Конформно пресликавање
елиптичног параболоида на раван

# I

Под пресликавањем једне површи на другу површ, подразумева се у општем случају свако преношење тачака и линија једне површи на другу, у основи којег стоји одређени закон. Пресликавање при којем између њих и њихове слике у најмањим деловима постоји сличност, Гаус је назвао именом конформно пресликавање.

Ова врста пресликавања, коју је најпре открио Ламберт код неких небеских карата, примењивана је затим на ротационе површи и на конструкције географских карата од стране Лагранжа. Гаус је био први који је овај проблем уопштио и решио за све површи и тиме одговорио на питање које је поставила Академија из Копенхагена.

Фуснота

Примедба: штампано у III свеску астрономских чланака у издању H. C. Schumacher-a Altona 1825.

У цитираној глави Гаус је показао, да ако се линијски елементи једне површи појављују у облику

$$ds^2 = m(dp^2 + dq^2) \quad — 1 —$$

а такође и одговарајући ~~елементи~~ елементи друге површи у облику

$$dS'^2 = N(dP^2 + dQ^2)$$

где су $n, p, q$ као и $N, P, Q$ функције координата десног координатног система, свака супституција облика

$$P \pm iQ = f(p \pm iq) \quad \text{где је} \quad i = \sqrt{-1}$$

~~Представља~~ даје једно решење проблема конформног пресликавања.

Проблем се на овај начин своди на проблем интегралног рачуна и главна тешкоћа се састоји у томе да се одреде функције $n, p, q$ и респективно $N, P, Q$, тако да се линијски елемент може свести на претходно наведени облик.

Како се општи проблем пресликавања једне површи на другу површ може ~~радо~~ раставити на два проблема, пресликавање једне површи на раван и пресликавање равни на другу површ, то се за $P$ и $Q$ могу узети Картезијеве координате равни и ставити да је $N = 1$.

Како даље свака супституција облика

$P + iQ = f(p + iq)$ тј. свака функција имагинарног аргумента даје једно решење и све док се не ~~поставе~~ дају одређене претпоставке може се пресликавање вршити на безброј начина. Ако се одабере најпростија супституција $P + iQ = p + iq$ тако да је $P = p$, $Q = q$

и ако је једна површ раван, то $\sqrt{n}$ даје
увеличавајући однос бесконачно мале дужине
лука. Ако се пак врши пресликавање између
две произвољне површи, то је уз претпостав-
ку најпростије супституције исто $= \sqrt{\frac{N}{n}}$.
За израчунавање функције $p$ и $q$ тзв.
параметра пресликавања, Гаус је дао две
диференцијалне једначине. За обртне, лоп-
тасте и цилиндричне површи може се увек
извршити интеграција, за друге пак, а
нарочито за опште површи II реда, веома тешко.
Ако се узме у општем облику линијски еле-
мент са 2 параметра $u$ и $v$

$$ds^2 = e.du^2 + 2f\,du.dv + g.dv^2$$

~~[illegible]~~ то једначина

$$ds^2 = 0$$ даје два израза

за интеграцију

$$e.du + \left[f + i\sqrt{eg - f^2}\right].dv = 0$$
$$e.du + \left[f - i\sqrt{eg - f^2}\right] dv = 0$$ чији

су интеграли

$$p + iq = Const.$$
$$p - iq = Const$$

За фактор $n$ Гаус је дао следећу
једнакост

$$\pm n = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right)\sqrt{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial \Psi}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial u}\cdot\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q}{\partial u}\cdot\frac{\partial p}{\partial v}\right)} \qquad (1)$$

ако је $\Psi = 0$ једначина представља површ.

Види се, да је за израчунавање $n$ потребно познавање вредности $p$ и $q$. Ако се знају $p$ и $q$, то се $n$ добија непосредно.

Три друге формуле за израчунавање функција $n, p, q$, које омогућавају обрнуто да се добије $n$, а затим помоћу тога вредности $p$ и $q$ представљају исте помоћне случајеве као и напред дате једначине, налазе се помоћу неколико других Гаусових формула[2)].

Ако се са $\omega$ обележи угао, који заклапају параметарске линије $u$ и $v$ међусобно, то се лако налазе за $p$ и $q$ диференцијалне једначине

$$dp = \frac{1}{\sqrt{2u}}\left[\sqrt{e(1+\sin\omega)}\,du + \sqrt{g(1-\sin\omega)}\,dv\right]$$

$$dq = \frac{1}{\sqrt{2u}}\left[\sqrt{e(1-\sin\omega)}\,du + \sqrt{g(1+\sin\omega)}\,dv\right]$$

за чије решавање се подразумева познавање вредности за $n$. Сам фактор $n$ је одређен са захтевом

---

Примедбе:

1) формула се краће записује: $\pm n = \dfrac{\sqrt{eg-f^2}}{\frac{\partial p}{\partial u}\cdot\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q}{\partial u}\cdot\frac{\partial p}{\partial v}}$

2) Disquisitiones generales circa superficies curvas. Art. 21 etc. (Carl Friedrich Gauss-ови радови издати од краљевског Друштва Наука у Гетингену 1873. IV свеска)

да важи:

$$\frac{\partial}{\partial v}\sqrt{\frac{e(1+\sin\omega)}{n}} = \frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{g(1-\sin\omega)}{n}}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\sqrt{\frac{e(1-\sin\omega)}{n}} = \frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{g(1+\sin\omega)}{n}}$$

Након извођења назначених диференцијација, неколико трансформација, сабирања или одузимања налази се за $n$ следеће диференцијалне једначине

$$\sqrt{g}\,\frac{\partial}{\partial u}\ln\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{n}\cos\frac{\omega}{2}} - \sqrt{e}\,\frac{\partial}{\partial v}\ln\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{n}\cos\frac{\omega}{2}} = 0$$

$$\sqrt{g}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\ln\frac{\sqrt{g}\sin\frac{\omega}{2}}{\sqrt{n}} + \sqrt{e}\,\frac{\partial}{\partial v}\ln\frac{\sqrt{e}\sin\frac{\omega}{2}}{\sqrt{n}} = 0$$

или ако се ради краћег записивања стави

$$\ln\left(\sqrt{n}\cos\frac{\omega}{2}\right) = X$$

$$\ln\left(\frac{\sqrt{n}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right) = Y$$

добија се

$$\sqrt{g}\cdot\frac{\partial X}{\partial u} - \sqrt{e}\,\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u} - \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}$$

$$\sqrt{g}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+\sqrt{e}\,\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}+\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}$$

што представља парцијалне диференцијалне једначине I реда. Решења наведених диференцијалних једначина садржана су у симултаној диференцијалној једначини

$$\frac{du}{\sqrt{g}}=\pm\frac{dv}{\sqrt{e}}=\frac{dz}{\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\pm\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}}$$

и одређују $z$ даке такође и $\eta$ независно од појединих функција $p$ и $q$. Последње се добијају након израчунавања $\eta$ помоћу квадратуре.

---

Да би се постављене диференцијалне једначине за $\eta, p, q$ могле применити на било који површ II реда, као и за случај овде проучаваног ~~елиптичког~~ параболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

Примећује се да се за $\eta$ дате диференцијалне једначине упрошћавају, ако се за опште параметре $u, v$ узме да је

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}=\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}=0$$

Ово је остварено са једноставном сменом

$$x = a \cdot u$$
$$y = b \cdot v$$
$$2z = u^2 + v^2$$

У овом случају је наиме

$$e = a^2 + u^2$$
$$f = u \cdot v$$
$$g = b^2 + v^2$$

и њиме су испуњене горње претпоставке.

Диференцијалне једначине дају тада оба општа решења

$$\sqrt{n} = \frac{e^{\Phi\left(\int \sqrt{e}\, du + \sqrt{g}\, dv\right)}}{\cos\frac{\omega}{2}}$$

$$\sqrt{n} = \sin\frac{\omega}{2} \cdot e^{\Phi\left(\int \sqrt{e}\, du - \sqrt{g}\, dv\right)}$$

где је $\Phi$ ознака за функцију и $e$ је основа природних логаритама, или једноставније

$$\sqrt{n} = \frac{1}{\cos\frac{\omega}{2}}$$

$$\sqrt{n} = \sin\frac{\omega}{2} .$$

Тиме је налажење функција $p$ и $q$ враћено на квадратуре, чије [illegible] је скопчано са великим тешкоћама.

# II

На најпростији начин добија се параметар пресецавања за површи II степена помоћу елиптичких просторних координата, према којима се тачке једне такве површи на кривој линији пресеке на две површи II степена конфокалне са том кривом. Линијски елемент је тада облика

$$ds^2 = e\,du^2 + g \cdot dv^2$$

и диференцијалне једначине за $p$ и $q$ се ту даље могу решити.

Једначина елиптичког параболоида је

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

и са том конфокалне површи

$$\frac{x^2}{a^2-u} + \frac{y^2}{b^2-u} = 2z-u$$

$$\frac{x^2}{a^2-v} + \frac{y^2}{b^2-v} = 2z-v$$

где је $\infty \geq u \geq a^2 \geq v \geq b^2$

где прва конфокална површ представља елиптички, а друга хиперболички параболоид.

Свака тачка дате површи је одређена вредностима уређених парова $u$ и $v$.

$u = \text{const.}$ представља један, $v = \text{const.}$ други систем криве линије.

Из горње три једнакости следе вредности

$$x^2 = a^2 \cdot \frac{(a^2-u)\cdot(a^2-v)}{b^2-a^2}$$

$$y^2 = b^2 \cdot \frac{(b^2-u)\cdot(b^2-v)}{a^2-b^2}$$

$$2z = u+v-a^2-b^2$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{1}{2}\,\frac{x}{a^2-u} \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{a^2-v}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{2}\,\frac{y}{b^2-u} \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{2}\,\frac{y}{b^2-v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{2} \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{2}$$

а тиме

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

$$e = \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{(a^2-u)^2} + \frac{y^2}{(b^2-u)^2} + 1\right] = \frac{1}{4}\,\frac{u(u-v)}{(a^2-u)(b^2-u)}$$

$$f = \frac{1}{4}\left[\frac{x}{a^2-u}\cdot\frac{x}{a^2-v} + \frac{y}{b^2-u}\cdot\frac{y}{b^2-v} + 1\right] = 0$$

$$g = \left[\frac{x^2}{(a^2-v)^2} + \frac{y^2}{(b^2-v)^2} + 1\right] = \frac{1}{4}\,\frac{v(v-u)}{(a^2-v)(b^2-v)}$$

Параметри пресликавања, који се могу сада обележити са U и V, добијају се одмах, ако се стави $n = \frac{u-v}{4}$

Тада је

$$dU = \frac{u\,du}{\sqrt{u(a^2-u)(b^2-u)}}, \qquad dV = \frac{v\,dv}{\sqrt{-v(a^2-v)(b^2-v)}}$$

Ако се изабере крајња тачка параболоида за почетак рачунања U и V (дакле при најпростијем пресликавању за координатни почетак у равни) тј. става се да је за $x = y = z = 0$ и тада $U = V = 0$

и како је $x = y = z = 0$ то је

$$u = a^2, \quad v = b^2$$

то се за интеграцију оба израза за U и V у првом случају узима $a^2$, у другом $v^2$ за доњу границу. Дакле

$$U = \int_{a^2}^{u} \frac{u\,du}{\sqrt{u(a^2-u)(b^2-u)}}, \qquad V = \int_{b^2}^{v} \frac{v\,dv}{\sqrt{-v(a^2-v)(b^2-v)}}.$$

И сада, да би ове елиптичке интеграле ~~...~~ редуцирали на нормалне облике, посматра се да је $\infty \geq u \geq a^2$, $a^2 \geq v \geq b^2$ и види да рачунањем ~~...~~ имају потребан облик за редукцију таквог интеграла, без употребе

наведених супституција.
Са претпоставком, која произл. задатка више одговара, јер нове променљиве са $u$ и $v$ истовремено расту, формуле гласе:

$$u = \frac{a^2 - b^2 t^2}{1 - t^2} \qquad v = \frac{a^2 b^2}{a^2 - (a^2 - b^2) w^2}$$

$$t^2 = \frac{u - a^2}{u - b^2} \qquad w^2 = \frac{a^2 (v - b^2)}{v (a^2 - b^2)}$$

тако да је

$$1 \geq t^2 \geq 0 \qquad 1 \geq w^2 \geq 0$$

За модуле се добијају вредности

$$k^2 = \frac{b^2}{a^2} \qquad l = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - k^2 = k'^2$$

тиме постаје

$$U = 2a \int_0^t \frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2} \cdot \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}$$

$$V = \frac{2b^2}{a} \int_0^w \frac{1}{1 - k'^2 w^2} \cdot \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k'^2 w^2)}}$$

и ако се стави

$$t = \sin\varphi, \qquad w = \sin\varphi$$

$$U = 2a \int_0^\varphi \frac{\Delta(\varphi,k)}{\cos^2\varphi}\, d\varphi = 2a \int_0^\varphi \frac{1}{\cos^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi,k)} -$$

$$- 2ak^2 \int_0^\varphi \operatorname{tg}^2\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi,k)}$$

$$V = \frac{2b^2}{a} \int_0^{\psi} \frac{1}{\Delta^2(\psi, k')} \cdot \frac{d\psi}{\Delta(\psi, k')}$$

Ако се као обично означи

$$F(\sigma, k) = \int_0^{\sigma} \frac{d\sigma}{\Delta(\sigma, k)}$$

$$E_1(\sigma, k) = \int_0^{\sigma} \Delta(\sigma, k)\, d\sigma$$

то се налази помоћу познатих формула

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{\sigma} \frac{1}{\cos^2\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{\Delta(\sigma, k)} = \dots \\
&\int_0^{\sigma} \operatorname{tg}^2\sigma \, \frac{d\sigma}{\Delta(\sigma, k)} = \dots \\
&\int_0^{\sigma} \frac{1}{\Delta^2(\sigma, k)} \cdot \frac{d\sigma}{\Delta(\sigma, k)} = \dots
\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

што даје

$$\left.\begin{aligned}
U &= 2a[\ \dots\dots\ ] \ \bmod. k \\
V &= 2a[E_1(\psi) \dots\dots\ ] \ \bmod k'
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ако се уведу елиптичне функције и на крају стави

$$\left.\begin{aligned}
\varphi &= \operatorname{am} \vartheta \\
F(\varphi) &= \vartheta \\
E_1(\varphi) &= E(\vartheta)
\end{aligned}\right\} \bmod. k \qquad
\left.\begin{aligned}
\psi &= \operatorname{am} \eta \\
F(\psi) &= \eta \\
E_1(\psi) &= E(\eta)
\end{aligned}\right\} \bmod. k'$$

Постаје

$$\left.\begin{aligned} U &= 2a\left[\operatorname{tg} \operatorname{am} \vartheta \cdot \Delta \operatorname{am} \vartheta + \vartheta - E(\vartheta)\right] \quad \operatorname{mod.} k \\ V &= 2a\left[E(\eta) - \frac{k'^2 \sin \operatorname{am} \eta \cdot \cos \operatorname{am} \eta}{\Delta \operatorname{am} \eta}\right] \quad \operatorname{mod} k' \end{aligned}\right\} (2)$$

Ова израза за U и V могу још једноставније да се напишу.

Ако се искористи позната смена да би се упростио први израз

$$\sin \varphi = i \cdot \operatorname{tg} \chi$$

последица тога је

$$F(\varphi, k) = i \cdot F(\chi, k')$$

и примене формуле (a)

$$E_1(\varphi, k) = i\left[\operatorname{tg} \chi \, \Delta(\chi, k') + F(\chi, k') - E_1(\chi, k')\right]$$

а за упрошћавање другог израза формуле за адиционе теореме елиптичких интеграла другог реда, тако да се стави један аргумент $= K'$, дакле формуле

$$E(\eta, k') - \frac{k'^2 \sin \operatorname{am} \eta \cdot \cos \operatorname{am} \eta}{\Delta \operatorname{am} \eta} = E(\eta + K') - E' \quad \operatorname{mod.} k'$$

што се добија за U и V ~~[illegible]~~ облик

$$\left.\begin{aligned} U &= -2ai \cdot E(i\vartheta) \\ V &= 2a\left[E(\eta + K') - E'\right] \end{aligned}\right\} \operatorname{mod.} k' \quad (3)$$

У којима су величине U и V елиптички инт. (U је у имагинарној форми)

Ако се коначно изразе параметри U и V у Јакобиевој функцији, која је дефинисана једначином

$$\theta(\sigma) = 1 - 2q\cos\frac{\pi\sigma}{K'} + 2q^4\cos\frac{2\pi\sigma}{K'} - 2q^9\cos\frac{3\pi\sigma}{K} + \ldots$$

у којој је

$$q = \varepsilon^{\frac{\pi K'}{K}}, \quad q' = \varepsilon^{-\frac{\pi K}{K'}}$$

и $\varepsilon$ је основа природног логаритма, добија се

$$\left.\begin{aligned} U &= 2a\left[\frac{E'}{K'}\vartheta - \frac{i\theta'(i\vartheta)}{\theta(i\vartheta)}\right] \\ V &= 2a\left[\frac{E'}{K'}\eta + \frac{\theta'(\eta+K')}{\theta(\eta+K')}\right] \quad \text{mod. } K' \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

и ако се према формули (2) и U прикаже у реалној форми и у том циљу примене формуле за sn am, cos am и Δ am, следи

$$\left.\begin{aligned} U &= 2a\left[\frac{K-E}{K}\vartheta - \frac{\theta'(\vartheta)}{\theta(\vartheta)} + \frac{H'(\vartheta)\cdot\theta(\vartheta+K)}{H(\vartheta+K)\cdot\theta(\vartheta)}\right] \quad \text{mod. } K \\ V &= 2a\left[\frac{E'}{K'}\eta + \frac{\theta'(\eta+K')}{\theta(\eta+K')}\right] \quad \text{mod } K' \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

где је функција H дефинисана са

$$H(\sigma) = \frac{\sqrt[4]{q}}{i}\,\varepsilon^{\frac{\pi i\sigma}{2K}}\cdot\theta(\sigma+iK').$$

Општа формула $P \pm iQ = f(U \pm iV)$

где су P и Q картезијеве координате у равни, даје сва конформна пресликавања елиптичког параболоида на раван. Најједноставнија претпоставка за функцију f је, да се она стави на место свог аргумента и тада се добија најједноставнији облик пресликавања.

У овом случају су U и V саме координате у равни десног координатног система и пресликавање се тако обавља да се криве линије параболоида пресликавају на праве паралелне координатним осама.

Једна друга, стереографска пројекција полутине површи у одређеном систему кореспондујућа је аналогни облик пресликавања помоћу смене

$$P + iQ = e^{U+iV}$$

тј. $P = e^{U} \cdot \cos V \quad Q = e^{U} \cdot \sin V$

Овде одговара једном систему кривих линија систем правих, које све пролазе кроз координатни почетак, док други систем кривих линија производи систем концентричних кругова око координатног почетка.

III

Најпростији од њих претпоставка јесте даље онај при коме U и V представљају координате равни једног координатног система и дате су формулама (5).

Ако се u, v као и координате (x, y, z) прикажу као елиптичне и Јакобијеве функције, то се добијају следеће вредности:

$$\left.\begin{aligned} u &= \ldots \\ v &= \ldots \end{aligned}\right\} (6)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm a^2 k' \ldots \\ y &= \pm b^2 k' \ldots \\ z &= \ldots \\ &\ldots \end{aligned}\right\} (7)$$

Где се појављују функције са аргументом $\vartheta$ и модулом $K_\mu$ са аргументом $\eta$ и комодулом $k'$.

~~[illegible]~~ Одавде, с обзиром на дупли предзнак у изразима за x и y, да поједини вредност на ових променљивих одговарају исто такве вредности за $\vartheta$ и $\eta$, негативни да одго- варају такође негативне вредности за $\vartheta$ и $\eta$; ако се утврди, да се $\vartheta$ и $\eta$ мењају само са x, y, z то је

$$\infty > x > -\infty$$
$$\infty > y > -\infty$$
$$+k > \vartheta > -k'$$
и $$+k' > \eta > -k'$$

Због тога је јасно, док x и y од $-\infty$ до 0 и од 0 до $+\infty$ расте, $\vartheta$ узима вредности од $-K$ до 0 и од 0 до $+K'$ и тиме, док U узима вредности од $-\infty$ до 0 и од 0 до $+\infty$ V има само вредности од $-2aE'$ до $+2aE'$.
Читав параболоид је овим пресликан на једну паралелну пругу ширине $4aE'$. Четири равнина октанта параболоида одгова- рају квадратима равни ограничени паралелама $V = \pm 2aE'$. Примећује се, да се изрази за координате U и V у суштини састоје из два дела од којих је један са $\vartheta$ респективно $\eta$ директно пропорционалан, док је други по природи функ- ција $\vartheta$ и

$\frac{\theta'}{\theta}$ непрекидан. Како су аргументи $\vartheta$ и $\eta$ затворен између уведених граница, ови делови су јасни као и вредности за $U$ и $V$.
Свакој тачки параболоида одговара увек само једна тачка при пресликавању. Како су $\frac{dU}{d\vartheta}$ и $\frac{dV}{d\eta}$ увек позитивни, закључује се да ~~су~~ $U$ и $V$ са $\vartheta$ и респективно $\eta$ и даље такође са $x$ и $y$ непрекидно расту.
Криве линије се ~~пресликавају~~ отсликају тада као праве линије паралелне координатним осама $U$ и $V$. Специјално одговара $U$-оси парабола $y=0$, $x^2=2a^2z$ и $V$-оси парабола $x=0$, $y^2=2b^2z$.
Обе криве секу параболоида чије су координате

$$x=0$$
$$y=\pm b\sqrt{a^2-b^2}$$
$$z=\frac{a^2-b^2}{2}$$

Налазе се на слици на $V$-оси и то

$u=v=a^2$ са координатама

$U=0 \qquad V=\pm 2aE'$

појам о току овог пресликавања стиће се посматрањем слика првих неколико нарочито простих и карактеристичних линија површи.

Такве су пресеци параболоида са равнима и међу овима пре свега нивоске линије тј. слике

$$z = Const = \frac{h^2}{2}$$

или $$a^2k'^2 tg^2 am\,\vartheta + \frac{b^2(1-\Delta^2 am\,\eta)}{\Delta^2 am\,\eta} = h^2$$

где $h^2$ представља позитивну константу.

Једначина се може и овако записати

$$tg^2 am\,\vartheta = \frac{(h^2+b^2)\,\Delta^2 am\,\eta - b^2}{a^2k'^2\,\Delta^2 am\,\eta}$$ и

$$\Delta^2 am\,\eta = \frac{b^2}{h^2+b^2-a^2k'^2 tg^2 am\,\vartheta}$$

Слике кривих су дакле симетричне у односу на обе осе U и V. Даље се не појављују никакве криве, јер $\vartheta$ (дакле и U) као и $\eta$ (т.ј. V) са $h^2$ се увећавају.

Из прве једначине следи да $\vartheta$ узима само реалне вредности, ако је

$$\Delta^2 am\,\eta \geq \frac{b^2}{h^2+b^2}$$

или $$\sin^2 am\,\eta \leq \frac{1}{k'^2}\cdot\frac{h^2}{h^2+b^2}$$

Одавде следи, да под свих кривих $\eta$ може да садржи и садржи нулу, тако да све оне секу $U$-осу и то у тачкама чије растојање од $V$-осе расте истовремено са $h^2$.

Максимална вредност

$$b^2 \sin \eta = \frac{1}{k'^2} \cdot \frac{h^2}{h^2+b^2}$$

одговара, како је како и доказати, само криви за које је $h^2 \le a^2-b^2$

тј. за $u+v \le 2a^2$,

дакле само криви, чији оригинали на површи не пролазе изнад обе кружне тачке. Овој максималној вредности за $\eta$ одговара, како показује прва једнакост, вредност

$$\vartheta = 0$$

и тиме $U = 0$

Резиме: све линије кривих нивоских линија, које не пролазе изнад кружних тачака, секу $V$-осу и то у тачкама, чије одстојање од $U$-осе расте истовремено са висином $h^2$ посматраних елипса. Нивоска линија кроз кружне тачке је последња која још сече $V$-осу, јер је за њу

$$h^2 = a^2 - b^2$$

У тачкама

$$\eta = \pm k'$$

тј. $$V = \pm 2aE'.$$

Тачке у којима оне секу $U$-осу су одређене

са $\eta = 0$, $\operatorname{am} \vartheta = \pm \frac{\pi}{4}$

и тада $$U = \pm 2a\left[\sqrt{\frac{1+k'^2}{2}} + \vartheta_* - E(\vartheta_*)\right],$$

ако је $$\operatorname{am} \vartheta_* = \frac{\pi}{4}$$

Све остале криве за које је даље

$$h^2 > a^2 - b'^2$$

не секу више $V$-осу, јер су све паралелне са $U$-осом

код ових кривих $\eta$ узима све ~~вредности~~ од $-k'$ до $+k'$

даље $V$ узима вредности од $-2aE'$ до $+2aE'$.

Решење: слике кривих нивоских линија изнад кружних тачака састоје се из две гране симетричне преко $V$ осе и одвојене са $V=-2aE'$ до $V=+2aE'$ тако да област између њих увећава ~~када~~ $h$ ~~када~~ расте.

Испитује се општи ток параболе

$$y = \text{const.} = \zeta$$

у претпоставци сличне за cn једначине

$$\cos \operatorname{am} \vartheta = \frac{b^2 k'}{\beta} \cdot \frac{\operatorname{sn} \operatorname{am} \eta}{\Delta \operatorname{am} \eta}$$

$$\operatorname{sn}^2 \operatorname{am} \eta = \frac{\beta^2 \cos^2 \operatorname{am} \vartheta}{k'^2 (b^4 + \beta^2 \cos^2 \operatorname{am} \vartheta)}$$

Криве су симетричне у односу на V осу и ниједна не сече другу.

Реалне вредности за $\eta$ добијају се док је

$$\cos^2 \operatorname{am} \vartheta \leq \frac{k'^2 b^4}{k^2 \beta^2}$$

и реалне вредности за $\vartheta$, ако је

$$\operatorname{sn}^2 \operatorname{am} \eta \leq \frac{\beta^2}{k'^2 (b^4 + \beta^2)}.$$

Максималној вредности

$$\operatorname{sn}^2 \operatorname{am} \eta = \frac{\beta^2}{k'^2 (b^4 + \beta^2)}$$

одговара вредност

$$\vartheta = 0$$

или $U = 0$

и то, како из прве неједначине следи, само код кривих, за које је

$$\beta^2 \leq \frac{k'^2 b^4}{k^2} \quad \text{или} \quad +abk' \geq y \geq -abk'$$

све ове слике кривих секу V-осу и то при највећим вредностима ординате, која са β истовремено расте.

Све друге слике кривих, тј. све за које је

$$\beta^2 > \frac{k'^2 b^4}{k^2}$$

не секу V-осу више, већ увек једну параболу (у зависности од предзнака за β) $V = \pm 2aE'$. ~~Криве~~ састоје се тада из две симетричне гране према V-оси и са њом раздвојене.

Даље се запажа, да док $\vartheta$ расте, $\eta$ опада и обрнуто. Даље је за

$$\vartheta = \pm k, \quad \eta = 0$$

или дакле за

$$U = \pm \infty, \quad V = 0$$

и закључује се одавде, да се све криве асимптотски приближавају обема правцима U-осе.[1]

Тако се налази општи ток параболе

$$x = \text{Const.} = \alpha$$

у равни слике, помоћу једначине

$$\operatorname{tg} \operatorname{am} \vartheta = \frac{\alpha}{a^2 k'} \cdot \frac{\Delta \operatorname{am} \eta}{\cos \operatorname{am} \eta}$$

---

1) Ово следи такође из $\frac{dV}{dU} = \operatorname{tg} \mu = -\sqrt{\frac{g}{e}} \cdot \frac{k'^2 \beta^2}{k^2 (u - b^2)^2}$, ако $\mu$ значи $\measuredangle$, који заклапа тангента криве са U-осом.

или

$$\sin^2 \mathrm{am}\,\eta = \frac{\mathrm{tg}^2 \mathrm{am}\,\vartheta - \frac{\alpha^2}{a^2 k'^2}}{\mathrm{tg}^2 \mathrm{am}\,\vartheta - \frac{\alpha^2}{a^4}}$$

одакле следи, да свакој вредности $\eta$ одговара једна реална вредност за $\vartheta$, што значи да слике обех кривих секу све паралеле са $U$-осом. Како даље једној вредности $\vartheta$ увек одговарају две једнаке супротно постављене $\eta$, како је иначе и јасно, криве су симетричне према $U$ оси.

Даље се посматра, да ће за

$$\vartheta = \pm K \qquad \eta = \pm K'$$

тј. за $U = \pm b \qquad V = \pm 2aE'$

свака крива асимптотски приближава обема паралелама $V = \pm 2aE'$.(1)

Тачка у којој она сече $U$-осу јесте

$$\eta = 0, \quad \mathrm{tg}\,\mathrm{am}\,\vartheta = \frac{\alpha}{a^2 k'}$$

---

Коначно да би се испитао још ток слика кривих парабола

$$\frac{y}{x} = \mathrm{const.} = \gamma$$

---

1) Овде се добија из $\frac{dV}{dU} = \sqrt{\frac{g}{e}} \cdot \frac{a^2 k'^2}{(a^2-4)^2}$, као и из одавде добијених вредности $\frac{d^2V}{d^2U}$, да све слике кривих пролазе поред $U$осе као конкавне

даје се опет за $x$ и $y$ вредности у елиптичним функцијама и налази једначину

$$tg\,am\,\eta = \frac{\delta}{k^2} \sin am\,\vartheta .$$

Криве су симетричне у односу на оба правца и нормалну осу и то при константном $\vartheta$ за растуће $\delta$ и $\eta$ расте, док при константном $\eta$ за растуће $\delta$ вредност $\vartheta$ опада, све се криве међусобно секу у тачки $U = V = 0$ [1)]
Из једначина следи, да свакој вредности $\vartheta$ одговара реална вредност $\eta$, криве се срећу (секу) са свим паралелама са $V$ осом.

Колико је простирање у вертикалном правцу, то је одређено са граничним условима

$$\frac{\delta}{k^2} \geq tg\,am\,\eta \geq -\frac{\delta}{k^2}$$

Бар једна од кривих је дакле садржана у паралелним правцима $tg\,am\,\eta = \pm \frac{\delta}{k^2}$ и приближава се овим граничним паралелама асимптотски.

---

Међу други пресек ~~равни~~ површи са равни, који је значајан јесте круг. Показано је да постоје два система кружних пресека на елиптичном параболоиду. Њихове равни

1) Налази се без тешкоћа из $\frac{d^2V}{dU^2}$, да ова тачка за све криве представља тачку окретања

су нормалне на $yz$-раван и образују са $xy$-равни углове који се допуњују до $180°$. Косинус ових углова је $=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}}$.

Ако $l$ обележава одстојање хоризонталног трага пресечне равни од $x$-осе, што се могу обе једначине кружних пресека обухватити са

$$\sqrt{a^2-b^2}\,y \mp bz = l.\sqrt{a^2-b^2}$$

или краће

$$ak'y \mp bz = lak'$$

Реални кружни пресеци ће бити онда ако је

$$\frac{abk'}{2} > l > -\infty \quad \text{за горњи знак}$$

и

$$+\infty > l > -\frac{abk'}{2} \quad \text{за случај доњег знака.}$$

Ако се за $y$ и $z$ уведу вредности елиптичких функција, што постаје једначина кружних пресека

$$\frac{2ab\sin am\,\eta}{\cos am\,\vartheta \,.\, \Delta am\,\eta} \mp \frac{a^2\sin^2 am\,\vartheta \,.\, \cos^2 am\,\eta}{\cos^2 am\,\vartheta \,.\, \Delta^2 am\,\eta} = \frac{2l}{kk'}.$$

Да би ову једначину довели на простији облик, решава се по $\cos am\,\vartheta$ и добија

$$\cos \operatorname{am} \vartheta = \_\_\_\_\_\_$$

$$= \pm \_\_\_\_\_\_$$

$$= \pm \ldots$$

одавде је опет

$$\cos \operatorname{am} (K' - \eta) = \pm \sec \operatorname{am} \vartheta \pm \sqrt{1 \mp \frac{2l}{abk'}}$$

У обе ове једначине налазе се двојни предзнаци појединачно на два различита система кружних пресека, осим двојних знакова кореновог израза, чија се вредност одређује на следећи начин.

Траже се пресечне тачке слика кривих са $U$ и $V$ осом, тако да је за $\eta = 0$

$$\pm \sec \operatorname{am} \vartheta \pm \sqrt{1 \mp \frac{2l}{abk'}} = 0 .$$

Одавде следи, да предзнак корена увек мора бити супротан од $\sec \operatorname{am} \vartheta$, дакле за први систем кружних пресека $-$, за други $+$.

Једначине кружних пресека који се налазе

$$\cos \operatorname{am} \vartheta = \pm \text{— —} \dots$$

$$\cos \operatorname{am} (K' - \eta) = \pm \dots$$

$$\sin^2 \operatorname{am} \eta = \text{—} \dots$$

где првом систему увек одговарају горњи а другом систему доњи знаци.

Са овим одређењем је дакле за

$$\eta = 0$$

$$\cos \operatorname{am} \vartheta = \frac{1}{\sqrt{1 \mp \frac{2l}{abk'}}}$$

и дакле је $\vartheta$ реално код првог система кружних пресека само ако је $0 > l > -\infty$ и

код другог система кружних пресека само ако је $+\infty > l > 0$.

Ако је дакле $l$ између датих граница, добијају се за $\vartheta$ (а тиме такође и за $\upsilon$) увек две једнаке, али супротно постављене вредности, које расту истовремено са $l$.

Ово важи такође и

за сваку паралелу са U – осом, лиле су слике кривих симетричне према V оси.

Ако је $l=0$, то су обе вредности $\vartheta=0$ неодређено и обе слике кривих додирују $U$ осу у координатном почетку.

Ако се стави

$$\vartheta=0$$

следи

$$\sin^2 am\, \eta = \frac{\cdot}{\cdot} \quad \frac{\cdot}{\cdot}$$

тиме ће $\eta$ бити реално, ако се за $l$ у првом систему постави услов $\frac{abk'}{2} \geq l \geq -\frac{3abk'}{2}$ и у другом систему, да је $+\frac{3abk'}{2} \geq l \geq -\frac{abk'}{2}$

Даље се налази, ако се у једној од горњих једначина стави $\eta = \pm K'$ да све криве првог система дотичу паралеле $V=+2aE'$, а исто тако све криве другог система паралеле $V=-2aE'$ и тада, да све криве које $V$ осу не секу, тј. све криве првог система за које је

$$-\frac{3abk'}{2} \geq l > -b \text{ и}$$

криве другог система за које је

$$+b > l \geq +\frac{3abk'}{2},$$

~~а~~ обе дотичу паралеле $V=\pm 2aE'$ ~~и то~~

свака

се састоји из две разбојске гране. ~~тт~~ ..

Даље се примећује, да свакe две криве за које $k$ има исту апсолутну вредност, дакле припадају размењени системима кружних пресека, постављене су симетрично у односу на U осу и шире, ако се уопште секу, пресек је на V оси.

Једначина било које геодезијске линије на елиптичном параболоиду је позната у облику

$$u \cdot \sin^2\mu + v \cdot \cos^2\mu = h$$

где $\mu$ значи угао који геодезијска линија заклапа са параметарском линијом $u$, у ствари рачуна се угао за који треба $u$ да ротира у позитивном смеру након једног обртаја да се поклопи са $v$. $h$ показује једну константу са ограничењем да је

$$u \geq h \geq v$$

Како угао $\mu$ задржава свој знак и на слици и дакле показује нагиб тангенте на слици криве геодезијске линије према U оси, једнакост ове линије може се написати

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{dV}{dU} = \sqrt{\frac{h-v}{u-h}}$$

и одавде се види, да док ~~[illegible]~~ је $\mu < \frac{\pi}{2}$ (тј.)

U и V истовремено расту) крива је конкавна према U оси, супротно ако је $\mu > \frac{\pi}{2}$ (и док U расте V опада) она је конвексна.
Ово следи полазеће из

$$\frac{d^2V}{dU^2} = -\frac{\left(\frac{dv}{du} + tg^2\mu\right)}{2(u-h)\,tg\mu}\cdot\frac{du}{dU}.$$

У погледу на константу $h$ могу се разликовати три случаја

$$a^2 \gtrless h > b^2$$

Ако је 1) $h < a^2$, то $u$ може да има све вредности од $a^2$ до $\infty$, док $V$ пролази само вредностима од $b^2$ до $h$. За $v = h$ је $tg\mu = 0$, $\mu = 0$. Геодезијске линије додирују криве линије $v = h$.

Ако је 2) $h > a^2$ то је $\infty > u > h$, $a^2 > v > b^2$. За $u = h$ је $tg\mu = \infty$, $\mu = \frac{\pi}{2}$. Геодезијске линије додирују тада криве линије $u = h$.
Ако је коначно 3) $h = a^2$, то криве пролазе кроз једну тачку [illegible], јер је овде $u = V = a^2$. У овом случају U и V пролазе свим доби-јеним вредностима.
Једначина геодезијске линије је тада

$$tg\,\mu = \sqrt{\frac{a^2 - v}{u - a^2}} = \frac{sn\,am\,(\eta - k')}{tg\,am\,\vartheta} = \frac{dV}{dU}$$

Ако се овде стави $\mu = 0$, добија се за тачке пресека са $U$ осом различитих линија које полазе из тачака круга

$$\operatorname{tg} \mu = -\frac{1}{\operatorname{tg} \operatorname{am} \vartheta}$$

$$\mu = \frac{\pi}{2} + \operatorname{am} \vartheta,$$

тачке за ос, $\vartheta = 0$ [illegible] [illegible], где је $\mu = \frac{\pi}{2}$, угао $\mu$ расте док не буде за $\vartheta = K$ $\mu = \pi$.

Ако се интеграли општа једначина геодезијске линије

$$\frac{du}{\sqrt{u-h}} = \frac{dv}{\sqrt{h-v}}$$

јављају се два случаја

$$h \gtrless a^2$$

за разматрање.

Ако ~~се~~ свуда $h$ и $a^2$ узајамно размене места из формула за један случај, добијају се формуле за други, тако би било ~~је~~

$$h < a^2$$

и даље

$$\infty \geq u \geq a^2 \qquad h \geq v \geq b^2.$$

Са претпоставком, да нове променљиве расту непосредно са $u$ и $v$ добијају се супституционе формуле

$u = \dfrac{\ldots}{\ldots}$ $\qquad\qquad$ $v = \dfrac{\ldots}{\ldots}$

$sn^2 \varphi_1 = \dfrac{\ldots}{\ldots}$ $\qquad\qquad$ $sn^2 \psi_1 = \dfrac{\ldots}{\ldots}$

$$\text{Модул} = \lambda^2 = \frac{\ldots}{\ldots}$$

Тиме постаје једнакост

$$a^2 \int \ldots \quad = \quad = b^2 \int \ldots \quad + \text{const.}$$

и стави се

$$\frac{1 - sn^2 \varphi}{1 - \ldots} = \ldots$$

тако је

$$\ldots$$

Где су интеграли стављени у Лежандровој нормалној форми. Ова интеграла треће врсте, који се овде појављују, припадају логаритамској класи. Да би се ови интеграли приказали у Јакоби-јевој форми, како је

$$-1 \geq \frac{a^2}{h} > -\infty \qquad 0 > -\frac{h-b^2}{h} > -\lambda^2$$

Стављамо се

$$\frac{a^2}{h} = \ldots\ldots$$

Дакле је

$$\sin^2 \mathrm{am}\,\alpha = \frac{h}{a^2} \qquad \sin^2 \mathrm{am}\,\beta = \frac{a^2-b^2}{a^2}.$$

Даље се ставља

$$\varphi_1 = \mathrm{am}\,\vartheta \qquad \psi_1 = \mathrm{am}\,\eta_1$$

тако је једначина геодезијске линије

— . . . . . . . . .

— — — — — —

или израчена у као Јакобијева функција

— — — —

— — — — — — —

Ако геодезијска линија пролази кроз тачку $u=a^2$, $v=b^2$, а њена слика кроз $U=0$, $V=0$, то је $const=0$. Једна ова крива је сада $U$ оса.

Ако геодезијска линија пролази кроз једну тачку круга, то је њена једначина

$$\frac{dU}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{dV}{\sqrt{a^2-v^2}}$$

и одавде добијем интеграли су квадратуре. Ако се то изведе, добија се једнакост облика

( — — — =

( —

и ако се овде за $u$ и $v$ ставе њихове вредности у ситаним функцијама добија се

Ова једнакост се може свести на један други облик, ако се суме које се у њој појављују замене са производом.

На крају се налази почетна формула

— — —

— — — — — $\Big\}$ мод. к.

—

ако ~~се~~ стави
$$x - y = K'$$
$$x + y = \vartheta$$

и једна са другом се поделе

$$\frac{- \quad -}{- \quad - \; -} = .$$

— — —

Исто тако се покаже помоћу горњих једнакости, ако се стави
$$x + y = 0$$
$$x - y = \vartheta$$

да је

$$\frac{1 - \Delta\,\mathrm{am}\,\vartheta}{1 + \Delta\,\mathrm{am}\,\vartheta} = \ldots .$$

$$= \frac{H^2\left(\frac{\eta}{2}\right)\ldots}{\Theta^2\left(\frac{\eta}{2}\right)\ldots}$$

Даље се добија помоћу формула

$$\frac{1-k'\ldots}{1+k'\ldots} = \left(\frac{\qquad}{\qquad}\right)^2$$

ако се стави

$$x = y = \frac{\eta}{2}$$

$$\frac{1-k'\,\mathrm{sn}\,\mathrm{am}\,\eta}{1+k'\,\mathrm{sn}\,\mathrm{am}\,\eta} = \left(\ldots\right)^2$$

и помоћу релације

$$\mathrm{sn}\,\mathrm{am}(x + K' \pm iK) = \frac{\Delta\,\mathrm{am}\,x}{k'\cos\mathrm{am}\,x} \quad \mathrm{mod}\ k'$$

— — — — — — — —

Коначно ако се примети да је

$$\frac{\operatorname{sn} \operatorname{am} x - \cdots}{\operatorname{sn} \operatorname{am} x + \cdots}$$

$$= \frac{\operatorname{sn} \operatorname{am} \frac{1}{2}(x-y) \cdot - -}{\operatorname{sn} \operatorname{am} \frac{1}{2}(x+y) \cdot -}$$

$$\frac{1 - k' \operatorname{sn} \operatorname{am} y}{1 + k' \operatorname{sn} \operatorname{am} y}$$

$$= \left( \quad \right)^2$$

Константа која се овде појављује

— — — —

је, како се овде може лако показати, једнака $\frac{1}{k}$ и тиме је

$$\frac{1 - k' \operatorname{sn} \operatorname{am} y}{1 + k' \operatorname{sn} \operatorname{am} y}$$

$$= \left( \quad \right)^2$$

$$= \frac{- \quad - \quad -}{- \quad -}$$

Коначно се налази још помоћу ових формула

$$\frac{\sin am(x+iy) \ldots}{\sin am(x+iy) \ldots} = \frac{\sin am\, x \ldots}{\sin am\, y \ldots}$$

и ако се овде стави

$$x+iy = k'$$
$$x-y = \eta$$

и функције изразе помоћу самих функција добија се

$$\frac{- \quad - \cdot}{- \quad - \cdot} = k^2 \cdot \frac{- \quad - \quad -}{}$$

$$= \frac{H^2(\ldots)\ldots}{H^2(\ldots)\ldots}$$

Са овако добијеним вредностима добија се једначина геодезијске линије у облику

$$\left( \quad - \quad \right) \cdot k' - \quad \cdot \quad =$$

$$\left( \qquad \right) \; \ldots \ldots \; \cdot \mathrm{const} \, ,$$

Константа која се овде појављује је на сличан одређена помоћу угла, који крива са V-осом заклапа.

---

Када се коначно пређа са увеличавајућим фактором

$$m = \frac{u-v}{4} = \frac{ab}{4} \left[ \; - \; - \; - \; - \quad \right] \ldots (8)$$

Примећује се при свега, да скок са порастом вредности за U повећава, а напротив са растом вредности за V се смањује.

У почетној тачки координата, где је

$u = a^2 \qquad v = b^2$

$\vartheta = 0 \qquad h = 0$

добија се

$$m = \frac{a^2 - b^2}{4} = \frac{ab}{4} \left[ \; \ldots \quad \right].$$

Одавде се види да m са обе стране U-осе стално расте до бесконачности. Дуж V-осе натраг ове у оба правца и стално опада и достиже у тачкама круга, у којима је

$$u=a^2, \qquad v=a^2$$
$$\vartheta=0, \qquad \eta=\pm k'$$

минималну вредност

$$u=0=\frac{ab}{4}\left[\;.\;.\;.\;\right].$$

У овим двема тачкама престаје сличност између слике и оригинала. Одавде се објашњава изненадна промена правца на овим местима (за један позитиван угао) параболе $x=0$ $y^2=2b^2z$, треба ради тога испитати слике кривих паралеле $V=\pm 2aE'$ као и део отприлике V-осе која се налази између њих.

Исто тако све криве, које се у оригиналу сретну са параболом $x=0$, на слици секу V осу или паралеле $V=\pm 2aE'$.

Даље се може приметити, да све тачке параболе $x=0$ имају двоструку слику на делу линије, изузев оних, које се налазе између обе кружне тачке.

Две тачке на истом растојању од V осе на истој паралели су наиме слике једне исте тачке. Овим се објашњава узајамна веза између оних кривих на слици, које се налазе на две раздвојене гране симетрично постављене према V-оси, док су њихови оригинали затворене линије, њихове линије и кружни пресеци.

Слично као код U и V-осе појављује се увеличавајући фактор m такође 94 паралела са осом: На свакој паралели са $V$-осом $h$ добија минималну вредност тамо, где се ова паралела сече са $V$-осом и одавде расте на обе стране до бесконачности и: на свакој паралели са $V$-осом $h$ има максималну вредност на месту где она сече $U$-осу и опада одавде на обе стране док не добије одређену најмању вредност (која је увек већа од нуле) на растојањима $\pm 2aE'$ од $U$-осе.

Даље се примећује, да се свака вредност за $h$ (изузев нуле) понавља бесконачно пута и да све оне тачке у којима фактор $h$ има константну вредност формирају криве које су пресечне линије дате површи са елиптичним цилиндром

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2-b^2} = z + \frac{(a^2-b^2) - c^2}{4(a^2-b^2)}$$

или што је исто пресечне линије са хиперболичним цилиндром

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{a^2-b^2} = z - \frac{(a^2-b^2)^2 - c^2}{4(a^2-b^2)}$$

ако је $h = \frac{c}{4}$

Површи су реалне само док је

$$c^2 < 2(a^2-b^2)^2$$

Ове криве имају исту особину да се њене дужине пресликавају у сталном односу.