemble $\bar{\Sigma}$ est muni d'un ordre partiel.*

AXIOME II* 2. $(\forall\, \alpha, \beta)\, \exists \gamma\, [\alpha \prec \beta \;\Rightarrow\; \alpha \prec \gamma \prec \beta]$.

L'ensemble $\bar{\Sigma}$ contient deux événements dits *impropres*, notés ω, ω', qui satisfont l'axiome suivant:

AXIOME II* 3. $(\exists \omega, \omega')\, \forall \varphi\, [\omega \preccurlyeq \varphi \preccurlyeq \omega' \;\wedge\; \omega \neq \omega']$

Remarques. $\alpha \preccurlyeq \beta$ signifie $\alpha \prec \beta$ ou $\alpha = \beta$. Selon l'axiome II* 1 on a donc: 1. $(\forall \alpha \in \Sigma)\, [\alpha \preccurlyeq \alpha]$, 2. $\alpha \preccurlyeq \beta \wedge \beta \preccurlyeq \gamma \Rightarrow \alpha \preccurlyeq \gamma$, 3. $\alpha \preccurlyeq \beta \wedge$ $\wedge\ \beta \preccurlyeq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$, — Les propriétés de Σ, qui figurent parmi les axiomes de *Robb*, et non pas parmi les nôtres, sont démontrables dans notre système d'axiomes I à VIII. Tel est par exemple le fait que Σ est filtrant à droite et à gauche:

$$(\forall \alpha, \beta)\, \exists \varphi\, [\alpha \prec \varphi \wedge \beta \prec \varphi] \quad \text{et} \quad (\forall \alpha, \beta)\, \exists \psi\, [\psi \prec \alpha \wedge \psi \prec \beta].$$

Envisageons les parties totalement ordonnées de $\bar{\Sigma}$.

DEFINITION 8.1. Nous appellerons les sous-ensembles de $\bar{\Sigma}$, totalement ordonnés par la relation „être avant" et maximaux dans $\bar{\Sigma}$, *points matériels*, ou simplement *points* (ou *particules*) et nous les désignerons par les lettres majuscules, $A, B, \ldots$

Remarque. Un sous-ensemble A totalement ordonné, d'un ensemble E qui appartient à une certaine classe d'ensembles, est dit *maximal dans* E s'il n'existe aucun $x \in E$, tel que $x \notin A$, et que $A \cup \{x\}$ soit encore totalement ordonné par la même relation d'ordre.

NOTATION 8.1. L'ensemble de tous les points de $\bar{\Sigma}$ sera noté $\mathbf{M}$.

DEFINITION 8.2. Soit $P \in \mathbf{M}$.

$$P\alpha \overset{\text{def}}{=} \alpha \in P.$$

On lira: α *a lieu en* P.

DEFINITION 8.3. $P\alpha \prec P\beta \overset{\text{def}}{=} (\alpha, \beta \in P) \wedge \alpha \prec \beta$.

On dira que α *a lieu en* P *avant* β.

On écrira aussi: $P\beta \succ P\alpha$ et dira: β *a lieu en* P *après* α.

Pour que les chapitres suivants puissent se rattacher aussi au présent paragraphe, nous désignerons un point matériel P aussi par $\bar{\Sigma}_P$.

En vertu de la définition 8.1 et des axiomes II* 2 et 3 on a:

Théorème 8.1. *Tout point matériel est un ensemble d'événements, dense, et dont le premier élément est* ω *et le dernier est* ω'.

Théorème 8.2 $\forall\varphi\, \exists P [\varphi \in P]$, $\quad \forall P\, \exists\varphi\, [\varphi \in P]$.

Le téorème suivant est une conséquence du théorème de Zermelo:*

Théorème 8.3. *Quel que soit un sous-ensemble* Φ *totalement ordonné de* $\bar{\Sigma}$, *un point matériel* P *existe, tel que* $\Phi \subset P$.

(c) *Les axiomes d'ordre de la lumière.*

„Déclencher" est une relation réflexive, antisymétrique au sens strict, mais point transitive, si non dans un sens plus large. Il n'y est question d'ordre que dans un sens élargi. Elle est définie par les sept axiomes suivants:

AXIOME III* 1. $\forall\alpha [\alpha \rightharpoonup \alpha]$.

AXIOME III* 2. $(\alpha \rightharpoonup \beta) \wedge (\beta \rightharpoonup \alpha) \Rightarrow \alpha = \beta$.

AXIOME III* 3. $(\alpha \rightharpoonup \beta) \wedge (\beta \rightharpoonup \gamma) \Rightarrow (\alpha \rightharpoonup \gamma) \vee (\alpha \prec \gamma)$.

AXIOME III* 4. $(\alpha \rightharpoonup \beta) \vee (\beta \rightharpoonup \alpha) \Rightarrow \text{non}\, (\alpha \prec \beta)$.

AXIOME III* 5. *Si* $\alpha, \beta \in P$ *et* $\lambda, \mu \in Q$ $(P, Q \in \mathbf{M})$, *alors*

$$(\alpha \rightharpoonup \lambda) \wedge (\beta \rightharpoonup \mu) \Rightarrow (\alpha \prec \beta \Leftrightarrow \lambda \prec \mu).$$

À la place des définitions 4.1 et 4.2 on a les deux suivantes:

---

* Voir par ex. *Kuratowski,* Introduction à la Théorie des Ensembles et à la Topologie (Genève 1966, p. 94).

DEFINITION 8.4. $(A \doteq B)\alpha \overset{\text{def}}{=} \alpha \in A \cap B$.

On dira que les points matériels A et B *coïncident à l'instant de* α.

DEFINITION 8.5. $\langle \alpha, \beta \rangle \gamma \overset{\text{def}}{=} (\alpha \frown \beta) \wedge (\beta \frown \gamma) \wedge (\alpha \frown \gamma)$.

On dira que la suite (α, β, γ) est *alignée*. Si $\alpha \neq \beta$, ou $\beta \neq \gamma$, ou l'un et l'autre, on écrira:

$$\langle \alpha\text{-}\beta \rangle \gamma \quad \text{ou} \quad \langle \alpha\, \beta\text{-} \rangle \gamma \quad \text{ou} \quad \langle \alpha\text{-}\beta\text{-} \rangle \gamma.$$

Si $\alpha \in A$, $\beta \in B$, $\gamma \in C$ on notera aussi $\langle A\alpha B\beta \rangle C\gamma$ et dira que la suite (A, B, C) est *en alignement instantané, perçu de C à l'instant de* γ.

AXIOME III* 6. $\langle \alpha\text{-}\beta\text{-} \rangle \gamma \wedge \langle \beta\text{-}\gamma\text{-} \rangle \delta \Rightarrow \langle \alpha\text{-}\gamma\text{-} \rangle \delta$;

$\langle \alpha\text{-}\beta\text{-} \rangle \gamma \wedge \langle \alpha\text{-}\beta\text{-} \rangle \delta \wedge (\gamma \neq \delta) \Rightarrow \langle \alpha\text{-}\gamma\text{-} \rangle \delta \vee \langle \alpha\text{-}\delta\text{-} \rangle \gamma$;

etc., en analogie avec l'axiome III 4.

AXIOME III* 7. *Quels que soient* $P = \bar{\Sigma}_P$ *et* $Q = \bar{\Sigma}_Q$, *on a les deux propositions suivantes:*

$$(\forall \alpha, \varphi \in \Sigma_P)(\forall \beta \in \Sigma_Q)(\exists \psi \in \Sigma_Q)[\alpha \frown \beta \wedge \varphi \prec \alpha \Rightarrow \varphi \frown \psi].$$

$$(\forall \alpha \in \Sigma_P)(\forall \beta, \psi \in \Sigma_Q)(\exists \varphi \in \Sigma_P)[\alpha \frown \beta \wedge \psi \succ \beta \Rightarrow \varphi \frown \psi].$$

DEFINITION 8.6. $\alpha P \overset{\text{def}}{=} (\exists \beta \in P)[\alpha \frown \beta]$.

On dira: α *est perçu de* P, ou bien de manière plus complète, en écrivant $\alpha P \beta$: α *est perçu de* P *à l'instant de* β, ou: α *déclenche* β *en* P, ou encore: β *se rattache à* α *en* P.

NOTATION 8.2. L'ensemble de tous les événements qui sont perçus de P sera noté $\bar{\Sigma}^P$.

DEFINITION 8.7. $\alpha P \prec \beta P \overset{\text{def}}{=} \exists \lambda, \mu [\alpha P \lambda \wedge \beta P \mu \wedge (\lambda \prec \mu)]$,

$$\alpha P \asymp \beta P \overset{\text{def}}{=} \exists \lambda, \mu [\alpha P \lambda \wedge \beta P \mu \wedge (\lambda = \mu)],$$

$$\alpha P \prec P \beta \overset{\text{def}}{=} \exists \lambda [\alpha P \lambda \wedge P \beta \wedge (\lambda \prec \beta)],$$

etc., en analogie avec la définition 2.5.

Théorème 8.4. *Quel que soit un point* P, *l'ensemble* $\bar{\Sigma}^P$ *est muni par les relations „avant" et „simultanément", d'un préordre total.*

Démonstration. Soient $\alpha, \beta \in \bar{\Sigma}^P$, et $\lambda \prec \mu$, $\lambda \succ \mu$ ou $\lambda = \mu$. On a suivant la définition 8.7 respectivement $\alpha P \prec \beta P$, $\alpha P \succ \beta P$ ou $\alpha P \asymp \beta P$. Suivant la définition 8.1 l'ordre sur l'ensemble P est total. Comme $\asymp$ est d'après la définition 8.7 une équivalence (et non pas l'identité), l'ordre sur $\bar{\Sigma}^P$ est un préordre total.

Les définitions 6.2, 3.2 et 3.3 des intervalles, des chaînes et de leur ordre, restent les mêmes. Terminons par la suivante:

DEFINITION 8.8. Un point P tel que

$$(\forall \alpha \in \Sigma)(\exists \varphi, \psi \in P)[\varphi \rightharpoonup \alpha \rightharpoonup \psi]$$

sera appelé *point ordinaire*. Tout point qui n'est pas ordinaire sera dit *exceptionnel*.

(d) *L'équivalence des deux systèmes.*

Désignons le système axiomatique des paragraphes 1 à 6 par **A**, et celui du paragraphe 8 par **B**. Il y a 16 axiomes dans **A** et 10 dans **B**. Les *événements* sont éléments dans **A** et dans **B**; les *points*, éléments dans **A**, sont dans **B** introduits par la définition 8.1. Les relations *avoir lieu en* et *être perçu de*, fondamentales dans **A**, sont définies dans **B** par les définitions 8.2 et 8.6. La relation *être avant*, entre deux *couples*, soit $\langle \alpha, P \rangle \prec \langle \beta, P \rangle$, ainsi que $\alpha P \prec \beta P$, fondamentale dans **A**, est dans **B** contenue dans la définition 8.7; la relation *être avant* entre deux *événements*, fondamentale dans **B**, est dans **A** introduite par la définition 6.1 et notée $\underset{P}{\prec}$; elle implique $P\alpha$ et $P\beta$ dans **B** aussi bien que dans **A**, grâce à l'axiome II 2. La relation *déclencher*, fondamentale dans **B**, est dans **A** équivalente à $\alpha P \beta$ de la définition 3.1; elle implique $P\beta$ aussi dans **B**, car $\forall \beta \exists P[P\beta]$ selon les définitions 8.1 et 8.2.

En conformité avec cette correspondance entre les symboles définis implicitement ou explicitement, le système des axiomes de **A** est équivalent à celui de **B**. En effet, l'axiome II*1 de **B** est exprimé dans **A** par le théorème 6.4; les axiomes II*2 et 3 résultent de la définition 6.1, de II 6 et de I 3, I 4 et II 7; l'axiome III*1 résulte du théorème 6.1; III*2 se retrouve dans III 1 de **A**; III*3, 5, 6 et 7 se retrouvent dans III 3, 2, 4 et 5 respectivement; III*4 résulte de I 1, II 1 et III 1. Ainsi tous les axiomes de **B** sont vrais aussi dans **A**.

Inversement, l'axiome I 1 de **A** se retrouve dans le théorème 8.2 de **B**; les axiomes I 2, II 1 et II 2 de **A** résultent directement des définitions 8.6 et 8.7 de **B**; I 3 et 4 résultent de II*3 et de la définition 8.1; les axiomes II 3, 4 et 5 de **A** sont contenus dans le théorème 8.4 de **B**; II 6 et 7 résultent de II*2 et 3, et de la définition 8.1; III 1, 2, 3, 4 et 5 de **A** se retrouvent dans **B** dans III*2, 5, 3, 6 et 7 respectivement. Ainsi tous les axiomes de **A** sont vrais aussi dans **B**.

Par conséquent, les paragraphes 1 à 7 et les chapitres suivants se rattachent également au système **B**, bien qu'en premier lieu ils se rattachent au système **A**.

CHAPITRE II

CONTINUITE

9. TOPOLOGIE SUR Σ_P

Quel que soit un point P, nous définissons sur Σ_P une topologie en associant à tout $\alpha \in \Sigma_P$ la base des voisinages de α, constituée par tous les intervalles ouverts contenant α. Ceux-ci seront notés $V_P(\alpha)$.

En vertu du théorème 6.7 Σ_P est un espace séparé, donc tout filtre sur Σ_P a au plus un „élément limite". Pour préciser les idées, énonçons la définition suivante:

DEFINITION 9.1. La suite $(\mu_m)_{m \in \mathbb{N}}$, où $\forall m\,[\mu_m \in \Sigma_P]$, sera dite *convergente* lorsque Σ_P contient une suite décroissante[16] d'intervalles fermés $[\alpha_n, \beta_n]$ ($n \in \mathbb{N}$), telle que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n]$$

ne contient aucun intervalle, et que

$$\forall n\, \exists m\, \forall r\, [\mu_{m+r} \in [\alpha_n, \beta_n]\,].$$

Si $\bigcap_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n] = \{\varphi\}$, on dira que φ est *l'événement limite*[17] de $(\mu_m)_{m \in \mathbb{N}}$ et que cette suite *converge vers* φ, ce qu'on notera: $\mu_m \to \varphi\ (m \to \infty)$.

10. LES AXIOMES DE CONTINUITE ET QUELQUES CONSEQUENCES

Pour fonder la continuité il suffirait d'admettre le théorème 10.1 comme axiome. Celui-ci impliquerait l'axiome II 6 (ou bien II*2). Or

[16] Dite aussi „suite d'intervalles emboîtés".

[17] Nous sommes obligés de distinguer les „événements limites" des „points limites", qui sont des points matériels.

les deux axiomes suivants sont indépendants des axiomes d'ordre du temps. Le premier fait de $\overline{\Sigma}_P$ un ensemble séparable,[18] le second a la forme de l'axiome dit de *Cantor*. Ils se rapportent à l'ensemble des événements qui ont lieu en un point et font (grâce aussi aux axiomes I 3 et II 6) de cet ensemble un continu linéaire.

AXIOME IV 1. *L'ensemble $\overline{\Sigma}_P$ des événements qui ont lieu en un point P quelconque, contient un sous-ensemble dénombrable Θ_P, tel que tout intervalle ouvert (non vide) de $\overline{\Sigma}_P$ contient un élément de Θ_P.*

AXIOME IV 2. *Soit P un point quelconque et $(\Upsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'intervalles ouverts de $\overline{\Sigma}_P$, telle que $\bigcap_{n=1}^{\infty}\Upsilon_n$ ne contient aucun intervalle.*
Alors

$$\exists\alpha\,[\alpha\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\Upsilon_n].$$

Remarques. Dans ce qui suit nous envisageons la continuité, en nous limitant à l'ensemble ouvert Σ. Comme Σ_P n'a pas d'intervalles ouverts vides, il contient selon l'axiome IV 1 un sous-ensemble dénombrable dense, donc il est *séparable*. En vertu du théorème 6.5 et des axiomes IV 1 et 2 on a donc:

Théorème 10.1 *Quel que soit P, l'ensemble Σ_P, totalement ordonné par les relations „avant" et „simultanément", est homéomorphe à l'ensemble des nombres réels.*

DEFINITION 10.1. $\Sigma_P^Q \overset{\text{def}}{=} \{\varphi\,|\,P\varphi\,Q\psi \wedge \varphi\in\Sigma_P \wedge \psi\in\Sigma_Q\}$.

$$_P\Sigma_Q \overset{\text{def}}{=} \{\psi\,|\,P\varphi\,Q\psi \wedge \varphi\in\Sigma_P \wedge \psi\in\Sigma_Q\}.$$

Théorème 10.2. $(\forall P,Q)\,[P\in\mathbf{M}_0 \Rightarrow {}_P\Sigma_Q=\Sigma_Q]$.

$$(\forall P,Q)\,[Q\in\mathbf{M}_0 \Rightarrow \Sigma_P^Q=\Sigma_P].$$

Théorème 10.3. Σ_P^Q *est un intervalle ouvert commençant, et* ${}_P\Sigma_Q$ *est un intervalle ouvert terminant.*

---

[18] Par conséquent c'est, strictement parlé, un axiome topologique. Nous le mettons au nombre des axiomes de continuité, en prenant celle-ci dans le sens plus large qu'on retrouve dans la géométrie élémentaire, où l'axiome dit d'Archimède est un „axiome de continuité".

Démonstration. Si $\varphi \in \Sigma_P^Q$ et $P\varphi' \prec P\varphi$, alors selon l'axiome III 5 on a aussi $\varphi' \in \Sigma_P^Q$. Il en résulte que Σ_P^Q est un intervalle commençant. Soit α son bout supérieur. Si $\alpha = \omega'$, on a $\Sigma_P^Q = \Sigma_P$. Si $P\alpha \prec P\omega'$ et $P\alpha\, Q\beta$, on a $\beta = \omega'$. En effet, si au contraire $Q\beta \prec Q\omega'$, alors selon l'axiome II 6

$$(\exists \beta' \in \Sigma)\,[Q\beta \prec Q\beta']$$

et d'après l'axiome III 5,

$$(\exists \alpha' \in \Sigma)\,[P\alpha'\, Q\beta'],$$

donc, selon l'axiome III 2, $P\alpha \prec P\alpha'$, contrairement à l'hypothèse que α est le bout supérieur de l'intervalle. Par conséquent, $P\alpha\, Q\omega'$, d'où $\alpha \notin \Sigma_P^Q$, donc $\Sigma_P^Q = (\omega, \alpha)$, et c'est un intervalle ouvert.

On montre de la même manière que ${}_P\Sigma_Q$ est un intervale terminant, ouvert.

E étant un ensemble quelconque, notons E^d son ensemble dérivé.

Théorème 10.4. *Soient* $P, Q \in \mathbf{M}$, $\Phi \subset \Sigma_P$, *et* $\Psi \subset \Sigma_Q$, *tels que*

$$\Psi = \{\psi \mid P\varphi Q\psi \wedge \varphi \in \Phi\}.$$

Alors,

$$(\forall \alpha \in \Sigma_P^Q)\,(\forall \beta \in {}_P\Sigma_Q)\,[P\alpha Q\beta \Rightarrow (\alpha \in \Phi^d \Leftrightarrow \beta \in \Psi^d)\,].$$

Démonstration. On a

$$\Phi \subset \Sigma_P^Q, \qquad \Psi \subset {}_P\Sigma_Q.$$

Soit $\alpha \in \Phi^d$, tel que $\alpha \in \Sigma_P^Q$. Alors existe $\beta \in {}_P\Sigma_Q$, tel que $P\alpha\, Q\beta$. Soit $(\psi_1, \psi_2) \subset {}_P\Sigma_Q$ un intervalle quelconque, contenant β, et soient φ_1, φ_2 tels que $\varphi_1 Q\psi_1$, $\varphi_2 Q\psi_2$. D'après le théorème 7.1 $\alpha \in (\varphi_1, \varphi_2) \subset \Sigma_P^Q$. Comme $\alpha \in \Phi^d$, un $\varphi' \in \Phi$ existe dans (φ_1, φ_2), $\varphi' \neq \alpha$. Soit $\psi' \in \Psi$, tel que $\varphi' Q\psi'$, donc $\psi' \neq \beta$. Or $\psi' \in (\psi_1, \psi_2)$ donc $\beta \in \Psi^d$.

L'inverse se prouve de manière analogue.

Si $P, Q \in \mathbf{M}_0$, le théorème précédent obtient la forme plus simple suivante:

Théorème 10.5. *Soient* $P, Q \in \mathbf{M}_0$, $\Phi \subset \Sigma_P$, *et* $\Psi \subset \Sigma_Q$, *tels que*

$$\Psi = \{\psi \mid P\varphi Q\psi \wedge \varphi \in \Phi\}.$$

Alors

$$(\forall\alpha,\beta)\,[P\alpha Q\beta \Rightarrow (\alpha\in\Phi^d \Leftrightarrow \beta\in\Psi'^d)].$$

Théorème 10.6. *Soient* $P, Q\in \mathbf{M}$, $(P \doteq Q)\alpha$ *et* $(\forall n\in\mathbb{N})\,[P\varphi_n\, Q\psi_n]$. *Alors*

$$\varphi_n\to\alpha \Leftrightarrow \psi_n\to\alpha.$$

Démonstration. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}=\Phi$, $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}=\Psi$. On a $\Phi^d=\{\alpha\}$, donc selon le théorème 10.4

$$\exists\beta\,[\Psi'^d=\{\beta\}]$$

et $P\alpha Q\beta$. Or $(P\doteq Q)\alpha$, donc $\beta=\alpha$.

Soient P, Q deux points quelconques. Dans l'expression $\varphi Q\psi$, à tout $\varphi\in\Sigma^Q$ correspond un $\psi\in\Sigma_Q$, donc si ces ensembles ne sont pas vides, elle définit une application que nous noterons s_Q.

L'expression $P\varphi Q\psi$ définit en vertu du théorème 7.1 une application biunivoque de Σ_P^Q sur ${}_P\Sigma_Q$, pourvu que ces ensembles ne soient pas vides; nous la noterons s_{PQ}.

Posons donc la définition suivante:

DEFINITION 10.2. $s_Q:\Sigma^Q\mapsto\Sigma_Q \overset{\text{def}}{=} \{\langle\varphi,\psi\rangle \mid \varphi Q\psi \wedge \varphi\in\Sigma^Q \wedge \psi\in\Sigma_Q\}$.

$$s_{PQ}:\Sigma_P^Q\mapsto{}_P\Sigma_Q \overset{\text{def}}{=} \{\langle\varphi,\psi\rangle \mid P\varphi Q\psi \wedge \varphi\in\Sigma_P^Q \wedge \psi\in{}_P\Sigma_Q\}.$$

Remarque. Généralement, $s_{QP}\neq s_{PQ}{}^{-1}$, puisque $\varphi\neq\varphi'$ dans $P\varphi Q\psi P\varphi'$. – On a $s_{PQ}=s_Q/\Sigma_P^Q$, c.-à-d. s_{PQ} est la restriction de s_Q à Σ_P^Q.

Théorème 10.7. *Quel que soit* Q, $s_Q:\Sigma^Q\mapsto\Sigma_Q$ *est une surjection. Si* $P\in\mathbf{M}_0$, $s_{PQ}:\Sigma_P^Q\mapsto\Sigma_Q$ *est une surjection.*

Démonstration. $(\forall\psi\in\Sigma_Q)\,[Q\psi\, Q\psi]$, donc $s_{QQ}:\Sigma_Q\mapsto\Sigma_Q$ est une surjection. Mais $s_{QQ}=s_Q/\Sigma_Q$, donc s_Q aussi est une surjection de Σ^Q sur Σ_Q.

Si $P\in\mathbf{M}_0$, $s_{PQ}:\Sigma_P^Q\mapsto{}_P\Sigma_Q=\Sigma_Q$ est selon le théorème 10.2 une surjection.

Théorème 10.8. *En supposant que* Σ_P^Q *et* ${}_P\Sigma_Q$ *ne sont pas vides,* s_{PQ} *est une surjection biunivoque, bicontinue et croissante (conservant l'ordre du temps):*

Lorsque $P, Q\in\mathbf{M}_0$ *on a* $s_{PQ}:\Sigma_P\mapsto\Sigma_Q$.

Démonstration. En vertu de la définition 10.2 s_{PQ} est une surjection. Grâce au théorème 7.1 c'est une application biunivoque, croissante, et il résulte du théorème 10.4 qu'elle est aussi bicontinue.

11. TEMPS CONTINU

L'ensemble Σ_P étant pour tout P homéomorphe à $\mathbb{R}$, on peut définir sur un intervalle ouvert quelconque de Σ_P une fonction numérique continue et qui joue dans l'interprétation intuitive de la théorie le rôle d'un „temps local" continu, non métrique.

DEFINITION 11.1. Soient $\Delta_P \subset \Sigma_P (P \in \mathbf{M})$ et $(a, b) \subset \overline{\mathbb{R}}$ deux intervalles ouverts. Toute application

$$f : \Delta_P \mapsto (a, b),$$

biunivoque, bicontinue et croissante, de Δ_P sur (a, b) sera appelée un *temps numérique continu de P* (ou: *en P*) *défini sur* Δ_P, ou tout court, un *temps continu de P*. On dira aussi que f est une *application fondamentale du temps*, définie sur Δ_P.[19]

Les valeurs de f seront appelées des *instants* du temps f.

Grâce au théorème 10.1, Δ_P étant homéomorphe à (a, b), on a:

Théorème 11.1 *Des temps continus existent en tout point P, sur tout intervalle ouvert* Δ_P.

NOTATION 11.1. Quand les valeurs d'un temps continu seront désignées par exemple par t, alors suivant la table des Notations, l'application fondamentale du temps sera souvent notée $\frown{t}$. Si $\varphi \in \Delta_P$ et $t = f(\varphi)$, nous écrirons donc aussi $t = \frown{t}(\varphi)$. De même $\varphi = \frown{\varphi}(t)$, et on notera $P\varphi = P\frown{\varphi}(t) = P^{\cdot}(t)$. On écrira $(P \doteq Q)\, t$ pour $(P \doteq Q)\varphi$.

L'ensemble des temps continus de P sera noté $\mathscr{T}_P$.

Théorème 11.2. *Soit* $\Delta_P \subset \Sigma_P$ *et* $f, g \in \mathscr{T}_P$,

$$f : \Delta_P \mapsto (a, b), \qquad g : \Delta_P \mapsto (a', b').$$

Alors

$$g \circ f^{-1} : (a, b) \mapsto (a', b')$$

est une application biunivoque, bicontinue et croissante.

---

[19] $f : E \mapsto F$ est dite croissante (au sens strict) lorsque E et F étant totalement ordonnés, on a $(\forall x, y \in E)\, [x \prec y \Leftrightarrow f(x) \prec f(y)]$.

Démonstration. f et g sont des homéomorphismes, et il est également clair que l'application $g_\circ f^{-1}$ est croissante.

En vertu du théorème 10.4 et de la définition 11.1 on a:

Théorème 11.3. *Soit* $\Delta_P \subset \Sigma_P$ *et* $\Delta_Q \subset \Sigma_Q$ *où*

$$\Delta_Q = \{\psi \mid P\varphi\, Q\psi \wedge \varphi \in \Delta_P\},$$

et soit $f \in \mathscr{C}_P$, $g \in \mathscr{C}_Q$, $\quad f: \Delta_P \mapsto (a, b)$, $\quad g: \Delta_P \mapsto (c, d)$. *Alors*

$$g_\circ s_{PQ} \circ f^{-1} : (a, b) \mapsto (c, d)$$

est une application biunivoque, bicontinue et croissante.

12. RELATIONS NON-INSTANTANEES

A partir de ce paragraphe les considérations seront basées sur des relations qui „durent" pendant des intervalles du temps continu.

DEFINITION 12.1. Une relation quelconque sera dite *instantanée* si elle est définie pour un instant, soit en parlant d'un événement (telle la coïncidence „à l'instant de α"), soit d'un temps continu.

DEFINITION 12.2. Si une relation instantanée a lieu à tout instant d'un ensemble Φ d'événements, elle sera dite *non-instantanée;* si Φ est un intervalle Δ d'événements, ou bien un intervalle (t_1, t_2) de valeurs d'un temps continu, nous dirons qu'elle a lieu *constamment dans* Δ, respectivement *dans* (t_1, t_2); une telle relation sera dite *constante* dans Δ, ou bien dans (t_1, t_2). Si Δ n'est pas un intervalle limité, mais (ω, ω'), nous dirons simplement que la relation a *constamment lieu*; une telle relation sera dite *permanente.*

Si une relation n'a lieu à aucun instant de Δ ou de (t_1, t_2), nous dirons qu'elle n'y a *jamais* lieu.

Toutes ces relations peuvent se rapporter aussi bien à des intervalles fermés.

DEFINITION 12.3. Soit $\Phi \subset \bar{\Sigma}_P$. Alors $P\Phi \overset{\text{def}}{=} (\forall\varphi \in \Phi)\,[P\varphi]$, et on dira que *l'ensemble* Φ *a lieu en* P.

Soit $\Xi \subset \bar{\Sigma}^P$. Alors $\Xi\, P \overset{\text{def}}{=} (\forall\xi \in \Xi)\,[\xi P]$, et on dira que *l'ensemble* Ξ *est perçu de* P.

Soit $\Xi \subset \overline{\Sigma}^Q$, $\Psi \subset \overline{\Sigma}_Q$. Alors $\Xi Q \Psi \stackrel{\text{def}}{=} \Xi Q \wedge Q \Psi \wedge \Psi = s_Q(\Xi)$, et on dira que Ψ *se rattache en* Q *à* Φ.

Soit $\Phi \subset \overline{\Sigma}_P$, $\Psi \subset \overline{\Sigma}_Q$. Alors $P\Phi Q\Psi \stackrel{\text{def}}{=} P\Phi \wedge \Phi Q \Psi$.

Théorème 12.1 $\Xi Q \Psi \Leftrightarrow \Psi = s_Q(\Xi)$.

$$P\Phi\, Q\Psi \Leftrightarrow \Psi = s_{PQ}(\Phi).$$

Théorème 12.2. $(P, Q \in \mathbf{M}_0)\, [P \overline{\Sigma}_P\, Q\, \overline{\Sigma}_Q]$.

Théorème 12.3. *Soit* $P\Phi Q\Psi$. *Si* Φ *est un intervalle ouvert,* Ψ *auss est un intervalle ouvert, et inversement.*

DEFINITION 12.4. $(P \doteq Q)\,\Delta_P \stackrel{\text{def}}{=} \forall\varphi\, [\varphi \in \Delta_P \Rightarrow (P \doteq Q)\varphi]$.

On dira que P et Q sont en *coïncidence constante,* ou qu'ils *coïncident constamment dans l'intervalle* Δ_P.

$$[\text{non}(P \doteq Q)]\,\Delta_P \stackrel{\text{def}}{=} \forall\varphi\, [\varphi \in \Delta_P \Rightarrow \text{non}(P \doteq Q)\varphi].$$

On dira que P et Q sont en *non-coïncidence constante dans* Δ_P.

Remarques. $(P \doteq Q)\Delta_P \Leftrightarrow (Q \doteq P)\Delta_P$.

$[\text{non}(P \doteq Q)]\Delta_P$ doit être distingué de $\text{non}[(P \doteq Q)\Delta_P]$.

DEFINITION 12.5. $\langle PQ \rangle R\,\Delta_R \stackrel{\text{def}}{=} \forall\varphi\, [\varphi \in \Delta_R \Rightarrow \langle P^{\cdot}Q^{\cdot} \rangle R\varphi]$.

On dira que la suite (P, Q, R) est *en alignement constant, perçu de* R, *dans l'intervalle* Δ_R de Σ_R.

Marquant par un trait que deux points ne coïncident *jamais* dans cet alignement, on écrira par exemple $\langle P\text{-}Q \rangle R\Delta_R$ quand $[\text{non}(P \doteq Q)]\Delta_R$.

NOTATION 12.1. Si les intervalles sont sousentendus ou si les relations sont permanentes on écrira simplement $P \doteq Q$ et $\langle PQ \rangle R$.

Plus précisément, $\langle PQ \rangle \mathrm{R} = \langle P\Delta_P\, Q\Delta_Q \rangle R\Delta_R$, où $P\Delta_P\, Q\Delta_Q\, R\Delta_R$ (définition 12.3). Mais on pourra écrire aussi $\langle P\Delta_P\, Q \rangle R$ ou $\langle PQ\Delta_Q \rangle R$.

La non-coïncidence des points, étendue aux intervalles maximaux où elle a encore lieu, joue un rôle important, ce qui justifie les définitions suivantes.

DEFINITION 12.6.

$$(\alpha, \beta)_{P:Q} \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha, \beta)_P \wedge (P \doteq Q)\alpha \wedge (P \doteq Q)\beta \wedge \forall\varphi\,[\varphi \in (\alpha, \beta)_P \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{non}\,(P \doteq Q)\varphi].$$

On appellera $(\alpha, \beta)_{P:Q}$ un *intervalle maximal de non-coïncidence de P avec Q*.

NOTATION 12.2. Au lieu de $(\alpha, \beta)_{P:Q}$ on écrira aussi $\Delta_{P:Q}$, sans noter les limites. L'ensemble des intervalles $\Delta_{P:Q}$ pour P et Q donnés, sera noté $\mathscr{I}_{P:Q}$.

DEFINITION 12.7. Soit $P \in \mathbf{M}$ et $\mathbf{E} \subset \mathbf{M}$.

$$(\alpha, \beta)_{P:\mathbf{E}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge_{X \in \mathbf{E} \setminus \{P\}} (\alpha, \beta)_{P:X}\,.$$

On appellera $(\alpha, \beta)_{P:\mathbf{E}}$ un *intervalle maximal de non-coïncidence de P avec* **E**.

NOTATION 12.3. Au lieu de $(\alpha, \beta)_{P:\mathbf{E}}$ on écrira aussi $\Delta_{P:\mathbf{E}}$. L'ensemble des intervalles $\Delta_{P:\mathbf{E}}$ pour P et $\mathbf{E}$ donnés sera noté $\mathscr{I}_{P:\mathbf{E}}$.

Remarque. En d'autres termes, $(\alpha, \beta)_{P:\mathbf{E}}$ est un intervalle $(\alpha,\beta)_{P:X}$, qui est maximal de non-coïncidence de P avec tout $X \in \mathbf{E} \setminus \{P\}$ à la fois.

DEFINITION 12.8. Soit $\mathbf{E} \subset \mathbf{M}$ et

$$\exists\,(\alpha, \beta)\,(\forall\, X \in \mathbf{E})\,[X\alpha \wedge X\beta \wedge (\alpha, \beta)_X \in \mathscr{I}_{X:\mathbf{E}}].$$

Nous dirons que **E** est un *ensemble de points en non-coïncidence entre α et β*.

$$(\alpha, \beta)_{\mathbf{E}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{X \in \mathbf{E}} (\alpha, \beta)_{X:\mathbf{E}}$$

sera appelé *réunion d'intervalles de non-coïncidence (simultanée)*. On dira aussi que **E** est en non-coïncidence *sur l'ensemble* $(\alpha, \beta)_{\mathbf{E}}$, entre α et β.

NOTATION 12.4. On notera $\mathscr{N}(\alpha, \beta)$ l'ensemble de tous les ensembles de points qui sont en non-coïncidence entre α et β, et $\mathscr{N}$ la réunion de tous les $\mathscr{N}(\alpha, \beta)$. L'ensemble des $(\alpha, \beta)_{\mathbf{E}}$ pour un **E** donné sera noté $\mathscr{I}_{\mathbf{E}}$.

R e m a r q u e. On a en d'autres termes,

$$(\alpha, \beta)_{\mathbf{E}} = \bigcup_{X,X' \in \mathbf{E}}^{X \neq X'} (\alpha, \beta)_{X:X'},$$

ou encore:

$$(\alpha, \beta)_{\mathbf{E}} = \{ (\alpha, \beta)_X \mid X \in \mathbf{E} \wedge (\alpha, \beta)_X \in \mathscr{I}_{X:\mathbf{E}} \wedge (\forall X' \in \mathbf{E}) [X(\alpha, \beta)_X X'(\alpha, \beta)_{X'}] \}.$$

D'après le théorème suivant, lorsque l'un des deux intervalles Δ_P, Δ_Q se rattache à l'autre et que l'un ou l'autre est un intervalle maximal de non-coïncidence, alors tous les deux sont des intervalles maximaux de non-coïncidence, et ils se rattachent l'un à l'autre.

Théorème 12.4. $P\Delta_P Q\Delta_Q \wedge \Delta_P \in \mathscr{I}_{P:Q} \Leftrightarrow Q\Delta_Q P\Delta_P \wedge \Delta_Q \in \mathscr{I}_{Q:P}$,

$$P\Delta_P Q\Delta_Q \wedge \Delta_Q \in \mathscr{I}_{Q:P} \Leftrightarrow Q\Delta_Q P\Delta_P \wedge \Delta_P \in \mathscr{I}_{P:Q}.$$

En outre, α, β *existent tels que* $\Delta_P = (\alpha, \beta)_P$, $\Delta_Q = (\alpha, \beta)_Q$ *et* $(P \doteq Q)\alpha$, $(P \doteq Q)\beta$.

Démonstration. Soit $\Delta_P = (\alpha, \beta)_P$, $\Delta_Q = (\alpha, \beta)_Q$, les extrémités des intervalles pouvant être aussi ω et ω' (définition 2.4). Notant $\mathscr{A}, \mathscr{K}, \mathscr{B}, \mathscr{L}$ les quatre membres de la première proposition du théorème dans leur ordre respectif, le théorème s'écrit:

$$\mathscr{A} \wedge \mathscr{K} \Leftrightarrow \mathscr{B} \wedge \mathscr{L}, \qquad \mathscr{A} \wedge \mathscr{L} \Leftrightarrow \mathscr{B} \wedge \mathscr{K}.$$

Montrons d'abord que $\mathscr{A} \wedge \mathscr{K} \Rightarrow \mathscr{B} \wedge \mathscr{L}$.

Soit donc $P\Delta_P Q\Delta_Q$ et $\Delta_P \in \mathscr{I}_{P:Q}$. On a $P\varphi Q\psi$, d'où $\varphi \in \Delta_P$, $\psi \in \Delta_Q$. On a $(P \doteq Q)\alpha$ et $(P \doteq Q)\beta$, car dans les cas contraires on aurait en vertu de la définition 12.6 $\Delta_P \notin \mathscr{I}_{P:Q}$; donc $\alpha = \gamma$ et $\beta = \delta$. Par conséquent, $\Delta_Q = (\alpha, \beta)_Q$, d'où $\Delta_Q \in \mathscr{I}_{Q:P}$.

Soit $P\varphi Q\chi P\varphi'$ et $P\Delta_P Q\Delta_Q P\Delta_P'$. Comme $\Delta_P \in \mathscr{I}_{P:Q}$ et $\varphi \in \Delta_P$, on a $\varphi' \in \Delta_P$ (théorème 7.10) d'où $\Delta'_P \subset \Delta_P$. Donc, en appliquant la conclusion précédente,

$$\Delta_P \in \mathscr{I}_{P:Q} \qquad \Delta_Q \in \mathscr{I}_{Q:P} \qquad \Delta'_P \in \mathscr{I}_{P:Q},$$

par conséquent $\Delta'_P = \Delta_P$, d'où $Q\Delta_Q P\Delta_P$. Donc $\mathscr{A} \wedge \mathscr{K} \Rightarrow \mathscr{B} \wedge \mathscr{L}$.

On montre de manière analogue que $\mathscr{A} \wedge \mathscr{L} \Rightarrow \mathscr{B} \wedge \mathscr{K}$. Les implications inverses résultent en permutant P et Q. Le reste du théorème est évident.

Le théorème suivant est une généralisation du précédent.

Théorème 12.5 *Soient* X_0, X, $X' \in \mathbf{E} \subset \mathbf{M}$. *Si*

$$\exists X_0 (\forall X \neq X_0) [(X_0 \Delta_{X_0} X \Delta_X \vee X \Delta_X X_0 \Delta_{X_0}) \wedge (\Delta_{X_0} \in \mathscr{I}_{X_0:X} \vee \Delta_X \in \mathscr{I}_{X:X_0})]$$

et

$$\forall X (\forall X' \neq X) [[\mathrm{non}\,(X \doteq X')] \Delta_X],$$

alors

$$\forall X (\forall X' \neq X) [X \Delta_X X' \Delta_{X'} \wedge (\Delta_X \in \mathscr{I}_{X:X'})].$$

En outre,

$$(\exists \alpha, \beta) \forall X [\Delta_X = (\alpha, \beta)_X] \quad \textit{et} \quad \forall X (\forall X' \neq X) [(X \doteq X') \alpha \wedge (X \doteq X') \beta].$$

Remarque. L'axiome III 5, ainsi que la majorité des théorèmes du paragraphe 7 sur les coïncidences et alignements instantanés, restent valables en les appliquant aux relations non-instantanées.

Ajoutons les deux définitions suivantes, qui introduisent la relation „*être situé*". La première s'applique aux ensembles de points quelconques, la seconde aux ensembles en non-coïncidence.

DEFINITION 12.9. Soit $P \in \mathbf{M}$ et $\mathbf{A} \subset \mathbf{M}$. Alors:

$$(P \dot{\in} \mathbf{A}) \varphi \overset{\mathrm{def}}{=} (\exists \varphi \in \Sigma_P) (\exists X \in \mathbf{A}) [(P \doteq X) \varphi],$$

on dira qu'*à l'instant de* φ *le point* P *est situé dans l'ensemble* $\mathbf{A}$.

$$(P \dot{\in} \mathbf{A}) \Phi \overset{\mathrm{def}}{=} (\exists \Phi \subset \Sigma_P) (\forall \varphi \in \Phi) [(P \dot{\in} \mathbf{A}) \varphi],$$

on dira que le point P est *(constamment) situé dans l'ensemble* $\mathbf{A}$, *sur l'ensemble* Φ *d'événements.*

DEFINITION 12.10. Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathscr{N}(\alpha, \beta)$. Alors

$$(\mathbf{B} \dot{\subset} \mathbf{A}) (\alpha, \beta)_{\mathbf{B}} \overset{\mathrm{def}}{=} (\forall X \in \mathbf{B}) [(X \dot{\in} \mathbf{A}) (\alpha, \beta)_X];$$

on dira que *sur l'ensemble d'intervalles* $(\alpha, \beta)_{\mathbf{B}}$ *l'ensembles* $\mathbf{B}$ *est constamment situé dans l'ensemble* $\mathbf{A}$.

$$(\mathbf{A} \doteq \mathbf{B}) (\alpha, \beta)_{\mathbf{A}} \overset{\mathrm{def}}{=} (\mathbf{A} \dot{\subset} \mathbf{B}) (\alpha, \beta)_{\mathbf{A}} \wedge (\mathbf{B} \dot{\subset} \mathbf{A}) (\alpha, \beta)_{\mathbf{B}};$$

on dira que *sur l'ensemble d'intervalles* $(\alpha, \beta)_{\mathbf{A}}$ *les ensembles* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *sont constamment situés l'un sur l'autre.*

DEFINITION 12.11. $(P \dot{\notin} \mathbf{A})\varphi \overset{\text{def}}{=} \text{non}\,(P \dot{\in} \mathbf{A})\varphi$,

$$(P \dot{\notin} \mathbf{A})\,(\alpha, \beta)_P \overset{\text{def}}{=} (\forall \varphi \in (\alpha, \beta)_P)\,[(P \dot{\notin} \mathbf{A})\varphi]. \text{ Etc.}$$

Lorsque l'intervalle du temps est sousentendu ou que les relations sont permanentes, on écrira aussi plus court: $P \dot{\in} \mathbf{A}$, $\mathbf{B} \dot{\subset} \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \doteq \mathbf{B}$, etc.

Notons les deux propositions suivantes:

Théorème 12.6. $(P \in \mathbf{A})\varphi \Rightarrow (P \dot{\in} \mathbf{A})\varphi$.

$$(P \in \mathbf{A})\Phi \Rightarrow (P \dot{\in} \mathbf{A})\Phi.$$

Théorème 12.7. $(\mathbf{A} \subset \mathbf{B})\,(\alpha, \beta)_{\mathbf{A}} \Rightarrow (\mathbf{A} \dot{\subset} \mathbf{B})\,(\alpha, \beta)_{\mathbf{A}}$.

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} \doteq \mathbf{B}.$$

13. TOPOLOGIE LOCALE DANS LES ENSEMBLES DE POINTS MATÉRIELS

Les temps „locaux" étant liés aux points matériels, on peut bien, déjà ici, introduire les points (matériels) d'accumulation, et d'autres notions concernant les propriétés topologiques des ensembles de points matériels, en se limitant au voisinage d'un point pris séparément. Les propriétés topologiques qui se rapportent aux ensembles de points en général, pourront être traitées seulement après avoir défini une relation appropriée entre les temps des différents points d'un ensemble de points matériels.

DEFINITION 13.1 Soit $\mathbf{E} \subset \mathbf{M}_0$ et $Q \in \mathbf{M}$, $\zeta \in \Sigma_Q$. Nous appellerons Q un *point d'accumulation de* $\mathbf{E}$ *à l'instant de* ζ lorsque $V_Q(\zeta) \subset \Sigma_Q$ étant un voisinage ouvert de ζ,

$$\forall V_Q(\zeta)\,(\exists\, P \in \mathbf{E})\,(\exists\, \alpha, \beta \in \Sigma_Q)\,[Q\alpha\, P\cdot Q\beta \wedge \alpha, \beta \in V_Q(\zeta)].$$

Soit $S \in \mathbf{E}$ et $\xi \in \Sigma_S$. Nous appellerons S un *point isolé* de $\mathbf{E}$ *à l'instant de* ξ *lorsque*

$$\exists V_S(\xi)\,(\forall P \in \mathbf{E})\,(\forall \alpha, \beta \in \Sigma_S)\,[S\alpha\, P\cdot S\beta \Rightarrow \alpha, \beta \notin V_S(\xi)].$$

DEFINITION 13.2. Soit ζ un événement qui a lieu en un point Q- Nous appellerons Q un *point limite* d'une *suite de points* $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *à l'in.*

stant de ζ lorsque $V_Q(\xi) \subset \Sigma_Q$ étant un voisinage de ζ, deux suites d'événements, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existent telles que

$$\forall V_Q(\zeta)\, \exists\, m\, \forall\, n\, [n > m \wedge Q\alpha_n\, P_n^{\cdot}\, Q\beta_n \Rightarrow \alpha_n, \beta_n \in V_Q(\zeta)].$$

On écrira: $(P_n \to Q)\zeta$ et $(Q = \lim_{n\to\infty} P_n)\zeta$.

Remarque. Les définitions 13.1 et 13.2 s'expriment aussi bien en termes d'un temp $\hat{t} \in \mathscr{T}_Q$: Le point Q est un *point d'accumulation* de l'ensemble $\mathbf{E}$ *à l'instant* t_0 *du temps* $\hat{t}$ lorsque $V_Q(t_0) \subset (a, b) \subset \mathbb{R}$ étant un voisinage ouvert de t_0, on a

$$\forall V_Q(t_0)\, (\exists P \in \mathbf{E})\, (\exists\, t', t'' \in (a, b))\, [Q^{\cdot}(t')\, P^{\cdot}\, Q^{\cdot}(t'') \wedge t', t'' \in V_Q(t_0)],$$

et Q est un *point-limite à l'instant* t_0, d'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque

$$\forall V_Q(t_0)\, \exists m\, (\forall n > m)\, [Q^{\cdot}(t_n)\, P_n^{\cdot}\, Q^{\cdot}(t'_n) \Rightarrow t_n, t'_n \in V_Q(t_0)].$$

On écrira $(P_n \to Q)\, t_0$ et $(\lim_{t\to\infty} P_n = Q)\, t_0$.

Théorème 13.1. *Soit* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_Q$, $\varphi_n \to \psi \in \Sigma_Q$, *et soit une suite de points* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *telle que*

$$\forall\, n\, [Q\varphi_n\, P_n^{\cdot}\, Q\psi] \qquad \textit{ou bien} \qquad \forall\, n\, [Q\psi\, P_n^{\cdot}\, Q\varphi_n].$$

Alors $n \to \infty \Rightarrow (P_n \to Q)\psi$.

Théorème 13.2. $(\forall m \in \mathbb{N})\, [(n \to \infty \Rightarrow (P_n \to Q)\, t_m) \wedge (m \to \infty \Rightarrow t_m \to t_0)] \Rightarrow [n \to \infty \Rightarrow (P_n \to Q)\, t_0]$.

Démonstration. Soit $(t_m)_{m\in\mathbb{N}} \to t_0$. Selon la définition 13.2 existent

$$(t_{m,n})_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (t'_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$, telles que

$$Q^{\cdot}(t_{m,n})\, P_n^{\cdot}\, Q^{\cdot}(t'_{m,n}).$$

Prenons $m = n$. On a

$$Q^{\cdot}(t_{n,n})\, P_n^{\cdot}\, Q^{\cdot}(t'_{n,n}), \qquad \forall t.$$

Comme $t_{n,n} \to t_0$ et $t'_{n,n} \to t_0$, cela veut dire selon la définition 13.2 que $(P_n \to Q)\, t_0$.

Théorème 13.3. non $[n \to \infty \Rightarrow (P_n \to Q)\alpha] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists V_Q(\alpha)(\forall \psi \in V_Q(\alpha))[\text{non}[n \to \infty \Rightarrow (P_n \to Q)\psi]].$$

Nous aurons besoin du théorème suivant sur la „convergence uniforme“ d'une suite de points dans un certain intervalle de valeurs d'un temps continu.

Théorème 13.4. *Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points, qui converge vers un point Q constamment dans un intervalle $(t', t'') \subset (a, b)$, d'un temps continu $\hat{t}$ de Q, dont (a, b) est l'intervalle des valeurs. Supposons que*

$$\exists m(\forall n > m)[Q^{\cdot}(t'_n)P_n{}^{\cdot}Q^{\cdot}(t') \wedge Q^{\cdot}(t'')P_n{}^{\cdot}Q^{\cdot}(t''_n) \Rightarrow t'_n, t''_n \in (a, b)].$$

Alors les fonctions $f_n(t)$ définies par

$$Q^{\cdot}(t)P_n{}^{\cdot}Q^{\cdot}[t+f_n(t)], \tag{13.1}$$

convergent uniformément vers zéro dans tout intervalle fermé, contenu dans (t', t'').

Démonstration. $Q^{\cdot}(t) \prec Q^{\cdot}[t+f_n(t)]$ pour $t \in (t'_n, t'')$ et $n > m$, donc $f_n(t) > 0$ dans (t', t'') (définition 11.1). Si le théorème était faux, il n'existerait aucune suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres positifs et convergeant vers zéro, telle que $f_n(t) < \varepsilon_n$ pour tout $t \in [t'_0, t''_0] \subset (t', t'')$. On pourrait toujours extraire de (f_n) une suite $(f_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ telle qu'on aurait $f_{n_p}(t_p) > h$ pour un certain $h > 0$ et (t_p) convergeant vers un $t_0 \in [t', t'']$. Soient alors k, l des nombres positifs, tels que

$$k < t'' - t''_0, \quad l < k < h \quad \text{et} \quad l < h - k.$$

Pour p assez grand $|t_p - t_0| < l$, donc

$$t_p < t_0 + l \quad \text{et} \quad t_p + f_{n_p}(t_p) > t_0 - l - h,$$

puisque $f_{n_p}(t_p) > h$. Or $t_0 \leqslant t''_0$, $k < t'' - t'_0$, d'où $t_0 + k \leqslant t''_0 + k < t''$, donc $t_0 + k \in (t', t'')$, par conséquent $(P_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge à l'instant $t_0 + k$ vers Q. Donc, en vertu des définitions 11.1 et 13.2 deux suites (t'_p) et (t''_p) existent, convergeant vers $t_0 + k$ et telles que

$$Q^{\cdot}(t'_p)P_n{}^{\cdot}Q^{\cdot}(t''_p), \quad \forall p \in \mathbb{N}. \tag{13.2}$$

On a $t_p < t_0 + l < t_0 + k < t_0 - l + h$, d'où pour p assez grand,

$$t_p < t_0 + l < t'_p \leqslant t''_p < t_0 - l + h,$$

donc

(13.3) $$t_p < t'_p \leqslant t''_p < t + f_{n_p}(t_p).$$

Ceci est impossible, car $t_p < t'_p$ entraîne $Q^{\cdot}(t_p) \prec Q^{\cdot}(t'_p)$, donc en vertu de (13.1) et (13.2)

$$Q^{\cdot}[t_p + f_{n_p}(t_p)] \prec Q^{\cdot}(t''_p),$$

d'où $t''_p > t_p + f_{n_p}(t_p)$, contrairement à (13.3), par quoi le théorème est démontré.

CHAPITRE III

METRIQUE

14. TEMPS METRIQUE

Deux points matériels P et Q étant donnés, envisageons les couples $\langle\alpha, \beta\rangle$ d'événements de $\Delta_P \subset \Sigma_P$, tels que $P\alpha Q \cdot P\beta$, et supposons, pour expliquer les idées, que P et Q soient en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un repère galiléen. Si la distance de P à Q est alors constante, celle de α à β, qui exprime une durée, est comme fonction de α également constante, et vice versa. Or, dans notre dévéloppement axiomatique la distance entre les points n'ayant pas été définie, on ne peut parler ni de l'égalité des distances entre les éléments des couples $\langle\alpha, \beta\rangle$ — sauf dans le sens élargi suivant: Soient P, Q quelconques. Nous dirons par définition que la „distance" de α à β est dans l'intervalle Δ_P «constante par rapport à Q» lorsque

$$\forall\alpha\, \exists\beta\, [\alpha, \beta \in \Delta_P \implies P\alpha Q \cdot P\beta].$$

Il existe alors un temps continu de P, soit $t = f(\varphi)$, où $\varphi \in \Sigma_P$, tel qu'il y a proportionnalité entre ces distances des événements et les longueurs des intervalles dans l'ensemble des valeurs de ce temps. Nous appellerons celui-ci un «temps de P, métrique par rapport à Q». Il se trouve à la base des relations métriques dans le système que nous construisons. Du point de vue intuitif il s'agit d'une métrique fondée sur la lumière.

DEFINITION 14.1. Soit $\Delta_{P:Q}$ $(P \neq Q)$ un intervalle maximal de non-coïncidence de P avec Q, ou bien, si $P = Q$, soit $\Delta_{P:P}$ un intervalle Δ_P quelconque et T un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$. On dira qu'un temps continu de P,

$$f : \Delta_{P:Q} \mapsto \mathrm{T},$$

défini sur $\Delta_{P:Q}$ est *métrique par rapport à Q* lorsque

$$(\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Delta_{P:Q}) [P\varphi_1 Q^{\cdot} P\varphi_2 \;\Rightarrow\; f(\varphi_2) - f(\varphi_1) = a = \text{const.}].$$

On appellera *a l'élément métrique de f*, ce qu'on notera: $a = e(f_{P:Q})$.

Remarque. Si $t = f(\varphi)$ et $P \neq Q$, on a donc $\forall t [P^{\cdot}(t)\, Q^{\cdot} P^{\cdot}(t+a)]$, ainsi que $a > 0$. Si $P = Q$ on a $a = 0$.

NOTATION 14.1. L'ensemble des temps continus en P, métriques par rapport à Q sera noté $\mathscr{C}_{P:Q}$.

DEFINITION 14.2. Soit $t = f(\varphi)$ un temps en P, métrique par rapport à Q, défini sur $\Delta_{P:Q}$, et soient $\alpha, \beta \in \Delta_{P:Q}$. Nous appellerons

$$d(\alpha, \beta) \overset{\text{def}}{=} |f(\alpha) - f(\beta)|$$

distance, ou *durée*, de α à β, basée sur le temps métrique f.

En excluant le cas trivial quand $a = 0$, on a les théorèmes suivants:

Théorème 14.1. *L'intervalle des valeurs d'un temps métrique est* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $t \in \mathscr{C}_{P:Q}$, défini sur $\Delta_{P:Q}$. En vertu du théorème 7.11 les événements de Σ_P de la chaîne $\{P^{\cdot}, Q^{\cdot}\}_{-\infty}^{\infty}$ définie à partir d'un événement quelconque de $\Delta_{P:Q}$, sont contenus dans $\Delta_{P:Q}$. Donc, suivant la définition 14.1, on a pour $\forall m \in \mathbb{N}$

$$P^{\cdot}(t)\, Q^{\cdot} P^{\cdot}(t+a)\, Q^{\cdot} \ldots\; P^{\cdot}(t+ma)$$

et

$$P^{\cdot}(t-ma)\, Q^{\cdot} P^{\cdot}(t-(m-1)\,a)\, Q^{\cdot} \ldots\; P^{\cdot}(t).$$

Donc, $\hat{t}$ étant un temps continu, l'ensemble des valeurs t est $\mathbb{R}$.

Théorème 14.2. *Soit* $\hat{t} \in \mathscr{C}_{P:Q}$, *défini sur* $\Delta_{P:Q}$. *Alors, si* $a = e(\hat{t}_{P:Q})$ *et* $\alpha_0 \in \Delta_{P:Q}$, *où* $\hat{t}(\alpha_0) = 0$, *le temps* $\hat{t}$ *a pour tout* $\alpha_n \in \Delta_{P:Q}\, (n \in \mathbb{Z})$ *pour lequel*

$$\alpha_0 \{P^{\cdot} Q^{\cdot}\}_1^n P\alpha_n \;\; si \;\; n > 0, \qquad ou \; bien \qquad \alpha_n \{P^{\cdot} Q^{\cdot}\}_n^{-1} P\alpha_0 \;\; si \;\; n < 0,$$

ainsi que pour $n = 0$, *la valeur*[20]

[20] D'après nos notations, si $n = 1$ on a $\alpha_0\{P^{\cdot}Q^{\cdot}\}_1^1 P\alpha \asymp \alpha_0 P^{\cdot}Q^{\cdot}P\alpha_1 \asymp P\alpha_0 Q^{\cdot}P\alpha_1$, et en général: $\alpha_0\{P^{\cdot}Q^{\cdot}\}_1^n P\alpha_n \asymp P\alpha_0 Q^{\cdot}\{P^{\cdot}Q^{\cdot}\}_1^{n-1} P\alpha_n$.

(14.1) $$\hat{t}(\alpha_n)=n\,a.$$

La fonction $\hat{t}=t(\varphi_0)$ *est pour tout* $\varphi_0\in(\alpha_0,\alpha_1)$ *continue, croissante et d'ailleurs quelconque, respectant la continuité dans* $[\alpha_0,\alpha_1]$. *Sur tout autre* (α_n, α_{n+1}) *on a*

(14.2) $$\hat{t}(\varphi_n)=\hat{t}(\varphi_0)+n\,a,$$

d'où $\varphi_n\in(\alpha_n,\alpha_{n+1})$ *est tel que*

$$\varphi_0\,\{P^{\cdot}Q^{\cdot}\}_1^n\,P\varphi_n \quad \textit{pour } n>0, \qquad \textit{ou bien} \qquad \varphi_n\,\{P^{\cdot}Q^{\cdot}\}_n^{-1}\,P\varphi_0 \quad \textit{pour } n<0.$$

Démonstration. Indiquons-la pour $n>0$. On a $\alpha_0\{P^{\cdot}Q^{\cdot}\}_1^n P\alpha_n$, et d'autre part

$$P^{\cdot}(t)\,Q^{\cdot}P^{\cdot}(t+a) \;\Rightarrow\; P^{\cdot}(t)\,\{Q^{\cdot}P^{\cdot}\}_1^n \asymp P^{\cdot}(t+na)],$$

donc, pour $t=0$, $P^{\cdot}(0)\asymp P\alpha_0$, $P^{\cdot}(na)\asymp P\alpha_n$, d'où (14.1). En outre

$$\varphi_0\,\{P^{\cdot}Q^{\cdot}\}_1^n\,P\varphi_n,$$

et d'autre part

$$P^{\cdot}[t(\varphi_0)]\,\{Q^{\cdot}P^{\cdot}\}_1^n \asymp P^{\cdot}[t(\varphi_n)],$$

d'où (14.2). D'après la définition 11.1 $\hat{t}$ est dans $[\alpha_0,\alpha_1]$ une fonction continue, croissante quelconque.

Remarque. En d'autres termes, $\hat{t}$ est déterminée après le choix de sa restriction $\hat{t}/(\alpha_0,\alpha_1)\in\mathscr{T}_P$.

Théorème 14.3. $\Delta_{P:Q}$ *et* $a>0$ *étant donnés, un temps métrique* $\hat{t}$, *défini sur* $\Delta_{P:Q}$ *existe, tel que* $a=e(\hat{t}_{P:Q})$.

Démonstration. Définissons une fonction $t=f(\varphi)$ sur $\Delta_{P:Q}$ de la manière suivante:

Soit $\alpha_0\in\Delta_{P:Q}$; posons $f(\alpha_0)=0$.

Soit $\alpha_0\{P^{\cdot}Q^{\cdot}\}_1^n P\alpha_n$ $(n\in\mathbb{N})$ ou bien $\alpha_n\{P^{\cdot}Q^{\cdot}\}_n^{-1}P\alpha_0$ $(-n\in\mathbb{N})$; posons $f(\alpha_n)=na$ $(n\in\mathbb{Z})$.

Soit $\varphi_0 \in (\alpha_0, \alpha_1)$ et $\hat{u}$ un temps continu, défini sur (α_0, a_1) de telle sorte que

$$\lim_{\varphi_0 \to \alpha_0} \hat{u}(\varphi_0) = 0, \qquad \lim_{\varphi_0 \to \alpha_1} \hat{u}(\varphi_0) = a;$$

posons $f(\varphi_0) = \hat{u}(\varphi_0)$.

Soit $\varphi_n \in (\alpha_n, \alpha_{n+1})$ tel que

$$n > 0 \quad \text{et} \quad \varphi_0 \{P^{\cdot}Q^{\cdot}\}_1^n P\varphi_n \quad \text{ou bien} \quad n < 0 \quad \text{et} \quad \varphi_n \{P^{\cdot}Q^{\cdot}\}_n^{-1} P\varphi_0 \, ;$$

posons $f(\varphi_n) = f(\varphi_0) + na$.

Alors, suivant les définitions 11.1 et 14.1 $t = f(\varphi)$ est un temps métrique en P par rapport à Q.

NOTATION 14.2. Désignons par $\mathscr{F}_a$ l'ensemble des fonctions périodiques et continues d'une variable et dont la période est a. Il va de soi que $\mathscr{F}_0$ est l'ensemble des constantes.

Théorème 14.4. *Soient $\hat{t} \in \mathscr{C}_{P:Q}$ et $\hat{t}' \in \mathscr{C}_P$, **définis** sur le même intervalle $\Delta \in \mathscr{I}_{P:Q}$. Pour que $\hat{t}' \in \mathscr{C}_{P:Q}$, il faut et il suffit que $\hat{t}' \circ \hat{t}^{-1}$ soit une fonction continue et croissante de t, de la forme*

$$t' = kt + h(t), \tag{14.3}$$

où $h \in \mathscr{F}_a$ et $a = e(\hat{t}_{P:Q})$. En outre $k = a'/a$ où $a' = e(\hat{t}'_{P:Q})$.

Démonstration. On a $P^{\cdot}(t) Q^{\cdot} P^{\cdot}(t+a)$ (définition 14.1) et de même, si $\hat{t}' \in \mathscr{C}_{P:Q}$, $P^{\cdot}(t') Q^{\cdot} P^{\cdot}(t'+a')$. Pour les couples $\langle t, t' \rangle$ tels que $P^{\cdot}(t) \asymp P^{\cdot}(t')$ posons $t' = g(t)$. On a donc $t' + a' = g(t+a)$, d'où l'équation $g(t) + a' = g(t+a)$, dont la solution est $g(t) = h(t) + \dfrac{a'}{a} t$, où $h(t+a) = h(t)$, par conséquent $h \in \mathscr{F}_a$. Pour que $\hat{t}' \circ \hat{t}^{-1}$ soit continue et croissante il faut et il suffit, en vertu du théorème 11.3, que h soit continue et que g soit croissante.

Inversement, si $t' = g(t) = \dfrac{a'}{a} t + h(t)$, où $a' > 0$ et $h \in \mathscr{F}_a$, h étant telle que g soit continue et croissante, $g \circ \hat{t}$ est continue et croissante aussi, et

$$g \circ \hat{t} : \Delta \mapsto \mathbb{R}.$$

Mais, $g \circ \hat{t} = \hat{t}'$, donc $\hat{t}' \in \mathscr{C}_P$. Soit $P \cdot (t') Q \cdot P \cdot (t'_1)$. On a

$$t'_1 = g(t+a) = \frac{a'}{a}(t+a) + h(t+a) = t' + a',$$

donc $\hat{t}' \in \mathscr{C}_{P:Q}$ et $a' = e(\hat{t}_{P:Q})$.

Remarque. Suivant le théorème 14.4. $\hat{t} \in \mathscr{C}_{P:Q}$, ainsi que l'élément métrique de $\hat{t}' \in \mathscr{C}_{P:Q}$ étant donnés, on peut définir $\hat{t}'$ de telle sorte que dans (14.3) $h = \text{const.}$ Alors, et alors seulement, si $\alpha, \beta \in \Delta_{P:Q}$ et si $d(\alpha, \beta)$, $d'(\alpha, \beta)$ sont les distances basées sur $\hat{t}$ es sur $\hat{t}'$, on a

$$(\forall \alpha, \beta)[d'(\alpha, \beta) = k\, d(\alpha, \beta)].$$

Le théorème suivant se démontre de manière analogue, grâce au théorème 11.3.

Théorème 14.5. *Soit* $\hat{t} \in \mathscr{C}_{P:Q}$ *défini sur* $\Delta \in \mathscr{I}_{P:Q}$, *et* $\hat{u} \in \mathscr{C}_Q$ *défini sur* Δ', *tel que* $P\Delta\, Q\Delta'$. *Pour que* $\hat{u} \in \mathscr{C}_{Q:P}$, *il faut et il suffit que* $\hat{u} \circ \hat{t}^{-1}$ *soit dans l'expression* $P \cdot (t) Q \cdot (u)$ *une fonction continue croissante de* t, *de la forme:*

$$u = kt + h(t),$$

où $k > 0$, $h \in \mathscr{F}_a$ *et* $a = e(\hat{t}_{P:Q})$. *En outre* $k = b/a$ *où* $b = e(\hat{u}_{Q:P})$.

En supposant qu'un temps continu de P peut être à la fois métrique par rapport à deux ou à plusieurs autres points, voir même à tout point d'un ensemble $\mathbf{E} \subset \mathbf{M}$, nous posons la définition suivante:

DEFINITION 14.3. $\mathscr{C}_{P:\mathbf{E}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{X \in \mathbf{E}} \mathscr{C}_{P:X}$.

Si $\hat{t} \in \mathscr{C}_{P:\mathbf{E}}$ nous dirons que le temps $\hat{t}$ est *métrique par rapport à l'ensemble* $\mathbf{E}$.

Remarque. Pour qu'un temps $\hat{t}$ de P, métrique par rapport à un ensemble $\mathbf{E}$, existe, il faut qu'il existe un intervalle $\Delta \in \mathscr{I}_{P:\mathbf{E}}$.

Théorème 14.6. *Soient* $\hat{t} \in \mathscr{C}_{P:\{Q,R\}}$ *et* $\hat{t}' \in \mathscr{C}_P$, *définis sur* $\Delta \in \mathscr{I}_{P:\{Q,R\}}$. *Pour que* $\hat{t}' \in \mathscr{C}_{P:(Q,R)}$, *il faut et il suffit que* $\hat{t}' \circ \hat{t}^{-1}$ *soit une fonction continue croissante de* t, *de la forme:*

$$t' = kt + h(t),$$

où $k > 0$, $h \in \mathscr{F}_p$, *p étant le plus grand commun diviseur de* $a = e(\hat{t}_{P:Q})$ *et* $b = e(\hat{t}_{P:R})$ *ou bien, lorsqu'un tel n'existe pas,* $h =$ *constante. En outre*

$$k = a'/a = b'/b \qquad \textit{et} \qquad a/b = a'/b',$$

où $a' = e(\hat{t}'_{P:Q})$ *et* $b' = e(\hat{t}'_{P:R})$.

Démonstration. Soit $\hat{t} \in \mathscr{C}_{P:\{Q,R\}}$, $\hat{t}' \in \mathscr{C}_P$ et $t' = f(t)$. On a

$$P^\cdot(t)\,Q^\cdot P^\cdot(t+a), \text{ et en termes de } t',\ P^\cdot[f(t)]\,Q^\cdot P^\cdot[f(t+a)].$$

Si $\hat{t}' \in \mathscr{C}_{P:\{Q,R\}}$, on a aussi $P^\cdot(t')\,Q^\cdot P^\cdot(t'+a')$ d'où

$$f(t+a) = f(t) + a'. \tag{14.4}$$

Notant $f(t) = kt + h(t)$, (14.4) s'écrit $k(t+a) + h(t+a) = kt + h(t) + a'$. Pour que cette équation soit satisfaite il faut que $ka = a'$ et $h \in \mathscr{F}_a$.

D'autre part on a $P^\cdot(t)R^\cdot P^\cdot(t+b)$, d'où il résulte de la même manière $kb = b'$ et $h \in \mathscr{F}_b$. Par conséquent, $k = a'/a = b'/b$, et $h \in \mathscr{F}_p$, p étant le plus grand commun diviseur de a et b.

Inversement, si $t' = f(t) = kt + h(t)$ satisfait aux conditions du théorème, alors

$$P^\cdot[f(t)]\,Q^\cdot P^\cdot[f(t+a)] \;\Rightarrow\; P^\cdot[kt + h(t)]\,Q^\cdot P^\cdot[k(t+a) + h(t+a)],$$

où $f(t) = k[t + h(t)] = t'$ et

$$f(t+a) = k(t+a) + h(t+a) = kt + h(t) + a' = t' + a',$$

donc $P^\cdot(t')\,A^\cdot P^\cdot(t'+a')$. De même $P^\cdot(t')\,R^\cdot P^\cdot(t'+b')$, par conséquent $t' \in \mathscr{C}_{P:\{Q,R\}}$.

Théorème 14.7. *Soit* $\hat{t} \in \mathscr{C}_P$ *défini sur* Δ_P, *ainsi que*

$$P^\cdot(t)\,\{Q^\cdot P^\cdot\}_1^k \succ P^\cdot(t)\,\{R^\cdot P^\cdot\}_1^l \quad \text{et} \quad P^\cdot(t)\,\{Q^\cdot P^\cdot\}_1^m \preccurlyeq P^\cdot(t)\,\{R^\cdot P^\cdot\}_1^n \tag{14.5}$$

à tout instant t. *Alors* $k/l > m/n$.

Démonstration. Si, au contraire, $k/l \leqslant m/n$, la seconde relation (14.5) entraînant

$$P^{\cdot}(t)\,\{Q^{\cdot}P^{\cdot}\}_1^{mk} \preccurlyeq P^{\cdot}(t)\,\{R^{\cdot}P^{\cdot}\}_1^{nk},$$

on aurait $nk \leqslant ml$, donc

$$P^{\cdot}(t)\,\{Q^{\cdot}P^{\cdot}\}_1^{mk} \preccurlyeq P^{\cdot}(t)\,\{R^{\cdot}P^{\cdot}\}_1^{ml}.$$

Or, la première relation (14.5) entraîne

$$P^{\cdot}(t)\,\{Q^{\cdot}P^{\cdot}\}_1^{mk} \succ P^{\cdot}(t)\,\{R^{\cdot}P^{\cdot}\}_1^{ml},$$

donc $k/l > m/n$.

Théorème 14.8. *Soit* $\hat{t} \in \mathscr{C}_{P:\{Q,R\}}$ *défini sur* $\Delta_{P:\{Q,R\}}$, *et*

$$a = e\,(\hat{t}_{P:Q}), \quad b = e\,(\hat{t}_{P:R}),$$

ainsi que

$$P^{\cdot}(t)\,\{Q^{\cdot}P^{\cdot}\}_1^{k} \succ P^{\cdot}(t)\,\{R^{\cdot}P^{\cdot}\}_1^{l}$$

à tout instant t. *Alors* $k/l > b/a$.

Démonstration. $P^{\cdot}(t)\,\{Q^{\cdot}P^{\cdot}\}_1^{k} \asymp P^{\cdot}(t+ka)$, $\quad P^{\cdot}(t)\,\{R^{\cdot}P^{\cdot}\}_1^{l} \asymp P^{\cdot}(t+lb)\cdot$

Or,

$$P^{\cdot}(t)\,\{Q^{\cdot}P^{\cdot}\}_1^{k} \succ P^{\cdot}(t)\,\{R^{\cdot}P^{\cdot}\}_1^{l},$$

d'où $P^{\cdot}(t+ka) \succ P^{\cdot}(t+lb)$, donc $t+ka > t+lb$, donc $k/l > b/a$.

15. TEMPS SYNCHRONES

Les fonctions fondamentales du temps étant associées séparément à chaque point matériel, nous allons admettre qu'il existe une relation entre ces fonctions, qui permettra, entre autres, une définition simple de la simultanéité en des points différents. Les temps „locaux" formeront ainsi un système, qui s'étendra à tout un ensemble de points (plus tard même à tout un espace euclidien à trois dimensions). On parlera donc d'un „temps commun" à cet ensemble de points, ou d'un „temps-coordonnée" (paragraphe 16).

Envisageons d'abord deux points P et Q, et en revenant au point de vue de la Physique, supposons qu'ils soient fixes par rapport à un repère galiléen $\mathscr{G}$, et que $\hat{t}$ et $\hat{u}$ soient leurs temps locaux. Si un rayon instantané de lumière part de P au moment t_1 et revient à P au moment t_2 après avoir été réfléchi en Q au moment u, on pose avec *Einstein:*

$$u = \frac{t_1 + t_2}{2} \tag{15.1}$$

quel que soit $\mathscr{G}$, et on dit que le temps en Q étant une fonction du temps en P, est „synchrone" au temps en P. Nous retiendrons cette définition pour P et Q quelconques, et dirons que le temps $\hat{u}$ de Q est synchrone au temps $\hat{t}$ de P quels que soient P et Q, dès que la condition (15.1) est constamment remplie. Alors, deux événements α, β, tels que $P\alpha$, $Q\beta$, auront par définition „simultanément" lieu lorsque $\hat{t}(\alpha) = \hat{u}(\beta)$.

DEFINITION 15.1. Soit $P\Delta_P Q\Delta_Q$ et $\hat{t} \in \mathscr{T}_P$, $\hat{u} \in \mathscr{T}_Q$, définis sur Δ_P et Δ_Q ; soit ensuite $\Delta_P \in \mathscr{I}_{P:Q}$, $\Delta_Q \in \mathscr{I}_{Q:P}$, ou bien $(P \doteq Q)\,\Delta_P$.

Si dans l'expression $P^\cdot(t_1)\, Q^\cdot(u)\, P^\cdot(t_2)$

$$u = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

quel que soit le couple $\langle t_1, t_2 \rangle$ des valeurs du temps $\hat{t}$, nous dirons que $\hat{u}$ est *synchrone à* $\hat{t}$, et noterons: $\hat{u}$ *syn* $\hat{t}$.

R e m a r q u e. La cas de la coïncidence dans la définition 15.1 étant trivial, nous ne considérons dans les théorèmes suivants que les ensembles $\mathbf{E}$ en non-coïncidence ($\mathbf{E} \in \mathscr{N}$).

Théorème 15.1. *Soit* $P\Delta_P Q\Delta_Q$ *et* $\hat{t} \in \mathscr{T}_P$, $\hat{u} \in \mathscr{T}_Q$, *définis sur* Δ_P *et* Δ_Q. *Alors*

$$\forall \Delta_P\, \forall \hat{t}\, \exists u\, [\Delta_P \in \mathscr{I}_{P:Q} \;\Rightarrow\; \hat{u} \text{ syn } \hat{t}].$$

Le temps $\hat{u}$ *est unique, et l'intervalle des valeurs de* $\hat{t}$ *et de* $\hat{u}$ *est le même.*

Démonstration. Suivant le théorème 12.4 on a dans $P\Delta_P Q\Delta_Q P\Delta'_P$ aussi $\Delta_Q \in \mathscr{I}_{Q:P}$ et $\Delta'_P \in \mathscr{I}_{P:Q}$, donc $\Delta_P = \Delta'_P$. Suivant le théorème 10.4

s_{PQ} et s_{QP} sont des homéomorphismes, ainsi que $f: \Delta_P \mapsto D_t$, où $D_t \subset \mathbb{R}$ est l'intervalle des valeurs du temps $t = f(\varphi)$. Donc $f_1 = f \circ (s_{QP}/\Delta_Q)$ et $f_2 = f \circ (s_{PQ}^{-1}/\Delta_Q)$ sont aussi des homéomorphismes de Δ_Q sur D_t. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \Delta_P$ et $\psi \in \Delta_Q$, tels que $P\varphi_1 Q\psi P\varphi_2$. Notons $t_1 = f(\varphi_1)$, $t_2 = f(\varphi_2)$, $u = (t_1 + t_2)/2$. Comme $t_1 = f_1(\psi)$ et $t_2 = f_2(\psi)$ sont des homéomorphismes de Δ_Q sur D_t, la fonction

$$g = \frac{f_1 - f_2}{2} : \Delta_Q \mapsto D_u,$$

où D_u est l'intervalle des valeurs u, l'est également. En outre, tous ces homéomorphismes sont des fonctions croissantes. Donc on a $g \in \mathscr{T}_Q$, et suivant la définition 15.1, u *syn* t.

Pour montrer que $D_t = D_u$, désignons-les, ainsi que Δ_P et Δ_Q, respectivement par (a, b), (c, d), (α, β) et (γ, δ). On a

$$(\psi \to \gamma) \quad \Rightarrow \quad (\varphi_1 \to \alpha \ \wedge \ \varphi_2 \to \alpha) \quad \Rightarrow \quad (t_1 \text{ et } t_2 \to a) \quad \Rightarrow \quad (u \to a),$$

donc $c = a$. De même $d = b$.

R e m a r q u e. La relation *syn* n'est pas symétrique. Mais on a les deux théorèmes suivants.

Théorème 15.2. *Soit* $P\Delta_P Q\Delta_Q$, $\Delta_P \in \mathscr{I}_{P:Q}$ *et* $\hat{t} \in \mathscr{T}_P$, $\hat{u} \in \mathscr{T}_Q$, *définis sur* Δ_P *et* Δ_Q. *Alors*

$$\hat{t} \in \mathscr{T}_{P:Q} \quad \wedge \quad \hat{u} \text{ syn } \hat{t} \quad \Rightarrow \quad \hat{u} \in \mathscr{T}_{Q:P} \quad \wedge \quad \hat{t} \text{ syn } \hat{u}.$$

En outre $e(\hat{t}_{P:Q}) = e(\hat{u}_{Q:P})$.

Démonstration. Comme $\hat{t} \in \mathscr{T}_{P:Q}$ et $\hat{u}$ *syn* $\hat{t}$, on a avec un certain $a > 0$ (définitions 14.1 et 15.1) et $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$P^{\cdot}(t)\, Q^{\cdot}(u)\, P^{\cdot}(t+a) \quad \text{et} \quad u = t + \frac{a}{2},$$

donc aussi $Q^{\cdot}\left(t + \dfrac{a}{2}\right) P^{\cdot}(t+a)\, Q^{\cdot}\left(t + \dfrac{3a}{2}\right)$, c.-à-d.

$$Q^{\cdot}(u)\, P^{\cdot}\left(u + \frac{a}{2}\right) Q^{\cdot}(u+a), \qquad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent $\hat{u} \in \mathscr{T}_{Q:P}$ et $\hat{t}$ *syn* $\hat{u}$. L'élément métrique de $\hat{t}$ et de $\hat{u}$ est a.

Théorème 15.3. *Soit* $P\Delta_P Q\Delta_Q$, $\Delta_P \in \mathscr{I}_{P:Q}$ *et* $\hat{t} \in \mathscr{T}_{P:Q}$, *défini sur* Δ_P. *Alors un* $\hat{u} \in \mathscr{T}_{Q:P}$, *défini sur* Δ_Q, *existe tel que*

$$\hat{t} \text{ syn } \hat{u} \quad \text{et} \quad \hat{u} \text{ syn } \hat{t}.$$

Démonstration. Soit $e(\hat{t}_{P:Q}) = a$. On a

$$\forall t\,[P^{\cdot}(t)\,Q^{\cdot}P^{\cdot}(t+a)]. \tag{15.1}$$

Suivant le théorème 14.3 un temps $\hat{u}$ existe, $\hat{u} \in \mathscr{T}_{Q:P}$, avec $e(\hat{u}_{Q:P}) = b$ quelconque; donc soit $b = a$. Alors, d'après le théorème 14.5, $u = t + h(t)$. La fonction h doit satisfaire les conditions du théorème 14.5, ce qui est sûrement le cas lorsque $\forall t$, $h(t) = a/2$. Ainsi, $u = t + a/2$, donc en vertu de (15.1)

$$\forall t\,[P^{\cdot}(t)\,Q^{\cdot}\left(t + \frac{a}{2}\right)P^{\cdot}(t+a)],$$

par conséquent $\hat{u}$ *syn* $\hat{t}$. Suivant le théorème 15.2, $\hat{t}$ *syn* $\hat{u}$.

Théorème 15.4. *Soit* $P\Delta_P Q\Delta_Q$, $\Delta_P \in \mathscr{I}_{P:Q}$ *et* $\hat{t} \in \mathscr{T}_P$, $\hat{u} \in \mathscr{T}_Q$, *définis sur* Δ_P *et* Δ_Q. *Alors*

$$\hat{t} \text{ syn } \hat{u} \;\wedge\; \hat{u} \text{ syn } \hat{t} \;\Rightarrow\; \hat{t} \in \mathscr{T}_{P:Q} \;\wedge\; \hat{u} \in \mathscr{T}_{Q:P}.$$

En outre, $e(\hat{t}_{P:Q}) = e(\hat{u}_{Q:P})$.

Démonstration. Posons $P^{\cdot}(t)\,Q^{\cdot}(u)\,P^{\cdot}(t')\,Q^{\cdot}(u')$. Comme $\hat{t}$ *syn* $\hat{u}$ e $\hat{u}$ *syn* $\hat{t}$, on a (définition 15.1)

$$u = \frac{t+t'}{2}, \qquad t' = \frac{u+u'}{2},$$

d'où $t' - t = 2(u - t)$, $u' - u = 2(t' - u)$. Comme $\hat{u}\circ\hat{t}^{-1}$ est une fonction biunivoque et bicontinue de t (théorème 11.3), $\hat{u}\circ\hat{t}^{-1}(t) - t = f(t)$ sont les valeurs d'une fonction f continue, et on a

$$u = t + f(t), \qquad t' = t + 2f(t), \qquad u' = t + 3f(t),$$

d'où

$$(15.2) \qquad \ldots P^{\cdot}(t)\, Q^{\cdot}[t+f(t)]\, P^{\cdot}[t+2f(t)]\, Q^{\cdot}[t+3f(t)] \ldots$$

D'après le théorème 3.2 cette chaîne est infinie dans les deux sens. En substituant t par $t+2f(t)$ on obtient

$$(15.3) \qquad \ldots P^{\cdot}[t+2f(t)]\, Q^{\cdot}\{t+2f(t)+f[t+2f(t)]\} \ldots$$

d'où, en comparant les termes de (15.2) et (15.3),

$$(15.4) \qquad f[t+2f(t)] = f(t).$$

En substituant dans (15.2) t par $t-2f(t)$, on reçoit de même manière

$$(15.5) \qquad f[t-2f(t)] = f(t),$$

et de (15.4) et (15.5), pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$(15.6) \qquad f[t+2nf(t)] = f(t).$$

D'après le théorème 11.3 $t_1 < t_2$ entraîne $u_1 < u_2$, donc $t_1 + f(t_1) < t_2 + f(t_2)$, d'où, en désignant par Δt, Δf les différences, $\Delta f/\Delta t > -1$. De même, $t_1 < t_2$ entraîne $t_1 - f(t_1) < t_2 - f(t_2)$, d'où $\Delta f/\Delta t < 1$. Donc

$$(15.7) \qquad \left|\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}\right| < 1$$

pour $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $\quad t_1 \neq t_2$.

L'équation fonctionnelle (15.6), accompagnée de (15.7), n'a qu'une solution: la constante,[22] soit $f(t) = a/2$ $(a > 0)$. Donc

$$\ldots P^{\cdot}(t)\, Q^{\cdot}\left(t+\frac{a}{2}\right) P^{\cdot}(t+a)\, Q^{\cdot}\left(t+\frac{3a}{2}\right) \ldots,$$

par conséquent, $\hat{t} \in \mathscr{C}_{P:Q}$, $\hat{u} \in \mathscr{C}_{Q:P}$, leur élément métrique étant a.

[22] Une démonstration de ce fait, due à *J. Karamata*, se trouve dans mon travail: Grundlegendes etc., II, p. 104, cité sous [1].

R e m a r q u e. L'inverse du théorème précédent n'est pas vrai. – Le théorème suivant est une généralisation du précédent, et il en résulte facilement.

Théorème 15.5. *Soit* $\mathbf{E}$ *un ensemble d'au moins deux points, en non-coïncidence. Soit* $\Delta_X \in \mathscr{I}_{X:\mathbf{E}}$ *pour tout* $X \in \mathbf{E}$ *l'intervalle de cette non-coïncidence, et* $\hat{t}_X \in \mathscr{C}_X$ *défini sur* Δ_X*. Alors*

$$(\forall X, X' \in \mathbf{E})[\hat{t}_X \; syn \; \hat{t}_{X'}] \quad \Rightarrow \quad \forall X \; [\hat{t}_X \in \mathscr{C}_{X:\mathbf{E}}].$$

Crâce aux temps synchrones on peut définir la simultanéité, ainsi que les relations du temps qu'on appellera encore „avant" et „après" et qui se rapportent aux événements perçus de deux points différents.

NOTATION 15.1. Si α et P étant quelconques, α est perçu de P à un instant du temps $\hat{t} \in \mathscr{C}_P$, cet instant sera noté $\hat{t}(\alpha P)$.

DEFINITION 15.2. Soient αP, βQ, et $\hat{t} \in \mathscr{C}_P$, $\hat{t}' \in \mathscr{C}_Q$. Supposons que

$$t' \; syn \; t \quad \text{et} \quad t \; syn \; t'.$$

Alors

$$\alpha P \asymp \beta Q \overset{\text{def}}{=} \hat{t}(\alpha P) = \hat{t}'(\beta Q),$$

$$\alpha P \prec \beta Q \overset{\text{def}}{=} \hat{t}(\alpha P) < \hat{t}'(\beta Q).$$

On dira respectivement: α *et* β *sont perçus simultanément*, α *de* P *et* β *de* Q, et: α *est perçu de* P *avant que* β *soit perçu de* Q (ou bien: β *est perçu de* Q *après que* α *soit perçu de* P, ce qu'on notera $\beta Q \succ \alpha P$).

Si l'on a, de plus, $P\alpha$ ou $Q\beta$, on s'exprimera de manière analogue: α *et* β *ont lieu simultanément*, α *en* P *et* β *en* Q, etc.

R e m a r q u e. Par cette définition une relation binaire, qu'on noterait encore $\preccurlyeq$, est établie entre les couples $\langle \varphi, P \rangle$ de l'ensemble $\overline{\Sigma}^P \times \{P\}$ d'une part, et les couples $\langle \psi, Q \rangle$ de l'ensemble $\overline{\Sigma}^Q \times \{Q\}$ d'autre part. C'est une relation dans $\overline{\Sigma} \times \mathbf{M}$, un élargissement de la relation primitive d'ordre du temps (du paragraphe 2).

16. TEMPS COMMUN A UN ENSEMBLE DE POINTS

Soit donné en chaque point X d'un ensemble $\mathbf{E} \subset \mathbf{M}$ un temps continu $\hat{t}_X$ de telle sorte que tous ces temps soient synchrones les uns aux autres, et par conséquent aussi métriques (théorème 15.5). L'ensemble des valeurs de chaque $\hat{t}_X$ étant $\mathbb{R}$, nous pouvons considérer tous les $\hat{t}_X$ comme une seule variable et parler d'un „temps commun“ à tous les points de $\mathbf{E}$.

DEFINITION 16.1. Soit $\mathbf{E}$ un ensemble de points en non-coïncidence entre deux événements α et β (définition 12.8), donc sur une réunion d'intervalles

$$(\alpha, \beta)_{\mathbf{E}} = \bigcup_{X \in \mathbf{E}} \Delta_{X:\mathbf{E}},$$

et soit en chaque $X \in \mathbf{E}$ un temps continu $\hat{t}_X$, défini sur $\Delta_{X:\mathbf{E}}$ de telle sorte que tous les $\hat{t}_X$ soient synchrones les uns aux autres. Une fonction $t = f(\varphi)$, définie sur la réunion $(\alpha, \beta)_{\mathbf{E}}$ sera appelée un *temps commun, associé à* $\mathbf{E}$, ou *temps commun à* $\mathbf{E}$, ou aussi: *temps-coordonnée, de* $\mathbf{E}$, lorsque pour tous les éléments φ de $(\alpha, \beta)_{\mathbf{E}}$ pour lesquels les $\hat{t}_X$ ont la même valeur, soit t, et quel que soit $t \in \mathbb{R}$, f possède cette valeur t.

Tout $\hat{t}_X$, étant la restriction $f/(\alpha, \beta)_X$ de f aux événements de $(\alpha, \beta)_X$, sera appelé *temps en* X, *constituant de* f, ainsi que *restriction de* f *à* X.

Remarques. Quel que soit $t \in \mathbb{R}$, à tout sous-ensemble

$$\Phi_{\mathbf{E}}^{t} \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \mid \varphi \in \Delta_{X:\mathbf{E}} \quad \wedge \quad \hat{t}_X(\varphi) = t \quad \wedge \quad X \in \mathbf{E}\}$$

de $(\alpha, \beta)_{\mathbf{E}}$ correspond la valeur t de f, et il est manifeste que

$$t_1 \neq t_2 \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\mathbf{E}}^{t_1} \cap \Phi_{\mathbf{E}}^{t_2} = \emptyset,$$

et que chaque valeur t est une image de $\Phi_{\mathbf{E}}^{t}$ par f.

En d'autres termes, $\Phi_{\mathbf{E}}^{t}$ est une classe d'équivalences, qui forment une partition de $(\alpha, \beta)_{\mathbf{E}}$, associée à la relation d'équivalence numérique: $(\forall X, X' \in \mathbf{E})\,[t_X = t_{X'}]$ entre les temps $\hat{t}_X$ de $\mathbf{E}$.

Soit $P \in \mathbf{E}$, $\varphi \in (\alpha, \beta)_{\mathbf{E}}$, et soit tout d'abord la partition de $\mathbf{E}$ en classes d'équivalences

$$\Phi_{\mathbf{E}}^{\varphi} = \{\psi \mid X\psi \asymp P\varphi \quad \wedge \quad X \in \mathbf{E}\}, \qquad \forall \varphi \in (\alpha, \beta)_P\,.$$

Si $t = \hat{t}_P(\varphi)$, elle est identique à

$$\Phi_{\mathbf{E}}^t = \{\psi \mid \hat{t}_X(\psi) = t \ \wedge \ X \in \mathbf{E}\}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Soit $(\alpha, \beta)_{\mathbf{E}}/\asymp$ „l'ensemble quotient" de $(\alpha, \beta)_{\mathbf{E}}$ par la relation $\asymp$ de la définition 15.2 [23]. Alors, l'application numérique

$$f : (\alpha, \beta)_{\mathbf{E}}/\asymp \ \mapsto \mathbb{R},$$

à savoir

$$t = f(\Phi_{\mathbf{E}}^t),$$

est un temps commun associé à **E**.

NOTATION 16.1. On notera $\mathscr{T}_{\mathbf{E}}(\alpha, \beta)$ l'ensemble des temps communs à un ensemble de points **E** en non-coïncidence entre α et β, et $\mathscr{T}_{\mathbf{E}}$ l'ensemble de tous les temps communs à **E**.

DEFINITION 16.2. Nous dirons qu'un temps $\hat{t}$ commun à un ensemble **E** est *métrique en un point* $X \in \mathbf{E}$ *par rapport à un autre point* $Y \in \mathbf{E}$, lorsque la restriction de t à X est un temps métrique par rapport à Y.

Nous dirons qu'un temps $\hat{t}$ commun à un ensemble **E** est un *temps métrique de* **E** lorsqu'il est en tout point de **E** métrique par rapport à tout autre point de **E**. En d'autres termes:

$$(\forall X, Y \in \mathbf{E})\, [\hat{t}/(\alpha, \beta)_X \in \mathscr{T}_{X:Y}].$$

En vertu du théorème 15.5 on a:

Théorème 16.1. *Tout temps commun à un ensemble* **E** *d'au moins deux points est un temps métrique de* **E**.

Théorème 16.2. *Soient* $\hat{t}, \hat{t}' \in \mathscr{T}_{\{P,Q\}}$ *deux temps communs à l'ensemble* $\{P, Q\}$, *définis sur le même ensemble d'événements. Alors* $\hat{t}' \circ \hat{t}^{-1}$ *est une fonction biunivoque, bicontinue et croissante de t, de la forme*

$$t' = kt + h(t), \tag{16.1}$$

où $h \in \mathscr{F}_a$ *et* $a = e(\hat{t}_{P:Q})$. *En outre* $k = a'/a$ *où* $a' = e(\hat{t}'_{P:Q})$.

[23] Donc $(\forall \varphi \in (\alpha, \beta)_{\mathbf{E}})\, [\Phi_{\mathbf{E}}^{\varphi} \subset (\alpha, \beta)_{\mathbf{E}}/\asymp]$.

Démonstration. Suivant le théorème 16.1 $t, t' \in \mathscr{C}_{P:Q}$, d'où résulte notre théorème en vertu du théorème 14.4.

Théorème 16.3. **E** *étant un ensemble de points en non-coïncidence sur un ensemble* $(\alpha, \beta)_{\mathbf{E}}$ *d'événements, soient* $\hat{t}, \hat{t}' \in \mathscr{C}_{\mathbf{E}}$, *définis sur* $(\alpha, \beta)_{\mathbf{E}}$. *Alors* $\hat{t}' \circ \hat{t}^{-1}$ *est une fonction biunivoque, bicontinue, croissante de* t, *de la forme:*

$$t' = kt + h(t),$$

où $k = a'_{XX'}/a_{XX'}$, *en notant*

$$(16.2) \qquad a_{XX'} = e(\hat{t}_{X:X'}), \quad a'_{XX'} = e(\hat{t}'_{X:X'}), \quad \forall X, X' \, [X, X' \in \mathbf{E} \quad \wedge \quad X \neq X'],$$

(k *ne dépendant pas du choix de* X *et* X') *et où* $h \in \mathscr{F}_p$, p *étant le plus grand commun diviseur des* $a_{XX'}$. *Si un tel n'existe pas, on a* $p = 0$, *donc* h *est une constante.*

Démonstration. Soient $X_1, X_2, X_3 \in \mathbf{E}$, donc, suivant la définition 16.1,

$$\hat{t}, \hat{t}' \in \mathscr{C}_{\{X_i, X_j\}}, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

D'après le théorème 16.2 on a donc (16.1), où k a les valeurs

$$k_{12} = a'_{X_1 X_2}/a_{X_1 X_2}, \qquad k_{13} = a'_{X_1 X_3}/a_{X_1 X_3}, \qquad k_{23} = a'_{X_2 X_3}/a_{X_2 X_3}.$$

On a suivant le théorème 14.7 $k_{12} = k_{13}$ et $k_{21} = k_{23}$. Or $k_{21} = k_{12}$ suivant le théorème 15,4, donc $k_{12} = k_{13} = k_{23}$ et en général $k = a'_{XX'}/a_{XX'}$, ne dépendant pas de X et X'. Tous les $a_{XX'}$ sont d'après les théorèmes 14.7 et 16.2 des périodes de h, donc si les $a_{XX'}$ ont un plus grand commun diviseur p, c'est la période fondamentale de h; si non, $p = 0$, $h = \text{const.}$

17. ENSEMBLES DE POINTS, METRIQUES CONFORMEMENT A LA LUMIERE

Supposons pour expliquer les idées, que P, Q, R soient trois points fixes dans un repère galiléen. Un temps-coordonnée $\hat{t}$ (dans le sens usuel du terme) étant défini, les nombres positifs a et b dans les expressions $P^{\cdot}(t)\,Q^{\cdot}P^{\cdot}(t+a)$ et $P^{\cdot}(t)\,R^{\cdot}P^{\cdot}(t+b)$ sont des constantes, le temps $\hat{t}$ est donc métrique en P par rapport à Q et à R. Inversement, si P, Q, R sont trois points quelconques, la circonstance qu'un temps existe en P, métrique par rapport à Q et à R, peut servir comme base pour définir le rapport constant entre les „distances“ PQ et PR, dans un sens élargi.

Cette remarque indique en quelque sorte le rôle du temps métrique — donc aussi du temps commun à un ensemble **E** (car un tel est métrique en tout point de **E**) — dans la définition des distances entre les points, ainsi que dans celle d'une classe d'ensembles de points, que nous appellerons „ensembles métriques conformément à la lumière“ ou, plus court, „L-métriques“. Si P, Q, R sont trois éléments quelconques d'un ensemble de points **E**, et si constamment $P^{\cdot}(t)\,Q^{\cdot}P^{\cdot}(t+a)$ et $P^{\cdot}(t)\,R^{\cdot}P^{\cdot}(t+b)$, ou en d'autres termes, $a = e(\hat{t}_{P:Q})$ et $b = e(\hat{t}_{P:R})$, on pourra écrire $PQ{:}PR = a{:}b$, et considérer **E** comme un tel ensemble L-métrique, en généralisant ainsi les corps rigides et en embrassant tous ceux dont la „forme“ est constante. Les droites, les plans et les espaces à trois dimensions, euclidiens, que nous définirons plus tard, seront de tels ensembles de points.

Nous donnons d'abord une définition de la distance entre un point P et les points d'un ensemble **F**, lorsqu'un temps existe en P, métrique par rapport à tous les points de **F**. Généralement **F** n'est pas un espace métrique dans le sens de la théorie des ensembles métriques. Pour que ceci ait lieu il faut se tenir à la définition 17.2.

DEFINITION 17.1. Soit $P \in \mathbf{M}$, $F \subset \mathbf{M}$, et supposons qu'un temps métrique $\hat{t} \in \mathscr{C}_{P:\mathbf{F}}$ existe en P. Alors

$$P\text{-}X \overset{\text{def}}{=} \frac{c}{2}\, e(\hat{t}_{P:X}), \qquad \forall X \in \mathbf{F},$$

où c est un nombre positif fixe, sera appelé *distance de P à X, basée sur le temps métrique $\hat{t}$ de P.*

DEFINITION 17.2. Soit **E** un ensemble de points en non-coïncidence sur un ensemble $(\alpha, \beta)_{\mathbf{E}}$ d'intervalles, et supposons qu'un temps commun $\hat{t} \in \mathscr{C}_{\mathbf{E}}$ existe. Alors, c étant un nombre positif fixe,

$$d(X, Y) \overset{\text{def}}{=} \frac{c}{2} \cdot e(\hat{t}_{X:Y}), \qquad \forall X, Y \in \mathbf{E}, \tag{17.1}$$

sera appelé *distance de X à Y, basée sur le temps commun $\hat{t}$,* et *défini sur* **E**. Le nombre c sera appelé *facteur fondamental.*

Tout couple $\{X, Y\} \subset \mathbf{E}$, tel que $d(X, Y) = 1$ sera appelé *étalon de distance.*

DEFINITION 17.3. Un ensemble **E** de points, sur lequel un temps commun, soit $\hat{t} \in \mathscr{C}_{\mathbf{E}}(\alpha, \beta)$, existe et une distance basée sur $\hat{t}$ est définie, sera dit *métrique conformément à la lumière*, ou plus court, *L-métrique*, *sur* $(\alpha, \beta)_{\mathbf{E}}$.

NOTATION 17.1. L'ensemble des ensembles L-métriques sur tous les ensembles d'intervalles dont les bouts communs sont α et β, sera noté $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$. L'ensemble des ensembles L-métriques sera noté $\mathcal{M}$. Au lieu de $\mathcal{M}(\omega, \omega')$ on écrira plus court $\mathcal{M}_\infty$.

Au lieu de $d(X, Y)$ on écrira aussi $\overline{XY}$.

Remarques. La distance d de la définition 17.2 est une application de $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$ dans $\mathbb{R}^+$. Donc, si elle existe sur un ensemble $\mathbf{E}$, la „distance" de la définition 17.1, en tant qu'application, quel que soit $X \in \mathbf{E}$, de l'ensemble $\{X\} \times \mathbf{E}$ dans $\mathbb{R}^+$, existe aussi, étant la restriction de d à cet ensemble, c.-à-d. $(\forall Y \in \mathbf{E})\,[X\text{-}Y = d(X, Y)]$. – Si $\langle X, Y \rangle$ est un étalon, on a $e(\hat{t}_{X:Y}) = \dfrac{2}{c}$. Un étalon peut ne pas exister dans $\mathbf{E}$.

Théorème 17.1. *Pour qu'un ensemble* $\mathbf{E}$ *soit L-métrique sur un certain ensemble* $(\alpha, \beta)_{\mathbf{E}}$ *d'événements, il faut et il suffit que* $\mathbf{E}$ *possède sur cet ensemble un temps commun* $\hat{t} \in \mathcal{T}_{\mathbf{E}}(\alpha, \beta)$.

Théorème 17.2. *Tout ensemble* $\mathbf{E}$ *L-métrique sur un ensemble* $(\alpha, \beta)_{\mathbf{E}}$ *est un espace métrique, où la distance, qui définit cet espace, est pour*

$\forall X, Y \in \mathbf{E}, \quad \overline{XY} = \dfrac{c}{2}\, e(\hat{t}_{X:Y}).$

Démonstration. Montrons que $\overline{XY}$ est une distance dans le sens de la théorie des ensembles métriques.

1. $\overline{XY} = 0 \Leftrightarrow X = Y$, puisque les points de $\mathbf{E}$ sont non-coïncidents.

2. $\overline{XY} = \overline{YX}$, suivant le théorème 15.4.

3. Soit $Z \in \mathbf{E}$, et notons $\overline{XY} = \dfrac{c}{2} \cdot p, \quad \overline{YZ} = \dfrac{c}{2} \cdot q, \quad \overline{XZ} = \dfrac{c}{2} \cdot r.$

Suivant les définitions 14.1 et 15.1 on a

$$X^{\cdot}(t)\, Y^{\cdot}\!\left(t + \frac{p}{2}\right) X^{\cdot}(t + p),$$

d'où nous retenons $X^{\cdot}(t)\, Y^{\cdot}\!\left(t + \dfrac{p}{2}\right)$. De même

$$Y^{\cdot}(t)\, Z^{\cdot}\!\left(t + \frac{q}{2}\right) \quad \text{et} \quad X^{\cdot}(t)\, Z^{\cdot}\!\left(\frac{r}{2}\right).$$

Or, $X^{\cdot}(t)\,Y^{\cdot}Z^{\cdot} \succcurlyeq X^{\cdot}(t)\,Z^{\cdot}$, donc

$$X^{\cdot}(t)\,Y^{\cdot}\left(t+\frac{p}{2}\right)Z^{\cdot}\left(t+\frac{p}{2}+\frac{q}{2}\right) \succcurlyeq X^{\cdot}(t)\,Z^{\cdot}\left(t+\frac{r}{2}\right),$$

d'où $p+q \geqslant r$ suivant la définition 11.1. Donc $\overline{XY}+\overline{YZ} \geqslant \overline{XZ}$. Ainsi toutes les trois conditions qui déterminent la distance dans un espace métrique sont remplies.

Théorème 17.3. *Soient P, Q, R, S ($R \neq S$) quatre point d'un ensemble L-métrique* **E**. *Le rapport entre les distances, soit $\overline{PQ}/\overline{RS}$, est indépendant du facteur fondamental c, ainsi que du temps commun sur lequel les distances sont basées.*

Démonstration. Selon 17.1 $\overline{PQ}/\overline{PR}$ est indépendant de c. Soient $\hat{t}, \hat{t}' \in \mathscr{T}_{\mathbf{E}}$, définis sur le même ensemble $(\alpha, \beta)_{\mathbf{E}}$. Désignons les distances basées sur $\hat{t}$ par $\overline{XX'}_t$ et celles basées sur $\hat{t}'$ par $\overline{XX'}_{t'}$. On a selon la définition 17.3, en retenant la notation du théorème 16.3:

$$\overline{PQ}_t = \frac{c}{2}\,a_{PQ}, \quad \overline{RS}_t = \frac{c}{2}\,a_{RS} \neq 0, \quad \text{donc} \quad \frac{\overline{PQ}_t}{\overline{RS}_t} = \frac{a_{PQ}}{a_{RS}},$$

et de même avec t', en se servant de la notation analogue:

$$\overline{PQ}_{t'} = \frac{c}{2}\,a'_{PQ} \quad \overline{RS}_{t'} = \frac{c}{2}\,a'_{RS} \neq 0, \text{ donc } \frac{\overline{PQ}_{t'}}{\overline{RS}_{t'}} = \frac{a'_{PQ}}{a'_{RS}}.$$

Or, suivant le théorème 16.3, $a'_{PQ}/a_{PQ} = k$, $a'_{RS}/a_{RS} = k$, d'où

$$\frac{a'_{PQ}}{a'_{RS}} = \frac{a_{PQ}}{a_{RS}}, \quad \text{donc} \quad \frac{\overline{PQ}_{t'}}{\overline{RS}_{t'}} = \frac{\overline{PQ}_t}{\overline{RS}_t}.$$

Théorème 17.4. *Soit* **A** *un ensemble contenant plus d'un point. Alors*

$$\forall \mathbf{A}\, \forall \mathbf{E}\, [\mathbf{A} \subset \mathbf{E} \;\wedge\; \mathbf{E} \in \mathscr{M}(\alpha, \beta) \Rightarrow \mathbf{A} \in \mathscr{M}(\alpha, \beta)].$$

Théorème 17.5. *Soit* $\mathbf{E} \in \mathscr{M}(\alpha, \beta)$, $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbf{E}}$ *et* $X, Y \in \mathbf{E}$ *quelconques. Soit* $X\varphi Y\psi$ *avec* $\forall \varphi \in (\alpha, \beta)_X$. *Alors* $\hat{t}(\varphi)$ *et* $\hat{t}(\psi)$ *étant les instants de* $\hat{t}$ *où* φ *et* ψ *ont lieu, on a* $\hat{t}(\varphi) < \hat{t}(\psi)$, *à savoir*

$$\overline{XY} = c[\hat{t}(\psi) - \hat{t}(\varphi)]. \tag{17.2}$$

Théorème 17.6. *Soit* $\mathbf{E} \in \mathscr{M}(\alpha, \beta)$, *et supposons que* $\mathbf{E}$ *contient au moins un point d'accumulation constante dans* $(\alpha, \beta)_{\mathbf{E}}$. *Alors, quels que soient* $\hat{t}, \hat{t}' \in \mathscr{T}_{\mathbf{E}}$, *définis sur* $(\alpha, \beta)_{\mathbf{E}}$, *on a*

$$t' = kt + h, \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

où k, h *sont des constantes.*

Démonstration. Si $Q \in \mathbf{E}$ est un point d'accumulation en un instant $\psi \in (\alpha, \beta)_{\mathbf{E}} \cap \Sigma_Q$, il l'est constamment dans $(\alpha, \beta)_Q$, et il existe une suite

$$(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \to Q$$

de points de $\mathbf{E}$, donc $\overline{QP_n} \to 0$ quand $n \to \infty$. Par conséquent le théorème 16.3 s'applique et on a $a_{QP_n} \to 0$. Donc les $a_{XX'}$ n'ont pas de plus grand commun diviseur, h est donc une constante.

Les définitions suivantes se rattachent aux définitions 12.9, 12.10.

DEFINITION 17.4. Soit $\mathbf{A} \in \mathscr{M}$, $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbf{A}}$, t une valeur de $\hat{t}$, et $\mathbf{B} \subset \mathbf{M}$, quelconques. Alors

$$(P \mathrel{\dot{\in}} \mathbf{A})\, t \overset{\text{def}}{=} (\exists X \in \mathbf{A})\ \exists t\ [(X \doteq P)\, t],$$

$$(\mathbf{B} \mathrel{\dot{\subset}} \mathbf{A})\, t \overset{\text{def}}{=} (\forall Y \in \mathbf{B})\, (\exists X \in \mathbf{A})\ \exists t\ [(X \doteq Y)\, t],$$

$$(\mathbf{A} \mathrel{\dot{\subset}} \mathbf{B})\, t \overset{\text{def}}{=} (\forall X \in \mathbf{A})\, (\exists Y \in \mathbf{B})\ \exists t\ [(X \doteq Y)\, t],$$

$$(\mathbf{A} \doteq \mathbf{B})\, t \overset{\text{def}}{=} (\mathbf{A} \mathrel{\dot{\subset}} \mathbf{B})\, t \ \wedge\ (\mathbf{B} \mathrel{\dot{\subset}} \mathbf{A})\, t.$$

Nous dirons respectivement qu'*à l'instant* t du temps $\hat{t}$ de $\mathbf{A}$, le point P *est situé dans* $\mathbf{A}$, l'ensemble $\mathbf{B}$ *est situé dans* $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}$ *est situé dans* $\mathbf{B}$, et que $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ *sont situés l'un sur l'autre*, ou qu'ils *coïncident à l'instant* t.

La relation $(\mathbf{B} \mathrel{\dot{\subset}} \mathbf{A})\, t$ définit une application de $\mathbf{B}$ dans $\mathbf{A}$, à savoir:

DEFINITION 17.5. $f_t \overset{\text{def}}{=} \{\langle Y, X\rangle \mid (\forall Y \in \mathbf{B})\ (\exists X \in \mathbf{A})\ [(Y \doteq X)\, t]$.

Nous appellerons f_t *application de situation instantanée* de $\mathbf{B}$ dans $\mathbf{A}$ à l'instant t du temps $\hat{t}$ de $\mathbf{A}$.

DEFINITION 17.6. Soit $\mathbf{A} \in \mathscr{M}$, $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbf{A}}$, T un intervalle des valeurs de $\hat{t}$ et $\mathbf{B} \subset \mathbf{M}$, quelconques. Alors

$$(P \mathrel{\dot{\in}} \mathbf{A})\,\mathrm{T} \overset{\text{def}}{=} (\forall t \in \mathrm{T})\,[(P \mathrel{\dot{\in}} \mathbf{A})\,t],$$

$$(\mathbf{B} \mathrel{\dot{\subset}} \mathbf{A})\,\mathrm{T} \overset{\text{def}}{=} (\forall t \in \mathrm{T})\,[(\mathbf{B} \mathrel{\dot{\subset}} \mathbf{A})\,t],$$

$$(\mathbf{A} \mathrel{\dot{\subset}} \mathbf{B})\,\mathrm{T} \overset{\text{def}}{=} (\forall t \in \mathrm{T})\,[(\mathbf{A} \mathrel{\dot{\subset}} \mathbf{B})\,t],$$

$$(\mathbf{A} \doteq \mathbf{B})\,\mathrm{T} \overset{\text{def}}{=} (\forall t \in \mathrm{T})\,[(\mathbf{A} \doteq \mathbf{B})\,t].$$

Si $\mathrm{T} = \mathbb{R}$, on écrira simplement $P \mathrel{\dot{\in}} \mathbf{A}$, $\mathbf{B} \mathrel{\dot{\subset}} \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \mathrel{\dot{\subset}} \mathbf{B}$ et $\mathbf{A} \doteq \mathbf{B}$. En supposant que $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbf{A}}$, on a par exemple les théorèmes suivants:

Théorème 17.7. $(P \mathrel{\dot{\in}} \mathbf{A})\,t \;\Rightarrow\; (P \mathrel{\dot{\in}} \mathbf{A})\varphi \;\wedge\; t = \hat{t}(\varphi).$

$$(\mathbf{B} \mathrel{\dot{\subset}} \mathbf{A})\,\mathrm{T} \;\Rightarrow\; (\mathbf{B} \mathrel{\dot{\subset}} \mathbf{A})\,(\alpha, \beta)_{\mathbf{A}} \;\wedge\; \mathrm{T} = \hat{t}\,((\alpha, \beta)_{\mathbf{A}}).$$

Théorème 17.8. $(\mathbf{B} \mathrel{\dot{\subset}} \mathbf{A})\,t \;\Rightarrow\; (\forall Y \in \mathbf{B})\,[(Y \mathrel{\dot{\in}} \mathbf{A})\,t],$

$$(\mathbf{A} \mathrel{\dot{\subset}} \mathbf{B})\,t \;\Rightarrow\; (\forall X \in \mathbf{A})\,[(X \mathrel{\dot{\in}} \mathbf{B})\,t],$$

Théorème 17.9. $(\mathbf{B} \mathrel{\dot{\subset}} \mathbf{A})\,t \;\Rightarrow\; \exists \mathbf{A}'\,[\mathbf{A}' \subset \mathbf{A} \;\wedge\; (\mathbf{B} \doteq \mathbf{A}')\,t].$

CHAPITRE IV

ENSEMBLES RECTILIGNES DE POINTS MATERIELS

18. ENSEMBLES RECTILIGNES ET ENSEMBLES S'INTERCALANT DANS LES ENSEMBLES RECTILIGNES

Il s'agit ici de certains ensembles de points matériels en non-coïncidence sur une réunion donnée d'intervalles maximaux de non-coïncidence (définition 12.8). Soit **E** un tel ensemble, en non-coïncidence sur $(\alpha, \beta)_{\mathbf{E}}$. Rappelons que

$$(\alpha, \beta)_{\mathbf{E}} = \bigcup_{X \in \mathbf{E}} \Delta_X ,$$

où $\Delta_X = (\alpha, \beta)_X \in \mathscr{I}_{X:\mathbf{E}}$.

DEFINITION 18.1. Soient A, B, C trois points en non-coïncidence sur $(\alpha, \beta)_{\{A, B, C\}}$.

$$(18.1) \qquad (A\text{-}B\text{-}C)(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \langle A\text{-}B\text{-}\rangle C(\alpha, \beta)_C \quad \wedge \quad \langle C\text{-}B\text{-}\rangle A(\alpha, \beta)_A .$$

L'ensemble $\{A, B, C\}$ sera appelé un *triple rectiligne de points, défini sur* $(\alpha, \beta)_{\{A, B, C\}}$, et on dira que B est *entre* A *et* C, constamment dans (α, β).

NOTATION 18.1. L'ensemble de tous les triples rectilignes de points, définis sur des réunions d'intervalles aux mêmes bouts α et β, sera noté $\mathscr{R}_3(\alpha, \beta)$. — Si la relation (18.1) est permanente ou si (α, β) est sousentendu, on notera simplement A-B-C.

DEFINITION 18.2. Si $\mathbf{A} \in \mathscr{N}(\alpha, \beta)$, et si

$$(\forall X, Y, Z \in \mathbf{A})[\{X, Y, Z\} \in \mathscr{R}_3(\alpha, \beta)],$$

on dira que l'ensemble **A** est *rectiligne sur* $(\alpha, \beta)_{\mathbf{A}}$, ou que c'est un *ensemble rectiligne de points, défini sur* $(\alpha, \beta)_{\mathbf{A}}$. Si $(\alpha, \beta) = (\omega, \omega')$, l'ensemble rectiligne sera dit *permanent*.

Remarque. En d'autres termes, **A** est un ensemble de points en non-coïncidence sur une réunion d'intervalles maximaux de non-coïncidence, aux mêmes bouts α et β, tel que trois points quelconques de **A** forment un triple rectiligne de points, défini sur (α, β).

NOTATION 18.2. α et β étant donnés, l'ensemble de tous les ensembles rectilignes de points, définis sur des réunions d'intervalles aux mêmes bouts α, β sera noté $\mathscr{R}(\alpha, \beta)$. L'ensemble de tous les ensembles rectilignes sera noté $\mathscr{R}$.

Notons les deux théorèmes suivants:

Théorème 18.1. *Tout sous-ensemble* **B** *d'un ensemble rectiligne* **A**, *et qui contient au moins trois points, est également un ensemble rectiligne:*

$$\mathbf{B} \subset \mathbf{A} \in \mathscr{R}(\alpha, \beta) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} \in \mathscr{R}(\alpha, \beta).$$

Théorème 18.2. $\{A, B, C\} \in \mathscr{R}_3(\alpha, \beta) \quad \Leftrightarrow \quad \{A, B, C\} \in \mathscr{R}(\alpha, \beta)$.

La relation suivante est essentielle dans l'étude des ensembles rectilignes. Nous abordons d'abord la „position rectiligne" d'un point par rapport à un couple de points.

DEFINITION 18.3. Si un point S satisfait à l'instant de $\varphi \in \Sigma_S$ (ou à l'instant $t_0 = \hat{t}(\varphi)$ d'un temps $\hat{t} \in \mathscr{T}_S$) l'un des trois couples d'alignements suivants:

$$\begin{aligned} &\langle P^{\cdot}\text{-}Q^{\cdot}\rangle S\varphi \quad \wedge \quad \langle S\varphi Q^{\cdot}\text{-}\rangle P^{\cdot}, \\ (18.2) \qquad &\langle S\varphi P^{\cdot}\text{-}\rangle Q^{\cdot} \quad \wedge \quad \langle Q^{\cdot}\text{-}P^{\cdot}\rangle S\varphi, \\ &\langle P^{\cdot}\text{-}S\varphi\text{-}\rangle Q^{\cdot} \quad \wedge \quad \langle Q^{\cdot}\text{-}S\varphi\text{-}\rangle P^{\cdot}, \end{aligned}$$

nous dirons que S *s'intercale à l'instant de* φ (ou à l'instant t_0) *dans le couple* $\{P, Q\}$, ce que nous noterons:

$$(S \mathrel{\ddot{\in}} \{P, Q\})\,\varphi \qquad \text{ou} \qquad (S \mathrel{\ddot{\in}} \{P, Q\})\,t_0.$$

Pour le troisième couple d'alignements (18.2) nous dirons aussi que S *s'intercale à l'instant de* φ (ou à l'instant t_0) *entre* P *et* Q, et noterons:

$$P^{\cdot}\text{-}S\varphi\text{-}Q^{\cdot} \qquad \text{ou} \qquad P^{\cdot}\text{-}S^{\cdot}(t_0)\text{-}Q^{\cdot}.$$

Remarque. Les deux alignements de chacun des trois couples de relations (18.2) sont inverses l'un à l'autre (définition 4.2).

DEFINITION 18.4. Soit $\mathbf{A} \in \mathscr{R}(\alpha, \beta)$. Si

$$(\forall P, Q \in \mathbf{A})[(S \ddot{\in} \{P, Q\})\varphi]$$

et si dans (18.2) les événements sousentendus dans $P^{\cdot}$ et $Q^{\cdot}$ appartiennent à $(\alpha, \beta)_{\mathbf{A}}$, nous dirons que le point S *s'intercale dans* $\mathbf{A}$ *à l'instant de* φ (ou à l'instant t_0) et noterons:

$$(S \ddot{\in} \mathbf{A})\varphi \qquad \text{ou} \qquad (S \ddot{\in} \mathbf{A})t_0 .$$

Si alors $(\exists P, Q \in \mathbf{A})[P^{\cdot}\text{-}S\varphi\text{-}Q^{\cdot}]$, nous dirons aussi que *à l'instant de* φ (ou à l'instant t_0) S *s'intercale dans* $\mathbf{A}$ *entre* P *et* Q.

NOTATION 18.3. Si S s'intercale dans $\{P, Q\}$ constamment dans un intervalle Δ_S, on notera $(S \ddot{\in} \{P, Q\})\Delta_S$.

Si S s'intercale entre P et Q constamment dans Δ_S, on notera $P\text{-}S\Delta_S\text{-}Q$.

Si S s'intercale dans l'ensemble rectiligne $\mathbf{A}$, défini sur $(\alpha, \beta)_{\mathbf{A}}$, constamment dans Δ_S, on notera $(S \ddot{\in} \mathbf{A})\Delta_S$.

Si ces relations sont permanentes, ou si l'intervalle Δ_S est sous--entendu, on notera simplement $S \ddot{\in} \mathbf{A}$ et $P\text{-}S\text{-}Q$.

Les trois théorèmes suivants sont des conséquences immédiates des définitions précédentes.

Théorème 18.3.

$$\{A, B, C\} \in \mathscr{R}_3(\alpha, \beta) \Rightarrow (A \ddot{\in} \{B, C\})(\alpha, \beta)_A \;\wedge\; (A \ddot{\in} \{A, B, C\})(\alpha, \beta)_A .$$

Théorème 18.4. $(A\text{-}B\text{-}C)(\alpha, \beta) \Leftrightarrow A\text{-}B(\alpha, \beta)_B\text{-}C.$

$$(A\text{-}B\text{-}C)(\omega, \omega') \Leftrightarrow A\text{-}B(\omega, \omega')\text{-}C \equiv A\text{-}B\text{-}C.$$

Théorème 18.5. $(\forall S \in \mathbf{A})[\mathbf{A} \in \mathscr{R} \Rightarrow S \ddot{\in} \mathbf{A}]$.

Théorème 18.6. *Soit* $\mathbf{A} \in \mathscr{R}(\alpha, \beta)$ *et* $S \in \mathbf{M}$. *Alors*

$$(\exists P, Q \in \mathbf{A})\exists\varphi(\forall X, Y \in \mathbf{A})[(S \ddot{\in} \{P, Q\})\varphi \Rightarrow (S \ddot{\in} \{X, Y\})\varphi \Rightarrow (S \ddot{\in} \mathbf{A})\varphi].$$

Démonstration. $(S \ddot{\in} \{P, Q\})\varphi$ implique selon la définition 18.3 l'une des trois propositions (18.2), par exemple

$$\langle P^{\cdot}\text{-}Q^{\cdot}\rangle S\varphi \;\wedge\; \langle S\varphi Q^{\cdot}\text{-}\rangle P^{\cdot}. \tag{18.3}$$

D'après la définition 18.2 $\forall X\,[\{P,Q,X\} \in \mathscr{R}_3(\alpha,\beta)]$, donc

(18.4) $$P\text{-}Q\text{-}X \quad \vee \quad P\text{-}X\text{-}Q \quad \vee \quad X\text{-}P\text{-}Q \quad \text{sur} \quad (\alpha,\beta)_{\{P,Q,X\}}\,,$$

soit par exemple $(P\text{-}X\text{-}Q)\,(\alpha,\beta)$, ce qui veut dire

$$\langle P\text{-}X\text{-}\rangle Q\,(\alpha,\beta)_Q \quad \wedge \quad \langle Q\text{-}X\text{-}\rangle P\,(\alpha,\beta)_P\,,$$

et en particulier

(18.5) $$\langle P^{\cdot}\text{-}X^{\cdot}\text{-}\rangle Q^{\cdot} \quad \wedge \quad \langle Q^{\cdot}\text{-}X^{\cdot}\text{-}\rangle P^{\cdot}$$

avec les mêmes événements en P et Q, que ceux de (18.3). En vertu de l'axiome III 5 les propositions (18.3) et (18.5) impliquent $\langle P^{\cdot}\text{-}X^{\cdot}\rangle S\varphi$, donc selon la définition 18.3 $(S \ddot{\in} \{P,X\})\,\varphi$. Il en est de même dans tous les autres cas de (18.2) et (18.4), et par conséquent

$$(S \ddot{\in} \{P,Q\})\,\varphi \quad \wedge \quad [\{P,Q,X\} \in \mathscr{R}_3(\alpha,\beta)] \quad \Rightarrow \quad (S \ddot{\in} \{P,X\})\,\varphi.$$

En répétant le même procédé on obtient $(S \ddot{\in} \{X,Y\})\,\varphi$. La seconde implication du théorème exprime la définition 18.4.

Théorème 18.7. *Soit* $\mathbf{A} \in \mathscr{R}(\alpha,\beta)$ *et* $S \in \mathbf{M}$. *Alors*

$$(\forall\varphi \in (\alpha,\beta)_{\mathbf{A}})\,[(S \dot{\in} \mathbf{A})\,\varphi \quad \Rightarrow \quad (S \ddot{\in} \mathbf{A})\,\varphi].$$

Démonstration. Selon la définition 12.9 $(\exists P \in \mathbf{A})\,[(P \doteq S)\,\varphi]$, ce qui signifie $P\varphi S\varphi P\varphi$ (axiome III 1). Soit $Q \in \mathbf{A}$, $P \neq Q$. Selon la définition 18.2 il est non$(P \doteq Q)\,\varphi$, donc en vertu du théorème 7.11,

$$\langle S\varphi P\varphi\text{-}\rangle Q^{\cdot} \quad \wedge \quad \langle Q^{\cdot}\text{-}P\varphi\rangle S\varphi,$$

ce qui veut dire $(S \ddot{\in} \{P,Q\})\,\varphi$. Or $\varphi \in (\alpha,\beta)_P$ et par conséquent il est dans $\varphi Q\psi$ aussi $\psi \in (\alpha,\beta)_Q$. Donc, par la définition 18.4, $(S \ddot{\in} \mathbf{A})\,\varphi$.

Théorème 18.8. $P\text{-}Q\psi\text{-}R \;\Rightarrow\; R\text{-}Q\psi\text{-}P.$

$$P\text{-}Q\text{-}R \;\Rightarrow\; R\text{-}Q\text{-}P.$$

D'après les définitions 18.1 à 18.3 on a:

Théorème 18.9. *Soient* P, Q, R *trois points distincts de* $\mathbf{A}$. *Alors,*

$$\mathbf{A} \in \mathscr{R}(\alpha,\beta) \quad \Rightarrow \quad P\text{-}Q\text{-}R \quad \vee \quad Q\text{-}R\text{-}P \quad \vee \quad R\text{-}P\text{-}Q.$$

Théorème 18.10. $P\text{-}Q\text{-}R \Rightarrow \text{non}\,(Q\text{-}R\text{-}P)$.

Démonstration. En vertu du théorème 7.19 on a pour φ' quelconque

$$\langle P\varphi\text{-}Q\varkappa\text{-}\rangle R\psi \Rightarrow \text{non}\,\langle Q\varkappa\text{-}R\psi\text{-}\rangle P\varphi',$$

donc aussi, pour ψ' quelconque,

$$\langle R\psi\text{-}Q\varkappa\text{-}\rangle P\varphi \Rightarrow \text{non}\,\langle Q\varkappa\text{-}P\varphi\text{-}\rangle R\psi',$$

quels que soient $\varphi, \varkappa, \psi \in (\alpha, \beta)_{\mathbf{A}}$. Donc, selon la définition 18.1,

$$(P\text{-}Q\text{-}R)\,(\alpha, \beta)_{\{P,\,Q,\,R\}} \Rightarrow \text{non}\,(Q\text{-}R\text{-}P)\,(\alpha, \beta)_{\{P,\,Q,\,R\}},$$

d'où le théorème.

Théorème 18.11. *Parmi trois points distincts quelconques de $\mathbf{A} \in \mathscr{R}(\alpha, \beta)$ l'un et un seul est entre les deux autres, et cela constamment dans (α, β).*

En vertu de l'axiome III 5 et du théorème 7.21 on a:

Théorème 18.12. *Soient $A, B, C, D \in \mathbf{A} \in \mathscr{R}(\alpha, \beta)$. Alors*

$$\begin{aligned}
&A\text{-}B\text{-}C \wedge B\text{-}C\text{-}D \Rightarrow A\text{-}C\text{-}D,\\
&A\text{-}B\text{-}C \wedge A\text{-}B\text{-}D \Rightarrow A\text{-}C\text{-}D \vee A\text{-}D\text{-}C,\\
&A\text{-}B\text{-}D \wedge A\text{-}C\text{-}D \Rightarrow A\text{-}B\text{-}C \vee A\text{-}C\text{-}B,\\
&A\text{-}C\text{-}D \wedge B\text{-}C\text{-}D \Rightarrow A\text{-}B\text{-}C \vee B\text{-}A\text{-}C,\\
\textit{et}\quad &A\text{-}B\text{-}C \wedge A\text{-}C\text{-}D \Rightarrow A\text{-}B\text{-}D \wedge B\text{-}C\text{-}D.
\end{aligned}$$

Théorème 18.13. *Quel que soit $\{P, Q, U, V\} \in \mathscr{N}(\alpha, \beta)$, on a:*

$$(P, Q \ddot{\in} \{U, V\})\,(\alpha, \beta)_{\{P,\,Q\}} \Leftrightarrow (U, V \ddot{\in} \{P, Q\})\,(\alpha, \beta)_{\{U,\,V\}}.$$

Démonstration. On a $(P \ddot{\in} \{U, V\})\varphi$ pour $\forall\varphi \in (\alpha, \beta)_P$, et $(Q \ddot{\in} \{U, V\})\psi$ pour $\forall\psi \in (\alpha, \beta)_Q$. Donc, selon la définition 18.3 on a un couple d'alignements pour P, et un autre pour Q. De ces deux couples résulte suivant l'axiome III 5 et le théorème 7.21 un couple d'alignements avec les points P, Q et U, donc $(U \ddot{\in} \{P, Q\})\varkappa$, pour $\forall\varkappa \in (\alpha, \beta)_U$. Par conséquent on a $(U \ddot{\in} \{P, Q\})\,(\alpha, \beta)_U$. De la même manière on a $(V \ddot{\in} \{P, Q\})\,(\alpha, \beta)_V$.

Théorème 18.14. *Quels que soient* $\{A, P, Q, U, V\} \in \mathcal{N}(\alpha, \beta)$ *et* $\varphi_A \in (\alpha, \beta)_A$, *on a:*

$$(A \ddot{\in} \{P, Q\})\varphi_A \quad \wedge \quad (P, Q \ddot{\in} \{U, V\})(\alpha, \beta)_{\{P, Q\}} \quad \Rightarrow \quad (A \ddot{\in} \{U, V\})\varphi_A .$$

Démonstration. Selon la définition 18.3 un couple d'alignements est supposé pour A avec P et Q à l'instant de φ_A, et un autre pour P, et de même pour Q, avec U et V, dans tout l'intervalle (α, β). D'après le théorème 18.12 on a également un couple d'alignements pour U avec P et Q dans tout l'intervalle $(\alpha, \beta)_U$. Il en résulte suivant l'axiome III 5 et le théorème 7.21 d'abord un couple d'alignements pour A avec P et U à l'instant de φ_A et ensuite un couple pour A avec U et V au même instant, donc $A \ddot{\in} \{U, V\}\varphi_A$.

DEFINITION 18.5. Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{R}(\alpha, \beta)$, et $\mathbf{B}$ tel que

$$(\forall Y \in \mathbf{B})\ [Y\alpha \quad \wedge \quad Y\beta].$$

Alors

$$(\mathbf{B} \ddot{\in} \mathbf{A})(\alpha, \beta) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad (\forall Y \in \mathbf{B})[(Y \ddot{\in} \mathbf{A})(\alpha, \beta)_Y].$$

On dira que *l'ensemble* $\mathbf{B}$ *s'intercale dans l'ensemble rectiligne* $\mathbf{A}$, *constamment sur la réunion d'intervalles* $(\alpha, \beta)_{\mathbf{B}}$.

DEFINITION 18.6.

$$(\mathbf{A} \doteqdot \mathbf{B})(\alpha, \beta) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad (\mathbf{A} \ddot{\subset} \mathbf{B})(\alpha, \beta) \quad \wedge \quad (\mathbf{B} \ddot{\subset} \mathbf{A})(\alpha, \beta).$$

On dira que les ensembles rectilignes $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ *s'intercalent l'un dans l'autre.*

NOTATION 18.4. On écrira également $(\mathbf{A} \ddot{\supset} \mathbf{B})(\alpha, \beta)$ au lieu de $(\mathbf{B} \ddot{\subset} \mathbf{A})(\alpha, \beta)$. Si la réunion des intervalles est sous-entendue ou si la relation est permanente on notera tout court $\mathbf{B} \ddot{\subset} \mathbf{A}$, etc.

Le théorème suivant résulte du précédent.

Théorème 18.15. *Quels qui soient* P, φ *et* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{R}(\alpha, \beta)$, *on a:*

$$\mathbf{A} \doteqdot \mathbf{B} \quad \wedge \quad (P \ddot{\in} \mathbf{A})\varphi \quad \wedge \quad \varphi \in \Sigma_P \cap (\alpha, \beta)_{\mathbf{A}} \quad \Rightarrow \quad (P \ddot{\in} \mathbf{B})\varphi.$$

Théorème 18.16.

$$\mathbf{A} \in \mathcal{R}(\alpha, \beta) \quad \wedge \quad (\mathbf{B} \ddot{\subset} \mathbf{A})(\alpha, \beta) \quad \wedge \quad \mathbf{B} \in \mathcal{N}(\alpha, \beta) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \mathbf{B} \in \mathcal{R}(\alpha, \beta) \quad \wedge \quad (\mathbf{A} \ddot{\subset} \mathbf{B})(\alpha, \beta).$$

Démonstration. Soit $\{X_1, X_2, X_3\} \subset \mathbf{B}$. Selon la définition 18.5 on a:

$$(\forall n \in \{1, 2, 3\})\ \forall X_n\, [X_n \in \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad X_n \ddot{\in} \mathbf{A}],$$

donc, d'après le théorème 18.6,

$$(\forall P, Q \in \mathbf{A})\ [(X_n \ddot{\in} \{P, Q\})\,(\alpha, \beta)_{X_n}].$$

Selon la définition 18.3

$$(X_1 \ddot{\in} \{P, Q\})\,(\alpha, \beta)_{X_1} \quad \text{et} \quad (X_2 \ddot{\in} \{P, Q\})\,(\alpha, \beta)_{X_2}$$

signifient qu'on a à la fois quatre alignements tels que (18.2), par exemple

$$\langle X_1^{\cdot} P^{\cdot}\text{-}\rangle Q^{\cdot} \quad \wedge \quad \langle X_2^{\cdot} P^{\cdot}\text{-}\rangle Q^{\cdot}, \tag{18.6}$$

constamment dans $(\alpha, \beta)_Q$, ainsi que les deux alignements inverses. Mais de (18.6) et du fait que $\mathbf{B} \in \mathcal{N}(\alpha, \beta)$ résulte

$$\langle X_1^{\cdot}\text{-}X_2^{\cdot}\rangle P^{\cdot} \quad \vee \quad \langle X_2^{\cdot}\text{-}X_1^{\cdot}\rangle P^{\cdot},$$

ainsi que les alignements inverses, constamment dans $(\alpha, \beta)_P$, donc

$$(P \ddot{\in} \{X_1, X_2\})\,(\alpha, \beta)_P, \qquad \forall P \in \mathbf{A}, \tag{18.7}$$

De même

$$(P \ddot{\in} \{X_1, X_3\})\,(\alpha, \beta)_P, \qquad \forall P \in \mathbf{A}. \tag{18.8}$$

De (18.7) et (18.8) résulte par un raisonnement semblable,

$$(X_1 \ddot{\in} \{X_2, X_3\})\,(\alpha, \beta)_{X_1}, \qquad \forall X_1 \in \mathbf{B}.$$

Comme $\mathbf{B} \in \mathcal{N}(\alpha, \beta)$, il en résulte d'après la définition 18.2, $\mathbf{B} \in \mathcal{R}(\alpha, \beta)$.

Dans (18.7) et (18.8) on a $\forall P \in \mathbf{A}$, donc selon la définition 18.2, $(\mathbf{A} \ddot{\subset} \mathbf{B})\,(\alpha, \beta)$.

Comme $\mathcal{R}(\alpha, \beta) \subset \mathcal{N}(\alpha, \beta)$, on a:

Théorème 18.17. $(\mathbf{B} \ddot{\subset} \mathbf{A})\,(\alpha, \beta) \ \wedge\ \mathbf{B} \in \mathcal{R}(\alpha, \beta) \ \Rightarrow\ (\mathbf{A} \ddot{\subset} \mathbf{B})\,(\alpha, \beta)$.

Théorème 18.18. *Soient* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{R}(\alpha, \beta)$. *Alors*

$$(\exists P, Q \in \mathbf{A})\,[(P, Q \ddot{\in} \mathbf{B})\,(\alpha, \beta)] \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} \ddot{=} \mathbf{B})\,(\alpha, \beta).$$

Démonstration. En vertu du théorème 18.6 on a pour $\forall U, V \in \mathbf{B}$,

$$(P \ddot{\in} \{U, V\})\,(\alpha, \beta)_P \quad \wedge \quad (Q \ddot{\in} \{U, V\})\,(\alpha, \beta)_Q,$$

donc d'après le théorème 18.13,

$$(U \ddot{\in} \{P, Q\})(\alpha, \beta)_U \quad \wedge \quad (V \ddot{\in} \{P, Q\})(\alpha, \beta)_V,$$

et d'après le théorème 18.6,

$$(U \ddot{\in} \mathbf{A})(\alpha, \beta)_U \quad \wedge \quad (V \ddot{\in} \mathbf{A})(\alpha, \beta)_V,$$

ayant lieu pour $\forall U, V \in \mathbf{B}$. Donc, d'après la définition 18.5 $(\mathbf{B} \ddot{\subset} \mathbf{A})(\alpha, \beta)$. Par conséquent

$$(\exists P, Q \in \mathbf{A})\,[(P, Q \ddot{\in} \mathbf{B})(\alpha, \beta) \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{B} \ddot{\subset} \mathbf{A})(\alpha, \beta)].$$

Donc $(\forall U, V \in \mathbf{B})$ $[(U, V \ddot{\in} \mathbf{A})(\alpha, \beta)]$ et on a de la même manière

$$(\exists U, V \in \mathbf{B}) \; [(U, V \ddot{\in} \mathbf{A})(\alpha, \beta) \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} \ddot{\subset} \mathbf{B})(\alpha, \beta)],$$

par conséquent $(\mathbf{A} \doteqdot \mathbf{B})(\alpha, \beta)$.

Notons les deux théorèmes suivants:

Théorème 18.19. *Soit* $P \in \mathbf{M}$ *et* $\mathbf{B} \in \mathscr{R}(\alpha, \beta)$. *Alors*

$$P \dot{\in} \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad P \ddot{\in} \mathbf{B}.$$

Théorème 18.20. *Soient* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathscr{R}(\alpha, \beta)$. *Alors*

$$\mathbf{A} \dot{\subset} \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \ddot{\subset} \mathbf{B}, \qquad \mathbf{A} \doteq \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \doteqdot \mathbf{B}.$$

Les théorèmes 18.8 a 18.12 suffisent pour établir un ordre total, basé sur la relation „entre", sur tout ensemble rectiligne de points. Donc:

Théorème 18.21. *Tout ensemble* $\mathbf{A} \in \mathscr{R}$ *peut être totalement ordonné de telle sorte que*

$$(\forall X, Y, Z \in \mathbf{A})\,[X \prec Y \prec Z \quad \Rightarrow \quad X\text{-}Y\text{-}Z]. \tag{18.9}$$

DEFINITON 18.7. Soit $\mathbf{A} \in \mathscr{R}$. L'ordre total défini par (18.9) sera appelé *ordre naturel,* et l'ensemble $\mathbf{A}$ sera dit *orienté.*

NOTATION 18.5. Si $\mathbf{A}$ est orienté on notera parfois $\vec{\mathbf{A}}$. L'ensemble $\mathscr{R}(\alpha, \beta)$ dont les éléments sont orientés sera noté $\vec{\mathscr{R}}(\alpha, \beta)$.

Théorème 18.22. *Si* $\vec{\mathbf{A}} \in \vec{\mathscr{R}}$, *on a*

$$(\forall X, Y, Z \in \mathbf{A})\ [X\text{-}Y\text{-}Z \Rightarrow X \prec Y \prec Z \quad \vee \quad X \succ Y \succ Z].$$

En vertu de la définition 18.7 on a:

Théorème 18.23. *L'ordre opposé à un ordre naturel, défini sur un ensemble rectiligne, est également un ordre naturel.*

Un ordre naturel, défini sur un ensemble rectiligne, et l'ordre qui lui est opposé, sont les seuls ordres naturels dont un ensemble rectiligne peut être muni.

DEFINITION 18.8. Soient $A, B \in \mathbf{E} \in \mathscr{R}(\alpha, \beta)$ et $A \prec B$ selon l'un des deux ordres naturels. Nous appellerons l'ensemble de points

$$(A, B)_{\mathbf{E}} \stackrel{\text{def}}{=} \{X \mid X \in \mathbf{E} \ \wedge \ A \prec X \prec B\}$$

un *intervalle ouvert* de **E**, *borné dans* **E** et les ensembles

$$(-, A)_{\mathbf{E}} \stackrel{\text{def}}{=} \{X \mid X \in \mathbf{E} \ \wedge \ X \prec A\},$$

$$(B, -)_{\mathbf{E}} \stackrel{\text{def}}{=} \{X \mid X \in \mathbf{E} \ \wedge \ B \prec X\},$$

ainsi que **E** même, des *intervalles ouverts* de **E**, *non-bornés dans* **E**.

En ajoutant A, B on obtient les intervalles *fermés*, soit $[A, B]$, et les intervalles *mixtes*.

On fera aussi abstraction de l'orientation de **E**. Alors

$$(A, B)_{\mathbf{E}} = (B, A)_{\mathbf{E}} = \{X \mid A\text{-}X\text{-}B\}.$$

19. IMAGE PAR REFLEXION D'UN ENSEMBLE RECTILIGNE

Pour introduire la continuité dans les ensembles rectilignes de points matériels, le chemin le plus simple paraît être celui d'appliquer un tel ensemble, soit **E**, dans l'ensemble des événements qui ont lieu en un point quelconque de **E**.

DEFINITION 19.1. Soit $A \in \mathbf{E} \in \mathscr{R}(\alpha, \beta)$, $\theta \in (\alpha, \beta)_A$, et soit un ordre naturel défini sur **E**. L'application

$$f_A^\theta : \mathbf{E} \mapsto \Sigma_A,$$

définie par:

$$f_A^\theta = \{\langle X, \lambda\rangle \mid X \in \mathbf{E} \ \wedge \ \lambda \in (\alpha, \beta)_A \ \wedge$$
$$\wedge \ (X \preccurlyeq A \ \Rightarrow \ A\lambda X{\cdot}A\theta) \ \wedge \ (A \prec X \ \Rightarrow \ A\theta X{\cdot}A\lambda)\},$$

sera appelée une *réflexion de* **E** *en* A, *d'origine* θ. L'ensemble $f_A^\theta(\mathbf{E})$ des valeurs λ de cette application sera appelé *image par réflexion de* **E** *en* A, *d'origine* θ, et noté plus court Λ_A^θ.

Théorème 19.1.

$$(\forall \vec{\mathbf{E}} \in \vec{\mathcal{R}}(\alpha, \beta)) \ \forall A \, \forall \theta \ [A \in \mathbf{E} \ \wedge \ \theta \in (\alpha, \beta)_A \ \Rightarrow \ \Lambda_A^\theta \subset (\alpha, \beta)_A].$$

Démonstration. En vertu des théorèmes 7.13 et 7.14 on a

$$(\forall X \in \mathbf{E})\,[A\lambda X{\cdot}A\theta \ \Rightarrow \ \lambda \in (\alpha, \beta)_A],$$

ainsi que

$$(\forall X \in \mathbf{E})\,[A\theta X{\cdot}A\lambda \ \Rightarrow \ \lambda \in (\alpha, \beta)_A].$$

Théorème 19.2. *Quels que soient* $\mathbf{E} \in \mathcal{R}(\alpha, \beta)$, $A \in \mathbf{E}$, *puis trois points distincts* $X, Y, Z \in \mathbf{E}$, *et* $\theta \in (\alpha, \beta)_A$, *on a*

$$(X\text{-}Y\text{-}Z)(\alpha, \beta) \ \Leftrightarrow \ f_A^\theta(X) \prec f_A^\theta(Y) \prec f_A^\theta(Z) \ \vee \ f_A^\theta(X) \succ f_A^\theta(Y) \succ f_A^\theta(Z),$$

en y sousentendant l'ordre naturel du temps.

Démonstration. Selon la définition 18.2 $X\text{-}Y\text{-}Z$ signifie:

(19.1) $$(\forall \zeta \in (\alpha, \beta)_Z)\,[\langle X^{\cdot}\text{-}Y^{\cdot}\text{-}\rangle Z\zeta] \ \wedge \ (\forall \xi \in (\alpha, \beta)_X)\,[\langle Z^{\cdot}\text{-}Y^{\cdot}\text{-}\rangle X\xi].$$

Suivant la définition 18.7 et le théorème 18.22 on a

$$X\text{-}Y\text{-}Z \ \Leftrightarrow \ X \prec Y \prec Z \ \vee \ X \succ Y \succ Z.$$

Supposons que $X \prec Y \prec Z$. Les quatre cas suivants se présentent:

(19.2) $$X \prec Y \prec Z \prec A, \qquad X \prec Y \prec A \preccurlyeq Z, \qquad X \prec A \preccurlyeq Y \prec Z,$$
$$A \preccurlyeq X \prec Y \prec Z.$$

Dans le premier cas on a d'une part, en vertu de la définition 18.2,

(19.3) $$(\forall \theta \in (\alpha, \beta)_A)\,[\langle Y^{\cdot}\text{-}Z^{\cdot}\text{-}\rangle A\theta] \ \wedge \ (\forall \eta \in (\alpha, \beta)_Y)\,[\langle A^{\cdot}\text{-}Z^{\cdot}\text{-}\rangle Y\eta],$$

et de l'autre, selon la définition 19.1, pour $\forall\theta \in (\alpha, \beta)_A$,

$$A{\cdot}f(X)\,X\xi A\theta \quad \wedge \quad A{\cdot}f(Y)\,Y\eta A\theta \quad \wedge \quad A{\cdot}f(Z)\,Z\zeta A\theta,$$

où les indices de f ont été omis. Donc on peut écrire en vetru de (19.1), (19.3) et de la définition 4.2,

$$Af(Z)\,Z\zeta A\theta \quad \wedge \quad Af(Y)\,Z\zeta' Y\eta Z\zeta A\theta \quad \wedge \quad Af(X)\,Z\zeta'' Y\eta' X\xi\, Y\eta Z\zeta A\theta.$$

Dans la chaîne $Y\eta' X\xi Y\eta$ on a $Y\eta' \prec Y\eta$, car non $(Y \doteq X)\eta$ (puisque $\eta \in (\alpha, \beta)_Y$), donc

$$Af(X)\,Z\zeta'' Y\eta' \prec Af(Y)\,Z\zeta' Y\eta, \qquad \text{d'où} \qquad Af(X) \prec Af(Y).$$

Dans $Z\zeta' Y\eta Z\zeta$ on a $Z\zeta' \prec Z\zeta$, car non $(Z \doteq Y)\zeta$, donc

$$Af(Y)\,Z\zeta' \prec Af(Z)\,Z\zeta, \qquad \text{d'où} \qquad Af(Y) \prec Af(Z).$$

Par conséquent, dans l'ordre naturel du temps sur Σ_A on a

$$f_A^{\theta}(X) \prec f_A^{\theta}(Y \prec)\ f_A^{\theta}(Z).$$

La démonstration est analogue dans les trois autres cas (19.2). Si on suppose $X \succ Y \succ Z$, on obtient l'ordre du temps opposé.

Les deux théorèmes suivants sont des conséquences immédiates de la définition 19.1 et du théorème 19.2.

Théorème 19.3. *La réflexion f_A^{θ}, en tant que surjection de $\vec{\mathbf{E}}$ sur Λ_A^{θ}, est une application biunivoque.*

Théorème 19.4. *La réflexion f_A^{θ} fait correspondre à l'ordre naturel défini sur $\vec{\mathbf{E}}$, l'ordre du temps sur Λ_A^{θ}. En d'autres termes:*

$$(\forall A, X, Y \in \mathbf{E})\ (\forall\theta \in (\alpha, \beta)_A)\,[X \prec Y \quad \Leftrightarrow \quad f_A^{\theta}(X) \prec f_A^{\theta}(Y)\,].$$

En vertu de la définition 18.4 on a:

Théorème 19.5. *Soit $\vec{\mathbf{E}} \in \vec{\mathscr{R}}(\alpha, \beta)$. Alors*

$$(\forall A, B, Q \in \mathbf{E}\,(\forall\psi \in (\alpha, \beta)_Q)[\Lambda_Q^{\psi}[(A, B)_{\mathbf{E}}] = \Lambda_Q^{\psi}(\mathbf{E}) \cap (f_Q^{\psi}(\mathbf{A}), f_Q^{\psi}(B))_Q].$$

R e m a r q u e s. Soit A un ensemble totalement ordonné quelconque, et $B \subset A$. Si B n'est pas borné supérieurement ou inférieurement dans A, il est dit *non-borné dans* A. Si B n'est borné dans A ni supérieurement ni inférieurement, en d'autres termes si

$$(\forall a \in A)\ (\exists x, y \in B)\ [x \prec a \prec y],$$

B sera dit *nullement borné dans* A.

Soit $P \in \mathbf{M}$, $\Phi \subset \Sigma_P$. Si Φ est non-borné, supérieurement ou inférieurement dans Σ_P, on a

$$\sup_{\Sigma_P} \Phi = \omega' \quad \text{ou bien} \quad \inf_{\Sigma_P} \Phi = \omega.$$

En vertu du théorème 19.1 on a:

Théorème 19.6. Λ^θ_A *étant l'image par réflexion d'un ensemble* $\mathbf{E} \in \mathscr{R}(\alpha, \beta)$, *on a:*

$$\sup_{\Sigma_A} \Lambda^\theta_A \prec \beta, \quad \textit{et} \quad \inf_{\Sigma_A} \Lambda^\theta_A \succ \alpha.$$

Par conséquent:

Théorème 19.7. *Soit* $\mathbf{E} \in \mathscr{R}(\alpha, \beta)$. *Si* $\mathbf{A} \in \mathbf{E}$ *et* $\theta \in \Sigma_A$ *existent tels que* Λ^θ_A *est nullement borné dans* Σ_A, *on a* $\alpha = \omega$ *et* $\beta = \omega'$.

Les images par réflexion d'un ensemble rectiligne, soit Λ^φ_P, sont pour les différents points P liées entre elles par les applications s_{PQ}.

Théorème 19.8. *Soient* $P, Q \in \vec{\mathbf{E}} \in \vec{\mathscr{R}}(\alpha, \beta)$ *et* $\varphi \in (\alpha, \beta)_P$, $\psi \in (\alpha, \beta)_Q$. *Alors,*

$$P \prec Q \wedge P\varphi Q\psi \Rightarrow Q\Lambda^\psi_Q P\Lambda^\varphi_P \Leftrightarrow \Lambda^\varphi_P = s_{QP}(\Lambda^\psi_Q).$$

Démonstration. Soient $\lambda \in \Lambda^\varphi_P$, $\mu \in \Lambda^\psi_Q$ et $X \in \mathbf{E}$, tels qu'on ait suivant la définition 19.1 dans f^φ_P

$$[1] \quad X \prec P \Rightarrow P\lambda X\xi P\varphi \qquad \text{ou} \qquad [2] \quad P \prec X \Rightarrow P\varphi X\xi P\lambda,$$

et dans f^ψ_Q

$$[3] \quad X \prec Q \Rightarrow Q\mu X\xi Q\psi \qquad \text{ou} \qquad [4] \quad Q \prec X \Rightarrow Q\psi X\xi Q\mu.$$

Comme $P \prec Q$, les trois cas suivants sont à distinguer:

$$X \preccurlyeq P \wedge X \prec Q, \qquad P \prec X \preccurlyeq Q, \qquad P \prec X \wedge Q \prec X,$$

et par conséquent on a [1] et [3], ou [2] et [3], ou [2] et [4]. Puisqu'il est également $P\varphi Q\psi$ et que $\mathbf{E} \in \mathscr{R}$, on a:

$$[1] \wedge [3] \Rightarrow (X = P \vee X\text{-}P\text{-}Q) \wedge P\lambda X\xi P\varphi \wedge Q\mu X\xi Q\psi \Rightarrow \\ \Rightarrow Q\mu P\lambda X\xi P\varphi Q\psi,$$

$$[2] \wedge [3] \Rightarrow (P\text{-}X\text{-}Q \vee X = Q) \wedge P\varphi X\xi P\lambda \wedge Q\mu X\xi Q\psi \Rightarrow \\ \Rightarrow P\varphi X\xi Q\psi \wedge Q\mu X\xi P\lambda \asymp Q\mu P\lambda$$

$$[2] \wedge [4] \Rightarrow P\text{-}Q\text{-}X \wedge P\varphi X\xi P\lambda \wedge Q\psi X\xi Q\mu \Rightarrow \\ P\varphi Q\psi X\xi Q\mu P\lambda.$$

Dans tous les trois cas on a dans les relations finales $Q\mu P\lambda$, donc

$$Q\Lambda_Q^\psi P\Lambda_P^\varphi, \qquad \text{d'où} \qquad \Lambda_P^\varphi = s_{QP}(\Lambda_Q^\psi).$$

Dans le théorème suivant il est nécessaire que $\mathbf{E} \subset \mathbf{M}_0$.

Théorème 19.9. *Soit* $\mathbf{E} \in \mathscr{R}(\omega, \omega')$ *et* $\mathbf{E} \subset \mathbf{M}_0$. *Alors*

$$(\exists A \in \mathbf{E})(\forall P \in \mathbf{E})(\forall \theta \in \Sigma_A)(\forall \varphi \in \Sigma_P)[\Lambda_A^\theta(\mathbf{E}) = \Sigma_A \Rightarrow \Lambda_P^\varphi(\mathbf{E}) = \Sigma_P].$$

Démonstration. Soit $A \preccurlyeq P$ dans l'ensemble orienté $\vec{\mathbf{E}}$, et soient $\theta \in \Sigma_A$, $\varphi \in \Sigma_P$ tels que $A\theta P\varphi$. D'après le théorème 19.8 on a

$$\Lambda_A^\theta = s_{PA}(\Lambda_P^\varphi), \qquad \text{donc} \qquad \Sigma_A = s_{PA}(\Lambda_P^\varphi).$$

Comme $A, P \in \mathbf{M}_0$, l'application s_{PA} est selon le théorème 10.8 une surjection biunivoque de Σ_P sur Σ_A, donc

$$\forall P \, \forall \varphi \ [\Lambda_P^\varphi = \Sigma_P].$$

La démonstration est analogue lorsque $A \succ P$.

20. TOPOLOGIE SUR LES ENSEMBLES RECTILIGNES. DROITES PERMANENTES

DEFINITION 20.1. Soit $\mathbf{E} \in \mathscr{R}(\alpha, \beta)$. Si pour $\forall P \in \mathbf{E}$ et $\forall \varphi \in (\alpha, \beta)_P$ l'ensemble $\Lambda_P^\varphi(\mathbf{E})$ est borné supérieurement ou inférieurement dans Σ_P, on dira que $\mathbf{E}$ est *borné supérieurement* ou *inférieurement*. De même, si $\Lambda_P^\varphi(\mathbf{E})$ est borné, non-borné, ou s'il est nullement borné dans Σ_P, on dira que $\mathbf{E}$ est *borné*, *non-borné* ou bien qu'il est *nullement borné*.

Remarques. Il est bien possible que l'image par réflexion, $\Lambda_P^\varphi(\mathbf{E})$ soit par exemple bornée pour un couple $\langle P, \varphi\rangle$ et nullement bornée pour un autre. Ceci est exclu dans la définition précédente.

Les points d'accumulation instantanée ayant été introduits par la définition 13.1, soit $Q \in \mathbf{E}$ un point d'accumulation de $\mathbf{E} \in \mathscr{R}(\alpha, \beta)$ à l'instant de ζ. Pour que Q soit un point d'accumulation de $\mathbf{E}$ en tant qu'ensemble rectiligne, il faut que $\zeta \in (\alpha, \beta)_Q$. On peut donc énoncer en ce qui concerne une topologie „locale" dans $\mathbf{E}$, la définition suivante:

DEFINITION 20.2. Soit $\mathbf{E} \in \mathscr{R}(\alpha, \beta)$, et $Q \in \mathbf{E}$ un point d'accumulation de $\mathbf{E}$ à l'instant de ζ. Lorsque $\zeta \in (\alpha, \beta)_Q$, nous dirons que Q est un *point d'accumulation de l'ensemble rectiligne* $\mathbf{E}$ *à l'instant de* ζ.

Si $Q \in \mathbf{E}$, mais non pas un point d'accumulation de $\mathbf{E}$ à l'instant de $\zeta \in (\alpha, \beta)_Q$, nous dirons que c'est un *point isolé de l'ensemble rectiligne* $\mathbf{E}$ *à l'instant de* ζ.

Soit $(A, B)_\mathbf{E}$ un intervalle de $\mathbf{E} \in \mathscr{R}(\alpha, \beta)$, et $P \in \mathbf{E}$ tel que $P \in (A, B)_\mathbf{E}$. Nous dirons que $(A, B)_\mathbf{E}$ est un *voisinage ouvert de* P *dans l'ensemble rectiligne* $\mathbf{E}$.

Les définitions suivantes caractérisent ceux des ensembles rectilignes, qui tiennent la place des „lignes droites".

DEFINITION 20.3. Soit $\mathbf{E} \in \mathscr{R}(\omega, \omega')$. Lorsque l'image par réflexion Λ_P^φ de $\mathbf{E}$ est Σ_P quels que soient P et φ, en d'autres termes, si

$$(\forall P \in \mathbf{E})\ (\forall \varphi \in \Sigma_P)\ [\Lambda_P^\varphi(\mathbf{E}) = \Sigma_P],$$

nous appellerons $\mathbf{E}$ *ensemble rectiligne complet*.[24]

DEFINITION 20.4. La topologie sur un ensemble rectiligne complet $\mathbf{E}$, dont la base (des voisinages ouverts) consiste de l'ensemble des intervalles de $\mathbf{E}$ ouverts sur $\mathbf{E}$, sera appelée *topologie naturelle* de $\mathbf{E}$.

DEFINITION 20.5. Tout ensemble rectiligne complet, muni de la topologie naturelle, sera appelé *droite permanente*.

---

[24] Ne pas confondre avec les ensembles métriques complets.

NOTATION 20.1. Les droites permanentes seront notées par des lettres italiques grasses: **a**, **b**, . . . Si A, B sont deux points distincts d'une droite permanente, on désignera celle-ci aussi par AB.

L'ensemble des droites permanentes sera noté $\mathscr{P}_1$. L'ensemble des droites permanentes qui ont deux points, A, B communs, sera noté $\mathscr{P}_1(A, B)$.

Un intervalle ouvert d'une droite permanente **a**, voisinage d'un point P de **a**, sera noté $\mathbf{V}_{\mathbf{a}}(P)$, $\mathbf{V}(P)$, ou simplement $\mathbf{V}$.

On a par exemple les théorèmes suivants:

Théorème 20.1. $\forall AB (\forall X \in AB) [X\text{-}A\text{-}B \vee A\text{-}X\text{-}B \vee A\text{-}B\text{-}X \vee \vee X = A \vee X = B]$.

Théorème 20.2. *La droite permanente est un ensemble rectiligne nullement borné.*

Démonstration. Si $\mathbf{a} \in \mathscr{P}_1$, on a $(\forall P \in \mathbf{a}) \forall\varphi [\Lambda_P^\varphi = \Sigma_P]$, donc **a** est selon la définition 20.1 nullement borné.

Théorème 20.3. *Soit* $\mathbf{E} \in \mathscr{R}(\omega, \omega')$ et $\mathbf{E} \subset \mathbf{M}_0$. *Lorsque*

$$(\exists A \in \mathbf{E}) (\forall\theta \in \Sigma_A) [\Lambda_\varphi^\theta(\mathbf{E}) = \Sigma_A],$$

E *est un ensemble rectiligne complet, donc, s'il est muni de la topologie naturelle, c'est une droite permanente.*

Démonstration. En vertu du théorème 19.9 on a

$$(\forall P \in \mathbf{E}) (\forall\varphi \in \Sigma_P) [\Lambda_P^\varphi(\mathbf{E}) = \Sigma_P],$$

donc, suivant la définition 20.3, **E** est un ensemble rectiligne complet, et suivant la définition 20.5 $\mathbf{E} \in \mathscr{P}_1$.

En vertu du théorème 19.5 on a:

Théorème 20.4. *Si* $\mathbf{a} \in \mathscr{P}_1$, *alors*

$$(\forall A, B, Q \in \mathbf{a}) (\forall\psi \in \Sigma_Q) [f_Q^\psi[(A, B)_\mathbf{E}] = (f_Q^\psi(A), f_Q^\psi(B))].$$

On a, d'après le théorème 20.1, en désignant la base des voisinages de $\lambda \in \Sigma_Q$ par $\mathscr{B}_Q(\lambda)$:

Théorème 20.5. *Si* $\mathbf{a} \in \mathscr{P}_1$, *alors*

$$(\forall P, Q \in \mathbf{a}) (\forall\psi \in \Sigma_Q) \forall \mathbf{V}_\mathbf{a}(P) [f_Q^\psi(P) = \lambda \Rightarrow f_Q^\psi[\mathbf{V}_\mathbf{a}(P)] \in \mathscr{B}_Q(\lambda)].$$

En d'autres termes: *Dans la réflexion* $f_Q^\psi : \mathbf{a} \mapsto \Sigma_Q$ *les bases des voisinages de* $\mathbf{a}$ *et de* Σ_Q $(\forall Q \in \mathbf{a})$ *se correspondent.*

Par conséquent, suivant le théorème 19.4 on a:

Théorème 20.6. *Si* $\mathbf{a} \in \mathscr{P}_1$, *alors, quels que soient* $Q \in \mathbf{a}$ *et* $\psi \in \Sigma_Q$, *la réflexion* $f_Q^\psi : \mathbf{a} \mapsto \Sigma_Q$ *est un homéomorphisme, qui fait correspondre à l'ordre naturel défini sur* $\mathbf{a}$ *l'ordre du temps sur* Σ_Q.

On a donc, en vertu du théorème 10.1:

Théorème 20.7. *Toute droite permanente est homéomorphe à l'ensemble des nombres réels.*

Démontrons le théorème suivant:

Théorème 20.8. $(\forall \mathbf{a} \in \mathscr{P}_1)$ $(\forall S \in \mathbf{M})$ $(\forall \varphi \in \Sigma_S)$ $[(S \ddot{\in} \mathbf{a})\varphi \Rightarrow (S \dot{\in} \mathbf{a})\,\varphi]$.

Démonstration. Soient $A, B \in \mathbf{a}$. Selon les définitions 18.3 et 18.4 on a $S \ddot{\in} \{A, B\}\varphi$, donc, par exemple,

$$\langle A^{\cdot}\text{-}B^{\cdot}\rangle S\varphi \quad \wedge \quad \langle S\varphi B^{\cdot}\text{-}\rangle A^{\cdot}.$$

Écrivons alors

$$(20.1) \qquad \langle A\alpha\text{-}B^{\cdot}\rangle S\varphi \quad \wedge \quad \langle S\varphi B^{\cdot}\text{-}\rangle A\lambda$$

et considérons $f_A^\alpha(\mathbf{a})$. On a de (20.1)

$$(20.2) \qquad A\alpha S\varphi A\lambda \quad \wedge \quad A\alpha B^{\cdot} S\varphi B^{\cdot} A\lambda,$$

ainsi que

$$(20.3) \qquad A\alpha \prec A\lambda \quad \wedge \quad A\alpha B^{\cdot} A \prec A\lambda.$$

Comme $\Lambda_A^\alpha(\mathbf{a}) = \Sigma_A$ (définition 20.3) et $\alpha, \lambda \in \Sigma_A$, on a $\alpha, \lambda \in \Lambda_A^\alpha(\mathbf{a})$, donc

$$(\exists P \in \mathbf{a})\,[\lambda = f_A^\alpha(P)].$$

Selon (20.3) $A\alpha \prec A\lambda$, donc $A\alpha P^{\cdot} A\lambda$ (et non pas $A\lambda P^{\cdot} A\alpha$), et de même

$$A\alpha B^{\cdot} A \preccurlyeq A\alpha P^{\cdot} A\lambda.$$

donc $A\alpha B^{\cdot} P^{\cdot} B^{\cdot} A\lambda$ (puisque $P \in \mathbf{a}$). O peut donc écrire

$$A\alpha P\psi A\lambda \quad \text{et} \quad A\alpha B^{\cdot} P\psi B^{\cdot} A\lambda,$$

ou en d'autres termes,

$$(20.4) \qquad \langle A\alpha\text{-}B^{\cdot}\rangle P\psi \quad \text{et} \quad \langle P\psi B^{\cdot}\text{-}\rangle A\lambda.$$

De (20.1) et (20.4) résulte selon l'axiome III 4:

$$\langle A\alpha\text{-}B^{\cdot}\rangle S\varphi \ \wedge \ \langle A\alpha\text{-}B^{\cdot}\rangle P\psi \ \Rightarrow \ \langle A\alpha\text{-}P\psi\rangle S\varphi \ \vee \ \langle A\alpha\text{-}S\varphi\rangle P\psi,$$

$$\langle S\varphi B^{\cdot}\text{-}\rangle A\lambda \ \wedge \ \langle P\psi B^{\cdot}\text{-}\rangle A\lambda \ \Rightarrow \ \langle P\psi S\varphi\text{-}\rangle A\lambda \ \vee \ \langle S\varphi P\psi\text{-}\rangle A\lambda.$$

Si $\langle A\alpha\text{-}P\psi\rangle S\varphi$ et $\langle P\psi S\varphi\text{-}\rangle A\lambda$, on a $(P \doteq S)\varphi$ et $\varphi = \psi$ (théorème 7.19). Si $\langle A\alpha\text{-}P\psi\rangle S\varphi$ et $\langle S\varphi P\psi\text{-}\rangle A\lambda$, donc $P\psi S\varphi$ et $S\varphi P\psi$, de nouveau $(S \doteq P)\varphi$ et $\varphi = \psi$. Si $\langle A\alpha\text{-}S\varphi\rangle P\psi$, la conclusion est la même.

Si à la place de (20.1) l'un ou l'autre des deux autres couples de relations (19.2) a lieu, la démonstration est analogue. Dans tous les cas $(S \doteq P)\varphi$, donc $(S \mathrel{\dot\in} \mathbf{a})\varphi$.

Les théorèmes suivants s'ensuivent.

Théorème 20.9. $(\forall S \in \mathbf{M})(\forall \mathbf{a} \in \mathscr{P}_1)\,[S \mathrel{\ddot\in} \mathbf{a} \ \Rightarrow \ S \mathrel{\dot\in} \mathbf{a}]$.

Théorème 20.10. $(\forall A \subset \mathbf{M})\ (\forall \mathbf{a} \in \mathscr{P}_1)\ [A \mathrel{\ddot\subset} \mathbf{a} \ \Rightarrow \cdot\ A \mathrel{\dot\subset} \mathbf{a}]$.

Théorème 20.11. $(\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathscr{P}_1)\,[\mathbf{a} \mathrel{\dot\subset} \mathbf{b} \ \Rightarrow \ \mathbf{a} \doteq \mathbf{b}]$.

Démonstration. On a (théorème 18.20) $\mathbf{a} \mathrel{\dot\subset} \mathbf{b} \ \Rightarrow \ \mathbf{a} \mathrel{\ddot\subset} \mathbf{b}$, d'où (thèorème 18.16) $\mathbf{b} \mathrel{\ddot\subset} \mathbf{a}$, donc (théorème 20.10) $\mathbf{b} \mathrel{\dot\subset} \mathbf{a}$, par conséquent $\mathbf{a} \doteq \mathbf{b}$.

On a d'autant plus:

Théorème 20.12. $(\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathscr{P}_1)\,[\mathbf{a} \subset \mathbf{b} \ \Rightarrow \ \mathbf{a} = \mathbf{b}]$.

Théorème 20.13. $(\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathscr{P}_1)\,(\forall P, Q \in \mathbf{a})\,[P \neq Q \ \wedge$
$\wedge \ P, Q \mathrel{\dot\in} \mathbf{b} \ \Rightarrow \ \mathbf{a} \doteq \mathbf{b}]$.

En d'autres termes: *Si deux points distincts d'une droite permanente* **a** *sont constamment situés sur une droite permanente* **b**, *alors ces deux droites sont constamment situées l'une sur l'autre.*

Démonstration. On a (théorème 18.19) $P, Q \mathrel{\ddot\in} \mathbf{b}$, donc (théorème 19.18) $\mathbf{a} \mathrel{\ddot=} \mathbf{b}$, et d'autant plus $\mathbf{a} \mathrel{\ddot\subset} \mathbf{b}$, d'où (théorème 20.10) $\mathbf{a} \mathrel{\dot\subset} \mathbf{b}$ et même (théorème 20.11) $\mathbf{a} \doteq \mathbf{b}$.

Théorème 20.14. *Deux droites permanentes distinctes, qui ne sont jamais situées l'une sur l'autre, ont au plus un point de l'une, situé constamment sur l'autre.*

La définition suivante se rattache à la définition 18.8.

DEFINITION 20.6. Soient $A, B \in \mathbf{a} \in \mathscr{P}_1$. Faisant abstraction de l'orientation de $\mathbf{a}$ et notant conformément à la définition 18.8, on appellera $[A, B]_{\mathbf{a}}$ un *segment de droite permanente*, et $(AC\text{-})_{\mathbf{a}}$ (où C est élément du même ensemble) une *demi-droite permanente*, A son *origine*.

NOTATION 20.2. On notera plus court: $[A, B]_{\mathbf{a}} = [AB]_{\mathbf{a}} = [AB]$, et $(AC\text{-})_{\mathbf{a}} = (AC\text{-})$.

Remarquons que $[AB] = [BA]$.

Énonçons la définition suivante des coordonnées numériques continues d'une droite permanente:

DEFINITION 20.7. Soit $\mathbf{d} \in \mathscr{P}_1$, $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $a < b$, et soit un ordre naturel défini sur $\mathbf{d}$. Toute application numérique

$$f : \mathbf{d} \mapsto (a, b)$$

de $\mathbf{d}$ sur (a, b), biunivoque, bicontinue et croissante[25] sera appelée une *application numérique fondamentale, continue, de* $\mathbf{d}$.

Pour tout $P \in \mathbf{d}$ la valeur $f(P)$ sera appelée *coordonnée continue* de P. La droite orientée $\vec{\mathbf{d}}$, munie de coordonnées continues, sera appelée un *axe des coordonnées*.

NOTATION 20.3. Si $x = f(P)$, où $P \in \mathbf{d}$, nous écrirons aussi $\hat{x}(P)$ et x_P. L'ensemble des applications numériques fondamentales continues sera noté $\mathscr{C}$, et l'ensemble de celles de la droite $\mathbf{d}$ sera noté $\mathscr{C}(\mathbf{d})$.

Suivant les théorèmes 11.2 et 20.6, $\hat{t}$ et f_A^{α} sont biunivoques, bicontinues et croissantes, donc:

Théorème 20.15. *Soit* $\mathbf{d} \in \mathscr{P}_1$, $A \in \mathbf{d}$ *et* $\theta \in \Sigma_A$. *Alors,* $\hat{t}\colon \Sigma_A \mapsto (a, b)$ *étant un temps continu de* A, *et* f_A^{θ} *la réflexion de* $\mathbf{d}$ *sur* Σ_A, *l'application composée*

$$\hat{t} \circ f_A^{\theta} : \mathbf{d} \mapsto (a, b)$$

est une application numérique fondamentale, continue, de $\mathbf{d}$.

Théorème 20.16. *Soit* $\mathbf{d} \in \mathscr{P}_1$, $\hat{x}, \hat{x}' \in \mathscr{C}$, *et*

$$\hat{x}\colon \mathbf{d} \mapsto (a, b), \qquad \hat{x}'\colon \mathbf{d} \mapsto (a', b').$$

---

[25] Voir [19] au §11.

Alors

$$\hat{x}'\circ\hat{x}^{-1}\colon\ (a, b) \mapsto (a', b')$$

est une application biunivoque, bicontinue et croissante.

21. ENSEMBLES RECTILIGNES L-METRIQUES

Les trois théorèmes suivants expriment des conditions suffisantes pour qu'un triple rectiligne soit L-métrique, et fixent les rapports entre les distances.

Théorème 21.1. *Soit* $\{A, B, C\} \in \mathscr{R}_3(\alpha, \beta)$ *et*

$$(A\text{-}B\text{-}C)(\alpha, \beta), \quad A\text{-}B = h(A\text{-}C)$$

(définition 17.1) *où (nécessairement)* $h \in (0,1)$. *Alors* $\{A, B, C\} \in \mathscr{M}(\alpha, \beta$ *et on a*

$$A\text{-}B = h(A\text{-}C), \quad C\text{-}B = (1-h)(C\text{-}A), \quad B\text{-}A = \frac{h}{1-h}(B\text{-}C).$$

Démonstration. Suivant la définition 17.1 on a, en y posant $\mathbf{E} = \{A, B, C\}$,

$$A\text{-}B = \frac{c}{2}q \quad \text{et} \quad A\text{-}C = \frac{c}{2}r,$$

où $q = e(\hat{t}_{A:B})$ et $r = e(\hat{t}_{A:C})$ sont les éléments métriques dans un temps métrique $\hat{t} \in \mathscr{T}_{A:\{B,C\}}$, c.-à.-d. tels que dans (α, β), d'après les définitions 14.1 et 14.3,

$$(\forall t \in \mathbb{R})\,[A^{\cdot}(t)\,B^{\cdot}A^{\cdot}(t+q)] \quad \text{et} \quad (\forall t \in \mathbb{R})\,[A^{\cdot}(t)C^{\cdot}A^{\cdot}(t+r)].$$

Donc

$$h = \frac{A\text{-}B}{A\text{-}C} = \frac{q}{r}. \tag{21.1}$$

Prenons comme temps continus en B et C les applications

$$t' = f_B(\varphi) \quad \text{et} \quad t'' = f_C(\psi), \quad \text{où} \quad \varphi \in \Sigma_B, \quad \psi \in \Sigma_C,$$

telles qu'on ait dans $A^{\cdot}(t)\, B^{\cdot}(t')$ et $A^{\cdot}(t)\, C^{\cdot}(t'')$, par exemple,

$$t' = t + \frac{q}{2} \quad \text{et} \quad t'' = t + \frac{r}{2},$$

donc

$$A^{\cdot}(t)\, B^{\cdot}\left(t + \frac{q}{2}\right) \quad \text{et} \quad A^{\cdot}(t) C^{\cdot}\left(t + \frac{r}{2}\right), \quad \text{d'où } \forall t \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$A^{\cdot}(t) B^{\cdot}\left(t + \frac{q}{2}\right) A^{\cdot}(t+q), \qquad A^{\cdot}(t) C^{\cdot}\left(t + \frac{r}{2}\right) A^{\cdot}(t+r),$$

et par conséquent

$$(21.2) \qquad B^{\cdot}(t) A^{\cdot}\left(t + \frac{q}{2}\right) B^{\cdot}(t+q), \qquad C^{\cdot}(t) A^{\cdot}\left(t + \frac{r}{2}\right) C^{\cdot}(t+r).$$

Ceci veut dire que ces temps en B et C sont des temps métriques par rapport à A, qui satisfont la définition 15.1 des temps synchrones avec $\hat{t}$.

Comme A-B-C, on a $C^{\cdot}(t) A^{\cdot} C^{\cdot} \asymp C^{\cdot}(t) B^{\cdot} A^{\cdot} B^{\cdot} C^{\cdot}$, donc en termes plus précis:

(21.3)

$$C^{\cdot}(t) A^{\cdot}\left(t + \frac{r}{2}\right) C^{\cdot}(t+r) \asymp C^{\cdot}(t) B^{\cdot}(t_1) A^{\cdot}\left(t + \frac{r}{2}\right) B^{\cdot}\left(t + \frac{q+r}{2}\right) C^{\cdot}(t+r),$$

où $t_1 = t + \dfrac{r-q}{2}$, puisque $B^{\cdot}(t) A^{\cdot}\left(t + \dfrac{q}{2}\right)$ selon (21.2). Donc, en

remarquant que $C^{\cdot}(t) B^{\cdot}(t_1)$ et en substituant dans les deux derniers termes de l'expression (21.3) $t + \dfrac{q+r}{2}$ par t, on obtient:

$$(21.4) \qquad C^{\cdot}(t) B^{\cdot}\left(t + \frac{r-q}{2}\right), \qquad B^{\cdot}(t) C^{\cdot}\left(t + \frac{r-q}{2}\right),$$

d'où $C^{\cdot}(t) B^{\cdot} C^{\cdot}(t+r-q)$. Par conséquent les temps $\hat{t}'$ et $\hat{t}''$ sont métriques aussi par rapport à C et B respectivement, et synchrones entre eux.

Or, d'après (21.2) on a $C^{\cdot}(t)A^{\cdot}C^{\cdot}(t+r)$, donc, suivant la définition 17.1,

$$\frac{C\text{-}B}{C\text{-}A} = \frac{r-q}{r} = 1-h,$$

c.-à-d. $C\text{-}B = (1-h)\, C\text{-}A$.

On a bien $h > 0$, mais aussi $h < 1$, car $A\text{-}B\text{-}C$ implique

$$A^{\cdot}(t)B^{\cdot}A^{\cdot}(t+q) \qquad A^{\cdot}(t)C^{\cdot}A^{\cdot}(t+r),$$

d'où $q < r$.

Des relations (21.4) résulte également $B^{\cdot}(t)C^{\cdot}\left(t + \dfrac{r-q}{2}\right) B^{\cdot}(t+r-q)$.
Or, d'après (21.2), $B^{\cdot}(t)A^{\cdot}B^{\cdot}(t+q)$, donc

$$\frac{B\text{-}A}{B\text{-}C} = \frac{q}{r-q} = \frac{h}{1-h},$$

c.-à-d. $B\text{-}A = \dfrac{h}{1-h}(B\text{-}C)$.

Puisque les temps $\hat{t}, \hat{t}', \hat{t}''$ sont métriques et synchrones entre eux, ils constituent un temps commun de l'ensemble $\{A, B, C\}$, qui appartient donc à $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$.

On démontre de la même manière le théorème suivant:

Théorème 21.2. *Soit* $\{A, B, C\} \in \mathcal{R}_3(\alpha, \beta)$ *et*

$$(A\text{-}B\text{-}C)(\alpha, \beta), \qquad B\text{-}A = k(B\text{-}C),$$

d'où $k \in (0,\infty)$. *Alors* $\{A, B, C\} \in \mathcal{M}(\alpha, \beta)$ *et on a*:

$$B\text{-}A = k(B\text{-}C), \qquad A\text{-}B = \frac{k}{1+k}(A\text{-}C), \qquad C\text{-}B = \frac{1}{1+k}(C\text{-}A).$$

Le théorème suivant est la conséquence des deux précédents.

Théorème 21.3. *Soit* $\{A, B, C\} \in \mathcal{R}_3(\alpha, \beta)$ *et* $h, l \in (0,1)$, $k \in (0,\infty)$, *tels que* $(A\text{-}B\text{-}C)(\alpha, \beta)$ *et*

$$A\text{-}B = h(A\text{-}C) \quad \textit{ou} \quad B\text{-}A = k(B\text{-}C) \quad \textit{ou} \quad C\text{-}B = l(C\text{-}A).$$

Alors $\{A,B,C\} \in \mathscr{M}(\alpha, \beta)$ *et on a*:

$$\overline{AB} = h\,\overline{AC}, \qquad \overline{BA} = k\,\overline{BC}, \qquad \overline{CB} = l\,CA, \quad où \quad k = \frac{h}{1-h} \quad et \quad l = 1-h.$$

Il en résulte:

Théorème 21.4.

$$\{A, B, C\} \in \mathscr{R}_3^{\cdot} \;\wedge\; A\text{-}B = h\,(A\text{-}C) \;\Rightarrow\; \{A, B, C\} \in \mathscr{M}_\infty \;\wedge\; \overline{AB} = h\;\overline{AC}.$$

Théorème 21.5. *Soit* $\mathbf{E} \in \mathscr{R}(\omega, \omega')$. *Alors*

$$(\forall A, B, X \in \mathbf{E})\left[\frac{A\text{-}X}{A\text{-}B} = \text{const.} \;\Rightarrow\; \left(\mathbf{E} \in \mathscr{M}_\infty \;\wedge\; \frac{\overline{AX}}{\overline{AB}} = \text{const.}\right)\right].$$

Théorème 21.6. $\{A, B, C\} \in \mathscr{R}_3 \cap \mathscr{M}_\infty \Rightarrow (A\text{-}B\text{-}C \Leftrightarrow \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC})$.

Démonstration. $\{A, B, C\} \in \mathscr{M}_\infty \;\Rightarrow\; (\exists h \in \mathbb{R}^+)\,[\overline{AB} = h\overline{AC}]$,

et d'après le théorème 21.3,

$$[A\text{-}B\text{-}C \wedge \overline{AB} = h\,\overline{AC}] \;\Rightarrow\; \left[\overline{BA} = \frac{h}{1-h}\overline{BC} \wedge \overline{CB} = (1-h)\;\overline{CA}\right].$$

Par conséquent,

$$\overline{AB} + \overline{BC} = h\,\overline{AC} + \frac{1-h}{h}\,\overline{AB} = h\,\overline{AC} + (1-h)\;\overline{AC} = \overline{AC}.$$

Inversement, soit $\{A, B, C\} \in \mathscr{M}_\infty$, donc $\hat{t}$ un temps commun, $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\{A, B, C\}}$, et supposons que $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$. On a pour $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$A^{\cdot}(t)B^{\cdot}\left(t + \frac{q}{2}\right), \quad A^{\cdot}(t)\,C^{\cdot}\left(t + \frac{r}{2}\right), \quad B^{\cdot}(t)C^{\cdot}\left(t + \frac{r'}{2}\right),$$

où q, r, $r' \in \mathbb{R}^+$. Or, d'après la définition 17.2, $\overline{AB} = \frac{c}{2}\, e(\hat{t}_{A:B}) = \frac{c}{2}\, q$, et de même $AC = \frac{c}{2}\, r$, $BC = \frac{c}{2}\, r'$, donc $q + r' = r$, et par conséquent,

$$A^{\cdot}(t)B^{\cdot}\left(t + \frac{q}{2}\right) C^{\cdot}\left(t + \frac{q}{2} + \frac{r'}{2}\right) \asymp A^{\cdot}(t)C^{\cdot}\left(t + \frac{r}{2}\right)$$

quel que soit t. Ceci implique $\langle A\text{-}B\text{-}\rangle C\,(\omega, \omega')$. On montre de la même manière que $\langle C\text{-}B\text{-}\rangle A\,(\omega, \omega')$. Donc $A\text{-}B\text{-}C$ et par conséquent $\{A, B, C\} \in \mathscr{R}_3$.

Théorème 21.7. *Soient $P, Q, R \in \mathbf{E} \in \mathscr{M}_\infty$. Si l'ensemble $\{P, Q, R\}$ est en un alignement instantané propre, alors il est constamment $\{P, Q, R\} \in \mathscr{R}\,(\omega, \omega')$.*

Démonstration. D'après la définition 4.2, si $\{P, Q, R\}$ est en alignement instantané, l'ordre des trois points P, Q, R y est arbitraire. Soit par exemple $\langle P\varphi\text{-}Q^{\cdot}\text{-}\rangle R^{\cdot}$. Comme $\mathbf{E} \in \mathscr{M}$, un $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbf{E}}$ existe, ainsi que trois nombres positifs p, q, r, tels que selon les définitions 14.1 et 15.1 on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$P^{\cdot}(t)\,Q^{\cdot}\left(t + \frac{r}{2}\right) P^{\cdot}(t + r), \qquad P^{\cdot}(t)\,R^{\cdot}\left(t + \frac{q}{2}\right) P^{\cdot}(t + q),$$

$$Q^{\cdot}(t)P^{\cdot}\left(t + \frac{r}{2}\right) Q^{\cdot}(t + r), \qquad Q^{\cdot}(t)R^{\cdot}\left(t + \frac{p}{2}\right) Q^{\cdot}(t + p),$$

ce qui veut dire: $\overline{PQ} = kr$, $\overline{PR} = kq$, $\overline{QR} = kp$, où k est un facteur de proportionnalité. Si $\hat{t}(\varphi) = t_0$, on a donc, puisque $\langle P\varphi\text{-}Q^{\cdot}\text{-}\rangle R^{\cdot}$,

$$P^{\cdot}(t_0)Q^{\cdot}\left(t_0 + \frac{r}{2}\right) R^{\cdot}\left(t_0 + \frac{r}{2} + \frac{p}{2}\right) \asymp P^{\cdot}(t_0)\,R^{\cdot}\left(t_0 + \frac{q}{2}\right).$$

Par conséquent $r + p = q$, d'où $\overline{PR} = k(r + p) = \overline{PQ} + \overline{QR}$; donc, selon le théorème 21.6,

$$\{P, Q, R\} \in \mathscr{R}_3\,(\omega, \omega').$$

Le théorème suivant exprime „l'extension" infinie d'une droite permanente par rapport à la „lumière".

Théorème 21.8. *Soit* $\vec{\mathbf{E}}$ *un ensemble rectiligne L-métrique,* $\mathbf{E} \subset \mathbf{M}_0$, *et soit* $\mathbf{A} \in \mathbf{E}$, $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbf{E}}$ *et* t_0 *une valeur quelconque de* $\hat{t}$. *Alors*

$$(21.5) \qquad \mathbf{E} \in \mathscr{P}_1 \Rightarrow \{t \mid X \in \mathbf{E} \wedge [(X \prec A \Rightarrow X^{\cdot}(t)\, A^{\cdot}(t_0)) \vee (A \prec X \Rightarrow A^{\cdot}(t_0)\, X^{\cdot}(t))]\} = \mathbb{R}.$$

Démonstration. En vertu des définitions 14.1, 15.1 et 19.1 l'image par $\hat{t}$ de l'ensemble $\Lambda_A^\theta(\mathbf{E})$, donc $\hat{t}\,[\Lambda_A^\theta(\mathbf{E})]$, est l'ensemble des valeurs t de $\hat{t} \circ f_A^\theta$, donné par l'expression:

$$(21.6) \qquad \hat{t}\,[\Lambda_A^\theta(\mathbf{E})] = \{t_0+u \mid X \in \mathbf{E} \wedge [(X \preccurlyeq A \Rightarrow A^{\cdot}(t_0+u)\, X^{\cdot}\left(t_0+\frac{u}{2}\right) A^{\cdot}(t_0)) \vee (A \prec X \Rightarrow A^{\cdot}(t_0)\, X^{\cdot}\left(t_0+\frac{u}{2}\right) A^{\cdot}(t_0+u))]\},$$

où $t_0 = \hat{t}(\theta)$ et $t = t_0 + u$. (Dans (21.6) on a d'abord $u \leqslant 0$, puis $u > 0$). Si $\mathbf{E} \in \mathscr{P}_1$, on a selon la définition 20.3,

$$(\forall \theta \in \Sigma_A)\, [\Lambda_A^\theta(\mathbf{E}) = \Sigma_A],$$

donc l'ensemble des valeurs t est $\hat{t}(\Sigma_A) = \mathbb{R}$. Donc $\mathbb{R}$ est pour tout t_0 aussi l'ensemble des valeurs $t_0 + \dfrac{u}{2}$ dans (21.6) et par conséquent aussi des valeurs t dans les expressions

$$(21.7) \qquad X \prec A \Rightarrow X^{\cdot}(t)\, A^{\cdot}(t_0) \quad \text{et} \quad A \prec X \Rightarrow A^{\cdot}(t_0)\, X^{\cdot}(t),$$

contenues dans (21.5).

Inversement, si $\hat{t}\,[\Lambda_A^\theta(\mathbf{E})] = \mathbb{R}$, on a dans (21.7) respectivement $t \leqslant t_0$ et $t > t_0$, quelconques, pour tout t_0, donc pour tout θ on a $\Lambda_A^\theta(\mathbf{E}) = \Sigma_A$ et par conséquent, d'après le théorème 20.3, $\mathbf{E} \in \mathscr{P}_1$.

22. DROITES PERMANENTES METRIQUES

Ceux parmi les ensembles rectilignes L-métriques, qui sont des droites permanentes, donc qui appartiennent à $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{M}_\infty$, ont les propriétés des lignes droites de la géométrie élémentaire. Ce sont les *droites permanentes L-métriques*, que nous appellerons aussi tout court, *droites*.

La distance $\overline{AB}$ entre deux points A et B d'une droite sera appelée aussi *longueur* du segment $[AB]$ de cette droite.

DEFINITION 22.1. Soit $\vec{\mathbf{a}}$ une droite permanente L-métrique, orientée, $O \in \mathbf{a}$. Toute application numérique

$$(22.1) \qquad f \overset{\text{def}}{=} \{\langle P, x\rangle \mid P \in \mathbf{a} \wedge x \in \mathbb{R} \wedge (O \preccurlyeq P \Rightarrow \Rightarrow x = \overline{OP}) \wedge (O \succ P \Rightarrow \hat{x} = -\overline{OP})\}$$

sera appelée *application fondamentale métrique* de $\mathbf{a}$.

La valeur $x = f(P)$ sera appelée *coordonnée métrique*, ou *cartésienne*, du point P de $\mathbf{a}$. La droite $\vec{\mathbf{a}}$ orientée, munie d'une application fondamentale métrique, sera appelée *axe des coordonnées cartésiennes*, le point O *origine des coordonnées*.

NOTATION 22.1. L'ensemble des applications fondamentales métriques des droites sera noté $\mathscr{C}_m$, et l'ensemble de celles de la droite $\mathbf{a}$ sera noté $\mathscr{C}_m(\mathbf{a})$.

Théorème 22.1. *Toute application fondamentale métrique d'une droite permanente métrique est un homéomorphisme dont l'ensemble des valeurs est* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soient $O, P \in \mathbf{a} \in \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{M}_\infty$, et soit dans la définition 22.1 d'abord $O \preccurlyeq P$. En termes d'un temps métrique commun, $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbf{a}}$, on a $O^{\cdot}(t)P^{\cdot}\left(t + \dfrac{p}{2}\right)$, où (définition 14.1) $p = e(\hat{t}_{O:P})$ et $\hat{x}(P) = \overline{OP} = \dfrac{cp}{2}$.

Lorsque $O \succ P$, on a également $O^{\cdot}(t)P^{\cdot}\left(t + \dfrac{p}{2}\right)$, mais $\hat{x}(P) = -\dfrac{cp}{2}$.

En exprimant la définition 19.1, appliquée à $f_O^\alpha : \mathbf{a} \mapsto \Sigma_O$, en termes de la restriction du temps métrique commun $\hat{t}$ à Σ_O, on y doit écrire, en substituant X par P,

$$P \preccurlyeq O \Rightarrow O^{\cdot}(t_\alpha - p)P^{\cdot}\left(t_\alpha - \frac{p}{2}\right)O^{\cdot}(t_\alpha)$$

et

$$P \succ O \Rightarrow O^{\cdot}(t_\alpha)P^{\cdot}\left(t_\alpha + \frac{p}{2}\right)O^{\cdot}(t_\alpha + p),$$

où $p = e(\widehat{t_{O:P}})$. Donc $f_O^\alpha(P) = \lambda = g(t)$, où $t = t_\alpha \pm p$ (et $p \geqslant O$), suivant que $P \succ O$ ou $P \preccurlyeq O$, et où g désigne l'inverse de la fonction fondamentale du temps, $\hat{t}$ en O. Donc

$$t = t_\alpha \pm p = \hat{t} \circ f_O^\alpha(P).$$

Mais $\hat{x}(P) = \pm \dfrac{cp}{2}$ suivant que $P \succ O$ ou $P \preccurlyeq O$, par conséquent

$$\hat{x}(P) = \frac{c}{2}\,[\hat{t} \circ f_O^\alpha(P) - t_\alpha].$$

Or, $f_O^\alpha : \mathbf{a} \mapsto \Sigma_O$ est un homéomorphisme (théorème 20.6) et $\hat{t} : \Sigma_O \mapsto \mathbb{R}$ l'est également (définition 11.1 et théorème 14.1), donc $\hat{x} : \mathbf{a} \mapsto \mathbb{R}$ est un homéomorphisme.

Comme $P \prec P' \Rightarrow \hat{x}(P) < \hat{x}(P')$, l'application est croissante.

Théorème 22.2. *Soit* $\mathbf{a} \in \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{M}_\infty$ *et* $\hat{x} \in \mathscr{C}(\mathbf{a})$. *Alors,*

$$\hat{x} \in \mathscr{C}_m(\mathbf{a}) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall P, Q \in a)\,[\,|\hat{x}(P) - \hat{x}(Q)| = \overline{PQ}],$$

Démonstration. On a d'après la définition 22.1 $\hat{x}(P) = \overline{OP}$, $\hat{x}(Q) = \overline{OQ}$. Supposons que $O \preccurlyeq P \prec Q$, donc $O\text{-}P\text{-}Q$. Selon le théorème 21.3,

$$\overline{OP} = h\,\overline{OQ} \quad \Rightarrow \quad \overline{OP} = k\,\overline{PQ}, \quad \text{où } k = \frac{h}{1-h},$$

donc

$$h = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{\hat{x}(P)}{\hat{x}(Q)}, \quad \text{d'où} \quad \frac{1-h}{h} = \frac{\hat{x}(Q) - \hat{x}(P)}{\hat{x}(P)},$$

et d'autre part

$$\overline{PQ} = \frac{1-h}{h}\,\overline{OP},$$

par conséquent

$$\overline{PQ} = \hat{x}(Q) - \hat{x}(P) = |\hat{x}(P) - \hat{x}(Q)|.$$

Si $P \prec O \prec Q$ ou $P \prec Q \prec O$, ainsi que dans le cas où $Q \prec P$, la démonstration est analogue.

Inversement, supposons que $\hat{x} \in \mathscr{C}(\mathbf{a})$ et

$$\overline{PQ} = \hat{x}(P) - \hat{x}(Q), \qquad \forall P, Q \in \mathbf{a}.$$

Comme $\hat{x}(O) = O$, on a $\overline{OP} = |\hat{x}(P)|$. D'après la définition 20.7 $\hat{x}$ est une fonction croissante sur **a** orientée, par conséquent

$$O \prec P \ \Rightarrow\ \hat{x}(P) > O, \quad \text{donc} \quad \hat{x}(P) = \overline{OP},$$

$$O \succ P \ \Rightarrow\ \hat{x}(P) < O, \quad \text{donc} \quad \hat{x}(P) = -\overline{OP},$$

ce qui est conforme à la définition 22.1; donc $\hat{x} \in \mathscr{C}_m(\mathbf{a})$.

Théorème 22.3. *Soient* $\hat{x} \in \mathscr{C}_m(\mathbf{a})$ *et* $\hat{x}' \in \mathscr{C}(\mathbf{a})$, *définis sur la même droite* **a**. *Pour que* $\hat{x}' \in \mathscr{C}_m(\mathbf{a})$, *il faut et il suffit que* $\hat{x}'$ *soit une fonction linéaire de* x, *soit* $x' = ax + b$. *En symboles*:

$$(\forall \mathbf{a} \in \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{M}_\infty)(\forall \hat{x} \in \mathscr{C}_m(\mathbf{a}))(\forall \hat{x}' \in \mathscr{C}(\mathbf{a}))[\hat{x}' \in \mathscr{C}_m(\mathbf{a}) \Leftrightarrow x' = ax + b].$$

Démonstration. Soient $P, Q, R \in \mathbf{a}$ et $P \prec Q \prec R$. Comme $\hat{x} \in \mathscr{C}_m(\mathbf{a})$, on a selon la définition 22.1 $x_P < x_Q < x_R$, et selon le théorème 22.2,

$$x_Q - x_P = k(x_R - x_P), \quad \text{où} \quad k = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}}.$$

Si $\hat{x} \in \mathscr{C}_m(\mathbf{a})$, on a de la même manière $x'_P < x'_Q < x'_R$, et

$$x'_Q - x'_P = k(x'_R - x'_P).$$

La constante k est la même, car selon le théorème 17.2 $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{PR}}$ est indépendant de la distance unité.

Par conséquent,

$$\frac{x'_Q - x'_P}{x_Q - x_P} = \frac{x'_R - x'_P}{x_R - x_P} = a,$$

où a est une constante positive. Il en résulte $x' = ax + b$.

Inversement, comme selon le théorème 22.2,

$$|x_P - x_Q| = \overline{PQ}, \qquad \forall P, Q \in \mathbf{a},$$

et que $x' = ax + b$, on a

$$|x'_P - x'_Q| = a\overline{PQ},$$

ce qui se réduit à un changement de distance unité. Donc $\hat{x}' \in \mathscr{C}_m(\mathbf{a})$.

CHAPITRE V

GEOMETRIE DES ESPACES PERMANENTS

23. PLANS ET ESPACES PERMANENTS

La Variété que nous construisons devant être celle de la Relativité Restreinte, l'une de ses quatre dimensions sera celle du temps, et les trois autres appartiendront à l'espace au sens strict du mot (espace associé). La géométrie d'un tel espace peut être conçue de deux manières: ou bien comme structure d'un aspect „instantané" de la Variété, donc en considérant la quasi-totalité des points matériels à un „même instant" d'un temps supposé commun, ou bien comme la structure permanente d'un certain sous-ensemble continu de points matériels, qu'on appellera espace, et qui embrassera donc la Variété dans toute sa durée, les relations géométriques étant alors des relations permanentes. C'est la seconde possibilité que nous allons développer. En Géométrie Élémentaire on fait abstraction du temps; ici les relations du temps se trouvent, au contraire, à la base de la Variété et par conséquent de la Géométrie.

Nous commençons par poser les fondements de la géométrie projective d'un „espace permanent projectif", en nous limitant à l'espace projectif ouvert, sans introduire les éléments à l'infini. Plans et espaces permanents seront des ensembles de point matériels en non-coïncidence permanente et satisferont à certaines relations permanentes. Les droites permanentes, introduites dans le chapitre précédent (définition 20.5) sont de tels ensembles, et c'est au moyen d'elles que nous allons définir les plans et les espaces permanents.

NOTATION 23.1. Lorsqu'un point P n'est jamais situé sur une droite permanente $\mathbf{a}$, nous écrirons $P \dot{\notin} \mathbf{a}$. En d'autres termes:

$$P \dot{\notin} \mathbf{a} \overset{\text{def}}{=} (\forall \varphi \in \Sigma_P)\,[\text{non}\,(P \dot{\in} \mathbf{a})\varphi].$$

DEFINITION 23.1. Soient A_1, A_2, $A_3 \in \mathbf{M}$. L'ensemble $\{A_1, A_2, A_3\}$, tel que

$$(\exists\, A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_3A_1 \in \mathscr{P}_1) \ \wedge\ A_1 \dot{\notin} A_2A_3 \ \wedge\ A_2 \dot{\notin} A_3A_1 \ \wedge\ A_3 \dot{\notin} A_1A_2,$$

sera appelé un *triple triangulaire*. Alors, l'ensemble des trois segments de droites $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, $[A_3A_1]$ sera appelé un *triangle*, noté $\Delta A_1A_2A_3$.

NOTATION 23.2. L'ensemble de tous les triples triangulaires sera noté $\mathscr{T}_3$.

DEFINITION 23.2. Soit $\{A_1, A_2, A_3\} \in \mathscr{T}_3$. Tout ensemble de points

$$\{P \mid P \in XY \in \mathscr{P}_1 \ \wedge\ [(X = A_1 \ \wedge\ Y \in [A_2A_3]) \ \vee\ (X = A_2 \ \wedge\ Y \in [A_3A_1]) \ \vee\ (X = A_3 \ \wedge\ Y \in [A_1A_2])]\}$$

sera appelé un *plan permanent*, noté $A_1A_2A_3$.

NOTATION 23.3. Les plans permanents seront désignés aussi par les lettres à doubles traits: $\mathbb{m}$, $\mathbb{s}$, $\mathbb{t}$, ... Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ sont deux droites distinctes d'un plan permanent, celui-ci sera noté aussi par $\mathbf{ab}$. L'ensemble de tous les plans permanents sera noté $\mathscr{P}_2$.

DEFINITION 23.3. Le sous-ensemble $\mathrm{U}[XY]$ du plan permanent $A_1A_2A_3$, où X, Y sont tous les points notés ainsi dans la définition précédente, sera appelé ***région triangulaire*** et noté $[A_1A_2A_3]$.

NOTATION 23.4. Lorsqu'un point P n'est jamais situé dans un plan $\mathbb{h}$, nous écrirons $P \dot{\notin} \mathbb{h}$. En d'autres termes:

$$P \dot{\notin} \mathbb{h} = (\forall \varphi \in \Sigma_P)\,[\mathrm{non}\,(P \dot{\in} \mathbb{h})\varphi\,].$$

DEFINITION 23.4. Soient A_1, A_2, A_3, $A_4 \in \mathbf{M}$. L'ensemble $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, tel que

$$(\exists\, A_1A_2A_3,\ A_1A_2A_4,\ A_1A_3A_4,\ A_2A_3A_4 \in \mathscr{P}_2) \ \wedge$$
$$A_1 \dot{\notin} A_2A_3A_4 \ \wedge\ A_2 \dot{\notin} A_3A_4A_1 \ \wedge\ A_3 \dot{\notin} A_4A_1A_2 \ \wedge\ A_4 \dot{\notin} A_1A_2A_3,$$

sera appelé un *quadruple tétraédrique*. Alors, l'ensemble des quatre régions triangulaires $[A_1A_2A_3]$, $[A_1A_2A_4]$, $[A_1A_3A_4]$, $[A_2A_3A_4]$ sera appelé un *tétraèdre*, noté $\Delta A_1A_2A_3A_4$.

NOTATION 23.5. L'ensemble de tous les quadruples tétraédriques sera noté $\mathscr{T}_4$.

DEFINITION 23.5. Soit $\{A_1A_2A_3A_4\} \in \mathscr{T}_4$. Tout ensemble de points

$$\{P \mid P \in XY \in \mathscr{P}_1 \wedge [(X = A_1 \wedge Y \in [A_2A_3A_4]) \vee (X = A_2 \wedge Y \in [A_3A_4A_1]) \vee (X = A_3 \wedge Y \in [A_4A_1A_2]) \vee (X = A_4 \wedge Y \in [A_1A_2A_3]) \vee (X \in [A_1A_2] \wedge Y \in [A_3A_4]) \vee (X \in [A_1A_3] \wedge Y \in [A_2A_4]) \vee (X \in [A_1A_4] \wedge Y \in [A_2A_3])]\}$$

sera appelé un *espace permanent*, noté $A_1A_2A_3A_4$.

NOTATION 23.6. Les espaces permanents seront désignés aussi par les majuscules à doubles traits: $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \ldots$ L'ensemble de tous les espaces permanents sera noté $\mathscr{P}_3$.

24. LES AXIOMES DE POSITION ET LEURS CONSEQUENCES

Remarque. La géométrie de l'espace permanent que nous avons en vue, doit être euclidienne, donc il nous suffirait d'énoncer simplement l'axiome suivant:

AXIOME DE GEOMETRIE. — *Tout espace permanent L-métrique est isométrique à l'espace euclidien de trois dimensions.*

Dans cette isométrie les points matériels d'un espace permanent L-métrique $\mathbb{E}$ sont les images des points de l'espace euclidien. On démontrerait alors que les droites et les plans, permanents, de $\mathbb{E}$ sont les images des droites et des plans de l'espace euclidien.

Les axiomes V 4 et VIII compléteraient alors le groupe des „axiomes de géométrie".

Or, nous préférons que le système d'axiomes que nous choisissons soit indépendant de toute géométrie; qu'au contraire, la géométrie, celle de l'espace permanent (et qui doit être euclidienne) soit érigée sur les fondements axiomatiques du „monde" des points matériels et événements instantanés.

Nous établirons donc de manière indépendante dans l'espace permanent L-métrique la validité d'un système complet d'axiomes connus de la géométrie élémentaire, ce qui demandera l'introduction de certains axiomes élémentaires (V 1—4, VI, VII 1—2 et VIII) et la démonstration de quelques théorèmes qui correspondront à certains axiomes de la géométrie élémentaire (euclidienne).

AXIOME V 1. $(\forall \mathbb{E} \in \mathscr{P}_3)(\forall A, B \in \mathbb{E})[A \neq B \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists AB \in \mathscr{P}_1)[AB \subset \mathbb{E}]]$.

En d'autres termes: *Quels que soient dzux points distincts l'un espace permanent, au moins une droite permanente de cet espace existe, qui contient ces deux points.*

AXIOME V 2. $(\forall \mathbb{E} \in \mathscr{P}_3)$ $(\forall A, B, C, D, E \in \mathbb{E})$ $[\{A, B, C\} \in \mathscr{T}_3 \wedge$

$\wedge$ A-D-C $\wedge$ B-E-$D \Rightarrow (\exists F \in \mathbb{E})[A$-$F$-$B \wedge C$-$E$-$F]]$.

En d'autres termes: *Soit in triple triangulaire $\{A, B, C\}$, contenu dans un espace permanent. Si D, E sont deux points du même espace, D entre A et C, et E entre B et D, alors un point F du même espace existe entre A t B, tel que E soit entre C et F.*

AXIOME V 3.

$(\forall \mathbb{E} \in \mathscr{P}_3)(\forall \mathbb{h}, \mathbb{g} \subset \mathbb{E}) \forall A [A \in \mathbb{h} \cap \mathbb{g} \Rightarrow \exists B [A \neq B \wedge B \in \mathbb{h} \cap \mathbb{g}]]$.

En d'autres termes: *Si deux plans d'un espace permanent ont un point commun, ils ont au moins encore un point commun.*

AXIOME V 4. $(\forall \mathbb{E} \in \mathscr{P}_3)[\mathbf{M} \dot{\subset} \mathbb{E}]$.

En d'autres termes: *Quel que soit un espace permanent, la totalité des points matériels y est constamment située.*

R e m a r q u e s. On reconnait dans les axiomes V 1—3 certains axiomes de la géométrie élémentaire: dans V 1 et 3 deux axiomes d'incidence, dans V 2 l'axiome d'ordre dans le plan. L'axiome V 4 exprime que **M** est situé (non pas contenu) dans tout espace permanent. Il s'agit dans tous ces axiomes de la „position permanente" de certains points et ensembles de points.

Les axiomes V 1—3, ajoutés à ceux des groupes I à IV, suffisent pour développer dans un espace permanent l'image du fragment de la géométrie élémentaire, qui découle de ses axiomes d'incidence et d'ordre.

Comme $\mathscr{P}_1 \subset \mathscr{R}(\omega, \omega')$, les théorèmes sur les ensembles rectilignes, tels que 18.8 a 18.11, ainsi que les définitions, telles que 18.7, de l'ordre naturel, s'appliquent aux droites permanentes. Ceci est également vrai en ce qui concerne les théorèmes du paragraphe 20, d'après lesquels on a par exemple (théorèmes 20.10 et 11) lorsque $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathscr{P}_1$:

$$\mathbf{a} \ddot{\subset} \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} \dot{\subset} \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} \doteq \mathbf{b},$$

ainsi que (théorème 20.13):

$$(\forall \mathbf{a}, \mathbf{b})\ (\forall P, Q \in \mathbf{a})\ [P \neq Q \ \wedge\ P, Q \dot{\in} \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} \doteq \mathbf{b}].$$

Démontrons les théorèmes suivants:

Théorème 24.1.

$$\forall\, \mathbb{E}\, (\forall A, B, C \in \mathbb{E})\ [\{A, B, C\} \in \mathscr{T}_3 \Rightarrow (\forall \mathbf{a} \subset \mathbb{E})\ [\{A, B, C\} \not\subset \mathbf{a}]].$$

En d'autres termes: *Si trois points d'un espace permanent font un triple triangulaire, ils n'appartiennent pas à une même droite permanente de cet espace.*

Démonstration. Selon la définition 23.1 $AB \in \mathscr{P}_1$, donc $A \neq B$. Or, $A, B \in \mathbb{E}$, donc (axiome V 1) une droite $\mathbf{a}$ de $\mathbb{E}$ existe, telle que $A, B \in \mathbf{a}$. Donc $AB \doteq \mathbf{a}$ (théorème 20.13). D'après la définition 23.1 $C \mathrel{\dot{\notin}} AB$. Or

$$C \mathrel{\dot{\notin}} AB \ \wedge\ AB \doteq \mathbf{a} \Rightarrow C \mathrel{\dot{\notin}} \mathbf{a},$$

et d'autant plus, $C \notin \mathbf{a}$, d'où le théorème 24.1.

Théorème 24.2. $\forall\, \mathbb{E}\, (\forall A \in \mathbb{E})\, (\forall\, BC \subset \mathbb{E})\, [A \mathrel{\dot{\notin}} BC \Rightarrow \{A, B, C\} \in \mathscr{T}_3]$.

Démonstration. Si on avait $(B \dot{\in} CA)\beta$ au moins pour un β, alors

$$(\exists\, Q \in CA)\, [(B \doteq Q)\, \beta].$$

Comme $CA \in \mathscr{R}$, l'un des trois points A, C, Q serait d'après la définition 18.2 entre les deux autres, par exemple C-Q-A, et alors $\langle C^{\cdot}\text{-}Q^{\cdot}\text{-}\rangle A^{\cdot}$, donc

$$\exists \alpha\, [\langle C^{\cdot}\text{-}Q\beta\text{-}\rangle A\alpha],$$

d'où $\langle C^{\cdot}\text{-}B\beta\text{-}\rangle A\alpha$, donc $(A \dot{\in} BC)\alpha$, ce qui contredirait à l'hypothèse. Il en est de même si Q-A-C ou bien A-C-Q. Par conséquent $B \mathrel{\dot{\notin}} CA$.

On montre de la même manière que $C \notin AB$. Donc (définition 23.1) $\{A, B, C\} \in \mathscr{T}_3$.

Comme les droites permanentes sont homéomorphes à l'ensemble ouvert $\mathbb{R}$ (théorème 20.7) on a:

Théorème 24.3. $(\forall \mathbf{a} \subset \mathbb{E})(\forall A, B \in \mathbf{a})[A \neq B \Rightarrow (\exists C \in \mathbf{a})[A\text{-}B\text{-}C]]$.

Le théorème suivant présente une inversion dans l'axiome V 2.

Théorème 24.4 $\forall \mathbb{E}(\forall A, B, C, D, F \in \mathbb{E})[\{A, B, C\} \in \mathscr{T}_3 \wedge$

$$\wedge\ A\text{-}D\text{-}C \wedge A\text{-}F\text{-}B \Rightarrow (\exists E \in \mathbb{E})[B\text{-}E\text{-}D \wedge C\text{-}E\text{-}F]].$$

Démonstration. Elle s'appuie sur la définition 20.3 de la droite permanente et le théorème 18.11 (ordre linéaire), ainsi que sur les définitions 23.1 et 2, l'axiome V 2 et les théorèmes 24.1 à 3. En outre, la démonstration suit de près celle du théorème analogue de la géométrie élémentaire.[26] Nous la donnons donc en raccourci.

Comme $\{A, B, C\} \in \mathscr{T}_3$, on a aussi $(\exists\ AB, BC, CA)$, $D \in AC$, $F \in AB$. D'après le théorème 24.2

$$(\exists G \in AC)[D\text{-}A\text{-}G].$$

Comme $B \notin AC$, on a $B \notin CG$, d'où (théorème 24.3) $\{B, C, G\} \in \mathscr{T}_3$. Par conséquent (axiome V 2) $\exists H[C\text{-}F\text{-}H \wedge B\text{-}H\text{-}G]$.

D'une manière analogue on conclut $\{B, D, G\} \in \mathscr{T}_3$, d'où

$$\exists J[D\text{-}F\text{-}J \wedge B\text{-}J\text{-}G].$$

puis $\{A, C, J\} \in \mathscr{T}_3$, d'où $\exists K\ [C\text{-}F\text{-}K \wedge A\text{-}K\text{-}J]$. On montre ensuite que $B\text{-}J\text{-}H$, et puisque $\{B, D, H\} \in \mathscr{T}_3$, on a

$$\exists E[H\text{-}F\text{-}E \wedge B\text{-}E\text{-}D].$$

---

[26] Voir par ex.: „Géométrie Élémentaire — Fondements et éléments de la géométrie euclidienne" de l'auteur. (Manuels universitaires, Belgrade 1961. En serbe.).

Or,

$$A\text{-}D\text{-}C \ \wedge \ B\text{-}E\text{-}D \ \Rightarrow \ \exists P[A\text{-}P\text{-}B \ \wedge \ C\text{-}E\text{-}P],$$

donc $\{P\} = AB \cap CE$. Enfin, comme $H\text{-}F\text{-}E \ \wedge \ H\text{-}F\text{-}C$, on a $F \in CE$. D'autre part $F \in AB$, donc $P = F$ et par conséquent $\exists E[B\text{-}E\text{-}D \ \wedge C\text{-}E\text{-}F]$.

Rappelons qu'en vertu de la définition 18.2 $\mathscr{P}_1 \subset \mathscr{N}(\omega, \omega')$ et démontrons que c'est également vrai pour les plans et espaces permanents. Droites, plans et espaces permanents sont des ensembles de points matériels en non-coïncidence permanente; toute coïncidence y est identité.

Théorème 24.5. $\mathscr{P}_2 \subset \mathscr{N}(\omega, \omega')$ *et* $\mathscr{P}_3 \subset \mathscr{N}(\omega, \omega')$.

Démonstration. Soit $ABC \in \mathscr{P}_2$. Dans la définition 23.2 deux droites XY distinctes, soit X_1Y_1 et X_2Y_2, n'ont en vertu du théorème 20.10 qu'un seul point commun, les autres points de l'une d'elles n'étant jamais situés sur l'autre, et réciproquement. En effet:

1. Si $X_1 = X_2 = A$ et qu'alors $Y_1, Y_2 \in [BC]$, $Y_1 \neq Y_2$, le point A est le seul point commun, tandis que les autres points de l'une de ces droites ne sont jamais situés sur l'autre droite, car autrement on aurait $X_1Y_1 \doteq X_2Y_2$ (théorème 20.10). La conclusion est la même lorsque $X_1 = X_2 = B$ ou C.

2. Si $X_1 \neq X_2$ (par exemple $X_1 = A$, $X_2 = B$, et si par conséquent $Y_1 \in [BC]$, $Y \in [CA]$) on a d'après le théorème 24.4, en négligeant les cas triviaux,

$$\exists E[X_1Y_1 \cap X_2Y_2 = \{E\}],$$

les autres points de l'une de ces droites n'étant jamais situés sur l'autre (théorème 20.10). Donc, $ABC \in \mathscr{N}(\omega, \omega')$, et par conséquent $\mathscr{P}_2 \subset \mathscr{N}(\omega, \omega')$.

Pour démontrer que $\mathscr{P}_3 \subset \mathscr{N}(\omega, \omega')$, on considère de façon analogue, dans $ABCD \in \mathscr{P}_3$, deux droites XY, soit X_1Y_1 et X_2Y_2, contenues dans la définition 23.5, et distingue trois cas:

1. $X_1 = X_2 \in \{A, B, C, D\}$,

2. $X_1 \neq X_2$ (par exemple, $X_1 = A$, $X_2 = B$), et $X_1Y_1 \cap X_2Y_2 = \emptyset$,

3. $X_1 \neq X_2$ et $\exists E[X_1Y_1 \cap X_2Y_2 = \{E\}]$.

Dans tous ces cas il n'y a, non plus, grâce au théorème 20.10, aucun point de l'une de ces deux droites, qui serait jamais situé sur l'autre sauf leur seul point commun (cas 1 et 3). Donc, $ABCD \in \mathscr{N}(\omega, \omega')$, et par conséquent $\mathscr{P}_3 \subset \mathscr{N}(\omega, \omega')$.

Théorème 24.6. $\forall \mathbb{E} (\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \subset \mathbb{E}) (\forall A, B) [A \neq B \;\wedge$

$$\wedge\; A, B \in \mathbf{a} \cap \mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{a} = \mathbf{b}].$$

En d'autres termes: *Quels que soient deux points distincts d'un espace permanent, il existe au plus une droite permanente du même espace et qui contient ces deux points.*

Démonstration. Selon le théorème 20.10 $\mathbf{a} \doteq \mathbf{b}$, donc (définitions 18.1—4 et 18.7—8)

$$(\forall P \in \mathbf{a}) (\forall \varphi \in \Sigma_P) (\exists Q \in \mathbf{b}) [(P \doteq Q)\varphi].$$

Or $\mathbf{a}, \mathbf{b} \subset \mathbb{E}$, donc $P, Q \in \mathbb{E}$. Mais $\mathbb{E} \in \mathscr{N}$ (théorème 24.5), donc

$$(P \doteq Q)\varphi \;\Rightarrow\; P = Q \;\Rightarrow\; \mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

Théorème 24.7. $\forall \mathbb{E} (A, B, C \in \mathbb{E}) [\{A, B, C\} \in \mathscr{T}_3 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; (\exists\, ABC \in \mathscr{P}_2) [ABC \subset \mathbb{E}]].$$

Démonstration. Puisque $\{A, B, C\} \in \mathscr{T}_3$, et que selon l'axiome V 1 toutes les droites de la définition 23.2 existent, le plan $ABC \subset \mathbb{E}$ existe aussi.

Par conséquent:

Théorème 24.8. $\forall \mathbb{E} (\forall A, B, C \in \mathbb{E}) [\{A, B, C\} \in \mathscr{T}_3 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; (\exists\, \mathbb{h} \subset \mathbb{E}) [A, B, C \in \mathbb{h}]].$$

En d'autres termes: *Quels que soient trois points d'un espace permanent et qui forment un triple triangulaire, au moins un plan permanent de cet espace existe, qui contient ces trois points.*

Théorème 24.9.

$$\forall \mathbb{E} (\forall\, ABC \subset \mathbb{E}) (\forall L, M, N \in ABC) [\{L, M, N\} \in \mathscr{T}_3 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (\exists\, LMN \;\wedge\; ABC = LMN)].$$

Démonstration. Ici encore la démonstration suit de près celle du théorème analogue de la géométrie élémentaire,[27] en s'appuyant sur les axiomes V 1 et 2. Contentons nous de noter les trois lemmes qui précèdent la démonstration que nous avons en vue, et les principales étapes de celle-ci. Ce sont les lemmes:

1. $\forall F, G\,[A\text{-}F\text{-}B \;\wedge\; A\text{-}G\text{-}C \;\Rightarrow\; \exists\,[FG] \subset ABC]$.

2. $\forall H\,[B\text{-}C\text{-}H \;\Rightarrow\; \exists\, AH \subset ABC]$.

3. $\forall F, G\,[A\text{-}F\text{-}B \;\wedge\; A\text{-}G\text{-}C \;\Rightarrow\; \exists\, FG \subset ABC]$.

Nous démontrons ensuite:

a) $\forall D\,[B\text{-}D\text{-}C \;\Rightarrow\; ABC = ABD]$,

b) $\forall D\,[D \in ABC \;\wedge\; D \notin AB \;\Rightarrow\; ABC = ABD]$,

c) le théorème 24.9 dans sa forme générale.

Le théorème suivant est une conséquence évidente du précédent.

Théorème 24.10.

$$\forall\, \mathbb{E}\, (\forall \mathbb{h}, \mathbb{g} \in \mathbb{E})\, (\forall A, B, C \in \mathbb{E})\, [(\{A, B, C\} \in \mathscr{T}_3 \;\wedge\; \{A, B, C\} \subset \subset \mathbb{h} \cap \mathbb{g}) \;\Rightarrow\; \mathbb{h} = \mathbb{g}].$$

En d'autres termes: *Quels que soient trois points d'un espace permanent et qui forment un triple triangulaire, il existe au plus un plan permanent du même espace et qui contient ces trois points.*

Théorème 24.11.

$$\forall\, \mathbb{E}\, (\forall \mathbf{a} \subset \mathbb{E})\, (\forall \mathbb{h} \subset \mathbb{E})\, (\forall A, B \in \mathbb{E})\, [(A \neq B \;\wedge\; A, B \in \mathbf{a} \cap \mathbb{h}) \;\Rightarrow\; \mathbf{a} \subset \mathbb{h}].$$

En d'autres termes: *Si une droite permanente d'un espace permanent a deux points distincts en commun avec un plan du même espace, cette droite est contenue dans ce plan.*

---

[27] *Ibid.*, théorèmes 7.3 à 7.6.

Démonstration. Soit $\mathbb{h} = LMN$. Comme $\{L, M, N\} \in \mathscr{T}_3$, au moins l'un de ces trois points, soit L, n'est jamais situé sur $\mathbf{a}$ (théorème 24.1), donc $\{A, B, L\} \in \mathscr{T}_3$ (théorème 24.3), et $A, B, L \in \mathbb{h}$. D'après le théorème 24.9 $ABL = \mathbb{h}$, donc $AB \subset \mathbb{h}$ (définition 23.2), donc $\mathbf{a} \subset \mathbb{h}$ (théorème 24.6).

Comme $\forall \mathbb{E} [(\mathbb{E} \dot{\subset} \mathbf{M}) \Sigma]$, on a en vertu de l'axiome V 4:

Théorème 24.12. $\forall \mathbb{E} [\mathbf{M} \doteq \mathbb{E}]$.

$$\forall \mathbf{A} \forall \mathbb{E} [\mathbf{A} \subset \mathbb{E}].$$

$$\forall \mathbb{E}, \mathbb{F} [\mathbb{E} \doteq \mathbb{F}].$$

Théorème 24.13. $\forall \mathbb{E} [\mathbb{E} \subset \mathbf{M}_0]$.

$$\forall \mathbb{E} (\forall \mathbf{A} \subset \mathbb{E}) [\mathbf{A} \subset \mathbf{M}_0].$$

Démonstration. D'après la définition 20.3 toute droite permanente fait partie de $\mathbf{M}_0$. Or, tout espace permanent est une réunion de droites permanentes, donc il fait partie de $\mathbf{M}_0$; par conséquent toute partie d'un espace permanent est contenue dans $\mathbf{M}_0$.

Ajoutons le théorème suivant, concernant les événements instantanés et les points d'un espace permanent.

Théorème 24.14. $(\forall \mathbb{E} \in \mathscr{P}_3) (\forall \varphi \in \Sigma) (\exists P \in \mathbb{E}) [P\varphi]$.

En d'autres termes: *Quel que soit un espace permanent* $\mathbb{E}$, *tout événement instantané* φ *a lieu* (*aussi*) *en un point de* $\mathbb{E}$.

Démonstration. Suivant l'axiome I 1, $\forall \varphi \; \exists S \; [S\varphi]$. Or, en vertu de l'axiome V 4, $\forall \mathbb{E} [(\mathbf{M} \dot{\subset} \mathbb{E}) \Sigma]$, donc $(S \dot{\in} \mathbb{E})\varphi$, ce qui signifie

$$\forall \varphi (\exists P \in \mathbb{E}) [(P \doteq S)\varphi],$$

d'où $\exists P [P\varphi]$.

25. PARALLELISME

Nous formulons la définition des droites parallèles comme il suit:

DEFINITION 25.1. Soit $\mathbb{E}$ un espace permanent et $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ deux droites de $\mathbb{E}$.

$$\mathbf{a} \,||\, \mathbf{b} = (\exists \mathbb{h} \in \mathbb{E}) [\mathbf{a}, \mathbf{b} \subset \mathbb{h} \quad \wedge \quad (\mathbf{a} \cap \mathbf{b} = \varnothing \quad \vee \quad \mathbf{a} = \mathbf{b})].$$

On dira que $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont *parallèles*. Lorsque $\mathbf{a} \,||\, \mathbf{b}$, mais $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, on dira que $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont parallèles *au sens strict*.

DEFINITION 25.2. $\mathbf{a} \,||\, \mathbb{h} = (\mathbf{a}, \mathbb{h} \subset \mathbb{E}) \quad \wedge \quad (\mathbf{a} \cap \mathbb{h} = \varnothing \quad \vee \quad \mathbf{a} \subset \mathbb{h}).$

$$\mathbb{h} \,||\, \mathbb{g} = (\mathbb{h}, \mathbb{g} \subset \mathbb{E}) \quad \wedge \quad (\mathbb{h} \cap \mathbb{g} = \varnothing \quad \vee \quad \mathbb{h} = \mathbb{g}).$$

On dira que $\mathbf{a}$ et $\mathbb{h}$, respectivement $\mathbb{h}$ et $\mathbb{g}$ sont *parallèles*. Lorsque $\mathbf{a} \cap \mathbb{h} = \varnothing$ et $\mathbb{h} \cap \mathbb{g} = \varnothing$, c'est le parallélisme *au sens strict*.

Notons le théorème suivant sur l'existence des droites parallèles, et qui précède l'axiome des parallèles.

Théorème 25.1.

$$\forall \mathbb{E} (\forall \mathbb{h} \subset \mathbb{E}) (\forall \mathbf{a} \subset \mathbb{h}) (\forall P \in \mathbb{h}) (\exists \mathbf{b} \subset \mathbb{h}) [P \notin \mathbf{a} \quad \wedge \quad P \in \mathbf{b} \quad \wedge \quad \mathbf{a} \cap \mathbf{b} = \varnothing].$$

En nous tenant à la formulation usuelle, nous énonçons l'axiome des parallèles comme il suit:

AXIOME VI. $\forall \mathbb{E} (\forall \mathbb{h} \subset \mathbb{E}) (\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \subset \mathbb{h}) [(\mathbf{a} \,||\, \mathbf{b} \quad \wedge \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{b}) \quad \wedge$

$$\wedge \quad (\mathbf{a} \,||\, \mathbf{c} \quad \wedge \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{c}) \quad \wedge \quad \mathbf{b} \cap \mathbf{c} \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b} = \mathbf{c}].$$

Par conséquent:

Théorème 25.2.

$$\forall \mathbb{E} (\forall \mathbb{h} \subset \mathbb{E}) (\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \subset \mathbb{h}) [\mathbf{b} \cap \mathbf{c} \neq \varnothing \quad \wedge \quad \mathbf{a} \cap (\mathbf{b} \cup \mathbf{c}) = \varnothing \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b} = \mathbf{c}].$$

Insérons ici la définition suivante, concernant deux sous-ensembles quelconques d'un espace permanent, et par laquelle nous introduisons le signe X (à distinguer du signe $\times$ du produit cartésien):

DEFINITION 25.3. Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathbb{E} \in \mathscr{P}_3$.

$$\mathbf{A} \;\mathsf{X}\; \mathbf{B} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \varnothing \;\wedge\; \mathbf{A} \neq \mathbf{B}.$$

Nous dirons que **A** et **B** *se coupent*.

On a par exemple:

Théorème 25.3. $(\forall \mathbb{h} \subset \mathbb{E})(\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \subset \mathbb{h})[\mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad \vee \quad \mathbf{a} \,||\, \mathbf{b}]$.

$$(\forall \mathbb{h}, \mathbb{g} \subset \mathbb{E})[\mathbb{h} \times \mathbb{g} \quad \vee \quad \mathbb{h} \,||\, \mathbb{g}].$$

Théorème 25.4. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \exists P[\mathbf{a} \cap \mathbf{b} = P]$.

$$\mathbb{h} \times \mathbb{g} \quad \Rightarrow \quad \exists \mathbf{a}[\mathbb{h} \cap \mathbb{g} = \mathbf{a}].$$

26. CONTINUITE DU PLAN ET DE L'ESPACE PERMANENTS

La droite permanente est continue par définition, et homéomorphe à $\mathbb{R}$ (théorème 20.4). La continuité permanente du plan et de l'espace permanents en résulte. Pour l'introduire, nous y définissons des coordonnées continues.

DEFINITION 26.1. Soit $\mathbb{h} \in \mathscr{P}_2$ et $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{P}_1$. Supposons que

$$\forall \mathbb{h}\, (\forall \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{x}, \mathbf{y} \subset \mathbb{h})\, \exists O\, (\forall P \in \mathbb{h})\, [\mathbf{x} \cap \mathbf{y} = O \quad \wedge \quad \mathbf{d}_1 \cap \mathbf{d}_2 = P \quad \wedge$$

$$\wedge \quad \mathbf{d}_1 \,||\, \mathbf{x} \quad \wedge \quad \mathbf{d}_2 \,||\, \mathbf{y}]$$

et soient $\mathrm{f}_1 : \mathbf{x} \mapsto \mathbb{R}$, $\mathrm{f}_2 : \mathbf{y} \mapsto \mathbb{R}$ des applications fondamentales continues (définition 20.7) des droites permanentes $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$. Alors le couple ordonné des axes des coordonnées, $\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle$ sera appelé *repère sémi-affine plan*, et les valeurs

$$\hat{x}(P) = f_1(\mathbf{x} \cap \mathbf{d}_2), \quad \hat{y}(P) = f_2(\mathbf{y} \cap \mathbf{d}_1)$$

seront appelées les *coordonnées continues de P* dans le repère $\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle$.

L'application $g : \mathbb{h} \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, telle que

$$\langle \hat{x}(P), \hat{y}(P) \rangle = g(P), \qquad \forall P \in \mathbb{h},$$

sera appelée *application fondamentale continue du plan permanent* **h** sur $\mathbb{R}^2$.

Normalement, $\hat{x}(O) = \hat{y}(O) = 0$.

On montre facilement que g est biunivoque.

Pour munir $\mathbb{h}$ d'une topologie, on peut partir de la topologie de $\mathbb{R}^2$ où on a pris pour voisinage d'un point $\langle x, y\rangle$ les domaines ouverts, homéomorphes au disque (contenant ce point et limités par des courbes fermées simples). Désignons par P' un point $\langle x, y\rangle$ quelconque de $\mathbb{R}^2$, donc $P' = g(P)$. Soit alors $\mathrm{U}(P')$ un tel voisinage de P' et $\mathbf{V}(P) = g^{-1}(\mathrm{U}(P'))$. Soit $\mathscr{B}_2$ cette base de topologie de $\mathbb{R}^2$. Alors l'image $g^{-1}(\mathscr{B}_2)$ sur $\mathbb{h}$, de la base $\mathscr{B}_2$, et que nous noterons $\mathscr{B}_2{}^\star$, peut être choisie pour base de topologie de $\mathbb{h}$. En effet, grâce à ce que g est biunivoque, on montre facilement [28]:

Théorème 26.1. *L'image $\mathscr{B}_2{}^\star$ sur $\mathbb{h}$, de la base $\mathscr{B}_2$ de topologie de $\mathbb{R}^2$ est une base de topologie de $\mathbb{h}$.*

Théorème 26.2. *La bijection g est bicontinue.*

Démonstration. Soient E et F deux espaces topologiques quelconques. Une application f de E dans F est continue dans E si pour tout voisinage Y de la base de topologie de F, $f^{-1}(Y)$ est un ouvert dans E. Or, pour tout $\mathrm{U} \in \mathscr{B}_2$ on a $\mathbf{V} = g^{-1}(\mathrm{U}) \in \mathscr{B}_2{}^\star$, et $\mathbf{V}$ est un ouvert dans $\mathbb{h}$. Inversement, pour tout $\mathbf{V} \in \mathscr{B}_2{}^\star$ on a $\mathrm{U} = g(\mathbf{V}) \in \mathscr{B}_2$, et U est un ouvert dans $\mathbb{R}^2$.

Comme g est bicontinue et biunivoque, c'est un homéomorphisme, donc:

Théorème 26.3. *Par la base $\mathscr{B}_2$ de topologie de $\mathbb{R}^2$ et la base $\mathscr{B}_2{}^\star$ de topologie de $\mathbb{h}$, tout plan permanent $\mathbb{h}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$.*

Une considération analogue s'applique aux espaces permanents.

DEFINITION 26.2. Soit $\mathbb{E} \in \mathscr{P}_3$ et $\mathbb{h}, \mathbb{g}, \mathbb{s}, \mathbb{h}_0, \mathbb{g}_0, \mathbb{s}_0 \in \mathscr{P}_2$. Supposons que

$$\forall\, \mathbb{E}\,(\forall \mathbb{h}, \mathbb{g}, \mathbb{s}, \mathbb{h}_0, \mathbb{g}_0, \mathbb{s}_0 \subset \mathbb{E})\, \exists O\, (\forall P \in \mathbb{E})\, [\mathbb{h}_0 \cap \mathbb{g}_0 \cap \mathbb{s}_0 = O \quad \wedge \quad \mathbb{h} \cap \mathbb{g} \cap \mathbb{s} = P$$
$$\wedge \;\; \mathbb{h} \,||\, \mathbb{h}_0 \;\; \wedge \;\; \mathbb{g} \,||\, \mathbb{g}_0 \;\; \wedge \;\; \mathbb{s} \,||\, \mathbb{s}_0],$$

et soient, en désignant $\mathbb{h}_0 \cap \mathbb{g}_0$, $\mathbb{g}_0 \cap \mathbb{s}_0$, $\mathbb{s}_0 \cap \mathbb{h}_0$ respectivement par $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$,

$$f_1 : \mathbf{x} \mapsto \mathbb{R}, \qquad f_2 : \mathbf{y} \mapsto \mathbb{R}, \qquad f_3 : \mathbf{z} \mapsto \mathbb{R}$$

---

[28] Voir par ex.: *M. Zamansky*, Introduction à l'algèbre et l'analyse modernes, p. 124.

des applications fondamentales continues. Alors le triple ordonné des axes des coordonnées, $\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}} \rangle$ sera appelé *repère semi-affine dans l'espace*, et les valeurs

$$\hat{x}(P) = f_1(\mathbf{x} \cap \mathbb{s}), \quad \hat{y}(P) = f_2(\mathbf{y} \cap \mathbb{h}), \quad \hat{z}(P) = f_3(\mathbf{z} \cap \mathbb{g})$$

seront appelées les *coordonnées continues de* P dans le repère $\langle \vec{x}, \vec{y}, z \rangle$. L'application $h : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, telle que

$$\langle \hat{x}(P), \ \hat{y}(P), \ \hat{z}(P) \rangle = h(P),$$

sera appelée *application fondamentale continue de* $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{R}^3$.

Normalement, $\hat{x}(O) = \hat{y}(O) = \hat{z}(O) = 0$.

On montre ensuite que l'image $\mathscr{B}_3{}^\star$ sur $\mathbb{E}$, de la base $\mathscr{B}_3$ de topologie de $\mathbb{R}^3$, formée par les boules topologiques, est une base de topologie de $\mathbb{E}$, et que h est un homéomorphisme. Donc,

Théorème 26.4. *Par la base* $\mathscr{B}_3$ *de topologie de* $\mathbb{R}^3$, *et la base* $\mathscr{B}_3{}^\star$ *de topologie de* $\mathbb{E}$, *tout espace permanent* $\mathbb{E}$ *est homéomorphe à* $\mathbb{R}^3$.

NOTATION 26.1. Les repères $\langle \mathbf{x}, \vec{\mathbf{y}} \rangle$ et $\langle \mathbf{x}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}} \rangle$ seront notés aussi par $O\mathbf{xy}$ et $O\mathbf{xyz}$.

Remarque. Les coordonnées continues qu'on vient d'introduire sont, pour ainsi dire, semi-affines, puisqu'on a fait usage du parallélisme.

27. PLANS ET ESPACES PERMANENTS L-METRIQUES

La droite permanente L-métrique ayant été introduite dans le § 22, il nous reste à considérer le plan et l'espace permanents L-métriques, éléments de $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{M}_\infty$ et de $\mathscr{P}_3 \cap \mathscr{M}_\infty$.

NOTATION 27.1. On notera: $\mathscr{E}_n = \mathscr{P}_n \cap \mathscr{M}_\infty$ $(n = 1, 2, 3)$.

D'après le théorème 17.4 on a:

Théorème 27.1. $\forall \mathbb{E} \, (\forall \mathbf{a} \subset \mathbb{E}) \, [\mathbb{E} \in \mathscr{E}_3 \ \Rightarrow \ \mathbf{a} \in \mathscr{E}_1]$.

$$\forall \mathbb{E} \, (\forall \mathbb{h} \subset \mathbb{E}) \, [\mathbb{E} \in \mathscr{E}_3 \ \Rightarrow \ \mathbb{h} \in \mathscr{E}_2].$$

En désignant par d les distances L-métriques, on a:

Théorème 27.2.

$$(\forall \mathbb{E} \in \mathscr{E}_3)(\forall \mathbf{A} \subset \mathbb{E})(\forall A, B, C \in \mathbf{A})[\mathbf{A} \in \mathscr{P}_1 \wedge A\text{-}B\text{-}C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)].$$

Théorème 27.3.

$$(\forall \mathbb{E} \in \mathscr{E}_3)(\forall A, B, C \in \mathbb{E})[\{A, B, C\} \in \mathscr{T}_3 \Leftrightarrow d(A, B) +$$
$$+ d(B, C) > d(A, C)].$$

La distance entre deux points A et B d'un ensemble L-métrique ayant été donnée par le définition 17.3, l'égalite des segments de droites peut être définie:

DEFINITION 27.1. Soient $A, B, A', B' \in \mathbb{E} \in \mathscr{E}_3$. Si $d(A, B) = d(A', B')$, on dira que le segment $[AB]$ est *égal* (ou *congruent*) au segment $[A'B']$. En d'autres termes:

$$[AB] \cong [A'B'] \overset{\text{def}}{=} [d(A, B) = d(A', B')].$$

NOTATION 27.2. On désignera ici une demi-droite $(AP-)$ dont l'origine est A et dont P est un point quelconque (définition 20.6), plus court par $AP..$, un demi-plan dont la frontière est la droite $\mathbf{a}$ et dont P est un point quelconque, par $\mathbf{a}P..$, et un demi-espace dont la frontière est le plan $\mathbb{h}$ et dont P est un point quelconque, par $\mathbb{h}P...$ D'après les définitions: $A \notin AP..$, $\mathbf{a} \not\subset \mathbf{a}P..$, $\mathbb{h} \not\subset \mathbb{h}P...$

On a les trois théorèmes suivants:

Théorème 27.4.

$$(\forall \mathbb{E} \in \mathscr{E}_3)(\forall AP.., \ A'P'.. \subset \mathbb{E})(\forall B \in AP..)(\exists B' \in A'P'..)[[AB] \cong [A'B']].$$

En d'autres termes: *Quelles que soient deux demi-droites $AP..$ et $A'P'..$ de $\mathbb{E}$ et quel que soit un point B de $AP..$, un point B' et un seul, de $A'P'..$ existe, tel que* $[AB] \cong [A'B']$.

Démonstration. Comme $\mathbb{E} \in \mathscr{M}_\infty$, il existe un temps commun, soit $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}}$, et l'on a $d(A. B) = \frac{c}{2} a$, où $a = e(\hat{t}_{A:B})$ (définition 17.3). Il faut montrer que

$$(27.1) \qquad (\exists B' \in A'P'..)[e(\hat{t}_{A':B'}) = a].$$

Envisageons AP, $A'P' \subset \mathbb{E}$. On a suivant la définition 19.1:

$$\forall\alpha\,[\Lambda^{\alpha}_{A'}(A'P') = \Sigma_{A'}]$$

(c.-à-d. l'image par réflexion de la droite a' en A', d'origine α quelconque, est la totalité des événements ayant lieu en A'). Donc (définition 19.1):

$$(\forall\alpha, \lambda \in \Sigma_{A'})\,(\exists X' \in A'P'..)\,[A'\alpha \prec A'\lambda \;\Rightarrow\; f^{\alpha}_{A'}(X') = \lambda \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; A'\alpha\, X'\cdot A'\lambda].$$

De plus

$$\forall\alpha\,\exists\lambda\,\exists t\,[\hat{t}(\lambda) = \hat{t}(\alpha) + a],$$

puisque $\hat{t}\colon \Sigma_{A'} \mapsto \mathbb{R}$ est un homéomorphisme qui assigne à tout $t \in \mathbb{R}$ un λ, donc aussi à $t = \hat{t}(\alpha) + a$. Par conséquent

$$\forall t\;\exists X'\,[A'\cdot(t)\,X'\cdot A'\cdot(t+a)\,],$$

donc $\exists X'\,[e(\hat{t}_{A':X'}) = a]$. En notant $X' = B'$ on a (27.1) et il en résulte $d(A', B') = \frac{c}{2}a$, donc $[AB] \cong [A'B']$.

B' est unique, car si $B'' \in A'P'..$ et $[AB] \cong [A'B'']$, on aurait

$$f^{\alpha}_{A'}(B'') = f^{\alpha}_{A'}(B'),$$

et comme $f^{\alpha}_{A'}$ est un homéomorphisme, $B'' = B'$.

Le théorème suivant est évident en vertu des définitions 17.3 et 27.1.

Théorème 27.5. *Soient $A, B, A', B', A'', B'' \in \mathbb{E} \in \mathscr{E}_3$, quelconques. Alors*

$$[A'B'] \cong [AB] \;\wedge\; [A''B''] \cong [AB] \;\Rightarrow\; [A'B'] \cong [A''B''].$$

Théorème 27.6. *Soient* $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \subset \mathbb{E} \in \mathscr{E}_3$ *et* $A, B, C \in \mathbf{a}$, *ainsi que* $A', B', C' \in \mathbf{a}'$, *quelconques. Alors*

$$A\text{-}B\text{-}C \;\wedge\; A'\text{-}B'\text{-}C' \;\wedge\; [AB] \cong [A'B'] \;\wedge\; [BC] \cong [B'C'] \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; [AC] \cong [A'C'].$$

Démonstration. Comme $\mathbb{E} \in \mathscr{E}_3$, on a suivant la définition 27.1 et en revenant à la notation de la définition 17.3, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ et $\overline{BC} = \overline{B'C'}$. D'après le théorème 17.2 on a $\overline{AB}/\overline{BC} = k$, d'où $k \in \mathbb{R}^+$. Il résulte alors du théorème 21.2:

$$\overline{AB} = \frac{k}{1+k}\overline{AC},$$

donc aussi

$$\overline{A'B'} = \frac{k}{1+k}\overline{A'C'},$$

et par conséquent

$$\overline{AC} = \frac{1+k}{k}\overline{AB} = \frac{1+k}{k}\overline{A'B'} = \overline{A'C'},$$

d'où selon la définition 27.1 $[AC] \cong [A'C']$.

28. LES AXIOMES DE CONGRUENCE ET L'AXIOME D'EXISTENCE D'UN ESPACE PERMANENT L-METRIQUE

Les théorèmes 27.4, 27.5 et 27.6 ont même forme que les trois axiomes linéaires de congruence, tels qu'on les trouve chez *D. Hilbert* [29]. Pour que l'espace permanent L-métrique satisfasse à tous les cinq axiomes de congruence de la géométrie élémentaire (euclidienne) il faut ajouter deux axiomes de „congruence dans le plan". Nous n'admettons pas l'égalité des angles comme relation primitive et donnons donc à ces axiomes une forme qui provient de *P. Veronese* [30].

AXIOME VII 1. *Soit* $\mathbb{E} \in \mathscr{E}_3$, $\mathbf{a}P..$, $\mathbf{a}'P'.. \subset \mathbb{E}$, $A, B \in \mathbf{a}$, $A'B' \in \mathbf{a}'$, *quelconques. Alors*

$$(\forall C \in \mathbf{a}P..)\,(\exists C' \in \mathbf{a}'P'..)\,[\,[AB] \cong [A'B'] \;\Rightarrow\; [AC] \cong [A'C'] \;\wedge$$
$$\wedge\; [BC] \cong [B'C']\,].$$

En outre C' *est unique.*

[29] *D. Hilbert*, Les fondements de la Géométrie, 1899.
[30] *P. Veronese*, Éléments de Géométrie, 1891.

AXIOME VII 2. *Soit* $\mathbb{E} \in \mathscr{E}_3$, ΔABC, $\Delta A'B'C' \subset \mathbb{E}$ *et* $D, D' \in \mathbb{E}$, *quelconques, sauf que*

$$D \in AC.., \quad D' \in A'C'.. \quad (D \neq C, \ D' \neq C').$$

Alors

$$[AB] \cong [A'B'] \ \wedge \ [AC] \cong [A'C'] \ \wedge \ [BC] \cong [B'C'] \ \wedge \ [AD] \cong [A'D'] \ \Rightarrow \\ \Rightarrow \ [BD] \cong [B'D'].$$

L'axiome suivant assure l'existence des espaces permanents L-métriques, et entraîne celle de tous les ensembles d'événements et de points, considérés dans ce travail.

AXIOME VIII. $\exists \mathbb{E} \in \mathscr{E}_3$.

29. REALISATION DE LA GEOMETRIE ELEMENTAIRE DANS L'ESPACE PERMANENT L-METRIQUE

Les axiomes d'incidence et d'ordre de la géométrie élémentaire, où „points", „droites" et „plans" ont été remplacés par „points matériels", „droites permanentes" et „plans permanents", sont valables dans tout espace permanent. Pour fixer les idées, envisageons les groupes I et II des axiomes du système bien connu des „Fondements de la Géométrie" de D. Hilbert. Nous les désignerons, ainsi modifiés, par H I et H II.

H I 1 est identique à notre axiome V 1, et H I 2 au théorème 24.6. La première partie de H I 3 résulte de la définition 20.3, la seconde de l'axiome VIII, en vertu de la définition 23.5. La première partie de H I 4 est identique au théorème 24.8, grâce au théorème 24.1; la seconde partie résulte de la définition 23.2. Ensuite, H I 5 est identique au théorème 24.10, H I 6 au théorème 24.11, H I 7 à l'axiome V 3. L'axiome d'existence H I 8 résulte de l'axiome VIII et de la définition 23.5.

La première partie de H II 1 (disant que A, B, C sont trois points distincts) résulte de la définition 18.1, la seconde partie (disant que A, B, C sont des points d'une droite) résulte de la définition 18.2, de l'axiome V 1 et du théorème 24.6, et la troisième partie du théorème 18.8. Ensuite, H II 2 est identique au théorème 24.2, H II 3 résulte du théorème 18.6, et H II 4 résulte de l'axiome V 2 et des théorèmes 24.4, 24.11 et 18.3.

Par conséquent, la partie de la géométrie élémentaire, qui découle des axiomes d'incidence et d'ordre, est réalisée dans tout espace permanent.

Comme nous l'avons constaté au §28, après l'addition de nos axiomes VII 1 et 2 les axiomes de congruence de la géométrie élémentaire (groupe III de Hilbert) sont également satisfaits dans tout espace permanent L-métrique. L'axiome des parallèles est identique à notre axiome VI, et puisque la droite permanente est continue par définition et homéomorphe à $\mathbb{R}$, l'axiome dit de Dedekind, donc aussi les deux axiomes du groupe V, de Hilbert, sont eux aussi satisfaits. Ainsi la géométrie élémentaire est réalisée dans tout espace permanent L-métrique.

Entre autres, nous pouvons introduire de la manière usuelle des repères cartésiens orthonormés dans le plan et dans l'espace permanents L-métriques. En partant de l'application fondamentale continue, les définitions peuvent s'énoncer comme suit:

DEFINITION 29.1. Supposons que dans la définition 26.1 de l'application fondamentale continue d'un plan permanent $\mathbb{h}$ les axes $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}$ soient perpendiculaires entre eux, et que f_1, f_2 soient des applications fondamentales métriques quelconques, des droites $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$. Alors le *repère* $O\mathbf{xy}$ (ou $\langle\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}\rangle$) sera dit *cartésien orthogonal*. Lorsque les étalons de distance sur $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont ceux du plan $\mathbb{h}$ même, et par conséquent égaux, le repère sera dit *orthonormé*, les coordonnées continues $x(P)$, $y(P)$ d'un point P quelconque de $\mathbb{h}$ seront appelées *coordonnées orthonormées* de P, et l'application $g : \mathbb{h} \mapsto \mathbb{R}^2$, telle que

$$\langle\hat{x}(P),\ \hat{y}(P)\rangle = g(P),$$

sera appelée une *application fondamentale métrique du plan permanent* $\mathbb{h}$.

DEFINITION 29.2. Supposons que dans la définition 26.2 de l'application fondamentale continue d'un espace permanent $\mathbb{E}$ les axes $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}}$ soient perpendiculaires entre eux, et que f_1, f_2, f_3 soient des applications fondamentales métriques quelconques, des droites $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$. Alors le *repère* $O\mathbf{xyz}$ (ou $\langle\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}}\rangle$) sera dit *cartésien orthogonal*. Lorsque les étalons de distance sur ces trois axes sont ceux de $\mathbb{E}$ même, et par conséquent égaux, le *repère* sera dit *orthonormé*, les coordonnées continues $\hat{x}(P), \hat{y}(P)$, $\hat{z}(P)$ d'un point P quelconque de $\mathbb{E}$ seront appelées *coordonnées orthonormées* de P, et l'application $h : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{R}^3$, telle que

$$\langle\hat{x}(P),\ \hat{y}(P),\ \hat{z}(P)\rangle = h(P),$$

sera appelée une *application fondamentale métrique de l'espace permanent* $\mathbb{E}$.

On démontre facilement:

Théorème 29.1. *Pour tout plan et pour tout espace permanents métriques existe une application fondamentale métrique.*

En analogie avec le théorème 22.1 on a:

Théorème 29.2. *Toute application fondamentale métrique d'un plan ou d'un espace permanents métriques est un homéomorphisme dont l'ensemble des valeurs est* $\mathbb{R}^2$, *respectivement* $\mathbb{R}^3$.

Soit $\mathbb{E} \in \mathscr{E}_3$. À tout événement φ correspond un point P de $\mathbb{E}$ et un instant t de $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}}$, de telle sorte que $P\varphi$ et $t = \hat{t}(\varphi)$. Il est clair que cette relation entre les φ et les couples ordonnés $\langle t, P \rangle$ est biunivoque, et on peut montrer que c'est un homéomorphisme. On a donc:

DEFINITION 29.3.

$$f_{\mathbb{E}} \overset{\text{def}}{=} \{ \langle \varphi, \langle t, P \rangle \rangle \mid \varphi \in \Sigma \quad \wedge \quad t = \hat{t}(\varphi) \quad \wedge \quad \hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}} \quad \wedge \quad P \in \mathbb{E} \quad \wedge \quad P\varphi \}.$$

Nous appellerons $f_{\mathbb{E}} : \Sigma \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{E}$ *bijection fondamentale de* Σ *sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$. Les deux éléments de $\langle t, P \rangle$ seront appelés *coordonnées intrinsèques de l'événement* φ *dans l'espace* $\mathbb{E}$. L'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ des couples $\langle t, P \rangle$ sera appelé *temps-espace* ou *espace-temps*.

Puisque $\langle t, P \rangle = f_{\mathbb{E}}(\varphi)$, ainsi que (définition 29.2) $\langle x, y, z \rangle = h(P)$, sont des homéomorphismes, l'application

$$\varphi = f_{\mathbb{E}}^{-1} [t, h^{-1} (\langle x, y, z \rangle)],$$

et que nous noterons de façon plus simple:

$$\varphi = \hat{\varphi}_{\mathbb{E}} (t, x, y, z),$$

est aussi un homéomorphisme.

DEFINITION 29.4.

$$\hat{\varphi}_{\mathbb{E}} \overset{\text{def}}{=} \{ \langle \langle t, x, y, z \rangle, \varphi \rangle \mid t = \hat{t}(\varphi) \quad \wedge \quad \hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}} \quad \wedge \quad \langle x, y, z \rangle = h(P) \quad \wedge$$
$$\wedge \quad P \in \mathbb{E} \quad \wedge \quad P\varphi \quad \wedge \quad \varphi \in \Sigma \}.$$

Nous appellerons $\varphi_{\mathbb{E}} : \mathbb{R}^4 \mapsto \Sigma$ *bijection fondamentale de* $\mathbb{R}^4$ *sur* Σ, et les éléments du quadruple ordonné $\langle t, x, y, z \rangle$ *coordonnées lorentziennes de l'événement* φ *dans l'espace permanent L-métrique* $\mathbb{E}$.

En ajoutant au repère orthonormé *Oxyz*, par analogie aux axes des coordonnées des espaces permanents, une droite orientée „abstraite", munie des valeurs de $\hat{t}$, et que nous appellerons *axe du temps*, nous définissons un repère, noté *Otxyz* et appelé *repère lorentzien*. Nous dirons que *Otxyz* est *lié* à l'espace permanent $\mathbb{E}$.

R e m a r q u e s. L'homéomorphisme $h : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{R}^3$ permet de remplacer $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ par $\mathbb{R}^4$ et d'appeler l'ensemble des quadruples $\langle t, x, y, z \rangle$ également *temps-espace* ou *espace-temps*, dans un sens indirect. — Des définitions analogues aux deux précédentes peuvent s'énoncer pour les plans permanents L-métriques.

CHAPITRE VI

CINEMATIQUE

30. PROPAGATION DE LA LUMIERE

On peut distinguer deux espèces de „mouvements": ceux des points matériels ou ensembles de points matériels, et ceux qui s'expriment en Physique comme propagation de la lumière, ou plus exactement, des ondes électromagnétiques (ou émission des photons). Quant à la lumière, c'est dans notre système axiomatique la *perception d'un événement instantané*, ou d'un ensemble d'événements, qui se *„propage"* dans un ensemble de points matériels, soit par exemple sur une droite, dans un plan ou dans un espace permanents métriques. En conséquence des axiomes et des définitions, cette propagation s'effectue avec la vitesse c égale au „facteur fondamental". Dans l'interprétation de nos considérations en Physique, c'est la vitesse de la lumière dans le vide, donc (comme il a été dit dans l'Introcuction) nous faisons abstraction de l'influence du milieu matériel ou autre sur la propagation de la lumière.

Considérons d'abord la propagation de la perception d'événements instantanés.

DEFINITION 30.1. Soit $A \in \mathbf{M}$, $\alpha \in \Sigma_A$, $\mathbf{E} \subset \mathbf{M}$. L'application

$$\aleph_{A\alpha,\,\mathbf{E}} : \mathbf{E} \mapsto \Sigma,$$

définie par

$$\aleph_{A\alpha,\,\mathbf{E}} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle P, \varphi \rangle \mid A\alpha P\varphi \;\wedge\; P \in \mathbf{E} \},$$

sera appelée *application de propagation dans* **E**, *de la perception de* α, ou *application de propagation dans* **E**, *de lumière instantanée.*

On dira aussi que *la perception de* α *se propage dans* **E**, ou que *la lumière instantanée se propage* de A et α dans **E**, et on appellera $\langle A, \alpha\rangle$ *origine* de la propagation, A *point-origine* et α *événement-origine.*

Si **E** est une demi-droite $AB..$ d'origine A, l'application $\aleph_{A\alpha,\, AB..}$ sera appelée *rayon de la propagation sur* $AB..$*, de la perception de* α, ou *rayon de lumière instantanée.*

Remarques. D'après la définition 30.1, à chaque $P \in \mathbf{E}$ correspond un φ et un seul, donc $\aleph_{A\alpha,\,\mathbf{E}}$ est bien une application de **E** dans Σ, et on a

$$\varphi = \aleph_{A\alpha,\,\mathbf{E}}(P).$$

Soit $\aleph_{A\alpha,\,\mathbf{E}}(\mathbf{E}) = \Phi$. Lorsque $\mathbf{E} \in \mathcal{N}(\omega, \omega')$, alors $\aleph_{A\alpha,\,\mathbf{E}} : \mathbf{E} \mapsto \Phi$ est une bijection, et on a aussi $\aleph_{A\alpha,\,\mathbf{E}}^{-1} : \Phi \mapsto \mathbf{E}$.

Soit $\mathbb{E} \in \mathscr{E}_3$. On a

$$\aleph_{A\alpha,\,\mathbb{E}} = \bigcup_{B \in \mathbb{E}} \aleph_{A\alpha,\, AB..}\,.$$

Remarquons enfin que $\aleph_{A\alpha,\,\mathbb{E}}$ est la restriction $\aleph_{A\alpha,\,\mathbf{M}}/\mathbb{E}$.

Considérons la propagation de la perception d'un événement α dans un ensemble **E** L-métrique, et soit $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbf{E}}$ un temps commun.

Notons $t_\circ = \hat{t}(\alpha)$ et $t = \hat{t}(\varphi)$, où P et φ sont tels que $A\alpha P\varphi$. Rappelons que $A\alpha = A^{\cdot}(t_A)$. Comme

$$\hat{t} \circ \aleph_{A\alpha,\,\mathbf{E}} : \mathbf{E} \mapsto \Phi \mapsto \mathbb{R},$$

on peut énoncer la définition suivante:

DEFINITION 30.2. Soit $\mathbf{E} \in \mathscr{M}$, $A \in \mathbf{E}$, $\alpha \in \Sigma_A$, et $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbf{E}}$, $t_\circ = \hat{t}(\alpha)$. L'application

$$\aleph_{A^{\cdot}(t_0),\,\mathbf{E}} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{t} \circ \aleph_{A\alpha,\,\mathbf{E}} = \{\langle P, t\rangle \mid A^{\cdot}(t_\circ)\, P^{\cdot}(t) \;\wedge\; P \in \mathbf{E}\}$$

sera appelée *application de propagation dans* **E**, *de lumière instantanée, en termes du temps*. On appellera $\langle A, t_\circ\rangle$ *origine*, A *point-origine* et $t_\circ$ *instant -origine* de la propagation.

Remarque. Généralement $\aleph_{A^{\cdot}(t_0),\,\mathbf{E}} : \mathbf{E} \mapsto (t_\circ, \infty)$ n'est pas une surjection.

Théorème 30.1. *Soient* $P, P' \in \mathbf{E} \in \mathscr{M}$ $(P \neq P')$ *quelconques dans* $\aleph_{A^{\cdot}(t_0),\,\mathbf{E}'}$ *et* t, t' *les instants quand un événement instantané d'origine* $\langle A, t_\circ\rangle$

est perçu en P et en P′. Alors, c étant le facteur fondamental, on a

$$\frac{\overline{AP}}{t-t_0}=c$$

et

(30.1) $$\frac{\overline{PP'}}{|t'-t|}=c \text{ ou } > c$$

suivant que P, P′ sont les points d'une même demi-droite d'origine A, ou qu'ils ne le sont pas. S'ils le sont, et si A-P-P′, on a, plus précisément,

$$\frac{\overline{PP'}}{t'-t}=c.$$

Démonstration. Si $P' \in AP..$, on a A-P-P' ou A-P'-P, et alors, d'après le théorème 17.5,

$$\overline{PP'}=|\overline{AP'}-\overline{AP}|=\pm c[t'-t]$$

respectivement, donc

$$\frac{\overline{PP'}}{|t'-t|}=c.$$

Si ce n'est pas le cas, on a

$$\overline{PP'} > |\overline{AP'}-\overline{AP}|=c|t'-t|,$$

donc

$$\frac{\overline{PP'}}{t'-t} > c.$$

DEFINITION 30.3. Soient $A, P, P' \in \mathbf{E} \in \mathscr{M}$, A-P-P', et t, t' les instants quand un événement instantané d'origine $\langle A, t_0\rangle$ est perçu en P et P'. Le quotient

$$\frac{\overline{PP'}}{t'-t}$$

sera appelé *vitesse scalaire* de la propagation de la perception de l'événement instantané d'origine $\langle A, t_0\rangle$, dans l'ensemble L-métrique **E**, ou simplement *vitesse de lumière* dans **E**.

Lorsque $P, P' \in \mathbf{E}$, sont quelconques, le quotient

$$\frac{\overline{PP'}}{t'-t}$$

sera appele *vitesse scalaire moyenne*, entre P et P', de la propagation dans **E** de la perception d'un événement instantané d'origine $\langle A, t_\circ \rangle$.

Théorème 30.2. *La vitesse de la lumière dans tout ensemble L-métrique de points matériels est égale à la constante fondamentale c de cet ensemble.*

Considérons la propagation $\aleph_{A\alpha,\,\mathbb{E}}$ de la perception d'un événement α dans un espace permanent L-métrique $\mathbb{E}$, et soit $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}}$ un temps commun de $\mathbb{E}$. Soit $Oxyz$ un repère cartésien orthonormé, dans $\mathbb{E}$. À tout $P \in \mathbb{E}$ correspond une valeur $t = \aleph_{A\cdot(t_\circ)\mathbb{E}}(P)$, ainsi qu'un triple de coordonnées, $\langle x, y, z \rangle = h(P)$ (définition 29.2), et on a suivant le théorème 17.5

$$\overline{AP} = c\,(t - t_\circ).$$

La géométrie de $\mathbb{E}$ est euclidienne (théorème 29.1) donc:

Théorème 30.3. *Soit* $\mathbb{E} \in \mathscr{E}_3$, $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}}$ *et Oxyz un repère cartésien orthonormé, dans* $\mathbb{E}$. *Si* $A, P \in \mathbb{E}$,

$$t_\circ = \aleph_{A\cdot(t_\circ)\mathbb{E}}(A), \qquad t = \aleph_{A\cdot(t_\circ)\mathbb{E}}(P),$$

et

$$h(A) = \langle x_\circ, y_\circ, z_\circ \rangle, \qquad h(P) = \langle x, y, z \rangle,$$

alors, quel que soit P,

$$(x - x_\circ)^2 + (y - y_\circ)^2 + (z - z_\circ)^2 = c^2\,(t - t_\circ)^2. \tag{30.2}$$

DEFINITION 30.4. Nous appellerons (30.2) *équation* (en coordonnées orthonormées) *de la propagation de la perception d'un événement instantané* (ou: *de lumière instantanée*) d'origine $\langle A, t_\circ \rangle$, dans l'espace permanent métrique $\mathbb{E}$.

31. DEPLACEMENT D'UN POINT MATERIEL DANS UN ENSEMBLE DE POINTS MATERIELS. L'AXIOME DE DEPLACEMENT

Nous nous rattachons à la définition 12.9, en nous bornant pour plus de simplicité aux ensembles de points en non-coïncidence simultanée.

DEFINITION 31.1. Soit $S \in \mathbf{M}$, $\mathbf{A} \in \mathcal{N}(\alpha, \beta)$, $\Phi \subset \Sigma_S \cap (\alpha, \beta)_{\mathbf{A}}$.

$$(S \mathrel{\bar{\in}} \mathbf{A})\,\Phi \overset{\text{def}}{=} (\exists P \in \mathbf{A})\,[(S \doteq P)\,\Phi]\,;$$

nous dirons que S est *en repos dans* **A**, *sur l'ensemble* Φ.

$$(S \mathrel{\overset{\frown}{\in}} \mathbf{A})\,\Phi \overset{\text{def}}{=} (S \mathrel{\dot{\in}} \mathbf{A})\,\Phi \;\wedge\; \mathrm{non}\,(S \mathrel{\bar{\in}} \mathbf{A})\,\Phi;$$

nous dirons que S se *déplace dans* **A**, *sur l'ensemble* Φ.

Lorsque $(S \mathrel{\overset{\frown}{\in}} \mathbf{A})\,\Phi$ et que Φ est un intervalle de Σ_S, nous dirons aussi que S est *en mouvement dans* **A**, *sur l'intervalle* Φ.

Théorème 31.1. $(S \mathrel{\bar{\in}} \mathbf{A})\,\Phi \;\vee\; (S \mathrel{\overset{\frown}{\in}} \mathbf{A})\,\Phi \;\Leftrightarrow\; (S \mathrel{\dot{\in}} \mathbf{A})\,\Phi$.

Remarque: Puisque

$$(S \mathrel{\dot{\in}} \mathbf{A})\,\Phi \;\Rightarrow\; (\forall \varphi \in \Phi)(\exists P \in \mathbf{A})\,[(S \doteq P)\varphi]$$

et que $\mathbf{A} \in \mathcal{N}$, à chaque φ correspond un seul P, donc une application de Φ dans **A** est définie par là, que nous noterons ∂_S.

DEFINITION 31.2. Soit $S \in \mathbf{M}$, $\mathbf{A} \in \mathcal{N}(\alpha, \beta)$, $\Phi \subset \Sigma_S \cap (\alpha, \beta)_{\mathbf{A}}$. L'application $\partial_S : \Phi \mapsto \mathbf{A}$, définie par

$$\partial_S \overset{\text{def}}{=} \{\langle \varphi, P \rangle \mid \varphi \in \Phi \;\wedge\; P \in \mathbf{A} \;\wedge\; (S \doteq P)\varphi\} \tag{31.1}$$

sera appelée *application de situation* du point S dans l'ensemble **A**. On appelera Φ *ensemble des événements de situation* de S, et dira que S *est situé dans* **A** *selon l'application* ∂_S.

Lorsqu'en particulier $(S \mathrel{\bar{\in}} \mathbf{A})\,\Phi$, on appellera ∂_S *application de repos* du point S dans **A**; on appellera Φ *ensemble des événements du repos* de S, et dira que S *est en repos* dans **A** *selon* ∂_S.

Lorsque $(S \mathrel{\overset{\frown}{\in}} \mathbf{A})\,\Phi$, on appellera ∂_S *application de déplacement* du point S dans **A**; on appellera Φ *ensemble des événements du déplacement* de S, et dira que S *se déplace dans* **A** *selon* ∂_S.

Si ∂_S est une surjection dans le cas du déplacement, on appellera **A** *ensemble-trajectoire* du point S, et dira que S se déplace *sur* **A**, ou que S *parcourt* **A** selon la surjection ∂_S.

Remarque: Φ est totalement ordonné selon l'ordre du temps, puisque $\Phi \subset \Sigma_S$. Par là même, si ∂_S est une surjection, **A** aussi est ordonné selon „l'ordre du temps" par l'ordre induit de Φ sur **A**.

Le théorème suivant présente une restriction essentielle à laquelle sont assujetties les applications de déplacement. Il découle du théorème 7.16 et contient, dans l'interprétation intuitive, le fait qu'un point matériel S parcourt son ensemble-trajectoire $\mathbf{A}$ d'une manière plus lente que la lumière.

Théorème 31.2. *Soit* $S \in \mathbf{M}$, $\mathbf{A} \in \mathcal{N}(\alpha, \beta)$, $\Phi \subset \Sigma_S \cap (\alpha, \beta)_{\mathbf{A}}$. *Lorsque* $\partial_S : \Phi \mapsto \mathbf{A}$, *alors*

$$(31.2) \qquad (\forall \langle \varphi_1, P_1 \rangle, \langle \varphi_2 P_2 \rangle \in \partial_S)[\varphi_1 \prec \varphi_2 \quad \Rightarrow \quad P_1 \varphi_1 P_2 \prec P_2 \varphi_2].$$

Inversement, si un sous-ensemble de $\Phi \times \mathbf{A}$ satisfait à la proposition (31.2), un point S existe, pour lequel ce sous-ensemble représente l'application de déplacement. C'est ce qu'affirme *l'axiome de déplacement*, suivant, qui est le dernier dans notre système d'axiomes. Nous lui faisons précéder la remarque suivante, et deux définitions.

Remarque. La relation $P_1 \varphi_1 P_2 \prec P_2 \varphi_2$ précédente est la restriction de la relation binaire $\varphi P \prec P \psi$ (définition 2.5) à un sous-ensemble Φ de $(\alpha, \beta)_{\mathbf{A}}$. Comme la relation $\varphi P \prec P \psi$ est en général une relation sur Σ, d'ordre au sens strict, elle établit sur $(\alpha, \beta)_{\mathbf{A}}$, avec $\varphi P \prec P \psi$, un préordre partiel. Donc, des sous-ensembles de $(\alpha, \beta)_{\mathbf{A}}$ existent, sur lesquels ce préordre est un *ordre total* (déjà $(\alpha, \beta)_P$, $\forall P \in \mathbf{A}$, est un tel sous-ensemble, car $\varphi P \prec P \psi$ se réduit alors à $P\varphi \prec P\psi$). On peut donc énoncer la définition suivante.

DEFINITION 31.3. Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{N}(\alpha, \beta)$ et $\Phi \subset (\alpha, \beta)_{\mathbf{A}}$, $\mathbf{A}$ ainsi que Φ contenant plus d'un élément, et supposons que Φ soit totalement ordonné de telle sorte que

$$(\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi)(\forall P_1, P_2 \in \mathbf{A})[P_1 \varphi_1 \ \wedge \ P_2 \varphi_2 \ \wedge \ \varphi_1 \prec \varphi_2 \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ P_1 \varphi_1 P_2 \prec P_2 \varphi_2].$$

Alors nous appellerons Φ un *ensemble d'événements de déplacement* dans $\mathbf{A}$, et son ordre total, *ordre du temps*.

DEFINITION 31.4. Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{N}(\alpha, \beta)$ et $\Phi \subset (\alpha, \beta)_{\mathbf{A}}$, $\mathbf{A}$ contenant plus d'un élément et Φ étant un ensemble d'événements de déplacement dans $\mathbf{A}$. Alors l'application $\partial : \Phi \mapsto \mathbf{A}$ définie par

$$\partial \overset{\text{def}}{=} \{ \langle \varphi, P \rangle \mid \varphi \in \Phi \ \wedge \ P \in \mathbf{A} \ \wedge \ P\varphi \}$$

sera appelée *application de déplacement* dans $\mathbf{A}$. Si ∂ est une surjection, on appellera $\mathbf{A}$ *ensemble-trajectoire*.

NOTATION 31.1. L'ensemble de toutes les surjections de déplacement sera noté $\mathscr{D}$.

AXIOME IX. $(\forall \partial \in \mathscr{D})(\exists S \in \mathbf{M})\, \forall \langle \varphi, P\rangle\, [\langle \varphi, P\rangle \in \partial \;\Rightarrow\; (P \doteq S)\varphi]$.

En d'autres termes*: Quelle que soit une surjection de déplacement* ∂*, il existe un point matériel* S *qui se déplace selon* ∂.

Remarque: En termes brefs: $\forall \partial\, \exists S\, [\partial = \partial_S]$.

Théorème 31.3. *Si* ∂_S *est une surjection, alors* $\forall \partial_S\, [\partial_S \in \mathscr{D}]$.

Démonstration. Selon la définition 31.2 ∂_S satisfait à

$$\forall \varphi\, \exists P\, [(S \doteq P)\varphi],$$

et suivant le théorème 31.2 également à

$$(\forall \langle \varphi_1, P_1\rangle, \langle \varphi_2, P_2\rangle \in \partial_S)\, [\varphi_1 \prec \varphi_2 \;\Rightarrow\; P_1\, \varphi_1 P_2 \prec P_2\, \varphi_2].$$

Donc, selon les définitions 31.1 et 31.4, ∂_S est une surjection de déplacement, $\partial_S \in \mathscr{D}$.

Par conséquent, tout ensemble-trajectoire d'un point S est aussi un ensemble-trajectoire selon la définition 31.4, et tout ensemble d'événements de déplacement de S, l'est aussi selon cette définition.

La continuité de tout ensemble Σ_P $(\forall P \in \mathbf{M})$ ayant été introduite par les axiomes IV 1 et 2, on peut énoncer la définition suivante:

DEFINITION 31.5. Lorsque dans $\partial_S : \Phi \mapsto \mathbf{A}$ l'ensemble totalement ordonné $\Phi \subset \Sigma_S$, selon l'ordre du temps, est un intervalle de Σ_S, alors ∂_S sera appelée *application de mouvement* de S dans $\mathbf{A}$, et Φ sera appelé *intervalle des événements du mouvement* de S dans $\mathbf{A}$. Selon la définition 31.1 *S est en mouvement* dans $\mathbf{A}$, sur l'intervalle Φ.

Lorsque ∂_S est une surjection, $\mathbf{A}$ sera appelé *trajectoire* de S.

Soient $\psi_1, \psi_2 \in \Phi$, $\psi_1 \prec \psi_2$, et

$$\Psi = \{\varphi \mid \varphi \in \Phi \;\wedge\; \psi_1 \preccurlyeq \varphi \preccurlyeq \psi_2\}.$$

Soit alors $P_1 = \partial_S(\psi_1)$, $P_2 = \partial_S(\psi_2)$, $\mathbf{B} = \partial_S(\Psi)$. On dira que $\mathbf{B}$ est la *trajectoire* de S, *de* ψ_1 *à* ψ_2, ou *de* P_1 *à* P_2.

Théorème 31.4. *Toute surjection de mouvement est continue.*

Démonstration. Soit $\partial_S : \Phi \mapsto \mathbf{A}$ une surjection de mouvement, Φ étant un intervalle de Σ_S. Soit $\varphi_\circ \in \Phi$, et $\Xi_S \subset \Phi$ un intervalle ouvert, voisinage de $\varphi_\circ$. Soit

$$(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Phi$$

une suite quelconque, convergeant vers $\varphi_\circ$, donc

(31.3) $$\forall \Xi_S \, \exists m \, \exists n \, [n > m \quad \Rightarrow \quad \varphi_n \in \Xi_S].$$

Soient $P_\circ, P_n \in \mathbf{A}$, tels que

(31.4) $$(P_\circ \doteq S)\varphi_\circ \,, \qquad (P_n \doteq S)\varphi_n \,.$$

Nous envisageons séparément les deux cas: (1) $\varphi_\circ \prec \varphi_n$ et (2) $\varphi_\circ \succ \varphi_n$.

(1) Suivant le théorème 31.2 on a $P_\circ \, \varphi_\circ P_n \prec P_n \, \varphi_n$. Comme $(P_\circ \doteq S)\varphi_\circ$, on peut écrire aussi

$$S\varphi_\circ P_n \prec P_n \, \varphi_n \,.$$

Donc on a, notant les événements en question par β_n,

$$S\varphi_\circ P_n \cdot S\beta_n \prec P_n \, \varphi_n \, S\varphi_n \,,$$

d'où $S\beta_n \prec S\varphi_n$. En outre, $S\varphi_\circ \preccurlyeq S\beta_n$. Or $\varphi_\circ \in \Xi_S$, donc

(31.5) $$\varphi_\circ \,, \varphi_n \in \Xi_S \quad \Rightarrow \quad \beta_n \in \Xi_S \,.$$

(2) Suivant le théorème 31.2 on a $P_n \, \varphi_n P_\circ \prec P_\circ \, \varphi_\circ$. Comme $(P_n \doteq S)\varphi_n$, on peut écrire aussi

$$S\varphi_n P_n \, \varphi_n P_\circ \prec P_\circ \, \varphi_\circ.$$

Donc, notant les événements en question de nouveau par β_n,

$$S\varphi_n P_n \, \varphi_n P_\circ \prec S\beta_n P_n \cdot P_\circ \, \varphi_\circ \,,$$

d'où (en rayant les termes analogues des deux côtés selon la Règle du § 7) $S\varphi_n \prec S\beta_n$. En outre, $S\beta_n \preccurlyeq S\varphi_\circ$, donc on a encore (31.5).

Par conséquent, si dans les deux cas envisagés – donc dans tous les cas – $\varphi_n \to \varphi_\circ$, il résulte de (31.3) et (31.4), grâce au théorème 31.1,

$$\forall \Xi_S \, \exists m \, \forall n \, [n > m \; \wedge \; (S\varphi_\circ P_n \cdot S\beta_n \; \vee \; S\beta_n P_n \cdot S\varphi_\circ) \quad \Rightarrow \quad \varphi, \beta_n \in \Xi_S].$$

Or, suivant la définition 13.2 (en y posant $\alpha_n = \varphi_\circ$), ceci signifie que $(P_n \to S)\varphi_\circ$. Puisque $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est autrement quelconque, l'application ∂_S est continue pour tout $\varphi_\circ \in \Phi$.

32. DEPLACEMENT D'UN POINT MATERIEL EN TERMES DU TEMPS

Considérons d'abord le déplacement d'un point S dans un ensemble $\mathbf{A}$ quelconque, $(S \mathrel{\hat{\in}} \mathbf{A})\,\Phi$, et soit $t_S \in \mathscr{C}_S$. Notons $\mathrm{T}_S = \hat{t}_S(\Phi)$. Comme $\hat{t}_S$ est biunivoque, on a aussi l'application

$$\partial_S \circ \hat{t}_S^{-1} : \mathrm{T}_S \mapsto \Phi \mapsto \mathbf{A}.$$

DEFINITION 32.1. Soit $\partial_S : \Phi \mapsto \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \subset \mathbf{M}$, $\hat{t}_S \in \mathscr{C}_S$ et $\mathrm{T}_S = \hat{t}_S(\Phi)$.

$$(S \mathrel{\bar{\in}} \mathbf{A})\,\mathrm{T}_S = (S \mathrel{\bar{\in}} \mathbf{A})\,\Phi \;\wedge\; \mathrm{T}_S = \hat{t}_S(\Phi);$$

$$(S \mathrel{\hat{\in}} \mathbf{A})\,\mathrm{T}_S = (S \mathrel{\hat{\in}} \mathbf{A})\,\Phi \;\wedge\; \mathrm{T}_S = \hat{t}_S(\Phi);$$

on dira respectivement que S est *en repos* ou que S *se déplace* dans $\mathbf{A}$, *sur l'ensemble* T_S *d'instants*. Alors

$$\mathfrak{d}_S \overset{\text{def}}{=} \partial_S \circ \hat{t}_S^{-1} = \{\langle t_S, P\rangle \mid t_S \in \mathrm{T}_S \;\wedge\; P \in \mathbf{A} \;\wedge\; (S \doteq P)\,t_S\}$$

sera appelée *application de situation*, et en particulier, *de repos* ou *de déplacement*, du point S, *en termes du temps* $\hat{t}_S$ *de* S.

Remarques. Si ∂_S est une surjection, $\mathfrak{d}_S$ l'est aussi, et alors $\mathbf{A} = \mathfrak{d}_S(\mathrm{T}_S)$.

Supposons que $\mathbf{A}$ est L-métrique, $\mathbf{A} \in \mathscr{M}(\alpha, \beta)$, et soit $\hat{t} \in \mathscr{C}_A$. Notons $\mathrm{T} = \hat{t}(\Phi)$. Suivant la définition 16.1 $\hat{t} : (\alpha, \beta)_A \mapsto \mathbb{R}$. Or, $\hat{t}$ étant défini sur $(\alpha, \beta)_{\mathbf{A}}$ et puisque $\Phi \subset (\alpha, \beta)_{\mathbf{A}}$, la restriction de $\hat{t}$ à Φ,

$$\hat{t}/\Phi : \Phi \mapsto \mathbb{R},$$

est ce même temps commun $\hat{t}$, conçu comme application de Φ, ou bien comme surjection,

$$\hat{t}/\Phi : \Phi \mapsto \mathrm{T}.$$

Puisque $\Phi \subset \Sigma_S$, nous montrerons (théorème 32.3) que $\hat{t}/\Phi$ est également la restriction d'un temps continu de S.

Théorème 32.1. *Soit* $\partial_S : \Phi \mapsto \mathbf{A}$, $\Phi \subset (\alpha, \beta)_{\mathbf{A}}$, $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(\alpha, \beta)$ et $\hat{t} \in \mathcal{C}_{\mathbf{A}}$. *Notons* [31]

$$\hat{t}/\Phi(\varphi_1) = t_1, \qquad \hat{t}/\Phi(\varphi_2) = t_2.$$

Alors

$$(\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi)[S\varphi_1 \prec S\varphi_2 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 < t_2].$$

En d'autres termes: $\hat{t}/\Phi$ *est une application croissante de l'ensemble totalement ordonné* Φ *dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Suivant la définition 31.2 soient P_1, P_2 tels que $(S \doteq P_1)\varphi_1$, $(S \doteq P_2)\varphi_2$. D'après le théorème 31.2 $P_1 \varphi_1 P_2^{\cdot} \prec P_2 \varphi_2$, en d'autres termes

$$P_1^{\cdot}(t_1) P_2^{\cdot}(t'') \prec P_2^{\cdot}(t_2),$$

d'où on conclut (définition 11.1) $t'' < t_2$. En vertu du théorème 17.5 $t_1 < t''$, donc $t_1 < t_2$. Comme

$$S\varphi_1 \asymp S\varphi_2 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = \varphi_2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = t_2,$$

on a aussi l'inverse, $t_1 < t_2 \quad \Rightarrow \quad S\varphi_1 \prec S\varphi_2$.

D'après ce théorème $\hat{t}/\Phi$ est monotone croissante. Montrons qu'elle est aussi continue sur Φ. Pour simplifier, supposons que $\Phi = \overline{\Phi}$, et tenons-nous à la définition suivante:

Soient E, F deux espaces topologiques, $\Phi \subset E$, quelconque, et Ψ, Ω des intervalles ouverts, $\Psi \subset E$, $\Omega \subset F$. Soit $f : \Phi \mapsto F$. Lorsqu'on a, pour $x \in \Phi$,

$$\forall \Omega \, \exists \Psi \, [f(x) \in \Omega \quad \Rightarrow \quad f(\Phi \cap \Psi) \subset \Omega],$$

l'application f est dite *continue en* x (« au point x »). Lorsque f est continue pour tout $x \in \Phi$, elle est *continue sur* Φ.

Théorème 32.2. *Soit* $\partial_S : \Phi \mapsto \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(\alpha, \beta)$, $\hat{t} \in \mathcal{M}_{\mathbf{A}}$ *et* $\mathrm{T} = \hat{t}(\Phi)$. *La surjection*

$$\hat{t}/\Phi : \Phi \mapsto \mathrm{T}$$

est continue sur Φ.

---

[31] $\hat{t}/\Phi(\varphi)$ étant la valeur de $\hat{t}/\Phi$ en φ.

Démonstration. Il faut prouver que V étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ψ un intervalle ouvert de Σ_S et $\psi \in \Phi$, on a pour tout ψ

$$\forall V\, \exists \Psi\, [\hat{t}/\Phi(\psi) \in V \;\Rightarrow\; \hat{t}/\Phi(\Phi \cap \Psi) \subset V].$$

Supposons qu'au contraire, pour un certain ψ,

$$\forall V\, \exists \Psi\, [\hat{t}/\Phi(\psi) \in V \;\Rightarrow\; \hat{t}/\Phi\,(\Phi \cap \Psi) \not\subset V]. \tag{32.1}$$

Alors

$$\forall \Psi\, (\exists \varphi \in \Phi \cap \Psi)\, [\hat{t}/\Phi(\varphi) \notin V].$$

On pourrait donc extraire une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ces φ, telle que $\varphi_n \to \psi$ dans Σ_S. Or, ce sont aussi des éléments de $(\alpha, \beta)_{\mathbf{A}}$, donc $P_o, P_n \in \mathbf{A}$ existent, tels que

$$\forall n\, [(S \doteq P_n)\, \varphi_n] \quad \text{et} \quad (S \doteq P_\circ)\, \psi.$$

Désignant par α_n, β_n les événements qui figurent dans $P_\circ\, \alpha_n P \varphi_n P_\circ\, \beta_n$, et en écrivant, pour simplifier, $\hat{t}$ à la place de $\hat{t}/\Phi$ (les deux coïncident sur Φ) on a

$$\hat{t}(\beta_n) - \hat{t}(\alpha_n) = \frac{2}{c}\, \overline{P_\circ P_n}, \tag{32.2}$$

$$\hat{t}(\varphi_n) - \hat{t}(\alpha_n) = \frac{1}{c}\, \overline{P_\circ P_n},$$

puisque $\mathbf{A} \in \mathscr{M}$ et $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbf{A}}$.

D'après le théorème 10.3,

$$\varphi_n \to \psi \;\Rightarrow\; \alpha_n \to \psi \;\wedge\; \beta_n \to \psi.$$

Or, $\alpha, \beta, \psi \in \Sigma_{P_\circ}$, donc, comme la restriction de $\hat{t}$ à $\Sigma_{P_\circ}$ est un temps continu de $P_\circ$ (définition 16.1), on a

$$\hat{t}\,(\alpha_n) - \hat{t}\,(\psi) \to 0,$$

$$\hat{t}\,(\beta_n) - \hat{t}\,(\psi) \to 0,$$

et en vertu de (32.2), $\overline{P_\circ P_n} \to 0$, donc

$$\hat{t}\,(\varphi_n) - \hat{t}\,(\alpha_n) \to 0.$$

Par conséquent,

$$\hat{t}(\varphi_n) - \hat{t}(\psi) = [\hat{t}(\varphi_n) - \hat{t}(\alpha_n)] + [\hat{t}(\alpha_n) - \hat{t}(\psi)] \to 0,$$

donc

$$\hat{t}/\Phi(\varphi_n) - \hat{t}/\Phi(\psi) \to 0,$$

contrairement à (32.1), donc le théorème est démontré.

En vertu des théorèmes 32.1 et 32.2 on a:

Théorème 32.3. *Soit* $\partial_S : \Phi \mapsto \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \in \mathscr{M}(\alpha, \beta)$ *et* $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbf{A}}$. *Si* Φ *est un intervalle de* Σ_S, *la restriction* $\hat{t}/\Phi$ *de* $\hat{t}$ *à* Φ *est un temps continu de* S.

Comme $\hat{t}$ est l'application d'un ensemble $(\alpha, \beta)_{\mathbf{A}}$, notons

$$a = \inf \hat{t}[(\alpha, \beta)_{\mathbf{A}}], \qquad b = \sup \hat{t}[(\alpha, \beta)_{\mathbf{A}}],$$

et supposons que: $\alpha \neq \omega \Rightarrow a \neq -\infty$, $\beta = \omega' \Rightarrow b \neq \infty$. Alors l'application $\hat{t}/\Phi$ étant croissante et continue, elle possède d'après un théorème de *Tietze*, généralisé et appliqué aux fonctions monotones [32] une extension sur Σ_S, croissante et continue, qui représente donc un temps continu, défini sur Σ_S, soit $\hat{t}' \in \mathscr{T}_S$. Donc:

Théorème 32.4. *Soit* $\partial_S : \Phi \mapsto \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \in \mathscr{M}(\alpha, \beta)$, $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbf{A}}$ et

$\alpha \neq \omega \Rightarrow$ inf. $\hat{t}[(a, \beta)_{\mathbf{A}}] > -\infty$, $\beta \neq \omega' \Rightarrow$ sup. $[(\alpha, \beta)_{\mathbf{A}}] < \infty$. *Alors*

$$(\exists \hat{t}' \in \mathscr{T}_S)[\hat{t}' : \Sigma_S \mapsto \mathbb{R} \ \wedge \ \hat{t}/\Phi = \hat{t}'/\Phi].$$

Comme la surjection inverse $(\hat{t}/\Phi)^{-1}$ est une application de $\mathrm{T} = \hat{t}(\Phi)$ dans l'ensemble d'intervalles $(\alpha, \beta)_{\mathbf{A}}$, on peut énoncer la définition suivante:

DEFINITION 32.2. Soit $\partial_S : \Phi \mapsto \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \in \mathscr{M}$, $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbf{A}}$, et $\mathrm{T} = \hat{t}(\Phi)$.

Alors,

$$(S \mathrel{\bar{\in}} \mathbf{A})\mathrm{T} \overset{\text{def}}{=} (S \mathrel{\bar{\in}} \mathbf{A})\Phi \ \wedge \ \mathrm{T} = \hat{t}(\Phi),$$

$$(S \mathrel{\hat{\in}} \mathbf{A})\mathrm{T} \overset{\text{def}}{=} (S \mathrel{\hat{\in}} \mathbf{A})\Phi \ \wedge \ \mathrm{T} = \hat{t}(\Phi),$$

[32] Voir par exemple, *K. Kuratowski*, Introduction à la Théorie des ensembles et à la Topologie (Genève, 1966) p. 146.

et nous posons,

$$\mathfrak{d}_S^* \stackrel{\text{def}}{=} \partial_S \circ (\hat{t}/\Phi)^{-1} = \{ \langle t,P \rangle \mid t \in \mathrm{T} \;\wedge\; P \in \mathbf{A} \;\wedge\; (S \doteq P)\, t \}.$$

On appellera $\mathfrak{d}_S^*$ *application de situation*, et en particulier, de *repos* ou de *déplacement*, du point *S en termes du temps commun* $\hat{t}$ de **A**.

Théorème 32.5. *Soit* $\mathfrak{d}_S^* : \mathrm{T} \mapsto \mathbf{A}$, $\mathrm{T} = \hat{t}(\Phi)$, *où* $\hat{t} \in \mathscr{C}_{\mathbf{A}}$, *et soient* $t, t' \in \mathrm{T}$, $t < t'$ *et* $P = \mathfrak{d}_S^*(t)$, $P' = \mathfrak{d}_S^*(t')$. *Alors,*

$$\frac{\overline{PP'}}{t'-t} < c. \tag{32.3}$$

Démonstration. Soient $t = \hat{t}(\varphi)$, $t' = \hat{t}(\varphi')$. On a $(S \doteq P)\varphi$, $(S \doteq P')\varphi'$, et suivant le théorème 32.1 $S\varphi \prec S\varphi'$. D'après le théorème 31.2 $P\varphi P' \prec P'\varphi'$, ou en d'autres termes,

$$P^{\cdot}(t)\, P'^{\cdot}(t'') \prec P'^{\cdot}(t'),$$

d'où $t < t'' < t'$. Or, on a (théorème 30.1) $\overline{PP'} = c(t''-t)$, puisque φ est perçu en P et en P' aux instants t et t''. Par conséquent, $\overline{PP'} < c(t'-t)$, d'où (32.3).

Supposons qu'un point S soit situé dans un ensemble $\mathbf{A} \in \mathscr{M}$, sur l'intervalle T de $\hat{t} \in \mathscr{C}_S$, ou bien de $\hat{t} \in \mathscr{C}_{\mathbf{A}}$. En vertu de la définition 31.1 on a:

Théorème 32.6. *Le point S est en repos dans un intervalle ouvert* T′ *de* T *si, et seulement si la valeur* $\mathfrak{d}_S(t)$ *est constante dans* T′.

Le point S est en mouvement dans un intervalle T″ *de* T *si, et seulement si S n'est pas en repos dans* T″.

DEFINITION 32.3. On dira qu'un point S est *en repos à l'instant* $t \in \mathrm{T}$, lorsque S est en repos dans un intervalle ouvert de T, qui contient t.

On dira que S est *en mouvement constamment dans l'intervalle* $\mathrm{T}' \subset \mathrm{T}$, lorsque S n'est pas en repos dans aucun intervalle ouvert contenu dans T′.

On dira que S est *en mouvement à l'instant* t de T, lorsque S est constamment en mouvement dans un intervalle ouvert qui contient t.

Remarque. Soit T′ l'ensemble des instants de T où S est en repos et T″ celui où S est en mouvement. En vertu de la définition précédente T′ et T″ sont des ensembles ouverts, et leur frontière commune consiste des instants où S n'est ni en repos ni en mouvement. Évidemment,

$$\overline{\mathrm{T}'} \cup \mathrm{T}'' = \mathrm{T}' \cup \overline{\mathrm{T}''} = \mathrm{T}.$$

33. MOUVEMENT D'UN ENSEMBLE DE POINTS MATERIELS DANS UN ENSEMBLE L-METRIQUE, EN TERMES DU TEMPS

Dans les définitions et théorèmes suivants on suppose: $\mathbf{A}, \mathbf{P} \subset \mathbf{M}$, $\mathbf{A} \in \mathscr{M}$, $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbf{A}}$, quelconques, et T un intervalle quelconque des valeurs de $\hat{t}$.

DEFINITION 33.1. $(\mathbf{P} \mathrel{\bar{\subset}} \mathbf{A})\mathrm{T} \overset{\text{def}}{=} (\forall Y \in \mathbf{P})[(Y \mathrel{\bar{\in}} \mathbf{A})\mathrm{T}]$,

$$(\mathbf{A} \mathrel{\bar{\subset}} \mathbf{P})\mathrm{T} \overset{\text{def}}{=} (\forall X \in \mathbf{A})[(X \mathrel{\bar{\in}} \mathbf{P})\mathrm{T}],$$

$$(\mathbf{A} \mathrel{\bar{\equiv}} \mathbf{P})\mathrm{T} \overset{\text{def}}{=} (\mathbf{A} \mathrel{\bar{\subset}} \mathbf{P})\mathrm{T} \wedge (\mathbf{P} \mathrel{\bar{\subset}} \mathbf{A})\mathrm{T}.$$

On lira: **P** *est en repos dans* **A**, *sur l'intervalle* T, etc.

DEFINITION 33.2. $(\mathbf{P} \mathrel{\hat{\subset}} \mathbf{A})\mathrm{T} \overset{\text{def}}{=} (\forall Y \in \mathbf{P})[(Y \mathrel{\hat{\in}} \mathbf{A})\mathrm{T}]$,

$$(\mathbf{A} \mathrel{\hat{\subset}} \mathbf{P})\mathrm{T} \overset{\text{def}}{=} (\forall X \in \mathbf{A})[(X \mathrel{\hat{\in}} \mathbf{P})\mathrm{T}],$$

$$(\mathbf{A} \mathrel{\hat{\equiv}} \mathbf{P})\mathrm{T} \overset{\text{def}}{=} (\mathbf{A} \mathrel{\hat{\subset}} \mathbf{P})\mathrm{T} \wedge (\mathbf{P} \mathrel{\hat{\subset}} \mathbf{A})\mathrm{T}.$$

On lira: **P** *est en mouvement* (ou *se déplace*) *dans* **A**, *sur l'intervalle* T, etc.

Remarque. Lorsque $\mathbf{A} \in \mathscr{M}(\alpha, \beta)$, on a $(\mathbf{P} \mathrel{\hat{\subset}} \mathbf{A})\mathbb{R}$, car alors $\mathrm{T} = \mathbb{R}$.

NOTATION 33.1. Lorsque $\mathrm{T} = \mathbb{R}$, on notera simplement: $S \mathrel{\bar{\in}} \mathbf{A}$, $S \mathrel{\hat{\in}} \mathbf{A}$, $\mathbf{P} \mathrel{\bar{\subset}} \mathbf{A}$, $\mathbf{P} \mathrel{\hat{\subset}} \mathbf{A}$ etc.

Théorème 33.1. $(\mathbf{P} \mathrel{\bar{\subset}} \mathbf{A})\mathrm{T} \Rightarrow (\exists \mathbf{B} \subset \mathbf{A})[(\mathbf{B} \mathrel{\bar{\equiv}} \mathbf{P})\mathrm{T}]$.

$$(\mathbf{P} \mathrel{\hat{\subset}} \mathbf{A})\mathrm{T} \Rightarrow (\forall t \in \mathrm{T})(\exists \mathbf{B} \subset \mathbf{A})[(\mathbf{B} \doteq \mathbf{P})t].$$

Théorème 33.2. $(S \mathrel{\hat{\in}} \mathbf{A})\mathrm{T} \vee (S \mathrel{\bar{\in}} \mathbf{A})\mathrm{T} \Leftrightarrow (S \mathrel{\dot{\in}} \mathbf{A})\mathrm{T}$,

$$(\mathbf{P} \mathrel{\hat{\subset}} \mathbf{A})\mathrm{T} \vee (\mathbf{P} \mathrel{\bar{\subset}} \mathbf{A})\mathrm{T} \Leftrightarrow (P \mathrel{\dot{\subset}} \mathbf{A})\mathrm{T},$$

$$(\mathbf{A} \mathrel{\hat{\subset}} \mathbf{P})\mathrm{T} \vee (\mathbf{A} \mathrel{\bar{\subset}} \mathbf{P})\mathrm{T} \Leftrightarrow (\mathbf{A} \mathrel{\dot{\subset}} \mathbf{P})\mathrm{T},$$

$$(\mathbf{A} \mathrel{\hat{\equiv}} \mathbf{P})\mathrm{T} \vee (\mathbf{A} \mathrel{\bar{\equiv}} \mathbf{P})\mathrm{T} \Leftrightarrow (\mathbf{A} \doteq \mathbf{P})\mathrm{T}.$$

En d'autres termes: *Si dans un intervalle* T *du temps commun de* **A** *le point* S, *ou bien un ensemble de points* **P**, *est situé dans* **A**, *alors* S, *res-*

pectivement **P**, *est en repos dans* **A**, *ou bien il se déplace dans* **A**, *etc., et inversement.*

Théorème 33.3. $(\mathbf{P} \hat{\subset} \mathbf{A})\mathrm{T} \wedge (\mathbf{A} \dot{\subset} \mathbf{P})\mathrm{T} \Rightarrow (\mathbf{A} \hat{\subset} \mathbf{P})\mathrm{T}.$

$$(\mathbf{P} \bar{\subset} \mathbf{A})\mathrm{T} \wedge (\mathbf{A} \dot{\subset} \mathbf{P})\mathrm{T} \Rightarrow (\mathbf{A} \bar{\subset} \mathbf{P})\mathrm{T}.$$

Démonstration. Suivant la définition 33.1 on a $(\exists Q_1 \in \mathbf{P})[(Q_1 \hat{\in} \mathbf{A})\mathrm{T}]$, donc

$$(\forall t_1, t_2 \in \mathrm{T})(\exists P_1, P_2 \in \mathbf{A})[(Q_1 \doteq P_1)t_1 \wedge (Q_2 \doteq P_2)t_2 \wedge P_1 \neq P_2].$$

Comme $P_1 \neq P_2$, on a $t_1 \neq t_2$; soit $t_1 < t_2$. Or, $(A \dot{\subset} P)\mathrm{T}$, donc $(P_2 \dot{\in} P)\mathrm{T}$ et en particulier $(P_2 \dot{\in} P)t_2$ et $(P_2 \dot{\in} P)t_1$. En effet, $(P_2 \doteq Q_1)t_2$, et soit $Q_2 \in \mathbf{P}$, tel que $(P_2 \doteq Q_2)t_1$. Alors

$$(P_2 \doteq Q_2)t_1 \wedge (P_2 \doteq Q_1)t_2. \tag{33.1}$$

Comme $P_1 \neq P_2$ et $\mathbf{A} \in \mathscr{N}$, on a non $[(P_1 \doteq P_2)t_1]$, mais $(Q_1 \doteq P_1)t_1$ et $(Q_2 \doteq P_2)t_1$, donc $Q_1 \neq Q_2$. Par conséquent, en vertu de (33.1),

$$(\forall t_1, t_2 \in \mathrm{T})(\exists Q_1, Q_2 \in \mathbf{P})[(P_2 \doteq Q_2)t_1 \wedge (P_2 \doteq Q_1)t_2 \wedge Q_1 \neq Q_2],$$

donc $(\exists P_2 \in \mathbf{A})[(P_2 \hat{\in} \mathbf{P})\mathrm{T}]$, d'où $(\mathbf{A} \hat{\subset} \mathbf{P})\mathrm{T}$, et ensuite $(\mathbf{A} \hat{=} \mathbf{P})\mathrm{T}$.

34. MOUVEMENT D'UN POINT MATERIEL DANS UN ESPACE PERMANENT L-METRIQUE

Soit $\mathbb{E} \in \mathscr{E}_3$, $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}}$, $S \in \mathbf{M}$ et $\mathfrak{d}_S : \mathbf{T} \mapsto \mathbb{E}$, l'ensemble T des instants du mouvement étant un intervalle de $\mathbb{R}$. Supposons que $Oxyz$ soit dans $\mathbb{E}$ un repère cartésien orthonormé.

Tout d'abord, la restriction du temps commun $\hat{t}$ à Σ_S peut être considérée comme un temps de S. En effet, on a comme conséquence du théorème 32.3 le suivant:

Théorème 34.1.

$$(\forall S \in \mathbf{M})(\forall \mathbb{E} \in \mathscr{E}_3)(\forall \hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}})[(S \hat{\in} \mathbb{E})\Sigma_S \Rightarrow \hat{t}/\Sigma_S \dot{\in} \mathscr{T}_S].$$

R e m a r q u e. On peut aussi omettre le côté gauche de l'implication entre crochets.

DEFINITION 34.1. Soit $\mathbb{E} \in \mathscr{E}_3$, $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}}$, T un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathbf{A} \subset \mathbb{E}$ et $\mathfrak{d}_S : \mathrm{T} \mapsto \mathbf{A}$ la surjection de situation de S dans $\mathbf{A}$. Soit ensuite $h : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{R}^3$ une application fondamentale métrique de $\mathbb{E}$, définissant un repère cartésien orthonormé, dans $\mathbb{E}$ (définition 29.2) et $h_{\mathbf{A}} = h/\mathbf{A}$ sa restriction à $\mathbf{A}$. Alors l'application

$$\mathfrak{f}_S = h_{\mathbf{A}} \circ \mathfrak{d}_S \ : \ \mathrm{T} \mapsto \mathbb{R}^3,$$

ou en d'autres termes,

$$\mathfrak{f}_S = \{ \langle t, \langle x, y, z \rangle \rangle \mid t \in \mathrm{T} \ \wedge \ \langle x, y, z \rangle \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ \langle x, y, z \rangle = h_{\mathbf{A}} \circ \mathfrak{d}_S(t) \},$$

sera appelée *application du mouvement* de S dans l'espace permanent $\mathbb{E}$, *en coordonnées lorentziennes* (définition 29.4). L'équation

$$\langle x, y, z \rangle = \mathfrak{f}_S(t), \qquad \forall t \in \mathrm{T}, \tag{34.1}$$

sera appelée *équation de mouvement* du point S, dans l'intervalle T, *par rapport au repère Oxyz*, ou bien, par rapport au repère *lorentzien Otxyz*.

Le triple ordonné $\langle x, y, z \rangle$ implique les trois *projections* de $\mathfrak{f}_S$ sur les axes de $Oxyz$, soit

$$x = \mathfrak{f}_{Sx}(t), \qquad y = \mathfrak{f}_{Sy}(t), \qquad z = \mathfrak{f}_{Sz}(t),$$

qui déterminent les *coordonnées* du point S *à l'instant* t, dans $Oxyz$.

Remarques. Notons que $\mathfrak{f}_S$ n'exclut pas le repos de S dans $\mathbb{E}$, ou en d'autres termes, $\mathfrak{f}_S(t) = \text{const}$ . .

En introduisant le vecteur lié $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$, $\forall P \in \mathbb{E}$, dont l'ensemble est homéomorphe à $\mathbb{E}$ et dont les composantes scalaires constituent le triple $\langle x, y, z \rangle$, l'équation de mouvement (34.1) peut s'écrire dans la forme vectorielle, soit

$$\vec{r} = \mathfrak{F}_S(t), \qquad \forall t \in \mathrm{T}.$$

Théorème 34.2. *Quels que soient* $t_1, t_2 \in \mathrm{T}$, $t_1 < t_2$, *la variation totale de* $\mathfrak{f}_S$ *dans l'intervalle* (t_1, t_2) *est bornée.*

Démonstration. En vertu du théorème 32.5 $|\Delta_S/\Delta t| < c$, donc la variation totale est inférieure à $c(t_2 - t_1)$.

DEFINITION 34.2. La variation totale de $\mathfrak{f}_S$ (ou de $\mathfrak{F}_S$) dans un intervalle $(t_1, t_2) \subset \mathrm{T}$, où $t_1 < t_2$, sera appelée *longueur du chemin* (ou *de la trajectoire*) du point S dans l'intervalle (t_1, t_2), ou bien *de* t_1 *à* t_2, et notée $l_{t_1}^{t_2}$.

Si $\mathfrak{F}_S$ possède pour un certain $t \in \mathrm{T}$ une dérivée $D_t \mathfrak{F}_S$, celle-ci sera appelée *vitesse instantanée* de S à l'instant t, dans $\mathbb{E}$ (ou par rapport à $\mathbb{E}$) et notée $\vec{v}_{S:\mathbb{E}}(t)$.

Si $\mathfrak{F}_S$ possède pour un certain t une seconde dérivée $D_t^2 \mathfrak{F}_S$, celle-ci sera appelée *accélération instantanée* de S à l'instant t.

Remarque. Si T' est la partie de T où $\mathfrak{F}_S$ est différentiable, on a

$$D_t \mathfrak{F}_S = \vec{v}_{S:\mathbb{E}} : \mathrm{T}' \mapsto \mathbb{R}^3.$$

De même, si T'' est la partie de T' où $D_t \mathfrak{F}_S$ est différentiable, on a

$$D_t^2 \mathfrak{F}_S : \mathrm{T}'' \mapsto \mathbb{R}^3.$$

DEFINITION 34.3. Soit $t_\circ \in \mathrm{T}$ et $\mathrm{T}_\circ = \{t \mid t \in \mathrm{T} \ \wedge \ t > t_\circ\}$. Nous posons:

$$l_S = \{\langle t, s \rangle \mid t \in \mathrm{T}_\circ \ \wedge \ s = l_{t_\circ}^{t}\}.$$

(Donc l_S est une application qui donne la longueur du chemin de S, de $t_\circ$ fixe à t.)

Théorème 34.3. *l_S est une fonction non-décroissante de t.*

En vertu de l'axiome IX on a le théorème suivant:

Théorème 34.4. *Soit $\mathbb{E}$ un espace permanent L-métrique. Quelle que soit une ligne $\mathbf{L}$ de $\mathbb{E}$, rectifiable entre deux de ses points quelconques, et quelle que soit une surjection continue*

$$f : \mathrm{T} \mapsto \mathbf{L},$$

où T est un intervalle du temps commun $\hat{t}$ de $\mathbb{E}$, un point matériel S existe, dont $\mathbf{L}$ est la trajectoire et dont f est la surjection de mouvement – à condition que

$$(\forall t', t'' \in \mathrm{T})(\forall P', P'' \in \mathbf{L})\left[P' = f(t') \ \wedge \ P'' = f(t'') \Rightarrow \right.$$

$$\left. \Rightarrow \frac{\overline{P'P''}}{|t' - t''|} < c\right].$$

Démonstration. Pour que f soit une surjection de mouvement il faut envisager suivant la définition 32.2 la restriction $\hat{t}/\Phi$ de $\hat{t}$, de sorte que $\hat{t}/\Phi : \Phi \mapsto \mathrm{T}$ et que

$$f = \partial \bullet (\hat{t}/\Phi)^{-1} : \mathrm{T} \mapsto \Phi \mapsto \mathbf{L},$$

où ∂ doit satisfaire la définition 31.3. Donc, en termes de $\hat{t}$, il faut avoir, en notant dans cette définition

$$\hat{t}/\Phi(\varphi_1) = t_1, \qquad \hat{t}/\Phi(\varphi_2) = t_2,$$

et en y posant $\mathbf{A} = \mathbf{L}$ et

$$\mathfrak{d} = \partial \circ (\hat{t}/\Phi)^{-1},$$

$$\begin{aligned} (34.3) \qquad & \mathfrak{d} = \{\langle t, P\rangle \mid t \in \mathrm{T} \wedge P \in \mathbf{L} \wedge \\ & \wedge (\forall \langle t_1, P_1\rangle, \langle t_2, P_2\rangle \in \mathfrak{d})\, [t_1 < t_2 \Rightarrow P_1^{\cdot}(t_1)\, P_2 \prec P_2^{\cdot}(t_2)]\}. \end{aligned}$$

Par conséquent il faut montrer que (34.3) implique (34.2).

En effet, dans $P_1^{\cdot}(t_1) P_2^{\cdot}(t')$ on a suivant le théorème 30.1

$$\overline{P_1 P_2} = c\,(t' - t).$$

Mais suivant (34.2)

$$\overline{P_1 P_2} < c\,(t_2 - t_1),$$

donc

$$c\,(t' - t_1) < c\,(t_2 - t_1),$$

d'où $t' \prec t_2$, donc

$$P_1^{\cdot}(t_1) P_2^{\cdot}(t') \prec P_2^{\cdot}(t_2),$$

en accord avec (34.3). Par conséquent $\mathfrak{d}$ est une application de situation, en termes du temps, et suivant l'axiome IX un point S existe tel que $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_S$.

En vertu du théorème 32.5 on a:

Théorème 34.5. *L'ensemble des éléments de* T, *pour lesquels* $v_{S\,.\,\mathbb{E}}(t) = c$, *n'est nulle part dense dans* T.

Théorème 34.6. $(\forall t \in \mathrm{T})\,[\vec{v}_{S\,:\,\mathbb{E}}(t) = \text{const.} \Rightarrow \vec{v}_{S\,:\,\mathbb{E}}(t) < c]$.

Comme $|\Delta \mathfrak{f}_S| < c\,\Delta t$, on a:

Théorème 34.7. *L'application* $\mathfrak{f}_S$ *est uniformément continue.*

NOTATION 34.1. Lorsque $(S \mathrel{\hat{\in}} \mathbb{E})\mathrm{T}$ et que S se déplace dans $\mathbb{E}$ avec la vitesse constante $\vec{v}$, nous noterons

$$(S \mathrel{\hat{\in}} \mathbb{E})\mathrm{T}\vec{v}.$$

Lorsque $\mathrm{T} = \mathbb{R}$ (mouvement permanent) nous noterons simplement

$$(S \mathrel{\hat{\in}} \mathbb{E})\,\vec{v}.$$

Soit S un point en mouvement sur une droite $\mathbf{a}$ d'un espace permanent L-métrique $\mathbb{E}$, avec une vitesse constante $\vec{v}$. On a les trois théorèmes suivants (le premier en vertu de la définition de $\vec{v}$):

Théorème 34.8. $(S \mathrel{\hat{\in}} \mathbf{a})\,\vec{v} \;\Rightarrow\; \vec{v}\,||\,\mathbf{a}$.

Théorème 34.9.

$$(S \mathrel{\hat{\in}} \mathbf{a})\,\vec{v} \;\Rightarrow\; (\exists P_\circ \in \mathbf{a})\,(\forall t \in \mathbb{R})\,(\exists P \in \mathbf{a})\,[\,(P \doteq S)t \;\wedge\; \overrightarrow{P_\circ P} = \vec{v}t].$$

$$(S \mathrel{\hat{\in}} \mathbf{a})\vec{v} \;\Rightarrow\; (\exists P_\circ \in \mathbf{a})\,(\forall P \in \mathbf{a})\,(\exists t \in \mathbb{R})\,[\,(P \doteq S)\,t \;\wedge\; \overrightarrow{P_\circ P} = \vec{v}t].$$

Démonstration. On a $S \mathrel{\hat{\in}} \mathbf{a}$, donc

$$(\forall t \in \mathbb{R})\,(\exists P \in \mathbf{a})\,[\,(P \doteq S)\,t],$$

donc, pour $t = 0$, un $P_\circ$ existe tel que $(P_\circ \doteq S)\,0$. En vertu du théorème 34.8, $\overrightarrow{P_\circ P}\,||\,\vec{v}$, et comme $\vec{v}$ est constant, on a en vertu de la définition 34.2,

$$\overrightarrow{P_\circ P} = \vec{v}t.$$

Ceci existe pour tout $P \in \mathbf{a}$, d'où la seconde proposition du théorème.

Théorème 34.10. $(\forall \mathbf{a} \subset \mathbb{E})\;\forall \vec{v}\;\exists S\;[\vec{v}\,||\,\mathbf{a} \;\wedge\; v < c \;\Rightarrow\; (S \mathrel{\hat{\in}} \mathbf{a})\vec{v}\,]$.

En d'autres termes: *Tous les mouvements rectilignes permanents des points matériels existent dans* $\mathbb{E}$, *quelle que soit leur vitesse constante de module* $v < c$.

Démonstration. Posons dans le théorème 34.4 $\mathbf{L}=\mathbf{a}$ et $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbf{a}$, telle que $P=f(t)$ soit défini par $\overrightarrow{P_oP}=\vec{v}\,t$. Notons

$$P'=f(t'),\quad P''=f(t''),\quad \forall t', t''.$$

On a $\overrightarrow{P_oP'}=\vec{v}\,t'$, $\overrightarrow{P_oP''}=\vec{v}\,t''$, donc $\overrightarrow{P'P''}=\vec{v}(t''-t')$, d'où

$$\frac{\overline{P'P''}}{|t''=t'|}=v.$$

Suivant le théorème 34.6 $v<c$, donc on a (34.2) et le théorème 34.4 s'applique.

Théorème 34.11. $(\forall Q\in\mathbf{M})(\forall\mathbb{E}\in\mathscr{E}_3)\ \forall\vec{v}\,[(Q\mathrel{\widehat{\in}}\mathbb{E})\vec{v}\ \Rightarrow\ Q\in\mathbf{M}_0]$,

En d'autres termes: *Tout point Q qui se déplace dans $\mathbb{E}$ avec une vitesse constante $\vec{v}$, est un point ordinaire.*

Démonstration. Soit $\varphi\in\Sigma$. Selon la définition 6.1 il faut prouver que

$$\forall\varphi\,(\forall X\in\mathbf{M})\,(\exists\psi_1,\psi_2)\,[X\varphi\ \Rightarrow\ Q\psi_1X\varphi\ \wedge\ X\varphi\,Q\psi_2].$$

Comme $(\mathbf{M}\doteq\mathbb{E})\,\mathbb{R}$ (théorème 24.12), on a

$$\forall\varphi\ \forall X\,(\exists P\in\mathbb{E})\,[(X\doteq P)\varphi],$$

donc $X\varphi\ \Leftrightarrow\ P\varphi$ et il suffit de montrer que

$$(34.6)\qquad \forall\varphi\,(\forall P\in\mathbb{E})\,(\exists\psi_1,\psi_2)\,[P\varphi\ \Rightarrow\ Q\psi_1P\varphi\ \wedge\ P\varphi\,Q\psi_2].$$

Comme Q est en mouvement permanent dans $\mathbb{E}$, on a également,

$$(34.7)\qquad (\forall\psi\in\Sigma_Q)\,(\exists P'\in\mathbb{E})\,[(P'\doteq Q)\,\psi],$$

donc $(Q\doteq P')\psi$, et par conséquent il faut montrer que

$$(\forall P\in\mathbb{E})\,(\exists\psi_1,\psi_2)\,[P\varphi\ \Rightarrow\ P'\psi_1P\varphi\ \wedge\ P\varphi\,P'\psi_2].$$

Or, c'est évident, puisque selon le théorème 24.13, $\mathbb{E}\subset\mathbf{M}_0$.

35. MOUVEMENT D'UN ENSEMBLE DE POINTS MATERIELS DANS UN ESPACE PERMANENT L-METRIQUE

On a en vertu de l'axiome V 4:

$$(\forall \mathbf{A} \subset \mathbf{M})(\forall \mathbb{E} \in \mathscr{E}_3)[(\mathbf{A} \dot{\subset} \mathbb{E})\mathbb{R}],$$

d'où, en vertu du théorème 33.2 et en omettant $\mathbb{R}$ (notation 33.1):

Théorème 35.1. $(\forall \mathbf{A} \subset \mathbf{M})(\forall \mathbb{E} \in \mathscr{E}_3)[\mathbf{A} \hat{\subset} \mathbb{E} \;\vee\; \mathbf{A} \bar{\subset} \mathbb{E}]$.

Théorème 35.2. *Quels que soient* $\mathbf{A}, \mathbb{E}, \hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}}$ *et* $\vec{v}$, *on a:*

$$(\forall \mathbf{A} \hat{\subset} \mathbb{E})\vec{v} \;\Rightarrow\; (\forall P \in \mathbf{A})(\forall t \in \mathbb{R})(\exists A_t \in \mathbb{E})[(A_t \doteq P)t \;\wedge\; \overrightarrow{A_\circ A_t} = \vec{v}\, t].$$

Démonstration. On a $(P \hat{\in} \mathbb{E})\mathbb{R}$ (définition 32.2). Pour $t=0$ on a $\exists A_\circ[(P \doteq A_\circ)0]$. Alors, soit $\mathbf{a} \subset \mathbb{E}$, $\mathbf{a} \,||\, \vec{v}$, tel que $A_\circ \in \mathbf{a}$. On a (théorème 34.9):

$$\forall t\,(\exists A_t \in \mathbf{a})[(P \doteq A_t)t \;\wedge\; \overrightarrow{A_\circ A_t} = \vec{v}\, t].$$

Théorème 35.3. *Quels que soient* $\mathbf{A}, \mathbb{E}, \hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}}$ *et* $\vec{v}$, *on a:*

$$(\mathbf{A} \hat{\subset} \mathbb{E})\vec{v} \;\Rightarrow\; (\forall P, Q \in \mathbf{A})[\hat{t}/\Sigma_P \in \mathscr{T}_{P:Q}].$$

En d'autres termes: *Si P et Q sont deux points quelconques d'un ensemble* $\mathbf{A}$ *qui se déplace dans un espace permanent L-métrique* $\mathbb{E}$ *avec une vitesse constante (par rapport à* $\mathbb{E}$*) alors la restriction $\hat{t}/\Sigma_P$ d'un temps commun $\hat{t}$ de* $\mathbb{E}$ *est un temps de P, métrique par rapport à Q.*

Démonstration. D'après le théorème 34.1 on a $\hat{t}/\Sigma_P \in \mathscr{T}_P$; nous écrirons simplement $\hat{t}$. Soit $Oxyz$ dans $\mathbb{E}$ un repère cartésien orthonormé, tel que l'axe des x ait la même direction que $\vec{v}$. Notons A_t, B_t les points de $\mathbb{E}$, qui coïncident avec P et Q à l'instant t de $\hat{t}$, donc

$$(A_t \doteq P)\,t, \qquad (B_t \doteq Q)\,t.$$

Selon le théorème 35.2, $\overrightarrow{A_\circ A_t} = \overrightarrow{B_\circ B_t} = \vec{v}\,t$, où $A_\circ = A_t$ et $B_\circ = B_t$ pour $t=0$. Conformément à la définition 34.1,

$$\langle x_P(t), y_P(t), z_P(t)\rangle = \langle x_{A_t}, y_{A_t}, z_{A_t}\rangle = h(A_t),$$

et de même avec Q et B_t. Alors,

(35.1) $$x_{A_t} = x_P(t) = vt + p_1, \quad x_{B_t} = x_Q(t) = vt + p_2, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

où $p_1 = x_P(0)$, $p_2 = x_Q\ (0)$, tandis que $y_{A_t}, y_{B_t}, z_{A_t}, z_{B_t}$ ne dépendent pas de t. Désignons par p, q, r les constantes

(35.2) $$p = p_2 - p_1 = x_{B_t} - x_{A_t}, \quad q = y_{B_t} - y_{A_t}, \quad r = z_{B_t} - z_{A_t}.$$

Désignons par t', t'' les instants de t pour lesquels

(35.3) $$P^{\cdot}(t) Q^{\cdot}(t') P^{\cdot}(t''),$$

donc aussi

$$A_t^{\cdot}(t)\, B_{t'}^{\cdot}(t')\, A_{t''}^{\cdot}(t''),$$

d'où en vertu du théorème 30.1,

(35.4) $$\overline{A_t B_{t'}} = c(t' - t), \quad \overline{B_{t'} A_{t''}} = c\,(t'' - t').$$

Or,

$$\overline{A_t B_{t'}}^2 = (x_{A_t} - x_{B_{t'}})^2 + (y_{A_t} - y_{B_{t'}})^2 + (z_{A_t} - z_{B_{t'}})^2,$$

donc, en vertu de (35.1), (35.2) et (35.4),

$$c^2\,(t' - t)^2 = [v\,(t' - t) + p]^2 + q^2 + r^2.$$

Notant

(35.5) $$s = \frac{2}{c^2 - v^2} \sqrt{c^2 p^2 + (c^2 - v^2)\,(q^2 + r^2)} \qquad (s \geqslant 0),$$

on a

(35.6) $$t' - t = \frac{pv}{c^2 - v^2} + \frac{s}{2}.$$

Le signe + devant la racine est le seul valable, puisque $t' - t > 0$ et d'après (32.3) $v < c$.

En partant de $B_{t'} A_{t''}$ on obtient de la même manière

(35.7) $$t'' - t' = -\frac{pv}{c^2 - v^2} + \frac{s}{2},$$

donc

$$t'' - t = s. \tag{35.8}$$

Donc on a dans (35.3) $\forall t\,[P^{\cdot}(t)Q^{\cdot}P^{\cdot}(t+s)]$, où s est indépendant de t. Par conséquent $t/\Sigma_P \in \mathscr{T}_{P:Q}$, quels que soient $P, Q \in \mathbf{A}$.

R e m a r q u e s. s dépend de P et Q (ou bien, de A_t et B_t). – Les temps locaux $\hat{t}/\Sigma_P$ et $\hat{t}/\Sigma_Q$ de P et Q ne sont pas synchrones, sauf pour $v=0$ ou $p=0$.

Si un ensemble **A** se déplace dans un espace permanent L-métrique avec une vitesse constante, il possède un temps commun. En effet, nous avons le théorème suivant:

Théorème 35.4. *Quels que soient* $\mathbf{A}$, $\mathbb{E}$ *et* $\vec{v}$, *tels que* $(\mathbf{A} \mathrel{\hat{\subset}} \mathbb{E})\vec{v}$, *et quels que soient* $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}}$ *et un repère orthonormé* $Oxyz$ *dans* $\mathbb{E}$, *tel que l'axe des* x *ait la même direction que* $\vec{v}$, *il existe un temps commun* $\hat{u}^\star \in \mathscr{T}_{\mathbf{A}}$, *de telle sorte que pour tout* φ *qui a lieu en un point* $Q \in \mathbf{A}$ *quelconque,*

$$u^\star = \frac{t - \dfrac{v}{c^2}x_Q}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}, \tag{35.9}$$

où $t = \hat{t}(\varphi)$, $u^\star = \hat{u}^\star(\varphi)$.

Démonstration. En retenant la notation de la démonstration précédente, on a selon (35.3) et (35.6) pour un P fixe et Q quelconque $(P, Q \in \mathbf{A})$:

$$P^{\cdot}(t)\,Q^{\cdot}(t')\,P^{\cdot}(t''), \qquad \forall t, \tag{35.10}$$

où t', t'' sont donnés par (35.6) et (35.8).

Nous définissons pour tout Q un temps $\hat{u}_Q \in \mathscr{T}_Q$, tel que dans

$$P^{\cdot}(t)\,Q^{\cdot}(u_Q')\,P^{\cdot}(t'') \tag{35.11}$$

on ait, au lieu de (35.6),

$$u_Q' = t + \frac{s}{2}. \tag{35.12}$$

Selon le théorème 14.4 $\hat{u}_Q$ est bien un temps continu de Q. De (35.6), (35.8), (35.12), et en tenant compte de (35.10) et (35.11), il en résulte:

$$u_Q' = t' - \frac{pv}{c^2 - v^2}.$$

Donc, en tenant compte de (35.10) et (35.11), et quelle que soit la valeur t de $\hat{t}/\Sigma_Q$, la valeur correspondante u de $\hat{u}_Q$, à savoir

$$u = \hat{u}_Q \circ (\hat{t}/\Sigma_Q)^{-1}(t),$$

est donnée par

$$u = t - \frac{pv}{c^2 - v^2}. \tag{35.13}$$

Remarquons que dans (35.13), t étant quelconque, il y est question d'un événement φ quelconque, qui a lieu en Q (également quelconque) de sorte que

$$t = (\hat{t}/\Sigma_Q)(\varphi), \quad u = \hat{u}(\varphi).$$

Lorsqu'en particulier $Q = P$, on a selon (35.1) et (35.2) $p = 0$, donc (35.13) devient $u = t$ pour tout t, ce qui veut dire, $u_P = t/\Sigma_P$. Alors la proposition (35.10) exprimée en termes des temps $\hat{u}_P$ et $\hat{u}_Q$, devient:

$$P^{\cdot}(u)\, Q^{\cdot}\left(u + \frac{s}{2}\right) P^{\cdot}(u + s), \tag{35.14}$$

Par conséquent, $\hat{u}_Q$ syn $\hat{u}_P$. (Remarquons qu'on a aussi $\hat{u}_P$ syn $\hat{u}_Q$.)

Montrons que

$$\bigcup_{Q \in \mathbf{A}} \hat{u}_Q$$

constitue un temps commun, soit $\hat{u}^{\star}$, de $\mathbf{A}$, et que par conséquent

$$\forall Q\, [\hat{u}_Q = \hat{u}^{\star}/\Sigma_Q].$$

Soient $P_0, P_1, P_2 \in \mathbf{A}$, quelconques, et $A_n \in \mathbb{E}$, tels que $(A_n \doteq P_n)\, t$, où $n = 0, 1, 2$. Écrivons (35.1) et (35.2) pour ces points comme il suit:

$$\hat{x}_{A_n}(t) = \hat{x}_{P_n}(t) = vt - p_n,$$

$$p_{mn} = p_m - p_n, \quad q_{mn} = y_{P_m} - y_{P_n}, \quad r_{mn} = z_{P_m} - z_{P_n},$$

où $m, n = 0, 1, 2$. Alors, en notant

$$s_{nm} = \frac{2}{c^2 - v^2} c^2 p_{nm}{}^2 + (c^2 - v^2)(q_{nm}{}^2 + r_{nm}{}^2),$$

on a dans

$$P_m^{\cdot}(t) P_n^{\cdot}(t') P_m^{\cdot}(t''),$$

suivant (35.6) et quel que soit t,

$$t' - t = \frac{p_{nm} v}{c^2 - v^2} + \frac{s_{nm}}{2}, \quad t'' - t = s_{nm}. \tag{35.15}$$

Par conséquent, en se rapportant à $\hat{u}_Q$ en chaque point Q de **A**, et en substituant Q dans (35.14) par P_n, $n = 1, 2$, on a d'abord

$$P_0{}^{\cdot}(u) P_n{}^{\cdot}\left(u + \frac{s_{n_0}}{2}\right) P_0{}^{\cdot}(u + s_{n_0}), \tag{35.16}$$

et ensuite

$$P_1{}'(u) P_2{}^{\cdot}(u') P_1{}^{\cdot}(u''),$$

où selon (35.14), en tenant compte de (35.13),

$$u = t - \frac{p_{10} v}{c^2 - v^2} \quad u' = t' - \frac{p_{20} v}{c^3 - v^2}, \quad u'' = t'' - \frac{p_{10} v}{c^2 - v^2}.$$

Donc, en vertu de (35.15),

$$u' - u = \frac{(p_{21} + p_{10} - p_{20}) v}{c^2 - v^2} + \frac{s_{21}}{2} = \frac{s_{21}}{2},$$

$$u'' - u = s_{21}$$

et par conséquent

$$P_1{}^{\cdot}(u) P_2{}^{\cdot}\left(u + \frac{s_{21}}{2}\right) P_1{}^{\cdot}(u + s_{21}). \tag{35.17}$$

Or, (35.16) et (35.17) signifient que

$$u_{P_n} \text{ syn } u_{P_m}, \qquad \forall m, n \in \{0, 1, 2\}.$$

Comme P_0, P_1, P_2 sont des points quelconques de $\mathbf{A}$, la réunion des $\hat{u}_Q$, $\forall Q \in \mathbf{A}$, constitue un temps commun, $\hat{u}^\star \in \mathscr{T}_{\mathbf{A}}$.

Puisque Q est le point où φ a lieu à l'instant t, on a en revenant à la notation de (35.1) et (35.2),

$$p = p_2 - p_1 = x_Q - vt - p_1\,,$$

où p_1 est une constante, car P est un point fixe de $\mathbf{A}$. Donc (35.13) devient

$$u = \frac{t - \dfrac{v^2}{c^2}}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} + r, \quad \text{où} \quad r = \frac{vp_1}{c^2 - v^2}\,.$$

Remplaçant $u - r$ par $u^\star$, nous obtenons (35.9).

Comme $\hat{u}^\star \in \mathscr{T}_{\mathbf{A}}$, on a d'après le théorème 17.1 le suivant:

Théorème 35.5. *Quels que soient A, $\mathbb{E}$, $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}}$ et $\vec{v}$,*

$$(\mathbf{A} \mathrel{\hat{\subset}} \mathbb{E})\,\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \in \mathscr{M}_\infty.$$

Théorème 35.6. *Soit $(\mathbf{A} \mathrel{\hat{\subset}} \mathbb{E})\,\vec{v}$ et supposons que $\mathbf{A}$ possède au moins un point d'accumulation permanente. Alors, quels que soient $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}}$, $\hat{t'} \in \mathscr{T}_{\mathbf{A}}$, et dans $\mathbb{E}$ un repère orthonormé $Oxyz$, tel que l'axe des x ait la même direction que $\vec{v}$, on a pour tout événement φ qui a lieu en un point quelconque $Q \in \mathbf{A}$,*

$$t' = k\,\frac{t - \dfrac{v}{c^2}\,x_Q}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} + h, \tag{35.18}$$

où k et h sont des constantes.

Démonstration. Le théorème 35.4 a lieu. Comme $\mathbf{A}$ possède un point d'accumulation, le théorème 17.6 s'applique et on a $t' = ku^\star + h$, où $u^\star$ est exprimé par (35.9), et k et h sont des constantes.

Théorème 35.7.

$$\forall \mathbb{E}\, \forall \vec{v}\, \exists \mathbf{F}\, [v < c \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{F} \mathrel{\hat{\subset}} \mathbb{E})\,\vec{v} \ \wedge\ \mathbf{F} \in \mathscr{N}(\omega, \omega') \ \wedge\ \mathbf{F} \doteq \mathbb{E}].$$

En d'autres termes: *Quels que soient l'espace $\mathbb{E}$ et le vecteur $\vec{v}$ tel que $v < c$, un ensemble $\mathbf{F}$ existe, qui se déplace par rapport à $\mathbb{E}$ avec la vitesse constante $\vec{v}$, qui est en outre en non-coïncidence permanente, et tel que $\mathbb{E}$ et $\mathbf{F}$ sont constamment situés l'un sur l'autre.*

Démonstration. Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des droites permanentes de $\mathbb{E}$, parallèles à $\vec{v}$. En vertu des axiomes V et VI, appliqués à $\mathbb{E}$, on a

$$(35.19) \qquad \bigcup_{\mathbf{a} \in \mathscr{D}} \mathbf{a} = \mathbb{E}.$$

Suivant le théorème 34.8 on a

$$(\forall \mathbf{a} \in \mathscr{D})\, \exists Q\, [(Q \mathrel{\widehat{\in}} \mathbf{a})\, \vec{v}]$$

et suivant le théorème 34.9,

$$(35.20) \qquad \forall \mathbf{a}\, (\forall P_\circ \in \mathbf{a})\, \exists Q\, \forall t\, (\exists P \in \mathbf{a})\, [(P \doteq Q)\, t \;\wedge\; \overrightarrow{P_\circ P} = \vec{v}\, t],$$

où t est une valeur de $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}}$.

Soit $\mathbf{F}'$ l'ensemble de ces points Q. Si pour $Q_1, Q_2 \in \mathbf{F}'$ on a $(Q_1 \doteq Q_2)\, t_\circ$ pour un certain $t_\circ$, alors

$$(35.21) \qquad (\exists P^\star \in \mathbb{E})\, [(P^\star \doteq Q_1)\, t_\circ \;\wedge\; (P^\star \doteq Q_2)\, t_\circ]$$

et par conséquent

$$\forall t\, (\exists P \in \mathbb{E})\, [\overrightarrow{P^\star P} = \vec{v}\, (t - t_\circ)\,],$$

ce qui exprime le mouvement de Q_1 autant que de Q_2. Donc, suivant (35.21),

$$\forall t\, \exists P\, [(P \doteq Q_1)\, t \;\wedge\; (P \doteq Q_2)\, t],$$

c.-à-d. on a constamment $Q_1 \doteq Q_2$. Par conséquent, deux points quelconques de $\mathbf{F}'$ ne coïncident jamais, ou bien ils coïncident constamment. Soit $\mathbf{F}$ un sous-ensemble de $\mathbf{F}'$, dont les points ne coïncident jamais entre eux, donc $\mathbf{F} \in \mathscr{N}(\omega, \omega')$, et tel que

$$(\forall Q' \in \mathbf{F}')\, (\exists Q \in \mathbf{F})\, [(Q' \doteq Q)\, \mathbb{R}].$$

On a $(\mathbf{F} \doteq \mathbb{E})\, \mathbb{R}$. En effet, $(\mathbf{F} \mathrel{\widehat{\subset}} \mathbb{E})\, t$ pour tout t, puisque d'après ce qui précède,

$$\forall Q\, \forall t\, (\exists P \in \mathbb{E})\, [(P \doteq Q)\, t].$$

Mais on a aussi $(\mathbf{F} \dot{\supset} \mathbb{E})\,t$, tout d'abord pour $t=0$, puisque suivant **(35.20)** et (35.21)

$$(\forall P_\circ \in \mathbb{E})\,\exists Q\,[(P_\circ \doteq Q)\,0],$$

ensuite pour t quelconque, puisque

$$\forall t\,(\forall P \in \mathbb{E})\,(\exists P_\circ \in \mathbb{E})\,[\overrightarrow{P_\circ P}\,||\,\vec{v} \ \wedge \ \overrightarrow{P_\circ P} = \vec{v}t\,],$$

et alors, suivant (35.20),

$$\exists Q\,[\,(P \doteq Q)\,t \ \wedge \ \overrightarrow{P_\circ P} = \vec{v}t].$$

Donc, $\mathbf{F} \doteq \mathbb{E}$, par conséquent $\mathbf{F}$ satisfait les conditions du théorème 35.7.

Théorème 35.8. *Soit* $(\mathbf{F} \mathrel{\hat{\subset}} \mathbb{E})\vec{v}$, $\mathbf{F} \doteq \mathbb{E}$ *et* $\mathbf{F} \in \mathscr{N}(\omega, \omega')$. *Alors,*

$$(\forall Q', Q'' \in \mathbf{F})\,(\exists \mathbf{q} \in \mathscr{P}_1)\,[Q' \neq Q'' \ \Rightarrow \ \mathbf{q} = Q'Q'' \ \wedge \ \mathbf{q} \subset \mathbf{F}].$$

Démonstration. Soit $\hat{t} \in \mathscr{C}_{\mathbb{E}}$. Comme $\mathbf{F} \dot{\subset} \mathbb{E}$, on a (théorème 32.3)

$$(\forall Q \in \mathbf{F})\,[\hat{t}/\Sigma_Q \in \mathscr{C}_Q].$$

Soient $Q', Q'' \in \mathbf{F}$ $(Q' \neq Q'')$ et ensuite t', t'' tels que

$$Q' \cdot (t')\, Q'' \cdot (t'').$$

Puisque $\mathbf{F} \dot{\subset} \mathbb{E}$, on a

$$(\exists P', P'' \in \mathbb{E})\,[\,(P' \doteq Q')\,t' \ \wedge \ (P'' \doteq Q'')\,t''].$$

Alors on a aussi

$$P' \cdot (t')\, P'' \cdot (t'').$$

Soit $\mathbf{p}$ la droite permanente $P'P'' \subset \mathbb{E}$. On a, d'une part,

$$(35.22)\qquad \begin{aligned}(\forall P \in \mathbf{p})\,\exists t\,[P\cdot(t)\,P'\cdot(t')\,P''\cdot(t'') \ \vee \ P'\cdot(t')\,P\cdot(t)\,P''\cdot(t'') \ \vee \\ \vee \ \mathrm{P}'\cdot(t')\,P''\cdot(t'')\,P\cdot(t)\,],\end{aligned}$$

d'autre part, comme $\mathbb{E} \dot{\subset} \mathbf{F}$,

$$(\forall P \in \mathbf{p})\,(\exists Q \in \mathbf{F})\,[\,(P \doteq Q)\,t],$$

et par conséquent, avec un tel Q et les mêmes valeurs t', t'', t de $\hat{t}$,

$$(35.23)\qquad \begin{aligned} &Q^{\cdot}(t)\,Q'^{\cdot}(t')\,Q''^{\cdot}(t'') \vee Q'^{\cdot}(t')Q^{\cdot}(t)\,Q''^{\cdot}(t'') \vee \\ &\vee\ Q'^{\cdot}(t')\,Q''^{\cdot}(t'')\,Q^{\cdot}(t). \end{aligned}$$

Soit $\mathbf{q}$ l'ensemble de ces points Q. Considérons dans (35.22) et (35.23) par exemple le premier des trois termes de la somme logique. Comme $P \in \mathbf{p}$, on a

$$P^{\cdot}(t)P'^{\cdot}(t')P''^{\cdot}(t'') \asymp P^{\cdot}(t)P''^{\cdot}(t''),$$

donc aussi

$$Q^{\cdot}(t)\,Q'^{\cdot}(t')\,Q''^{\cdot}(t'') \asymp Q^{\cdot}(t)\,Q''^{\cdot}(t''),$$

Il en est de même dans les deux autres cas de la somme logique. Par conséquent, l'ensemble $\{Q, Q', Q''\}$ est pour tout $Q \in \mathbf{q}$ en un alignement instantané propre, quel que soit $t' \in \mathbb{R}$. Selon le théorème 21.7,

$$\{Q, Q', Q''\} \in \mathscr{R}_3\,(\omega, \omega')$$

et selon la définition 18.2 et la notation 18.2, $\mathbf{q} \in \mathscr{R}\,(\omega, \omega')$. Il faut montrer que $\mathbf{q} \in \mathscr{P}_1$.

Comme $\mathbf{p} \in \mathscr{P}_1$, on a selon la définition 20.3,

$$(\forall P \in \mathbf{p})\,(\forall \varphi \in \Sigma_P)\,[\Lambda_P^{\varphi} = \Sigma_P],$$

donc

$$\hat{t}(\Lambda_P^{\varphi}) = \hat{t}(\Sigma_P) = \mathbb{R},$$

et par conséquent, dans (35.22), pour un t' donné, l'ensemble des valeurs t concernant tout $P \in \mathbf{p}$, est $\mathbb{R}$. La même conclusion s'applique à (35.23), puisque

$$(\,(\forall P \in \mathbf{p})\,(\exists Q \in \mathbf{q})\ \vee\ (\forall Q \in \mathbf{q})\,(\exists P \in \mathbf{p})\,)\,[\,(P \doteq Q)\,t].$$

En outre, selon le théorème 34.11, $(\forall Q \in \mathbf{F})[Q \in \mathbf{M}_0]$ et par suite de cela $\mathbf{F} \subset \mathbf{M}_0$. Donc, selon le théorème 20.3, $\mathbf{q} \in \mathscr{P}_1$. Par conséquent,

$$(\forall Q', Q'')(\exists \mathbf{q} \in \mathscr{P}_1)[\mathbf{q} = Q'Q'' \ \wedge \ \mathbf{q} \subset \mathbf{F}].$$

Théorème 35.9. *Soit* $(\mathbf{A} \mathrel{\hat{\subset}} \mathbb{E})\vec{v}$, $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}}$, et $\mathbf{B} \subset \mathbb{E}$, *quelconques. Alors,*

$$\exists t[(A \doteq B)t] \ \Rightarrow \ (\mathbf{A} \in \mathscr{P}_n \ \Leftrightarrow \ \mathbf{B} \in \mathscr{P}_n), \qquad n = 1,2.$$

Démonstration. Selon le théorème 35.5, $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_\infty$. Montrons que

$$\mathbf{A} \in \mathscr{P}_1 \ \Rightarrow \ \mathbf{B} \in \mathscr{P}_1.$$

Soient P, Q, R trois points distincts quelconques de $\mathbf{A}$, qui forment un triple rectiligne (définition 18.1), donc par exemple P-Q-R. On a

$$\langle P^{\cdot}(t)\text{-}Q^{\cdot}(t')\text{-}\rangle R^{\cdot}(t''),$$

donc aussi

$$\langle A_t^{\cdot}(t)\text{-}B_{t'}^{\cdot}(t')\text{-}\rangle C_{t''}^{\cdot}(t''),$$

ainsi que l'alignement inverse, en d'autres termes: A_t-$B_{t'}$-$C_{t''}$, par conséquent ces trois points appartiennent à une droite permanente. D'autre part, les droites $B_tB_{t'}$ et $C_tC_{t''}$ sont parallèles à $\vec{v}$ (théorème 34.8), donc elles sont contenues, ainsi que la droite $A_tB_{t'}$, dans un plan permanent (donc euclidien) de $\mathbb{E}$. On a d'après le théorème 34.9,

$$\overline{B_t B_{t'}} = v(t'-t), \quad \overline{C_t C_{t''}} = v(t''-t).$$

Or, selon la définition 17.2,

$$\overline{A_t B_{t'}} = c(t'-t), \quad \overline{A_t C_{t''}} = c(t''-t),$$

donc

$$\overline{A_t B_{t''}}/\overline{B_t B_{t'}} = \overline{A_t C_{t''}}/\overline{C_t C_{t''}}, \tag{35.24}$$

de sorte que les triangles $\Delta A_t B_t B_{t'}$ et $\Delta A_t C_t C_{t''}$ sont semblables, et on a A_t-B_t-C_t, donc ces points forment un triple rectiligne. Par conséquent $\mathbf{B} \in \mathscr{P}_1$.

Montrons que

$$\mathbf{B} \in \mathscr{P}_1 \ \Rightarrow \ \mathbf{A} \in \mathscr{P}_1.$$

Soit $\mathbf{B} \in \mathscr{P}_1$. Si, au contraire, $\mathbf{A} \notin \mathscr{P}_1$, alors

$$(\exists P, Q, R \in \mathbf{A}) [\{P, Q, R\} \notin \mathscr{R}_3(\omega, \omega')].$$

Soient $A_t, B_t, C_t \in \mathbf{B}$, comme auparavent. Comme ces trois points forment un triple rectiligne, on a par exemple A_t-B_t-C_t. Pourtant, un t existerait tel que

$$P^{\cdot}(t)\, Q^{\cdot}(t') R^{\cdot} \succ P^{\cdot}(t)\, R^{\cdot}(t''),$$

donc aussi

$$A_t^{\cdot}(t)\, B_{t'}^{\cdot}(t')\, C_{t''}^{\cdot} \succ A_t^{\cdot}(t)\, C_{t''}^{\cdot}(t''),$$

par conséquent, non $(A_t$-$B_{t'}$-$C_{t''})$, donc $B_{t'} \notin A_t C_{t''}$. D'autre part, les droites $B_t B_{t'}$ et $C_t C_{t''}$ sont parallèles à $\vec{v}$, donc elles sont contenues, ainsi que les droites $A_t B_{t'}$ et $A_t C_{t''}$, dans un plan permanent de $\mathbb{E}$. On en déduit, comme précédemment, la proportion (35.24). Mais, comme $B_{t'} \notin A_t C_{t''}$, il est également $B_t \notin A_t C_t$, donc $\mathbf{B} \notin \mathscr{P}_1$, contrairement à ce qu'on a admis. Par conséquent l'hypothèse que $\mathbf{A} \notin \mathscr{P}_1$ est impossible, donc $\mathbf{A} \in \mathscr{P}_1$.

Les deux implications avec $n = 2$ s'ensuivent en vertu de la définition 23.2.

Théorème 35.10.

$$(\forall \mathbb{E} \in \mathscr{E}_3)(\forall \mathbf{F} \subset \mathbf{M}) [(\mathbf{F} \mathrel{\hat{\subset}} \mathbb{E})\vec{v} \ \wedge\ \mathbf{F} \in \mathscr{N}(\omega, \omega') \ \wedge\ \mathbf{F} \doteq \mathbb{E} \ \Rightarrow\ \mathbf{F} \in \mathscr{E}_3].$$

Démonstration. Suivant le théorème 35.5 $\mathbf{F} \in \mathscr{M}_\infty$. Nous allons montrer que $\mathbf{F} \in \mathscr{P}_3$.

Suivant le théorème 35.8 la droite permanente $Q'Q'' \subset \mathbf{F}$ existe quels que soient $Q', Q'' \in \mathbf{F}$, $Q' \neq Q''$. Suivant le théorème 17.4, $Q'Q'' \in \mathscr{M}_\infty$.

Soient $Q_n \in \mathbf{F}$ et $P_n \in \mathbb{E}$ $(n = 1, 2, 3, 4)$, tels que

$$\exists t_\circ [(P_n \doteq Q_n)\, t_\circ],$$

et que $\{P_1, P_2, P_3, P_4\} \in \mathscr{T}_4$. Alors, $\{P_1, P_2, P_3\} \in \mathscr{T}_3$, puisque selon la définition 23.4 le plan $P_1P_2P_3$ existe. Selon l'axiome V 1 la droite permanente P_1P_2 existe, et selon le théorème 35.8 la droite permanente $Q_1Q_2 \subset \mathbf{F}$ existe aussi. Pour $n = 1, 2$, $(P_n \doteq Q_n)\, t_\circ$, donc $(P_3 \notin Q_1Q_2)\, t_\circ$, et par conséquent $(Q_3 \notin Q_1Q_2)\, t_\circ$, car $(P_3 \doteq Q_3)\, t_\circ$. Donc, $Q_3 \notin Q_1Q_2$, d'où, selon le théorème 24.2, $\{Q_1, Q_2, Q_3\} \in \mathscr{T}_3$.

En vertu de la définition 23.2 et du théorème 35.8 le plan permanent $Q_1Q_2Q_3$ existe, $Q_1Q_2Q_3 \subset \mathbf{F}$. Alors, selon le théorème 21.7 Q_4 n'est jamais situé sur aucune droite dont on a fait usage dans la définition 23.2 de ce plan, donc $Q_4 \notin Q_1 Q_2 Q_3$, par conséquent

$$[Q_1, Q_2, Q_3, Q_4] \in \mathscr{T}_4 .$$

Comme, par définition 23.3, la région triangulaire $[Q_1 Q_2 Q_3]$ existe et que $[Q_1 Q_2 Q_4]$, $[Q_1 Q_3 Q_4]$, $[Q_2 Q_3 Q_4]$ existent pour les mêmes raisons, l'espace permanent $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$ existe aussi,

$$Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 \subset \mathbf{F}.$$

Selon l'axiome V 4 $\mathbf{M} \dot{\subset} Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$, donc $\mathbf{F} \subset Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$ et par conséquent

$$Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 = \mathbf{F}.$$

Donc $\mathbf{F} \in \mathscr{P}_3$. Comme $\mathbf{F} \in \mathscr{M}_\infty$, on a $\mathbf{F} \in \mathscr{E}_3$.

36. DEUX ESPACES PERMANENTS L-METRIQUES EN MOUVEMENT RELATIF A VITESSE CONSTANTE: RELATIONS GEOMETRIQUES

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ deux espaces permanents L-métriques. Sans préciser d'abord comment $\mathbb{E}'$ se déplace sur $\mathbb{E}$, ou $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{E}'$, nous avons en vertu des définitions 33.1 et 33.2 et du théorème 24.12 les trois propositions suivantes (où les relations sont permanentes).

Théorème 36.1. $\mathbb{E} \overline{\equiv} \mathbb{E}' \;\Rightarrow\; \mathbb{E} \overline{\subset} \mathbb{E}' \;\wedge\; \mathbb{E}' \overline{\subset} \mathbb{E}.$

$$\mathbb{E} \overset{\frown}{\equiv} \mathbb{E}' \;\Rightarrow\; \mathbb{E} \overset{\frown}{\subset} \mathbb{E}' \;\wedge\; \mathbb{E}' \overset{\frown}{\subset} \mathbb{E}.$$

Théorème 36.2. $\mathbb{E} \overline{\subset} \mathbb{E}' \;\Rightarrow\; \mathbb{E} \overline{\equiv} \mathbb{E}' \;\wedge\; \mathbb{E}' \overline{\subset} \mathbb{E}.$

$$\mathbb{E} \overset{\frown}{\subset} \mathbb{E}' \;\Rightarrow\; \mathbb{E} \overset{\frown}{\equiv} \mathbb{E}' \;\wedge\; \mathbb{E}' \overset{\frown}{\subset} \mathbb{E}.$$

Théorème 36.3. $(\forall \mathbb{E}, \mathbb{E}') [\mathbb{E} \overline{\equiv} \mathbb{E}' \;\vee\; \mathbb{E} \overset{\frown}{\equiv} \mathbb{E}']$.

Dorénavant nous supposons que $\mathbb{E}'$ se déplace par rapport à $\mathbb{E}$ avec une vitesse constante $\vec{v}$, donc $(\mathbb{E}' \overset{\frown}{\subset} \mathbb{E})\, \vec{v}$.

Notons d'abord le théorème suivant sur la propagation de la lumière dans les deux espaces $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$. On a selon le théorème 30.3:

Théorème 36.4. *Soient* $\langle t_0, x_0, y_0, z_0\rangle$ *et* $\langle t'_0, x'_0, y'_0, z'_0\rangle$ *les quadru-ples des coordonnées d'un événement* φ *quelconque, rapportés aux repères lorentziens* $Otxyz$ *et* $O't'x'y'z'$ *dans* $\mathbb{E}$ *et dans* $\mathbb{E}'$*. Alors la propagation de la perception de* φ *est donnée par:*

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=c^2(t-t_0)^2 \qquad \textit{dans } \mathbb{E},$$

$$(x'-x'_0)^2+(y'-y'_0)^2+(z'-z'_0)^2=c^2(t'-t'_0)^2 \qquad \textit{dans } \mathbb{E}'.$$

Le théorème suivant résulte des théorèmes 35.7 et 35.10.

Théorème 36.5. $\forall \mathbb{E}\ \forall \vec{v}\ \exists \mathbb{E}'\ [v<c \ \Rightarrow\ (\mathbb{E}' \hat{\subset} \mathbb{E})\vec{v}]$.

En d'autres termes: *Quels que soient l'espace* $\mathbb{E}$ *et le vecteur* $\vec{v}$*, tel que* $v<c$*, un espace* $\mathbb{E}'$ *existe, qui se déplace par rapport à* $\mathbb{E}$ *avec la vitesse constante* $\vec{v}$*.*

Les relations strictement géométriques, telles que le parallélisme ou la perpendicularité des droites, appartiennent au chapitre V, où il s'agissait des sous-ensembles (figures) d'un même espace permanent. Lorsque le problème se pose de considérer deux espaces en mouvement relatif, il devient nécessaire d'élargir certaines relations géométriques en les envisageant entre les ensembles qui ne font pas partie du même espace, mais des deux à la fois. Ceux-ci seront notés $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$, et tous les sous-ensembles de $\mathbb{E}'$ seront marqués par „prime".

Théorème 36.6. *Soit* $(\mathbb{E}' \hat{\subset} \mathbb{E})\vec{v}$, $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}}$, $\hat{t}' \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}'}$. *Si* $P \in \mathbb{E}$, $P' \in \mathbb{E}'$, *on a*

$$(\forall \langle t,P\rangle\ \exists \langle t',P'\rangle\ \vee\ \forall \langle t',P'\rangle\ \exists \langle t,P\rangle)\ [(P \doteq P')t\ \wedge\ (P' \doteq P)t'].$$

Démonstration. Suivant les théorèmes 36.2 et 33.2 $\mathbb{E}' \doteq \mathbb{E}$, et suivant la définition 12.9 $\forall P\,\forall\varphi\,\exists P'$ et $\forall P'\,\forall\varphi\,\exists P$ tels que $(P \doteq P')\varphi$, d'où la double proposition.

Les deux théorèmes suivants portent sur les droites parallèles à $\vec{v}$.

Théorème 36.7. *Soit* $(\mathbb{E}' \hat{\subset} \mathbb{E})\vec{v}$. *Alors,*

$$(\forall \mathbf{a} \subset \mathbb{E})(\exists \mathbf{a}' \subset \mathbb{E}')\,[\mathbf{a} \,||\, \vec{v} \ \Rightarrow\ \mathbf{a} \doteq \mathbf{a}'].$$

$$(\forall \mathbf{a} \subset \mathbb{E})(\forall \mathbf{a}' \subset \mathbb{E}')\,[\mathbf{a} \doteq \mathbf{a}' \ \Rightarrow\ \mathbf{a} \,||\, \vec{v}].$$

Démonstration. Suivant le théorème 36.6,

$$(\forall P \in \mathbf{a})\ \forall t\ (\exists P' \in \mathbb{E}')\,[(P \doteq P')t].$$

Désignons d'avance par $\mathbf{a}'$ l'ensemble de ces points P'. On a $(\mathbf{a} \doteq \mathbf{a}')t$, donc selon le théorème 35.9, $\mathbf{a}' \in \mathscr{P}_1$.

Donc $\mathbf{a}' \subset \mathbb{E}'$, ainsi que

$$((\forall P \in \mathbf{a})\ \forall t\ (\exists P' \in \mathbf{a}')\ \wedge\ (\forall P' \in \mathbf{a}')\ \forall t\ (\exists P \in \mathbf{a}))\,[(P \doteq P')t],$$

par conséquent, selon les définitions 12.9 et 17.6,

$$(\forall P \in \mathbf{a})\,[(P \mathrel{\dot\in} \mathbf{a}')\,\mathbb{R}] \quad \text{et} \quad (\forall P' \in \mathbf{a}')\,[(P' \mathrel{\dot\in} \mathbf{a})\,\mathbb{R}],$$

donc $\mathbf{a} \mathrel{\dot\subset} \mathbf{a}'$ et $\mathbf{a}' \mathrel{\dot\subset} \mathbf{a}$, en d'autres termes, $\mathbf{a} \doteq \mathbf{a}'$, ce qui démontre la première proposition.

Quant à la seconde proposition du théorème, remarquons que la trajectoire dans $\mathbb{E}$ d'un point quelconque P' de $\mathbf{a}'$ est une droite parallèle à $\vec{v}$, donc $P' \mathrel{\dot\in} \mathbf{a}$, d'où $\mathbf{a}' \mathrel{\dot\subset} \mathbf{a}$, par conséquent $\mathbf{a} \doteq \mathbf{a}'$.

Les deux propositions du théorème suivant se démontrent ainsi en complète analogie avec celle du théorème précédent.

Théorème 36.8. $\forall \mathbf{a}'\ \forall t\ \exists \mathbf{a}_t\,[(\mathbf{a}_t \doteq \mathbf{a}')t]$,

$$\forall \mathbf{a}\ \forall t\ \exists \mathbf{a}'_t\,[(\mathbf{a} \doteq \mathbf{a}'_t)t].$$

Théorème 36.9. *Soit* $(\mathbb{E}' \mathrel{\hat{\subset}} \mathbb{E})\vec{v}$. *Alors,*

$$(\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \subset \mathbb{E})(\forall \mathbf{a}' \subset \mathbb{E}')(\exists \mathbf{b}' \subset \mathbb{E}')\,[\mathbf{a} \,||\, \vec{v}\ \wedge\ \mathbf{a} \doteq \mathbf{a}'\ \wedge\ \mathbf{a} \,||\, \mathbf{b}\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \mathbf{b} \doteq \mathbf{b}'\ \wedge\ \mathbf{a}' \,||\, \mathbf{b}'],$$

$$(\forall \mathbf{a} \subset \mathbb{E})(\forall \mathbf{a}'\, \mathbf{b}' \subset \mathbb{E}')(\exists \mathbf{b} \subset \mathbb{E})\,[\mathbf{a} \,||\, \vec{v}\ \wedge\ \mathbf{a} \doteq \mathbf{a}'\ \wedge\ \mathbf{a}' \,||\, \mathbf{b}'\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \mathbf{b} \doteq \mathbf{b}'\ \wedge\ \mathbf{a} \,||\, \mathbf{b}].$$

Démonstration. Pour démontrer la première proposition remarquons d'abord que

$$(\forall P \in \mathbf{b})\ \forall t\ (\exists P' \in \mathbb{E}')\,[(P \doteq P')t].$$

Soit $\mathbf{b}'$ l'ensemble de ces points P'. On montre comme dans le théorème précédent, que $\mathbf{b}' \in \mathscr{P}_1$ et $\mathbf{b} \doteq \mathbf{b}'$. Montrons que $\mathbf{a}'$ et $\mathbf{b}'$ font partie d'un plan de $\mathbb{E}'$. Le cas où $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ étant trivial, soit $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$. Comme $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ font partie d'un plan $\mathbb{h} \subset \mathbb{E}$, soient $\mathbf{c}, \mathbf{d} \subset \mathbb{h}$, $\mathbf{c} \neq \mathbf{d}$ et telles que $\mathbf{c} \,||\, \mathbf{d}$ et que $\mathbf{c}$ et $\mathbf{d}$ coupent $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$,

$$\mathbf{a} \cap \mathbf{c} = P_1,\ \mathbf{b} \cap \mathbf{c} = P_2,\ \mathbf{a} \cap \mathbf{d} = P_3,\ \mathbf{b} \cap \mathbf{d} = P_4.$$

Alors on a pour $i=1, 2, 3, 4$,

$$\forall t \ (\exists P'_i \in \mathbb{E}') [(P_i \doteq P'_i)t].$$

et les droites

$$\mathbf{a}' = P'_1P'_3, \quad \mathbf{b}' = P'_2P'_4, \quad \mathbf{c}' = P'_1P'_2, \quad \mathbf{d}' = P'_3P'_4,$$

ainsi que les droites $P'_1P'_4$, $P'_2P'_3$ existent (théorème 36.7), donc elles font partie d'un plan $\mathbb{h}' \subset \mathbb{E}'$, et on a $\mathbf{a}', \mathbf{b}' \subset \mathbb{h}'$. Comme $\mathbf{a} \cap \mathbf{b} = \emptyset$, il est aussi $\mathbf{a}' \cap \mathbf{b}' = \emptyset$, donc $\mathbf{a}' \,||\, \mathbf{b}'$.

La seconde proposition du théorème se démontre de façon analogue.

Théorème 36.10. $(\forall \mathbb{h} \subset \mathbb{E})(\exists \mathbb{h}' \subset \mathbb{E}')[\mathbb{h} \,||\, \vec{v} \;\Rightarrow\; \mathbb{h} \doteq \mathbb{h}']$.

Théorème 36.11. $\forall \mathbb{h}' \ \forall t \ \exists \mathbb{h}_t \ [(\mathbb{h}_t \doteq \mathbb{h}')t]$,

$\forall \mathbb{h} \ \forall t \ \exists \mathbb{h}'_t \ [(\mathbb{h} \doteq \mathbb{h}'_t)t]$.

DEFINITION 36.1. Soit $(\mathbb{E}' \hat{\subset} \mathbb{E})\vec{v}$, $\mathbf{A} \subset \mathbb{E}$, $\mathbf{A}' \subset \mathbb{E}'$, $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}}$. Alors

$$(\mathbf{A} \dot{\cap} \mathbf{A}')t \overset{\text{def}}{=} \{\langle P, P' \rangle \,|\, P \in \mathbf{A} \ \wedge \ P' \in \mathbf{A}' \ \wedge \ (P \doteq P')t\}.$$

On appellera l'ensemble $(\mathbf{A} \dot{\cap} \mathbf{A}')t$ *quasi-intersection* de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}'$, *à l'instant* t. Les ensembles

$$\mathbf{A} \cap (\mathbf{A} \dot{\cap} \mathbf{A}')t \qquad \text{et} \qquad \mathbf{A}' \cap (\mathbf{A} \dot{\cap} \mathbf{A}')t$$

seront appelés $\mathbb{E}$-*composante* et $\mathbb{E}'$-*composante* de cette quasi-intersection.

DEFINITION 36.2. $(\mathbf{A} \dot{\times} \mathbf{A}')t \overset{\text{def}}{=} (\mathbf{A} \dot{\cap} \mathbf{A}')t \neq \emptyset \ \wedge \ \text{non} \ (\mathbf{A} \doteq \mathbf{A}')t$.

On dira que $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}'$ *sont en quasi-intersection à l'instant* t, ou simplement qu'ils *se coupent* (dans un sens élargi) *à l'instant* t.

NOTATION 36.1. Lorsque $(\forall t \in \mathbb{R})[(\mathbf{A} \dot{\times} \mathbf{A}')t]$, on notera $(\mathbf{A} \dot{\times} \mathbf{A}')_{\mathbb{E}}$

Soit $(\mathbb{E}' \hat{\subset} \mathbb{E})\vec{v}$, $\mathbf{A} \subset \mathbb{E}$, $\mathbf{A}' \subset \mathbb{E}'$ et $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}}$. On a les deux théorèmes suivants:

Théorème 36.12. $\mathbb{E} = \mathbb{E}' \;\Rightarrow\; \forall t\,[(\mathbf{A} \dot{\cap} \mathbf{A}')t = \mathbf{A} \cap \mathbf{A}']$.

$\mathbb{E} = \mathbb{E}' \;\Rightarrow\; [\forall t\,[(\mathbf{A} \dot{\times} \mathbf{A}')t] = \mathbf{A} \times \mathbf{A}']$.

Théorème 36.13. *Soient* $\mathbf{A}_t$ *et* $\mathbf{A}'_t$ *la* $\mathbb{E}$*-composante et la* $\mathbb{E}'$*-composante de* $(\mathbf{A}\dot{\cap}\mathbf{A}')t$. *On a*

$$(\mathbf{A}_t \doteq \mathbf{A}'_t)t \quad et \quad \mathbf{A}_t \cup \mathbf{A}'_t = (\mathbf{A}\dot{\cap}\mathbf{A}')t.$$

Soit $(\mathbb{E}' \,\hat{\subset}\, \mathbb{E})\vec{v}$, $\mathbf{a} \subset \mathbb{E}$, $\mathbf{a}' \subset \mathbb{E}'$, $\mathbb{h} \subset \mathbb{E}$ $(\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathscr{P}_1$ et $\mathbb{h} \in \mathscr{P}_2)$. Démontrons les deux théorèmes suivants:

Théorème 36.14. $\exists t_\circ \; \{ (\mathbf{a} \doteq \mathbf{a}')t_\circ \;\wedge\; \text{non}\, (\mathbf{a} \doteq \mathbf{a}') \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \; (\forall t \neq t_\circ)\,[(\mathbf{a} \,\dot{\cap}\, \mathbf{a}')t = \emptyset] \;\wedge\; \exists \mathbb{h}\,[\mathbb{h} \,||\, \vec{v} \;\wedge\; \mathbf{a} \subset \mathbb{h} \;\wedge\; \mathbf{a}' \,\dot{\subset}\, \mathbb{h}]\,\}.$$

Démonstration. En vertu de la définition 36.1,

$$(36.2) \qquad (\forall P\, \exists P' \;\wedge\; \forall P'\, \exists P)\; [P \in \mathbf{a} \;\wedge\; P' \in \mathbf{a}' \;\wedge\; (P \doteq P')t_\circ]$$

pour un certain $t_\circ$. Selon le théorème 34.9,

$$(36.3) \qquad \forall t\; (\exists A_t \in \mathbb{E})\,[(P' \doteq A_t)t \;\wedge\; \overrightarrow{PA_t} = \vec{v}\,(t - t_\circ)\,],$$

donc, dans $\mathbb{E}$, $(\forall t \neq t_\circ)\,[PA_t \,||\, \vec{v}]$. Comme il n'est pas $\mathbf{a} \doteq \mathbf{a}'$, il n'est ni $\mathbf{a} \,||\, \vec{v}$, par conséquent toutes les droites PA_t déterminent un plan $\mathbb{h}$, et on a $\mathbb{h} \,||\, \vec{v}$ et $\mathbf{a} \subset \mathbb{h}$. D'après (36.3)

$$\forall t\, [(P' \doteq A_t)t],$$

donc, tenant compte de (36.2),

$$\forall P'\, \forall t\, \exists A_t\, [(P' \doteq A_t)t],$$

d'où

$$\forall P'\, \forall t\, [(P' \,\dot{\in}\, \mathbb{h})t]$$

et par conséquent

$$\forall t\, [(\mathbf{a}' \,\dot{\subset}\, \mathbb{h})t].$$

Selon le théorème 35.9 l'ensemble des points A_t pour un t fixe est également une droite, soit $\mathbf{a}_t$, et on a $(\mathbf{a}_t \doteq \mathbf{a}')t$ et $\mathbf{a}_t \,||\, \mathbf{a}$. En outre $\mathbf{a}_{t_\circ} = \mathbf{a}$, et selon l'axiome VI

$$(\forall t \neq t_\circ)\,[(\mathbf{a}_t \cap \mathbf{a} = \emptyset].$$

Puisque $(\mathbf{a}_t \doteq \mathbf{a}')t$, on a en vertu de la définition 36.1

$$(\forall t \neq t_\circ)\,[(\mathbf{a}' \dot{\cap}\, \mathbf{a})t = \emptyset].$$

Théorème 36.15. $\forall t\,\{[\text{non}\,(\mathbf{a} \doteq \mathbf{a}')t] \;\wedge\; \exists \mathbb{h}\,[\mathbf{a} \subset \mathbb{h} \;\wedge\; \mathbf{a}' \dot{\subset} \mathbb{h}] \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \;(\exists P \in \mathbf{a})\,(\exists P' \in \mathbf{a}')\,[(P \doteq P')t \;\wedge\; (\mathbf{a} \dot{\cap}\, \mathbf{a}')t = \{P, P'\}]\,\}.$$

Démonstration. D'après le théorème 17.9, en retenant la notation $\mathbf{a}_t$, on a:

$$(\mathbf{a}' \dot{\subset} \mathbb{h})t \;\Rightarrow\; \forall t\, \exists \mathbf{a}_t\,[\mathbf{a}_t \subset \mathbb{h} \;\wedge\; (\mathbf{a}_t \doteq \mathbf{a}')t].$$

D'autre part,

$$\forall t\,[\text{non}\,(\mathbf{a} \doteq \mathbf{a}')t \;\Leftrightarrow\; \text{non}\,(\mathbf{a} = \mathbf{a}_t)\,]$$

(puisque autrement

$$\exists t_\circ\,[(\mathbf{a} \doteq \mathbf{a}')t_\circ \;\Leftrightarrow\; \mathbf{a} = \mathbf{a}_{t_0}],$$

contrairement à l'hypothese) par conséquent $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}_t$ se coupent,

$$\forall t\, \exists P\,[\mathbf{a} \cap \mathbf{a}_t = \{P\}\,].$$

Or, $(\mathbf{a}_t \doteq \mathbf{a}')t$, donc

$$\forall t\, \forall P\, (\exists P' \in \mathbf{a}')\,[(P \doteq P')t],$$

donc $\mathbf{a} \dot{\cap}\, \mathbf{a}' = \{P, P'\}$.

Théorème 36.16. $\exists t\,[(\mathbf{a} \dot{\times} \mathbf{a}')t] \;\Rightarrow\; (\mathbf{a} \dot{\times} \mathbf{a}')_{\mathbb{E}} \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \;\forall t\,(\exists P \in \mathbb{E})\,(\exists P' \in \mathbb{E}')\,[(\mathbf{a} \dot{\cap}\, \mathbf{a}')t = \{P, P'\}\,].$$

DEFINITION 36.3. Soient $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathscr{P}_1$, $\mathbf{a} \subset \mathbb{E}$, $\mathbf{a}' \subset \mathbb{E}'$, et $\hat{t} \in \mathscr{C}_{\mathbb{E}}$. Alors

$$(\mathbf{a} \,\dot{||}\, \mathbf{a}')_{\mathbb{E}} = \forall t\,(\exists \mathbf{a}_t \subset \mathbb{E})\,[\mathbf{a} \,||\, \mathbf{a}_t \;\wedge\; (\mathbf{a}_t \doteq \mathbf{a}')t];$$

on dira que les droites permanentes $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ sont *selon l'espace* $\mathbb{E}$ *constamment parallèles* (dans le sens élargi).

Lorsque $(\mathbf{a} \dot{\times} \mathbf{a}')_{\mathbb{E}}$ et $(\mathbf{a} \dot{\cap}\, \mathbf{a}')t = \langle P, P' \rangle$, on dira que *selon l'espace* $\mathbb{E}$ les droites $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ *se coupent constamment*, à savoir *en* $\langle P, P' \rangle$ *à l'instant* t du temps $\hat{t}$.

R e m a r q u e. La transformation de Lorentz montre que $(\mathbf{a} \,\dot{\|}\, \mathbf{a}')_{\mathbb{E}}$ n'implique pas $(\mathbf{a}' \,\dot{\|}\, \mathbf{a})_{\mathbb{E}'}$. Au contraire, $(\mathbf{a} \,\dot{\|}\, \mathbf{a}')_{\mathbb{E}} \Rightarrow (\mathbf{a}' \dot{\times} \mathbf{a})_{\mathbb{E}'}$, excepté si $\mathbf{a} \,\|\, \vec{v}$ ou $\mathbf{a} \perp \vec{v}$ ou $v = 0$.

NOTATION 36.2. Comme nous n'allons considérer que les relations géométriques „selon" l'espace $\mathbb{E}$, nous omettrons la lettre $\mathbb{E}$ et écrirons simplement $\mathbf{a} \,\dot{\|}\, \mathbf{a}'$, $\mathbf{a} \dot{\times} \mathbf{a}'$, etc.

Théorème 36.17. $\exists t\, [(\mathbf{a} \doteq \mathbf{a}')t] \Rightarrow \mathbf{a} \,\dot{\|}\, \mathbf{a}'$.

$$\mathbf{a} \,\dot{\|}\, \mathbf{a}' \wedge \mathbf{a} \subset \mathbb{h} \wedge \mathbf{a}' \mathbin{\dot{\subset}} \mathbb{h} \Rightarrow \exists t\, [(\mathbf{a} \doteq \mathbf{a}')t].$$

Démonstration. Négligeant le cas trivial où $\mathbf{a} \doteq \mathbf{a}'$, on a en ce qui concerne la première proposition, $\exists \mathbb{h} \,\|\, \vec{v}$, $\mathbf{a} \subset \mathbb{h}$, $\mathbf{a}' \mathbin{\dot{\subset}} \mathbb{h}$ (théorème 36.14) et en vertu des théorèmes 36.6 et 36.9,

$$(\forall t_1 \neq t)\, (\exists \mathbf{a}_1 \subset \mathbb{h})\, [(\mathbf{a}_1 \doteq \mathbf{a}')t_1].$$

Il est $\mathbf{a}_1 \,\|\, \mathbf{a}$, car autrement

$$\exists P\, [\{P\} = \mathbf{a} \cap \mathbf{a}_1] \wedge \exists P'\, [(P \doteq P')t_1],$$

d'où $P' \in \mathbf{a}'$, donc $(\mathbf{a} \mathbin{\dot{\cap}} \mathbf{a}')t_1 = \langle P, P' \rangle$, contrairement au théorème 36.14. Donc, selon la définition 36.3, $\mathbf{a} \,\dot{\|}\, \mathbf{a}'$.

Quant à la seconde proposition, on a en négligeant le cas où $\mathbf{a} \doteq \mathbf{a}'$,

$$\forall t\, \exists \mathbf{a}_t\, [(\mathbf{a}' \doteq \mathbf{a}_t)t]$$

(théorème 36.8) et on montre comme précédemment qua $\mathbf{a} \,\|\, \mathbf{a}_t$. La trajectoire d'un point $P' \in \mathbf{a}'$ est une droite $\mathbf{b} \,\|\, \vec{v}$ (théorème 34.8). Soit $\{P\} = \mathbf{a} \cap \mathbf{b}$. Alors (théorème 34.9) $\exists t_\circ\, [(P \doteq P')t_\circ]$, donc $\langle P, P' \rangle \in (\mathbf{a} \mathbin{\dot{\cap}} \mathbf{a}')t_\circ$. Or $(\mathbf{a}' \doteq \mathbf{a}_{t_\circ})t_\circ$, donc $P \in \mathbf{a} \cap \mathbf{a}_{t_\circ}$, et par conséquent $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{t_\circ}$, d'où $(\mathbf{a} = \mathbf{a}')t_\circ$.

R e m a r q u e. On a, par exemple, aussi les propositions suivantes:

$$\mathbf{a} \doteq \mathbf{a}' \Rightarrow \mathbf{a} \,\|\, \vec{v},$$

$$\mathbf{a}' \mathbin{\dot{\subset}} \mathbb{h} \Rightarrow \mathbb{h} \,\|\, \vec{v},$$

$$\mathbf{a} \subset \mathbb{h} \wedge \mathbf{a}' \mathbin{\dot{\subset}} \mathbb{h} \Rightarrow \mathbf{a} \dot{\times} \mathbf{a}' \vee \mathbf{a} \,\dot{\|}\, \mathbf{a}',$$

$$\mathbf{a} \,\dot{\|}\, \mathbf{b}' \wedge \mathbf{b}' \,\dot{\|}\, \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{a} \,\|\, \mathbf{c}.$$

Le parallélisme des droites de deux espaces $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ s'étend de façon évidente aux vecteurs.

DEFINITION 36.4. Soit $(\mathbb{E}' \mathrel{\hat{\subset}} \mathbb{E})\vec{v}$, et $\vec{u}, \vec{u}'$ deux vecteurs quelconques, $\vec{u}$ de l'espace $\mathbb{E}$ et $\vec{u}'$ de l'espace $\mathbb{E}'$. Alors

$$(\vec{u} \mathbin{\dot{\|}} \vec{u}')_{\mathbb{E}} \stackrel{\text{def}}{=} (\exists \mathbf{a} \subset \mathbb{E})(\exists \mathbf{a}' \subset \mathbb{E}')[(\mathbf{a} \mathbin{\dot{\|}} \mathbf{a}')_{\mathbb{E}} \ \wedge \ \vec{u} \,\|\, \mathbf{a} \ \wedge \ \vec{u}' \,\|\, \mathbf{a}']$$

et on dira que les *vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{u}'$ sont *constamment parallèles selon l'espace* $\mathbb{E}$.

On définit de façon analogue $(\vec{u} \mathbin{\dot{\|}} \mathbf{a}')_{\mathbb{E}}$ et $(\vec{u}' \mathbin{\dot{\|}} \mathbf{a})_{\mathbb{E}}$.

DEFINITION 36.5. Soit $\mathbf{a} \subset \mathbb{E}$, $\mathbf{a}' \subset \mathbb{E}'$, $(\mathbf{a} \mathbin{\dot{\|}} \mathbf{a}')_{\mathbb{E}}$ et $A', B' \in \mathbf{a}'$ $(A' \neq B')$. Supposons que $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ sont orientées et que $\mathbf{a}'$ et $\overrightarrow{A'B'}$ ont une même direction. Lorsque

$$\forall t\,(\exists A_t, B_t \in \mathbb{E})\,[(A_t \doteq A')t \ \wedge \ (B_t \doteq B')t],$$

et que $\mathbf{a}$ et $\overrightarrow{A_tB_t}$ ont une même direction, on dira que les *droites orientées* $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ *ont la même direction selon* $\mathbb{E}$. Si $\mathbf{b} \subset \mathbb{E}$, $\mathbf{b}' \subset \mathbb{E}'$, et $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ ont des directions opposées, et de même $\mathbf{a}'$ et $\mathbf{b}'$, nous dirons que $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}'$ *ont des directions opposées*, et que $\mathbf{a}'$ et $\mathbf{b}$ *ont des directions opposées, selon* $\mathbb{E}$.

Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont des vecteurs quelconques, $\vec{u}$ de $\mathbb{E}$ et $\vec{u}'$ de $\mathbb{E}'$, et que $\vec{u}$ et $\mathbf{a}$ ont une même direction, et $\vec{u}'$ et $\mathbf{a}'$ ont une même direction, nous dirons que les *vecteurs* $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ont la *même direction selon* $\mathbb{E}$, etc.

DEFINITION 36.6. Soient $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathscr{P}_1$, $\mathbb{h}, \mathbb{h}' \in \mathscr{P}_2$, $\mathbf{a}, \mathbb{h} \subset \mathbb{E}$, $\mathbf{a}', \mathbb{h}' \subset \mathbb{E}'$, et $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}}$. Alors, en nous limitant aux relations „selon" $\mathbb{E}$,

$$\mathbf{a} \mathbin{\dot{\|}} \mathbb{h}' \stackrel{\text{def}}{=} \exists \mathbf{a}'\,[\mathbf{a} \mathbin{\dot{\|}} \mathbf{a}' \ \wedge \ \mathbf{a}' \,\|\, \mathbb{h}'],$$

$$\mathbf{a}' \mathbin{\dot{\|}} \mathbb{h} \stackrel{\text{def}}{=} \exists \mathbf{a}\,[\mathbf{a}' \mathbin{\dot{\|}} \mathbf{a} \ \wedge \ \mathbf{a} \,\|\, \mathbb{h}],$$

$$\mathbb{h} \mathbin{\dot{\|}} \mathbb{h}' \stackrel{\text{def}}{=} \forall t\,(\exists \mathbb{h}_t \subset \mathbb{E})\,[\mathbb{h} \,\|\, \mathbb{h}_t \ \wedge \ (\mathbb{h}_t \doteq \mathbb{h}')t].$$

On a par exemple:

Théorème 36.18. $\exists t\,[(\mathbb{h} \doteq \mathbb{h}')t] \ \Leftrightarrow \ \mathbb{h} \mathbin{\dot{\|}} \mathbb{h}'$.

Théorème 36.19.

$$\exists t\,[(\mathbf{a} \mathbin{\dot{\times}} \mathbb{h}')t] \ \Rightarrow \ \mathbf{a} \mathbin{\dot{\times}} \mathbb{h}' \ \Leftrightarrow \ \forall t\, \exists P\, \exists P'_t\,[(\mathbf{a} \mathbin{\dot{\cap}} \mathbb{h}')t = \langle P, P' \rangle_t],$$

et de même en remplaçant **a** *et* $\mathbb{h}'$ *par* **a**$'$ *et* $\mathbb{h}$, *ou par* $\mathbb{h}$ *et* $\mathbb{h}'$, *et remarquant que*

$$\forall t\, \exists \mathbf{a}\, \exists \mathbf{a}'\, [\,(\mathbb{h} \dot{\cap} \mathbb{h}')t = \{\mathbf{a}, \mathbf{a}'\}\,].$$

*
* *

Après avoir envisagé l'intersection et le parallélisme, abordons les longueurs des segments de droites dans $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$.

Théorème 36.20. *Soit* $(\mathbb{E}' \hat{\subset} \mathbb{E})\vec{v}$, $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}}$, $\hat{t'} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}}$, *et* $P, Q \in \mathbb{E}'$, *quelconques, ainsi que* $A_t, B_t \in \mathbb{E}$, *tels que*

$$\forall t\, (\forall A_t B_t)\, [\,(A_t \doteq P)t \;\wedge\; (B_t \doteq Q)t\,].$$

Alors, si $A_t B_t$ *n'est pas perpendiculaire à* $\vec{v}$, *on a*

$$(36.4) \qquad \frac{PQ}{A_t B_t} = \frac{k\,\dfrac{c'}{c}}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} \sqrt{\frac{1 + \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right) m^2}{1 + m^2}}\,,$$

où c, c' *sont les constantes fondamentales de* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{E}'$, k *est la constante de* (35.18) *et* m *est la pente de la droite* $A_t B_t$ *par rapport à un axe parallèle à* $\vec{v}$.

Lorsque $A_t B_t \,||\, \vec{v}$, *on a donc*

$$(36.5) \qquad \frac{\overline{PQ}}{\overline{A_t B_t}} = \frac{k\,\dfrac{c'}{c}}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$$

et lorsque $A_t B_t \perp \vec{v}$, *on a*

$$(36.6) \qquad \frac{\overline{PQ}}{\overline{A_t B_t}} = \frac{k\,\dfrac{c'}{c}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Démonstration. Soit $Oxyz$ un repère orthonormé, dans $\mathbb{E}$, tel que l'axe des x ait une même direction que $\vec{v}$. Reprenons certaines notations de la démonstration du théorème 35.3. On a (35.1), (35.2) et

$$\overline{A_t B_t} = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

D'un autre côté, selon (35.3), (35.6) et (35.8),

$$P^{\cdot}(t)\, Q^{\cdot}\left(t + \frac{pv}{c^2 - v^2} + \frac{s}{2}\right) P^{\cdot}(t+s), \quad \forall t,$$

et selon (35.14), en employant $\hat{u} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}'}$,

$$P^{\cdot}(u)\, Q^{\cdot}\left(u + \frac{s}{2}\right) P^{\cdot}(u+s), \quad \forall u.$$

Les distances dans $\mathbb{E}'$ étant définies de manière indépendante, notons par c' le facteur fondamental dans $\mathbb{E}'$. On a suivant la définition 17.2,

$$\overline{PQ} = c' \frac{ks}{2},$$

donc, d'après (35.1), (35.2) et (35.5),

$$\overline{PQ} = \frac{c'k}{c^2 - v^2} \sqrt{c^2 p^2 + (c^2 - v^2)(q^2 + r^2)},$$

d'où (36.4), en posant

$$\frac{q^2 + r^2}{p^2} = m^2. \tag{36.7}$$

Lorsque $A_t B_t \,||\, \vec{v}$, on a $q = r = 0$, et lorsque $A_t B_t \perp \vec{v}$, on a $p = 0$.

Théorème 36.21. *Soient* $A, B, C, D \in \mathbb{E}$, $A', B', C', D' \in \mathbb{E}'$, $AB \,||\, CD$, $A'B' \,||\, C'D'$ *et* $(AB \,\dot{||}\, A'B')_{\mathbb{E}}$. *Alors, si*

$$\exists t\, [(A \doteq A')t \ \wedge\ (B \doteq B')t \ \wedge\ (C \doteq C')t \ \wedge\ (D \doteq D')t],$$

on a, en désignant par s un nombre positif,

$$\overline{AB} = s\, \overline{CD} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A'B'} = s\, \overline{C'D'}. \tag{36.8}$$

Démonstration. En appliquant (36.4) à (36.6) on obtient, puisque $AB \mid\mid CD$,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}},$$

d'où (36.8).

Insérons ici la proposition suivante, qui exprime la réciprocité du mouvement à vitesse constante, de deux espaces permanents L-métriques.

Théorème 36.22. $(\mathbb{E}' \hat{\subset} \mathbb{E})\vec{v} \;\Rightarrow\; \exists \vec{v}' \,[(\mathbb{E} \hat{\subset} \mathbb{E}')\vec{v}']$.

En outre, $v' = \dfrac{c'}{c} v$, *où* c, c' *sont les facteurs fondamentaux dans* $\mathbb{E}$ *et dans* $\mathbb{E}'$.

Démonstration. Soit $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}}$, $\hat{t}' \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}'}$ et $P \in \mathbb{E}'$, quelconques. Envisageons deux instants t_1, t_2 de $\hat{t}$ $(t_1 < t_2)$. Alors $(P \hat{\in} \mathbb{E})\vec{v}$ et en vertu du théorème 34.9,

$$(36.9) \quad (\exists A, A' \in \mathbb{E})\,[(P \doteq A)t_1 \;\wedge\; (P \doteq A')t_2 \;\wedge\; \overrightarrow{AA'} = \vec{v}(t_2 - t_1)].$$

P se déplace sur la droite $\mathbf{a} = AA'$ de $\mathbb{E}$, $\mathbf{a} \mid\mid \vec{v}$ (théorème 34.8).

D'autre part, $A \dot{\in} \mathbb{E}'$, donc

$$(\exists P'' \in \mathbb{E}')\,[(A \doteq P'')t_2],$$

où $P'' \neq P$, car $t_2 \neq t_1$, et on a $(A \doteq P)t_1$ et $(A \doteq P'')t_2$; en d'autres termes, A se déplace dans $\mathbb{E}'$, de l'événement $\langle t_1, P\rangle$ à l'événement $\langle t_2, P''\rangle$.

Remarquons que $\hat{t}/\Sigma_P \in \mathscr{T}_P$, quel que soit $P \in \mathbb{E}'$ (théorème 32.3), ainsi que $\hat{t}'/\Sigma_P \in \mathscr{T}_P$, donc les conditions du théorème 35.6 étant satisfaites, on a $t' = at + b$, où a et b sont pour chaque P des constantes, et

$$a = \frac{k\dfrac{c'}{c}}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}.$$

Soit $\vec{v}'_A$ la vitesse moyenne de A par rapport à $\mathbb{E}'$, entre les mêmes événements. On a

$$(36.10) \qquad \vec{v}'_A = \frac{\overrightarrow{PP''}}{t'_2 - t'_1} = \frac{\overrightarrow{PP''}}{a(t_2 - t_1)}.$$

D'autre part,

$$(\exists A'' \in \mathbb{E})\,[(P'' - A'')t_1]$$

(théorème 36.6). Comme $(P'' \mathrel{\widehat{\in}} \mathbb{E})\vec{v}$, on a (théorème 34.9)

$$(36.11) \qquad (P'' \doteq A'')t_1 \;\wedge\; (P'' \doteq A)t_2 \;\wedge\; \overrightarrow{A''A} = \vec{v}(t_2 - t_1).$$

De (36.9) et (36.11) résulte $\overline{AA'} = \overline{A''A}$. Comme $(P \doteq A)t_1$ et $(P'' \doteq A'')t_1$, la relation (35.26) du théorème 35.12 s'applique et on a

$$\frac{\overline{PP''}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{PP''}}{\overline{AA''}} = \frac{k\dfrac{c'}{c}}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}},$$

donc en vertu de (36.10),

$$v'_A = \frac{\overline{AA'}}{a(t_2 - t_1)} \; \frac{k\dfrac{c'}{c}}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$$

et en vertu de (36.9)

$$(36.12) \qquad v'_A = \frac{c'}{c} v\,.$$

Or, P'' se déplace, ainsi que P, sur $\mathbf{a}$. D'après le théorème 36.7

$$\exists \mathbf{a}'\,[P, P'' \in \mathbf{a} \;\wedge\; \mathbf{a}' \doteq \mathbf{a}]$$

et d'après la seconde proposition du même théorème, $\vec{v}'_A \,||\, \mathbf{a}'$. Ceci est valable pour tout $A \in \mathbb{E}$, car $\forall A\, \exists P$.

Soit A_0 un point fixe de $\mathbb{E}$, et $\mathbf{a}_0 \subset \mathbb{E}$, telle que $\mathbf{a}_0 \,||\, \vec{v}$ et $A_0 \in \mathbf{a}_0$. Soit $\mathbf{a}'_0 \subset \mathbb{E}'$, telle que $\mathbf{a}_0 \doteq \mathbf{a}'_0$. On a $\mathbf{a} \,||\, \mathbf{a}_0$, donc aussi $\mathbf{a}' \,||\, \mathbf{a}'_0$ (théorème 36.9) et $v'_{A_0} \,||\, \mathbf{a}'_0$. Par conséquent, en désignant $\vec{v}'_{A_0}$ par $\vec{v}'$, $\mathbf{a}' \,||\, \vec{v}'$. Donc tout $A \in \mathbb{E}$ se déplace dans $\mathbb{E}'$ sur une droite $\mathbf{a}' \,||\, \vec{v}'$, dans une même direction. En vertu de (36.12) on a $v' = \dfrac{c'}{c} v$, la vitesse $\vec{v}'$ est donc constante,

$$(\mathbb{E} \mathrel{\widehat{\subset}} \mathbb{E}')\vec{v}'.$$

R e m a r q u e. On n'affirme pas encore que $\vec{v}' = -\vec{v}$, ce qui ne sera possible qu'après la définition 37.4.

*
* *

Abordons la perpendicularité.

Théorème 36.23. $\mathbf{a} \doteq \mathbf{a}' \;\wedge\; \mathbb{h} \perp \mathbf{a} \;\wedge\; \mathbb{h}' \perp \mathbf{a}' \;\Rightarrow\; \mathbb{h} \,\dot{|}|\, \mathbb{h}'$.

Théorème 36.24. *Soit* $\mathbf{a} \doteq \mathbf{a}'$, $PQ, P'Q' \in \mathscr{P}_1$ *et* $Q \in \mathbf{a}$, $Q' \in \mathbf{a}'$. *Alors*

$$\exists t\,[(P \doteq P')t \;\wedge\; (Q \doteq Q')t] \;\Rightarrow\; (PQ \perp \mathbf{a} \;\Leftrightarrow\; P'Q' \perp \mathbf{a}').$$

Démonstration. Montrons que $PQ \perp \mathbf{a} \;\Rightarrow\; P'Q' \perp \mathbf{a}'$. Soient $R, S \in \mathbf{a}$, tels que R-Q-S et $RQ = SQ$. Suivant le théorème 36.6 R', S' existent tels que $(R \doteq R')t$, $(S \doteq S')t$. En vertu de (36.5), dans le théorème 36.20, on a (en substituant PQ par $R'Q'$, et A_tB_t par RQ, etc.)

$$\frac{\overline{R'Q'}}{\overline{RQ}} = \frac{\overline{S'Q'}}{\overline{SQ}}, \text{ d'où } \overline{R'Q'} = \overline{S'Q'}.$$

En appliquant (36.4) et remarquant que dans (36.7) $p = \overline{RQ} = \overline{SQ}$ et

$$q^2 + r^2 = \overline{PQ}^2,$$

on a donc

$$\frac{\overline{R'P'}}{\overline{RP}} = \frac{\overline{S'P'}}{\overline{SP}}.$$

Comme $PQ \perp \mathbf{a}$, le triangle ΔPRS est isocèle et on a $\overline{RP} = \overline{SP}$, donc $\overline{R'P'} = \overline{S'P'}$. Par conséquent $\Delta P'R'S'$ aussi est isocèle, donc $P'Q' \perp \mathbf{a}'$. L'implication inverse se démontre de la même façon.

Théorème 36.25. *Soit* $\mathbf{a} \doteq \mathbf{a}'$, $\mathbb{h} \doteq \mathbb{h}'$, $PQ \subset \mathbb{h}$, $P'Q' \subset \mathbb{h}'$ *et* $Q \in \mathbf{a}$, $Q' \in \mathbf{a}'$. *Alors*

$$(PQ \perp \mathbf{a} \;\wedge\; P'Q' \perp \mathbf{a}') \;\Rightarrow\; \exists t\,[(P \doteq P')t \;\Leftrightarrow\; (Q \doteq Q')t].$$

Démonstration. Si le théorème était en défaut on aurait $(P \doteq P')t$, mais $(Q \doteq Q'')t$, où $Q'' \in \mathbf{a}'$, $Q'' \neq Q'$. Alors, selon le théorème 36.24 on aurait

$$PQ \perp \mathbf{a} \;\Rightarrow\; P'Q'' \perp \mathbf{a}',$$

ce qui est impossible. Donc

$$(P \doteq P')t \;\Rightarrow\; (Q \doteq Q')t.$$

L'implication inverse se démontre de la même façon.

Les deux théorèmes suivants résultent des deux précédents.

Théorème 36.26. *Si* $\mathbf{a} \doteq \mathbf{a}'$, *alors*

$$\exists t\,[(\mathbf{n} \doteq \mathbf{n}')t] \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{n} \perp \mathbf{a} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{n}' \perp \mathbf{a}').$$

Théorème 36.27. *Soit* $\mathbf{a} \doteq \mathbf{a}'$, $\mathbb{h} \doteq \mathbb{h}'$ *et soient* $\mathbf{a}, \mathbf{n} \subset \mathbb{h}$, *et* $\mathbf{a}', \mathbf{n}' \subset \mathbb{h}'$. *Alors*

$$(\mathbf{n} \perp \mathbf{a} \quad \wedge \quad \mathbf{n}' \perp \mathbf{a}') \quad \Rightarrow \quad \exists t\,[(\mathbf{n} \doteq \mathbf{n}')t].$$

Des théorèmes 36.17 et 36.27 résulte le suivant:

Théorème 36.28. *Soit* $\mathbf{a} \doteq \mathbf{a}'$, $\mathbb{h} \doteq \mathbb{h}'$ *et soient* $\mathbf{a}, \mathbf{n} \subset \mathbb{h}$, $\mathbf{a}', \mathbf{n}' \subset \mathbb{h}'$. *Alors*

$$\mathbf{n} \perp \mathbf{a} \quad \wedge \quad \mathbf{n}' \perp \mathbf{a}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} \,\dot{|}|\, \mathbf{n}'.$$

Théorème 36.29. *Soit* $\mathbb{h} \doteq \mathbb{h}'$; $PQ, P'Q' \in \mathscr{P}_1$ *et* $Q \in \mathbb{h}$, $Q' \in \mathbb{h}'$. *Alors*

$$\exists t\,[(P \doteq P')t \quad \wedge \quad (Q \doteq Q')t] \quad \Rightarrow \quad (PQ \perp \mathbb{h} \quad \Leftrightarrow \quad P'Q' \perp \mathbb{h}').$$

Démonstration. Montrons que $PQ \perp \mathbb{h} \;\Rightarrow\; P'Q' \perp \mathbb{h}'$. Soit $\mathbf{a}$ la trajectoire de Q'. On a $Q \in \mathbf{a} \subset \mathbb{h}$. Comme $\mathbf{a} \,||\, \vec{v}$, la droite $\mathbf{a}'$ existe telle que $Q' \in \mathbf{a}'$ et $\mathbf{a} \doteq \mathbf{a}'$. Puisque $PQ \perp \mathbb{h}$, on a $PQ \perp \mathbf{a}$, et selon le théorème 36.24

$$PQ \perp \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad P'Q' \perp \mathbf{a}'. \tag{36.13}$$

Soient $\mathbf{b}, \mathbf{b}'$ telles que $Q \in \mathbf{b}$, $Q' \in \mathbf{b}'$, et $\mathbf{b} \perp \mathbb{h}$, $\mathbf{b}' \perp \mathbb{h}'$, mais $\mathbf{b} \neq \mathbf{a}$, donc aussi $\mathbf{b}' \neq \mathbf{a}'$. On montre de façon analogue à celle qu'on a eu dans le théorème 36.24, que

$$PQ \perp \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad P'Q' \perp \mathbf{b}'. \tag{36.14}$$

Alors $P'Q' \perp \mathbb{h}'$ résulte de (36.13) et (36.14). L'implication inverse se démontre de même manière.

Théorème 36.30. *Soit* $\mathbb{h} \doteq \mathbb{h}'$, $PQ, P'Q' \in \mathscr{P}_1$ *et* $Q \in \mathbb{h}$, $Q' \in \mathbb{h}'$. *Alors*

$$PQ \perp \mathbb{h} \quad \wedge \quad P'Q' \perp \mathbb{h}' \quad \Rightarrow \quad \exists t\,[(P \doteq P')t \quad \Leftrightarrow \quad (Q \doteq Q')t].$$

Démonstration. Montrons que $(P \doteq P')t \;\Rightarrow\; (Q \doteq Q')t$. Soient $\mathbf{a}, \mathbf{a}'$ les droites telles que $P \in \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \parallel \vec{v}$, et $P' \in \mathbf{a}'$, $\mathbf{a}' \dot{\parallel} \vec{v}$, donc $\mathbf{a} \doteq \mathbf{a}'$, et soient $\mathbb{g}, \mathbb{g}'$ les plans tels que $\mathbf{a} \subset \mathbb{g}, \{Q\} \subset \mathbb{g}$, $\mathbf{a}' \subset \mathbb{g}'$, $\{Q'\} \subset \mathbb{g}'$, donc $\mathbb{g} \doteq \mathbb{g}'$. Alors, si $\mathbf{b} = \mathbb{h} \cap \mathbb{g}$ et $\mathbf{b}' = \mathbb{h}' \cap \mathbb{g}'$, on a $\mathbf{b} \doteq \mathbf{b}'$. Or $Q \in \mathbf{b}$, $Q' \in \mathbf{b}'$ et $PQ \perp \mathbf{b}, P'Q' \perp \mathbf{b}'$, donc selon le théorème 36.25 $(Q \doteq Q')t$.

L'implication inverse se démontre de même manière.

Les deux théorèmes suivants résultent des deux précédents.

Théorème 36.31. *Lorsque* $\mathbb{h} = \mathbb{h}'$, $\mathbf{n} \subset \mathbb{h}$, $\mathbf{n}' \subset \mathbb{h}'$, *on a*

$$\exists t\, [(\mathbf{n} \doteq \mathbf{n}')t] \;\Rightarrow\; (\mathbf{n} \perp \mathbb{h} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{n}' \perp \mathbb{h}').$$

Théorème 36.32. *Lorsque* $\mathbb{h} \doteq \mathbb{h}'$ *et* $\mathbf{n} \cap \mathbb{h} = Q$, $\mathbf{n}' \cap \mathbb{h}' = Q'$, *alors*

$$\mathbf{n} \perp \mathbb{h} \;\wedge\; \mathbf{n}' \perp \mathbb{h}' \;\Rightarrow\; \exists t\, [(Q \doteq Q')t \;\Rightarrow\; (\mathbf{n} \doteq \mathbf{n}')t].$$

Théorème 36.33. *Lorsque* $\mathbb{h} \doteq \mathbb{h}'$, *on a*

$$\mathbf{n} \perp \mathbb{h} \;\wedge\; \mathbf{n}' \perp \mathbb{h}' \;\Rightarrow\; \mathbf{n} \dot{\parallel} \mathbf{n}'.$$

Démonstration. Quel que soit t, on a selon le théorème 36.8,

$$\exists \mathbf{n}_t\, [(\mathbf{n}_t \doteq \mathbf{n})t],$$

d'où (théorème 36.31) $\mathbf{n}_t \perp \mathbb{h}$, donc $\mathbf{n}_t \parallel \mathbf{n}$ et par la définition 36.3, $\mathbf{n} \dot{\parallel} \mathbf{n}'$.

Théorème 36.34. *Soit* $\mathbf{a} \doteq \mathbf{a}'$, $\mathbb{h} \perp \mathbf{a}$, $\mathbb{h}' \perp \mathbf{a}'$, $P \in \mathbb{h}$, $P' \in \mathbb{h}'$. *Alors*

$$\forall t\, [(P \doteq P')t \;\Rightarrow\; (\mathbb{h} \doteq \mathbb{h}')t].$$

Démonstration. Soit $Q = \mathbf{a} \cap \mathbb{h}$, $Q' = \mathbf{a}' \cap \mathbb{h}'$. On a $PQ \perp \mathbf{a}$, $P'Q' \perp \mathbf{a}'$, donc suivant le théorème 36.25 $(Q \doteq Q')t$. Or

$$(\forall R \in \mathbb{h})\, (\exists R' \in \mathbb{h}')\, [(R \doteq R')t].$$

En effet, soit $\mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}$, tel que $R \in \mathbf{a}$, et soit $\mathbf{a}'_1$ tel que $\mathbf{a}_1 \doteq \mathbf{a}'_1$. Alors

$$\exists R'\, [R' = \mathbf{a}'_1 \cap \mathbb{h}']$$

et en vertu du théorème 34.9 $\exists t_1\, [(R \doteq R')t_1]$. Or $QR \perp \mathbf{a}$, $Q'R' \perp \mathbf{a}'$ et $(Q \doteq Q')t$, donc selon le théorème 36.25 $(R \doteq R')t$, c.-à-d. $t_1 = t$. Par conséquent $(\mathbb{h} \doteq \mathbb{h}')t$.

DEFINITION 36.7. Soient $\mathbf{a}, \mathbf{n} \subset \mathbb{E}$, $\mathbf{a}', \mathbf{n}' \subset \mathbb{E}'$. Alors

$$\mathbf{n}' \dot{\perp} \mathbf{a} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{n}' \perp \mathbf{a}' \ \wedge \ \mathbf{a}' \doteq \mathbf{a}.$$

$$\mathbf{n} \dot{\perp} \mathbf{a}' \overset{\text{def}}{=} \mathbf{n} \perp \mathbf{a} \ \wedge \ \mathbf{a} \doteq \mathbf{a}'.$$

Remarque. En analogie avec les définitions précédentes on devrait écrire $(\mathbf{n}' \perp \mathbf{a})_{\mathbb{E}}$ et $(\mathbf{n} \perp \mathbf{a}')_{\mathbb{E}}$. Or, en vertu de la définition précédente,

$$(\mathbf{n}' \dot{\perp} \mathbf{a})_{\mathbb{E}} \Leftrightarrow (\mathbf{n}' \dot{\perp} \mathbf{a})_{\mathbb{E}'},$$

ce qui autorise d'omettre la lettre $\mathbb{E}$ (ou $\mathbb{E}'$).

*

* *

Jusqu'ici l'égalité des segments de droites permanentes a été définie seulement entre les segments faisant partie du même ensemble L-métrique. Maintenant il s'agit d'étendre cette relation aux segments appartenant à deux espaces permanents L-métriques différents, qui se déplacent l'un par rapport à l'autre avec une vitesse constante $\vec{v}$.

L'égalité des deux segments $[AB]$ et $[CD]$, appartenant au même espace $\mathbb{E}$, fut basée (définition 26.1) sur l'égalité des distances, $\overline{AB} = \overline{CD}$, donc sur les relations permanentes entre certaines chaînes d'événements; l'égalité de deux segments faisant partie de deux espaces différents $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$, sera basée sur la coïncidence instantanée de deux segments perpendiculaires à $\vec{v}$. Comme cette perpendicularité est indépendante du choix entre $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$, selon lequel des deux espaces on l'envisage, cette coïncidence est elle-même indépendante des temps $\hat{t}$ ou $\hat{t}'$ au moyen desquels on la définit.

DEFINITION 36.8. Soit $(\mathbb{E}' \hat{\subset} \mathbb{E})\vec{v}$, $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}}$. Alors, quels que soient les segments $[PQ]$, $[R'S']$, tels que $PQ \subset \mathbb{E}$, $R'S' \subset \mathbb{E}'$, nous posons:

$$[PQ] \dot{\cong} [R'S'] \overset{\text{def}}{=} (\exists A, B \in \mathbb{E})(\exists A', B' \in \mathbb{E}')\ \exists t\,\{AB \perp \vec{v} \ \wedge$$
$$\wedge \ A'B' \dot{\perp} \vec{v} \ \wedge \ [PQ] \cong [AB] \ \wedge \ [R'S'] \cong [A'B'] \ \wedge \ ([AB] \doteq [A'B'])\,t\}$$

On dira que les *segments* $[PQ]$ et $[R'S']$ sont *égaux* (ou *congruents*).

On dira également que les mêmes *couples de points* sont *égaux*,

$$\langle P, Q \rangle \dot{\cong} \langle R', S' \rangle.$$

R e m a r q u e s. Cette égalité des segments appartenant à deux espaces différents est évidemment une équivalence. — Lorsque $P = A$, $Q = B$, $R' = A'$, $S' = B'$, on a en particulier, $[AB] \doteqdot [A'B']$.

Notre but suivant est d'accorder les d i s t a n c e s dans $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$, les unes aux autres, de telle sorte que les segments égaux aient des longueurs égales, ou en d'autres termes, que les couples égaux de points aient des distances égales.

Remarquons que les étalons de distance (definition 17.2) ne sont pas nécessairement égaux dans $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$. Or, dans ce qui suit nous allons admettre leur égalité, soit

$$\langle X_\circ, Y_\circ \rangle \doteqdot \langle X'_\circ, Y'_\circ \rangle.$$

Rappelons qu'un étalon n'existe pas nécessairement dans tout ensemble L-métrique de points. La continuité des espaces permanents métriques y assure son existence.

Théorème 36.35. *Si les étalons de distances dans* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{E}'$ *sont égaux, alors, quels que soient* $P, Q \in \mathbb{E}$ *et* $R', S' \in \mathbb{E}'$,

$$(36.15) \qquad [PQ] \doteqdot [R'S'] \quad \Leftrightarrow \quad \overline{PQ} = \overline{R'S'},$$

Inversement: Si (36.15) *a lieu pour deux segments quelconques,* $[PQ]$ *et* $[R'S']$, *les étalons de distances dans* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{E}'$ *sont égaux.*

Démonstration. $[PQ] \doteqdot [R'S']$ implique suivant la définition 36.8 l'existence de deux segments,

$$(36.16) \qquad [AB] \perp \vec{v} \quad \text{et} \quad [A'B'] \dot{\perp} \vec{v},$$

tels que

$$(36.17) \qquad [PQ] \cong [AB], \qquad [R'S'] \cong [A'B'],$$

et

$$(36.18) \qquad \exists t\, [([AB] \doteq [A'B'])t].$$

En vertu de la définition 27.1

$$(36.19) \qquad \overline{PQ} = \overline{AB}, \qquad \overline{R'S'} = \overline{A'B'}.$$

Soit $\langle X_\circ, Y_\circ \rangle$ un étalon de distance dans $\mathbb{E}$, et $\langle X'_\circ, Y'_\circ \rangle$ un tel dans $\mathbb{E}'$. Selon la définition 17.2 $\overline{X_\circ Y_\circ} = 1$, $\overline{X'_\circ Y'_\circ} = 1$, et d'après l'hypothèse

$$(36.20) \qquad \langle X_\circ, Y_\circ \rangle \stackrel{\circ}{\cong} \langle X'_\circ Y'_\circ \rangle .$$

Toute droite permanente étant homéomorphe à $\mathbb{R}$, on peut admettre que $X_\circ, Y_\circ \in AB$ et $X'_\circ, Y'_\circ \in A'B'$, et qu'on ait au même instant t,

$$(36.21) \qquad ([X_\circ Y_\circ] \doteq [X'_\circ Y'_\circ])t.$$

Ainsi les conditions du théorème 36.21 sont remplies. En effet, $AB \,||\, X_\circ Y_\circ$, $A'B' \,||\, X'_\circ Y'_\circ$, et en vertu de (36.18) et (36.21),

$$\exists t\, [(A \doteq A')t \ \wedge\ (B \doteq B')t \ \wedge\ (X_\circ \doteq X'_\circ)t \ \wedge\ (Y_\circ \doteq Y'_\circ)t],$$

donc

$$\overline{AB} = s\, \overline{X_\circ Y_\circ} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A'B'} = s\, \overline{X'_\circ Y'_\circ} ,$$

d'où $\overline{AB} = \overline{A'B'} = s$, et en vertu de (36.19), $\overline{PQ} = \overline{R'S'}$.

Réciproquement, soit $\overline{PQ} = \overline{R'S'}$. Deux segments $[AB]$, $[A'B']$ existent, qui satisfont à (36.16), (36.18) et $\overline{PQ} = \overline{AB}$. Alors, en définissant les étalons comme précédemment, on conclut de la même manière que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Il en résulte $\overline{R'S'} = \overline{A'B'}$. Donc on a (36.19), d'où (36.17) selon la définition 27.1, et $[PQ] \stackrel{\circ}{\cong} [R'S']$ en vertu de (36.18) et de la définition 36.8.

Inversement, supposons qu'on ait (36.15) pour $[PQ]$ et $[R'S']$ quelconques, donc aussi pour les étalons. Or $\overline{X_\circ Y_\circ} = \overline{X'_\circ Y'_\circ} = 1$, donc $\langle X_\circ, Y_\circ \rangle \stackrel{\circ}{\cong} \langle X'_\circ, Y'_\circ \rangle$.

DEFINITION 36.9. Si dans $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ les étalons de distances sont égaux, nous dirons que les *espaces* $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ sont *normés entre eux*, ce que nous noterons: $\mathbb{E} \stackrel{n}{=} \mathbb{E}'$.

Nous dirons aussi que dans $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ les *distances* sont *normées entre elles*, et que les *repères orthonormés* $Oxyz$ et $O'x'y'z'$ sont *normés entre eux*, $Oxyz \stackrel{n}{=} O'x'y'z'$.

Théorème 36.36. *Si* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{E}'$ *sont normés entre eux, on a dans la relation* (35.18):

$$(36.22) \qquad k = \frac{c}{c'} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} .$$

Démonstration. Soit $[AB] \subset \mathbb{E}$ un segment de droite perpendiculaire à $\vec{v}$, et $[PQ] \subset \mathbb{E}'$, tel que

$$\exists t\,[\,(\,[AB] \doteq [PQ]\,)t\,].$$

Alors, selon la définition 36.8, $[AB] \stackrel{\frown}{\doteq} [PQ]$, donc, d'après le théorème 36.35, $\overline{AB} = \overline{PQ}$, puisque $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ sont normés entre eux. Or, selon (36.6)

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \frac{k\,c'/c}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}},$$

d'où (36.22).

Le théorème suivant résulte des théorèmes 36.8 et 36.36.

Théorème 36.37. *Soit* $(\mathbb{E}' \mathbin{\hat{\subset}} \mathbb{E})\vec{v}$, $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}}$, *et* $[AB] \subset \mathbb{E}$, $[PQ] \subset \mathbb{E}'$, *tels que pour un certain* t,

$$(\,[AB] \doteq [PQ]\,)t.$$

Si $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{E}'$ *sont normés entre eux, on a*

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \sqrt{\frac{1 + \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)m^2}{(1+m^2)\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)}},$$

où m *est la pente de* AB *par rapport à un axe parallèle à* $\vec{v}$.

37. DEUX ESPACES PERMANENTS L-METRIQUES EN MOUVEMENT RELATIF A VITESSE CONSTANTE: TRANSFORMATION DES COORDONNEES

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ deux espaces permanents L-métriques, tels que $(\mathbb{E}' \mathbin{\hat{\subset}} \mathbb{E})\vec{v}$. La transformation des coordonnées entre deux repères lorentziens liés à ces deux espaces possède sa forme la plus simple lorsque les deux repères sont en position spéciale que nous allons définir après la proposition suivante:

Théorème 37.1. *Soient $Oxyz$ et $O'x'y'z'$ deux repères orthonormés, dans $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ respectivement. Lorsque $\mathbf{x}\,\|\,\vec{v}$ et $\mathbf{x} \doteq \mathbf{x}'$, et que les plans $\mathbf{xy}$ et $\mathbf{x'y'}$ sont en coïncidence permanente, on a $\mathbf{y}\,\dot{\|}\,\mathbf{y}'$, $\mathbf{z}\,\dot{\|}\,\mathbf{z}'$, ainsi que $\mathbf{xz} \doteq \mathbf{x'z'}$ et $\mathbf{yz}\,\dot{\|}\,\mathbf{y'z'}$.*

Démonstration. On peut toujours prendre $\mathbf{x}\,\|\,\vec{v}$, et $\mathbf{x} \doteq \mathbf{x}'$ d'après le théorème 36.7, ainsi que $\mathbf{xy} \doteq \mathbf{x'y'}$ d'après le théorème 36.10. Alors $\mathbf{y}\,\dot{\|}\,\mathbf{y}'$ résulte du théorème 36.28. Comme $\mathbf{z} \perp \mathbf{xy}$, $\mathbf{z}' \perp \mathbf{x'y'}$, on a suivant le théorème 36.33 $\mathbf{z}\,\dot{\|}\,\mathbf{z}'$, donc aussi $\mathbf{xz} \doteq \mathbf{x'z'}$ et $\mathbf{yz}\,\dot{\|}\,\mathbf{y'z'}$.

DEFINITION 37.1. Soit $(\mathbb{E}' \mathrel{\widehat{\subset}} \mathbb{E})\vec{v}$, soient $Oxyz$ et $O'x'y'z'$ dans $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ respectivement, deux repères orthonormés, et $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}}$, $\hat{t}' \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}'}$. Supposons que O et O' coïncident à l'instant $t = 0$ du temps $\hat{t}$, et que ce soit l'instant $t' = 0$ du temps $\hat{t}'$. Lorsque

$$\mathbf{x}\,\|\,\vec{v}, \quad \mathbf{x} \doteq \mathbf{x}', \quad \mathbf{y}\,\dot{\|}\,\mathbf{y}', \quad \mathbf{z}\,\dot{\|}\,\mathbf{z}',$$

et que $\vec{\mathbf{x}}'$, $\vec{\mathbf{y}}'$, $\vec{\mathbf{z}}'$ ont respectivement les mêmes directions que $\vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{y}}$, $\vec{\mathbf{z}}$, nous dirons de ces deux repères qu'ils sont en *position canonique.*

Soient $Otxyz$ et $O't'x'y'z'$ les deux repères lorentziens liés à $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$, obtenus de la façon usuelle en ajoutant aux repères précédents les axes Ot et Ot' des temps $\hat{t}$ et $\hat{t}'$. Nous dirons également de ces deux repères lorentziens qu'ils sont en *position canonique*.

Théorème 37.2. *Soit $(\mathbb{E}' \mathrel{\widehat{\subset}} \mathbb{E})\vec{v}$. Quel que soit le repère lorentzien $Otxyz$ lié à $\mathbb{E}$, et tel que $\mathbf{x}\,\|\,\vec{v}$, un repère lorentzien et un seul, $O't'x'y'z'$ existe, lié à $\mathbb{E}'$ et tel que les deux repères soient en position canonique.*

Démonstration. Pour tout $\mathbf{x}$ de $\mathbb{E}$ $(\mathbf{x}\,\|\,\vec{v})$ existe un $\mathbf{x}' \subset \mathbb{E}'$, tel que $\mathbf{x} \doteq \mathbf{x}'$ (théorème 36.7). Soit $\vec{\mathbf{x}}'$ orienté de telle sorte que $\vec{\mathbf{x}}$ et $\vec{\mathbf{x}}'$ aient la même direction (définition 36.5). Suivant le théorème 36.6 existe $O' \in \mathbf{x}'$, tel que $(O \doteq O')t$ quand $t = 0$. Prenons O' comme origine de $O't'x'y'z'$.

Soit $\mathbb{h}$ le plan $\mathbf{xy}$. Alors, en vertu du théorème 36.10,

$$\forall \mathbb{h}\ \exists \mathbb{h}'\ [\mathbb{h} \doteq \mathbb{h}'].$$

Soit $\mathbf{y}' \subset \mathbb{h}'$, tel que $O' \in \mathbf{y}'$ et $\mathbf{y}' \perp \mathbf{x}'$. D'après le théorème 36.28 on a $\mathbf{y}'\,\dot{\|}\,\mathbf{y}$. Supposons que $\vec{\mathbf{y}}'$ ait la même direction que $\vec{\mathbf{y}}$.

Soit $\mathbf{z}' \perp \mathbb{h}'$, tel que $O' \in \mathbf{z}'$. Suivant le théorème 36.33 on a $\mathbf{z}'\,\dot{\|}\,\mathbf{z}$. Supposons que $\vec{\mathbf{z}}'$ ait la même direction que $\vec{\mathbf{z}}$.

Alors, l'étalon des distances dans $\mathbb{E}'$ étant déterminé, ainsi que dans $\mathbb{E}$, et les trois droites permanentes orientées $\vec{\mathbf{x}}'$, $\vec{\mathbf{y}}'$, $\vec{\mathbf{z}}'$ étant les axes d'un repère orthonormé, on obtient, en y ajoutant l'axe du temps $O'\mathbf{t}'$, le repère lorentzien $O't'x'y'z'$, tel que les deux repères lorentziens soient en position canonique. L'unicité découle du raisonnement.

*
* *

En considérant le point où un événement a lieu comme l'une des deux coordonnées de cet événement, l'autre étant le temps (coordonnées intrinsèques, définition 29.3) nous posons d'abord la définition suivante:

DEFINITION 37.2. Soit $(\mathbb{E}' \mathrel{\widehat{\subset}} \mathbb{E})\vec{v}$, $\hat{t} \in \mathscr{C}_{\mathbb{E}}$, $\hat{t}' \in \mathscr{C}_{\mathbb{E}'}$, et $P \in \mathbb{E}$, $P' \in \mathbb{E}'$.

$$f_{\mathbb{E}\mathbb{E}'} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle \langle t, P\rangle, \langle t', P'\rangle \rangle \mid (P \doteq P')t \ \wedge \ (P' \doteq P)t' \}.$$

On appellera $f_{\mathbb{E}\mathbb{E}'}$ *transformation des coordonnées intrinsèques* (temps-point) des événements.

En décomposant le produit cartésien des valeurs de $f_{\mathbb{E}\mathbb{E}'}$, on a les deux bijections de transformation des coordonnées intrinsèques, prises à part:

$$f_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle \langle t, P\rangle, t' \rangle \mid \exists P' \, [(P \doteq P')t \ \wedge \ (P' \doteq P)t'] \},$$

$$f^\star \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle \langle t, P\rangle, P' \rangle \mid (P \doteq P')t \}.$$

Remarques. Pour $\forall t \, \forall P$ on a

$$f_{\mathbb{E}\mathbb{E}'}(t, P) = \langle f_0(t, P), f^\star(t, P) \rangle.$$

La forme vectorielle lui est équivalente, et on peut écrire:

$$\langle t' ; \vec{r}' \rangle = f_{\mathbb{E}\mathbb{E}'}(t, \vec{r}),$$

$$t' = f_0(t, \vec{r}), \qquad \vec{r}' = f^\star(t, \vec{r}).$$

Envisageant deux repères lorentziens, $Otxyz$ lié à $\mathbb{E}$ et $O't'x'y'z'$ lié à $\mathbb{E}'$, soit

$$\langle x, y, z \rangle = h(P), \qquad \langle x', y', z' \rangle = h'(P').$$

Nous formulons la définition suivante;

DEFINITION 37.3.

$$\langle t', x', y', z'\rangle = F_{\mathbb{E}\mathbb{E}'}(t, x, y, z) = f_{\mathbb{E}\mathbb{E}'}[t, h^{-1}(x, y, z)],$$

$$(37.1) \qquad t' = F_0(t, x, y, z) \quad = f_0[t, h^{-1}(x, y, z)],$$

$$\langle x', y', z'\rangle = F^{\star}(t, x, y, z) \quad = h' \circ f^{\star}[t, h^{-1}(x, y, z)].$$

On appellera $F_{\mathbb{E}\mathbb{E}'}$, F_0, $F^{\star}$ bijections de *transformation des coordonnées lorentziennes* des événements instantanés.

En décomposant le produit cartésien des ensembles de valeurs, on a les équations de *transformation des coordonnées lorentziennes*, ou *transformation de Lorentz*, prises à part, soit:

$$(37.2) \qquad \begin{aligned} t' &= F_{\circ}(t, x, y, z),\\ x' &= F_1(t, x, y, z),\\ y' &= F_2(t, x, y, z),\\ z' &= F_3(t, x, y, z). \end{aligned}$$

★
★ ★

Rapportons les points de $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ à deux repères $Oxyz$ et $O'x'y'z'$ orthonormés et normés entre eux, et pour simplifier supposons que ces deux repères soient en *position canonique* (et que par conséquent aussi les repères lorentziens $Otxyz$ et $O't'x'y'z'$ soient en position canonique). Nous avons d'abord les deux théorèmes suivants:

Théorème 37.3.

$$(37.3) \qquad (\forall t, x, y, z)\,[F_2(t, x, y, z) = y \;\wedge\; F_3(t, x, y, z) = z].$$

En termes plus simples: $(\forall t, x, y, z)\,[y' = y \;\wedge\; z' = z]$.

Démonstration: $\langle t, x, y, z\rangle$ et $\langle t', x', y', z'\rangle$ étant les quadruples ordonnés d'un événement φ qui a lieu en un point $P \in \mathbb{E}$ et au point instantanément coïncident $P' \in \mathbb{E}'$, soient N et N' les pieds des perpendiculaires menées de P et P' aux plans $\mathbf{xy}$ et $\mathbf{x'y'}$, et soient M et M'

les pieds des perpendiculaires menées de N et N' à $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$. Alors on a $\mathbf{xy} \doteq \mathbf{x'y'}$, $NP \perp \mathbf{xy}$, $N'P' \perp \mathbf{x'y'}$ et $(P \doteq P')t$, donc en vertu du théorème 36.30, $(N \doteq N')t$, en y posant $\mathbf{xy}$, $\mathbf{x'y'}$, PN, $P'N'$ au lieu de $\mathbb{h}$, $\mathbb{h}'$, PQ, $P'Q'$ respectivement. Par conséquent

$$([NP] \doteq [N'P'])t,$$

et comme $NP \perp \vec{v}$, $N'P' \ \dot{\perp} \ \vec{v}$, on a (définition 36.8)

$$[NP] \mathrel{\dot{\cong}} [N'P'], \quad \text{d'où} \quad \overline{NP} = \overline{N'P'}$$

(théorème 36.35), en d'autres termes, $z = z'$, $\forall t$.

On a ensuite $MN \subset \mathbf{xy}$, $M'N' \subset \mathbf{x'y'}$, $\mathbf{xy} \doteq \mathbf{x'y'}$ et $\mathbf{x} \doteq \mathbf{x}'$. En outre, $MN \perp \mathbf{x}$, $M'N' \perp \mathbf{x}'$, et $(N \doteq N')t$. Donc, en vertu du théorème 36.30, $(M \doteq M')t$. Par conséquent

$$([MN] \doteq [M'N'])t,$$

et comme $MN \perp \vec{v}$, $M'N' \dot{\perp} \vec{v}$, on a

$$[MN] \mathrel{\dot{\cong}} [M'N'], \quad \text{d'où} \quad \overline{MN} = \overline{M'N'}.$$

En d'autres termes, $y = y'$, $\forall t$.

Théorème 37.4. $\forall t \, \forall x \, (\forall y_1, y_2)(\forall z_1, z_2)[F_1(t, x, y_1, z_1) =$
$= F_1(t, x, y_2, z_2)]$.

En d'autres termes: *Les valeurs de F_1 ne dépendent pas de y et de z.*

Démonstration. Supposons que t, x étant donnés, on considère deux points quelconques P_1, P_2, tels que

$$\exists \mathbb{h} \, [\mathbb{h} \perp \mathbf{x} \ \wedge \ (P_1, P_2 \in \mathbb{h})]$$

et dont les coordonnées sont x, y_1, z_1 et x, y_2, z_2. Soient P'_1, P'_2 tels que

$$(P_1 \doteq P'_1)t \quad \text{et} \quad (P_2 \doteq P'_2)t.$$

Alors,

$$(\exists \mathbb{h}'_1, \mathbb{h}'_2)[(\mathbb{h}'_1, \mathbb{h}'_2 \perp \mathbf{x}') \ \wedge \ P'_1 \in \mathbb{h}'_1 \ \wedge \ P'_2 \in \mathbb{h}'_2].$$

Suivant le théorème 36.34 on a $(\mathbb{h} \doteq \mathbb{h}'_1)t$ et $(\mathbb{h} \doteq \mathbb{h}'_2)t$, donc $\mathbb{h}'_1 = \mathbb{h}'_2$. Désignons ce plan par $\mathbb{h}'$. Comme $\mathbb{h}' \cap \mathbf{x}'$ est le pied des perpendiculaires menées de P'_1 et P'_2 à $\mathbf{x}'$, la coordonnée x' de P'_1 et P'_2 est la même, en d'autres termes,

$$F_1(t, x, y_1, z_1) = F_1(t, x, y_2, z_2).$$

La transformation de Lorentz prend alors la forme suivante:

Théorème 37.5. *Soit* $(\mathbb{E}' \mathbin{\hat{\subset}} \mathbb{E})\vec{v}$ *et rapportons les points de* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{E}'$ *à deux repères* **Oxyz** *et* $O'\mathbf{x}'\mathbf{y}'\mathbf{z}'$ *orthonormés, normés entre eux et en position canonique. Soient* $\langle t, x, y, z\rangle$ *et* $\langle t', x', y', z'\rangle$ *les quadruples ordonnés des coordonnées d'un événement instantané* φ *quelconque. On a :*

$$(37.4) \qquad t' = \frac{c}{c'} \frac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \qquad y' = y, \; z' = z,$$

et inversement,

$$(37.5) \qquad t = \frac{c'}{c} \frac{t' + \dfrac{v'}{c'^2}x'}{\sqrt{1 - \dfrac{v'^2}{c'^2}}}, \qquad x = \frac{x' + v'\,t'}{\sqrt{1 - \dfrac{v'^2}{c'^2}}}, \qquad y = y', \; z = z',$$

où $\dfrac{v}{c} = \dfrac{v'}{c'}$.

Dèmonstration. Soient $P \in \mathbb{E}$, $P' \in \mathbb{E}'$ les points où φ a lieu, et $t = \hat{t}(\varphi)$, $t' = \hat{t}'(\varphi)$, donc $(P \doteq P')\varphi$, et par conséquent $(P \doteq P')t$, $(P' \doteq P)t'$.

Quels que soient $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}}$, $\hat{t}' \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}'}$, on a d'après (35.18)

$$t' = k\,\frac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} + h,$$

où $x = x_P$, est la coordonnée dans $Oxyz$ du point $P' \in \mathbb{E}'$ où φ a lieu, donc aussi de $P \in \mathbb{E}$ où φ a également lieu.

Or, $t=0 \wedge x=0 \Rightarrow t'=0$, les repères étant en position canonique, donc $h=0$ et selon (36.22) on a la première équation (37.4).

Soient Q, Q' les projections orthogonales de P, P' sur $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ respectivement, et $N \in \mathbb{E}$, tel que $(N \doteq O')t$. On a $\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{ON}$. Notant par $\vec{i}$ le vecteur unitaire, on a $\overrightarrow{OQ} = x\vec{i}$, et en vertu du théorème 35.2, puisque $\vec{\mathbf{x}}$ et $\vec{v}$ ont la même direction, $\overrightarrow{ON} = vt\vec{i}$. Donc

$$\overline{NQ} = |\overline{OQ} - \overline{ON}| = |x - vt|.$$

D'autre part, $([NQ] \doteq [O'Q'])t$, d'où suivant le théorème 36.37, comme $m=0$,

$$\frac{\overline{O'Q'}}{\overline{NQ}} = q, \quad \text{où} \quad q = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Or, $\overline{O'Q'} = |x'|$, donc $|x'| = q|x - vt|$, et puisque $\vec{\mathbf{x}}$ et $\vec{\mathbf{x}}'$ ont la même direction,

$$x' = q(x - vt),$$

ce qui démontre la seconde équation (37.4). Les équations (37.5) en résultent.

DEFINITION 37.4. Soit $(\mathbb{E}' \mathrel{\hat{\subset}} \mathbb{E})\vec{v}$, $\hat{t} \in \mathscr{C}_{\mathbb{E}}$, $\hat{t}' \in \mathscr{C}_{\mathbb{E}'}$, et soient $A, B \in \mathbb{E}$ et $A', B' \in \mathbb{E}'$, tels que $AB \perp \vec{v}$, $A'B' \perp \vec{v}$, et que

$$(37.6) \qquad \exists t\, [([AB] \doteq [A'B'])t].$$

Si alors

$$(37.7) \qquad e(\hat{t}_{A:B}) = e(\hat{t}'_{A':B'}),$$

nous dirons que les *temps communs* $\hat{t}$ et $\hat{t}'$ sont *normés entre eux*, ce que nous noterons par: $\hat{t} \overset{n}{=} \hat{t}'$.

Remarque. Ceci revient à dire que $\Delta t = \Delta t'$ dans les expressions

$$A^{\cdot}(t)\, B^{\cdot}(t + \Delta t),\ \forall t, \quad \text{et} \quad A'^{\cdot}(t')\, B'^{\cdot}(t' + \Delta t'),\ \forall t'.$$

Théorème 37.6. *Si* $(\mathbb{E}' \mathrel{\widehat{\subset}} \mathbb{E})\vec{v}$ *et si les espaces* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{E}'$, *ainsi que leurs temps communs* $\hat{t}$ *et* $\hat{t}'$ *sont normés entre eux, leurs facteurs fondamentaux sont égaux.*

En d'autres termes: $\mathbb{E} \overset{n}{=} \mathbb{E}' \wedge \hat{t} \overset{n}{=} \hat{t}' \Rightarrow c = c'$.

Démonstration. Selon la définition 36.9 on a

$$\langle X_\circ, Y_\circ \rangle \mathrel{\dot{\cong}} \langle X'_\circ, Y'_\circ \rangle, \tag{37.8}$$

et selon la définition 37.4 on a (37.6) et (37.7). Or, d'après la définition 36.8 et le théorème 36.35 les relations (37.8) et (37.6) entraînent $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, en d'autres termes,

$$\frac{c}{2} e(\hat{t}_{A:B}) = \frac{c'}{2} e(\hat{t}'_{A':B'}), \tag{37.9}$$

donc, en vertu de (37.7), $c = c'$.

Notons le théorème suivant:

Théorème 37.7. $\mathbb{E} \overset{n}{=} \mathbb{E}' \wedge c = c' \Rightarrow \hat{t} \overset{n}{=} \hat{t}'$.

$$\hat{t} \overset{n}{=} \hat{t}' \wedge c = c' \Rightarrow \mathbb{E} \overset{n}{=} \mathbb{E}'.$$

DEFINITION 37.5. Soit $(\mathbb{E}' \mathrel{\widehat{\subset}} \mathbb{E})\vec{v}$ et soient $Otxyz$ et $O't'x'y'z'$ les repères lorentziens. Si les repères orthonormés $Oxyz$ et $O'x'y'z'$ sont normés entre eux et si les temps $\hat{t}$ et $\hat{t}'$ sont normés entre eux, nous dirons aussi pour les *repères lorentziens* qu'ils sont *normés entre eux.*

Dans les deux théorèmes suivants nous supposons que les repères lorentziens sont normés entre eux. Le premier résulte du théorème 36.22, ainsi que du théorème 37.6, le second du théorème 37.5.

Théorème 37.8. $(\mathbb{E}' \mathrel{\widehat{\subset}} \mathbb{E})\vec{v} \Rightarrow (\mathbb{E} \mathrel{\widehat{\subset}} \mathbb{E}')(-\vec{v})$.

Théorème 37.9. *Soit* $(\mathbb{E}' \mathrel{\widehat{\subset}} \mathbb{E})\vec{v}$, *et soient* $\langle t, x, y, z \rangle$ *et* $\langle t', x', y', z' \rangle$ *les quadruples des coordonnées d'un événement instantané quelconque, ceux-là se rapportant à deux repères lorentziens* $Otxyz$ *et* $O't'x'y'z'$ *normés entre eux et en position canonique. Alors on a*:

$$(37.10) \qquad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z,$$

et inversement:

$$(37.11) \qquad t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad y = y', \qquad z = z'.$$

Notons les deux théorèmes suivants, qui se déduisent aisément.

Théorème 37.10. *Quels que soient deux événements instantanés,* $\langle t, x, y, z\rangle$ *et* $\langle t_\circ, x_\circ, y_\circ, z_\circ\rangle$ *leurs quadruples de coordonnées dans un repère lorentzien lié à* $\mathbb{E}$, *et* $\langle t', x', y', z'\rangle$ *et* $\langle t'_\circ, x'_\circ, y'_\circ, z'_\circ\rangle$ *ceux qui se rapportent à un repère lorentzien lié à* $\mathbb{E}'$. *Lorsque ces deux repères sont normés entre eux, on a:*

$$(37.12) \qquad c^2(t - t_\circ)^2 - (x - x_\circ)^2 - (y - y_\circ)^2 - (z - z_\circ)^2 =$$

$$= c^2(t' - t'_\circ)^2 - (x' - x'_\circ)^2 - (y' - y'_\circ)^2 - (z' - z'_\circ)^2.$$

D'après la définition 37.2 et en supposant que les espaces $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$, ainsi que les temps $\hat{t}$ et $\hat{t}'$ sont normés entre eux, on a la transformation de Lorentz en forme vectorielle: [33]

Théorème 37.11. *Quel que soit un événement instantané* φ, *et* $\langle t, \vec{r}\rangle$, $\langle t', \vec{r}'\rangle$ *les couples ordonnés de ses coordonnées intrinsèques (forme vectorielle), on a:*

$$(37.13) \qquad t' = q\left(t - \frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{c^2}\right), \qquad \vec{r}' = \vec{r} - qt\cdot\vec{v} + (q-1)(\vec{v}\cdot\vec{r})\frac{\vec{v}}{v^2},$$

---

[33] Voir par exemple *Pham Mau Quan*, Introduction à la Théorie de la Relativité Restreinte (L'enseign. Math., 1960).

et inversement:

$$t = q\left(t' + \frac{\vec{v}\cdot\vec{r}'}{c^2}\right), \qquad \vec{r} = \vec{r}' + qt'\,\vec{v} + (q-1)(\vec{v}\cdot\vec{r}')\frac{\vec{v}}{v^2}, \tag{37.14}$$

où

$$q = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

DEFINITION 37.6. Nous appellerons la transformation (37.10), ou (37.11), *transformation de Lorentz en forme canonique*, les équations (37.13), ou (37.14), exprimant la *transformation de Lorentz en forme intrinsèque vectorielle.*

CHAPITRE VII

RAPPORT ENTRE LES ENSEMBLES L-METRIQUES DE POINTS MATERIELS ET LES CORPS RIGIDES

La théorie que nous avons dévéloppée est entièrement basée sur la „lumière" jouant sur des ensembles de points matériels. Ceux de ces ensembles qui sont métriques conformément à la lumière possèdent une importance particulière; aussi, parmi ces ensembles doivent figurer ceux qui coïncident avec les corps rigides de la Géométrie et de la Cinématique.

En effet, dans tout ce qui précède nous nous sommes abstenus du terme „corps rigide", le réservant aux éléments d'une classe d'ensembles de points matériels dont l'existence est indépendante de la base axiomatique admise jusqu'ici. Nous introduirons donc les „corps rigides" comme une nouvelle classe d'objets (ou éléments) non définis. L'identification d'une certaine classe d'ensembles de points matériels, qui sont, pour ainsi dire, L-métriques au moins dans certains intervalles du temps, avec les corps rigides de la Relativité Restreinte fera alors l'objet d'un axiome particulier (l'axiome X).

38. ENSEMBLES DE POINTS MATERIELS, RIGIDES CONFORMEMENT A LA LUMIERE

Il est évident que les ensembles de points matériels en repos permanent dans un espace permanent L-métrique sont également L-métriques. Ici nous les appellerons „rigides conformément à la lumière".

DEFINITION 38.1. Lorsqu'un ensemble L-métrique **E** de points matériels satisfait à la condition:

$$(\exists \mathbb{E} \in \mathscr{E}_3)\,[\mathbf{E} \mathrel{\overline{\subset}} \mathbb{E}],$$

on dira que **E** est *rigide conformément à la lumière,* ou ***L-rigide***.

NOTATION 38.1. L'ensemble des ensembles L-rigides sera noté $\mathscr{G}$.

Remarques. Il est évident que $\mathscr{G} \subset \mathscr{M}_\infty$, $(\forall n \in \{1, 2, 3\})$ $[\mathscr{E}_n \subset \mathscr{G}]$, ainsi que

$$(\forall \mathbf{E} \in \mathscr{G})(\exists \mathbb{E} \in \mathscr{E}_3)[\mathbf{E} \subset \mathbb{E}].$$

La droite permanente avec laquelle nous avons construit un espace permanent, est par définition un ensemble rectiligne complet (définition 20.3), donc nullement borné (théorème 20.2). Si on laisse tomber cette propriété, ne retenant que la continuité et la connexité d'un ensemble rectiligne, c.-à-d. la connexité et la continuité des images par réflexion d'un tel ensemble, on peut développer en analogie avec la géométrie des espaces permanents celle des espaces qui sont, en général, non permanents et dont la durée dans le temps d'un espace permanent L-métrique peut être bornée. Parmi ces espaces on aurait alors aussi des espaces (permanents ou non) L-métriques. Si nous désignons l'ensemble de ceux-ci par $\mathscr{E}_3(\alpha, \beta)$, α et β étant les événements extrêmes dans le passé et dans l'avenir, d'un tel espace, on aurait $\mathscr{E}_3 = \mathscr{E}_3(\omega, \omega')$ pour l'ensemble des espaces L-métriques permanents (donc L-rigides).

39. LES ENSEMBLES DE L-RIGIDITE TEMPORAIRE ET LES CORPS RIGIDES. L'AXIOME DES CORPS RIGIDES

En Relativité Restreinte, considérant le mouvement des corps rigides par rapport aux trièdres de référence galiléens, on se limite tout d'abord aux translations avec des vitesses constantes. En d'autres termes, les corps dits rigides doivent être en repos dans des espaces permanents L-métriques (donc L-rigides) qui se déplacent avec des vitesses contantes les uns par rapport aux autres, et on peut supposer que ceci ait lieu dans des intervalles, bornés ou non, d'un temps commun d'un tel espace.

Cependant, l'idée du corps rigide demande la possibilité qu'un tel corps change son état de mouvement, et en particulier qu'il passe d'un trièdre galiléen, où il était en repos, dans un autre, où il sera en repos. Or, un ensemble de points matériels ne peut pas être L-métrique que lorsque son mouvement appartient à des classes très particulières, en premier lieu à celle des translations avec des vitesses constantes. Ainsi un „corps rigide“ ne peut pas coïncider avec un ensemble L-rigide que lorsqu'il est en repos dans un espace permanent L-métrique (donc L-rigide). Pendant qu'un „corps rigide“ change de mouvement, passant du repos dans l'un de ces espaces au repos dans un autre, c.-à-d. d'un trièdre galiléen en un autre, ce corps n'est pas L-rigide (ni L-métrique).

Remarque. — Montrons ceci dans le cas simple de deux espaces $\mathbb{E}, \mathbb{E}' \in \mathscr{E}_3$, tels que $(\mathbb{E}' \mathbin{\widehat{\subset}} \mathbb{E})\vec{v}$, dont les repères sont en position canonique, et d'une „règle rigide" $\mathbf{R}$, qui est d'abord en repos sur l'axe $\mathbf{x} \subset \mathbb{E}$, puis sur l'axe $\mathbf{x}' \subset \mathbb{E}'$ (on a $\mathbf{x} \doteq \mathbf{x}'$).

Il est d'abord $(\mathbf{R} \mathrel{\overline{\subset}} \mathbf{x})\mathrm{T}$, puis $(\mathbf{R} \subset \mathbf{x}')\mathrm{T}'$, où T et T′ sont des intervalles des temps $\hat{t} \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}}$ et $\hat{t}' \in \mathscr{T}_{\mathbb{E}'}$. Supposons que le mouvement de chaque point $P \in \mathbf{R}$ change instantanément, et que ceci ait lieu à l'instant $\hat{t}(P)$ du temps t, donc

$$P \mathrel{\overline{\in}} \mathbf{x} \text{ quand } t \leqslant \hat{t}(P), \quad \text{et} \quad P \mathrel{\overline{\in}} \mathbf{x}' \text{ quand } t \geqslant \hat{t}(P).$$

Soit $x_P = a$ l'abscisse de P pour $t = \hat{t}(P)$, et soit $\hat{t}(P) = f(a)$. Alors

$$x_P = a \text{ quand } t \leqslant f(a), \quad \text{et} \quad x_P = a - v\,[t - f(a)] \text{ quand } t \geqslant f(a).$$

En vertu de 37.10, notant $k = \sqrt{1 - v^2/c^2}$, on a

$$x'_P = \frac{1}{k}(a - vt) \text{ quand } t \leqslant f(a), \quad \text{et} \quad x'_P = \frac{1}{k}[a - vf(a)] \text{ quand } t \geqslant f(a).$$

Puisque la distance entre deux points quelconques, P_1 et P_2 de $\mathbf{R}$ doit être la même avant et après le changement du mouvement (définition 36.9), ce qui demande que les deux espaces $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ soient normés entre eux, on en déduit

$$f(a) = (1 - k)\frac{a}{v} - b,$$

où b est une constante. Remarquons que la vitesse de la propagation sur $\mathbf{x}$ de la mise en mouvement des points de $\mathbf{R}$ est $v/(1 - k)$, supérieure à c. (Il va de soi qu'en réalité physique la mise en route n'est pas instantanée et que la vitesse de sa propagation est inférieure à c.) On voit facilement que pendant cette mise en route $\mathbf{R}$ n'est pas L-métrique.

Dans les définitions qui suivent nous ferons donc abstraction du comportement des corps rigides et de leurs équivalents „temporairement" L-métriques pendant les changements de leurs mouvements – ce qui dépasserait le présent développement axiomatique.

Désignons par $\{a_n\}_r^s$ la suite $(a_r, a_{r+1}, \ldots, a_s)$, ou bien les suites correspondantes infinies si $r = -\infty$ ou $s = \infty$ (comparer avec la définition 3.2), en supposant que $r \leqslant s$.

Soient en outre T_p et T_q deux intervalles de $\mathbb{R}$; nous écrirons:

$$\mathrm{T}_p \prec \mathrm{T}_q \overset{\text{def}}{=} (\forall t_p \in \mathrm{T}_p)(\forall t_q \in \mathrm{T}_q)[t_p < t_q].$$

DEFINITION 39.1. Nous dirons qu'un ensemble **A** de points matériels est *de L-rigidité temporaire dans une suite* $\{\mathbb{E}_n\}_r^s$ d'espaces L-rigides $(-\infty \leqslant r \leqslant s \leqslant \infty)$ lorsque:

(1) une suite finie ou infinie d'intervalles du temps d'un espace $\mathbb{E} \in \mathscr{E}_3$ existe, soit $\{\mathrm{T}_n\}_r^s$, telle que $\mathrm{T}_n \prec \mathrm{T}_{n+1}$ pour tout couple $\langle n, n+1 \rangle$ de la suite envisagée, et que

$$(\mathbf{A} \mathrel{\overline{\subset}} \mathbb{E}_n)\,\mathrm{T}_n$$

pour tout n de la même suite;

$$(2)\ (\forall A, B \in \mathbf{A})(\forall A_n, B_n \in \mathbb{E}_n)\,[(A \doteq A_n)\,\mathrm{T}_n \wedge (B \doteq B_n)\,\mathrm{T}_n \Rightarrow \Rightarrow \overline{A_n B_n} = \overline{A_{n+1} B_{n+1}}]$$

pour tout couple $\langle n, n+1 \rangle$ de la même suite.

R e m a r q u e. — D'après la condition (2), la distance entre deux points quelconques de **A**, mesurée par la distance entre les points de $\mathbb{E}_n$, avec lesquels ils coïncident dans l'intervalle T_n, est égale pour tous les T_n (donc dans tous les $\mathbb{E}_n$).

NOTATION 39.1. L'ensemble des ensembles de L-rigidité temporaire sera noté $\mathscr{G}^\star$.

Remarquons que $\mathscr{G} \subset \mathscr{G}^\star$.

Désormais nous admettons sans définition explicite une nouvelle classe d'objets, d'ensembles de points matériels, que nous nommons *corps rigides*.[34] Nous notons leur ensemble par $\mathscr{S}$ et posons l'axiome suivant:

AXIOME X. $\mathscr{S} \subset \mathscr{G}^\star$.

R e m a r q u e. — L'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide a résulté dans notre développement axiomatique de la définition même des corps métriques conformément à la lumière, sans qu'un axiome enonçant cette invariance (le postulat d'*Einstein*) ait été nécessaire. Le postulat d'invariance de la vitesse de la lumière ne devient nécessaire que lorsque les corps rigides, qu'on introduit de „déhors", indépendamment de la lumière, prennent la place des corps L-métriques. Ce postulat signifie au fond que les corps rigides se comportent comme des ensembles L-rigides de points matériels ou, plus exactement, comme des ensembles de L-rigidité temporaire.

[34] Nous y employons le terme „corps" sans demander que ces ensembles soient des continus.

AKSIOMATIČKA KONSTRUKCIJA
TEORIJE PROSTORNO-VREMENSKOG KONTINUUMA
SPECIJALNE TEORIJE RELATIVNOSTI

U ovom radu pisac se vraća zadatku koji je sebi postavio pre skoro četiri decenije i bio tada povod da objavi jedan rad, na nemačkom, u časopisu „Publications Mathématiques de l'Université de Belgrade", pod naslovom „Grundlegendes zum axiomatischen Aufbau der speziellen Relativitätstheorie", I i II (1933 i 1934).

U pomenutom radu pisac je pošao od istih elemenata i nedefinisanih odnosa, i prva četiri poglavlja ovoga rada imaju dosta zajedničkog s onim radom. Aksiomi prvih triju grupa slični su, ali im je spisak sada potpuniji, a ima i definicija i teorema koje su (u drugom obliku) morale biti unesene i u ovaj rad. Jedan od ciljeva oba rada je izvođenje, iz postavljenih aksioma, Lorentzove transformacije. Ali to je, u onom radu, piscu bilo uspelo samo za jednu prostornu i jednu vremensku koordinatu (tj. za dvodimenzioni prostorno-vremenski kontinuum). Osim toga, u onom radu pisac se držao klasične, verbalne formulacije stavova i dokaza, dok se u ovom radu koristi znatnim prednostima koje pruža simbolika savremenih aksiomatičkih teorija.

Aksiomatičko zasnivanje teorije prostorno-vremenskog kontinuuma teorije relativnosti interesovala je matematičare još od početka njena postojanja. Tako je *A. Robb* objavio još godine 1914. svoje detaljno izlaganje „teorije vremena i prostora", polazeći od vremenskih odnosa „pre" i „posle", i izveo je — kako kaže — „sistem geometrije u kojem se kongruencija javlja ne kao nešto spolja uvedeno ... već kao sastavni deo samog sistema". Robbova teorija ima izvesne srodnosti s piščevim izlaganjem. Razlika je, pre svega, u stanovištu sa kojega je sledovao izbor aksioma. Piščeva težnja je bila da aksiomi budu, u svojoj fizičkoj interpretaciji, što bliže osmotrivim činjenicama, ili makar samo da se njihovo osmatranje može zamisliti, dok Robb, u stvari, daje konstrukciju neposredno četvorodimenzionog prostranstva Minkovskoga, u analogiji sa elementarnom geometrijom. (Razume se, pošto je izabran potreban niz aksioma, izvođenje teče nezavisno od interpretacija u fizici).

U aksiomatičkim radovima koji su se otada nizali, a kojima je predmet više-manje isti, koncepcije autora se vrlo razlikuju. Jedni pretpostavljaju u većoj meri gotove strukture i, primenjujući ih na predmet koji obrađuju, rad im može biti kratak a broj aksioma srazmerno mali. Tako je, npr. A. Lichnerowicz dao sistem aksioma teorije relativnosti u „Uvodu" u svoja predavanja, „Relativité générale classique" (Cours professés au Collège de France, 1953). Naprotiv, izvesni autori nastoje da manje pretpostavljaju a više izvode svoju teoriju od što elementarnijih temelja, oslanjajući se manje o gotove strukture. Takvo je stanovište usvojio i pisac ovoga rada. On je smatrao opravdanim da tema tako fundamentalnog i elementarnog značaja, kao što je kinematika teorije relativnosti, koja obuhvata na svoj način i samu elementarnu euklidsku geometriju, zaslužuje samostalnu i u savremenom smislu elementarnu obradu. Dela autora koji su u tom smislu aksiomatički izgrađivali temelje teorije prostorno-vremensk g kontinuuma, mogu biti srazmerno opširna, i donekle moraju biti. Tako *S. Basri*, u svom delu „A deductive theory of space and time" (North-Holland Publ. Co., 1966) izvodi svoj sistem na oko 150 strana; *R. J. Pimenov*, u svome delu „Prostranstva kinematičeskago tipa" (Zapisi naučn. seminarov, Lenjingrad, 1968) od oko 500 strana.

U ovoj studiji autor daje aksiomatičku konstrukciju teorije prostorno-vremenskog kontinuuma samo za specijalnu teoriju relativnosti. Znatan deo bi se pak mogao neposredno, ili uz izvesna ograničenja, primeniti i na opštu teoriju relativnosti. Priroda fizičkih pojava na kojima se ova teorija temelji — i koje sačinjavaju prirodnu interpretaciju njene aksiomatičke strukture — zahteva da operišemo sa trenutnim „blescima" svetlosti, koji se neki put nazivaju i „signalima", i koji se prenose s jednog na drugo mesto zračenjem. Te „signale" ili „bleske" nazivam (na srpskom) *trenutnim događajima*, a tačke iz kojih potiču ili na kojima se zapažaju nazivam *materijalnim tačkama*. Ovi nazivi se uostalom nalaze (na odgovarajućim jezicima) i kod izvesnih drugih autora. Trenutni događaji i materijalne tačke su dve vrste elemenata u aksiomatičkoj strukturi koju pisac razvija. Te trenutne pojave događaju se u pojedinim materijalnim tačkama, a i zapažaju se u materijalnim tačkama. Dva trenutna događaja mogu biti zapažena u jednoj materijalnoj tački, jedan pre drugoga. Otud imamo i tri osnovna, nedefinisana odnosa: *dogoditi se*, *biti zapažen* (osmotren) i *pre*.

Cela teorija temelji se na tih pet nedefinisanih „pojmova" i na 27 aksioma, svrstanih u devet grupa:

I — 4 aksioma nezavisna od vremenih odnosa,

II — 7 aksioma vremenog poretka,

III — 5 aksioma veze između više materijalnih tačaka i trenutnih događaja,

IV — 2 aksioma neprekidnosti,

V — 4 aksioma položaja,

VI — 1 aksiom uporednosti,

VII — 2 aksioma podudarnosti,

VIII — 1 aksiom egzistencije permanentnog metričkog prostora,

IX — 1 aksiom kretanja.

Na kraju je dodat aksiom kojim se izlazi iz užeg okvira teorije da bi se uspostavila veza svetlosno-metričkih skupova materijalnih tačaka (koje pisac definiše) sa krutim telima.

Na temelju pet navedenih, nedefinisanih elemenata i odnosa i 27 aksioma podiže se, među ostalim, euklidska trodimenziona geometrija „pridruženog prostora" i kinematika specijalne teorije relativnosti (dakle geometrije četvorodimenzionog prostorno-vremenog kontinuuma). Geometrija trodimenzionog euklidskog prostora uvodi se obično u teoriju relativnosti spolja, kao jedna od elementarnih matematičkih struktura, nezavisnih od teorije relativnosti. Štaviše, i četvorodimenzioni prostor Minkowskoga može se tako uvesti spolja. U ovom radu geometrija se ne uvodi spolja, nego se u uzvođenju teorije podiže sa istih temelja sa kojih se podiže cela kinematika specijalne relativnosti.

Rad se sastoji iz sedam poglavlja:

I — Diskretna (diskontinuirana) osnova teorije,

II — Neprekidnost,

III — Metrika,

IV — Pravolinijski skupovi materijalnih tačaka,

V — Geometrija permanentnih (trajnih) prostora,

VI — Kinematika

VII — Odnos između svetlosno-metričkih skupova materijalnih tačaka i krutih tela.

Zaslužuje da se naglasi, najzad, da predmet ovoga rada nije samo da se po načelima aksiomatike izvede Lorentzova transformacija, nego da se, takođe, u izvesnoj meri, izloži niz dosad slabo obrađenih ili neobrađenih poglavlja koja su sadržana u temeljima teorije relativnosti.

TABLE DES MATIERES