TEORIJA SKUPOVA

NAPISAO

DR. ĐURO KUREPA

PROFESOR PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKOG FAKULTETA
SVEUČILIŠTA U ZAGREBU

ZAGREB
„ŠKOLSKA KNJIGA"
1951

S A D R Ž A J

U V O D

I. DIO

II. DIO

PROSTORNI SKUPOVI ILI PROSTORI.

UVOD

U dnevnom životu čovjek stalno uočava pojedine činjenice i pojave kao i to, da među pojedinim pojavama postoje izvjesne veze. Tako je čovjek od raznolikosti razbacanih činjenica, nepovezanih i slučajnih razmatranja, došao do *pojedinih grupa događaja koji su više manje međusobno povezani.* Naravno, razvojem čovjeka i društva i načina proizvodnje povećava se broj zapaženih pojava pa nastupaju nove i takve koje se ne mogu staviti u okvir prethodno promatranih pojava, u smislu da bi se one mogle izvesti iz starih pojava na osnovu jedino starih razmatranja. Koliko god nova pojava može na prvi pogled izgledati suprotnom već ustaljenim starim pojavama, toliko i stare i nove pojave nalaze svoje jedinstvo u poznijem razvoju kao specijalni slučajevi šireg razmatranja, koja će obuhvatiti i jedne i druge pojave.

Tako na pr. pojave koje su dovele do korjenovanja negativnih brojeva dovele su nas do nečega što je izgledalo apsurdno pa se rezultati niti nisu smatrali „realnim", nego upravo fantastičnim, imaginarnim. Kasniji je razvoj pokazao da tako suprotni realni i imaginarni brojevi nalaze svoje jedinstvo u višoj nadgradnji, u kompleksnim brojevima; kojima se služimo na svakom koraku.

Već dosta rano pokazale su se dvije tendencije u matematici: aritmetički smjer i geometrijski smjer. No tek pronalaskom koordinatnih sistema, odnosno pronalaskom preslikavanja brojeva na točke linija, ta su se dva smjera međusobno povezala pa se vidjelo, da se tu zapravo radi o istoj stvari, ali izvođenoj na dva različita načina: sada pomoću brojeva i računa, a sada pomoću slika i crtanja.

Konačno je izrastao pojam *funkcije* odnosno *preslikavanja,* srodstva, procesa, transformacije, razvoja, kao izraz činjenice, da se svakodnevno susrećemo sa pojavama i činjenicama koje su u međusobnoj vezi.

Današnji stadij u razvoju matematike može se zvati *funkcionalnim ili skupovnim (množinskim) stadijem.* Karakteristika toga stadija jest ova: uočiti predmet (pojavu) razmatranja kao cjelinu, gledati kako je on sastavljen od pojedinih dijelova, specijalno onih najsitnijih, elementarnih (atomistički karakter skupova), uočiti izvjestan proces na tome predmetu odnosno podvrći predmet izvjesnom procesu (transformaciji) i gledati šta biva od toga predmeta kao cjeline, a šta opet od pojedinih njegovih dijelova; istraživati, u kakvoj su vezi početno stanje i završno stanje predmeta, zatim elementarni dijelovi početnog stanja i elementarni dijelovi završnog stanja, kako mijenjanje pojedinih dijelova u početnoj fazi ili tokom procesa úpliviše na konačno stanje i t. d. i t. d.

Gornji dvostruki naziv dolazi otuda što su skupovi i funkcije nerazlučivo povezani. U jednu ruku, pojam funkcije, procesa i sl. ne možemo ni zamisliti, a da nemamo *baze toga procesa* dakle izvjestan skup koji je procesu podvrgnut. Pa se funkcija, proces, preslikavanje i treba definirati kao sistem od dvije stvari: 1) kao proizvoljan skup S (materijalna baza procesa) i 2) postupak f koji svakom elementu x toga skupa kao materijalne baze pridružuje određen skup $f(x)$ u koji se x preobražava. Rezultat transformacije je opet skup, pa tako vidimo koliko su skupovi i transformacije međusobno povezani. U drugu ruku, rezultat procesa je također skup, pa se pokazuje, da su raznovrsna preobražavanja (transformacije) skupova upravo pravo vrelo nastajanja sve novih i novih skupova.

Skupovi i njihove transformacije mogu biti vrlo raznovrsni: u pojedinim naukama nose oni specifičan karakter; sada su skupovi sagrađeni od ćelija (biologija), sada od pojedinih organizama (kulture u mikrobiologiji, ljudske, životinjske i biljne zajednice), sada od molekula, sada od atoma i t. d. Matematika, uočavajući i opće zakonitosti, neće se nužno obazirati samo na konkretne skupove nego će promatrati i opće skupove koji će u jednu ruku biti izgrađeni od elemenata (atoma, točaka, brojeva, ćelija, organizama, zajednica, sistema i t. d.) a u drugu ruku ulaziti kao dijelovi i elementi u druge skupove.

Za matematičara će često biti važnije da uoči *veze* među skupovima, nego na pr. da sazna od čega je konkretni skup sagrađen. Tako će nam se razne vrste brojeva pojaviti kao rezultat izvjesnih veza među skupovima, a sami skupovi kao brojevi.

Pronalaskom teorije skupova (naročito osamdesetih godina prošloga vijeka) proširen je znatno horizont matematike; nema toga područja matematike u kojem skupovno promatranje nije dovelo do novog gledanja i do novih rezultata. Osnivač teorije skupova Cantor (1845 do 1918) rekao je: *„Suština matematike sastoji se u njenoj slobodi"* *(Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit)*.

Matematika nema nekog stalnog i nepromjenljivog okvira. Jer, s razvojem čovjeka i društva, u matematiku se uvijek unose nova shvatanja i nova područja. Sama teorija skupova kao matematička nauka vrlo je mlada. Može se reći da je svijesno stala na svoje noge onda, kad je Cantor otkrio ove dvije činjenice:

1) *Ma kako malen bio komadić* K *pravca, ne mogu se sve njegove točke iscrpsti nikakovim nizom,* jer zamislimo li ma kakav niz $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ točaka iz K, sadrži komadić K još i drugih točaka različitih od svih a_n.

2) *Cijeli beskonačan pravac pa i čitav prostor* (od 3, 4, 5, ... dimenzija) *sadrži baš toliko točaka koliko i odabrani komadić* K i to u smislu, da svakoj točki *T* iz K pridijelimo izvjesno mjesto (točku) prostora na koje zamislimo metnutu točku *T* i da tako „porazmještene" bivše točke komadića K ispune čitav beskonačni prostor. [1])

Naravno, ne možemo očekivati, da će takve transformacije i procesi biti vrlo pravilni i specijalno da će nužno ulaziti u okvir neprekidnih pa i obostrano neprekidnih transformacija, koje su uglavnom dotada bile izučavane.

Tako se počelo izučavati proizvoljne transformacije. Jedan od bitnih izgrađivača teorije skupova R. Dedekind (1831 - 1916) formulirao je svoj stav izrekom: *Anfangs war die Abbildung (spočetka bijaše preslikavanje).*

Ali, promatranjem *općih preslikavanja* odmah se vidi koliko je dotadanji okvir matematike u kojem su se izučavala tek kontinuirana (neprekidna) preslikavanja bio uzak i neprirodan.

Koncem prošloga vijeka započe trka u izučavanju diskontinuiteta, jer su ljudi uvidjeli, da se s tom pojavom susreću na svakom koraku, pa i tamo gdje prividno vlada kontinuitet. Kad se na prelomu prošlog i ovog vijeka u fiziku uvelo atomističko, diskontinuirano naziranje i o energiji, pa poslije i o svjetlu, dobilo je razmatranje općih (dakle uglavnom diskontinuiranih) procesa naročito veliku važnost.

U obilju raznovrsnih razmatranja uočilo se da pojedini skupovi imaju vema različita svojstva; kod jednog se na pr. može govoriti koliko je jedan njegov element udaljen od drugoga (*ideja metričkih ili razdaljinskih prostora*), kod nekog opet skupa javljaju se upravo na prirodan način pojedini *njegovi dijelovi* kao kakvi *organizirani organi, komadi, okoline (ideja okolinskih prostora);* kod trećih se opet vidi, kako se *pojedini dijelovi upravo nagomilavaju oko drugih dijelova* (ideja gomilišta, osnovnog pojma današnje matematičke analize), i t. d. i t. d.

---

[1]) Da iz točaka sa K možemo izgraditi čitav pravac p dokazuje ovo jednostavno razmatranje. Položimo (čitalac neka crta, po redu kako čita tekst; tako će mnogo više vidjeti nego da ugleda odmah sliku gotovu!) komadić K na p kao cjelinu, tako da dobijemo dužinu $AB = K$, nacrtajmo proizvoljno kružnicu k koja dodiruje p i AB u sredini C dužine K; neka je O središte toga kruga; pridijelimo svakoj točki T iz AB onu točku T_1 u kojoj linija TO siječe kružnicu k; specijalno su time određene točke A_1, B_1 kružnice kao i sredina S tetive A_1, B_1.

A sada zamislimo ovaj proces: svaka točka T dužine AB najprije se sa pravca p premjesti u T_1 na kružnicu k, a onda smjerom T_1S natrag na pravac p na određeno mjesto T_2 pravca p Očito, individualnim premještenjem svake točke T iz AB na odgovarajuće mjesto T_2, ispuni se time čitav beskonačni pravac Pritom su krajevi A, B ostali neiskorišteni, tako da bi se vulgarno moglo reći da dužina AB *„ima dvije točke više nego što ih ima"* čitav pravac p.

Stvarno, gornjim preslikavanjem dužine AB prelazi ona na čitav pravac p, a obrnutim putem stisnuo se čitav pravac p na svoju dužinu AB. Pritom je čak međusobni poredak točaka i poslije preslikavanja ostao isti.

Tako je nastala potreba, a i uočena mogućnost da se nađu *okvirni zakoni* za pojedine procese i razmatranja.

To je bila ideja vodilja u izgradnji tako zvanih *(apstraktnih) prostora* (M. Fréchet, rođ. 1878., E. H. Moore 1862—1932),; išlo se je za tim da se konkretno raznovrsne pojave (skupovi) svrstaju u isti okvir i razradi teorija toga okvira, slično kao što na pr. teorija vektora pokriva i teoriju brzina i teoriju sila i sličnih veličina ili kao što teorija grupa stoji mjesto toliko konkretnih raznovrsnih operacija.

Knjiga je razdijeljena na dva dijela: svaki se dio dijeli na glave, glave na paragrafe, ovi u podparagrafe, točke i t. d.

Numeracija paragrafa i njihovih dijelova je *poziciona (decimalna, šifrovana);* na isti način su numerirani obrasci, leme, teoremi, primjeri i t. d.: na pr. obrazac (7.4.5.2.) znači onaj obrazac koji je u paragrafu 7 potparagrafu 4, njegovu dijelu 5 i to drugi po redu. Taj *leksikografski ili šifrovani* način uređivanja vrlo je podesan i pregledan, a u svojoj osnovi tako su poredani i realni brojevi (isporedi § 13.2.2).

Prvi dio sastoji se od tri glave.

Prva glava radi općenito o skupovima i preslikavanjima skupova.

Druga glava obrađuje jednoznačne i jednolisne transformacije na osnovu kojih ćemo skupove proglasiti nosiocima kardinalnih (glavnih) brojeva. Tu će iskrsnuti osnovna Dedekindova razdioba skupova na *konačne* i *beskonačne* uzimajući Bolzanov paradoks[1] (da se pojedini skup može obostrano jednoznačno preslikati na svoj pravi dio) za definiciju beskonačnih odnosno transfinitnih skupova. Prirodni brojevi će biti definirani kao konačni skupovi, a može se dokazati *da za njih važi princip totalne indukcije.*

Treća glava obrađuje (potpuno ili nepotpuno) uređene skupove. Polazeći od osnovnog svojstva skupa prirodnih brojeva, da mu svaki dio ima prvi element — u koliko uopće posjeduje koji element — definiraju se *dobro uređeni skupovi* (Cantor) kao baš oni ma kakvi uređeni skupovi koji imaju gornje svojstvo minimuma. Svaki takav skup je nosilac izvjesnog broja pa tako dolazimo do *rednih (ordinalnih) brojeva*, jedne od najljepših i najsmjelijih tekovina Cantorove teorije skupova. Specijalno, skup prebrojivih rednih brojeva nadovezuje se na sve konačne redne (t. zv. prirodne brojeve), a njegovo pojimanje je isto toliko prirodno koliko i pojimanje skupa C svih realnih brojeva.

---

[1]) Bolzano (1781—1848).

Dobro uređeni skupovi su specijalan slučaj *razvrstanih* skupova ili rodoslovljâ, te *razvrstano uređenih* skupova; zadnji skupovi su shematizirana teorija neprestanog komadanja i atomiziranja. Razvrstani skupovi predstavljaju opću teoriju rodoslovlja, odnosno procesa kod kojih se niže jedna etapa procesa na drugu etapu procesa, odnosno, na generaciju nastavlja generacija. Kako ti skupovi vuku lozu od tako prirodnih pojava, jasno je, da će oni ulaziti u različita osnovna matematička razmatranja. I zbilja, obje vrste skupova povezane su sa izučavanjem samog kontinuuma: razvrstani skupovi sa Cantorovim problemom o kontinuumu, a razvrstano uređeni sa Suslinovim problemom o kontinuumu.

U §-u 21 daje se veza rodoslovljâ s općim djelimično uređenim skupovima. Već *mrežasti skupovi* sa svojom dualn m građom pokazuju koliko je raširen i važan pojam djelimično uređenih skupova.

Konac prvog dijela (§ 23) posvećen je uzlaznim i silaznim preslikavanjima djelimično uređenih skupova. Taj paragraf možemo smatrati osnovnim, a nekoji problemi koji su u njemu naznačeni pokazuju koliko područje parcijalno uređenih skupova pruža mogućnosti za daljnja naučna istraživanja.

Drugi dio knjige sastoji se od dvije glave i to: 4 i 5.

Četvrta glava radi o prostorima t. j. o skupovima u kojima je provedena organizacija tako da umijemo odlučiti da li su nađeni elementi skupa međusobno nablizu odnosno da li se zadan element dodiruje zadana skupa. Teorija prostora izvire iz potrebe da dobijemo uvid kako izgledaju pojedini organi, komadi, skupa t. j. da umijemo odgovoriti na pitanje šta u nekom općenitom skupu (u skupu funkcija na primjer) odgovara prirodnom komadu linearnog kontinuuma kao što je njegov odrezak omeđen sa dva broja.

Pokazuje se, da je i kod prostora od osnovne važnosti pojava preslikavanja i to baš preslikavanja među djelomično uređenim skupovima.

U § 25 obrađuju se prostori koji se neposredno nadovezuju na uobičajene svagdašnje prostore sa kojima radimo i u kojima se bliskost i organiziranost može provesti pomoću realnih brojeva odnosno pomoću intervala kao osnovnih komada. Tako dolazimo do dvije važne vrste prostora. S jedne strane su Fréchetovi razdaljinski (metrički) prostori među koje spadaju Kartezijevi prostori od 1, 2, 3, i više dimenzija te Hilbertov prostor koji se na njih nadovezuje i koji u zadnje vrijeme igra tako važnu ulogu u matematici i fizici, nadalje prostor svih realnih neprekidnih funkcija definiranih u jediničnom segmentu.

Sa druge strane su Cantorovi potpuno uređeni prostori. Upoznavši se tako sa dvije opsežne klase prostora može se u § 26 preći na osnovne definicije u vezi sa prostorima koji zadovoljavaju osnovnom zakonu izotonije da se svaki element *a* dodiruje svakog skupa čim se *a* dodiruje nekog dijela toga skupa. Time i tu nailazimo na djelimično uređene skupove koji se kao crvena nit protkavaju čitavom matematikom, jer se zapravo takovi prostori sastoje u uzlaznom preslikavanju na sama sebe partitivnog skupa djelimično uređenog s obzirom na relaciju $\subseteq$. Osnovni pojam koji kod tih prostora dolazi to je *nutrina skupa* odnosno pitanje da li zadan skup A leži ili ne leži u nutrini skupa B što se još kaže da li je A *prekriven* skupom B odn. da li je B *okolina* skupa A. Kako kod tih prostora pojam okoline igra osnovnu ulogu, zovu se oni *okolinski prostori.* U njihovoj strukturi sadržano je mnogo toga što je poznato o specijalnom okolinskom prostoru — našem svagdanjem linearnom kontinuumu, ravnini i običnom prostoru.

Kao specijalne okolinske prostore navodimo *topološke prostore* Kuratowskoga te t. zv. uniformne prostore. koji rješavaju problem da se bez metričkih razmatranja uvede u skupu organizacija koja nas u pogledu neprekidnih preslikavanja potsjeća na organizaciju izvedenu pomoću realnih brojeva.

Peta glava je prilika da se obazremo na nekoje osnovne teoreme matematike i da vidimo kako je svaki od njih izraz izvjesne strukturalne povezanosti u prostoru; tako se na Bolzanov teorem nadovezuju razmatranja o povezanim (koneksnim) skupovima (§ 28); Bolzano-Weierstrassov teorem je izraz pravilnosti koja se imenuje kompaktnost i bikompaktnost prostora, odnosno mogućnosti da se svaki prekrivač može zamijeniti svojim konačnim dijelom (§ 29); tu dolaze također razmatranja o jednolikoj neprekidnosti.

Osnovni Cauchy-ev kriterij konvergencije je sa svoje strane povod da se razmatraju t. zv. *potpuni* (*kompletni*) *razdaljinski* (pa čak i uniformni prostori); u § 30 razmatraju se pitanja počam od Cantorove definicije realnih brojeva kao radnje koja nepotpuni prostor racionalnih brojeva uronjava izometrički u potpuni razdaljinski prostor, pa do dokaza Banachova teorema koji pokazuje koliko je neizmjerno obilniji skup neprekidnih funkcija koje nemaju derivacije niti u jednoj točki od skupa izvodljivih funkcija. To je tim značajniji rezultat kad se ima u vidu da je čak Hermite (1882—1905) taj veliki predstavnik analitičkog i logičkog pravca u matematici dočuvši za postojanje već jedne neprekidne funkcije bez derivacije u ikojoj točki izjavio da je to skandal u matematici.

Borelovim, Suslinovim (analitičkim) skupovima te problemu mjere posvećena su posljednja dva paragrafa (§ 31, te § 32).

Cilj je ove knjige ne da izloži svu teoriju skupova, nego da na našem jeziku pruži prikaz nekojih bitnih pitanja iz te teorije koja su u jednu ruku osnovna za matematiku i nauku uopće, a u drugu ruku da bar donekle iznese problematiku djelimično uređenih skupova uopće, a rodoslovlja napose, ukazujući pritom na pojedine neriješene probleme (v. na pr. § 23. i str. 441) koji se i grupno i pojedinačno mogu istraživati.

Da nije bilo znatne pomoći osoblja Matematičkog instituta Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, knjiga još ne bi ugledala svijetla. Zato se svesrdno zahvaljujem drugovima asistentima Papiću Pavlu i Sedmaku Viktoru. Oni su također vodili svu brigu o korekturi knjige. Srdačna hvala administratoru Matematičkog instituta.

Toplo se zahvaljujem drugu profesoru Dr. Ž. Markoviću na trudu oko čitanja i recenzije rukopisa ovoga djela.

Najzad, mnogo hvala Nakladnom Zavodu Hrvatske i slagaru drugu Velebitu Biseru, koji su učinili sve da knjiga bude što bolje tehnički opremljena i čim prije naštampana.

Zagreb, koncem prvog mjeseca 1951.

Đ. K.

PRVI DIO

GLAVA PRVA

POJAM MNOŽINE ILI SKUPA. OSNOVNE OPERACIJE.

Cilj je ove glave, da se upoznamo s pojmom skupa ili množine, da uočimo da je skup sastavljen od elemenata i obrnuto, da elementi sastavljaju skup (osnovni atomistički karakter nauke o skupovima)[1], da vidimo, kad su dva skupa identična, kad jedan sadrži drugi, te da izvedemo osnovne operacije sa skupovima (spoj, presjek, i naročito pojam funkcije ili transformacije.

§ 1. POJAM SKUPA. OSNOVNE RELACIJE.

§ 1.1. **Pojam skupa (množine)**[2] **ili cjeline** tako je srastao s čovjekom da ga je teško svesti na nešto još jasnije. Tako na pr. učenici nekog razreda čine određeni skup, stanovnici izvjesnog grada također, govori se o skupu škola u državi, o skupu kuća u nekoj ulici, o množini prirodnih brojeva 1, 2, 3, ... , o skupu pravih razlomaka, pravaca, rotacija, o množini prirodnih elemenata, o skupu molekula u gram-molekuli nekog kemijskog spoja, o množini molekula nekog predmeta, množini protona i neutrona nekog atoma, o množini crvenih krvnih tjelešaca, o kulturi (skupu) bakterija, gljivica, množini stanica nekog tijela ili organa i sl.

§ 1.1.1. **Skup i njegovi elementi.** U svakom od tih slučajeva imamo izvjesnu sliku o tom, od čega je promatrana množina sastavljena ili obrazovana. Tako je razred sastavljen od učenika, skup pravih razlomaka je sastavljen od sviju realnih brojeva koji su smješteni između 0 i 1, jezgra helija je sastavljena od 4 čestice, skup dijagonala u pravilnom n-kutu je sastavljen od $\frac{1}{2}$ n (n-3) dužina i t. d.

Kaže se da je skup sastavljen od jedinica, članova, točaka, atoma, elemenata, brojeva ili predmeta i t. d. U pojedinom slučaju zgodnije je da se poslužimo jednim izrazom mjesto drugim.

---

[1]) Negirajući taj princip, poslije ćemo se upoznati sa skupom bez ijednog elementa; to je t. zv. prazni skup ili vakuum. Druga bi krajnost bila da se posmatra skup svih skupova; taj međutim ne postoji.

Uz ta dva krajnja „skupa" povezane su mnoge matematičke i filozofske poteškoće.

[2]) Mi ćemo bez razlike upotrebljavati riječi skup i množina (ruski *množestvo sovokupnost*, franc. *ensemble*, engl. *set*, njem. *Menge*).

§ 1.1.2. Obrnuto: u izvjesnim slučajevima članovi, predmeti, elementi, točke, atomi i t. d. *sačinjavaju skup*. Na pr. brojevi 1, 2, 3, 4, 5 sačinjavaju potpuno određen skup, riječi u Njegoševom *Gorskom Vijencu* obrazuju također određen skup, stanovnici Jugoslavije obrazuju skup i t. d., točke koje su u prostoru od A udaljene za 3 m obrazuju skup i to kuglu sa središtem u A i sa radiusom 3 m.

Osnovna veza. *Kaže se, da je zadan skup sastavljen od svojih elemenata i obrnuto, elementi zadana skupa obrazuju taj skup kao svoju cjelinu (isp. formulu 2.2.4). Često se može reći da zadani elementi obrazuju određen skup kao svoju cjelinu.* To je osnovni princip u nauci o skupovima.

Tim se principom neprestano služimo i u dnevnom životu i u nauci, specijalno u matematici. Na pr. ako je zadana dužina AB i točka C, pa treba naći njenu centralno simetričnu sliku s obzirom na zadanu točku C kao središte simetrije, onda se dužina AB shvata kao skup točaka X *(proces drobljenja, diferenciranja)*, od svake od njih traži centralno simetrična slika X' i onda obrazuje skup svih tih X' *(proces sabiranja ili integriranja)*. Dakle: slika od dužine AB jest množina sastavljena od slika svih točaka (atoma) množine AB. To je principijelna stvar. Drugo je pitanje, što je ta slika identična sa dužinom $A'B'$, gdje su A' i B' slike od A odnosno od B, pa stvar postaje vanredno jednostavna.

Vježba. Za bolje poimanje osnovnog principa odredi centralno simetričnu sliku skupa svih iracionalnih pravih razlomaka s obzirom na točku $\frac{\pi}{4}$ [1]) kao centar simetrije.

§ 1.1.3. **Oznaka skupa pomoću elemenata skupa.** Ako je množina M sastavljena od elemenata $x, y, z, \ldots$, onda se to piše također

$$M = \{x, y, z, \ldots .\}.$$

Ako tu jednakost čitamo zdesna nalijevo, onda time pomoću zadanih elemenata $x, y, z, \ldots$, obrazujemo skup M. Tako na pr. $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ je određen skup.

§ 1.1.4. **Jednočlani skupovi.** I svaki predmet P sam za sebe obrazuje određen skup kojega ćemo označavati sa

$\{P\}$ odn. (P); to su t. zv. *jednočlani skupovi* (v. § 1.2.2.1).

Tako na pr. $\{0\}$, $\{1\}$ jesu dvije određene jednočlane množine. U biologiji su poznati jednostanični skupovi i to biljni i životinjski (amebe, infuzorije i t. d.).

[1]) Istaknimo jedanput za uvijek da mi smatramo i svaki realan broj kao točku na izvjesnoj brojevnoj crti. Kad broj budemo smatrali točkom na brojevnoj kružnici ili kakovoj drugoj crti, onda ćemo to izričito naglasiti.

§ 1.1.5. **Prazni ili pusti (vakantni) skup** jest onaj koji nema ni jednog elementa i označuje se sa

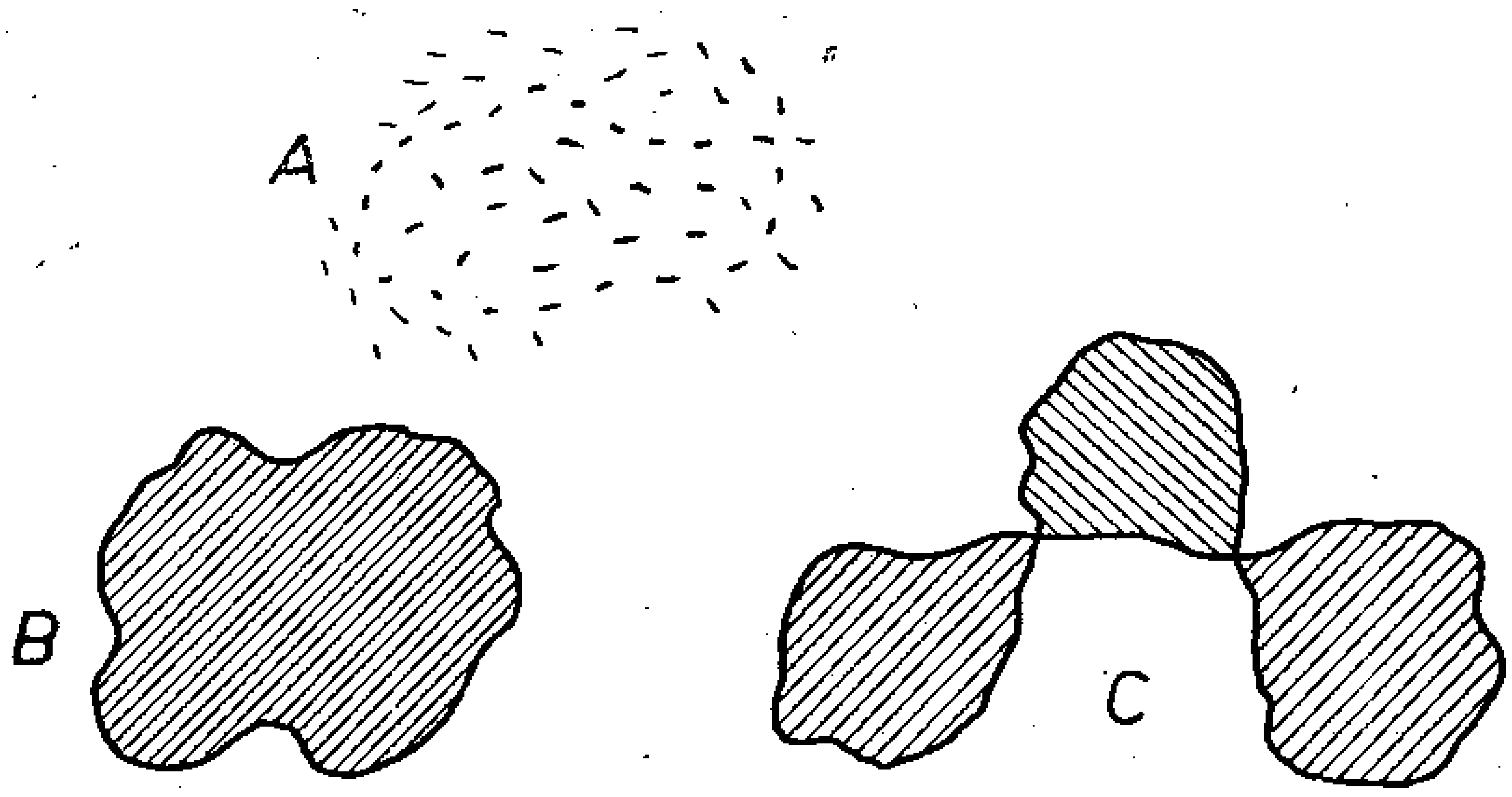
$$v \text{ ili } 0.$$[1]

Skup je *pun* ili *neprazan*, ako on nije prazan.

Uvođenjem praznog skupa znatno se pojednostavnjuje nauka o skupovima, jer ne treba paziti na česte izuzetke. Na pr. skup živih ljudi kojima je preko 200 godina sigurno je danas pust. Naprotiv, skup hrastova starih preko 200 godina i danas nije pust. Ne zna se, da li je množina prirodnih brojeva $n > 2$, za koje jednakost $x^n + y^n = z^n$ ima cjelobrojnih rješenja $\neq 0$ pusta ili nije pusta (veliki Fermatov problem).

Izučavanje prazna skupa kao i izučavanje nule (ništice) spada u teška matematička i logička pitanja.

§ 1.1.6 **Označivanje i shematsko prikazivanje skupova.** Skupove kao i članove skupova označujemo raznim kraticama, slovima, simbolima i t. d. Tako se govori o skupu S, o njegovom članu a, o članovima α, β člana a, o skupu B kojemu je sa svoje strane skup S elemenat i t. d.



Sl. 1.1.6.1
Shematski prikaz triju skupova

Skupove možemo shematski prikazati tako da nacrtamo proizvoljno mnogo točaka, a zgodno je i tako da nacrtamo proizvoljnu zatvorenu crtu; onaj dio ravnine što ga crta omeđuje, shematski je prikaz proizvoljna skupa.

Nekad je zgodno da skupove prikazujemo shematski na pravcu.

[1]) Početno slovo u *vacuum* (praznina). Inače treba razlikovati prazan skup od brojke 0 i broja 0; zato se i uvodi oznaka v za prazan skup, da je možemo upotrebiti u slučajevima, kad je oznaka 0 rezervirana za brojku 0 ili broj 0. Često se mjesto v upotrebljava oznaka $\wedge$ odn. Λ za prazan skup.

§ 1.2 OSNOVNA RELACIJA U TEORIJI SKUPOVA.

§ 1.2.1. **Odnos elemenat — skup (relacija $\in$).** Imajući u vidu, da je skup sastavljen od elemenata (atomistički karakter skupova), uvodimo ovaj način sporazumijevanja: ako je A elemenat od B, onda se to označuje sa

$$A \in B \text{ odn. } B \ni A$$

i čita

A je element od B odnosno B sadrži A kao element.

Ako A *nije element* ili član od B, može se to naznačiti sa

$$A \text{ non} \in B \text{ odnosno } B \text{ non} \ni A.$$

Na pr. za skup N prirodnih brojeva imamo

$$3 \in N, \text{ ali ne. } \sqrt{2} \in N.$$

Ako je S skup transcendentnih brojeva, onda je $\pi \in S$ (nemogućnost kvadrature kruga!), $2^{\sqrt{2}} \in S$, dok naprotiv $\sqrt{2}$ non $\in S$, jer je $\sqrt{2}$ algebarski broj. Na pr. za svaki predmet p važi

$$p \in (p) \text{ odn. } p \in \{p\}$$

t. j. svaki predmet p jest član skupa sastavljenog od toga predmeta.

Ako je skup S prazan ne može biti $x \in S$ ni za kakav x.

§ 1.2.2. **Identična jednakost skupova.** Ako su množine A i B sastavljene od *istih* elemenata, veli se, da su A i B *identički jednaki* skupovi i piše:

$$A \equiv B \quad \text{ili} \quad B \equiv A.$$

Naravno, da će $A \not\equiv B$ značiti da nije $A \equiv B$.

Na pr. $\{2, 5, 9\} \equiv \{9, 2, 5\}$; $\{2, 4\} \not\equiv \{5\}$.

Za jednakost skupova A, B nije od važnosti međusobni položaj elemenata u A odn. elemenata u B.

§ 1.2.2.1. **Jednočlani skupovi ili elementi** (atomi, točke i t. d.) Jednočlani skup jest svaki skup T koji ima svojstvo da iz

$$x \in T,\ y \in T \text{ nužno slijedi } x \equiv y;$$

običnije se još kaže da T ima jedan jedini element.

Na pr. $\{\triangle ABC\}$, je jednočlani skup sastavljen od $\triangle ABC$ kao jedinog svog elementa; naprotiv $\triangle ABC$ nije jednočlan, jer je na pr.

$$A \in \triangle ABC, \quad B \in \triangle ABC, \text{ a ipak nije } A \equiv B.$$

Zato ne miješaj skup S i skup {S} kojemu je S jedini element.

Skup S ne mora biti jednočlan, a ipak ulazi kao element u pojedine skupove.

§ 1.2.3. Relacija inkluzije (uspoređivanje skupova).

Ako su A i B dvije množine, pa ako je svaki član množine A član množine B, kaže se, da je množina A *dio ili podskup* množine B i prema Peanu označuje [1])

$$A \subseteq B \quad \text{odnosno} \quad B \supseteq A.$$

Oznaka $A \subseteq B$ izgovara se ovako: A je *dio* od B ili A je *sadržan* u B ili A je *podskup* od B Naravno, da će se $B \supseteq A$ izgovarati ovako: *B sadrži A*, B je *nadmnožina* od A i t. d.

Ako su A, B bilo kakva dva skupa, onda se logički mogu zamisliti jedino ove četiri mogućnosti:

Prvi slučaj: $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$;

Drugi slučaj: $A \subseteq B$ ali nije $B \subseteq A$;

Treći slučaj: nije $A \subseteq B$ ali jest $B \subseteq A$;

Četvrti slučaj: niti je $A \subseteq B$ niti je $B \subseteq A$.

U prvom slučaju su skupovi A, B očito identični:

$$A \equiv B$$

tako da je time izrečen ovaj *princip identičnosti skupova:*

Da skupovi A, B budu identični t. j. da bude

$$A \equiv B \tag{1.2.3.1}$$

nužno je i dovoljno, da bude

$$\text{i } A \subseteq B \text{ i } A \supseteq B \tag{1.2.3.2}$$

t. j. nužno je i dovoljno da mjesto znaka $\equiv$ u $A \equiv B$ može doći i znak $\subseteq$ i znak $\supseteq$.

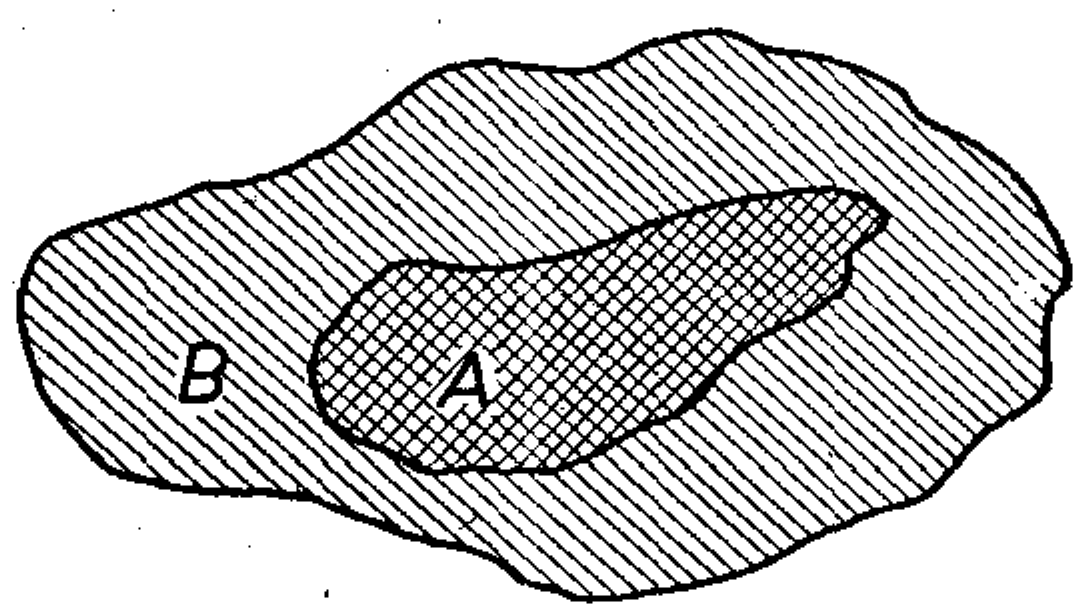
Ako je

$$A \subseteq B, \text{ ali nije } B \supseteq A,$$

kaže se, da je A *pravi dio skupa* B i piše

$$A \subset B \quad \text{odnosno} \quad B \supset A. \tag{1.2.3.3}$$

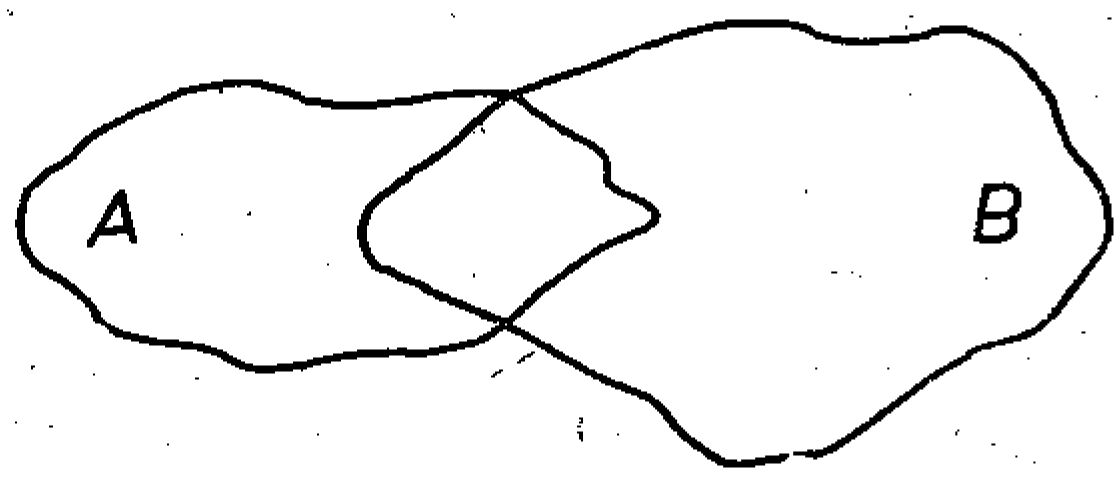
Treći slučaj analogan je drugome.



Sl. 1.2.3.1
Tu je A dio od B t. j. $A \subseteq B$.

[1]) Peano (1858 — 1932), talijanski matematičar.
Sjeti se da $\leqslant$ znači *manje od ili jednako*, i da $a \leqslant b$ znači isto što i $b \geqslant a$.

Ako nije niti $A \subseteq B$ niti $B \subseteq A$, veli se, da su skupovi A, B ***neuporedljivi***. Taj je slučaj naravno najčešći.



Sl. 1.2.3.2
Tu su A i B neuporedljivi: niti je $A \subseteq B$ niti $B \subseteq A$.

Konvencija o skupu v. Prazan skup v (vacuum) smatramo dijelom svakog skupa S:

$$v \subseteq S.$$

Odnosom

$v \subset S$ odn. $S \supset v$ iskazujemo dà S nije prazan.

Naravno, ako je v prazan skup, relacija $x \in v$ nema nijednog skupovnog rješenja x.

Za svaku množinu M važi $M \subseteq M$; zato se svaka množina shvata svojim vlastitim ***nepravim*** dijelom.

Same oznake

$$\subseteq \text{ i } \supseteq \quad \text{te} \quad \subset \text{ i } \supset$$

zovu se ***relacije sadržavanja (inkluzije)***. Nijedan od tih znakova nema, sam za sebe, nikakva značenja; ali za ma koja dva skupa uvijek ima smisla pitati da li su ***povezani*** kojom od tih relacija.

Primijetimo, da iz $A \subset B$ proizlazi da nije niti $A = B$ niti $A \supset B$

§ 1.3. Osnovno o relacijama $\in$ i $\subseteq$.

Vrlo se lako dokažu ove činjenice:

1. $A \subseteq A$ (povratnost ili refleksivnost relacije $\subseteq$).
2. Ako je $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, onda je $A \subseteq C$ (tranzitivnost ili prelaznost relacije $\subseteq$).
3. Ako je $A \subseteq B$, $B \subseteq A$, onda je $A = B$; i obrnuto (vrlo koristan poučak!).
4. Ako za svaki $x \in A$ slijedi $x \in B$, onda je $A \subseteq B$; i obrnuto (izreci taj obrat!).
5. Za svaki skup x, vazda je $x \in \{x\}$.
6. $x \in A$ i $\{x\} \subseteq A$ znače jedno te isto.

Da vidimo kako se tu provode dokazi, dokažimo da iz $A \subseteq B \subseteq C$ slijedi $A \subseteq C$ (točku 2) t. j. da iz $x \in A$ slijedi $x \in C$. No, iz $x \in A$ zbog $A \subseteq B$ slijedi $x \in B$; a odatle zbog $B \subseteq C$ slijedi ono što tražimo t. j. $x \in C$.

§ 1.4. ZADACI

§ 1.4.1 Označi simbolički skup sastavljen od elemenata:

a) $1, 2, 3$; b) a; c) o, a; d) $\triangle ABC$; e) A, B, C; f) $f(x), g(x)$.

§ 1.4.2 Da li je skup desetmilijonskih gradova prazan?

§ 1.4.3 Da li dva različita pravca mogu međusobno biti u odnosu $\subseteq$?

§ 1.4.4 Promatraj 4-kut $ABCD$ te skup

$$\{v, A, B, C, D, AB, BC, CD, DA, ABCD\};$$

koji njegovi članovi stoje međusobno u relaciji $\subseteq$. Da li je na pr. $AB \subseteq ABCD$?

§ 1.4.5 Navedi nekoliko elemenata skupa: a) krugova u ravnini, b) konusa u prostoru. Ima li koji element koji leži u oba ta skupa? Ima li elemenata u prvom skupu koji su s obzirom na $\subseteq$ uporedljivi s kojim elementom iz drugoga skupa?

§ 2. OPERACIJE NA SKUPOVIMA.

Kao što smo se navikli da kod brojeva[1]) izvodimo iz zadanih brojeva razne druge brojeve, na pr. sumu, produkt i t. d., tako ćemo i kod množina služeći se raznim postupcima izvoditi iz zadanih množina razne druge množine. Osnovna je ideja ta, da se iz zadanog sistema množina, specijalno iz zadanog skupa, izvede opet izvjestan skup ili sistem skupova.

§ 2.1. Partitivni skup zadana skupa (operator P).

§ 2.1.1. Neka je S zadan skup; promatrajući njegove dijelove $X \subseteq S$, označimo sa

(2.1.1.1) $$P(S) \text{ odn. } PS$$

množinu svih dijelova skupa S *uključivši i prazan skup* v.

$P(S)$ se zove *partitivni ili diobeni skup množine* S. Prelaz od skupa S na skup $P(S)$ zove se *operator* P ili *funkcija* (transformacija) P.

Prelaz od S na $P(S)$ je od vrlo velike važnosti, jer je operatorom P uspostavljena veza između osnovnih relacija $\subseteq$ i $\in$, naime

(2.1.1.2) iz $x \subseteq S$ slijedi $x \in P(S)$; i obrnuto:

(2.1.1.3) iz $x \in P(S)$ slijedi $x \subseteq S$.

Primjer 2.1.1.1. Ako je S sastavljen od brojeva $1, 2, 3$ dakle $S = \{1, 2, 3\}$, onda je množina $P(S)$ sastavljena od ovih elemenata:

1) v (pust skup);

[1]) Ako se pokatkad pozivamo na brojeve ili dajemo primjere o brojevima, to je zato što brojeve već poznamo. Inače, tokom razmatranja mi ćemo definirati sve uobičajene vrste brojeva. Čitalac će uvidjeti, da se u tome ne krije nikakav *circulus vitiosus*.

2) $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ (jednočlani dijelovi od S);

3) $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ (dvočlani dijelovi od S);

4) $\{1,2,3\}$ = sam skup S.

Dakle je

$P(\{1,2,3\}) = \{v, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$, tako da se $P(\{1,2,3\})$ sastoji od $8 (= 2^3)$ članova.

Primjer 2.1.1.2. Ako je N množina svih prirodnih brojeva dakle

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\},$$

onda se $P(N)$ sastoji od v, N, jednočlanih dijelova $\{n\}$, gdje je $n \in N$, te mnoštva drugih dijelova skupa N. Na pr.

$\{1, 3, 5, 7, \dots\} \in P(N)$; isto tako je $\{2, 2^2, 2^{2^2}, \dots\}$ jedan element množine $P(N)$.

§ 2.1.2. Istaknimo naročito ovo:

a) $v \in P(S)$.

b) Ako je $x \in S$, onda je $\{x\} \in P(S)$ t. j. svi jednočlani skupovi iz S sadržani su u $P(S)$ kao elementi.

c) $S \in P(S)$ t. j. sam zadani skup S postaje određenim elementom u novom skupu $P(S)$.

Dakle: i prazan skup i sam skup S i svi njegovi jednočlani dijelovi postali su članovi novog skupa $P(S)$ koji naravno u općem slučaju — naime svaki put kad S ima bar 3 člana — ima i drugih elemenata.

§ 2.1.3. *Kombinacije r-og razreda iz zadanih elemenata skupa S* jesu svi dijelovi skupa S od kojih svaki ima baš r elemenata. Na pr. kombinacije 2-og razreda skupa $\{2, 3, 4, 5\}$ jesu svi dvočlani dijelovi toga skupa dakle ovi skupovi:

$$\{2,3\},\ \{2,4\},\ \{2,5\},\ \{3,4\},\ \{3,5\} \text{ i } \{4,5\}.$$

Ako skup S ima s različitih elemenata, onda se zna, da postoji

$$\binom{s}{r} = \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-r+1)}{1.2.3\ldots(r-1).r}$$

različitih kombinacija r-og razreda iz elemenata skupa S.

Može se reći da je partitivni skup $P(S)$ sastavljen od svih mogućih kombinacija elemenata skupa S uključivši i *praznu kombinaciju* v.

§ 2.2. **Udruživanje (unija ili spoj) skupova.** Udruživanje ili unija zadanih skupova jest skup koji je sastavljen od onih i samo onih elemenata koji dolaze kao elementi u *bar jednom* zadanom skupu. Ako su A, B zadani skupovi, onda se njihova unija označuje sa

(2.2.1) $A \cup B$[1])

A i *B* se zovu *sumandi* unije.

Skup $A \cup B$ zove se također *spoj* ili *suma* skupova *A* i *B*.

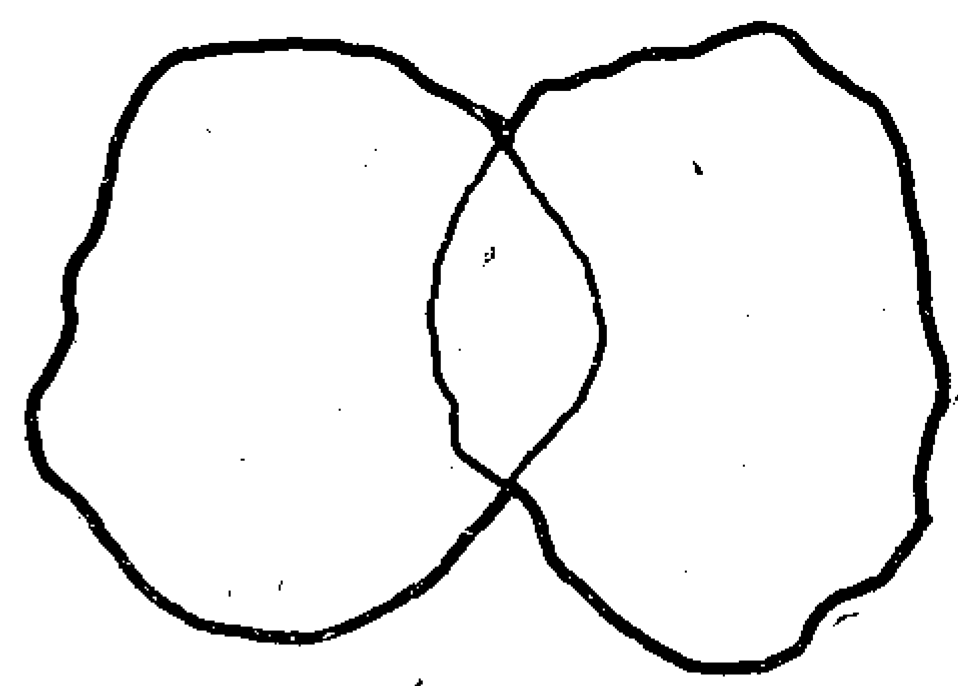
Ako je *S* ma kakva množina skupova, onda se pripadna unija označuje sa

(2.2.2) $$\bigcup_X X, \ (X \in S)$$

pri čemu *X* prolazi svim elementima sistema *S* (dakle su *X* skupovi); *dodatak zadnje zagrade u* (2.2.2) *ima za cilj da naznači, šta sve ima da bude slovo X u formuli.* To je vrlo važan način sporazumijevanja i pisanja. Na pr. ako za neki cijeli broj *n* označimo sa X_n sve realne brojeve *t* za koje je $n \leqslant t < n+1$, pa ako nam *S* označuje skup skupova X_n, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, onda je

$$\bigcup_x x, \ (x \in S)$$

zapravo množina svih realnih brojeva.



Sl. 2.2.1
Unija skupova omeđena je podebljanom crtom

Očito je:

$$A \cup A = A$$

(2.2.3) $$A \cup B = B \cup A \quad (\cup \text{ je komutativan operator})$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (\cup \text{ je asocijativan operator})$$

$$(A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup (B \cup C) \quad (\cup \text{ je distributivan operator})$$

Naravno da je $A \cup v = A$.

Da bude $A \cup B = A$, nužno je i dovoljno da bude $B \subseteq A$.

Vrlo je važna identiteta

(2.2.4) $$\bigcup_{x \in A} \{x\} = A \text{ odnosno } \bigcup_x \{x\} = A, \ (x \in A)$$

t. j. suma, *unija (udruženje) svih jednočlanih dijelova ma kojeg skupa A poklapa se sa samim skupom A (atomistički karakter skupova).*

§ 2.3. Oduzimanje ili otstranjivanje skupova.

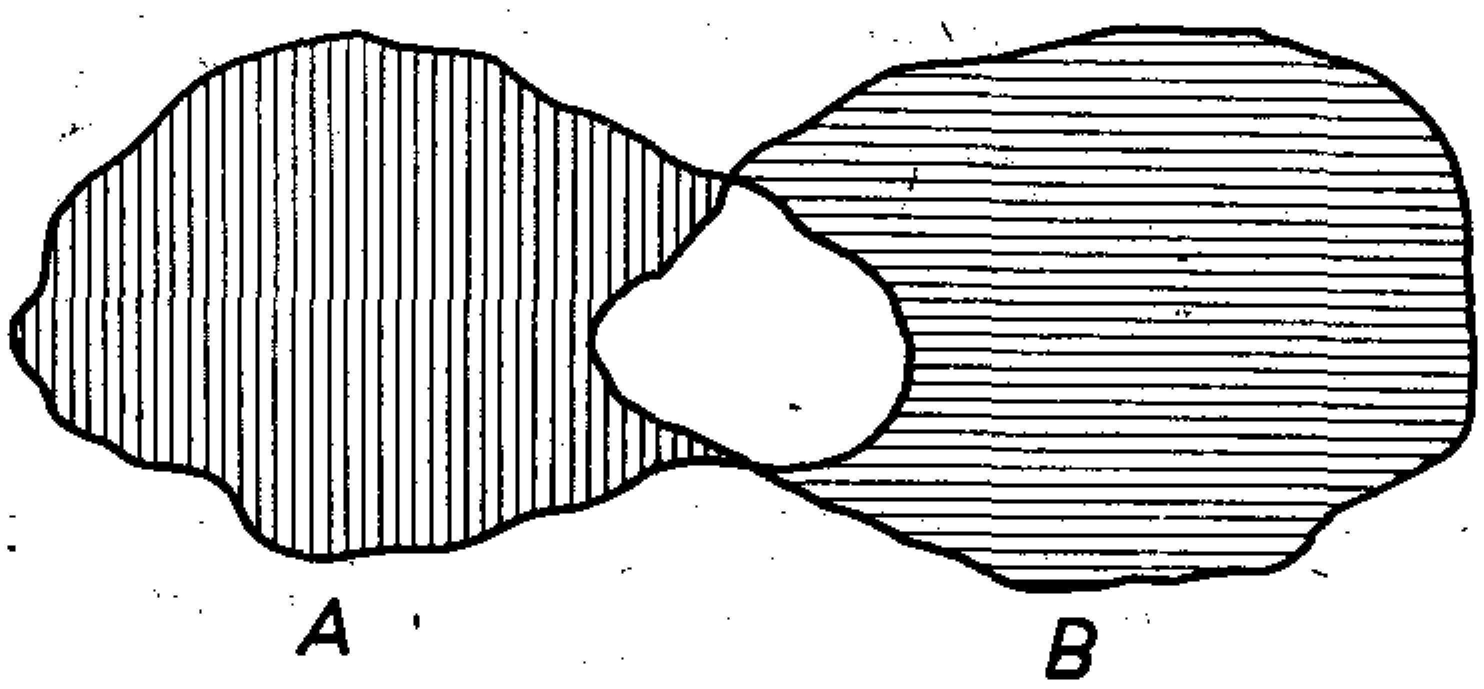
Ako su *A* i *B* dvije množine, onda se *diferencija skupova A i B*, simbolički

(2.3.1) $A \setminus B$,[2])

[1]) U je početno slovo od Unija. U literaturi (naročito onoj koja nije najnovija) često se mjesto $A \cup B$ piše $A + B$. Nama će $A + B$ značiti skup svih $a + b$, kad *a* i *b* prolaze kroz *A* odn. kroz *B*.

[2]) Razlikuj od $A - B$ što naznačuje skup svih $a - b$, kad *a* prolazi skupom *A*, a *b* skupom *B*.

zove množina sastavljena od svih onih i samo onih elemenata skupa A koji nisu ujedno elementi skupa B.



Sl. 2.3.1 Diferencija skupova.

Prema tome, treba razlikovati $A \setminus B$ od $B \setminus A$. Na slici je skup $A \setminus B$ prikazan vertikalnim linijama, a $B \setminus A$ horizontalnim linijama. Češće se promatra *simetrična diferencija* ili *diferencija modulo 2* skupova A i B: to je skup

(2.3.2) $$(A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

§ 2.4. **Zajednički dio ili presjek zadanih množina** jest skup sastavljen od onih i samo onih elemenata koji pripadaju *svima* zadanim množinama. Presjek dvaju skupova A, B označuje se sa

(2.4.1) $$A \cap B;$$ [1]

A i B se zovu *faktori* presjeka $A \cap B$.

Dva su skupa *disjunktna*, ako im je presjek pust. Taj se naziv često javlja.

$$A \cap B \cap C$$

označuje zajednički dio triju skupova A, B i C. Ako je F ma kakva množina skupova, onda se presjek svih tih skupova označuje sa

(2.4.2) $$\bigcap_{x} x, \ (x \in F).$$

§ 2.4.1. Za operator $\cap$ važe posve analogna pravila kao što su pravila (2.2.3) navedena za operator $\cup$ (t. j. operator $\cap$ je komutativan, asocijativan i distributivan).

Očito je

$$A \cap v = v$$

za ma koji skup A (pri tom je v pusti skup). Očito je također, da su formule

[1]) Znak $\cap$ je deformirano slovo π. U mnogim djelima nalazi se oznaka $A \cdot B$ mjesto $A \cap B$. Nama će $A \cdot B$ značiti skup svih $a \cdot b$ pri čemu a prolazi kroz A, a b kroz B; na pr. ako je N skup prirodnih brojeva, tada je $\{2\} \cdot N$ skup svih parnih prirodnih brojeva (u § 2.5.1. saznat ćemo da se skup parnih prirodnih brojeva može označiti i sa 2 N).

$$A \cap B = A, \quad A \subseteq B$$

međusobno ekvivalentne.

§ 2.4.2. **Distributivnost operatora** $\cup$ **i** $\cap$. Operatori $\cap$ i $\cup$ distributivni su jedan spram drugoga (kao i spram sama sebe)[1]:

(2.4.2.1) $$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
(distributivnost od $\cap$ spram $\cup$)

i dualno[2]):

(2.4.2.2) $$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$
(distributivnost od $\cup$ spram $\cap$)

Riječima:

Unija skupova siječe se nekim skupom tako da se svaki sumand unije presiječe tim skupom i onda nađe unija dobivenih rezultata. Presjek skupova udružuje se sa nekim skupom tako da se svaki faktor presjeka udruži sa tim skupom i onda nađe presjek dobivenih rezultata.

Da dokazemo da vazi (2.4.2.1), dovoljno je, po principu o jednakosti skupova (1.2.3.1) pokazati da u (2.4.2.1) možemo umjesto znaka $=$ staviti i znak $\leq$ i znak $\geq$ t. j. da važi:

(2.4.2.3) $$(A \cup B) \cap C \leq (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

kao i

(2.4.2.4) $$(A \cup B) \cap C \geq (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

a) Dokažimo najprije prvi obrazac t. j. da iz $x \in (A \cup B) \cap C$ proizlazi $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. No $x \in (A \cup B) \cap C$ znači, da $x \in C$ i $x \in A \cup B$. Zadnja pak relacija znači, da x zadovoljava bar jednu

---

[1]) Kod brojeva znamo da je množenje distributivno s obzirom na sabiranje:

$$(a + b)\, c = a\, c + b\, c.$$

Naprotiv, dualno ne važi, jer sumiranje brojeva nije distributivno s obzirom na množenje brojeva:

$$(a \cdot b) + c \text{ nije vazda} = (a + c) \cdot (b + c).$$

Niti $+$ niti $\cdot$ nije distributivno spram sebe samoga:

nije vazda $(a + b) + c = (a + c) + (b + c)$ niti
$(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot (b \cdot c)$.

Naprotiv za skupove A, B, C vazda je:

$$(A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = (A \cap C) \cap (B \cap C).$$

[2]) Dualitet je poznat iz projektivne geometrije. Tako se na pr. dualitet projektivne geometrije u ravnini sastoji u tome da se iz svakog ispravnog stavka te geometrije dobije opet ispravan stavak te geometrije permutirajući riječi:

točka — pravac
siječe — spaja

Tako od izreke: *„Za ma koje dvije točke, postoji jedan jedini pravac koji ih spaja“*, dualno izlazi; *„Za ma koja dva pravca, postoji jedna jedina točka u kojoj se oni sijeku“.*

od relacija $x \in A$, $x \in B$; to znači, da je bar jedanput ispunjen uslov $x \in A \cap C$ odn. $x \in B \cap C$ dakle $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, čime je dokazana inkluzija (2.4.2.3).

b) Dokažimo obrat t. j. da je ispunjena relacija (2.4.2.4): svaki element x sadržan u skupu na desnoj strani od (2.4.2.4) sadržan je kao alement u množini što stoji na lijevoj strani te relacije. No ako $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, onda to znači, da bar jedan od presjeka $A \cap C$, $B \cap C$ sadrži element x. Ako na pr. $A \cap C$ sadrži x, onda to znači dalje da je i $x \in C$ i $x \in A$ dakle i $x \in A \cup B$, što sa $x \in C$ daje $x \in (A \cup B) \cap C$, a to baš i tvrdimo relacijom (2.4.2.3). Time je distributivnost operatora $\cap$ spram $\cup$ dokazana.

Dokažimo sada dual. Dokaz se može voditi analogno. No dokaz se može odmah izvesti i iz dokazane distributivnosti operatora $\cap$ spram $\cup$ čitajući obrazac (2.4.2.2) zdesna nalijevo.

Stvarno:

$(A \cup C) \cap (B \cup C) =$ (na osnovu obrasca (2.4.2.1)) $=$
$= [A \cap (B \cup C)] \cup [C \cap (B \cup C)] =$ (po istom obrascu) $=$
$= [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \cup [(C \cap B) \cup (C \cap C)] =$ (po zakonu asocijacije za $\cup$)
$= (A \cap B) \cup [(A \cap C) \cup (C \cap B) \cup (C \cap C)] =$ (jer je $[\,] = C$)
$= (A \cap B) \cup C$. Povezujući polazni i završni član tih jednakosti izlazi baš obrazac (2.4.2.2).

V j e ž b a: Dokaži općenito:

(2.4.2.6) $$(\bigcup_X X) \cup B = \bigcup_X (X \cap B)$$ [1]

(2.4.2.6) $$(\bigcup_X X) \cap (\bigcup_Y Y) = \bigcup_{X,Y} (X \cap Y)$$

Pritom X i Y prolaze ma kakvim sistemima skupova.

Dualni obrasci važe također.

§ 2.5. FUNKCIJA
(Preslikavanje, proces, transformacija)

Pojam funkcije (procesa i t. d.) je od osnovne važnosti i to kako u matematici, tako i u drugim naukama. Pojmovi i razmatranja u ovom §-u su od znatne važnosti. Pojam skupa i funkcije nerazdvojno su povezani. Potsjetimo se da je skup sastavljen od elemenata (atoma) i da je svaki skup X unija svojih jednočlanih dijelova:

---

[1]) Sjeti se kako se množi polinom monomom te polinom polinomom.

$$X = \bigcup_x \{x\}, \quad (x \in X)$$[1]

Znamo što znači dio zadana skupa.

§ 2.5.1. **Definicija preslikavanja.** Pod preslikavanjem (transformacijom) skupa A razumijevamo svaki postupak (proces, radnju, funkciju) f kojim svakom elementu $x \in A$ pridjeljujemo ili pridružujemo određen skup; ovaj skup u zavisnosti od elementa x odnosno jednočlanog skupa (x) označujemo sa

(2.5.1.1) $$f\,(x).$$

Skup $f\,(x)$ zove se *transformat* (slika) *elementa* x odnosno jednočlanog skupa (x) s obzirom na transformaciju f.

Ako je $S \subseteq A$ proizvoljan dio skupa A, tada s obzirom na osnovnu atomističku identitetu

$$S = \bigcup_x (x), \quad (x \in S),$$

možemo staviti

(2.5.1.2) $$f\,S = f\,(S) = f\,(\bigcup_{x \in S} (x)\,) = \bigcup_{x \in S} f\,(x)$$

propisujući time operatoru f komutativnost s operatorom koji iskazuje udruživanje elemenata (atoma). Time svakom nepraznom (punom) dijelu X skupa A pripada određen skup

$$f\,X \quad \text{odn.} \quad f\,(X)$$

koji se zove *slika ili (transformat) skupa* X s obzirom na preslikavanje f. Specijalno je time određen skup

(2.5.1.3) $$f\,A \quad \text{odn.} \quad f\,(A) = \bigcup_{x \in A} f\,(x),$$

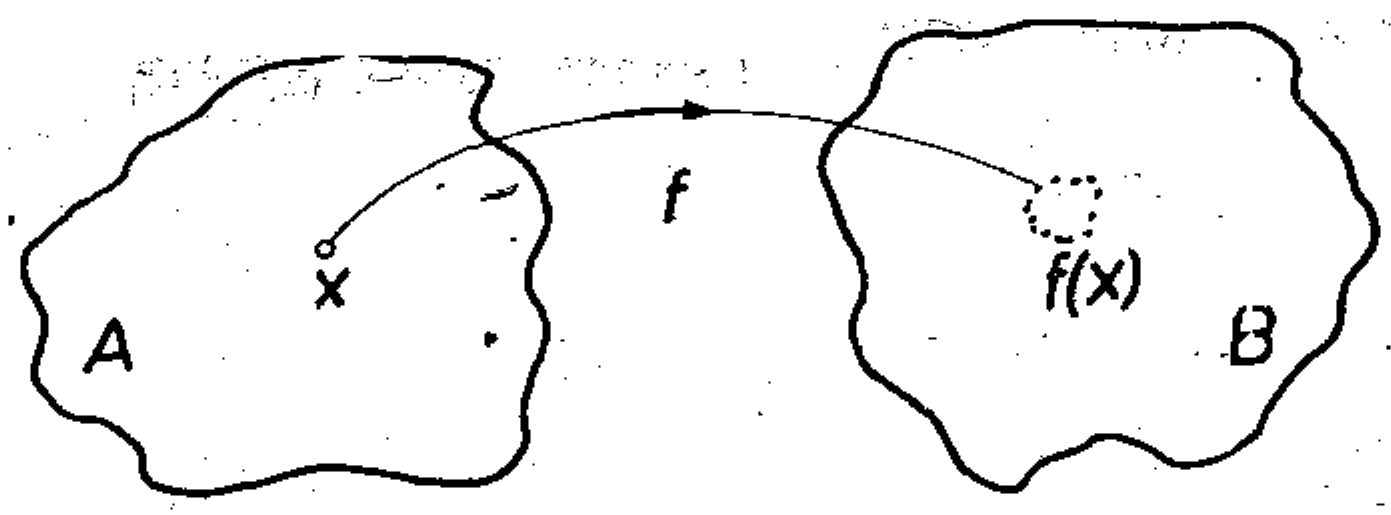
Transformaciju f možemo i *proširiti* tako da stavimo

(2.5.1.4) $$f\,v = v$$

gdje je v prazan skup.

Time je svakom (pa i praznom) dijelu X skupa A određen njegov transformat $f\,X$. Ako su A i B dva skupa, a f takvo preslikavanje skupa A, da iz $x \in A$ slijedi $f\,(x) \subseteq B$, onda se kaže, da f *preslikava skup* A *u skup* B; također se kaže da *argument* ili *nezavisna varijabla* funkcije f leži u A i da *vrijednost funkcije leži* u B. Ako f preslikava A u B, bit će $f\,(A) \subseteq B$.

[1]) Sjetimo se da (x) ili $\{\,x\,\}$ znači skup kojemu je x jedini element.



Sl. 2.5.1. Operator (funkcija) f prevodi elemenat $x \in A$ u skup $f(x) \subseteq B$.

Naravno, da ne mora biti $f(A) = B$. Ako je i $f(A) = B$ (a ne samo $f(A) \subseteq B$), možemo reći da f *preslikava čitav A na čitav B*. Preslikavanje f skupa A u skup B možemo shematski predočiti kao na slici 2.5.1

Množinu svih preslikavanja skupa A na skup B možemo označiti sa

(2.5.1.5) $$B(A) \quad \text{odn.} \quad A \to B.$$

Prva nas oznaka podsjeća na uobičajeno označivanje proizvoljna preslikavanja $b(a)$, $(a \in A)$ skupa A na B. Druga oznaka ima da nam shematski prikaže da se na neki način polazi od A i dolazi u B.

Teorem 2.5.1.1. (Monotono preslikavanje) *Ako je f ma kakvo preslikavanje skupa A, tada*

$$\text{iz} \quad X \subset Y \subset A \quad \text{slijedi}$$

$$f X \subseteq f Y \subseteq f A.$$

Dokaz je očigledan.

Primjedba 2.5.1.1. U oznaci fA nema između f i A nikakvog znaka. Može se reći, da fA nastaje zahvatom (primjenom) operatora f na A i to s lijeve strane.

Preslikavanje f skupa A je *jednoznačno*, ako je za svaki element $x \in A$ skup $f(x)$ jednočlan. Ako je preslikavanje f skupa A u skup B jednoznačno, tada je zgodno za svaki $x \in A$ jednočlani skup $f(x)$ smatrati *elementom skupa B* i dopustiti dakle oznaku $f(x) \in B$.

Veli se, da je preslikavanje *višeznačno*, ako se njime bar jedan element prevodi u skup od 2 ili više elemenata.

Ako je $f(x) = v =$ prazan skup za svaki $x \in A$, možemo reći da tada f nije preslikavanje skupa A.

Preslikavanje skupa A na skup realnih (kompleksnih) brojeva zove se *realna (kompleksna)* funkcija.

Identično preslikavanje skupa A na sama sebe t. j. preslikavanje f za koje je $f(x) = x$ za svaki $x \in A$ javlja se naročito često.

Množinu svih jednoznačnih preslikavanja skupa A na skup B možemo označiti sa

(2.5.1.6) $$B_1(A) \quad \text{odn.} \quad A \xrightarrow{1} B$$

Primjer 2.5.1.1. Transformacija $\frac{1}{n}$ definirana u skupu $N = \{1, 2, \ldots n, \ldots\}$ svih prirodnih brojeva prevodi skup N u skup $\frac{1}{N} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots \frac{1}{n} \ldots\}$.

Primjer 2.5.1.2. Ako je C linearni kontinuum (= skup svih realnih brojeva), tada je sinus određena realna jednoznačna funkcija u C, pa je kako znamo

$$\sin C = \bigcup_{x \in C} \sin x = \text{skup svih brojeva } -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Primjer 2.5.1.3. *(Konstante)* Konstante u skupu A jesu preslikavanja f skupa A kod kojih je svakom $x \in A$ pridružen jedan te isti skup. Tako na pr. konstanta 3 jest preslikavanje f skupa A kod kojega je $f(x) = 3$, $(x \in A)$.

Primjer 2.5.1.4 *(Uređen par)*. Svako jednoznačno preslikavanje dvočlanog skupa $\{1, 2\}$ (u skup B) zove se uređen par (elemenata skupa B). Ako uređen par f označimo eksplicite sa

$$f(1), f(2) \quad \text{ili} \quad (f(1), f(2)),$$

onda se na pr. množina svih uređenih pari iz skupa $\{3, 4, 5\}$ sastoji od ovih elemenata:

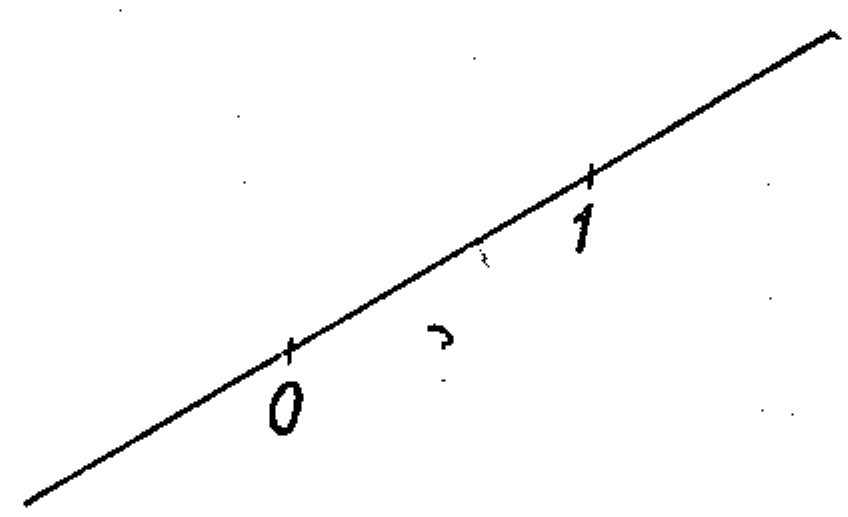
$$\begin{array}{lll} (3,\ 3); & (4,\ 3); & (5,\ 3); \\ (3,\ 4); & (4,\ 4); & (5,\ 4); \\ (3,\ 5); & (4,\ 5); & (5,\ 5). \end{array}$$

Tako na pr. $(4, 3)$ je transformacija (uređen par) f za koju je

$$f(1) = 4, \quad f(2) = 3.$$

Svako komadanje pravca p na dvije polovine: lijevu L i desnu D jest određena transformacija f skupa $\{1, 2\}$ u skup p, naime ono preslikavanje za koje je

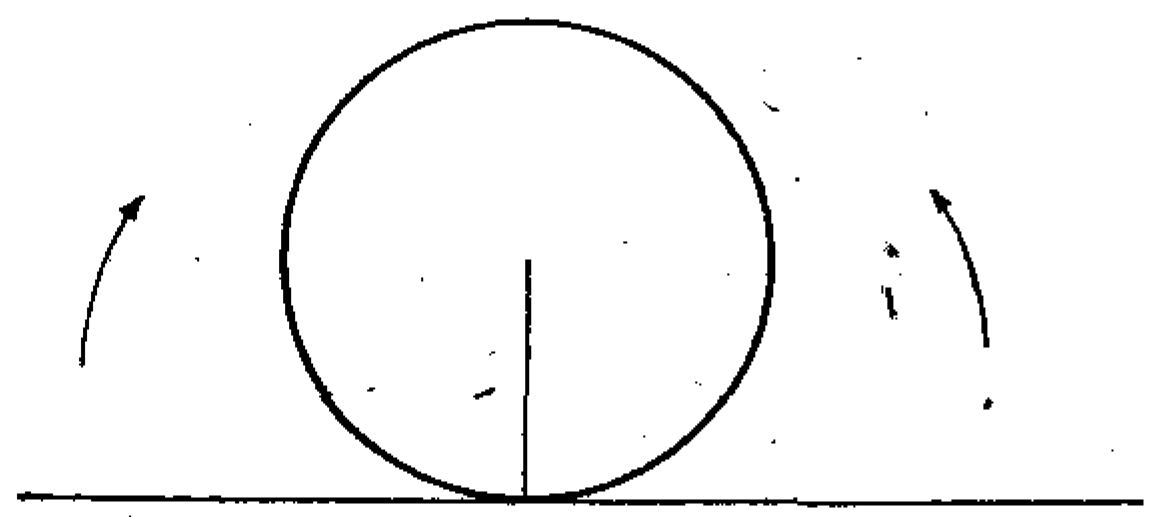
$$f(1) = L, \quad f(2) = D.$$



Sl. 2.5.1.2. Smještanjem brojeva 0 i 1 na pravac moguće je na taj pravac smjestiti sve realne brojeve.

Primjer 2.5.1.5. *(Brojevni pravac kao preslikavanje)*. Od osnovnih preslikavanja navedimo ono koje je u vezi sa t. zv. *brojevnom ili koordinatnom osi (pravcem)*. To je ma kakav pravac na kojem su istaknute dvije točke, pa je jednoj od njih pridružen jedan realan broj (obično 0), a drugoj od njih drugi realan broj (obično 1). Time je pravac *orijentiran* (uređen) i to tako da je smjer od točke imena 0 prema točki imena 1 pozitivan, a obrnut smjer negativan. Dužina od 0 do 1 služi kao ***jedinica za mjerenje*** po promatranom pravcu. Time brojevni pravac shvaćen kao preslikavanje omogućuje da svakoj točki T pravca pripada jedan jedini broj x — t. zv. ***apscisa točke*** T i to na način, da je apscisa točke T broj (a ne dužina) koji pokazuje, koliko se puta jedinična dužina od 0 do 1 nalazi u dužini OT; taj je broj $= 0$ za $T = 0$, a pozitivan (negativan) ako T leži u pozitivnoj (negativnoj) poluosi [1]. I obrnuto: svakom realnom broju x pripada jedna jedina točka pravca, ***nazovimo je točkom imena x*** ili ***točkom x***, kojoj je taj broj apscisa.

Prema tome, pod brojevnim pravcem razumijevamo ne samo goli pravac nego čitav proces (radnju) međusobnog povezivanja — i to na gornji način — realnih brojeva s jedne strane i točaka golog pravca sa druge strane.



Sl. 2.5.1 3.
Namatanje brojevnog pravca na kružnicu.

P r i m j e r 2 5.1.6. *Brojevna (trigonometrijska) kružnica.* Ako nam je zadana kružnica, pa ako sagradimo brojevni pravac sa radiusom kružnice kao jedinicom za mjerenje i taj pravac zamislimo namotan na tu kružnicu (gl. sl. 2.5.1.3), dospjet će time svi realni brojevi na kružnicu, koja tako postaje nosiocem svih realnih brojeva. Svaki realan broj leži u posve određenoj točki kružnice.

Naravno, brojevi koji se razlikuju za cjelobrojni opseg kružnice dospjet će u jednu te istu točku kružnice. Takovo pridruživanje realnih brojeva i točaka kružnice zove se *brojevnom kružnicom.* Prema tome, brojevna kružnica nije samo puka kružnica nego određeno preslikavanje skupa realnih brojeva na kružnicu.

P r i m j e r 2.5.1.7. *Dirichletova funkcija* χ je takvo preslikavanje linearnog kontinuma koje svakom racionalnom broju pridružuje broj 1, a svakom iracionalnom broju broj 0. Dakle je

$$\chi(C) = \{0, 1\}.$$

---

[1]) Točkom imena 0 raspada se čitav pravac u tri dijela: točka 0 i preostale dvije polovine; ona polovina u kojoj leži (ne leži) točka imena 1 zove se *pozitivna (negativna) poluos.*

Može se pokazati[1] da je za svaki realni broj x:

$$\chi(x) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} (\cos m!\,\pi x)^{2n}$$

Primjer 2.5.1.8. Ako f označuje prelaz od neke materijalne točke na njenu sliku u ravnom ogledalu, onda je $f(T)$ ogledalna slika tijela T.

§ 2.5.1.1. *Pojam komplementa.* Ako je S neki skup, onda transformacija

(2.5.1.1.1) $$C(X) = S \setminus X, \ (X \subseteq S)$$

prevodi skup $P(S)$ svih $X \subseteq S$ u sama sebe. Ta transformacija $C(X)$ ($C(X)$ se još naziva ***komplementom*** skupa X s obzirom na njegovu nadmnožinu S), dosta se često upotrebljava i ima nekoliko jednostavnih svojstava kao na pr.

(2.5.1.1.2) $$S \setminus (S \setminus X) = X \quad \text{t. j.} \quad C(C(X)) = X$$

(2.5.1.1.3) Ako je $X \subseteq Y \subseteq S$, onda je $S \setminus X \supseteq S \setminus Y$ t. j.

$$C(X) \supseteq C(Y) \quad \text{ako je } X \subseteq Y$$

(2.5.1.1.4) $$S \setminus (X \cup Y) = (S \setminus X) \cap (S \setminus Y) \quad \text{t j.}$$

$$C(X \cup Y) = C(X) \cap C(Y) \quad \text{ili}$$

riječima: komplement unije jest presjek komplemenata sumanada. Isto tako

(2.5.1.1.5) $$S \setminus (X \cap Y) = (S \setminus X) \cup (S \setminus Y) \quad \text{t.j.}$$

$$C(X \cap Y) = C(X) \cup C(Y)$$

t. j. komplement presjeka jest unija komplemenata pojedinih faktora.

Dokažimo na pr. formulu (2.5.1.1.4) čak i u općenitoj formulaciji

(2.5.1.1.6) $$C(\bigcup_X X) = \bigcap_X C(X),$$

---

[1]) Pokažimo naime da je $\chi(x) = 0$ za iracionalan x, dok je $\chi(x) = 1$ za svaki racionalni broj x. Najprije, neka je x racionalan dakle $x = \frac{p}{q}$, gdje su p i q cijeli brojevi, k tome $q > 0$. Za $m > q$ bit će

$$m!\,x\pi = 1.2.3.\ldots q\cdot(q+1)\ldots m\cdot\frac{p}{q}\cdot\pi = k(m)\cdot\pi, \quad \text{gdje je } k(m) \text{ cio broj,}$$

pa je zato $\cos m!\,\pi x = \cos k(m)\pi = (-1)^{k(m)}$ dakle je $\cos(m!\,\pi x)^{2n} = (-1)^{2nk(m)} = 1$ za sve $m > q$ i sve n; odatle neposredno izlazi da je $\chi\left(\frac{p}{q}\right) = 1$. Ako je pak x iracionalan broj, tada su za svaki prirodni broj m iracionalni i brojevi $m!\,x$, kao i brojevi $h(m) = m!\,x - [m!\,x]$, gdje kao obično $[a]$ označuje najveći cijeli broj $\leqslant a$; specijalno je dakle $h(m)$, za svaki prirodni broj m, iracionalan pravi razlomak t. j. $-1 < \cos h(m) < 1$ dakle $(\cos h(m)\pi)^{2n} \to 0$ kad $n \to \infty$, pa bio m ma kakav prirodni broj. No to znači da je tada $\chi(x) = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\{\cos([m!\,x]\pi + h(m)\pi)\}^{2n} = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos h(m)\pi)^{2n} = \lim_{m\to\infty} 0 = 0$.

Jer ako

$$a \in C(\bigcup X),$$

onda to znači, da a nije element nit u jednom X dakle je a sadržan u svima $C(X)$ dakle $a \in \bigcap_X C(X)$.

Obrnuto, ako $a \in \bigcap_X C(X)$, onda $a \in C(X)$ za svaki zadani X dakle a non $\in X$ ni za jedan X dakle a non $\in \bigcup_X X$ dakle $a \in C(\bigcup_X X)$.

Slično se dokazuje i formula (2.5.1.1.5)

Obrasci (2.5.1.1.4) i (2.5.1.1.5) zovu se *De Morganovi obrasci* po istoimenim obrascima iz matematičke logike,

§ 2.5.2. **Identičnost dvaju preslikavanja.** Dva preslikavanja f i g identički su jednaka onda i samo onda, ako su ona definirana na istom skupu A te ako je

$$f(x) = g(x), \quad (x \in A).$$

Primijetimo, da zadnju zagradu

$$(x \in A)$$

treba čitati „za svaki $x \in A$".

Ako su preslikavanja f i g identički jednaka, pišemo

$$f \equiv g;$$

u obratnom slučaju, pišemo $f \not\equiv g$ i kažemo da f nije identički jednako sa g. Na pr. realne funkcije $\sin \pi x$ i $x(x-1)(x-2) \ldots \ldots (x-10)$ definirane u skupu $\{0, 1, 2, \ldots \ldots 10\}$ identički su jednake i podudaraju se sa konstantom 0 u tom skupu.

Uoči, da ima isto toliko identički nejednakih konstanata oznake 1 koliko ima i skupova u tom smislu, da različitim skupovima pripadaju različite konstante 1.

§. 2.5.3. **Slaganje (komponiranje) dvaju ili više preslikavanja (složene funkcije).** Ako je u skupu A definirana funkcija f, a u skupu fA funkcija g, potpuno je time za svaki $x \in A$ određeno značenje skupa

$$gf(x) = \bigcup_y g(y), \quad (y \in f(x));$$

$gf(x)$ je određen dio skupa gfA.

Pridružimo li proizvoljnom $x \in A$ skup $g(fx)$, dobije se time određeno preslikavanje skupa A; to se preslikavanje označuje sa

$$g \cdot f \quad \text{ili} \quad gf \quad \text{ili} \quad (gf);$$

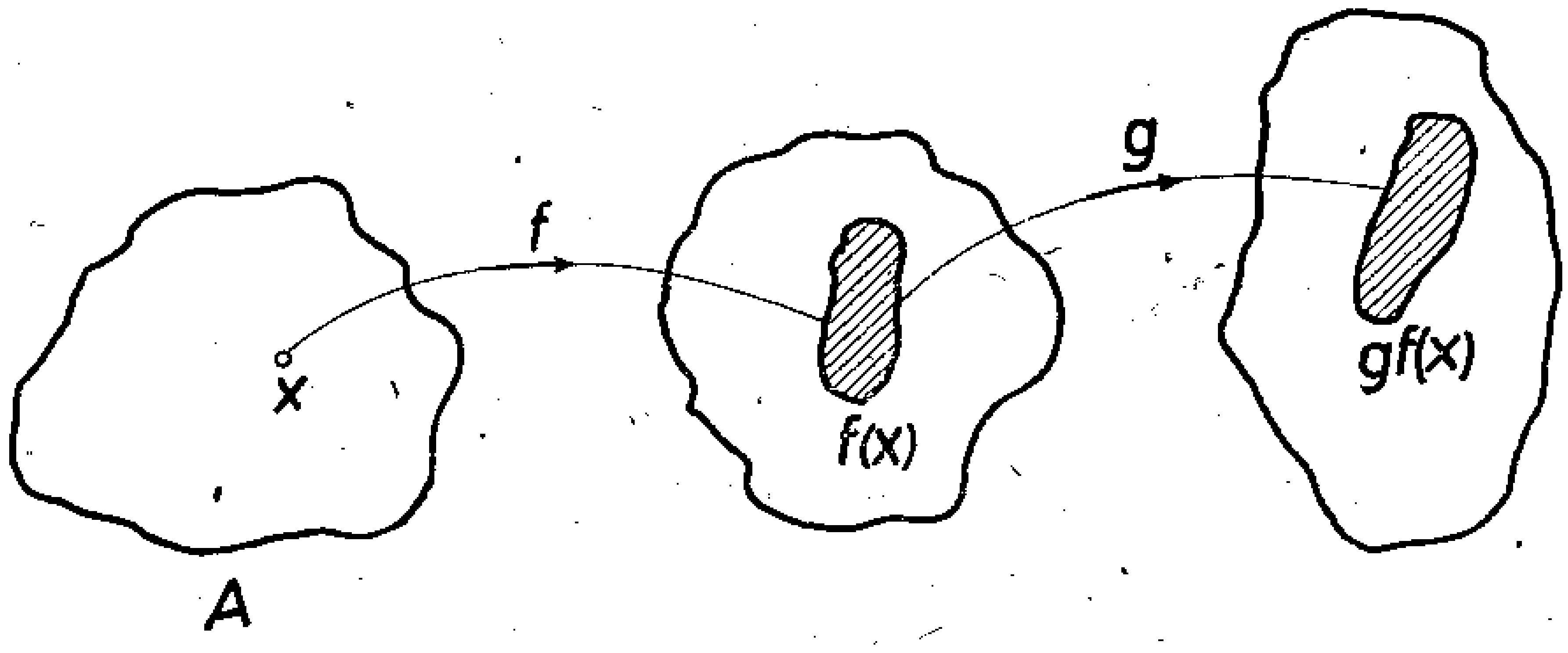
veli se da to preslikavanje nastaje *superponiranjem funkcija f i g* ili bolje reći *uzastopnim izvođenjem transformacije f* pa *transformacije g*. Naravno, da općenito za slaganje funkcija ne važi zakon komutacije;

$$\text{nije vazda } g \cdot f \equiv f \cdot g.$$

Tako na pr. i sin x^2 i $\sin^2 x$ su složene funkcije; prva nastaje slaganjem kvadriranja i sinusa, a druga slaganjem sinusa i kvadriranja. Naravno, da su to različite funkcije.

Za slaganje funkcija važi zakon združivanja (asocijacije).

Tako imamo vrlo dalekosežni

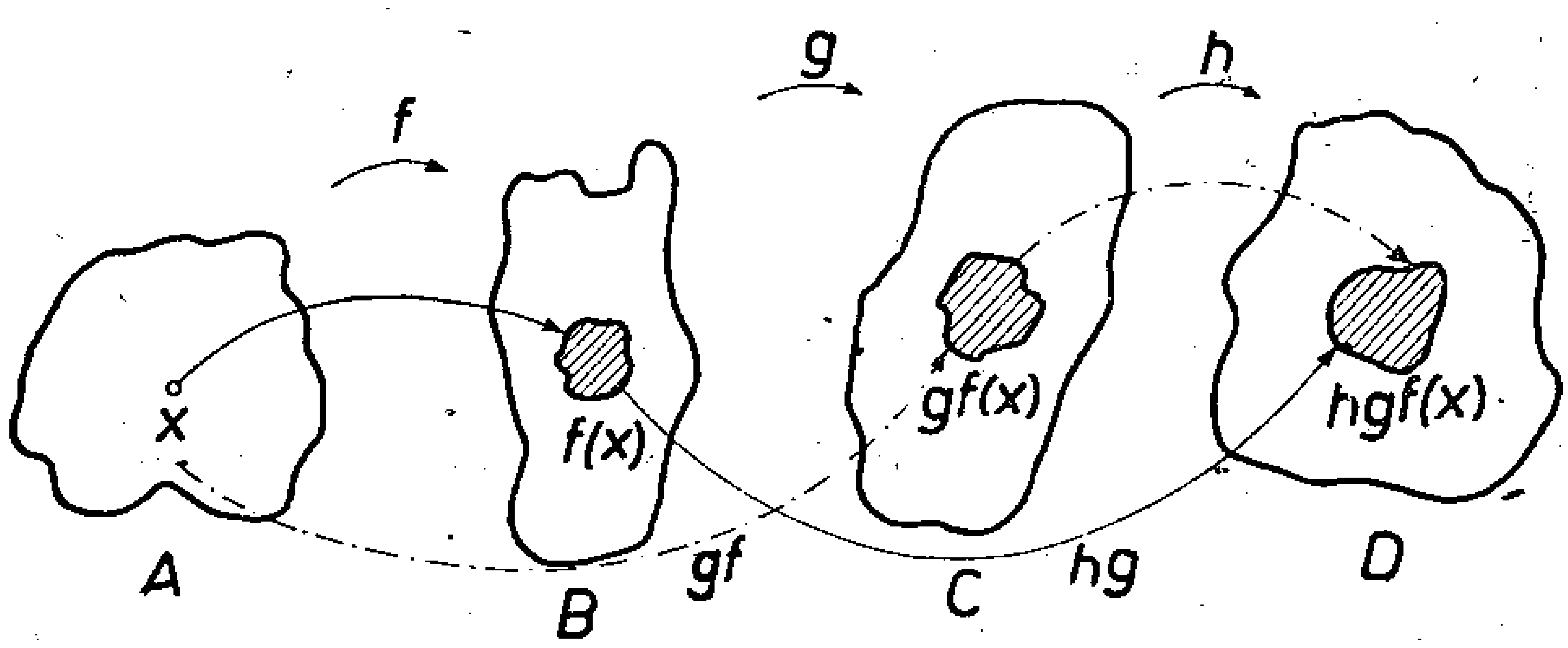


Sl. 2.5.3.1 Transformacija gf prevodi x (preko $f(x)$) u $(gf)(x) = g(f(x))$.

T e o r e m 2.5.3.1. *Ako je* f *izvjesno preslikavanje skupa* A, g *izvjesno preslikavanje skupa* f A, *te* h *izvjesno preslikavanje skupa* g f A, *onda su* h (gf) *i* (hg) f *određena preslikavanja skupa* A; *ta su dva preslikavanja identički jednaka:*

(2.5.3.1) $$h(gf) \equiv (hg)f.$$

Tako dobiveno preslikavanje može se označiti sa hgf ili (hgf). Shematski, sadržaj teorema može se ovako objasniti:



Sl. 2.5.3.2. Do rezultata $hgf(x)$ se dolazi bilo zahvatom operatora h na skup $gf(x)$ bilo zahvatom operatora (hg) na skup $f(x)$.

Po samoj definiciji, svodi se identitet (2.5.3.1) na skupovnu jednakost

(2.5.3.2) $$h(gf(x)) = (hg)f(x), \ (x \in A).$$

Da tu jednakost dokažemo za svaki $x \in A$, dovoljno je pokazati da u (2.5.3.2) mjesto znaka = može stajati i znak $\subseteq$ i znak $\supseteq$.

Dokažimo najprije da u (2.5.3.2) mjesto $=$ može stajati znak $\subseteq$ t. j. da iz

(2.5.3.3) $\quad (t) \subseteq h\big(g\, f\,(x)\big)$ slijedi $(t) \subseteq (hg)\, f\,(x).$

No, $\quad (t) \subseteq h\Big(g\big(f\,(x)\big)\Big) = \cup\, h\,(z), \big(z \in g\, f\,(x)\big)$

povlači da postoji bar jedan

(2.5.3.4) $\quad (z_0) \subseteq g\, f\,(x).$

sa svojstvom

(2.5.3.5) $\quad (t) \subseteq h\,(z_0).$

Analogno iz (2.5.3.4) proizlazi da postoji bar jedan element

(2.5.3.6) $\quad y_0 \in f\,(x)$ sa svojstvom

(2.5.3.7) $\quad z_0 \in g\,(y_0).$

No iz $(y_0) \subseteq f\,(x)$ slijedi $g\,(y_0) \subseteq g\, f\,(x)$, a odatle dalje primjenom operatora hg slijeva:

$$(h\, g)\,(y_0) \subseteq (h\, g)\,\big(f\,(x)\big) \text{ t. j.}$$

(2.5.3.8) $\quad h\big(g\,(y_0)\big) \subseteq (h\, g)\big(f\,(x)\big)$, što znači, da je

$$\bigcup_z h\,(z) \subseteq (h\, g)\big(f\,(x)\big), \big(z \in g\,(y_0)\big);$$

specijalno, za $z = z_0$ izlazi odatle:

$h\,(z_0) \subseteq (h\, g)\, f\,(x)$ što sa (2.5.3.5) daje traženu relaciju (2.5.3.3).

Dokažimo još da u (2.5.3.2) važi znak $\supseteq$ t. j. da iz

(2.5.3.9) $\quad (t) \subseteq (hg)\, f\,(x)$ slijedi $(t) \subseteq h\big(g\, f\,(x)\big).$

No $(t) \subseteq (hg)\, f\,(x)$ znači da postoji bar jedan elemenat $y_0 \in f\,(x)$ tako da bude

(2.5.3.10) $\quad (t) \in (hg)\,(y_0)$ t. j. $(t) \in h\big(g\,(y_0)\big).$

Odatle proizlazi da postoji bar jedan $z_0 \in g\,(y_0)$ sa svojstvom

$$(t) \subseteq h\,(z_0).$$

No iz $(y_0) \subseteq f\,(x)$ slijedi $g\,(y_0) \subseteq g\big(f\,(x)\big)$ i dalje odatle primjenom operatora h slijedi:

$$h\big(g\,(y_0)\big) \subseteq h\Big(g\big(f\,(x)\big)\Big).$$

No, prvi član u toj relaciji znači isto što i $(h\, g)\,(y_0)$, tako da imamo

$$(h\, g)\,(y_0) \subseteq h\Big(g\big(f\,(x)\big)\Big).$$

A to zbog $t \in (h\, g)\,(y_0)$ daje traženu relaciju (2.5.3.9). Time je teorem dokazan.

§ 2.5.4. Obrnuto (inverzno, recipročno) preslikavanje s obzirom na preslikavanje f.

Ako je f izvjesno preslikavanje skupa A, onda je time određen i skup $f(A) = \bigcup_x f(x)$, $(x \in A)$.

To znači, da iz

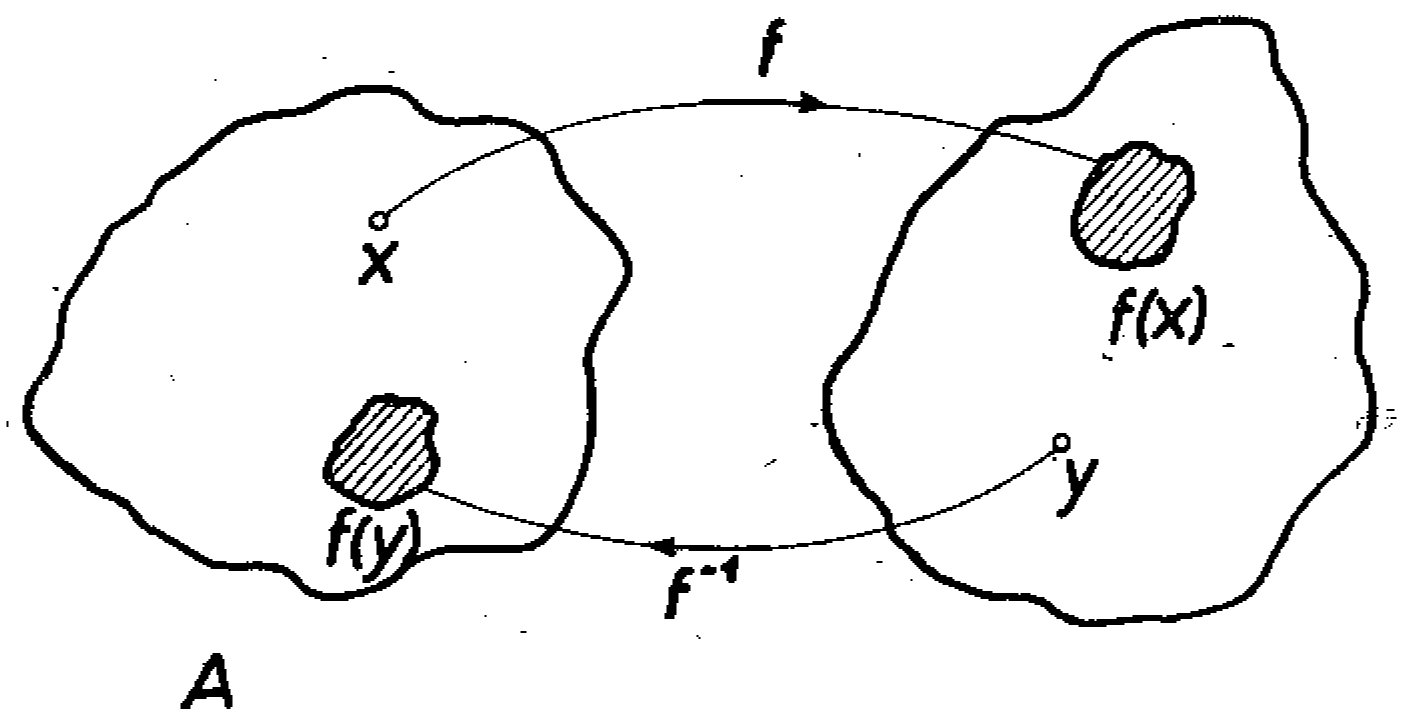
$$y \in f(A) \quad \text{t. j. iz} \quad y \in \bigcup_{x \in A} f(x)$$

proizlazi da postoji bar jedan element $x \in A$ za koji je

$$y \in f(x).$$

Skup svih elemenata $x \in A$ za koje je ispunjena relacija $y \in f(x)$ potpuno je određen, i u svojoj zavisnosti od elementa $y \in f(A)$ i funkcije f označuje se sa

(2.5.4.1) $$f^{-1}(y).$$



Sl. 2.5.4.1 Preslikavanje f i f^{-1}.

Na taj način svakom $y \in f(A)$ pripada potpuno određen pun skup $f^{-1}(y) \subseteq A$. Tako dobiveno preslikavanje skupa $f(A)$ u skup A (zapravo na čitav skup A) zove se *obrnutim (inverznim* ili *recipročnim)* preslikavanjem s obzirom na preslikavanje f i označuje se često sa

(2.5.4.2) $$f^{-1}.$$

Zapamtimo, da se nezavisna varijabla operatora f^{-1} kreće u skupu $f(A)$, t. j. u f — *transformatu skupa* A.

Kazat ćemo da je preslikavanje *jednolisno*, ako je njegovo obrnuto preslikavanje *jednoznačno.*

Prema tome, za svaki skup $Y \subseteq fA$ važi

$$f^{-1} Y \subseteq A.$$

Specijalno je naravno

$$f^{-1}(fA) = A.$$

Lema 2.5.4.1. *Ako je f ma kakvo preslikavanje skupa A, tada za svaki $x \in A$ važi*

(2.5.4.3) $$f^{-1} f(x) \ni x.$$

Iz $v \subset X \subseteq A$ *slijedi* $f^{-1} f X \supseteq X$.

Stvarno, za svaki $y \in f(x)$, znači $f^{-1}(y)$ skup svih $\xi \in A$ za koje $f(\xi) \ni y$; specijalno dakle iz $y \in f(x)$ proizlazi $f^{-1}(y) \ni x$; tim više sadrži unija svih $f^{-1}(y)$, $(y \in f(x))$ element x. Preostali dio leme proizlazi dalje neposredno.

Lema 2.5.4 2 . $(f^{-1})^{-1} \equiv f$ t. j. *recipročna transformacija recipročne transformacije zadane transformacije f podudara se sa f.*

Radi se o tome da pokažemo da važi

$$(f^{-1})^{-1}(x) = f(x), \quad (x \in A) \tag{2.5.4.4}$$

t. j. da tu važi i znak $\subseteq$ i znak $\supseteq$.

Najprije, neka je $y \in (f^{-1})^{-1}(x)$; onda to znači, po definiciji obrnute funkcije od f^{-1}, da je

$$f^{-1}(y) \ni x \quad \text{t. j.} \quad x \in f^{-1}(y) \quad \text{odakle dalje} \quad f(x) \ni y.$$

To znači da u (2.5.4.4) može mjesto $=$ stajati $\subseteq$. Još treba dokazati da u (2.5.4.4) može stajati i znak $\supseteq$ t. j. da iz $y \in f(x)$ slijedi $y \in (f^{-1})^{-1}(x)$. No iz $y \in f(x)$ slijedi $f^{-1}(y) \ni x$, a odatle dalje, po definiciji funkcije $(f^{-1})^{-1}$ kao recipročne od f^{-1}, slijedi upravo tražena relacija $(f^{-1})^{-1}(x) \ni y$.

§ 2.5.5. **Jednoznačne i obostrano jednoznačne transformacije. Funkcionalni skupovi.** Ako je specijalno za svaki $x \in A$ vrijednost $f(x)$ jedan potpuno određen element nekog skupa B, kaže se, da je funkcija f *jednoznačna*; inače je transformacija višeznačna. Označimo li za svaki $y \in fA$ sa $f^{-1}(y)$ skup svih $x \in A$ za koje je $f(x) \ni y$, tad je f^{-1} određena transformacija skupa $f(A)$ natrag u polazni skup A pa se veli da je transformacija f^{-1} *inverzna* ili *recipročna* prema transformaciji f. Transformacija f je *jednolisna*, ako je inverzna transformacija f^{-1} jednoznačna.

Obostrano jednoznačne transformacije jesu one koje su jednoznačne i jednolisne t. j koje su jednoznačne isto kao i njihove inverzne transformacije. One su od osobite važnosti.

Skup A je *ekvivalentan* sa skupom B, ako postoji obostrano jednoznačno preslikavanje f tako da bude $fA = B$.

Tako na pr. skup N svih prirodnih brojeva ekvivalentan je sa skupom $10N$ svih dekadskih jedinica, kao što to pokazuje preslikavanje $10x$, $(x \in N)$.

Množinu svih jednoznačnih preslikavanja skupa A u skup B možemo označiti sa

$$A \xrightarrow{1} B \quad \text{ili} \quad B_1(A). \tag{2.5.5.1}$$

Prva oznaka kazuje, da se A prevodi u B, a druga nas potsjeća na uobičajenu oznaku pojedine funkcije

$$b(a), \quad (a \in A)$$

naime na način, da se najprije napiše znak koji nas podsjeća nazavisnu varijablu. a onda znak koji nas podsjeća na nezavisnu varijablu.

Proces kojim se od skupova A i B izvodi funkcionalni skup $B_1(A)$ igra naročito važnu ulogu — to je nepresušivi izvor sve novih i novih skupova. Tako na pr. ako je N skup svih prirodnih brojeva, predstavlja tada

(2.5.5.2) $$\{0, 1\}_1(N)$$

skup svih jednoznačnih preslikavanja skupa N na skup $\{0, 1\}$ — takozvani skup beskonačnih *dijadskih nizova.*

Teorem 2.5.5.1. *Sva obostrano jednoznačna preslikavanja čitava skupa A na čitava sama sebe obrazuju grupu s obzirom na slaganje, (komponiranje) preslikavanja.*

Označimo li kratkoće radi, sa $((A))$ skup svih obostrano jednoznačnih preslikavania f skupa A sa svojstvom $fA = A$[1]), onda teorem kaže, da iz $f, g \in ((A))$ slijedi $f\cdot g \in ((A))$, da važi zakon asocijacije (isp. teorem 2.5.3.1), da u $((A))$ postoji element 1 (identična transformacija) za koju je $1\cdot f = f\cdot 1$, te da za ma koje $f, g \in ((A))$ „linearne" jednakosti $ft = g$ te $yf = g$ imaju u $((A))$ rješenje t odn. y.

Teorem proizlazi uglavnom iz teorema (2.5.3.1).

Najprije, iz $f \in ((A))$ i $g \in ((A))$ proizlazi $fg \in ((A))$, jer je očigledno da je i složena funkcija fg obostrano jednoznačna u skupu A i da je $fg(A) = A$.

Nadalje iz $f \in ((A))$ proizlazi i $f^{-1} \in ((A))$, pa zato, ako su f i g elementi množine $((A))$, jednakost $ft = g$ postaje „množeći" je slijeva sa f^{-1}: $f^{-1}(ft) = f^{-1}g$ odn. po zakonu asocijacije $(f^{-1}f)t = f^{-1}g$, što zbog $f^{-1}f \equiv$ identična transformacija, postaje $t = f^{-1}g$. T. j. ona transformacija t za koju je $ft = g$ glasi $t \equiv f^{-1}g$.

Analogno, iz $yf = g$ proizlazi $y = gf^{-1}$.

Naravno, da u općem slučaju $f^{-1}g$ i gf^{-1} nisu identički jednake.

Tako na pr. za skup $\{1, 2, 3\}$ sastoji se množina $((\{1, 2, 3\}))$ od svih „permutacija" skupa $\{1, 2, 3\}$. Ako je f jedna permutacija na pr. $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, bilježi se ona i ovako $f(1), f(2), f(3)$ odnosno 3, 1, 2; inverzna permutacija f^{-1} glasi $f^{-1}(3) = 1$, $f^{-1}(1) = 2$, $f^{-1}(2) = 3$ dakle 2, 3, 1.

Ako je g permutacija 2, 1, 3 t. j. $g(1) = 2$, $g(2) = 1$, $g(3) = 3$, riješimo linearnu jednakost $ft = g$. Izlazi $t = f^{-1}g$.

To znači da je $t(1) = (f^{-1}g)(1) = f^{-1}(g(1)) = f^{-1}(2) = 3$,

$$t(2) = f^{-1}(g(2)) = f^{-1}(1) = 2,$$
$$t(3) = f^{-1}(g(3)) = f^{-1}(3) = 1$$

t. j. t je permutacija 3, 2, 1.

[1]) Veli se također da je f *permutacija* skupa A (permutacija skupa A dolazi još i u drugom smislu, naime u smislu, da se svako uređenje skupa A zove njegovom permutacijom).

To znači, da za permutacije (3, 1, 2), t te (2, 1, 3) iz (3, 1, 2) $t = 2, 1, 3$ izlazi $t = 3, 2, 1$.

Teorem 2.5.5.2 *Obostrano jednoznačne transformacije su komutativne sa operatorima $\cup$ i $\cap$.*

Ako je obostrano jednoznačna funkcija f definirana u skupu M ako je nadalje S ma kakav skup dijelova $X \subseteq M$, dakle $S \subseteq P(M)$ onda je

$$f\left(\bigcup_X X\right) = \bigcup_X f(X), \quad (X \in S) \tag{2.5.5.3}$$

$$f\left(\bigcap_X X\right) = \bigcap_X f(X), \quad (X \in S) \tag{2.5.5.4}$$

t.j. *funkcionalni obostrano jednoznačni operator* f je komutativan sa operatorima $\cup$ i $\cap$.

Dokaz. Najprije u (2.5.5.3) važi znak $\subseteq$ jer ako je $a \in \bigcup_X X$, onda postoji bar jedan $X_0 \in S$ sa svojstvom $a \in X_0$ dakle $f(a) \subseteq f(X_0)$ odakle $f(a) \in \bigcup_X f(X)$, $(X \in S)$.

Nadalje se može u (2.5.5.3) mjesto znaka $=$ staviti znak $\supseteq$.

Stvarno, neka je $b \in \cup f(X)$; onda, po definiciji unije, postoji bar jedan $f(X)$, recimo $f(X_1)$ tako, da je $b \in f(X_1)$ dakle $f^{-1}(b) \in X_1$ i pogotovo $f^{-1}(b) \in \bigcup_X X$ a odatle

$$b \ni f\left(\bigcup_X X\right)$$

Tim je jednakost (2.5.5.3) potpuno dokazana.

Dokažimo na analogan način obrazac (2.5.5.4).

Neka $a \in \bigcap_X X$ t.j. $a \in X$ za svaki $X \in S$ dakle $f(a) \in f(X)$ za svaki $X \in S$, a to upravo znači $f(a) \in \cap f(X)$; obrnuto: neka $b \in f(X)$, $(X \in S)$ dakle $f^{-1}(b) \in X$ za svaki X dakle

$$f^{-1}(b) \in \bigcap_X X, \quad (X \in S) \quad \text{t.j.} \quad b \in f\left(\bigcap_X X\right).$$

§ 2.5.6. NEKOJE JEDNOZNAČNE FUNKCIJE. KOMBINIRANI PRODUKT SKUPOVA.

§ 2.5.6.1 Pojam uređena para. Slog (kompleks).

Uređen par elemenata skupa A jest svako jednoznačno preslikavanje f dvočlana skupa $\{1, 2\}$ na skup A; prema tome, $f(1)$, $f(2)$ su elementi skupa X, a zovu se *prva i druga koordinata* ili također *prva i druga projekcija* uređena para f. Uređen par f u zavisnosti od svojih koordinata $f(1)$, $f(2)$ može se označivati sa

$$(f(1), f(2)) \text{ odnosno } f(1), f(2) \tag{2.5.6.1.1}$$

Tako na pr. (2, 7), (7, 2) jesu dva uređena para prirodnih brojeva i to dva različita para;[1] jedan od tih parova jest obrat drugoga, pa se i piše[2]

$$(2, 7)^{-1} = (7, 2).$$

Općenito, ako je (a, b) uređen par, tada se njegov obrat $(a, b)^{-1}$ definira kao par (b, a) i stavlja

(2.5.6.1.2) $$(a,b)^{-1} = (b, a).$$

Očigledno,

(2.5.6.1.3) $$((a, b)^{-1})^{-1} = (a, b).$$

Slog ili kompleks ili varijacija n-og reda sa elementima uzetima iz množine M jest svako jednoznačno preslikavanje skupa $\{1, 2 \ldots, n\}$ prvih n prirodnih brojeva u množinu M.

Beskonačni nizovi su jednoznačna preslikavanja niza $1, 2 \ldots n, n+1, \ldots$ svih prirodnih brojeva.

Beskonačne biprogresije jesu jednoznačne transformacije skupa svih cijelih brojeva

$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ Na pr. množina (isp. (2.5.5.2))

(2.5.6.1.4) $$\{0, 1\}^{(\{1, 2, 3, \ldots\})}$$

sastavljena je od svih mogućih beskonačnih nizova kojima su članovi 0 ili 1; recimo niz 1,0,1,0,1,0, . . . jest jedan element u (2.5.6.1.4).

§ 2.5.6.2. **Kombinirani produkt** dvaju skupova X, Y jest skup

(2.5.6.2.1) $$X \times Y$$

svih jednoznačnih preslikavanja f skupa $\{1, 2\}$ tako da bude

$$f(1) \in X, \quad f(2) \in Y.$$

Prema tome, produkt $X \times Y$ je sastavljen od svih uređenih pari

(2.5.6.2.2) $$(x, y), \ (x \in X, \ y \in Y).$$

Napose produkt

(2.5.6.2.3) $$X \times X,$$

skupa sa samim sobom zove se *kvadrat kojemu je* X *jedna stranica*.

Skup svih

(2.5.6.2.4) $$(x, x), \quad (x \in X)$$

zove se *dijagonala kvadrata* $X \times X$.

Na pr. $\{1,2\} \times \{1,2,3\} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}$.

---

[1]) Uoči naprotiv, da je skup $\{2, 7\}$ identičan sa skupom $\{7, 2\}$.

[2]) Neka čitaoca ne smeta što tu eksponent -1 ne mora imati istu ulogu kao u oznaci inverznih funkcija.

Lema 2.5.6.2.1. *Ako su X, Y bilo kakvi skupovi, tada skupovi*

$$\{1\} \times X, \quad \{2\} \times Y$$

nemaju ni jedne točke zajedničke.

Lema 2.5.6.2.2. Jednakost

$$X \times Y = Y \times X$$

valja onda i samo onda, ako je $X = Y$.

Za bilo koji skup $S \subseteq X \times Y$ određen je skup

(2.5.6.2.5) $\qquad S^{-1}$ svih $(x, y)^{-1}$,

kad (x, y) prolazi skupom S; prema tome S^{-1} jest skup svih

$$(y, x), \; ((x, y) \in S).$$

Naravno, da iz $S \subseteq X \times Y$ slijedi $S^{-1} \subseteq Y \times X$ pa dakle ne mora biti $S^{-1} \subseteq X \times Y$.

Za svaki $S \subseteq A \times B$ i svaki $x \in A$ potpuno je određen skup

$$S\,(x)$$

svih $y \in B$ za koje je $(x, y) \in S$; prema tome odnosi

$$(x, y) \in S, \quad y \in S\,(x)$$

međusobno su ekvivalentni. Drugim riječima $S\,(x)$ je skup svih točaka iz S kojima je prva projekcija (koordinata) jednaka x.

§ 2.5.6.3. **Slaganje uređenih parova.**

Zgodno je uređen par (x, y) interpretirati i kao preslikavanje elementa x u elemenat y; prema tome slažući preslikavanja (x, y) i (y, z) dobivamo preslikavanje (x, z) t. j. x preko y prelazi u z. To simbolički naznačujemo

(2.5.6.3.1) $\begin{cases} (y, z) \cdot (x, y) = (x, z) \\ \text{ili naprosto} \\ (y, z)\;(x, y) = (x, z). \end{cases}$

To je u saglasnosti s onim što smo § 2.5.3 rekli o slaganju preslikavanja.

Općenito, ako su A, B dva skupa uređenih pari, tada ćemo pod slaganjem skupova A i B razumijevati obrazovanje skupa

(2.5.6.3.2) $\qquad B \cdot A$ odnosno BA

svih uređenih pari

$$b \cdot a, \; (a \in A;\; b \in B).^{1)}$$

---

1) Naravno, ako druga koordinata para a nije isto što i prva koordinata para b, onda se ba definira kao pust par t. j. nema ga!

Prema tome BA je skup svih uređenih pari (x, y) sa svojstvom da za svaki takav (x, y) postoji bar jedan z tako da bude

$$(x, z) \in A, \quad (z, y) \in B.$$

Drugim riječima, relacija $(x, y) \in BA$ znači isto što i činjenica da postoji bar jedna točka z sa svojstvom

$$(x, z) \in A, \quad (z, y) \in B.$$

Napose, za svaki skup A uređenih pari potpuno je definiran skup

$$AA$$

uređenih pari (x, y) sa svojstvom da postoji bar jedan z tako da bude

$$(x, z). \ (z, x) \in A.$$

Analogno se definira kombinirani produkt

$$X \times Y \times Z \tag{2.5.6.3.3}$$

skupova X, Y, Z; to je skup svih jednoznačnih preslikavanja f tročlana skupa $\{1, 2, 3\}$ tako da bude $f(1) \in X$, $f(2) \in Y$, $f(3) \in Z$.

Posve analogno definira se kombinirani produkt

(2.5.6.3.4) $Y_1 \times Y_2 \times \ldots . \times Y_n$ skupova $Y_1 \ldots . . Y_n$.

§ 2.5.6.4. **Pojam karakteristične funkcije.** Ako je S ma kakav skup, onda je

$$\{0, 1\}_1 \ (S) \tag{2.5.6.4.1}$$

množina svih funkcija $f(x)$, $(x \in S)$ sa vrijednostima $f(x) = 0$ ili 1.

Napose, za svaki $X \subseteq S$ potpuno je određena t. zv. *karakteristična funkcija skupa* X s obzirom na skup S kao cjelinu, simbolički

$$\varphi_X \tag{2.5.6.4.2}$$

koja poprima vrijednost 1 u svakoj točki skupa X, a vrijednost 0 za svaku točku od S koja ne pripada množini X. Sada vidimo da je Dirichletova funkcija χ (primjer 2.5.1.7) identična sa karakterističnom funkcijom skupa racionalnih brojeva shvaćenim kao dio množine svih realnih brojeva.

Prema tome, za svaki $X \subseteq S$ funkcija φ_X je potpuno određena i naravno, ona je element funkcionalne množine $\{0, 1\}_1$ (S). Na taj način svakom $X \in P(S)$[1] pripada potpuno određen $\varphi_X \in \{0, 1\}_1(S)$,

Tako imamo transformaciju

$$\varphi_X, (X \in P(S)) \tag{2.5.6.4.3}$$

skupa $P(S)$ u skup $\{0, 1\}_1 (S)$.

Dokažimo, da je funkcija (2.5.6.4.3) obostrano jednoznačna i da prevodi skup $P(S)$ na čitav $\{0,1\}_1(S)$. Već smo dokazali, da je funkcija (2.5.6.4.3) jednoznačna. Dokažimo da je ona i recipročno jednoznačna

[1]) Sjeti se da $X \varepsilon P(S)$ znači isto što i $X \subseteq S$.

t. j. da relacije $X \subseteq S$, $X' \subseteq S$, $X \neq X'$ povlače $\varphi_X \neq \varphi_{X'}$. No $X \neq X'$ znači, da se skupovi X, X' ne podudaraju, pa neka je a jedna točka iz $(X \setminus X') \cup (X' \setminus X)$ na pr. $a \in (X \setminus X')$; to onda znači, da u toj točki funkcija φ_X prima vrijednost 1, dok funkcija $\varphi_{X'}$ tu prima vrijednost 0, dakle je

$$\varphi_X(a) = 1, \ \varphi_{X'}(a) = 0 \quad \text{odatle} \quad \varphi_X \neq \varphi_{X'}.$$

Ostaje još da dokažemo, da tako dobiven transformat množine $P(S)$ iscrpljuje množinu $\{0, 1\}_1(S)$. Stvarno, ako je f ma koji član iz posljednjeg skupa, dakle jedna funkcija u S sa vrijednostima 0 ili 1, pa ako sa X označimo skup svih $x \in S$ za koje je $f(x) = 1$, onda je $X \subseteq S$ dakle $X \in P(S)$ i odmah se vidi, da se pripadna karakteristična funkcija φ_X podudara sa funkcijom f. Specijalno vidimo, da su prazni skup v kao element u $P(S)$ i konstantna funkcija $f(x) = 0$ za $x \in S$ međusobno na taj način pridruženi. To je jedan od razloga, da se pust skup v uzima kao efektivan atom u partitivnom skupu $P(S)$ svakog skupa S.

§ 2.5.7. POJAM DVOČLANE (BINARNE) RELACIJE.

Često se govori o relacijama (odnosima), a da se ne da njihova definicija. Zadovoljimo se da damo definiciju dvočlanih (binarnih) relacija *u zadanu skupu*. Definicija će mnogoga iznenaditi.

No uočimo li, da na pr. jednakosti $a = b$ brojeva a i b možemo pridružiti uređen par (a, b) odnosno jednoznačno preslikavanje $f(1) = a$, $f(2) = b$ skupa $\{1, 2\}$ na brojeve, onda će nam slijedeća definicija postati mnogo jasnijom.

Definicija 2.5.7.1. Pod binarnom (dvočlanom) [1]) relacijom u zadanu skupu S razumijevamo svaku množinu

$$M \tag{2.5.7.1.}$$

jednoznačnih preslikavanja *dvočlanog* skupa $\{1, 2\}$ na skup S [2]); tada se govori naprosto o množini M kao binarnoj relaciji u skupu S.

Ako je f proizvoljan element od M, dakle i

$$f \in S_1\{1, 2\}, \tag{2.5.7.2}$$

onda to znači, da su $f(1)$, $f(2)$ određeni elementi skupa S, pa se kaže, da je element $f(1)$ skupa S u promatranoj relaciji s elementom $f(2)$ skupa S; pišemo li odnos $f \in M$ kao uređen par

$$(f(1), f(2)) \quad \text{odn.} \quad f(1), f(2), \tag{2.5.7.3}$$

onda izreka: *element* $x \in S$ *je u relaciji* M *sa elementom* $y \in S$ znači isto što i relacija

---

[1]) Tročlana (ternarna) i višečlana, opća, relacija definiraju se potpuno analogno. Pod općom relacijom u skupu S može se razumijevati proizvoljan dio skupa $S_1(B)$ svih jednoznačnih preslikavanja nekog skupa B na skup S. Teorija općih relacija dosad je dosta slabo obrađena.

[2]) Primijetimo, da mjesto $\{1, 2\}$ može tu stajati koji god dvočlan skup.

(2.5.7.4) $(x, y) \in M$;

i obrnuto.

Obično se mjesto $(x, y) \in M$ uvodi kakav drugi način pisanja, recimo:

(2.5.7.5) $x\,0\,y$, $x\,\mu\,y$ ili $x\,\varrho\,y$ i t. d. ili konkretnije $x \leqslant y$ ili $x = y$ ili $x < y$ ili $x - y$ i sl.

Vrlo često dolaze relacije oblika

$$=, <, \leq$$

Specijalan je slučaj, kad je množina $M \subseteq S \times S$ prazna; tada se kaže, da nijedan element iz S nije u promatranoj relaciji s nijednim elementom iz S.

Primjer 2.5.7.1 Ako je C skup svih realnih brojeva, pa ako sa α označimo skup svih uređenih pari (a, b) za koje su a, b, $\log_b a$ određeni realni brojevi, onda je α određena dvočlana relacija u C; na pr. broj 9 jest u toj relaciji spram broja -3 t. j. $(9, -3) \in \alpha$; naprotiv, nije $(-3, 9) \in \alpha$ naime $\log_9 -3$ nije realan broj.

Definicija 2.5.7.2 Binarna relacija $M \subseteq S \times S$ u skupu S jest:
refleksivna (povratna), ako je $(a, a) \in M$ za svaki $a \in S$;
simetrična (obrtna) ako iz $(a, b) \in M$ slijedi $(b, a) \in M$;
tranzitivna (prelazna), ako iz (x, y), $(y, z) \in M$ slijedi $(x, z) \in M$.

Ako činjenicu $(x, y) \in M$ iskazujemo riječima da je x u relaciji ϱ sa y i pišemo

(2.5.7.6) $x\,\varrho\,y$,

onda je binarna operacija ϱ u skupu S:
povratna, ako iz $x \in S$ slijedi $x\,\varrho\,x$;
simetrična, ako iz $x, y \in S$ i $x\,\varrho\,y$ slijedi $y\,\varrho\,x$;
prelazna, ako iz $x, y, z \in S$, $x\,\varrho\,y\,\varrho\,z$ slijedi $x\,\varrho\,z$.

Tako na pr. dvočlana relacija $\subseteq$ je u svakoj množini skupova povratna i prelazna; relacija $\subset$ je prelazna; relacija $\equiv$ među skupovima je povratna, obrtna i prelazna. Relacija $\equiv$ te $\subseteq$ dva su tipa relacija koje se vrlo često javljaju, prva kao relacija ekvivalencije, a druga kao relacija uređenja (upoređivanja).

§ 2.6. ZADACI.

§ 2.6.1 Neka je $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 7\}$; nađi množine:

$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, $A \times B$, $A_1(B)$, $B_1(A)$, $A(B)$, $B(A)$, $P(A)$, $P(B)$, $P(A \times B)$, $P(A \times B)(A)$, $A_1(P(A \times B))$ i t.d.

§ 2.6.2 Ako su A i B dva disjunktna skupa sadržana u skupu S, onda je $S \setminus (A \cup B) = (S \setminus A) \setminus B = (S \setminus B) \setminus A$, pa se taj skup označuje sa $S \setminus A \setminus B$. Poopći!

§ 2.6.3 Ako množina X ima 6 odn. 100 članova, dokaži, da partitivni skup $P(X)$ ima 2^6 odn. 2^{100} članova.

§ 2.6.4 Ako množina M ima m članova, a N n članova, gdje su m i n dva prirodna broja, dokaži da a) množina $M \times N$ im $m \cdot n$ članova; b) množina $M_1{'}N)$ ima m^n članova. Konkretiziraj na pr. $m = 5$, $n = 4$; c) množina $M \cup N$ može imati najviše $m + n$ članova; ima ih $m + n$, kad su M i N bez zajedničkih članova.

§ 2.6.5 Neka je X određen brojni pravac; označimo li za neku točku $A \in X$ sa $K(A; r)$ nutrinu kugle sa središtem u A i sa radiusom r, (dakle skup svih točaka B sa svojstvom $\overline{AB} < r$), što ispunjava unija $\bigcup\limits_A K(A; r)$, kad A prolazi: a) svim točkama brojnog pravca; b) svim točkama sa racionalnom apscisom, c) svim točkama kojima je apscisa paran broj.

§ 2.6.6 Isti zadatak kao u § 2.6.5 samo, što se mjesto kugle upotrebljava potpun krug (t. j. i nutrina kruga i periferija kruga), kojemu dijametar leži na zadanom pravcu; neka svi krugovi leže u istoj ravnini.

§ 2.6.7 Ako su a, b određeni brojevi, da li se izrazi $a - b$, $\frac{a}{b}$, a^b, $\log_b a$, $a + i\,b$, i t. d. mogu shvatiti kao funkcije u dvočlanom skupu $\{0, 1\}$?

§ 2.6.8 Promatraj skup D svih diferencija d pozitivnih realnih (prirodnih, racionalnih, kompleksnih) brojeva; shvatimo li diferenciju $d = a - b$ kao realnu funkciju

$$d(1) = a, \ d(2) = b$$

definiranu u skupu $\{1, 2\}$, kako bi za d, d' iz D definirali $d + d'$, $d - d'$ te $d \cdot d'$ kao elemente skupa D?

Rez. $(d + d')(n) = d(n) + d'(n)$, $(n = 1, 2)$

$(d - d')(1) = d(1) + d'(2)$; $(d - d')(2) = d(2) + d'(1)$;

$(d\,d')(1) = d(1)\,d'(1) + d(2)\,d'(2)$; $(dd')(2) = d(1)\,d'(2) + d(2)\,d'(1)$.

§ 2.6.9 Odrezak $S_0 = [0, 1]$ svih realnih brojeva $0 \leqslant x \leqslant 1$ razdijeli na tri jednaka odreska; pa označi sa S_1 množinu točaka, što se dobije kad se iz S_0 izbaci njegova druga trećina; dobivši tako dva nova odreska, učini s njima istu operaciju što smo je učinili sa S_0, i označimo sa S_2 dobivenu množinu (ona je unija od 2^2 segmenta). Slično se dobije S_3, pa S_4 i t d. Odredi S_n i sumu $m(S_n)$ svih dužina njegovih odrezaka. Da li $m(S_n) \to 0$ kad $n \to \infty$?

§ 2.6.10 Ako su $X, Y \ldots$ dijelovi skupa S pa ako sa φ_X označimo karakterističnu funkciju od X t. j. funkciju koja je jednaka 1 u svakoj točki iz X a jednaka 0 za svaku točku iz $S \setminus X$, dokaži ove obrasce: a) $\varphi_{S \setminus X} = 1 - \varphi_X$; b) $\varphi_{X \cap Y} = \varphi_X \cdot \varphi_Y$; c) $\varphi_{X \cup Y} = 1 - (1 - \varphi_X)(1 - \varphi_Y)$; d) $\varphi_{X \setminus Y} = \varphi_X (1 - \varphi_Y)$.

§ 2.6.11. Ako za niz skupova $X_1, X_2, X_3, \ldots$ iz S označimo sa[1]

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} X_n \text{ odnosno sa } \underline{\lim_{n\to\infty}} X_n$$

množinu sastavljenu od svih točaka $X \in S$ sa svojstvom da se x pojavljuje u bezbroj mnogo članova zadana niza,[2] odnosno u gotovo svima članovima niza[3], dokaži, da je: *a)* $\underline{\lim_{n\to\infty}} X_n \subseteq \overline{\lim_{n\to\infty}} X_n$ (u slučaju jednakosti označuje se taj skup sa $\lim_{n\to\infty} X_n$ i zove se *limes* ili *granični skup niza* množina $X_1, X_2, \ldots$ pa se veli da niz X_n konvergira prema $\lim_{n\to\infty} X_n$), b) Ako niz $X_1, X_2, \ldots$ konvergira prema X, onda $\varphi_{X_n} \to \varphi_X$. c) Ako niz $X_1, X_2 \ldots$ ne konvergira, onda niz funkcija $\varphi_{X_1}, \varphi_{X_2}, \ldots$ divergira u svakoj točki skupa $\overline{\lim} X_n \setminus \underline{\lim_{n\to\infty}} X_n$; d) $\underline{\lim_{n\to\infty}} \varphi_{X_n} = \varphi_{\underline{\lim} X_n}$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} \varphi_{X_n} = \varphi_{\overline{\lim_{n\to\infty}} X_n}$.

§ 2.6.12. Promatraj neko tijelo T i pravac p; da li je ortogonalno projiciranje tijela T na p određena funkcija?

§ 2.6.13. Promatraj množine M, $M \times M \times M = M_1 \{1, 2, 3\}$; i općenito množinu M_1 $(\{1, 2, 3, \ldots n\})$; kako se njeni elementi nazivaju u kombinatorici? Konkretiziraj na pr. $M = \{a, b, c\}$, $n = 5$.

§ 2.6.14. Funkcija od dvije varijable $f(x,y)$ sa $x \in M$, $y \in M$ jest funkcija elementa, mjesta, (jedne varijable) u skupu $M \times M$. Slično funkcija (transformacija) $f(x_1\, x_2, x_3)$ od tri varijable x_1, x_2, x_3 koje protječu skupovima X_1, X_2, X_3 jest funkcija mjesta u množini $X_1 \times X_2 \times X_3$. Generaliziraj na n varijabla.

§ 2.6.15. Uobičajenu definiciju neke grupe G prevedi na jezik transformacija skupa $G \times G$ na skup G (isp. dokaz teor. 2.5.5.1).

§ 2.6.16. Dokaži da je preslikavanje koje elementu $(a, b) \in A \times B$ pridjeljuje element $(a,b)^{-1} = (b,a)$, obostrano jednoznačno.

§ 2.6.17. Neka je A bilo koji skup, a $\triangle$ dijagonala kvadrata $A \times A$; dokaži da za svaki skup $S \subseteq A \times A$ vrijedi;

$$S \triangle = \triangle S = S \text{ (isp. § 2.5.6.3).}$$

§ 2.6.18. Ako su A, B skupovi uređenih parova, dokaži da je

$$(BA)^{-1} = A^{-1} B^{-1}; \text{ konkretiziraj.}$$

---

[1]) Za niz realnih brojeva $a_1, a_2, \ldots$ operatori $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ (t. zv. limes superior) i $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ (limes inferior) definiraju se u nauci o nizovima (isp. kasnije § 10.2.4).

[2]) To ne isključuje slučaj da se x i ne pojavljuje u bezbroj slučajeva, na pr. za sve X_{2n+1}.

[3]) To znači da se x ne pojavljuje u tek konačno mnogo skupova X_n ili se pojavljuje u svima.

OSVRT NA GLAVU I.

Uoči, da je pojam množine i elementa relativan. Jedan te isti predmet na pr. skup $\{1, 2, 3\}$ brojeva 1, 2, 3 skup je s obzirom na njegove atome 1, 2. 3, ali on sam je element (atom) s obzirom na skup S svih trojki prirodnih brojeva < 100, a ovaj opet je element sistema M od skupa: svih dvojki, skupa svih trojki, skupa svih petorki prirodnih brojeva < 100.[1]

Uoči, da kod svake operacije imamo polazne skupove i skupove koji su rezultat operacije *(početna i završna faza procesa).*

Uoči, kako atomi (elementi) rezultata mogu biti različiti od atoma polaznih skupova. Ispitaj ponovno, kako se kod svakog pojedinog procesa (operacije) atomi rezultata grade pomoću atoma polaznih skupova.

Dobro shvati opći pojam preslikavanja (funkcije, transformacije, procesa), jer je on od osnovne važnosti za sva dalja razmatranja.

---

[1]) Živo si predoči, da se skup M sastoji od tri elementa!

GLAVA DRUGA

OBOSTRANO JEDNOZNAČNA PRESLIKAVANJA SKUPOVA (KARDINALNI BROJEVI)

Atomistička struktura skupova (obrazovanje skupa od svojih elemenata) omogućit će nam da uvedemo kardinalne brojeve kao rezultat obostrano jednoznačnih preslikavanja skupova. Na taj način teorija kardinalnih brojeva bit će istraživanje obostrano jednoznačnih preslikavanja skupova.

Gledan u svijetlu obostrano jednoznačnih preslikavanja, svaki skup će postati *kardinalnim brojem,* pri čemu naravno ne ćemo razlikovati dva skupa koja su *ekvivalentna* (v. § 2.5.5), u smislu, da se jedan može preslikati na drugi i to na obostrano jednoznačan način. Pomoću dvostruke strijelice $\longleftrightarrow$ možemo shematski prikazivati proizvoljnu obostrano jednoznačnu transformaciju čitava jednog skupa na čitav drugi skup. Ako skup S budemo shvatali kao kardinalni broj, označivat ćemo ga, jasnoće radi, sa

$$k\,S \text{ odn. } k\,(S) \text{ odn. } p\,S \text{ odn. } p\,(S)$$

i tada zvati *kardinalnim brojem* S (odn. *potencijom skupa* S). Ako je skup A ekvivalentan sa skupom B, možemo to simbolički izraziti sa

$$k\,A = k\,B$$ [1])

čime hoćemo da naznačimo, da dva ekvivalentna skupa, shvaćena kao kardinalni brojevi, znače jedno te isto.

U ovoj ćemo se glavi na osnovu obostrano jednoznačnih preslikavanja upoznati sa kardinalnim brojevima, bilo konačnim t. j. prirodnim bilo beskonačnim (transfinitnim). Specijalno ćemo dokazati osnovnu činjenicu: ako je n ma koji prirodan broj, onda postoji i broj $n+1$, on je također prirodan broj i važi $n < n+1$.

---

[1]) Cantor mjesto $k\,A$ *piše* $\overline{\overline{A}}$, čime hoće da naznači, da se do $\overline{\overline{A}}$ dolazi dvostrukim apstrahiranjem: ne gleda se niti od čega je skup A sastavljen niti u kakvom su međusobnom poretku elementi skupa A. Mi ipak pišemo $k\,A$ mjesto $\overline{\overline{A}}$, jer na osnovu raznih drugih preslikavanja mogu skupovi postati nosiocima raznovrsnih drugih „brojeva" (a ne samo kardinalnih), na pr. rednih brojeva, topoloških brojeva (tipova) i t. d., pa će se onda oznaka tih „brojeva" dobiti tako da se mjesto k stavi drugo kakvo odgovarajuće slovo. A k tome, danas se pod $\overline{\overline{A}}$ obično misli dvaput iterirana operacija — dakle $\overline{\overline{A}} = \overline{B}$, gdje je $B = \overline{A}$; pritom $\overline{A}$ ima svoje određeno značenje (prostornost skupa A; v. § 24 i 26.1).

Ta je činjenica temelj sveukupne matematike. Plodnost matematike i razne poteškoće u matematici, specijalno u pogledu neizmjernoga, vuku svoj korijen u pomenutoj činjenici.

Dat ćemo solidnu teoriju prirodnih brojeva.

Uvjerit ćemo se da ima nejednakih beskonačnih brojeva.

Vidjet ćemo, da za transfinitne brojeve k važi $k + 1 = k$. Upoznat ćemo se pobliže sa dva istaknuta transfinitna broja: jedan od njih, a ili $\aleph_0$, kazuje koliko ima prirodnih brojeva, a drugi, c koliko ima realnih brojeva. Dokazat ćemo nešto što izgleda paradoksalno: čitava se ravnina pa i čitavi prostor od 3, 4 i t. d. dimenzija može preslikati, obostrano jednoznačno, na ma kako mali odrezak realnih brojeva ili čak na transcendentne brojeve sadržane između ma koja dva različita realna broja.

Činjenica, da tako opsežni skupovi, kao na pr. čitav prostor od 3 dimenzije, ima tek potenciju c i činjenica da je $\aleph_0 < c$ navela su bila Cantora na hipotezu da osim $\aleph_0$ i c niti nema drugih transfinitnih kardinalnih brojeva u prostoru (naprotiv, skup svih realnih funkcija ima potenciju još veću i to 2^c). Taj problem nazvan *problemom kontinuuma* još nije potpuno riješen, usprkos nastojanju i najvećih matematičara da ga riješe.

§ 3. NĚKOLIKO SVOJSTAVA OBOSTRANO JEDNOZNAČNIH PRESLIKAVANJA.

§ 3.1. Svojstva znaka $\equiv$ među kardinalnim brojevima.

Znak $\equiv$ uveden po propisu da $kA \equiv kB$[1] znači isto što i činjenica da je skup A ekvivalentan sa skupom B, ima ova tri važna svojstva:

(3.1.1) Relacija $\equiv$ jest povratna (refleksivna) t. j.
$$kA \equiv kA \quad \text{za svaku množinu } A;$$

(3.1.2) Relacija $\equiv$ jest simetrična t. j.
$$\text{iz } kA \equiv kB \text{ slijedi } kB \equiv kA;$$

(3.1.3) Relacija $\equiv$ jest prelazna (tranzitivna) t. j.
$$\text{iz } kA \equiv kB \text{ i } kB \equiv kC \text{ slijedi } kA \equiv kC.$$

Da se dokaže prvo svojstvo, dovoljno je promatrati identičku transformaciju $f(x) = x$, $(x \in A)$ skupa A.

---

[1] Mjesto kA često se piše pA *(potencija skupa)*; također se susreće oznaka $|A|$ i $\bar{A}$ za istu stvar.

Da se dokaže drugo svojstvo, dovoljno je promatrati inverznu funkciju f^{-1} u B, ako je f funkcija koja, po hipotezi $kA = kB$, preslikava A na čitav B.

Konačno, da dokažemo treće svojstvo, dovoljno je promatrati *sastavljenu* transformaciju gf pa da se vidi, da ona prevodi A u C ako f prevodi A u B a g prevodi B u C.

§ 3.2. **Znak $\leqslant$ među kardinalnim brojevima i njegova svojstva.** Prirodno je kazati da skup X ima *manje ili jednako mnogo članova* kao i skup Y i pisati

(3.2.1) $$kX \leqslant kY \text{ odnosno } k(X) \leqslant k(Y) \text{ ili}$$
$$kY \geqslant kX \text{ odnosno } k(Y) \geqslant k(X)$$

ako je skup X ekvivalentan sa dijelom skupa Y t. j. ako je moguće u skupu X definirati obostrano jednoznačnu funkciju

(3.2.2) $$f(x), \quad (x \in X)$$

sa vrijednostima u Y tako da je

$$fX \subseteq Y.$$

Drugim riječima, oznaka $kX \leqslant kY$ je prikrata za činjenicu, da se cijeli skup X može dovesti u prekrivanje sa dijelom skupa Y ili specijalno sa cijelim skupom Y. Oznaka $kX \leqslant kY$ može se čitati ovako:

kardinalni broj od $\begin{cases} X \\ Y \end{cases}$ *je* $\begin{cases} \textit{manji} \\ \textit{veći} \end{cases}$ *ili jednak kardinalnom broju od* $\begin{cases} Y \\ X \end{cases}$

Neposredno se vidi ovo:

(3.2.3) Za svaku množinu X imamo $kX \leqslant kX$ (promatraj identičnu transformaciju u X);

(3.2.4) Ako je $kX \leqslant kY$, $kY \leqslant kZ$, onda je $kX \leqslant kZ$.

Jer, ako je $f(X) \subseteq Y$, $g(Y) \subseteq Z$ i pritom f i g obostrano jednoznačne transformacije, onda je i sastavljena funkcija $g(f)$ obostrano jednoznačna i naravno $g(fX) \subseteq Z$.

§ 3. 3. **Jednako, veće, manje i neuporedljivo.** Logički se mogu zamisliti najviše ova četiri slučaja;

P r v i s l u č a j: $kX \leqslant kY$ i istodobno $kY \leqslant kX$[1];

D r u g i s l u č a j: $kX \leqslant kY$ ali nije $kY \leqslant kX$[2];

T r e ć i s l u č a j: nije $kX \leqslant kY$ ali jest $kY \leqslant kX$;

Č e t v r t i s l u č a j: niti je $kX \leqslant kY$ niti $kY \leqslant kX$[3].

---

1) na pr. očigledno je $k\{1, 2, 3, \ldots\} \geqslant k\{2, 4, 6, \ldots\}$ kao što to pokazuje identička transformacija skupa parnih brojeva; no važi i obrat t. j. $k\{1, 2, 3, \ldots\} \leqslant k\{2, 4, 6 \ldots\}$ kao što se vidi, ako svakom članu iz prvog skupa, pridijelimo član $4n$ u drugom skupu.

2) Takav je slučaj, ako je X sastavljen od brojeva 1,2 a Y od brojeva 4,6,7.

3) Pitanje, da li je ovaj slučaj moguć, obradit ćemo kasnije (problem dobrog uređivanja skupova i problem trihotomije).

Ta 4 slučaja možemo po redu predočiti simbolički ovako:

(3.3.1) $kX = kY$; riječima: kX ravno ili jednako kY;

(3.3.2) $kX < kY$ ili $kY > kX$; kX manje od kY ili kY veće od kX;

(3.3.3) $kX > kY$ ili $kY < kX$;

(3.3.4) $kX \parallel kY$; riječima: kX neuporedljivo sa kY.

Lako se vidi, da iz $kX < kY \leqslant kZ$ slijedi ne samo $kX \leqslant kZ$ nego i $kX < kZ$.

Kad bi naime bilo $kZ \leqslant kX$, to bi značilo, da postoji funkcija $h(z)$ $(z \in Z)$ sa $h(Z) \subseteq X$; no, ako je g jedna funkcija u Y koja prevodi Y u Z, onda bi funkcija $h(g(y)), (y \in Y)$ bila definirana u Y i prevodila ga u X dakle $h(g(y)) \subseteq X$ t. j. $kY \leqslant kX$, protivno pretpostavci $kY > kX$ koja isključuje takovu transformaciju skupa Y u X.

Analogno, iz $kX \leqslant kY < kZ$ slijedi $kX < kZ$.

§ 3.4. Cantorova nejednakost. Obrazovanje sve većih i većih potencija.

§ 3.4.1. Jedno od osnovnih otkrića, što ih je Cantor učinio jest

Teorem. 3.4.1.1. *Skup* C *svih realnih brojeva ne može se obostrano jednoznačno preslikati na skup* N *svih prirodnih brojeva, pa je dakle*

(3.4.1.1) $$kN < kC^{1)}$$

Kad bi naime bilo $kC \leqslant kN$, onda bi se na N mogao preslikati tim prije skup S svih pravih razlomaka. No relacija $kS \leqslant kN$ značila bi, da se svi pravi razlomci mogu prikazati kao *članovi niza*

(3.4.1.2) $$x_1, x_2, \ldots x_n, x_{n+1}, \ldots$$

tako da bi *svaki* pravi razlomak bio posve određen član u nizu (3.4.1.2). No svaki pravi razlomak ima jedan i samo jedan decimalni prikaz[2]) oblika

(3.4.1.3) $$o, a_1\, a_2\, a_3 \ldots .$$

gdje su $a_1, a_2, \ldots .$ cifre $0, 1, 2, \ldots . 9$ i to sa *beskonačno mnogo* cifara $\neq 0$; ako u nizu $a_1, a_2, \ldots a_n, a_{n+1}, \ldots$ poslije izvjesnog indek-

---

[1]) Očigledno je naime $kN \leqslant kC$, kao što to dokazuje identička transformacija $f(x) = x, (x \in N)$ skupa N.

[2]) Dokaz se može provesti i bez upotrebe pojma niza na pr. tako, da prirodnom broju n dodijelimo karakterističnu funkciju φ_n koja u n prima vrijednost 1 dok izvan n prima vijednost o pa da se onda poslužimo lemom 3.4.2.1.

sa dolaze same nule, treba sve te nule zamijeniti sa 9, a posljednju znamenku koja je $\neq 0$ umanjiti za 1. Time se dobije željeno predočenje zadana broja. Na pr. 0,0507000 . . . = 0,05069.

Neka je dakle

$$(3.4.1.4)\quad \begin{cases} x_1 = 0,\ a_{11}\ a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \ldots \\ x_2 = 0,\ a_{21}\ a_{22} \ldots\ldots a_{2n} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

obrazujmo broj

$$(3.4.1.5)\qquad x = 0,\ a_1\ a_2\ a_3 \ldots$$

i to tako da za svaki cijeli broj n bude

$$(3.4.1.6)\qquad a_n \neq a_{nn},\quad 0 \neq a_n \neq 9.$$

Naravno, taj broj x nije jednak x_k ni za jedan $k \in N$ jer bi to značilo, da se brojevi x i x_k podudaraju u svim decimalnim mjestima, specijalno $a_k = a_{kk}$ protivno uslovu (3.4.1.6).

§ 3.4.2. Gornji dokaz Cantorove nejednakosti (3.4.1.1) može da se preudesi i da se dokaže

Lema 3.4.2.1 *Neka je* S *ma kakav skup* $\neq v$, *a* $S_1 \subseteq S$ *njegov dio; pridijelimo li svakom* $s \in S_1$ *izvjesnu funkciju*

$$(3.4.2.1)\qquad f_s(x),\ (x \in S)$$

definiranu u zadanom skupu S, *a sa vrijednostima* 0 *i* 1, *tada postoji preslikavanje*

$$(3.4.2.2)\qquad f(x),\ (x \in S)$$

definirano u S *a sa vrijednostimà* 0 *i* 1 *i to tako da se nova funkcija (3.4.2.2) ne podudara ni s jednom funkcijom iz (3.4.2.1).*

Stvarno, neka za ma koji $s \in S_1$ bude

$$(3.4.2.3)\qquad f(s) = 0 \text{ ili } 1 \text{ i}$$

$$(3.4.2.4)\qquad f(s) \neq f_s(s)$$

i neka se nadalje funkcija f poništava u $S \setminus S_1$; tada je funkcija (3.4.2.3) jednoznačno određena, a zbog (3.4.2.4), ona je različita od svih zadanih funkcija (3.4.2.1), ma da su joj vrijednosti tek ili 0 ili 1.

Drugim riječima: *neka je zadan izvjestan* $S_1 \subseteq S \neq v$; *ako je za svaki* $s \in S_1$, $f_s \in \{0, 1\}_1 (S)$[1] *onda funkcija* (3.4.2.3) *uz uslov* (3.4.2.4) *potpuno je određen element od* $\{0, 1\}_1$ *S) različit od svih zadanih* f_s, $(s \in S_1)$.

1) Sjetimo se da $\{0, 1\}_1 (S)$ označuje skup svih jednoznačnih preslikavanja skupa S u skup $\{0, 1\}$.

§ 3.4.3. **Cantorova nejednakost.**

Teorem 3.4.3.1 *Za svaki pun skup* S *važi nejednakost*

$$kS < k(\{0, 1\}_1^- (S)).^{1)}$$

Da je $kS \leqslant k\{0, 1\}_1 (S)$, stvar je očigledna, jer je dovoljno svakom $x \in S$ pridružiti onu funkciju iz $Y = \{0, 1\}_1 (S)$ koja je $= 1$ u točki x, dok se poništava u $S \setminus \{x\}$, pa da se vidi, da se time S obostrano jednoznačno preslikava na Y. No obrat $kY \leqslant kS$ nije moguć, jer bi to značilo, da se čitav Y može obostrano jednoznačno preslikati na S, što je nemoguće prema dokazanoj lemi.

§ 3.4.4 **Posljedica.** *Ne postoji skup koji bi imao najveći mogući kardinalni broj.* Jer, bio S ma kakav skup, i $\{0, 1\}_1 (S)$ je određen skup a njegova je potencija prema Cantorovoj nejednakosti $> kS$.

§ 3.4.5. **Jedna jednakost i jedna nejednakost.**

Teorem 3.4.5.1 *Ako je* S *ma kakav neprazan skup, onda partitivni skup* P(S) *svih dijelova od* S (uključivši i prazni skup v) *ima isti kardinalni broj kao množina* $\{0, 1\}_1 (S)$ *svih jednoznačnih preslikavanja skupa* S *u skup* $\{0, 1\}$.

Teorem 3.4.5.2 *Ako je* S *ma kakva množina, tada skup* P(S) *svih dijelova od* S (prazan skup uključivši) *ima veći kardinalni broj od množine* S:

$$kS < k(P(S)) \quad \text{(Cantorova nejednakost).}$$

§ 3.5 **O jednakosti kardinalnih brojeva (teorem o ekvivalenciji) Banachov teorem.**

§ 3.5.1 **Teorem o ekvivalenciji** (teorem 3.5.1.1) Ako su A i B dvije množine, onda nam prikrata

$$kA = kB \tag{3.5.1.1}$$

prema prethodnom kazuje, da je A ekvivalentan sa dijelom skupa B i da je A ekvivalentan sa dijelom skupa X t. j. da postoji obostrano jednoznačna transformacija φ koja A preslikava u B dakle

$$\varphi A \subseteq B \tag{3.5.1.2}$$

i obostrano jednoznačna transformacija ψ koja B preslikava na A dakle

$$\psi B \subseteq A. \tag{3.5.1.3}$$

Dokažimo, što nipošto nije evidentno, da je tada skup A ekvivalentan sa skupom B t. j. da postoji obostrano jednoznačna transformacija

$$f \tag{3.5.1.4}$$

koja preslikava čitav A na čitav B, dakle da bude ne samo

$$fA \subseteq B \quad \text{nego} \quad fA = B \quad \text{i}$$

---

[1]) Vidi napomenu na str. 37.

(3.5.1.5) $$f^{-1} B = A,$$

gdje je f^{-1} recipročna transformacija od A.

To je t. zv. teorem o jednakosti potencija ili teorem o ekvivalenciji.

Važna posljedica. (Teorem 3.5.1.2) Relacija $kA = kB$ *je ekvivalentna s egzistencijom obostrano jednoznačne transformacije* f *sa svojstvom* f(A) = B. (Schröder — Bernstein)[1]

§ 3.5.2. *Banachov teorem.*[2]

Ako su A *i* B *dvije množine, a* φ *i* ψ *obostrano jednoznačne transformacije sa svojstvom*

(3.5.2.1) $$\varphi A \subset B, \ \psi B \subset A,$$

onda postoji rastav skupa A *u dva disjunktna dijela* X_1, X_2*:*

(3.5.2.2) $$A = X_1 \cup X_2, \quad X_1 \cap X_2 = v$$

i rastav skupa B u dva disjunktna dijela Y_1, Y_2:

(3.5.2.3) $$B = Y_1 \cup Y_2, \quad Y_1 \cap Y_2 = v$$

tako da bude

(3.5.2.4) $$\varphi X_1 = Y_1, \quad \psi^{-1} X_2 = Y_2.$$

Dokažimo da je teorem ekvivalencije neposredna posljedica Banachova teorema (dokaz ovoga nalazi se u § 3.5.3).

Najprije, ako u (3.5.1.2) ili (3.5.1.3) stoji bar jedanput znak jednakosti, teorem ekvivalekcije je ispunjen. Ako pak znak = ne stoji niti u (3.5.1.2) niti u (3.5.1.3), tada su ispunjeni uslovi (3.5.2.1) Banachova teorema, pa dakle postoje relacije (3.5.2.2) — (3.5.2.4). Tada transformacija f koja se u X_1 podudara sa φ a u X_2 sa transformacijom ψ^{-1} prevodi na obostrano jednoznačan način skup A na čitav skup B t. j. $f(A) = B$. Time je dokazan teorem o ekvivalenciji.

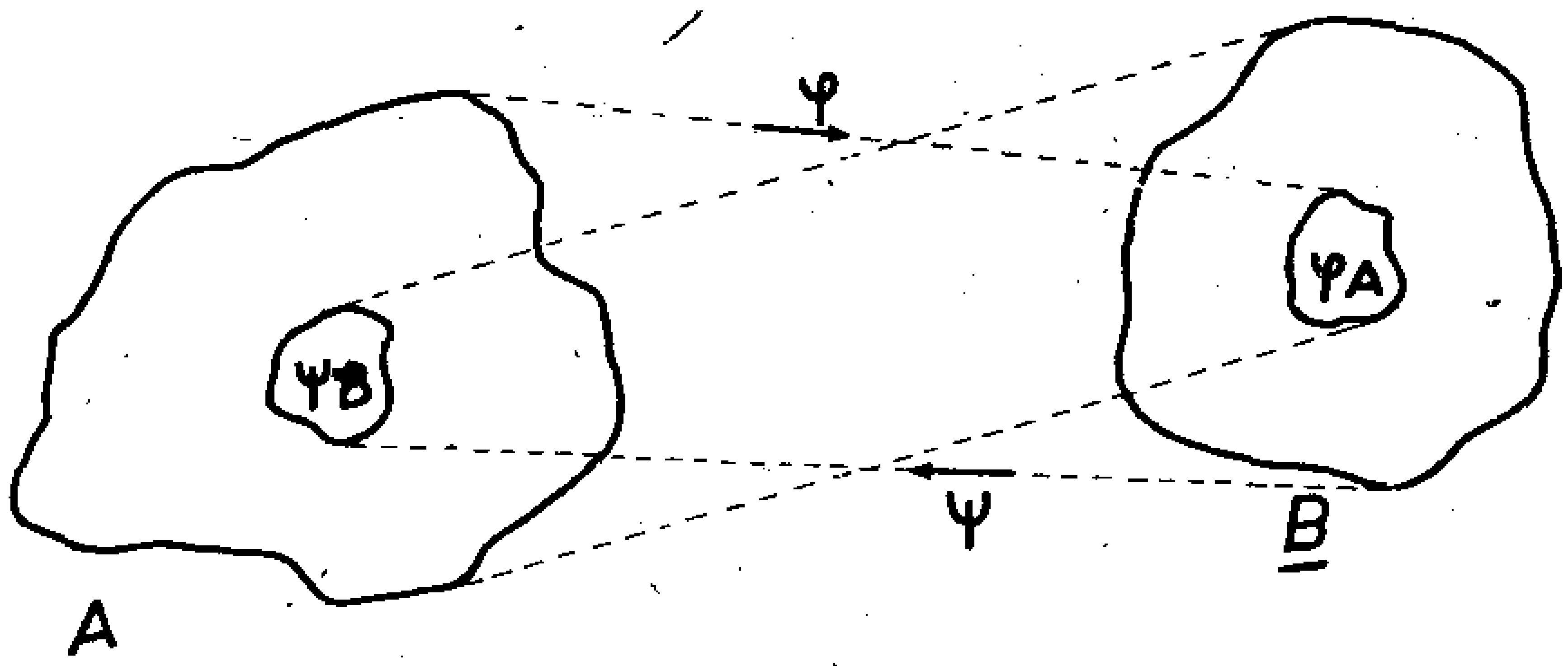
Korolar 3.5.2.1 (teorem o međuskupovima). *Ako je* $kM = kM_1$, $M_1 \subset X \subset M$, *onda je također* $kM = kX$ *t. j. svaki skup smješten između dva skupa istog kardinalnog broja ima i sam taj isti kardinalni broj za svoju potenciju.*

---

[1] Vidi E. Borel *Leçons sur la théorie des fonctions*, 3—ième éd, Paris, 1928, note I., pp. 105 dolje.

[2] St. Banach (1892—1945), istaknuti poljski matematičar. Vidi Fundamenta Mathematicae, VI, 1924, pp. 236-239.

§ 3.5.3 **Dokaz Banachova teorema.**[1] Na slici je shematski naznačeno kako transformacija φ prevodi A u $\varphi(A) \subset B$, dok transformacija ψ prevodi B u $\psi(B) \subset A$.



Sl. 3.5.3.1

Ako su φ i ψ obostrano jednoznačna preslikavanja, skupovi A i B su ekvivaletni.

Vidimo ovo: ako je Banachov rastav moguć, onda nijedan element množine

(3.5.3.1) $$R = A \setminus \psi B$$

ne može pripadati množini X_2, jer, prema hipotezi, u X_2 treba biti definirana zadana transformacija ψ^{-1}, dok naprotiv, ni u jednom elementu množine R ta transformacija nije definirana.

Svakako ima skupova $S \subseteq A$ sa svojstvom

(3.5.3.2) $$S \supseteq R \cup \psi \varphi S;$$

takav je na pr. skup S sama zadana množina A. Označimo sa

(3.5.3.3) $$M$$

množinu svih $S \subseteq A$ sa svojstvom (3.5.3.2). Stavimo li

(3.5.3.4) $$X_1 = \cap S, \quad (S \in M)$$

(3.5.3.5) $$\varphi X_2 = Y_2$$

(3.5.3.6) $$B \setminus Y_1 = Y_2,$$

(3.5.3.7) $$\psi Y_2 = X_2,$$

tada ćemo dokazati, da su ispunjene Banachove relacije (3.5.2.2), (3.5.2.3), (3.5.2.4), čime bi Banachov teorem bio dokazan.

Dokažimo, najprije, da skup X_1 iz (3.5.3.4) zadovoljava jednakost

(3.5.3.8) $$X_1 = R \cup \psi \varphi (X_1).$$

Najprije

(3.5.3.9) $$X_1 \supseteq R \cup \psi \varphi X_1)$$

[1]) Može se i preskočiti. Dokaz je tipičan, kad se hoće izbjegnuti primjena prirodnih brojeva. Kako mi ne pretpostavljamo izrađene prirodne brojeve, dokaz početniku izgleda prilično teškim.

Stvarno, jasno je, da

(3.5.3.10) $X_1 \geq R$, jer je $R \leq S$ za svaki $S \in M$, pa dakle i

$$R \leq \bigcap_S S, \ (S \in M).$$

Nadalje je očigledno:

$$X_1 \leq S, (S \in M),$$

odakle

$$\psi \varphi (X_1) \leq \psi \varphi (S), \ (S \in M)$$

što s očiglednom relacijom

$$\psi \varphi (S) \leq S \text{ (v. (3.5.3.2))}$$

daje $\psi\varphi X_1 \leq S, (S \in X)$ dakle i $\psi \varphi (X_1) \leq X_1$.

To zajedno sa (3.5.3.10) daje (3.5.3.9)

Dokažimo, da važi

(3.5.3.11) $$X_1 \leq R \cup \psi \varphi (X_1).$$

Stavimo li

(3.5.3.12) $$Q = R \cup \psi \varphi (X_1),$$

tada relacija (3.5.3.9) kaže, da je $X_1 \geq Q$ dakle i $\psi \varphi (X_1) \geq \psi \varphi (Q)$. Odatle dodavanjem R:

$$R \cup \psi \varphi (X_1) \geq R \cup \psi \varphi (Q) \quad \text{t. j.}$$
$$Q \geq R \cup \psi \varphi (Q),$$

što po definiciji skupa (3.5.3.3) znači da je $Q \in M$ dakle $Q \geq X_1$ što je zapravo tražena relacija (3.5.3.11).

Iz (3.5.3.9) i (3.5.3.11) izlazi jednakost (3.5.3.8).

Prijeđimo na dokaz samih relacija (3.5.2.2), (3.5.2.3), (3.5.2.4) Najprije $X_1 \subset A$ dakle $\varphi (X_1) \subset \varphi (A) \subset B$ dakle $Y_1 \subset B$, pa iz (3.5.3.6) slijedi (3.5.2.3).

Nadalje:

$X_2 = \psi (Y_2) =$ [po (3.5.3.6)] $= \psi (B \setminus Y_1) = \psi (B) \setminus \psi (Y_1) =$ [po (3.5.3.5)] $= \psi (B) \setminus \psi \varphi (X_1) =$ [po (3.5.3.8.)] $= \psi (B) \setminus (X_1 \setminus R)$ dakle $\psi (Y_2) = \psi (B) \setminus (X_1 - R)$, što sa $X_1 \setminus R \leq \psi (B)$ daje $\psi (B) = (A \setminus R) \cup \psi (Y_2)$. Odakle dodavanjem R:

$R \cup \psi (B) = X_1 \cup \psi (X_2)$ t. j.

(3.5.3.13) $$A = X_1 \cup X_2.$$

Dokažimo, da je $X_1 \cap X_2 = v$.

No, $$X_1 = R \cup \psi \varphi (X_1) = ((A \setminus \psi(B)) \cup \psi \varphi (X_1),$$
$$X_2 = \psi (B) \setminus \psi \varphi (X_1),$$

pa je dak e $X_1 \cap X_2 = v$. Ta jednakost zajedno sa (3.5.3.13) daje traženi rastav (3.5.2.2).

Kako je $Y_1 \subset B$, relacija (3.5.2.3) je neposredna posljedica od (3.5.3.6.) Najzad, jednakosti (3.5.2.4) su drukčije napisane jednakosti (3.5.3.5) i (3.5.3.7). Time je Banachov teorem potpuno dokazan.

Primjedba. Gornji dokaz Banachova teorema pripada Zermelu; u njemu ne dolaze prirodni brojevi. Ako već imamo izgrađene prirodne brojeve, onda stavljajući

$$X_1 = R \cup \psi\varphi(R) \cup \psi\varphi\psi\varphi(R) \cup \psi\varphi\psi\varphi\psi\varphi(R) \cup \dots.$$

i definirajući skupove X_2, Y_1, Y_2 pomoću relacija (3.5.3.5), (3.5.3.6) i (3.5.3.7), lako se dokaže, da važi Banachov rastav (3.5.2.2), (2.5.2.3) i (3.5.2.4).

Dodatak. Važnost Banachova teorema tim je veća, što on važi i za specijalne obostrano jednoznačne transformacije skupova kao što su i kongruencije, sličnosti, homeomorfije i t. d.

§ 3.6. Obostrano jednoznačna preslikavanja skupova i operacije nad skupovima.

Ako su A i B dva zadana skupa, onda znamo šta znače skupovi

$$A \cup B, \quad A \times B, \quad A_1(B)^{1)} \qquad \text{(gl. § 2.2 i § 2.4)}.$$

Ako je α obostrano jednoznačno preslikavanje skupa A, a β obostrano jednoznačno preslikavanje skupa B, onda imamo analogne skupove $\alpha(A)$, $\beta(B)$ te

$$\alpha(A) \cup \beta(B), \quad \alpha(A) \times \beta(B), \quad (\alpha A)_1(\beta B).$$

Teorem 3.6.1. Vazda je

$$k(A \times B) \equiv k(\alpha A \times \beta B) \tag{3.6.1}$$

$$k\, A_1(B) \equiv k(\alpha A)_1(\beta(B)) \tag{3.6.2}$$

$$k(A \cup B) \leqslant k(\alpha A \cup \beta B); \tag{3.6.3}$$

ako je k tome $A \cap B = v$, $\alpha A \cap \beta B = v$, onda je čak

$$k(A \cup B) \equiv k(\alpha A) \cup k(\beta B). \tag{3.6.4}$$

Da dokažemo (3.6.3), dovoljno je staviti:

$$f(x) = \alpha(x),\ (x \in A),\ f(x) = \beta(x),\ (x \in B \setminus A),$$

pa da se uvjerimo, da je f obostrano jednoznačna transformacija udruženja $A \cup B$ na skup $\alpha A \cup \beta B$.

Da dokažemo (3.6.1), definirajmo funkciju

$$g(a, b) = (\alpha(a), \beta(b)),\ (a \in A,\ b \in B);$$

tada je g obostrano jednoznačna transformacija skupa $A \times B$, tako da je

$$g(A \times B) = \alpha A \times \beta B.$$

---

[1]) $A_1(B)$ je skup svih jednoznačnih preslikavanja skupa B u skup A. Skup $A \times B$ je skup svih jednoznačnih preslikavanja f skupa $\{1,2\}$ tako da bude $f(1) \varepsilon \mathbf{A}$, $f(2) \varepsilon B$

Da tu mjesto znaka = može stajati $\subseteq$, to je jasno. No, tu možemo staviti mjesto = i znak $\supseteq$, jer ako je

$$(m, n) \in \alpha A \times \beta B, \text{ dakle } m \in \alpha A, \ n \in \beta B$$

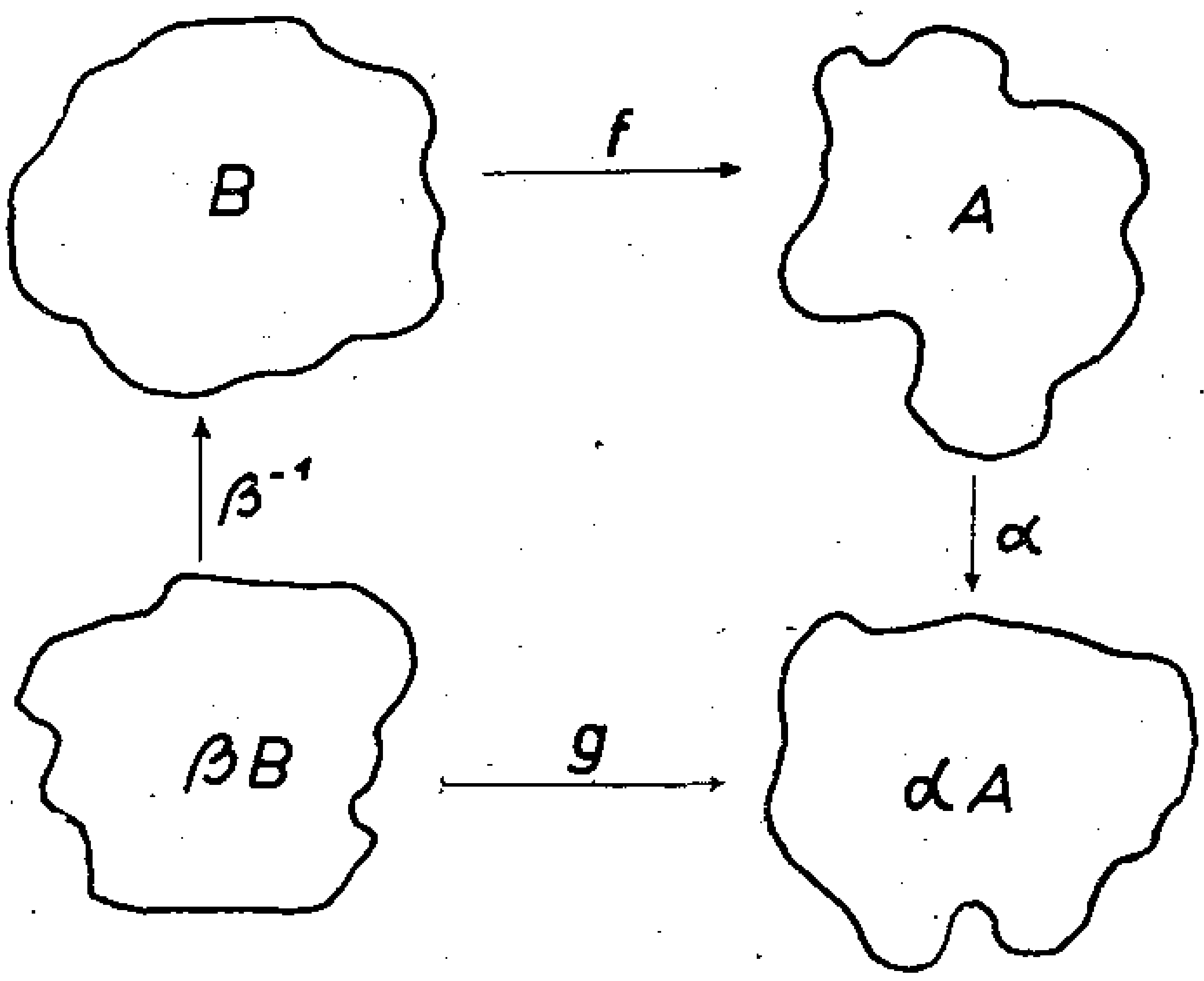
odakle $\alpha^{-1}(m) \in A$ $\beta^{-1}(n) \in B$, onda je jasno da je $(\alpha^{-1}(m), \beta^{-1}(n))$ određen član u $A \times B$, i to takav član, da ga transformacija g prevodi u (m, n).

Dokažimo najzad jednakost $(3.6.2)$: znamo, da je množina $A_1(B)$ sastavljena od svih jednoznačnih funkcija

$$f(b), \ (b \in B) \text{ sa vrijednostima u } A, \text{ pa je dakle}$$

$$fB \subseteq A.$$

Analogno, skup $\alpha(A)_1(\beta(B))$ je sastavljen od svih jednoznačnih transformacija skupa βB u αA. Veza između jednih i drugih transformacija vidi se na ovoj shemi:



Sl. 3.6.1
Preslikavanje g skupa βB u αA je isto što i složeno preslikavanje $\alpha(f\beta^{-1})$.

Shema pokazuje, kako se može preslikati $\beta(B)$ na $\alpha(A)$; najprije pomoću β^{-1} prelazi βB u B, odavde pomoću f prelazi B u A i najzad pomoću α prelazi A u αA, tako da imamo složenu transformaciju

$$(3.6.5) \qquad \alpha(f\beta^{-1})$$

koja je jednoznačno određena elementom $f \in A_1(B)$ i koja prevodi βB u αA. Označimo li transformaciju $(3.6.5)$ sa g_f, tako da se zapravo radi o sastavljenoj funkciji

$$(3.6.6) \qquad g_f(x) \equiv \alpha[f(\beta^{-1}(x)], \ (x \in \beta B),$$

onda je $g \in (\alpha A)_1 (\beta B)$; naravno, ako su f i h dva različita elementa iz $A_1 (B)$, onda su g_f i g_h dva različita elementa od $(\alpha A)_1 (\beta B)$; konačno lako se vidi, da je svaki $g \in (\alpha A)_1 (\beta (B))$ obuhvaćen oblikom (3.6.5) odnosno (3.6.6) jer ako je

$$g(x), \ (x \in \beta(B))$$

proizvoljna jednoznačna transformacija od $\beta(B)$ u $\alpha(A)$, onda sastavljanjem

$$g(x) = \alpha f \beta^{-1}(x), \ (x \in \beta B)$$

dakle
$$\alpha^{-1}(g(x)) = f(\beta^{-1}(x)), \ (x \in \beta(B))$$

dobijemo posve određenu funkciju $f(\beta^{-1}(x)) = \alpha^{-1}(g(x), (x \in \beta B)$ kojoj po propisu (3.6.6) pripada baš zadana funkcija g.

§ 4. KARDINALNI ILI GLAVNI BROJEVI.

Prethodna razmatranja o međusobnoj povezanosti skupova posredstvom obostrano jednoznačnih preslikavanja opravdavaju da važi ova

§ 4.1 **Definicija kardinalnih brojeva ili potencija.** Pod kardinalnim brojevima ili potencijama razumijevamo skupove ili množine uz uslov da pritom važe slijedeći propisi za *identificiranje, upoređivanje* i *računanje*:

I. *Identificiranje kardinalnih brojeva:* Kardinalni broj A identički je jednak kardinalnom broju B, simbolički

(4.1.1) $$kA \equiv kB \text{ odnosno } k(A) \equiv k(B)$$

onda i samo onda ako postoji obostrano jednoznačno (= jednoznačno i jednolisno) preslikavanje f skupa A na čitav skup B (dakle $fA = B$ a ne samo $fA \subseteq B$);

II. *Upoređivanje (uređivanje) kardinalnih brojeva:* Kardinalni broj A *manji je ili jednak* kardinalnom broju B, simbolički

(4.1.2) $$kA \leqslant kB$$

odnosno što je isto: kardinalni broj B *veći je ili jednak* kardinalnom broju A, simbolički

(4.1.3) $$kB \geqslant kA,$$

ako je skup A ekvivalentan sa bar jednim dijelom skupa B odnosno ako skup B sadrži bar jedan dio koji je ekvivalentan sa skupom A.

Jednakost

(4.1.4) $$kA = kB$$

značit će isto što i sistem:

(4.1.5) $$kA \geqslant kB, \quad kA \leqslant kB.$$

Oznaka

(4.1.6) $kA < kB$ odn. $kB > kA$ značit će isto što i činjenica, da je

(4.1.7) $kA \leqslant kB$ ali da nije $kB \leqslant kA$.

III. *Računanje s kardinalnim brojevima.*

Pod sumom kardinalnih brojeva A i B simbolički

(4.1.8) $$kA + kB$$

razumijevamo uniju $A \cup B$ skupova A i B, ako su A i B bez zajedničke točke, a inače uniju

$$(\{1\} \times A) \cup \{2\} \times B);$$

pritom je na pr. $\{1\} \times A$ kombinirani produkt jednočlana skupa $\{1\}$ i skupa A.

Pod *produktom kardinalnih brojeva* A i B simbolički

(4.1.9) $$kA \cdot kB \text{ odnosno } kA \times kB$$

razumijevamo kombinirani produkt

$$A \times B \text{ skupova } A \text{ i } B.$$

Pod *stepenom (potencijom) kardinalna broja* A na kardinalan broj B, simbolički

(4.1.10) $$kA^{kB} \text{ odn. } (kA)^{(kB)}$$

razumijevamo skup $A_1(B)$ svih jednoznačnih preslikavanja skupa B na skup A.

Primijetimo, da prema teoremu 3.5.1 (o ekvivalenciji) iz jednakosti

$$kA = kB \text{ proizlazi } kA \equiv kB.$$

Već smo napomenuli (§ 3.1 i § 3.2) da su relacija $\equiv$ kao i $\leq$ povratne i prelazne; relacija $\equiv$ je k tome i simetrična.

Sadržaj teorema 3.6.1 uvjerava nas, da se kod računanja može mjesto proizvoljnog kardinalnog broja upotrebiti koji god drugi koji mu je identički jednak (ili čak, prema teoremu o ekvivalenciji, i samo jednak). Odatle proizlazi jednoznačnost: sume, produkta i potencije dvaju kardinalnih brojeva.

Primjedba 4.1.1. (isp. Russell [1] i Sierpinski [1]).

Vjerujemo, da će gornja definicija kardinalnih brojeva nekoga i iznenaditi (slično je bilo i sa definicijom dvočlanskih relacija u zadanu skupu S, kad smo rekli, da su to dijelovi ne doduše samoga skupa S nego skupa $S \times S$). Mi smo naime naviknuti da kažemo, da je broj riječ ili svojstvo koje kazuje koliko zadan skup ima predmeta.

Kardinalni broj skupa A definira se također kao *razred* ili *klasa* $[A]$ sviju skupova ekvivalentnih sa A.

Često se kaže, da je kardiralni broj zadana skupa A ono svojstvo skupa A koje pripada svakom skupu koji je ekvivalentan sa A.

Mi se držimo definicije u tekstu, jer smatramo, da time glavni brojevi postaju realnijima — jer svaki skup poprima ulogu određena glavnog broja — a također izbija na svijetlo činjenica, da su glavni brojevi odraz određenih veza — i to baš obostrano jednoznačnih preslikavanja — među skupovima.

§ 4.2 **Simbolika.** Kad skup S shvatimo kao kardinalni broj, zgodno je da to nekako i simbolički naznačimo, na pr. ovako:

(4.2.1) kS odn. $k(S)$ ili $\overline{\overline{S}}$ (Cantor) ili pS.

Već se udomaćila oznaka za pojedine kardinalne brojeve kao: 0 (nula) za prazan skup v shvaćen kao kardinalan broj; dakle uvodimo oznaku:

(4.2.2) 0 za kv

(v = vakuum, prazan skup), pa ćemo i pisati $0 \equiv kv$;

(4.2.3) 1 (jedan) $\equiv kS$,

gdje je S ma koji jednočlan skup; za ovaj bi se moglo reći da je to svaki skup sa svojstvom, da iz $x \in S$, proizlazi $S \setminus \{x\} = v$; specijalno je $1 = k\{0\}$;

(4.2.4) 2 (dva) je oznaka za kS,

gdje je S ma koji skup sa svojstvom, da iz $x \in S$ slijedi, da je skup $S \setminus \{x\}$, što ga dobijemo iz S izbacivanjem elemenata x, sastavljen od jednog člana t. j.

$$k(S \setminus \{x\}) = 1.$$

Dalje dolaze kardinalni brojevi: 3, 4, 5, ...; na pr.

$$3 \equiv kS, \text{ ako iz } x \in S \text{ slijedi } k(S \setminus \{x\}) = 2.$$

Skup N svih prirodnih brojeva shvaćen kao kardinalan broj označuje se osim sa kN također sa

(4.2.5) $\aleph_0$, (čitaj alef nula) a ili sa $k\omega_0$.

Skup C odn. C_1 svih realnih brojeva shvaćen kao kardinalan broj označuje se sa

(4.2.6) c (početno slovo riječi continuum); poslije ćemo dokazati da je $c = 2^a$ t. j. $kC_1 = 2^{(kN)}$.

Dva numerička primjera:

$2 \cdot 3 = k\{0, 1\} \cdot k\{0, 1, 2\} = k\{0, 1\} \times \{0, 1, 2\} = k\{(0, 0,) (0, 1), (0, 2); (1, 0), (1, 1), (1, 2)\} = 6.$

$2^3 = k\{0,1\}^{k\{0,1,2\}} = k(\{0,1\})_1(\{0,1,2\}) = k\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\} = 8.$

Pritom na pr. 101 znači preslikavanje f skupa $\{0,1,2\}$ u $\{0,1\}$ za koje je:

$$f(0) = 1,\ f(1) = 0,\ f(2) = 1.$$

Sada možemo nekoje prethodne rezultate izreći i na drugi način.

Teorem 4.2.1. *Ako je A proizvoljan skup, tada množina $P(A)$ svih dijelova skupa A* (prazan skup v uključivo) *ima kardinalni broj* $2^{(kA)}$.

Stvarno, po definiciji, $2^{(kA)}$ jest kardinalan broj skupa

(4.2.7) $$\{0,1\}_1(A)$$

svih jednoznačnih preslikavanja skupa A na dvočlani skup $\{0,1\}$. No taj funkcionalni skup (4.2.7) ekvivalentan je sa partitivnim skupom $P(A)$ (gl. teorem 3.4.5.1), odakle proizlazi i sam teorem.

Teorem 4.2.2. *Za svaki kardinalni broj* k *važi* $2^k > k$.

To je neposredna posljedica gornjeg teorema i Cantorove nejednakosti (v. teorem 3.4.5.2).

§ 4.3. Najjednostavnija pravila za sabiranje, množenje i stepenovanje kardinalnih brojeva.

Lema 4.3.1. *Produkt nule i bilo kojeg kardinalnog broja opet je nula*:

$$0 \cdot a = 0.$$

Naime neka je kardinalni broj $a = kA$, dakle je A izvjestan skup; onda je

$0 \cdot a = kv \cdot kA$ (po definiciji produkta) $= k(v \times A) = kv = 0$, jer je $v \times A = v$; naime $v \times A$ je skup svih jednoznačnih preslikavanja f dvočlanog skupa $\{1,2\}$, tako da bude $f(1) \in v$, $f(2) \in A$; međutim takovih preslikavanja f nema, jer je odnos $f(1) \in v$ nemoguć.

Lema 4.3.2. *Za svaki kardinalni broj* a *važi* $1 \cdot a = a$.

Naime, $1 \cdot a = k(0) \cdot kA =$ (po definiciji) $= k((0) \times A) = kA$ jer je očigledno skup A ekvivalentan sa skupom $(0) \times A$, kako to pokazuje preslikavanje f koje proizvoljnom $x \in A$ pridružuje element $(0, x) \in (0) \times A$.

§ 4.3.1. Opća definicija sume i produkta.

Neka je S proizvoljan skup, a f bilo kakvo preslikavanje skupa S; to znači, da je za svaki $t \in S$, $f(t)$ određen skup, a time i određen kardinalni broj, pa ga onda možemo markirati i sa $k f(t)$. Pod produktom od S kardinalnih brojeva $f(t)$, $(t \in S)$ simbolički:

$$\prod_{t \in S} k f(t)$$

razumijevamo skup svih jednoznačnih preslikavanja φ skupa S tako, da bude ispunjen uslov

$$\varphi(t) \in f(t), \quad (t \in S).$$

Pod *sumom* od S kardinalnih brojeva

$$f(t), \quad (t \in S)$$

simbolički

$$\sum_{t \in S} kf(t)$$

razumijevamo kardinalni broj

$$\bigcup_{t \in S} (t) \times f(t)$$

pa pišemo

$$\sum_{t \in S} kf(t) = k \bigcup_{t \in S} (t) \times f(t).$$

Lema 4.3.1.1. *Ako je* S *ma kakav skup, tad je suma od* S *nula opet nula; suma od* S *jedinica daje kardinalni broj* S;

$$\sum_{t \in S} 0 = 0, \quad \sum_{t \in S} 1 = kS.$$

Stvarno, $$\sum_{t \in S} 0 = k \bigcup_{t \in S} (t) \times (v) = k \bigcup_{t \in S} v = kv = 0.$$

$\sum_{t \in S} 1 =$ (po definiciji sume) $= k(\bigcup_{t \in S} (t) \times f(t))$, gdje je $kf(t) = 1$ za svaki $f \in S$. No, skup S je ekvivalentan sa skupom $\bigcup_{t \in S} (t) \times f(t)$ kao što to pokazuje preslikavanje

$$f(x) = (x) \times f(x), (x \in S)$$

skupa S.

Lema 4.3.1.2. *Produkt od* S *brojeva, među kojima je bar jedan nula, i sam je jednak 0. Produkt od* S *jedinica je opet jedinica. Tu je* S *proizvoljan skup* $\neq v$.

Neka je među kardinalnim brojevima $f(t)$, $(t \in S)$ neki $= 0$ na pr. $f(t_0) = v$. Tada, po definiciji produkta $\prod_{t \in S} kf(t)$, trebalo bi odrediti skup Φ svih jednoznačnih preslikavanja φ skupa S sa svojstvom $\varphi(t) \in f(t)$ za svaki $t \in S$; specijalno dakle $\varphi(t_0) \in f(t_0)$.

Međutim, takovih preslikavanja φ nema, jer ne može biti

$$\varphi(t_0) \in f(t_0),$$

budući da je $f(t_0)$ prazan skup; dakle je i $\Phi = v$.

Analogno, ako je $kf(t) = 1$ za svaki $t \in S$, to znači da postoji jedno jedino preslikavanje φ gornje vrste, naime ono za koje je

$$\varphi(t) = f(t)$$

što znači da je skup Φ sastavljen od jednog jedinog člana i to baš od zadanog preslikavanja f; to znači da je $\prod_{t \in S} 1 = 1$.

Lema 4.3.1.3. (produkt kao iterirana suma):

$$kA \cdot kB = \sum_{t \in B} kA = \underbrace{kA + kA + \ldots}_{kB \text{ puta}}$$

Stvarno,

$$kA \cdot kB \text{ (po definiciji)} = k(A \times B) = k \bigcup_{x, y} (x, y) = k \bigcup_{y \in B} A \times (y) =$$

$= \sum_{y \in B} k(A \times (y)) = \sum_{y \in B} kA$, jer je skup A ekvivalentan sa skupom $A \times (y)$ za svaki y.

Lema 4.3.1.4. (stepen kao iteriran produkt)

$$\prod_{t \in B} kA = (kA)^{(kB)} \text{ t. j. } \underbrace{kA \cdot kA \cdot kA \ldots}_{kB \text{ puta}} = (kA)^{(kB)}.$$

Stvarno, po definiciji produkta, $\prod_{t \in B} kA$ označuje skup Φ svih jednoznačnih transformacija φ skupa B u skup A, što znači, da se skup Φ podudara sa skupom $A_1(B)$ pomoću kojeg smo i definirali $(kA)^{(kB)}$.

Teorem 4.3.1. *Za kardinalne brojeve a, b, c,* i t. d. *važe ova pravila*:

1. Zakon komutacije za sabiranje i množenje:

(4.3.1.1) $$a + b = b + a \quad \text{odn.} \quad ab = ba;$$

2. Zakon asocijacije za zbrajanje odn. za množenje:

(4.3.1.2) $$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ odn. } (ab)c = a(bc);$$

3. Zakon distribucije množenja s obzirom na sabiranje:

(4.3.1.3) $$(a + b)c = ac + bc$$

4. Veza produkta i sume;

(4.3.1.4) $$ab = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{b \text{ puta}} \text{ (v. lema 4.3.1.3)}$$

5. Množenje potencija:

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c};$$

6. Potenciranje;

(4.3.1.5) $$(a^b)^c = a^{b \cdot c}.$$

7. Veza između množenja i stepenovanja:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b \text{ puta}} = a^b \text{ (v. lemu 4.3.1.4).}$$

Čitaocu preporučamo da dokaže čitav teorem. Mi ćemo se zadovoljiti dokazom formule (4.3.1.5), jer je njen dokaz najzamršeniji.

Dokažimo formulu (4.3.1.5). Ako su A, B, i C skupovi kojima je kardinalni broj a odn. b odn. c, onda treba promatrati množinu

(4.3.1.6) $$(A_1(B))_1(C)$$

svih jednoznačnih transformacija skupa C u skup $A_1(B)$ svih jednoznačnih transformacija skupa B u skup A; nadalje, treba promatrati množinu

(4.3.1.7) $A_1(B \times C)$ koja pretstavlja kardinalni broj $a^{(bc)}$

Treba dokazati da su množine (4.3.1.6) i (4.3.1.7) ekvivalentne; udesit ćemo između njih jednu obostrano jednoznačnu transformaciju koja će svakom članu f iz (4.3.1.6) pridružiti izvjestan član $\varphi'(f)$ iz (4.3.1.7).

No, f po svojem značenju kaže, da je to određeno preslikavanje skupa C na $A_1(B)$, pa zato za svaki $c \in C$, $f(c)$ je određen element od $A_1(B)$, dakle izvjesna transformacija $a(b)$ skupa B na skup A. To znači da je $f(c) = a(b)$, $(b \in B)$ za svaki $c \in C$, što možemo naznačiti i ovako;

(4.3.1.8) $$f(c) = a_f(b, c), (b \in B),$$

da time naznačimo da ta funkcija zavisi i od c. No, time smo dobili funkciju od dvije varijable b i c, odnosno točkovnu funkciju u $B \times C$; označimo li funkciju (4.3.1.8) sa

(4.3.1.9) $$\varphi(f),$$

vidimo da ta funkcija $\varphi(f)$ preslikava jednoznačno skup (4.3.1.6) u skup (4.3.1.7).

Dokažimo, da pri tome raznim elementima iz (4.3.1.6) odgovaraju različiti elementi u (4.3.1.7) t. j. ako je $f \neq g$, onda je $\varphi(f) \neq \varphi(g)$. Stvarno, nejednakost $f \neq g$ dvaju elemenata f i g iz (4.3.1.6) znači, da postoji bar jedan član $c \in C$, tako da bude $f(c) \neq g(c)$, što znači da su funkcije

$$a_f(b, c), a_g(b, c), (b \in B)$$

međusobno različite za taj c, a to opet znači, da postoji bar jedan $b \in B$ sa svojstvom $a_f(b, c) \neq a_g(b, c)$. No, to baš i znači da su $\varphi(f)$ i $\varphi(g)$ dva različita elementa množine (4.3.1.7).

Dokažimo najzad ovo: kad f prolazi čitavim skupom (4.3.1.6) onda $\varphi(f)$ prolazi *čitavim skupom* (4.3.1.7).

Stvarno, neka je

$$h = h(b, c), b \in B, c \in C$$

ma koja transformacija od $B \times C$ na A; za svaki konstantni $c \in C$ imamo time određenu funkciju $h(b, c)$, $(b \in B)$ skupa B na skup A.

Drugim riječima, svakom $c \in C$ pripada određen element od $A_1(B)$, što znači, da zadanom elementu $h(b,c)$ iz (4.3.1.7) pripada određen element f iz (4.3.1.6) sa svojstvom, da je $\varphi(f) = h$.

§ 5. KONAČNI I BESKONAČNI SKUPOVI. PRIRODNI I TRANSFINITNI KARDINALNI BROJEVI.

Razmatranja ovog §-a su od principijelne važnosti za matematiku, jer ćemo definirati i same prirodne brojeve. Upoznat ćemo se s osnovnom podjelom skupova na *konačne* i *beskonačne*, odnosno kardinalnih brojeva na 0, *prirodne* i *transfinitne*. Vidjet ćemo, da je u području kardinalnih brojeva k relacija

(5.1) $$k+1>k$$

karakteristična za 0 i prirodne kardinalne brojeve, dok je relacija

(5.2) $$k+1=k$$

karakteristična za transfinitne kardinalne brojeve.

§ 5.1. **Konačni i beskonačni skupovi.** Ako je S zadan skup, tada se postavlja ovo pitanje:

Može li se skup S preslikati obostrano jednoznačno na svoj pravi dio ili takvo preslikavanje ne postoji?

Osnovna definicija (Dedekind).[1]

Ako je skup S takav, da za svako preslikavanje[2] f skupa S na sama sebe važi jednakost

$$f(S) = S \quad (\text{a ne samo } f(S) \subseteq S)$$

onda je skup S *konačan* ili *finitan*. Drugim riječima, veli se da je skup konačan, ako se on ne može preslikati obostrano jednoznačno na svoj pravi dio.

I prazni skup smatramo konačnim.

Skup S je *beskonačan* ili *transfinitan* ako se on može preslikati na svoj pravi dio t. j. ako postoji bar jedno preslikavanje f, za koje je $f(S) \subset S$ (a ne samo $f(S) \subseteq S$).

Teorem 5.1.1. *Ako je skup* S *konačan, konačan je i svaki potskup* $S_0 \subseteq S$.

Teorem 5.1.2. *Ako je skup* S *beskonačan, beskonačan je i svaki nadskup* $S_1 \supseteq S$.

[1]) Ima i raznih drugih definicija konačnih skupova; v. na pr. Tarski, *Sur les ensembles finis* (Fundamenta Mathematicae, 6 (19), 45—95). Sama definicija Tarskoga može se ovako izreći: Skup S je konačan, ako je skup $(P(S) : <))$ razvrstan (o značenju zadnje riječi, v. alfabetsko kazalo!).

[2]) Ako izričito ne kažemo drukčije, u ovom §-u riječ „preslikavanje" značit će „obostrano jednoznačna transformacija".

Dokažimo teorem 5.1.1. Neka je dakle S ma kakav konačan skup a S_0 njegov podskup. Kad S_0 ne bi bio konačan, postojalo bi preslikavanje f skupa S_0 na sama sebe sa svojstvom

$$f(S_0) \subset S_0. \tag{5.1.1}$$

No, to bi se preslikavanje f moglo proširiti i na čitav S definirajući preslikavanje g, tako da se ono podudara sa f na S_0, a sa identitetom na $S \setminus S_0$ t. j. bilo bi:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{za } x \in S_0 \\ x & \text{za } x \in S \setminus S_0. \end{cases}$$

Očigledno, $g(S) = g(S_0 \cup (S \setminus S_0)) = g(S_0) \cup g(S \setminus S_0) = f(S_0) \cup (S \setminus S_0)$ a radi (5.1.1) to je dalje $\subset S_0 \cup (S \setminus S_0) = S$ t. j. bilo bi $g(S) \subset S$, protivno pretpostavci da je S konačan skup.

Na posve sličan način dokazuje se i teorem 5.1.2.

Teorem 5.1.3. *Ako je skup* S *konačan, konačan je i skup*

$$S \cup \{x\} \tag{5.1.2}$$

gdje je $\{x\}$ *ma koji jednočlani skup; ako* S *ne sadrži* x, *onda je*

$$kS < k(S \cup \{x\}). \tag{5.1.3}$$

Teorem 5.1.4. *Ako je skup* S *beskonačan, beskonačan je i skup*

$$S \setminus \{x\} \tag{5.1.4}$$

i vazda je

$$kS = k(S \setminus \{x\}); \tag{5.1.5}$$

pritom je $\{x\}$ *ma koji jednočlan skup.*

Ta dva teorema od znatne su važnosti; oni iskazuju tako reći očiglednu činjenicu, da se dovođenjem stranog elementa u konačan skup, kardinalan broj toga skupa uvećava; naprotiv, brisanjem proizvoljnog elementa u beskonačnom skupu, kardinalni broj se ne mijenja.

Dokaz teorema 5.1.3. Ako je $x \in S$, stvar je očigledna. Uzmimo zato slučaj

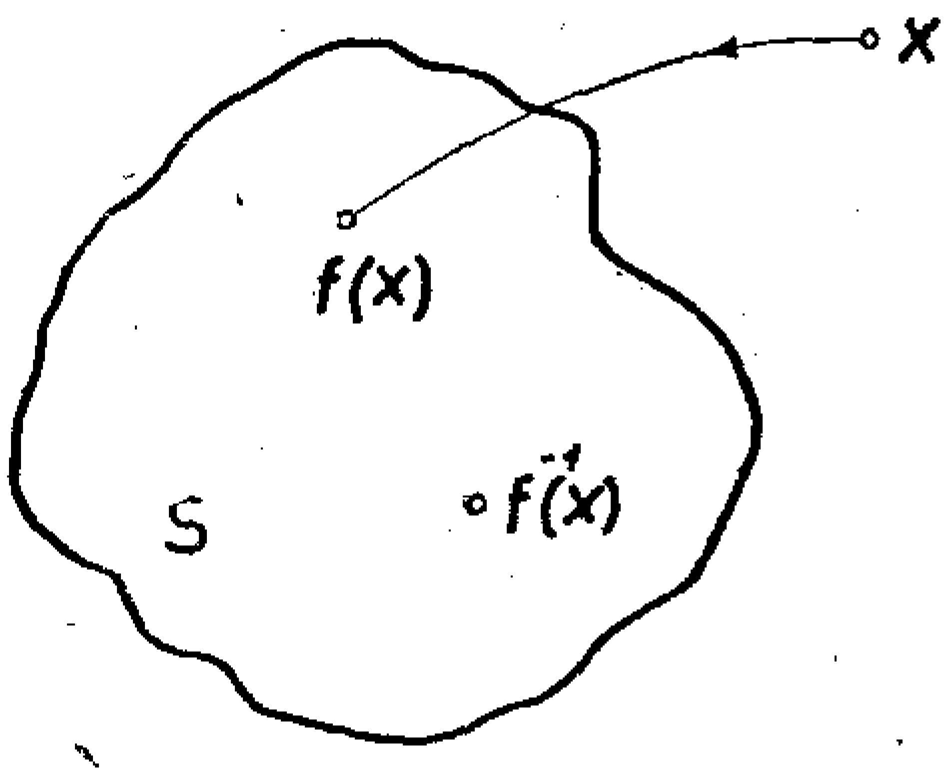
$$x \text{ non } \in S. \tag{5.1.6}$$

Kad množina (5.1.2) ne bi bila konačna, postojalo bi preslikavanje f sa svojstvom $f(S \cup \{x\}) \subset S \cup \{x\}$ t. j. skup

$$S_0 = S \cup \{x\} \setminus f(S \cup \{x\}) \tag{5.1.7}$$

imao bi bar jednu točku.

Razlikujemo dva slučaja, već prema tome da li x pripada ili ne pripada množini S_0. Kad bi bilo $x \in S_0$, to bi značilo da je slika od $S \cup \{x\}$ sadržana u S, dakle $f(S) \subseteq S \setminus f(x) \subset S$ što je nemoguće, jer je S konačan. Ostaje slučaj, kad x nije u S_0 nego dakle $x \in f(S \cup \{x\})$. Ako je k tome $x = f(x)$, bilo bi opet $f(S) \subset S$, što je nemoguće. Ako je pak $x \neq f(x)$, bit će $f(x) \in S$, $f^{-1}(x) \in S$, pa bi odmah mogli odrediti pomoćno preslikavanje h skupa S i to tako, da prevedemo $f^{-1}(x)$ neposredno u $f(x)$ (a ne preko x), a inače da se h sa f podudara u čitavom skupu $S \setminus f^{-1}(x)$. Očigledno, tada je $h(S) = f(S) \setminus (x)$, što znači, da $h(S)$ ne sadrži ni jedne točke iz skupa (5.1.7); dakle bi bilo $h(S) \subset S$, što bi značilo, da S nije konačan.



Sl. 5.1.1. Dodavanjem jednočlanog skupa x konačnom skupu S dobije se opet konačni skup.

Dokažimo, da važi nejednakost (5.1.3).

Najprije, $kS \leqslant k(S \cup (x))$; no ne može biti obrnuto $k(S \cup (x)) \leqslant kS$ t. j. ne može se nadskup $S \cup \{x\}$ od S preslikati na S, jer bi se time skup S preslikao na svoj pravi dio $S \setminus f(x)$, što je nemoguće radi pretpostavke, da je S konačna množina. Time je teorem 5.1.3 potpuno dokazan.

Dokaz teorema 5.1.4. Naravno, možemo pretpostaviti, da je $x \in S$. Kad bi tada množina $S \setminus \{x\}$ bila konačna, bila bi prema teoremu 5.1.3 konačna i množina $\{S \setminus \{x\}\} \cup \{x\}$, dakle sama zadana množina S, protivno pretpostavci.

Treba još dokazati jednakost (5.1.5). No, prema hipotezi, može se S preslikati pomoću f na svoj vlastiti dio $f(S) \subset S$; neka je $a \in S \setminus f(S)$; svakako je tada $kS \leqslant k(S \setminus \{a\})$, jer je $f(S) \subseteq S \setminus \{a\}$. No, između množina $S \setminus \{a\}$ i $S \setminus \{x\}$ moguće je udesiti preslikavanje: dovoljno je promatrati transformaciju koja permutira a i x, inače ostavlja na miru svaki element iz $S \setminus \{a, x\}$. Dakle je $k(S \setminus \{a\}) = k(S \setminus \{x\})$, a time i $kS \leqslant k(S \setminus \{x\})$, što s očiglednom relacijom $kS \geqslant k(S \setminus \{x\})$ daje traženu jednakost (5.1.5).

Korolar 5.1.1. Ako je skup S konačan, ako nadalje jednočlani skup $\{x\}$ ne leži u S, onda je

$$k(S \cup \{x\}) > kS \quad \text{t. j.} \quad kS + 1 > kS. \tag{5.1.8}$$

§ 5.2. Prirodni i transfinitni kardinalni brojevi. Pojam diferencije k-1. Osnovni teorem o konačnim i beskonačnim brojevima.

§ 5.2.1. Pojam diferencije k-1.

Kardinalni brojevi konačnih skupova zovu se *prirodni kardinalni brojevi*; kardinalni brojevi beskonačnih skupova zovu se *transfinitni* ili *beskonačni* kardinalni brojevi. Na pr. 2, 5, 100 su tri prirodna broja $\aleph_0, c$ su dva transfinitna broja.

Sjetimo se da nam v označuje prazan skup, a da ga kao kardinalan broj, označujemo sa 0 (nula) dakle $kv=0$; nadalje znamo da $v \subset S$ znači, da skup S nije prazan, i da se ta činjenica može izraziti i nejednakošću $0 < kS$ odnosno $kS > 0$ i reći: kS je *pozitivan* kardinalni broj.

Teorem 5.2.1.1. *Ako je* $n > 0$, *onda postoji jedan jedini kardinalni broj, označimo ga sa* $n-1$, *sa svojstvom da je*

$$n = (n-1) + 1. \tag{5.2.1.1}$$

Stvarno, neka skup S ima potenciju n dakle $kS = n$; onda $n > 0$ t. j. $kS > 0$ znači, da skup S ima bar jedan član, recimo $s \in S$; tada skupovna jednakost

$$S = (S \setminus \{s\}) \cup \{s\}$$

povlači brojčanu jednakost

$$kS = k(S \setminus \{s\}) \cup k\{s\}$$

odnosno

$$n = k(S \setminus \{s\}) + 1,$$

a to je jednakost tražena oblika (5.2.1.1).

§ 5.2.2. Jednoznačnost broja n-1.

Još se radi o tome da dokažemo, da je broj $n-1$ jednoznačno određen t. j. da iz $n = n_1 + 1$, $n = n_2 + 1$ odnosno

$$\text{iz } n_1 + 1 = n_2 + 1 \text{ slijedi } n_1 = n_2 \tag{5.2.2.1}$$

za bilo koje kardinalne brojeve n_1 i n_2.

Neka je $kS_1 = n_1$, s_1 non $\in S_1$

$$kS_2 = n_2, s_2 \text{ non} \in S_2;$$

dokažimo, da je tada $kS_1 = kS_2$.

No prema (5.2.2.1) imamo $k(S_1 \cup \{s_1\}) = k(S_2 \cup \{s_2\})$, što znači, da postoje dva preslikavanja φ i ψ, sa svojstvom

$$\begin{cases} \varphi(S_1 \cup \{s_1\}) \subseteq S_2 \cup \{s_2\} \\ \psi(S_2 \cup \{s_2\}) \subseteq S_1 \cup \{s_1\}. \end{cases} \tag{5.2.2.2}$$

Treba da dokažemo, da tada postoje dva preslikavanja f i g sa svojstvom

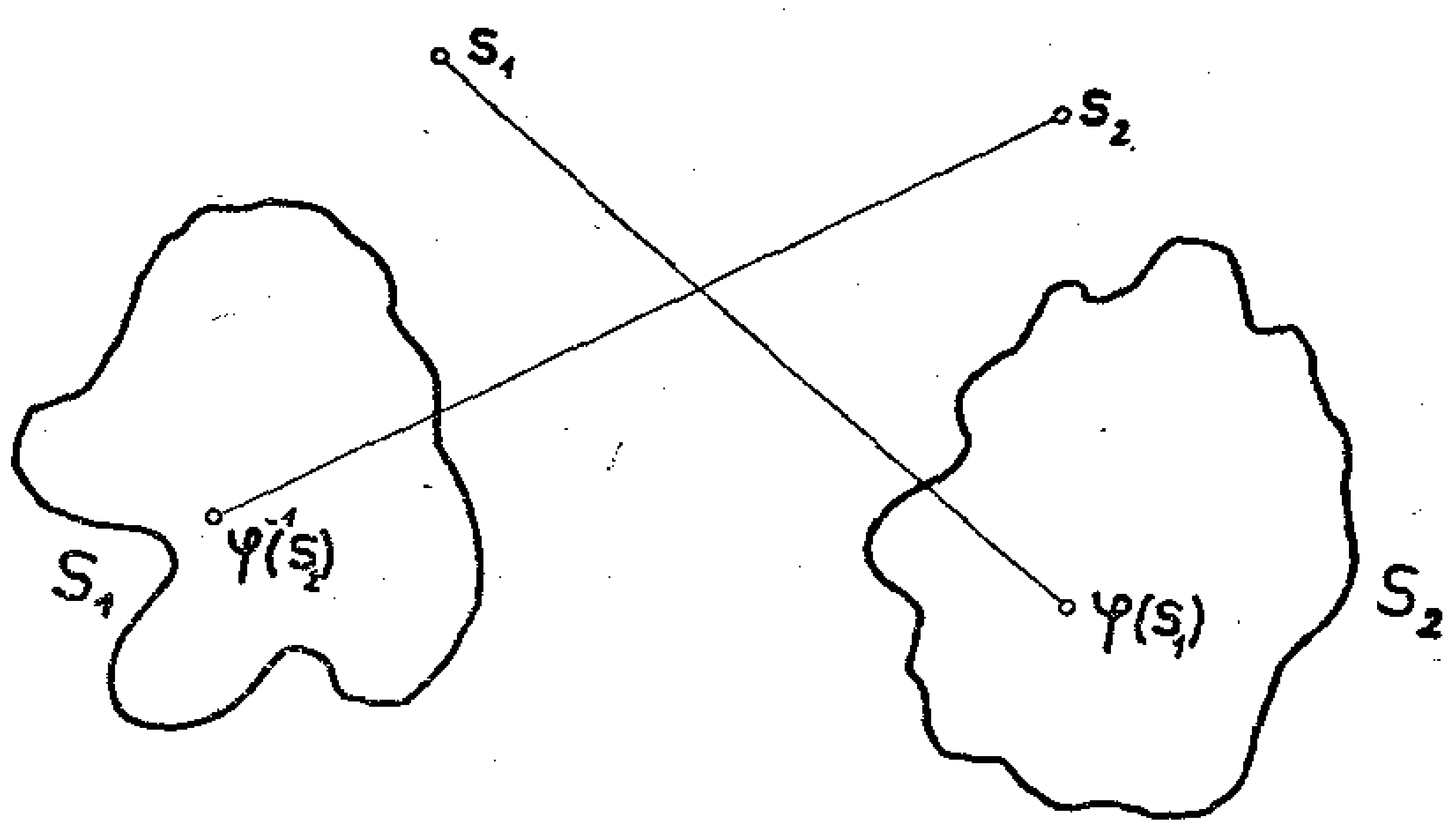
$$(5.2.2.3)\quad \begin{cases} f(S_1) \subseteq S_2 \\ g(S_2) \subseteq S_1, \end{cases}$$

što je ekvivalentno sa (5.2.2.1). Uzmimo najprije slučaj da u (5.2.2.2) dolazi bar jedanput znak $=$, recimo $\varphi(S_1 \cup \{s_1\}) = S_2 \cup \{s_2\}$. Odatle zbog obostrane jednoznačnosti od φ:

$$\varphi(S_1) \cup \varphi\{s_1\} = S_2 \cup \{s_2\} \text{ odnosno iz istog razloga:}$$

$$(5.2.2.4)\qquad \varphi(S_1) = S_2 \cup \{s_2\} \setminus \varphi\{s_1\}.$$

Ako je $s_2 = \varphi(s_1)$, onda (5.2.2.4) postaje $\varphi(S_1) = S_2$, odakle izlazi tražena jednakost (5.2.2.1). Ako pak nije $s_2 = \varphi(s_1)$, obrazujmo transformaciju h skupa $S_1 \cup \{s_1\}$ koja se podudara sa φ izvan dvočlanog skupa $\{s_1, \varphi^{-1}(s_2)\}$, dok je $h(s_1) = s_2$, $h(\varphi^{-1}(s_2)) = \varphi\{s_1\}$[1]. Očigledno $h(S_1) = S_2$ dakle opet tražena jednakost (5.2.2.1).



Sl. 5.2.2.1

Ostaje još slučaj, kad u obje relacije (5.2.2.2) stoji znak $\subset$, specijalno,

$$\varphi(S_1 \cup \{s_1\}) \subset S_2 \cup \{s_2\}.$$

Ako nije $s_2 \in \varphi(S_1 \cup \{s_1\})$, bit će $\varphi(S_1 \cup \{s_1\}) \subseteq S_2$, a tim više $\varphi(S_1) \subseteq S_2$, što znači, da je prva relacija (5.2.2.3) ispunjena. Ako je pak $s_2 \in \varphi(S_1 \cup \{s_1\})$ i k tome $\varphi^{-1}(s_2) \in S_1$,[2] obrazujmo novu transformaciju f tako da element $\varphi^{-1}(s_2)$ iz S_1 prevedemo u neki element množine $S_2 \setminus \varphi(S_1 \cup \{s_1\})$, a u preostalom dijelu od $S_1 \cup \{s_1\}$ da se podudara sa φ; naravno $f(S_1) \subseteq S_2$, pa je i u tom slučaju zadovoljena prva relacija (5.2.2.3).

---

1) Označimo li sa α transformaciju skupa S_2 u samu sebe koja se podudara sa identičnom transformacijom u skupu $S_2 \setminus (\varphi\{s_1\} \cup \{s_2\})$, dok naprotiv točke s_2 i $\varphi(s_1)$ međusobno permutira, očigledno je $h = \alpha(\varphi)$.

2) Slučaj $\varphi(s_1) = s_2$ lako se riješava.

Analogno, iz druge relacije (5.2.2.2) proizlazi druga relacija (5.2.2.3) a time konačno i tražena jednakost (5.2.2.1).

§ 5.2.3. **Karakteristično svojstvo konačnih i beskonačnih brojeva.** Iz teorema 5.1.3, 5.1.4 i 5.2.1.1 izlazi ovaj karakteristični

Teorem 5.2.3.1. *Za svaki kardinalni broj* $k > o$ *imamo* $k - 1 \leqslant k$; *da za* $k > o$ *bude*

$$k - 1 < k \quad \text{odn.} \quad k - 1 = k,$$

treba, a i dosta je, da broj k *bude konačan odn. beskonačan (transfinitan).*

Najprije, ako je $k > 0$ konačan, konačan je i $k - 1$ pa prema nejednakosti (5.1.3) imamo $(k - 1) < (k - 1) + 1$, dakle

$$k - 1 < k, \text{ jer je po definiciji } (k - 1) + 1 = k.$$

Obrnuto, ako je $k - 1 < k$, ne može k biti beskonačan, jer za beskonačne k prema jednakosti (5.1.5) važi $k - 1 = k$.

Najzad, ako je $k - 1 = k$, ne može k biti konačan, jer za svaki konačan k, po (5.1.3), važi $k + 1 > k$; dok bi naprotiv identiteta $(k - 1) + 1 = k$ zbog pretpostavke $k - 1 = k$ dala $k + 1 = k$.

Teorem 5.2.3.2. *Za ma koja dva kardinalna broja m i n relacija*

$$m < n \quad \textit{povlači} \quad m + 1 \leqslant n.$$

Stvarno, neka su A i B dva skupa potencije m odnosno n; nejednakost $kA < kB$ onda ima za posljedicu činjenicu, da za ma koje obostrano recipročno preslikavanje f skupa A u B postoji $fA \subset B$; ako je x ma koji član od $B \setminus fA$, tada je $fA \cup \{x\} \subseteq B$ što zbog $\{x\} \cap fA = v$ povlači $k(fA \cup \{x\}) \leqslant kB$ dakle $kfA \cup k\{x\} \leqslant kB$ t. j. $m + 1 \leqslant n$, za čim smo išli.

§ 5.3. **Prirodni brojevi** jesu kardinalni brojevi konačnih skupova.

Teorem 5.3.1. *Ako je n prirodni broj, onda a) postoji i broj* $n + 1$; *b)* $n + 1$ *je prirodan broj i c) vazda je* $n < n + 1$.

Stvarno, neka je S skup potencije n: $kS = n$; ako je $\{x\}$ ma kakav jednočlan skup koji ne leži u S, onda znamo, da je i $S \cup \{x\}$ konačan skup i da je njegov kardinalni broj $> n$ (teorem 5.1.3) dakle

$$k(S \cup \{x\}) > n.$$

No, po definiciji $k(S \cup \{x\}) = kS + 1$, a ovo je dalje $= n + 1$, pa je dakle $n + 1 > n$. Time je dokazano b) i c). *Samo se još radi o tome da se dokaže da* $n + 1$ *postoji t. j.* da za svaki skup S postoji bar jedan jednočlan skup izvan S ili izvan fS, gdje je f izvjesno a inače proizvoljno preslikavanje skupa S.

Postoji! Jer promatramo li na pr. skup $\{0, 1\}_1(S)$ svih jednoznačnih funkcija $f(s)$, $(s \in S)$ sa vrijednostima 0 ili 1, onda znamo da je $kS < k\{0,1\}_1(S)$, pa će postojati bar jedan element x u $\{0,1\}_1(S) \setminus f(S)$, dakle $f(S) \cap \{x\} = v$; tada je $k(f(s) \cup \{x\}) = kfS + 1 = kS + 1 = n + 1$. Time je osnovni teorem 5.3.1 potpuno dokazan.

Korolar 5.3.1. *Nema najvećeg prirodnog broja.*

Teorem 5.3.2. *Skup N svih prirodnih brojeva je beskonačan.* Stvarno, stavimo li $f(n) = n + 1$, $(n \in N)$, dobiva se time preslikavanje skupa N na $N \setminus \{1\} = N + 1$ koji je pravi dio od N.

Korolar 5.3.2. Postoji bar jedan beskonačan skup (na pr. skup N svih prirodnih brojeva).

§ 5.4. **Princip totalne indukcije.** Princip totalne indukcije daje pregled o skupu N svih prirodnih brojeva, a sastoji se u ispravnosti slijedećeg zaključka:

Pretpostavka. Neka je S ma kakav skup prirodnih brojeva koji zadovoljava ovim dvama uslovima:

Uslov I. Prirodni broj 1 leži u S:

(5.4.1) $$1 \in S$$

Uslov II. Ako neki prirodni broj n leži u S, tada u S leži i prirodni broj $n+1$ t. j.

(5.4,2) $$\text{ako je } n \in S, \text{ onda je } n + 1 \in S;$$

Zaključak: Svaki prirodni broj leži u skupu S t. j.

(5.4.3) $$S \supseteq N,$$

gdje je N skup svih prirodnih brojeva.

Princip totalne indukcije možemo i ovako formulirati:

Ako precrtamo broj 1;

Ako nadalje precrtavši neki prirodni broj n, precrtamo i broj $n + 1$, onda ćemo precrtati svaki prirodni broj.

Da se vidi, da se ova formulacija svodi na prethodnu, dovoljno je sa S označiti skup svih precrtanih prirodnih brojeva; da obrnuto, iz prve formulacije proizlazi druga, vidi se ako precrtamo elemente skupa S koji zadovoljavaju uslovima I i II.

Dokaz principa totalne indukcije dat ćemo na drugom mjestu (v. Kurepa [30].)

§ 5.5. **Primjene principa totalne indukcije.**

Ima vanredno mnogo primjena principa totalne indukcije;

Navest ćemo ih četiri; dokazat ćemo, princip uređenja prirodnih brojeva, dva principa minimuma i princip izotonije za zbrajanje prirodnih brojeva.

§ 5.5.1. **Uređenje skupa** N.

Teorem 5.5.1 1. *Skup prirodnih brojeva je uređen po veličini t. j. za svaka dva prirodna broja* k, m, *ili je* k = m *ili je* k < m *ili je* k > m (slučaj $k \,//\, m$ nemoguć je za prirodne brojeve).

Teorem ćemo dokazati totalnom indukcijom s obzirom na k. Najprije, teorem je istinit, ako je $k = 1$, jer je $1 \leqslant m$ za svaki prirodni broj m. Pretpostavimo, da je teorem dokazan za $k = n \in N$; dokažimo ga za $k = n + 1$. Prema pretpostapci je ili $m < k$ ili $m = k$ ili $m > k$; odatle slijedi po redu: $m < k + 1$ (zbog $k < k + 1$; $m < k + 1$ (isti razlog); $m \geqslant k + 1$ (po teor. 5.2.3.2); dakle je uistinu ili $m < k + 1$ ili $m = k + 1$ ili $m > k + 1$. Po principu totalne indukcije teorem 5.5.1.1 je time potpuno dokazan.

Teorem 5.5.1.2. *Ako je* n *ma koji prirodan broj, skup sastavljen od svih kardinalnih brojeva* < n *ima točno* n *članova i to* 0, 1, 2, . . ., n — 1 t. j.

$$k\{0, 1, 2, \ldots, n-1\} = n, \ (n \in N).$$

Najprije, obrazac je istinit za $n = 1$, jer je $k\{0\} = 1$.

Nadalje, ako je obrazac istinit za prirodni broj m, istinit je on i za broj $m + 1$, jer zbog $m - 1 < m$ proizlazi

$$k\{0, 1, \ldots, m-1, m\} = k\{0, 1, \ldots, m-1\} + k\{m\} = m + 1.$$

Time je po principu potpune indukcije, obrazac istinit za *svaki* $n \in N$.

§ 5.5.2. **Princip minimuma za prirodne brojeve.**

Teorem 5.5.2.1. *Ako neki skup* S *prirodnih brojeva ima bar jedan element, ima on i najmanji element,* t. j. postoji takav $m \in S$ da je

(5.5.2.1) $$m \leqslant x \quad \text{za svaki} \quad x \in S.$$

Najprije, prema teoremu 5.5.1.1 za svaki $x \in S$, skup S se sastoji od onih svojih elemenata koji su $< x$ i onih svojih elemenata koji su $\geqslant x$. Kad skup S ne bi imao najmanjeg elementa, onda bi to značilo da za svaki $x \in S$. množina S sadrži bar jedan prirodan broj, — označimo jedan od njih sa $\varphi(x)$ — za koji je $\varphi(x) < x$.

Tada bi totalnom indukcijom dobili beskonačan skup brojeva $x_1 = x$, $x_2 = \varphi(x_1)$, $x_3 = \varphi(x_2)$, ... $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, ... $(n \in N)$ što je prema teoremu 5.5.1.2 apsurd jer su svi ti brojevi međusobno različiti i $\leqslant x$.

§ 5.5.3. **Princip izotonije za zbrajanje.**

Teorem 5.5.3.1. *Za ma koja 4 prirodna broja* a, b, c, d relacije

(5.5.3.1) $$a < b, \ c \leqslant d \quad \text{imaju za posljedicu}$$

(5.5.3.2) $$a + c < b + d.$$

Najprije, dokažimo stvar za $c = d = 1$ t. j. da za svaki prirodni broj a i za svaki prirodni broj $b > a$ imamo $a + 1 < b + 1$ doista, iz $a < b$ slijedi $a + 1 \leqslant b$ što zajedno sa $b < b + 1$ daje $a + 1 < b + 1$. Odatle odmah izlazi da je zaključak (5.5.3.1), (5.5.3.2) ispravan za $c = d = n + 1$, čim je on ispravan i za $c = d = n$, jer iz

$a + n < b + n$ slijedi prema dokazanom prvom slučaju:

$(a + n) + 1 < (b + n) + 1$ odakle po zakonu asocijacije:

$a + (n + 1) < b + (n + 1)$.

Time je teorem 5.5.3.1 dokazan za slučaj $c = d$ uopće.

Specijalno dakle iz $a < b$ slijedi $a + c < b + c$, a iz $c < d$ slijedi $c + b < d + b$ odnosno $b + c < b + d$. Dakle imamo $a + c < b + c$, $b + c < b + d$ odakle izlazi i sam teorem 5.5.3.1.

§ 5.5.4. **Princip minimuma za transfinitne skupove.**

Teorem 5.5.4.1. *Skup* N *svih prirodnih brojeva može se preslikati na svaki beskonačan skup* S *t. j.*

(5.5.4.1) $$kN \leqslant kS$$

za svaki beskonačan skup S.

Kako je naime S beskonačan, postoji jedno preslikavanje φ skupa S na sama sebe i to tako da bude ne samo $\varphi(S) \subseteq S$ nego i $\varphi(S) \subset S$; ako je $f(1)$ jedan element skupa $S \setminus \varphi(S)$, tada stavljajući

$$f(2) = \varphi(f(1)), \ldots, f(n + 1) = \varphi(f(n)), \ldots, (n \in N),$$

dobivamo zaista obostrano jednoznačno preslikavanje $f(n)$, $(n \in N)$ skupa N svih prirodnih brojeva na skup S. Stavimo li naime

$S_1 = S$, $S_{n+1} = \varphi(S_n)$, $(n \in N)$ bit će

$S_1 \supset S_2$, $f(1) \in S_1 \setminus S_2$ odakle

$\varphi(S_1) \supset \varphi(S_2)$, $\varphi(f(1)) \in \varphi(S_1) \setminus \varphi(S_2)$ t. j.

$S_2 \supset S_3$, $f(2) \in S_2 \setminus S_3$.

Analogno:

$S_n \supset S_{n+1}$, $f(n) \in S_n \setminus S_{n+1}$ za svaki $n \in N$.

Dakle je $S_1 \supset S_2 \supset \ldots$ odakle izlazi, da su skupovi

$$S_1 \setminus S_2, \ldots, S_n \setminus S_{n+1}, \ldots$$

dva po dva bez zajedničkih točaka i dakle, radi $f(n) \in S_n \setminus S_{n+1}$, među $f(n)$, $(n \in N)$ nema jednakih elemenata.

§ 6. POJEDINI KARDINALNI BROJEVI. NAJMANJI KARDINALNI TRASFINITNI BROJ (alef nula: $\aleph_0$). POTENCIJA KONTINUUMA $c = 2^{\aleph_0}$.

U ovome ćemo se §-u upoznati sa dva najvažnija transfinitna kardinalna broja: kardinalnim brojem $\aleph_0$[1] skupa svih prirodnih brojeva i kardinalnim brojem c skupa svih realnih brojeva (linearnog kontinuuma).

Da se tu radi o dva različita kardinalna broja, specijalno da je $\aleph_0 < c$ (v. § 3.4.1), pokazao je Cantor 1874 i to je jedan od osnovnih rezultata u nauci o skupovima odnosno u našem pojimanju beskonačnoga.

§ 6.1. Kardinalni broj $\aleph_0$ (alef nula) skupa svih prirodnih brojeva. Prebrojivi skupovi.

Nulu smo definirali kao kardinalni broj kv skupa v bez elemenata:

$$kv = 0.$$

Jedinica je kardinalni broj ma kojeg jednočlanog skupa, specijalno $k\{0\} = 1$; moglo bi se reći i ovako: ako iz $x \in S$, $x' \in S$ slijedi $x = x'$, onda je $kS = 1$.

Na sličan način

$$k\{0,1\} = 2, \quad k\{0,1,2\} = 3$$

A jedan od osnovnih rezultata dobivenih totalnom indukcijom jest da je

$$k\{0,1,2, \ldots, n-1\} = n \tag{6.1.1}$$

za svaki prirodni broj $n > 0$ t.j. ako je n ma koji prirodni broj, tada ima tačno n kardinalnih brojeva koji su $< n$: to je $n-1$ prirodan broj $1, 2 \ldots . (n-1)$ te nula (vidi teorem 5.5.1.2).

Skup svih prirodnih brojeva generički se prikazuje ovako

$$(N) \qquad 1,2,3,4, \ldots . n, n+1, \ldots$$

pri čemu je naznačeno kako su uzastopni elementi međusobno vezani.

Lema 6.1.1. Kardinalni broj skupa N je veći od svakog pojedinog prirodnog broja n t. j. $kN > n$, $(n \in N)$,

Naime, prema teoremu 5.5.1.2. prirodni broj n je potencija pravog dijela $\{1, \ldots, n-1, n\}$ skupa N svih prirodnih brojeva dakle $n \leqslant kN$; obrat $kN \leqslant n$ ne važi, jer bi to inače značilo, da bi se beskonačni skup N mogao preslikati na konačni skup potencije n. Prema tome, kardinalni broj skupa N je jedan potpuno određen kardinalan

[1] $\aleph$ (alef) je prvo slovo jevrejskog alfabeta, a odgovara grčkom α ili latinskom a.

broj veći od svakog prirodnog broja. Taj novi kardinalni broj označuje se sa

$$\aleph_0 \text{ (alef nula) t. j.}$$

(6.1.2) $\aleph_0$ je prikrata za kN odn. za $k\{1,2,3,4,\ldots, n, n+1,\ldots\}$ $(n \in N)$

Definicija 6.1.1. Mjesto da kažemo, da neki skup S ima potenciju $\aleph_0$, reći ćemo također da je skup S *prebrojiv*.

Ili eksplicite:

Skup S je *prebrojiv*, ako se on može preslikati na obostrano jednoznačan način na skup svih prirodnih brojeva. Drugim riječima: skup S je prebrojiv, ako se on može predočiti kao niz različitih elemenata t. j. ako je

$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n, s_{n+1}, \ldots\}$, $(n \in N)$ i pritom $s_{n'} \neq s_n$ za sve različite prirodne brojeve n, n'.

Definicija 6.1.2. Veli se, da je skup S *najviše prebrojiv*, ako je njegova potencija ili 0 ili prirodan broj ili $\aleph_0$ t. j. ako je $kS \leqslant \aleph_0$. Taj se naziv javlja vrlo često.

Ako beskonačan skup nije prebrojiv, veli se da je on *neprebrojiv*. Cantorova nejednakost $\aleph_0 < c$ veli, da je *skup realnih brojeva neprebrojiv*.

Od specijalnog su interesa beskonačni neprebrojivi skupovi i pripadni kardinalni brojevi.

§ 6.2.

Teorem 6.2.1. a) *Za svaki konačni skup* S važi $kS < \aleph_0$;

b) Za svaki beskonačni skup S važi $kS \geqslant \aleph_0$, pa dakle postoji bar jedan kardinalan broj s tako da je $kS = s + \aleph_0$ (ako je s beskonačan, tad je $kS = s$; gl. teor. 6.3.1).

Teorem 6.2.1. a) je već maloprije dokazan. Teorem 6.2.1 b) je drukčije napisana formula (5.5.4.1); pritom s označuje kardinalan broj eventualnog ostatka $S \setminus \{f(1), \ldots, f(n), \ldots\}$, gdje je $f(n), (n \in N)$ izvjesno preslikavanje od N na S. Naravno, da s u teoremu 6.2.1 b) ne mora biti jednoznačno određen broj.

§ 6.3. Nekoliko svojstava transfinitnog broja $\aleph_0$.

Lema 6.3.1. $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ (sjetimo se naprotiv da je $n + 1 > n$ za svaki prirodni broj n).

Ta jednakost proizlazi iz ovog rastavljanja skupa N svih prirodnih brojeva:

(6.3.1) $N = \{1\} \cup (N + 1)$; naravno, $N + 1$ je skup svih brojeva $n + 1$, $(n \in N)$; oba sumanda su tu bez zajedničkih točaka, pa prelazeći na pripadne kardinalne brojeve imamo

$$\aleph_0 = kN = k(\{1\} \cup (N + 1)) = k\{1\} + k(N + 1) = 1 + kN = 1 + \aleph_0.$$

Očito je naime $k(N+1)=kN$, jer je preslikavanje $f(n)=n+1$ $(n \in N)$ obostrano jednoznačno. Time je lema 6.3.1 dokazana.

Lema 6.3.2. $\aleph_0+n=\aleph_0$ za svaki prirodan broj n.

To proizlazi iz rastavljanja

$\{1,2,3,\ldots\}=\{1,2,\ldots,n-1,n\}\cup\{n+1,n+2,\ldots\}$ i jednakosti $k\{1,\ldots,n-1,n\}=n$, $k\{n+1,n+2,\ldots\}=\aleph_0$. Posljednja jednakost proizlazi iz činjenice, da funkcija, upravo translacija, $f(k)=$ $=k+n,(k \in N)$ preslikava skup svih prirodnih brojeva na pravi dio $N+n$ skupa N.[1]

Lema 6.3.3. $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$

To je neposredna posljedica rastava $N=2N\cup(2N-1)$ t. j.

$$\{1,2,\ldots\}=\{2,4,6,\ldots 2n,\ldots\}\cup\{1,3,5,\ldots,2n+1,\ldots\}$$

skupa N prirodnih brojeva u skup $2N$ parnih i skup $2N-1$ neparnih brojeva, kao i činjenice da se N može preslikati i na množinu parnih $2N$ (na pr. funkcijom $2n$, $(n \in N)$ i na množinu $2N-1$ neparnih brojeva (recimo funkcijom $2n-1$, $(n \in N)$).

Leme 6.3.1 - 6.3.3 specijalni su slučaj

Teorema 6.3.1. *Za svaki transfinitni kardinalni broj* $\mathfrak{k}$ *važi jednakost* $\mathfrak{k}+1=\mathfrak{k}$ *i uopće* $\mathfrak{k}+\mathfrak{n}=\mathfrak{k}$ *za svaki kardinalni broj* $\mathfrak{n}\leqslant\aleph_0$. (sjetimo se naprotiv da je $k+1>k$ za svaki prirodni broj k; vidi teorem 5.3.1).

Stvarno, prema teoremu 6.2.1 b) postoji bar jedan kardinalan broj k_0, tako da bude $k=k_0+\aleph_0$; zato je $k+n=(k_0+\aleph_0)+n=$ (asocijacija) $=k_0+(\aleph_0+n)=$ (po gornjim lemama) $=k_0+\aleph_0=$ (po definiciji broja k_0) $=k$.

§ 6.3.2. Primjedba o diferenciji kardinalnih brojeva.

Ako su a i b dva kardinalna broja sa svojstvom $a\leqslant b$, onda je jasno, da postoji bar jedan kardinalan broj x za koji je $x+a=b$; označimo li ga sa $b-a$, tad imamo

Teorem 6.3.2.1. Ako su a i b kardinalni brojevi pa ako je $a\leqslant b$ i a najviše prebrojiv (dakle $a\leqslant\aleph_0$), a diferencija $b-a$ beskonačna, onda je $b-a=b$.

Teorem je neposredna posljedica teorema 6.3.1.

Korolar 6.3.2.1. $\aleph_0-\aleph_0$ može primiti svaku vrijednost $\leqslant\aleph_0$ (naprotiv, za svaki prirodni broj n diferencija $n-n$ je vazda $=0$).

---

[1]) Imaj na umu da $N+n$ označnje skup svih brojeva oblika $m+n$, $(m \in N)$; zato je $N+n\subset N$.

§ 6.3.3. **Množenje.**

Lema 6.3.3.1. $\aleph_0 \cdot n = \aleph_0$ za svaki prirodan broj n.

Stvarno, to je ispravno za $n = 1$ i $n = 2$. Pretpostavimo, da je lema dokazana za prirodan broj $n = k$; ako je onda dokažemo i za $n = k + 1$, bit će ona time, po principu totalne indukcije, dokazana uopće. No, $\aleph_0 (k + 1) =$ (zakon distribucije, obrazac 4.3.1.3) $= \aleph_0 k + \aleph_0 =$ (po hipotezi $\aleph_0 k = \aleph_0$) $= \aleph_0 + \aleph_0 =$ (po lemi 6.3.3) $= \aleph_0$.

Lema 6.3.3.2. $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Prvi dokaz. Po svojoj definiciji, produkt $\aleph_0 \cdot \aleph_0$ nam kazuje koliko ima uređenih parova (x, y) prirodnih brojeva. Nazovemo li $x + y$ visinom uređenog para (x, y), visina je potpuno određen prirodan broj i za zadanu visinu v ima ovih i samo ovih $v - 1$ različitih parova;

$$(1, v - 1), (2\, v - 2), \ldots, (v - 1, 1).$$

Prema tome, množina $N \times N$ svih parova prirodnih brojeva može se zaista rasporediti u jedan niz na pr. ovako;

$$(1,1); \; (1,2), (2,1); \; (1,3), (2,2), (3,1); \ldots$$

Svi parovi s određenom visinom (osim prvoga) smješteni su između dva znaka ";".

Drugi dokaz, Kao i prethodne leme, značit će i lema 6.3.3.2 izvjestan rastav skupa N svih prirodnih brojeva i to, konkretno, rastav niza prirodnih brojeva u niz nizova prirodnih brojeva. Označimo li sa N_0 skup svih neparnih brojeva

$$N_0 = \{1, 3, 5, \ldots, m + 1, \ldots\}$$

i općenito sa N_k skup svih brojeva oblika $N_0 \cdot 2^k$ t. j.

$$N_k = \{1 \cdot 2^k, 3 \cdot 2^k, 5 \cdot 2^k, \ldots, (2n + 1) \cdot 2^k, \ldots\}, \quad (k \in N),$$

dobili smo time niz disjunktnih skupova

$$N_0, N_1, \ldots, N_k, \ldots$$

od kojih je svaki prebrojiv, a svi zajedno iscrpljuju množinu svih prirodnih brojeva t. j.

$$\bigcup_{n \in N} N_n = N \quad \text{odakle}$$

$$k \bigcup_{n \in N} N_n = k\, N,$$

$$\sum_{n \in N} k\, N_n = \aleph_0$$

$$\underbrace{\aleph_0 + \aleph_0 + \ldots + \aleph_0 + \ldots}_{\aleph_0} = \aleph_0$$

No lijeva je strana jednaka $\aleph_0 \cdot \aleph_0$ (v. lemu 4.3.1.3), pa je time lema 6.3.3.2 dokazana.

Lema 6.3.3.3. $\aleph_0^n = \aleph_0$ za svaki prirodan broj n.

Stvar je istinita za $n = 1$; dokažemo li, da je lema istinita za eksponent $n+1$ čim je istinita za eksponent n, bit će lema, prema principu totalne indukcije, time dokazana.

No, $\aleph_0^{n+1} =$ (prema teor. 4.3.1 slučaj 5) $= \aleph_0^n \cdot \aleph = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

Lema 6.3.3.4. $\sum\limits_n \aleph_0^n = \aleph_0, (n \in N).$

Kako je $\aleph_0^n = \aleph_0$ za svaki $n \geqslant 1$, lema se svodi na $\underbrace{\aleph_0 + \aleph_0 + \ldots}_{\aleph_0} = \aleph_0$, a to je dokazano lemom 6.3.3.2.

§ 6.3.4. Nekoliko primjera prebrojivih skupova.

Prebrojivi su:

1) Skup svih parnih (neparnih) prirodnih brojeva;
2) Skup svih cijelih brojeva: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$
3) Skup svih racionalnih brojeva;
4) Skup svih algebarskih brojeva (algebarski brojevi jesu riješenja algebarskih jednadžbi $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$ sa cijelim koeficijentima; pritom n prolazi svima prirodnim brojevima).
5) Množina svih intervala skupa realnih brojeva s racionalnim krajevima;
6) Množina svih kugala kojima središte ima racionalne koordinate, a kojima je radius racionalan broj (kugala ima $\aleph_0^4$).
7) Množina svih algebarskih polinoma $p(x)$ s racionalnim koeficijentima; ta množina ima potenciju $\aleph_0 + \aleph_0^2 + \aleph_0^3 + \ldots$.
8) Množina svih algebarskih polinoma s racionalnim koeficijentima bez obzira, koliko polinom ima varijabla.
9) Množina zatvorenih poligona kojima svi vrhovi imaju racionalne koordinate.

Evo kako na pr. možemo prebrojiti skup svih racionalnih brojeva i time dokazati svojstvo 3 (isp. prvi dokaz leme 6.3.3.2). Obrazujmo niz:

$$\frac{1}{1};\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1};\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1};\ \ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1};\ \ldots \tag{6.3.4.1}$$

Postupak je očigledan: ako je $k \geqslant 2$, onda konačni niz

$$\frac{1}{k-1},\ \frac{2}{k-2}, \ldots, \frac{k-2}{2},\ \frac{k-1}{1}$$

ulazi u niz (6.3.4.1).

Očigledno je, da su u nizu (6.3.4.1) sadržani svi pozitivni racionalni brojevi, čak svaki od njih i *neizmjerno mnogo* puta. Izvedemo li iz toga niza novi niz tako da u njemu precrtamo svaki član koji se već prethodno pojavio, novi niz će sadržavati sve pozitivne racionalne brojeve i k tome svaki od njih jedan jedini put. Ako neposredno poslije svakog člana x u novom nizu stavimo i broj $-x$ kao član niza i ispred svih članova stavimo 0, dobit ćemo ovaj niz:

(6.3.4.2) $$0; \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}; \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}; \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \ldots$$

u kojem su sadržani svi racionalni brojevi i to svaki od njih jedan jedini puta.

§ 6.4. **Kardinalni broj c linearnog kontinuuma** kazuje nam, po samoj definiciji, koliko ima različitih realnih brojeva. Dokazat ćemo, da svaki, ma kako mali, interval realnih brojeva *ima isto* toliko elemenata koliko *ih ima čitavi prostor* od 3 ili uopće od n dimenzija $(n \in N)$.

Lema 6.4.1. *Svaki interval* (a, b) *realnih brojeva ima potenciju kontinuuma što znači da se može preslikati na čitavi kontinuum* C_1 *realnih brojeva.*

Najprije, interval $(-1, 1)$ je ekvivalentan sa C_1, jer funkcija $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $(-\infty < x < \infty)$ preslikava obostrano jednoznačno, skup C_1 svih realnih brojeva na interval $(-1, 1)$. U drugu ruku, obostrano jednoznačna funkcija $\frac{1}{b-a}(2x - a - b)$ preslikava proizvoljni otvoreni interval (a, b) na interval $(-1, 1)$.

U ostalom, Valironova funkcija

$v(x) = \frac{b-a}{2}\frac{x}{1+|x|} + \frac{b+a}{2}$ prevodi direktno linearni kontinuum C_1 na interval (a, b), pri čemu čak *racionalni brojevi* prelaze opet u racionalne brojeve; k tome, ako je $a < b$, onda iz $x < y$ slijedi $v(x) < v(y)$.

Korolar 6.4.1. Množina svih pravih realnih razlomaka ima potenciju kontinuuma.

Korolar 6.4.2. Ma koja dva intervala brojnog pravca imaju jedan te isti kardinalni broj i to kardinalni broj c.

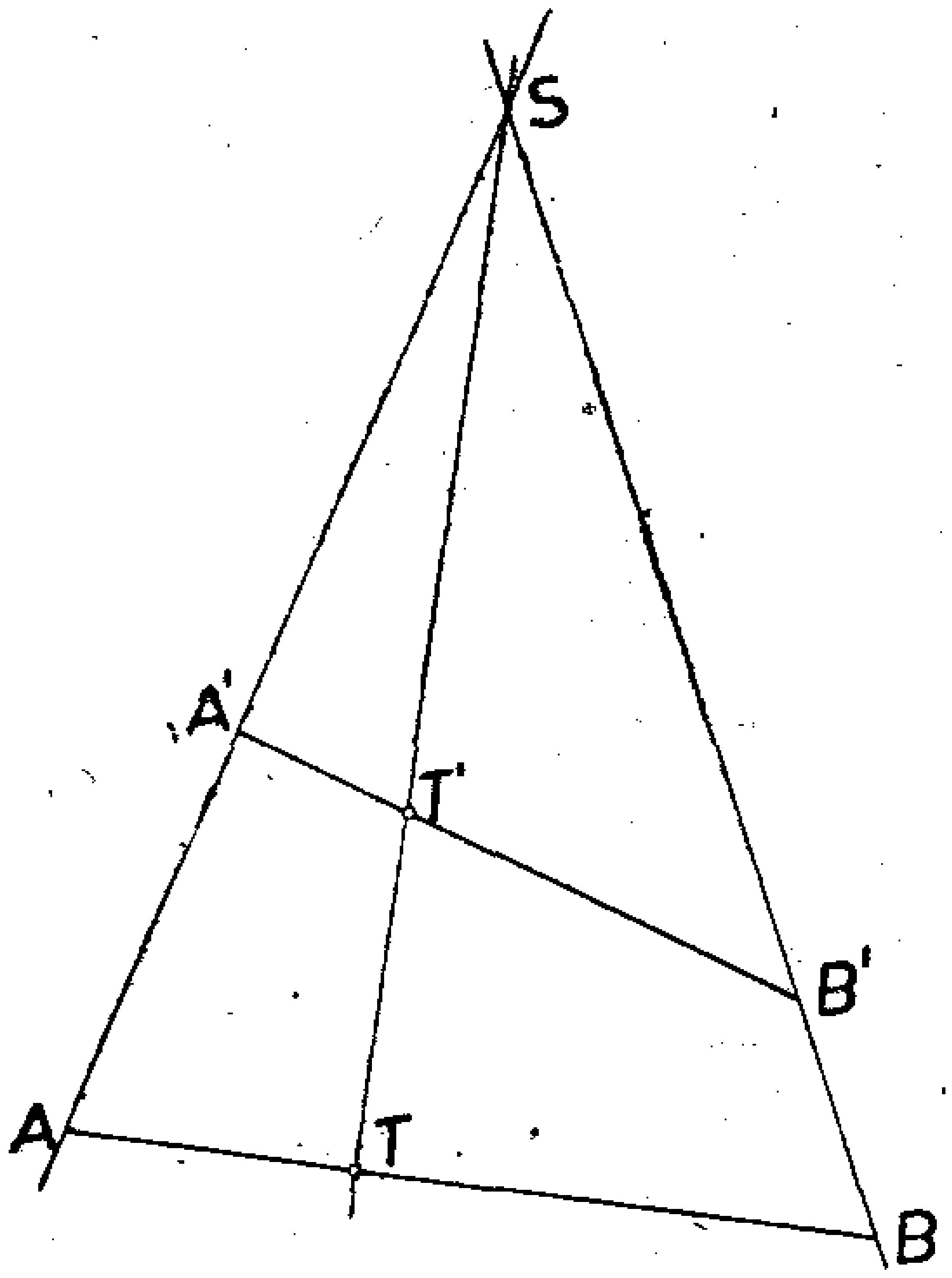
Da ma koja dva odreska AB, $A'B'$ pravca imaju jednako mnogo točaka, može se geometrijski dokazati tako, da nacrtamo ma kakav četverokut kojemu su AB, $A'B'$ nasuprotne stranice; označimo li tada sa S sjecište pravca AA', BB' (S može biti i u ∞), onda svakoj točki

$T \in AB$ pripada posve određena točka $T' \in A'B'$ kao presjecište pravaca $A'B'$ i TS; dobivena transformacija $f(T) = T'$, $(T \in AB)$ očito je obostrano jednoznačna.

Lema 6.4.2. $c + c = c$.

Da je $c + c \geqslant c$, to je jasno; no važi i $c + c \leqslant c$, jer, promatramo li ma koja dva disjunktna intervala realnih brojeva, svaki od njih prema lemi 6 4.1 ima potenciju c i svaki je od njih dio kontinuuma C_1 potencije c, dakle je zaista $c + c \leqslant c$.

Odatle izlazi i sama tražena jednakost.



Sl. 6.4.1. Dužine AB i $A'B'$ imaju jednako mnogo točaka, jer je sparivanje $T \rightleftarrows T'$ obostrano jednoznačno

Lema 6.4.3. $c \cdot n = c$ za svaki prirodni broj $n > 0$. (Dokaz totalnom indukcijom ili slično kao lema 6.4.2 ili 6.4.4).

Lema. 6.4.4. $c \aleph_0 = c$ t. j.

$$\underbrace{c + c + c + \ldots c \ldots}_{\aleph_0} = c$$

Dovoljno je da dokažemo, da je $c \cdot \aleph_0 \leqslant c$. To pak izlazi odatle što linearni kontinuum C_1 sadrži čitav beskonačan niz disjunktnih dijelova potencije c (na pr. poluintervale $[n, n+1)_{C_1}$ za $n \in N$).

§ 6.5. Preslikavanje ravnine ili prostora na ma koji segment pravca.

Lema 6.5.1. $c \cdot c = c^2$ *(ravnina ima isto toliko točaka koliko ih ima ma koji odrezak na pravcu).*

§ 6.5.1. Za pretstavnika broja c uzet ćemo ovaj put skup

(6.5.1.1) $$(0,1]$$

svih realnih brojeva x za koje je $0 < x \leqslant 1$, pa se dakle radi o tome, da skup $(0, 1]$ preslikamo na skup $(0, 1] \times (0, 1]$ t. j. na jedinični kvadrat K (gl. sliku 6.5.3.1 str. 68) od kojeg smo uklonili stranice što leže na koordinatnim osima. Poslužit ćemo se jednim naročitim prikazivanjem brojeva $x \in (0, 1]$.

Najprije, svaki takav broj x ima jedan i samo jedan decimalni razvoj

(6.5.1.2) $$x = 0, x_1\, x_2\, x_3 \ldots .$$

sa beskonačno mnogo decimalnih mjesta $\neq 0$. Tada se ideja dokaza leme 6.5.1 sastoji u tome, da decimalnom broju (6.5.1.2) pridružimo točku ravnine sa koordinatama

$$0, x_1\, x_3\, x_5 \ldots ; \quad 0, x_2\, x_4\, x_6 \ldots ; \ldots$$

Da ove koordinate budu također oblika (6.5.1.2) t. j. da sadrže beskonačno mnogo decimalnih mjesta različitih od 0, poslužimo se t. zv. *Königovim predočivanjem broja* (6.5.1.2).

§ 6.5.2. Nazovimo *Königovim slogom* svaki konačan niz cifara 0, 1, ... 9 od kojih je jedino posljednji član niza $\neq 0$, dok su svi ostali članovi $= 0$.

Svi Königovi simboli prebrojavaju se na pr. ovako:

(6.5.2.1) 1, 2, 3, 4, . . ., 9; 01, 02, . . ., 09; 001, 002, . . ., 009; 0001, 0002, . . ., 0009; . . .

Zakon, kako se taj niz obrazuje, očigledan je.

Očito je, da svaki beskonačan niz Königovih slogova

$$k_1 \; k_2 \; k_3 \; . \; . \; . \tag{6.5.2.2}$$

određuje jedan jedini decimalni razvoj oblika (6.5.1.2) naime broj

$$0, k_1 \, k_2 \, k_3 \; . \; . \; . \; . \; . \tag{6.5.2.3}$$

Tako na pr. nizu Königovih slogova 02, 03, 1, 5, 007, 0007, ... odgovara broj

$$0{,}0203150070007 \; . \; . \; . \; .$$

Važi i obrat: svakim decimalnim brojem oblika (6.5.1.2) potpuno je određen jedan jedini niz

(6.5.2.4) $0, \bar{x}_1 \; \bar{x}_2 \; \bar{x}_3 \; . \; . \; . \; .$ Königovih slogova, pri čemu za svaki n simbol

$$\bar{x}_n \tag{6.5.2.5}$$

označuje slog sastavljen od n-te cifre c_n u nizu $x_1, x_2, \ldots$ koja je različita od 0, te od svih nula u tom nizu koje se nalaze neposredno ispred c_n. Na pr. za broj 0, 04 004 0004 . . . treći Königov slog glasi 0004.

§ 6.5.3. Prijeđimo sada na dokaz leme 6.5.1.

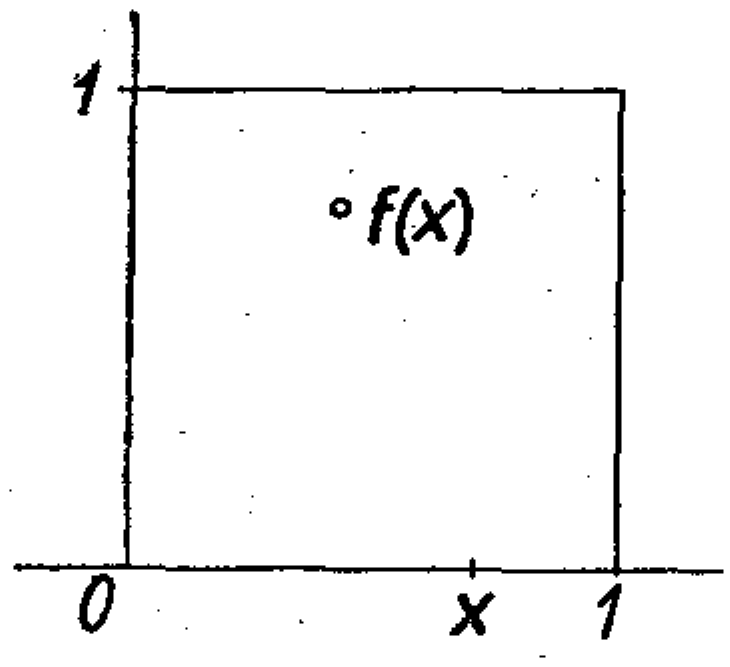
Dodijelimo li realnom broju (6.5.1.2) točku $f(x)$ u ravnini kojoj su Descartesove koordinate:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0, \bar{x}_1 \; \bar{x}_3 \; \bar{x}_5 \; . \; . \; . \; . \; . \; \bar{x}_{2n+1} \; . \; . \; . \; . \\ 0, \bar{x}_2 \; \bar{x}_4 \; . \; . \; . \; . \; . \; \bar{x}_{2n} \; . \; . \; . \; . \; , \end{array} \right. \tag{6.5.3.1}$$

tada je dobivena transformacija

$$f(x), \; (0 < x \leqslant 1) \tag{6.5.3.2}$$

obostrano jednoznačna i preslikava polusegment $0 < x \leqslant 1$ na jedinični kvadrat K s kojega su uklonjene stranice što leže u koordinatnim osima.



Sl. 6.5.3.1

Preslikavanjem (6.5 3.1) koje broju $x \varepsilon (0, 1]$ pridijeljuje tačku $f(x)$ prelazi polusegment $(0, 1]$ na čitav nacrtani kvadrat.

a) Najprije, transformacija f očito je jednoznačna.

b) Različitim argumentima odgovaraju različite vrijednosti. Ako je naime $x \neq x'$, onda nije $\overline{x_n} = \overline{x'_n}$, za svaki n; pa neka je ν prvi indeks, tako da Königov slog $\overline{x_\nu}$ nije identičan sa Königovim slogom $\overline{x'_\nu}$; ako je ν paran broj tada je

$0, \overline{x_2}\, \overline{x_4} \ldots \neq 0, \overline{x'_2}\, \overline{x'_4} \ldots$, dakle i $f(x) \neq f(x')$, jer točke $f(x)$, $f(x')$ imaju različite ordinate; ako je pak ν neparan broj, tada se prema (6.5 3.1) apscisa točke $f(x)$ razlikuje sa od apscise točke $f(x')$, dakle je opet $f(x) \neq f(x')$.

c) Ako je $T\,(a, b)$ ma koja točka kvadrata K, postoji jedan broj $x \in (0, 1]$ tako da bude $f(x) = T$.

Stvarno, ako su

$$a = 0, \overline{a_1}\; \overline{a_2}\; \overline{a_3} \ldots$$

$$b = 0, \overline{b_1}\; \overline{b_2}\; \overline{b_3} \ldots$$

koordinate točke T izražene Königovim slogovima, pa ako stavimo

$$x = 0, \overline{a_1}\; \overline{b_1}\; \overline{a_2}\; \overline{b_2}\; \overline{a_3}\; \overline{b_3} \ldots,$$

tada je $0 < x \leqslant 1$ i $f(x) = T(a, b)$.

Dakle je $f(0, 1] = K$.

Time je tražena jednakost $c \cdot c = c$ dokazana.

§ 6.5 4. Kako je $k\,C = c$ i $k\,d = c$ za svaku dužinu d, postoji jednakost

$$k(C_1 \times C_1) = k\,d$$

t. j. *beskonačna Euklidova ravnina* $C \times C$ *ima isto toliko točaka koliko i proizvoljna dužina d,* jer se između točaka ravnine i točaka dužine d može uspostaviti obostrano jednoznačno preslikavanje.

§ 6.5.5. **Primjedba.** Srž dokaza leme 6.5.1 sastojala se zapravo u tome, da smo množinu svih *nizova* Königovih slogova preslikali na množinu svih *uređenih parova nizova* Königovih slogova, oslanjajući se na rastav niza brojeva 1, 2, 3, 4, ... na niz parnih i niz neparnih brojeva.

Na posve isti način, transformacija g koja broju (6.5.1.2) pridružuje točku $(\xi(1), \xi(2), \xi(3))$ u prostoru sa Descartesovim koordinatama

$$\xi(1) = 0, \overline{x_1}\ \overline{x_4}\ \overline{x_7} \ldots$$
$$\xi(2) = 0, \overline{x_2}\ \overline{x_5}\ \overline{x_8} \ldots$$
$$\xi(3) = 0, \overline{x_3}\ \overline{x_6}\ \overline{x_9} \ldots$$

prevodi, na obostrano jednoznačan način, skup (0, 1] na skup - zapravo kocku - $(0, 1] \times (0, 1] \times (0, 1]$, pa zato imamo $c^3 = c$.

Slično se dokazuje

Lema 6.5.5.1. $c^n = c$ za svaki prirodan broj n.

Analogno, ako točki $0, \overline{x_1}\ \overline{x_2} \ldots$ iz (0, 1] pridružimo beskonačni niz brojeva $\xi(n)$ iz (0, 1] ovako:

$$\xi(1) = 0, \overline{x_1}\ \overline{x_3}\ \overline{x_5}\ \overline{x_7} \ldots$$
$$\xi(2) = 0, \overline{x_{1\cdot 2}}\ \overline{x_{3\cdot 2}}\ \overline{x_{5\cdot 2}}\ \overline{x_{7\cdot 2}} \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\xi(n) = 0, \overline{x_{1\cdot 2^n}}\ \overline{x_{3\cdot 2^n}}\ \overline{x_{5\cdot 2^n}} \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

preslikava se time polusegment (0, 1] na *„jediničnu kocku"* od neizmjerno mnogo dimenzija, kojoj su točke $(\xi(1), \xi(2), \xi(3), \ldots)$. Naravno ta *„kocka"* ima kardinalni broj $c^{\aleph_0}$, tako da je dakle ispravna

Lema 6.5.5.2. $c^{\aleph_0} = c$.

Leme 6.5.5.1 i 6.5.5.2 možemo izreći kao

Teorem 6.5.5.1. *Ako je c broj koji kazuje koliko ima realnih brojeva, tada je* $c^n = c$. Drugim riječima čitav „prostor" C_n od n dimenzija ekvivalentan je s proizvoljno kratkom duži; *pritom je* n *bilo kakav prirodan broj ili* $\aleph_0$.

§ 6.6. Veza između transfinitnih brojeva $\aleph_0$ i c.

Teorem 6.6.1. $\aleph_0^{\aleph_0} = c$

Razmatranja u § 6.5.2 pokazala su, da se skup svih nizova Königovih slogova može preslikati na čitav skup (0, 1] svih pozitivnih realnih brojeva koji su $\leqslant 1$. No, označimo li sa K skup (6.5.2.1) svih Königovih simbola, a sa N skup svih prirodnih brojeva, onda skup svih nizova beskonačnih Königovih simbola nosi funkcionalnu oznaku $N_1(K)$.

To znači da množine

$$N_1(K) \text{ i } (0, 1]_c$$

imaju jedan te isti kardinalni broj; dakle

$$k\,N_1(K) = k\,(0, 1]_c \quad \text{t. j.}$$
$$(kN)^{kK} = c.$$

No, prema (6.5.2.1) očito je $kK = \aleph_0$, pa zato zaista važi gornji teorem.

P r i m j e d b a 6.6.1. Na osnovu formule $\aleph_0^{\aleph_0} = c$, odmah se dokazuju leme 6.5.1, 6.5.5. i 6 5.5.2.

Tako na pr.

$c^{\aleph_0} =$ (prema teoremu 6.6.1) $= (\aleph_0^{\aleph_0})^{\aleph_0}$ = (prema § 4.3.1 t. 6) = $= \aleph_0^{\aleph_0 \cdot \aleph_0}$ (prema lemi 6.3.3.2) $= \aleph_0^{\aleph_0}$ = (prema teoremu 6.6.1) $= c$; dakle je ispravna lema 6.5.5.2.

T e o r e m 6.6.2. (Veza između $\aleph_0$ i c). $2^{\aleph_0} = c$ tj. *množina svih nizova brojeva* 0 *i* 1 *ima potenciju kontinuuma.*

Stvarno, ako ma kojem nizu

(6.6.1) $$a_1, a_2, \ldots$$

sastavljenom od 0 ili 1 pridijelimo realan broj 0, $a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ u diadskom sistemu, dakle sumu reda

(6.6.2) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 2^{-n}$$

preslikat će se time skup

(6.6.3) $$\{0, 1\}_1 \ (N)$$

svih nizova (6.6.1) na segment $[0, 1]_C$ svih realnih brojeva $0 \leqslant x \leqslant 1$. To je preslikavanje jednoznačno; ono nije recipročno jednoznačno, jer je očito da su na pr. diadski razlomci 0, 0100 . . . i 0,00111 . . . međusobno jednaki ma da odgovaraju različitim elementima

0,1,0,0,0, ...   0,0,1,1,1,1, ... skupa $\{0, 1\}_1 (N)$.

No, uklonimo li iz toga skupa sve one nizove u kojima su svi članovi = 0, osim njih konačno mnogo, ukloni se time određen *prebrojiv dio*, pa od skupa (6 6.3) ostaje (gl. teorem 6.3.2.1) i dalje jedan dio S iste potencije kao i sam polazni skup (6.6.3). No, veza (6.6.2) između člana $a_1, a_2 \ldots$ skupa S i broja (6 6.2) iz $[0, 1]_{C_1}$ je očigledno obostrano jednoznačna, pa je dakle $kS = k\,[0, 1]_{C_1} = c$. No,

$$kS = k\,\{0, 1\}_1(N) = 2^{\aleph_0},$$

što s prethodnom relacijom daje teorem 6.6.2.

Na posve isti način služeći se brojnim pozicionim sustavom baze n (a ne 2) dokazuje se:

T e o r e m 6.6.3. $n^{\aleph_0} = c$ *za svaki prirodni broj* $n > 1$.

Uostalom iz $2 \leqslant n \leqslant \aleph_0$ slijedi $2^{\aleph_0} \leqslant n^{\aleph_0} \leqslant \aleph_0^{\aleph_0}$ (t. j. prema teor. 6.6.1 i 6.6.2

$$c \leqslant n^{\aleph_0} \leqslant c \quad \text{odakle izlazi teorem 6.6.3.}$$

P r i m j e d b a 6.6.2 n u teoremu 6.6.3 može značiti ma koji kardinalni broj za koji je $1 < n \leqslant c$.

§ 6.7 **Triadski skup.** Dodijelimo li članu (6.6.1) skupa $\{0, 1\}_1 (N)$ ne broj $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 2^{-n}$ nego broj

$$(6.7.1) \qquad 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 3^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n) \cdot 3^{-n}$$

preslikat' će se time skup (6.7.1) na skup

$$(6.7.2) \qquad T$$

pravih razlomaka koji se u brojnom sistemu sa bazom 3 *(triadski brojni sistem)* mogu predočiti i bez znamenke 1; naime, kako je $a_n = 0$ ili 1, bit će $2a_n =$ ili 0 ili 2, pa proizvoljnom nizu $a_1, a_2, \ldots$ brojeva 0, 1 odgovara proizvoljan niz $2a_1, 2a_2, \ldots$ cifara 0 i 2. Promotrimo pobliže skup T svih brojeva (6.7.1); to je t. zv. *triadski skup.* Njega dobijemo iz segmenta $[0, 1]_{c_1}$ svih realnih brojeva $0 \leqslant x \leqslant 1$ ovako: Radeći sa triadskim brojnim sustavom najprije se točkama 0,1 i 0,2[1] segment [0, 1] raspada na tri jednaka segmenta, pa brisanjem *srednjeg intervala* (0'1, 0'2) dužine $\frac{1}{3}$ preostaju još dva segmenta [0, 0'1] i [0'2, 1] svaki dužine $\frac{1}{3}$.

Sl. 6.7.1
Neprestanim brisanjem otvorenih precrtanih intervala preostaje t. zv. triadski skup T.

To je prvi korak.

Kod drugog ćemo koraka sa segmentima dobivenim u prethodnoj radnji učiniti isto ono što smo učinili sa početnim segmentom [0, 1] t. j. svakog ćemo od njih razdijeliti na tri jednaka dijela i izbaciti srednji interval (tako da krajevi izbačenih intervala uvijek ostaju neizbačeni). Stvar se ponavlja za svaki korak $n > 1$.

Vidimo, da ni jedan od brojeva skupa T nije pri tom izbačen; u drugu ruku, vidimo, da se od jediničnog segmenta [0,1] izbacuje najprije $\frac{1}{3}$ pa $2 \cdot \frac{1}{3^2}$. i t. d., da se dakle sveukupno izbaci dužina

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{2^3}{3^4} + \ldots = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Drugim riječima, triadski skup T smješten je u segmentu [0, 1] tako da oni intervali koji ne pripadaju skupu T ali kojima krajevi leže u T imaju totalnu dužinu = 1 dakle isto koliko i sam segment [0, 1].

[1]) Jedanput za uvijek istaknimo da mi (u koliko ne kažemo obrnuto) ne pravimo razliku između točaka brojevnog pravca i brojeva.

Zato je mjera skupa T jednaka 0, ma da mu je kardinalni broj isti kolik je i kardinalni broj čitavog linearnog kontinuuma.

Teorem 6.7.1. *Cijeli prostor ima isti kardinalni broj kao triadski skup T.*

To je rezultat koji zvuči još paradoksalnije nego rezultat da prostor ima isto toliko točaka koliko ih ima ma koji segment na brojnom pravcu. Međutim, ako i postoji obostrano jednoznačno preslikavanje između točaka pravca i točaka prostora, to preslikavanje nije, niti može biti, obostrano neprekidno. Uopće, za dva različita prirodna broja m i n prostori C_m i C_n, ma da imaju jednako mnogo točaka (Cantor) naime njih c, ne mogu se dovesti u obostrano jednoznačno i obostrano *neprekidno* preslikavanje, kao što je to Brouwer dokazao 1911 godine. Time je ipak uspostavljen onaj sklad što ga imamo u vidu, kad govorimo o prostorima raznih dimenzija, a koji su, što se tiče pitanja broja točaka, svi međusobno istovjetni.

§ 6.8. Transcendentni brojevi.

§ 6.8.1. Egzistencija transcendentnih brojeva.

Teorem 6.8.1.1. *Svaki interval* $(a, b)_c$ *realnih brojeva — pa ma kako bio kratak — sadrži kontinuum mnogo t. j.* c *transcendentnih brojeva.*

Uistinu, označimo li sa A skup svih algebarskih brojeva u (a, b), a sa B skup svih transcendentnih brojeva u (a, b), tada je

$$(a\ b)_c = A \cup B,\ A \cap B = v;\ \text{odatle}$$

$$k\,(a, b)_c = k A + k B.$$

No, $k(a, b)_c = c$ (gl lema 6.4.1), $kA = \aleph_0$ (§ 6.3.4 tačka 4), pa je dakle $c = kB + \aleph_0$; odatle $kB = c - \aleph_0$; zato je, prema teoremu 6.3.2.1 kB ili prirodan broj, što nije, ili sam minuend c. Dakle je uistinu $kB = c$.

§ 6.8.2. Liouville-ovi transcendentni brojevi.

Evo kako možemo konstruirati kontinuum mnogo transcendentnih brojeva.

Dodijelimo li članu $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ skupa $\{0, 1\}_1 (N)$ broj

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^{n!}},\ \text{gdje je}\ n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \tag{6.8.2.1}$$

preslikat će se time skup $\{0, 1\}_1 (N)$ na jedan dio segmenta $[0, 1]$ i, izuzev one nizove $a_1, a_2, \ldots$ u kojima ima tek konačno mnogo jedinica, pripadni broj (6.8.2.1) bit će ne algebarski nego transcendentan. Liouville je naime 1851. dokazao ovo:

Ako je ξ algebarski broj stepena n t. j. ako ξ zadovoljava algebarsku jednakost sa cijelim koeficijentima i to stepena n, dok ne zadovoljava nijednu algebarsku jednakost stepena $< n$ i s cijelim koeficijentima, onda nejednakost

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{n+1}} \tag{6.8.2.2}$$

ima tek konačno mnogo rješenja u cijelim brojevima p i q.

Konstrukcijom brojeva ξ sa svojstvom, da ima neizmjerno mnogo različitih racionalnih brojeva $\frac{p}{q}$ koji zadovoljavaju (6.8.2.2) i to za svaki n, dokazao je Liouville egzistenciju transcendentnih brojeva.

Dokažimo na osnovu Liouvilleova teorema ovu:

Lemu 6.8.2.1. Čim u nizu

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\quad (a_n = 0 \text{ ili } 1)$$

ima beskonačno mnogo jedinica, broj (6.8.2.1) je transcendentan.

Stvarno, stavimo:

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^{n!}} = \left(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^{2!}} + \frac{a_3}{10^{3!}} + \ldots + \frac{a_k}{10^{k!}}\right) + \left(\frac{a_{k+1}}{10^{(k+1)!}} + \ldots\right) =$$

$$\frac{p_k}{q_k} + \left(\frac{a_{k+1}}{q_k^{k+1}} + \frac{a_{k+2}}{q_k^{(k+1)(k+2)}} + \ldots\right)$$

Tu je

$$q_k = 10^{k!}.$$

No, $a_n = 0$ ili 1, pa je zato $\left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| \leqslant \frac{1}{q_k^{k+1}} + \frac{1}{q_k^{(k+1)(k+2)}} + \ldots$

$$< \frac{1}{q_k^{k+1}} + \frac{1}{q_k^{(k+1)\,2}} + \frac{1}{q_k^{(k+1)\,3}} + \ldots$$

$=$ (suma geom. reda) $= \frac{1}{q_k^{k+1} - 1}$, a to je očito $< \frac{1}{q_k^k}$; dakle za $k = 1, 2, \ldots n$ imamo:

$$\left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^k},\quad q_k = 10^{k!}, \tag{6.8.2.3}$$

$$p_k = a_1 10^{k!-1} + a_2 10^{k!-2!} + \ldots + a_{k-1} 10^{k!-(k-1)!} + a_k\,.$$

Kad bi broj ξ bio algebarski, označimo sa n njegov stepen; ako je $k > n+1$, tada je $\frac{1}{q_k^k} < \frac{1}{q_k^{n+1}}$, pa će relacija (6.8.2.3) za $k = n+2$, $n+3, \ldots$ dati nejednakost

$$\left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^{n+1}} \tag{6.8.2.4}$$

za neizmjerno mnogo brojeva $\frac{p_k}{q_k}$, što po Liouville-ovom teoremu znači da ξ nije stepena n, protivno pretpostavci. Dakle je ξ transcendentan.

§ 6.9. ZADACI.

§ 6.9.1. Dokazati direktno da je svaki od skupova 1-9 u § 6.3.3.4 prebrojiv.

§ 6.9.2. Dokazati direktno da svaki interval realnih brojeva sadrži kontinuum mnogo (c) transcendentnih brojeva.

§ 6.9.3. Dokazati da se Euklidov prostor C_n od n dimenzija ($n = 1, 2, 3, \ldots$) može obostrano jednoznačno preslikati na skup transcendentnih brojeva sadržanih u triadskom skupu T iz § 6.7.

§ 6.9.4. Svaki skup disjunktnih intervala je konačan ili prebrojiv.

§ 6.9.5. Svaka množina disjunktnih kugala je konačna ili prebrojiva.

§ 6.9.6. Skup svih neprekidnih realnih funkcija s jednim ili više realnih argumenata ima potenciju kontinuuma.

§ 6.9.7. Množina svih nizova racionalnih brojeva (koji konvergiraju prema 0) ima isti kardinalni broj kao i množina svih realnih nizova — naime potenciju c čitavog linearnog kontinuuma.

Dokaži, da za svaki a) realni ili b) kompleksni broj x ima c različitih nizova a) racionalnih, b) kompleksnih brojeva koji konvergiraju prema x. $2 \leq k \Rightarrow 2^k \leq k^k$; $2^k = 2^{kk} = (2^k)^k \geq k^k$; $2^k = k^k$

§ 6.9.8. Dokaži da je $2^k = k^k$ za svaki transfinitni broj k; općenito, ako je $2 \leqslant a \leqslant k$, onda je $a^k = k^k$ za svaki transfinitni broj k.

§ 6.9.9. Totalnom indukcijom definiraj sumu proizvoljnih dvaju prirodnih brojeva, pa dokaži da za zbrajanje važi a) zakon komutacije, b) zakon asocijacije.

§ 6.9.10. Induktivno definiraj produkt prirodnih brojeva ovako: $m \cdot 1 = m$, $m \cdot (n+1) = mn + m$ i dokaži, da za množenje važi zakon komutacije, asocijacije te distribucije.

§ 6.9.11. Obrazuj obostrano jednoznačno preslikavanje jedinične kocke na: a) skup pravih razlomaka, b) skup realnih brojeva.

§ 6.9.12. Dokaži, da skup realnih brojeva, koji se u decimalnom brojnom sistemu mogu prikazati i bez znamenaka 5 i 6, ima kardinalni broj c. Opiši, kako zorno možemo dobiti taj skup izbacujući iz linearnog kontinuuma pojedine komade.

§ 6.9.13. Preslikaj obostrano jednoznačno zadani kvadrat u zadanu kocku.

§ 6.9.14. (Prirodne diferencije prirodnih brojeva). Svaki se prirodni broj n može, i to na neizmjerno mnogo načina, prikazati kao diferencija prirodnih brojeva $q-p$, pri čemu je $p<q$, Obrnuto, ako su p i q prirodni brojevi i k tome $p<q$ onda je $q-p$ potpuno određen prirodan broj. Dosad smo definirali jednakost, poredaj, sumu, produkt i diferenciju među prirodnim brojevima. Prikažemo li prirodne brojeve na taj novi način t. j. kao diferencije prirodnih brojeva pri čemu je suptrahend manji od minuenda (prirodne diferencije prirodnih brojeva), onda se i pomenute relacije i operacije mogu lako izraziti na novom jeziku. Dokaži da za prirodne diferencije važi ovo:

I. (Jednakost): Ako je $a-b=c-d$, onda je $a+d=c+b$; i obrnuto;

II. (Poredaj): Ako je $a-b>c-d$, onda je $a+d>c+b$; i obrnuto;

III. (Suma): $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$;

IV. (Produkt): $(a-b)\cdot(c-d)=(ac+bd)-(ad+bc)$;

V. (Diferencija): Ako su a, b, c, d prirodni brojevi te $a>b$, $c>d$ i k tome $a-b>c-d$, onda je i $(a-b)-(c-d)$ prirodan broj i to prirodna diferencija $(a+d)-(b+c)$.

Primjedba. Važno je i korisno da uočimo, da je suma dviju prirodnih diferencija opet jedna prirodna diferencija. Isto važi i za produkt (grupovnost sabiranja odn. množenja u skupu svih prirodnih diferencija prirodnih brojeva).

GLAVA TREĆA

DJELIMIČNO UREĐENI SKUPOVI. UREĐENI SKUPOVI. DOBRO UREĐENI SKUPOVI. ORDINALNI BROJEVI.

Pojam uređenja je od osnovne važnosti. U ovoj ćemo se glavi upoznati sa skupovima u kojima je uveden poredak, pa ćemo polazeći od takovih skupova doći do rednih (ordinalnih) brojeva na sličan način kako smo polazeći od proizvoljnjih skupova došli do kardinalnih brojeva.

Slično kao što smo imali konačne i beskonačne *kardinalne* brojeve imat ćemo sada konačne i beskonačne *ordinalne* brojeve. Baš pojimanje transfinitnih ordinalnih brojeva spada među najljepša poglavlja teorije skupova. I sa druge strane vidjet ćemo jedno proširivanje broja, koji nije niti ordinalni niti kardinalni broj: radi se o t. zv. *tipovima poređaja* djelomično uređenih skupova.

§ 7. RELACIJA EKVIVALENCIJE (JEDNAKOSTI) MEĐU ELEMENTIMA SKUPA.[1]

§ 7.1. **Relacija ekvivalencije.** Ako nam je zadan izvjestan skup S, onda se među prvim pitanjima postavlja ovo: može li se za pojedina dva elementa $x, y,$ skupa S reći da su „ekvivalentna", „ravnopravna", „jednaka" ili „neekvivalentna", „neravnopravna", „nejednaka"; simbolički

$$x \approx y \quad \text{odnosno} \quad x \text{ non} \approx y.$$

Pritom, naravno, zahtjevamo da relacija ekvivalencije (jednakosti) $\approx$ bude:

a) *povratna (refleksivna)* t. j.

(7.1.1) $$x \approx x \quad \text{za svaki} \quad x \in S.$$

b) *obrtna (simetrična)*:

(7.1.2) $$\text{ako je} \quad x, y \in S \quad \text{i} \quad x \approx y, \quad \text{onda je} \quad y \approx x;$$

c) *prelazna (tranzitivna)*: Ako je $x, y, z \in S$ te

(7.1.3) $$\text{ako je} \quad x \approx y, \quad y \approx z \quad \text{onda je} \quad x \approx z$$[2]

---

[1]) O relacijama ekvivalencije v. naročito knjigu P. Dubreil [1].

[2]) Ili kraće: iz $x = y = z$, slijedi $x = z$.

Definicija. 7.1.1. Relacija ekvivalencije u skupu S jest svaka binarna relacija u S koja je povratna, obrtna i prelazna. Drugim riječima, veli se da je među elementima skupa S definirana relacija jednakosti ili ekvivalencije $\approx$ — ako za svaki $x \in S$ i svaki $y \in S$ možemo reći, da li je x ekvivalentno sa y, ili x nije ekvivalentno sa y, odnosno simbolički da li je

$$x \approx y, \text{ ili je } x \operatorname{non} \approx y. \tag{7.1.4}$$

Pritom se nadalje zahtijeva, da relacija $\approx$ bude refleksivna, simetrična i tranzitivna, t. j. da zadovoljava uslove (7.1.1), (7.1.2), (7.1.3).

To je opća definicija relacije ekvivalencije, jednakosti (kongruencije, sličnosti i t. d.). Relacija ekvivalencije može biti vrlo raznovrsna kao što ćemo se još uvjeriti.

Relacije ekvivalentnosti možemo razlikovati jedne od drugih pomoću indeksa ili pomoću raznih drugih dodataka. Tako se na pr. sa $\approx_1$, $\approx_5$ mogu označiti dvije relacije ekvivalentnosti.

Primjedba: Izreke

$$x \approx y, \quad \text{i} \quad x \operatorname{non} \approx y$$

međusobno se isključuju i baš zato što je odnos $x \operatorname{non} \approx y$ negacija odnosa $x \approx y$, vazda je ispunjen jedan od odnosa (7.1 4)

Primjer 7.1.1. Neka je n ma koji prirodan broj; ako za $x, y \in N$ oznaka

$$x \equiv y, \ (\text{mod } n) \ (\text{čitaj: } x \text{ kongrenentno } y \text{ modulo } n)$$

stoji mjesto činjenice, da je broj $x - y$ djeljiv sa n, onda se time dobije relacija ekvivalencije u skupu N prirodnih brojeva, pa svi međusobno ekvivalentni prirodni brojevi obrazuju aritmetičku progresiju sa diferencijom n.

Napišemo li beskonačne nizove:

$$\begin{aligned}
Nn - (n-1) &= \{1,\ 1+n,\ 1+2\cdot n, \ldots\} \\
Nn - (n-2) &= \{2,\ 2+n,\ 2+2\cdot n, \ldots\} \\
Nn - (n-3) &= \{3,\ 3+n,\ 3+2\cdot n, \ldots\} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Nn - 1 \quad &= \{n-1,\ 2n-1,\ 3n-1, \ldots\} \\
Nn \quad &= \{n,\ 2n,\ 3n, \ldots\}
\end{aligned}$$

dobivamo time n aritmetičkih nizova; ma koja dva elementa istog skupa, međusobno su u odnosu $\equiv$ modulo n, dok naprotiv ni jedan element jednog od gornjih n skupova nije kongruentan modulo n ni s jednim članom drugog skupa.

Primjer 7.1.2. Ako je M ma kakva množina skupova, pa ako za dva skupa $a \in M$ i $b \in M$ pišemo $a \sim b$ onda i samo onda, ako je $ka \equiv kb$ t. j. ako se čitav skup a može obostrano jednoznačno preslikati na čitav skup b, dobivena relacija $\sim$ jest jedna relacija ekvivalencije u množini M (isp. § 3.1).

Primjer 7.1.3. Pođimo od skupa C svih realnih brojeva pa za $a \in C$, $b \in C$ naznačimo sa $a \varrho b$ činjenicu, da je broj $a-b$ racionalan; dobivena relacija ϱ jest jedna relacija ekvivalencije u skupu svih realnih brojeva.

§ 7.2. Ekvivalentni elementi skupa S i raspodjela skupa S u razrede.

§ 7.2.1. Ako imamo bilo kakav rastav skupa S u množinu M disjunktnih dijelova skupa S, pa ako za $x, y \in S$ stavimo

$$x = y$$

onda i samo onda, ako x i y pripadaju jednom te istom elementu množine M, (a inače $x \neq y$), dobit ćemo, kao što se odmah vidi, određenu relaciju ekvivalentnosti u skupu S. Elementi množine M jesu najopsežniji dijelovi skupa S sastavljeni od međusobno ekvivalentnih elemenata iz S.

§ 7.2.2. Obratno, svaka relacija ekvivalentnosti u S proizvodi posve određeno rastavljanje skupa S u sistem *disjunktnih* skupova, od kojih je svaki *najširi dio skupa* S sastavljen od sve samih ekvivalentnih elemenata skupa S.

Nazovimo *klasom (razredom)* skupa S modulo $\approx$ svaki *najveći* dio skupa S u kojemu su sve sami ekvivalentni („jednaki") elementi (s obzirom na relaciju $\approx$), onda vidimo, da za $x \in S$ skup

$$C(x) \tag{7.2.2.1}$$

svih $y \in S$ za koje je $x \approx y$ čini jednu klasu s obzirom na datu relaciju $\approx$. Obrnuto, ako je C ma koja klasa, tada iz $x \in C$, proizlazi $C \approx C(x)$. Zato su dvije klase[1]) vazda bez zajedničkih elemenata.

Skup svih klasa skupa S modulo $\approx$ označuje se u obliku razlomka ovako:

$$S/\approx \text{ ili } \frac{S}{\approx} \tag{7.2.2.2.}$$

i zove se *kvocijent skupa* S *i relacije ekvivalentnosti* $\approx$.

Tako na pr. svi neparni prirodni brojevi i svi parni prirodni brojevi obrazuju po jedan razred s obzirom na kongruentnost modulo 2 iz primjera 7.1.1.

---

[1]) Misli se na dvije klase koje se ne podudaraju,

Ako u skupu D cijelih brojeva relacija

$$x \equiv y, \text{ (mod. 5) odn. } x \equiv_5 y$$

važi onda i samo onda, ako je cijeli broj $x - y$ djeljiv sa 5, tada se čitav skup D raspada u 5 *razreda modulo* 5, a svaki razred obrazuje aritmetički dvoniz; u tom je slučaju:

$$\frac{D}{\equiv_5} = \{5D, 5D+1, 5D+2, 5D+3, 5D+4\}.$$

§ 7.3. Definicija cijelih racionalnih brojeva kao primjer za relaciju ekvivalencije. [1])

§ 7.3.1. Promatrajmo množinu $N \times N$ svih uređenih pari prirodnih brojeva, t. j. skup svih jednoznačnih preslikavanja f dvočlanog skupa $\{1, 2\}$ na skup N svih prirodnih brojeva. S obzirom na to, da skup $N \times N$ kanimo proglasiti skupom cijelih racionalnih brojeva, zgodno je da opći element $f \in N \times N$ označimo ne sa $(f(1), f(2))$ kao što smo to obično dosad radili nego da pomišljamo, da je f oblika „diferencije"

(7.3.1.1) $$\overline{f(1) - f(2)} \text{ ili } f(1) - f(2);$$

tada će nam definicije: jednakosti, uređenja i računskih operacija u $N \times N$ izgledati manje izvještačene.[2]) Zato generički možemo proizvoljan elemenat iz $N \times N$ označiti sa d (s raznim privjescima, dodacima itd).

§ 7.3.2. **Definicija jednakosti cijelih brojeva.** Kažemo li za diferencije $d, d' \in N \times N$ da je d jednak d', simbolički:

(7.3.2.1) $$d = d'$$

---

[1]) § 7.3 neka čita onaj kojega interesira definicija cijelih brojeva pomoću prirodnih brojeva.

[2]) Ako su naime m i n dva prirodna broja te ako je

$$m > n$$

onda je i $m - n$ potpuno određen prirodan broj. Kad pritom m i n prolaze svim prirodnim brojevima, prolazi i $m - n$ svim prirodnim brojevima, tako da svaki prirodni broj možemo prikazati u obliku diferencije dvaju prirodnih brojeva, kod kojih je minuend veći od suptrahenda.

To specijalno predočenje prirodnih brojeva u vidu „prirodnih diferencija prirodnih brojeva" ima, kao odraz računanja s prirodnim brojevima, za posljedicu određeno računanje sa prirodnim diferencijama (isp. zad. 6.9.14).

Tako dobiven račun sa prirodnim diferencijama prirodnih brojeva (minuend veći od suptrahenda) može se bez daljnjega prenijeti na formalne diferencije $m - n$, $(m, n \in N)$ koje smo u 7.3.1.1 označili sa $\overline{m - n}$ ili $(m - n)$, kad one uopće i ne zadovoljavaju ograničenju $m > n$.

Zato smo i izabrali gornji način (7.3.1.1) za prikazivanje naših elemenata iz N^2, pa nam na pr. definicija (7.3.2.1) izgleda vrlo prirodnom, jer je *djelimično možemo* i dokazati, naime u slučaju kad je $m > n$ (naprotiv, za $m < n$ ne možemo je dokazati, jer dok nemamo izgrađenu teoriju cijelih brojeva, oznaka $m - n$ za $m < n$ nema određena značenja).

Ta pojava, da se neki znakovi, dobiveni uz izvjesna ograničenja, protegnu i na slučaj kad ta ograničenja ukinemo, vrlo je česta u matematici i naziva se *Hankelovim principom permanencije matematičkih zakona;* taj je princip izraz čovjekova nastojanja za potpunošću. Kasnije ćemo se upoznati i sa drugim oblicima toga nastojanja (princip neograničenog izvođenja računskih operacija, dijalektičko jedinstvo operacije i njenog obrata prema kojem se na pr. oduzimanje svodi na zbrajanje i t. d.).

onda i samo onda, ako je $d(1) + d'(2) = d'(1) + d(2)$, lako razabiremo, da je tako uvedena relacija = jedna relacija jednakosti (ekvivalencije) u skupu N^2. Jer, kako su $d(1)$, $d(2)$, $d'(1)$, $d'(2)$ prirodni brojevi, također su i $d(1) + d'(2)$, $d'(1)$, $+ d(2)$ dva prirodna broja pa je dakle

$$\text{ili} \quad d(1) + d'(2) = d'(1) + d(2) \quad \text{dakle i} \quad d = d'$$
$$\text{ili} \quad d(1) + d'(2) \neq d'(1) + d(2) \quad \text{dakle i} \quad d \neq d'.$$

Zadovoljimo se da dokažemo, da je relacija = tranzitivna, t. j. da iz

(7.3.2.2) $$d = d' = d'' \quad \text{izlazi}$$

(7.3.2.3) $$d = d''.$$

No, prema definiciji (7.3.2.1), relacije (7.3.2.2) znače, da je

$$d(1) + d'(2) = d'(1) + d(2)$$
$$d'(1) + d''(2) = d''(1) + d'(2).$$

Iz te dvije jednakosti među prirodnim brojevima dobivamo sabiranjem ponovno jednakost među prirodnim brojevima i izlazi:

$$(d(1) + d'(2)) + (d'(1) + d''(2)) = (d'(1) + d(2)) + (d''(1) + d'(2)).$$

Kako su tu i na lijevoj i na desnoj strani prirodni brojevi, možemo na osnovu asocijacije i komutacije gornju jednakost napisati i ovako:

$$(d(1) + d''(2)) + (d'(1) + d'(2)) = (d''(1) + d(2)) + (d'(1) + d'(2)).$$

Odatle, na osnovu zakona monotonije (v. teor. 5.5 3.1) izlazi jednakost

$d(1) + d''(2) = d''(1) + d(2)$, što po definiciji (7.3.2.1) znači isto što i tražena relacija $d = d''$.

§ 7.3.3. **Cijeli brojevi 0, + 1, —1, + 2, —2 i t. d.**

Specijalno je

(7.3.3.1) $$\begin{cases} \overline{n-n} = \overline{n'-n'}\,^{1)} & (\text{jer je } n + n' = n' + n) \\ \overline{(n+k)-n} = \overline{(n'+k)-n'} & (\text{jer je } (n+k) + n' = (n'+k) + n) \\ \overline{n-(n+k)} = \overline{n'-(n'+k)} & (\text{jer je } n + (n'+k) = n' + (n+k)) \end{cases}$$

pa znači li k, n, n', ma koje prirodne brojeve. Zato je prirodno da se svi uređeni parovi

$$\overline{n-n} \ (n \in N) \quad \text{t. j. „konstante“} \in N \times N$$

označe jednim te istim simbolom i nazovu jednim te istim imenom; stvarno, $\overline{n-n}$ se *naziva nulom* i to *nulom kao cijelim brojem,* a označuje se sa *0* dakle

(7.3.3.2) $$0 = \overline{n-n}, \ (n \in N);$$

[1]) T. j. sva „konstantna preslikavanja“ skupa $\{1, 2\}$ na N međusobno su jednaka.

time hoćemo istaknuti, da nećemo praviti nikakve razlike između nule kao kardinalna broja pusta skupa i nule kao cijela broja t. j. između kv i proizvoljna $d \in N \times N$ za koji je $d(1) = d(2)$.

Iz istog razloga, za ma koji prirodni broj k, bezbroj uređenih parova

$$\overline{(n+k)-n}, \quad (n \in N)$$

za koje nije važan broj n nego broj k, zvat ćemo *cijelim brojem* k i označivati sa $+k$ ili naprosto k, dakle

$$(7.3.3.3) \qquad +k = (\overline{(n+k)-n}), \quad (n \in N)$$

čime stavljamo do znanja, da ćemo poistovjetiti prirodni broj k sa cijelim brojem $\overline{(n+k)-n}$ t. j. sa svakim jednoznačnim preslikavanjem d skupa $\{1, 2\}$ na skup N, ako je samo prirodan broj $d(1)$ za k veći od prirodna broja $d(2)$.

Uređen par

$\overline{n-(n+k)}$ nije jednak niti 0 niti ikojem prirodnom broju $\overline{(m+h)-m}$, jer kad bi bilo na pr.

$\overline{n-(n+k)} = \overline{(m+h)-m}$, onda bi to po definiciji (7.3.2.1) značilo da je

$$n+m = (m+h)+(n+k),$$

što je nemoguće, jer su n, m, h i k prirodni brojevi.

U zavisnosti od k, označuje se cijeli broj

(7.3.3.4) $\qquad \overline{n-(n+k)}$ sa $-k$ dakle $-k = (\overline{n-(n+k)})$, $(n, k \in N)$,

tako da, za ma koji prirodni broj k, *cijeli broj* $-k$ *označuje svaki uređeni par prirodnih brojeva kod kojih je drugi član za* k *veći od prvog člana.*

Na taj način, svi elementi skupa cijelih brojeva glase

$$(7.3.3.5) \qquad 0, 1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots;$$

u smislu definicije jednakosti (7.3.2.1) svi su ti brojevi međusobno različiti.

§ 7.3.4. Definicija sume i produkta cijelih brojeva.

Rukovođeni formulama

$$(7.3.4.1) \qquad (m-n)+(m'-n') = (m+m')-(n+n')$$

$$(7.3.4.2) \qquad (m-n)\cdot(m'-n') = (mm'+nn')-(mn'+m'n)$$

koje možemo lako dokazati, ako su m, n, m', n' prirodni brojevi za koje je

$$(7.3.4.3) \qquad m > n, \quad m' > n',$$

definiramo sumu i produkt cijelih brojeva pomoću obrazaca (7.3.4.1), (7.3.4.2) ne brineći se sada za uslove (7,3.4.3).

Drugim riječima,
pod sumom $d+d'$ te produktom dd' dvaju elemenata d, d' iz N^2 razumijevamo onaj elemenat iz N^2 za koji je:

(7.3.4.4) $(d+d')(1) = d(1) + d'(1)$, $(d+d')(2) = d(2) + d'(2)$: odnosno

(7.3.4.5) $(dd')(1) = d(1)\,d'(1) + d(2)\,d'(2)$, $(dd')(2) = d(1)\,d'(2) + d'(1)\,d(2)$.

Dokažimo na osnovu toga da je na pr. $-2 \cdot -3 = +6$.

Ustvari, $-2 \cdot -3 =$ (po definiciji brojeva -2 i -3) $= (m-(m+2)) \cdot (n-(n+3)) =$ (po definiciji (7.3.4.2)) $= (mn+(m+2)(n+3)) - ((m+2) \cdot n + m(n+3)) = ((mn+mn+2n+3m+6) - (mn+2n+mn+3m)) =$ (stavljajući $l = 2mn+2n+3m$) $= ((l+6)-l) =$ (po definiciji (7.3.3.3) $= +6$.

Ukratko, cijeli racionalni brojevi jesu članovi skupa $N \times N$ uređenih pari (7.3.1.1) prirodnih brojeva za koje je uvedeno:

a) izjednačivanje i razlikovanje po propisu (7.3.2.1)
b) sumiranje po propisu (7.3 4 1)
c) množenje po propisu (7.3 4.2)

§. 7.3.5. Grupni karakter skupa D.

Označimo li sa

(7.3.5.1) D (početno slovo od diferencija)[1]

skup svih cijelih brojeva, onda se lako dokaže

Teorem 7.3.5.1 *S obzirom na operaciju sabiranja koja je definirana obrascem* (7.3.4.1), *skup* D *svih cijelih brojeva je jedna grupa.*

To znači:

1) Važi svojstvo grupovnosti t. j. operacija $+$ je neograničeno izvediva u D, dakle iz $x, y \in D$ slijedi $x+y \in D$

2) Važi asocijativni zakon:

(7.3.5.2) $$x + (y+z) = (x+y) + z, \quad (x, y, z \in D)$$

3) Egzistira *neutralan* element t. zv. 0 (nula) u D sa svojstvom:

(7.3.5.3) $$0 + x = x, \quad (x \in D);$$

4) Egzistira suprotni element za svaki $x \in D$ t. j. postoji jedan jedini član u D, t. zv. *suprotni element* elementa x, simbolički

(7.3.5.4) $$-x$$

za koji je

(7.3.5.5) $$(-x) + x = 0.$$

[1]) Time hoćemo potsjetiti da elementi skupa D imaju izvjesnu vezu sa diferencijama.

Dokažimo baš svojstvo 4).

Najprije, suprotni broj $-x$ broja $x \in D$ egzistira i jednak je

(7.3.5.6) $$(-x)(1) = x(2), (-x)(2) = x(1)$$

Stvarno, suma $(-x + x)$ prevodi 1 u $(-x)(1) + x(1)$ t. j. (prema 7.3.5.6) u $x(2) + x(1)$. Dakle:

$$(-x + x)(1) = x(2) + x(1)$$

Analogno $$(-x + x)(2) = x(1) + x(2).$$

To znači da je $-x + x$ konstantno preslikavanje skupa $\{1, 2\}$ na N, što po definiciji broja 0 znači da je $-x + x = 0$.

Dokažimo još jednoznačnost prelaza od x na $-x$. Drugim riječima treba dokazati da za $x, y, z \in D$ iz

$$y + x = 0$$

$$z + x = 0 \text{ t. j.}$$

(7.3.5.7) $$\text{iz } y + x = z + x \text{ slijedi}$$

(7.3.5.8) $$y = z.$$

No, po definiciji (7.3.2.1), znači relacija (7.3.5.7) isto što i relacija:

$$(y + x)(1) + (z + x)(2) = (z + x)(1) + (y + x)(2).$$

Odatle, po definiciji sume (v. (7.3.4.4)) izlazi:

(7.3.5.9) $$(y(1) + x(1)) + ((z(2) + x(2)) = (z(1) + x(1)) + (y(2) + x(2)).$$

No u toj jednakosti dolaze sve sami prirodni brojevi. Specijalno, vidimo, da na obje strane dolaze prirodni brojevi $x(1)$ i $x(2)$; te ćemo brojeve moći dokinuti, čime će izaći tražena jednakost $y = z$. Služeći se naime pricipom asocijacije i komutacije za sabiranje, izvodimo iz (7.3.5.9) po redu:

$$[(y(1) + x(1)) + z(2)] + x(2) = [(z(1) + x(1)) + y(2)] + x(2)$$

$$[(y(1) + z(2)) + x(1)] + x(2) = [(z(1) + y(2)) + x(1)] + x(2)$$

$$(y(1) + z(2)) + (x(1) + x(2)) = (z(1) + y(2)) + (x(1) + x(2)).$$

Iz te jednakosti među prirodnim brojevima izlazi po zakonu monotonije za sabiranje prirodnih brojeva (teorem 5.5.3.1) jednakost

$$y(1) + z(2) = z(1) + y(2)$$

koja po definiciji (7.3.2.1) znači traženu jednakost $y = z$ cijelih brojeva y i z.

Time je jednoznačnost funkcije $-x$ u D dokazana.

§ 7.3.6. Oduzimanje.

Kad je jednom dokazana egzistencija suprotnih brojeva, onda je lako definirati *oduzimanje cijelih brojeva:* za ma koja dva cijela broja x i y diferencija $x - y$ definira se kao suma $x + (-y)$.

Tako na pr. *oduzeti* broj -2 znači isto što i *dodati suprotni* broj $-(-2)$ dakle 2.

Primjedba 7.3.6.1. Neka si čitalac živo predoči skup N prirodnih brojeva i skup D cijelih brojeva pa neka si objasni razlog zašto se u N oduzimanje brojeva ne može svesti na zbrajanje, dok je, naprotiv, to moguće u D.

§ 7.4. ZADACI.

§ 7.4.1. Promatraj skup od prvih 100 prirodnih brojeva pa odredi razrede kongruencije modulo 5. Koliko elemenata ima svaki razred?

§ 7.4.2. Odredi kvocijent $D/\equiv_7$ skupa D cijelih brojeva i kongruentnosti modulo 7.

§ 7.4.3. Ako za dva realna broja x, y relacija $x \varrho y$ znači da je razlika $x - y$ djeljiva sa 2π, dokaži da je ϱ jedna ekvivalencija i odredi kvocijent C/ϱ (C je skup realnih brojeva). Uvjeri se, da namotavanjem brojevnog pravca na kružnicu radiusa 1, svaki razred $r \in C/\varrho$ pada u posve određenu točku kružnice.

§ 7.4.4. Namotaj brojevan pravac na pravilan a) 3-kut, b) 4-kut, c) n-kut, pa promatraj množinu svih skupova koji tako padnu na pojedinu točku promatranog lika; da li je ta množina kvocijent skupa C i koje relacije ravnopravnosti?

§ 7.4.5. Shvati pramen pravaca ravnine C_2 kao kvocijent skupa C_2 i određene relacije $\approx$; odredi ovu

§ 7.4.6. Promatraj skup P svih pravaca prostora i u njemu binarnu relaciju $\parallel$ koja iskazuje, da je jedan pravac paralelan sa drugim; da li je $\parallel$ relacija ekvivalencije? Čemu su jednaki pojedini razredi?

§ 8. UREĐAJNE RELACIJE I DJELIMIČNO UREĐENI SKUPOVI

Znamo za osnovnu binarnu relaciju $\subseteq$ među skupovima; ona je povratna i prelazna, što znači da je:

$$A \subseteq A,$$

$$\text{iz} \quad A \subseteq B \subset C \quad \text{slijedi} \quad A \subset C$$

ma za kakve skupove A, B, C.

Binarnu relaciju $\leqslant$ nazvat ćemo *uređajnom* u skupu S, ako je ona u skupu S:

povratna (t. j. $a \leqslant a$ za svaki $a \in S$) i

prelazna (t. j. iz $a, b, c \in S$ te iz $a \leqslant b$, $b \leqslant c$ slijedi $a \leqslant c$).

Pojedine uređajne relacije možemo razlikovati jedne od druge raznim dodacima; tako na pr. relacije $\leqslant$, $\leqslant\cdot$, $\leqslant'$ i t. d. mogu označavati različite uređajne relacije.

§ 8.1. **Definicija djelimično uređenih skupova.** Pod djelimično uređenim skupom (ili kraće pod uređenim skupom) razumijevamo svaku uređenu trojku

(8.1.1) $$(S\ ;\ \approx\ ;\ \leqslant)^{1)}$$

sastavljenu od izvjesnog skupa S, izvjesne relacije ekvivalentnosti $\approx$ u S i izvjesne uređajne relacije $\leqslant$ u S; pritom ima biti zadovoljen ovaj

uslov djelimične simetrije relacije $\leqslant$: Za ekvivalentne elemente skupa S relacija $\leqslant$ je simetrična.

Drugim riječima, *uređena trojka*

$$(S\ ;\ \approx\ ;\ \leqslant)$$

sastavljena od izvjesnog skupa S, te binarnih relacija

(8.1.2) $$\approx \text{ i } \leqslant \text{ u } S$$

jest djelimično uređen skup (ili kraće: uređen skup) *onda i samo onda,* ako se za svaki $a, b \in S$ *može reći da li je* $a \approx b$ *ili nije* $a \approx b$ (čitaj: da li je *a ekvivalentno sa b* ili *a* nije $\approx b$) te *da li je* $a \leqslant b$ *ili nije* $a \leqslant b$ (čitaj: da li je *a manje ili jednako b,* ili *a nije manje ili jednako b*).

Pritom relacije $\approx$, $\leqslant$ ima da ispunjuju ove uslove:

I. *(Uslov refleksije). Obje relacije* $\approx$ *i* $\leqslant$ *jesu povratne (refleksivne) u S* t. j. *važi*:

$$a \approx a \quad , \quad (a \in S)$$
$$a \leqslant a \quad , \quad (a \in S);$$

II. *(Uslov tranzitnosti). Obje relacije* $\approx$, $\leqslant$ *jesu prelazne (tranzitivne u S)*:

Ako je a, b, $c \in S$, pa ako je $a \approx b$, $b \approx c$, onda je $a \approx c$;[2])

isto tako, ako je a, b, $c \in S$, pa ako je $a \leqslant b$, $b \leqslant c$, onda je $a \leqslant c$.[3])

III. *(Uslov simetrije relacije* $\approx$*)*: ako je $a \approx b$, onda je i $b \approx a$

IV. *(Uslovljena (djelimična) simetrija relacije* $\leqslant$*)*: ako je $a, b \in S$, te ako je $a \approx b$, onda je i $a \leqslant b$ i $b \leqslant a$.

---

1) Sjeti se da se pod uređenom trojkom razumijeva svako preslikavanje f tročlana skupa $\{1, 2, 3\}$; kod nas je $f(1)$ = skup S, $f(2)$ = relacija $\approx$, a $f(3)$ = relacija $\leqslant$. Prema definiciji binarnih relacija, stvar se svodi na to (v. § 2.5.7) da su $f(2)$ i $f(3)$ izvjesni dijelovi skupa $S \times S$.

2) To znači, da ne mora biti $a \approx b \approx c$; ali ako jest tako, mora biti takoder $a \approx c$

3) To znači, da ne mora biti $a \leqslant b \leqslant c$; ali, ako jest tako, mora biti također $a \leqslant c$.

Također će se svaki uređen par

(8.1.3) $$(S\ ;\ \leqslant)$$

skupa S i izvjesne uređajne relacije $\leqslant$ zvati djelimično *uređenim skupom*, pri čemu se podrazumijeva da se radi o uređenoj trojci

(8.1.4) $$(S\ ;\ \equiv\ ;\ \leqslant);$$

tu $\equiv$ označuje *relaciju identičnosti*, pa $a \equiv b$ znači, da je a identično sa b.

Mjesto, da se govori o djelimično (parcijalno) uređenom skupu $(S\ ;\ \leqslant)$ govorit će se o *djelimičnom uređenju* skupa S relacijom $\leqslant$; također se govori, da je skup S *djelimično uređen pomoću relacije* $\leqslant$.

§ 8.1.1. Obrnuto ili dualno uređenje od zadana uređenja $\leqslant$ odn. $(S, \approx, \leqslant)$. Operator * u eksponentu uređena skupa.

Ubuduće će relacije

(8.1.1.1) $$a \leqslant b \quad \text{i} \quad b \geqslant a$$

značiti jednu te istu stvar; oznaka $b \geqslant a$ čita se b *je veće ili jednako* a.

Tako uvedena binarna relacija $\geqslant$ određena je relacijom $\leqslant$ i zove se *obrat ili dual relacije* $\leqslant$.

Ako je relacija $\leqslant$ uređajna u skupu S, uređajna je u skupu S i relacija $\geqslant$.

To je jasno. Uostalom, dokažimo na pr. prelaznost relacije $\geqslant$ t. j. da iz $a \geqslant b \geqslant c$ slijedi $a \geqslant c$.

No, $a \geqslant b$, $b \geqslant c$ znači po definiciji relacije $\geqslant$, isto što i $b \leqslant a$, $c \leqslant b$ t. j. $c \leqslant b \leqslant a$, odakle, po svojstvu prelaznosti relacije $\leqslant$, izlazi $c \leqslant a$, a to baš i znači traženu relaciju $a \geqslant c$.

Djelimično uređen skup

$$(S\ :\ \approx\ ;\geqslant)$$

u svojoj zavisnosti od

$$(S\ ;\ \approx\ ;\ \leqslant)$$

označuje se sa zvjezdicom u eksponentu t. j.

(8.1.1.2) $$(S\ ;\ \approx\ ;\ \leqslant)^* \quad \text{naznačuje} \quad (S\ ;\ \approx\ ;\ \geqslant)$$

Prema tome,

$$((S\ ;\ \approx\ ;\ \leqslant)^*)^* = (S\ ;\ \approx\ ;\ \leqslant).$$

Ako je M skup uređen relacijom $\leqslant$, onda se pod M^* razumijeva obrnuto uređenje skupa M t. j. uređenje pomoću $\geqslant$ (čitanje s obrnute strane).

Primjer 8.1.1.1. Svaka množina M skupova je uređena relacijom $\subseteq$; obratno uređenje jest ono kad M uređujemo pomoću $\supseteq$.

§ 8.2. Relacije jednakosti $=$, nejednakosti $<$, $>$ te neuporedljivosti $\|_{\leqslant}$ izvedene iz uređajne relacije $\leqslant$.

Ako je:

(8.2.1) $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$ t. j. ako je $x \leqslant y \leqslant x$,
tada se kraće piše

(8.2.2) $x = y$ i obrnuto.[1]

Jasno je, da će nam

$x \neq y$, značiti, da ne važi $x = y$.

Sistem

(8.2.3) $x \leqslant y,\ x \neq y$ odn. $y \geqslant x,\ x \neq y$

znači isto što i

(8.2.4) $x < y$ odn. $y > x$.

Ako nije

(8.2.5) niti $x \leqslant y$ niti $y \leqslant x$, pisat ćemo

(8.2.6) $x \| y$ odn. $x \|_{\leqslant} y$

Relacije

(8.2.7) $x < y$. $x = y$, $x \|_{\leqslant} y$

izgovarat ćemo po redu ovako:

s obzirom na relaciju $\leqslant$, x je *manje* od y odn. y *veće* od x;

s obzirom na relaciju $\leqslant$, x je *jednak* y;

s obzirom na relaciju $\leqslant$, x je *neuporedljiv* sa y.

Naravno, da odmah razbiremo što znači da je, s obzirom na relaciju $\leqslant$, elemenat x *uporedljiv* sa y; to znači da važi bar jedna od relacija $x \leqslant y$, $y \leqslant x$. Tako na pr. s obzirom na relaciju $\subseteq$ skupovi $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ su neuporedljivi.

Ako je skup S uređen relacijom $\leqslant$, može on da sadrži i uporedljivih i neuporedljivih elemenata; često ćemo mjesto „uređen" govoriti „djelimično (parcijalno) uređen" skup, da time bolje naglasimo da skup S ne mora biti *potpuno* uređen t. j. bez neuporedljivih točaka. Kod potpuno *neuređenih (anti-uređenih skupova)* nema uporedljivih neekvivalentnih elemenata. Prema tome, *posve uređeni* (često se kraće kaže: uređeni) skupovi i *posve neuređeni* skupovi su dva krajnja slučaja djelimično uređenih skupova.

P r i m j e r 8.2.1. Svaki skup množina je djelimično uređen skup, s obzirom na relaciju $\subseteq$. Specijalno ako je S proizvoljan skup, skup $P(S)$ svih $X \subseteq S$ (prazan skup uključivši) je djelimično uređen skup.

[1] Relacija $=$ ne mora da se podudara sa zadanom relacijom ekvivalencije u S; inače i relacija $=$ u (8.2,2) je određena relacija ekvivalentnosti u S.

Djelimično uređeni skupovi $P(S)$ su od naročite važnosti.

P r i m j e r 8.2.2. Svaki skup kardinalnih brojeva je djelimično uređen po veličini; skup prirodnih brojeva je potpuno uređen po veličini. Pitanje, da li je svaki skup kardinalnih brojeva potpuno uređen t. j. pitanje, da li ima neuporedljivih kardinalnih brojeva obradit ćemo kasnije (v. § 15.3).

§ 8.3 Nekoliko elementarnih svojstava relacija $\leqslant, \geqslant, =, <, >$, i $\parallel$.

L e m a 8.3.1 *Za ma koje elemente x, y, uređena skupa $(S, \approx, \leqslant)$ bit će ili $x<y$ ili $x=y$ ili $x>y$ ili $x \parallel y$; specijalno, ako je $a \approx b$, onda je $a=b$.*

Stvarno, ili je $x \leqslant y$ ili nije $x \leqslant y$; isto tako ili je $y \leqslant x$ ili nije $y \leqslant x$.

Ako je $x \leqslant y$ i k tome $y \leqslant x$, onda je $x=y$.

Ako je $x \leqslant y$, ali nije $y \leqslant x$, onda je, po definiciji (8.2.4), $x>y$;

Ako nije $x \leqslant y$, ali jest $y \leqslant x$, onda je, po definiciji (8.2.4), $y<x$ odn. $x>y$;

Ako nije $x \leqslant y$, niti $y \leqslant x$, onda je po definiciji (8.2.6) $x \parallel_{\leqslant} y$. Peta mogućnost ne postoji.

L e m a 8.3.2. *Da bude $x \leqslant y$, nužno je i dovoljno da bude ili $x<y$ ili $x=y$.*

Da bude $x \geqslant y$, nužno je i dovoljno da bude ili $x>y$ ili $x=y$. Dokaz je neposredan.

L e m a 8.3.3. *Ako je $x \leqslant y<z$ ili $x<y \leqslant z$, onda je $x<z$.*

Dokažimo prvi slučaj: ako je $x \leqslant y<z$, onda je $x<z$. No kako iz $y<z$ slijedi $y \leqslant z$, to će svakako biti $x \leqslant z$. Kad ne bi bilo $x<z$, bilo bi $x=z$ dakle i $z \leqslant x$; a ovo bi sa zadanom relacijom $x \leqslant y$ povuklo $z \leqslant y$, protivno pretpostavci $y<z$. Analogno se dokazuje, da iz $x<y \leqslant z$ slijedi $x<z$.

K o r o l a r 8.3.1. Ako je $x<y<z$, onda je $x<z$;

„ „ $x=y<z$, „ „ $x<z$;

„ „ $x<y=z$, „ „ $x<z$;

Kraće: ako u $x \leqslant y \leqslant z$ znak $\leqslant$ ima bar jedanput značenje znaka $<$, onda je $x<z$.

Ukratko, prethodne rezultate možemo izreći kao:

T e o r e m 8.3.1 *Binarne relacije $<, =, >$ i $\parallel$ isključuju se međusobno u djelomično uređenu skupu $(S; \approx; \leqslant)$; relacije $<, =$ i $>$ su prelazne, relacije $=, \parallel$ su simetrične, a relacija $=$ je povratna. Iz lanca više relacija $\leqslant$*

(8.3.1) $$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$$

proizlazi

$$\text{(8.3.2)} \qquad \textit{ili} \quad x_1 = x_n \quad \textit{ili} \quad x_1 < x_n$$

već prema tome, da li u (8.3.1) *znak* $\leqslant$ *znači svuda* $=$ *ili znači* $<$ *bar jedamput. Analogno, ako je*

$$\text{(8.3.3)} \qquad y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n, \quad \text{tada je}$$

$$\text{(8.3.4)} \qquad \text{ili} \quad y_1 = y_2 \quad \textit{ili} \quad y_1 > y_2,$$

već prema tome, da li u (8.3.3) *znak* $\geqslant$ *ima svuda značenje znaka* $=$ *ili bar jedamput iskazuje svojstvo* $>$.

§ 8.4. Nekoliko primjera parcijalno uređenih skupova.

Primjer 8.4.1. Pođimo od skupa N svih prirodnih brojeva i množine N^2 svih uređenih parova (m, n), $(m, n \in N)$.

Kažimo. da je $(m, n) \leqslant (m', n')$, onda i samo onda ako je

$$\text{(8.4.1)} \qquad m + n' \leqslant m' + n$$

$$\text{(8.4.2)} \qquad mn' \leqslant m'n$$

$$\text{(8.4.3)} \qquad m + n \leqslant m' + n'$$

$$\text{(8.4.4)} \qquad \text{ili} \quad m < m' \quad \text{ili} \quad m = m' \quad \text{te} \quad n \leqslant n'$$

$$\text{(8.4.5)} \qquad \text{ili} \quad n < n' \quad \text{ili} \quad n = n' \quad \text{te} \quad m \leqslant m'$$

$$\text{(8.4.6)} \qquad m < m', \quad n < n'$$

$$\text{(8.4.7)} \qquad m' \ \text{djeljiv sa} \ m;$$

U svakom od tih slučajeva (8.4.1) — (8.4.7) bit će množina N^2 djelimično uređena, čak i potpuno uređena u svima slučajevima, osim u poslednja dva. Tako vidimo, kako jedna te ista množina — ovdje N^2 — može biti uređena (potpuno ili djelimično) na različite načine.

Primjer 8.4.2. Skup riječi u jednom jeziku uređen je skup, pa se kao takav i zapisuje u rječnike i leksikone. Od dvije riječi A i B dolazi riječ A ispred riječi B onda i samo onda, ako čitajući u riječima po redu slova slijeva nadesno riječ A ima, na prvom mjestu na kojem se slova od A i B razlikuju, jedno slovo koje u dotičnom alfabetu dolazi ispred slova što ga na istom rednom mjestu ima riječ B. Tako na pr. riječ *uvojak* dolazi *iza* riječi *ujak*, jer je u latinici slovo *v* iza slova *j*, dok je u ćirilici riječ uvojak ispred riječi ujak, jer je u ćirilici *v* ispred *j*. Taj način uređenja zove se alfabetski, *leksikografski* ili *uređivanje po principu prve diferencije*.

Vidimo da poredak riječi zavisi od toga, kako su poređena slova pomoću kojih su riječi napisane. Svi znamo da su glasovi u srpsko-hrvatskom jeziku poredani na dva načina i to:

(8.4.8) a, b, c, č, ć, d, dž, đ, e, f, g, h, i, j, k, l, lj, m, n, nj, o, p, r, s, š, t, u, v, z, ž.

odnosno

(8.4.9) a, b, v, g, d, đ, e, ž, z, i, j, k, l, lj, m, n, nj, o, p, r, s, t, ć, u, f, h, c, č, dž, š.

Manje je poznat treći način uređivanja naših glasova, a kazuje relativnu učestalost pojedinog glasa u srpsko-hrvatskom jeziku. On izgleda ovako (za ijekavsko narječje):

(8.4.10) e, a, i, o, j, s, n, u, d, v, t, m, r (kao suglasnik), k, p, l, g, b, š, z, č, ć, lj, h, ž, nj, c, r (kao samoglasnik), đ, dž i f.

Prema tome, najčešći glas u srpskohrvatskom jeziku jest glas *e*, a najrjeđi glas *f* (isp. T. Maretić, *Gramatika i stilistika hrvatskoga ili srpskoga književnog jezika*, 2 izd. Zagreb, str. 13 i 14.).

Ako promatramo skup S svih konačnih slogova prirodnih brojeva $(n_1, n_2, \ldots n_k)$, $(k = 1, 2, 3, \ldots, n_k \in N)$, pa ako za dva sloga

$$(a_1, a_2, \ldots a_\alpha)$$

$$(b_1, b_2, \ldots b_\beta)$$

stavimo

(8.4.11) $$(a_1, a_2 \ldots a_\alpha) \text{ ispred } (b_1, \ldots, b_\beta)$$

onda i samo onda, ako je u nizu

(8.4.12) $$a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots$$

prvi član koji je $\neq 0$ negativan[1]), tad je skup S uređen.

Na taj se način nižu i oznake pojedinih formula u ovoj knjizi; na pr. obrazac (5.2.2.2) dolazi ispred obrasca (8.2.4).

Ako pak za $A, B \in S$ kažemo da je

(8.4.13) $$A \leqslant B,$$

onda i samo onda, ako slog B počinje slogom A (kao što na primjer riječ *udarnik* počinje sa riječi *udar*), tada skup S neće biti potpuno nego tek djelimično uređen.

P r i m j e r 8.4.3. Skup $N_1(R)$ svih nizova racionalnih brojeva možemo djelimično urediti tako da niz $a \in N_1(R)$ stoji ispred niza $b \in N_1(R)$, ako je $a(n) \leqslant b(n)$, α) za sve brojeve $n \in N$ β) za gotovo brojeve $n \in N$.

Time se dobiju dva različita djelimična uređenja skupa $N_1(R)$.

P r i m j e r 8.4.4. Pođimo od skupa S svih propozicija (sudova) neke izgrađene aksiomatizirane teorije (na pr. euklidske geometrije, teorije brojeva, aksiomatizirane atomistike i t. d.). Pišemo li za x,

---

[1]) Ako je na pr. $\alpha < \beta$, tada a_β niti ne postoji pa se naravno tada pod diferencijom $a_\beta - b_\beta$ podrazumijeva broj $-b_\beta$ (dakle kao da je a_β „prazan element").

$y \in S$ da je $x \leqslant y$, ako je sud x posljedica suda y, postaje sistem S djelimično uređen. Ako je $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$, veli se, da su sudovi x i y, *ekvivalentni.* Ako nije niti $x \leqslant y$ niti $y \leqslant x$, veli se da su sudovi x i y međusobno *nezavisni.*

Već to nekoliko primjerà pokazuje kako parcijalno uređeni skupovi mogu biti raznovrsni.

Lema 8.4.1. Ako su m i n prirodni brojevi, pa ako je $m < n$, onda je $-m > -n$. Pri tome cijele racionalne brojeve uređujemo relacijom ekvivalencije (7.3.2.1), te relacijom poretka (8.4.1), koje zadovoljavaju uslovima I—IV u § 8.1.

Uistinu, za ma koje prirodne brojeve a i b, nejednakost $m < n$ povlači nejednakost $(a + b) + m < (a + b) + n$.

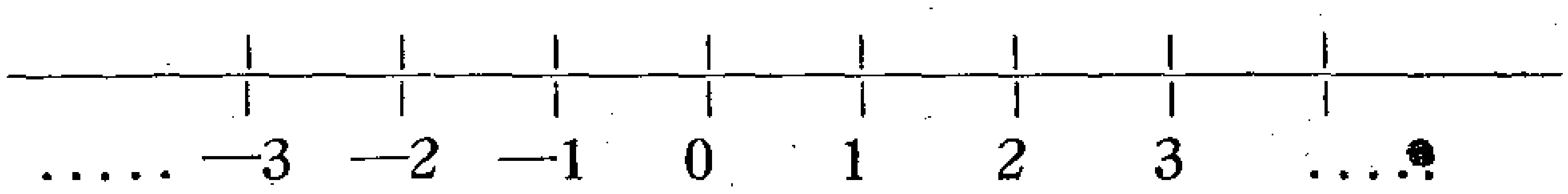
Odatle

$a + (b + m) < b + (a + n)$, što znači da je cijeli broj $(\overline{a - (a + n)})$ t. j. $-n$ ispred cijelog broja $(\overline{b - (b + m)})$ t. j. $-m$ dakle: $-n$ $-m$ odn. $-m > -n$.

Uređen po veličini, skup cijelih brojeva glasi

$$\ldots\ldots < -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1, < 2 < 3 < \ldots$$

ili na brojnoj crti



Skup cijelih brojeva proteže se u beskonačnost u dva pravca; preko prirodnih brojeva n i preko brojeva $-n$, $(n \in N)$ koji su suprotni prirodnim brojevima.

Korolar 8.4.1. Kako nema najvećeg prirodnog broja, nema niti najmanjeg cijelog broja:

$$-(n + 1) < -n, \quad \text{za svaki} \quad n \in N.$$

Vježba. 8.4.1. Na osnovu definicija skupa D (isp. obrazac (7.3.4.2)) dokaži da za cijele brojeve d, d', n relacija $d < d'$, povlači

$$nd < nd' \quad \text{ako je} \quad n > o$$

$$nd = nd' = 0, \quad \text{ako je} \quad n = 0$$

$$nd \geqslant nd' \quad \text{ako je} \quad n \leqslant 0.$$

§ 8.5. Definicija skupa R racionalnih brojeva.

Ako je D skup svih cijelih brojeva, a N skup svih prirodnih brojeva, promatrajmo množinu

(8.5.1)
$$\begin{cases} D \times N \text{ svih uređenih pari} \\ (d/n), \ (d \in D, \ n \in N). \end{cases}$$

Ako u skup R uvedemo binarnu relaciju

(8.5.2) $\leqslant$ tako, da za elemente (d/n), (d'/n') skupa R relacija

(8.5.3) $$(d/n) \leqslant (d'/n') \quad \text{odn.} \quad (d'/n') \geqslant (d/n)$$

znači isto što i relacija

(8.5.4) $dn' \leqslant d'n$ među cijelim brojevima dn', $d'n$,

lako se dokaže da je tom relacijom $\leqslant$ skup $D \times N$ potpuno uređen i da je nejednakost

(8.5.5) $$(d/n) < (d'/n')$$

ekvivalentna sa

(8.5.6) $$dn' < d'n$$

odnosno da je jednakost

(8.5.7) $$(d/n) = (d'/n')$$

ekvivalentna sa

(8.5.8) $$dn' = d'n.$$

Dokažimo na pr. da je ta relacija (8.5.2) tranzitivna t. j. da iz

(8.5.9) $$(d/n) \leqslant (d'/n') \leqslant (d''/n'') \quad \text{slijedi}$$

(8.5.10) $$(d/n) \leqslant (d''/n'').$$

No prema propisima (8.5.3), (8.5.4), relacija (8.5.9) kazuje da je

$$dn' \leqslant d'n \quad \text{te} \quad d'n'' \leqslant d''n'.$$

Odatle, množeći te odnose sa prirodnim brojem n'' odn. n:

$$(dn')\,n'' \leqslant (d'n).n'' \quad \text{odn.} \quad (d'n'')\,n \leqslant (d''n')\,n,$$

što se može pisati i ovako

$$(dn')\,n'' \leqslant (d'nn'') \leqslant (d''n)\,n' \quad \text{odakle}$$

$$(dn'')\,n' \leqslant (d''n)\,n' \quad \text{i}$$

konačno $dn'' \leqslant d''n$, što zapravo znači, da je ispravna tražena relacija (8.5.10).

Skup $D \times N$ uređen propisom (8.5.2), (8.5.3) i u kojem se računa po propisima:

(8.5.11) $$(d/n) + (d'/n') = ((dn' + d'n)/nn') \quad \text{(sumacija)}$$

(8.5.12) $$(d/n) \cdot (d'/n') = (dd'/nn') \qquad \text{(multiplikacija)}$$

zove se *skup racionalnih brojeva;* možemo ga označiti slovom

(8.5.13) $$R^{1});$$

Specijalno se vidi da su svi članovi

$$(n/n)\ ,\ (n \in N)$$

međusobno jednaki, pa se mogu označiti zajedničkim simbolom i to sa 1 ili $+1$, čime hoćemo iskazati da između racionalnog broja (n/n) i cijelog broja $+1$ odn. 1 nećemo praviti nikakve razlike. Uopće se vidi da su za svaki cijeli broj d svi članovi (nd/n) skupa $D \times N$ međusobno jednaki i da se s njima može po propisima (8.5.11), (8.5.12) raditi sve ono što smo prije radili sa cijelim brojem d; zato se identificira racionalni broj (nd/n), $(n \in N)$ sa cijelim brojem d.

Na taj način skup D cijelih brojeva postaje dijelom skupa R racionalnih brojeva i to, dabome, pravim dijelom, jer na pr. $(3/2)$ je racionalan broj, ali je različit od svakog cijelog broja; kad bi naime postojao $d \in D$ sa svojstvom $(3/2) = d$ dakle $(3/2) = (d/1)$, onda bi to značilo, da je $3 = 2d$ t. j. da je 3 djeljiv sa 2, što je apsurd.

Može se lako pokazati da skup R svih racionalnih brojeva čini jednu grupu s obzirom na operaciju sabiranja (slično kao i skup D). Skup $R \setminus \{0\}$ t. j. skup svih racionalnih brojeva koji su $\neq 0$ (sa nulom se ne dijeli) obrazuju multiplikativnu grupu t. j. čine grupu s obzirom na propis (8.5.12) množenja racionalnih brojeva. Pritom je inverzni broj broja $\frac{d}{n}$ jednak $\frac{n}{d}$. I skup R kao adiciona grupa i skup $R \setminus \{0\}$ kao multiplikativna grupa jesu i komutacione grupe (za sabiranje odnosno množenje u R važi zakon komutacije). Za množenje u skupu R važe oba distributivna zakona s obzirom na adiciju:

$$(a+b)c = ac + bc$$
$$c(a+b) = ca + cb.$$

Važno je uočiti, da su obje operacije u R: i adicija i multiplikacija *obratljive* i to jednoznačno obratljive[2]), pa je kao što se neposredno uvjeravamo:

---

[1]) Početno slovo riječi *razlomak;* njegove elemente (8.5.1) označavat ćemo kao što je uobičajeno: sa $\frac{d}{n}$ a ne sa (d/n) odn. $\left(\frac{d}{n}\right)$.

Ako nam naime (d/n) označuje razlomak $\frac{d}{n}$, onda se propisi (8.5.3), (8.5.11). (8.5.12) za: uređenje, sabiranje i množenje mogu dokazati *uz ograničenje da je prvi član uređena para djeljiv sa drugim članom toga para.*

[2]) Izuzetak je jedino što se ne dijeli nulom.

$$\frac{d}{n} - \frac{d'}{n'} = \frac{dn' - d'n}{nn'}$$

$$\frac{d}{n} : \frac{d'}{n'} = \frac{d}{n} \cdot \frac{n'}{d'}.$$

Dokažimo usput ovu interesantnu

Lemu 8.5.1. *Ako su x, y ma koja dva nejednaka racionalna broja, nalazi se između x i y bar jedan racionalan broj z t. j. takav da je $x < z < y$, ako je $x < y$ odnosno $x > z > y$, ako je $x > y$; ili kraće: u uređenom skupu R nema susjednih elemenata.*

Uistinu, neka je $x = \frac{d}{n}$, $y = \frac{d'}{n'}$, gdje su d, d' dva cijela broja, a n, n' dva prirodna broja; uzmimo slučaj $x < y$; tada relacija $\frac{d}{n} < \frac{d'}{n'}$ znači, da je i $\frac{2dn'}{2nn'} < \frac{2d'n}{2nn'}$ odakle lako izlazi, da je $2dn' < 2d'n$, i dalje $2dn' < 2dn' + 1 < 2d'n$; a odavde, dijeleći sa $2nn'$:

$$\frac{2dn'}{2nn'} < \frac{2dn'+1}{2nn'} < \frac{2d'n}{2nn'} \quad \text{t. j.}$$

$$\frac{d}{n} < \frac{2dn'+1}{2nn'} < \frac{d'}{n'}.$$

Stavimo li $z = \frac{2dn'+1}{2nn'}$, broj z je racionalan, jer je $2dn'+1$ cio broj a $2nn'$ prirodan broj i zadovoljava traženoj relaciji $x < z < y$.

Analogno se obrađuje slučaj kad je $x > y$.

Iz gornje leme izlazi neposredno:

Lema 8.5.2. *Između svaka dva nejednaka racionalna broja smješteno je neizmjerno mnogo nejednakih racionalnih brojeva.*

Ako je na pr. $x < y$, tada označujući sa z_1 broj koji je smješten između x i y, postoji broj z_2 smješten između z_1 i y pa broj z_3 koji je smješten između z_2 i y i t. d.; uopće, za svaki prirodni broj n postoji broj z_{n+1} koji je smješten između z_n i y. Svi brojevi $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ međusobno su različiti i svi su smješteni između x i y.

Korolar 8.5.1. *Ako je r ma koji racionalni broj, a I ma koji interval skupa racionalnih brojeva koji sadrži r, sadrži interval I neizmjerno mnogo racionalnih brojeva različitih od r.*

Vježba 8.5.1. Dokaži da poslije (prije) svakog *racionalnog* broja x dolazi bar jedan *cijeli* broj.

Primjedba 8.5.1. Živo si predoči kako obje prethodne leme, korolar kao i prethodna vježba izviru iz osnovne činjenice da je $n+1$ prirodan broj čim je to n i da je $n+1 > n$.

Neka nam bude potpuno jasno, da svaki skup od konačno mnogo racionalnih brojeva ima svoj prvi (najmanji) i posljednji (zadnji) član.

Na taj način beskonačno ispružanje (protezanje) skupa prirodnih brojeva u jednom jedinom smjeru ima za posljedicu beskonačno ispružanje skupa racionalnih brojeva u „dubinu" na svakom mjestu, u smislu da se svaki interval racionalnih brojeva može neprestano dalje dijeliti u sve manje i manje intervale. (Na pr. neprestanim prepolavljanjem intervala).

§ 8.6. ZADACI.

§ 8.6.1. Dokaži, da je za (cijele) racionalne brojeve x, y, odnos $x < y$ ekvivalentan s odnosom $x - y < 0$.

§ 8.6.2. Da li se skup R racionalnih brojeva može urediti po propisu ϱ da za $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'} \in R$ relacija $\frac{p}{q} \varrho \frac{p'}{q'}$ bude ekvivalentna sa $|p|+|q| \geqslant |p'|+|q'|$? Odredi sve $X \in R$ koji su pritom „jednaki" sa $\frac{-5}{17}$.

§ 8.6.3. Konkretiziraj jedno obostrano jednoznačno preslikavanje φ skupa N na čitav skup a) D, b) R, pa na N presadi uređenje sa R t. j. N preuredi tako da za svako m, $n \in N$ relacija $m \leqslant n$ bude ekvivalentna s relacijom $\varphi(m) \leqslant \varphi(n)$ u D odn. u R.

§ 8.6.4. Promatraj jedan konkretan red oblika

(8.6.4.1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!}$$

gdje je, za svaki $n \in N$, a_n cio broj $\geqslant 0$ i $< n$ (dakle $a_0 = 0$). Tada preuredi (permutiraj) skup N tako da svaki $n \in N$ u skupu $\{1, 2, \ldots . n-1, n\}$ dođe neposredno iza a_n (ako je $a_n = 0$, to znači da n dolazi na prvo mjesto, ispred svih brojeva $1, 2, \ldots, n-1$). Da li se na taj način može dobiti *svako* potpuno uređenje skupa N?[1])

§ 8.6.5. Funkcionalni skup $N_1(\{1, 2, 3\})$ može se potpuno urediti odnosom $\leqslant$ pri čemu za njegove elemente a, b relacija $a \leqslant b$ ima da znači isto što i

$$a(1)\,b(3) + a(3)\,b(2) \leqslant a(3)\,b(1) + a(2)\,b(3).$$

(kod te se definicije rukovodimo izrazom $\frac{f(1) - f(2)}{f(3)}$ za funkciju f).

---

[1]) Suma gornjeg reda leži u segmentu $[0, 1]$; svaki broj $x \in [0, 1]$ ima jedan, a ako je iracionalan, i samo jedan razvoj oblika (8.6.4.1). (Denjoy ga zove *Neperovim razvojem broja* x). Na taj način, Denjoy povezuje svaki iracionalni broj $x \in [0, 1]$ preko Neperova razvoja broja x s određenom permutacijom skupa N.

§ 8.6.6. Za svaki $n \in N$, skup N_1 $\{1, 2, 3, \ldots, 2n-1, 2n\}$ postaje uređenim, ako za njegove elemente f, g odnos $f \leqslant g$ ima da znači isto što i

$$f(1) + g(2) + f(3) + g(4) + \ldots + f(2n-1) + g(2n) \leqslant g(1) + f(2) + g(3) + f(4) + \ldots g(2n-1) + f(2n)$$

§ 8.6.7. Alfabetskim uređivanjem skupa svih konačnih slogova a) prirodnih b) racionalnih brojeva, dobiva se potpuno uređen prebrojiv skup.

§ 8.6.8. Ako su x, y realni brojevi, pa ako sa $x \leqslant_1 y$ istaknemo da je i $x \leqslant y$ i $\sin x \leqslant \sin y$, da li je skup $(C; \leqslant_1)$ djelimično uređen? Generaliziraj!

§ 8.6.9. Promatraj skup $\{1, 2, 3, 4\}_1$ $(\{1, 2\})$ svih jednoznačnih preslikavanja skupa $\{1, 2\}$ na skup $\{1, 2, 3, 4\}$ pa ga uredi po propisu, da za bilo koja dva takova preslikavanja f i g, odnos $f \leqslant g$ bude ekvivalentan sa sistemom $f(1) \leqslant g(1)$, $f(2) \leqslant g(2)$.

§ 8.6.10. Ako je $S = (S, \leqslant)$ djelimično uređen skup, tada se skup $S_1(N)$ može djelimično urediti po propisu, da za $f, g \in S_1(N)$ odnos $f \leqslant g$ bude ekvivalentan sa činjenicom da za *gotovo sve* $n \in N$ važi $f(n) \leqslant g(n)$.

§ 8.6.11. Može li se skup $S_1(N)$ iz prethodnog zadatka djelimično urediti po propisu, da za njegove elemente relacija $f \leqslant g$ znači da je

ili $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in M$

ili $f(x) < g(x)$ „ „ $x \in M$?

Uredi na taj način Kartezijeve prostore $C_n = C_1$ $\{1, 2, 3, \ldots n\}$ za $n = 2$, 3 i 4.

§ 8.6.12. Ako je $S = (S; \leqslant)$ bilo koji (potpuno ili djelimično) uređen skup, a M bilo koji skup, tada se funkcionalni skup $S_1(M)$ svih jednoznačnih preslikavanja skupa M na S može djelimično urediti tako da za $f, g \in S_1(M)$ odnos $f \leqslant g$ bude ekvivalentan sa sistemom

$$f(x) \leqslant g(x), \quad (x \in M).$$

Konkretiziraj na pr. a) $S = \{1, 2, 3\}$, $M = \{100, 10\}$;

b) $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, $M = \{1, 2\}$;

c) $S = M = N$;

d) $S = C$, $M = \{1, 2\}$.

§ 9. ISTAKNUTI DIJELOVI — KOMADI — POTPUNO UREĐENA SKUPA.

Jedno od vrlo korisnih svojstava uređenih skupova jeste, da se može zorno govoriti o pojedinim njihovim dijelovima kao da su upravo izrezani iz cjeline. Tako na pr. skup pravih realnih razlomaka — realni interval 01 — izgleda nam kao da je brojevima 0 i 1 izrezan iz linearnog kontinuuma. U ovom §-u upoznat ćemo se sa glavnim komadima, odrescima, potpuno uređena skupa i pomoću njih uvesti nekoje pojmove (rez, šupremum, infimum) koji su od osnovne važnosti u matematici.

§ 9.1. Intervali potpuno uređena skupa.

Osnovni organizirani dio uređena skupa jest njegov *interval* (odrezak). Neka su a i b dvije različite točke uređena skupa S; pod *intervalom* (odreskom), segmentom (zatvorenim intervalom) ab ili ba skupa S simbolički

(9.1.1)	$(a,b)_S$ ili $(b,a)_S$ nekada također (a,b) ili (b,a)	$[a,b]_S$ ili $[b,a]_S$ nekada također $[a,b]$ odn. $[b,a]$

razumijevamo skup svih $x \in S$ za koje je

(9.1.2)	$a<x<b$, ako je $a<b$ odnosno $a>x>b$, ako je $a>b$	$a \leqslant x \leqslant b$, ako je $a \leqslant b$ odnosno $a \geqslant x \geqslant b$, ako je $a \geqslant b$

Tačke a i b zovu se *krajevi* (ekstremiteti) intervala odn. segmenta (9.1.1); jedan je od njih lijevi (početni), a jedan desni (završni). Čitamo li $a<x<b$ i tako da je x smješten *između* $\begin{Bmatrix} a \text{ i } b \\ b \text{ i } a \end{Bmatrix}$ tada vidimo, da je interval ab (ili ba) sastavljen od svih tačaka skupa S koje su smještene *između* elemenata a i b. To je vrlo slikovit način govorenja.

Analogno, segment $[a,b]_S$ je sastavljen od svih točaka skupa S koje su smještene između a i b te od svih točaka koje su jednake sa a odn. b.

V a ž n a p r i m j e d b a. Krajevi a i b intervala $(a,b)_S$ ne pripadaju tome intervalu nego leže u njegovu komplementu $S \setminus (a,b)_S$.

Analogno, poluinterval

$$[a,b)_S \tag{9.1.3}$$

sastavljen je od svih tačaka skupa S koje su jednake sa a ili koje su smještene između a i b.

Uglasta poluzagrada] odn. [ima da naznači, da je element koji stoji neposredno ispred] odn. iza [, pripojen intervalu. Tako je na pr.

(9.1.4) $$[a, b)_S = \{a\} \cup (a, b)_S \text{ poluzatvoren interval}$$
$$(a, b]_S = (a, b)_S \cup \{b\}.$$

Također se definira

(9.1.5) $$[a, a) = (a, a] = [a, a] = \{a\}.$$

§ 9.2. **Lijevi (početni) i desni (završni) intervali.** Ako je $a \in S$, tad se pod *lijevim intervalom* a skupa S razumijeva skup svih točaka iz S koje su u S smještene *lijevo* od a; označuju se sa

(9.2.1) $$(-\infty, a)_S \text{ ili } (-\infty, a) \text{ ili } (a, -\infty)_S \text{ ili } (a, -\infty);$$

tu dakle $-\infty$ ima simboličko značenje u smislu, da je $-\infty < x$ za svaki $x \in S$ t. j. da su svi elementi skupa S smješteni *desno* od $-\infty$; isto tako simbol $+\infty$ odn. ∞ ima da naznači, da je $x < \infty$, $(x \in S)$ t. j. da su svi elementi skupa S smješteni *lijevo* od ∞, tako da je, po definiciji,

(9.2.2) $$(-\infty, \infty)_S = S \text{ za svaki uređeni skup } S.$$

Prema tome, simboli $+\infty$, $-\infty$ nisu elementi uređena skupa S. Jasno je, da će nam tada

(9.2.3) $$(a, \infty)_S \text{ — } \textit{desni interval a skupa S} \text{ —}$$

označavati skup svih $x \in S$, za koje je $a < x$.

Jasno je, također, da će nam

(9.2.4) $$[a, \infty)_S$$

označavati množinu svih $x \in S$ za koje je $a \leqslant x$.

Intervali

(9.2.5) $$(a, b)_S$$

gdje a, b označuju $\pm\infty$ ili elemente od S, zovu se naprosto *intervalima uređena skupa S.*

Komad uređena skupa S jest svaki njegov podskup P sa svojstvom da iz

$$x, y \in P \text{ slijedi } (x, y)_S \subseteq P;$$

na pr. intervali i segmenti skupa S jesu posebni komadi skupa S.

Pod *početnim komadom* skupa S razumijevamo svaki skup $P \subseteq S$ koji ima svojstvo da sadrži sve pretke svakog svojeg elementa t. j. ako iz

$$a \in P \text{ slijedi } (-\infty, a)_S \subseteq P.$$

Analogno se uvode *završni komadi* uređena skupa.

Pravi početni komad jest onaj početni komad koji nije niti pust niti mu je komplement pust.

Pust skup v i sam skup S zovu se *nepravi* početni (završni) komadi uređena skupa S.

Lema 9.2.1. Ako je I ma koji interval uređena skupa S tada relacije $a \in I$, $b \in I$ imaju za posljedicu da je

$$[a, b]_S \subseteq I.$$

Lema 9.2.2. *Čim neki interval skupa racionalnih brojeva sadrži nulu, sadrži on i pozitivnih i negativnih racionalnih brojeva.*

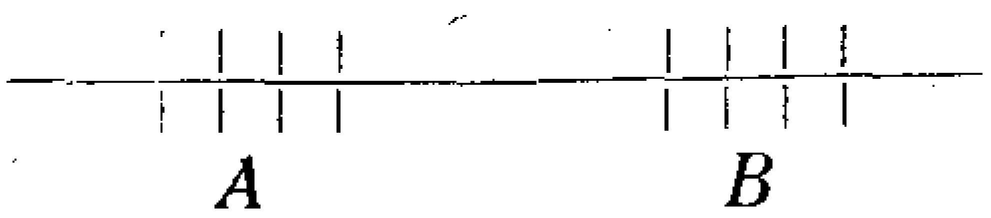
Lema 9.2.3. *Ako su a i b ma kakva dva različita racionalna broja, interval ab uređena skupa racionalnih brojeva sadrži bar jedan, a time i neizmjerno mnogo različitih racionalnih brojeva.*

§ 9.3. **Gustoća uređena skupa.** Kažemo li za uređeni skup da je *gust*, ako ima bar dva elementa, te ako za svaka dva njegova različita elementa a i b ima bar jedan član skupa koji je smješten između a i b, dakle $(a, b) \supset v$, tada se lema 9.3.3 može izreći vrlo slikovito ovako:

Uređeni skup racionalnih brojeva jest gust.

Generalizirajmo tu izreku i dokažimo ovo:

Lema 9.3.1. Ako je S ma kakav gust uređen skup, ako su nadalje A i B ma koja dva *konačna* podskupa skupa S tako da je čitav skup A smješten lijevo od čitava skupa B, tada postoji bar jedan element x skupa S koji je smješten između A i B t. j. za koji je



$$a < x < b, \ (a \in A, \ b \in B),$$

što se kraće naznačuje i ovako:

$$A < x < B.$$

Stvarno, kako je čitav A smješten lijevo od čitava B, *najveći* član skupa A, označimo ga sa M, bit će lijevo od *najmanjeg* člana m skupa B, pa će između M i m biti radi gustoće skupa S, smješteno i drugih elemenata skupa S.

Da lema 9.3.1 ne mora važiti, kad su skupovi A i B beskonačni, dokazuje primjer skupa $S = R \setminus \{0\}$ svih racionalnih brojeva $\neq 0$; dovoljno je tada označiti sa A skup svih negativnih racionalnih brojeva, a sa B skup svih pozitivnih racionalnih brojeva, pa da se uvjerimo, da tada između A i B nema nijednog broja iz skupa $S = R \setminus \{0\}$, ma da lijevi skup A nema najvećeg člana, niti desni skup B nema najmanjeg člana, tako da izgleda kao da na mjestu gdje bi se A i B imali da sastanu, skup S pokazuje izvjesnu prazninu ili provaliju. Da stvar bolje shvatimo, uvedimo slikoviti način *rezanja* skupa S.

§ 9.4. Pojam reza uređena skupa.

§ 9.4.1. **Definicija reza.** Pod rezom uređena skupa S razumijevamo svako rastavljanje toga skupa na dva disjunktna puna dijela od kojih je jedan početan, a jedan završan komad skupa S. Ta dva dijela zovu se *komponente* reza i to, prva, lijeva, donja, početna komponenta i druga, desna, gornja, završna, komponenta reza.

Označimo li rez skupa S sa r, tad sa $r(1)$, možemo označiti prvu, a sa $r(2)$ drugu komponentu reza; sam rez r može se pomoću svojih komponenata $r(1)$, $r(2)$ prikazati ovako:

(9.4.1.1) $$r(1)/r(2) \quad \text{odn.} \quad \frac{r(1)}{r(2)}.$$

Naravno, za svaki rez r skupa S imamo:

(9.4.1.2) $$r(1) \cup r(2) = S$$

(9.4.1.3) $$r(1) \cap r(2) = v \text{ (prazno)}$$

tako da je

(9.4.1.4) $$r(1) = S \setminus r(2), \quad r(2) = S \setminus r(1).$$

To znači da je svaki rez određen već svojom jednom komponentom; preostala je naime komponenta komplement zadane.

Lema 9.4.1.1. Da neki dio $M \subseteq S$ bude prva komponenta reza u skupu $(S; \leqslant)$, nužno je i dovoljno da budu ispunjena ova dva uslova:

(9.4.1.5) $$v \subset M \subset S$$

(9.4.1.6) $$\text{iz } x \in M \text{ slijedi } (-\infty, x]_S \subseteq M \text{ t. j.}$$

s elementom x nalaze se u M i svi elementi iz S koji su $\leqslant x$.

Nužnost relacije (9.4.1.5) je očigledna, jer se u definiciji reza zahtijeva, da obe komponente moraju biti pune i disjunktne. I uslov (9.4.1.6) proizlazi neposredno iz definicije reza, jer se uslovom (9.4.1.6) naprosto iskazuje da je M početan komad skupa S.

Slično se dokazuje da su uslovi (9.4.1.5), (9.4.1.6) dovoljni, pa da M posluži kao prva komponenta izvjesnog reza u S.

§ 9.4.2. **Četiri mogućnosti rezanja.** Kad radimo s nekim potpuno uređenim skupom, onda on ili ima prvi (početni) element ili on nema prvog elementa; isto tako, potpuno uređen skup ili ima posljednji (završni) element ili on nema posljednjeg elementa. Komponente ma kojeg reza r uređena skupa također su uređeni skupovi. Zato se logički mogu zamisliti ova i samo ova 4 slučaja:

P r v i s l u č a j: Prva komponenta $r(1)$ ima zadnji, a druga komponenta $r(2)$ ima prvi element; tada se kaže da je rezom $r = A/B$ pri čemu je $A = r(1)$, $B = r(2)$ proizveden *skok* u skupu S ili da je rez r proizveden parom *uzastopnih članova skupa* S.

D r u g i s l u č a j: Prva komponenta ima zadnji element, dok druga komponenta nema prvog elementa.

T r e ć i s l u č a j: Prva je komponenta bez najvećeg člana, druga komponenta ima najmanji član.

Č e t v r t i s l u č a j: Niti prva komponenta ima najveći, niti druga komponenta ima najmanji član.

U drugom i trećem slučaju, završni element prve komponente, odnosno početni element druge komponente ima naročitu ulogu; kaže se da je on *proizveden* promatranim rezom A/B ili da on proizvodi (određuje) dotični rez A/B.

U četvrtom slučaju, — s teorijskog gledišta ovaj je slučaj najinteresantniji — kaže se, da rez A/B *otvara jednu prazninu* (provaliju) uređena skupa S ili da je rez A/B *proizveden izvjesnom provalijom* u skupu S. Inače, lako je ostvariti sva 4 gornja slučaja. Dok se u uređenom skupu D cijelih brojeva pojavljuje samo prvi slučaj, ne može se taj slučaj uopće pojaviti kod uređena skupa R svih racionalnih brojeva. Ali preostala tri slučaja mogu se u njemu pojaviti.

§ 9.4.3 **Kontinuitet (neprekidnost) linearnog kontinuuma.**

Zor nam kazuje da svaki rez (upravo zarez) pravca proizvodi jednu jedinu točku i ona je završni element u prvoj komponenti reza ako u njoj leži, a početna je točka u drugoj komponenti, ako u ovoj leži.

Kontinuitet linearnog kontinuuma C (t. j. pravca odnosno skupa svih realnih brojeva) i sastoji se, po *Dedekindu* u tome, da je svakim *zarezom* u C *određen (proizveden) jedan jedini realan broj*, tako da dakle kod svakog rezanja skupa C ili prva komponenta ima završni element ili druga komponenta ima početni element.

Također je prirodno da učinimo ovo: ako nam se slučajno nekim rezom A/B uređena skupa S ukazuje praznina, mi tu prazninu možemo popuniti utiskivanjem određenog objekta između A i B. Time će se i skup S proširiti, pa ako taj objekt stavimo bilo u A bilo u B, dobit ćemo time opet rez, ali sada u proširenom skupu, a k tome taj rez ne pokazuje praznine.

Rezanje uređenih skupova je vanredno očigledna i prirodna operacija; Dedekind je u svim mogućim rezanjima uređena skupa racionalnih brojeva ugledao zgodnu realizaciju skupa realnih brojeva, a time i zgodnu priliku da pomoću rezova definira skup realnih brojeva (v. § 10.)

§ 9.4.4. **Operator S (ispunjavanje praznina u uređenom skupu S).**

Promatrajmo množinu svih mogućih rezova uređena skupa S; poistovjetimo[1]) li proizvoljni element $s \in S$ koji nije ni početni ni završni element od S sa onim rezom skupa S kojemu je prva kompenenta sastavljena od skupa

(9.4.4.1) $(-\infty, s]_S$ svih članova $x \in S$ za koje je $x \leqslant s$;

ako nadalje dva reza A/B, A_1/B_1 skupa S smatramo jednakim i pišemo

(9.4.4.2) $$A/B = A_1/B_1$$

onda i samo onda, ako im se istovrsne komponente (recimo prve) razlikuju najviše za jednu neosamljenu točku[2]) skupa S, dobit ćemo time potpuno određen nadskup skupa S, kojeg ćemo u zavisnosti od S označiti sa

(9.4.4.3) $\overset{\circ}{S}$ pridodavši mu i eventualne krajeve skupa S.

Skup $\overset{\circ}{S}$ može se urediti po propisu, da je za elemente

$$A/B,\ C/D \text{ iz } \overset{\circ}{S}$$

(9.4.4.4) $$A/B \leqslant C/D$$

onda i samo onda, ako je

(9.4.4.5) $$A \subseteq C,$$

ili se A i C razlikuje za jednu neosamljenu točku; nadalje eventualni početni (završni) element skupa S ima da bude takav i za skup $\overset{\circ}{S}$. Odmah se vidi, da je time skup $\overset{\circ}{S}$ zbilja uređen. Ali je važno, da skup $\overset{\circ}{S}$ više ne pokazuje praznina.

O tome kako je skup S smješten u skupu $\overset{\circ}{S}$ doznajemo iz leme 9.4.4.1 i teorema 9.4.4.1 koje ćemo odmah dokazati.

Lema 9.4.4.1. Ako je r ma koji element uređena skupa $\overset{\circ}{S}$ (dakle izvjestan rez skupa S), tada relacije

$$x \in \overset{\circ}{S},\ r < x \quad \text{povlače} \quad x \in r(2).$$

---

[1]) Identifikacija raznih oznaka vrlo je česta pojava u matematici. Tim se procesom pojedine uže tvorevine, ništa ne gubeći od svoje individualnosti, utapaju u širem području stapajući se sa tvorevinama, koje promatrane iz uže perspektive stoje s prvima u izvjesnoj suprotnosti. Primjer odbijanja i svođenje odbijanja na zbrajanje zgodan je primjer da objasni tu dijalektičku crtu u matematici.

[2]) Točka x uređena skupa S je *osamljena* (izolirana), ako postoji jedan interval skupa S koji sadrži točku x i nijednu drugu; točka x je *neosamljena* u S, ako svaki interval skupa S koji sadrži x sadrži bar još jednu točku skupa S koja je $\neq x$. Bitno svojstvo beskonačnih skupova jeste, da u njima ima i neosamljenih točaka, odnosno da beskonačni skup možemo preurediti tako da u njemu bude i neosamljenih točaka. Tako na pr. u skupu racionalnih brojeva nema osamljenih točaka.

Ako je x posljednji element u S, on se uvijek nalazi u komponenti $r(2)$, pa je lema ispravna.

Ukoliko x nije posljednji element u S (dakle i u $\mathring{S}$) tada prema definicijama (9.4.4.4), (9.4.4.5) odnos

$$r < x \quad \text{znači, da je} \quad r(1) \subset (-\infty, x]_S$$

i kako je x posljednji element početnog komada $(-\infty, x]_S$ skupa S a $r(1)$ pravi početni dio toga početnog komada, to znači, da nije $x \in r(1)$ nego dakle $x \in S \setminus r(1) = r(2)$ a to baš lemom i hoćemo da iskažemo.

Teorem 9.4 4.1. *Svaki neprazni interval uređena skupa* $\mathring{S}$ *sadrži bar jedan član polaznog skupa* S; *zato nijedan element iz* $\mathring{S} \setminus S$ *nije osamljen u* $\mathring{S}$. Neka je

(9.4.4.6) $$A_1/A_2 \text{ donji, } B_1/B_2 \text{ gornji kraj}^{1)}$$

promatranog intervala I skupa $\mathring{S}$; dakle je $A_1/A_2 < B_1/B_2$ što prema (9.4.4.4) i (9.4.4.5) znači, da je

(9.4.4.7) $$A_1 \subset B_1;$$

pritom su A_1 i B_1 donje komponente određenih rezova skupa S.

Dokažimo, da postoji bar jedan $x \in S$ tako da bude

(9.4.4.8) $$A_1/A_2 < x < B_1/B_2.$$

Promatrajmo skup $B_1 \setminus A_1$ i razlikujmo dva slučaja, već prema tome, da li je taj skup konačan ili beskonačan.

Ako je skup $B_1 \setminus A_1$ konačan, i ima barem dvije točke, neka je p njegov prvi, a z zadnji član. Ako je $(p, z)_S \supset v$, tada je čitav taj interval smješten u zadanom intervalu I. Ako su pak p i z uzastopni (susjedni) u S, tada p zadovoljava traženu relaciju (9.4.4.8); tada naime zbog hipoteze $I \supset v$ mora komponenta A_1 imati posljednji element, jer bi u obrnutom slučaju bilo $A_1/A_2 = p$ što bi zajedno sa $(-\infty, z]_S = B_1$ dalo da je I prazan.

Ako se skup $B_1 \setminus A_1$ sastoji od jedne jedine točke, interval I je prazan.

Tako je relacija (9.4.4.8) dokazana, ako je skup $B_1 \setminus A_1$ konačan.

Ako je pak taj skup beskonačan, tada je dovoljno promatrati bilo koja tri elementa toga skupa i označiti srednji od njih sa x, pa da se uvjerimo da važi (9.4.4.8).

Dokažimo najzad, da nijedan element $x \in \mathring{S} \setminus S$ nije u $\mathring{S}$ osamljen t. j. da ne postoji interval I skupa $\mathring{S}$ koji bi sadržavao jedino točku x; stvarno, prema već dokazanom, taj interval I, čim nije prazan, sadrži

---

1) Drži za umu, da su elementi skupa $\mathring{S}$ rezovi skupa S; dogovorom (9.4.4.1) i (9.4.4.3) i skup S leži u $\mathring{S}$ kao njegov dio.

bar jednu točku x' skupa S a time I sadrži bar dvije točke: zadanu točku x iz $\mathring{S}\setminus S$ i $x' \in S$.

Teorem 9.4.4.2. Uređeni skup $\mathring{S}$ ne pokazuje nijedne provalije, pa je $\mathring{(\mathring{S})} = \mathring{S}$; ili eksplicite: *kod svakog reza skupa $\mathring{S}$ ili prva komponenta reza ima završni element ili druga komponenta ima početni element ili nastupaju ta oba slučaja.*

Ako je naime

$$A/B \tag{9.4.4.9}$$

ma koji rez u skupu $\mathring{S}$ tada je

$$(A \cap S)/(B \cap S) \tag{9.4.4.10}$$

posve određen rez — nazovimo ga

$$r \tag{9.4.4.11}$$

polaznog skupa S, pa je kao takav, r određen element skupa $\mathring{S}$; dakle r leži bilo u prvoj komponenti A bilo u drugoj komponenti B reza (9.4.4.9) skupa $\mathring{S}$. Ako je $r \in A$, dokažimo, da je tada r posljednji element komponente A.

Kad r ne bi bio posljednji član u A postojao bi bar jedan element

$$r' \in A \quad \text{tako da bude} \quad r < r'. \tag{9.4.4.12}$$

No, ne može biti $r' \in S$, jer bi prema lemi 9.4.4.1, relacija $r' \in S$ značila, da je $r' \in B \cap S$ dakle i $r' \in B$; a to i (9.4.4.12) ne može važiti, jer A i B kao komponente reza nemaju zajedničkog elementa. Ako pak nije $r' \in S$, onda to znači, da je r' izvjestan rez C/D skupa S proizveden određenom šupljinom skupa S pa zato prva komponenta C toga reza r' nema najvećeg elementa. Kako je $r < r'$, to prema (9.4.4.4) znači, da je $A \cap S \subset C$. Ako je r'' ma koji elemet skupa $C\setminus A$, tada bi zbog $r < r''$ moralo prema lemi 9.4.4.1 biti $r'' \in B$, dok naprotiv zbog $r'' \leqslant r'$, $r' \in A$ moralo bi biti $r'' \in A$; no obje relacije $r'' \in A$, $r'' \in B$ nisu moguće, jer su A i B, kao komponente reza skupa $\mathring{S}$, disjunktni skupovi. Ako je dakle $r \in A$, tada je r zaista završni član komponente.

Analogno, ako je $r \in \mathring{S}\setminus A$ dakle je $r \in B$, onda je r početni član druge komponente B.

Time je važni teorem 9.4.4.2 potpuno dokazan.

Pojam reza uređena skupa i teorem 9.4.4.2 vrlo su jaka i zgodna dokazna sredstva.

§ 9.5. Minoranta. Infimum.[1] Majoranta. Supremum.[1] (operatori sup. i inf. na uređenim skupovima).

Ako je

(9.5.1) $$M$$

neka množina sadržana u uređenom skupu S, tada se kaže, da je M *ograđen sa donje strane (ili odozdo)* s obzirom na skup S, ako skup S sadrži bar jedan element a sa svojstvom da je

(9.5.2) $$[a; \infty)_S \supseteq M \quad \text{t. j.} \quad a \leqslant m, \ (m \in M);$$

svaka točka a sa svojstvom (9.5.2) zove se *minorantom* skupa M s obzirom na skup $S \supseteq M$.

Ako među minorantama skupa M ima *najveća*, označuje se ona sa

(9.5.3) $$\inf (M; S) \text{ ili naprosto } \inf M \text{ odn. } \inf_{x \in M} x \text{ ili } \inf_x x \quad (x \in M)$$

i zove se *infimum* ili *donja ograda* uređena skupa M s obzirom na skup $S \supseteq M$; ako pak skup M nema ni jedne minorante ili ako među eventualnim minorantama skupa M nema najveće, onda se stavlja

(9.5.4) $$\inf (M; S) = \inf M = -\infty.$$

Na sličan način definiraju se: ograđenost odozgo i majorante množine M s obzirom na skup S; majorante su elementi $b \in S$ sa svojstvom

(9.5.5) $$(-\infty, b]_S \supseteq M.$$

Ako među majorantama ima *najmanja*, označuje se ona sa

(9.5.6) $$\sup (M; S) \text{ ili naprosto } \sup M \text{ odn. } \sup_x x, \ (x \in M) \text{ ili } \sup_{x \in M} x;$$

ako pak među eventualnim majorantama množine M nema najmanje ili ako u skupu $S \supseteq M$ nema ni jedne jedine majorante skupa M, onda se stavlja

(9.5.7) $$\sup (M; S) = \sup M = +\infty.$$

Operatori $\inf M$ i $\sup M$ za dijelove uređena skupa S vanredno su zgodna dokazna sredstva. Njihovu važnost uočio je naročito njemački matematičar Weierstrass (1815—1897); sama oznaka *sup* i *inf* potječe od Hausdorffa (1868—1949).

Ukratko možemo reći:

Supremum skupa M s obzirom na skup $S \supseteq M$ jest ili završni (najveći) element z samog skupa M ili ako z ne postoji, početni element p skupa tačaka iz S koje leže desno, od M ili $+\infty$ kad ne postoji niti z niti p; analogno, $\inf (M; S)$ je ili početni (najmanji) element skupa M ili završni element skupa svih točaka iz S koje leže lijevo od M ili najzad $-\infty$ (red disjunkcija je bitan).

[1]) Supremum = najgornji, vrhovni; infimum = najdonji, najniži.

Veza među operatorima *inf M, sup M,* $(M \subseteq S)$ te karaktera rezanja u S očituje se u

Teoremu 9.5.1. **Za potpuno uređen skup** S **slijedeće tri pretpostavke među sobom su ravnopravne:**

α. *Skup S ne pokazuje ni jedne provalije t. j.* $\overset{\circ}{S} = S$;

β. *Za svaku nepraznu množinu* $M \subseteq S$ *koja je ograničena odozdo važi* $\inf(M; S) \in S$;

γ. *Za svaku nepraznu množinu* $M \subseteq S$ *koja je ograničena odozgo postoji* $\sup(M; S) \in S$.

Teorem ćemo pokazati tako da iz α izvedemo β, pa iz β γ i najzad iz γ α, dakle po shemi

$\alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha$; tu strjelica $\to$ znači „povlači" ili „ima za posljedicu".

Dokažimo najprije $\alpha \to \beta$. Stvarno, neka je $v \subset M \subseteq S$ i neka je M ograđen odozdo; neka je tada A skup svih minoranata skupa M koje leže u skupu $S \supseteq M$; prema hipotezi skup A nije prazan; možemo pretpostaviti, da je $A \subset S$, jer iz $A = S$ odmah zaključujemo da je $M \subseteq A$ i da je M sastavljen od završnog elementa skupa A pa je naravno tada taj element $= \inf M$. No, očito iz $x \in A$ slijedi

$$(9.5.8) \qquad (-\infty, x]_S \subseteq A,$$

jer kako je x minoranta skupa M, pogotovo će svaki elemenat od S koji je $\leqslant x$ biti minorantom. Relacija (9.5.8) sa $v \subset A \subset S$ znači da skup A može poslužiti kao prva komponenta određena reza u skupu S; kako, po hipotezi α, taj rez ne smije otvarati praznine u skupu S i kako, s druge strane, druga komponenta $S \setminus A$ ne može imati prvog elementa (jer bi on kao jedna minoranta imao da leži u A), zaključujemo, da skup A svih minoranata ima najveći član i to je baš infimum skupa M.

Dokažimo sada, da iz β *slijedi* γ. Neka je dakle M ma kakav neprazan dio skupa S koji u S ima bar jednu majorantu; dokažimo, da tada postoji i *najmanja* majoranta; odmah možemo suponirati da je M bez završnog elementa. Označimo li sa B skup svih majoranata skupa M, bit će $v \subset B \subseteq S$; slučaj $B = S$ je jasan, jer bi to značilo da je $M \subseteq B$ i da je skup M sastavljen jedino od jednog elementa i to početnog elementa skupa B, pa bi naravno taj elemenat bio $\sup M$; no, ako je $B \subset S$, onda to znači, da je $S \setminus B \supset v$; kako je naravno čitav B smješten desno od $S \setminus B$, znači, da je skup B ograničen odozdo, pa, prema pretpostavci β, postoji $\inf B \in S$; odmah se vidi, da je taj član $\inf B$ ujedno $\sup M$.

Najzad, zaključak $\gamma \to \alpha$ je neposredan, jer, ako je A/B ma kakav rez skupa S, onda postoji $\sup A \in S$, pa se odmah vidi, da je $\sup A$

ili posljednji u A ili prvi u B, tako da se dakle rezom A/B ne otvara nikakva šupljina u skupu S.

Teorem 9.5.2. (Cantorov Durchschnittssatz). *Ako je S ma kakav uređen skup bez šupljina,* a $S_1 \supseteq S_2 \supseteq \ldots \supseteq S_n \supseteq \ldots$ *ma kakav silazan niz segmenata skupa S, tada je*

$$\bigcap_n S_n, \ (n \in N) \tag{9.5.9}$$

određen segment skupa S (dakle nije prazan).

Stvarno, označimo li sa $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$ skup $\begin{cases} \text{minoranata} \\ \text{majoranata} \end{cases}$ množine svih $\begin{cases} \text{desnih} \\ \text{lijevih} \end{cases}$ krajeva zadanih segmenata, tada je

$$[\sup A, \ \inf B]_S \tag{9.5.10}$$

određen segment zadana skupa S; segment (9.5.10) koji se može reducirati i na jednu jedinu tačku, podudara se sa skupom (9.5.9).

§ 9.6. ZADACI.

§ 9.6.1. Dokaži, da skup racionalnih brojeva r za koje je $r^5 > 2$ obrazuju završan komad skupa $(R; \leqslant)$.

§ 9.6.2. Ako su A, B dva završna komada skupa racionalnih brojeva, tada je i skup $A + B$ svih $a + b, (a \in A, \ b \in B)$ završan komad skupa $(R; \leqslant)$.
Da li vrijedi isto za skup $A \cdot B$? Što je onda kad broj 0 ne leži u $A \cup B$?

§ 9.6.3. Dva istovrsna (raznovrsna prava) krajnja komada potpuno uređena skupa vazda su uporedljiva (neuporedljiva) s obzirom na $\subseteq$.

§ 9.6.4. Odrediti supremum i infimum skupova: N, R, $\sin R$, $\operatorname{tg} R$, $\sin(R \cdot R)$.

§ 9.6.5. Ako je A/B rez u skupu R, da li je onda a) A^2/B^2 rez u skupu R^2, b) $\sin A/\sin B$ rez u skupu $\sin R$?

§ 9.6.6. Skup $R \times R$ uredi po prvim diferencijama; da li je on gust?

§ 9.6.7. Dokaži, da je svaki od skupova a) $\dfrac{2N}{2N+1}$, b) $\dfrac{3N}{2N}$, c) $\dfrac{mN}{nN}$ gust; nađi im supremum i imfimum.

§ 9.6.8. Nađi suprem skupa; a) $\dfrac{N}{1+N}$, b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^N$, c) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^N$, d) $\left(\dfrac{3}{3}\right)^N$.

§ 9.6.9. Ako je A odn. B skup svih poligona upisanih odn. opisanih kružnici K, dokaži da je $\sup\limits_{x \in A} \text{pov } x = \inf\limits_{x \in B} \text{pov } x =$ površina kruga.

§ 9.6 10. Ako niz brojeva a_n raste, tada je

$$\sup_n a_n = \lim_{n\to\infty} a_n \text{; ako niz pada, onda je } \inf_n a_n = \lim_{n\to\infty} a_n .$$

§ 10. LINEARNI KONTINUUM — skup svih realnih brojeva. KOMPLEKSNI KONTINUUM — skup svih kompleksnih brojeva.

Sad smo u mogućnosti da se osvrnemo na razna područja brojeva što smo ih izgradili te da konačno definiramo skup C svih realnih, te skup K svih kompleksnih brojeva i da navedemo nekoliko osnovnih svojstava tih skupova.

§ 10.1. Najprije smo definirali nulu kao kardinalni broj prazna skupa te skup N svih prirodnih brojeva kao skup kardinalnih brojeva konačnih skupova.

Dok su u množini N izvedive i adicija i multiplikacija, dotle njihove inverzne operacije: odbijanje i dijeljenje nisu u skupu N izvedive osim u rijetkim slučajevima. Ali, već skup $N \times N$ uređenih pari može postati nosiocem svojstava koja su vezana za cijele brojeve: treba samo za parove $\overline{m-n}$, $\overline{m'-n'}$ iz $N \times N$ staviti:

(10.1.1) $\quad \overline{m-n} \lesseqgtr \overline{m'-n'}$ već prema tome da li je $m+n' \gtreqless m'+n$

(10.1.2) $\quad (m-n)+(m'-n')=(m+m')-(n+n')$

(10.1.3) $\quad (m-n)\cdot(m'-n')=(mm'+nn')-(mn'+m'n)$

pa da se uvjerimo da time skup $N\times N$ postaje skupom

(10.1.4) $\quad D$

cijelih brojeva

$$\ldots\ldots\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots .$$

pri čemu se uvode prikrate

(10.1.5) $\quad \begin{cases} (n-n)=0 \\ ((n+k)-n)=+k \text{ ili } k \\ ((n-(n+k))=-k \end{cases}$

Tu k i n znače proizvoljne prirodne brojeve.

Taj skup $N\times N$ sada je aditivna grupa, pa se u njemu oduzimanje cijelog broja c svodi na *dodavanje suprotnog* broja $-c$.

No, koliko je god u skupu D izblijedila razlika između sabiranja i oduzimanja, toliko je razlikovanje između množenja i dijeljenja još na snazi, jer se unutar samog skupa D te dvije operacije ne mogu, u svakom slučaju, svesti jedna na drugu.

Ali skup $D \times N$ uređenih parova

$$\left(\frac{d}{n}\right), \quad (d \in D, \ n \in N)$$

već nam omogućuje da u njemu izvedemo neograničeno (0 kao divizor isključena) diobe isto kao i množenja; treba samo u tom skupu definirati

(10.1.6) $\left(\frac{d}{n}\right) \lesseqgtr \left(\frac{d'}{n'}\right)$ onda i samo onda ako $dn' \lesseqgtr d'n$

(10.1.7) $\left(\frac{d}{n}\right) + \left(\frac{d'}{n'}\right) = \left(\frac{dn' + d'n}{nn'}\right)$

(10.1.8) $\left(\frac{d}{n}\right) \cdot \left(\frac{d'}{n'}\right) = \left(\frac{dd'}{nn'}\right)$

pa da se uvjerimo, da tako nastala organizacija[1]) skupa $D \times N$ odgovara baš onome što u dnevnom životu čujemo o racionalnim brojevima i što s njima možemo da radimo. Zato tako organizirani skup $D \times N$ i zovemo skupom

(10.1.9) R svih racionalnih brojeva, a konvencijom

$$\left(\frac{d}{1}\right) = d, \quad (d \in D)$$

uspostavljamo srodstvo, vezu, između novoga skupa R svih racionalnih brojeva i prethodne etape brojeva naime skupa D svih cijelih brojeva.

Na taj način već sada imamo dvije oblasti brojeva i to:

Prva oblast: Kardinalni brojevi sa svoja tri područja i to:

1) 0 (nula) kao potencija praznih skupova,
2) prirodni brojevi (kardinalni brojevi konačnih skupova),
3) transfinitni kardinalni brojevi, među kojima smo dosad upoznali naročito $\aleph_0$ (alef nula) i $2^{\aleph_0}$ = potencija kontinuuma.

Druga oblast brojeva jesu operativna brojevna područja, od kojih dosad znamo:

1) Skup D svih cijelih brojeva, koji je jedna uređena komutativna aditivna grupa;
2) Skup R svih racionalnih brojeva, koji je jedno uređeno tijelo brojeva.

Poslije ćemo se upoznati i sa drugim vrstama brojeva (ordinalni brojevi, realni, kompleksni i t. d.).

Dok smo kod skupa N imali osnovnu činjenicu, da je za svak $n \in N$ također $n+1 \in N$ i to $n < n+1$, ali da se niz $n, n-1, (n-1)-1,$

[1]) Tu se organizacija skupa $D \times N$ sastoji baš u ovim procesima: a) mogućnost razlikovanja elemenata u $D \times N$; b) Mogućnost uređenja skupa $D \times N$; c) Sabiranje i oduzimanje unutar $D \times N$; d) Množenje i dijeljenje unutar $D \times N$.

$((n-1)-1)-1, \ldots$ mora prekinuti u području N, dotle smo kod skupa D imali činjenicu, da iz $d \in D$ izlazi i

$$d-1 \in D \quad \text{i} \quad d+1 \in D, \quad \text{i to}$$
$$d-1 < d < d+1,$$

pa zato u *D nema niti najmanjeg niti najvećeg broja.*

Ali, dok u skupu *D za ma koji* $d \in D$, *nema između* $d-1$ *i* $d+1$ *drugog broja osim d,* dotle, naprotiv, *za ma koja dva racionalna broja* r, r', *između* r *i* r' *ima neizmjerno mnogo drugih racionalnih brojeva.*

Kraće se to kaže: *skup R je gust.*

Međutim, koliko god izgledalo da je skup R obimniji od skupa N prirodnih brojeva, ipak ta dva skupa imaju isti kardinalni broj. U praktičnim potrebama, skup R je toliko bogat i raznovrstan, da se kod raznih približnih izračunavanja možemo ograničiti samo na njega. Međutim, već tako jednostavan problem kao na pr. mjerenje dijagonale kvadrata pomoću stranice toga kvadrata kao jedinicom, dovodi nas do nemogućnosti da rezultat $\sqrt{2}$ toga procesa označimo racionalnim brojem. Naime $\sqrt{2}$ nije racionalan broj, ma da i slijeva i zdesna od $\sqrt{2}$ ima proizvoljno na blizu racionalnih brojeva. To je ono, da $\sqrt{2}$ dolazi na mjesto gdje u uređenom skupu R racionalnih brojeva zjapi jedna provalija, i baš ta provalija u vezi je sa $\sqrt{2}$.

§ 10.2. Realni brojevi.

§ 10.2.1. **Definicija realnih brojeva.** Proces ispunjavanja rupa u uređenim skupovima (§ 9.4.4) primijenjen na skup R racionalnih brojeva dovodi nas do posve određenog skupa

$$(10.2.1.1) \qquad \overset{0}{R};$$

taj je skup uređen, gust kao i polazni skup R, ali za razliku novi skup $\overset{0}{R}$ (prema teoremu 9.4.4.2) nema ni jedne jedine provalije. U tome je njegova znatna važnost i to tolika da uz još neku dopunbenu organizaciju unutar $\overset{0}{R}$, a koja se tiče pitanja kako da u skupu $\overset{0}{R}$ *računamo* (vidi definiciju sabiranja i množenja) skup $\overset{0}{R}$ postaje ono što smo privikli da zovemo *skupom svih realnih brojeva.*

Sjetimo se, da smo za $x \in R$, rez skupa R kojemu je prva komponenta sastavljena od skupa $(-\infty, x]_R$ svih rac. brojeva $\leqslant x$ nazivali naprosto x, čime postižemo, da bude $R \subseteq \overset{0}{R}$; prema definiciji iz poč. § 9.4.4., rezovi kojima su prve komponente $(-\infty, x)_R$ i $(-\infty, x]_R$ međusobno su jednaki. Tada se lako dokaže da se osnovne računske operacije: zbrajanje i množenje racionalnih brojeva prevode *ovako na jezik rezova skupa R.*

Lema 10.2.1.1. Suma $x+x'$ racionalnih brojeva x i x' jest rez skupa R racionalnih brojeva kojemu je prva komponenta $(-\infty, x)_R + (-\infty, x')_R$ t. j. skup sastavljen od svih brojeva oblika

$$a+b; \text{ pritom je } a<x,\ b<x',\ a\in R,\ b\in R.$$

Lema 10.2.1.2. Produkt $x.x'$ racionalnih brojeva x, x' jest rez skupa R, kojemu je jedna komponenta sastavljena od skupa svih brojeva oblika $a \cdot b$; pritom a odn. b prolazi svim racionalnim brojevima one polovine skupa R što je određuje broj a odn. b u kojoj se ne nalazi broj 0.

Na pr. $-2 \cdot 3$ jest rez kojemu je jedna komponenta (odmah ćemo vidjeti da je to prva) jednaka

$$(-\infty, -2)_R \cdot (3, \infty)_R$$

i dakle sastavljena od svih produkata racionalnih brojeva a, b, pri čemu je $a \leqslant -2$, $b \geqslant 3$.

Čitaocu toplo preporučamo da i dokaže leme 10.2.1.1 i 10.2.1.2, pa da i ostala uobičajena pravila o računanju sa racionalnim brojevima prevede na jezik rezanja skupa R.

Inače leme 10.2.1.1 i 10.2.1.2 daju nam povoda da njihov sadržaj prenesemo sa skupa R (koji je tek neznatan dio skupa $\overset{0}{R}$) na čitav skup $\overset{0}{R}$; time će skup $\overset{0}{R}$ dobiti završnu unutrašnju organizovanost i postati nosiocem svih svojstava koja smo navikli da vežemo uz realne brojeve. Imamo dakle ovu

Definiciju realnih brojeva: Uređeni skup $\overset{0}{R}$[1]) zove se *skupom realnih brojeva,* a njegovi elementi *realnim brojevima,* ako se u $\overset{0}{R}$ računa po ovim propisima i svima drugima koji iz ova dva proistječu.

Propis za zbrajanje realnih brojeva: Pod sumom

(10.2.1.2) $\quad A_1/A_2 + B_1/B_2$ realnih brojeva A_1/A_2, B_1/B_2[2])

razumijeva se rez skupa R kojemu je jedna (dakle prva) komponenta sastavljena od svih brojeva

(10.2.1.3) $\quad a_1 + b_1,\ (a_1 \in A_1,\ b_1 \in B_1)$ i dakle jednaka $A_1 + B_1$.

Propis za množenje realnih brojeva. Pod produktom

(10.2.1.4) $$A_1/A_2 \cdot B_1/B_2$$

---

[1]) Sjeti se da je skup R skup svih racionalnih brojeva uređen po veličini; prelaz od R na $\overset{0}{R}$ definiran je u § 9.4.4 (zasipanje rupa u R).

[2]) Kao elementi skupa $\overset{0}{R}$, realni brojevi su izvjesni rezovi skupa R: specijalno za ma koji racionalni broj r, ovaj se ima shvatiti kao realni broj i to kao rez kojemu je prva komponenta $(-\infty, r)_R$ odn. $(-\infty, r]_R$.

realnih brojeva razumijevamo onaj rez skupa R kojemu je jedna komponenta sastavljena od skupa svih brojeva

(10.2.1.5) $$a \cdot b$$

pritom a odn. b protječe onu komponentu reza A_1/A_2 odn. B_1/B_2 u kojoj se ne nalazi racionalni broj 0 (nego dakle sve sami pozitivni ili sve sami negativni rac. brojevi).

Prepuštamo čitaocu da dokaže da, uz gornje definicije, skup $\mathring{R}$, kojega ćemo sada označavati sa

(10.2.1.6) C odnosno C_1 (poč. slovo od Continuum)

i nazivati *skupom realnih brojeva* ili *linearnim kontinuumom*, zadovoljava uobičajena računska pravila, specijalno da je C aditivna komutativna grupa te da je $C \setminus \{0\}$ multiplikativna grupa i da važi distributivni zakon množenja s obzirom na adiciju:

$$(a+b)c = ac + bc, \quad (a, b, c \in C).$$

Lako se dokaže da je skup C uređeno arhimedovsko[1]) tijelo brojeva

§ 10.2.2. **Nekoja svojstva linearnog kontinuuma** $C = \mathring{R}$.

Teorem 10.2.2.1. *Svaki interval realnih brojeva sadrži i racionalnih brojeva; specijalno, između ma koja dva nejednaka iracionalna (trascendentna) broja ima i racionalnih brojeva.*[2])

To izlazi neposredno iz teorema 9.4.4.1 za $R = S$; kako naime u skupu $\mathring{R}$ nema uzastopnih elemenata, jer ih nema niti u skupu R racionalnih brojeva, može se teorem 9.4.4.1 odmah primijeniti na skup $\mathring{R}$.

Vanredno korisno, a očigledno svojstvo linearnog kontinuuma C daje

Teorem 10.2.2.2. *U uređenom skupu* C *nema rupa (provalija), nego naprotiv, bilo* $C = A \cup B$ *makar kakvo rastavljanje linearnog kontinuuma* C *na dva neprazna dijela od kojih je jedan smješten kao cjelina ispod (ili lijevo) drugoga, onda ili lijevi dio ima završni (najveći) elemenat ili desni dio ima početni (najmanji) element (gl. teorem 9.4.4.2). Sadržina zadnje rečenice izriče se i tako da se kaže da je linearni kontinuum* C *(t. j. skup realnih brojeva ili pravac kao skup svojih realnih točaka) neprekidan u Dedekindovu smislu.*

Upravo su prevažni operatori

(10.2.2.1) $\inf M$ (infimum od M), $\sup M$ (supremum od M),

[1]) „arhimedovsko" znači da je ispunjen Eudokso-Arhimedov postulat: za ma koja dva pozitivna realna broja x, y postoji prirodan broj n tako da bude $nx > y$.

[2]) O tome, da između svaka dva racionalna broja ima iracionalnih, pa čak i transcendentnih brojeva, i dapače njih kontinuum mnogo, vidi teorem 6.8.1.1.

gdje je M kakva god množina realnih brojeva; $\inf M$ je početni element u M, ako takav postoji, ili završni element z među svim realnim brojevima koji su smješteni ispod M; ako niti z ne postoji, onda se stavlja $\inf M = -\infty$. Analogno se definira $\sup M$ odn $\sup\limits_{x \in M} x$

Teorem 10.2.2.3. *Ako je* M *ma kakva puna množina realnih brojeva koji su svi smješteni* $\left\{\begin{array}{l}\textit{iznad}\\ \textit{ispod}\end{array}\right.$ *jednog realnog broja, onda je*

$\left.\begin{array}{l}\inf M\\ \sup M\end{array}\right\}$ *potpuno određ realan broj (gl. teor. 9.5.1).*

Teorem 10.2.2.4. (Borel-Lebesgue-ovo svojstvo segmenata).

Ako je S *proizvoljan segment uređena skupa* C, *a* P *proizvoljna porodica otvorenih intervala skupa* C *koji prekrivaju segment* S *dakle:*

$$S \subseteq \bigcup_X X, \ (X \in P):$$

tada u porodici P *postoji konačno mnogo (tu je akcent!) članova koji već sami prekrivaju čitav segment* S *(inače* P *može biti ma kojeg kardinalnog broja, naravno* $\leqslant c^2 = c$*).*

Stvarno, recimo za neku točku $x \in S$ da je *dostiživa,* ako se segment

$$[\inf S\,,\, x] \tag{10.2.2.2}$$

može prekriti sa *konačno mnogo* intervala iz P; označimo sa M množinu koja je sastavljena od svih dostiživih točaka segmenta S; naravno, množina M postoji, sadrži bar donji kraj $\inf S$ segmenta S, a jasno je da je omeđena zdesna, jer je $M \subseteq S$; zato je

$$\sup M \leqslant \sup S; \tag{10.2.2.3}$$

no tu ne može biti znak $<$, jer prema definiciji skupa M točke iz $[\inf S, \sup M]$ su sigurno dostižive t. j. mogu se prekriti sa konačno mnogo članova iz P; ako tim članovima još dovedemo i jedan član iz P koji prekriva točku $\sup M$, prekrit će se time sa konačnim dijelom porodice P ne samo segment $[\inf S, \sup M]$ nego još i nešto više udesno; očito, to bi bilo nemoguće, kad bi u (10.2.2.3) važio znak $<$.

Teorem 10.2.2.5. (Cantorov *teorem o uklapanju ili subdiviziji realnog segmenta,* isp. teor. 9.5.2). Ako su

$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ segmenti realnih brojeva, pa ako je
$S_n \supseteq S_{n+1}, \ (n \in N)$

tada je i presjek

$$\bigcap_n S_n, \ (n \in N)$$

određen segment (izuzetno se ovaj može reducirati na jednu točku odnosno broj).

§ 10.2.2.1. **Primjena na diadski diskontinuum.** Pođimo od nekog segmenta S realnih brojeva i promatrajmo ma koja dva disjunktna segmenta koja su sadržana u S i da im dužina bude <1: označimo ih sa S_0 i S_1 i to tako da S_0 bude smješten lijevo od S_1; iz svakog od segmenata S_0 i S_1 izvadimo na sličan način dva segmenta dužine $<\frac{1}{2}$ i označimo ih tako da postojećim indeksima nadodamo još 0 ili 1; tako da izlaze 4 segmenta:

$$S_{00}, S_{01} \text{ u } S_0 \text{ i to } S_{00} \text{ lijevo od } S_{01},$$
$$S_{10}, S_{11} \text{ u } S_1 \text{ i to } S_{10} \text{ lijevo od } S_{11}.$$

Iz dobivena $4\,(=2^2)$ segmenta dobivamo ponovno 2^3 segmenata dužine $<\frac{1}{3}$; tako na pr. iz S_{01} proizvest ćemo ma koja dva segmenta dužine $<\frac{1}{3}$, a označit ćemo ih sa S_{010} i S_{011} i to tako da S_{010} bude lijevo od S_{011}. Stvar se nastavlja sve dalje i dalje. Na taj način dobivamo porodicu segmenata

$$(10.2.2.1.1) \qquad S_{i_1 i_2 \ldots i_n}, \quad (i_n = 0 \text{ ili } 1, \; n \in N)$$

sa svojstvom, da su ma koja dva segmenta ili bez zajedničkih tačaka ili jedan sadrži drugi; segment S_I sadržan je u segmentu S_K onda i samo onda, ako je kompleks (slog) K *početni* komad kompleksa (sloga) I.

Ako je

$$(10.2.2.1.2) \qquad i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$$

ma koji diadski niz t. j. niz sastavljen od 0 i 1 (dakle je taj niz element skupa $\{0, 1\}_1 (N)$, tada je tim nizom određen niz padajućih segmenata:

$$S_{i_1} \supseteq S_{i_1 i_2} \supseteq S_{i_1 i_2 i_3} \supseteq \ldots$$

kojima su dužine po redu najviše: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

Tada po Cantorovu teoremu ti segmenti imaju bar jednu tačku zajedničku, a zbog uslova da dužine segmenta opadaju ispod svake granice, proizlazi da je skup

$$(10.2.2.1.3) \qquad \bigcap_{n \in N} S_{i_1 i_2 \ldots i_n}$$

jednočlan. Skup svih tačaka (10.2.2.1.3) kad (10.2.2.1.2) prolazi množinom $\{0, 1\}_1 (N)$ zove se *dijadski diskontinuum realnih brojeva,* a nastaje iz $\{0, 1\}_1 (N)$ obostrano jednoznačnom transformacijom, koja proizvoljnom elementu $i_1, i_2, i_3, \ldots$ iz $\{0, 1\}_1 (N)$ pridijeljuje realni broj (10.2.2.1.3). Dobili smo dakle ovaj

Teorem 10.2.1.1.1. Svaki segment realnih brojeva sadrži bar jedan diadski diskontinuum realnih brojeva (pa zato ima kardinalni broj $\geqslant k\{0, 1\}_1 (N) \equiv 2^{\aleph_0}$).

§ 10.2.3. **Pojam limesa niza realnih brojeva.** (Operator $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $a_n \in C$). Neposredna posljedica relacija

$$n < n+1 \in N \text{ za svaki } n \in N$$

jeste ova

Lema 10.2.3.1. Svaka okolina realna broja 0[1]) sadrži *gotovo* sve[2]) članove niza $\frac{1}{n}$ odn. $-\frac{1}{n}$, $(n \in N)$ odn. gotovo čitav skup $\frac{1}{N}$. Općenitije: ako je a ma koji realni broj, tada svaka okolina broja a sadrži *gotovo sve* članove niza $a + \frac{1}{n}$, $(n \in N)$ odnosno gotovo čitav skup $a + \frac{1}{N}$.

Ta lema ukazuje na osnovnu pojavu u višoj matematici, naime, da se pojedini skup može *nagomilavati* oko pojedine točke, u smislu, da *svaka okolina te točke sadrži beskonačan dio promatranog skupa.* Taj će nas pojav interesirati naročito u teoriji apstraktnih prostora, ali već i sada možemo izvući pouku i izreći ovu definiciju koja je već preko sto godina, od Cauchy-a (1789—1857) na ovamo, temelj matematičke analize (klasične):

Definicija 10.2.3.1. Veli se da niz a realnih brojeva[3])

$$a(1),\ a(2),\ \ldots,\ a(n),\ \ldots \tag{10.2.3.1}$$

konvergira ili *da je konvergentan*, ako postoji realan broj sa svojstvom, da *svaka* njegova okolina sadrži *gotovo sve* članove zadanoga niza; sam taj broj u zavisnosti od zadana niza označuje se sa

$$\lim_{n\to\infty} a(n) \tag{10.2.3.2}$$

i zove se *limesom (graničnom vrijednosti)* niza a. Veli se također da niz (10.2.3.1) *konvergira (teži)* prema broju (10.2.3.2); tako na pr. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Ako niz (10.2.3.1) nije konvergentan, veli se da on *divergira.* Specijalan slučaj divergentnih nizova jest ovaj:

---

[1]) Svaki interval (pažnja: *otvoreni interval)* realnih brojeva zove se *okolinom svake* točke toga intervala.

[2]) gotovo sve = sve ili sve sa najviše konačno mnogo izuzetaka.

[3]) Mislimo vazda na beskonačan niz t. j. na proizvoljnu realnu jednoznačnu funkciju a definiranu u skupu N svih prirodnih brojeva.

Ako je niz $a(1)$, $a(2)$. . . . takav da za ma koji realan broj x gotovo svi članovi niza leže $\left\{ \begin{matrix} \text{desno} \\ \text{lijevo} \end{matrix} \right.$ od x, onda se kaže, da niz konvergira (divergira) prema $\left\{ \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix} \right.$ i piše

$$\lim_{n\to\infty} a(n) = \left\{ \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix} \right. . \tag{10.2.3.3}$$

T e o r e m 10.2.3.1. (C a u c h y e v *kriterij konvergencije*).

Da niz realnih brojeva bude konvergentan, treba, a i dosta je, da gotovo svi članovi niza budu smješteni u proizvoljno malim intervalima t. j. da za proizvoljan broj $\eta > 0$ *(promjer intervala) postoji realni interval* I *promjera* $< \eta$, *tako da on sadrži gotovo sve članove niza.*

Slikovito i kinematički možemo Cauchy-ev kriterij izreći ovako: Da niz realnih brojeva konvergira, nužno je i dovoljno, da se *svaki realni interval* može tako pomaknuti da obuhvati gotovo sve članove promatranog niza (naravno da je pomicanje intervala nepotrebno, ako on već obuhvata gotovo čitav zadani niz).

U s l o v j e n u ž d a n, t. j. dokažimo ovo:

Ako niz (10.2.3.1) konvergira, onda su gotovo svi članovi niza smješteni u proizvoljno malim intervalima. Stvarno, neka je η proizvoljan broj; tada uslov, da niz (10.2.3.1) konvergira znači, da postoji broj A sa svojstvom, da svaka njegova okolina I, pa dakle i takova kojoj je promjer $< \eta$, sadrži gotovo sve članove niza. Dakle, zbilja za proizvoljan broj $\eta > 0$ postoji interval I dužine $< \eta$ koji sadrži skoro sve članove niza (10.2.3.1).

U s l o v j e d o v o l j a n t. j. važi ovaj zaključak: ako je $a(1)$, $a(2)$ .... ma koji niz realnih brojeva sa svojstvom, da ih gotovo sve možemo strpati u proizvoljno male intervale, onda postoji realan broj A tako da svaka okolina od A sadrži gotovo sve članove niza $a(1)$, $a(2)$, ...

Stvarno, označimo sa

$$F \tag{10.2.3.4}$$

porodicu *svih* intervala I, od kojih *svaki* ima svojstvo da sadrži gotovo sve članove niza (10.2.3.1). Označimo li sa

$$\omega I \text{ odnosno } \omega(I)$$

dužinu intervala I,

onda se pretpostavka, da su gotovo svi članovi niza (10.2.3.1) sadržani u proizvoljno kratkim intervalima I može izraziti i ovako:

$$\inf_{I \in F} \omega(I) = 0. \tag{10.2.3.5}$$

Promatrajmo broj

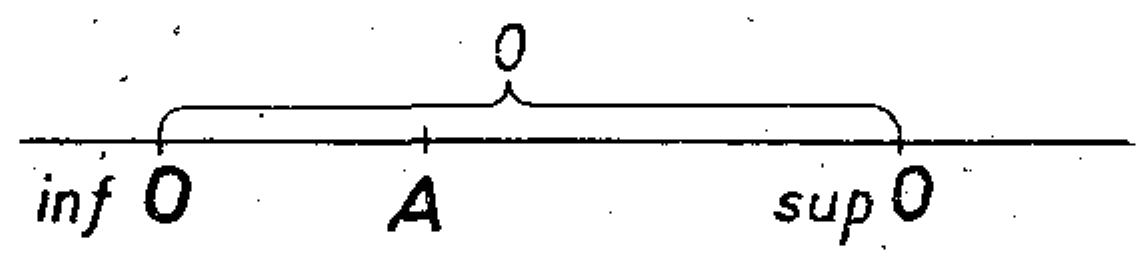
(10.2.3.6) A = supremum donjih krajeva svih intervala $I, (I \in F)$.

Tvrdimo da je

$$\lim_{n\to\infty} a(n) = A$$

t. j. da svaka okolina O broja A sadrži gotovo sve članove $a(n)$.

Najprije, desni kraj $\sup O$ od O je takav da ispod njega leži neizmjerno mnogo članova $a(n)$; u obrnutom slučaju, ležalo bi ispod $\sup O$ najviše konačan broj članova $a(n)$, pa bi zato bilo $\sup O \leqslant A$; no to je nemoguće, jer bi to značilo, da interval O nije okolina od A. No, desno od $\sup O$ ima tek $< \aleph_0$ t.j. konačno mnogo brojeva $a(n)$, $(n \in N)$; u obrnutom slučaju, bilo bi ih neizmjerno mnogo. No, kako svaki $I \in F$ obuhvata gotovo sve $a(n)$, $(n \in N)$, to znači, da bi svaki $I \in F$ morao da obuhvati i bar jedan član iz (10.2.3.1) koji je smješten desno $\sup O$; to znači, da bi desni kraj od I bio $\geqslant \sup O$ za svaki $I \in F$. Kako je k tome lijevi kraj od I svakako $\leqslant A$, to znači, da bi dužina ωI od I bila $\geqslant \sup O - A$, dakle



Sl. 10.2.3.1

$$\inf_I \omega I \geqslant \sup O - A > 0, \ (I \in F)$$

protivno pretpostavci (10.2.3.5). Dakle uistinu, svaka okolina O broja (10.2.3.6) sadrži gotovo sve članove niza (10.2.3.1), čime je dokazano da su uslovi Cauchy-eva kriterija i dovoljni za konvergenciju niza.

Time je Cauchy-ev kriterij potpuno dokazan.

§ 10.2.4. Gomilišta zadana niza.

Veli se, da je x *gomilište (mjesto nagomilavanja)* ili granična vrijednost nekog beskonačnog niza brojeva, ako taj niz sadrži beskonačan niz koji konvergira prema x (pritom x može biti broj ili $-\infty$ ili $+\infty$).

Infimum skupa / Supremum „ } svih gomilišta niza $a(n)$, označuje se sa

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} \inf a(n) \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sup a(n) \end{array}\right\} \text{ odnosno prema Pringsheimu } \left\{\begin{array}{l} \underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n \\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n \end{array}\right.$$

i čita } limes inferior / „ superior } niza $a(n)$.

Naravno

$$-\infty \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n \leqslant +\infty$$ za svaki član a skupa $N_1(R)$ Ako je $\underline{\lim}\, a(n) = \overline{\lim}\, a(n)$ onda je to dalje $= \lim a(n)$.

Teorem 10.2.4.1. (Bolzano-Weierstrassov *teorem*). *Ako se članovi niza realnih brojeva mogu obuhvatiti jednim realnim segmentom, onda taj niz ima bar jednu konačnu graničnu vrijednost.*

Stvarno, ako je S_1 bilo koji segment koji obuhvata čitav zadani niz, pa ako S_1 podijelimo na dva jednaka segmenta, onda bar jedan od ovih, recimo S_2, sadrži $\aleph_0$ članova zadanog niza; analogno se iz S_2 izvodi, da jedna njegova polovina-segment S_3 sadrži $\aleph_0$ članova zadana niza, i t. d., i t. d.; za svaki n proizlazi segment S_{n+1} kao jedna od polovine segmenta S_n koja sadrži $\aleph_0$ članova zadanog niza. Prema Cantorovu teoremu, skup $\bigcap S_n$ postoji, a zbog $\omega S_{n+1} = \frac{1}{2}\omega S_n$ dakle $\omega S_{n+1} = \frac{1}{2^n}\omega(S_1)$, jasno je, da je skup $\bigcap\limits_n S_n$ sastavljen od jedne jedine točke. Odmah se vidi da je ta točka jedno gomilište zadanog niza: dovoljno je za svaki $n \in N$ označiti sa $\nu(n)$ najmanji prirodni broj sa svojstvom;

$$a(\nu(n+1)) \in S_{n+1},\ \nu(n+1) > \nu(n),$$

pa da se uvjerimo da je niz

$$a(\nu(1)),\ a(\nu(2)),\ \ldots,\ a(\nu(n)),\ \ldots$$

izvađen iz zadanog niza $a(1)$, $a(2)$ .... i da on konvergira prema broju $\bigcap\limits_n S_n$.

§ 10.3. Kompleksni brojevi.

§ 10.3.1. Definicija skupa K kompleksnih brojeva.

Skup kompleksnih brojeva jest skup

(10.3.1.1) $$C_1\{0, 1\}$$

svih jednoznačnih realnih funkcija koje su definirane u dvočlanom skupu $\{0, 1\}$.[1]), a sa kojima se radi i računa po ovim propisima (i svim drugima koji iz njih izviru).

Označimo realnu jednoznačnu funkciju (kompleksni broj) x definiranu u dvočlanom skupu $\{0, 1\}$ sa

$$(x(0),\ x(1)).$$

Kompleksni broj x je manji ili jednak nego kompleksni broj y, simbolički

(10.3.1.2) $$x \leqslant y, \text{ ako je } x(0) \leqslant y(0),\ x(1) \leqslant y(1).$$

Pod sumom $x + y$ odn. $(x(0), x(1)) + (y(0), y(1))$ *kompleksnih brojeva*

$$x,\ y \text{ odn. } (x(0),\ x(1)),\ (y(0),\ y(1))$$

[1]) Naravno, mjesto dvočlanog skupa $\{0, 1\}$ može se uzeti koji god dvočlan skup.

razumijevamo kompleksni broj

$$(x(0)+y(0),\ x(1)+y(1)),$$ pa pišemo

(10.3.1.3) $$x+y=(x(0),\ x(1))+(y(0),\ y(1))=(x(0)+y(0),\ x(1)+y(1))$$

dakle
$$(x+y)(0)=x(0)+y(0)$$
$$(x+y)(1)=x(1)+y(1).$$

Pod produktom $x\,y$ odn. $(x(0),\ x(1))\cdot(y(0),\ y(1))$ *kompleksnih brojeva* x, y odnosno $(x(0), x(1))$, $(y(0), y(1))$ razumijevamo kompleksni broj $(x(0)\,y(0)-x(1)\,y(1),\ x(0)\,y(1)+x(1)\,y(0))$ pa pišemo

(10.3.1.4) $$xy=(x(0), x(1))\cdot(y(0), y(1))=$$
$$=(x(0)\,y(0)-x(1)\,y(1),\ x(0)\,y(1)+x(1)\,y(0))$$

dakle
$$(x\,y)(0)=x(0)\,y(0)-x(1)\,y(1)$$
$$(x\,y)(1)=x(0)\,y(1)+x(1)\,y(0).$$

Srodstvo skupa kompleksnih brojeva sa polaznim skupom C realnih brojeva ostvareno je time što svaki realan broj r smatramo jednakim sa kompleksnim brojem $(r,0)$ dakle

(10.3.1.5) $$r=(r,0),\ \text{t. j.}\ r(0)=r,\ r(1)=0\ (r\in C).$$

Označimo li skup $C_1\{0,1\}$ organiziran propisima (10.3.1.2)—(10.3.1.4), i (10.3.1.5) slovom

(10.3.1.6) K (početno slovo od kompleksan = složen)

onda je dakle

(10.3.1.7) $$C\subseteq K \text{ i to } C\subset K,$$

jer na pr. kompleksni broj $(0, 1)$ nije jednak ni s jednim realnim brojem.

Iz definicije (10.3.1.2) proizlazi naime neposredno

Lema 10.3.1.1. Da za kompleksne brojeve x i y bude $x=y$ (t. j. i $x\leqslant y$ i $y\leqslant x$), nužno je i dovoljno da bude $x(0)=y(0)$, $x(1)=y(1)$.

§ 10.3.2. Čitalac se lako uvjeri, da za sabiranje i množenje u skupu K važe zakoni komutacije, asocijacije i zakon distribucije

$$(a+b)\,c=ac+bc,\ (a, b, c\in K).$$

Specijalno se vidi, da je

(10.3.2.1) $$x=(x(0), x(1))=(x(0), 0)+(0, x(1))=x(0)+(0, x(1))$$

(10.3.2.2) $$(0,\ x(1))=(0,1)\cdot x(1)$$

(10.3.2.3) $$(0,1)^2=-1.$$

Dakle, postoji kompleksan broj i to konkretno $(0, 1)$, kojega je kvadrat $=-1$.

Taj kompleksni broj $(0, 1)$ t. j. funkcija $(0, 1)$ označuje se slovom i, dakle

(10.3.2.4) $$i = (0, 1) \text{ te } i(0) = 0, \; i(1) = 1$$

kao početnim slovom riječi *imaginaran* odnosno *identičan*; naime: u jednu ruku kompleksni broj $(0, 1)$ zove se *imaginarna jedinica*, a u drugu ruku kompleksni broj $(0, 1)$ u svojem značenju kao transformacija i dvočlanog skupa $\{0, 1\}$ jest *identična* transformacija toga skupa na sama sebe:

(10.3.2.5) $$i(0) = 0, \; i(1) = 1.$$

Imamo ovo:

Proizvoljan kompleksan broj $x = (x(0), x(1)) =$ po definiciji (10.3.1.3) $= (x(0), 0) + (0, x(1)) =$ (po konvenciji (10.3.1.5) $= x(0) + (0, x(1)) =$ $=$ po 10.3.1.4 $= x(0) + (0, 1)\, x(1) =$ (po konvenciji 10.3.2.4) $= x(0) + ix(1)$ dakle

(10.3.2.6) $$x = (x(0), x(1)) = x(0) + ix(1).$$

Opći kompleksni broj x *izlazi kao suma proizvoljnog realnog broja* $x(0)$ *i produkta imaginarne jedinice i sa proizvoljnim realnim brojem* $x(1)$.

Ipak, ne smije se pritom smetnuti s uma, da na desnoj strani jednakosti (10.3.2.6) slova $x(0)$ te $x(1)$ doduše znače realne brojeve, ali u kompleksnom ruhu!

Složeni (kompleksni) oblik $x(0) + i\,x(1)$ za kompleksni broj $x =$ $= (x(0), x(1))$ vrlo je sugestivan, jer identifikacija (10.3.2.6) daje nam mogućnost da s kompleksnim brojevima radimo kao sa običnim algebarskim binomima držeći vazda na umu da je

$$i^2 = -1 \text{ (dakle } i^3 = i^2 \cdot i = -i \text{ i t. d.)}.$$

Specijalno, odmah se može dokazati da je

$$(x(0) + ix(1)) \pm (y(0) + iy(1)) = (x(0) \pm y(0) + i(y(1) \pm y(1))$$

$$(x(0) + ix(1)) \cdot (y(0) + iy(1)) = (x(0)\,y(0) - x(1)\,y(1)) + \\ + i(x(0)\,y(1) + x(1)\,y(0))$$

$$(x(0) + ix(1)) \cdot (x(0) - iy(1)) = x(0)^2 + x(1)^2.$$

Tu su $x(0), x(1), y(0), y(1)$ realni brojevi u kompleksnom ruhu.

Ako $y(0), y(1)$ nisu istovremeno $= 0$ t. j. ako je $y(0)^2 + y(1)^2 \neq 0$, onda je $(x(0) + ix(1)) : (y(0) + iy(1)) =$ (proširi kvocijent sa $y = (y(0) -$ $- iy(1))) =$

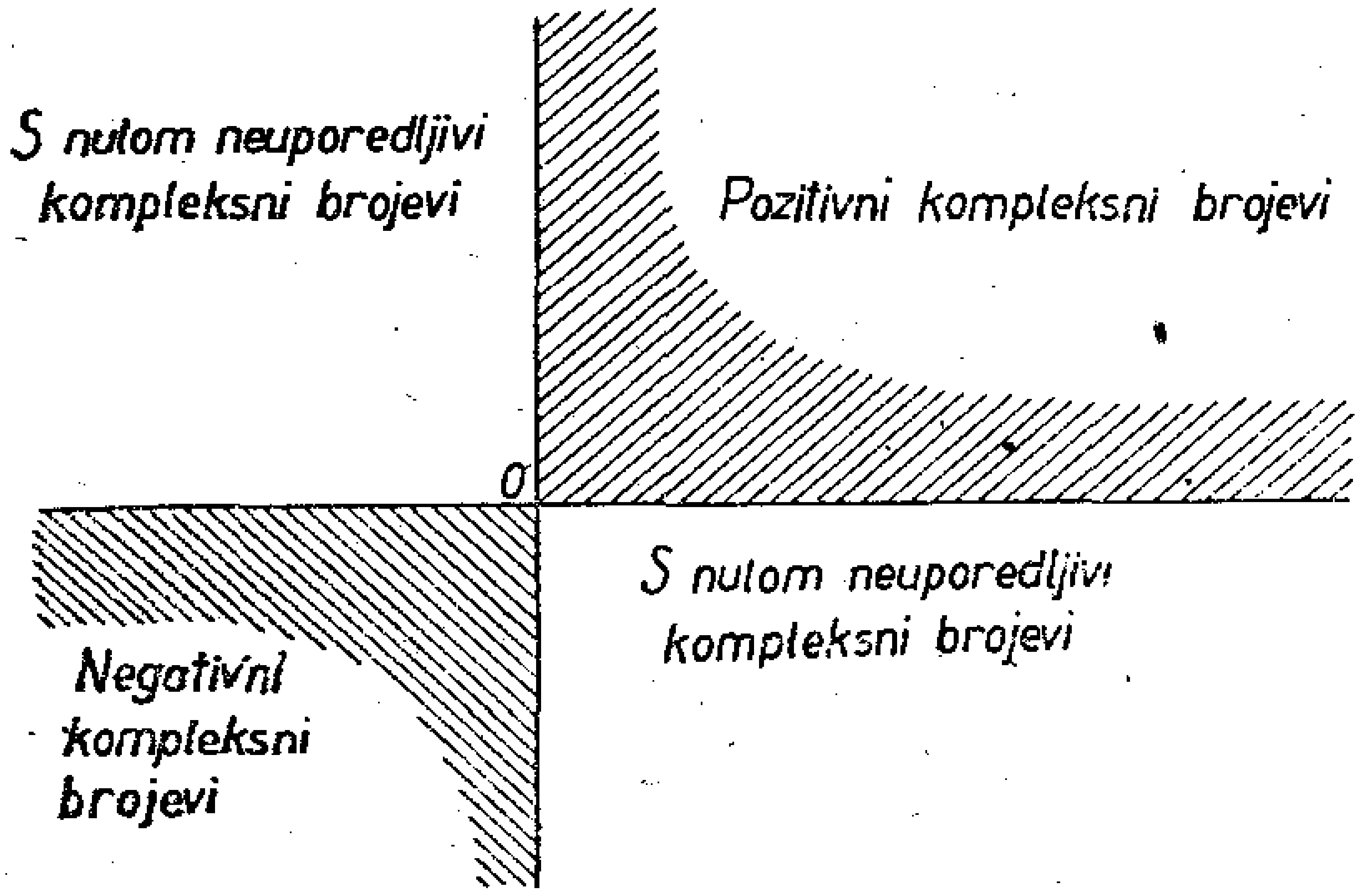
$$= (x(0) + ix(1))\,(y(0) - iy(1)) : (y(0) + iy(1))\,(y(0) - iy(1)) =$$

$$= \frac{x(0)\,y(0) + x(1)\,y(1)}{y(0)^2 + y(1)^2} + i\,\frac{-x(0)\,y(1) + x(1)\,y(0)}{y(0)^2 + y(1)^2}.$$

§ 10.3.3. **Jedna razlika između realnog i kompleksnog kontinuuma.**

Prepuštamo čitaocu, da dokaže da je skup K svih kompleksnih brojeva aditivna grupa, pa čak i brojevno tijelo, ali to brojevno tijelo *nije potpuno uređen skup*, nego tek djelimično uređen skup. Zato se prelaz od linearnog kontinuuma C na kompleksni kontinuum K bitno razlikuje od prelaza sa R na C ili od skupa D cijelih brojeva na skup R racionalnih brojeva ili od prelaza sa N na D: kod svih ovih prelaza stečena pravila o računanju prenosila su se sa polaznog skupa na novo prošireno područje.

Naprotiv, kod prelaza od C na K to nije bio niti može biti slučaj! Jer, prema Hilbertu, linearni kontinum C je *potpun* u smislu, da se on ne može efektivno proširiti pa da u proširenom području važe svi zakoni računanja s realnim brojevima.



Sl. 10.3.4.1.
Nula, pozitivni, negativni i (prema nuli) neuporedljivi kompleksni brojevi.

§ 10.3.4. **Kompleksni kontinuum K i Euklidova ravnina.** Dodajmo, da se kompleksni kontinuum K može dovesti u vezu sa Euklidovom ravninom C_2: treba samo svako jednoznačno realno preslikavanje x dvočlanog skupa $\{0, 1\}$ jedanput interpretirati kao kompleksni broj $x(0) + i x(1)$ a drugi put kao onu točku $(x(0), x(1))$ u ravnini s određenim Descartesovim koordinatnim sistemom kojoj je apscisa $= x(0)$, a ordinata $= x(1)$.

Nazovemo li tada *okolinom* kompleksnog broja $x(0) + i x(1)$ skup svih kompleksnih brojeva koji leže u nutrini kruga sa središtem u točki $(x(0), x(1))$, tada se definicija limesa iz § 10.2.3 doslovce prenosi na kompleksni kontinuum.

I nekoji teoremi iz § 10.2.2 mogu se na zgodan način prenijeti na kompleksni kontinuum; tako na pr. gdje je dosad stajalo „segment realnih brojeva“, treba sada čitati: „zatvoren krug kompleksnih brojeva“ i t. d.).

Klasična matematika išla je još i u prostorni kontinuum C_3 pa donekle i u prostor C_4 sa 4 dimenzije te u prostore C_n sa n dimenzija, za svaki $n \in N$. Moderna matematika s tim se ne zadovoljava. Razvoj je takav da smo morali zaći i u razne funkcionalne prostore $C_1(C)$, $K_1(C)$ i t. d. te uopće u apstraktne prostore.

No, svakim Descartesovim sistemom u ravnini raspada se ova na 9 disjunktnih dijelova i to na:

a) Početak ili ishodište sistema;

b) 4 poluosi (pozitivna apscisna poluos, pozitivna ordinatna poluos negativna apsc. i neg. ordinatna poluos);

c) 4 kvadranta ili polja: prvi (treći) kvadrant je omeđen pozitivnim (negativnim) poluosima; drugi (četvrti) kvadrant je omeđen pozitivnom (negativnom) ordinatnom i negativnom (pozitivnom) apscisnom poluosi.

Analogno, ako je T bilo koja točka ravnine, raspada se ova na 9 disjunktnih dijelova dobivenih iz gornjih 9 dijelova translacijom za dužinu $\overline{OT}$ (O je početak koordinatnog sistema).

Tada se geometrijski odmah vidi na koji je način kompleksni kontinuum djelimično uređen. Dokazuje se naime da važi

Lema 10.3.4.1. *Da kompleksni broj x bude manji od kompleksnog broja y, nužno je i dovoljno, da broj y leži bilo u prvom kvadrantu broja x ili na kojoj pozitivnoj poluosi kroz točku x.*

Da kompleksni brojevi x i y budu međusobno neuporedljivi t. j. *da ne bude* niti $x \leqslant y$ niti $y \leqslant x$, *nužno je i dovoljno, da x leži ili u drugom ili u četvrtom kvadrantu što ga određuje točka y.*

§ 10.4. ZADACI

§ 10.4.1. Ako je $r_1, r_2, \ldots$ niz svih racionalnih brojeva, odredi:

$$\sup_{n\in N} r_n, \quad \inf_n r_n, \quad \sup_n \sin r_n, \quad \sup_n 2^{r_n},$$
$$\inf_n 2^{r_n}, \quad \overline{\lim_n}\, 2^{r_n}, \quad \underline{\lim_n}\, 2^{r_n}.$$

§ 10.4.2. Koji od znakova $<, =, >, \|$ treba staviti mjesto ρ u relacijama:
a) $2+5i\,\rho\,4+11i$; b) $3\,\rho\, i$; c) $2-i\,\rho\,5+i$;
d) $2+3i\,\rho\,3+2i$.

§ 10.4.3. Ako je $a, b \in K$ šta geometrijski znači $(a, b)_K$, a šta $[a, b]_K$?

§ 10.4.4. Definiraj suprem i infim za svaki $v \subset M \subseteq K$; dokaži ovo: ako je skup $M \subseteq K$ ograđen zdesna, tada je $\sup M \in K$ i to $\sup M = \sup M' + i \sup M''$, gdje su M' odn. M'' projekcije skupa M na apscisnu odn. ordinatnu os.

§ 10.4.5. Da li skup pozitivnih kompleksnih brojeva obrazuje završan komad skupa $(K; \leqslant)$? Da li je taj komad ograđen slijeva?

§ 10.4.6. Isto pitanje za poluravninu smještenu desno od ordinatne osi.

§ 10.4.7. Dokaži, da produkt dva pozitivna (negativna) kompleksna broja ne može biti negativan.

§ 10.4.8. Ako su a, b dva pozitivna kompleksna broja, tada odnos

$$n\,a \leqslant b$$

može biti ispravan tek za konačno mnogo prirodnih brojeva n.

§ 10.4.9. Ako su a, b, c, d kompleksni brojevi, tada iz

$$a \leqslant b,\ c \leqslant d \quad \text{slijedi} \quad a + c \leqslant b + d.$$

§ 10.4.10. Iz $a \leqslant b, c > 0$ slijedi $ac \leqslant bc$ ili $ac \parallel bc$ (ali ne $ac > bc$).

§ 10.4.11. Dokaži da je skup kompleksnih brojeva oblika

$$a + b\,i, \ (a, b \in R)$$

prebrojiv i da svaka okolina svakog kompleksnog broja sadrži bezbroj točaka toga skupa.

§ 11. SLIČNOST (IZOMORFIJA) UREĐENIH SKUPOVA

Već smo se dosad uvjerili od kolike je važnosti pojam transformacije (procesa, funkcije). Pa se, prirodno, postavlja problem o svojstvima koja se ne mijenjaju pri izvjesnim transformacijama nego dakle ostaju sačuvana.

Slučajevi tog općeg problema pojavljivat će se u više navrata. A ovdje, kad govorimo o uređenim skupovima, definirat ćemo i promatrati one transformacije uređenih skupova kod kojih poređaj u skupu ostaje sačuvan. Te transformacije — sličnosti — dovest će nas do ordinalnih brojeva (konačnih i transfinitnih), jedne od najoriginalnijih tekovina teorije skupova.

U ovom §-u upoznat ćemo se s poređajnom karakteristikom skupa $(R; \leqslant)$ odn. skupa $(C; \leqslant)$ realnih brojeva koje su veoma jednostavne. Formulirat ćemo i glasovit Suslinov problem o kontinuumu.

§ 11.1. **Definicija sličnosti uređenih skupova.** Kaže se, da je uređen skup $(S_1; \leqslant_1)$ *sličan* ili *izomorfan* s uređenim skupom $(S_2; \leqslant_2)$ i piše se

(11.1.1) $\quad t\,(S_1; \leqslant_1) = t\,(S_2; \leqslant_2)$ odnosno $t\,S_1 = t\,S_2$

ako postoji jednoznačno preslikavanje f skupa S_1 tako da bude:

(11.1.2) $\quad f\,(S_1) = S_2$ i da

(11.1.3) $\quad$ iz $x \begin{smallmatrix} <_1 \\ =_1 \\ >_1 \end{smallmatrix} y$ u S_1 slijedi po redu $f\,(x) \begin{smallmatrix} <_2 \\ =_2 \\ >_2 \end{smallmatrix} f\,(y)$ u S_2[1].

[1]) Sjeti se da relacije možemo razlikovati pripisujući im indekse.

Kraće se kaže da postoji *preslikavanje po sličnosti* čitavog skupa $(S_1; \leqslant_1)$ na čitavi skup $(S_2; \leqslant_2)$.

Sličnost uređena skupa S jest svako jednoznačno preslikavanje f skupa S u uređen skup $f(S)$, pri čemu ima biti ispunjen ovaj uslov čuvanja uređenja:

(11.1.4) Iz $x, y \in S$ te iz činjenica da x leži ispred y u S nužno slijedi da

$$f(x) \text{ leži ispred } f(y) \text{ u } f(S).$$

Tada se već može dokazati da je $f(x)$ iza $f(y)$ u $f(S)$, čim je x iza y u S. Pritom treba naglasiti, da skupovi S i $f(S)$ ne moraju imati zajedničkih elemenata; isto tako, uređenje u S i uređenje u $f(S)$ mogu biti definirani na posve nezavisan način.

Primjer 11.1.1. Funkcija

$$f(n) = \frac{n}{n+1}, \ (n \in N).$$

je jedna sličnost skupa prirodnih brojeva N koja skup N prevodi u

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots .$$

Primjer 11.1.2. Ako sve racionalne brojeve napišemo u nizu

$$(11.1.5) \qquad r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$$

tako da bude $r_n \neq r_{n'}$, za različite prirodne brojeve $n \neq n'$, pa ako skup racionalnih brojeva uredimo ne prema veličini kao što se to radi nego po propisu da rac. broj

$$r \text{ bude ispred rac. broja } r'$$

onda i samo onda, ako se r u nizu (11.1.5) nalazi prije broja r', onda je jasno da je transformacija

$$\varphi(n) = r_n, \ (n \in N)$$

sličnost, koja skup prirodnih brojeva prevodi u posebno uređen čitav skup racionalnih brojeva.

Lema 11.1.1. Svaka sličnost (t. j. preslikavanje po sličnosti) est obostrano jednoznačna transformacija.

Dovoljno je da pokažemo, da nejednakim elementima x, y, u S_1 odgovaraju nejednaki elementi u S_2. Stvarno, iz $x \neq_1 y$ slijedi $x <_1 y$ dakle i $f(x) <_2 f(y)$, ili $y <_1 x$ dakle i $f(y) <_2 f(x)$, u svakom dakle slučaju $f(x) \neq_2 f(y)$.

Time je pokazano da iz

$$(11.1.6) \qquad t(S_1) \equiv t(S_2) \text{ slijedi } t(S_2) \equiv t(S_1).$$

Ako je dakle S_1 sličan sa S_2, onda je i S_2 sličan sa S_1 pa se zato naprosto govori, da su skupovi S_1 i S_2 *međusobno slični.*

Zaključak (11.1.6) je specijalan slučaj

Teorema 11.1.1. *Za uređene skupove S_1, S_2 vazda je ili $tS_1 \equiv tS_2$ ili $tS_1 \neq\!\!\equiv tS_2$, pritom je relacija $\equiv$ refleksivna, simetrična i tranzitivna;* drugim riječima, sličnost među skupovima je jedna relacija ekvivalentnosti u smislu § 7.

Dokaz teorema je posve analogan dokazu u § 3.1 o relaciji $\equiv$ među kardinalnim brojevima.

§ 11.2. **O zajedničkim svojstvima sličnih skupova.** Jasno je, da skupovi koji su slični, ili svi imaju prvi element ili ga nema nijedan od njih; isto tako, ako je skup S gust, onda je gust i svaki skup koji je sličan sa S; ako S ima provalija, ima ih i $f(S)$ (f je sličnost) i provalije u S te u $f(S)$ međusobno si odgovaraju. Jer, ako je neka provalija u S proizvedena rezom

$$S = A \cup B, \quad A \text{ ispred } B$$

onda rastav (rez)

$$f(S) = f(A) \cup f(B), \quad f(A) \text{ ispred } f(B)$$

proizvodi provaliju u $f(S)$.

Uopće, sve što se u vezi sa poretkom može reći o skupu S može se doslovce prenijeti na svaki uređeni skup koji je sličan sa S.

To je korisno imati na umu, jer time smisao sličnosti postaje sadržajniji. Istaknimo ovu

Lemu 11.2.1. Ako su dva uređena skupa slična, imaju oni isti kardinalni broj:

(11.2.1) $\qquad$ Iz $tS_1 \equiv tS_2$ slijedi

(11.2.2) $\qquad$ $kS_1 \equiv kS_2$.

Lema izlazi neposredno iz činjenice da je svaka sličnost između S_1 i S_2 ujedno i izvjesno obostrano jednoznačno preslikavanje skupa S_1 na čitav skup S_2 (v (11.1.2) i lemu 11.1.1).

Obrat, da su skupovi slični, ako imaju isti kardinalni broj nije ispravan za transfinitne skupove. Jer, na pr. skup prirodnih i skup racionalnih brojeva imaju jedan te isti kardinalni broj, a ipak nisu slični.

Doduše, svakim eventualnim obostrano jednoznačnim preslikavanjem f uređena skupa S_1 na uređen skup S_2 možemo poredaj sa S_1 *prenijeti, presaditi* na skup S_2, ali u općem slučaju, to novo uređenje skupa S_2 neće biti istovjetno sa početnim uređenjem skupa S_2; to će biti slučaj tek kad je f izvjesna transformacija po sličnosti.

§ 11.3. **Poređajna karakteristika skupa R racionalnih brojeva.** Uređeni skup $R = (R; \leqslant)$ racionalnih brojeva ima ova tri svojstva:

a) Skup nema ni početnog ni završnog elementa;

b) Skup je gust (između svaka dva nejednaka člana smješteno je i drugih članova);

c) Skup je prebrojiv.

Zanimljivo je, da su ta tri svojstva, kao što je to Cantor pokazao, i *dovoljna* za uređeni skup R, jer važi ovaj

Teorem 11.3.1. (Cantor) *Svaki potpuno uređeni skup koji ima gornja tri svojstva* a), b), c), *sličan je sa skupom* R *svih racionalnih brojeva koji su uređeni po svojoj veličini — ili drukčije:*

Ma koja dva potpuno uređena skupa S_1 i S_2 *sa svojstvima* a), b) i c) *međusobno su slična.*

Stvarno, prema svojstvu c), možemo elemente iz S_1 *numerirati* t. j. staviti u beskonačan niz

(11.3.1) $$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots, \quad a_n \neq a_{n'},$$ za prirodne brojeve $n \neq n'$.

Isto tako; neka je

(11.3.2) $$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots, \quad b_n \neq b_{n'},$$ za prirodne brojeve $n \neq n'$.

Idemo postepeno sagraditi sličnost

(11.3.3) $$\varphi(x), \ (x \in S_1) \text{ sa svojstvom}$$

(11.3.4) $$\varphi(S_1) = S_2 \text{ dakle i } S_1 = \varphi^{-1}(S_2).$$

Stavimo

(11.3.5) $$\varphi(a_1) = b_1 \text{ dakle } a_1 = \varphi^{-1}(b_1)$$

i uvedimo oznaku $e_1 = a_1$. Da nastavimo, promatrajmo član b_2 u nizu (11.3.2) i označimo sa e_2 *prvi* član u nizu (11.3.1), a koji je u istom poretku prema e_1 u kojem je b_2 prema b_1, dakle da bude ispred e_1, ako je b_2 ispred b_1 odnosno da bude iza e_1 ako je b_2 u S_2 iza b_1. Očito je, da zbog uslova a) i b) član $e_2 \in S_1$ postoji; stavit ćemo $\varphi(e_2) = b_2$, $e_2 = \varphi^{-1}(b_2)$.

Pretpostavimo, da je $n > 2$ ma kakav prirodan broj i da je funkcija φ već definirana u jednom skupu $E_{n-1} \subseteq S_1$ od $n-1$ točaka

$$e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$$

kojega φ po sličnosti prevodi u potskup $\varphi(E_{n-1}) \subseteq S_2$. Sada ćemo skupu E_{n-1} pribaviti novu točku

(11.3.6) $$e_n \in S_1 \setminus E_{n-1}, \text{ definirati skup } E_n = E_{n-1} \cup \{e_n\}$$

i točku $\varphi(e_n) \in S_2 \setminus \varphi E_{n-1})$, tako da skupovi E_n i $\varphi(E_n)$ budu slični.

Ako je n neparan broj, označimo sa e_n prvi član niza (11.3.1) koji pripada skupu $S_1 \setminus E_{n-1}$. Odredimo $\varphi(e_n) \in S_2 \setminus \varphi(E_{n-1})$ ovako:

$$\text{ako je } e_n \begin{cases} \text{prvi} \\ \text{posljednji} \end{cases} \text{član skupa } E_n = E_{n-1} \cup \{e_n\},$$

tad će $\varphi(e_n)$ značiti prvi član niza (11.3.2) koji inače leži u $S_2 \begin{cases}\text{ispred} \\ \text{iza}\end{cases}$ čitavog skupa $\varphi(E_{n-1})$. Ako pak e_n nije krajnji element u uređenom skupu E_n, nego dakle proizvodi rastavljanje

$$E_{n-1} = (-\infty, e_n) \cup (e_n, \infty)$$

skupa E_{n-1} na dio $(-\infty, e_n)$ koji je lijevo od e_n i preostali dio (e_n, ∞) koji je desno od e_n, tada će između transformata funkcijom φ tih dijelova skupa E_{n-1} biti smješteno elemenata skupa $S_2 \setminus \varphi(E_{n-1})$; onaj između njih koji u numeraciji (11.3.2) ima *najmanji indeks* označit ćemo sa $\varphi(e_n)$.

Ako je pak n paran broj, označit ćemo sa $\varphi(e_n)$ član skupa $S_2 \setminus \varphi(E_{n-1})$ koji se prvi javlja u nizu (11.3.2); treba sada odrediti još $e_n \in S_1 \setminus E_{n-1}$. Ako je $\varphi(e_n)$ krajnji element u $\varphi(E_{n-1}) \cup \{\varphi(e_n)\}$, pa ako $\varphi(e_n)$ dolazi $\begin{cases}\text{ispred} \\ \text{iza}\end{cases}$ čitavog skupa $\varphi(E_{n-1})$, onda će nam e_n značiti prvi član niza (11.3.1) koji inače u S_1 leži $\begin{cases}\text{ispred} \\ \text{iza}\end{cases}$ E_{n-1}. Ako $\varphi(e_n)$ nije niti ispred nit iza $\varphi(E_{n-1})$, označimo sa

$$(11.3.7) \qquad (-\infty, \varphi(e_n)), \ (\varphi(e_n), +\infty)$$

skup svih točaka skupa $\varphi(E_{n-1})$ koje leže ispred odnosno iza $\varphi(e_n)$; preobrazimo li skupove (11.3.7) funkcijom φ^{-1}, doći ćemo do određenih konačnih skupova u S_1 od kojih je jedan lijevo od drugoga; prvi član u nizu (11.3.1) koji inače u S_1 leži između

$$\varphi^{-1}(-\infty, \varphi(e_n)) \quad \text{i} \quad \varphi^{-1}(\varphi(e_n), +\infty)$$

označit ćemo sa e_n.

Time su za svaki $n \in N$ određene točke $e_n \in S_1$, $\varphi(e_n) \in S_2$; transformacija φ se postepeno proširuje na čitav skup

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$$

koji očigledno iscrpljuje skup S_1; također je jasno, da je nizom

$$\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots \varphi(e_n), \ldots$$

iscrpljen čitav skup S_2. Time je udešeno preslikavanje po sličnosti φ između S_1 i S_2, pa je $\varphi S_1 = S_2$.

Primijetimo, da je preslikavanje φ, gornjom konstrukcijom, određeno jednoznačno.

Teorem 11.3.2. *Svaki potpuno uređen skup koji je konačan ili prebrojiv sličan je jednom dijelu skupa racionalnih brojeva, koji je i sam prebrojiv.*

Sadržaj teorema 11 3.2 možemo izreći i tako da kažemo da je uređeni skup R racionalnih brojeva *univerzalan za sve potpuno uređene skupove* $\leqslant \aleph_0$.

Dokaz se vodi kao dokaz teorema 11.3.1 s tim pojednostavljenjem, što kod konstrukcije člana e_n ne razlikujemo slučaj kad je n paran i neparan, nego za e_n vazda uzimamo prvi član u određenoj numeraciji

$$c_1, c_2, \ldots$$

zadana skupa S koji još nije obuhvaćen skupom E_{n-1}.

§ 11.4. Poredajna karakteristika linearnog kontinuuma C.

Skup $C = (C; \leqslant)$ svih realnih brojeva uređen po veličini svojih elemenata ima ova tri svojstva:

A) *Skup nema ni početnog ni završnog elementa;*

B) *Skup je neprekidan u Dedekindovu smislu* t. j. nema praznina niti susjednih elemenata;

C) *Skup je separabilan* t. j. skup sadrži prebrojiv dio [1]) sa svojstvom, da svaki neprazni interval skupa obuhvata bar jedan član toga prebrojivog dijela.

Cantor je uočio, da su ta tri svojstva ne samo potrebna nego i dovoljna, pa da okarakterišemo poredajnu strukturu linearnog kontinuuma. Važi naime

Teorem 11.4.1. *Svaka dva potpuno uređena skupa koja imaju svojstva* A), B) i C) *međusobno su slična. Specijalno, svaki potpuno uređeni skup sa svojstvima* A), B) i C) *sličan je sa uređenim skupom* C *svih realnih brojeva.*

Neka su dakle S_1, S_2 ma kakva dva uređena skupa sa svojstvima A), B) i C).

Označimo li sa

$$M_i \subseteq S_i \quad (i = 1 \text{ ili } 2) \tag{11.4.1}$$

ma kakav prebrojiv dio od S_i, tako da svaki interval od S_i sadrži bar jedan element iz M_i, tad je zbog pretpostavljene gustoće skupa S_i (svojstvo B!) jasno da je skup M_i gust; zbog svojstva A) skup M_i je bez krajnjih elemenata. Na taj način, skupovi M_1 i M_2 zadovoljavaju uslovima a), b) i c) iz § 11.3; zato su prema teoremu 11.3.1 skupovi M_1 i M_2 slični. Odmah ćemo vidjeti, da se *svaka sličnost*

$$\varphi(x), \ (x \in M_1), \ \varphi(M_1) = M_2 \tag{11.4.2}$$

između M_1 *i* M_2 *može proširiti i na sličnost između čitavog* S_1 *i čitavog* S_2.

---

[1]) na pr. skup R svih racionalnih brojeva.

Stvarno, neka je $x \in S_1 \setminus M_1$; tada imamo rastav (rez)

(11.4.3) $$M_1 = (-\infty, x)_{M_1} \cup (x, \infty)_{M_1}$$

skupa M_1 koji, zbog gustoće skupa M_1, nužno otvara prazninu u M_1, a element $x \in S_1 \setminus M_1$ baš i ispunjava u S_1 tu prazninu: x je naime jedini element od S_1 koji se nalazi između sumanada (11.4.3)

Rastav (11.4.3) skupa M_1 prelazi sličnošću (11.4.2) u rastav

(11.4.4) $$M_2 = \varphi(M_1) = \varphi(-\infty, x)_{M_1} \cup \varphi(x, \infty)_{M_1}$$

skupa M_2; zbog sličnosti skupova M_1 i M_2, rez (11.4.4) stvara u M_2 određenu rupu; u toj rupi leži, zbog svojstva B) posve određen element zadanog skupa S_2 i baš taj element koji je jednoznačno određen sličnošću φ između M_1 i M_2 te elementom $x \in S_1 \setminus M_2$ označit ćemo sa $\varphi(x)$.

Time je transformacija $\varphi(x)$ definirana za svaki $x \in S_1$; očito je $\varphi S_1 = S_2$, a također se vidi, da je φ jedna sličnost skupa S_1.

Korolar 11.4.1. *Svaki otvoren interval realnih brojeva sličan je sa skupom svih realnih brojeva. Specijalno, uređeni skup pravih razlomaka sličan je sa cijelim skupom C.*

Korolar 11.4.2. *Svaki potpuno uređen skup S koji je gust i sadrži prebrojiv dio gusto prosut po S sličan je nekom linearnom skupu.*

§ 11.5. **Suslinov problem.** Jasno je da potpuno uređen skup koji ima prebrojiv podskup koji je svuda gust ima ovo

Svojstvo (S):

Svaki sistem punih disjunktnih intervala skupa najviše je prebrojiv.

Pitanje je, da li važi obrat! T. j. da li je *dovoljno* da neki potpuno uređen skup ima Suslinovo svojstvo (S), pa da on sadrži **najviše prebrojiv** dio, kojemu je bar jedan element sadržan u svakom punom intervalu zadana skupa? To je glasoviti Suslinov problem! Ja sam se s njim dosta bavio, ali ga potpuno ipak nisam umio riješiti (isp. § 18.1.1).

§ 11.6. ZADACI.

§ 11.6.1. Skup $\frac{1}{N}$ brojeva $\frac{1}{n}$, ($n \in N$) sličan je skupu D^- negativnih cijelih brojeva; dokaži:

$$t(N; \leqslant) \equiv t\left(\frac{1}{D^-}; \leqslant\right); \; t\left(\frac{1}{N}; \leqslant\right) \equiv t\left(\frac{1}{D^-}; \geqslant\right)$$

§ 11.6.2. Svi prebrojivi skupovi $S \subseteq C$ koji imaju svojstvo da svaki interval skupa C sadrži bar jednu točku skupa S međusobno su slični.

§ 11.6.3. Bilo koji višečlani segment skupa R (odn. C) sličan je sa skupom $[0, 1]$ svih racionalnih (realnih) brojeva koji su $\geqslant 0$, a $\leqslant 1$.

§ 11.6.4. Da li su skupovi

$$R,\ 3R,\ \sin R,\ \mathrm{tg}\, R,\ \cos R,\ 2^R$$

međusobno slični?

§ 11.6.5. Isto pitanje, promatrajući mjesto skupa R linearni kontinuum C.

§ 11.6.6. Skup realnih transcendentnih brojeva sličan je sa skupom realnih iracionalnih brojeva.

§ 11.6.7. Promatraj množinu $\boldsymbol{M}$ svih intervala što smo ih u § 6.7 odstranjivali iz segmenta $[0, 1]_C$ prigodom konstrukcije triadskog skupa; uredi $\boldsymbol{M}$ po propisu „ležati u C lijevo od" i dokaži da je dobiven skup sličan sa skupom R.

§ 11.6.8. Može li se u a) linearnom kontinuumu C, b) u alfabetski uređenom skupu $C \times C$ definirati obitelj O disjunktnih otvorenih intervala, tako da uređujući je po propisu iz zadatka 11.6.7. bude $t\,O = t\,C$?

§ 11.6.9. Skup $C \times C$ uređen alfabetski nije sličan skupu C.

§ 11.6.10. Za neki polijedar $\boldsymbol{P}$ promatraj skup $[P]$ sastavljen od v, od svih njegovih vrhova, bridova, strana i od P; promatr a tada dualna uređenja

$$([P]; \subseteq) \quad \text{i} \quad ([P]; \supseteq).$$

§ 11.6.11. Dokaži da je za pravilna tjelesa: T (tetraedar) O (oktaedar), H (heksaedar), D (dodekaedar) I (ikozaedar):

$$t([T]; \subseteq) = t([T]; \supseteq)$$
$$t([H]; \subseteq) = t([O]; \supseteq)$$
$$t([D]; \subseteq) = t([I]; \supseteq).$$

§ 11.6.12. Kao dio djelimično uređenog kompleksnog kontinuuma $(K; \leqslant)$ skup svih algebarskih brojeva sličan je skupu svih kompleksnih brojeva kojima je i realan i imaginaran dio racionalan.

§ 11.6.13. Dokaži, da je skup $N_1\{1, 2, 3\}$ uređen po propisu iz zadatka 8.7.4 sličan sa skupom R racionalnih brojeva.

§ 12. DOBRO UREĐENI SKUPOVI.

Dobro uređeni skup jest svaki potpuno uređeni skup koji ima ovo osnovno svojstvo (princip minimuma):

Svaki neprazni dio skupa ima svoj najmanji (početni) element.

Pojam je od osnovne važnosti, pa dobro uređeni skupovi i ono što je s njima u vezi spadaju među najoriginalnija, a ujedno i vrlo prirodna matematička područja.

Dobro uređeni skupovi direktno generalizuju obično naše brojanje, tu osnovnu aritmetičku operaciju, a kao vidni dokaz toga bit će *princip transfinitne indukcije* i izgradnja ordinalnih (rednih) brojeva — konačnih i beskonačnih — koji će nam omogućiti da brojimo i zbrajamo ne samo pomoću prirodnih brojeva nego da idemo i iza njih svìju, transfinitno.

§ 12.1. **Najjednostavnija svojstva.**

Skup N prirodnih brojeva je dobro uređen. [1]) To smo kao primjenu principa totalne indukcije, dokazali u § 5.5.2. Naprotiv, skup negativnih cijelih brojeva (regresija) nije dobro uređen, jer sam taj skup nema početnog elementa; istaknimo naime da važi

Lema 12.1.1. Svaki dobro uređeni skup $\dot{S} \supset v$ ima početni element; ovaj ćemo označavati sa

(12.1.1) $R_0 S$ odn. $R_0(S)$ ili bez indeksa: $R(S)$ odn. $R(S)$;

često će (12.1.1) označavati i jednočlani skup sastavljen od prvog elementa skupa S.

Prazni skup v smatrat ćemo također dobro uređenim.

Lema 12.1.2. *Svaki dio dobro uređena skupa i sam je dobro uređen.*

Lema 12.1.3. *Ako je S ma koji dobro uređen skup, a $x \in S$ proizvoljan element u S, onda je x ili završni član u S ili u skupu postoji jedan jedini element koji dolazi neposredno iza x.*

Stvarno, promatrajmo skup $(x, \infty)_S$ svih točaka u S koje su iza x; ako je taj skup pust, onda to znači da je x završni član u S; ako pak $(x, \infty)_S$ nije pust, tad on kao naseljen dio dobro uređena skupa ima početni elemenat; taj element dolazi neposredno iza x. Lema 12.1.3 odgovara prelazu, u skupu N, sa broja n na broj $n+1$.

No, dok svaki prirodni broj n različit od prvoga ima i neposrednog prethodnika (i to $n-1$), dotle u općem dobro uređenom skupu S ima elemenata koji nisu početni član, a ipak su bez neposrednog prethodnika. To su t. zv. *neosamljeni* elementi (članovi) skupa ili t. zv. elementi (članovi) *druge vrste* dok su ostali članovi *osamljeni* ili *prve vrste.* Tako na pr. preuredimo li skup N na taj način, da iza $n \in N$ dolazi neposredno ne $n+1$ nego $n+3$, dobit ćemo dobro uređen skup od tri progresije:

$$1, 4, 7, 10, \ldots; 2, 5, 8, \ldots; 3, 6, 9, 12, \ldots$$

Tu su 2 i 3 članovi druge vrste; ostali su članovi prve vrste.

[1]) Čitalac će si znatno olakšati izučavanje dobro uređenih skupova, ako drži na umu, da je skup N *tipičan* primjer dobro uređena skupa i da je izučavanje dobro uređenih skupova neposredna generalizacija izučavanja skupova prirodnih brojeva.

Lema 12.1.4. *Da uređen skup S bude dobro uređen, treba, a i dosta je, da S nema ni jedne beskonačne regresije* t. j. nijednog dijela $a_1, a_2, a_3, \ldots$ za koji bi bilo

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots\ldots$$

Da je uslov nuždan, to je očito, jer takva regresija shvaćena kao uređen skup nema početnog elementa, dok bi naprotiv, kao pun dio dobro uređenog skupa morao imati početni element.

Uslov je i dovoljan, jer kad uređen skup S bez regresija ne bi bio dobro uređen, sadržavao bi on jedan dio $A \supset v$ bez početnog elementa; a to znači, da bi za svaki $x \in A$ postojao u A bar jedan element, označimo jedan od njih sa $\varphi(x)$, tako da bude

$$\varphi(x) < x.$$

Iteracija

$$\varphi(x) = x_1, \ \varphi(x_n) = x_{n+1}, \ (n \in N)$$

proizvela bi beskonačnu regresiju

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots\ldots$$

unutar dijela $A \subseteq S$, a time i unutar S, protivno pretpostavci.

Kao primjenu leme 12.1.4 dokažimo

Teorem 12.1.1. *Dobro uređen skup $S \supset v$ ne može biti sličan ni s jednim svojim pravim početnim komadom*[1]. *Dva različita početna komada dobro uređena skupa ne mogu biti međusobno slična.*

Kad bi naime postojao dobro uređen skup S i sličnost φ koja bi S prevodila u početni komad $\varphi(S) \subset S$, onda bi prvi element p neprazna skupa $S \setminus \varphi(S)$ bio prebačen transformacijom φ u početni komad $\varphi(S)$ koji je ispred p; bilo bi dakle $\varphi(p) < p$; a odatle iteracijom dobili bi beskonačnu regresiju

$$p > \varphi(p) > \varphi(\varphi(p)) > \varphi\varphi\varphi(p) \ldots\ldots,$$

što je prema lemi 12.1.4 nemoguće.

Drugi dio teorema 12.1.1 proizlazi neposredno iz prvoga.

Lema 12.1.5. *Svaki pravi početni komad K dobro uređena skupa S sastoji se od svih elemenata skupa S koji se nalaze ispred prvog elementa $R(S \setminus K)$* skupa $S \setminus K$ svih članova iz S položenih iza K;

Zato je

(12.1.2) $$K = (-\infty, k)_S, \quad \text{gdje je} \quad k = R(S \setminus K).$$

Kako je naime $v \subset K \subset S$, skup $S \setminus K$ je pun, a kako pripada dobro uređenom skupu S, ima on prvi element, koji naravno dolazi neposredno iza K.

---

[1]) Svaki skup $v \subset K \subset S$ koji ima svojstvo, da iz $x \in K$ slijedi da K sadrži i skup $(-\infty, x)_S$ svih elemenata skupa S koji su ispred x zove se *pravim početnim komadom* uređena skupa S.

Lema 12.1.6. *Kad se množina* $K(S)$ *svih pravih početnih komada dobro uređena skupa* S *uredi relacijom* $\subset$, *dobije se množina koja je slična sa skupom*

(12.1.3) $\qquad S \setminus RS$ *dobivenog iz* S

uklanjanjem njegova prvog elementa RS; *zato je i sama množina* $K(S)$ *dobro uređena relacijom* $\subset$.

Naime, preslikavanje

(12.1.4) $$\varphi(x) = (-\infty, x)_S, \quad (x \in S \setminus RS)$$

dodijeljuje svakom $x \in S \setminus RS$ određen član množine $K(S)$ svih pravih početnih komada od S; prema lemi 12.1.5 bit će $\varphi(S \setminus R(S)) = K(S)$. Kako nadalje za elemente x, x' skupa $S \setminus RS$ nejednakost $x < x'$ očito povlači nejednakost $\varphi(x) \subset \varphi(x')$, preslikavanje (12.1.4) je jedna sličnost.

Kako je skup $S \setminus RS$ dobro uređen, dobro je uređena i množina $K(S)$ koja mu je slična.

§ 12.2. **Princip transfinitne indukcije.** Korist od dobro uređenih skupova proističe iz činjenice što za njih važi neposredna generalizacija principa totalne indukcije.

Naime, ako je skup S dobro uređen, onda za skup S važi:

Teorem 12.2.1. *(Princip transfinitne indukcije* koji se sastoji u ovom zaključivanju:)

Pretpostavka: *Ako neka množina* M *zadovoljava ova dva uslova:*

Uslov I.: M *sadrži prvi element od* S;

Uslov II.: *Ako za neki* $x \in S$, *množina* M *sadrži skup* $(-\infty, x)_S$ *svih elemenata iz* S *koji su* $< x$, *onda* M *sadrži i sam element* x;

Zaključak: *Onda množina* M *sadrži čitav skup* S.

Stvarno, kad gornji princip ne bi bio ispravan, onda bi to značilo, da postoji dobro uređen skup $S \supset v$ i neka množinu M sa svojstvima I i II, a da ipak ne bude $S \subseteq M$ nego da je skup $S \setminus M$ pun. Kao nepust dio dobro uređena skupa S imao bi skup $S \setminus M$ određen prvi element, recimo p; naravno, prvi element RS od S je $< p$, jer je prema uslovu I $RS \in M$; nadalje, $(-\infty, p)_S \subseteq M$, pa bi zato prema uslovu II bilo $p \in M$, protivno činjenici, da je $p \in S \setminus M$ (kao prvi element od $S \setminus M$).

Da se vidi da je pretpostavka o dobrom uređenju skupa S bitna za iscrpljenje skupa S putem transfinitne indukcije, dokažimo ovaj

Teorem 12.2.1. *Ako neki uređeni skup* S *ima prvi element, pa ako za* S *važi zaključivanje po principu transfinitne indukcije, onda je skup* S *dobro uređen.*

Kad S naime ne bi bio dobro uređen, postojao bi u S jedan dio recimo $A \supset v$ bez početnog elementa. Označimo sa M skup svih točaka u S koje se nalaze ispred A. Svakako, prvi element od S leži u M, jer bi, u obrnutom slučaju, on bio početni broj u A; dokažimo, da M zadovoljava i uslov II: ako za neki element $x \in S$ skup $(-\infty, x)_S$ leži ispred A, onda i x leži ispred A, jer u obrnutom slučaju, x bi morao biti prvi element u A, što je nemoguće, jer, po hipotezi, A nema prvog elementa.

Na taj način, skup M zadovoljava uslovima I i II, pa po pretpostavci da za skup S važi princip transfinitne indukcije bilo bi $M \supseteq S$, što je apsurd, jer je $v \subset A \subseteq S$ i $M \cap A =$ prazno.

P r i m j e d b a 12.2.1. Uoči razliku između principa totalne indukcije kod kojega se na član $x \in S$ zaključuje na osnovu promatranja neposrednog (jednog jedinog) prethodnika elementa $x \in S$[1]); dok naprotiv, kod principa transfinitne indukcije zaključuje se na neki $x \in S$ tek promatranjem čitavog skupa $(-\infty, x)_S$, a ne samo *eventualnog* zadnjeg njegova elementa.

Ilustriraj tu činjenicu na dobro uređenom skupu

$$1, 3, 5, \ldots 2n+1, \ldots; 2, 4, 6, \ldots .$$

i uvjeri se, da totalnom indukcijom iscrpljujemo tek prvu progresiju, dok se druge niti ne taknemo!

§ 12.3. **Sličnost među dobro uređenim skupovima. Osnovni teorem o trihotomiji.** Već smo istakli da dobro uređeni skupovi generalizuju pojam konačnog niza i progresije; to su zapravo uzlazni nizovi i to: konačni, beskonačni (progresije) i transfinitni.

Evo jednog svojstva koje se sa skupova prirodnih brojeva prenosi na koji god dobro uređeni skup.

T e o r e m 12.3.1. *Nema ni jednog sličnog preslikavanja dobro uređena skupa na sama sebe pri čemu bi koji element prešao u manji* t. j.: *ako je S ma koji dobro uređen skup, a φ ma koje slično preslikavanje skupa S na sama sebe, tada je vazda*

$$\varphi(x) \geqslant x, \ (x \in S).$$

Kad bi naprotiv postojao $x \in S$ sa svojstvom $\varphi(x) < x$, izašla bi beskonačna regresija

$$x > \varphi(x) > \varphi\varphi(x) > \varphi\varphi\varphi(x) > \ldots,$$

protivno činjenici (lema 12.1.4) da u S nema beskonačnih regresija.

T e o r e m 12.3.2. *Identičnost je jedino slično preslikavanje koje prevodi dobro uređen skup na sama sebe kao cjelinu.*

[1]) Ili što je isto, da iz promatranja nekog člana $x \in S$ zaključujemo i na promatranje prvog *slijedećeg* člana skupa S.

Kad bi naime postojala ikakva druga sličnost $\varphi(x)$, $(x \in S)$, bio bi bar jedan $x \in S$, takav da bude ili $\varphi(x)$ ispred x protivno teoremu 12.3.1 ili x ispred $\varphi(x)$ dakle $\varphi^{-1}(x)$ ispred x, što je u protivnosti s istim teoremom, jer je i φ^{-1} jedna sličnost.

Osnovni teorem. (teorem 12.3.3). Ako su A, B ma koja dva puna i dobro uređena skupa, onda je vazda ostvaren jedan i samo jedan od ova tri slučaja (trihotomija):

(12.3.1) A je sličan sa B;

(12.3.2) A je sličan sa pravim početnim komadom skupa B[1]);

(12.3.3) B je sličan sa pravim početnim komadom skupa A.

Na prvi pogled nameće se ovaj postupak za dokaz teorema: pridružimo prve elemente skupova A i B, pa prve elemente od ostatka, pa prve elemente od novog ostatka i t. d. dok se bar jedan od skupova ne iscrpe. Postupak je sigurno moguć, ako je bar jedan od skupova A i B konačan. No, pomoću transfinitne indukcije, dokazuje se, da se postupak može primijeniti i u općem slučaju, kad su A i B bilo kakvi dobro uređeni skupovi.

Dokažimo, međutim, osnovni teorem na drugi način.

Dokaz je prost, elegantan i tipičan.

Jedno je jasno, ako je teorem istinit, onda su kod dotičnog preslikavanja međusobno pridruženi početni član $R(A)$ od A i poč. član $R(B)$ od B. Shvatimo li $R(A)$ odn. $R(B)$ kao početni komad od A odn. od B, onda to znači, da važi

Lema 12.3.1. *Za ma koja dva puna i dobro uređena skupa* A *i* B *postoji bar jedan početni komad*

(12.3.4) $$K \subseteq A$$

sa svojstvom, da je moguće jedno jedino slično preslikavanje

(12.3.5) $$K(x), \ (x \in K)$$

početnog komada K na početni komad uređena skupa B; prema tome $K(K) \subseteq B$.

Promatrajmo množinu

(12.3.6) $$M$$

svih početnih komada $K \subseteq A$ za koje je istinita gornja lema; stavimo

(12.3.7) $$K_m = \bigcup_K K, \ (K \in M).$$

Naravno K_m je određen početni komad od A, no cilj nam je da pokažemo, da je K_m član od M i to *maksimalni* član u M tako da je skup K_m *najopsežniji početni komad od A za koji važi lema 12.3.1.*

---

[1]) Ponovimo da se svaki pun skup $K \subset S$ sa svojstvom da iz $x \in K$ slijedi $(-\infty, x)_S \subseteq K$ zove *pravim početnim komadom* uređena skupa S.

Najprije, odredimo *bar jedno* slično preslikavanje skupa K_m na B. Stavimo

(12.3.8) $$K_m(x) = K(x),\ (x \in K_m),$$

gdje je $x \in K \in M$. Naravno, zbog (12.3.7) postoji bar jedan takav K. Dokažimo, da vrijednost $K_m(x)$ ne zavisi od specijalnog izbora K. Jer, ako je K' ma kakav drugi element iz M sa svojstvom $x \in K'$, onda bi K, K' kao različiti početni komadi od A zadovoljavali ili

$$K \subset K' \quad \text{ili} \quad K' \subset K.$$

Ako je $K' \subset K$, onda preslikavanje po sličnosti:

$$K(x),\ (x \in K]$$

koje prema (12.3.5) i lemi postoji, pogotovo postoji u skupu

$$K' \subset K,$$

pa se zato oba slična preslikavanja

$$K(x) \quad \text{i} \quad K'(x),\ (x \in K')$$

moraju podudarati u K', jer po lemi 12.3.1 moguće je K' po sličnosti preslikati na jedan jedini način na početni komad od B; dakle je specijalno

$$K(x) = K'(x),$$

pa je preslikavanje (12.3.8) uistinu jednoznačno određeno.

Analogno za slučaj $K \subset K'$.

Dokažimo da je (12.3.8) *slično preslikavanje* t. j. da iz

(12.3.9) $$x \text{ ispred } y \text{ u } K_m \text{ slijedi}$$

(12.3.10) $$K_m(x) \text{ ispred } K_m(y) \text{ u } B.$$

Stvarno, ako je $x \in K_1 \in M$, $y \in K_2 \in M$, pa ako sa K označimo onaj od K_1 i K_2 koji je veći, bit će dakle $x, y \in K \in M$, pa će se prema onom što smo malo prije dokazali, preslikavanje (12.3.8) podudarati na K sa sličnošću $K(x)$, $(x \in K)$, odakle slijedi (12.3.10).

Preslikavanje (12.3.8) *prevodi početni komad*

(12.3.11) $$K_m \subseteq A \text{ u početni komad}$$

(12.3.12) $$K_m(K_m) \subseteq B.$$

To je jasno, jer iz $x \in K_m$ slijedi $x \in K \in M$, a zbog podudaranja funkcije (12.3.8) sa $K(x)$ na K slijedi, da preslikavanje (12.3.8) prevodi skup $(-\infty, x)_A$ u isti skup u koji i transformacija K, dakle u početni komad $K(K)$ koji je inače dio skupa (12.3.12).

Ukratko, preslikavanje (12.3.8) je slično preslikavanje početnog komada K_m na početni komad $K_m(K_m) \subseteq B$.

Dokažimo da je (12.3.8) *jedino slično preslikavanje koje početni komad K_m skupa A prevodi u početni komad skupa B.*

Da osim (12.3.12) nema drugog početnog komada $Q \subseteq B$ koji bi bio sličan sa K_m, to je jasno, jer bi inače (preko K_m) Q i $K_m(K_m)$ bili različiti, a ipak slični početni komadi od B, protivno teoremu 12.1.1.

Neka je najzad φ ma koje slično preslikavanje skupa K_m na $K_m(K_m)$ kao cjelinu, dakle $\varphi(K_m) = K_m(K_m)$. Inverzna transformacija φ^{-1} prevodi $K_m(K_m)$ na K_m pa bi slozeno preslikavanje

(12.3.13) $$\varphi^{-1}(K_m(x)), \ (x \in K_m)$$

značilo sličnost skupa K_m sa samim sobom; prema teoremu 12.3.2 mora zato (12.3.13) biti identično preslikavanje t. j.

$$\varphi^{-1}(K_m(x)) = x,$$

odakle izlazi tražena jednakost

$$K_m(x) = \varphi(x), \ (x \in K_m).$$

Ukratko, dokazali smo da je početni komad $K_m \subseteq A$ određen član u množini M svih $K \subseteq A$ za koje važi lema 12.3.1.

No, *prema* (12.3.7) K_m *je* **najveći** *član u M.*

Sada možemo preći na sam zaključak i pokazati, da u oba obrasca (12.3.11) i (12.3.12) ne može stajati znak $\subset$.

Stvarno, prema tim obrascima, zaključujemo, da drugih mogućnosti osim možda ove četiri nema:

(12.3.14) $$K_m = A, \ K_m(K_m) = B$$

t. j. A i B su slični;

(12.3.15) $$K_m = A, \ K_m(K_m) \subset B$$

t. j. A je sličan sa pravim početnim komadom od B;

(12.3.16) $$K_m \subset A, \ K_m(K_m) = B$$

t. j. B je sličan sa pravim početnim komadom od A;

(12.3.17) $$K_m \subset A, \ K_m(K_m) \subset B.$$

Međutim, posljednji je slučaj neostvariv. Jer, označimo li sa p početnu točku skupa $A \setminus K_m$, svih elemenata iz A što dolaze iza K_m, tada bi skup

(12.3.18) $$K_m \cup \{p\}$$

bio početni komad od A za koji bi važila[1]) lema 12.3.1, pa bi dakle skup (12.3.18) bio član u M, i to veći od najvećega člana K_m u M, što je naravno nemoguće.

[1]) Preslikavanje (12.3.18) produžuje se i na element p stavljajući $K_m(p) =$ prvi element u $B \setminus K_m(K_m)$.

Relacijama (12.3 14) — (12.3.16) potpuno je dokazan osnovni teorem 12.3.3.

§ 12.4. **Prve posljedice trihotomije među dobro uređenim skupovima.** Kao neposredna posljedica dokazanog teorema 12.3.3. istaknimo ova dva teorema:

Teorem 12.4.1. *Kardinalni brojevi dobro uređenih skupova vazda su međusobno uporedljivi: dva od njih su vazda ili jednaka ili nejednaka, u drugom slučaju, jedan je od njih veći, a drugi manji.*

Teorem 12.4.2. *Ne postoje takva dva dobro uređena skupa A i B da niti A nije sličan sa dijelom (pravim ili nepravim) skupa B niti B sličan sa dijelom (pravim ili nepravim) skupa A.*

Već tako jednostavan slučaj kao primjer uređene progresije prirodnih brojeva i uređene regresije negativnih cijelih brojeva, pokazuje da teorem 12.4.2. ne mora važiti za uređene skupove koji nisu dobro uređeni.

Naprotiv, ne zna se, da li teorem 12.4.1. važi za ma kakve potpuno uređene skupove.

Teorem 12.4.3. *Ako je dobro uređen skup A sličan sa dijelom skupa B, a B sa dijelom skupa A, onda su i skupovi A, B međusobno slični* (to je analogon Schröder-Bernsteinova teorema 3.5.1.1. za obostrano jednoznačna preslikavanja).

Stvarno, kad A i B ne bi bili međusobno slični, onda bi prema osnovnom teoremu 12.3.3. postojalo ili slično preslikavanje φ skupa A na pravi početni komad $\varphi(A)$ od B:

$$\varphi(A) \subset B \tag{12.4.1}$$

ili slično preslikavanje ψ skupa B na pravi početni komad $\psi(B)$ od (A)

$$\psi(B) \subset A. \tag{12.4.2}$$

Slučaj (12.4.1) je nemoguć. Jer, prema uslovima teorema, postoji slično preslikavanje β skupa B na A tako da je dakle $\beta(B) \subseteq A$.

Odatle primjenom preslikavanja φ:

$$\varphi(\beta(B)) \subseteq \varphi(A),$$

što prema 12.4.1 daje

$$\varphi(\beta(B)) \subseteq \varphi(A) \subset B$$

No, $\varphi\beta$ kao sastavljeno preslikavanje dvaju sličnih preslikavanja samo bi bilo slično preslikavanje i to skupa B na svoj pravi početni komad $\varphi(A)$, protivno teoremu 12.1.1.

Slično se dokazuje, da relacija (12.4.2) ne postoji.

Time je teorem 12.4.3 potpuno dokazan.

Primjer 12.4.1. Skup $[0, 1)_R$ svih racionalnih brojeva $0 \leqslant x < 1$ i skup $(0, 1)_R$ svih pravih racionalnih razlomaka pokazuju da teorem 12.4.3 ne važi za ma kakve uređene skupove.

Stvarno, skup $[0, 1)_R$ sličan je sa $\left[\frac{1}{2}, 1\right)_R \subseteq \left(0, 1\right)_R$, a skup $(0, 1)_R$ sličan je sam sa sobom, a time i dijelom od $[0, 1)_R$. Međutim skupovi $[0, 1)_R$ i $(0, 1)_R$ nisu slični, jer prvi od njih ima početni član (i to 0), dok drugi nema početnog člana.

Međutim, prema Banachu, ako su A i B ma kakva dva uređena skupa, pa ako je A sličan sa dijelom od B, a B sa dijelom od A, mogu se skupovi A i B rastaviti u po dva disjunktna skupa:

$$A = A_1 \cup A_2, \quad B = B_1 \cup B_2$$

tako da A_1 bude sličan sa B_1, a A_2 sa B_2 (v. § 3.5.2.).

§ 12.5. ZADACI.

§ 12.5.1. Skup N prirodnih brojeva preuredi tako da neposredno poslije svakog $n \in N$ dolazi $n + 17$. Da li je tako preuređen skup N dobro uređen?

§ 12.5.2. Ako je skup S dobro uređen, tada alfabetsko uređenje skupa $S \times S$ je dobro uređenje; generaliziraj na više faktora.

§ 12.5.3. Svaki potpuno uređen skup $(S; \leqslant)$ koji je konačan, ujedno je i dobro uređen.

§ 12.5.4. Unija od *konačno* mnogo dobro uređenih skupova sadržanih u uređenom skupu $(S; \leqslant)$ jest dobro uređen dio toga skupa. Rastav

$$R = \bigcup_{x \in R} \{x\} \quad \text{skupa} \quad (R; \leqslant)$$

pokazuje da se tu riječ *konačno* ne može zamijeniti sa *beskonačno*.

§ 12.5.5. Skup brojeva oblika

$$2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{-k} + \frac{n}{n+1}, \quad (k, n \in N)$$

je dobro uređen dio skupa $(R; \leqslant)$ racionalnih brojeva.

§ 12.5.6. Navedi nekoliko Neperovih razvoja (zad. 8.7.4) tako da pripadajuće preuređenje skupa N bude dobro uređen skup.

§ 12.5.7. Hessenberg je skup N prirodnih brojeva uredio ovako: na prvo mjesto dolazi broj 1; za svaka druga dva prirodna broja $m, n \in N \setminus \{1\}$ neka

$$m = m_1 m_2 \ldots m_\mu$$

$$n = n_1 n_2 \ldots n_\nu$$

bude jednoznačni prikaz tih brojeva kao produkt primbrojeva, pri čemu ima da bude

$$m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_\mu.$$

$$n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_\nu;$$

tada će novo uređenje H biti takovo da $m\,H\,n$ znači, da je ili $m = n$ ili $\mu < \nu$ ili $\mu = \nu$ i da k tome postoji broj $k \leqslant \mu$ sa svojstvom $m_k < n_k$ te $m_i = n_i$ za svaki eventualni prirodni broj $i < k$.

Dokaži da je tako uređen skup $(N; H)$ dobro uređen.

§ 12.5.8. Pokušaj proizvesti Neperov razvoj, kojim bi se na način izveden za zad. 8.7.4. moglo proizvesti gornje uređenje $(N; H)$ skupa N.

§ 13. POTREBA ZA BESKONAČNIM REDNIM BROJEVIMA. PROBLEM KLASIČNOG LIMESA. BROJEVI KAO MATEMATIČKI ATOMI.

§ 13.1. Problem klasičnog limesa. Transfinitni redni brojevi.

Osnovni pojam klasične matematike svakako je pojam limesa, a osnovan je na činjenici, da iz $n \in N$ slijedi $n + 1 \in N$ i da je $n < n + 1$. Ako neki niz $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ konvergira i to prema A, onda to zapravo znači, da je na izvjestan način[1]) nizu pridružen jedan element što se simbolički označuje ovako:

(13.1.1) $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \to A.$$

Kako se dobro zna što je prvi, što drugi i t. d. član niza, govori se o *n-tom članu niza* za svaki prirodni broj n, pa se postavlja pitanje, ne bi li se i graničnoj vrijednosti A u (13.1.1.) mogao pridružiti izvjestan *rang* i to dabome na način *da bude viši od svih rangova što su upotrebljeni za članove niza.* Prema tome, rang limesa A niza morao bi biti veći od svih prirodnih brojeva, i imao bi da dođe *neposredno* poslije svih njih. Označuje se sa

(13.1.2) $$\omega \text{ (omega) odn. } \omega_0,$$

pa se zato limes niza, ukoliko postoji, može nazvati *ω-tim članom niza* i generički, u vezi sa nizom a_n označiti sa

(13.1.3) $$a_\omega.$$

Time se naravno ne misli reći da je a_ω zbilja jedan član niza što je neispravno, nego se time uvodi novo ime i nov način izražavanja za odnos između poznatih stvari: niz i njegov limes.

---

[1]) Naime na način da svaka okolina od A sadrži gotovo sve članove niza.

Stvar postaje naročito jasnom, ako je niz a_n na pr. uzlazan kao u slučaju

$$\frac{n}{n+1} \to 1, \ (n \in N). \tag{13.1.4}$$

Promatramo li skup brojeva iz (13.1.4), pa ga uredimo po veličini, onda je peti član skupa $\frac{5}{6}$, a n-ti: $\frac{n}{n+1}$, tako da se limesu 1 ne može dati neki konačan rang, naprosto iz razloga, što su svi oni istrošeni za označivanje članova niza.

Ako skup (13.1.4) proširimo novim brojem, recimo 6, nastaje skup

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots \frac{n}{n+1}, \ldots 1, 6, \tag{13.1.5}$$

pa kad je već broj 1 dobio rang ω, prirodno je, da broj 6, koji u (13.1.5) dolazi neposredno iza 1 dobije rang „za 1 viši" t. j. $\omega + 1$.

U skupu

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots \frac{n}{n+1}, \ldots 1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, \ldots 1\frac{n}{n+1}, \ldots 2$$

imali bi, obrazlažući na sličan način, osim dosadašnjih rangova, također ove:

rang $\omega + 2$ za broj $1\frac{2}{3}$

rang $\omega + 3$ za broj $1\frac{3}{4}$

. . . .

rang $\omega + n$ za broj $1\frac{n}{n+1}$

. . . .

rang $\omega + \omega = \omega \cdot 2$ za broj 2.

Obrazlažući na sličan način, mogli bi ilustrirati i još više „rangove", pa bi nam tako niz prirodnih brojeva $1, 2, \ldots n, n+1, \ldots$. izgledao produžen *zdesna* najprije rangom ω, pa $\omega + 1, \omega + 2, \ldots$

Dobili bi tako;

(13.1.6) $1, 2, 3, \ldots\ldots n, n+1, \ldots \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots \omega+n, \ldots,$ $\omega+\omega=\omega\cdot 2, \omega\cdot 2+1, \ldots, \omega\cdot 2+n, \ldots, \omega\cdot 2+\omega=\omega\cdot 3, \ldots, \omega\cdot n, \omega\cdot n+1,$ $\ldots, \omega\cdot n+k, \ldots, \omega\cdot n+\omega=\omega\cdot(n+1), \ldots, \omega\cdot\omega=\omega^2, \omega^2+1,$ itd. itd.

Šta znači ta naznaka „i t. d. i t. d." vidjet ćemo za koji čas. Tako na pr. uredimo li po veličini skup svih brojeva

$$2^{-1}+2^{-2} \ldots + 2^{-k} + \frac{n}{n+1}, \quad (k, n \in N)$$

onda će se za oznaku njihova ranga morati upotrijebiti svi „brojevi" iz (13.1.6) koji su ispred ω^2.

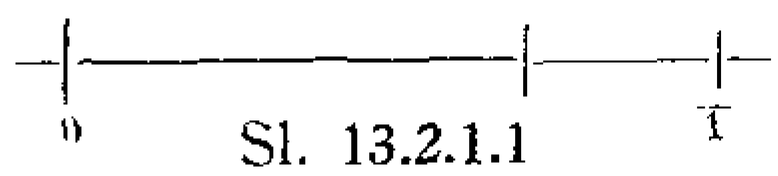
§ 13.2. **Brojevi (točke) kao matematički atomi.**[1]) Postepenim rastvaranjem cjeline dolazi se do sve sitnijih dijelova te cjeline. Tako se dolazi do pojma *nedjeljivog dijela*, atoma, cjeline. Taj pojam naravno zavisi od toga kakova se sredstva upotrebljavaju pri rastvaranju. Biolog ima svoje atome, kemičar svoje, fizičar svoje, a matematičar opet svoje.

Jedna od najprirodnijih cjelina (skupova) što ih matematičar izučava jesu dužine odn. intervali (zatvoreni i otvoreni) realnih brojeva te pravokutnici i drugi elementarni likovi.

§ 13.2.1 **Lomljenje segmenta.** Prikažimo jedan proces lomljenja segmenta (zatvorenog intervala)

(13.2.1.1) $[0, 1]$ = skup svih realnih brojeva $0 \leqslant x \leqslant 1$

Lomljenje se sastoji u ovom: polazimo od segmenta $[0, 1]$, prelomimo ga na dva segmenta (sl. 13.2.1.1) i taj *isti proces nastavljamo neprestano sa svakim novonastalim segmentom.*



Sl. 13.2.1.1

Da li će se taj proces, bar u mislima, ikad završiti?

Ipak jedno objašnjenje: ako nam se pri procesu prelamanja ukazao kakav padajući niz segmenata

(13.2.1.2.) $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots\ldots,$

prirodno je smatrati, da smo time uvukli u razmatranje i skup

(13.2.1.3) $\bigcap\limits_n A_n$

sastavljen od svih točaka zajedničkih **nizu** segmenata A_n.

U jednu naime ruku, taj je skup: **ili** segment manji od svih segmenata A_n koji valja dalje prelamati ili je pak skup (13.2.1.3) sastavljen od jednog jedinog broja (točke) koji dalje, kao skup, ne možemo lomiti — on je *atom.* A u drugu ruku, konačni je cilj procesa da se dođe, ako je moguće, do svih neprelomljivih komada, atoma, u $[0, 1]$ t. j. do svih jednočlanih skupova, odnosno do svih brojeva u $[0, 1]$, koji baš u tom pogledu imaju karakter specijalnih matematičkih atoma. Kako da proces lomljenja učinimo preglednim?

Poslužit ćemo se jednom vrsti indeksa (t. zv. slogovi).

Označimo sa

(13.2.1.4) S_0 lijevi, a sa S_1 desni segment

na koje smo prelomili početni segment $[0, 1]$.

Ponovimo li istu stvar sa segmentima S_0 i S_1, dobit ćemo $4(=2^2)$ segmenta

$$S_{00},\ S_{01},\ S_{10},\ S_{11} \quad \text{općeg oblika}$$

(13.2.1.5) $S_{i_1 i_2}$ $(i_1, i_2 = 0 \text{ ili } 1)$.

---

[1]) Razmatranja u § 13.2. naročito su instruktivna.

Analogno, iz ovih nastaje $8(=2^3)$ segmenata:

S_{000}, S_{001}, S_{010}, S_{011}, S_{100}, S_{101}, S_{110}, S_{111} općeg oblika

(13.2.1.6) $S_{i_1 i_2 i_3}$, $(i_1, i_2, i_3 = 0$ ili $1)$.

Očigledno, iz S_{01} nastaju segmenti: lijevo S_{010} i desno S_{011}.

Indukcijom se tako za svaki prirodni broj n dobiju segmenti:

(13.2.1.7) $S_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, gdje su $i_1, i_2, \ldots, i_n = 0$ ili 1

svi oni ispunjuju čitav polazni segment $[0, 1]$.

Označimo li sa

(13.2.1.8) M_n

množinu svih segmenata (13.2.1.7), dobijemo na taj način niz množina

(13.2.1.9) $M_1, M_2, \ldots\ldots, M_n, M_{n+1}, \ldots,$

sastavljenih od izvjesnog broja segmenata $\subset [0, 1]$.

Vidimo, da svakom $S \in M_n$ pripadaju dva elementa iz M_{n+1} kojima se oznaka dobije tako, da se indeks (slog) u oznaci segmenta S produži sa 0 odn. 1. Tako na pr. elementu $S_{0011} \in M_4$ pripadaju elementi S_{00110}, S_{00111} iz M_5 — kao *njegova dva vlastita* segmenta koja ga ispunjuju.

Zato i važi

$$\bigcup_S S = [0, 1], \ (S \in M_n) \text{ za svaki } n \in N.$$

Za svaki diadski niz (slog)

(13.2.1.10) $i_1, i_2, i_3, \ldots i_n, \ldots$

brojeva 0, 1 važi

$$S_{i_1} \supset S_{i_1 i_2} \supset S_{i_1 i_1 i_3} \supset \ldots,$$

pa zato valja promatrati i skup

(13.2.1.11) $\bigcap\limits_n S_{i_1 i_2 \ldots i_n}$,

a za njega se upravo nameće oznaka $S_{i_1 i_2} \ldots$; dakle

(13.2.1.12) $S_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \bigcap\limits_n S_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, $(n \in N)$.

§ 13.2.2. **Atomistički karakter oznake decimalnih razlomaka.**

Oznaka (13.2.1.12) nova nam je samo po obliku.

U stvari, ako se obrazovanje množine (13.2.1.8) sastojalo od prelamanja segmenata u dva *jednaka* dijela, tada su svi skupovi (13.2.1.12) jednočlani[1]) i u običnom našem pisanju ne nose oznaku (13.2.1.12) nego oznaku

---

[1]) Zanimljivo je spomenuti, da su skupovi (13.2.1.12) jednočlani i onda kad se prelamanje sastoji u podjeli svih promatranih segmenata *u jednom te istom omjeru.* To je dosta paradoksalna činjenica, a izvire iz činjenice da za $0 < q < 1$ važi $q^n \to 0$ kad $n \to \infty$.

(13.2.2.1) $$0,\, i_1\, i_2\, i_3\, , \ldots ,$$

u smislu da je to isto što i (diadski pozicioni sistem)

(13.2.2.2) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} i_\nu 2^{-\nu} \quad \text{t. j.} \quad 0, i_1 i_2 i_3 \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} i_n 2^{-n}.$$

Da su se prelamanja svakog segmenta S sastojala u podjeli ne na 2 nego na 10 *jednakih* dijelova, a označavanje „njegovih" 10 segmenata na koje se S raspada, obavilo tako da se indeksu (slogu od S) pripišu ne „cifre" 0 i 1 kao maloprije nego „cifre" 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 opet bi (13.2.1.11) bili jednočlani skupovi, upravo naši obični decimalni brojevi, s uobičajenom oznakom

(13.2.2.3) $$0,\, i_1\, i_2\, i_3 \ldots$$

a sa stvarnim značenjem da je to $= \sum_{n=1}^{\infty} i_n 10^{-n}$

Napomena 13.2.2.1. Gornje označivanje ciframa 0, 1, . . . , 9 je u stvari izomorfno (slično) preslikavanje uređena skupa $\varphi(S)$ od 10 segmenata na koje se S raspada, na uređen skup $\{0 < 1 < 2 < \ldots < 9\}$; uređenje skupa $\varphi(S)$ je očigledno, na način kako su njegovi elementi smješteni kao dijelovi uređena skupa $[0, 1]$.

§ 13.2.3. **Pojava transfinitnih rednih brojeva. Rekurzija.**

Ukratko, nizu množina

$$M_1, M_2, \ldots, M_n, M_{n+1}, \ldots .$$

upravo se nametnula množina svih skupova (13.2.1.12); kako je ona sastavljena zapravo od svih

(13.2.3.1) $$\bigcap_k A_k, (A_k \in M_k) \text{ uz uslov}$$

(13.2.3.2) $$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_k \supset A_{k+1} \supset \ldots,$$

dolazi ta množina *tek poslije izgrađenih svih* M_n; ako su množine $M_1, M_2, \ldots$ nosile po redu rang 1, 2, 3, ... onda množina svih skupova (13.2.1.12) odn. (13.2.3.1) ima da nosi rang koji je taman viši od svih n; označuje se sa

(13.2.3.3) $$\omega \text{ odn. } \omega_0,$$

pa zato sada možemo množinu svih (13.2.1.12) označiti sa

(13.2.3.4) $$M_\omega .$$

Kako su elementi od M_ω ili segmenti ili jednočlani skupovi $\subseteq [0, 1]$, možemo postaviti pitanje, da li je obrazovanjem množine M_ω proces lomljenja završen ili nije. Ako naime M_ω sadrži bar jedan segment $\subset [0, 1]$ recimo segment

(13.2.3.5) $$S_{i_1 i_2 \ldots i_n \ldots},$$

treba ovoga prelomiti na dva segmenta, a samo se po sebi nameće da ih označimo sa

(13.2.3.6) $$S_{i_1 i_2, \ldots i_n i_{n+1} \ldots \ldots i_\omega},$$

gdje je $i_\omega = 0$ ili 1 i to: 0 za lijevi, a 1 za desni dio segmenta (13.2.3.5).

Ako nadalje (13.2.3.5) prolazi svim segmentima $\subset [0, 1]$ sadržanim u M_ω, tada je prirodno, da, kao nastavak oznake $M_1, M_2 \ldots M_n$, $M_{n+1}, \ldots M_\omega$, označimo sa

(13.2.3.7) $$M_{\omega+1}$$

množinu svih segmenata oblika (13.2.3.6).

Rekurzija. Označimo li za proizvoljan segment $S \subseteq [0, 1]$ sa

(13.2.3.8) $$\varphi(S)$$

skup sastavljen od dva segmenta koji se dobiju prelamanjem segmenta S, tada je

(13.2.3.9) $$\bigcup_X X = S, \ (X \in \varphi(S)),$$

a gornje definicije množina $M_1, M_2, \ldots$ mogu se tada rekurzivno ovako izraziti:

$$M_1 = \varphi([0, 1]),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(13.2.3.10) $$M_{n+1} = \bigcup_S \varphi(S), \ (S \in M_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$M_\omega = \text{skup svih } \bigcap_k A_k, \ (A_k \in M_k)$$

uz uslov $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$,

$$M_{\omega+1} = \bigcup_S \varphi(S), \ (S \in M_\omega).$$

Analogno bi se na množinu $M_{\omega+1}$ nadovezivala množina

(13.2.3.11) $$\bigcup_S \varphi(S), \ (S \in M_{\omega+1})$$

koju možemo označiti sa $M_{\omega+2}$, a njene elemente sa

(13.2.3.12) $$S_{i_1 i_2 \ldots i_n \ldots, i_\omega i_{\omega+1}}$$

Slično bi mogli definirati

(13.2.3.13) $$M_{\omega+n+1} = \bigcup_S \varphi(S), \ (S \in M_{\omega+n}).$$

Nadalje bi mogli definirati

(13.2.3.14) $$M_{\omega+\omega} \equiv M_{\omega \cdot 2} = \text{skup svih } \bigcap_k A_k,$$

gdje je

$$A_k \in M_{\omega+k}$$

uz uslov (13.2.3.2).

Ako množina $M_{\omega\cdot 2}$ sadrži bar jedan višečlan segment $\subseteq [0, 1]$, možemo dalje definirati

$$M_{\omega\cdot 2+1} = \bigcup_S \varphi(S), \ (S \in M_{\omega\cdot 2}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$M_{\omega\cdot 2+n+1} = \bigcup_S \varphi(S), \ (S \in M_{\omega\cdot\ +n}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$M_{\omega\cdot 3} = \text{skup svih } \bigcap_k A_k,$$

gdje je

$$A_k \in M_{\omega\cdot 2+k},$$

uz uslov (13.2.3.2)

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$M_{\omega\cdot n} = \text{skup svih } \bigcap_k A_k,$$

gdje je

$$A_k \in M_{\omega\cdot(n-1)+k}$$

uz uslov (13.2 3.2)

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$M_{\omega^2} = \text{skup svih } \bigcap_k A_k;$$

gdje je

$$A_k \in M_{\omega(k-1)}$$

uz uslov (13.2.3.2).

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$M_{\omega^2+n} = \bigcup_S \varphi(S), \ (S \in M_{\omega^2+n-1}), \ (n \in N)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$M_{\omega^2+\omega} = \text{skup svih } \bigcap_k A_k, \ (A_k \in M_{\omega^2+k})$$

uz uslov (13.2.3.2).

Uopće za svaki M_α koji sadrži bar jedan višečlan segment $\subseteq [0, 1[$ možemo definirati i množinu

(13.2.3.15) $$M_{\alpha+1} = \bigcup_S \varphi(S), \ (S \in M_\alpha)$$

a time i „rang“ $\alpha + 1$.

Ako je definiran niz „rangova“ sve „viših“ i „viših“:

(13.2.3.16) $$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots,$$

onda se pojmovno pojavljuje i „rang“ koji je neposredno od njih viši, a koji se označuje sa

(13.2.3.17) $$\sup_n \alpha_n \ (\text{supremum} = \text{najviši}).$$

Prirodno je naime da u procesu lomljenja promatramo množinu svih

(13 2.3.18) $$\bigcap_k A_k, \ (A_k \in M_{\alpha_k})$$

uz uslov (13.2.3.2), i da njoj damo „rang" koji neposredno je viši od rangova α_n svih množina M_{α_k}.

Zato množinu (13.2.3.18) i možemo označiti sa

(13.2.3.19) $$M_{\sup\limits_n \alpha_n}.$$

Tako na pr. ako su definirane množine M_ω, M_{ω^2}, ..., M_{ω^n}, ... uvodi se i rang

(13.2.3.20) $$\sup_n \omega^n \text{ i označuje sa } \omega^\omega,$$

e da bi na zgodan način mogli dovesti u vezu množinu svih

(13.2.3.21) $$\bigcap_k A_k, \ (A_k \in M_{\omega^k})$$

uz uslov $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ sa nizom množina M_ω, M_{ω^2}, ..., M_{ω^n}, ...

Zato se množina (13.2.3.21) i može označiti sa

(13.2.3.22) $$M_{\omega^\omega}.$$

Tako je dakle množina svih (13.2.3.21) nosilac izvjesnog svojstva koje iskazujemo riječima da je ona ranga ω^ω, jer je dobivena konstrukcijom tek poslije množina M_α sa nižim rangovima α.

Sada smo već dobili bolji uvid u gornji proces prelamanja i *u dobro uređen skup operacija* obrazovanja množina M_1, M_2, M_3, ... Na gornje naše pitanje, da li će se proces lomljenja ikada završiti odgovaramo potvrdno!

Ono što je ovdje važno jeste da će se taj proces završiti sigurno poslije *prebrojivo mnogo* operacija.

Jedan dokaz te činjenice iznijet ćemo kasnije (v. formule (15.1.4.5) i (15.1.4.6). A već sada skrenimo pažnju, da, možda, postoji i takav dokaz te činjenice koji bi se mogao upotrijebiti na analogan slučaj kad mrvimo ne segment brojeva nego ma koji uređen skup bez provalija a s najviše prebrojivo mnogo disjunktnih punih intervala. To je pitanje u najužoj vezi sa Suslinovim problemom!

Za vježbu neka čitalac provede analogno lomljenje izvjesnog pravokutnika ili kocke.

Ukratko, vidimo, da se „*transfinitni redni brojevi*" javljaju kod vanredno prirodnih pojava. Drugo je pitanje, kako da definiramo i ostvarimo ordinalne brojeve! Obične redne brojeve

prvi, drugi, treći i t. d.

ostvarujemo i prikazujemo na razne načine, kao na pr. pomoću zareza (markica)

I, II, III, IIII, ...

(tako rade primitivniji tesari) ili pomoću posebnih znakova i slova

A, B, C, . . .

a možemo ih ostvariti i pomoću brojeva

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

Ali možemo redne brojeve ostvariti i pomoću dobro uređenih skupova. Tako, mjesto da govorimo o brvnu oznake III možemo govoriti o brvnu oznake $\{1, 2, 3\}$. U tom smislu oznake $\{1, 2, 3\}$ ili $\{5, 7, 20\}$ ne bi se razlikovale po svojoj ulozi: svaki od ta dva dobro uređena skupa sposoban je da označi *treći* predmet nekog skupa predmeta.

§ 13.3. **ZADACI.**

§ 13.3.1. Konkretiziraj atomiziranje jediničnog segmenta $[0, 1]$, tako da se skup rangova koji se pritom javljaju može preslikati na dobro uređeni dio sastavljen od svih brojeva oblika

$$k + 2^{-2} + 2^{-1} + \ldots 2^{-n}, \ (k, n \in N).$$

§ 13.3.2. Ako potpuno uređen skup ima Suslinovo svojstvo, tada je svaki dobro uređen dio toga skupa $\leqslant \aleph_0$. Obrat ne važi (primjer alfabetski uređenog skupa $C_2 = C \times C$).

§ 13.3.3. Može li ikoji dobro uređen dio skupa $C_1(N)$ alfabetski uređenog biti neprebrojiv?

§ 14. REDNI (ORDINALNI) BROJEVI. REDNI (ORDINALNI) TIPOVI.

Evo nas konačno pred zadaćom do koje nam je mnogo stalo: upoznati se sa rednim brojevima! Bitna uloga redna broja ima biti u tome da znači rang i položaj što ga pojedini predmet ima (zauzima) s obzirom na druge predmete izvjesna skupa. Tako se govori o početnoj strani knjige, o 16. arku knjige, o 30. knjizi na polici, o 35. parnom broju i t. d. A bitna stvar rednih brojeva sastoji se i u tome da se svaki redni broj može nanositi poslije svakog rednog broja. Tako na pr. osmi = treći poslije 5-tog. Upoznat ćemo se sa rednim brojevima i rednim tipovima, njihovom podjelom, računskim operacijama i glavnim svojstvima. Razmatranja ovog §-a su od bitne važnosti.

§ 14.1. **Nanošenje uređenih skupova.** Ako imamo dva disjunktna uređena skupa A i B, tada možemo vrlo lako obrazovati nov uređen skup tako da *iza* skupa A onako kako je već uređen, *nanesemo, stavimo,* skup B onako kako je on uređen. Dobit ćemo određen uređen skup kojemu je A početni a B završni komad; dobiven skup zove se redna (ordinalna) suma skupova A i B, a može se označiti sa $tA + tB$.

Tako na pr. $t\{5 < 7 < 9\} + t\{1 < 3 < 13 < 14\}$ označuje uređeni skup:

5 ispred 7 ispred 9 ispred 1 ispred 3 ispred 13 ispred 14.

Kako definirati nanošenje skupa B iza skupa A u slučaju kad A i B imaju i zajedničkih točaka, pa čak kad je i $A = B$? Kako na pr. nanijeti skup iza sama sebe? No, kod procesa nanošenja nama nije stalo do toga, da znamo *što* nanosimo nego do toga *dokle* ćemo nanošenjem stići. Zato mi skupove A i B možemo zamijeniti *sličnim* skupovima, ali koji su bez zajedničke točke. Tako na pr. mjesto skupa A možemo promatrati kombinirani produkt

(14.1.1) $$\{1\} \times A$$

svih uređenih pari $(1,a)$, $(a \in A)$ uređen tako da na skup $\{1\} \times A$ prenesemo poredak skupa A t. j. zahtijevajući, da relacija

(14.1.2) $$\{1,a\} \leqslant \{1,a'\} \text{ u } \{1\} \times A$$

ima da bude ekvivalentna sa relacijom $a \leqslant a'$ u uređenom skupu A. Očito je A sličan sa $\{1\} \times A$, kao i sa analogno definiranim uređenim skupom

(14.1.3) $$\{p\} \times A,$$

gdje je p ma kakav predmet (na pr. $p = 3$, 100, kružnica i t. d.) Za tako definiran skup $\{p\} \times A$ može se reći da nastaje „*zamjenom*" *predmeta p skupom A.*

Analogno, uređen kombiniran produkt

$$\{2\} \times B$$

sličan je sa B.

No, skupovi

$$\{1\} \times A, \ \{2\} \times B$$

nemaju nikad zajedničkih točaka, pa makar A, B bili i identički. Unija

(14.1.4) $$(\{1\} \times A) \cup (\{2\} \times B)$$

uređena na način, da uređen skup $\{1\} \times A$ dolazi ispred uređena skupa $\{2\} \times B$, zove se *rednom (ordinalnom) sumom* skupova A i B i možemo je označiti sa

(14.1.5) $$\{1\}\times A + \{2\}\times B \text{ ili } tA + tB.$$

Na pr. redna suma uređenih skupova $\{1 < 3 < 5\}$ i $\{1 < 5 < 7 < 8\}$ jest ovaj uređen skup:

$$(1,1),\ (1,3),\ (1,5);\ (2,1),\ (2,5),\ (2,7),\ (2,8).$$

Lema 14.1.1. *Svako preslikavanje f skupa B t. j. pridruživanje svakom $x \in B$ izvjesnog skupa $f(x)$, dovodi do množine disjunktnih skupova*

$$\{x\} \times f(x),\ (x \in B); \text{ pritom je } \{x\} \times f(x)$$

skup svih uređenih pari (x,y), $(y \in f(x))$.

Lema 14.1.2. Ako je B ma kakav uređen skup, a f ma kakav proces kojim svakom $x \in B$ pridružujemo izvjestan uređen skup $f(x)$, tada se unija

(14.1.6) $$\bigcup_{z \in B} \{z\} \times f(z)$$

svih pari

$$(z, y), \quad (z \in B, \ y \in f(z))$$

može urediti na ovaj način *(alfabetsko uređivanje slogova ili uređivanje po prvim diferencijama)*: Za elemente (z, y), (z', y'), skupa (14.1.6) relacija

(14.1.7) $$(z, y) \leqslant (z', y')$$

u (14.1.6) ima da bude ekvivalentna sa

(14.1.8) $z < z'$ u B odnosno sa $z = z'$ u B, $y < y'$ u $f(z)$.

Tako uređen skup zove se *rednom sumom skupova* $f(z)$, $(z \in B)$ po bazi B, a može se naznačiti sa

(14.1.9) $$\sum_{z \in B} \{z\} \times f(z)\,^{1)} \quad \text{ili} \quad \sum_{z \in B} t\, f(z)$$

Lema 14.1.3. *Ako svakom $z \in B$ uređena skupa B pridružimo dva slična uređena skupa*

$$f(z), \ g(z)$$

tada je uređena suma (14.1.9) *slična s uređenom sumom*

(14.1.10) $$\sum_{z \in B} \{z\} \times g(z).$$

Stvarno, označimo za svaki $z \in B$, sa φ_z preslikavanje koje po sličnosti prevodi uređen skup $f(z)$ na $g(z)$ dakle $\varphi_z(f(z)) = g(z)$. Ako tada proizvoljnom elementu (z, y) skupa (14.1.9) pridružimo element $(z, \varphi_z(y))$ skupa (14.1.10), dobiva se time sličnost između tih dvaju skupova.

Teorem 14.1.1. *Ako su skupovi*

$$B, \ S(z), \ (z \in B)$$

dobro uređeni, tad je i redna suma

(14.1.11) $$\sum_{z} (z) \times S(z), \ (z \in B)$$

dobro uređen skup.

Radi se o tome, da pokažemo, da svaki pun skup M izvađen iz (14.1.11) ima prvi element. No, neka je najprije B_0 skup svih $z \in B$ za koje je $\{z\} \times S(z) \cap M \supset v$. Zbog (14.1.11) bit će $v \subset B_0 \subseteq B$, pa kako je B dobro uređen, određen je i početni element p od B_0. Promatrajmo sada sumand $\{p\} \times S(p)$ skupa (14.1.11); u njemu se nalazi bar jedna

[1]) Pažnja! Mjesto operatora $\cup$ dolazi operator Σ.

točka zadana skupa; kako je $\{p\} \times S(p)$ dobro uređen, određena je i početna točka p' skupa $(\{p\} \times S(p)) \cap M$; ta točka p' jest početna točka zadana skupa M.

Kako definirati nanošenje skupova koji nisu disjunktni? Što bi značilo na pr. nanositi, „pomicati", uređen skup iza sama sebe (slično kao što se metar nanosi, pomiče iza sama sebe)? Treba da imamo na umu da mi zasad ne istražujemo od čega je uređen skup sastavljen niti kakvi su njegovi elementi. Nama je, zasad, stalo jedino o međusobnim vezama članova uređena skupa t. j. o uređenju, upravo o tipu uređenja skupa. No, slični skupovi imaju identično uređenje.

Zato će nam biti jasna ova osnovna

§ 14.2. **Definicija rednih brojeva i rednih tipova (tipova uređenja).** *Pod rednim* $\left\{\begin{matrix}\textit{brojem}\\ \textit{tipom}\end{matrix}\right.$ *razumijevamo svaki* $\left\{\begin{matrix}\textit{dobro}\\ \textit{potpuno}\end{matrix}\right.$ *uređen skup S; pritom važe ova pravila za razlikovanje, uređenje i računanje:*

I. *Oznaka i naziv. Shvaćen kao redni* $\left\{\begin{matrix}\textit{broj}\\ \textit{tip}\end{matrix}\right.$ *skup S će nositi također oznaku*

(14.2.1) $$tS \quad \text{ili} \quad t(S);$$

pa ćemo govoriti o rednom $\left\{\begin{matrix}\textit{broju}\\ \textit{tipu}\end{matrix}\right.$ *tS odnosno o tipu uređenja skupa S.*

II. *Identična jednakost:*

(14.2.2) $$tA \equiv tB \text{ (tri crtice)}$$

značit će isto što i činjenica da su skupovi A i B uređeni i slični; $tA \equiv\mid\equiv tB$ značit će negaciju od (14.2.2) *i iskazivati da skupovi A i B nisu međusobno slični;*

III. *Uređenje*

(14.2.3) $$tA \leqslant tB \quad \text{odnosno} \quad tB \geqslant tA$$

značit će isto što i činjenica da je uređen skup A sličan sa dijelom uređena skupa B; jednakost

(14.2.4) $tA = tB$ *značit će isto što i sistem* $\begin{matrix} tA \leqslant tB \\ tB \leqslant tA; \end{matrix}$

nejednakost

(14.2.5) $$tA < tB \quad \text{odn.} \quad tB > tA$$

značit će, da je $tA \leqslant tB$ ali da nije $tB \leqslant tA$. Konačno

(14.2.6) $$tA \parallel tB.$$

značit će da nije niti $tA \leqslant tB$ niti $tB \leqslant tA$.

IV. *Računanje.* a) *Ako su A, B dva uređena skupa bez zajedničke točke, onda se pod sumom rednih tipova A, B, simbolički*

$$tA + tB$$

razumijeva skup $A \cup B$ uređen tako da se iza uređena skupa A kao cjeline stavi uređen skup B kao cjelina. U općem slučaju, možemo pod sumom

$$tA + tB \tag{14.2.7}$$

rednih $\left\{\begin{array}{l}\text{brojeva}\\ \text{tipova}\end{array}\right.$ tA, tB (pazi na red pisanja i izgovaranja!) razumijevati uređen skup

$$\{1\} \times A \cup \{2\} \times B$$

što ga dobijemo kad u uređenu skupu $\{1 < 2\}$ „zamijenimo" 1 sa A, a 2 sa B; prema tome $tA + tB$ jest skup svih slogova $(1, a)$ i $(2, b)$, $(a \in A,\ b \in B)$ uređen alfabetski. [1])

b) *Suma od proizvoljno mnogo rednih* $\left\{\begin{array}{l}\textit{brojeva}\\ \textit{tipova}\end{array}\right.$. Ako je B ma koji uređen skup, a

$$S(z),\ (z \in B) \tag{14.2.8}$$

ma kakvo jednoznačno preslikavanje skupa B na množinu uređenih skupova (prema tome za svaki $z \in B$, $S(z)$ je izvjestan uređen skup), onda se pod sumom svih $tS(z)$ *protegnutoj po* B, simbolički

$$\sum_{z \in B} t\,S(z), \tag{14.2.9}$$

razumijeva uređen skup

$$\bigcup_{z \in B} \{z\} \times S(z) \tag{14.2.10}$$

uređen alfabetski; može se reći da taj uređen skup dobijemo tako da svaki $z \in B$ „nadomjestimo" pripadnim uređenim skupom $S(z)$ (zapravo sa $\{z\} \times S(z)$.

c) *Množenje* se definira ovako: stavlja se

$$tA \cdot tB = \sum_{x \in B} tA, \tag{14.2.11}$$

t. j. kad svaki $x \in B$ „nadomjestimo" jednim te istim uređenim skupom A, nastaje uređen skup koji se zove produkt od tA i tB. Kraće

---

[1]) Tako na pr. za sumu rednih brojeva $\{1 < 3\}$, $(2 < 5 < 7)$ dobivamo ova dva načina predstavljanja: 1 ispred 3 ispred 2 ispred 5 ispred 7; odnosno: (1,1) ispred (1,3) ispred (2 2) ispred (2,5) ispred (2,7). Naravno da za isti redni broj *peti* ima i drugih prikazivanja.

Obilje predstavljanja jedne te iste stvari u matematici jest svagdanja pojava. Sjeti se na pr. neizmjerno mnogo različitih predstava $\frac{m \cdot 3}{m}$ za jedan te isti broj 3.

rečeno, produkt $tA \cdot tB$ nastaje *„zbrajajući“* tA preko B (iteracija zbrajanja).

Primjedba 14.2.1. Možemo reći ovako: Redni brojevi jesu redni tipovi *dobro uređenih skupova.*

Primjedba 14.2.2. Sadržaj teorema 14.1.1 možemo sada izreći ovako: Suma od dobro uređeno mnogo rednih brojeva opet je redan broj.

§ 14.2.1. **Primjeri i oznake.** Prema gornjoj definiciji, prazni skup v kao dobro uređen skup jest određen redni broj: zove se *nulti* ili *početni,* a označuje se sa 0;[1]) dakle tv i 0 znače jedno te isto.

Prema istoj definiciji, i dobro uređen skup $\{0\}$ je određen redni broj; naziva se obično *prvi,* a označuje sa 1.

Primjedba 14.2.1.1. Ako je A ma koji uređen skup, onda nam $1+A$ odn. $1+tA$ označuje tip uređenja što se dobije kad se pred A stavi jedan jedini element. Slično, $A+1$ nastaje tako, da se iza skupa A postavi jedan jedini element.

Dobro uređen skup $\{0<1\}$ je određen redni broj $t\{0<1\}$, a naziva se *drugi* i označuje sa 2.

Redni broj $\{0<1<2\}$ naziva se *treći,* a označuje se sa 3.

Redni broj $t\{0<1<2<\ldots<n-1\}$ naziva se n-ti, a označuje se sa n, za svaki $n \in N$.

Niz prirodnih brojeva je određen redni broj, pa se kao takav označuje sa

(14.2.1.1) $$\omega \text{ ili } \omega_0 .$$

Skup R racionalnih brojeva uređen po veličini nije redni broj (nego tek redni tip), jer nije dobro uređen; mjesto tR piše se η dakle

(14.2.1.2) $$tR = \eta$$

tC (C = Skup realnih brojeva uređen po veličini) nije nikakav redni broj, jer C nije dobro uređen; uvodi se oznaka

(14.2.1.3) $$tC = \lambda;$$

prema tome $tC = tI =$ tip uređenja ma kojeg (otvorenog) intervala I realnih brojeva; zato je $1+\lambda+1$ tip uređenja ma kojeg zatvorenog intervala realnih brojeva. Kako $1+\lambda$ ima početni član, a nema završnog, dok obrnuto $\lambda+1$ nema početnog člana, ali ima završni, to znači,

---

[1]) Mnogo smo se kolebali, da li da tv (v = prazan skup) smatramo ili ne smatramo rednim brojem. I jedno i drugo stanovište ima svojih dobrih i loših strana. Napomena 13.2.2.1 igrala je odlučujuću ulogu, da tv smatramo rednim brojem, jer interpretacija običnog decimalnog prikazivanja realnih brojeva, onako kako je navedeno u § 13.2.2, pokazuje, da cifra 0 igra ulogu rednog broja u smislu najnižeg rednog broja odn. u smislu „početni“. Inače 0, kao redni broj označuje i *početno stanje,* iz kojega *po redu* izvire *prvo* stanje (operacija) *drugo* stanje ili operacija i t. d.

da skupovi $1+\lambda$, $\lambda+1$ nisu slični, pa je dakle $1+\lambda \equiv\!\!|\!\!\equiv \lambda+1$. Inače je $1+\lambda=\lambda+1$, jer na pr. lijevo zatvoreni interval $[0, 1)_C$ sličan je sa $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)_C \subseteq (0, 1)_C$, također je $(0, 1]_C$ sličan sa $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]_C \subseteq [0, 1)_C$; to znači da je

$$t[0, 1)_C = t(0, 1]_C \quad \text{t. j.} \quad 1+\lambda=\lambda+1.$$

Regresija .... $-n-1, -n, -n+1, \ldots; -2, -1$, uređena po veličini nije redan broj, jer nije dobro uređena; njen se tip uređenja označuje sa

$$\omega^{*\,1)} \quad \text{odn.} \quad \omega_0^{*}.$$

Prema definiciji sume (14.2.7)

$$\omega_0^* + \omega_0 \quad \text{odn.} \quad \omega^* + \omega$$

je tip uređenja skupa svih cijelih brojeva uređenih po veličini, dakle

$$tD = \omega^* + \omega.$$

§ 14.2.2. **Oduzimanje.** Neka su A i B zadani uređeni skupovi; ako u A ima početnih (završnih) komada koji su slični sa B, onda se sa

$$(14.2.2.1) \qquad -tB + tA \quad (\text{odn. sa } tA - tB)$$

označuju različiti ostaci skupa A što se dobiju, kad iz A uklonimo bilo koji početni (odn. završni) komad sličan sa B.

A se zove minuend, a B lijevi (desni) *suptrahend;* rezultat se zove diferencija, i to *lijeva ili desna* već prema tome da li se uklanjaju lijevi ili desni komadi minuenda.

Na pr. $-1+3=2$, $-1+\omega=\omega$ (brisanjem početnog člana progresije dobije se ponovno progresija); $\omega-1$ ne postoji, jer nijedna progresija nema posljednjeg člana.

$$\lambda - \lambda = \text{ili } 0 \text{ ili } \lambda+1.$$

Jer, oduzmemo li od linearnog kontinuuma C koji njegov desni komad K, onda preostaje ili prazan skup, ili skup $(-\infty, \inf K]_C$ tipa $\lambda+1$ svih brojeva $\leqslant \inf K$. Slično $-\lambda+\lambda=$ ili 0 ili $1+\lambda$.

Ako je η redni tip skupa racionalnih brojeva, tada među tipovima

$$\eta, \; \eta+1, \; 1+\eta, \; 1+\eta+1$$

nema identički jednakih, ma da su inače sva četiri međusobno jednaka.

1) Ako je S bilo koji uređen skup, onda se sa S^* označuje taj isti skup S ali uređen ne prvobitnom relacijom $\leqslant$ nego dualnom relacijom $\geqslant$. Prema tome što je lijevo (desno) u S, to je desno (lijevo) u S^*. Naravno $(S^*)^* = S$. Dok je uređeno zbrajanje dvaju skupova binarna operacija, a zbrajanje sa 3 sumanda ternarna operacija među uređenim skupovima, dotle je S^* *unarna* operacija.

§ 14.2.3. **O načinu izražavanja.** Kako prema osnovnoj definiciji sami uređeni skupovi odn. njihova specijalna vrsta: dobro uređeni skupovi igraju ulogu rednih tipova odn. rednih brojeva, to se o pojedinom rednom broju (tipu) može govoriti kao o kakvom uređenom skupu i na nj prenositi svojstva s uređenih skupova. Pa se može na pr. pitati, da li zadan redan broj ima posljednji član? Da li je zadan redan tip gust? Pokazuje li praznina? Da li je konačan? U tom smislu, redan tip η t. j. tip uređenja skupa racionalnih brojeva okarakterisan je *kao prebrojiv gust redni tip bez krajnjih elemenata* (v. teor. 11.3.1). Tip uređenja λ linearnog kontinuuma okarakterisan je ovim svojstvima: (v. teor. 11.4.1): neprekidan potpuno uređen (= gust ali ipak bez praznina), separabilan (sadrži prebrojiv dio gusto rasijan po čitavom skupu), nema ni početka ni svršetka.

Kako nam je specijalno do rednih brojeva stalo, to prelazimo sada na izučavanje njihovih svojstava.

§ 14.3. **Osnovna svojstva rednih brojeva.** Jedno od najvažnijih svojstava rednih brojeva jest njihova uporedljivost. Važi naime

Teorem 14.3.1. *Za ma koja dva redna broja tA, tB* [1]) *važi jedan i samo jedan od ova tri slučaja* (trihotomija)*: tA je ili manji ili jednak ili veći od tB:*

(14.3.1) $$tA < tB$$

i to onda i samo onda, kad je A sličan s pravim početnim komadom skupa B

(14.3.2) $$tA = tB$$

i to onda i samo onda, kao su A i B slični

(14.3.3) $$tB < tA$$

i to onda i samo onda kad je B sličan s pravim početnim komadom skupa A.

Da je vazda: ili $tA = tB$ ili $tA < tB$ ili $tA > tB$, to izvire neposredno iz osnovnog teorema 12.3.3. Da u slučaju dobro uređenih skupova A, B jednakost $tA = tB$ povlači i sličnost između A i B, to je sadržaj teorema 12.4.3.

Ostaje da dokažemo (14.3.1) i (14.3.3). Dokažimo na pr. 14.3.1.

Najprije, ako je $tA < tB$, tada je dobro uređen skup A sličan sa pravim početnim komadom dobro uređena skupa B. Stvarno, u obrnutom slučaju, prema osnovnom teoremu 12.3.3. bio bi B sličan s početnim komadom (pravim ili nepravim) skupa A pa dakle $tB \leqslant tA$ protivno pretpostavci $tA < tB$.

[1]) Prema tome A i B su dobro uređeni skupovi.

Ostaje još obrat: Ako je dobro uređen skup A sličan s pravim početnim komadom dobro uređena skupa B, onda je $tA < tB$. U obrnutom slučaju bilo bi $tB \leqslant tA$, dakle $tA = tB$ a odatle, prema teoremu 12.4.3 $tA \equiv tB$ t. j. A i B bili bi slični. Tako bi A bio sličan i sa B, a po pretpostavci i s nekim njegovim pravim početnim komadom, protivno osnovnom teoremu 12.3.3.

Time je teorem 14.3.1. dokazan. Sadržaj toga teorema može se izreći i ovako:

Svaki skup rednih brojeva potpuno je uređen po veličini. Ali bitno svojstvo rednih brojeva jeste da, poput skupova prirodnih brojeva, *svaki skup rednih brojeva uređen po veličini ima i najmanji, početni, član (v. teorem 14.3.3.).*

Osnovni teorem 14.3.2. Za ma koji redni broj, skup

(14.3.4) $$(-\infty, \alpha)_O\,[1] \text{ ili kraće } (-\infty, \alpha)$$

svih rednih brojeva $< \alpha$ uređenih po veličini jest dobro uređen skup, pa shvaćen kao redni broj, on je identičan sa α t. j.

(14.3.5) $$t(-\infty, \alpha)_O = \alpha.$$

Tako na pr. $t\{0 < 1 < 2 < \ldots < 9\} \equiv 10$

$$t\{0 < 1 < 2 < \ldots < n < n+1 < \ldots\} \equiv \omega.$$

Da dokažemo osnovni teorem, sjetimo se da, prema teoremu 14.3.1, za redne brojeve

$$tA,\ tB \text{ relacija } tA < tB$$

znači isto što i činjenica, da je dobro uređeni skup A sličan s pravim početnim komadom skupa B.

Zato se za svaki dobro uređen skup S nameće promatranje množine

(14.3.6) $$K(S)$$

svih početnih komada $\subset S$; prema tome, nije $S \in K(S)$; naprotiv v jest određen element u $K(S)$; množina $K(S)$ je potpuno uređena na prirodan način, relacijom $\subseteq$, pa je v početni član u $K(S)$.

Tada osnovni teorem 14.3.2 proizlazi iz lema 14.3.1 i 14.3.2 koje ćemo odmah dokazati:

Lema 14.3.1. *Za svaki redni broj tS uređeni skup*

(14.3.7) $$(-\infty, tS)$$

[1]) Indeks O je inicijal od *ordinalan* (redni), da se time naznači da su članovi skupa (14.3.4) redni brojevi. Notirajmo da je i nula, 0, član skupa (14.3.4).

svih rednih brojeva $< t(S)$, *sličan je uređenom skupu* $K(S)$ *svih početnih pravih komada dobro uređena skupa* S. (Pažnja! v = prazan skup, smatra se početnim članom u $K(S)$).

Lema 14.3.2. *Skup* $K(S)$ *sličan je sa* S.

Stvarno iz $t(-\infty, tS) \equiv tK(S)$ (lema 14.3.1) i $tK(S) \equiv tS$ (lema 14.3.2) izlazi sadržina teorema 14.3.2 i $t(-\infty, tS)_0 \equiv tS$.

Dokažimo lemu 14.3.1. Najprije, za svaki redni broj tA nejednakost $tA < tS$ znači (teorem 14.3.1), da je A sličan s jednim i samo jednim pravim početnim komadom od S; označimo li taj komad sa $\varphi(A)$, bit će

$$\varphi(A) \in K(S).$$

Naravno, tim preslikavanjem, koje je sličnost, prelazi skup (14.3.7) u skup (14.3.6). Da je time ova množina iscrpena, proizlazi odatle, što je svaki član K iz $K(S)$, kao dobro uređen skup, potpuno određen redni broj i to $< tS$, jer je K pravi početni komad od S.

Preostaje još dokaz leme 14.3.2. No, odmah se vidi, da preslikavanje

(14.3.8) $$(-\infty, x)_S\ ,\ (x \in S)$$

koje svakom $x \in S$ pridružuje skup $(-\infty, x)$ svih elemenata iz S koji su $< x$, znači sličnost između S i $K(S)$. Da većem elementu iz S odgovara kod preslikavanja (14.3.8) veći element u $K(S)$, to je očito. Samo još, da se uvjerimo, da je svaki član K iz $K(S)$, zaista oblika (14.3.8). Stvarno, kako je $K \subset S$ (gl. definiciju (14.3.6)), skup $S \setminus K$ nije pust, pa zato ima određen početni element, označimo ga u zavisnosti od K sa

(14.3 9) $$K^+.$$

No, kako je K *početni komad* od S, položen je čitav $S \setminus K$ *iza* K, specijalno je iza K i početni element K^+ od $S \setminus K$; zato je

(14 3.10) $$K = (-\infty, K^+)_S \quad \text{i} \quad K^+ \in S.$$

Time je dokazana i lema 14.3.2, a prema gornjem također i sam osnovni teorem 14.3.2.

Teorem 14.3.3. Svaki skup rednih brojeva uređen po veličini jest dobro uređen, pa čim on ima bar jedan član ima on i svoj početni član.

Stvarno, neka je S ma koji pun skup rednih brojeva, a α ma koji njegov element; ako je α početni broj u S, stvar je gotova; ako pak α nije prvi u S, onda je skup $(-\infty, \alpha)_S$ pun, a kao dio dobro uređena skupa $(-\infty, \alpha)_0$ svih rednih brojeva $< \alpha$, ima $(-\infty, \alpha)_S$ početni element, što smo i htjeli pokazati.

§ 14.4. **Osnovni operator:** *Supremum* (*sup* S, *za ma koji pun skup* S *rednih brojeva.*

Za ma koji neprazan skup S rednih brojeva definirat ćemo *supremum skupa S odnosno supremum brojeva iz S simbolički*

(14.4.1) $$\sup S \quad \text{odn.} \quad \sup_{\alpha \in S} \alpha,$$

kao završni broj u uređenom skupu S ukoliko takav završni element postoji, a inače, ako S nema najvećeg člana, onda će $\sup S$ značiti *prvi* broj među onima koji su veći od svakog broja iz S.

Na pr. $\sup\{1, 5, 4, 2\} = 5$, $\sup\{1, 3, 5, 7, ..\} = \omega_0$. Da $\sup S$ postoji, ako je S snabdjeven najvećim članom, to je jasno. Međutim, od interesa je slučaj, kad u uređenom skupu S nema najvećeg broja.

Teorem 14.4.1. *Za svaki neprazan skup S rednih brojeva među kojima nema najvećeg* važi

(14.4.2) $$\sup S = t\,(\cup\,(-\infty, \sigma]_0)\,[1]), \ (\sigma \in S)$$

pa je zato $\sup S$ *jednoznačno određen redni broj.*

Najprije je jasno, da je skup

$$S_0 = \bigcup_{\sigma} (-\infty, \sigma]_0, \ (\sigma \in S)$$

potpuno dobro uređen, pa je zato $t S_0$ određen redni broj; jednakost (14.4.2) kaže, da je

(14.4.3) $$\sup S = t S_0.$$

No, za svaki $\sigma \in S$ važi

$$(-\infty, \sigma)_0 \subset (-\infty, \sigma]_0 \subset (\text{jer je } S \text{ bez zadnjeg člana}) \subset S_0.$$

Odatle

$$t\,(-\infty, \sigma)_0 < t S_0.$$

No, ta nejednakost, na osnovu osnovne jednakosti (14.3.5), kaže, da je

(14.4.4) $$\sigma < t S_0, \ (\sigma \in S).$$

Ima dakle bar jedan redan broj — konkretno $t S_0$ — koji je veći od svakog $\sigma \in S$; zato postoji među njima i najmanji: $\sup S$. Dakle je $\sup S$ određen redan broj, a zbog (14.4.4) bit će

(14.4.5) $$\sup S \leqslant t S_0.$$

No, $\sup S = t S_0$, jer u protivnom slučaju, prema (14.4.5), bilo bi $\sup S < t S_0$. To bi na osnovu važne relacije (14.3.5):

$$t S_0 = t\,(-\infty, t S_0)_0 \ \text{značilo da je}$$

$$\sup S \in S_0.$$

---

[1]) Pritom $(-\infty, x]_0$ znači skup svih rednih brojeva $\leqslant x$.

No, kao u S tako i u S_0 iza svakog elementa dolazi bar jedan još veći u S, specijalno, iza broja $sup\, S_0$ dolazio bi bar jedan $\sigma \in S$, dakle $sup\, S < \sigma$, što je apsurd.

Time je konačno teorem 14.4.1 dokazan.

§ 14.5. **Redni brojevi prve i druge vrste.** Redni broj α je prve vrste, ako ima neposrednog prethodnika t. j. ako postoji $\alpha - 1$; ako je α pozitivan i nema neposrednog prethodnika, kaže se, da je on *druge* vrste. Prema tome svaki redni broj je ili 0 ili prve vrste ili druge vrste.

Očigledno, redni broj α je druge vrste onda i samo onda, ako svaki interval rednih brojeva koji sadrži taj broj α sadrži i rednih brojeva $\neq \alpha$: zato se α ne može izolirati u smislu, da bude jedini član nekog otvorenog intervala rednih brojeva. Na pr. ω_0 je broj druge vrste; broj $\omega_0 \cdot 3$ također. Poslije ćemo dokazati, da se brojevi druge vrste poklapaju sa desnim višekratnicima broja ω_0, da su dakle oblika $\omega_0 \alpha$ (v. teorem 14.8.7.1.).

Očigledno, važi ovaj

Teorem 14.5.1. *Da pozitivan (t. j. $\neq 0$) redni broj α bude druge vrste, nužno je i dovoljno da on bude suprem skupa $(-\infty, \alpha)$ svih rednih brojeva $< \alpha$ t. j. da važi jednakost*

$$\text{(14.5.1)} \qquad sup\,(-\infty, \alpha)_0 = \alpha \quad \text{odn.} \quad \sup_{\xi < \alpha} \xi = \alpha.$$

Tako sad vidimo da je ω_0 suprem niza svih konačnih rednih brojeva.

Suprèmum skupa svih *prebrojivih* rednih brojeva označuje se sa

$$\text{(14.5.2)} \qquad \omega_1 \text{ ili } \Omega.$$

Taj redni broj nije prebrojiv: njegov kardinalni broj — označuje se sa $\aleph_1$ — neposredno je veći od $\aleph_0$ [1]) i ne zna se, da li je $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ (problem kontinuuma).

§ 14.6. **Regularni (pravilni) i iregularni (nepravilni) redni brojevi. Preslikavanje τ rednih brojeva.**

Definicija 14.6.1. *(funkcije τ)*

Stavit ćemo

$$\text{(14.6.1)} \qquad \tau(0) = 0, \; \tau(\beta + 1) = \beta + 1$$

za svaki redni broj β.

Ako je redni broj α druge vrste, stavit ćemo

$$\text{(14.6.2)} \qquad \tau(\alpha) = \inf_S t(S);$$

$\tau(\alpha) = \min_{\xi} \xi < \alpha \wedge \alpha \operatorname{coff} \xi$

$\overline{\tau}(\alpha) = \min_{\xi} \alpha \operatorname{coff} \xi$

tu S prolazi svima skupovima rednih brojeva $< \alpha$ za koje je

$$\alpha = sup\, S.$$

[1]) Više o tom v. teorem 15.1.1.1

Tako na pr. stavljajući

$$\omega_0^{\omega_0} = \sup_{n \angle \omega_0} \omega_0^n,$$

očigledno je

$$\tau(\omega_0^{\omega_0}) = \omega_0.$$

Lema 14.6.1. *Za svaki redni broj* α *važi* $\tau(\alpha) \leqslant \alpha$.

Stvar je jasna za $\alpha = 0$ ili za brojeve prve vrste. No, ako je α broj druge vrste, tada znamo, da je skup $(-\infty, \alpha)_0$ najopsežniji skup S rednih brojeva $< \alpha$ za koji je $\alpha = \sup S$; dakle je

$tS \leqslant t(-\infty, \alpha)_0 =$ (po osnovnoj jednakosti 14.3.5) $= \alpha$ t. j.

$tS \leqslant \alpha$; odakle također

$\inf_S t(S) \leqslant \alpha$ dakle $\tau(\alpha) \leqslant \alpha$.

Definicija 14.6.2. Redni broj α jest *regularan* (pravilan), ako je $\tau(\alpha) = \alpha$; ako je $\tau(\alpha) < \alpha$, redni broj α zvat ćemo *iregularnim (nepravilnim).*

Prema tome, 0, i svaki redni broj prve vrste su regularni brojevi.

Lema 14.6.2. *Za svaki redni broj* α, *broj* $\tau(\alpha)$ *je regularan.*

$$\tau(\tau(\alpha)) = \tau(\alpha). \tag{14.6.3}$$

Stvar je očigledna, ako je $\alpha = 0$ ili broj prve vrste. Ako je pak broj α druge vrste, jasno je, da je i $\tau(\alpha)$ druge vrste.

Neka je

$$s_0 < s_1 < \ldots < s_\xi < \ldots, \quad (\xi < \tau(\alpha)) \tag{14.6.4}$$

dobro uređen skup rednih brojeva $< \alpha$ za koje je

$$\sup_\xi s_\xi = \alpha, \quad (\xi < \tau(\alpha)). \tag{14.6.5}$$

Isto tako, neka je

$$a_0 < a_1 < \ldots < a_\zeta < \ldots, \quad \zeta < \tau(\tau(\alpha))) \tag{14.6.6}$$

dobro uređen skup brojeva $< \tau(\alpha)$ za koje je

$$\sup A = \sup_\zeta a_\zeta = \tau(\alpha). \tag{14.6.7}$$

To znači da je

$$s_{a_\zeta} < \alpha \text{ za svaki } \zeta < \tau(\tau(\alpha)),$$

a radi (14.6.5), (14.6.6) i (14.6.7) izlazi odatle

$$\sup_\zeta s_{a_\zeta} = \alpha, \quad (\zeta < \tau(\tau\ \alpha)).$$

Po samom značenju broja $\tau(\alpha)$ to znači, da je

$$\tau(\tau(\alpha)) \geqslant \tau(\alpha).$$

Ta relacija zajedno sa sadržinom leme 14.6.1 daje traženu jednakost (14.6.3)

§ 14.7. **Princip transfinitne indukcije** za redne brojeve sastoji se u ovome zaključivanju:

Pretpostavke:

I. *Ako je neka tvrdnja istinita za početni broj 0;*

II. *Ako nadalje iz istinitosti iste tvrdnje za sve redne brojeve* $< \alpha$ *slijedi, da ona važi i za sam redni broj* α;

Zaključak: *Onda ista tvrdnja važi za svaki redni broj.*

U obrnutom naime slučaju, bio bi bar jedan redni broj, a time i *najmanji* redni broj, recimo β za koji tvrdnja o kojoj je riječ nije ispravna. No, $\beta > 0$ jer prema I. tvrdnja je istinita za broj 0. Znači, da bi bilo $\beta > 0$ i da bi tvrdnja bila istinita za svaki redni broj $< \beta$; no baš to, prema uslovu II., znači, da je tvrdnja istinita i za sam broj β, protivno pretpostavci.

Primjene principa transfinitne indukcije su goleme.

§ 14.7.1. **Burali-Fortijev paradoks.** *Ne može se govoriti o skupu svih rednih brojeva,* jer kad bi takav skup, nazovimo ga

$$O$$

postojao, bio bi on dobro uređen, pa bi

$$tO$$

bio određen redan broj, dakle $tO \in O$. No, prema, osnovnoj jednakosti (14.3.5), bilo bi

$$t(-\infty, t(O))_O = t(O),$$

što znači, da bi dobro uređeni skup O bio sličan sa svojim pravim početnim komadom $(-\infty, t(O))_O$, a to je prema teoremu 12.1.1 nemoguće.

Tako smo prvi put naišli na razred elemenata — razred O svih rednih brojeva — koji nije nikakav određen skup. Tek početni pravi komadi od O i njihovi dijelovi jesu skupovi rednih brojeva.

§ 14.8. **Elementarna pravila o računanju s rednim brojevima.**

§ 14.8.1. **Zbrajanje rednih brojeva.**

Lema 14.8.1.1. *Doda li se zdesna rednom broju* α *jedinica, dobije se naredni viši redni broj* $\alpha + 1$:

$$\alpha < \alpha + 1, (\alpha, \alpha + 1)_0 = v. \tag{14.8.1.1}$$

Stvarno, ako se iza dobro uređena skupa A stavi jednočlan skup $\{j\}$ koji ne leži u A, postat će time A pravim početnim komadom dobro uređena skupa $t(A) + t\{j\}$ pa je dakle

$$tA < tA + t\{j\} \equiv tA + 1$$

Očito je $tA + 1 \leq tB$ za svaki $tA < tB$.

Posljednja naime nejednakost znači, da je A sličan s pravim početnim komadom $\varphi(A) \subset B$; ako tada elementu j iz $A \cup \{j\}$ pridružimo prvi element p iz $B \setminus \varphi(A)$, preslikat će se time, na izomorfan način, uređena suma $tA + t\{j\}$ na početni komad $\varphi(A) \cup \{p\}$, a to baš i znači da je $tA + t\{j\} \leqslant tB$.

Lema 14.8.1.2. *Dodavanje jedinice s lijeve strane ma kojem transfinitnom rednom broju ne mijenja rezultata t. j.*

$$\text{iz } \alpha \geqslant \omega_0 \text{ slijedi } 1 + \alpha = \alpha.$$

Naprotiv, $\quad$ iz $\alpha < \omega_0$ *slijedi* $1 + \alpha > \alpha$.

Ako je naime broj α realizovan dobro uređenim skupom A, obrazujmo uređenu sumu $t\{j\} + tA$ rednog broja $1 + tA$. Taj je skup sličan sa A, ako je A beskonačan. Stvarno, obrazujmo preslikavanje:

$$\varphi(x), \ (x \in \{j\} \cup A) \text{ ovako:}$$

$\varphi(j) =$ prvi član u A;

ako ispred x ima u A neizmjerno mnogo članova, stavit ćemo $\varphi(x) = x$;

ako je $x \in A$, a ispred x ima *konačno mnogo* članova, $\varphi(x)$ će značiti prvi element iz A koji je desno od x. $\varphi(x) = x+1$

Naravno, preslikavanje φ je određeno jednoznačno i odmah se vidi, da ono vrši slično preslikavanje između skupova $t\{j\} + tA$ i A. A to i kaže lema 14.8.1.2. Ako je pak A konačan, konačan je i $\{j\} \cup A$ pa su A i $\{j\} \cup A$ čak različitih kardinalnih brojeva (v. teorem 5.3.1), a kamoli, da ne bi bili različitih rednih brojeva.

Lema 14.8.1.3. *Za svaki transfinitni redni broj* α vrijedi

$$1 + \alpha \neq \alpha + 1.$$

To je neposredna posljedica dviju posljednjih lema.

Teorem 14.8.1.1. (izotonija za dodavanje s lijeve strane). *Doda li se nejednakim rednim brojevima s lijeve strane isti redni broj, dobit će se opet nejednaki redni brojevi:*

$$\text{iz } \beta < \gamma \text{ slijedi } \alpha + \beta < \alpha + \gamma \tag{14.8.1.2}$$

za sve redne brojeve α.

(Izotonija za zbrajanje zdesna ne važi općenito, jer na pr. ma da je $1 < 2$ ipak je $1 + \omega = 2 + \omega = \omega$).

Ako su A, B, C, ma kakvi dobro uređeni skupovi,[1] onda $tB < tC$ znači, da je B sličan sa pravim početnim komadom $\varphi(B) \subset C$. Stavi li se A ispred B, a onda također ispred C, dobit ćemo $tA + tB$ i $tA + tC$;

---

[1] Možemo bez ograničenja smatrati, da oni dva po dva nemaju zajedničkih točaka.

očito, $tA + tB$ je sličan sa pravim početnim komadom $tA + t\varphi(B)$ uređene sume $tA + tC$; a to znači, da je

$$tA + tB < tA + tC$$

što je samo formalno različito od tražene nejednakosti (14.8.1.2).

Korolar 14.8.1.1. *Ako se nekom rednom broju* α *doda zdesna pozitivan redni broj, suma je veća od polaznog broja* α *t. j. iz* $\beta > 0$ *slijedi* $\alpha + \beta > \alpha$.

§ 14.8.2. **Oduzimanje rednih brojeva.** Znamo, da imamo oduzimanje spočetka (slijeva) i oduzimanje skraja (zdesna);

$$-tA + tB$$

se dobije kad se od B ukloni *početni* komad sličan sa A; analogno $tB - tA$ se dobije, kad se od B ukloni *završni* komad sličan sa A.

Lema 14.8.2.1. *Oduzimanje spočetka manjeg ili jednakog broja uvijek je i jednoznačno moguće t. j. za redne brojeve* α, γ *relacija* $\alpha \leq \gamma$ *povlači da je*

$$-\alpha + \gamma \tag{14.8.2.1}$$

jednoznačno određen redni broj i da zadovoljava:

$$\alpha + (-\alpha + \gamma) = \gamma.$$

Stvarno, ako je $tA = \alpha$, $tC = \gamma$, onda relacija $\alpha \leq \gamma$ znači, da je A sličan s određenim poč. komadom $\varphi(A) \subseteq C$. Preostatak $C \setminus \varphi(A)$ je dobro uređen skup i njegov redni broj ξ zadovoljava jednakost

$$\alpha + \xi = \gamma; \text{ k tome je } C \setminus \varphi(A) = v$$

jedino onda, kad je $\alpha = \gamma$. No ta jednakost nema dva različita rješenja ξ_1, ξ_2, jer bi inače bilo također

$$\alpha + \xi_1 = \alpha + \xi_2. \tag{14.8.2.2}$$

Prema teoremu 14.3.1 slijedilo bi odatle ili $\xi_1 < \xi_2$ ili $\xi_1 > \xi_2$. U prvom slučaju, postojao bi bar jedan redan broj $\eta > 0$ za koji je $\xi_1 + \eta = \xi_2$, Na osnovu toga, jednakost (14.8.2.2) bi postala

$$\alpha + \xi_1 = \alpha + (\xi_1 + \eta) \quad \text{t. j.}$$

$$\alpha + \xi_1 = (\alpha + \xi_1) + \eta, \ \eta > 0,$$

u protivnosti sa lemom 14.8.1.1.

Permutirajući indekse 1 i 2, dokazuje se da ne može biti $\xi_1 > \xi_2$.

Lema 14.8.2.2. Iz $\alpha < \beta < \gamma$ izlazi

$$-\alpha + \beta < -\alpha + \gamma.$$

U obrnutom slučaju, bilo bi $-\alpha+\beta \geqslant -\alpha+\gamma$, odakle, dodajući spočetka α, prema teoremu 14.8.1.1, izlazi

$$\alpha+(-\alpha+\beta) \geqslant \alpha+(-\alpha+\gamma), \quad \text{t. j.} \quad \alpha \geqslant \gamma,$$

protivno pretpostavci da je $\alpha < \gamma$.

Oduzimanje zdesna je mnogo zamršenije; ovo nije vazda izvedivo niti onda, kad je suptrahend manji od minuenda. Specijalno ima brojeva > 0 od kojih se zdesna ne može oduzeti jedinica (brojevi druge vrste; na pr. ω): to su redni brojevi što pripadaju dobro uređenim skupovima bez zadnjeg elementa. Dok je $-\alpha+\alpha=0$ vazda, dotle $\alpha-\alpha$ može imati više različitih značenja. Na pr. $\omega-\omega$ može biti ma koji broj $< \omega$ (to se drukčije iskazuje tako da je $\alpha+\omega=\omega$ za svaki $\alpha < \omega$).

Lema 14.8.2.3. *Ako desna diferencija dvaju brojeva postoji, a suptrahend je pozitivan, vazda je ona manja od minuenda,* t. j. ako $\alpha-\beta$ postoji, a k tome je $\beta > 0$, tada je $\alpha-\beta < \alpha$.

Inače bi naime bilo $\alpha-\beta \geqslant \alpha$ dakle, prema teoremu 14.8.1.1, dodajući zdesna β:

$$(\alpha-\beta)+\beta \geqslant \alpha+\beta \quad \text{t. j.} \quad \alpha \geqslant \alpha+\beta,$$

protivno korolaru 14.8.1.1.

§ 14.8.3. **Množenje rednih brojeva.** Produkt rednih brojeva definirali smo (§ 14.2) ovako:

$$tA \cdot tB = \sum_{x \in B} tA$$

t. j. to je redni broj koji pripada uređenom skupu što se dobije kad svaki element x dobro uređena skupa B „nadomjestimo" dobro uređenim skupom A ili kojim drugim sličnim sa A.

Teorem 14.8.3.1. *Ako su A i B dobro uređeni skupovi, pa kombiniran produkt $B \times A$ uredimo alfabetski (leksikografski)*[1]*, dobit će se dobro uređen skup rednog broja $tA \cdot tB$; kraće rečeno:*

$$t(B \times A) \equiv tA \cdot tB.$$

Tako na pr.

$$t(\{1<2<3\} \times \{2,7\}) = t\{(2,1),(2,2),(2,3);(7,1),(7,2),(7,3)\} = 6.$$

Stvarno, označimo li za pojedini $b \in B$ sa

$$\{b\} \times A$$

skup svih (b, a), $(a \in A)$ uređen leksikografski, tada je skup $\{b\} \times A$ sličan sa A, jer dodjeljivanje elementu $a \in A$ elementa (b, a) je sličnost.

---

[1]) To znači da je (b, a) ispred (b', a') u $B \times A$ onda i samo onda kad je ispunjen jedan od uslova: b ispred b' u B ili
$b = b'$, a ispred a' u A.

No, očito je

$$B \times A = \sum_{b \in B} \{b\} \times A; \quad \text{odatle}$$

$$t(B \times A) = \sum_{b \in B} t(\{b\} \times A) = \sum_{x \in B} tA = tA \cdot tB.$$

Lema 14.8.3.1. *Za svaki dobro uređen skup S važi*

$$tS = \sum_{x \in S} 1 = 1 \cdot tS.$$

Lema 14.8.3.2. (Zakon distribucije slijeva) *Za redne tipove α, β, γ važi:*

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

(naprotiv zakon distribucije zdesna ne mora važiti; na pr. $(1 + 1)\omega$ nije $= 1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega = \omega + \omega$ jer je $\omega = 2\omega = (1 + 1)\omega < \omega + \omega = 1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega$).

Neka je $tA = \alpha$, $tB = \beta$, $tC = \gamma$, možemo uzeti, da su B i C bez zajedničkih točaka.

Promatrajmo rednu sumu

$$tB + tC;$$

kod nje je dakle B ispred C, „zamijenimo" li svaki $b \in B$ sa A i svaki $c \in C$ sa A, nastaju disjunktni uređeni skupovi

$$B \times A, \ C \times A$$

čija je unija očito $(B \cup C) \times A$; kako je skup $B \times A$ ispred $C \times A$, to je redna suma tih dvaju skupova

$$t(B \times A) + t(C \times A)$$

jednaka[1]) $\quad (tB + tC) \times A \quad$ dakle

$$t(B \times A) + t(C \times A) = (tB + tC) \times A$$

što s obzirom na teorem 14.8.3.1 daje traženu jednakost:

$$tA \cdot tB + tA \cdot tC = tA \cdot (tB + tC).$$

Lema 14.8.3.3. *Ako se nejednaki redni brojevi pomnože spočetka pozitivnim rednim brojem, dobiju se opet nejednaki brojevi:*

$$\text{iz } \beta < \gamma, \ \alpha > 0 \ \text{ slijedi } \ \alpha\beta < \alpha\gamma.$$

Naime zbog $\beta < \gamma$ postoji diferencija $\delta = -\beta + \gamma$, i svakako $\delta > 0$; tada jednakost $\gamma = \beta + \delta$ daje $\alpha\gamma = \alpha(\beta + \delta) =$ (po lemi 14.8.3.2) $= \alpha\beta + \alpha\delta$. No iz $\alpha > 0$ i $\delta > 0$ slijedi $\alpha\delta > 0$, pa po korolaru 14.8.1.1 izlazi $\alpha\beta + \alpha\delta > \alpha\beta$ a time i tražena nejednakost $\alpha\gamma > \alpha\beta$.

Lema 14.8.3.4. Ako je $\alpha > 1$, $\beta > 1$,

tada je $$\alpha\beta > \alpha, \ \alpha\beta \geqslant \beta$$

(da u zadnjoj relaciji može biti i znak $=$, pokazuje primjer $2\omega = \omega$).

---

1) Imaj na umu da je $tB + tC$ skup $B \cup C$ uređen na način da B sa svojim zadanim uređenjem stoji ispred C sa svojim zadanim uređenjem.

Dokažimo prvu nejednakost. Iz $\beta > 1$ slijedi, da je diferencija $-1+\beta$ jednoznačno određen pozitivan broj; zbog jednakosti $\beta = 1 + (-1+\beta)$ imamo:
$\alpha\beta = \alpha(1+(-1+\beta)) =$ (radi distribucije) $= \alpha \cdot 1 + \alpha(-1+\beta) = \alpha +$ pozitivan broj $\alpha(-1+\beta)$ a to je $> \alpha$ prema korolaru 14.8.1.1.

T e o r e m 14.8.3.2. (n e p r e k i d n o s t d o d a v a n j a s p o č e t k a i m n o ž e n j a s p o č e t k a) *Ako je S ma kakav skup pozitivnih rednih brojeva, tada je*

$$\sup_{\sigma} (\alpha + \sigma) = \alpha + \sup_{\sigma} \sigma, \quad (\sigma \in S) \tag{14.8.3.1}$$

$$\sup_{\sigma} \alpha\sigma = \alpha \sup_{\sigma} \sigma, \quad (\sigma \in S) \tag{14.8.3.2}$$

Dokažimo na pr. drugu jednakost. Sjetimo se najprije, da smo

$$\sup_{\sigma \in S} \sigma \quad \text{odn.} \quad \sup S$$

definirali kao *najmanji* redni broj $\geqslant \sigma$, za svaki $\sigma \in S$. Prema tome,

$$\sigma \leqslant \sup S, \quad (\sigma \in S).$$

Odatle
$$\alpha\sigma \leqslant \alpha \sup S, \quad (\sigma \in S).$$

Ako je $\sup S \in S$, onda je $\sup S$ najveći element u skupu S dakle $\alpha \sup S$ najveći u skupu svih $\alpha\sigma$, $(\sigma \in S)$, pa je time relacija (14.8.3.2) dokazana.

Ako pak broj $\sup S$ nije sadržan u S, onda to znači, da u skupu S nema najvećeg broja, a odatle dalje, da niti u skupu αS svih $\alpha\sigma$, $(\sigma \in S)$ nema najvećeg broja (kad bi naime u αS postojao najveći broj, recimo $\alpha\mu$ bio bi onda μ najveći u S). Treba pokazati, da za svaki $\beta < \alpha \sup S$ postoji bar jedan $\sigma \in S$ sa svojstvom $\beta < \alpha\sigma < \alpha \sup S$; u obrnutom naime slučaju bilo bi $\alpha\sigma \leqslant \beta$, $(\sigma \in S)$, pa dakle i $\alpha \sup S \leqslant \beta$ protivno pretpostavci, da je

$$\beta < \alpha \cdot \sup S.$$

Kao primjenu relacije (14.8.3.2) dokažimo, da je $3\omega = \omega$. Stvarno,

$$3\omega = 3 \sup_{n<\omega} n = (\text{po } 14.8.3.2) = \sup_{n<\omega} 3n = \omega.$$

§ 14.8.4. **Pojam nepotpunog kvocijenta.** Znamo, da svakom uređenom paru cijelih brojeva a, b, od kojih je drugi $\neq 0$ (0 kao divizor isključena!) pripada jedan jedini par cijelih brojeva q i r, tako da bude

$$a = bq + r \text{ i k tomu } 0 \leqslant r < |b|.$$

Toj *osnovnoj lemi za dijeljenje cijelih brojeva* odgovara kod rednih brojeva ovaj

T e o r e m 14.8.4.1. *Svakom uređenom paru α, β rednih brojeva, od kojih je drugi* $\neq 0$. (0 kao divizor isključena!) *odgovara jedan jedini* *uređeni par rednih brojeva* $\varkappa$ (nepotpun kvocijent) i ϱ (ostatak), *tako da bude*

(14.8.4.1) $\alpha = \beta\varkappa + \varrho$ i k tome

(14.8.4.2) $0 \leqslant \varrho < \beta$;

Riječima: *nanoseći* $\varkappa$ *puta broj* β *i dodajući* ϱ *izlazi* α.

Dokažimo najprije da važi

Lema 14.8.4.1. *Svaki redni broj nalazi se u jednom i samo jednom slijeva zatvorenom intervalu*

(14.8.4.3) $[\beta\varkappa, \beta(\varkappa+1))_\varkappa$.

Stvarno, lema je istinita za broj 0, jer je 0 sadržana u $[\beta\cdot 0=0, \beta)$ i ni u kojem drugom skupu oblika (14.8.4.3). Dokažimo da je lema istinita i za broj $\alpha > 0$, čim je ona istinita za sve brojeve $< \alpha$. Ako je α prve vrste, tada broj $\alpha - 1$ postoji, a kako je on $< \alpha$, lema je istinita za broj $\alpha - 1$; pa neka je $\alpha - 1$ član poluzatvorenog intervala $[\beta\varkappa, \beta(\varkappa+1))$; ako $\alpha - 1$ nije zadnji broj u tom slijeva zatvorenom intervalu, onda je i broj α kao neposredno veći broj od $\alpha - 1$ također u istom slijeva zatvorenom intervalu. Ako je pak $\alpha - 1$ zadnji član u gornjem poluzatvorenom intervalu, tada je broj α kao broj $(\alpha - 1) + 1$ jednak $\beta(\varkappa+1)$ i dakle $\alpha \in [\beta(\varkappa+1), \beta(\varkappa+2))$.

Ako je pak α druge vrste, pa ako stavimo

$$\varkappa_0 = \sup_\varkappa \varkappa$$

pri čemu $\varkappa$ prolazi kroz sve redne brojeve za koje je $\beta\varkappa < \alpha$, bit će

$$\beta\varkappa_0 = \beta \sup_\varkappa \varkappa \text{ (gl. teorem 14.8.3.2) } = \sup_\varkappa \beta\varkappa \leqslant \alpha,$$

dakle $$\beta\varkappa_0 \leqslant \alpha.$$

No, $\alpha < \beta(\varkappa_0 + 1)$; u obrnutom naime slučaju bilo bi $\beta(\varkappa_0 + 1) \leqslant \alpha$, pa bi $\varkappa_0 + 1$ bio jedan od gornjih $\varkappa$ t. j. bilo bi $\varkappa_0 + 1 \leqslant \varkappa_0$ što je po lemi 14.8.1.1 nemoguće.

Time je lema 14.8.4.1 na osnovu principa transfinitne indukcije potpuno dokazana.

Ukratko, potpuno je određen broj $\varkappa$ (nepotpun kvocijent brojeva α i β), tako da bude

$$\beta\varkappa \leqslant \alpha < \beta(\varkappa + 1) = \beta\varkappa + \beta.$$

Odbijajući odatle slijeva $\beta\varkappa$ izlazi:

$$0 \leqslant -\beta\varkappa + \alpha < -\beta\varkappa + (\beta\varkappa + \beta) \quad \text{t. j.}$$

$$0 \leqslant -\beta\varkappa + \alpha < \beta.$$

Stavljajući
$$\varrho = -\beta\varkappa + \alpha$$
broj ϱ je potpuno određen. Na taj način dokazana je: i egzistencija i jednoznačnost brojeva $\varkappa$ i ϱ o kojima se govori u teoremu 14.8.4.1.

§ 14.8.5. **Parni i neparni redni brojevi.** Ako u teoremu 14.8.4.1 uzmemo $\beta = 2$, tada je $\varrho =$ ili 0 ili 1; prema tome, vrijedi

Korolar 14.8.5.1. *Svaki redni broj* (pa bio on konačan ili beskonačan) *oblika je*
$$\text{ili} \quad 2\cdot\varkappa^{1)} \quad \text{ili} \quad 2\cdot\varkappa + 1$$

Brojevi oblika $2\varkappa$ zovu se *parni*, a brojevi oblika $2\varkappa + 1$ zovu se *neparni*. Specijalno, *o* i svaki broj druge vrste jesu parni; tako na pr. ω, $\omega + \omega$, $\alpha\omega$ su parni brojevi, jer $\alpha\omega$ ne može biti oblika $2\varkappa + 1$ ni za koji redan broj α.

§ 14.8.6. **Stepenovanje (potenciranje) rednih brojeva.** Ako su α, β dva redna broja, tada se stepen ili potencija
$$\alpha^\beta$$
definira induktivno ovako:
$$\alpha^0 = 1 \text{ za svaki redni broj } \alpha \geqslant 0;^{2)}$$
ako je β proizvoljan broj > 0, tako da je α^ξ definirano za svaki $\xi < \beta$, tada se definira
$$\alpha^\beta = \alpha^{\beta-1}\cdot\alpha \quad \text{odnosno}$$
$$\alpha^\beta = \sup_{\xi<\beta} \alpha^\xi$$
već prema tome, da li je β broj prve ili druge vrste.

Induktivno se lako dokazuje, da za stepenovanje važe ova dva uobičajena pravila:

(14.8.6.1) $$\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$$

(14.8.6.2) $$(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}.$$

Naprotiv, obrazac $\alpha^\gamma\cdot\beta^\gamma = (\alpha\beta)^\gamma$ općenito ne važi, jer za množenje rednih brojeva ne mora važiti komutativan zakon. Tako na pr. ne mora vazda biti
$$\alpha\alpha\beta\beta = \alpha\beta\alpha\beta.$$

§ 14.8.7. **Redni brojevi druge vrste.**

Teorem 14.8.7.1. *Nuždan i dovoljan uslov, da redan broj bude druge vrste jest da je on lijevostrani pozitivni višekratnik broja ω t. j. oblika* $\omega\varkappa$ sa $\varkappa > 0$.

1) Ne miješaj sa $\varkappa\cdot 2$!

2) Prema tome, 0^0 shvaćeno kao redni broj ima vrijednost 1.

Uzmemo li naime broj ω za lijevi divizor, tada prema teoremu 14.8.4.1 svakom broju α pripadaju određeni brojevi $\varkappa$ i ϱ sa svojstvom da je:

(14.8.7.1) $$\alpha = \omega\varkappa + \varrho, \; 0 \leqslant \varrho < \omega.$$

Ako je α druge vrste t. j. ako ne postoji $\alpha - 1$, onda naravno ne može biti $\varrho > 0$, jer bi $\omega > \varrho > 0$ značilo da je ϱ prirodan broj, pa bi redni broj $\alpha - 1 = \omega\varkappa + (\varrho - 1)$ postojao. Dakle je $\varrho = 0$, što prema (14.8.4.2) znači da je α oblika $\omega \cdot \varkappa$. Očigledno važi i obrat, da je $\omega\varkappa$ za $\varkappa > 0$ broj druge vrste; broj naime $\omega\varkappa$ nastaje tako da se ω uzme $\varkappa$ puta kao sumand Kako ω nema neposrednog prethodnika, neće ga imati ni broj $\omega\varkappa$.

Time su nabrojana najvažnija računska svojstva rednih brojeva. Naravno, da ima još mnogo drugih (i otkrivenih i neotkrivenih!).

§ 14.9. **Rekurzivno (postepeno) izvođenje rednih brojeva.** Prema osnovnom teoremu 14.3.2, za svaki redni broj α, skup $(-\infty, \alpha)_0$ svih rednih brojeva $< \alpha$ jest dobro uređen skup i redni mu je broj α t. j.

(14.9.1) $$t(-\infty, \alpha)_0 \equiv \alpha$$

za svaki redni broj.

No, skup $(-\infty, \alpha)_0$ je određen početni komad rednih brojeva [1]; zato je prirodno, da svaki početni komad K rednih brojeva promatramo kao redan broj tK. Važi:

Osnovni teorem 14.9.1. *Svaki početni komad K rednih brojeva jest dobro uređen skup, pa shvaćen kao redni broj tK, on je najmanji redni broj koji je veći od svakog rednog broja iz K, jer važi osnovna rekurzivna jednakost:*

(14.9.2) $$K \equiv (-\infty, tK)_0.$$

Očito, jednakost (14.9.2) znači isto što i ekvivalentnost relacije

(14.9.3) $$\alpha \in K \quad \text{s relacijom}$$

(14.9.4) $$\alpha < tK.$$

Dokažimo dakle da iz (14.9.3) slijedi (14.9.4) i obrnuto.

Najprije, iz (14.9.3) slijedi

$$(-\infty, \alpha)_0 \subset K,$$

(jer je K poč. komad brojeva); odatle

$$t(-\infty, \alpha)_0 < tK$$

što prema osnovnom obrascu (14.9.1) odn. (14.3.5) znači upravo (14.9.4).

[1]) Pod početnim komadom rednih brojeva razumijevamo prazan skup kao i svaki nepust skup K rednih brojeva koji ima svojstvo da iz $\alpha \in K$ slijedi $(-\infty, \alpha)_0 \subset K$.

Ostaje, da (14.9.3) izvedemo iz (14.9.4). Kad to ne bi bilo istina, onda bi postojao broj α sa svojstvom (14.9.4), a da ne zadovoljava (14.9.3); dakle: — K je poč. komad — α bi dolazio iza čitavog K t. j. bili bi

$K \subseteq (-\infty, \alpha)_0$; odatle

$tK \leqslant t(-\infty, \alpha)_0 =$ po osnovnoj relaciji (14.3.5) $= \alpha$ t. j.

$tK \leqslant \alpha$ protivno pretpostavci (14.9.4).

Osnovni teorem 14.9.1 omogućava nam da postepeno definiramo redne brojeve (nulu, konačne i transfinitne) evo ovako:

$$0 \equiv tv,\ 1 \equiv t\{0\},\ 2 \equiv t\{0,1\}, \ldots n+1 \equiv t\{0,1,\ldots n\}, \ldots, \omega_0 \equiv t\{0,1 \ldots n \ldots\}$$

$$\omega + 1 \equiv t\{0, 1, \ldots n,\ n+1, \ldots \omega\}$$

$$\alpha + 1 \equiv t\{0, 1, 2 \ldots \alpha\} \quad \text{za svaki već definirani } \alpha;$$

$$\omega_1 \equiv t\{0, 1, \ldots \omega_0, \omega_{0+1}, \ldots \alpha, \ldots\} \ (k\alpha \leqslant \aleph_0)^{1)};$$

pri tome α po redu prolazi svima rednim brojevima od kojih je svaki najviše prebrojiv.

. . . .

$$\omega_1 + \omega \equiv t\{0, 1, 2, \ldots \omega, \ldots \omega_1, \omega_1 + 1, \ldots \omega_1 + n, \omega_1 + n + 1, \ldots\}$$

. . . .

$$\omega_2 \equiv t\{0, 1, 2, \ldots \alpha, \ldots\},\ (k\alpha \leqslant k\omega_1)$$

i t d. i t. d. (više o tome u § 15).

§ 14 10. **Transfinitno prebrojavanje (numeriranje).** Kad već imamo izgrađene redne brojeve, postavlja se problem da ih ogledamo najprije u onoj ulozi u kojoj se brojevi prvobitno i javljaju. Radi se o *prebrojavanju* predmeta. Jer, šta znači prebrojavati stado ovaca ili skup predmeta? Znači na obostrano jednoznačan način pridjeljivati ovcama odnosno predmetima pojedine redne brojeve! Zato neka važi ova

§ 14 10.1. **Definicija prebrojavanja skupa** S. Svako obostrano jednoznačno preslikavanje skupa S — pa bio ovaj uređen ili ne — na pojedini skup rednih brojeva zove se *prebrojavanje* ili *numeriranje skupa* S; prebrojavanje je *konačno* ili *beskonačno* (transfinitno) već prema tome, da li je skup S (a time i skup rednih brojeva utrošenih za prebrojavanje) konačan ili beskonačan. U dnevnom životu, obično se služimo brojevima 1, 2, 3, . . . za prebrojavanje (numeraciju). Ali se nekad služimo neparnim odn. parnim brojevima, tako na pr. oznaka kuća na jednoj strani gradske ulice vrši se samo parnim ili samo neparnim brojevima. Ipak je zgodno da se numeracija vrši tako da se utroši uvijek po neki početni komad rednih brojeva.

---

1) Sjeti se da kx znači kardinalni broj od x.

Pođimo od proizvoljna puna skupa S dakle $S \supset v$; dovedimo bilo koji njegov element u vezu sa brojem o i označimo ga sa s_0; ako je skup $S \setminus \{s_0\}$, prazan, prebrojavanje skupa S je završeno; ako pak S ima osim s_0 još i drugih elemenata, neka je s_1 bilo koji među njima. Uopće, ako je $\alpha > 0$ izvjestan redan broj, pa ako su svi brojevi $\xi < \alpha$ već utrošeni za oznaku elemenata

$$s_\xi, \ (\xi < \alpha)$$

skupa S, onda je time ili numeracija završena t. j. skup

$$S \setminus \{s_0, s_1, \ldots, s_\xi, \ldots\}, \ (\xi < \alpha) \tag{14.10.1.1}$$

prazan ili taj skup nije prazan, pa prebrojavanje nije dovršeno; u tome slučaju broj α će se utrošiti tako da sa

$$s_\alpha \tag{14.10.1.2}$$

označimo bilo koji predmet iz skupa (14.10.1.1).

Proces numeriranja skupa S može se shematizirati ovako: ako se tokom razmatranja pojavio bilo koji dio

$$v \subset X \subseteq S \text{ označimo sa} \tag{14.10.1.3}$$

$$R(X) \text{ ili } RX \tag{14.10.1.4}$$

bilo koji element iz x (ako je X ma koji istaknut element, možemo njega označiti sa RX; tako na pr. ako je X dobro uređen, prirodno je, da za RX uzmemo početni element od X). Imamo sada ovu rekurziju:

Da počnemo, stavimo

$$s_0 = RS; \tag{14.10.1.5}$$

ako je $\alpha > 0$ bilo koji redni broj tako da je početni komad $(-\infty, \alpha)$ rednih bojeva $< \alpha$ već utrošen za signiranje različitih elemenata

$$s_0, s_1, \ldots\ldots s_\xi, \ldots\ldots, (\xi < \alpha) \tag{14.10.1.6}$$

skupa S, tada nastupa ova dilema: ili je skup

$$S \setminus \{s_0, s_1, \ldots, s_\xi, \ldots), \ (\xi < \alpha) \tag{14.10.1.7}$$

prazan ili on nije prazan. U prvom slučaju proces prebrajanja skupa S smatra se završenim, jer je S iscrpljen skupom (14.10.1.6); u drugom slučaju, proces ćemo nastaviti, tako da stavimo

$$s_\alpha = R(S \setminus \{s_0, \ldots, s_\xi, \ldots\}) \tag{14.10.1.8}$$

i time također utrošimo redni broj α kao indeks.

§ 14.10.2. **Problem dobrog uređenja skupova. Zermelov aksiom.** Postavlja se pitanje, da li će se gornji proces prebrajanja ikada završiti? T. j. da li postoji redni broj α tako da svi elementi skupa S nužno budu sadržani u skupu (14.10.1.6)?

Sam Cantor je to smatrao nužnim misaonim zakonom *(Denkgesetz)* pa je to iskazivao riječima *da se svaki skup S može dobro urediti.* Stvarno, ako se skupom (14.10.1.6) zbilja iscrpljuje čitav S, može se S odmah *dobro urediti* na pr. tako da preslikavanjem

(14.10.2.1) $$s_\xi, \ (\xi < \alpha),$$

uređaj sa $(-\infty, \alpha)_0$ prenesemo na skup S i smatramo da bude

(14.10.2.2) $$s_\xi \text{ ispred } s_{\xi'},$$

u S, onda i samo onda ako je $\xi < \xi' < \alpha$.

Zermelo je 1904. dokazao, *da se svaki skup može dobro urediti (pa dakle i prebrojiti finitno ili transfinitno), ukoliko prihvatimo ovaj*

Zermelov aksiom. *Ako je M bilo kakva množina disjunktnih punih skupova tada postoji skup*

(14.10.2.3) $$\Pi \ \textit{odnosno} \ \Pi(M)$$

koji iz svakog skupa $S \in M$ sadrži jedan jedini element.[1])

Zermelov aksiom zove se i *aksiom izbora*, jer skup Π o kojem je riječ možemo zamisliti i tako obrazovanim, da iz svakog skupa $S \in M$ *izaberemo* jednu jedinu točku RS i da onda sa Π označimo skup svih istaknutih elemenata RS, $(S \in M)$.

Zermelov aksiom zove se i *aksiom množenja*, jer on osigurava da t. zv. direktni produkt

$$\prod_S S, \ (S \in M)$$

sadrži bar jedan element.

Vidjet ćemo (§ 15.4), da je Zermelov aksiom ekvivalentan s hipotezom, da za svaka dva različita kardinalna broja možemo reći da li je jedan od njih veći ili manji od drugoga (sjeti se da se slična izreka za ordinalne brojeve može dokazati; isp. teorem 14.3.1). Kad se aksiom izreče u toj formi pa kad se zna, kako se lako mogu obrazovati obostrano jednoznačne transformacije skupova, da pripadne invarijante mogu biti i neuporedljive, onda se mora držati da Zermelov aksiom unosi znatno ograničenje u matematiku. Nekoja atomska te biološka istraživanja ukazuju nam da odnos skup element nije uvijek određen, pa da se može zamisliti i takav nepusti „skup", a da ne možemo zamisliti nikakav određen „element" toga skupa (problem „premazanih" struktura).

Svakako, Zermelov aksiom unosi znatno pojednostavljenje u najopćenitijoj matematici. Ali, sa druge strane, on daje takove mogućnosti

---

1) Taj je aksiom izazvao mnogo diskusija

konstrukcija od kojih u klasičnoj matematici nema ni traga. To pokazuje već ova

Dva primjera za upotrebu Zermelova aksioma.

Primjer 14.10.2.1. Razbijmo zatvoreni interval $[0, 1]$ realnih brojeva na klase brojeva stavljajući u istu klasu sve brojeve iz $[0, 1]$ kojima je razlika racionalna.

Očigledno, svaka je klasa prebrojiva. Zato samih klasa ima kontinuum mnogo; one su dvije po dvije bez zajedničkih točaka. Tada Zermelov aksiom omogućuje promatranje i takovih skupova Z koji sa svakom klasom imaju jedan jedini broj zajednički. Bez Zermelova aksioma,[1]) egzistencija takovih skupova Z ne može se dokazati. Inače, skup Z nema određene „mjere", u smislu teorije mjere. Koliko li je prema tome skup Z općenitiji od skupova što ih izučava klasična matematika ograničavajući se na najelementarnije skupove kao dužina, poligoni, pravilna tjelesa i t. d. koja možemo čak elementarno premjeriti.

Primjer 14.10.2.2. Izreći ćemo kao

Teorem 14.10.2.1. *Iz Zermelova aksioma proizlazi za svaki puni skup S egzistencija funkcije f koja svakom $v \subset A \subseteq S$ pridružuje izvjesnu točku $f(A) \in A$.*

Stvarno, za zadani $v \subset A \subseteq S$ označimo sa

$$\{A\} \times A \tag{14.10.2.4}$$

skup svih uređenih pari (A, a), $(a \in A)$. Naravno, za $A \neq B$, skupovi $\{A\} \times A$, $\{B\} \times B$ nemaju zajedničkih točaka. Prema tome množina M svih skupova

$$\{A\} \times A, \ (v \subset A \subseteq S) \tag{14.10.2.5}$$

je sastavljena od disjunktnih skupova. Promatrajmo tada pripadni skup $\Pi(M)$ iz (14.10.2.2) pa neka je

$$\{A\} \times f(A) \tag{14.10.2.6}$$

onaj jedini element što ga skup $\Pi(M)$ ima zajedno sa skupom

$$\{A\} \times A \in M.$$

Dobivena transformacija

$$f(A), \ (v \subset A \subseteq S) \tag{14.10.2.7}$$

zadovoljava uslovima teorema 14.10.2.1.

§ 14.10.3. **Problem prebrajanja (finitnog ili transfinitnog) bilo kojeg dobro uređenog skupa** S ne pruža nikakvih poteškoća[2]). Jer, označimo li za bilo koji $v \subset X \subseteq S$ sa RX početni element od X, i znajući

[1]) Ili kakvog drugog postulata koji je s njim ekvivalentan.

[2]) Ovo razmatranje je specijalan slučaj onog iz § 14.10.1.

da je tS potpuno određen redni broj, možemo prebrajanje (numeriranja) skupa S provesti na pr. ovako:

$$(14.10.3.1) \quad \begin{cases} & s_0 = RS \\ \text{za svaki } \alpha < tS & s_\alpha = R(S \setminus \bigcup_\xi \{s_\xi\}), \ (\xi < \alpha). \end{cases}$$

Osnovni teorem 14.3.2 i osnovna jednakost (14.3.5) tada osiguravaju, da je tako nastalo numeriranje

$$(14.10.3.2) \qquad s_\alpha, \ (\alpha < tS)$$

potpuno određena sličnost između skupova S i $(-\infty, tS)_0$.

Naravno, da ima i drugih prebrajanja skupa S. Tako na pr. ako pođemo od skupa prirodnih brojeva, pa nanižemo po veličini najprije 1 i sve proste brojeve 2, 3, 5, 7, 11.... pa onda po veličini sve produkte od po dva prosta broja, pa od po tri prosta broja i t. d., morat ćemo utrošiti sve brojeve $< \omega^2$, pa da tu numeraciju provedemo do kraja onim redom kako problem zahtijeva; na pr. prirodni broj $2 \cdot 2$ dobit će time rang ω, dok će prirodni broj 2^3 dobiti rang $\omega \cdot 2$, a broj 2^n rang $\omega \cdot (n-1)$: prema tome slijedeći broj t. j. član ranga $\omega \cdot (n-1) + 1$ bit će broj $2^{n-1} \cdot 3$.

§ 14.11. ZADACI.

§ 14.11.1. Dokaži, da za računanje sa *konačnim* rednim brojevima i sa rednim brojem 0 važe isti zakoni kao za računanje s kardinalnim brojem 0 i s prirodnim brojevima

§ 14.11.2. Dokaži jednakosti

$$1 + 1 + 1 + \ldots = \omega$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots = \omega$$

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots = \omega$$

$$\sup_{n<\omega} 2^n = \omega.$$

§ 14.11.3. $tR \cdot tR = tR$ (R = uređen skup racionalnih brojeva).

§ 14.11.4. Dokaži da je

$$tC \cdot tC > tC.$$

§ 14.11.5. Ako je λ tip uređenja linearnog kontinuuma, šta je $\lambda \cdot 2$, a što $2 \cdot \lambda$? Dokaži da je

$$\lambda \cdot 2 < 2 \cdot \lambda,$$

$$(\lambda + 1)\, \omega = \lambda,$$

$$(\lambda + 1)\, (\omega^* + \omega) = \lambda,$$

$$1 + \lambda = \lambda + 1, \text{ ma da nije } 1 + \lambda \equiv \lambda + 1.$$

§ 14.11.6. *Normalni oblik rednog broja* ξ; na osnovu teorema o diobi dokaži, da je svaki redni broj $\xi > 0$ moguće napisati u obliku

$$\xi = \omega^{\alpha_0} k_0 + \omega^{\alpha_1} k_1 + \ldots + \omega^{\alpha_{n-1}} k_{n-1};$$

pritom su $n, k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}$ prirodni brojevi, a $\alpha_0, \ldots \alpha_{n-1}$ redni brojevi sa svojstvom $\alpha_0 > \alpha_1 > \ldots > \alpha_{n-1} \geqslant 0$.

(Uputa: Takozvani stepen α_0 broja $\xi > 0$ odredi tako da bude $\omega^{\alpha_0} \leqslant \xi < \omega^{\alpha_0+1}$; broj k_0 se onda određuje iz jednakosti $\xi = \omega^{\alpha_0} k_0 + \varrho$ gdje je $0 \leqslant \varrho < \omega^{\alpha_0}$)

§ 14.11.7. Skupove $N_1\{1, 2, 3\}$ i $N_1\{1, 2\}$ uredi alfabetski i nađi sumu, lijevu i desnu diferenciju, produkt i stepen tih dvaju rednih brojeva.

§ 14.11.8. Skupom $\{1, 2, 3\}_1 N$ uređenom po principu zadnjih diferencija diferenciran je redni broj 3^ω; na osnovu toga dokaži, da je $3^\omega = \omega$.

§ 14.11 9. *(Funkcionalna definicija stepena rednih brojeva).* Ako su A, B dva dobro uređena skupa, neka je A^B skup sastavljen od konstantnog preslikavanja φ skupa B na početni element skupa A, te od svih jednoznačnih preslikavanja skupa B na skup A koja se od preslikavanja φ razlikuju tek u konačnom dijelu skupa B.

Skup A^B uredi po zadnjim diferencijama (antialfabetski) i dokaži da je

$$t(A^B) \equiv (t A)^{(tB)}$$

Konkretizirati a) $A = \omega$, $B = 4$

b) $A = \omega$, $B = \omega$.

§ 14.11.10. Na osnovu gornje definicije dokazati obrazac

$$\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma} \quad \text{i}$$

$$(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}.$$

§ 14.11.11. *(Opći produkt).* Ako je B dobro uređen skup, a g bilo kakvo preslikavanje skupa B tako da za svaki $b \in B$, $g(b)$ bude uređen skup, tada se kombinirani produkt

$$\prod_{b \in B} g(b)$$

skupova $g(b)$, $(b \in B)$ sastoji od svih jednoznačnih preslikavanja f skupa B tako da bude

$$f(b) \in g(b), \quad (b \in B).$$

Skup $\Pi\, g(b)$, $(b \in B)$ može se alfabetski urediti, pa se definira

$$t \prod_{b \in B} \varphi(b) = \prod_{b \in B^*} t\, \varphi(b)$$

(pažnja! faktori lijevo i desno od znaka = dolaze obrnutim redom!).

Specijalno se definira

$$t \prod_{b \in B} A \equiv \prod_{b \in B^*} t\, A \equiv (t\, A)^{(t B^*)}$$

Dokaži (kao primjer) da je $\omega^{\omega^*} \equiv t\,[0, 1)_C$.

§ 15. BROJEVNE KLASE. INICIJALNI REDNI BROJEVI I NJIHOVE POTENCIJE. (ALEFI).

U ovom ćemo §-u dovesti u vezu redne (ordinalne) i glavne (kardinalne) brojeve. Dat ćemo vrlo jednostavan rekurzivan način kako se dolazi do t. zv. *inicijalnih rednih brojeva* ι (grčko *i*) koji su beskonačni i zadovoljavaju nejednakosti

$$k\alpha < k\iota \quad \text{za svaki redni broj} \quad \alpha < \iota\,[1].$$

Kardinalni brojevi inicijalnih rednih brojeva zovu se *alefi* t. j. alefi jesu sve moguće potencije beskonačnih dobro uređenih skupova. Naročito je važan prvi inicijalni broj $> \omega$, a označuje se sa

$$(15.1) \qquad \omega_1 \text{ ili } \Omega.$$

U primjenama najviše dolazi baš skup

$$(15.2) \qquad (-\infty, \omega_1)$$

svih rednih brojeva od kojih je svaki najviše prebrojiv i prema tome zastupljen sa jednim dobro uređenim skupom racionalnih brojeva.

§ 15 1. **Redni brojevi zadana kardinalna broja. Druga Cantorova klasa rednih brojeva.** Ako dva dobro uređena skupa A, B predstavljaju isti redni broj t. j. ako je A sličan sa B, što se naznačuje sa

$$(15\text{·}1.1) \qquad tA \equiv tB$$

imaju oni isti kardinalni broj:

$$15.1.2) \qquad kA = kB.$$

Kod konačnih skupova važi i obrat. Jer, *svaki potpuno uređeni skup S od n elemenata, gdje je n prirodan broj, sličan je dobro uređenom skupu*

$$(15.1.3) \qquad (-\infty, n) = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

od n prvih rednih brojeva.

Stvarno, induktivno možemo skup (15.1.3) preslikati izomorfno na S ovako:

$$(15.1.4) \qquad \begin{aligned} s_0 &= RS \quad \text{(prvi element od } S\text{)},\\ s_k &= \text{prvi element skupa } S\setminus\{s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}\} \end{aligned}$$

za svaki $0 < k < n$. Drugim riječima, ma kako preuredili (permutirali) skup od n elemanata ($n \in N$), dobit ćemo vazda uređen skup sličan skupu (15.1.3).

---

[1]) Svakom rednom broju α pripada posve određen kardinalan broj $k\alpha$.
Naravno da je $k(\alpha+\beta) = k\alpha + k\beta$
$k(\alpha\beta) = k\alpha \cdot k\beta$
za ma kakve redne brojeve α i β.

Posve je druga stvar sa beskonačnim skupovima. Već tako preuređenje niza

(15.1.5) $$1, 2, 3, \ldots\ldots, n, n+1, \ldots.$$

prirodnih brojeva, da broj 1 stavimo iza svih ostalih prirodnih brojeva, dovodi nas do preuređenja (permutacije) skupa koje nije slično sa (15.1.5); redni broj naime novog skupa je $\omega+1>\omega$. A i svako numeriranje

(15.1.6) $$s_1, s_2, s_3, \ldots\ldots, s_n, s_{n+1}, \ldots.:$$

proizvoljna beskonačna skupa S racionalnih brojeva daje nam mogućnost da *preuredimo* skup N prirodnih brojeva tako da pomoću preslikavanja (15.1.6) uređenje sa skupa S *prenesemo* na skup N t. j. da bude

$$n \prec n' \ (n \text{ ispred } n'),$$

onda i samo onda ako je

$$s_n < s_{n'}, (n, n' \in N).$$

Tako preuređen skup N neće doduše biti vazda dobro uređenim, ali je jasno (v. teorem 11.3.1) da ćemo među svim mogućim preuređenjima skupa N naći zastupljene tipove uređenja svih mogućih prebrojivih uređenih skupova, pa dakle i specijalno sve moguće redne brojeve od kojih je svaki prebrojiv.

Taj slučaj navodimo da vidimo na kako se raznolike načine može zadan skup (konkretno skup N) preurediti.

§ 15.1.1. **Brojevna klasa $Z(\aleph_0)$ svih prebrojivih rednih brojeva.**

Označimo sa

(15.1.1.1) $$Z(\aleph_0) \text{ odn. } Z(k\omega_0)$$

skup svih rednih brojeva α sa svojstvom (kardinalni broj od α) $k\alpha = k\omega_0$. Neka

(15.1.1.2) $$Z(\leqslant \aleph_0) \text{ odn. } Z(\leqslant k\omega_0)$$

bude skup svih rednih brojeva kojima je kardinalan broj $\leqslant k\omega_0$.

Prema tome, skup $Z(\leqslant k\omega_0)$ se sastoji od 0, konačnih rednih brojeva i prebrojivih rednih brojeva, dakle

(15.1.1.3) $$Z(\leqslant \aleph_0) = (-\infty, \omega_0) \cup Z(\aleph_0);$$

naravno da je uređeni skup $(-\infty, \omega_0)$ smješten ispred uređena skupa $Z(k\omega_0)$. Kao skup izvjesnih rednih brojeva, skup $Z(\leqslant k\omega)$ je dobro uređen i jednoznačno određuje svoj redni broj koji se označuje sa ω_1, (a često i sa Ω) t. j. stavlja se

(15.1.1.4) $$tZ(\leqslant k\omega_0) \equiv \omega_1 \ (\text{često} = \Omega).$$

Očito skup $Z(\leqslant k\omega_0)$ je određen početni komad rednih brojeva, jer ako je redni broj α konačan ili prebrojiv, pogotovo to vrijedi za svaki redni broj $\alpha' < \alpha$ što upravo i znači da je onda $\alpha' \in Z(\leqslant k\omega_0)$.

Zato, primjenjujući na početni komad $Z(\leqslant k\omega_0)$ osnovni teorem 14.9.1 imamo na osnovu oznake (15.1.1.4) važnu jednakost

(15.1.1.5) $$Z(\leqslant k\omega_0) = (-\infty, \omega_1)_0$$

koja kazuje s kojim se početnim komadom rednih brojeva podudara skup $Z(\leqslant k\omega_0)$. Zato za redni broj α tri relacije:

(15.1.1.6) $$\alpha \in Z(\leqslant k\omega_0), \quad \alpha < \omega_1 \quad \text{i} \quad k\alpha \leqslant k\omega_0$$

međusobno su ekvivalentne.

Dobro uređeni skup $Z(\leqslant k\omega_0)$ je logički pendant linearnog kontinuuma C i igra naročitu ulogu. Odmah ćemo dokazati, da je njegov kardinalni broj $k\omega_1$ veći od $k\omega_0$:

$$k\omega_1 > k\omega_0$$

i da između ta dva kardinalna broja nema drugih kardinalnih brojeva. Ali se ne zna, da li je $2^{k\omega_0} = k\omega_1$ ili nije (p r o b l e m k o n t i n u u m a).

T e o r e m 15.1.1.1. Kardinalni broj $k\omega_1$ *je neposredno veći od* $k\omega_0$ *t. j.* $k\omega_0 < k\omega_1$ *i nema nikakvog kardinalnog broja* m *za koji bi važilo* $k\omega < m < k\omega_1$.

Dokažimo najprije da je $k\omega_0 < k\omega_1$. Kako su ω_0, ω_1 određeni redni brojevi, oni su uporedljivi (osnovni teorem 14.3.1); očito je $\omega_0 < \omega_1$, dakle $k\omega_0 \leqslant k\omega_1$. No, kad bi bilo $k\omega_0 = k\omega_1$, onda bi to, po definiciji samog skupa $Z(\leqslant k\omega_0)$, značilo, da je ω_1 određen član toga skupa, što je u protivnosti sa jednakosti (15.1.1.5), koja kaže, da je čitav skup $Z(\leqslant k\omega_0)$ smješten *ispred* broja ω_1.

Ostaje još da pokažemo, da između $k\omega_0$ i $k\omega_1$ nema nijednog kardinalnog broja.

Stvarno, dokažimo, da za svaki kardinalni broj m

(15.1.1.7) $$\text{iz} \quad m < k\omega_1 \quad \text{slijedi} \quad m \leqslant k\omega_0.$$

No, $m < k\omega_1$ znači, da je m kardinalan broj nekog skupa

$$S \subseteq Z(\leqslant k\omega_0).$$

Kao dobro uređen skup, S je sličan s određenim početnim komadom $K \subseteq Z(\leqslant k\omega_0)$ i to sa *pravim* komadom, dakle

(15.1.1.8) $$K \subset Z(\leqslant k\omega_0)$$

jer je $$kK = m < k\omega_1.$$

No, kako je (osnovni teorem 14.9.1)

$$K = (-\infty, \, tK)_0,$$

to relacija (15.1.1.8) kazuje, da je tK element skupa $Z(\leqslant k\omega_0)$, dakle njegova potencija $k(tK) = m \leqslant k\omega_0$. Time je zaključak (15.1.1.7) kao zadnji dio teorema 15.1.1.1 potpuno dokazan.

Teorem 15.1.1.2. *Skup $Z(k\omega_0)$ sličan je sa skupom $Z(\leqslant k\omega_0)$* t. j.

$$tZ(k\omega_0) \equiv \omega_1. \tag{15.1.1.9}$$

Stvarno, kao dio skupa $Z(\leqslant k\omega_0)$, sličan je $Z(k\omega_0)$ s početnim komadom $K \subseteq Z(\leqslant k\omega_0)$. No, tu ne može biti znak $\subset$, jer bi to značilo, da je K prebrojiv t. j. prebrojiv bi bio i skup $Z(k\omega_0)$ a time i skup $(-\infty, \omega_0) \cup Z(k\omega_0)$ t. j. sam skup $Z(\leqslant k\omega_0)$, protivno teoremu 15.1.1.1.

Spojimo li sadržinu teorema 15.1.1.1 sa Cantorovom nejednakosti $k\omega_0 < 2^{k\omega_0}$, onda vidimo ovo:

Transfinitnim kardinalnim brojem $k\omega_0$ određena su na vrlo prirodan način dva posve određena kardinalna broja $> k\omega_0$; to su ova dva broja:

broj $k\omega_1$ koji kazuje koliko ima različitih rednih brojeva od kojih je svaki $\leqslant k\omega_0$ (t. j. svaki je najviše prebrojiv);

broj $2^{k\omega_0}$ koji kazuje koliko ima jednoznačnih transformacija skupa potencije $k\omega$ na dvočlani skup $\{0, 1\}$.

Ali, dok $k\omega_1$ dolazi neposredno iza $k\omega_0$, ne zna se da li to važi i za broj $2^{k\omega_0}$. Bez Zermelova aksioma izbora ili kojeg drugog postulata dosad se ne zna niti da li je $k\omega_1 \leqslant 2^{k\omega_0}$ (Prema Cantorovoj hipotezi o kontinuumu važi čak i jednakost $k\omega_1 = 2^{k\omega_0}$). Može li se zamisliti mogućnost da su $k\omega_1$ i $2^{k\omega_0}$ neuporedljivi, pa čak i u slučaju da oba ta broja dolaze neposredno iza $k\omega_0$?[1]

§ 15.1.2 **Zajedničko porijeklo skupa C svih realnih brojeva i skupa $Z(\leqslant k\omega_0)$ svih rednih najviše prebrojivih brojeva.** Da istaknemo još jednu vezu između brojeva $k\omega_1$ i $2^{k\omega_0}$ odnosno između skupa $Z(\leqslant k\omega_0)$ i aritmetičkog kontinuuma C, spomenimo ovo; skup C definira se (na razne načine) polazeći od skupa R racionalnih brojeva. Ali i skup $Z(\leqslant k\omega_0)$ može se definirati polazeći od R. Kako je naime svaki uređeni skup koji je $\leqslant k\omega_0$ (najviše prebrojiv) sličan sa jednim dijelom skupa R, može se reći, da je $Z(\leqslant k\omega_0)$ skup svih *dobro uređenih dijelova* uređena skupa R za koje važe propisi o jednakosti, uređenju i računanju onako kako je spomenuto u § 14.2. Na taj način, skup $Z(\leqslant k\omega_0)$ dobiva naročito realno značenje, a pojmovno je sigurno jednostavniji

---

[1]) S tim u vezi dodajmo ovo. Ako promatramo ne skup $Z(\leqslant k\omega_0)$ svih rednih *brojeva* od kojih je svaki $\leqslant k\omega_0$ nego skup $T(\leqslant k\omega_0)$ svih rednih *tipova* potpuno uređenih skupova od kojih je svaki $\leqslant k\omega_0$, onda ta dva skupa imaju isti početni dio sastavljen od $0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots$, ali dok neposredno poslije toga skupa dolazi u $Z(\leqslant k\omega)$ jedino element ω_0, dolaze u $T(\leqslant k\omega_0)$ *dva neuporedljiva* člana ω_0 i ω^* (= redni tip beskonačne regresije).

od samog aritmetičkog kontinuuma C, koji u svojoj biti označuje množinu svih mogućih dijelova skupa R (odnosno svih mogućih preuređenja skupa N).

Da dobijemo sliku o tome, koliko skup $Z(\leqslant k\omega_0) = (-\infty, \omega_1)$ obiluje elementima, istaknimo tri njegova svojstva (teoremi 15.1.2.1—15.1.2.3).

Teorem 15.1.2.1. Iz $\alpha < \omega_1$ slijedi $\alpha + 1 < \omega_1$.

Naime iz $k\alpha \leqslant k\omega_0$ slijedi $k\alpha + 1 \leqslant k\omega_0$, dakle $\alpha + 1 < \omega_1$.

Teorem 15.1.2.2. *Za svaki niz* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n \ldots,$

$$\alpha_n < \omega_1, (n \in N) \text{ slijedi } \sup \alpha_n < \omega_1.$$

Zato je ω_1 regularan broj druge vrste $\tau(\omega_1) = \omega_1$ (v. § 14.6).

Stvarno, teorem je očit, ako među brojevima $\alpha_0\, \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ ima najveći broj. Ako među njima nema najvećeg, tada prema teoremu 14.4.1 imamo:

$$\sup_n \alpha_n \equiv t \bigcup_n (-\infty, \alpha_n]_0, \ (n < \omega_0)$$

dakle $$k(\sup_n \alpha_n) \leqslant \sum_n k(\alpha_n) \leqslant (\text{zbog } k\alpha_n \leqslant k\omega_0) \leqslant \aleph_0 \cdot k\omega_0 = k\omega_0 \text{ t. j.}$$

$$k(\sup_n \alpha_n) \leqslant k\omega_0 \quad \text{t. j.} \quad \sup_n \alpha_n < \omega_1.$$

Prema tome, *broj* ω_1 *nije supremum prebrojiva skupa brojeva* $< \omega_1$.

Teorem 15.1.2.3. *Za svaki* $\alpha < \omega_1$, *skup* $(\alpha, \omega_1)_0$ *svih rednih brojeva između* α *i* ω_1 *sličan je sa čitavim skupom* $Z(\leqslant k\omega_0)$; *prema tome* $k(\alpha, \omega_1) = k\omega_1$ (dokaz isti kao dokaz teorema 15.1.1.2). *Naprotiv,* $k(-\infty, \alpha) \leqslant k\omega_0$.

To pokazuje duboku disimetriju skupa $(-\infty, \omega_1)$.

Kao zgodnu primjenu prethodnih razmatranja o vezi skupova C i $(-\infty, \omega_1)_0$ obradimo jedan Lebesgue-ov rastav, te razmotrimo ponovno realne brojeve kao nedjeljive čestice kontinuuma.

§ 15.1.3. Lebesgue-ov rastav linearnog kontinuuma C na $k\omega_1$ disjunktnih dijelova.

Neka je

$$(15.1.3.1) \qquad r_1, r_2, \ldots r_n, r_{n+1}, \ldots$$

bilo kako numeriran skup R svih racionalnih brojeva; prema tome

$$r_n \neq r_{n'} \text{ za } n \neq n' \text{ i } R = \bigcup_n \{r_n\}, (n \in N).$$

Odmah ćemo na osnovu toga svakom realnom broju $x \in C$ pridijeliti ili 0 ili određen prebrojiv redni broj $\psi(x)$ t. j.

$$(15.1.3.2) \qquad \text{ili } \psi(x) = 0 \text{ ili } \omega_0 \leqslant \psi(x) < \omega_1, \ (x \in C).$$

Stvarno, neka je, za zadani $x \in C$, x_0 najveći cijeli broj $< x$; prema tome

$$0 < x - x_0 \leqslant 1,$$

pa se broj $x - x_0$ može napisati u diadskom sistemu i to na jedan jedini način tražeći da se cifra 1 pojavljuje neizmjerno puta. Neka je dakle

$$(15.1.3.3) \qquad x - x_0 = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots x_n x_{n+1} \ldots \doteq \sum_{n=1}^{\infty} x_n 2^{-n}, \; (x_n = 0 \text{ ili } 1)$$

taj jednoznačno određeni razvoj broja $x - x_0$. Time je ujedno jednoznačno određen beskonačni skup svih onih racionalnih brojeva r_n iz niza (15.1.3.1) za čije indekse n važi $x_n = 1$; taj je skup potpuno određen zadanim realnim brojem x, pa ga zato u zavisnoti od x možemo označiti sa $\varphi(x)$. Na pr. za broj 1 imamo $1 = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \cdot 2^{-n}$ pa je zato $\varphi(1) = R$.

Na taj način, potpuno je određena jednoznačna transformacija

$$(15.1.3.4) \qquad \varphi(x), \; (x \in C)$$

linearnog kontinuuma C na izvjesnu množinu beskonačnih skupova $\subseteq R$ ($\equiv$ skup svih racionalnih brojeva).[1])

Sada imamo dva slučaja: ili skup $\varphi(x)$ kao dio uređena skupa R nije dobro uređen ili je $\varphi(x)$ dobro uređen i dakle predočuje izvjestan redni broj $t\varphi(x)$ za koji je

$$(15.1.3.5) \qquad \omega_0 \leqslant t\varphi(x) < \omega_1.$$

Označimo sa

$$(15.1.3.6) \qquad E_0$$

skup svih realnih brojeva x za koje skup $\varphi(x) \subset R$ nije dobro uređen; neka je za ma koji $\omega_0 \leqslant \alpha < \omega_1$

$$(15.1.3.7) \qquad E_\alpha$$

skup svih realnih brojeva x za koje je $t\varphi(x) = \alpha$. Jasno je, da je svaki broj $x \in C$ sadržan u jednom i samo jednom od skupova

$$(15.1.3.8) \qquad E_0, E_{\omega_0}, E_{\omega+1}, \ldots E_\alpha, \ldots (\omega_0 \leqslant \alpha < \omega_1),$$

pa zato važi ovaj rastav kontinuuma C:

$$(15.1.3.9) \qquad C = E_0 \cup (\bigcup_\alpha E_\alpha), \; (\omega_0 \leqslant \alpha < \omega_1).$$

---

[1]) Prema tome (15.1.3.4) je izvjesno jednoznačno preslikavanje skupa C na skup $P(R)$ svih $X \subseteq R$. Također $(-\infty, x)_R$, $(x \in C)$ je određeno preslikavanje skupa C na skup R, a pojavljuje se kod Dedekindove teorije realnih brojeva.

Treba još pokazati, da nijedan od skupova u (15.1.3.8) nije pust. Tako na pr. $E_0 \supset v$ jer je $\varphi(1) \in E_0$.

Ali je i $E_\alpha \supset v$ za svaki $\omega \leqslant \alpha < \omega_1$.

Stvarno, kao prebrojiv redan broj, predstavljen je α izvjesnim dijelom $D_\alpha \subset R$; prema tome skup D_α sastavljen je od članova potpuno određena niza

$$r_{k_1}, r_{k_2}, \ldots r_{k_n}, \ldots, \text{ sa } k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$$

izvađenog iz niza (15.1.3.1).

Stavljajući $x = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-k_n}$, odmah se vidi da je $\varphi(x) = D_\alpha$ dakle $t\varphi(x) \equiv tD_\alpha \equiv \alpha$, a time i $\varphi(x) \in E_\alpha$ dakle $E_\alpha \supset v$.

Prema tome, (15.1.3.9) predstavlja efektivan *rastav kontinuuma* C *na* $k\omega_1$ *nepustih disjunktnih dijelova.*

Zermelov aksiom tada omogućuje da promatramo i takove linearne skupove M koji sa svakim od skupova E_α, $(\omega \leqslant \alpha < \omega_1)$ ima jednu jedinu točku zajedničku. Naravno, $kM = k\omega_1$. A k tome je $M \subseteq C$, dakle $kM \leqslant kC$ t. j.

$$k\omega_1 \leqslant 2^{k\omega_0}. \tag{15.1.3.10}$$

Bez Zermelova aksioma danas ne možemo govoriti o takovim skupovima M.

Rastav (15.1.2.9) našao je Lebesgue 1905. godine. Poslije je taj interesantan rastav bio predmet brižljiva istraživanja od strane Luzina, te Denjoy-a. Luzin je došao tako do t. zv. *teorije rešetâ* (sita) a pokazao je da je komponenta E_0 u (15.1.3.9) mnogo zamršenija od ostalih komponenata toga rastava jer skup E_0 nema mjere u Borelovu smislu, dok svaki od skupova E_α, $(\omega_0 \leqslant \alpha < \omega_1)$ ima određenu mjeru u Borelovu smislu. Luzin uspoređuje osebujnost pronalaska skupa E_0 za današnju matematiku s pojavom prvog iracionalnog broja ($\sqrt{2}$ vjerojatno) u staro doba matematike.

§ 15.1.4. **Još o realnim brojevima kao atomima.** U § 13.2 proveli smo ovaj postupak neprestanog lomljenja segmenta [0, 1] svih realnih brojeva $0 \leqslant x \leqslant 1$:

Za proizvoljan segment

$$S \subseteq [0, 1] \text{ neka je } \varphi(S) \tag{15.1.4.1}$$

množina od ma koja dva segmenta na koja se prelama S; prema tome elementi množine $\varphi(S)$ imaju jednu jedinu točku zajedničku i ta točka nije prva ni zadnja točka segmenta S. Označimo sa M_0 početno stanje t. j. množinu kojoj je zadani segment [0, 1] jedini element.

Neka je $\alpha > 0$ neki redan broj i pretpostavimo, da su familije

(15.1.4.2) $$M_0, M_1, \ldots, M_\xi, \ldots \quad (\xi < \alpha)$$

definirane za svaki $\xi < \alpha$ i da su pritom zadovoljeni ovi uslovi:

1. Elementi množine M_ξ jesu segmenti $\subseteq [0, 1]$, koji se u slučaju kad je ξ druge vrste, mogu reducirati i na pojedinu točku iz $[0, 1]$.
2. Za svaki $\xi + 1 < \alpha$,
$$M_{\xi+1} = \bigcup_S \varphi(S), \ (S \in M_\xi) \text{ i k tome } kS > 1$$
(da se isključi slučaj, kad element S od M_ξ ima jedan jedini element).
3. Za svaki broj druge vrste $\xi < \alpha$ množina M_ξ je sastavljena od skupova oblika
$$\bigcap_\eta A_\eta, \ (A_\eta \in M_\eta, \ \eta < \xi) \quad \text{i k tome}$$
$$A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_\eta \supset, \ldots, (\eta < \xi).$$

Definirajmo tada i množinu M_α.

Ako je α prve vrste, stavit ćemo

(15.1.4.3) $$M_\alpha = \bigcup_S \varphi(S), \ (S \in M_{\alpha-1}, \ kS > 1).$$

Ako je α druge vrste, označit ćemo sa M_α množinu svih skupova

(15.1.4.4) $$\bigcap_\xi A_\xi, \ (A_\xi \in M_\xi, \ \xi < \alpha, \text{ i k tome } A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_\xi \supset \ldots).$$

U § 13.2 smo se pitali, da li će se gornji proces ikada završiti, t. j. da li će postojati takav redni broj γ, da množina M_γ bude prazna.

Sada smo u stanju da dokažemo, da postoji posve određen broj

(15.1.4.5) $$\gamma < \omega_1$$

tako da bude

(15.1.4.6) $$, \text{ i } M_\xi \supset v, \ (\xi < \gamma) \quad \text{i} \quad M_\gamma = v.$$

Dokaz je vrlo prost.

Važi naime:

Lema 15.1.4.1. *Za svaki element $x \in [0, 1]$ postoji određen redni broj $\gamma(x) < \omega_1$, tako da se za svaki $\xi < \gamma(x)$ element x pojavljuje u najviše dva elementa množine M_ξ, dok to nije slučaj za $M_{\gamma(x)}$.*

Kad lema 15.1.4.1 ne bi bila istinita, postojao bi takav $x \in [0, 1]$ koji bi se za svaki $\xi < \omega_1$ pojavljivao kao element u jednom ili najviše u dva elementa — segmenta množine M_ξ. Označimo li tada sa S_ξ onaj element odnosno uniju od ona dva elementa množine M_ξ koji sadržavaju točku x, dobili bi transfinitan niz

(15.1.4.7) $S_\xi, \ (\xi < \omega_1)$

segmenata $\subseteq [0, 1]$ sa svojstvom

$$S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \ldots \supseteq S_\xi \supseteq \ldots, \ (\xi < \omega_1)$$

ali očito tako, da tu znak = ne može da se uzastopno pojavljuje dva puta. Specijalno je dakle

(15.1.4.8) $S_{\omega\cdot 0} \supset S_{\omega\cdot 1} \supset S_{\omega\cdot 2} \supset \ldots S_{\omega\cdot\xi} \supset \ldots (\xi < \omega_1)$.

Međutim, posljednji niz je nemoguć. Jer, članovi toga transfinitnog niza jesu zatvoreni intervali $\subseteq [0, 1]$. Promatramo li pripadne otvorene intervale u transfinitnom nizu

(15.1.4.9) $S_{\omega\xi} \setminus S_{\omega(\xi+1)}, \ (\xi < \omega_1)$

dobili bi neprebrojivo mnogo disjunktnih intervala $\subset [0, 1]$ što je očito nemoguće.

Sada možemo odmah dokazati, da broj γ sa svojstvima (15.1.4.6) egzistira.

Neka je

(15.1.4.10) $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$

ma kakav niz elemenata iz $[0, 1]$ koji je gust svuda po $[0, 1]$[1]) na pr. skup (15.1.4.10) može biti skup svih pravih racionalnih razlomaka.

Tim brojevima pripadaju, prema lemi 15.1.4.1, određeni redni brojevi

(15.1.4.11) $\gamma(x_n) < \omega_1, \ (n < \omega_0)$

sā svojstvom

(15.1.4.12) da ne bude $x_n \in \bigcup_X X, \ (X \in M_\xi)$ niti za jedan $\xi \geqslant \gamma(x_n)$.

No, stavimo li

(15.1.4.13) $\gamma' = \sup_n \gamma(x_n), \ (n < \omega_0)$,

tada je prema relaciji (15.1 4.11) i teoremu 15.1.2.2

(15.1.4 14) $\gamma' < \omega_1$.

No prema (15.1.4.12) ni za koji x_n neće biti $x_n \in \bigcup_X X, (X \in M_\xi)$, pa bio ξ ma koji broj $\geqslant \gamma'$! A to znači, da specijalno množina $M_{\gamma'}$ ne može imati ni jednog višečlanog segmenta $\subset [0, 1]$ za svog člana, jer svaki takav segment $\subseteq [0, 1]$ mora sadržavati bar jedan element iz niza (15.1.4.10).

Inače, naravno, množina $M_{\gamma'}$ postoji, no sadrži tek jednočlane skupove — točke iz $[0, 1]$. Zato, ni za koji $S \in M_{\gamma'}$ ne postoji, $\varphi(S)$ pa zato ne postoji ni

$$M_{\gamma'+1} = \bigcup_S \varphi(S), \ (S \in M_{\gamma'}, \ kS > 1).$$

---

[1]) Tu dolazi do izražaja uslov separabiliteta linearnog kontinuuma. Mi ga ne umijemo izbjeći!

Drugim riječima

$$M_{\gamma'+1} = v,$$

Dovoljno je dakle staviti

$$\gamma = \gamma' + 1,$$

pa da se uvjerimo, da su tražene relacije (15.1.4.5) i (15.1.4.6) zadovoljene. Time je konačno dokazano, da se gornji proces subdivizije mora završiti u *prebrojivo mnogo koračaja*,

Inače, primijetimo, da se za svaki broj druge vrste $\gamma < \omega_1$ može navesti i takvo prelamanje $\varphi(S)$ promatranih segmenata, da pripadni završni rang γ bude jednak baš odabranom broju $\gamma < \omega_1$.

§ 15.1.5. **Suslinov problem.** Ako analogno prelamanje izvršimo na nekom uređenom skupu bez praznina i koji zadovoljava Suslinovu uslovu, onda se proces mora završiti bar kod koraka ω_1; sigurno je naime $M_\gamma = v$ za neki $\gamma \leqslant \omega_1$. Mi ne umijemo dokazati da je $\gamma < \omega_1$. Iz te nejednakosti proizašao bi pozitivan odgovor na Suslinov problem.

§ 15.2. **Inicijalni (početni) redni brojevi i njihove potencije. Alefi.** Proces kojim smo od rednog broja $\omega_0 = \omega$ prešli na redni broj ω_1 može se proširiti. Definirat ćemo redne brojeve

(15.2.1) $$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\alpha, \ldots$$

induktivno ovako:

Kao što znamo ω_0 je najmanji redni transfinitni broj; dakle

$$\omega_0 \equiv t\{0 < 1 < 2 < 3 < \ldots\};$$

znamo i to, da je

(15.2.2) $$\omega_1 \equiv t\,Z(\leqslant k\,\omega_0) \text{ gdje je } Z(\leqslant k\,\omega_0)$$

skup rednih brojeva $\leqslant k\,\omega_0$ uređen po veličini.

Neka je $\alpha > 0$ ma koji redan broj; pretpostavimo, da su već definirani inicijalni redni brojevi ω_ξ za svaki $\xi < \alpha$ i da je

(15.2.3) $$\omega_\xi, \ (\xi < \alpha)$$

preslikavanje po sličnosti skupa $(-\infty, \alpha)_0$ na skup svih ω_ξ sa $\xi < \alpha$. Definirajmo tada i ω_α.

Ako je α prve vrste, promatrajmo tada redni broj $\alpha - 1$ i pripadni inicijalni redni broj $\omega_{\alpha-1}$; označimo sa

(15.2.4) $$Z(\leqslant k\,\omega_{\alpha-1})$$

skup svih rednih brojeva $\leqslant k\,\omega_{\alpha-1}$ (naravno to znači skup svih rednih brojeva od kojih je svaki potencije $\leqslant k\,\omega_{\alpha-1}$). Skup (15.2.4) je dobro uređen, pa ćemo ga kao redni broj označiti sa ω_α, dakle

(15.2.5) $$\omega_\alpha \equiv t\,Z(\leqslant k\,\omega_{\alpha-1}).$$

Ako je pak α druge vrste, stavit ćemo

(15.2.6) $$\omega_\alpha = \sup_{\xi<\alpha} \omega_\xi .$$

U oba slučaja, broj ω_α je potpuno definiran. Na osnovu transfinitne indukcije, time je svakom rednom broju α pridružen određen inicijalni redni broj ω_α.

Tako na pr. $\omega_{\omega_0} = \sup_{n<\omega_0} \omega_n$; to znači da je broj ω_{ω_0} supremum već običnog beskonačnog niza brojeva

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}, \ldots$$

Znači, da je (v. § 14.6):

$$\tau(\omega_{\omega_0}) = \omega_0 \quad \text{t. j.} \quad \tau(\omega_{\omega_0}) < \omega_{\omega_0},$$

pa zato inicijalni broj ω_{ω_0} nije regularan.

Naprotiv, brojevi $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$ te svaki broj $\omega_{\alpha+1}$ jesu regularni što znači (jer su k tome i druge vrste) da zadovoljavaju jednakosti

$$\tau(\xi) = \xi.$$ [1])

Važno svojstvo inicijalnih rednih brojeva jest sadržina ovog

T e o r e m a 15.2.1. *Za svaki redni broj $\alpha > 0$, kardinalni broj*

(15.2.7) $\aleph_\alpha$ (čitaj: alef alfa) odnosno $k\omega_\alpha$ broja ω_α

neposredno je veći od kardinalnih brojeva $k\omega_\xi = \aleph_\xi$, $(\xi < \alpha)$ t. j.

(15.2.8) $$k\omega_\xi < k\omega_\alpha, \quad (\xi < \alpha),$$

ali nema nijednog kardinalnog broja m za koji bi bilo

(15.2.9) $$k\omega_\xi < m < k\omega_\alpha, \quad (\xi < \alpha).$$

Dokaz teorema 15.2.1 provodi se transfinitnom indukcijom

Najprije, teorem 15.2.1 je istinit kad je $\alpha = 1$ (to je bio sadržaj teorema 15.1.1.1). Neka je $\alpha > 1$, pa neka je teorem istinit za sve brojeve $\xi < \alpha$; dokažimo ga onda i za broj α. No, time što teorem 15.2.1 važi za sve $\xi < \alpha$, izlazi neposredno, da je skup kardinalnih brojeva $k\omega_\xi$ za $\xi < \alpha$ sličan sa skupom $(-\infty, \alpha)$ svih rednih brojeva $< \alpha$.

Ako je broj α druge vrste, tada iz relacije (15.2.6) izlazi:

(15.2.10) $$k\omega_\alpha = \sup_{\xi<\alpha} k\omega_\xi,$$

pa je jasno da važi (15.2.8) i (15.2.9)

---

[1]) Pojavljuju se i t. zv. *nedostiživi* (inakcesibilni) inicijalni brojevi ω_ξ za koje je ξ druge vrste, a ipak $\tau(\omega_\xi) = \omega_\xi$, za njih važi jednakost

$$\omega_\xi = \xi.$$

O njihovoj teoriji v. A. T a r s k i - W. S i e r p i n s k i, Fundamenta Mathematicae, 15, 1930, pp. 292—300; o postojanju i interpretaciji takovih brojeva v. E. Z e r m e l o, Fundamenta Mathematicae, 16, 1930, pp. 29—47.

Ako je pak α prve vrste, tada je $k\omega_\alpha$ neposredno veći kardinalni broj od broja $k\omega_{\alpha-1}$ i dokaz je potpuno analogan dokazu teorema 15.1.1.1.

Time je teorem 15.2.1 potpuno dokazan.

Kao posljedicu teorema 15.2.1 istaknimo

T e o r e m 15.2.2. *Za svaki nepust skup S rednih brojeva važi:*

$$\sup_\alpha \omega_\alpha = \omega_{\sup_\alpha \alpha}, \quad (\alpha \in S),$$

$$\sup_\alpha k\omega_\alpha = k\omega_{\sup_\alpha \alpha}, \quad (\alpha \in S).$$

Teorem je neposredna posljedica definicije (15.2.6), teorema 15 2.1 i očigledne relacije

$$\sup S = \sup \bigcup_{\alpha \in S} (-\infty, \alpha]_0,$$

pri čemu je $(-\infty, \alpha]_0$ skup svih rednih brojeva $\leqslant \alpha$.

T e o r e m 15.2.3. *Za svaki neprazan skup S alefa, i* $\inf S$ *i* $\sup S$ *je jednoznačno određen alef.*

Ukratko, ne samo da je

$$(15.2.11) \qquad \omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\xi, \ldots$$

(ξ prolazi svim rednim brojevima) uzlazan „niz" rednih brojeva nego je i pripadni „niz" kardinalnih brojeva t. zv alefa

$$(15.2.12) \quad \begin{cases} k\omega_0, k\omega_1, k\omega_2, \ldots\ldots k\omega_\xi, \ldots \text{ odnosno pišući } k\omega_\xi = \aleph_\xi: \\ \aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots\ldots \aleph_\xi, \ldots \end{cases}$$

ne samo uzlazan nego je „niz" (15.2.12) i *„potpun"* u smislu, da se *u nj ne može uvesti ni jedan jedini novi transfinitni kardinalni broj koji bi bio uporedljiv sa svakim od brojeva* (15 2.12).

Tri „hiper-niza"

$$\left.\begin{matrix} 0, & 1, & 2, \ldots\ldots, & \alpha, \ldots\ldots \\ \omega_0, & \omega_1, & \omega_2, \ldots\ldots, & \omega_\alpha, \ldots\ldots \\ k\omega_0, & k\omega_1, & k\omega_2, \ldots\ldots, & k\omega_\alpha, \ldots\ldots \end{matrix}\right\} \text{ gdje } \alpha \text{ prolazi svima red. brojevima}$$

jesu dakle „slična".

Drugo je pitanje, da li ima kardinalnih brojeva i izvan „niza" (15.2 12). Specijalno, da li je unutra kardinalni broj $2^{\aleph_0}$ kontinuma ? i uopće kardinalni brojevi $2^{k\omega_\xi}$? Iz Z e r m e l o v a aksioma (ili iz uporedljivosti kardinalnih brojeva) proizlazi, da je u (15.2.12) smješten svaki transfinitni kardinalni broj! Ali i tada ne znamo, da li je $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ i općenito

$$(15.2.13) \qquad 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$$

za svaki redni broj α *(opća Cantorova hipoteza).*

Iz teorema 15.2.1—15.2.3 neposredno izlazi

Korolar 15.2.1. *Među potencijama rednih brojeva nema najvećeg t. j. ne postoji najveći alef.*

Suprem svakog skupa alefa opet je određen alef (riječ „skupa" tu je bitna, jer na pr. suprem svih alefa nije alef).

Ali i obrnuto, kad se zna, da ne postoji najveći alef i da je suprem svakog skupa alefa opet alef, može se „hiper-niz" (15.2.11) inicijalnih rednih brojeva rekurzivno ovako definirati: ω_0 je prvi transfinitni redni broj; za svaki redni broj α broj $\omega_{\alpha+1}$ je prvi redni broj sa svojstvom

$$k\omega_\alpha < k\omega_{\alpha+1};$$

za svaki redni broj α druge vrste, $\omega_\alpha = \sup\limits_{\xi<\alpha} \omega_\xi$.

Broj ω_α zove se *inicijalni (početni)*, jer je ω_α prvi broj u *klasi* $Z(k\omega_\alpha)$ svih rednih brojeva potencije $k\omega_\alpha$.

Teorem 15.2.4. *Kvadrat svakog alefa jednak je tome alefu.*

Stvarno, teorem je istinit za početni alef $k\omega_0$, jer je $\aleph_0^2 = \aleph_0$ (v. lemu 6.3.3.2).

Neka je $\alpha > 0$ i pretpostavimo, da je teorem istinit za svaki alef $k\omega_\xi$, $(\xi < \alpha)$: dokažimo da je onda također $\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$.

Promatrajmo skup

(15.2.14) $$M \equiv (-\infty, \omega_\alpha) \times (-\infty, \omega_\alpha)$$

svih uređenih pari

$$(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta < \omega_\alpha).$$

Uredimo skup M po propisu da bude

(15.2.15) (ξ, η) ispred (ξ', η') u skupu M, akó je

(15.2.16) ili $\xi + \eta < \xi' + \eta'$ ili

(15.2.17) $\xi + \eta = \xi' + \eta'$ te $\xi < \xi'$.

Time je skup M potpuno uređen. Dokažimo na pr. tranzitivnost poređaja (15.2.15): ako je

(ξ, η) ispred (ξ', η') ispred (ξ'', η'')

onda je (ξ, η) ispred (ξ'', η'').

Stvarno, zbog (15.2.16), (15.2.17) imamo

$$\xi + \eta \leqslant \xi' + \eta' \leqslant \xi'' + \eta''.$$

Ako se tu javlja znak $<$ bar jedanput, stvar je evidentna, jer je $\xi + \eta < \xi'' + \eta''$. Ako pak oba puta dolazi znak jednakosti, onda će prema (15.2.17) biti $\xi < \xi' < \xi''$, dakle

$$\xi + \eta = \xi'' + \eta'', \ \xi < \xi'' \quad \text{t. j.} \quad (\xi, \eta) \text{ ispred } (\xi'', \eta'').$$

No, skup (15.2.14) je i *dobro* uređen. Jer, ako je S ma koji njegov nepust dio, neka je λ najmanji redni broj među brojevima

$$\xi + \eta, \quad \text{pri čemu je} \quad (\xi, \eta) \in S.$$

Naravno, λ postoji. A onda, neka je ξ_0 najmanji broj, tako da bude $\xi_0 + \eta = \lambda$ i $(\xi_0, \eta) \in S$; naravno, (ξ_0, η) je najmanji element u S. Time je dokazano, da je (15.2.13) dobro uređen.

Dokažimo, da je redni broj skupa (15.2.14) jednak ω_α.

Najprije je jasno, da je taj redni broj $\geqslant \omega_\alpha$, jer na pr. skup svih

$$(\xi, 0), \quad (\xi < \omega_\alpha)$$

čini dobro uređen dio skupa M sličan sa $(-\infty, \omega_\alpha)$.

Treba još dokazati, da redni broj skupa M ne može biti $> \omega_\alpha$. U obrnutom slučaju, sadržavao bi skup (15.2.14) jedan

(15.2.18) $$\text{početni komad } K \text{ tipa } \omega_\alpha;$$

recimo da je K određen svim elementima iz (15.2.14) koji su ispred

(15.2.19) $$(\xi_\beta, \eta_\beta) \in M.$$

To znači, da je $\xi_\beta < \omega_\alpha$, $\eta_\beta < \omega_\alpha$ pa dakle i

(15.2.20) $$\nu \equiv \xi_\beta + \eta_\beta < \omega_\alpha\ ^{1)}.$$

No, odmah se vidi, da su elementi komada K oblika

(15.2.21) $$(\xi, \eta) \text{ sa } \xi \leqslant \nu, \ \eta \leqslant \nu.$$

No, kako je skup svih rednih brojeva $\leqslant \nu$ rednog tipa $\nu + 1$, to znači, da je

(15.2.22) $$kK \leqslant k(\nu + 1) \cdot k(\nu + 1) = (k(\nu + 1))^2.$$

No, $\nu + 1 < \omega_\alpha$, što znači da je

$k(\nu + 1) < k\omega_\alpha$; zato je prema hipotezi $(k(\nu + 1))^2 = k(\nu + 1) < k\omega_\alpha$.

Time relacija (15.2.22) postaje

$$kK < k\omega_\alpha$$

protivno pretpostavci, da je K tipa ω_α i dakle potencije $k\omega_\alpha$.

Totalnom indukcijom s obzirom na eksponent izlazi iz teorema 15.2.4:

Teorem 15.2.5. *$(k\omega_\alpha)^n = k\omega_\alpha$ za svaki prirodni broj n i svaki redni broj α.*

---

1) Stvarno, označujući sa ζ onaj od brojeva ξ_β i η_β koji je veći, tada je $k\xi_\beta \leqslant k\zeta$, $k\eta_\beta \leqq k\zeta$, $k(\xi_\beta + \eta_\beta) = k\xi_\beta + k\eta_\beta \leqslant k\zeta + k\zeta = 2k\zeta \leqslant (k\zeta)^2 =$ (po hipotezi; jer je $k\zeta < k\omega_\alpha$) $= k\zeta < k\omega_\alpha$ t. j. $k(\xi_\beta + \eta_\beta) < k\omega_\alpha$ dakle uistinu $\xi_\beta + \eta_\beta < \omega_\alpha$.

Teorem 15.2.6.

$$k\omega_\alpha + k\omega_\beta = \sup\{k\omega_\alpha, k\omega_\beta)$$

$$k\omega_\alpha \cdot k\omega_\beta = \sup\{k\omega_\alpha, k\omega_\beta).$$

Stvarno, označimo li taj suprem sa $k\omega_\gamma$, tada je γ veći od brojeva α, β pa je

$$k\omega_\alpha + k\omega_\beta \leqslant 2k\omega_\gamma\,^{1)} \leqslant (k\omega_\gamma)^2 \text{ (po teoremu 15.2.4)} = k\omega_\gamma.$$

Dakle $\quad k\omega_\alpha + k\omega_\beta \leqslant k\omega_\gamma.$

No, kako je γ jednak većem od brojeva α, β, mora tu stajati znak $=$.

Korolar 15.2.2.

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta.$$

Na sličan se način dokazuje i druga jednakost u teoremu 15.2.6.

Teorem 15.2.7. *Iz* $0 < \beta < \omega_\alpha$ *slijedi* $\beta + \omega_\alpha = \omega_\alpha$

$$\beta\omega_\alpha = \omega_\alpha.$$

Stvarno

$\omega_\alpha \leqslant \beta + \omega_\alpha = \beta + \sup\limits_{\xi < \omega_\alpha} \xi =$ (teorem 14.8.3.2) $= \sup\limits_{\xi < \omega_\alpha} (\beta + \gamma) \leqslant$ (zbog $\beta + \xi < \omega_\alpha$) $\leqslant \omega_\alpha$

Odatle $\quad \beta + \omega_\alpha = \omega_\alpha.$

Slično

$\omega_\alpha \leqslant \beta \cdot \omega_\alpha = \beta \sup\limits_{\xi} \xi$ (teorem 14.8.3.2) $= \sup\limits_{\xi < \omega_\alpha} \beta\xi$ (radi $\beta\xi < \omega_\alpha$)[2] $\leqslant \omega_\alpha$.

Teorem 15.2.8 *Razred* $Z(k\omega_\alpha)$ *svih rednih brojeva* ξ *za koje je* $k\xi = k\omega_\alpha$ *sličan je sa skupom* $Z(\leqslant k\omega_\alpha)$, *pa zato ima redni broj* $\omega_{\alpha+1}$, *a kardinalni broj* $k\omega_{\alpha+1} = \aleph_{\alpha+1}$.

Naime, „translacija" $\omega_\alpha + \xi, \ (\xi < \omega_{\alpha+1})$ je jedna sličnost između skupa $Z(\leqslant k\omega_\alpha)$ svih rednih brojeva $< \omega_{\alpha+1}$ i skupa $Z(k\omega_\alpha)$. Da se tu radi o sličnosti, to je sadržaj teorema 14.8.1.1. U drugu ruku $k(\omega_\alpha + \xi) = k\omega_\alpha + k\xi = k\omega_\alpha$,

dakle $\quad \omega_\alpha + \xi \in Z(k\omega_\alpha), \ (\xi < \omega_{\alpha+1}).$

§ 15.3 Problem uporedljivosti kardinalnih brojeva (trihotomija). Operatori $Z(\leqslant m)$ i $Z(m)$ (m kardinalan broj).

Neka je

(15.3.1) $\quad k$ proizvoljan kardinalan broj.

---

[1]) Za svaki kardinalni beskonačni broj k važi $2k \leqslant k^2$.

[2]) Naime iz $\beta < \omega_\alpha$, $\xi < \omega_\alpha$ slijedi $\zeta = \sup\,(k\beta, k\xi) < k\omega_\alpha$ dakle $k(\beta\xi) = k\beta \cdot k\xi \leqslant (k\zeta)^2 = k\zeta < k\omega_\alpha$ dakle $\zeta < \omega_\alpha$ (slučaj kad je ζ konačan, apsolvira se jednostavno).

Ukoliko egzistira, označimo sa

(15.3.2) $Z(\leqslant m)$ skup svih rednih brojeva α za koje je $k\alpha \leqslant m$[1].

Isto tako, neka je

$$Z(m) \tag{15.3.3}$$

skup svih rednih brojeva α za koje je $k\alpha = m$.

Skup $Z(m)$ zove se *razred (klasa) rednih brojeva*. Prema tome, *klasa (razred) rednih brojeva jest svaki maksimalni skup rednih brojeva*[2] *koji imaju svi jedan te isti kardinalni broj*. Tako se za konačne m skup $Z(k)$ sastoji od jednog jedinog elementa i to od rednog broja m. Ako je m potencija dobro uređenog skupa, recimo $m = k\omega_\alpha$, onda skup $Z(m) = Z(k\omega_\alpha)$ ima $k\omega_{\alpha+1}$ elemenata (v. teorem 15.2.8)

Ako m nije potencija nikakvog dobro uređenog skupa, tada je skup $Z(m)$ prazan. Prema tome važi

T e o r e m 15.3.1. *Za brojevni razred $Z(m)$ ma kojeg kardinalnog broja m važi jedan i samo jedan od ova tri slučaja:*

P r v i s l u č a j: *Skup $Z(m)$ je prazan; taj slučaj nastupa onda i samo onda, kad* se *m podudara s kardinalnim brojem prazna skupa ili ma kojeg eventualnog skupa koji se ne može dobro urediti.*

D r u g i s l u č a j: *$Z(m)$ se sastoji od jednog jedinog elementa; taj slučaj nastupa onda i samo onda kad je m prirodan broj.*

T r e ć i s l u č a j: *Kardinalni broj skupa $Z(m)$ je neposredno veći od kardinalna broja m. Taj slučaj nastupa onda i samo onda kad je m određen alef* (= kardinalan broj beskonačna dobro uređena skupa).

Dokažimo

T e o r e m 15.3.2. (H a r t o g s o v t e o r e m). *Ako je m bilo koji kardinalan broj, skup $Z(\leqslant m)$ svih rednih brojeva α za koje je $k\alpha \leqslant m$ postoji pa je i*

$$kZ(\leqslant m)$$

određen kardinalan broj koji je ili veći od m ili neuporedljiv sa m.

Dokažimo najprije da skup $Z(\leqslant m)$ postoji. Očito je

$$Z(\leqslant m) = \bigcup_n Z(n) \tag{15.3.4}$$

pri čemu n prolazi svim kardinalnim brojevima $\leqslant m$.

No, ako je M bilo kakva množina potencije m, onda relacija $n \leqslant m$ odnosno $n \leqslant kM$ znači, da je kardinalan broj n ostvaren kao izvjestan kX sa $X \subseteq M$.

[1]) $k\alpha$ jest kardinalni broj od α.

[2]) Pritom naravno, identički jednake redne brojeve smatramo jednim te istim rednim brojem, pa makar oni bili i različito predstavljeni. Na pr. svi čisto uzlazni beskonačni nizovi prirodnih brojeva slove kao jedan te isti redni broj — redni broj ω_0.

Drugim riječima

(15.3.5) $$Z(\leqslant m) = \bigcup_X Z(kX), \ (X \subseteq M).$$

No množina svih $X \subseteq M$ je određen skup — t. zv. partitivni skup $P(M)$; a kako je i za svaki $X \in P(M)$, $Z(kX)$ određen skup (v. teorem 15.3.1), to je $Z(\leqslant m)$ kao unija (15.3.5) određen skup (a ne recimo neki „hiper-skup", kao što je hiper-skup svih rednih brojeva).

Dakle je $Z(\leqslant m)$ potpuno određen skup rednih brojeva. No, očito, to je izvjestan početni komad rednih brojeva, jer iz $k\alpha \leqslant m$ i $\alpha' < \alpha$ slijedi $k\alpha' \leqslant m$ dakle $\alpha' \in Z(\leqslant k)$.

Prema osnovnom teoremu 14.9.1 redni broj

(15.3.6) $$\omega(m) \equiv tZ(\leqslant m)$$

zadovoljava jednakost

(15.3.7) $$Z(\leqslant m) = (-\infty, \omega(m))_0,$$

pa dakle *redni broj* $\omega(m)$ *leži neposredno iza svih rednih brojeva potencije* $\leqslant m$.

Odatle, odmah proizlazi, da za redni broj $\omega(m)$ ne važi

(15.3.8) $$k\omega(m) \leqslant m$$

jer, kad bi to bilo, onda bi, po definiciji samog skupa $Z(\leqslant m)$ to značilo, da je

$$\omega(m) \in Z(\leqslant m) \text{ protivno relaciji (15.3.7).}$$

Time je važni teorem 15.3.2 potpuno dokazan.

Korolar 15.3.1. *Svakom kardinalnom beskonačnom broju pripada određen alef*

$$\aleph(m)$$

koji nije niti $< m$ *niti* $> m$ *nego je on ili* $= m$ *ili neuporedljiv sa* m.

Stvarno, promatrajmo alef $k\omega(m)$; on je ili $> m$ ili $\| m$.

Dovoljno je staviti $\aleph(m) = m$, ako je $m < k\omega(k)$

$$\aleph(m) = k\omega(m) \text{ ako je } m \| k\omega\, k)$$

pa da se uvjerimo, da je korolar 15.3.1 ispravan.

Teorem 15.3.3. *Ako nema neuporedljivih kardinalnih brojeva tj. ako je svaki skup kardinalnih brojeva uređen po veličini, tada se svaki skup može dobro urediti.*

Stvarno, promatrajmo proizvoljan skup S, njegov kardinalni broj kS i kardinalni broj $kZ(\leqslant kS)$. Kako ovaj nije $\leqslant kS$, pretpostavljena njegova uporedljivost sa kS ima za posljedicu da je

$$kS < kZ(\leqslant kS).$$

A to znači, da postoji obostrano jednoznačno preslikavanje φ:

(15.3.9) $$\varphi(x), \ (x \in S)$$

skupa S na izvjestan dio $\varphi(S)$ skupa $Z(\leqslant kS)$; kako je ovaj skup dobro uređen — to je određen skup rednih brojeva — dobro je uređeni i skup $\varphi(S)$; dekretirajući, da za

$$x, x' \in S \text{ bude } x \leqslant x' \text{ u } S,$$

onda i samo onda, ako je

$$\varphi(x) \leqslant \varphi(x'),$$

prenosi se time dobri uređaj skupa $\varphi(S)$ na skup S.

§ 15. 4. Završno o kardinalnim i ordinalnim brojevima.

Da bolje uočimo vezu između Zermelova aksioma, uporedljivosti kardinalnih brojeva i računanja s njima, istaknimo da važi ovaj

Teorem 15.4.1. *(Teorem o ekvivalencijama). Slijedeće izreke dvije po dvije međusobno su ekvivalentne pa svaka od njih ima za posljedicu sve ostale;*

I. *Važi Zermelov aksiom izbora: Ako je M bilo kakva nepusta množina nepustih disjunktnih skupova, postoji skup Π koji sa svakim skupom $S \in M$ ima jednu jedinu točku zajedničku;*

II. *Ako je M bilo kakva nepusta množina nepustih skupova, postoji jednoznačno preslikavanje f:*

$$f(S), \ (S \in M)$$

tako da bude $f(S) \in S$ za svaki $S \in M$.

III. *(Uporedljivost). Svaki skup kardinalnih brojeva potpuno je uređen po veličini.*

IV. *(Zermelov teorem). Svaki se skup može dobro urediti.*

V. *Suma ma kojih dvaju transfinitnih glavnih (kardinalnih) brojeva jednaka je jednom od tih brojeva.*

VI. *Suma ma kojih dvaju kardinalnih transfinitnih brojeva jednaka je njihovom produktu.*

VII. *Kvadrat svakog transfinitnog kardinalnog broja jednak je tome broju.*

Dokaz teorema 15.4.1 provest ćemo tako da dokažemo ispravnost zaključaka po ovoj shemi:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{III} \arrow[d, shift left] & \\
\mathrm{I} \arrow[r, shift left] & \mathrm{II} \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] & \mathrm{IV} \arrow[l, shift left] \arrow[u, shift left] \arrow[d, shift left] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{V} \arrow[ul] \\
 & & \mathrm{VI} \arrow[u, shift left] & \mathrm{VII} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Pri tom na pr. I$\rightarrow$II treba čitati ovako: hipoteza I ima za posljedicu hipotezu II.

Da se vidi da na pr. V ima za posljedicu I, dovoljno je vidjeti, da važi lanac V$\rightarrow$III$\rightarrow$IV$\rightarrow$II$\rightarrow$I.

Zaključak sa I na II t. j. I$\rightarrow$II dokazuje se potpuno slično kao teorem 14.10.2.1.

Prelaz II$\rightarrow$I je evidentan, jer je I specijalan slučaj od II.

Dokažimo ekvivalenciju IV$\rightarrow$II. Ako je

$$U = \bigcup_S S, (S \in M) \text{ bit će } S \subseteq U.$$

Ako skup U dobro uredimo, postat će time dobro uređenim i svaki $S \in M$, pa sa $f(S)$ možemo označiti prvi element dobro uređenog dijela S dobro uređenog skupa U.

Ostaje još zaključak II$\rightarrow$IV. To je glasoviti Zermelov teorem o mogućnosti dobrog uređenja svakog skupa. Neka je dakle S proizvoljan skup kojega valja dobro urediti. Promatrajmo partitivni skup

(15 4.1) $$P(S) \text{ svih } X \subseteq S.$$

Prema hipotezi II postoji preslikavanje f:

(15.4.2) $$f(X), (v \subset X \in P(S)) \text{ sa svojstvom}$$

(15.4.3) $$f(X) \in X.$$

Naravno, možemo se ograničiti na slučaj, kad je S beskonačan. Neka je tada

(15.4.4) $$\omega(kS) = \sup_\alpha \alpha,$$

pri čemu α prolazi svim ordinalnim brojevima — rješenjima relacije

(15.4.5) $$k\alpha \leqslant kS.$$

Tvrdimo, da je

(15.4.6) $$kS \leqslant k\omega(kS).$$

U obrnutom slučaju, idemo na osnovu hipoteze II, dokazati da bi bilo

(15.4.7) $$k\omega(kS) \leqslant kS$$

što bi bilo apsurd, jer bi iz te relacije izlazilo, da i broj $\omega(kS)+1$ zadovoljava (15.4.5), pa dakle bi na osnovu definicije (15.4.4) moralo biti $\omega(kS)+1 \leqslant \omega(kS)$, što je u protivnosti s osnovnom nejednakosti $\xi+1 > \xi$ za svaki redni broj ξ.

Pokušajmo i na osnovu transformacije (15.4.2), skup $(-\infty, \omega(kS))$ preslikati na skup S. Da počnemo, neka je $s_0 = f(S)$; neka je $0 < \alpha < \omega(kS)$ i pretpostavimo, da su već definirani različiti elementi s_ξ za $\xi < \alpha$.

Promatrajmo skup

$$S_\alpha = S \setminus \{s_0, s_1, \ldots, s_\xi, \ldots\}, \ (\xi < \alpha).$$

Zbog pretpostavke, da relacija (15.4.6) ne važi, skup S_α ne bi bio pust; stavimo $s_\alpha = f(S_\alpha)$; tada će prema (15.4.3) biti $s_\alpha \in S_\alpha$ pa je dakle s_α različit od svih s_ξ, $(\xi < \alpha)$.

Kad dakle nebi važilo (15.4.6), mogli di obrazovati transfinitni niz

$$s_0, s_1, \ldots, s_\alpha, \ldots, (\alpha < \omega(kS))$$

različitih točaka skupa S, što znači da bi važilo (15.4.7). A to je, kako vidjesmo, nemoguće. Prema tome važi (15.4.6); a to znači, da se zadani skup S može na obostrano jednoznačan način preslikati na izvjestan skup $\varphi(S)$ rednih brojeva $< \omega(kS)$. Prenesemo li uređenje sa skupa $\varphi(S)$ na sam skup S, tako da ta transformacija postane sličnost, postat će skup S dobro uređenim, jer je dobro uređen i $\varphi(S)$ kao određen skup rednih brojeva.

III→IV. To je sadržina teorema 15.3.3.

IV→III. To je sadržina teorema 12.3.3 i 12.4.1.

IV→ V. To je sadržano u teoremu 15.2.6.

IV→VI. To je sadržaj teorema 15.2.6 i korolara 15.2.2.

IV→VII. To je dokazano teoremom 15.2.4.

Dokažimo V→III (L e s n i e w s k i) Stvarno, neka su k, m ma kakva dva kardinalna beskonačna broja; tada treba dokazati, da važi bar jedna od relacija $k \leqslant m$, $k \geqslant m$. Promatrajmo sumu $k + m$. Naravno da je

$$k + m \leqslant k$$

$$k + m \leqslant m.$$

Po hipotezi V mora u tim relacijama stajati mjesto $\leqslant$ bar jedanput znak $=$. Neka je na pr. $k + m = k$; onda ona druga relacija postaje $k \leqslant m$. Ako je pak $k + m = m$, onda prva relacija daje $m \leqslant k$ i t. d.

VI→IV (T a r s k i)[1]) t. j. uz pretpostavku VI dokažimo, da je svaki beskonačni kardinalni broj m alef. Neka je $\aleph(m)$ onaj alef koji nije ni manji ni veći od m (v. korolar 15.3.1). Za transfinitne brojeva m i $\aleph(m)$ imamo dakle, prema hipotezi VI, $m + \aleph(m) = m \cdot \aleph(m)$. Odmah ćemo dokazati da su m i $\aleph(m)$ uporedljivi,[2]) dakle $m = \aleph(m)$.

---

[1]) T a r s k i je dokazao još nekoliko ekvivalencija s izbornim aksiomom (v. Fundamenta Mathematicae, 5 (1924), 147—154).

[2]) F. B e r n s t e i n u svojoj tezi *Untersuchungen aus der Mengenlehre*, 1901, tvrdi, da za beskonačne kardinalne brojeve m, n *individualna* jednakost $m \cdot n = m + n$ povlači individualnu uporedljivost m i n. Bez aksioma o izboru mi to ne znamo dokazati; umijemo tek dokazati da je ili $m \leqslant n$ ili je m kardinalan broj izvjesne porodice P disjunktnih skupova $\subseteq M$, gdje je skup M potencije m. Bez aksioma izbora, ne umijemo dokazati da je tada $n \leqslant m$, jer *ne umijemo dokazati da svaka familija disjunktnih skupova množine* S ima potenciju $\leqslant kS$. Zato se postavlja ***problem da se izgradi i takova teorija kardinalnih brojeva kod koje se ne služimo biunivokim (obostrano jednoznačnim) transformacijama*** nego preslikavanjima kod kojih *različite točke* jednog skupa prelaze u *disjunktne dijelove* drugoga skupa (problem 15.4.1).

Stvarno, neka su M i N dvije disjunktne množine potencije m odn. $\aleph(m)$. Tada pretpostavljena jednakost $k(M \cup N) = k(M \times N)$ znači, da postoji obostrano jednoznačno preslikavanje φ unije $M \cup N$ na $M \times N$ tako da je dakle

$$\varphi(M) \subset M \times N, \quad \varphi(N) \subset M \times N.$$

Tada nastupa jedan i samo jedan od ova dva slučaja:

Prvi slučaj: ima bar jedan $x \in M$ tako da je $x \times N \subseteq \varphi(M)$; to znači da je

$$kN = k(x \times N) \leqslant k\varphi(M) = kM = m \text{ t. j. } \aleph(m) \leqslant m \text{ dakle } \aleph(m) = m.$$

Drugi slučaj: ni za jedan $x \in M$ nije $x \times N \subseteq \varphi(M)$, nego je dakle

$$(x \times N) \cap \varphi(N) \neq v \text{ za svaki } x \in M. \tag{15.4.8}$$

To drugim riječima znači, da svakom $x \in M$ pripada potpuno određen neprazan dio (15.4.8) dobro uređene množine $\varphi(N)$; označimo li sa $f(x)$ prvi element dobro uređene množine (15.4.8), dobije se time obostrano jednoznačno preslikavanje skupa M na jedan dio skupa $\varphi(N)$; to znači da je

$$kM \leqslant k\varphi(N) = kN = \aleph(m) \text{ dakle } kM = \aleph(m),$$

po samoj definiciji broja $\aleph(m)$.

Dakle iz hipoteze VI proizlazi, da je svaki kardinalni broj $m \geqslant \aleph_0$ izvjestan alef.

Da lanac zatvorimo, dokažimo najzad ispravnost prelaza VII→VI. Stvarno, neka su m, n, ma kakva dva kardinalna transfinitna broja. Treba dokazati da, uz hipotezu VII, važi:

$$m + n = mn. \tag{15.4.9}$$

No za kardinalne brojeve važi:

$$(m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2. \tag{15.4.10}$$

Služeći se hipotezom VI izlazi odatle

$$m + n = m + 2mn + n.$$

Odatle (suma je $\geqslant$ od svakog svojeg sumanda):

$$m + n \geqslant 2mn. \text{ No ovo je } \geqslant mn; \text{ dakle}$$

$$m + n \geqslant mn. \tag{15.4.11}$$

U drugu ruku, kako su m, n beskonačni, bit će

$$m = m + 1, \; n = n + 1 \text{ dakle}$$

$$mn = (m + 1)(n + 1) = mn + (m + n) + 1 \text{ odakle}$$

$$mn \geqslant m + n. \tag{15.4.12}$$

Iz (15.4.11) i (15.4.12) izlazi tražena jednakost $m+n=mn$, a time i zaključak VII→VI.

Time je teorem 15.4.1 potpuno dokazan.

Mi ćemo ubuduće prihvaćati aksiom o izboru.[1] Zato će nam specijalno za svaki skup S kardinalnih brojeva znakovi

$$\inf S \quad \text{i} \quad \sup S$$

predstavljati potpuno određene kardinalne brojeve.[2]

§ 15.5. ZADACI.

§ 15.5.1. Da li je $k\omega^{k\omega} = k\omega^{\omega}$? Zašto?

§ 15.5.2. Dokaži da je $c^{\aleph_0}=c$; naprotiv, bez hipoteze $c=\aleph_1$ danas se pa niti uz pomoć Zermelova aksioma ne zna dokazati da je $\aleph_1^{\aleph_0}=\aleph_1$.

§ 15.5.3. Ako je $\xi<\omega_\alpha$, odredi skupove

$$\xi+(-\infty,\omega_\alpha)_0,\quad \xi\cdot(-\infty,\omega_\alpha)_0$$

i njihov kardinalan broj.

§ 15.5.4. Da li postoji skup S beskonačnih nizova realnih brojeva tako da svaki $f\in C_1(N)$ nastaje permutacijom jednog jedinog $f_1\in S$? (naravno, f i f_1 su nizovi realnih brojeva).

Problem 15.5.1. Da li se iz hipoteze da se svaki skup može potpuno urediti može izvesti zaključak da se svaki skup može dobro urediti?

§ 16. DJELIMIČNO UREĐENI SKUPOVI. NEKOLIKO VRSTA DJELIMIČNO UREĐENIH SKUPOVA (POLU-UREĐENI SKUPOVI, RAZVRSTANI SKUPOVI)

Dosad smo uglavnom izučavali potpuno uređene skupove. Od sada će nas naprotiv više zanimati opći djelimično uređeni skupovi. U ovom ćemo §-u navesti nekoliko vrsta takovih skupova, koje ćemo u narednim paragrafima detaljnije promatrati.

§ 16. 1. **Definicije. Osnovni primjer. Filtar.** Sjetimo se, da smo u § 8.1 tročlani niz $(S;\approx;\leqslant)$ sastavljen od skupa S, relacije ekvivalentnosti $\approx$ u S i relacije poređaja $\leqslant$ u S nazivali *djelimično (parcijalno) uređenim skupom* ako su ispunjena ova tri uslova:

[1] To ne znači, da nema smisla provoditi istraživanja bez izbornog aksioma. Baš naprotiv! Od interesa bi bilo znati kakvu sve strukturu mogu imati skupovi kardinalnih brojeva, shvaćeni kao parcijalno uređeni skupovi.

[2] Šta *inf S i sup S* znači za parcijalno uređene skupove S, bit će rečeno kasnije.

Uslov refleksivnosti: $x \approx x$, $x \leqslant x$, $(x \in S)$;

uslov tranzitivnosti: $\begin{cases} \text{ako je } x, y, z \in S \text{ te } x \approx y \approx z, \text{ onda je } x \approx z; \\ \text{ako je } x, y, z \in S, \text{ te } x \leqslant y \leqslant z, \text{ onda je } x \leqslant z; \end{cases}$

uslov djelimične simetrije: ako je $x, y \in S$ te $x \approx y$, onda je i $y \approx x$ te istodobno $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$.

Mnoge definicije i pojmovi prenose se s potpuno uređenih skupova na opće djelimično uređene skupove. Tako na pr, znamo bez daljnjega što će nam značiti oznake:

(16.1.1)

$(-\infty, x)_S$, $(-\infty, x]_S$, $(x, \infty)_S$, $[x, \infty)_S$, $(x, y)_S$, $[x, y)_S$, $(x, y]_S$, $[x, y]_S$ i t. d.

Spomenimo na pr. da je $(-\infty, x)_S$ odn. $(-\infty, x]_S$ skup svih onih točaka iz S koje su $< x$ odn. $\leqslant x$.

Ali, ovdje ima smisla promatrati i skup

(16.1.2) $$[x]_S = [x] \quad \text{odn.} \quad (-\infty, x, \infty)_S$$

svih točaka iz S koje su *uporedljive* sa x. Za uređene skupove, važi naravno $(-\infty, x, \infty)_S = S$, $(x \in S)$.

Skup $[x]_S$ zove se *loza elementa x s obzirom na skup S.*

Lema 16.1.1. Vazda je $[x]_S = (-\infty, x]_S \cup (x, \infty)_S$, $(x \in S)$.

Osnovni primjer 16.1.1. Svaka porodica skupova određen je djelimično uređen skup s obzirom na relaciju inkluzije $\subseteq$ odn. $\supseteq$.

Primjedba 16.1.1. Ako izričito ne kažemo drukčije svaka obitelj skupova smatrat će se uređenom pomoću silazne relacije $\supseteq$. Koliko je taj primjer važan vidi se odatle što važi i obrat:

Teorem 16.1.1. *Ako je S bilo koji djelimično uređen skup, sličan je on sa množinom $PK(S)$ svih skupova $(-\infty, x]_S$, $(x \in S)$, kad se ta množina djelimično uredi relacijom $\subseteq$.*

Stvarno, preslikavanje

$$\varphi(x) \equiv (-\infty, x]_S, \quad (x \in S)$$

je sličnost između S i $PK(S)$. Jer, ako je $x < x'$ u S, onda je $\varphi(x) \subset \varphi(x')$; ako su x, x' neuporedljivi, tada su neuporedljivi i skupovi $\varphi(x)$, $\varphi(x')$, jer niti je $\varphi(x) \subseteq \varphi(x')$ niti $\varphi(x) \supseteq \varphi(x')$.

Definicija 16.1.1. (Čvorovi).

Za zadani $a \in S$ promatrat ćemo skup

(16.1.3) $$(-\infty, x|_S \quad \text{odn.} \quad (-\infty, x|$$

sastavljen od svih točaka $y \in S$ za koje je

$$(-\infty, x)_S = (-\infty, y)_S$$

i kojima se dakle pretki podudaraju sa pretkima točke x.

Analogno, sa

(16.1.4) $\quad |x, \infty)_S$ odn. $|x, \infty)$

označit ćemo skup svih $y \in S$ za koje je

$$(x, \infty)_S = (y, \infty)_S$$

i kojima se dakle potomstvo u S podudara s potomstvom elementa x u S.

Skup (16.1.3) odn. (16.1.4) zvat će se *lijevim (desnim) čvorom x skupa* $(S; \leq)$.

Odmah se vidi da je skup

(16.1.5) $\quad (-\infty, x|_S \cap |x, \infty)_S$

sastavljen od svih točaka skupa S koje imaju i zajedničke pretke sa x i sve zajedničke potomke sa x.

Početni i završni komadi skupa S definiraju se kao i kod potpuno uređenih skupova; tako na pr. završan komad skupa S jest svaki skup $X \subseteq S$ koji ima svojstva da

(16.1.6) $\quad$ iz $a \in X$ slijedi $[a, \infty)_S \subseteq X$.

Tako na pr. u skupu $(P(N); \subseteq)$ svih dijelova skupa N uređenom relacijom $\subseteq$ skup svih beskonačnih dijelova skupa N obrazuju završan komad.

U posljednje vrijeme izvjesni početni komadi djelimično uređenih skupova oblika

$$(P(M); \supseteq)$$

igraju osobitu ulogu, to su t. zv. *filtri skupa M*. Precizirajmo!

Definicija 16.1.2. (Filtar).

Pod *filtrom skupa* M razumijevamo svaki početni pravi komad djelimično uređena skupa $(P(M); \supseteq)$, ukoliko presjek svakog konačnog dijela toga komada njemu opet pripada.

Prema tome, nijedan filtar skupa M ne sadrži prazan skup kao svoj element, jer bi se inače filtar podudarao sa čitavim skupom $P(M)$; ali svaki filtar sadrži M kao svoj element.

Primjer 16.1.2. Za svaki skup $M \supset v$, familija $\{M\}$ sastavljena od M kao svog jedinog elementa jest određen filtar na skupu M. To je *najgrublji* filtar na skupu M. [1])

Primjer 16.1.3. Komplementi konačnih skupova s obzirom na skup N prirodnih brojeva obrazuju filtar skupa N (Fréchetov filtar) koji dolazi u vezi s klasičnim limesom. [2])

---

[1]) Ako su F_1, F_2 dva filtra na skupu M, pa ako je $F_1 \subseteq F_2$, kaže se, da je filtar F_1 *manje fin (manje jak* ili *grublji)* nego što je filtar F_2. U općem slučaju, dva su filtra *neuporedljiva.*

[2]) Cartanova ideja pri uvođenju filtra i bila je da nađe prikladan aparat za obrađivanje opće konvergencije. Primijetimo da je svaki filtar djelimično uređen skup (i to s obzirom na relaciju $\supseteq$ ako izričito ne kažemo drukčije).

§ 16.2 **Poluuređeni skupovi.** Reći ćemo da je djelimično uređeni skup *(L, $\approx$, $\leqslant$) uređen odozdo*, (slijeva, sprijeda i sl.) spram $\leqslant$, ako ispunjava ovaj

Uslov račvanja s obzirom na $\leqslant$. Za svaku točku skupa skup svih njenih prethodnika čini potpuno uređen dio zadana skupa. [1])

Lema 16.2.1. Da djelimično uređen skup S ispuni uslov odvajanja nužno je i dovoljno da za ma koja dva njegova *neuporedljiva* elementa x, y bude $[x, \infty)_S \cap [y, \infty)_S = v$.

Analogno se definiraju *odozgo uređeni* skupovi, kao oni djelimično uređeni skupovi koji zadovoljavaju

Uslov račvanja s obzirom na $\geqslant$. Za svaki $x \in S$, skup $(x, \infty)_S$ je potpuno uređen.

Obostrano uređen skup jest onaj koji je uređen odozdo i odozgo.

Skup koji je uređen odozdo ili odozgo ili oboje, zvat ćemo kraće *polu-uređen skup.* Ako ne istaknemo obrnuto, obično ćemo misliti pod riječi *„polu-uređen"* pojam *„uređen odozdo"*.

§ 16.3. **Razvrstani skupovi ili rodoslovlja.** Reći ćemo, da je skup $(S; \leqslant)$ *razvrstan* ili *da je rodoslovlje,* ako je on djelimično uređen s obzirom na relaciju $\leqslant$ te ako ispunjava ovaj

Uslov (D). *Svaki potpuno uređeni dio skupa jest dobro uređen.*

Zbog lakšeg izgovaranja nazivat ćemo *razvrstano uređen skup* svaki skup koji je *razvrstan i uređen spram lijevo.*

Primjer 16.2.1. Ako je S skup ljudskih bića rođenih tokom naše ere, pa, ako za njegove članove a, b relacija $a \leqslant b$ znači da je $b = a$ ili da b pripada po krvi direktnom potomstvu bića a, onda je skup $(S; \leqslant)$ isto kao i skup $(S; \geqslant)$ razvrstan.

§ 16.4. **Dva primjera.** Vidjet ćemo, da se razvrstani skupovi javljaju u vezi sa Cantorovim, a razvrstani poluuređeni skupovi u vezi sa Suslinovim problemom o kontinuumu.

Navedimo naime dva slijedeća tipična primjera:

Primjer 16.4.1. *(superpozicija položaja).* Nek su

$$(S; \leqslant_1) \text{ i } (S; \leqslant_2) \tag{16.4.1}$$

dva uređenja (potpuna ili djelomična) istoga skupa S; ako nam tada za $x, y \in S$ relacija

$$x \leqslant y \tag{16.4.2}$$

ima da znači isto što i sistem relacije

$$x \leqslant_i y, \ (i = 1, 2) \tag{16.4.3}$$

[1]) Odmah se vidi da je uslov odvajanja ekvivalentan s ovim: *ma koja dva prethodnika jedne te iste točke skupa međusobno su uporedljiva* t. j. *nijedan element skupa nema neuporedljivih predaka.*

tada je skup S djelimično uređen spram $\leqslant$ pa možemo reći da uređenje $(S; \leqslant)$ nastaje *slaganjem (superpozicijom) zadanih uređenja* (16.4.1).[1]

Superponira li se ma koje *dobro uređenje* skupa S s ma kakvim uređenjem toga istoga skupa, dobit ćemo kao rezultat to da će skup S postati razvrstanim skupom.

To je jasno, jer svaki uređeni dio D skupa $(S; \leqslant)$ sličan je samom sebi u zadanom dobrom uređenju skupa S pa je dakle i $(D; \leqslant)$ dobro uređen (v. primjer 17.2.1).

Tako na pr. imamo li elemente 1, 2, 3, 4 pa promatramo osim toga prirodnog uređenja i kakvo drugo uređenje na pr. (permutaciju) 2, 3, 1, 4, tada superpozicijom tih dvaju uređenja koje možemo shematski prikazati ovako:

$$1 \to 2 \to 3 \to 4$$

$$2 \to 3 \to 1 \to 4$$

nastaje ovo parcijalno uređenje:

(16.4.4)
$$\begin{array}{l} 2 \to 3 \to 4 \\ 1 \longrightarrow\!\!\!\!\lrcorner \end{array}$$

Tu se strjelica $\to$ čita „prethodi" ili slično. Neuporedljivi elementi nisu niti direktno niti indirektno spojeni nikakvom crtom.

Primjer 16.4.2. *(uređenje po početnoj podudarnosti uređenih skupova).* Ako je

(16.4.5) $$M$$

ma kakva množina uređenih (najčešće dobro uređenih) skupova, pa ako za $A, B \in M$ relacija

(16.4.6) $$A \, K \, B \quad (\text{čitaj: } A \text{ početni komad od } B)$$

znači isto što i činjenica da je uređeni skup A početni komad uređena skupa B, dobivamo tim uređenjem poluuređeni skup

(16.4.7) $$(M; K).$$

Koliko je taj primjer karakterističan pokazuje teorem 16.1.1 od maloprije.

Prema njemu, ako je S *ma kakav slijeva uređen skup*, pa ako *uredimo porodicu* $PK(S)$ *svih* $(-\infty, a]_S$ *pomoću relacije* $\subset$, *nastali skup* $(PK(S); \subseteq)$ *je uređen slijeva i sličan sa zadanim skupom* S.

---

[1] Naravno, da se analogno definira superponiranje od proizvoljno mnogo uređenja istog skupa. Kao što će biti dokazano na drugom mjestu, važi i obrat: *svaki djelimično uređen skup nastaje superponiranjem izvjesnog broja potpunih uređenja toga skupa.*

§ 16.5. **Operator** w. Naročito je interesantan slučaj, kad pođemo od kakva djelimično uređeņa skupa S pa na način (16.4.6) uređujemo množinu

(16.5.1) $$wS$$

svih dobro uređenih skupova $\subseteq S$. Tako se dobije razvrstan polu-uređen skup

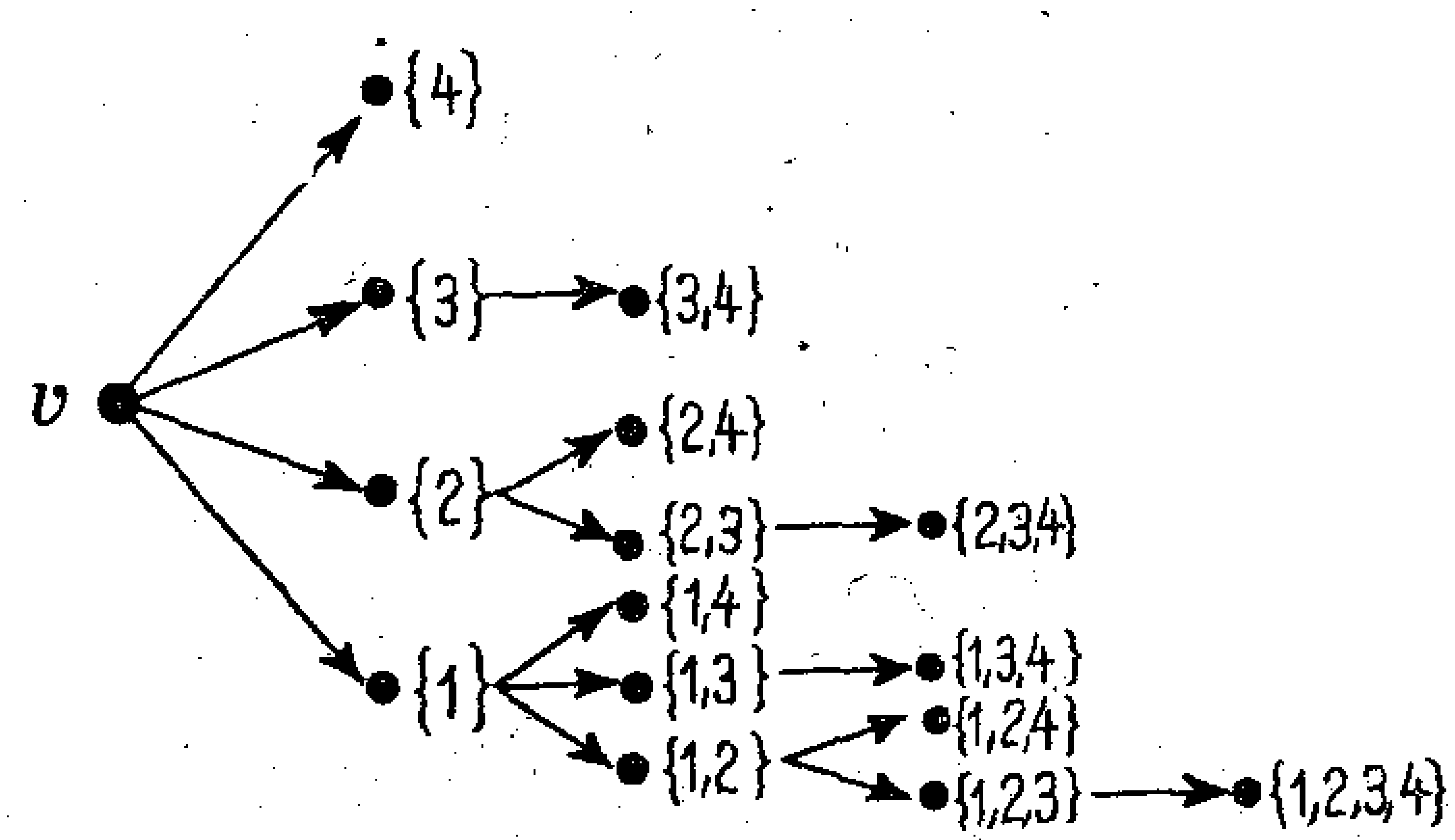
(16.5.2) $$(wS;\ K)$$

koji je u najužoj vezi sa Suslinovim problemom.

Tako na pr. za uređen skup $\{1 < 2 < 3 < 4\}$, možemo pripadnu množinu

(16.5.3) $$(w\{1 < 2 < 3 < 4\};\ K)$$

prikazati ovom shemom:



Sl. 16.5.1.

Odmah primijećujemo, da se u toj shemi nigdje ne sastaju šiljci dviju ili više strjelica. To je očigledni izraz činjenice da je dobiveni skup (16.5.2) uređen odozdo (odn. slijeva).

§ 16.6. **Istaknute vrste skupova u zadanom parcijalno uređenom skupu** $S = (S;\ \leqslant)$. Pojedini djelimično uređeni skup $(S;\ \leqslant)$ može biti nosiocem raznih istaknutijih vrsta skupova kao: uređenih, dobro uređenih, potpuno neuređenih) tj. bez neekvivalentnih uporedljivih elemenata, razvrstanih, poluuređenih, obostrano uređenih, razvrstano uređenih itd. O tome kako izučavanje tih pojedinih vrsta skupova izvađenih iz S može baciti svjetla i na sam skup S uvjerit ćemo se u daljem izlaganju.

Zgodno je već sada uvesti kratice:

(16.6.1) $$k_c S = \sup_{x \subseteq S} k x,$$

x prolazi pritom svima dobro uređenim skupovima $\subseteq S$;

(16.6.2) $$k_d S = \sup_{x \subseteq S} k x,$$

x prolazi pritom svima protivno dobro uređenim skupovima $\subseteq S$ t. j. $k_d(S;\ \leqslant) = k_c(S;\ \geqslant)$;

(16.6.3) $$k_s M = \sup_{x \subseteq M} k x,$$

x prolazi svima potpuno neuređenim skupovima $\leq M$;

(16.6.4) $$b S = \sup_{x \subseteq S} k x,$$

pri čemu x ima biti obostrano uređenim skupom $\leq S$.

Indeksi *c, d, s* su početna slova riječi *cresco* (rasti), *decresco* (umanjivati se, padati) i *Suslin*.

§ **16.7. Struktura obostrano uređenih skupova. Broj** bS. Rekli smo da je S obostrano uređen, ako je za svaki $x \in S$ uređen i skup $(-\infty, x)_S$ i skup $(x, \infty)_S$. Odatle neposredno izlazi

Lema 16.7.1. *Da djelimično uređen skup S bude obostrano uređen, nužno je i dovoljno, da za svaki $x \in S$ skup svih točaka uporedljivih sa x bude potpuno uređen.*

Lema 16.7.2. *Da djelimično uređen skup bude obostrano uređen, nužno je i dovoljno da relacija uporedljivosti bude tranzitivna.*

Prema tome, da skup S bude obostrano uređen, treba a i dosta je da za $x, y \in S$ skupovi $(-\infty, x, \infty)_S$, $(-\infty, y, \infty)_S$, budu ili identični ili disjunktni.

Na taj način, svaki obostrano uređen skup sastavljen je od određene porodice P uređenih skupova koji teku tako reči *pararelno jedni prema drugima,* jer nijedan od tih uređenih skupova ne sadrži točke koja bi bila uporedljiva s kojim elementom bilo kojeg drugog člana porodice P.

Teorem 16.7.1. *Ako je S bilo koji djelimično uređen skup, supremum*

(16.7.1) $$b(S)$$

kardinalnih brojeva obostrano uređenih skupova $\leq S$ podudara se sa supremom

(16.7.2) $$b_1(S)$$

kardinalnih brojeva skupova $\leq S$ koji su bilo potpuno uređeni bilo potpuno neuređeni.

Kako je svaki potpuno uređeni odn. svaki potpuno neuređeni skup obostrano uređen, svakako je $b(S) \geqslant b_1(S)$.

No kada bi bilo

(16.7.3) $$b S > b_1 S,$$

to bi značilo, da postoji obostrano uređen skup $F \leq S$ sa svojstvom

(16.7.4) $$k F > b_1 S.$$

No, kako je F obostrano uređen, sastoji se on od izvjesne porodice P neuporedljivih potpuno uređenih skupova; zato je

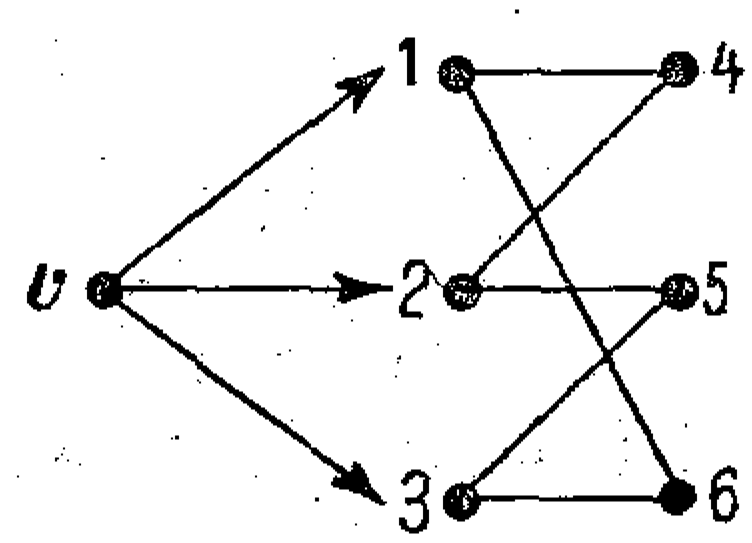
$$kF \leqslant kP \cdot \sup_{a \in F} k(-\infty, a, \infty)_F \leqslant k_s F \cdot \sup_{a \in F} k(-\infty, a, \infty)_F \leqslant$$
$$\leqslant \sup\,(k_s F, \sup_{a \in F} k(-\infty, a, \infty)_F) \leqslant b_1 S \quad \text{dakle}$$
$$kF \leqslant b_1 S.$$

što je u protivnosti sa (16.7.4).

§ 16.8. ZADACI.

§ 16.8.1. Promatraj skup S sastavljen od svih linearnih prostora $\subseteq C_3$ [1]) pa ga uredi relacijom $\subseteq$. Ako je $x \in C_3$, odredi skup $R_0(x, \infty)_S$ svih njegovih neposrednih sljedbenika.

§ 16.8.2. Skup $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ djelimično uredi ovako:



dokaži da je taj skup trodimenzionalan.[2]) Uvjeri se, da je taj skup sličan sa skupom $((3))$ koji je sastavljen od v, vrhova i stranica trokuta, te samog trokuta, a uređenim relacijom $\subseteq$. Generaliziraj!

§ 16.8.3. Promatraj koje pravilno tijelo t i pripadajući djelimično uređeni skup iz zad. 11.6.8; odredi dimenziju toga skupa.

§ 16.8.4. *(Tri vrste produkta dvaju uređenih skupova).* Kombinirani produkt $A \times B$ uređenih skupova A, B možemo urediti tako da za njegove elemente $f = (f_1, f_2)$, $g = (g_1, g_2)$ relacija $f \leqslant g$ ima da znači:

I. $f_i \leqslant g_i$, $(i \in \{1, 2\})$ (glavni ili kardinalni produkt).

II. $f_i = g_i$, $(i \in \{1, 2\}$, ili $f_i < g_i (i \in \{1, 2\})$ (čisti produkt).

III. (leksikografsko uređivanje) $f_1 < g_1$, ili pak $f_1 = g_1$ sa $f_2 < g_2$ (redni ili ordinalni produkt). Konkretiziraj $A = B =$ linearni kontinuum C.

§ 16.8.5. Definiraj glavni i čisti produkt koje god obitelji uređenih skupova $f(x)$, $(x \in S)$.

---

[1]) Prostor je linearan, ako on sadrži čitav pravac čim sadrži dvije njegove različite točke.

[2]) *Dimenzija djelimično uređena skupa* $(S; \leqslant)$ jest infinum kardinalnih brojeva kF, pri čemu F označuje familiju potpunih uređenja skupa S tako da se njihovom superpozicijom dobije baš uređenje $(S; \leqslant)$.

Problem 16.8.1. Ako je p poliedar, neka $[P]$ znači skup sastavljen od prazna skupa, vrhova, bridova, strana poliedra P te od samog poliedra P; odredi kardinalni broj;

$$\sup_P dim ([P]; \subset),$$

tu je *dim* kratica za dimenziju; naravno P prolazi skupom svih poliedara $\subseteq C_3$.

§ 17. RAZVRSTANI SKUPOVI ILI RODOSLOVLJA.

Kratkoće radi, ubuduće će nam, ako izričito ne kažemo drukčije

(17.1) $$W \text{ odn. } T$$

označivati bilo koji raznovrstan odn. razvrstano uređen (= razvrstan poluuređen) skup. Prema tome svaki T je neki specijalan W.

§ 17.1. **Početni sloj (operator R_0).** Neka je S bilo kakav djelimično uređen skup. Ako je

(17.1.1) $$x \in S \quad \text{i} \quad (-\infty, x)_S = v,$$

veli se, da je x *početni (inicijalni) element* skupa S.

Ako je S razvrstan, tada je egzistencija početnih elemenata očigledna. Jer, ako je $a \in S$, onda ili je a početna točka ili ispred a ima bar jedna točka recimo a_1; ponavljajući isti zaključak, dobili bi $a_2 < a_1$ pa možda $a_3 < a_2$; no proces se nakon konačno mnogo koračaja mora svršiti, jer bi u obrnutom slučaju dobili beskonačnu regresiju $a > a_1 > > a_2 \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$ što je nemoguće, jer ona kao uređen dio skupa S morala bi imati početnu točku.

Skup svih početnih točaka skupa S zvat ćemo *početnim slojem (vrstom, grupom, kategorijom)* skupa S, a označivat ćemo ga sa

(17.1.2) $$RS \text{ ili } R_0 S \text{ odn. } R(S) \text{ ili } R_0(S).$$

Ako je skup S prazan ili ako S nema nijednog početnog elementa, stavit ćemo $RS = v$.

Lema 17.1.1. *Početni sloj $R_0 S$ je posve neuređen dio skupa S.*

Početni sloj ima naročitu ulogu kod razvrstanih skupova (skupova W) i odgovara početnom elementu dobro uređenih skupova.

Teorem 17.1.1. *Početni sloj $R W$ razvrstana puna skupa W okarakterisan je kao onaj dio X skupa W koji je sastavljen od sve samih neuporedljivih elemenata i za koji je*

(17.1.3) $$\bigcup_{x \in X} [x, +\infty)_W = W.$$

Prema tome, W je izvjestan *maksimalan* potpuno neuređen[1]) dio skupa W.

Dokažimo najprije, da iz relacije (17.1.3) slijedi $X \subseteq RW$ t. j. da je svaki $x \in X$ početni element skupa W. U obrnutom slučaju postojao bi izvjestan $x \in X$ tako da bude

(17.1.4) $$x' < x,\ x' \in W;$$

naravno, x' ne može ležati u X, jer je X posve neuređen. A sa druge strane relacija (17.1.3) i $x' \in W$ znači, da ima bar jedan $x'' \in X$, tako bude $x'' \leqslant x'$. A to, zajedno sa (17.1.4) značilo bi, da je $x'' < x$ t. j. da su x, x'' dvije nejednake uporedljive točke skupa X, protivno lemi 17.1.1. U drugu ruku, $R_0 W \subseteq X$. Jer, za svaki $x \in RW$ postoji, prema (17.1.3) bar jedan $x_0 \in X$, tako da bude $x_0 \leqslant x$: no kako je x početna točka, slijedi odatle $x_0 = x$ dakle $x \in X$.

Korolar 17.1.1.

(17.1.4) $$\bigcup_x [x, \infty)_W = W, \ (x \in RW).$$

Shematsko predočivanje početnog sloja RW.

Shematski možemo RW predočiti izvjesnim skupom točaka na izvjesnom okomitom pravcu p_0. Točke skupa $W \setminus RW$ zamišljat ćemo shematski, da su smještene desno od pravca p_0 (isp. sl. 16.5.1, zad. 16.8.4 i sliku 17.2.1).

Naravno, da nas ništa ne sprječava, pa da početni sloj zamišljamo i horizontalno, a preostali dio ispod njega (tako na pr. radi G. Birkhoff).

§ 17.2. Slojevi (vrste) djelimično uređena skupa S, njegov rang γS i jezgra JS (operatori γ i J).

Imamo slijedeću osnovnu rekurziju:

(17.2.1) $$R_0 S = RS \quad \text{i}$$

(17.2.2) $$R_\alpha S = R_0 (S \setminus \bigcup_{\xi < \alpha} R_\xi S) \quad \text{za svaki redni broj } \alpha > 0.$$

Na osnovu transfinitne indukcije definiran je i potpuno određen $R_\alpha S$ za svaki redni broj α. Naravno, kako je S zadan skup (a ne na pr. nikakav hiper-skup), postoji bar jedan α tako da bude $R_\alpha S$ = vacuum = v. Neka

(17.2.3) $$\gamma S \quad \text{odn.} \quad \gamma(S)$$

označuje *prvi* redni broj za kojega to važi. Prema tome,

(17.2.4) $$R_\alpha S \supset v \quad \text{za} \quad \alpha < \gamma S \quad \text{i}$$

(17.2.5) $$R_{\gamma S} S = v.$$

[1]) Potpuno neuređen ili kraće neuređen značit će *parcijalno uređen* skup bez neekvivalentnih uporedljivih elemenata t. j. svi njegovi elementi međusobno su neuporedljivi, čim među sobom nisu ekvivalentni.

Potpuno određeni redni broj γS zove se *rang ili visina uređena skupa* S i igra vrlo važnu ulogu.

Skupovi

(17.2.6) $$R_0 S,\ R_1 S, \ldots, R_\alpha S, \ldots, \quad (\alpha < \gamma S)$$

zovu se *slojevi* (vrste) skupa S i to po redu sloj 0 ili početni sloj, sloj 1, . . . sloj α, . . . Za prazni skup v stavlja se $\gamma v = 0$.

Skup

(17.2.7) $$J S = S \setminus \bigcup_\alpha R_\alpha S, \quad (\alpha < \gamma S)$$

potpuno je određen dio zadana skupa S; zove se *jezgra skupa* S.

Lema 17.2.1. *Jezgra skupa S jest njegov najveći dio bez ijednog početnog elementa. Jednakost*

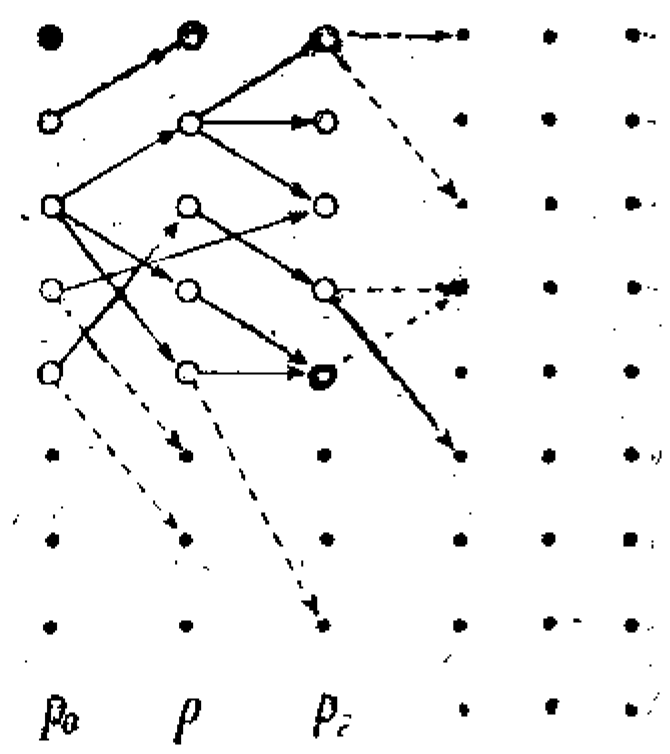
(17.2.8) $$J S = v$$

je karakteristična za razvrstane skupove.

Shematski, možemo svaki sloj $R_\alpha S$ skupa S predočiti izvjesnim točkama okomita pravca p_α; pritom za $\alpha < \beta$ treba *skicirati* pravac p_α lijevo od p_β pa svaki par

$$a \in R_\alpha S, \ b \in R_\beta S$$

za koje je a ispred b spojiti direktno ili indirektno strjelicama od a prema b; strjelice mogu biti i svinute. Neuporedljive točke nisu povezane nikakvim strjelicama. Sama jezgra JS se skicira desno od svih pravaca p_α.



Sl. 17.2.1. Shematski prikaz razvrstana skupa

Nas će osobito zanimati slučaj skupova W (razvrstani skupovi ili rodoslovlja), jer je njihova jezgra prazan skup.

Primjer 17.2.1. Neka je R uređen skup svih racionalnih brojeva, a

(17.2.9) $$r_1, r_2, \ldots r_n, \ldots$$

ma koja njegova numeracija. Označimo sa

(17.2.10) $$(R; \varrho)$$

skup R djelimično uređen relacijom ϱ, pri čemu $x \varrho y$ znači isto što i činjenica da je $x < y$ u R te da je u nizu (17.2.9) x ispred y.

Očito, skup $(R; \varrho)$ je djelimično uređen pa čak i razvrstan. Naravno $R_0(R, \varrho)$ je sastavljen iz r_1, zatim iz prvog broja nadesno u (17.2.9) a nalijevo u R pa od slijedećeg nadesno u (17.2.9), a nalijevo u R i t. d. Prema tome, sloj $R_0(R; \varrho)$ je sastavljen od jedne regresije skupa racionalnih brojeva.

Ako je $x \in R_0(R, \varrho)$, onda u $R_1(R; \varrho)$ ulazi prvi element koji je u (17.2.9) desno od x a u R lijevo od x, pa prvi element koji je u

(17.2.9) nadesno od prethodnog elementa a u R nalijevo od njega itd. Slično važi i za slijedeće slojeve $R_2, R_3, \ldots$ Vidi se odmah, da je

$$\gamma(R, \varrho) = \omega_0.$$

§ 17.3. Glavna svojstva slojeva. Rang-funkcija.

Treba se dobro saživiti sa sadržinom slijedećih 12 lema. One pokazuju koliko je pojam razvrstanih skupova prirodan.

Lema 17.3.1. Za svaki razvrstan skup W njegov rang γW je potpuno određen redni broj. Za svaki $\alpha < \gamma W$, sloj $R_\alpha W$ je jednoznačno određen posve neuređen dio razvrstana skupa W; važe ove relacije:

$$\bigcup_\alpha R_\alpha W = W, \quad (\alpha < \gamma W); \tag{17.3.1}$$

$$\bigcup_\xi R_\xi W \subset W, \quad (\xi < \alpha, \text{ za svaki } \alpha < \gamma W); \tag{17.3.2}$$

$$\bigcup_{x \in R_\alpha W} [x, \infty)_W = \bigcup_\xi R_\xi W, \quad (\alpha \leqslant \xi < \gamma W). \tag{17.3.3}$$

Lema 17.3.2. Ako je $\alpha < \beta < \gamma W$, onda su slojevi $R_\alpha W, R_\beta W$ bez ijedne zajedničke točke.

Lema 17.3.3. Svakoj točki $x \in W$ pripada jedan jedini broj t. zv. *rang* elementa x u skupu W, simbolički

$$\gamma x \text{ odn. } \gamma(x) \text{ odn. } \gamma(x; W) \tag{17.3.4}$$

tako da bude

$$x \in R_{\gamma(x; W)}(W); \tag{17.3.5}$$

prema tome, $\gamma(x; W)$ je redni broj sloja u kojem leži element x.

Uvođenje broja γx znatno olakšava izlaganje materije.

Lema 17.3.4. $\gamma(x; W) = \gamma(-\infty, x)_W, \ (x \in W)$.

Lema 17.3.5. Ako je $x < y$ onda je $\gamma(x) < \gamma(y)$; ako je $\gamma(x) < \gamma(y)$ onda ne može biti y ispred x.

Definicija: Funkcija

$$\gamma(x; W), \ (x \in W)$$

zove se *rang-funkcija skupa* W; ona preslikava na uzlazan način skup W na čitav skup $(-\infty, \gamma W)_0$ rednih brojeva $< \gamma W$.

Lema 17.3.6. *Svaki element x svakog sloja ima u svakom prethodnom sloju bar jednog pretka; simbolički:*

$$(-\infty, x)_W \cap R_\xi W \supset v. \quad (\xi \leqslant \gamma(x; W)). \tag{17.3.6}$$

Lema 17.3.7. *Za svaki razvrstano uređeni skup T, skup* (17.3.6) *je za svaki $\xi \leqslant \gamma(x; T)$ jednočlan.* Za svaki $x \in T$, dobro uređeni skup

$$(-\infty, x)_T \text{ kao redni broj jest } = \gamma(x; T).$$

Lema 17.3.8. *Za opći razvrstani skup W ne mora za svaki $x \in W$ skup*

$$(-\infty, x)_W$$

sadržavati dobro uređenih skupova rednog broja $\gamma(x; W)$. To pokazuje

Primjer 17.3.1. Neka je W skup sastavljen od $1/2$ i svih slogova

$$(n, n+1, \ldots n+k), \ (k = 0, 1, 2, \ldots n-1, n \in N);$$

dok ove međusobno uređujemo po početnom podudaranju, smatrat ćemo $1/2$ kao posljednji element u W. Naravno $\gamma W = \omega + 1$, ma da je svaki uređen dio konačan; specijalno $\gamma(1/2; W) = \omega$, ma da u skupu svih elemenata ispred $1/2$ nema nikakve beskonačne progresije.

Lema 17.3.9. *(invarijantnost slojnosti). Ako je M bilo kakva množina slojeva skupa W, onda je unija*

$$M_0 = \bigcup X, \ (X \in M) \tag{17.3.7}$$

određen razvrstan podskup skupa W, a množina njegovih slojeva podudara se sa zadanom množinom M.

Svaki sloj skupa M_0 je izvjestan sloj zadana skupa W.

Ako je $x, y \in M_0$, tada:

iz $\gamma(x; M_0) = \gamma(y; M_0)$ slijedi $\gamma(x; W) = \gamma(y; W)$ i obrnuto;

iz $\gamma(x; M_0) < \gamma(y; M_0)$ slijedi $\gamma(x; W) < \gamma(y; W)$ i obrnuto.

Zanimljivu pravilnost u razvrstanim skupovima imamo u sadržini ove:

Leme 17.3.10. (Invarijantnost ranga nekojih elemenata). Ako je $M \subseteq W$, tada za svaki

$$a \in W \setminus \bigcup_{x \in M} (x, \infty)_W \text{ [1]} \tag{17.3.8}$$

važi

$$\gamma(a; W) = \gamma(a; W \setminus \bigcup_{x \in M} (x, \infty)_W). \tag{17.3.9}$$

Stvarno, pitanje ranga što ga neki element a ima u nekom skupu je stvar koja je posve određena množinom svih elemenata toga skupa koji su $< a$. No, iz relacije (17.3.8) proizlazi, da a nema nijednog pretka u skupu M pa dakle niti u skupu $\bigcup_{x \in M} (x, \infty)_W$, a to znači, da je skup predaka elementa a isti i u skupu W i u skupu $W \setminus \bigcup_{x \in M} (x, \infty)_W$; odatle prema lemi 17.3.4. izlazi relacija (17.3.9).

Lema 17.3.11. Ako je $\alpha + 1 < \gamma T$, tada je

$$R_{\alpha+1} T = \bigcup_x R_0 (x, \infty)_T, \ (x \in R_\alpha T) \tag{17.3.10}$$

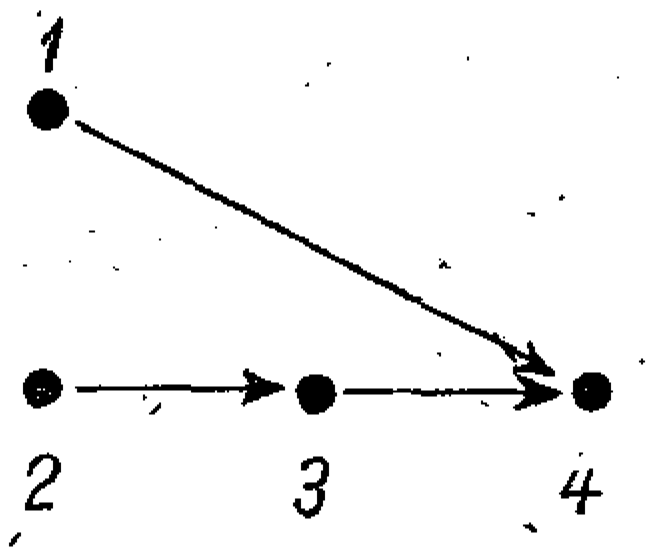
t. j. *svaki sloj prve vrste sastavljen je jedino od neposrednih potomaka elemenata iz prethodnog sloja.*

---

[1]) Sjeti se da $A \setminus B$ znači ono što iz A nastane kad se ukloni (izbriše) B.

Za opće rodoslovlje W ta lema ne vrijedi, kao što to pokazuje

Primjer 17.3.2. Neka je W skup $\{1, 2, 3, 4\}$ ovako razvrstan:



Tu je $R_0W = \{1, 2\}$
$R_1W = \{3\}$
$R_2W = \{4\}$,

pa dakle neposredni potomak 4, elementa $1 \in R_0W$ ne leži u R_1W nego u R_2W.

Lema 17.3.12. *Ako su a, b dvije uporedljive točke razvrstano uređena skupa T, tada svakom eventualnom rednom broju ξ smještenom između rangova*

$$\gamma(a; T) \quad \text{i} \quad \gamma(b; T)$$

odgovara jedna (i samo jedna) točka $x \in T$ koja je uporedljiva i sa a i sa b i za koju je

$$\gamma(x; T) = \xi.$$

Za opći razvrstani skup W, lema 17.3.12. ne važi kao što to prikazuje prethodni primjer 17.3.2, u kojemu je

$$\gamma(1; W) = 0, \ \gamma(4; W) = 2,$$

a međutim nema nijedne točke skupa W koja bi bila ranga 1 i uporedljiva sa 1 i 4, ma da su 1 i 4 uporedljivi.

Prije no što se nismo posve sprijateljili sa sadržinom gornjih 12 lema nije uputno prelaziti na čitanje §-a o Suslinovom i Cantorovom problemu. Skrećemo pažnju na to, da nam gornje leme pokazuju koliko je struktura razvrstano uređenih skupova prostija od strukture općih razvrstanih skupova.

§ 17.4. ZADACI.

§ 17.4.1. Ako je S skup svih točaka, pravaca i ravnina u prostoru, dokaži da se za svaku točku T odn. pravac p skup

$$R_0(T, \infty)_{(S; \underline{\subset})} \quad \text{odn.} \quad R_0(p; \infty)_{(S; \underline{\subset})}$$

podudara sa snopom pravaca kroz T odnosno sveskom ravnina kroz p.

§ 17.4.2. Da li je skup S razvrstan? Odredi mu slojeve i rang.

§ 17.4.3. Odredi slojeve, rang i jezgru djelimično uređena skupa što nastaje superpozicijom ovih permutacija (potpunih uređenja):
a) 1 2 3 4, 4 3 1 2 b) 1 2 3 4, 4 3 2 1 c) 2 3 4 7 9, 7 4 3 9 2, 3 2 7 9 4.

§ 17.4.4. Neperove razvoje t. j. redove $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!}$, u kojem su a_n cijeli brojevi sa svojstvom $0 \leqslant a_n < n$, $(n \in N)$ (dakle je $a_1 = 0$) Denjoy upotrebljava da skup N permutira (uredi) po redu ovako:

Prvi način. Uzme se broj 0 koji će doći ispred čitavog N; zatim se broj 1 stavi iza a_1 t. j. $1 \in R_0(a_1, \infty)_{\{0, 1\}}$; za svaki $n \in N$ u već uređeni skup $\{0, 1, \ldots n-1\}$ metne se i broj n tako da bude $n \in R_0(a_n, \infty)_{\{0, 1, 2, \ldots n\}}$;

Drugi način. Induktivno se skup N uređuje tako da bude
$$\gamma(n; \{1, 2, \ldots, n\}) = a_n \quad \text{(isp. 17.3.5).}$$
Pomoću Neperova razvoja
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-3}{n!}$$
preuredi na jedan i drugi način skup N; da li su dobivene permutacije (uređenja) slične?

§ 17.4.5. Promatraj skup $(T; \leqslant)$ konačnih slogova prirodnih brojeva uređenih po početnoj podudarnosti t. j. za slogove A i B značit će $A \leqslant B$, da je slog A podudaran s početnim komadom sloga B; odredi slojeve, rang i jezgro skupova
$$(T; \leqslant) \text{ i } (T; \geqslant).$$

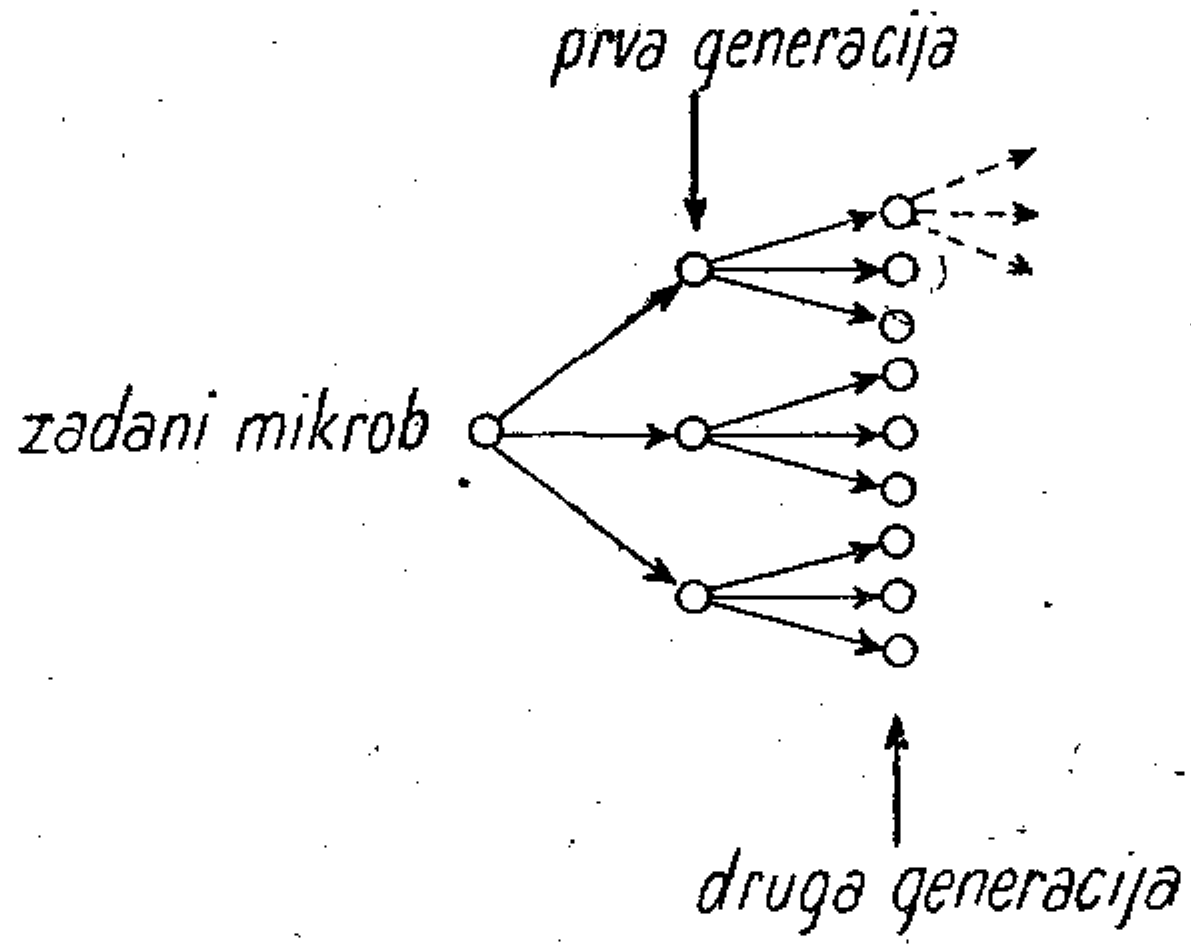
§ 17.4.6. Jedinični segment $[0, 1]$ razdijeli na 2^n jednakih segmenata $(n \in N)$; promatraj obitelj P_n svih tih segmenata. Ako je P porodica svih segmenata što se tako dobije kad n prođe skupom N, promatraj skup $(P; \subseteq)$. Dokaži da je to razvrstano uređen skup ranga ω i da je sloj $R_n(P: \subseteq)$ sastavljen od 2^{n+1} jednakih segmenata.

§ 17.4.7. Za svaki skup S vrijedi
$$\gamma(P(S); \subseteq) = kS \text{ ili } \omega,$$
već prema tome, da li je S konačan (odn. v) ili beskonačan.

§ 17.4.8. Odredi slojeve, rang i jezgru skupova
$$(P(S); \subseteq), \ (P(S); \supseteq)$$
za bilo koji skup S.

§ 18. SUSLINOV PROBLEM.

§ 18.1. **Biološki primjer razvrstano uređenih skupova i njegova matematička formulacija.** Znamo, da u prirodi ima organizama (razni mikrobi) koji potomstvo daju na taj način, da se svako od tih bića razdijeli na 2 ili više dijelova, a ovi dalje samostalno svaki za sebe nastavljaju da se množe na isti način. Shematski možemo potomstvo jednog takvog mikroba prikazati ovako: (v. sl 18.1.1).



Sl. 18.1.1
Iz svakog mikroba nastaju po tri nova mikroba

Vidi se, da zadani mikrob i njegovo potomstvo čine razvrstano uređen skup s obzirom na relaciju $\leqslant$ kod koje $a \leqslant b$ znači da je ili a identičan sa b, ili da je a predak od b odnosno b potomak od a (naravno ne misli se jedino *neposredni* predak (otac) odn. *neposredni* potomak (sin)). Zadani individuum sačinjava početni sloj; sloj 1 je sastavljen od 3 bića, sloj 2 od 3^2 bića, sloj n od 3^n bića za svaki prirodni broj n. Međutim, matematički možemo taj proces zamisliti i za sloj ω i uopće za svaki rang α, pa bio α konačan ili ne bio. Psihološki, možemo rang ω_0 i generaciju transfinitnog reda ω_0 predočiti na pr. ovako; u jednu ruku, razmnažanje individua o kojima je riječ vrši se fantastično brzo, tako da se generacije nižu na generacije vrlo brzo: svakih 20′ nova generacija dakle u godini dana preko 25.000 generacija. U drugu ruku, ti su individui proste građe i vrlo otporni. Recimo, da se desi katastrofa kod koje viši organizmi (kao čovjek i dr.) izumru, dok naprotiv, organizmi o kojima je riječ ne izumru svi. Jedna takva katastrofa može se s obzirom na nizanje generacija gornjih vrsta individuuma nazvati transfinitnom i reći da preživjeli organizmi sačinjavaju generaciju reda ω_0. Dalja generacija $g_{\omega+1}$ nastaje diobom individua iz prethodne generacije g_ω i t. d. i t. d.

Postavlja se ovaj problem:

Ako promatramo slučaj, da kod svake katastrofe nastrada jedan jedini mikrob, može li se zamisliti i takovo odabiranje toga mikroba da potomstvo zadanog početnog mikroba bude opstojalo u svakoj generaciji ranga $< \omega_1$ (ω_1 je prvi neprebrojivi transfinitni redni broj) pa i u slučaju kad generacija reda ω_1 sigurno ne bude postojala?

§ 18.1.1. **Matematička formulacija gornjeg biološkog problema.**

Precizno, matematički problem se postavlja ovako: *Ako je T bilo koji poluuređen razvrstan skup* [1]) *sa svojstvom, da je*

(18.1.1.1) $\gamma(-\infty, a, \infty)_T = \omega_1, \ (a \in T)$ [2])

(18.1.1.2) $k R_0(a, \infty)_T \geqslant 2, \ (a \in T)$ [3]),

može li se iz svakog sloja druge vrste $R_{\omega\alpha}$, $(\alpha < \omega_1)$ *odabrati po jedan član*

(18.1.1.3) $a_{\omega\alpha} \in R_{\omega\alpha} T, \ (\alpha < \omega_1)$

tako da izabrani članovi čine posve neuređen skup $\subseteq T$ *t. j. da nije*

(18.1.1.4) *niti* $a_{\omega\alpha} \leqslant a_{\omega\beta}$ *niti* $a_{\omega\alpha} > a_{\omega\beta}$, $(\alpha < \beta < \omega_1)$?

Teški slučaj u rješavanju toga problema jest onaj kad je svaki sloj i svaki uređeni dio skupa T najviše prebrojiv. Da se taj slučaj može efektivno pojaviti, pokazao je prvi N. Aronszajn (v. teorem 18.4.1). Ali ako u T postoji realna čisto uzlazna funkcija, onda se može dokazati da funkcija t. j. odabiranje (18.1.1.3) sa svojstvom (18.1.1.4) postoji (teorem 23.3.1).

Inače pitanje o egzistenciji funkcije (18.1.1.3) ekvivalentno je sa Suslinovim problemom koji pita da li gust potpuno uređen skup u kojem nema neprebrojivo mnogo disjunktnih intervala nužno ima jednu svoju realizaciju unutar linearnog kontinuuma.

Iz usmenog razgovora s nekim ljudima koji su se bavili Suslinovim problemom razabrao sam da su oni mišljenja da je odgovor na Suslinov problem negativan; drugi su se u tom smislu i pismeno izrazili.

Koliko god čovjek mora biti oprezan kod donošenja zaključaka kad se radi o beskonačnom, ja sam bio od prvog početka sklon mišljenju, da je odgovor na Suslinov problem pozitivan, imajući baš u vidu, da je taj problem ekvivalentan s mogućnosti odabiranja iz svake generacije druge vrste po jednog individuuma tako da odabrani individui ne budu u direktnom srodstvu. Upućujući čitaoca kojega ta pitanja zanimaju na originalne članke, mi ćemo sada dokazati jedan teorem koji ukazuje na organsku vezu između uređenih skupova i Suslinova problema s jedne strane i razvrstanih poluuređenih skupova sa druge strane.

§ 18.1.2. **Osnovni teorem.** 18.1.2.1. *Da odgovor na Suslinov problem bude pozitivan, nužno je i dovoljno, da za svaki razvrstano uređen skup T iz*

---

[1]) t. j. ako skup $(-\infty, a)_T$ predaka svakog $a \varepsilon T$ čini dobro uređen skup.

[2]) $(-\infty, a, \infty)_T$ odn. $[a]_T$ je skup svih točaka iz T koje su ili $\leqslant a$ ili $> a$.

[3]) $R_0(a, \infty)_T$ je skup neposrednih potomaka elementa a.

(18.1.2.1) $$bT \leqslant \aleph_0$$

slijedi

(18.1.2.2) $$kT \leqslant \aleph_0$$ [1].

§ 18.2. **Uslov teorema 18.1.2.1 je dovoljan.** Valja dakle dokazati ovo: ako iz (18.1.2.1) nužno slijedi (18.1.2.2), onda svaki potpuno uređeni gusti skup

(18.2.1) $$S$$

s najviše prebrojivo mnogo disjunktnih intervala, sličan je s izvjesnim skupom realnih brojeva.

§ 18.2.1. **Prelamanje skupa** S **. Skup** T. Najprije je jasno, da možemo suponirati da S ima i početni i posljednji element i da ne pokazuje praznina; tada je dovoljno uređeni skup

(18.2.1.1) $$S$$

podvrći procesu prelamanja, onako kako smo radili u § 13.2 i § 15.1.4. Neka je dakle za svaki segment $s \subseteq S$:

(18.2.1.2) $$\varphi(s), \ (s \subseteq S)$$

skup sastavljen od dva segmenta koji imaju jednu unutrašnju točku segmenta s zajedno, a ispunjavaju segment s. Definirajmo množine

(18.2.1.3) $$T_0, T_1, T_2, \ldots, T_\alpha, \ldots$$

na ovaj način:

Označimo sa T_0 množinu kojoj je zadan skup S jedini element. Neka je $\alpha > 0$ pa neka su množine

(18.2.1.4) $$T_\xi, \ (\xi < \alpha)$$

definirane tako, da su ispunjeni ovi uslovi:

I. Za svaki $\xi < \alpha$ množina T_ξ je sastavljena od segmenata skupa S među kojima može biti i točaka skupa S.

II. Množina

(18.2.1.5) $$T^\alpha = \bigcup_\xi T_\xi, \ (\xi < \alpha)$$

je s obzirom na relaciju inkluzije $\supseteq$ razvrstano uređena i ispunjava jednakost

(18.2.1.6) $$R_\xi(T^\alpha) = T_\xi, \ (\xi < \alpha).$$

---

[1]) Podsjetimo se da kT znači kardinalni broj (potenciju) od T, a

$$bT = \sup_{X} kX, (X \subseteq T)$$

i pritom je X obostrano uređen t. j. ima svojstvo da za svaki $a \in X$ skup svih točaka iz X uporedljivih sa a jest uređen.

Definirajmo množinu T_α:

Ako je α prve vrste, stavit ćemo

(18.2.1.7) $$T_\alpha = \bigcup_s \varphi(s); \ (s \in T_{\alpha-1}, \ ks > 1);$$

ako je α druge vrste, tada će T_α označivati sistem svih skupova oblika

(18.2.1.8) $$\bigcap_\xi A, \ (A_\xi \in T_\xi) \text{ za koje je}$$

(18.2.1.9) $$A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_\xi \supset \ldots (\xi < \alpha)$$

Prvi broj α za koji je $T_\alpha = v$ označit ćemo sa

(18.2.1.10) $$\gamma T$$

pa ćemo staviti

(18.2.1.11) $$T = \bigcup_\xi T_\xi, \ (\xi < \gamma T).$$

§ 18.2.2. **Sistem ψT segmenata iz S.** Označimo li za svaki $M \subseteq T$ sa

(18.2.2.1) $$\psi M$$

skup svih $X \in M$ za koje je $kX > 1$, vidi se, da je ψM određen sistem segmenata uređena skupa S i da je taj sistem ψM s obzirom na relaciju $\supseteq$ *razvrstano uređen,* pri čemu za ma koja dva elementa X, X' iz ψM za koje nije niti $X \subseteq X'$ niti $X' \supseteq X$ važi da su X, X' dva segmenta skupa S koji imaju najviše jednu točku zajedničku. Specijalno je

(18.2.2.2) $$\psi T$$

određen sistem segmenata $\subseteq S$ i odmah se vidi i po redu dokazuju ove činjenice:

§ 18.2.2.1. $R_\alpha(\psi T) = \psi T_\alpha$ za svaki $\alpha < \gamma(\psi T)$; specijalno $R_{\alpha+1}(\psi T) = T_{\alpha+1}$ za svaki $\alpha < \gamma(\psi T)$, jer $T_{\alpha+1}$ nastaje prelamanjem svih elemenata iz ψT_α.

Prema tome među elementima skupa T kojima je rang redni broj prve vrste nema jednočlanih skupova.

§ 18.2.2.2. *Za ma koji $\alpha < \gamma T$, unija*

$$\bigcup_X X, \ (X \in \psi T_\alpha)$$

sastavljena je od zadana uređena skupa S iz kojeg su odstranjeni svi jednočlani elementi skupa T koji u T imaju rang $< \alpha$.

§ 18.2.2.3. *Za svaku točku $x \in S$ postoji posve određen broj*

$$\gamma(x) = \gamma(x; T)$$

tako da točka x leži u množini $\bar{T}_{\gamma(x)}$ kao njen jednočlan element (sjeti se da su elementi množina T_ξ segmenti skupa S, koji se mogu svesti i na pojedine točke skupa S).

§ 18.2.2.4. Označimo li za svaki

$$\alpha < \gamma(x) \quad \text{sa} \quad S_\alpha(x)$$

uniju onih (najviše dvaju) segmenata iz T_α kojima je x element, tada je

$$\bigcap_{\alpha<\gamma(x)} S_\alpha(x) = (x).$$

§ 18.2.2.5. *Zato je skup svih krajnjih točaka segmenata iz sistema ψT gust po skupu S.*

§ 18.2.2.6. Kako ovih krajeva ima $\geqslant k\psi T$, a $\leqslant 2k\psi T = \psi T$, to znači da *zadani skup S sadrži jedan podskup potencije $k\psi T$ koji je svuda gust.*

§ 18.2.2.7. Očito je

$$k_c(\psi T) \leqslant \aleph_0$$

što je drukčije izražena činjenica da je svaki striktno (čisto) silazni niz (transfinitni ili konačni) segmenata iz S najviše prebrojiv.

§ 18.2.2.8. Isto tako

$$k_d(\psi T) \leqslant \aleph_0$$

jer je svaki striktno (čisto) uzlazni niz segmenata $\subseteq S$ najviše prebrojiv.

§ 18.2.2.9. Konačno je

$$k_s(\psi T) \leqslant \aleph_0$$

jer je to simbolički izražena činjenica, da je najviše prebrojiv bilo koji sistem segmenata $\subseteq S$ koji dva po dva imaju najviše jednu točku zajedničku.

§ 18.2.2.10. Ukratko, iz §§ 18.2.2.7.—18.2.2.9. razabiremo, da u razvrstano uređenom skupu ψT imamo

$$b\psi T \leqslant \aleph_0.$$

A kako, prema hipotezi, iz (18.1.2.1) slijedi (18.1.2.2), to u našem slučaju znači, da je

$$k\psi T \leqslant \aleph_0.$$

A to, zajedno sa svojstvom iz § 18.2.2.6. kaže, da skup S sadrži konačan ili prebrojiv dio koji je svuda gust.

Kako je skup S i neprekidan, sličan je on po Cantorovu teoremu 11.4.1 s jednim linearnim skupom. Dakle zaista, ako iz $bT \leqslant \aleph_0$ slijedi $kT \leqslant \aleph_0$, onda je odgovor na Suslinov problem pozitivan.

§ 18.3. **Uslov teorema 18.1.2.1 je nuždan:** ako je odgovor na Suslinov problem pozitivan tada za svaki poluuređen skup T iz

(18.3.1) $\qquad bT \leqslant \aleph_0$ slijedi

(18.3.2) $\qquad kT \leqslant \aleph_0$

Naravno iz, $bT \leqslant \aleph_0$ slijedi

(18.3.3) $$\gamma T \leqslant \omega_1,$$

jer u obrnutom slučaju, bilo bi $\gamma T > \omega_1$, dakle bi specijalno postojao bar jedan element $a \in R_{\omega_1} T$, što je nemoguće, jer bi pripadni skup

$$(-\infty, a)_T$$

bio dobro uređen i neprebrojiv, dakle bi bilo $k_c T > \aleph_0$ a tim više $bT > \aleph_0$, protivno pretpostavci (18.3.1).

Nadalje je

$$k R_\alpha T \leqslant \aleph_0, \ (\alpha < \gamma T)$$

jer je svaki od skupova $R_\alpha T$ posve neuređen i dakle

$$k R_\alpha T \leqslant k_s T \leqslant bT \leqslant \aleph_0.$$

Ako dokažemo, da u (18.3.3) važi znak $<$, naš je cilj postignut, jer bi bilo

$$T = \bigcup_\alpha R_\alpha T, \ (\alpha < \gamma T < \omega_1),$$

odakle, jer su slojevi disjunktni

$$kT = \sum_{\alpha < \gamma T} k R_\alpha T \leqslant k \gamma T \cdot \sup_\alpha k R_\alpha T \leqslant \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

odakle bi zaista važilo (18.3.2).

Ali, uz hipotezu, da je odgovor na Suslinov problem afirmativan, relacija (18.3.3) mora glasiti $\gamma T < \omega_1$, jer će nam obrnuta pretpostavka

$$\gamma T = \omega_1, \quad \text{ma da je} \quad bT \leqslant \aleph_0,$$

dati mogućnost da odgovorimo negativno na Suslinovo pitanje. Dokaz je podugačak.

§ 18.3.1. **Obrnuta pretpostavka. Skup T_1.** Pretpostavimo, naprotiv, da postoji razvrstan uređen skup

(18.3.1.1) T za koji je $\gamma T = \omega_1$ ma da je $bT \leqslant \aleph_0$.

Izbacimo najprije iz T sve eventualne točke iza kojih u T ima tek $\leqslant \aleph_0$ elemenata: za preostali skup

(18.3.1.2) $$T_1 \subseteq T \ \text{važilo bi}$$

(18.3.1.3) $$\gamma [a]_{T_1} = \omega_1 \ \text{za svaki} \ a \in T_1;$$

pritom je $[a]_{T_1}$ skup svih točaka skupa T_1 koje su uporedljive sa a.

Stvarno, za izbačeni skup

(18.3.1.4) $$T_0 = T \setminus T_1$$

važi (kao i za svaki razvrstan poluuređen skup);

(18.3.1.5) $$T_0 = \bigcup [x, \infty]_{T_0}, \ (x \in R_0 T_0).$$

No, kao posve neuređen dio skupa T_0 odnosno skupa T, početni sloj R_0T_0 je $\leqslant \aleph_0$; kako je nadalje za svaki $x \in T_0$, po samoj defininiciji skupa T_0,

$$k[a,\infty)_T \leqslant \aleph_0, \text{ bit će tim prije}$$

$$k[a,\infty)_{T_0} \leqslant \aleph_0, \text{ pa iz (18.3.1.5) zaključujemo}$$

$$kT_0 = \sum_{x \in R_0T_0} k[x,\infty)_{T_0} \leqslant k(R_0T_0)\cdot \sup_{x \in R_0T_0} k[x,\infty)_{T_0} \leqslant \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

Dakle je $kT_0 \lesssim \aleph_0$ što znači da je uistinu njegov komplement T_1 potencije $\aleph_1$. Što više kako po definiciji skupa T_1, skup $(a,\infty)_T, (a \in T)$ ima kardinalni broj $\aleph_1$, a kako je

$$T = T_1 \cup T_0,\ kT_0 \leqslant \aleph_0,$$

to znači, da je

$$k[a,\infty)_{T_1} = \aleph_1,\ (a \in T_1)$$

odakle neposredno izlazi (18.3.1.3), jer je svaki sloj skupa $[a,\infty)_{T_1}$ (kao posve neuređen) najviše prebrojiv.

§ 18.3.2. **Funkcija** $\alpha(a)$, $(a \in T_1)$. **Skup** T_2. Svakom $a \in T_1$ pripadao bi određen indeks $\alpha(a) < \omega_1$ tako da bude

(18.3.2.1) $$kR_{\alpha(a)}[a]_{T_1} = \aleph_0.$$

Stvarno, u obrnutom slučaju, postojao bi i takav $a \in T_1$ da svaki sloj loze $[a]_{T_1}$ bude *konačan*. No, uslijed (18.3.1.3) važi

(18.3.2.2) $$kR_\alpha[a]_{T_1} \leqslant kR_\beta[a]_{T_1} \text{ za svaki } \alpha < \beta < \omega_1.$$

To znači, da bi, počam od nekog indeksa α_0 stajao svuda u (18.3.2.2) znak jednakosti; a to bi značilo, da bi za svaki

$$a' \in R_\xi[a]_{T_1} \text{ sa } \alpha_0 \leqslant \xi < \omega_1 \text{ skup } [a']_{T_1}$$

bio potpuno uređen, protivno uslovu (18.3.1.3) i $k_cT_1 \leqslant \aleph_0$.

Na osnovu utvrđene transformacije

(18.3.2.3) $$\alpha(a),\ (a \in T_1)$$

mogli bi provesti ovu konstrukciju skupova:

(18.3.2.4) $$S_0, S_1, \ldots S_\alpha, \ldots, (\alpha < \omega_1) \text{ iz } T_1.$$

Postavimo

(18.3.2.5) $$S_0 = \bigcup_x R_{\alpha(x)}(-\infty, x, \infty)_{T_1},\ (x \in R_0T_1).$$

Kako je skup R_0T_1 najviše prebrojiv, skup S_0 kao posve neuređen skup $\subseteq T_1$ jest prebrojiv, jer je prebrojiv i svaki sumand u (18.3.2.5). Pretpostavimo, da je $0 < \alpha < \omega_1$ i da su posve neuređeni i disjunktni skupovi S_ξ, $(\xi < \alpha)$ već definirani; definirajmo S_α.

Ako je α prve vrste, stavit ćemo:

(18.3.2.6) $$S_\alpha = \bigcup R_{\alpha(x)}(-\infty, x, \infty)_{T_1},\ (x \in S_{\alpha-1}).$$

Ako je α druge vrste, označit ćemo sa S_α prvi sloj skupa T_1 u kojem se nalaze elementi ranga višeg od rangova elemenata skupa $\bigvee_\xi S_\xi$, $(\xi < \alpha)$. Očito, konstrukcija skupa S_α je na taj način jednoznačno određena, jer je svaki od prethodnih skupova S_ξ, $(\xi < \alpha)$ prebrojiv. Stavimo li

(18.3.2.7) $$T_2 = \bigvee_\alpha S_\alpha, \ (\alpha < \omega_1),$$

tada bi T_2 bio određen dio polaznog skupa T za koji bi očito važilo

(18.3.2.8) $$\gamma(-\infty, a, \infty)_{T_2} = \omega_1, \ (a \in T_2)$$

(18.3.2.9) $$k R_0 (a, \infty)_{T_0} = \aleph_0$$

usprkos toga što bi radi (18.3.1.1) bilo

(18.3.2.10) $$b T_2 \leqslant \aleph_0.$$

Odmah ćemo vidjeti, da egzistencija takvog skupa T_2 povlači negativan odgovor na Suslinov problem, jer ćemo djelimični uređaj skupa T_2 proširiti tako da dobijemo potpuno uređen skup za koji ne važi pozitivan odgovor na Suslinov problem. Zbog jednostavnosti u pisanju, pisat ćemo mjesto T_2 naprosto T.

§ 18 3.3. **Prirodno uređenje razvrstanih i spram lijevo uređenih skupova.**

Oznakom

(18.3.3.1) $$(T; \leqslant),$$

hoćemo da iskažemo, da je T s obzirom na relaciju $\leqslant$ proglašen razvrstanim i spram lijevo uređenim t. j. da za svaki $a \in T$ skup

(18.3.3.2) $$(-\infty, x]_{(T;\leqslant)}$$

svih točaka iz T koje su $\leqslant a$ jest dobro uređen dio skupa T.

Cilj nam je da nađemo zgodno *potpuno uređenje*

(18.3.3.3) $$(T; \leqslant_1)$$

skupa T proširujući zadano djelimično uređenje (18.3.3.1). To znači, da nova relacija $\leqslant_1$ treba da zadovoljava uslov, da iz

(18.3.3.4) $$x, y \in T \ \text{ te } \ x < y \ \text{ slijedi } \ x <_1 y.$$

§ 18.3.3.1. **Čvorovi.** Zbog jasnoće, nazovimo *lijevim čvorom* zadanog uređenja $(T; \leqslant)$ svaki *maksimalni* dio $\subseteq T$ sa svojstvom, da svi elementi toga dijela imaju jedne te iste pretke u $(T; \leqslant)$. Tako na pr. za zadani $x \in T$ skup svih elemenata $y \in T$ za koje je

$$(-\infty, x)_{(T;\leqslant)} = (-\infty, y)_{(T;\leqslant)}$$

jest određen lijevi čvor skupa $(T; \leqslant)$.

Promatrajmo skup

(18.3.3.1.1) $$(-\infty, x]_{(T;\, \leqslant)}$$

svih točaka $\leqslant x$; ovaj skup je dobro uređen i redni broj mu je

(18.3.3.1.2) $$\gamma(x) + 1,$$

pri tome je $x \in R_{\gamma(x)}T$; zato se skup (18.3.3.1.1) može u svojoj zavisnosti od x predočiti čisto uzlazno u obliku

(18.3.3.1.3) $$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\xi, \ldots x_{\gamma(x)} = x \quad (\xi \leqslant \gamma(x))$$

na jedan jedini način.

Za ma koje $x, y \in T$, skup

(18.3.3.1.4) $$(-\infty, x]_T \cap (-\infty, y]_T$$

je ili pust (na pr. kad je jedan od x, y u R_0T) ili je početni komad od oba faktora u (18.3.3.1.4). Sa

(18.3.3.1.5) $$\nu(x, y) \quad \text{odnosno} \quad \nu(y, x)$$

označit ćemo redni broj dobro uređena skupa (18.3.3.1.4); naravno, da je

(18.3.3.1.6) $$0 \leqslant \nu(x, y) \leqslant \inf\{\gamma(x) + 1,\ \gamma(y) + 1\}$$

i da relacija

(18.3.3.1.7) $$\nu(x, y) = \gamma(x) + 1 \quad \text{znači isto što i} \quad x \leqslant y.$$

Ako su x, y neuporedljivi elementi iz $(T; \leqslant)$, tada su

(18.3.3.1.8) $$x_{\nu(x,y)},\ y_{\nu(x,y)}$$

potpuno određeni elementi; oni pripadaju istom lijevom čvoru $\subseteq (T; \leqslant)$; k tome je

(18.3.3.1.9) $$x_{\nu(x,y)} \leqslant x, \quad y_{\nu(x,y)} \leqslant y.$$

Ako je $x < y$, onda postoji $y_{\nu(x,y)}$ dok $x_{\nu(x,y)}$ ne postoji; međutim zgodno je i tada govoriti o $x_{\nu(x,y)}$ kao o „praznom elementu“ koji pripada svakom lijevom čvoru. Na taj način važi

L e m a 18.3.3.1.1. Ako su x, y ma koja dva različita elementa skupa $(T; \leqslant)$, tada su

(18.3.3.1.10) $$x_{\nu(x,y)},\ y_{\nu(x,y)}$$

jednoznačno određeni i pripadaju jednom te istom čvoru $\subseteq (T; \leqslant)$. Najviše jedan od (18.3.3.1.10) može biti „prazan element“. Za svaki $x \in T$, $x_{\nu(x,x)}$ je prazan element.

§ 18.3.3.2. Proces samog prirodnog uređivanja skupa $(T; \leqslant)$.

A sada pređimo na svoju zadaću. Pokazat ćemo, da važi

L e m a 18.3.3.2.1. *Ako je*

(18.3.3.2.1) $$(T; \leqslant_2)$$

ma kakvo uređenje (potpuno ili djelimično) zadana razvrstana poluuređena skupa $(T; \leqslant)$ sa svojstvom, da je svaki lijevi čvor $\subseteq (T; \leqslant)$ postao potpuno uređenim skupom s obzirom na novu relaciju $\leqslant_2$, tada uz propis, da za $x, y \in T$ relacija

(18.3.3.2.2) $$x <_1 y$$

znači isto što i

(18.3.3.2.3) $$x_{\nu(x,y)} <_2 y_{\nu(x,y)}$$

skup T postaje potpuno uređenim s obzirom na relaciju $\leqslant_1$.

Najprije je jasno, da je relacija $<_1$ anti-simetrična; jer ako su x, y različiti elementi iz T, tada su (18.3.3.1.10) različiti i pripadaju istom čvoru $\subseteq (T; \leqslant)$.

Kako je svaki čvor uređen s obzirom na $\leqslant_2$, to znači, da je uistinu

ili $x_{\nu(x,y)} <_2 y_{\nu(x,y)}$ [1]) dakle i $x <_1 y$

ili $y_{\nu(x,y)} <_2 x_{\nu(x,y)}$ dakle i $y <_1 x$.

Dokažimo, da je relacija $\leqslant_1$ tranzitivna: za $x, y, z \in T$, te iz

(18.3.3.2.4) $$x \leqslant_1 y \leqslant_1 z \quad \text{slijedi}$$

(18.3.3.2.5) $$x \leqslant_1 z.$$

Stvarno, iz $x \leqslant_1 y$ slijedi

(18.3.3.2.6) $$\begin{cases} x_\xi = y_\xi, & (\xi < \nu(x, y)) \\ x_{\nu(x,y)} \leqslant_2 y_{\nu(x,y)}. \end{cases}$$

Slično $y \leqslant_1 z$ znači da je:

(18.3.3.2.7) $$\begin{cases} y_\xi = z_\xi, & (\xi < \nu(y, z)) \\ y_{\nu(y,z)} \leqslant_2 z_{\nu(y,z)}. \end{cases}$$

Stavljajući

(18.3.3.2.8) $$\nu \equiv inf\, (\nu(x, y), \nu(y, z)),$$

tada iz relacija (18.3.3.2.6) i (18.3.3.2 7) izlazi:

(18.3.3.2.9) $$\begin{cases} x_\xi = y_\xi = z_\xi \ \text{dakle} \ x_\xi = z_\xi, & (\xi < \nu) \\ x_\nu \leqslant_2 y_\nu \leqslant_2 z_\nu \ \text{dakle} \ x_\nu \leqslant_2 z_\nu. \end{cases}$$

Pritom, ako u (18.3.3.2.4) stoji bar jedanput $<_1$ mjesto $\leqslant_1$, bit će $x_\nu < z_\nu$, što znači, da je $\nu = \nu(x, z)$, pa je dakle

$$x_{\nu(x,z)} <_2 z_{\nu(x,z)} \quad \text{t. j.} \quad x <_1 z.$$

Dokažimo, napokon, da nova relacija $<_1$ proširuje zadanu relaciju $<$. Naime, ako je $x < y$, tada je $x_{\nu(x,y)}$ prazan element pa kao takav $<_2 y_{\nu(x,y)}$ jer je $y_{\nu(x,y)}$ potpuno određen element iz T. Dakle je

$$x_{\nu(x,y)} <_2 y_{\nu(x,y)} \quad \text{što i znači, da je} \quad x <_1 y.$$

---

[1]) Naravno da smatramo da je „prazni element“ $<_2 x$ za svaki $x \in T$.

Primjedba 18.3.3.2.1. Uređenje $(T; \leqslant_1)$ zovemo prirodnim, zato jer je taj uređeni skup sličan sa množinom svih $(-\infty, x]_{(T; \leqslant)}$ uređenom na sličan način kao što su uglavnom uređeni realni brojevi u svojem decimalnom ruhu: relacija $x <_1 y$ ekvivalentna je sa jednom i samo jednom od ovih relacija:

$$\text{ili} \quad (-\infty, x]_T \subset (-\infty, y]_T$$

ili je po principu prvih diferencija slog $(-\infty, x]_T$ ispred (t. j. $<_1$) sloga $(-\infty, y]_T$.

§ 18.3.3.3. **Odnos između prirodnog uređenja $(T; \leqslant_1)$ i zadanog djelimičnog uređenja $(T; \leqslant)$.**

Lema 18.3.3.3.1. *Za svaki $a \in T$*

(18.3.3.3.1) $\qquad [a, \infty)_{(T; \leqslant)}$ *svih* $x \geqslant a, (x \in T)$

jest komad prirodno uređenog skupa $(T; \leqslant_1)$.

To znači, da iz $a \leqslant x$, $a \leqslant y$, te iz $x \leqslant_1 z \leqslant_1 y$ treba zaključiti, da slijedi $a \leqslant z$.

Ta lema izlazi iz

Leme 18.3.3.3.2. Ako je c bilo koji element van skupa $[a, \infty)_{(T; \leqslant)}$, onda:

(18.3.3.3.2) $\qquad$ iz $c <_1 a$ slijedi $c <_1 x$ za svaki $x \geqslant a$;

(18.3.3.3.3) $\qquad$ iz $a <_1 c$ slijedi $x <_1 c$ za svaki $x \geqslant a$.

Dokažimo dakle lemu 18.3.3.3.2.

Stvar je jasna, ako je k tome $c < a$. Uzmimo zato, da je $c \parallel_< a$ t. j. da je c neuporedljiv sa a.

Tada je:

(18.3.3.3.4) $\qquad \nu(c, a) \leqslant \gamma(a)$ te

(18.3.3.3.5) $\qquad c_\xi = a_\xi$ za svaki $\xi < \nu(c, a)$ i dalje

(18.3.3.3.6) $\qquad$ ili $c_{\nu(c,a)} <_2 a_{\nu(c,a)}$ ili $a_{\nu(c,a)} <_2 c_{\nu(c,a)}$.

U drugu ruku, iz nejednakosti $a < x$ slijedi:

$$a_\xi = x_\xi, \; (\xi \leqslant \gamma(a));$$

specijalno, s obzirom na (18.3.3.3.4);

$$a_{\nu(c,a)} = x_{\nu(c,a)}.$$

Zato obrasci (18.3.3.3.5), (18.3.3.3.6) daju:

$$c_\xi = a_\xi \quad \text{za} \quad \xi < \nu(c, a) \quad \text{te}$$

$$\text{ili} \quad c_{\nu(c,a)} <_2 x_{\nu(c,a)} \quad \text{ili} \quad x_{\nu(c,a)} <_2 c_{\nu(c,a)}$$

što znači da je zbilja ili $c <_1 x$ ili $x <_1 c$, već prema tome, da li je bilo $c <_1 a$ ili $a <_1 c$.

Kao neposredna posljedica gornjih dviju lema izlazi

Lema 18.3.3.3.3. Ako su x, y ma kakvi elementi skupa $(T; \leqslant_1)$, tada iz $x < y$ izlazi, da je $[y, \infty)_{(T; \leqslant)}$ komad u komadu $[x, \infty)_{(T; \leqslant)}$ potpuno uređena skupa $(T; \leqslant_1)$.

Ako je $x \|_< y$ tada su pripadni komadi jedan izvan drugoga i to $[x, \infty)_{(T; \leqslant)}$ lijevo od $[y, \infty)_{(T; \leqslant)}$ ako je $x <_1 y$.

Lema 18.3.3.3.4. Ako u skupu $(T; \leqslant)$ nema završnih elemenata, a u uređenju $(T; \leqslant_2)$ nijedan lijevi čvor $\subseteq (T; \leqslant)$ nema početnog elementa[1]), tada svaki interval $I \subseteq (T; \leqslant_1)$ uređena skupa $(T; \leqslant_1)$ sadrži bar jednu točku $x = x(I)$ sa svojstvom, da skup $[x, \infty)_{(T; \leqslant)}$ svih točaka koje su $\geqslant x$ leži u zadanom intervalu I. Ako su intervali I_1, I_2 disjunktni, pripadne točke $x(I_1)$, $x(I_2)$ jesu neuporedljive s obzirom na $\leqslant$.

Možemo suponirati, da je $a <_1 b$ i $I = (a, b)_{(T; \leqslant)}$.

Prvi slučaj: $a < b$. Neka je $x(I)$ ma koja točka $<_2 b$ iz lijevog čvora u kojem se nalazi b.

Očito je skup $[x, \infty)_{(T; \leqslant)}$ sadržan u zadanom intervalu.

Drugi slučaj: nije $a < b$ nego je dakle $a \|_< b$. Tada za svaki $a < x$ (a takav $x \in T$ postoji jer je $(T; \leqslant)$ bez završnih elemenata) cijeli skup $[x, \infty)_T$ smješten je u zadanu intervalu. Da je $x(I_1) \|_< x(I_2)$, ako je $I_1 \cap I_2 = v$, to izlazi iz leme 18.3.3.3.2.

§ 18.3.3.4. Sada se možemo povratiti na skup T_2 iz (18.3.2.7).

Stavimo:

(18.3.3.4.1) $$T_3 = \bigcup_{\alpha} R_{\alpha+1} T_2, \quad (\alpha < \omega_1).$$

Tada bi prema formulama (18.3.2.8)—(18.3.2.10) bilo:

(18.3.3.4.2) $$\gamma(-\infty, a, \infty)_{T_3} = \omega_1, \quad (a \in T_3);$$

Nadalje svaki lijevi čvor skupa $(T_3; \leqslant)$ jest prebrojiv (naime skupovi

(18.3.3.4.3) $$R_1 T_2 \quad \text{i} \quad R_0 (a, \infty)_{T_2}, \quad (a \in T_2)$$

jesu lijevi čvorovi skupa T_3; najzad:

(18.3.3.4.4) $$b T_3 \leqslant \aleph_1.$$

Da možemo primijeniti lemu 18.3.3.3.4 uredimo relacijom $\leqslant_2$ svaki od tih čvorova (18.3.3.4.3), tako da nijedan od njih nema početnog elementa (možemo na pr. svaki od skupova (18.3.3.4.3) urediti da bude sličan sa skupom cijelih negativnih brojeva).

Pripadno potpuno prirodno uređenje

(18.3.3.4.5) $$(T_3; \leqslant_1)$$

jest skup za koji bi odgovor na Suslinovo pitanje bio negativan.

[1]) Dakle je svaki čvor beskonačan.

Naime, iz leme 18.3.3.3.4 zaključujemo, da svakoj familiji disjunktnih intervala uređena skupa (18.3.3.4.5) odgovara izvjestan posve neuređen skup $\subseteq (T_3, \preccurlyeq)$; kako je zbog (18.3.3.4.4):

$$k_s(T_3; \preccurlyeq) \leqslant \aleph_0,$$

to znači, da je i svaka familija disjunktnih intervala potpuno uređena skupa (18.3.3.4.5) konačna ili prebrojiva.

Po istoj lemi 18.3.3.3.4, skup (18.3.3.4.5) je gust.

Tako bi dakle skup (18.3.3.4.5) bio gust i s najviše prebrojivo mnogo dva po dva disjunktna intervala. Prema pretpostavci, da je odgovor na Suslinov problem afirmativan, to bi značilo da je skup (18.3.3.4.5) sličan jednom linearnom skupu.

Odatle bi proizlazilo da bi skup (18.3.3.4.5) sadržavao prebrojiv dio, recimo niz

(18.3.3.4.6) $$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

tako da svaki interval uređena skupa (18.3.3.4.5) *sadrži bar jednu točku* x_n.

No, svaki taj x_n ima određen rang $\gamma(x_n) < \omega_1$; zato će i suprem α tih rangova biti $< \omega_1$; a kako je rang skupa $(T_3; \preccurlyeq)$ jednak ω_1, sadržavat će on i elemenata ranga $\geqslant \alpha$. Neka je x bilo kakav član skupa $(T_3; \preccurlyeq)$ koji u tom skupu zauzima rang $\geqslant \alpha$. Tada bi, prema lemi 18.3.3.3.1 skup

(18.3.3.4.7) $$[x, \infty)_{(T_3; \preccurlyeq)}$$

bio određen komad uređena skupa (18.3.3.4.5). Kako je k tome taj komad beskonačan skup, morao bi on također sadržavati točaka iz niza (18.3.3.4.6). Međutim, prema lemi 18.3.3.3.2 svaki pojedini x_n ili leži ispred ili iza, a nikada unutar komada (18.3.3.4.7) uređena skupa $(T_3; \leqslant_1)$. Dakle niz (18.3.3.4.6) ne postoji. To znači da uređeni skup (18.3.3.4.5) ne bi bio sličan linearnom skupu, ma da je svaka familija njegovih disjunktnih intervala $\leqslant k_s T_3 = \aleph_0$. Time je konačno dokazana i nužnost uslova teorema 18.1.2.1.

§ 18.4. **Takozvani teški slučaj Suslinova problema: Aronszajnovi skupovi.** Kako iz

$$bT \leqslant k\omega_0 \quad \text{slijedi ili}$$

$$kT \leqslant k\omega_0 \quad \text{ili} \quad kT = k\omega_1$$

to s obzirom na teorem 18.1.2.1 važi

Teorem 18.4.1. *Da odgovor na Suslinov problem bude afirmativan, nužno je i dovoljno, da svaki razvrstano uređen neprebrojiv beskonačan skup sadrži beskonačan neprebrojiv dio koji je bilo uređen bilo posve neuređen.*

Teški, kritični, slučaj razvrstano uređenih skupova jest onda kad:

svaki sloj skupa je najviše prebrojiv;
svaki dobro uređeni dio skupa je $\leqslant k\omega_0$;
rang skupa je ω_1.

Teorem 18.42. (Aronszajn)[1] *Postoji razvrstan poluuređen beskonačan skup* A sa svojstvima

(18.4.1) $$\gamma A = \omega_1;$$

(18.4.2) $$k R_\alpha A \leqslant k\omega_0, \ (\alpha < \omega_1);$$

(18.4.3) $$k_c A \leqslant k\omega_0.$$

Skup A će biti sastavljen od slogova (kompleksa)

$$(a_0, a_1, \ldots, a_\xi, \ldots), \ (\xi < \alpha, \alpha < \omega_1)$$

nejednakih racionalnih brojeva.

Neka je

(18.4.4) $$r_1, r_2, \ldots . r_n, r_{n+1}, \ldots,$$

dobro uređenje skupa R t. j. ma kakav prebroj skupa R racionalnih brojeva (dakle $r_n \neq r_{n'}$ za $n < n' < \omega_0$). Stavimo

(18.4.5) $$\varphi(r_n) = \frac{1}{n}, \ (0 < n < \omega_0).$$

Promatrajmo sisteme

(18.4.6) $$A_\beta, \ (\beta < \omega_1)$$

kompleksa

(18.4.7) $$(a_0, a_1, \ldots, a_\xi, \ldots), \ (\xi < \beta)$$

s ovim svojstvima:

I. Svaki (18.4.7) je sastavljen od *različitih* racionalnih brojeva a_ξ, tako da bude

$$\sum_{\xi < \alpha} \varphi(a_\xi) < \infty;$$

II. Za svaki $\alpha < \beta < \omega_1$, svaki pozitivni broj ε i svaki $e \in A_\alpha$, postoji slog $e' \in A_\beta$ tako da slog e' *produžuje* slog e i da bude

$$\sum_{x \in e'} \varphi(x) < \sum_{x \in e} \varphi(x) + \varepsilon;$$

III. Za svaki $\beta < \omega_1$ sistem A_β je prebrojiv.

Da počnemo, označimo sa A_1 sistem jednočlanih slogova

$$\{a_0\}; \ (a_0 \in R).$$

[1]) Nakon mnogo razgovora što smo ih vodili o Suslinovu problemu i tableaux ramifiés, kako sam onda na francuskom nazvao razvrstano uređene skupove, došao je koncem juna 1934 Aronzsajn do gornjeg primjera skupa A (isp. također Kurepa [1] p. 96 nota [1]) i [2] p. 159).

Neka je $1 < \beta < \omega_1$ i pretpostavimo da su definirani sistemi

$$A_\xi, \ (\xi < \beta)$$

i da su zadovoljeni uslovi analogni uslovima I, II, III ali zamijenjujući u njima broj ω_1 brojem $\beta < \omega_1$.

Definirajmo i A_β.

Ako je β prve vrste, onda će nam A_β označivati sistem svih slogova što se dobije, kad svakom slogu iz $A_{\beta-1}$ pripišemo na sve moguće načine po jedan racionalan broj koji ne nastupa u dotičnom slogu kao element.

Ako je β druge vrste, neka je

$$0 = \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n < \ldots \tag{18.4.8}$$

niz rednih brojeva za koje je

$$\sup_n \beta_n = \beta. \tag{18.4.9}$$

Promatrajmo već definirane sisteme

$$A_{\beta_n}, \ (n = 1,2, \ldots). \tag{18.4.10}$$

Neka je

$$\alpha < \beta, \ e \in A_\alpha; \quad \text{te} \tag{18.4.11}$$

$$\beta_{i-1} \leqslant \alpha < \beta_i; \tag{18.4.12}$$

neka je nadalje

(18.4.13)

ma kakav prirodan broj.

Označimo sa e^0 ma koji element iz A_{β_i}, koji produžuje slog e i zadovoljava nejednakosti

$$\sum_{x \varepsilon e^0} \varphi(x) < \sum_{x \varepsilon e} \varphi(x) + \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{2^2}.$$

Naravno, da takav e^0 postoji, Uzmimo, da smo već konstruirali

$$e^0, e^1, e^2, \ldots, e^{k-1} \quad \text{za neki prirodan broj} \quad k > 2.$$

Odredimo e^k kao bilo koji slog iz $A_{\beta_{i+k}}$ koji produžuje e^{k-1} i za koji je

$$\sum_{x \varepsilon e^k} \varphi(x) < \sum_{x \varepsilon e^{k-1}} \varphi(x) + \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{2^{2k}}. \tag{18.4.14}$$

Tada ćemo sa

$$e(r) \tag{18.4.15}$$

označiti onaj jednoznačno određeni slog ranga β kojem su slogovi $e^0, e^1, e^2, \ldots$ početni komadi.

Zbog uslova (18.4.14), bit će

$$\sum_{x\in e(r)} \varphi(x) < \sum_{x\in e} \varphi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{2^{2k}} < \infty. \tag{18.4.16}$$

Iz (18.4.16) specijalno izlazi (zbog $\sum_n \frac{1}{n} = \infty$) da za $e(r)$ nisu potrošeni svi članovi niza (18.4.4), pa će se konstrukcija transfinitnog niza (18.4.6) moći doista sprovesti.

Označujući tada sa

$$A \tag{18.4.17}$$

množinu svih kompleksa koji se javljaju u jednom od sistema (18.4.6), pa ako slogove iz A razvrstamo tako da je jedan slog ispred drugoga samo onda ako je on pravi početni komad ovoga, vidi se, da je A razvrstano uređen, da su mu sistemi (18.4.6) slojevi i da je zadovoljeno (18.4.1), (18.4.2) i (18.4.3).

Specijalno, treba naglasiti, da je svaki uređen dio skupa A konačan ili prebrojiv. Kad bi naime postojao neprebrojiv uređen sistem X slogova iz A, onda označujući za svaki $e \in X$ sa $f(e)$ skup svih racionalnih brojeva koji ulaze u slog e kao njegovi elementi, bila bi, zbog zahtjeva, da u slogu e nema jednakih elemenata, množina $f(X)$ svih $f(e)$, $(e \in X)$ sastavljena od skupova racionalnih brojeva, ona bi spram $\subset$ bila dobro uređena, što znači da bi skup

$$\bigcup_Z Z, \ (Z \in f(X))$$

bio neprebrojiv dio skupa racionalnih brojeva, što je apsurd. Time je Aronszajnov teorem 18.4.2 dokazan.

§ 18.5. **Opći Suslinov problem.** Neka je S ma koji potpuno uređen skup; postavimo:

$$k_1 S = k_1(S) = \inf_E kE, \ (E \subseteq S) \tag{18.5.1}$$

i pritom da E bude gust na skupu S;

$$k_2 S = \sup_F kF \tag{18.5.2}$$

pri čemu E označuje bilo kakvu porodicu punih disjunktnih intervala skupa S.

Očito je

$$k_1 S \geqslant k_2 S \tag{18.5.3}$$

za svaki potpuno uređeni skup S. I može se dokazati, da je za beskonačne skupove ili $k_1 S = k_2 S$ ili je $k_1 S$ neposredni potomak broja $k_2 S$, dakle je

$$(k_1 S, k_2 S) = v, \tag{18.5.4}$$

što iskazuje da između kardinalnih brojeva $k_1 S$ i $k_2 S$ nema nijednog kardinalnog broja.

Suslinov se problem tada može izreći ovako:

Ako je $k_2 S \leqslant k\omega_0$, da li je i $k_1 S \leqslant k\omega_0$?

Pod *općim Suslinovim problemom* možemo razumijevati pitanje, da li za svaki beskonačan potpuno uređen skup S važi jednakost

$$k_1 S = k_2 S. \tag{18.5.5}$$

Pitanje je ekvivalentno sa ovim pitanjem:

Da li za svaki beskonačni poluuređeni skup T važi

$$bT = kT? \tag{18.5.6}$$

(inače, ako je T beskonačan, onda je

$$(bT, kT) = v).$$

Može se naime dokazati

Teorem 18.5.1. *Da za proizvoljan beskonačan uređen skup S bude*

$$k_1 S = k_2 S,$$

nužno je i dovoljno da za proizvoljan razvrstano uređen beskonačan skup T bude $bT = kT$.

Dokaz teorema 18.5.1 sličan je sa dokazom teorema 18.1.2.1.

§ 18.6. **Hipoteza P_1.** Na drugom mjestu navedeno je nekoliko ekvivalencija s identitetom (18.5.5) odn. (18.5.6). Po svojem karakteru zanimljiva je:

Hipoteza P_1 *(hipoteza grananja ili odvajanja): Za svaki poluuređen razvrstan skup T supremum bT je dostignut u T t. j. svaki T sadrži obostrano uređen dio, kojemu je kardinalni broj = bT.*

Pokazano je, da iz hipoteze P_1 proizlaze jednakosti (18.5.5) i (18.5.6) (izuzev eventualno neke slučajeve, važi i obrat).[1] U Tezi (str. 132) navedeno je 11 drugih izreka od kojih je svaka ekvivalentna sa P_1.

§ 18.7. **Opći Suslinov problem i operator** ωS (S uređen skup). Specijalnu klasu razvrstanih poluuređenih skupova imamo u obliku

$$\omega S \tag{18.7.1}$$

gdje je S bilo kakav uređen skup; pri tom je ωS množina svih dobro uređenih skupova $\leq S$ razvrstanih s obzirom na relaciju

(18.7.2) „biti početan komad od".

Može se pokazati, da se sva problematika o skupovima T već nalazi i među skupovima oblika (18.7.1), jer je svaki razvrstan poluuređen skup sličan sa dijelom skupa oblika (18.7.1).

---

[1] Primijetimo s tim u vezi ovo: za svaki beskonačni uređeni skup S je $k_d S \geqslant k\omega_0$; međutim ako je S dobro uređen, onda broj $k_d S$ nije dostignut, jer u S nema regresija.

§ 18.8. ZADACI.

§ 18.8.1. Dokaži da svaki prebrojiv razvrstano poluuređen skup T sadrži prebrojiv obostrano uređen dio (mjesto prebrojivosti skupa T može se tu suponirati da je kT suprem od prebrojivo mnogo brojeva $< kT$).

§ 18.8.2. Promatraj razvrstano uređen skup T ranga ω sa svojstvom da je i $R_0 T$ i $R_0(a, \infty)_T$, $(a \in T)$ prebrojiv. Svaki lijevi čvor skupa T potpuno uredi tako da ne bude imao početnog elementa. Pripadnim prirodnim uređenjem postaje od T skup sličan sa skupom R racionalnih brojeva.

§ 18.8.3. Obrazuj porodicu P linearnih segmenata tako da skup $(P; \geqslant)$ bude razvrstano poluuređen sa svojstvima da svaki lijevi čvor bude prebrojiv i da loza svakog elementa ima rang 1) ω; 2) ω^ω.

§ 18.8.4. Zamisli skup S ljudskih bića koja su se dosad rodila na našoj planeti; ako $a \leqslant b$ čitamo: $a = b$ ili a je potomak od b, što umiješ reći o skupu $(S; \leqslant)$?

§ 18.8.5. (Teorem recipročnosti) Neka je T bilo koji razvrstano uređen skup sa svojstvom da je:

α) $$\gamma[a]_T = \gamma T, \ (a \in T),$$

β) svaki lijevi čvor skupa ima dva člana;

dokaži, da vrijedi ovaj zaključak:

Ako T posjeduje potpuno uređen (potpuno neuređen) dio D sa svojstvom

$$D \cap R_\alpha T \supset v, \ (\alpha < \gamma T)$$

tada je skup

$$T \setminus D$$

potpuno neuređen (potpuno uređen) i takav da je

$$(T \setminus D) \cap R_\alpha T \supset v, \ (\alpha < \gamma T).$$

Konkretiziraj slučajeve $\gamma T = 3, \omega_0, \omega_1$.

§ 18.8.6. U izučavanju Suslinova problema bitnu ulogu igra *uslov račvanja*. Nazovemo li procesom svaki uređen par p sastavljen od nekog skupa βp *(baza procesa)* i nekog preslikavanja αp te baze, tada dokaži da svaki skup S procesâ uređen pomoću $\subseteq$ gdje iz $p, p' \in S$ relacija $p \subseteq p'$ znači da je

$$\beta p \subseteq \beta p' \quad \text{i} \quad \alpha p(x) \subseteq \alpha p'(x), \ (x \in \beta p)$$

jest djelimično uređen; ako su k tome preslikavanja

$$\alpha p, \ (p \in S)$$

jednoznačna, a skupovi βp obrazuju početne komade nekog potpuno uređenog skupa, onda je $(S; \subseteq)$ poluuređen skup. Konkretiziraj na pr. da bude

$$\beta p \subset (-\infty, \omega)_0$$
$$\alpha p (\beta p) \subseteq (-\infty, \omega_1)_0 .$$

§ 18.8.7. Obrazuj skup (C) svih *jednoznačnih* procesa kojima je baza pravi početni komad rednih brojeva $< \omega_1$; konačna faza neka je sastavljena od rednih brojeva $< \omega_0$. Odredi slojeve, rang, loze i čvorove u skupu $((C); \subseteq)$; uvjeri se, da u tom skupu svaki maksimalni i potpuno uređeni skup ima potenciju $\aleph_1$.

§ 18.8.8. Dokaži, da za svaki razvrstano uređen skup T iz relacija

$$kT \leqslant 2^{\aleph_0},\ \gamma T \leqslant \omega_1 \text{ proizlazi } tT \leqslant t((C), \subseteq)$$

t. j. T je sličan jednom dijelu skupa $((C); \subseteq)$.

§ 18.8.9. *Kardinalni broj* $2_{\aleph_1}$. Promatrajmo razvrstano uređeni skup (C) iz § 18.8.7 i bilo koji njegov dio s sa svojstvima:

$$\gamma (a)_s = \omega_1,\ (a \in s);$$
$$R_\alpha s \equiv \aleph_0,\ (\alpha < \omega_1),$$
$$k_c s \equiv \aleph_0 .$$

Označimo li sa $P_n s$ skup svih posve neuređenih dijelova skupa s, postavimo [1])

$$2_{\aleph_1} = \inf k P_n s,\ (s \subseteq (C));$$

pritom s zadovoljava gornjim trima uslovima:

Dokaži, da je $2_{\aleph_1} \geqslant \aleph_1$; jednakost $2_{\aleph_1} = \aleph_1$ imala bi za posljedicu bar jednu od ovih hipoteza

a) $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ (neispravnost Cantorove hipoteze);

b) Negativan odgovor na Suslinov problem (isp. moj rad [18].

§ 19. CANTOROV PROBLEM (HIPOTEZA O KONTINUUMU)

Cantorov se problem sastoji u tome da se odredi položaj broja $c = 2^{\aleph_0}$ prema ostalim transfinitnim kardinalnim brojevima; uzimajući da se kontinuum može dobro urediti t. j. da je $2^{\aleph_0}$ izvjestan alef recimo

$$\aleph_{\nu(0)} = 2^{\aleph_0}, \tag{19.1}$$

tada se Cantorov problem sastoji u tome da se odredi veličina rednog broja $\nu(0)$. Znamo da je

$$\nu(0) \geqslant 1, \quad \text{t. j.} \quad \nu(0) + 1 \geqslant 2; \tag{19.2}$$

[1]) Oznaka $2_{\aleph_1}$ potsjeća nas na potenciju $2^{\aleph_1}$, jer poput Cantorove nejednakosti $2^{\aleph_1} > \aleph_1$ mi predmijevamo da je $2_{\aleph_1} > \aleph_1$.

sam Cantor je držao, da tu važi znak jednakosti (v. [Cantor] pp 119—133 naročito zadnji pasus). To je poznata *Cantorova hipoteza o kontinuumu.*

Mnogo je matematičara nastojalo da dokažu Cantorovu tvrdnju; jedni su držali, da nju nije niti moguće dokazati.

Konačno je 1938. Gödelu pošlo za rukom da opću Cantorovu hipotezu

(19.3) $$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$$

izvede kao logičku posljedicu iz izvjesnog sistema Σ aksioma dokazavši, da bi nas već taj sistem Σ sam doveo do kontradikcije ukoliko bi nas on doveo do kontradikcije kad mu se doda Cantorova hipoteza.

§ 19.1. **Cantorov problem i razvrstani skupovi.** Vidjet ćemo, da je Cantorov problem u vrlo uskoj vezi sa razvrstanim skupovima (rodoslovljima) W za koje je

$$bW \leqslant \aleph_0 .$$

Koliko su razvrstani skupovi prirodan aparat za izučavanje Cantorova problema pokazuje ovaj

Osnovni dvostruki teorem 19.1.1.

Ako razvrstan skup W *zadovoljava uslovu*

(19.1.1) $$bW \leqslant \aleph_0 .$$

pa ako je nadalje kardinalni broj svakog njegova sloja

$$< \aleph_0 \quad | \quad \leqslant \aleph_0$$

tada je

(19.1.2) $$\gamma W < \omega_1 \quad | \quad \gamma W < \omega_{\nu(0)+1} .$$

Redni broj

$$\omega_1 \quad | \quad \omega_{\nu(0)+1}$$

jest najmanji koji uvijek zadovoljava posljednju relaciju.

Korolar 19.1.1. Da bude ispravna Cantorova hipoteza

(19.1.3) $$\nu(0) = 1$$

nužno je i dovoljno, da iz $bW \leqslant \aleph_0$ slijedi jednakost broja

(19.1.4) $$k \sup_{W} \gamma W, \; (k R_\alpha W < k\omega_0, \; \alpha < \gamma W)$$

i broja

(19.1.5) $$\sup_{W} k\gamma W, \; (k R_\alpha W \leqslant k\omega_0, \; \alpha < \gamma W).$$

Naime, prema teoremu 19.1.1 broj (19.1.4) je $k\omega_1$, a broj (19.1.5) je $k\omega_{\nu(0)}$.

Dokaz teorema 19.1.1 dosta je dug. No usput ćemo saznati podosta toga o strukturi razvrstanih skupova.

Treba držati na umu, da je skupom W zadano preslikavanje toga skupa na čitav skup $(-\infty, \gamma W)$ ordinalnih brojeva $< \gamma W$; funkcija

$$\gamma(x; W), \ (x \in W) \quad \text{gdje je}$$
$$x \in R_{\gamma(x; W)} W \quad \text{vrši to preslikavanje.}$$

Pogledajmo šta je s obratom!

§ 19.2. Kako nastaju razvrstani skupovi ili rodoslovlja?

Vrlo zgodan način geneze razvrstanih skupova jeste kad superponiramo dobro uređenje nekog skupa i ma koje drugo (potpuno ili nepotpuno) uređenje toga istog skupa (v. primjer 16.4.1). Međutim, raslojavanje skupova W je karakteristično svojstvo tih skupova. Tu se zapravo radi o preslikavanju

$$R_\alpha W, \ (\alpha < \gamma W)$$

skupa $(-\infty, \gamma W)$ rednih brojeva $< \gamma W$ na pojedine porodice disjunktnih skupova koje onda treba međusobno povezati u smislu, da za svaki $\alpha < \gamma W$, svaki $x \in R_\alpha$ određena ranga α, ima bar jednog pretka u svakom prethodnom sloju.

Lema 19.2.1. Ako je

(19.2.1) $$\gamma > 0$$

izvjestan redan broj, a

(19.2.2) $$R_\alpha, \ (\alpha < \gamma)$$

ma kakva porodica disjunktnih punih skupova; ako nadalje svakom

(19.2.3) $$x \in R_\alpha, \ (\alpha < \gamma)$$

pridijelimo izvjestan skup — skup njegovih predaka

(19.2.4) $$\Pi(x) \subseteq \bigcup_\xi R_\xi, \ (\xi < \alpha)$$

sa svojstvom, da bude

(19.2.5) $$\Pi(x) \cap R_\xi \supset v, \ (\xi < \alpha)$$

i da iz $\quad x' \in \Pi(x) \quad$ slijedi

(19.2.6) $$\Pi(x') \subseteq \Pi(x),$$

onda, označujući

(19.2.7) $$\text{sa } (W; \leqslant) \text{ skup } \bigcup_\alpha R_\alpha, \ (\alpha < \gamma)$$

uređen relacijom $\leqslant$ koja iskazuje da za $x, y \in W$,

$$x \leqslant y$$

znači isto što i

$$\Pi(x) \subseteq \Pi(y),$$

skup $W = (W; \leqslant)$ jest razvrstan, rang mu je zadan broj γ, a slojevi mu se po redu podudaraju sa zadanim skupovima (19.2.2).

Dokaz leme 19.2.1 je upravo trivijalan. Ali, pretpostavke u toj lemi nisu trivijalne. Teško je naime odrediti preslikavanje

$$\Pi(x), \ (x \in R_\alpha, \ \alpha < \gamma)$$

t. j. određivanje predaka svakog člana.

Kao neposrednu primjenu leme 19.2.1 dokažimo

Lemu 19.2.2. *Ako je*

(19.2.8) $$\gamma < \omega_{\nu(0)+1}$$

bilo kakav redan broj, postoji razvrstan skup W tako, da bude

(19.2.9) $$bW \leqslant k\omega_0, \ \gamma(W) = \gamma.$$

Stvarno, na osnovu nejednakosti (19.2.8) lako možemo dokazati, indukcijom, da postoji porodica

(19.2.10) $$R_\alpha, \ (\alpha < \gamma)$$

disjunktnih linearnih skupova, od kojih je svaki prebrojiv i svuda gust; definirajući, za svaki $x \in R_\alpha$, skup predaka $\Pi(x)$ elementa $x \in R_\alpha$ kao skup svih brojeva iz $\bigcup_{\xi<\alpha} R_\xi$ koji su $< x$, odmah se vidi, da time skup

(19.2.11) $$W = \bigcup_\alpha R_\alpha, \ (\alpha < \gamma)$$

postaje razvrstanim i da zadovoljava uslovima leme 19.2.2. Primijetimo da neuporedljivost dvaju elemenata x, y skupa W znači, da oni ili pripadaju istom R_α ili, ako pripadaju različitim skupovima (19.2.10), onda uređeni skup $\{x, y\}$ i uređeni skup $\{\xi, \eta\}$ gdje $x \in R_\xi$, $y \in R_\eta$ nisu slični; zato neposredno izlazi da je $k_s W = \aleph_0$.

Primijetimo, da je $R_\alpha(W) = R_\alpha$ i da za svaki $x \in W$ ima u svakom sloju skupa W elemenata uporedljivih sa x.

Zorno, možemo svaki zadani skup R_α prikazati shematski na po jednom (vertikalnom) pravcu p_α; tako da p_0 bude lijevo od p_1 ovaj lijevo od p_2 i t. d.

Pritom svaki par uporedljivih točaka možemo spojiti (posredno ili neposredno) izvjesnom linijom.

Lema 19.2.3. *Supremum kardinalnih brojeva razvrstanih skupova W za koje je $bW \leqslant \aleph_0$ jest $\geqslant k\omega_{\nu(0)}$.*

Stvarno, neka je $\gamma \geqslant \omega_{\nu(0)}$; tada za skup (19.2.11) imamo:

$$bW = \aleph_0; \quad \text{kako je } \gamma W = \gamma < \omega_{\nu(0)+1}, \quad \text{to rastav}$$

$$W = \bigcup_{\alpha} R_\alpha, \ (\alpha \leqslant \gamma) \quad \text{daje}$$

$$kW = \sum_{\alpha < \gamma} kR_\alpha = \aleph_0 \cdot k\gamma = k\gamma \geqslant k\omega_{\nu(0)}.$$

Time je lema 19.2.3 dokazana.

Kad u § 19.4 budemo dokazali, da iz $bW \leqslant \aleph_0$ slijedi $kW \leqslant k\omega_{\nu(0)}$, bit će time desna strana teorema 19.1.1 potpuno dokazana.

§ 19.3. Dokaz lijeve strane teorena 19.1.1.

Lema 19.3.1. *Ako razvrstan skup W sadrži takvu množinu F da bude*

$$\sup_{x \in F} \gamma(x) = \gamma W \tag{19.3.1}$$

i da svakom $x \in F$ pripada određen redan broj

$$\zeta(x) < \gamma W \tag{19.3.2}$$

sa svojstvom da

$$\text{iz} \quad y \in W, \ \gamma(y) > \zeta(x) \quad \text{slijedi} \quad y > x, \tag{19.3.3}$$

tada skup F, a prema tome i W, sadrži uređen dio, kojemu je kardinalni broj $k\tau(\gamma W)$; dakle je tada

$$k_c W \geqslant k\tau(\gamma W). \ (\text{Za operator } \tau \text{ gl. § 14.6}). \tag{19.3.4}$$

Lema je očigledna, ako je γW broj prve vrste.

Obradimo zato slučaj, kad je rang $\gamma = \gamma W$ broj druge vrste. Tada lema iskazuje ovo očigledno svojstvo: ako poslije svakog sloja skupa W dolazi još viši sloj u kojem postoji bar jedan element u čije potomstvo pada čitav jedan sloj (a time i svi dalji slojevi) skupa W, onda skup W sadrži *potpuno uređen* dio kojemu je kardinalni broj $k\tau(\gamma W)$; pritom je kao što znamo $k\tau(\gamma W)$ najmanji kardinalni broj m sa svojstvom da postoji skup S rednih brojeva $< \gamma W$ i da bude

$$\sup S = \gamma W, \ kS = m;$$

neka je tada

$$v_\xi, \ (\xi < \tau(\gamma)) \tag{19.3.5}$$

uzlazan transfinitan niz sa

$$\sup_\xi v_\xi = \gamma W; \tag{19.3.6}$$

definirajmo niz

$$b_\xi \ (\xi < \tau\gamma) \tag{19.3.7}$$

induktivno na slijedeći način:

Označimo sa b_0 bilo koji član skupa F; neka nadalje b_1 bude bilo koji član skupa F kojemu je rang veći od $sup\{\zeta(b_0), \nu_0\}$; uopće, za svaki $0 < \xi < \tau(\gamma)$, označit ćemo induktivno sa b_ξ ma koji član skupa F za koji je

$$\gamma b_\xi > \sup_{\alpha<\xi}\{\zeta(x_\alpha), \nu_\alpha\}. \tag{19.3.8}$$

Time je transfinitni niz (19.3.7) definiran. No, iz (19.3.8) izlazi specijalno

$$\gamma b_\xi \not\leqslant \zeta(x_\alpha),$$

a to prema (19.3.3) znači, da je

$$b_\xi > x_\alpha \quad \text{za svaki} \quad \alpha < \xi < \tau(\gamma).$$

To drugim riječima znači, da je skup svih b_ξ iz (19.3.7) potpuno uređen dio od F, a time i od W.

Korolar 19.3.1. *Ako je $\gamma W = \omega_1$, pa ako za svaki $\alpha < \omega_1$ skup W sadrži izvjestan član ranga $\geqslant \alpha$ sa svojstvom da prethodi svima elementima izvjesna ranga skupa W, tada W sadrži beskonačan neprebrojiv potpuno uređen dio.*

Lema 19.3.2. *Ako je W razvrstan, tada beskonačnost i neprebrojivost ranga skupa W i konačnost svakog sloja skupa W uslovljuju da W sadrži neprebrojiv beskonačan potpuno uređen dio;* t. j. iz

$$\gamma W \geqslant \omega_1;\ k R_\alpha W < k\omega_0,\ (\alpha < \gamma W)$$

slijedi
$$k_c W \geqslant k\omega_1.$$

Ako W ili njegov kakav dio sastavljen od $\geqslant k\omega_1$ slojeva zadovoljava uslovima leme 19.3.1 onda lema 19.3.2 proizlazi neposredno.

Zato se možemo ograničiti, da ispitamo slučaj, kad postoji redni broj $\mu < \omega_1$ takav da nijedan element skupa

$$\bigcup_\xi R_\xi W,\ (\mu \leqslant \xi < \omega_1) \tag{19.3.9}$$

ne prethodi čitavom nekom sloju toga skupa. Naravno, odbacivši skup $\bigcup_\xi R_\xi W$, $(\xi < \mu)$, možemo suponirati, da je $\mu = 0$.

Prema tome, sada ispitujemo slučaj, kad potomstvo ni jednog člana skupa W ne sačinjava čitav sloj skupa W. To specijalno znači, da u W nema jednočlanih slojeva, nego da je dakle

$$2 \leqslant k R_\alpha W < \aleph_0. \tag{19.3.10}$$

Lemu ćemo dokazati induktivno s obzirom na broj

$$\sup_\alpha k R_\alpha W,\ (\alpha < \omega_1). \tag{19.3.11}$$

Početni slučaj:

$$k R_\alpha W = 2,\ (\alpha < \omega_1). \tag{19.3.12}$$

Zbog naravi skupa W, *ima svaki njegov element neprebrojivo mnogo potomaka.* Kad bi naime postojao $a \in W$ sa $\leqslant k\omega_0$ potomaka, postojao bi broj $\beta > \gamma(a)$, tako da u skupu

(19.3.13) $$\bigcup_{\alpha} R_\alpha W, \ (\alpha \geqslant \beta)$$

ne bude ni jednog jedinog potomka od a; no, kako u sloju $R_{\gamma(a)}W$, u kojem je a, mora svaki član skupa (19.3.13) imati jednog prethodnika, to znači, da bi onaj preostali član u skupu $R_{\gamma(a)}W \setminus \{a\}$, brojao čitav skup (19.3.13) pa specijalno i sloj $R_\alpha W$ među svoje potomstvo, protivno pretpostavci.

Idemo obrazovati neprebrojiv uređen skup $\subseteq W$.

Neka je $a \in R_0 W$; označimo sa F uniju svih slojeva skupa W u kojima ima potomaka člana a; sada smo vidjeli, da je F neprebrojiv, a zbog invarijantnosti slojnosti (v. lemu 17.3.9) svaki sloj skupa F je izvjestan sloj zadanog skupa W; znači, da je

$$\gamma F = \omega_1, \ kR_\alpha F = 2, \ (\alpha < \omega_1).$$

Kako svaki $R_\alpha F$ sadrži bar jednog potomka člana a, sadrži on i samo jednog potomka x_α člana a, jer je čitav $R_\alpha F$ sastavljen tek od dva elementa; kad bi naime i drugi element

$$y_\alpha \in R_\alpha F \setminus \{x_\alpha\}$$

bio potomak od a, bila bi čitava generacija $R_\alpha F$ potomstvo a-ovo, protivno pretpostavci.

Dokažimo, da je skup svih y_α, $(\alpha < \omega_1)$ *potpuno uređen* i da iz $\alpha < \beta < \omega_1$ slijedi $y_\alpha < y_\beta$. Naime, kako je $R_\alpha F = \{x_\alpha, y_\alpha\}$, a kako se u $R_\alpha F$ nalazi bar jedan predak od y_β, može to biti jedino y_α; jer, kad bi bilo $x_\alpha < y_\alpha$, onda bi to značilo, da je $x_\alpha < x_\beta$ i $x_\alpha < y_\beta$ t. j. čitav sloj $R_\beta F$ bio bi obrazovan od potomaka člana x_α, što se protivi našoj pretpostavci.

Time je lema 19.3.2 dokazana, ako je broj (19.3.11) jednak 2.

P r e l a z n i s l u č a j: Neka je $n > 2$ prirodan broj i pretpostavimo, da je lema 19.3.2 dokazana, u slučaju da je broj (19.3.11) $< n$.

Dokažimo, da lema važi, ako je broj 19.3.11 i jednak n t. j. ako je:

(19.3.14) $$kR_\alpha W \leqslant n, \ (\alpha < \omega_1).$$

Naravno, možemo pretpostaviti, da počam od nekog indeksa α važi u (19.3.14) znak jednakosti; ništa nas ne priječi da uzmemo, da to važi već počam od $\alpha = 0$ t. j. za sve brojeve $< \omega_1$.

Neka je

(19.3.15) $$a$$

bilo koji član skupa W sa $k\omega_1$ potomaka; jasno je, da u svakom sloju takav a postoji; stavimo

(19.3.16) $$G = \bigcup_{\alpha_\xi} (R_{\alpha_\xi} W \setminus [a, \infty)_W);$$

tu α_ξ prolazi po redu svim brojevima tako da u sloju $R_\alpha W$ ima bar jedan potomak člana a.

Skup G je neprebrojiv, jer su sumandi u (19.3.16) disjunktni a i puni. Nadalje je za svaki naznačeni α_ξ:

$$R_\xi G = R_{\alpha_\xi} W \setminus [a, \infty)_W \quad \text{(v. lemu 17.3.10)}$$

No kako $R_{\alpha_\xi} W$ ima bar jedan član $\geqslant a$, to znači, da $R_\xi G$ ima $< n$ članova, jer je $k R_{\alpha_\xi} W = n$. Ukratko, razvrstan skup (19.3.16) ima rang ω_1, a svaki mu je sloj $> n$, pa prema netom dokazanom, sadrži on uređen skup $\geqslant k\omega_1$. Tako je lema dokazana općenito kad je supremum (19.3.11) kardinalnih brojeva slojeva konačan.

Konačni slučaj: ostaje slučaj, kad je taj supremum beskonačan, ma da je

$$0 < k R_\alpha W < k\omega_0, \ (\alpha < \omega_1).$$

Jasno je, da tada postoji bar jedan prirodan broj n, tako da W ima $k\omega_1$ slojeva potencije n; promatrajući uniju svih tih slojeva, dobili bi razvrstan skup za koji je lema 19.3.2 već dokazana.

Time je konačno dokazana lema 19.3.2.

Konac dokaza, lijeve polovine teorema 19.1.1. Valja dokazati ovo: ako je

$$bW \leqslant k\omega_0, \ k R_\alpha < k\omega_0, \ (\alpha < \gamma W),$$

tada je

$$\gamma W < \omega_1.$$

U obrnutom slučaju, moglo bi se desiti $\gamma W \geqslant \omega_1$. A to zajedno sa $k R_\alpha < k\omega_0$ značilo bi prema lemi 19.3.2, da bi bilo $k_c W \geqslant k\omega_1$, dakle tim prije $bW \geqq k\omega_1$, protivno pretpostavci.

Da najzad

(19.3.17) $$\sup_W \gamma W, \ (bW \leqslant k\omega_0)$$

ne može biti $< \omega_1$, to je jasno, jer svaki dobro uređen skup kojemu je redni broj α jest razvrstan i ima rang α. Specijalno, za svaki redni broj $\alpha < \omega_1$, skup $(-\infty, \alpha)$ svih rednih brojeva $< \alpha$ ima rang α, pa se tvrdnja, da je broj (19.3.17) jednak ω_1 svodi na to, da je ω_1 supremum rednih brojeva od kojih svaki ima kardinalni broj $k\omega_0$.

Time je lijeva strana teorema 19.1.1 potpuno dokazana.

§ 19.4. Opća lema o kardinalnom broju razvrstanih skupova. Dokaz desne polovine teorema 19.1.1.

Lema 19.4.1. *Za svaki razvrstan skup* W *imamo*

(19.4.1) $$kW \leqslant (2 k_s W)^{k_c W} \quad \text{(v. Kurepa [5], p. 63).}$$

Lemu ćemo dokazati tako, da elemente skupa W predočimo na izvjestan način pomoću slogova. Da dođemo do takvog predočenja, definirajmo za svaki

potpuno uređen skup $F \subseteq W$ skup

$$F_W \tag{19.4.2}$$

kao prvi sloj skupa svih točaka $x \in W$, sa svojstvom da je $F \subseteq (-\infty, x)_W$, specijalno, $v_W = R_0 W$; ako F sadrži koji posljednji element od W, onda je naravno skup (19.4.2) pust.

Jasno je, da je

$$kF_W \leqslant k_s W. \tag{19.4.3}$$

Neka je

$$M \tag{19.4.4}$$

ma kakva množina potencije $k_s W$; znači, da je

$$kF_W \leqslant kM \tag{19.4.5}$$

za svaki uređen skup $F \subseteq S$. No relacija (19.4.5) znači, da postoji obostrano jednoznačno preslikavanje

$$f(x, F_W), \ (x \in F_W) \tag{19.4.6}$$

između skupa F_W i izvjesnog dijela $f(F, F_W)$ skupa (19.4.4).

Neka je

$$P \tag{19.4.7}$$

porodica svih punih *maksimalnih* potpuno uređenih skupova izvađenih iz

$$(-\infty, x)_W \quad \text{odn.} \quad (-\infty, x]_W, \ (x \in W). \tag{19.4.8}$$

Ako je $L \in P$, onda je L izvjestan dobro uređen skup $\subseteq W$; ako je α njegov redni broj, neka su

$$L = \{a_0, a_1, \ldots a_\xi, \ldots\}, \ (\xi < \alpha) \tag{19.4.9}$$

po redu sve točke skupa L; pridružimo skupu L kompleks, slog

$$\Phi(L) = m_0, m_1, \ldots m_\xi, \ldots, \ (\xi < \alpha) \tag{19.4.10}$$

na ovaj način:

$$m_0 = f(a_0, R_0 B); \tag{19.4.11}$$

ako je $0 < \xi < \alpha$, onda označujući sa L^ξ dobro uređen skup svih a_η, $(\eta < \xi)$, tada je $(L^\xi)_W$ određen definicijom (19.4.2), pa je zato određena i točka

$$m_\xi = f(a_\xi, (L^\xi)_W) \text{ skupa } M. \tag{19.4.12}$$

Na osnovu zadanih preslikavanja (19.4.6), slog (19.4.10) je skupom $L \in P$ jednoznačno određen.

Dokažimo, da je to preslikavanje obostrano jednoznačno:

Ako su L, L' dva različita elementa množine (19.4.7), pripadni slogovi $\Phi(L)$, $\Phi(L')$ jesu različiti.

Svakako presjek

(19.4.13) $$L \cap L'$$

dobro uređenih skupova L, L' jest ili pust ili je određen početni komad i od L i od L'; u prvom slučaju, označajući sa l, l' početne elemente od L odn. L', bit će l, l' dvije određene točke skupa R_0W, pa je zato

$$f(l, R_0 W) \neq f(l', R_0 W),$$

što znači, da je $\Phi(L) \neq \Phi(L')$, jer slogovi $\Phi(L)$, $\Phi(L')$ počinju sa

$$f(l, R_0 W) \text{ odn. sa } f(l', R_0 W).$$

Ako pak skup $L \cap L'$ nije pust, nego se podudara sa jednim od zadanih skupova, tad je očigledno $\Phi(L) \neq \Phi(L')$, jer jedan slog čini početni komad drugoga. Ostaje još slučaj, kad je presjek $L \cap L'$ izvjestan pravi početni komad i od L i od L'; označujući tada sa

$$l \text{ odn. } l'$$

početni element točaka skupa $L \setminus L'$ odnosno $L' \setminus L$, bit će l, l' dvije različite točke iz

$$A = (L \cap L')_W;$$

tu je A početni sloj skupa svih točaka iz W koje dolaze iza skupa (19.3.14). Zato je i

(19.4.14) $$f(l, A) \neq f(l', A),$$

a to znači, da je i $\Phi(L) \neq \Phi(L')$, jer su članovi nejednakosti (19.4.14) elementi istoga ranga u slogu $\Phi(L)$, odn. $\Phi(L')$.

Kako je transformacija

(19.4.15) $$\Phi(L), \quad (L \in P)$$

obostrano jednoznačna, imaju množine

(19.4.16) $$P \text{ i } \Phi(P) = (\text{množina svih } (19.4.10))$$

isti kardinalni broj.

No, za zadani redni broj α, množina slogova odnosno funkcija

$$m_\xi, \ (\xi < \alpha) \text{ sa } m_\xi \in M$$

iznosi $(kM)^{k\alpha}$. Kako broj α u (19.4.10) zadovoljava

$$k\alpha \leqslant k_c W,$$

to znači da je

$$k\Phi(P) \leqslant \Sigma (kM)^{k\alpha}, \ (k\alpha \leqslant k_c W),$$

odakle zbog $$(kM)^{k\alpha} \leqslant (kM)^{k_c W}:$$

$$k\Phi(P) \leqslant (kM^{k_c W} \cdot k_c W \leqslant (2kM)^{k_c W}.$$

Zbog $k(P) = k\Phi(P)$ i $kM = k_s W$, daje zadnja relacija:

(19.4.17) $$k(P) \leqslant (2k_s \mathrm{W})^{k_c \mathrm{W}}.$$

No ako za pojedini $a \in \mathrm{W}$ označimo sa $L(a)$ izvjestan *maksimalan* potpuno uređen skup $\subseteq (-\infty, a]_W$, bit će $L(a)$ određen element u porodici P, a jasno je, da je $L(a) \neq L(a')$, ako su a, a' različite točke skupa W. To znači da je

(19.4.18) $$k\mathrm{W} \leqslant kP,$$

što s prethodnom formulom (19.4.17) daje traženi obrazac (19.4.1).

Lema 19.4.1. Za svaki beskonačan razvrstan skup W važi

(19.4.19) $$k\mathrm{W} \leqslant 2^{b\mathrm{W}}.$$

Stvarno, iz $k_s \mathrm{W} \leqslant b\mathrm{W}$ slijedi $2k_s \mathrm{W} \leqslant 2b\mathrm{W}$,
a odatle, te iz $k_c \mathrm{W} \leqslant b\mathrm{W}$
izlazi $$(2k_s \mathrm{W})^{k_c \mathrm{W}} \leqslant (2b\mathrm{W})^{b\mathrm{W}} = (b\mathrm{W})^{b\mathrm{W}} = 2^{b\mathrm{W}}$$
$$(2b\mathrm{W} = b\mathrm{W}, \text{ jer je } b\mathrm{W} \geqslant k\omega_0).$$

A to zajedno sa (19.4.1) daje (19.4.19).

Korolar 19.4.1. Iz $b\mathrm{W} \leqslant \aleph$, slijedi $k\mathrm{W} \leqslant 2^{\aleph_0} = k\omega_{\nu(0)}$ dakle i
$$\gamma\mathrm{W} < \omega_{\nu(0)+1}.$$

Desna polovina teorema 19.1.1 se podudara sa sadržinom leme 19.2.1 i korolara 19.4.1.

Time je teorem 19.1.1 potpuno dokazan.

§ 19.5. ZADACI.

§ 19.5.1. Promatraj skup (C) svih konačnih ili prebrojivih slogova prirodnih brojeva uređen po početnom podudaranju; dokaži da je
$$\gamma[a]_S = \omega_1, \ (a \in S),$$
$$kR_\alpha S = \begin{cases} \aleph_0 & \text{za } \alpha < \omega_0 \\ 2^{\aleph_0} & \text{za } \omega_0 \leqslant \alpha < \omega_1 \end{cases}$$
$k(-\infty, a)_S = \aleph_0$ za svaki $a \in S$, sa svojstvom da je $\gamma(a; S)$ jednak 0 ili oblika $\alpha + 1$.

§ 19.5.2. Ako je M bilo koji prebrojiv dio skupa (C) iz § 19.5.1, pa ako je svaki od skupova
$$M \cap R_\alpha S, \ (\alpha < \gamma S)$$
konačan ili pust, dokaži da je
$$k(S \setminus \bigcup_a [a]_S) = 2^{\aleph_0}, \ (a \in M.)$$

§ 19.5.3. Cantorova hipoteza $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ekvivalentna je s hipotezom, da skup $((C); \subseteq)$ iz § 19.5.1 sadrži dio M tako da bude

$$kM \cap R_\alpha(C) \leqslant 1, \ \alpha < \gamma(C).$$

$$\bigcup_\alpha [a]_{(C)} = (C), \ (a \in M)$$

(v. moju tezu p. 134).

§ 19.5.4. Primijetimo, da je $c^{\aleph_0} = c$; naprotiv, bez Cantorove hipoteze $c = \aleph_1$ ne umijemo dokazati da je $\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1$, jer je ta jednakost ravnopravna s Cantorovom hipotezom.

O raznim ekvivalencijama Cantorove hipoteze v. Sierpinski [3].

§ 20. VEZA KARDINALNOG BROJA DJELIMIČNO UREĐENA SKUPA S KARDINALNIM BROJEVIMA NEKIH NJEGOVIH DIJELOVA.

Teorem 20.1. *Za svaki djelimično uređeni skup E važi*

(20.1) $$kE \leqslant (2k_s E)^{k_0 E} \qquad \text{(v. Kurepa [4] i [5])}$$

Pritom je $k_s E = \sup_{F \subseteq E} kF$, ($F$ je potpuno neuređen i $\subseteq E$)

$$k_0 E = \sup \{k_c E, k_d E\}.$$

Kao što znamo, $k_c E$ odn. $k_d E$ je supremum potencija skupova iz E koji su dobro uređeni odn. obrnuto dobro uređeni.

Za slučaj kad je E razvrstan, teorem 20.1 se podudara sa lemom 19.4.1. Ideja o superpoziciji poredaja omogućit će nam da teorem 20.1 svedemo na lemu 19.4.1.

Neka je naime

(20.2) $$W$$

skup što ga dobijemo superpozicijom zadanog djelimičnog uređenja skupa E i ma kojeg *dobrog uređenja*

(20.3) $$a_0, a_1, \ldots, a_\xi, \ldots, (\xi < \alpha)$$

toga skupa E. Naravno,

(20.4) $$kW = kE$$

jer su materijalno W i E isti skupovi t. j. sastavljeni su od istih elemenata (samo ne moraju biti identički organizirani).

No, W kao rezultat superpozicije dobrog uređenja jest razvrstan, pa zato prema lemi 19.4.1 imamo:

$$kW \leqslant (2k_s W)^{k_c W}$$

odnosno, prema (20.4):

(20.5) $$kE \leqslant (2k_s W)^{k_c W}.$$

No

$$k_s W \leqslant (2 k_s E)^{k_d E}. \tag{20.6}$$

Stvarno, neka je N proizvoljan posve neuređen dio skupa W; ako su a_μ, a_ν dva njegova elementa, onako kako se oni pojavljuju u (20.3), pa ako je $\mu < \nu$, onda to znači, da je a_ν ispred a_μ u zadanom skupu E.

Ako nam tada za $a, b \in N$ relacija

$$a \,\sigma\, b \tag{20.7}$$

znači da je $a = b$ ili da je a iza b u E, onda to znači (jer je N neuređen dio skupa W) da je a *ispred* b u (20.3). Tako je N postao razvrstanim skupom s obzirom na σ i očito je

$$k_c N \leqslant k_d E.$$

K tome je naravno

$$k_s N \leqslant k_s E.$$

Zato formula iz leme 19.4.1 primijenjena na razvrstan skup N postaje

$$k N \leqslant (2 k_s N)^{k_c N} \tag{20.8}$$

i dalje radi prethodnih dviju relacija:

$$k N \leqslant (2 k_s E)^{k_d E}.$$

Kad N prolazi kroz sve potpuno neuređene skupove $\subseteq W$, izlazi odatle tražena formula (20.6).

No obrasci (20.5), (20.6) daju:

$$k E \leqslant (2 k_s E)^{k_c E \cdot k_d E}. \tag{20.9}$$

Brojevi $k_c E$, $k_d E$ su oba ili konačna ili oba beskonačna. U drugom je slučaju

$$k_c E \cdot k_d E = \sup \{k_c E, k_d E\} = k_0 E$$

pa zato iz (20.9) odmah izlazi tražena formula (20.1)

Ako su pak oba broja $k_c E$, $k_d E$ konačna, oni su međusobno jednaki, pa neka je

$$n = k_c E = k_d E = k_0 D. \tag{20.10}$$

Tada je naravno E razvrstan i ranga n, pa rastav

$$E = \bigcup_\nu R_\nu E, \ (\nu < n)$$

daje

$$k E \leqslant n \cdot k_s E, \text{ a ovo je sigurno } \leqslant (2 k_s E)^n = (2 k_s E)^{k_0 E}.$$

Time je teorem 20.1 potpuno dokazan.

Primjedba 20.1. Možemo se pitati, da li je obrazac (20.1) najbolja aproksimacija broja $k E$ u smislu da se u obrascu (20.1) mjesto $\leqslant$ ne može staviti ili uvijek $=$ ili uvijek $<$.

Odgovor je afirmativan; stvarno, ako je φ prvi redni broj zadane potencije m, onda skup svih funkcija

$$a_\xi, \ (\xi < \varphi)$$

sa vrijednostima 0 i 1 uređen po principu prvih diferencija jest uređen skup za koji je $k_0 E = m$, $kE = 2^m$. Dakle u (20.1) ne može vazda stajati znak $<$.

Potpuno uređeni skup racionalnih brojeva pokazuje da u (20.1) ne može vazda stajati znak $=$.

T e o r e m 20.2. Za ma koji djelimično uređen beskonačan skup E važi

$$kE \leqslant 2^{b(E)}.$$

Stvarno, formula

$$kE \leqslant (2k_s E)^{k_0 E} \text{ postaje dalje } \leqslant (2bE)^{bE} = (bE)^{bE} = 2^{bE}.$$

Za potpuno uređene skupove E je $b_s E = 1$, pa zato teorem 20.1 daje

K o r o l a r 20.1. Za ma koji potpuno uređen skup E imamo

$$kE \leqslant 2^{k_0 E} \quad \text{gdje je} \quad k_0 E$$

supremum potencija dobro uređenih odn. obrnuto dobro uređenih skupova $\subseteq E$.

Korolar 20.1 pripada F. H a u s d o r f f u (v. Hausdorff [1] kap VI, §§ 7 i 8; v. također Kurepa, [6] pp. 114—118, naročito p. 118. teorem 1).

Teorem 20.1 objavljen je u Kurepa [19] pp. 2—67 sa dokazom, bez dokaza u Kurepa [16] p. 1196, formula (1).

Stavimo li za djelimično uređen skup E:

$$k^0 E = \sup_F kF$$

pri čemu F prolazi svima *potpuno uređenim* skupovima $\subseteq E$, tada je jasno, da je $k_0 E \leqslant k^0 E$, pa zato teorem 20.1 daje

K o r o l a r 20.2. Za svaki djelimično uređen skup S važi:

$$kS \leqslant (2k_s S)^{k^0 S}.$$

§ 20.1. ZADACI.

§ 20.1.1. *Skup* μ. Promatraj skup μ svih konačnih slogova brojeva $< \omega_1$, uređen na način, da za dva različita sloga

$$a = (a_0, a_1, \ldots a_k)$$
$$b = (b_0, b_1, \ldots b_n)$$

iz μ, relacija $a < b$ bude ekvivalentna ili sa sistemom

$$k = n, \ a_0 = b_0, \ldots a_{k-1} = b_{k-1}, \ a_k < b_k$$

(u slučaju $k = n = 0$, to znači da je $a_0 < b_0$)

ili sa sistemom $k < n$, $(a_0, a_1, \ldots a_k) < (b_0, b_1, \ldots b_{n-1})$.

Dokaži, da skup μ ima ova svojstva:

Iz $a \in \mu$ slijedi

(20.1.1.1) $k(-\infty, a]_\mu = \aleph_0$ ili 1,

već prema tome da li je rang $\gamma(a, \mu)$ prve vrste (odn. 0) ili druge vrste;

(20.1.1.2) $\gamma[a]_\mu = \omega_1, (a \in \mu)$;

(20.1.1.3) $k R_\alpha \mu = \aleph_0, (\alpha < \gamma\mu)$;

(20.1.1.4) $k_c[a]_\mu = \aleph_1, (a \in \mu)$.

Može se dokazati, da svaki razvrstano uređeni skup S sa svojstvima analognim svojstvima (20.1.1.1)—(20.1.1.4) sadrži jedan dio sličan sa skupom μ.

§ 20.1.2. Za gornji skup μ promatraj skup $P_M\mu$ svih maksimalnih potpuno uređenih skupova potencije $\aleph_1$. Na osnovu potpunog uređenja svakog od skupova

$$(-\infty, a)_\mu, (a \in \mu)$$

izvedi leksikografsko uređenje skupa $P_M\mu$ i odredi brojeve $k_c P_M\mu$, $k_d P_M\mu$.

Dokaži da je $k P_M\mu \geqslant \aleph_1$.

Problem 20.1.1. Odredi

$$\sup P_M S$$

pri čemu S prolazi svima dijelovima skupa (C) iz § 18.8.7 sa svojstvima koja su analogna svojstvima (20.1.1.1)—(20.1.1.4) (naravno $P_M S$ označuje skup svih maksimalnih potpuno uređenih skupova potencije $\aleph_1$ i izvađenih iz S).

§ 21. TEOREM O ODNOSU RAZVRSTANIH SKUPOVA I DJELIMIČNO UREĐENIH SKUPOVA.

Upravo je čudnovato, da se teorija razvrstanih skupova nije dosad razvila. U ovom djelu ona je po prvi put prilično sistematski prikazana; inače je algoritam te teorije već bio upotrebljavan kod razvrstano uređenih skupova.

Sada ćemo dokazati jedan teorem o vezi djelimično uređenih skupova sa razvrstanim skupovima, koji će se po svoj prilici moći upotrebljavati kod raznih ispitivanja.

Teorem 21.1. *Svaki djelimično uređen skup S sadrži razvrstan skup $D(S)$ sa svojstvom da je*

(21.1) $$S = \bigcup_{x \in D(S)} (-\infty, x]_S .$$

Kraće to možemo reći ovako: *svaki djelimično uređen skup konfinalan je sa jednim razvrstanim skupom.* Neka naime važe slijedeće definicije.

Općenito, ako su G, H dva podskupa djelimično uređena skupa S, možemo reći, da su skupovi G, H *konfinalni*, ako važi sistem jednakosti:

(21.2) $$G = \bigcup_{h \in H} (-\infty, h]_G$$

(21.3) $$H = \bigcup_{g \in G} (-\infty, g]_H.$$

Analogno se definira *koinicijalnost* skupova G i H pomoću jednakosti:

(21.4) $$G = \bigcup_{h \in H} [h, \infty)_G$$

(21.5) $$H = \bigcup_{g \in G} [g, \infty)_H.$$

Ako su G, H i konfinalni i koinicijalni, veli se, da su oni koekstenzivni. Vidi se, da je konfinalnost (koinicijalnost i koekstenzivnost) jedna ekvivalentna relacija.

Specijalno, sjetimo se da su filtri uređeni skupovi. Svaki dio filtra s kojim je filtar koinicijalan zove se *baza filtra.*

Najprije ćemo dokazati

Lemu 21.1. *Svaki djelimično uređen skup x sadrži bar jedan posve neuređen dio*

(21.6) $$\overset{0}{R} X$$

tako da svaka točka zadana skupa X bude uporedljiva s jednim elementom skupa $\overset{0}{R} X$, dakle

(21.7) $$X = \bigcup_{X} (-\infty, x, \infty)_X, \quad (x \in \overset{0}{R} X).$$

Stvarno, neka je

(21.8) $$x_0, x_1, \ldots, x_\xi, \ldots$$

ma kakvo dobro uređenje skupa X [1]).

Odredimo induktivno skup $\overset{0}{R} X$ ovako: stavimo $a_0 = x_0$; neka je posve neuređen skup

(21.9) $$a_0, a_1, \ldots, a_\beta, \ldots (\beta < \gamma); \quad \text{već određen;}$$

ako je skup

(21.10) $$X \setminus \bigcup_{\beta < \gamma} (-\infty, a_\beta, \infty)_X$$

prazan, stvar je gotova, pa je dovoljno sa $\overset{0}{R} X$ označiti skup svih a_β, $(\beta < \gamma)$; ako je pak skup (21.10) pun, definirat ćemo i točku a_γ

---

[1]) Prema tome, mi dopuštamo mogućnost dobrog uređivanja skupa X t. j. mi prihvatamo Zermelov izborni aksiom.

kao onu točku u uređenju (21.8) koja je prva, a leži u (21.10) Induktivno je na taj način potpuno određen skup $\overset{\circ}{R}X$.

Prijeđimo onda na dokaz teorema 21.1.

Pođemo li od kakvog dobrog uređenja zadana skupa S:

(21.11) $$s_0, s_1, s_2, \ldots, s_\xi, \ldots (\xi < \omega_0),$$ [1]

omogućuje nam lema 21.1, da svakom $X \subseteq S$ pridružimo gornjim induktivnim postupkom izvjestan potskup $\overset{\circ}{R}S$ za koji važi relacija (21.7).

Definirajmo induktivno posve neuređene skupove i broj γ:

(21.12) $$R_0, R_1, \ldots, R_\alpha, \ldots, (\alpha < \gamma) \quad \text{ovako:}$$

Stavimo

(21.13) $$R_0 = \overset{\circ}{R}S,$$

gdje je $\overset{\circ}{R}S$ onaj na osnovu uređenja (21.11) jednoznačno određen neuređeni dio skupa S za koji je

$$S = \bigcup_x (-\infty, x, \infty)_S, \ (x \in \overset{\circ}{R}S).$$

Isto tako:

$$R_1 = \overset{\circ}{R}(S \setminus \bigcup_x (-\infty, x]_S), \ (x \in R_0)$$

$$R_2 = \overset{\circ}{R}(S \setminus \bigcup_x (-\infty, x]_S), \ (x \in \bigcup_{\xi<2} R_\xi).$$

Isto tako za svaki redni broj α stavimo:

(21.14) $$R_\alpha = \overset{\circ}{R}(S \setminus \bigcup_x (-\infty, x]_S), \ (x \in \bigcup_{\xi<\alpha} R_\xi).$$

Na osnovu transfinitne indukcije, određen je time R_α za svaki redni broj α.

Neka je

(21.15) $$\gamma$$

prvi redni broj za koji je $R_\gamma = v$ (praznina).

Na taj je način određena porodica neuređenih punih disjunktnih skupova

(21.16) $$R_0, R_1, \ldots R_\xi, \ldots, (\xi < \gamma)$$

i skup

(21.17) $$W = \bigcup_\xi R_\xi, \ (\xi < \gamma)$$

za koji je

(21.18) $$S = \bigcup_x (-\infty, x]_S, \ (x \in W).$$

To znači da je S konfinalan sa skupom (21.17).

---

[1]) Prema tome, $k\omega_0 = kS$ (slučaj $kS < k\omega_0$ je trivijalan, jer je tada skup S i sam razvrstan pa naravno, da on i sam zadovoljava relaciju (21.1).

Još treba dokazati da je skup W razvrstan.

Dokazat ćemo čak, da je

(21.19) $$R_\alpha W = R_\alpha, \quad (\alpha < \gamma)$$

(21.20) $$\gamma W = \gamma.$$

Zbog jasnoće, stavimo za svaki $\alpha < \gamma$:

(21.21) $$S_\alpha = S \setminus \bigcup_x (-\infty, x]_S, \quad (x \in \bigcup_{\xi<\alpha} R_\xi).$$

Tad je rastav

(21.22) $$S = \bigcup_x (-\infty, x]_S \cup S_\alpha, \quad (x \in \bigcup_{\xi<\alpha} R_\xi)$$

potpuno određeni rez parcijalno uređena skupa S, a S_α je gornja (druga) komponenta toga reza [1]).

Skupovi S_α i

(21.23) $$\bigcup_x (-\infty, x]_S, \quad (x \in \bigcup_{\xi<\alpha} S_\xi)$$

naime očito su zbog (21.21.) bez zajedničkih točaka. Još treba da vidimo, da je S_α završan komad skupa S. To je zato, što je (21.23) očigledno početan komad skupa S, a S_α njegov neprazan komplement.

Kao završan komad skupa S ima skup S_α ovo svojstvo:

(21.24) $$[x, \infty)_{S_\alpha} = [x, \infty)_S, \quad (x \in S_\alpha) \qquad \text{za svaki } \alpha < \gamma.$$

Dokazat ćemo, da je

(21 25) $$R_\alpha = R_0 \, (\bigcup_{x \in R_\alpha} [x, \infty)_S), \quad (\alpha < \gamma)\,^2).$$

Na osnovu (21.22) bit će formula (21.23) dokazana, ako dokažemo, da je

(21.26) $$R_\alpha = R_0 \, (\bigcup_{x \in R_\alpha} [x, \infty)_{S_\alpha}), \quad (\alpha < \gamma).$$

No prema definiciji (21.14), R_α je izvjestan posve neuređen dio skupa S_α:

(21.27) $$R_\alpha \subseteq S_\alpha$$

sa svojstvom da je:

(21.28) $$S_\alpha = \bigcup_x (-\infty, x)_{S_\alpha} \cup \bigcup_x [x, \infty)_{S_\alpha}, \quad (x \in R_\alpha).$$

Iz razloga, što je R_α posve neuređen dio završnog komada:

$$\bigcup_x [x, \infty)_{S_\alpha}, \quad (x \in R_\alpha) \quad \text{skupa } S_\alpha,$$

izlazi odatle neposredno obrazac (21.26), a time i (21.25).

---

[1]) Sjetimo se, da *rezom djelimično uređena skupa S* razumijevamo svaki rastav toga skupa u dva disjunktna dijela od kojih je jedan početan, a jedan završan komad skupa S.

[2]) Sjetimo se, da za parcijalno uređen skup X znak R_0X označuje *skup svih početnih* točaka skupa X.

Kako je

(21.29) $$R_\alpha \subseteq S_\alpha,$$

a svaki $$R_\xi \subseteq S \setminus S_\alpha, \ (\xi < \alpha),$$

to znači, da su skupovi (21.12) dva po dva bez zajedničkik točaka.

Zato je
$$S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \ldots S_\alpha \supset \ldots, \ (\alpha < \gamma)$$
što sa (21.27) daje
$$R_\zeta \subseteq S_\alpha \quad \text{za svaki} \quad \alpha \leqslant \zeta < \gamma.$$

Odatle zaključujemo, da za $\varphi > \alpha$ skup R_ξ kao i R_α leži u drugoj komponenti reza (21.28) t. j.

(21.30) $$R_\zeta \subseteq \bigcup_x [x, \infty)_{S_\alpha} = \bigcup_x [x, \infty)_S, \ (x \in R_\alpha, \ \alpha \leqslant \zeta < \gamma).$$

Na osnovu formule (21.25) izlazi odatle za svaki $\alpha < \gamma$:

(21.31) $$R_\alpha = R_0 (\bigcup_\zeta R_\zeta), \ (\alpha \leqslant \zeta < \gamma).$$

Sada možemo odmah dokazati, da važe tražene formule (21.18) i (21.19). Najprije,

(21.32) $$R_\alpha W = R_\alpha \quad \text{za svaki} \quad \alpha < \gamma.$$

Stvarno, za $\alpha = 0$ obrazac (21.32) je istinit, jer ga dobijemo stavljajući $\alpha = 0$ u obrazac (21.31). Neka je $0 < \beta < \gamma$ i pretpostavimo, da je obrazac (21.32) dokazan za svaki $\xi < \alpha$ t. j. da je

(21.33) $$R_\xi W = R_\xi \ \text{za} \ \xi < \alpha.$$

Dokažimo, da je onda i $R_\alpha W = R_\alpha$.

Stvarno, $R_\alpha W =$ (po definiciji sloja α) $= R_0 (W \setminus \bigcup_{\xi < \alpha} R_\xi W) =$ zbog (21.33) $= R_0 (W - \bigcup_{\xi < \alpha} R_\xi) =$ (zbog disjunktnosti skupova (21.12) i definicije (21.17)) $= R_0 (\bigcup_{\alpha \leq \zeta > \gamma} R_\zeta) =$ (zbog obrasca (21.31)) $= R_\alpha$.

Po principu transfinitne indukcije, dokazana je time formula (21.32) potpuno. Kako je zbog (21.32) i (21.17):
$$W = \bigcup_\alpha R_\alpha W, \ (\alpha < \gamma) \quad \text{i} \quad R_\alpha W \neq 0 \ \text{za svaki} \ \alpha < \gamma,$$
to znači, da važi i jednakost $\gamma = \gamma W$, a to je obrazac (21.20).

Time je izveden dokaz da je W razvrstan i da mu je rang γ.

§ 21.1 **Uslov račvanja i Suslinov problem.** Teorem 18.1.2.1 iskazuje ekvivalentnost Suslinova problema sa problemom o prebrojivosti svakog razvrstano uređenog skupa T za koji je $bT = \aleph_0$. Općenitije, imamo:

Teorem 21.1.1. *Da odgovor na Suslinov problem bude pozitivan, nužno je i dovoljno, da bude najviše prebrojiv svaki jednostrano uređen skup kojemu je svaki dvostrano uređeni dio najviše prebrojiv.*

Stvarno, neka je S proizvoljan skup uređen spram lijevo koji zadovoljava uslovu račvanja; ako je $D(S)$ jedan njegov razvrstan dio s kojim je S konfinalan, te koji po teoremu 21.1 postoji, imat ćemo

$$S = \bigcup_x (-\infty, x]_x, \quad (x \in D(S)). \tag{21.1.1}$$

Uzmimo sada, da je svaki obostrano uređeni dio skupa S konačan ili prebrojiv. Kako je svaki od sumanda u (21.1.1) uređen, bit će on najviše prebrojiv, pa zato iz formule (21.1.1) zaključujemo, da je

$$kS \leqslant \aleph_0 \cdot kD(S)$$

odnosno, ako je S pa prema tome i $D(S)$ beskonačan:

$$kS = \aleph_0 \cdot kD(S). \tag{21.1.2}$$

Na osnovu relacije (21.1.2) sveden je teorem 21.1.1 na teorem 18.1.2.1.

§ 21.2. ZADACI.

§ 21.2.1. Uvjeri se, da je koinicijalnost skupa $R_0 X$ sa X za svaki $X \subseteq S$ nuždan i dovoljan uslov pa da uređen skup S bude razvrstan.

§ 21.2.2. Ako je skup $(-\infty, \omega_1)$ rednih brojeva $< \omega_1$ konfinalan sa svojim dijelom S, tada je taj skup i sličan sa S.

§ 21.2.3. Uredi svaki lijevi čvor skupa $((C); \subseteq)$ iz § 18.8.7. pa na osnovu toga izvedi: a) prirodno potpuno uređenje skupa (C); b) leksikografsko uređenje skupa svih maksimalnih potpuno uređenih dijelova skupa $((C); \subseteq)$.
Da li je koji od dobivenih skupova konfinalan sa ω_1?

§ 21.2.4. Promatraj skup S svih jednoznačnih preslikavanja svih početnih komada linearnog kontinuuma C na skup $\{0, 1\}$ uređen na prirodan način da za dva takva preslikavanja f, g relacija $f \subseteq g$ znači da se transformacija g podudara sa preslikavanjem f na početnom komadu na kojemu je f definirano. Odredi jedan razvrstano uređen dio skupa S koji je konfinalan (koinicijalan) sa S.

§ 21.2.5. Neka su A, B dva djelimično uređena skupa; može li se skup $A_1(B)$ urediti tako, da za $f, g \in A_1(B)$ relacija $f \leqslant g$ ima da znači da je

$$f(b) \subseteq g(b)$$

u A za neki komad skupa B koji je konfinalan sa B.

§ 22. MREŽASTI SKUPOVI. [1]

U novije vrijeme mnogi su ljudi počeli izučavati jednu vrst djelimično uređenih skupova — mrežaste skupove — jer se pojavljuju u vrlo raznolikim oblastima. Ma da su se primjeri mrežastih skupova javljali i mnogo ranije ipak, sve do nedavno, nije bio došao čas njihove opće teorije. [2])

Dat ćemo definiciju mrežastih skupova kao posebne vrste djelimično uređenih skupova, pa ćemo vidjeti, da se kod njih javlja osebujna dualnost koja je bila poznata tek u geometriji. Na osnovu razmatranja mrežastih uređenja, vidjet ćemo, da se analogna dualnost javlja i u drugim dijelovima matematike.

Zbog jednostavnosti, u ovom ćemo §-u uzimati samo takove djelimično uređene skupove $(S; \approx; \leqslant)$ kod kojih iz $x \leqslant y \leqslant x$ slijedi $x \approx y$ (naravno, $\approx$ je izvjesna relacija ekvivalentnosti).

§ 22.1. **Definicija mrežastih skupova.** Djelimično uređen skup

(22.1.1) $$(S; \leqslant)$$

jest *mrežast* [3]) ili *mrežolik*, ako on sadrži infimum i supremum od svakih svojih dviju točaka t. j. ako iz $x, y \in S$ proizlazi, da skup S sadrži jednoznačno određene elemente

(22.1.2) $$\inf\{x, y\} = \inf(\{x, y\}; S) \text{ i } \sup\{x, y\} = \sup(\{x, y\}; S);$$

pri tom je na pr. $\inf(\{x, y\}; S)$ najveća minoranta elemenata x i y, koja je sadržana u S kao element t. j. to je jedini posljednji element među onim elementima m skupa S za koje je i $m \leqslant x$ i $m \leqslant y$. [4])

Drugim riječima, skup S je mrežast s obzirom na relaciju $\leqslant$, ako je u prvom redu skup S djelimično uređen spram $\leqslant$ i nadalje, ako e:

(22.1.3) $$\inf(\{x, y\}; S) \in S, \quad (x, y \in S)$$

(22.1.4) $$\sup(\{x, y\}; S) \in S, \quad (x, y \in S).$$

---

[1]) Engl. *structure* ili *lattice* (mreža); fr. *structure, logique ramifiée;* njem. *Verband* ili *Dualgruppe* (Dedekind).

[2]) Tako je to sa gotovo svima matematičkim pojmovima. Sjetimo se na pr. teorije vektora. Tek pošto je izučavan kao sila, pa kao brzina i kao usmjerena dužina, pojavio se apstraktni pojam vektora i matematička nauka — teorija vektora.

Slično je s djelimično uređenim skupovima i raznim posebnim vrstama tih skupova.

[3]) Misli se mrežaste strukture ili mrežasto uređen.

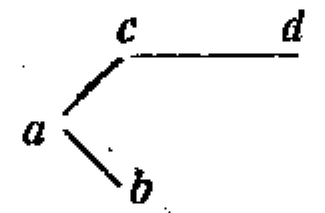
[4]) Općenitije, ako su X, Y dva dijela djelimično uređena skupa, možemo definirati

$$\sup(X; Y) \text{ odn. } \sup_{x \in X}(x; Y) \text{ ili ponekad naprosto } \sup X$$

kao najmanji element y skupa Y za koji je $X = (-\infty, y]_X$ t. j. $x \leqslant y, (x \in X)$. Ako takovog elementa u Y nema, može se staviti $(X; Y) = +\infty$.

Analogno se definira $\inf(X; Y)$ koji je ili određen element skupa Y (i to najveća minoranta skupa X) ili ako takav element u Y ne postoji, stavlja se $\inf(X; Y) = -\infty$.

§ 22.2. **Primjeri mrežastih skupova.** Svaki uređen skup je mrežast. Ako skup ima bar dvije nejednake početne (završne) točke, on nije mrežast, jer u skupu ne postoji infimum (supremum) dviju različitih početnih (završnih) točaka; tako na pr. skup sa shemom



nije mrežast, jer je $sup\{b, d\} = \infty$.

Primjer 22.2.1. *Skup prirodnih brojeva kao mrežast skup.* Ako nam za dva prirodna broja m, n relacija

$$m \leqslant' n$$

znači, da je m divizor broja n, onda skup N postaje mrežolikim skupom $(N; \leqslant')$; tada je: $sup\{m, n\} \equiv$ $\equiv v(m, n) =$ najmanji zajednički višekratnik (multiplum) brojeva m i n;

$inf\{m, n\} = M(m, n) =$ najveća zajednička mjera brojeva m i n.

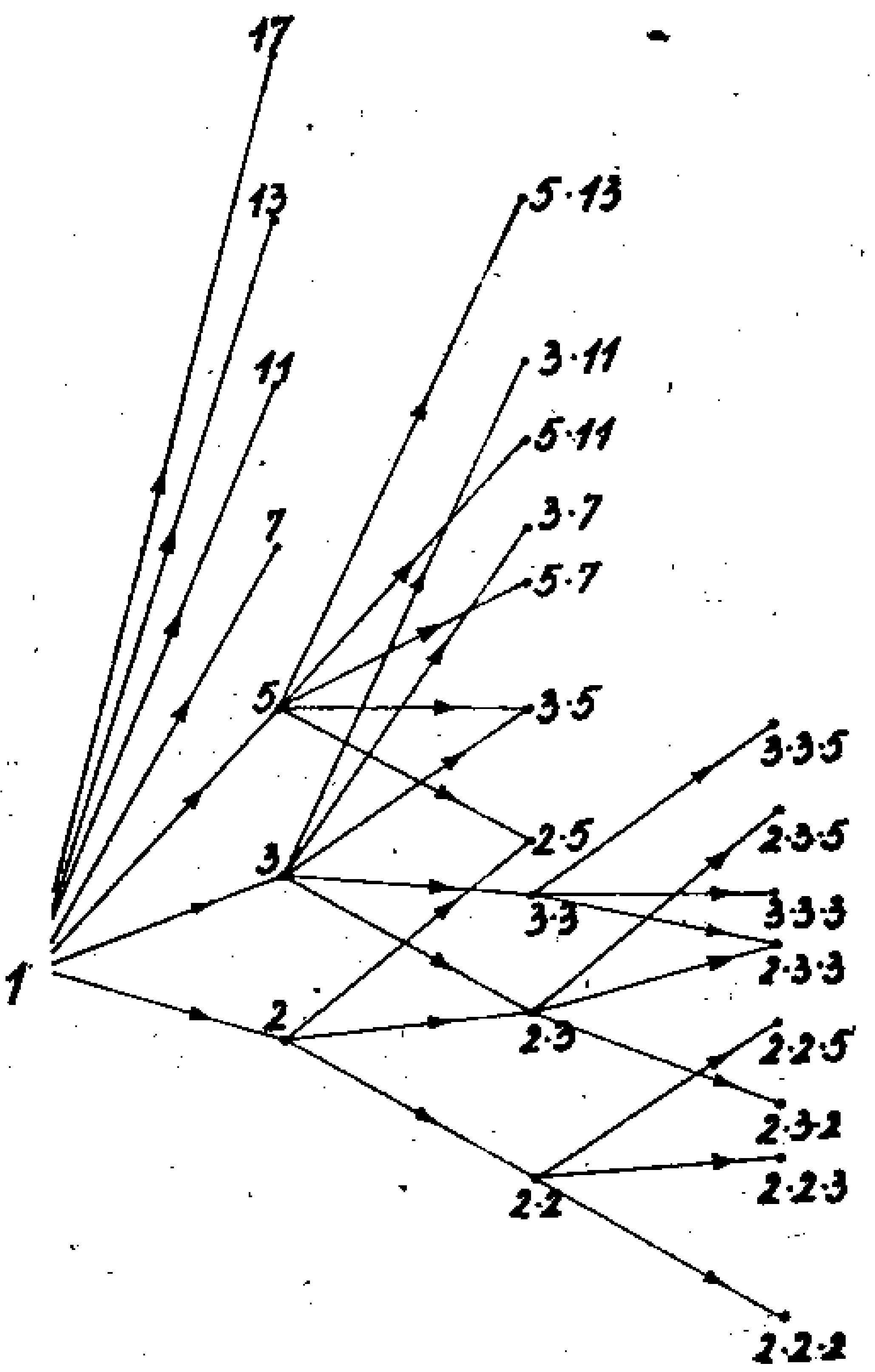
$R_0(N; \leqslant') = \{1\}$; $R_1(N; \leqslant') = P$,

gdje je P skup svih primbrojeva (prabrojeva).

Za svaki prirodni broj n skup $R_0(n, \infty)$ svih neposrednih potomaka broja n sastavljen je od brojeva $n \cdot p$, gdje je p proizvoljan prabroj (primbroj); dakle je:

$$R_0(n, \infty) = n \cdot P.$$

Shematski, može se razvrstano mrežoliki skup $(N; \leqslant')$ predočiti slikom 22.2.1.



Sl. 22.2.1.
Skup N prirodnih brojeva kao mrežast skup: neposredno poslije svakog n dolazi skup nP brojeva np (p primbroj).

Primjer 22.2.2. Diobeni skup $P(S)$ svih $X \subseteq S$ je mrežolik s obzirom na relaciju $\subseteq$. Tu je

$sup\{X, Y\} = X \cup Y =$ (unija skupova X i Y).

$inf\{X, Y\} = X \cap Y =$ (presjek od X i Y).

Taj je skup čak *potpuno mrežolik* u smislu, da za ma kakav $v \neq X \subseteq P(S)$ slijedi

$$inf(X; P(S)) \in P(S), \quad sup(X; P(S)) \in P(S).$$ [1]

[1] Zato je jasno, da se za svaki kardinalni broj m može pitati, da li je djelimično uređen skup S *m-mrežolik* ili nije, u smislu, da li važi ili ne važi relacija:

$$inf(X; S) \in S, \; sup(X; S) \in S \quad \text{za svaki} \quad v \neq X \subseteq S \quad \text{sa} \quad kX \leqslant m.$$

Primjer 22.2.3. *(Matematička logika).* Ako u nekoj aksiomatiziranoj teoriji (na pr. u aksiomatiziranoj geometriji, algebri i t. d.) za dva suda a, b relacija

$$a \geqslant b \text{ znači}$$

da iz suda a na osnovu aksioma i definicija slijedi sud b, postat će množina svih sudova (propozicija) dotične teorije *mrežastom* s obzirom na relaciju $\geqslant$. Za taj skup je $sup\{a, b\} \equiv a \vee b =$ logička suma zadanih sudova t. j. sud koji je istinit onda i samo onda, ako je istinit *bar jedan* od zadanih sudova a i b; infimum pak sudova a i b jest t. zv. logički produkt $a \wedge b$ sudova a i b t. j. sud koji je istinit onda i samo onda, ako su istinita *oba zadana suda.*

Taj primjer mrežasta skupa je glasovit; to je prvi svjesno formulirani mrežasti skup; uveo ga je Boole 1847, odn. Peirce 1867.

Primjer 22.2.4. *(Račun vjerojatnosti).* Ako za dva događaja a i b pišemo

$$a \rightarrow b,$$

ako je vjerojatnost $= 0$, da će se dogoditi a, a ne b, postaje skup događaja djelimično uređenim, pa čak i mrežastim s obzirom na relaciju $\rightarrow$; primjer je sličan prethodnome.

Primjer 22.2.5. *(Projektivna geometrija).* Ako promatramo skup svih linearnih prostora dimenzije $\leqslant n$ (dakle prazan skup, skup svih točaka, pravaca i podprostora dimenzije $\leqslant n$), tada je taj skup mrežast s obzirom na relaciju $\subseteq$; tu je

$sup\{a, b\} =$ spoj od a, b t. j. onaj najmanji projektivni linearni prostor koji sadrži i a i b;

$inf\{a, b\} =$ presjek od a i b.

§ 22.3. Funkcionalno algebarski karakter mrežastih skupova.

Ako je skup $(S; \leqslant)$ mrežast, onda su

$$inf\{x, y\},\ sup\{x, y\} \tag{22.3.1}$$

jednoznačni binarni operatori u tome skupu; očigledno je, da važe ovi identiteti:

I^{sup} (pravilo simetrije) I^{inf}

$$sup\{x, y\} = sup\{y, x\};\ inf\{x, y\} = inf\{y, x\}$$

II^{sup} (pravilo združivanja) II^{inf}

$$sup\{x, sup\{y, z\}\} = sup\{sup\{x, y\}, z\};\ inf\{x, inf\{y, z\}\} = inf\{inf\{x, y\}, z\}$$

III^{sup} (pravilo povezivanja) III^{inf}

$$sup\{x, inf\{x, y\}\} = x;\ inf\{x, sup\{x, y\}\} = x$$

Drugim riječima, u mrežastom skupu definirana su dva jednoznačna binarna operatora (22.3.1) sa 6 svojstava I^{sup}—III^{inf}, koja su u sebi dualna.

Dokazat ćemo, da su ta svojstva karakteristična za mrežaste skupove.

Teorem 22.3.1. *Ako su u skupu*

(22.3.2) $$S$$

— on za sad nije djelimično uređen — definirana dva jednoznačna binarna operatora

(22.3.3) $$\cup\,,\ \cap$$

od kojih je svaki komutativan, asocijativan i koji zadovoljavaju uslovu da uzastopni zahvat jednoga pa drugoga od tih operatora na ma koji element skupa ostavlja taj element na miru, onda tako organiziran skup S možemo parcijalno urediti relacijom

(22.3.4) $$a \cup b = b$$ [1]

i u tako djelomično uređenom skupu važi:

(22.3.5) $$\sup\{x, y\} = x \cup y; \quad \inf\{x, y\} = x \cap y, \ (x, y \in S).$$

Ispišimo najprije simbolički pomenuta definiciona svojstva operatora $\cup$ i $\cap$ (naravno: x, y, z su proizvoljni elementi skupa S); za jednoznačne binarne operatore $\cup$ i $\cap$ važe ovi aksiomi:

(komutacija-obrtljivost)

$\mathrm{I}^{\cup}$ $\quad x \cup y = y \cup x \in S \qquad x \cap y = y \cap x \in S$ $\quad \mathrm{I}^{\cap}$

(asocijacija-združivanje)

$\mathrm{II}^{\cup}$ $\quad x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z \qquad x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$ $\quad \mathrm{II}^{\cap}$

(invarijancija)

$\mathrm{III}^{\cup}$ $\quad x \cup (x \cap y) = x \qquad x \cap (x \cup y) = x$ $\quad \mathrm{III}^{\cap}$

To je istih onih 6 jednakosti I^{sup}—III^{inf}, ali napisane ne za operatore *sup* i *inf* nego za operatore $\cup$ i $\cap$.

Kako su analogne operacije $\cup$ i $\cap$ među skupovima dobro poznate i očito zadovoljavaju gornjih 6 uslova, dobro je da čitalac u prvi mah ima njih u vidu.

Primjedba 22.3.1. Drži na umu dualnost aksioma $\mathrm{I}^{\cup}$, $\mathrm{II}^{\cup}$, $\mathrm{III}^{\cap}$ za operator $\cup$ i pripadnih aksioma za operator $\cap$. Sjeti se pritom principa dualiteta u projektivnoj geometriji.

Primjedba 22.3.2. U vezi sa definicijom mrežasta skupa, zgodno se sjetiti definicije grupe (grupoliki skupovi): to je skup u kojem je definiran samo jedan jednoznačan asocijativan operator $\cup$ sa svojstvom rješivosti „linearnih" jednakosti, t. j.

$A \cup X = B$ i $Y \cup A = B$ imaju rješenje i u skupu.

---

[1]) Relacija $x \cup y = y$ može se na pr. čitati ovako: „veći od x i y jest y (tu se pod veći misli $\geqslant$ t. j. veći" u širem smislu). Prema tome $x \cup y = y$ možemo na pr. pisati u obliku $x \leqslant y$ koji nam je bliži, jer smo se na nj dugotrajnom vježbom privikli.

U *tijelu* (= tjelovit skup) postoje dvije komutativne operacije; s obzirom na jednu od njih skup je grupolik, a s obzirom na drugu od njih grupolik je ne doduše čitav skup nego onaj skup što se iz zadanoga dobije odstranjenjem „neutralnog" elementa prvoga operatora. Prema tome ti operatori u tijelu nisu ravnopravni, što se još potencira zahtjevom da je onaj „uži" operator distributivan spram onoga prvoga.

Izvedimo nekoliko svojstava skupa S i operatora $\cup$ i $\cap$ iz kojih će proizaći i valjanost teorema 22.3.1.

Lema 22.3.1. $x \cup x = x$; i dualno: $x \cap x = x$ za svaki $x \in S$ (idempotentnost operatora $\cup$ i $\cap$).

Stvarno, $x \cup x =$ (po $\mathrm{III}^{\cap}$) $= x \cup (x \cap (x \cup x)) =$ $=$ (po $\mathrm{III}^{\cup}$, stavljajući $z = x \cup x$) $= x$.

Dualno: $x \cap x =$ (po $\mathrm{III}^{\cup}$) $= x \cap (x \cup (x \cap x)) =$ (po $\mathrm{III}^{\cap}$) $= x$.

Lema 22.3.2. Iz $x \cup y = y$ slijedi $x \cap y = x$ i dualno: iz $x \cap y = y$ slijedi $x \cup y = x$.

Naime, zbog $x \cup y = y$ imamo $x \cap y = x \cap (x \cup y) =$ (po $\mathrm{III}^{\cap}$) $= x$. Analogno $x \cap y$.

Korolar 22.3.1. Iz $x \cup y = x \cap y$ slijedi $x = y$.

Lema 22.3.3. Relacija $x \cup y = y$ je uređajna u S; (i dualna relacija $x \cap y = y$ je uređajna u S).

Najprije, ta je relacija povratna: $x \cup x = x$ (lema 22.3.1).

Relacija je prelazna: iz $x \cup y = y$ i $y \cup z = z$ slijedi $x \cup z = z$. Stvarno, $x \cup z =$ (radi $y \cup z = z$) $= x \cup (y \cup z) =$ (po uslovu $\mathrm{II}^{\cup}$ $=$ $= (x \cup y) \cup z =$ (radi $x \cup y = y$) $= y \cup z = z$. Dakle $x \cup z = z$.

Lema 22.3.4. Uredimo li skup S djelimično s obzirom na relaciju

$$m \cup n = n, \ (m, n \in S),$$

onda je

$$x \cup y = \sup\{x, y\}; \text{ i dualno} \tag{22.3.6}$$

$$x \cap y = \inf\{x, y\}.$$

Stvarno, tražena relacija (22.3.6) znači isto što i sistem relacija i zaključaka:

$$x \cup (x \cup y) = x \cup y \tag{22.3.7}$$

$$y \cup (x \cup y) = x \cup y, \text{ t. j. } (x \cup y) \text{ je majoranta od } x \text{ i } y. \tag{22.3.8}$$

Iz sistema

$$x \cup z = z, \ y \cup z = z \quad \text{slijedi} \tag{22.3.9}$$

$$(x \cup y) \cup z = z \tag{22.3.10}$$

t. j. $x \cup y$ je najmanja majoranta točaka x i y.

No (22.3.7) je očigledna posljedica leme 22.3.1 i uslova $\mathrm{II}^{\cup}$; relacija (22.3.8) proizlazi iz leme 22.3.1 i obrtljivosti relacije $\cup$.

Konačno „$\cup$-operirajući", t. j. primjenom operatora $\cup$ na jednakosti (22.3.9) izlazi:

$$(x \cup z) \cup (y \cup z) = z \cup z. \quad \text{Odatle po redu:}$$

$$x \cup (z \cup y) \cup z = z$$

$$x \cup (y \cup (z \cup z)) = z$$

$$(x \cup y) \cup z = z,$$

a to je tražena relacija (22.3.10).

Iz gornjih pet lema proizlazi istinitost samog teorema 22.3.1.

Korolar 22.3.1. Da mrežast skup $(S; \cup, \cap)$ [1]) bude uređen, nužno je i dovoljno, da bude $x \cup y \in \{x, y\}$, $(x, y \in S)$.

Definicija mrežasta skupa S kao skupa točaka i dviju binarnih operacija $\cup$ i $\cap$ sa svojstvima $\mathrm{I}^{\cup}$, $\mathrm{II}^{\cup}$, $\mathrm{III}^{\cup}$, $\mathrm{I}^{\cap}$, $\mathrm{II}^{\cap}$, $\mathrm{III}^{\cap}$ vrlo je zgodna, jer se, kao što već naziremo iz dokaza teorema 22.3.1, može razviti čitav način računanja, operiranja, unutar skupa S.

§ 22.4. **Pojedine vrste mrežastih skupova.** Ako operatore $\cup$ i $\cap$ podvrgnemo još specijalnijim uslovima, dobit ćemo i specijalnije vrste mrežastih skupova.

§ 22.4.1. **Komplementarni mrežoliki skupovi.** Znamo za komplement $C(x)$ zadana skupa x: to je njegova dopuna do cjeline; svojstva su mu:

$$x \cap C(x) = v, \quad x \cup C(x) = S.$$

Veli se da je mrežast skup $(S; \cap, \cup)$ [1]) *komplementaran*, ako je ispunjen ovaj *uslov komplementarnosti*:

(K) Postoji $\inf S \in S$ i $\sup S \in S$, i za svaki $x \in S$ postoji $C(x) \in S$ sa svojstvom

$$x \cap C(x) = \inf S, \quad x \cup C(x) = \sup S.$$

Na pr. mrežasti skup $(N, \leqslant')$ prirodnih brojeva nije komplementaran, jer ne postoji $\sup N$. Niti mrežasti skup $\{1 < 2 < 3\}$ nije komplementaran, jer broj 2 nema svojeg komplementa $C(2)$.

§ 22.4.2. **Distributivni mrežasti skupovi.** Pogledajmo uslov invarijancije $\mathrm{III}^{\cup}$. Vidimo, da je

$$x \cup (x \cap y) = (x \cup x) \cap (x \cup y), \tag{22.4.2.1}$$

jer je lijeva strana po $\mathrm{III}^{\cup}$ jednaka x, a desna strana po lemi 22.3.1 i uslovu $\mathrm{III}^{\cap}$ jednaka x.

No formalno izgleda, kao da smo u (22.4.2.1) monomom x distributivno „$\cup$-*obrađivali*" „binom" $x \cap y$ t. j. obrazovali najprije $x \cup x$ pa onda $x \cup y$ i konačno to dvoje „$\cap$-*obradili*".

[1]) Oznakom $(S, \cup, \cap)$ hoćemo da naznačimo, da su u skupu S definirana dva binarna operatora $\cup$, $\cap$ sa gornjih 6 svojstava.

Kad bi zakon distribucije važio općenitije, mogli bi pisati:

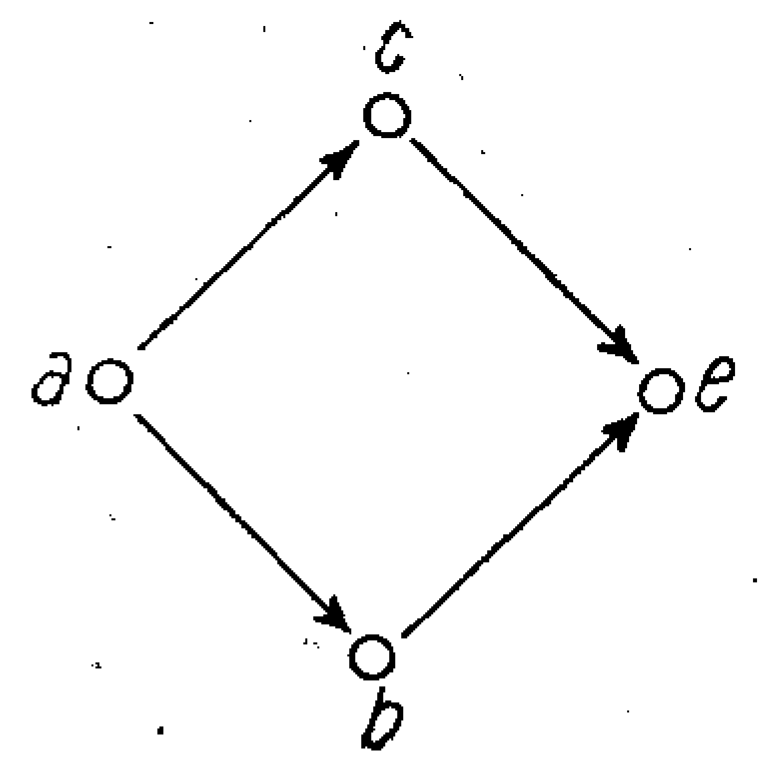
$$(a \cup b) \cap (a \cup c) = [(a \cup b) \cap a] \cup [(a \cup b) \cap c] =$$
$$= [(a \cap a) \cup (b \cap a)] \cup [(a \cap c) \cup (b \cap c)] =$$
$$= (\text{po lemi } 22.3.1, \text{ zakonu } \cup\text{-asocijacije i } \cup\text{-komutacije} =$$
$$= (a \cup (a \cap b)) \cup (a \cap c) \cup (b \cap c) = (\text{po III}^{\cup}) =$$
$$= (a \cup (a \cap c)) \cup (b \cap c) = a \cup (b \cap c).$$

Mrežast skup $(S; \cup; \cap)$ je *distributivan*, ako važe ova dva uslova distribucije:

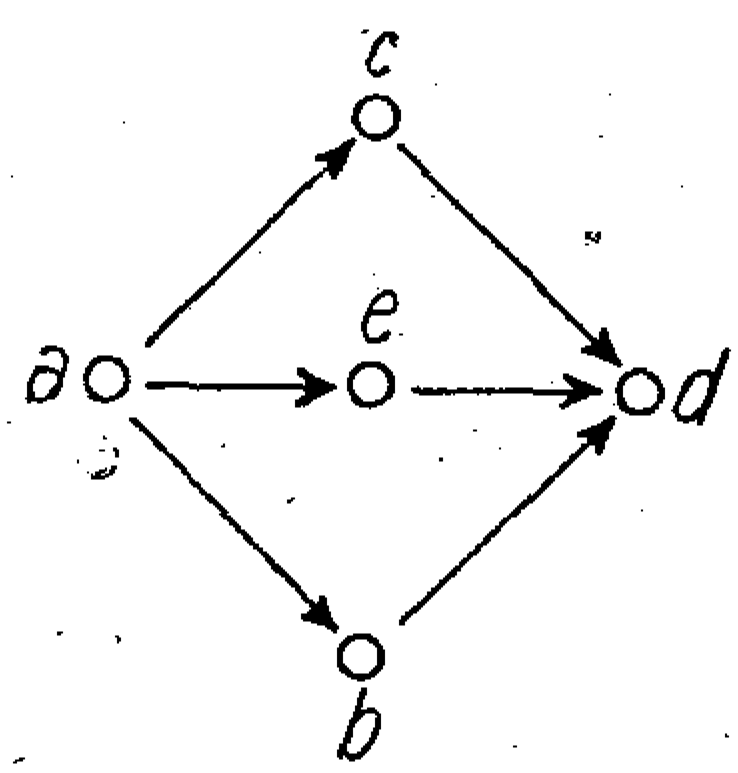
$(D^{\cup})$ $$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$$
(distribucija operatora $\cup$ s obzirom na operator $\cap$);

$(D^{\cap})$ $$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$$
(distribucija operatora $\cap$ s obzirom na operator $\cup$).

Na primjer:

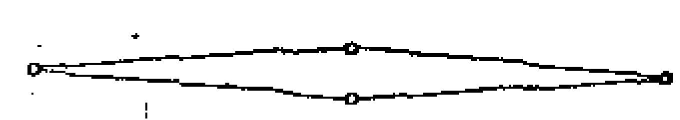


ovaj skup je distributivan



ovaj skup nije distributivan, jer je $(b \cup c) \cap (b \cup e) \neq b \cup (c \cap e)$; lijeva je tu strana naime $d \cap d$ t. j. d, a desna je $b \cup a$ dakle b.

Primjedba 22.4.2.1. U elementarnoj matematici poznata je distributivnost množenja s obzirom na sabiranje. Ali tu dualnosti nema: sabiranje nije distributivno s obzirom na množenje, jer nije $(a \cdot b) + c = (a + c) \cdot (b + c)$. Sječenje i spajanje u projektivnoj geometriji distributivni su operatori jedan spram drugoga.

§ 22.4.3. **Booleova algebra** (također Algebra logike) ili **Booleovi skupovi**. To su mrežasti skupovi koji su i distributivni i komplementarni. Tako na pr. za svaki skup S, pripadni diobeni skup $P(S$ je Booleova algebra; i razvrstani skup  je Booleova algebra od 4 člana.

§ 22.4.4. **Modularni skupovi.** Ako je $a \leqslant b \leqslant c$, onda je jasno da je $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c$ t. j. onda važi i pomiješani zakon združivanja: zagrade se proizvoljno mogu stavljati.

Međutim, u općem slučaju, to naravno ne će važiti. Ali će često važiti, ako za trojku x, y, z važi $x \leqslant z$ ili $x \geqslant z$.

Definicija modularnosti. Skup je modularan, ako važi *uslov modularnosti*

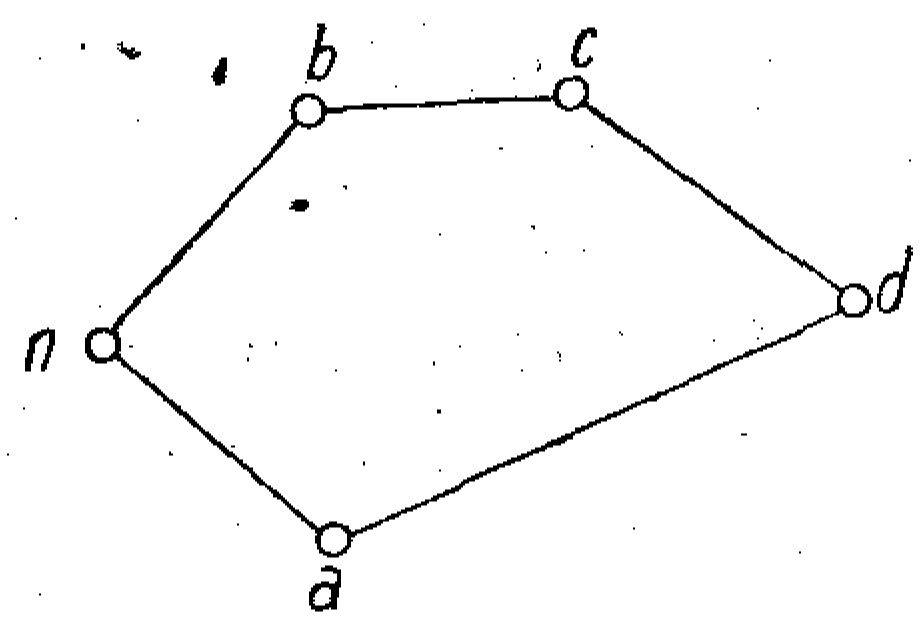
$(M^{\cup})$ Iz $a \leqslant b$ slijedi $a \cup (x \cap b) = (a \cup x) \cap b$

(pazi, da uz *najmanji* član a dolazi operator $\cup$ a ne $\cap$).

Dualni uslov $M^{\cap}$ je ispunjen sam po sebi: treba samo uslov $M^{\cup}$ čitati zdesna nalijevo.

Na pr. skup predočen na slici nije modularan skup; ma da je naime $b \leqslant c$ ipak je

$$b \cup (a \cap c) \neq (b \cup a) \cap c.$$



Lijeva je naime strana $b \cup n = b$, a desna je strana $d \cap c = c$.

Za modularne mrežaste skupove može se dokazati ovaj Dedekindov teorem: Ako su a, b krajevi konačna lanca [1]) modularnog mrežastog skupa S, onda svaki drugi konačni lanac kojemu su a, b krajevi ima jednako mnogo karika koliko i prethodni.

§ 22.4.5. **Pojam ideala.** Pod *$\cup$-idealnom,* ili naprosto *idealom, mrežasta* skupa $(S; \cup; \cap)$ razumijevamo svaki njegov dio I sa svojstvom da bude

$$x \cup y \in I, \quad (x, y \in I),$$

$$x \cap y \in I, \quad (x \in I, \ y \in S).\ ^{2)}$$

Analogno se definira *$\cap$-ideal* ili *dualni ideal.*

Tako na pr. prazni skup je određen ideal; svaki mrežasti skup također; u množini svih ideala skupa S, to su krajnji članovi. Ta množina s obzirom na relaciju $\subseteq$ je potpuno mrežast skup.

Može se dokazati ovo: *ako je mrežast skup distributivan, onda je mrežast i distributivan također skup svih njegovih ideala.*

Teorija ideala ima naročitu ulogu u teoriji brojeva. Dedekind je svojom teorijom ideala u nauci o brojevima bio bitan izgrađivač teorije skupova. Mrežasti skupovi Dedekindov su izum. Taj je izum bio pao u zaborav, ali je danas u središtu pažnje matematičara.

[1]) Određen podskup $L \subseteq S$ zove se lanac, ako iz $x, y \in L$ i $(x, y)_L = v$ slijedi $(x, y)_S = v$.

[2]) To se kraće piše: $I \cup I = I$, $I \cap S = I$; naime, ako je $f(x, y)$ neki operator kojemu varijable x, y prolaze, nezavisno, skupom X odnosno skupom Y, onda se pod $f(X\,Y)$ razumijeva unija svih $f(x, y)$, $(x \in X,\ y \in Y)$.

§ 22.5. ZADACI.

§ 22.5.1. Uredimo li Kartezijev prostor $C_n \equiv C_1 \{1, 2, \ldots n\}$ tako da za njegove elemente f, g relacija $f \leqslant g$ znači $f(x) \leqslant g(x)$, $(x \in \{1, 2, \ldots n\})$, dokaži, da je C_n mrežast. Da li je skup $(C_n; \leqslant)$ distributivan.

§ 22.5.2. Isto pitanje za skup $C_1(C)$ dobiven iz gornjega skupa zamjenom skupa $\{1, 2, \ldots n\}$ sa C.

§ 22.5.3. Isto pitanje za skup $C_1[0, 1]_C$ svih realnih jednoznačnih funkcija definiranih u jediničnom segmentu $[0, 1]_C$.

§ 22.5.4. Promatraj skup $P\{1, 2, 3\}$ svih dijelova skupa $\{1, 2, 3\}$ i uvjeri se, da je on Boole-ova algebra. Odredi skup svih ideala toga skupa.

§ 22.5.5. Uvjeri se, da se svaki uređen skup dodavanjem jednog ili najviše dvaju elemenata može proširiti u potpuno mrežasti skup.

§ 23. PRESLIKAVANJE DJELIMIČNO UREĐENIH SKUPOVA. MONOTONA PRESLIKAVANJA. REALNE FUNKCIJE U DJELIMIČNO UREĐENIM SKUPOVIMA.

Djelimično uređeni skupovi su sigurno najopćenitiji skupovi kod kojih se može govoriti o većem i manjem, tome osnovnom svojstvu broja. Može se govoriti o najraznovrsnijim preslikavanjima djelimično uređenih skupova, bilo da elementima jednog skupa pridružujemo elemente ili skupove drugoga, bilo da pazimo, da se pri preslikavanju ne izgube određena svojstva skupa i t. d.

Pojam sličnosti i ono što iz toga pojma izlazi (redni brojevi i tipovi) može se i ovdje obraditi, pa ćemo tako imati jedinstvenu teoriju rednih brojeva i glavnih brojeva, jer je očigledno, da se „redni tipovi" neuređenih skupova ne će razlikovati od glavnih brojeva.

Mi to ovdje ipak ne ćemo raditi, nego ćemo ukazati na nekoliko specijalnih vrsta preslikavanja i formulirati nekoliko problema koji su i važni i prirodni. Promatrat ćemo jednu vrstu preslikavanja koja je od teoretskog interesa i često se pojavljuje. To su takozvana *uzlazna preslikavanja djelimično uređena skupa* $(S_1; \leqslant_1)$ *na djelimično uređen skup* $(S_2; \leqslant_2)$.

Silazna preslikavanja skupa S_1 u S_2 jesu uzlazna preslikavanja skupa S_1 na $S_2{}^*$.

Silazna i uzlazna preslikavanja zovu se jednim imenom *monotona preslikavanja* skupa E_1 na E_2.

Specijalno, u slijedećoj glavi izučavat ćemo pod nazivom topoloških prostora monotona preslikavanja diobenog skupa $P(S)$, djelimično uređenog spram $\subseteq$, na sama sebe.

Od specijalnog je interesa slučaj, kad *svaki potpuno uređen dio* skupa S_1 prelazi u *sličan* dio drugoga skupa S_2; to su *čisto uzlazna preslikavanja skupa S_1 na skup S_2*.

Među najjednostavnija monotona preslikavanja spadaju konstante: svakom $x \in S_1$ pripada jedan te isti element skupa S_2.

Mi ćemo se ovdje ograničiti na monotona preslikavanja parcijalno uređenih skupova na uređeni skup realnih brojeva. To su prema tome *monotone realne funkcije* kojima je argument u bilo kojem djelimično uređenom skupu.

Vidjet ćemo, da se tu pojavljuju vrlo interesantni problemi koji očekuju svoje odgonetače. I bez sumnje, pitanja u vezi sa razmatranjima u ovome §-u, mogu biti predmetom daljih plodnih razmatranja.

§ 23.1. **Definicija uzlaznih preslikavanja.**

Primjeri. Pod uzlaznim preslikavanjem djelimično uređena skupa $(S_1; \leqslant_1)$ na djelimično uređen skup $(S_2; \leqslant_2)$ razumijevamo svako jednoznačno preslikavanje f skupa $(S_1; \leqslant_1)$ na skup $(S_2; \leqslant_2)$ za koje iz

(23.1.1) $\qquad x, y \in S_1, \ x \leqslant_1 y$. slijedi

(23.1.2) $\qquad f(x) \leqslant_2 f(y)$

(prema tome svaki potpuno uređen dio $D \subseteq S_1$ prelazi u potpuno uređen dio $f(D) \subseteq S_2$; inače, neuređen dio od S_1 ne mora prelaziti u neuređen dio skupa $(S_2; \leqslant_2)$.

U razvrstanim skupovima W važno čisto uzlazno preslikavanje predstavlja t. zv. *rang-funkcija* γ kojoj je definicija ova: svakom $x \in W$ pridružujemo redni broj

(23.1.3) $\qquad \gamma(x; W)$

za koji je $\qquad x \in R_{\gamma(x, W)}(W)$.

Ta nam je funkcija poznata iz prethodnih paragrafa. Inače od poznatijih realnih uzlaznih funkcija u pojedinim porodicama skupova $\subseteq C_3$ (= obični prostor) spomenimo: mjeru (volumen) skupova, dimenziju skupova, dijametar (= suprem razmaka parova točaka u skupu) i t. d. Već po tome vidimo, od kako je velike važnosti pojam monotonih transformacija.

Lema 23.1.1. *U partitivnom skupu $P(N)$ svih dijelova skupa N prirodnih brojeva postoji realna čisto uzlazna funkcija* (Lebesgue).

Označimo naime za $n \in N$, $X \subseteq N$ sa

(23.1.4) $$\varphi(n; X) \text{ broj 1 ili 0,}$$

već prema tome, da li je $n \in X$ ili nije $n \in X$; stavimo li za proizvoljan $X \subseteq N$:

(23.1.5) $$L(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n; X)}{2^n},$$

dobit ćemo time čisto uzlazno preslikavanje skupa $P(N)$ djelimično uređena spram $\subseteq$.

Vidi se, da je $L\,P(N) = [0, 1]_C$.

§ 23.2. **Jedan nuždan uslov za egzistenciju strogo uzlaznih realnih funkcija u E. Problem o njegovoj dovoljnosti.**

Lema 23.2.1. *Da u djelimično uređenom skupu S postoji čisto uzlazna realna funkcija, nužno je da svaki dobro uređeni dio skupa S bude konačan ili prebrojiv:*

(23.2.1) $$k_c S \leqslant k\omega_0.$$

Kako naime za linearni kontinuum C važi

(23.2.2) $$k_c C = \aleph_0$$

jer je svaki dobro uređeni linearni skup $\leqslant k\omega_0$, mora važiti i relacija (23.2.1), ako u S postoji strogo uzlazna funkcija f; u obrnutom slučaju, postojao bi neprebrojiv i beskonačan dobro uređen dio $M \subseteq S$, pa bi takva morala biti i njegova realna slika $f M \subseteq C$ što je nemoguće radi (23.2.2).

Da u općem slučaju gornji potrebni uslov nije dovoljan, pokazuje

Primjer 23.2.1. Neka je M množina svih skupova

$$(-\infty, x)_C \text{ i } (-\infty, x]_C, \ (x \in C)$$

svih realnih brojeva koji su $< x$ odnosno $\leqslant x$; uredimo li M relacijom $\subseteq$, dobit ćemo potpuno uređen skup za koji je naravno

$$k_c M = k_d M = k\omega_0,$$

ali u kojem ne postoji strogo uzlazna realna funkcija: M nije sličan sa nikojim linearnim skupom, i to iz razloga, što on ima kontinuum mnogo susjednih elemenata, dok u svakom linearnom skupu ima najviše $k\omega_0$ susjednih elemenata.

No, ako gornji potrebni uslov nije dovoljan u općem slučaju, ostaje analogno pitanje otvoreno za neke specijalne skupove. To dovoljno pokazuju slijedeći problemi.

Problem 23.2.1. *Da li u svakom razvrstano uređenom skupu, kojemu je svaki posve neuređen i svaki posve uređen dio konačan ili prebrojiv, nužno postoji čisto uzlazna realna funkcija?*

Velike su teškoće u rješavanju toga problema. Problem je ekvivalentan sa Suslinovim problemom; to izlazi iz osnovnog teorema 18.1.2.1 i iz teorema 23.4.1.

Ako je odgovor na problem 23.2.1 pozitivan, onda ima smisla postaviti i

Problem 23.2.2 *Da li u razvrstano uređenom skupu kojemu je svaki uređen dio i svaki sloj najviše prebrojiv (odnosno $< 2^{k\omega_0}$) postoji čisto uzlazna realna funkcija?*

Ako je i na taj problem odgovor pozitivan, onda se postavlja

Problem 23.2.3. *Da li je za razvrstano uređen skup T relacija $k_cT \leqslant \aleph_0$ i dovoljna* (a ne samo nužna) *pa da u T postoji čisto uzlazna realna funkcija?*

§ 23.3. **Jedan dovoljan uslov za egzistenciju realnih funkcija. Problem o njegovoj potrebi.**

Lema 23.3.1. *Ako je djelimično uređen skup S moguće rastaviti na konačno ili prebrojivo mnogo potpuno neuređenih skupova, onda u S postoji strogo uzlazna funkcija* (kojoj su vrijednosti racionalni brojevi). (v. Kurepa, [23] pp 837—840, teor. 1).

Stvarno, neka je

(23.3.1) $$S = \bigcup_n S_n, \ (n < \omega_0);$$

pri čemu je svaki S_n potpuno neuređen:

$$k_s S_n = 1.$$

Neka je

(23.3.3) $$r_0, r_1, \ldots, r_n, r_{n+1}, \ldots$$

niz svih racionalnih brojeva; $r_n \neq r_{n'}$ za $n < n' < \omega_0$.

Neka je

(23.3.4) $$F_n = \bigcup_K S_K, \ (K \leqslant n)$$

za svaki $n < \omega_0$.

Idemo induktivno definirati strogo uzlazne funkcije:

(23.3.5) $$f_n \text{ u } F_n \qquad \text{za svaki } n < \omega_0$$

Da počnemo, stavit ćemo

(23.3.6) $$f_0(x) = r_0 \quad \text{za svaki } x \in F_0 = S_0.$$

Neka je $0 < n < \omega_0$ i pretpostavimo da su definirane funkcije

(23.3.7) $$f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$$

i da su zadovoljena ova dva uslova:

a) Za svaki $\nu < n$ funkcija f_ν je jednoznačna, čisto uzlazna u skupu F_ν i prima u F_ν tek konačno mnogo značenja iz niza (23.3.3); specijalno

(23.3.8) $$k f_\nu(F_\nu) < k\omega_0.$$

b) Za svaki

$$0 \leqslant i < k < n$$

funkcija f_k se podudara sa f_i u skupu F_i.

Definirajmo u F_n funkciju f_n. Kako je $F_n \geqq F_{n-1}$, stavit ćemo

$$f_n(x) = f_{n-1}(x), \quad (x \in F_{n-1}).$$

No, skup F_n je razvrstan, pa je

$$\gamma F_n \leqslant n + 1.$$

Za svaki $a \in R_0 F_n \setminus F_{n-1}$, $f(a)$ će biti prvi član niza (23.3.3), koji je ispod konačnog skupa $f_{n-1}(F_{n-1})$; za svaki $a \in R_1 F_n \setminus F_{n-1}$ označit ćemo sa $f(a)$ prvi član niza (23.3.3) koji je smješten između skupova

$$f_n(-\infty, a)_{R_0 F_n \cup F_{n-1}} \quad \text{i} \quad f_n(a, \infty)_{R_0 F_n \cup F_{n-1}}.$$

Za svaki $\nu < \gamma F_n$ i svaki eventualni $a \in R_\nu F_n \setminus F_{n-1}$, definirat ćemo $f(a)$ kao prvi član niza (23.3.3) za koji je

$$f_n(x) < f_n(a) < f_n(y)$$

pri čemu x i y prolaze svim točkama skupa

$$R_0 F_n \cup R_1 F_n \cup \ldots \cup R_{\nu-1} F_n \cup F_{n-1}$$

koje su $< a$ odnosno $> a$.

Vidi se odmah, da je za svaki $n < \omega_0$ funkcija f_n potpuno određena i da zadovoljava uslove analogne gornjim uslovima a) i b).

Stavljajući za svaki $a \in S$:

$$f(a) = f_n(a)$$

pri čemu je n prvi broj za koji je $a \in S_n$, vidi se, da je funkcija f posve određena u zadanom skupu S, da je čisto uzlazna i da prihvata samo racionalne vrijednosti. Time je lema 23.3.1 dokazana.

U vezi sa lemom 23.3.1 postavlja se

P r o b l e m 23.3.1. *Ako u razvrstano uređenom skupu T postoji čisto uzlazna realna funkcija, da li onda u istom skupu T postoji čisto uzlazna funkcija sa racionalnim vrijednostima?* [1])

To je pitanje ekvivalentno s pitanjem, da li je T moguće rastaviti u najviše prebrojivo mnogo posve neuređenih dijelova.

Stvarno, imamo:

---

[1]) To je specijalan slučaj

P r o b l e m a 23.3.2. *Ako postoji čisto uzlazno preslikavanje razvrstano uređenog skupa T na uređen skup S, pa ako je $S_1 \subseteq S$ i S_1 gust po S, da li onda postoji čisto uzlazno preslikavanje skupa T i na skup S_1?*

Teorem 23.3.1. *Da u djelimično uređenom skupu S postoji čisto uzlazna realna funkcija s racionalnim vrijednostima, nužno je i dovoljno, da se skup S može rastaviti u najviše prebrojivo mnogo posve neuređenih dijelova.*

Da je uslov teorema 23.3.1 dovoljan, to je sadržina leme 23.3.1. Da je uslov teorema i nuždan, izlazi iz ovog razmatranja: prema hipotezi, skup $f(S)$ svih $f(x)$, $(x \in S)$ je prebrojiv (kao dio skupa svih rac. brojeva); no za svaki $x \in f(S)$ skup

$$f^{-1}(x)$$

svih točaka iz S u kojima funkcija ima jednu te istu vrijednost x jest posve neuređen dio skupa S; kako je očito

$$S = \bigcup_t f^{-1}(t), \quad (t \in f(S)),$$

određen je time traženi rastav skupa T.

Specijalno se postavlja

Problem 23.3.3. *Da li u djelimično uređenom skupu* ωR *postoji čisto uzlazna funkcija s racionalnim vrijednostima?*

Drugim riječima, *može li se svakom dobro uređenom skupu S racionalnih brojeva pridružiti racionalan broj $f(S)$ tako da za ma koja dva različita dobro uređena skupa S_1, S_2 racionalnih brojeva bude*

$$f(S_1) < f(S_2),$$

čim je S_1 početni komad od S_2?

Problem 23.3.4. *Da li nužno postoji u razvrstano uređenom skupu čisto uzlazna realna funkcija, ako takova funkcija postoji u svakom od njegova dva komplementarna dijela?*

Problem 23.3.5. *Ako u razvrstano uređenom skupu T postoji čisto uzlazna realna funkcija, pa ako je*

$$\gamma(-\infty, x, \infty)_T = \omega_1, \quad (x \in T)$$

da li onda T sadrži jedan (Aronszajnov) *skup A sa svojstvima:*

$$\gamma(-\infty, x, \infty)_A = \omega_1, \quad (x \in A)$$

$$k R_\alpha A \leqslant k\omega_0, \quad (\alpha < \omega_1).$$

§ 23.4. Suslinov problem i realne funkcije u razvrstano uređenim skupovima.

Jedan od zgodnih rezultata u ovom krugu razmatranja jest sadržina

Teorema 23.4.1. *Svaki beskonačni neprebrojiv razvrstano uređen skup u kojem postoji čisto uzlazna (silazna) realna funkcija sadrži beskonačan neprebrojiv posve neuređen potskup* (v. Kurepa, [21], p. 30).

Neka je dakle

$$(23.4.1) \qquad T$$

ma koji razvrstan poluuređen skup kardinalna broja $> k\omega_0$, a

$$(23.4.2) \qquad f(x), \ (x \in T)$$

ma kakva čisto uzlazna realna funkcija u T. Treba dokazati, da u T postoji posve neuređen dio, kojemu je kardinalan broj $> k\omega_0$.

Ako slučajno koji sloj skupa T ima kardinalan broj $> k\omega_0$, teorem bi bio već dokazan, jer je svaki sloj posve neuređen skup.

Ostaje nam dakle slučaj:

$$(23.4.3) \qquad kR_\alpha T \leqslant k\omega_0, \ (\alpha < \gamma T).$$

Kako je $kT \geqslant k\omega_1$, znači, da je

$$(23.4.4) \qquad \gamma T \geqslant \omega_1.$$

No, kako u T postoji čisto uzlazna realna funkcija, mora biti

$$(23.4.5) \qquad \gamma T \leqslant \omega_1.$$

Iz (23.4.4) i (23.4.5) izlazi, da je

$$(23.4.6) \qquad \gamma T = \omega_1.$$

A iz (23.4.3) i (23.4.6) izlazi

$$(23.4.7) \qquad kT = k\omega_1.$$

Možemo, također, pretpostaviti, da svaki $x \in T$ ima u T neprebrojivo mnogo potomaka; uočimo li naime skup

$$P \text{ svih } x \in T$$

sa najviše prebrojivo mnogo potomaka, pa kad bi P bio neprebrojiv, njegov prvi sloj $R_0 P$ bio bi posve neuređen i neprebrojiv skup $\subseteq T$. Ako je pak $kP \leqslant k\omega_0$, odstranit ćemo P iz T; preostatak opet označiti sa T pa će sada novi T zadovoljavati uslovu da svakom $t \in T$ pripada bar jedan potomak $b(t)$, tako da imamo određeno preslikavanje

$$(23.4.8) \qquad b(t) \succ t, \ (t \in T).$$

Kako je $b(t)$ potomak od t, a funkcija (23.4.2) čisto uzlazna, bit će

$$(23.4.9) \qquad f(t) < f(b(t)), \ (t \in T).$$

Sada ćemo upotrijebiti uslov, da je posve uređeni skup fT svih $f(t)$, $(t \in T)$ separabilan; pa neka je dakle

$$(23.4.10) \qquad r_0, r_1, \ldots, r_n, \ldots$$

bilo kakav skup brojeva koji je gust u skupu $f(T)$; pritom neka bude $r_n \neq r_{n'}$ za $n < n' < \omega_0$. Označimo za svaki pojedini $n < \omega_0$ sa

$$(23.4.11) \qquad T_n$$

skup svih $t \in T$ za koje je

(23.4.12) $$f(t) \leqslant r_n < f(b(t)).$$

Naravno:

(23.4.13) $$T = \bigcup_n T_n, \quad (n < \omega_0),$$

što zbog $kT = k\omega_1$ povlači, da bar jedan T_n u (23.4.13) ima $k\omega_1$ elemenata; recimo neka je

(23.4.14) $$kT_n = k\omega_1;$$ prema tome važi

(23.4.15) $$f(t) \leqslant r_n < f(b(t)), \quad (t \in T_n).$$

Naravno, opet možemo pretpostaviti, da za ovaj T_n svaki sloj bude $\leqslant k\omega_0$ i da svaki element iz T_n ima u T_n neprebrojivo mnogo potomaka.

Označimo li za bilo koji $t \in T_n$ sa
$$\gamma(t; T_n)$$
rang točke t u skupu T_n t. j. redni broj za koji je

(23.4.16) $$t \in R_{\gamma(t;T_n)}(T_n),$$

može se induktivno lako odrediti transfinitan niz

(23.4.17) $$t_\xi \in T_n, \quad (\xi < \omega_1),$$

tako da promatrajući pripadne njihove potomke (23.4.8):

(23.4.18) $$b(t_\xi), \quad (\xi < \omega_1)$$

bude

(23.4.19) $$\gamma(t_0; T_n) < \gamma(b(t_0); T_n) < \gamma(t_1; T_n) < \gamma(b(t_1); T_n) < \ldots$$
$$\gamma(t_\xi\, T_n) < \gamma(b(t_\xi); T_n) < \gamma(t_{\xi+1}; T_n), \ldots, \quad (\xi < \omega_1).$$

Stvarno, kao t_0 može poslužiti bilo koji element sloja $R_0 T_n$; uopće za svaki $0 < \alpha < \omega_1$, možemo za t_α uzeti bilo koji element sloja $R_{\alpha_0} T_n$, gdje je
$$\alpha_0 = \sup_{\xi < \alpha} \gamma(b(t_\xi); T_n).$$
Dokažimo da su dobiveni elementi (23.4.18) dva po dva neuporedljiva.

Uistinu, neka je $\alpha < \beta < \omega_1$; kako je prema (23.4.19):
$$\gamma(b(t_\alpha); T_n) < \gamma(b(t_\beta); T_n),$$
ne može $b(t_\alpha)$ biti potomak od $b(t_\beta)$.

Ali, ne može ni $b(t_\beta)$ biti potomak od $b(t_\alpha)$. U obrnutom naime slučaju, bio bi $b(t_\alpha)$ predak od $b(t_\beta)$. No i t_β je prema definiciji (23.4.8) predak od $b(t_\beta)$. Zato bi $b(t_\alpha)$ i t_β *kao dva pretka jednog te istoga elementa morala biti isporedljiva,* [1]) dakle ili

[1]) Tu dolazi do bitnog izražaja činjenica, da radimo sa poluuređenim skupovima. Teorem 23.4.1 ne mora važiti, ako skup nije poluuređen. Tako na pr. za neprebrojivi razvrstani skup W iz leme 19.2.1 bilo je $bW = k\omega_0$, dakle je njegov posve neuređeni dio najviše prebrojiv, ma da u W postoji uzlazna realna funkcija na pr. identičnost.

(23.4.20) $b(t_\alpha) \leqslant t_\beta$ ili

(23.4.21) $t_\beta < b(t_\alpha)$.

No, iz (23.4.20) bi zbog uzlaznosti funkcije (23.4.2) za točke $b(t_\alpha)$ i t_β skupa T_n bilo:

$$f(b(t_\alpha)) \leqslant f(t_\beta),$$

što je u protivnosti sa relacijama (23.4.15).

Ali, ne važi niti (23.4.21), jer bi inače zbog uzlaznosti rang-funkcije γ bilo

$$\gamma(t_\beta; T_n) < \gamma(t(b_\alpha); T_n)$$

a to je u protivnosti s $\alpha < \beta$ i relacijama (23 4.19).

Time je potpuna neuređenost neprebrojiva skupa točaka (23.4.18) dokazana.

§ 23.5. O porodicama dobro uređenih linearnih skupova.

Teorem 23.5.1. *Svaka beskonačna neprebrojiva porodica P dobro uređenih linearnih skupova sadrži beskonačan neprebrojiv sistem, čiji su članovi dva po dva neuporedljiva t. j. nijedan nije sadržan kao početni komad drugoga.*

Stvarno promatrana porodica P je dio razvrstano uređena skupa ωC svih dobro uređenih linearnih skupova razvrstanih s obzirom na poklapanje po početnim komadima (v. primjer 16.4.2.).

Neka je φ ma kakvo preslikavanje sličnošću linearnog kontinuuma C na skup $(0, 1)_C$; tada je

$$sup\, \varphi(S), \ (S \in \omega C)$$

određeno uzlazno preslikavanje skupa ωC na uređen skup pravih razlomaka i pritom nijedan tročlan uređen dio iz ωC ne može prijeći u jednu jedinu točku skupa $(0, 1)_C$. Ako se naime dobro uređeni skup S_1 završava brojem $sup\, S$, bit će $sup\, S = sup\, S_1$, ako S i jest pravi početni komad od S_1.

Odatle izlazi, da je $sup\, \varphi(S)$ čisto uzlazna realna funkcija u oba skupa

$$\bigcup_{\alpha<\omega_1} R_{\alpha+1}(\omega C), \quad \bigcup_{\alpha<\omega_1} R_{\omega\alpha}(\omega C).$$

Naravno, da ista stvar važi pogotovo za svaki $P \subseteq \omega C$. Odatle, na osnovu teorema 23.4.1 izlazi i teorem 23.5.1.

Problem 23.5. *Ako je S ma koji potpuno uređen skup, da li se ωS može preslikati čisto uzlazno na S?*

§ 23.6. Veza sa Suslinovim problemom.

S obzirom na osnovni teorem 18.1.2.1 o ekvivalentnosti Suslinova problema s problemom, da li za razvrstan uređen skup T iz $bT \leqslant k\omega_0$ slijedi $kT \leqslant k\omega_0$, sadržina teorema 23.4.1 postaje naročito značajnom.

U radu [23] promatrane su *skoro čisto uzlazne funkcije* kao one monotone transformacije f koje zadovoljavaju uslovu da iz

$$k[x, \infty)_T > 1 \quad \text{slijedi} \quad kf[a, \infty)_T > 1$$

pa je pokazano ovo: *Kad bi svaki beskonačni T, u kojem postoji skoro čisto uzlazna realna funkcija, zadovoljavao uslovu $bT = kT$*, važila bi ta jednakost za svaki beskonačni T.

Međutim, na jednakost $bT = kT$ može se zaključiti svaki put, kad uz egzistenciju skoro čisto uzlazne realne funkcije u T skup T zadovoljava bar jednom od ova dva uslova:

I. $\gamma(-\infty, x, \infty)_T = \gamma T$, $(x \in T)$;

II. γT je ili redni broj prve vrste ili regularan inicijalan redni broj (v. § 14.6.2)

S tim u vezi sjetimo se ponovno problema 23.2.1 koji pita da li iz relacije $bT \leqslant \aleph_0$ nužno slijedi, da u T postoji čisto uzlazna realna funkcija?

Imajući u vidu teoreme 18.1.21 i 23.4.1, problem je ekvivalentan sa Suslinovim problemom.

§ 23.7. ZADACI.

§ 23.7.1. Neka je T bilo koje uređenje skupa R u obliku progresije; tada je za svaki $r \in R$ potpuno određen rang $\gamma(r; T)$ broja r, kao onaj redni broj da r u nizu T bude po redu $\gamma(r, T)$-ti od početnog (za početni je $\gamma = 0$). Za svaki realni broj x stavimo

$$\varphi(x) = \sum_r \frac{1}{(\gamma(r, T) + 1)^2}, \quad (r \in (-\infty, x]_R)$$

t. j. r prolazi svima racionalnim brojevima $\leqslant x$. Uvjeri se da je φ čisto uzlazna realna funkcija.

§ 23.7.2. Da li u skupu $\{1, 2\} \times C$ alfabetski uređenom postoji uzlazna realna funkcija. A čisto uzlazna? A takova funkcija f da iz

$$X \subseteq \{1, 2\} \times C, \ kX \geqslant 3 \quad \text{slijedi} \quad kf(X) \geqslant 2?$$

§ 23.7.3. Promatraj skup $C \times C = C_1 \{1, 2\}$ i njegova tri uređenja: glavno, redno i čisto (gl. § 16.8.3); da li u kojem od tih slučajeva postoji čisto uzlazno realno preslikavanje?

§ 23.7.4. Isto pitanje za skup $C_1(N)$.

§ 23.7.5. Isto pitanje za skup $C_1(C)$.

DRUGI DIO

PROSTORNI SKUPOVI ILI PROSTORI.

§ 24. ŠTA JE PROSTOR?

Ideja o prostoru je u isti mah vanredno prosta i vanredno važna. Tu se radi o tome, da znamo odgovoriti na ovo pitanje: da li je zadan element u kakvoj vezi sa zadanim skupom elemenata! Odnosno da znamo, gdje se i kako *prostire* pojedini skup. Obično će se raditi o tome da se pitamo, *da li je zadan element vrlo blizu, u dodiru, sa zadanim skupom!* Samo se radi o tome, da znamo, što to znači, da se zadan element *„dodiruje"* zadana skupa! Da li to znači, da zadan skup ima elemenata koji su „udaljeni" od zadana elementa za manje od ma kojeg broja $\eta = 0$? Mi smo naime naviknuti da udaljenost odn. bliskost definiramo pomoću brojeva, pa nam je zato „jasno" da je kompleksni broj $3+i$ „bliži" broju $1+2i$ nego što je to broj $13759-10^8 i$, jer je „razdaljina" $\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2}$ prvih brojeva manja od međusobne „razdaljine" $\sqrt{(3-13759)^2+(1-10^8)^2}$ drugih dvaju brojeva. Ali, šta će se smatrati pod razdaljinom dviju funkcija? Pa k tome, ako su one kompleksne? Ili pod „daljinom" dvaju logičkih sudova?

Ideja o preslikavanju i ovdje je od osnovne važnosti, *jer će se prostorom zvati svaki skup B u kojem je dat propis, da svakom dijelu X toga skupa B pridružimo određenu množinu $\overline{X}$ istoga skupa B.* Da imamo izvjesnu sliku pred očima, govorit ćemo, da se svaka točka skupa $\overline{X}$ *„dodiruje"* skupa X. Skup $\overline{X}$ zvat ćemo *prostornošću* ili *adherencijom skupa X.*

Prema tome, *prostor je uređen par sastavljen od proizvoljna skupa B (baza prostora) i proizvoljna postupka Π kojim svakom dijelu X skupa B pridijeljujemo jednoznačno određen dio*

$$\Pi(X)$$

skupa B, *takozvanu prostornost* (*sferu uticaja* ili *adherenciju*) *skupa X.*

Sam takav prostor može se označiti sa

$$(S;\ \Pi),$$

pa se može govoriti o prostoru $(S;\Pi)$ ili o topologiji $(S;\Pi)$ kao o nauci o tome prostoru, kao naročito organiziranom skupu S.

Prema tome, Π je operator koji svakom skupu $X \subseteq B$ pridružuje potpuno određen skup $\Pi(X)$; specijalno je $\Pi(v)$ potpuno određen dio skupa B; naravno da može ali ne mora biti $\Pi(v) = v$. (= prazan skup).

Primjer 24.1. Ako promatramo skup $\{1, 2, 3\}$ pa svakom njegovom dijelu pridružimo aritmetički produkt elemenata toga dijela, postaje skup $\{1, 2, 3\}$ određenim prostorom; u tome je prostoru prostornost skupa $\{1, 3\}$ sastavljena od od broja 3; prostornost zadana skupa $\{1, 2, 3\}$ je pusta, jer aritmetički produkt $1 \cdot 2 \cdot 3$ ne leži u osnovnom skupu $\{1, 2, 3\}$; i prostornost pusta skupa v je pusta.

Primjer 24.2. Pridijelimo li svakom $X \subseteq S$ njegov komplement $C(X) = S \setminus X$, postaje time skup S određenim „prostorom", upravo prostorom $(S; C)$.

Primjer 24.3. Ako svakom dijelu X običnog „trodimenzionalnog prostora" C_3 pridijelimo kao skup $\Pi(X)$ skup svih neizmjerno bliskih točaka skupa X t. j. sve točke x prostora koje imaju svojstvo, da svaka kuglica opisana oko točke x sadrži bar jednu točku skupa X, dobije se time prostor identičan sa zadanim „prostorom" C_3.

Primjer 24.4. *Diskretni prostor* odnosno *diskretna topologija* na zadanu skupu S nastaje kad za svaki $X \subseteq S$ stavimo $\Pi(X) = X$; posebno dakle $\bar{v} = v$.

Do pojma prostora došli su, nezavisno jedan od drugoga, Francuz M. Fréchet (prvi rad o tome pada u 1904) i Amerikanac E. H. Moore (prvi rad potječe iz godine 1905). Poslije su bitnih priloga dali R. Riesz i F. Hausdorff. Ideja, da se skup $\Pi(X)$ koji pripada skupu X interpretira kao skup točaka od kojih je svaka u „dodiru" sa skupom X — tada se mjesto $\Pi(X)$ piše $\bar{X}$ — potječe od Poljaka Kuratowskoga, ta se ideja pokazala vanredno plodnom i prirodnom.

Čitava plodnost teorije prostora proističe iz činjenice, da ima skupova i točaka koji su si neizmjerno nablizu, a da ipak nema međusobne incidencije. Tako na pr. promatramo li skup

$$\frac{1}{1} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots\}$$

onda je prirodno da kažemo, da je nula neizmjerno bliska tome skupu kao cjelini, čak mu je možda bliskija od ma kojeg njegova vlastita elementa.

Koliko god gornja definicija prostora izgledala apstraktna i kao da nema veze s uobičajenom slikom o prostoru, vidjet ćemo, da je uistinu baš sve obrnuto. Iz gornje definicije prostora izvest ćemo sve ono što nam i zor povezuje za prostornost.

Zaključno neka važi ova

Definicija prostora. *Prostor je svaki uređen par*

(24.1) $$(S; \Pi)$$

sastavljen od proizvoljna skupa S i proizvoljna postupka Π koji svakom $X \subseteq S$ pridružuje jedan jedini skup $\Pi(X) \subseteq S$ koji se zove prostornost il adherencija skupa X.

Prema Kuratowskome, zgodno je $\Pi(X)$ interpretirati kao skup svih točaka iz S koje su u „dodiru" sa skupom X odnosno koje su „neizmerno bliske" skupu X. U toj interpretaciji, može se prostorni postupak Π označiti operatorom — (crtica iznad skupa kojemu tražimo odn. određujemo prostornost). Tada se govori o prostoru

(24.2) $$(S; -)$$

držeći pritom na umu, dá svakom $X \subseteq S$ pripada jedan jedini skup $\overline{X} \subseteq S$.

Razne vrste prostora dobit ćemo mijenjajući osnovni skup S — materijalni supstrat prostora. No, karakter prostora zavisit će naročito od postupka Π kojim određujemo prostornost skupova iz S. Pa se prostori uglavnom dijele prema tome, kako se faktički može da odredi ta prostornost. Ali, kad govorimo o prostoru, onda uvijek moramo pomišljati prvo na njegove točke i onda na njegovu organizaciju t. j. na vezu svakog skupa $X \subseteq S$ sa prostornosti $\overline{X} \subseteq S$ toga skupa X.

Kako svi skupovi $X \subseteq S$ obrazuju partitivni skup

$$P(S)$$

tako da su odnosi $X \subseteq S$ i $X \in P(S)$ međusobno ravnopravni, vidimo *da se prostor $(S; f)$ sastoji u jednoznačnom preslikavanju f skupa $P(S)$ na sama sebe.*

Primjedba 24.1. Uoči, da je prostornost svakog skupa iz prostora posve određen dio (da ne kažemo *komad*) toga prostora.

GLAVA IV

RAZDALJINSKI, POLURAZDALJINSKI, UREĐENI I TOPOLOŠKI (OKOLINSKI) PROSTORI.

U ovoj glavi upoznat ćemo se sa nekoliko vrsta prostora. Pitanje u koju će vrstu spadati konkretan prostor zavisit će u glavnom od načina na koji se može definirati dodir elemenata i skupova. Kako je prva ideja da se dodir definira pomoću brojeva, zato možemo i početi dalje razlaganje sa t. zv. razdaljinskim (metričkim) prostorima.

§ 25. RAZDALJINSKI (METRIČKI, DISTANCIJALNI) I POLURAZDALJINSKI PROSTORI.[1] POTPUNO UREĐENI PROSTORI.

Često se može govoriti o međusobnom razmaku ma kojih dviju točaka skupa, dakle o izvjesnoj realnoj funkciji ϱ sa dva argumenta koji pripadaju tome skupu, što znači, da je $\varrho(x, y)$ određen realan broj za svaku točku x i svaku točku y skupa.

§ 25.1. **Polurazdaljinska i razdaljinska funkcija.** *Pod polurazdaljinskom funkcijom* ili *écart-om* (ekar) u skupu S razumijevamo svako jednoznačno preslikavanje

(25.1.1) $$\varrho$$

skupa $S \times S$ na skup realnih brojeva, tako da budu ispunjena ova dva uslova:

I. *Uslov realnosti i poništavanja*: Funkcija ϱ je $\geqslant 0$; za ma koje točke x, y zadana skupa, jednakost

(25.1.2) $$x = y$$

je ekvivalentna sa jednakošću

(25.1.3) $$\varrho(x, y) = 0$$

t. j. iz (25.1.2) izlazi (25.1.3) i obrnuto;

II. *Uslov simetrije*: Funkcija ϱ je simetrična:

(25.1.4) $$\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$$

za svaki par točaka x i y.

[1]) Te je prostore uveo M. Fréchet; zove ih *espaces (D)* i *„espaces (E)“*, kao početna slova od *„distance“* (razdaljina) i *„écart“* (odstupanje). Naziv *„metrički“* potieče od Hausdorffa.

Pod *razdaljinskom funkcijom* u skupu S razumijevamo svaku polurazdaljinsku funkciju u skupu S koja ispunjava slijedeći

Uslov trokuta: Za ma koje točke x, y, z važi

(25.1.5) $$\varrho(x, y) \leqslant \varrho(x, z) + \varrho(z, y).$$

Broj $\varrho(x, y)$ može se zvati *razmakom* ili *razdaljinom točaka* x i y; često se označuje sa

(25.1.6) $$|x-y|$$

Dužina AB između točaka A, B u običnom prostoru ili ravnini je određena razdaljinska funkcija u prostoru odnosno ravnini. Modul razlike dvaju realnih (kompleksnih) brojeva je određena razdaljinska funkcija u skupu svih realnih (kompleksnih) brojeva.

U svakom skupu S ima razdaljinskih funkcija, kao što to pokazuje:

Primjer 25.1.1. Stavimo li za svaki par točaka x, y skupa S:

$$\varrho(x, y) = 0 \quad \text{ili} \quad 1,$$

prema tome, da li je $x = y$ ili $x \neq y$,

dobivena funkcija ϱ je razdaljinska u skupu S.

§ 25.2. **Sferoidi ili kugle.** Ako u skupu S postoji polurazdaljinska funkcija ϱ, nameće se sama po sebi ova

Definicija kugle sa središtem s *i radiusom* r [1]). Za svaku točku s i svaki realan broj $r > 0$, skup

(25.2.1) $$K(s; r)$$

svih točaka $x \in S$ za koje je

(25.2.2) $$\varrho(x, s) < r$$

zove se *kugla ili sfera (sferoid)* kojoj je s središte, a r radius [1]);

U skupu realnih brojeva sastavljena je „kugla" $K(s; r)$ od svih realnih brojeva x za koje je

$$|x-s| < r$$

t. j. za koje je

$$s - r < x < s + r.$$

Sl. 25.2.1.
„Kugla" realnih brojeva sa središtem s i radiusom r jest interval $(s-r, s+r)_C$

To su t. zv. *r-intervali (simetrični intervali)* oko točke A.

Za proizvoljan kompleksan broj z i proizvoljan realan broj $r > 0$, „kugla" $K(z; r)$ je sastavljena od svih kompleksnih brojeva koji leže unutar kružnice što je oko točke z opišemo sa radiusom r.

Lema 25.2.1. *Svaka kugla sadrži svoje središte, a sadržana je u svakoj kugli većeg radiusa, a sa istim središtem.*

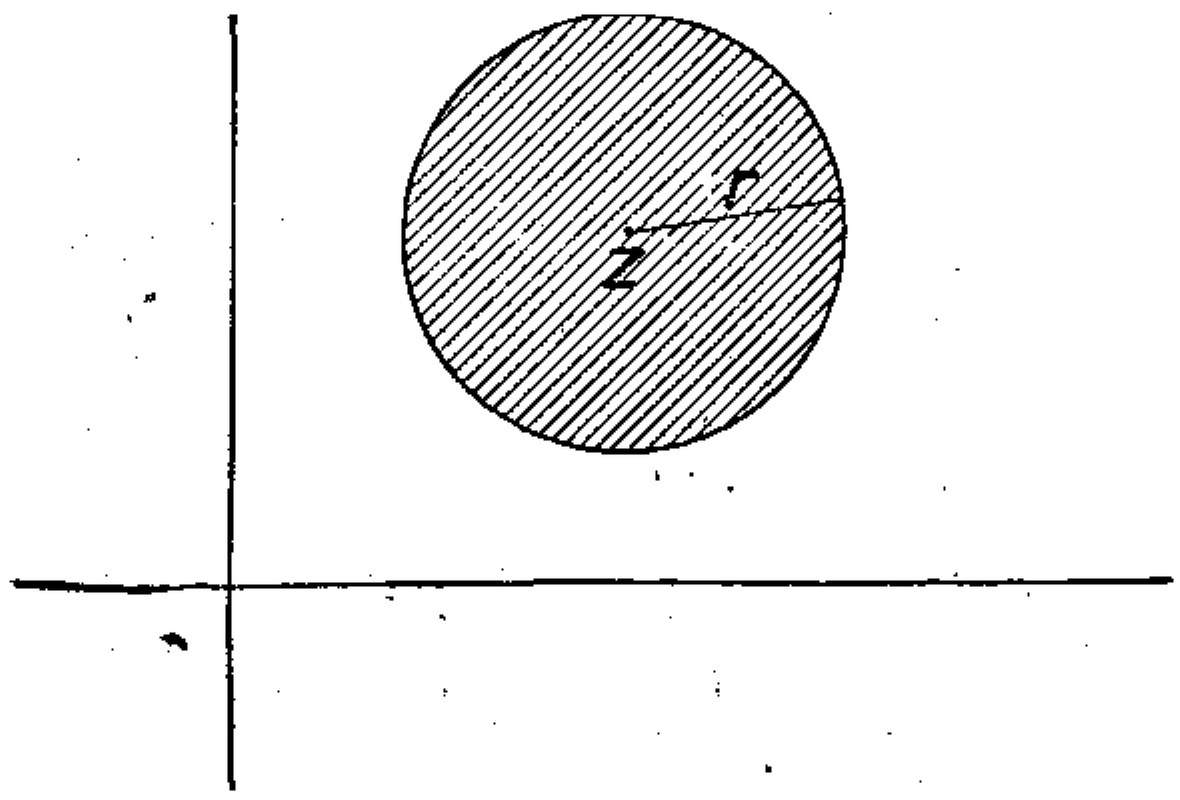
[1]) Tu se zapravo radi o „nutrini" kugle.

Svaka točka je jedina zajednička točka svim kuglama kojima je ta točka središte:

$$\bigcap_r K(s; r) = \{s\}, \ (0 < r < \infty);$$

također je

$$\bigcap_n K(s; \frac{1}{n}) = \{s\}, \ (n \in N).$$



Sl. 25.2.2.
„Kugla" $K(z; r)$ u skupu kompleksnih brojeva je nutrina kružnice.

Lema 25.2.2. *Oko svake točke u kugli može se, ako je funkcija razdaljinska, opisati čitava kuglica sadržana u toj kugli.*

Stvarno, neka je

$$x \in K(s; r);$$

kako je udaljenost

$$\varrho(s, x) < r,$$

to znači da je broj

$$r' \equiv r - \varrho(s, x) > 0.$$

Tvrdimo, da je kuglica $K(x; r') \subseteq K(s; r)$ t. j. da iz $\varrho(x, t) < r'$ slijedi $\varrho(s, t) < r$. Stvarno zbog uslova o trokutu imamo:

$$\varrho(s, t) \leqslant \varrho(s, x) + \varrho(x, t) < \varrho(s, x) + r' = \varrho(s, x) + (r - \varrho(s, x)) = r$$

dakle zaista

$$\varrho(s, t) < r \text{ t. j. } t \in K(s; r).$$

§ 25.3. Definicija prostora pomoću polurazdaljinske (razdaljinske) funkcije.

Postojanje razdaljinske ili polurazdaljinske funkcije ϱ u skupu S daje nam mogućnost da u skupu S definiramo prostornost i da time skup S proglasimo *prostorom*. Stvarno, za proizvoljan skup X odredit ćemo njegovu prostornost $\overline{X}$ kao skup svih točaka koje su *u dodiru sa skupom* X u tome smislu, da svaka kuglica sa središtem u $s \in \overline{X}$ sadrži bar jednu točku skupa X t. j. da bude

(25.3.1) $\quad K(s; r) \cap X \neq v$ za svaki realan broj $r > 0$.

Tako dobiven prostor proizveden je, definiran je, pomoću razdaljinske odn. polurazdaljinske funkcije ϱ. Naravno, da opsežnijem skupu pripada veća prostornost: iz $X \subseteq Y \subseteq S$ slijedi $\overline{X} \subseteq \overline{Y} \subseteq \overline{S}$.

Tako na pr. pomoću razdaljinske funkcije

$$|x - y|$$

gdje su x i y ma kakvi racionalni (realni, kompleksni) brojevi definira se *prostor svih racionalnih (realnih, kompleksnih) brojeva.*

Prema tome, prostor kompleksnih (realnih) brojeva jest skup svih kompleksnih (realnih) brojeva u kojem je prostornost definirana ovako: za proizvoljan skup X kompleksnih (realnih) brojeva, njegova prostornost $\bar{X}$ je sastavljena od svih kompleksnih (realnih) brojeva z koji imaju svojstvo, da za svaki broj $r > 0$ ima u skupu X bar jedan element udaljen od z za $< r$ t. j. da bude

$$K(z; r) \cap X \neq v \quad \text{za svaki realni broj} \quad r > 0.$$

§ 25.3.1. **Ekvivalentne razdaljinske funkcije.**

Dvije različite razdaljinske funkcije u S mogu da proizvedu istu prostornost svakog skupa iz S. Stvarno, na pr. $\frac{|x-y|}{2}$ je također određena razdaljinska funkcija u skupu realnih brojeva; njome se za svaki linearan skup definira jedna te ista prostornost, kao i pomoću $|x-y|$, ma da su $|x-y|$ i $\frac{|x-y|}{2}$ dvije različite razdaljinske funkcije.

Dvije razdaljinske funkcije u skupu S koje svakom $X \subseteq S$ pridijeljuju jednu te istu *prostornost* zovu se *ekvivalentnima.* Tako na pr. funkcija $ch(x-y) - 1$ je razdaljinska funkcija u skupu realnih brojeva i ona je ekvivalentna sa funkcijom $|x-y|$ ili $|x-y|^{\alpha}$ gdje je α ma koji realan broj > 0.

§ 25.4. **Kartezijevi ili Euklidovi prostori.**

Pod *Kartezijevim ili Euklidovim prostorom od n dimenzija* [1]) razumijevamo skup

$$C_n \tag{25.4.1}$$

svih realnih jednoznačnih funkcija definiranih u skupu

$$\{1, 2, 3, \ldots, n\} \tag{25.4.2}$$

od n brojeva $1, 2, \ldots, n$; pritom se prostornost u C_n definira pomoću razdaljinske funkcije ϱ koja „točkama“ $x, y \in C_n$ pridijeljuje razdaljinu:

$$\varrho(x, y) = \sqrt{(x(1)-y(1))^2 + (x(2)-y(2))^2 + \ldots + (x(n)-y(n))^2}. \tag{25.4.3}$$

Pritom su $x(1), x(2), \ldots x(n)$ takozvane „koordinate“ „točke“ $x \in C_n$ t. j. vrijednosti što ih funkcija x prihvata u brojevima $1, 2, \ldots, n$ skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Formula (25 4.3) je generalizacija poznatog Pitagorina teorema za međusobnu udaljenost dviju točaka.

§ 25.5. **Hilbertov prostor ili prostor** C_ω je vrlo prirodna generalizacija Kartezijevih prostora $C_1, C_2, \ldots C_n, \ldots$

[1]) n je ma koji prirodan broj; živo si predoči slučajeve $n = 1, 2, 3$.

Pod Hilbertovim prostorom razumijevamo skup

(25.5.1) $$C_\omega$$

svih jednoznačnih realnih funkcija

(25.5.2) $$x(n),\ (n \in N)$$ [1]

dakle skup svih beskonačnih nizova x realnih brojeva za koje je t. zv. *modul*

(25.5.3) $$|\ | = \sqrt{(x(1))^2 + (x(2))^2 + \ldots}$$

konačan; prostornost u C_ω se određuje pomoću razdaljinske funkcije ϱ koja „točkama" $x, y \in C_\omega$ pridijeljuje broj

(25.5.4) $$\varrho(x, y) = |x-y| = \sqrt{[y(1)-x(1)]^2 + \ldots + [y(n)-x(n)]^2 + \ldots}$$

kao međusobni razmak.

Posebno svaki niz (25.5.2) za koji je

(25.5.5) $$0 \leqslant x(n) \leqslant \frac{1}{n},\ (n \in N)$$

jest određena točka prostora C_ω; skup svih točaka (25.5.2) za koje vrijedi (25.5.5) zove se *Hilbertov paralelepiped* (kvadar); taj paralelepiped ima beskonačno mnogo dimenzija koje su po redu 1 (dužina), $\frac{1}{2}$ (širina), $\frac{1}{3}$ (visina), $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ...

Odmah se vidi, da je $|x-y|$ jedna razdaljinska funkcija u C_ω.

§ 25.6. **Funkcionalni prostor C_c svih neprekidnih funkcija.** Promatrajmo skup

(25.6.1) $$C_c$$

svih neprekidnih jednoznačnih funkcija f definiranih u zatvoremom segmentu [0, 1]; postavimo li za dvije „točke" $f, g \in C_c$

(25.6.2) $$\varrho(f, g) = \sup|f(x) - g(x)|,\ (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

tada je ϱ određena razdaljinska funkcija u skupu C_c, pa se na osnovu toga može u C_c definirati i prostornost na potpuno isti način kao na pr. i u prostoru C_1, C_2 ili C_3. Može se dokazati, da za skup $X \subseteq C_c$ i neku funkciju $f \in C_c$ relacija

$$f \in \overline{X}$$

znači isto što i činjenica, da skup X sadrži niz funkcija koji u čitavom intervalu [0, 1] konvergira jednoliko (uniformno) prema funkciji f.

Na taj način vidimo, na kako se jednostavan način možemo uzdignuti do prostora C_n sa proizvoljnim „brojem dimenzija", pa čak

[1] Naravno, N je skup svih prirodnih brojeva.

i do prostora C_ω s „neizmerno mnogo dimenzija" ili do funkcionalnog prostora C_c za koje bi na prvi pogled možda rekli da ima „neprekidno mnogo" dimenzija, jer svaka njegova točka f ima „neprekidno mnogo koordinata"

$$f(x)$$

gdje x prolazi svima realnim brojevima iz $[0, 1]$. [1])

Isti geometrijski jezik što ga imamo u trodimenzionalnom prostoru C_3 prenosi se na funkcionalne prostore C_ω, C_c i t. d.

§ 25.7. **Definicija razdaljinskih i polurazdaljinskih prostora.** Neki prostor $(S; -)$ [2]) je razdaljinski (polurazdaljinski), ako u skupu S od kojih je prostor sastavljen postoji bar jedna razdaljinska (polurazdaljinska) funkcija, tako da se prostornost što je ta razdaljinska funkcija određuje u skupu S podudara sa prostornošću na osnovu koje je S i bio proglašen prostorom.

Drugim riječima, prostor $(S; -)$ je polurazdaljinski ili prostor (E), ako postoji jednoznačna funkcija ϱ sa svojstvima (pritom su x, y, z proizvoljni elementi skupa S):

(25.7.1) $$\varrho(x, y) \geqslant 0 \quad \text{i to} \quad \varrho(x, y) = 0$$

onda i samo onda, ako je $x = y$;

(25.7.2) $$\varrho(x, y) = \varrho(y, x);$$

Da bude

(25.7.3) $$x \in \overline{X}, \text{ nužno je i dovoljno da bude}$$

(25.7.4) $$K(x; r) \cap X \neq v$$

za svaki realan broj $r > 0$; pritom je $K(x; r)$ skup svih točaka t prostora za koje je

$$\varrho(x, t) < r.$$

Ako je k tome

(25.7.5) $$\varrho(x, y) \leqslant \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$$

za ma koje tri točke x, y, z prostora, onda je prostor ne samo polurazdaljinski nego i *razdaljinski (metrički)* ili *distancijalan* ili *prostor* (D).

Svaki linearni skup je određen razdaljinski prostor. Euklidovi prostori, Hilbertov prostor, prostor C_c dalji su primjeri razdaljinskih prostora.

[1]) Međutim, „koordinate" $f(x)$ točke f nisu međusobno nezavisne; dovoljno je naime znati brojeve $f(r)$ za sve *racionalne* brojeve $r \in [0, 1]$ jer zbog neprekidnosti funkcije f izlazi odatle na jednoznačan način također „koordinata" $f(i)$ za svaki iracionalan broj $i \in [0, 1]$ — naime: $f(i) = \lim f(r_n)$, gdje je r_n ma kakav niz racionalnih brojeva iz $[0, 1]$ koji konvergira prema i.

[2]) Imaj vazda na umu, da je prostor uređen par od izvjesnog skupa S i izvjesne prostornosti — u S (prostornost u S znači ma kakvo jednoznačno dodjeljivanje svakom $X \subseteq S$ izvesnog skupa $\overline{X} \subseteq S$).

§ 25.8. **Konvergentni i divergentni nizovi u razdaljinskim prostorima.** Velimo, da beskonačni niz točaka $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ konvergira prema točki a i pišemo

(25.8.1) $$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{ili} \quad a_n \to a$$

ako svaka kuglica oko a, pa ma kako njen radius bio malen, sadrži gotovo sve članove niza. Veli se, da je niz točaka *konvergentan* ili da konvergira, ako postoji jedna točka prostora prema kojoj niz konvergira. Ako niz ne konvergira, veli se, da on *divergira.*. Jasno je, da svaki konvergentan niz konvergira prema jednoj jedinoj točki; ona se zove *limes ili granična točka (vrijednost) niza.*

Teorem 25.8.1. *Da se u razdaljinskom prostoru točka a dodiruje skupa X t. j. da bude*

$$a \in \overline{X}$$

nužno je i dovoljno, da X sadrži beskonačan niz točaka koji konvergira prema a.

Uslov je nuždan. Stvarno, neka je $a \in \overline{X}$; onda to znači, da za svaki realni broj $r > 0$ kuglica $K(a; r)$ i skup X imaju pun presjek; specijalno je dakle

(25.8.2) $$K(a; \frac{1}{n}) \cap X \supset v$$

za svaki prirodni broj $n \in N$.

Označimo li za svaki $n \in N$ sa y_n jednu točku skupa (25.8.2), dobija se time beskonačan niz točaka

(25.8.3) $$y_1, y_2, \ldots$$

skupa X; onda se vidi, da on konvergira prema a. Jer ako je $r > 0$ ma kakav realan broj, dovoljno je označiti sa ν prvi prirodni broj za koji je $\frac{1}{\nu} < r$ pa da se uvjerimo, da kuglica $K(a; r)$ sadrži kuglicu $K(a; \frac{1}{\nu})$, a time i sve točke y_n sa $n > \nu$.

Dakle svaka kuglica oko a sadrži gotovo sve članove niza, a to baš i znači da $y_n \to a$ kad $n \to \infty$.

Uslov je dovoljan: sadrži li naime skup X niz točaka $y_1, y_2, \ldots$ koji konvergira prema a, onda to znači, da svaka kuglica $K(a; r)$ sadrži gotovo sve točke $y_1, y_2, \ldots$, što zbog $y_n \in X$ znači, da svaka kuglica $K(a; r)$ sadrži bar jednu točku skupa X, a to po definiciji znači daje $a \in \overline{X}$.

§ 25.9. **Potpuno uređeni prostori.** Ako je M ma kakav potpuno uređen skup, može se na osnovu toga uređeni skup M proglasiti prostorom definirajući prostornost u M evo ovako: Za dan skup $X \subset M$

odredit ćemo da se $\overline{X}$ ima da sastoji od svih točaka $x \in M$ sa svojstvom, da za svaki otvoreni interval I potpuno uređena skupa M bude $I \cap X \neq v$ čim je $x \in I$; tako dobiven prostor može se zvati *(potpuno) uređenim prostorom M.*

Prostor $(S; —)$ je dakle *(potpuno) uređen*, ako se skup S može tako posve urediti da se prostornost zadana prostora može ovako izraziti: da bude

$$x \in \overline{X}$$

nužno je i dovoljno, da svaki otvoreni interval [1]) tako uređena skupa S sadrži bar jednu točku skupa X čim taj interval sadrži točku x.

Tako na pr. ako je C skup svih realnih brojeva uređen po veličini, tada se *uređeni prostor C* podudara sa Kartezijevim prostorom C_1 definiranim pomoću razdaljinske funkcije

$$|x-y|, \quad (x, y \in C).$$

Naprotiv, Kartezijev prostor C_2 nije potpuno uređen prostor, [2]) kao što se može lako dokazati.

Dobro uređen skup $(-\infty, \omega_1]$ svih rednih brojeva $\leqslant \omega_1$ je određen posve uređen prostor.

U tome prostoru, broj ω_1 se „dotiče" skupa $(-\infty, \omega_1)$ svih brojeva $< \omega_1$, jer svaki „otvoreni interval" (α, ω_1) skupa $(-\infty, \omega_1]$ sadrži bar jedan broj iz skupa $(-\infty, \omega_1)$.

Međutim, uređeni prostor $(-\infty, \omega_1]$ nije razdaljinski. Kad bi naime taj prostor bio razdaljinski, onda bi iz svake kuglice $K\left(\omega_1; \frac{1}{n}\right)$ mogli izabrati jedan broj $x_n \neq \omega_1$ jer je

$$K\left(\omega_1; \frac{1}{n}\right) \cap (-\infty, \omega_1) \neq v.$$

Time bi dobili skup $M = \{x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\}$ rednih brojeva, sa svojstvom da je

$$K\left(\omega_1; \frac{1}{n}\right) \cap M \neq v \qquad \text{dakle i}$$

$$K(\omega_1; r) \cap M \neq v$$

za svaki $r > 0$, što bi značilo, da je

$$\omega_1 \in \overline{M}.$$

[1]) Pod otvorenim intervalom uređene množine M razumijevaju se: skup M i ovi njegovi dijelovi

$$(-\infty, x)_M, \ (x, \infty)_M \ \text{ te } \ (x, y)_M \ (x, y \in M).$$

[2]) Iako jest djelimično uređen prostor.

A međutim kako je M prebrojiv, bit će $\sup M < \omega_1$, što znači, da nema nijednog broja iz M koji je $> \sup M$; drugim riječima, interval

$$(\sup M; \omega_1]$$

sadrži ω_1 a ne sadrži nijednog broja iz M, što bi bilo u protivnosti sa pretpostavkom $\omega_1 \in \overline{M}$.

§ 25.10. ZADACI.

§ 25.10.1. Dokaži, da se prostornost u Euklidovoj ravnini može definirati ne samo pomoću razdaljinske funkcije

$$\left[(x(1)-y(1))^2+(x(2)-y(2))^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

nego i pomoću bilo koje funkcije oblika

$$\left[\left(x(1)-y(1)\right)^n+\left(x(2)-y(2)\right)^n\right]^{\frac{1}{n}} \qquad n=1,3,4,\ldots;$$

pritom, potencijama dajemo samo njihovu realnu vrijednost $\geqslant 0$. Kad $n \to \infty$, onda izlazi ova razdaljinska funkcija:

$$\sup |x(i)-y(i)|, \ (i=1,2).$$

§ 25.10.2. Odredi za trodimenzionalni prostor C_3 pitanje analogno sa problemom iz prethodnog zadatka.

§ 25.10.3. Dokaži, da je za svaku točku s razdaljinskog prostora:

$$\{s\} = \bigcap_{r>0} K(s;r) = \bigcap_{n=1,2,\ldots} K\left(s;\frac{1}{n}\right).$$

§ 25.10.4. Da u razdaljinskom prostoru bude $a \in \overline{X}$, nužno je i dovoljno, da bude $K\left(a;\frac{1}{n}\right) \cap X \neq v$ za svaki prirodni broj n.

§ 25.10.5. Dokaži: Ako je ϱ razdaljinska funkcija u skupu S, onda je to i funkcija $\frac{\varrho}{1+\varrho}$. Primijeti, da je vazda $0 \leqslant \frac{\varrho}{1+\varrho} < 1$; zato je u novoj metrici:

$$\text{dijametar skupa}^{1)}\ S \equiv \sup_{x,y\in S} \frac{\varrho(x,y)}{1+\varrho(x,y)} \quad \text{najviše} = 1.$$

§ 25.10.6. Da li zadana kugla može imati i više središta? Može li se konstruirati i takova kugla da svaka njena točka bude središte te kugle?

§ 25.10.7. Promatraj skup 1, 2, 3 i ovu funkciju: $f(x,y) = 0$ ili $x \cdot y$, već prema tome da li je $x = y$ ili $x \neq y$. Uvjeri se, da u skupu

[1]) Dijametar skupa jest suprem međusobnih razdaljina elemenata toga skupa.

$\{1, 2, 3\}$ ta funkcija nije razdaljinska nego polurazdaljinska. Uvjeri se, da se prostornost $\overline{X} = X$, $(X \subseteq \{1, 2, 3\})$ može definirati pomoću te funkcije f. Dokaži, da je dobiven prostor ipak razdaljinski.

§ 25.10.8. U Kartezijevu prostoru C_n promatraj skup svih pravaca što prolaze ishodištem; te pravce učini elementima novog prostora P_{n-1}, definiranog tako da minimalni kut između dva pravca uzmemo za njihov razmak (kutove mjerimo u radijanima). Dokaži da je P_{n-1} razdaljinski prostor. Taj se prostor zove *projektni prostor* od $n-1$ dimenzije. Konkretiziraj slučajeve $n = 2$ i $n = 3$.

§ 26. OSNOVNE DEFINICIJE U VEZI SA PROSTOROM.

§ 26.1. Šta je prostor? Prostornost.

Pod prostorom (ili prostornim skupom) razumijevamo svaki uređen par sastavljen od proizvoljna skupa S i proizvoljnog postupka f koji svakom $X \subseteq S$ pridijeljuje potpuno određen skup $f(X) \subseteq S$.

Skup $f(X)$ zove se *adherencija, prostornost ili sfera uticaja* (dosega) skupa X; kaže se obično, da je prostornost skupa X sastavljena od svih točaka iz S koje se *dodiruju* skupa X. Samo preslikavanje

(26.1.1) $$f(X), \quad (X \subseteq S)$$

možemo zvati *prostornošću.*

Mjesto $f(X)$ pisat ćemo najčešće $\overline{X}$; sam prostor označivat ćemo tada sa

(26.1.2) $$(S; f) \quad \text{odnosno} \quad (S; -),$$

što nam ima da znači, da je prostor sastavljen od svih točaka skupa S u kojem svakom $X \subseteq S$ pripada jednoznačno određen skup $f(X) \subseteq S$ odnosno $\overline{X} \subseteq S$. Specijalno, praznom skupu v pripada potpuno određena prostornost $f(v)$ odn. $\overline{v}$.

Na pr. kod razdaljinskih (uređenih) prostora definira se prostornost ovako: prostornost $\overline{X}$ skupa X sastavljena je od svih točaka x sa svojstvom, da svaka kugla sa središtem u x (odnosno svaki otvoreni interval u kojem je x) sadrži bar jednu točku skupa X.

Tako u prostoru realnih (kompleksnih) brojeva podudaraju se prostornost skupa svih racionalnih pravih razlomaka sa skupom $[0, 1]$ svih realnih brojeva $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Važna primjedba. *Odsada ćemo uvijek zamišljati* (u koliko izričito ne kažemo drukčije), *da točke i skupovi leže u nekom određenom prostoru.*

§ 26.2. **Vanjština (eksterior). Nutrina (interior). Međa skupa:**
Vanjština (eksterior) skupa X simbolički

(26.2.1) $$ext\, X$$

jest skup svih točaka prostora koje se ne dodiruju toga skupa dakle

(26.2.2) $$ext\, X = C(\overline{X})$$ [1])

Pojam nutrine je od osnovne važnosti:

Nutrina skupa X, simbolički

(26.2.3) $$int\, X$$

jest vanjština komplementa toga skupa t. j.

(26.2.4) $$int\, X = ext\,(C\,X).$$

S obzirom na jednakost (26.2.1) postaje jednakost (26.2.4):

(26.2.5) $$int\, X = C\,\overline{CX}.$$

Međa skupa X, simbolički

(26.2.6) $$fr\, X$$ [2])

jest skup svih točaka (prostora) koje se u isti mah dodiruju i skupa X i njegova komplementa $C\,X$ dakle:

(26.2.7) $$fr\, X = \overline{X} \cap \overline{C\,X}$$

Primijenimo li operator C (uzimanje komplemenata) na jednakost (26.2.7), izlazi:

$$C\,(fr\, X) = C\,(\overline{X} \cap \overline{C\,X}) = C\overline{X} \cup C\,(\overline{CX}) = ext\, X \cup int\, X \text{ t. j.}$$

(26.2.8) $$C\,(fr\, X) = ext\, X \cup int\, X.$$

Jednakost (26.2.8) izriče se

Lemom 26.2.1. *Nutrina, vanjština i omeđenje skupa ispunjuju zajedno čitav prostor* [3]). *Nijedna točka sa međe skupa ne pripada niti vanjštini niti nutrini toga skupa.*

Kažemo li, da je točka x *nutrašnja, međašna* ili *vanjska* točka skupa X, već prema tome, da li x leži u nutrini, na međi ili u vanjštini skupa tada lema kaže, da nijedna međašnja točka ne može biti niti nutarnja niti vanjska (spoljna) točka.

Spomenimo već sada ovaj važni način izražavanja:

ove dvije izreke:

1) Točka x odn. skup A leži u nutrini skupa X t. j. $x \in int\, X$; odn. $A \subseteq int\, X$;

---

[1]) Kao obično $C\,(\overline{X})$ označuje skup svih točaka prostora koje ne pripadaju skupu $\overline{X}$.

[2]) Latinski *frons, frontis* znači *čelo, oblik;* francuski *frontière,* talijanski *frontiera* znači *međa.*

[3]) Misli se naravno na prostor u kojemu leži promatrani skup.

2) Skup X je *okolina točke* x odn. skupa A; značit će jedno te isto.

Da pojedina točka može biti i spoljna i nutarnja, pokazuje ovaj

Primjer 25.2.1. Promatrajmo prostor $(\{1, 2, 3\}, \overline{})$, u kojem je prostornost definirana ovako: $\overline{\{1\}} = \{1, 2\}$, $\overline{\{2, 3\}} = \{1, 2\}$; za svaki drugi dio $X \subseteq \{1, 2, 3\}$. neka bude $X = \overline{X}$. Tada je

$ext\{1\} = C\overline{\{1\}} = C\{1, 2\} = \{3\}$, $\quad int\{1\} = C\overline{\{2, 3\}} = C\{1, 2\} = \{3\}$ t. j. vanjština i nutrina skupa $\{1\}$ sastavljene su od broja 3 pa su identične.

Lema 26.2.2. *Vanjština i nutrina ma kojeg skupa izvađena iz polumetričkog (posve uređenog), a pogotovo iz metričkog prostora nemaju zajedničkih točaka:*

$$ext\, X \cap int\, X = v. \tag{26.2.9}$$

Stvarno, kad jednakost (26.2.9) ne bi bila ispravna, postojao bi jedan skup S i jedna točka x koja leži i u $ext\, S$ i u $int\, S$ t. j. za koju je

$$x \in C\overline{S} \quad \text{i} \quad x \in C\overline{CS} \quad \text{dakle}$$

$$x \text{ non } \in \overline{S} \quad \text{i} \quad x \text{ non } \in \overline{CS}.$$

To pak znači, da postoji jedna kuglica $K(x; r_1)$ (otvoreni interval $I_1(x)$ oko x) disjunktna sa S i jedna kuglica $K(x; r_2)$ (otvoreni interval $I_2(x)$ oko x) disjunktna sa CS.

Presjek tih dviju kuglica (intervala) bio bi opet jedna kuglica (interval) oko x, pa bi taj presjek prema tome bio disjunktan i sa skupom S i sa njegovim komplementom CS dakle i sa skupom $S \cup CS$ t. j. sa čitavim prostorom, a to je naravno nemoguće.

Na pr. u prostoru realnih brojeva nema skup racionalnih brojeva nijedne nutrašnje ili vanjske točke; svaka mu je točka međašnja. Za običnu kuglu, nutrina (vanjština) je sastavljena od svih točaka prostora koje su od središta kugle udaljene za $< r$ (odn. $> r$); točke na međi udaljene su za r od središta kugle. To vrijedi za ma koji razdaljinski prostor (ali ne mora važiti za ma koji polurazdaljinski prostor).

§ 26.3. Gomilište. Derivat (izvod) skupa. Gusti i raspršeni skupovi.

Definicija 26.3.1. *Pod gomilištem* ili *točkom nagomilavanja* skupa X razumijevamo svaku točku a za koju je

$$a \in \overline{X - a} \tag{26.3.1}$$

t. j. koja je u dodiru sa skupom što se iz X dobije uklanjanjem točke x. Skup svih gomilišta skupa X zove se *derivat* ili *izvod skupa* X i označuje se sa

$$X'. \tag{26.3.2}$$

L e m a 26.3.1. *Za prazan skup v važi $\overline{v} = v'$.*

Za svaki naime element a imamo

$$v = v \setminus (a),$$

odakle

$$\overline{v} = \overline{v \setminus (a)},$$

Odatle se zaključuje da iz $a \in \overline{v}$ slijedi $a \in \overline{v \setminus (a)}$ t. j. $a \in v'$; i obrnuto.

U posve uređenom prostoru racionalnih brojeva izvod skupa svih pravih razlomaka podudara se sa množinom svih racionalnih brojeva x za koje je $0 < x < 1$. Taj isti skup ima u prostoru realnih (kompleksnih) brojeva izvod koji se podudara sa segmentom $[0, 1]_C$ svih realnih brojeva $0 \leqslant x \leqslant 1$.

D e f i n i c i j a 26.3.2. *Drugi izvod X'' skupa definira se kao izvod prvog izvoda; uopće se stavlja*

(26.3.3) $$X^{(\alpha+1)} = (X^{(\alpha)})' \quad \text{za svaki redni broj } \alpha \geqslant 1;$$

ako je α redni broj bez neposrednog prethodnika, stavlja se

(26.3.4) $$X^{(\alpha)} = \bigcap_{\xi < \alpha} X^{(\xi)}.$$

D e f i n i c i j a 26.3.3. Svaka eventualna točka skupa $X \setminus X'$ zove se *osamljena (izolirana) točka* skupa X. Ako je čitav skup sastavljen od samih izoliranih točaka, veli se, da je skup *izoliran.*

D e f i n i c i j a 26.3.4. *Ako je svaka točka skupa gomilište toga skupa* veli se, da je skup u (sebi) *gust;* prema tome, rješenja skupovne nejednakosti

(26.3.5) $$X \subseteq X'$$

zovu se (u sebi) gusti skupovi. Ako skup ne sadrži nijedan pun gust dio, velimo, da je skup *raspršen.* Na pr. skup prirodnih brojeva (kao uređen prostor) jest *izoliran i raspršen.* Kružna ploča je u sebi gust skup. Nutrina kugle Euklidova prostora je u sebi gust skup.

L e m a 26.3.2. *Za svaki skup iz polurazdaljinskog (razdaljinskog) ili uređenog prostora važi;*

(26.3.6) $$\overline{X} = X \cup X'.$$

Dokažimo stvar za polurazdaljinske prostore.

Jednakost (26.3.6) proizlazi iz ovih relacija:

(26.3.7) $$\overline{X} \subseteq X \cup X',$$

(26.3.8) $$\overline{X} \supseteq X \cup X'.$$

Dokažimo najprije (26.3.7) t. j. da iz $a \in \overline{X}$ proizlazi $a \in X \cup X'$. No, $a \in \overline{X}$ znači, da svaka kuglica oko a sadrži i bar jednu točku iz

X; ako je $a \in X$, bit će i $a \in X \cup X'$. Ako pak nije $a \in X$, to znači, da svaka kuglica oko a sadrži bar jednu točku iz $X \setminus \{a\}$, što znači da je $a \in X'$. Vazda je dakle $a \in X \cup X'$.

Ostaje da dokažemo (26.3.8) t. j. da je i $X \subseteq \overline{X}$ i $X' \subseteq \overline{X}$.

Da iz $a \in X$ slijedi $a \in \overline{X}$, to je zato što svaka kuglica oko a sadrži i a. Dokažimo još, da iz $a \in X'$ slijedi $a \in \overline{X}$. No, $a \in X'$ znači da svaka kuglica oko a sadrži bar jednu točku iz $X \setminus a$, a tim više i iz X; no to baš i znači, da je $a \in \overline{X}$.

Time je jednakost (26.3.6) dokazana.

§ 26.4. **Što znači da je skup X gust na skupu Y [1])? Separabilnost skupa.**

Definicija 26.4.1. Veli se, da je skup X *gust na skupu* Y, odnosno *gusto posijan po* Y, ako prostornost skupa X sadrži Y kao svoj dio t. j. ako je

$$\overline{X} \supseteq Y. \tag{26.4.1}$$

Specijalno, skup je *svuda gust*, ako je on gust na čitavom prostoru. Na pr. svaki je skup gust na svojoj prostornosti kao i na praznom skupu.

Definicija 26.4.2. Skup je *separabilan* (prema Fréchetu), ako postoji bar jedan konačan ili prebrojiv skup koji je gust na tome skupu.

Tako na pr. linearni kontinuum je separabilan, jer je skup svih racionalnih brojeva prebrojiv i gust po linearnom kontinuumu.

Skup S svih kompleksnih brojeva kojima je i realni i imaginarni koeficijent racionalan jest svuda gust u prostoru kompleksnih brojeva; kako je S prebrojiv, prostor kompleksnih brojeva je separabilan.

Separabilni su i svi Kartezijevi prostori. I Hilbertov prostor C_ω je separabilan, jer je skup svih njegovih točaka:

$$f(1),\ f(2), \ldots f(n),\ 0,\ 0, \ldots \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

gdje su $f(1), \ldots f(n)$ ma kakvi racionalni brojevi, prebrojiv i gust u C_ω. Funkcionalni prostor C_c iz § 25.6 je separabilan, jer je skup polinoma s racionalnim koeficijentima, u jednu ruku prebrojiv, a u drugu ruku, prema jednom Weierstrassovu teoremu, gust u prostoru C_c, jer prema tome teoremu, za ma koju realnu neprekidnu funkciju $f(x)$ sa $0 \leqslant x \leqslant 1$ postoji niz polinoma $f_n(x)$ sa svojstvom, da u $[0, 1]c$ taj niz konvergira jednoliko prema $f(x)$.

Svaki skup izvađen iz ma kojeg Kartezijeva prostora je separabilan. Uređeni prostor svih rednih brojeva $< \omega_1$ nije separabilan.

[1]) Naravno da se podrazumijeva da X i Y pripadaju jednom te istom prostoru. Uopće (ako izričito ne kažemo drukčije), skupovi koje budemo odsad promatrali pripadaju vazda nekom određenom prostoru.

Suslinov problem je logički ekvivalentan s pitanjem, da li je potpuno uređeni prostor S nužno separabilan, ako potpuno uređeni skup S ima svojstvo, da mu je svaka porodica punih disjunktnih otvorenih intervala skupa S konačna ili prebrojiva.

§ 26.5. **Zatvoreni, otvoreni i savršeni skupovi.**

Definicija 26.5.1. Skup je *zatvoren*, ako sadrži svoju prostornost; drugim riječima, rješenja skupovne nejednakosti

$$X \geq \overline{X} \tag{26.5.1}$$

zovu se *zatvoreni* skupovi.

Definicija 26.5.2. Komplementi zatvorenih skupova zovu se *otvoreni* skupovi t. j.

$$\text{otvoren skup} = \text{čitav prostor} \setminus \text{zatvoren skup.} \tag{26.5.2}$$

Prema tome, prostor je vazda zatvoren skup; prazan skup je uvijek otvoren.

Definicija 26.5.3. Ako je skup i gust i zatvoren, veli se da je on *savršen* (*perfektan*). Prema tome, skupovna rješenja sistema

$$X' \geq X \geq \overline{X} \tag{26.5.3}$$

zovu se savršeni skupovi.

Svaki u sebi gust prostor jest savršen prostor. Na pr. uređeni prostor racionalnih brojeva jest savršen. Često se slovom F odn. G označuje opći zatvoreni odn. otvoreni skup. [1]) Tako na pr. kad se kaže da je skup X jedan F, to znači da je X zatvoren skup.

Svaki interval realnih brojeva jest otvoren, ako krajeve toga intervala ne ubrajamo u interval *(otvoreni intervali)*; pribrajamo li i krajeve intervala tome intervalu, dobije se zatvoren skup *(zatvoreni intervali)*. Skup svih realnih brojeva x za koje je $0 < x \leqslant 1$ nije niti otvoren niti zatvoren. Skup svih realnih brojeva x za koje je $0 \leqslant x \leqslant 1$ je savršen skup u prostoru svih realnih (kompleksnih) brojeva. Skup svih racionalnih brojeva nije savršen u prostoru svih realnih brojeva jer nije zatvoren.

Otvoreni skupovi su od vanredne važnosti; u njima imamo nosioca svojstava koja su analogna svojstvima što ih ima otvoreni interval realnih brojeva, nutrina obične kugle u trodimenzionalnom Kartezijevom prostoru i t. d. Pomoću otvorenih skupova iskazuje se ono što se u dnevnom životu podrazumijeva pod pojmom „negdje" odn. „nigdje". O tome ćemo se još uvjeriti.

Definicija 26.5.4. Tako na pr. kažemo li, da je skup X gust na skupu Y ako je $\overline{X} \geq Y$, tada se može reći da je skup S *negdje gust u*

[1]) To su početna slova francuske riječi *fermé* (= zatvoren) odn. njemačke riječi *Gebiet* (= oblast).

prostoru, ako postoji bar jedan pun otvoren skup na kojem je taj skup S gust. Ako skup S nije gust niti na jednom otvorenom skupu $\neq v$, veli se da skup S nije *nigdje* gust.

Lema 26.5.1. *Ako je identički*[1])

$$\overline{X} = X \cup X', \tag{26.5.4}$$

tada je skupovna jednakost

$$X = X' \tag{26.5.5}$$

nuždan i dovoljan uslov da skup X bude savršen.

Najprije, ako je skup X savršen, bit će, zbog njegove *gustoće*, $X \subseteq X'$, pa pretpostavljena jednakost (26.5.4) postaje

$$\overline{X} = X'; \tag{26.5.6}$$

no X je i *zatvoren*, dakle $\overline{X} \subseteq X$ što zbog (26.5.6) postaje

$$X' \subseteq X; \quad \text{a to zajedno s relacijom} \quad X \subseteq X'$$

o gustoći, daje traženu jednakost $X = X'$.

Obrnuto, neka važi (26.5.5); zbog (26.5.4), to znači, da važi $\overline{X} = X$, pa je dakle X zatvoren. No, po pretpostavci (26.5.5) važi $X \subseteq X'$, što znači, da je X u sebi gust. Dakle je X i u sebi gust i zatvoren t. j. savršen, što smo i htjeli pokazati.

Korolar 26.5.1. *Za skupove X koji se nalaze u polurazdaljinskom (razdaljinskom, potpuno uređenom) prostoru važi*

$$\overline{X} = X \cup X' \quad \text{(isp. lemu 26.3.2)}$$

§ 26.6. **Neprekidna preslikavanja. Izomorfna preslikavanja prostora** (homeomorfija). Od znatne je važnosti pojam neprekidnih preslikavanja. To su preslikavanja kod kojih je *uščuvan,* i dakle se ne prekida, odnos dodira između elemenata i skupova.

Definicija 26.6.1. Jednoznačno preslikavanje množine M jest neprekidno (kontinuirano) u točki a toga skupa, ako iz činjenice, da se a dodiruje nekog skupa $X \subseteq M$ nužno slijedi, da se točka $f(a)$ dodiruje skupa $f(X)$ t. j. ako iz relacije $X \subseteq M$, $a \in \overline{X}$ slijedi

$$f(a) \in \overline{f(X)}.$$

Ako je preslikavanje neprekidno u svakoj točki množine M, veli se da je ono *neprekidno u čitavoj množini M.* Specijalno, jednoznačno preslikivanje f prostora neprekidno je u točki a, ako za svaki skup X za koji je

$$a \in \overline{X} \quad \text{slijedi} \quad f(a) \in \overline{f(X)}.$$

[1]) t. j. za svaki skup X (naravno izvađen iz promatrana prostora).

Ako preslikavanje f nije neprekidno u točki a, veli se, da je a *točka diskontinuiteta* (*prekidnosti*) preslikavanja f.

Definicija 26.6.2. Ako je preslikavanje obostrano jednoznačno, te obostrano neprekidno zove se ono *izomorfijom ili homeomorfijom.*

Prema tome, dva su prostora izomorfna (homeomorfna), ako se između njihovih točaka može uspostaviti obostrano jednoznačno i obostrano neprekidno preslikavanje.

Teorem 26.6.1. *Da prostori* $(S_1; f_1)$, $(S_2; f_2)$ *budu izomorfni, nužno je i dovoljno, da postoji obostrano jednoznačno preslikavanje*

(26.6.1) $$f$$

skupa S_1 *na čitav skup* S_2 *tako da za svaki* $X \subseteq S$ *bude*

(26.6.2) $$f(f_1(X)) = f_2(f(X)) \text{ odnosno } f(\overline{X}) = \overline{f(X)}.$$

Prema tome, *izomorfnost preslikavanja f se sastoji u komutaciji toga operatora f s operatorom prostornosti kojim je definirana relacija dodira.*

Uslov je nuždan. Stvarno, kako je za svaki $a \in f_1(X)$ preslikavanje f u točki a neprekidno, bit će, po samoj definiciji neprekidnosti:

$$f(a) \in f_2(f(X)),\ a \in f_1(X) \text{ odakle}$$

(26.6.3) $$f(f_1(X)) \subseteq f_2(f(X)).$$

No tu važi znak jednakosti.

Naime, primijenimo li tu istu relaciju (26.6.3) za preslikavanje f^{-1} jer je ono, po hipotezi, također neprekidno, dobit ćemo:

(26.6.4) $$f^{-1}(f_2(Y)) \subseteq f_1(f^{-1}(Y)),\ (Y \subseteq S_2).$$

Specijalno za $Y = f(X)$, $(X \subseteq S_1)$ izlazi odatle

$$f^{-1} f_2 f(X) \subseteq f_1(f^{-1}(f(X))) = f_1(f^{-1} f(X)) = f_1(X).$$

Odatle, primjenom operatora f:

(26.6.5) $$f_2 f(X) \subseteq f f_1(X).$$

Iz (26.6.3) i (26.6.5) izlazi tražena jednakost (26.6.2)

Dovoljnost uslova je očigledna, jer iz pretpostavljene jednakosti (26.6.2) i relacije $a \in f_1(X)$ izlazi

$$f(a) \in f_2(f(X)),$$

a to baš i znači, da je preslikavanje f neprekidno u točki a.

Lako se dokazuje neprekidnost i u točki $f(a)$.

§ 26.7. Relativizacija.

Ako je $M \subseteq S$, gdje je S skup svih točaka izvjesnog prostora

$$(S, -),$$

tada određivanje prostornosti u skupu S uslovljuje određenu prostornost u skupu M time, da svakom $X \subseteq M$ pridijelimo skup

$$M \cap \overline{X}$$

kao njegovu prostornost s obzirom na M (a ne S) kao cjelinu.

Na taj način dio M skupa S postaje materijalnom podlogom za određen prostor koji se zove *relativnim prostorom M s obzirom na zadani prostor kao cjelinu.* Naravno, narav toga relativnoga prostora potpuno je određena zadanim prostorom kao cjelinom, pa je taj relativni prostor (M; —) kao *uronjen* u sam zadani prostor (S, —).

Na pr. prostor C svih realnih brojeva određuje kakav je relativni prostor skupa R svih racionalnih brojeva, kad se ovaj shvati kao dio prostora C. Odmah se vidi, da je taj relativni prostor R identičan sa prostorom skupa racionalnih brojeva, kad se ovaj definira kao posljedica prirodnog poretka racionalnih brojeva.

Međutim, promatrajmo komplement $C(T) = [0, 1] \setminus T$ triadskog skupa T s obzirom na jedinični segment $[0, 1]$; promatrajmo nadalje *maksimalne* intervale segmenta $[0, 1]$ koji leže u skupu $C(T)$; naravno, takva su dva intervala bez zajedničkih točaka. Promatrajmo, najzad, skup S središta svih tih intervala. Svaka točka toga skupa je osamljena u prostoru C_1 realnih brojeva, zato je i skup S kao relativni prostor u C_1 sastavljen od osamljenih točaka. No, shvaćen kao uređen skup, skup S je gust, pa zato njegov uređaj povlači takvu organiziranost da shvaćen kao uređen prostor S nema osamljenih točaka. Prema tome, uređen prostor S se bitno razlikuje od relativnog prostora S kao dijela prostora C_1.

§ 26.8. Isporedivanje topologija zadanog skupa.

Ako su nam zadana dva prostora

$$(S; f), (S; g)$$

sagrađena od istih točaka, onda ćemo reći, da je topologija prvoga *finija* ili *jača* od topologije drugoga prostora ili da je druga topologija grublja (slabija) od topologije prvoga prostora, ako je

$$f(X) \subseteq g(X) \text{ za svaki } X \subseteq S.$$

Te su topologije *jednake finoće (jakosti)* ako je

$$f(X) = g(X) \text{ za svaki } X \subseteq S.$$

Naravno, u općem slučaju ne će se moći reći, da je jedna topologija finija od druge, nego će one biti *neuporedljive.*

Definicija 26.8.1. Ako je

(26.8.1) $$(S; \varphi), (\varphi \in M)$$

izvjesna množina topologija na skupu S, tada se može pomoću tih M topologija definirati dvije potpuno određene topologije: infimum (presjek) i supremum (unija) zadanih topologija definirajući prostornost $\overline{X}$ svakog $X \subseteq S$ kao skup:

(26.8.2) $$\bigcap_{\varphi \in M} \varphi(X) \quad \text{odnosno} \quad \bigcup_{\varphi \in M} \varphi(X);$$

naravno, za svaki $\varphi \in M$, označuje $\varphi(M)$ prostornost skupa X u topologiji $(S; \varphi)$.

Primjer 26.8.1. Supremi svih topologija zadana skupa S jest ona kod koje prostornost svakog dijela skupa S (pa i praznoga dijela) iznosi čitav S.

Iz same definicije neprekidnosti proizlazi

Lema 26.8.1. *Da topologija prostora $(S; f)$ bude finija od topologije prostora $(S; g)$, nužno je i dovoljno, da identičko preslikavanje prvoga prostora na drugi bude neprekidno.*

Nužnost. Stvarno, ako je

$$f(A) \subseteq g(A), \ (A \subseteq S),$$

onda to znači da iz

$$x \in f(A) \ \text{slijedi} \ x \in g(A)$$

a to upravo znači da je identička transformacija prostora $(S; f)$ na prostor $(S; g)$ neprekidna.

Dovoljnost se također neposredno dokazuje.

Primjer 26.8.2. Topologija uređena prostora $[0, 1)$ jest finija od topologije što se dobije zahtijevajući da za svaki $X \subseteq [0, 1)$ i $a \in [0, 1)$ relacija $a \in \overline{X}$ ima da znači da je ili $a \neq 0$ i da svaki interval kojemu je a sredina zahvata točaka skupa X ili da je $a = 0$ no da onda svaki skup oblika

$$[0, t') \cup (t'', 1), \ (0 < t' < t'' < 1)$$

ima točaka i iz skupa X (vidi se da je tako dobiven prostor $[0, 1)$ homeomorfan sa kružnicom).

Definicija 26.8.2. **Kvocijent zadana prostora. Identifikacija pojedinih točaka.**

Neka je

$$(S; -)$$

zadan prostor, a $\approx$ bilo koja relacija ekvivalencije u S; tada nam

(26.8.3) $$S/\approx$$

označuje rastav skupa S na obitelj skupova od kojih se svaki sastoji od svih međusobno ravnopravnih elemenata. Kanonsko preslikavanje prostora $(S; -)$ na skup $S/\approx$ t. j. ono preslikavanje

(26.8.4) $$C(x), \ (x \in S)$$

koje svakom elementu $x \in S$ pridijeljuje onaj element u $S/\approx$ koji sadrži x, potpuno je određeno. Ima i takovih topologija skupa $S/\approx$,[1]) da to kanonsko preslikavanje bude neprekidno; infimum svih tih topologija potpuno je određen; tako dobiven prostor zove se *kvocijent prostora* $(S; -)$ *i relacije* $\approx$.

Može se reći, da taj prostor nastaje identifikacijom svih ekvivalentnih točaka. Na pr. kvocijent linearnog prostora C i kongruentnosti modulo 1 jest t. zv. torus (svitak) dimenzije 1, a homeomorfan je sa kružnicom.

Posebno se često promatra kvocijentni prostor zadana prostora $(S; -)$ proizveden izvjesnim neprekidnim jednoznačnim preslikavanjem f prostora $(S; -)$ na neki prostor $(M; -)$; uz te naime pretpostavke potpuno je određena porodica *disjunktnih* skupova

$$f^{-1}(x), \ (x \in fS)$$

koji ispunjava čitav S; infimum (presjek) svih topologija u toj porodici kod kojih je kanonsko preslikavanje:

svakom elementu iz $f^{-1}(x)$ *pridijeljuje se* $f^{-1}(x)$

neprekidno, određen je kvocijentni prostor zadana prostora $(S; -)$.

Primjedba 26.8.1. Poslije ćemo se u § 27.10.2 uvjeriti, da u vrlo općem slučaju (topološki prostori) kvocijentni prostor $(S/\approx; -)$ nastaje tako da u skupu $S/\approx$ proglasimo *otvorenim skupovima* svaki i samo svaki skup $G \subseteq S/\approx$ sa svojstvom da

$$\bigcup_X X \ (X \in G)$$

bude otvoren skup u zadanom prostoru $(S; -)$.

§ 26.9. ZADACI.

§ 26.9.1. Odredi sve moguće prostore sastavljene od elemenata 1, 2. Koliko ih ima dva po dva nehomeomorfnih?

§ 26.9.2. Odredi vanjštinu, nutrinu, među i izvod skupa u diskretnom prostoru (v. primjer 24.4).

§ 26.9.3. Odredi nutrinu, vanjštinu i među skupa

a) $\sin C$, b) $\operatorname{tg} C$, c) $\sin R$, d) 2^R, e) 2^C, f) $\sin \dfrac{1}{C-\{0\}}$.

§ 26.9.4. Ako je

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}, \ (x \in C - \{0\})$$
$$f(0) = 2,$$

da li je skup fC u sebi gust? Odredi izvod toga skupa.

---

[1]) Tako je na pr. u topologiji $(S/\approx; -)$ u kojoj je

$$\overline{X} = S/\approx \quad \text{za svaki} \quad X \subseteq S/\approx.$$

§ 26.9.5. Promatraj a) sinusoidu, b) tangensoidu, c) krivulju $y = f(x)$, gdje f ima značenje kao i u zad. 26.9.3; d) krivulju $y = \chi(x) = 0$ ili 1, već prema tome da li je x iracionalan ill racionalan, e) krivulju $y = \sum_r \frac{1}{(\gamma(r; T)+1)^2}$ (gl. § 23.7.1); u kojima je od tih slučajeva promatrana krivulja savršen ravninski skup?

§ 26.9.6. Stavimo li $\sin_1 = \sin$, $\sin_{n+1} = \sin(\sin_n)$, $(n \in N)$, promatraj skup S_n rješenja jednakosti

$$\sin_n \frac{1}{x} = 0.$$

§ 26.9.7. Za realnu jednoznačnu funkciju f definiranu u linearnu skupu S promatraj pripadni *ordinatni* skup

$$\bigcup_a \{a\} \times [0, f(a)], \quad (a \in S).$$

Da li je ordinatni skup što pripada a) sinusu, b) tangensu, c) funkciji $\sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$ zatvoren?

§ 26.9.8. Definiraj obostrano recipročno preslikavanje f skupa R racionalnih brojeva, tako da „krivulja"

$$y = f(x), \quad (x \in R)$$

bude svuda gusta u ravnini.

(Uputa: svrstaj u niz $V_1, V_2, \ldots V_n, \ldots$ sve krugove s racionalnim radiusom i racionalnim središtem; ako je $r_1, r_2, \ldots. r_n, \ldots.$ dobro uređenje skupa R, tada promatraj prvi broj u tom nizu koji leži u x-projekciji kruga V_1 i tome broju pridijeli prvi broj iz niza R koji leži u y-projekciji skupa V_1, i t. d.).

§ 26.9.9. Promatraj zadanu a) kružnicu, b) krug kao relativan prostor s obzirom na Kartezijev prostor C_2 u kojem leži. Kako bi ta dva prostora definirao na autonoman način (uzimajući u obzir samo točke kružnice odn. kruga)?

§ 26.9.10. Promatraj skup E_1 odn. E_2 rješenja jednakosti $\sin\frac{1}{x} = 0$ odn. $\sin\frac{1}{\sin\frac{1}{x}} = 0$. Odredi sve izvode tih skupova. Poopći i promatraj analogan skup E_n (Du Bois Reymondov primjer: Crelle-ov Journal, 79, p. 36).

§ 26.9.11. Ascoli: (*Annali di mat.* (2), 6, 55 (1875)) promatra skup

$$A = 3^{-N} + 5^{-N} + 7^{-N} + 11^{-N}$$ brojeva oblika

$$3^{-a} + 5^{-b} + 7^{-c} + 11^{-d},$$

kad a, b, c, d prolaze skupom N prirodnih brojeva; dokaži da je četvrti izvod toga skupa sastavljen od 0:

$$A^{(IV)} = \{0\} \text{ t. j. } A^{(V)} = v.$$

§ 26.9.12. Mittag Leffler *(Acta Mathematica,* 4 p. 58) promatra skup P_1 svih brojeva oblika 2^{-m_1}

P_2 svih brojeva oblika $2^{-m_1} + 2^{-m_1-m_2}$

. . . .

P_n svih brojeva oblika $2^{-m_1} + 2^{-m_1-m_2} + \ldots + 2^{-m_1 \cdots -m_n}$.

Promatra i skup Q svih brojeva oblika

$$2^{-n} + 2^{-n-m_1} + \ldots + 2^{-n-m_1-\ldots-m_n};$$

pritom $n, m_1, m_2, \ldots, m_n$ prolaze skupom svih cijelih brojeva $\geqslant 0$. Dokaži, da je

$$P_n^{(n)} = \{0\}, \ (n \in N),$$
$$Q^{(\omega)} = \{0\}.$$

§ 26.9.13. Dokaži da je triadski skup T savršen. Općenito, neka je m cio broj > 2; jedinični segment podijeli na m jednakih dijelova, pa odstrani predzadnji otvoreni interval; s preostalih $m-1$ segmenata učini sličan postupak kao i s jediničnim, itd. Skup preostalih točaka je *savršen* (St. Smith, *Proc. Lond. Math. Soc.* 6 (1875), p, 145).

§ 26.9.14. Dokaži da je parobala $y = x^2$ shvaćena kao relativni prostor u C_2 homeomorfna sa prostorom $(0, 1)_C$ pravih razlomaka.

§ 26.9.15. Promatraj prostor što se iz kvadrata dobije identificiranjem svih četiriju vrhova kvadrata, te parova aksialno simetričnih rubnih točaka; nastaje dvodimenzionalni svitak (torus).

§ 26.9.16. Identificiraj dijametralno suprotne točke kružnice; nastaje prostor homeomorfan sa kružnicom.

§ 26.9.17. Identificiraj dijametralno suprotne točke kugline plohe; nastaje prostor homeomorfan sa projektivnom ravninom.

§ 26.9.18. Krugu kao prostoru identificiraj sve točke rubne kružnice; nastaje prostor sličan sa kuglinom plohom.

§ 26.9.19. U otvorenu kružnom vijencu identificiraj sve točke na svakoj koncentričnoj kružnici. Nastaje prostor homeomorfan sa prostorom C realnih brojeva.

§ 26.9.20. Kojemu je prostoru $(\{1, 2\}; -)$ homeomorfan prostor dobiven diobom

$$(-\infty, 0]_C \cup (0, \infty)_C \text{ linearnog kontinuuma?}$$

§ 27. OKOLINSKI PROSTORI ILI FRECHETOVI V-PROSTORI[1].

To su prostori kod kojih je operacija prostornosti izotona. Drugim riječima, prostor $(S; -)$ je *okolinski* ako je ispunjen

Aksiom I (aksiom izotonije): Iz $X \subseteq Y$ *slijedi* $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$.

Ako izričito ne kažemo drukčije, svaki prostor kojega budemo ubuduće razmatrali zadovoljavat će tome aksiomu.

Upravo je nevjerojatno koliko se osnovnih činjenica iz analize i i geometrije može izreći za skupove smještene u okolinskim prostorima. Čitaoca naročito upućujemo na ono što ćemo kasnije reći o svezanim skupovima i Bolzanovom teoremu.

Prema tome, svaki okolinski prostor $(S; -)$ određuje izvjesno uzlazno preslikavanje

$$\overline{X}, \ (X \in P(S))$$

djelimično uređena skupa $(P(S), \subseteq)$[2] na sama sebe; i obrnuto svako uzlazno preslikavanje f skupa $(P(S; \subseteq)$ na sama sebe određuje okolinski prostor $(S; f)$.

§ 27. 1. **Izotonija izvoda i nutrine:**

Teorem 27.1.1. *Većem skupu pripada veći izvod, veća nutrina, a manja vanjština t. j. iz* $X \subseteq Y$ *slijedi:*

(27.1.1) $$X' \subseteq Y';$$

(27.1.2) $$int\, X \subseteq int\, Y;$$

(27.1.3) $$ext\, X \supseteq ext\, Y.$$

Dokažimo (27.1.1) t. j. da iz $\{a\} \subseteq X'$[3]) slijedi $\{a\} \subseteq Y'$.

No, $(a) \subseteq X'$ znači (v. def. 26.3.1), da je

(27.1.4) $$(a) \subseteq \overline{X \setminus (a)}.$$

Kako iz $X \subseteq Y$ slijedi $X \setminus (a) \subseteq Y \setminus (a)$, a odatle po aksiomu izotonije:

$$\overline{X \setminus (a)} \subseteq \overline{Y \setminus (a)};$$

odatle radi (27.1.4) izlazi

$$(a) \subseteq \overline{Y \setminus (a)}$$

a to upravo znači, da je $(a) \subset Y'$ za svaki $(a) \subseteq X'$.

Dokažimo (27.1.3). Iz $X \subseteq Y$ slijedi po uslovu izotonije

$$\overline{X} \subseteq \overline{Y}$$

---

[1]) V je početno slovo franc. riječi *voisinage* = okolina.

[2]) Sjeti se da $P(S)$ označuje skup svih skupova $X \subseteq S$.

[3]) Sjeti se da $(a) \subseteq X'$ i $a \in X'$ znače jedno te isto.

dakle, prelazeći na komplemente:

$$C\overline{X} \geq C\overline{Y},$$

a to upravo i jest relacija (27.1.3).

Dokažimo najzad da važi (27.1.2). Stvarno, iz $X \subseteq Y$ slijedi

$$CX \geq CY; \quad \text{odatle}$$

$$\overline{CX} \geq \overline{CY} \quad \text{i dalje}$$

$$C(\overline{CX}) \subseteq C(\overline{CY})$$

a to je upravo tražena relacija (27.1.2).

Korolar 27.1.1. *Za svaki skup X važi $\overline{v} \subseteq \overline{X}$; pritom je v prazan skup.*

§ 27.2. **Veza između skupa, njegove prostornosti i izvoda.**

Teorem 27.2.1. *Izvod X' skupa X sadržan je u prostornosti $\overline{X}$ toga skupa, a sama prostornost $\overline{X}$ sadržana je u uniji skupa i njegova izvoda:*

$$X' \subseteq \overline{X} \subseteq X \cup X'. \tag{27.2.1}$$

Dokažimo najprije $X' \subseteq \overline{X}$ t. j. da iz $(a) \subseteq X'$ slijedi $(a) \subseteq \overline{X}$.

No, $(a) \subseteq X'$ znači, da je

$$(a) \subseteq \overline{X \setminus (a)}. \tag{27.2.2}$$

Kako je $X \setminus (a) \subseteq X$ izlazi po aksiomu izotonije

$\overline{X \setminus (a)} \subseteq \overline{X}$, pa zbog (27.2.2) imamo zaista $(a) \subset \overline{X}$.

Još preostaje da dokažemo, da je

$$\overline{X} \subseteq X \cup X' \tag{27.2.3}$$

t. j. da iz $(a) \subseteq \overline{X}$ slijedi $(a) \subseteq X \cup X'$. Neka je dakle $(a) \subseteq \overline{X}$; ako je k tome $(a) \subseteq X$, bit će pogotovo $(a) \subseteq X \cup X'$; ako pak nije $(a) \subseteq X$, bit će

$$X \setminus (a) = X \quad \text{dakle}$$

$$\overline{X \setminus (a)} = \overline{X},$$

što obzirom na $(a) \subseteq \overline{X}$ daje $(a) \subseteq \overline{X \setminus (a)}$, a to upravo znači, da je $(a) \subseteq X'$, a time i $(a) \subseteq X \cup X'$.

Time je teorem 27.2.1 potpuno dokazan.

Korolar 27.2.1. *Ako neki element prostornosti $\overline{X}$ skupa X ne pripada izvodu X' skupa X, pripada on sigurno samom skupu t. j.*

$$\overline{X} \setminus X' \subseteq X. \tag{27.2.4}$$

Teorem 27.2.2. *Da bude*

$$\overline{X} = X \cup X' \tag{27.2.5}$$

dovoljno je da važi t. zv.

Aksiom invarijancije; *Prazni skup i svaki jednočlani skup podudaraju se sa svojom prostornošću* (t. j. iz $kY \leqslant 1$ slijedi $\overline{Y} = Y$ [1]).

S obzirom na formulu (27.2.1), dovoljno je da pokažemo, da iz aksioma invarijancije slijedi

$$X \subseteq \overline{X}, \tag{27.2.6}$$

jer iz (27.2.1), i (27.2.6) neposredno izlazi (27.2.5). No iz $(a) \subseteq X$ po aksiomu izotonije imamo

$$\overline{(a)} \subseteq \overline{X} \quad \text{za svaki} \quad (a) \subseteq X.$$

Kako je po aksiomu invarijancije lijeva strana tu $= \{a\}$, prelazi zadnja relacija u

$$(a) \subseteq \overline{X}, \ ((a) \subseteq X);$$

a to znači isto što i (27.2.6).

§ 27.3. U sebi gusti skupovi. Rastavljanje zatvorenih skupova.

Sjetimo se, da je skup S u sebi gust, ako je sadržan u svojem izvodu t. j. ako je $S \subseteq S'$.

Teorem 27.3.1. *Unija u sebi gustih skupova opet je u sebi gust skup* t. j. ako je

$$S \subseteq S', \ (S \in M) \tag{27.3.1}$$

onda je

$$\bigcup_S S \subseteq (\bigcup_S S)', \ (S \in M). \tag{27.3.2}$$

Stvarno, neka je

$$a \in \bigcup_S S; \tag{27.3.3}$$

to znači, da postoji bar jedan $S \in M$ sa svojstvom $a \in S$; kako je S u sebi gust t. j. $S \subseteq S'$, bit će $a \in S'$. No, jasno je, da je

$$S \subseteq \bigcup_S S, \ (S \in M)$$

odakle po aksiomu izotonije

$$S' \subseteq (\bigcup_S S)', \ (S \in M)$$

što s obzirom na prethodnu relaciju $a \in S'$ daje traženu relaciju.

$$a \in (\bigcup_S S)' \ (S \in M). \tag{27.3.4}$$

Dakle iz (27.3.3) proizlazi (27.3.4), a to baš iskazuje tražena relacija (27.3.2).

[1]) Poslije ćemo u §-u 27.7 vidjeti da je relacija (27.2.5) nuždan i dovoljan uslov da svaka točka bude sadržana u svakoj svojoj okolini odnosno da nutrina skupa leži u samom skupu.

Teorem 27.3.2. *Svaki (zatvoreni) skup jest unija dvaju skupova od kojih je jedan u sebi gust (savršen), a drugi raspršen* [1].

Stvarno, udružimo li sve u sebi guste skupove sadržane u S, dobit ćemo prema teoremu 27.3.1 u sebi gust skup D dakle

(27.3.5) $$D \subseteq D';$$

naravno da je preostatak $S \setminus D$ raspršen; na taj način imamo rastav

(27.3.6) $$S = D \cup (S \setminus D)$$

o kojemu se govori u teoremu 27.3.2; još se radi o tome da dokažemo, da je u slučaju da je S zatvoren, i skup D zatvoren t. j. da je

(27.3.7) $$\overline{D} \subseteq D.$$

No, zbog (27.3.5) identiteta

$$D' \subseteq \overline{D} \subseteq D \cup D' \quad \text{daje}$$

(27.3.8) $$\overline{D} = D'.$$

Nadalje po zakonu izotonije za izvod (v. teorem 27.1.1) iz (27.3.5) slijedi:

$$D' \subseteq D''.$$

što znači da je skup D' gust; po (27.3.8) to znači, da je $\overline{D}$ gust t. j.

$$\overline{D} \subseteq \overline{D}'.$$

Dalje iz $D \subseteq S$ izlazi $\overline{D} \subseteq \overline{S}$ (a ovo dalje zbog zatvorenosti skupa S) $\subseteq S$ t. j. u sebi gusti skup $\overline{D}$ leži u S i to naravno u njegovom gustom dijelu D, jer je D i bio definiran kao unija svih u sebi gustih skupova iz S; dakle je $\overline{D} \subseteq D$, što smo i htjeli da pokažemo.

§ 27.4. **Pojam okoline.** Mjesto da se kaže da neki element pripada nutrini zadana skupa, veli se još da je taj element *nutrašnji* element toga skupa ili još da je taj skup *okolina toga elementa.*

Kako će nas taj naziv neprestano pratiti, jer je pojam okoline od osnovne važnosti, izrecimo ponovno definiciju okoline nekog elementa odn. nekog skupa.

Definicija 27.4.1. *Veli se, da je neki skup X okolina skupa A ako A leži u nutrini (interieru) skupa X t. j. ako je $A \subseteq \operatorname{int} X$* odnosno

(27.4.1) $$A \subseteq C\overline{(CX)}.$$

Napose, X je okolina elementa a, ako je $a \in \operatorname{int} X$.

Na pr. svaki neprazan otvoren interval I svakog potpuno uređenog skupa jest okolina svakog svojeg elementa $a \in I$. Svaka kugla je okolina svog središta.

Proizvoljnu okolinu elementa a možemo označivati sa

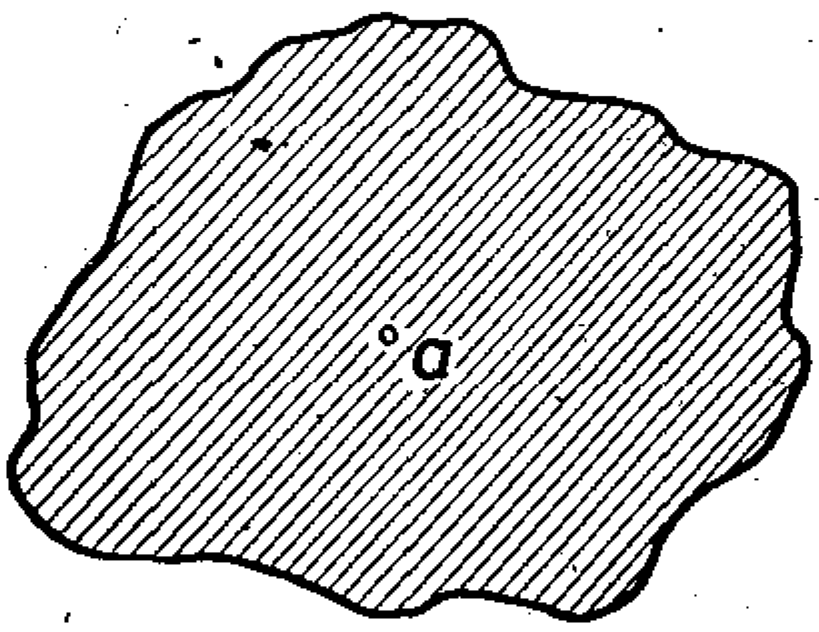
$$O(a).$$

[1] Naravno da pojedini od tih dijelova može biti i pust skup.

Prema tome, $O(a)$ je opća oznaka za bilo koji skup X sa svojstvom $a \in int\, X$; dakle je identički:

(27.4.2) $$a \in int\,(O(a)).$$

Shematsko prikazivanje okoline. Proizvoljnu okolinu točke a možemo u ravnini prikazati shematski tako, da oko neke točke kao predstavnika zadane točke a opišemo zatvorenu crtu; ono što ta crta obuhvata smatramo *shematskim prikazom okoline točke a.* Istaknimo, da se zasad još nije postavilo pitanje, da li ta točka leži ili ne leži u svojoj okolini.



Sl. 27.4.1. Shematski prikaz proizvoljne okoline točke a.

§ 27.4.1. **Osnovna uloga okolina.** *Prikazivanje dodira posredstvom okolina.* Sada ćemo navesti važno svojstvo okolina koje će nas dovesti do druge definicije okolinskih prostora, pa će nam sada biti jasno porijeklo naziva tih prostora.

Teorem 27.4.1.1. *Da se element a dodiruje skupa $X \supset v$, nužno je i dovoljno, da svaka okolina $O(a)$ točke a sadrži bar jedan element skupa X. Drugim riječima, ako je $X \supset v$, tada je relacija*

(27.4.1.1) $$a \in \overline{X}$$

ekvivalentna sa nejednakosti

(27.4.1.2) $$O(a) \cap X \supset v$$

za svaku okolinu $O(a)$ točke a. [1])

Uslov je nuždan: ako je $(a) \subseteq \overline{X}$, tada svaka okolina $O(a)$ zadovoljava (27.4.1.2). U obrnutom slučaju, postojala bi bar jedna točka $(a) \subseteq \overline{X}$ i bar jedna okolina $O(a)$ za koju ne važi (27.4.1.2) nego

(27.4.1.3) $$O(a) \cap X = v.$$

To znači, da bi bilo

$$X \subseteq C(O(a)) \quad \text{dakle} \quad \overline{X} \subseteq \overline{C(O(a))};$$

to sa (27.4.1.1) povlači

$$(a) \subseteq \overline{C(O(a))} \quad \text{što znači da nije} \quad a \subseteq C\overline{(C(O(a)))} = int\, O(a),$$

pa element a ne bi pripadao nutrini skupa $O(a)$, protivno pretpostavci da je $O(a)$ izvjesna okolina od a.

Uslov je dovoljan: ako svaka okolina od a ima neprazan presjek sa skupom X, onda a leži u $\overline{X}$. U obrnutom slučaju, bilo bi

(27.4.1.4) $$(a) \subseteq C(\overline{X})$$

([1] Preporuča se da čitalac uvijek ima u vidu kakav konkretan prostor, na pr. prostor realnih brojeva

Promatrajmo tada skup

$$C(X) = \text{komplement od } X$$

s obzirom na čitav prostor i dokažimo da bi $C(X)$ bila okolina od a dakle $(a) \leq int\, C(X)$.

Stvarno,

$$int\, C(X) = \text{vanjština od } C(C(X)) = ext\, X = C(\overline{X}) \quad \text{t. j.}$$

$$int\, C(X) = C(\overline{X}),$$

što sa (27.4.1.4) daje

(27.4.1.5) $$(a) \leq int\, C(X).$$

Dakle bi skup $C(X)$ bio okolina elementa a, pa bi prema uslovu teorema ta okolina $C(X)$ imala bar jednu zajedničku točku sa skupom X. To je međutim nemoguće, jer CX kao komplement skupa X nema sa X zajedničke točke.

Time je teorem 27.4.1 potpuno dokazan.

§ 27.4.2. **Nova definicija okolinskih prostora.** Smisao teorema (27.4.1) je dvojak: nužni dio teorema pruža mogućnost kako da odredimo da li se pun skup X dodiruje ili ne dodiruje točke a; dovoljni pak dio teorema iskazuje ovo: ako pojedinoj točki a pridijelimo izvjesnu množinu $O(a)$ skupova kao njene okoline, možemo na osnovu toga *definirati* sve pune skupove X koji su u dodiru sa a t. j. koji zadovoljavaju relaciju $(a) \in \overline{X}$.

Ako je naime X takav skup, da svaki član množine $O(a)$ sadrži bar jedan element od X, tada ćemo, po definiciji, reći da su a i X u dodiru. Učini li se to za svaku točku a, tada se $\overline{X}$ definira kao skup svih točaka koje se u tom smislu „dodiruju" skupa X. Ukratko, *ako svakoj točki a skupa S pridijelimo izvjestan sistem skupova, možemo te skupove interpretirati kao okoline točke a i na osnovu toga dobiti u ruke sredstvo da pronađemo sve skupove X iz S koji imaju neprazan presjek sa svakom okolinom od a; to ćemo kraće izraziti riječima da se X dodiruje točke a. Učinimo li to za svaki element a, pa nazovemo li prostornošću $\overline{X}$ skupa X skup svih točaka koje su na taj način proglašene da se dodiruju skupa X, dobivamo time potpuno određeno preslikavanje*

$$\overline{X}, \ (X \leq S),$$

a time i potpuno određen prostor $(S; -)$.

Jedino, na taj način ne možemo rekonstruirati dodir elemenata s praznim skupom v; zato će se obično, po definiciji stavljati

(27.4.2.1) $$\overline{v} = v$$

odnosno odrediti šta ima biti skup $\overline{v} \leq S$.

Očito je, da će tako definirano dodirivanje (traženje prostornosti) biti izotona operacija, jer ako je $X \subseteq Y$ te $a \in \overline{X}$, onda to znači, da svaka okolina $O(a)$ od a zadovoljava $O(a) \cap X \supset v$ odakle pogotovo $O(a) \cap Y \supset v$; to baš i znači, da iz $(a) \in \overline{X}$ slijedi $(a) \in \overline{Y}$ t. j. da je $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$ odnosno da relacija dodira između elementa i skupa ispunjava aksiom izotonije.

Način da se prostor definira pomoću okolina vanredno je važan. Na taj smo način definirali prostor realnih brojeva, prostor kompleksnih brojeva, potpuno uređene prostore, Kartezijeve prostore, Hilbertov prostor i t. d.

§ 27.4.3. **Baza okolinâ.** Bitna je uloga okolina ta da pomoću njih možemo odlučiti, da li se proizvoljno zadan element a nalazi ili ne nalazi u dodiru sa proizvoljno zadanim punim skupom X t. j. da li je relacija $a \in \overline{X}$ ispunjena ili nije ispunjena. No, da jednoznačno saznamo, da li je relacija $a \in \overline{X}$ ispunjena ili nije ispunjena, nije vazda potrebno uvesti u igru množinu *svih okolina* od a.

Drugim riječima, *da rekonstruiramo zadan okolinski prostor, često je dovoljnô promatrati tek jedan dio sistema svih mogućih okolina.*

Definicija 27.4.3.1. *Svaka množina okolina pomoću koje možemo rekonstruirati zadan prostor zove se baza okolina toga prostora.* Specijalno se kaže da je okolinski prostor *potpuno (posve) separabilan*, ako se on može rekonstruirati pomoću konačno mnogo odn. prebrojivo mnogo okolina.

Tako na pr. množina svih otvorenih intervala uređena skupa realnih brojeva, pri čemu svaki interval smatramo okolinom svakog svojeg elementa čini bazu prostora realnih brojeva, jer je taj prostor i definiran pomoću tih okolina.

No, množina svih otvorenih intervala s *racionalnim krajevima* također čini bazu toga istoga prostora realnih brojeva, jer se relacija dodira može definirati već pomoću tih specijalnih okolina. To proizlazi iz ove činjenice: da se realni broj a dodiruje skupa X realnih brojeva, nužno je i dovoljno, da za svaki otvoreni interval I s *racionalnim krajevima* iz $a \in I$ slijedi $I \cap X \supset v$. [1]) Zato je prostor realnih brojeva potpuno separabilan.

Općenitije važi ovaj

Teorem 27.4.3.1. *Svaki razdaljinski prostor koji je separabilan također je potpuno separabilan.*

Stvarno, ako je B ma kakav skup koji je svuda gust po prostoru i za koji je $kB \leqslant \aleph_0$, tada skup svih sferoida kojima središte leži u

[1]) Relacija $(a) \subseteq \overline{X}$ je definirana pomoću izreke, koju se iz gornje izreke dobije brisanjem riječi „s racionalnim krajevima".

B i kojima je radius racionalan jest prebrojiv i očito se pomoću tih sferoida može prostor rekonstruirati shvatajući svaki sferoid kao okolinu svake svoje točke.

§ 27.4.4. **Lokaliziranje** *(ekvivalentne okoline u zadanoj točki).*

Definicija 27.4.4.1. Veli se, da su dva sistema okolina *ekvivalentna u točki a prostora,* ako je za svaki pojedini skup X relacija dodira

$$a \in \overline{X}$$

ili ispunjena ili neispunjena za oba sistema u isti mah. Drugim riječima, dva su sistema okolina točke a ekvivalentna u točki a, ako iz $X \supset v$, $a \in \overline{X}$ vazda proizlazi, da svaka okolina od a i u jednom i u drugom sistemu ima pun presjek sa X; i obrnuto, ako iz činjenice, da svaka okolina od a jednog sistema ima pun presjek sa X proizlazi $(a) \subseteq \overline{X}$.

Teorem 27.4.4.1. (Hausdorff). *Da dva sistema okolina točke a budu ekvivalentna u točki a, nužno je i dovoljno, da svaka okolina iz jednog sistema obuhvata bar jednu okolinu iz drugog sistema.*

Označimo li sa $O_1(a)$ prvi, a sa $O_2(a)$ drugi sistem okolina točke a pomoću kojih je moguće rekonstruirati prostor u točki a, onda teorem kaže, da se ekvivalentnost sistema $O_1(a)$, $O_2(a)$ sastoji u tome, da za svaki $o_1(a) \in O_1(a)$ postoji bar jedan $o_2(a) \in O_2(a)$ tako da bude $o_1(a) \supseteq o_2(a)$; i obrnuto, da svaki $o_2(a) \in O_2(a)$ sadrži bar jedan $o_1(a)$ iz $O_1(a)$.

Uslov je nuždan: Neka je $o_1(a)$ proizvoljan član sistema $O_1(a)$; treba dokazati da postoji bar jedan $o_2(a) \in O_2(a)$ tako da bude

$$o_2(a) \subseteq o_1(a). \tag{27.4.4.1}$$

U obrnutom slučaju bilo bi

$$o_2(a) \setminus o_1(a) \supset v, \quad (o_2(a) \in O_2(a)). \tag{27.4.4.2}$$

Promatrajmo skup

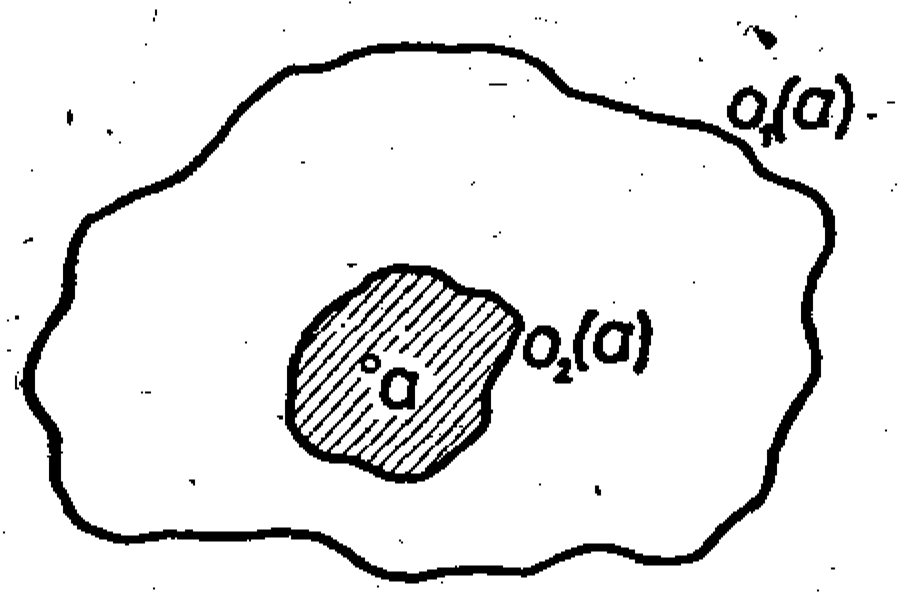
$$E = \bigcup_{O_2(a)} (o_2(a) \setminus o_1(a)), \quad (o_2(a) \in O_2(a)) \tag{27.4.4.3}$$

i ispitajmo, da li se on dodiruje ili ne dodiruje točke a. Po hipotezi (27.4.4.2) svaki član sistema $O_2(a)$ ima pun presjek sa skupom E, što znači da bi s obzirom na sistem $O_2(a)$ okolina bilo $a \in \overline{E}$; no, zbog pretpostavljene ekvivalentnosti sistema $O_1(a)$ i $O_2(a)$, to bi značilo, da i svaki član iz $O_1(a)$ specijalno dakle i izabrana okolina $o_1(a) \in O_1(a)$ ima pun presjek sa E t. j. bilo bi

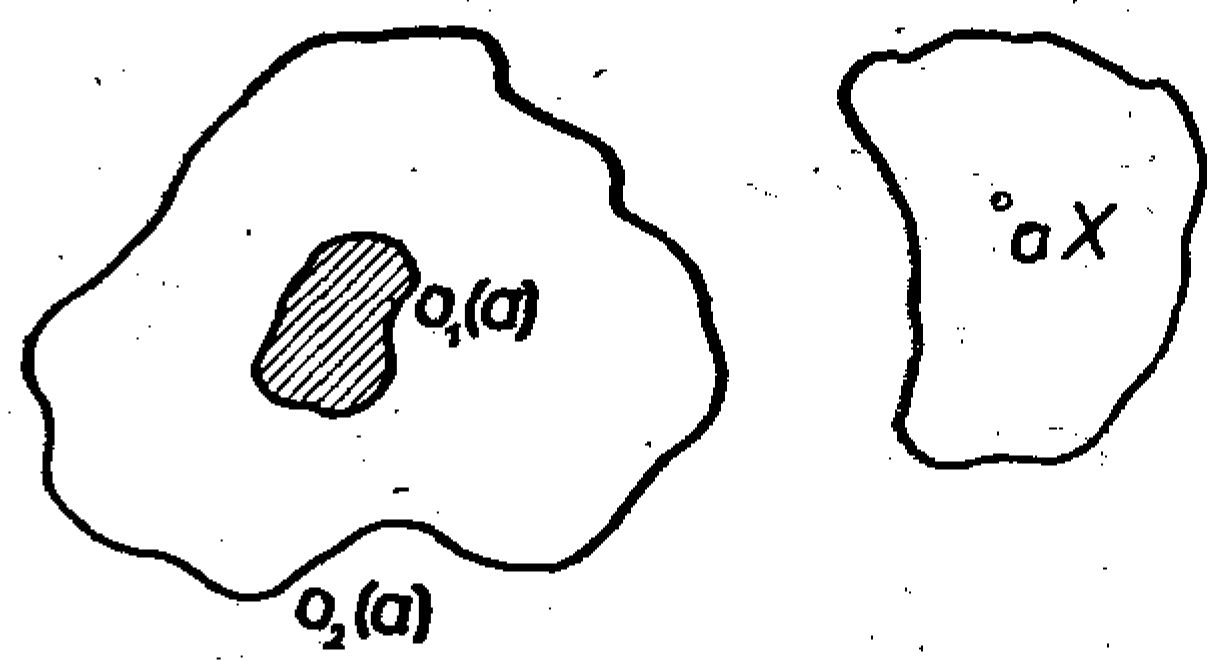
$$o_1(a) \cap \Big(\bigcup_{O_2(a)} (o_2(a) \setminus o_1(a)) \Big) \supset v, \quad (o_2(a) \in O_2(a)),$$

što je očito nemoguće. Dakle postoji bar jedan $o_2(a) \in O_2(a)$, tako da ne bude ispunjeno (27.4.4.2) nego, naprotiv, da bude (27.4.4.1). Slično se dokazuje, da svaki $o_2(a) \in O_2(a)$ sadrži bar jedan $o_1(a) \in O_1(a)$.

Dovoljnost uslova je očigledna. Mi ćemo je ipak dokazati i to u ovoj formulaciji: *ako su $O_1(a)$, $O_2(a)$ dva sistema skupova koje smatramo okolinama točke a pa ako svaki član jednog sistema sadrži bar jedan član drugog sistema, onda ta dva sistema definiraju jednu te istu relaciju dodira elementa a s ma kojim punim skupom X.*



Sl. 27.4.4.1.
Svaka okolina $o_1(a) \varepsilon O_1(a)$ sadrži jedan $o_2(a) \varepsilon O_2(a)$.



Sl. 27.4.4.2.
Kad bi neki $o_2(a)$ bio disjunktan sa X, bio bi to i neki $o_1(a)$.

Stvarno, neka je na pr. $X \supset v$ nekakav skup sa svojstvom, da svaki $o_1(a) \in O_1(a)$ ima sa X pun presjek; onda se radi o tome da vidimo, da i svaki $o_2(a) \in O_2(a)$ ima sa X pun presjek; ne može naime nikoji $o_2(a)$ biti disjunktan sa X, jer, po hipotezi, svaki član iz $O_2(a)$, pa dakle i taj konkretni, sadrži bar jedan $o_1(a)$, pa bi ovaj, kao dio od onoga $o_2(a)$, bio također disjunktan sa X, protivno pretpostavci.

Time je teorem 27.4.4.1 potpuno dokazan.

Na osnovu toga neposredno se vidi da važi:

T e o r e m 27.4.4.2. (H a u s d o r f f). *Ako svakoj točki skupa S pridijelimo dva sistema skupova, kao dva sistema njezinih okolina, tada stavljajući $\underset{\smile}{v} = v$, nužni i dovoljni uslov, da ta dva sistema skupova definiraju jedan te isti prostor glasi ovako:*

Za svaku točku i svaku njenu okolinu iz jednog sistema postoji u drugom sistemu bar jedna okolina te iste točke koja je sadržana u promatranoj okolini iz promatranog sistema.

Doseg gornjeg teorema vrlo je velik.

Na osnovu njega odmah zaključujemo, da u ravnini za okoline neke točke možemo uzeti na pr. kvadrate, krugove, elipse kojima je ta točka u središtu simetrije i sva ta tri sistema okolina međusobno su ravnopravna.

§ 27.4.5. **Hausdorffovi prostori.** O okolinama dosad nije ništa pretpostavljeno. Hausdorff je ([1] p. 213) postavio ova 4 aksioma za okoline:

H_1 *Svakoj točki a pripada bar jedna okolina o(a); svaka okolina točke a sadrži a;*

H_2 *Presjek dviju okolina jedne te iste točke sadrži bar jednu okolinu te točke;*

H_3 *Svakoj točki iz svake okoline o pripada bar jedna okolina koja je sadržana u zadanoj okolini o t. j. iz $a' \in o(a)$ proizlazi, da postoji bar jedna okolina $o(a') \subseteq o(a)$.*

H_4 *Svakom različitom paru točaka pripada bar jedan par okolina bez zajedničke točke.*

Odmah se vidi, da Kartezijevi prostori, Hilbertov prostor, funkcionalni prostor C_c, svi razdaljinski prostori te svi potpuno uređeni prostori zadovoljavaju gornjim aksiomima H_1, H_2, H_3, H_4.

Koliko god izbor gornja 4 aksioma bio prirodan, zbog čega je izučavanje Hausdorffovih prostora relativno jednostavno, ipak ima važnih prostora koji nisu Hausdorffovi, ma da su okolinski.

Primjer 27.4.5.1. Skup $C_I(C)$ svih realnih jednoznačnih funkcija definiranih u linearnom kontinuumu C_1 proglasit ćemo prostorom time da za $f \in X$, $X \subseteq C_1(C)$ relacija $f \in \overline{X}$ znači isto što i činjenica, da postoji niz funkcija $f_n \in X$ sa svojstvom

$$\lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a) \quad \text{za svaki} \quad a \in C.$$

Nastali prostor L je okolinski, ali nije Hausdorffov, kao što to proizlazi iz

Teorema 27.4.5.1. *Za svaki skup S iz Hausdorffova prostora važi $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$ (naprotiv za množinu M svih elementa prostora L koji su neprekidne funkcije važi $\overline{\overline{M}} \supset \overline{M}$).*

Dovoljno je da dokažemo, da je $\overline{\overline{S}} \subseteq \overline{S}$ t. j. da iz $a \in \overline{\overline{S}}$ slijedi $a \in \overline{S}$. Stvarno, neka je $a \in \overline{\overline{S}}$ t. j. neka svaka okolina $o(a)$ sadrži točaka iz $\overline{S}$, recimo neka je $a' \in o(a) \cap \overline{S}$; no iz $a' \in o(a)$ izlazi po svojstvu H_3, da postoji čitava okolina $o(a') \subseteq o(a)$; kako je $a' \in \overline{S}$, to znači, da je $o(a') \cap S \supset v$, što s obzirom na $o(a') \subseteq o(a)$ daje:

$$o(a) \cap S \supset v$$

za svaku okolinu $o(a)$; a to baš i znači, da je $a \in \overline{S}$.

Naprotiv, nije $\overline{\overline{M}} \subseteq \overline{M}$, jer na pr. Dirichletova funkcija χ je element skupa $\overline{\overline{M}}$, ali se može pokazati (Baire-ov teorem) da nije element skupa $\overline{M}$ t. j. da funkcija χ nije limes niza neprekidnih funkcija.

§ 27.4.6. Kombinirani produkt zadanih prostora.

Neka su

(27.4.6.1) $$(S_1; -), (S_2; -)$$

dva okolinska prostora sa svojstvom da je $\bar{v} = v$.

Pod *kombiniranim produktom* prostora $(S_1; -)$, $(S_2; -)$ razumijevamo prostor

(27.4.6.2) $$(S_1 \times S_2; -)$$

koji je sastavljen od kombiniranog produkta $S_1 \times S_2$, a prostornost je tako definirana, da za svaki $a \in S_1$, $b \in S_2$ i svaku okolinu $o(a)$ od a odn. $o(b)$ od b skup

$$o(a) \times o(b)$$

smatramo okolinom točke (a, b) skupa $S_1 \times S_2$; u novom prostoru (27.4.6 2) stavljamo također

(27.4.6.3) $$\bar{v} = v.$$

Tako na pr. Kartezijeva ravnina C_2 jest kombinirani produkt linearnog prostora C sa samim sobom. Analogno Kartezijev trodimenzionalni prostor C_3 jest kombinirani produkt ravnine C_2 i pravca C. Torus (svitak) je kombinirani produkt dviju kružnica.

Analogno se definira kombinirani produkt od konačno mnogo prostora

$$(S_i; -), (i = 1, 2, \ldots n).$$

Tako na pr kombinirani produkt od n prostora C odnosno od n kružnica jest n-dimenzionalni Kartezijev prostor C_n odn. n-dimenzionalni torus (svitak). Općenito, ako je M jedna množina, a za svaki $x \in M$

$$(S(x); -)$$

određen okolinski prostor, tada se prema Tihonovu, pod kombiniranim produktom svih prostora

(27.4.6.4) $$(S(x); -), (x \in M)$$

razumijeva prostor

(27.4.6.5) $$(\Pi S(x); -)$$

sastavljen od svih jednoznačnih preslikavanja f skupa M tako da bude

(27.4.6.6) $$f(x) \in S(x) \text{ za svaki } x \in M;$$

$f(x)$ je t. zv. *x-ta koordinata točke* $f \in S$; okoline svake „točke $f \in S$" jesu skupovi svih jednoznačnih preslikavanja φ skupa M tako da za *konačan* dio $M_0 \subseteq M$ iz

$$x \in M_0 \text{ slijedi } \varphi(x) \in o(f(x))$$

dok za svaki $x \in M \setminus M_0$ koordinata $\varphi(x)$ prihvata sve moguće vrijednosti skupa $S(x)$; tu M_0 nije isti za sve $f \in S$; naravno, $o(f(x))$ prolazi sistemom svih okolina točke $f(x)$ u prostoru $(S(x); —)$.

Drugim riječima, okolina točke $f \in S$ je obrazovana od svih točaka $\varphi \in S$ kojima konačno mnogo — inače bilo kojih — koordinata leži u bilo kojim odgovarajućim okolinama koordinate točke f, dok su preostale koordinate točke φ proizvoljne (osim što naravno imaju da leže u odgovarajućim prostorima $S(x)$).

Ta definicija možda izgleda prilično izvještačena. U §-u 27.10. vidjet ćemo razlog zašto se produkt definira baš tako.

§ 27.5. Svojstva zatvorenih i otvorenih skupova.

Otvoreni i zatvoreni skupovi spadaju među najjednostavnije skupove. Običaj je, da se proizvoljan otvoren skup bilježi slovom G[1]) a proizvoljan zatvoren skup slovom F[2]).

§ 27.5.1. Presjek i unija zatvorenih i otvorenih skupova.

Teorem 27.5.1.1. *Presjek (unija) od ma koliko zatvorenih (otvorenih) skupova opet je zatvoren (otvoren) skup.*[3])

Stvarno, neka je H ma kakva familija zatvorenih skupova; stavimo li

(27.5.1.1) $$E = \bigcap_F F, \ (F \in H)$$

tada treba dokazati, da je skup E zatvoren t. j. da je

(27.5.1.2) $$\overline{E} \subseteq E \quad \text{odnosno} \quad \bigcap_F \overline{F} \subseteq \bigcap_F F, \ (F \in H).$$

No, svaki $F \in H$ je zatvoren, pa je dakle

$$\overline{F} \subseteq F, \ (F \in H),$$

odatle izlazi da je

$$\bigcap_F \overline{F} \subseteq \bigcap_F F, \ (F \in H),$$

odnosno prema (27.5.1.1):

(27.5.1.3) $$\bigcap_F \overline{F} \subseteq E, \ (F \in H).$$

Sa druge strane, očito je zbog (27.5.1.1):

$$F \supseteq E, \ (F \in H)$$

pa izotonija prostornosti daje:

$$\overline{F} \supseteq \overline{E}, \ (F \in H)$$

---

[1]) Početno slovo njem. riječi *Gebiet = oblast, područje.*

[2]) Početno slovo franc. riječi *fermé = zatvoren.*

[3]) Specijalno se dogovorno uzima, da presjek (unija) od v zatvorenih (otvorenih) skupova jest sam prostor (prazan skup v)

Odatle

(27.5.1.4) $$\bigcap_F \overline{F} \supseteq \overline{E}, \quad (F \in H).$$

Iz (27.5.1.3) i (27.5.1.4) izlazi tražena veza $\overline{E} \subseteq E$.

Time je teorem 27.5.1.1 dokazan za zatvorene skupove.

Preostali dio teorema kaže ovo: ako je K bilo kakva nepusta porodica *otvorenih* skupova G, spoj

(27.5.1.5) $$\bigcup_G G, \quad (G \in K)$$

je otvoren skup.

No, ako je G otvoren, onda to znači da je CG zatvoren; zato je, prema prethodnom slučaju, zatvoren i presjek

$$\bigcap_G CG, \quad (G \in K)$$

t. j. njegov komplement

(27.5.1.6) $$C(\bigcap_G CG), \quad (G \in K)$$

je otvoren. Međutim, komplement presjeka je udruženje komplemenata pojedinih faktora (v. § 2.5.1.1) pa je zato skup (27.5.1.6) identičan sa skupom (27.5.1.5).

Time je teorem 27.5.1.1 potpuno dokazan.

T e o r e m 27.5.1.2. *Presjek zatvorenih skupova sadrži svoj izvod E'.*

To izlazi iz relacije $E' \subseteq \overline{E}$ (v. teorem 27.2.1) i netom dokazane relacije $\overline{E} \subseteq E$.

T e o r e m 27.5.1.3. *Ako je u okolinskom prostoru prostornost distributivna t. j. ako je identički*

$$\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y},$$

tada je unija (presjek) od konačno mnogo zatvorenih (otvorenih) skupova opet zatvoren (otvoren) skup.

Stvarno, neka su F_1, F_2 dva zatvorena skupa; tada je

$\overline{F_1 \cup F_2} =$ (po pretpostavljenoj distributivnosti prostornosti) $=$

$= \overline{F_1} \cup \overline{F_2} \subseteq$ (zbog zatvorenosti skupova F_1, F_2) $\subseteq F_1 \cup F_2$ t. j.

$$\overline{F_1 \cup F_2} \subset F_1 \cup F_2,$$

što znači, da je unija od dva zatvorena skupa vazda zatvoren skup. Totalnom indukcijom, dokazuje se na osnovu toga, da je unija od konačno mnogo zatvorenih skupova opet zatvoren skup.

Prelazeći na komplemente, izlazi odatle, da je presjek od konačno mnogo otvorenih skupova vazda otvoren skup.

Da presjek od *beskonačnó* mnogo otvorenih skupova ne mora biti otvoren, proizlazi iz činjenice da je na pr. očigledno

$$[0, 1]_c = \bigcap_n \left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)_c, \quad (n \in N) \tag{27.5.1.7}$$

t. j. da je zatvoren skup $[0, 1]_c$ presjek od prebrojivo mnogo otvorenih skupova $\left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)_c$.

Definicija 27.5.1.1. Za neku množinu $M \supset v$ iz razdaljinskog prostora i za neki realan broj $r > 0$ stavimo

$$K(M; r) = \bigcup_m K(m; r), \quad (m \in M). \tag{27.5.1.8}$$

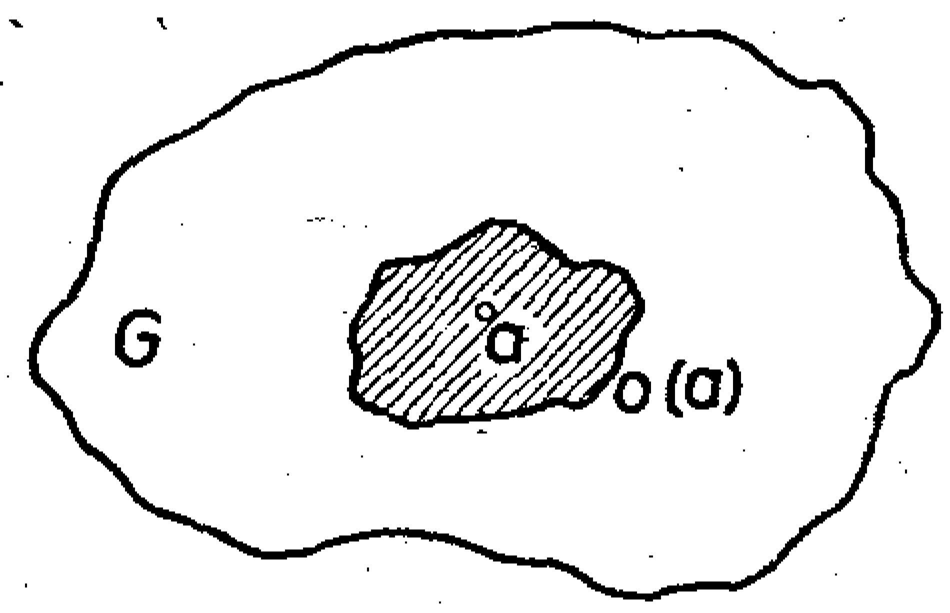
Taj se skup zove *otvorena kugla kojoj je skup M središte*, a broj r radius. Vidi se da je $K(M; r)$ otvoren skup za svaki $M \supset v$ i svaki $r > 0$; također se vidi da je

$$\bigcap_{n \in N} K\left(M; \frac{1}{n}\right) = \overline{M}.$$

Ako je M zatvoren, bit će $\overline{M} = M$, pa gornja formula daje

Teorem 27.5.1.4. *U razdaljinskim prostorima svaki zatvoreni skup jest presjek od prebrojivo mnogo otvorenih skupova; kraće: svaki F jest* G_δ; *i dualno, svaki G jest* F_σ *t. j. svaki otvoreni skup jest unija od prebrojivo mnogo zatvorenih skupova.*

§ 27.5.2. **Karakteristično svojstvo otvorenih skupova.** Navedimo vrlo dragocjeno svojstvo skupova G, koje odgovara elementarnom svojstvu da se oko svake točke unutar kugle može opisati kuglica koja je sva sadržana u kugli.



Sl. 27.5.2.1
Iz $a \in G$ slijedi da postoji okolina $o(a)$ uronjena u G.

Teorem 27.5.2.1. *Da pun skup G bude otvoren, treba, a i dosta je, da svakoj točki a iz toga skupa G pripada bar jedna okolina* $o(a)$ *koja čitava leži u tom skupu G:*

iz $\{a\} \subseteq G$ slijedi $o(a) \subset G$.

Nužnost: Ako je G otvoren, onda iz $a \in G$ slijedi, da postoji $o(a)$, tako da bude $o(a) \subseteq G$. U obrnutom slučaju, postojala bi točka $a \in G$ tako da je

$$o(a) \setminus G \supset v \quad \text{za svaki} \quad o(a). \tag{27.5.2.1}$$

Promatrajmo uniju (spoj) E svih skupova (27.5.2.1). Naravno, E i G su disjunktni dakle

$$E \subseteq C(G).$$

a prema aksiomu izotonije slijedilo bi odatle:

$$\bar{E} \subseteq \overline{C(G)}; \tag{27.5.2.2}$$

no $C(G)$ je, kao komplement otvorena skupa G, zatvoren, dakle je

$$\overline{C(G)} \subseteq C(G)$$

što u vezi sa (27.5.2.2) daje

$$\bar{E} \subseteq C(G). \tag{27.5.2.3}$$

Međutim, prema (27.5.2.1), ima svaka okolina $o(a)$ pun presjek sa E, što znači, da je $a \in \bar{E}$, pa prema (27.5.2.3) i $a \in C(G)$, protivno pretpostavci da je $a \in G$. Dakle je hipoteza (27.5.2.1) neispravna, što znači da postoji $o(a) \subseteq G$.

Uslov je dovoljan: Ako za svaki $a \in G$ postoji $o(a) \subseteq G$, onda je G otvoren t. j. $C(G)$ je zatvoren. No, kad $C(G)$ ne bi bio zatvoren, postojao bi bar jedan element

$$b \in \overline{C(G)} \setminus C(G); \text{ svakako bi tada bilo } b \in G,$$

pa bi prema hipotezi postojala okolina $o(b) \subseteq G$; međutim kako je $b \in \overline{C(G)}$, morala bi i ta okolina $o(b)$ — kao i svaka druga — sadržavati bar jedan element iz $C(G)$, što je u protivnosti sa činjenicom $o(b) \subset G$.

Time je teorem 27.5.2.1 dokazan.

Teorem 27.5.2.2. *Svaki otvoreni skup G okolina je svake svoje točke t. j.*

$$G \subseteq \operatorname{int} G. \tag{27.5.2.4}$$

Stvarno, prema prethodnom teoremu, za svaki $a \in G$ postoji izvjesna okolina $o(a) \subseteq G$; odatle, po izotoniji traženja nutrine (v. teorem 27.1.1) izlazi:

$$\operatorname{int}(o(a)) \subseteq \operatorname{int} G. \tag{27.5.2.5}$$

No, po definiciji okoline, u skupu $\operatorname{int} o(a)$ sadržana je i točka a, što zbog (27.5.2.5) znači da je $a \in \operatorname{int} G$. Time odmah izlazi i traženi odnos (27.5.2.4).

Drugi dokaz relacije (27.5.2.4): Kako je $C(G)$ zatvoren, bit će

$$\overline{C(G)} \subseteq C(G),$$

odatle prelazeći na komplemente:

$$C\,\overline{C(G)} \supseteq C(C(G)) = G,$$

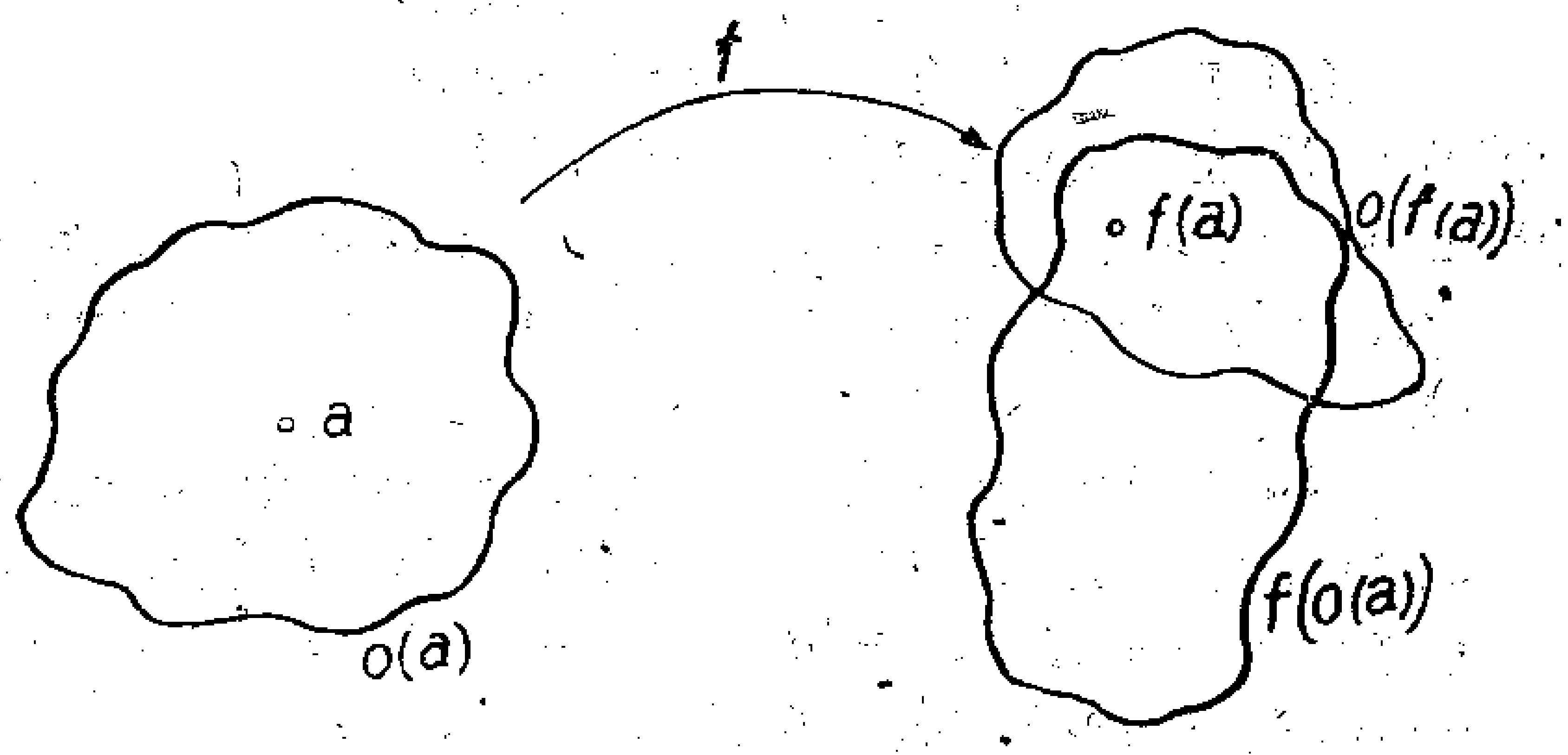
a to i jest tražena relacija (27.5.2.4).

§ 27.6. **Neprekidna preslikavanja.** U okolinskim prostorima može se neprekidnost preslikavanja izraziti na naročito očigledan način.

§ 27.6.1. **Karakteristično svojstvo neprekidnih preslikavanja.**

Teorem 27.6.1.1. *Da jednoznačno preslikavanje f prostora X u prostor Y bude u točki $a \in X$ neprekidno, nužno je i dovoljno, da za svaku okolinu $o(f(a))$ slike $f(a)$ postoji izvjesna okolina $o(a)$ originalne točke a, tako da njen preobražaj $f(o(a))$ padne u zadanu okolinu $o(f(a))$* t. j. da bude

(27.6.1.1) $$f(o(a)) \subseteq o(f(a)).$$



Sl. 27.6.1.1.
Ako je f neprekidno preslikavanje u a, tada položaj na slici nije moguć za svaki $o(a)$.

Uslov je nuždan. Stvarno, neka je $o(f(a))$ proizvoljna okolina točke $f(a)$. Kad tvrdnja nebi bila istinita, tada bi za *svaku* okolinu $o(a)$ bilo

(27.6.1.2) $$f(o(a)) \setminus o(f(a)) \supset v.$$

Označimo sa E uniju (spoj) svih skupova (27.6.1.2); tad je $f^{-1}(E)$ skup svih točaka od kojih se svaka funkcijom f prevodi u jednu točku skupova (27.6.1.2), pa je zbog pretpostavke (27.6.1.2):

(27.6.1.3) $$o(a) \cap f^{-1}(E) \supset v$$

za svaku okolinu $o(a)$.

No prema teoremu 27.4.1.1, značila bi identiteta (27.6.1.3), da je $a \in \overline{f^{-1}(E)}$, odakle, zbog pretpostavljene neprekidnosti preslikavanja f u točki a, izlazi:

$$f(a) \in \overline{f(f^{-1}(E)} = \overline{E} \quad \text{t. j.} \quad f(a) \in \overline{E}.$$

To bi prema drugoj polovini istog teorema 27.4.1.1 značilo, da svaka okolina, pa dakle i ona gore izabrana $o(f(a))$, ima sa E pun presjek; a međutim je očigledno $o(f(a))$ disjunktan skup sa skupom E; dakle je pretpostavka (27.6.1.2) neispravna, pa važi (27.6.1.1).

Uslov je dovoljan: Ako za svaku okolinu $o(f(a))$ postoji $o(a)$ koju f prevodi u $o(f(a))$, treba dokazati da je f neprekidna u a t. j. da iz $a \in \overline{S}$ slijedi $f(a) \in \overline{f(S)}$. No, $a \in \overline{S}$ znači da je

$$o(a) \cap S \supset v \quad \text{dakle}$$
$$f(o(a) \cap S) \supset v \quad \text{t. j.}$$

(27.6.1.4) $\qquad f(o(a)) \cap f(S) \supset v$ za svaki $o(a)$.

Međutim, treba dokazati da $f(a) \in \overline{f(S)}$ t. j, da je

(27.6.1.5) $\qquad o(f(a)) \cap f(S) \supset v$.

No, taj $o(f(a))$ sadrži, po uslovima teorema, izvjestan $f(o(a))$, pa prema (27.6.1.4) odmah zaključujemo, da važi (27.6.1.5).

Time je teorem 27.6.1.1 potpuno dokazan.

Korolar 27.6.1.1. *Da jednoznačno preslikavanje Kartezijeva (metričkog) prostora X u Kartezijev (metrički) prostor Y bude u točki* $a \in X$ *neprekidno, nužno je i dovoljno, da svakoj kuglici* $K(f(a))$ *oko* $f(a)$ *pripada izvjesna kuglica oko a koja se preslikava čitava u tu kuglicu* $K(f(a))$.

Korolar 27.6.1.2. *Da realna funkcija s realnim argumentom bude u točki a neprekidna, nužno je i dovoljno da svakom realnom broju* $\eta > 0$ *(njegova je uloga da odredi interval dužine* 2η *kojemu je broj* $f(a)$ *sredina) pripada realan broj* $\delta > 0$, *tako da iz* $|x-a| < \delta$ *slijedi* $|f(x) - f(a)| < \eta$.

Tu se vidi koliko je geometrijski odnosno skupovno-teorijski način izražavanja jednostavniji od aritmetičkog pomoću nejednakosti. (V. sliku 27.6.1.2).

§ 27.6.2. **Neprekidna preslikavanja i otvoreni skupovi.**

Teorem 27.6.2.1. *Ako je f ma kakvo jednoznačno neprekidno preslikavanje okolinskog prostora X, tada je za ma koji otvoreni skup G prostora* $f(X)$ *prauzorak* $f^{-1}(G)$ *otvoren. Ako se prostor* $f(X)$ *može definirati jednim sistemom otvorenih okolina koje sadrže točke kojima one služe kao okoline* [1]*, tada važi i obrnut zaključak: ako je jednoznačno preslikavanje f takovo da iz* $G \subseteq f(X)$ *slijedi da je i prauzorak* $f^{-1}(G)$ *otvoren, onda je f neprekidna transformacija.*

Radi se o tome da dokažemo, da je za svaki $G \subseteq f(X)$ i skup $f^{-1}(G)$ otvoren; prema teoremu 27.5.2.1, dovoljno je da pokažemo, da svakom

(27.6.2.1) $\qquad a \in f^{-1}(G)$

pripada bar jedna okolina $o(a)$ sadržana u $f^{-1}(G)$:

(27.6.2.2) $\qquad o(a) \subseteq f^{-1}(G)$.

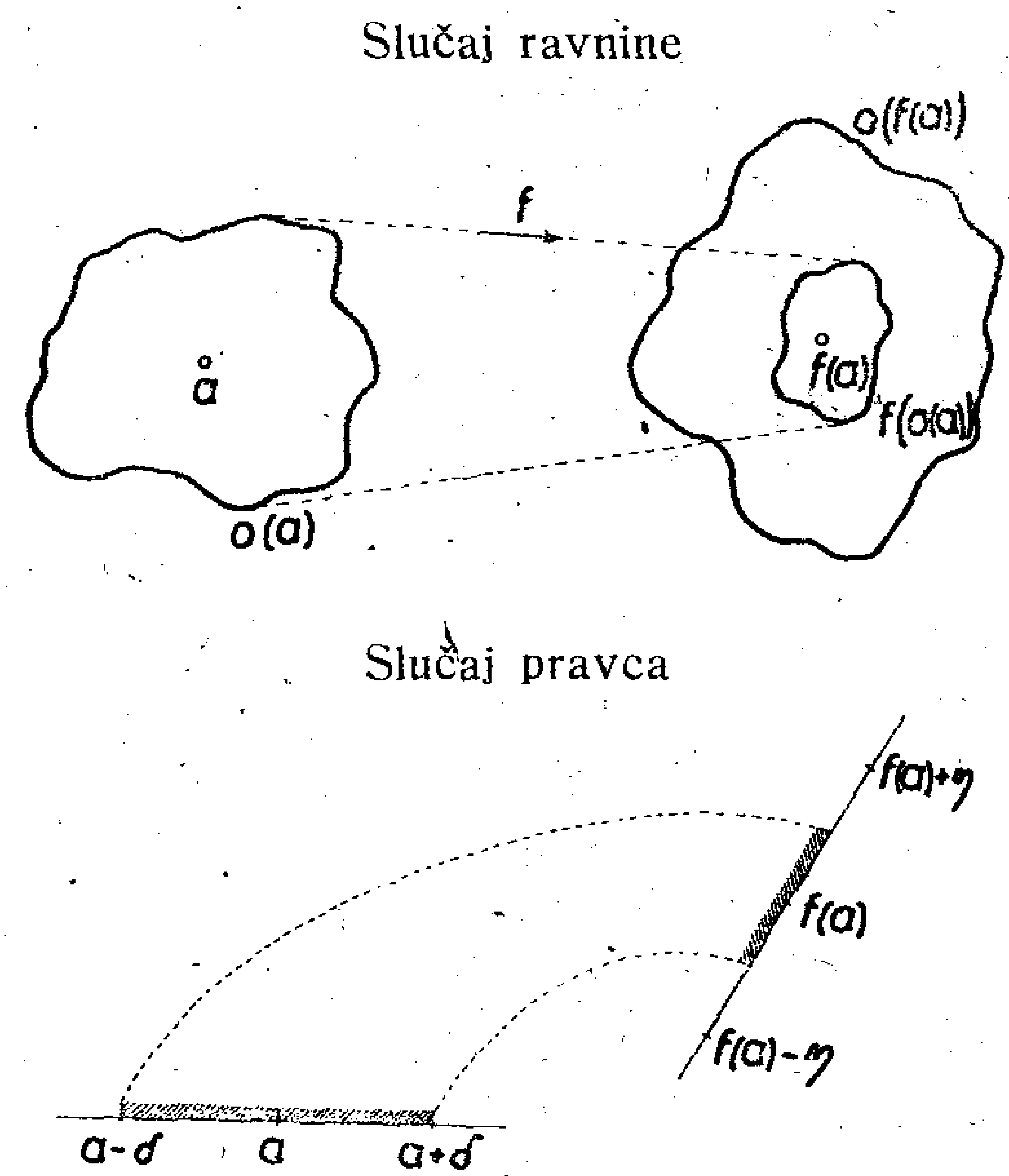
[1]) Taj uslov je vrlo općenit; prema teoremu 27.5.2.1 bit će on ispunjen onda i samo onda, ako se prostor $f(X)$ može definirati i takovim sistemom okolina koje sadrže pridružene im točke i k tome imaju svojstvo, da čim neka okolina obuhvata neku točku obuhvata ona i bar jednu čitavu okolinu te točke.

Taj je uslov ispunjen za sve posve uređene prostore, za Kartezijeve prostore, razdaljinske prostore, Hausdorffove prostore i t. d. Na taj način, teorem 27.6.2.1 pokazuje karakteristično svojstvo neprekidnih transformacija između prostora dosta općenite naravi.

No, iz (27.6.2.1) izlazi $f(a) \in G$; prema nužnom uslovu teorema (27.5.2.1) to znači, da postoji okolina $o(f(a)) \subseteq G$. No, funkcija f je u točki a neprekidna. Zato, prema nužnom dijelu teorema 27.6.1.1 postoji okolina $o(a)$ koja se prevodi u $o(f(a))$ t. j. da skup $f(o(a))$ bude u $o(f(a))$, a time i u G t. j.

$$f(o(a)) \subseteq G;$$

odatle primjenom operatora f^{-1} izlazi tražena relacija (27.6.2.2), a time i to da je skup $f^{-1}(G)$ otvoren



Sl. 27.6.1.2

Neprekidno preslikavanje f prevodi u svaku okolinu $of(a)$ točke $f(a)$ bar jednu čitavu okolinu $O(a)$ točke a.

Dokažimo i obrat (uz gornje uslove): *ako je za svaki otvoreni skup G prostora $f(X)$ skup $f^{-1}G$ otvoren, onda, uz gornje uslove o prostoru fX transformacija f je neprekidna.* Treba dokazati, da je preslikavanje f neprekidno u svakoj točki a; za to je prema teoremu 27.6.1.1 dovoljno pokazati, da svakom $o(f(a))$ pripada okolina $o(a)$ sa svojstvom

(27.6.2.3) $$f(o(a)) \subseteq o(f(a)).$$

No prema pretpostavci možemo u prostoru $f(X)$ uzeti, da je okolina $o(f(a))$ otvorena i da sadrži točku a. Prema pretpostavci o funkciji f, to znači, da je otvoren i prauzorak

(27.6.2.4) $$f^{-1}(o(f(a))) \text{ skupa } o(f(a));$$

kako je $f(a) \subseteq o(f(a))$ to znači, da a leži u (27.6.2.4); a kako je taj skup otvoren, postoji (prema teoremu 27.5.2.1) okolina $o(a)$ od a koja leži u skupu (27.6.2.4):

$$o(a) \subseteq f^{-1}(o(f(a))),$$

odakle primjenom operatora f izlazi i sama tražena relacija (27.6.2.3).

Time je teorem 27.6.2.1 potpuno dokazan.

Korolar 27.6.2.1. *Da jednoznačno preslikavanje f okolinskog prostora u Kartezijev (razdaljinski, Hausdorffov) prostor bude neprekidno, nužno je i dovoljno da prauzorak $f^{-1}(G)$ svakog otvorenog skupa bude otvoren.*

Primjedba 27.6.2.1. Prelazeći na komplemente, odmah se uviđa, da se u gornjem teoremu i korolaru može mjesto otvorenih skupova G poći i od zatvorenih skupova F. Prema svemu tome, za dosta općenite vrste prostora, svojstvo množine da je zatvorena (otvorena) uščuvava se pri preslikavanjima koja su *obrnuta (inverzna) od neprekidnih jednoznačnih transformacija.* Naprotiv, neprekidna slika zatvorena (otvorena) skupa ne mora biti zatvorena (otvorena) množina.

§ 27.7. O identiteti $\overline{X} = X \cup X'$.

Teorem 27.7.1. *Za okolinski prostor slijedeći uslovi međusobno su ravnopravni:*

1. *Prostornost svakog skupa obuhvata taj skup (svaka točka skupa u dodiru je s tim skupom):*

   (27.7.1) $$X \subseteq \overline{X};$$

2. *Prostornost je unija skupa i njegova izvoda:*

   (27.7.2) $$\overline{X} = X \cup X';$$

3. *Svaki skup obuhvata svoju nutrinu,*

   (27.7.3) $$S \supseteq int\, S;$$

4. *Svaka okolina svake točke obuhvata tu točku:*

   (27.7.4) $$a \in o(a)$$

   za svaku točku a i svaku okolinu $o(a)$ od a.

Teorem ćemo dokazati da se uvjerimo da je ispravan ovaj lanac zaključaka:

(27.7.5) $$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1.$$

1 → 2. (t. j. iz hipoteze 1 izlazi hipoteza 2). To je neposredna posljedica identične relacije $X' \subseteq \overline{X} \subseteq X \cup X'$ (vidi teorem (27.2.1)).

2 → 3. Specijalno, po hipotezi, imamo

$$\overline{CX} \supseteq CX$$

odakle $C\,\overline{CX} \subseteq C(CX) = X$ t. j. $int\, X \subseteq X$.

3 → 4. Po definiciji, svaka okolina $o(a)$ svake točke a zadovoljava relaciju $(a) \subseteq int\, o(a)$; no kako je po hipotezi 3, $int\, o(a) \subseteq \subseteq o(a)$, to znači, da je $(a) \subseteq o(a)$, što i tvrdimo izrekom 4.

4 → 1. Ako je $a \in X$, onda za svaku okolinu $o(a)$ od a imamo (prema 4) $a \in o(a)$, što znači da je

$$o(a) \cap X \supset v$$

za svaku okolinu $o(a)$ točke a a to, po teoremu 27:4.1.1 znači da je $a \in \overline{X}$, a time i $X \subseteq \overline{X}$.

Kako za posve uređene razdaljinske i polurazdaljinske prostore okolina svake točke obuhvata tu točku, to gornji teorem daje

Korolar 27.7.1. *U polurazdaljinskim i uređenim prostorima važi*

$$\overline{X} = X \cup X' \quad \text{\textit{za svaki skup} } X.$$

§ 27.8. **O identiteti $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (distributivnost prostornosti).**

Teorem 27.8.1. *Ako okolinski prostor ima svojstvo, da svaki njegov skup obuhvata svoju nutrinu, onda su u tom prostoru slijedeći uslovi međusobno ravnopravni:*

1. *Izvod unije dvaju skupova jest unija izvoda tih skupova:*

(27.8.1) $$(A \cup B)' = A' \cup B'$$

(distributivnost izvoda s obzirom na $\cup$).

2. *Prostornost unije dvaju skupova jest unija prostornosti tih skupova:*

(27.8.2) $$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

(prostornost je distributivna prema binarnom operatoru $\cup$).

3. *Nutrina presjeka dvaju skupova jest presjek nutrina tih dvaju skupova*

(27.8.3) $$int\,(A \cap B) = int\, A \cap int\, B$$

(distributivnost nutrine prema $\cap$).

4. Hausdorffov uslov: *Presjek ma kojih dviju okolina ma koje točke obuhvata bar jednu okolinu te točke: za svaku točku a i svake njene dvije okoline $o_1(a)$, $o_2(a)$, postoji bar jedna okolina $o_3(a)$ tako da bude:*

(27.8.4) $$o_1(a) \cap o_2(a) \supseteq o_3(a).$$

Dokazat ćemo da važi ovaj zatvoren lanac zaključaka:

(27.8.5) $$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1.$$

Pritom imajmo na umu da važe obrasci (27.7.1)—(27.7.4)

Dokažimo najprije da iz hipoteze **1** slijedi **2**.

$\overline{A \cup B} =$ (po obrascu 27.7.2) $= (A \cup B) \cup (A \cup B)' =$ (po hipotezi **1**) $=$
$= (A \cup B) \cup (A' \cup B') = (A \cup A') \cup (B \cup B') =$ (po obrascu 27.7.2) $=$
$= \bar{A} \cup \bar{B}$. Time je obrazac (27.8.2) dokazan.

2 $\to$ **3**. Stvarno,

$$int(A \cap B) = \text{(po obrascu (26.2.5)} = C\overline{C(A \cap B)} =$$
$$= C\overline{CA \cup CB} = \text{(po obrascu 27.8.2)} = C(\overline{CA} \cup \overline{CB}) =$$
$$= C\overline{CA} \cap C\overline{CB} = int\, A \cap int\, B.$$

3 $\to$ **4**. Neka je a ma koja točka, a $o_1(a)$ i $o_2(a)$ ma koje dvije njene okoline; to znači da je

$$(a) \subseteq int\, o_1(a),\ (a) \subseteq int\, o_2(a)$$

$$\text{t. j.} \quad (a) \subseteq int\, o_1(a) \cap int\, o_2(a)$$

što prema obrascu (27.8.3) znači, da je

$$(a) \subseteq int(o_1(a) \cap o_2(a)) \quad \text{t. j. da je} \quad o_1(a) \cap o_2(a)$$

jedna okolina od a; kako je ona sadržana i u $o_1(a)$ i u $o_2(a)$, time je dokazana hipoteza **4**.

4 $\to$ **1** t. j. dokažimo, da iz uslova **4** proizlazi uslov **1**; kako je (v. obrazac (27.1.1)) $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$, dovoljno je pokazati, da iz **4** slijedi

$$(A \cup B)' \subseteq A' \cup B' \quad \text{t. j. da}$$

$$\text{iz} \quad a \in (A \cup B)' \quad \text{slijedi} \quad a \in A' \cup B'.$$

Naravno da možemo pretpostaviti, da a nije element od $v' = \bar{v}$, jer je $\bar{v} = v'$ sadržan i u A' i u B'.

Kad naprotiv ne bi bilo $a \in A' \cup B'$, ne bi bilo niti $a \in A'$ niti $a \in B'$, što znači da bi postojala okolina $o_1(a)$ od a disjunktna sa $A \setminus (a)$ i jedna okolina $o_2(a)$ disjunktna sa $B \setminus (a)$; no po hipotezi **4** postojala bi okolina $o(a)$ od a koja leži i u $o_1(a)$ i u $o_2(a)$, pa bi zato ona bila disjunktna i sa $A \setminus (a)$ i sa $B \setminus (a)$ dakle i sa $(A \cup B) \setminus (a)$, pa ne bi bilo $a \in \overline{(A \cup B) \setminus (a)}$ dakle niti $a \in (A \cup B)'$, protivno pretpostavci.

Time je lanac zaključaka (27.8.5) zatvoren i teorem pokazan.

§ 27.9. **O jednakosti** $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.

Teorem 27.9.1. *Ako u okolinskom prostoru skupovi zadovoljavaju identitetu*

(27.9.1) $$\overline{X} = X \cup X',$$

tada su slijedeći uslovi međusobno dva po dva ekvivalentni:

1°. *Prostornost puna skupa je zatvoren skup:*

(27.9.2) iz $X \supset v$ *slijedi* $\overline{\overline{X}} \subseteq \overline{X}$;

2°. *Prostornost skupa X sadrži izvod skupa* $\overline{X}$ t. j.

(27.9.3) $$\overline{X} \supseteq (X \cup X')';$$

3°. *Nutrina skupa je otvoren skup* (prazan skup v je otvoren!);

4°. *Prostornost punih skupova može se definirati* **otvorenim** *okolinama*

Teorem će biti dokazan ovim nizom zaključaka:

(27.9.4) $$1^0 \rightleftarrows 2^0 \to 3^0 \to 4^0 \to 1.$$

Najprije, $1^0 \to 2^0$. Stvarno, $\overline{X} \supseteq \overline{\overline{X}} =$ (prema (27.9.1)) $= \overline{X \cup X'} =$ = (prema (27.9.1) $= (X \cup X') \cup (X \cup X')'$ dakle

$$\overline{X} \supseteq \overline{X} \cup \overline{X}',$$

odakle neposredno izlazi hipoteza 2^0.

$2^0 \to 1^0$. $\overline{\overline{X}} = \overline{X \cup X'} = (X \cup X') \cup (X \cup X')' = \overline{X} \cup (X \cup X')' =$ (na osnovu (27.9.3)) $= \overline{X}$, dakle uistinu iz 2^0 izlazi 1^0.

$1^0 \to 3^0$. Treba dokazati, da je $int\, X$ otvoren skup; prema teoremu 27.4.2.1 dovoljno je pokazati da iz $a \in int\, X$ slijedi egzistencija bar jedne okoline $o(a)$ sa svojstvom $o(a) \subseteq int\, X$.
U obrnutom slučaju, za svaku okolinu $o(a)$ bilo bi

$$o(a) \cap C(int\, X) \supset v,$$

što bi prema teoremu 27.4.1.1 značilo, da je $a \in \overline{C\, int\, X} =$ = (radi $int\, X = C\,\overline{CX}) = \overline{\overline{CX}} =$ (radi 1^0) $\subset \overline{CX}$ t. j.

$$a \in \overline{CX} \text{ pa nije } a \in C\,\overline{C(X)} = int\, X,$$

protivno pretpostavci $a \in int\, X$.

$3^0 \to 4^0$. Taj je zaključak očigledan.

$4^0 \to 1^0$. Radi se o tome, da se pokaže, da

$$\text{iz } a \in \overline{\overline{X}} \text{ slijedi } a \in \overline{X}.$$

No, $a \in \overline{\overline{X}}$ znači, da je za svaku okolinu $o(a)$:

$$o(a) \cap \overline{X} \supset v;$$

ako je tada

$$b \in o(a) \cap \overline{X}$$

proizvoljan element, tada po hipotezi 4^0 i karakterističnom svojstvu o otvorenim skupovima (27.4.2.1), postoji okolina $o(b) \subseteq o(a)$; no

$$b \in \overline{X},\ X \supset v,$$

pa je, prema teoremu 27.4.1.1:

$$o(b) \cap X \supset v, \quad \text{a time pogotovo}$$

$$o(a) \cap X \supset v,$$

što po tome teoremu znači da je $a \in \overline{X}$.

Time su zaključci lanca (27.9.4) potpuno dokazani.

Kao što se iz hipoteze 4^0 na osnovu $\overline{X} = X \cup X'$ izvodi hipoteza 1^0, tako se dokazuje i ovaj

T e o r e m 27.9.2. *Ako se prostornost u okolinskom prostoru može definirati pomoću otvorenih okolina koje sadrže točke kojima su one okoline, onda je za svaki pun skup* X,

$$X'' \subset X'.$$

Stvarno, time što $o(a) \ni a$ postižemo (v. teorem 27.7.1), da je $\overline{X} = X \cup X'$ pa dokaz dalje teče kao maloprije kod zaključka $4^0 \to 1^0$.

K o r o l a r 27.9.1. Za skupove X u potpuno uređenim (metričkim) prostorima važi:

$$\overline{\overline{X}} = \overline{X},\ X'' \subset X'.$$

K o r o l a r 27.9.2. *Ako je za skup* X *iz metričkog prostora skup* $\overline{X}$ *u sebi gust, on je i savršen (perfektan).*

§ 27.10. Topološki prostori ili prostori Kuratowskoga.

§ 27.10.1. **Aksiomi K_1—K_4 Kuratowskoga.** Topološki prostori ili prostori Kuratowskoga jesu oni prostori koji zadovoljavaju 4 slijedeća aksioma K u r a t o w s k o g a:

K_1 *Prostornost je distributivna*; za svaka dva skupa X i Y vrijedi:

$$\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y};$$

K_2 Svaki se skup dodiruje svakog svojeg elementa:

$$X \subset \overline{X};$$

K_3

$$\overline{\overline{X}} \subset \overline{X};$$

K_4 $\overline{v} = v$ (prostornost pusta skupa jest pust skup).

Iz aksioma K_1 neposredno izlazi da iz $A \subset B$ slijedi $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. Iz $A \subset B$ slijedi naime:

$$B = A \cup (B \setminus A)$$

odakle primjenom aksioma K_1:

$$\overline{B} = \overline{A} \cup \overline{B \setminus A} \supseteq \overline{A} \quad \text{t. j.} \quad \overline{A} \subseteq \overline{B}.$$

Na osnovu toga kao i obzirom na aksiom K_2 slijedi identiteta:

$$\overline{X} = X \cup X' \quad \text{(v. teorem 27.7.1).}$$

Iz aksioma K_3 i K_4 na osnovu teorema 27.9.1 izlazi:

Teorem 27.10.1.1. *Svaki prostor Kuratowskoga može se definirati pomoću otvorenih okolina, i svaka točka leži u svakoj svojoj okolini; presjek kojih god dviju okolina jedne te iste (inače ma koje) točke opet je okolina te točke.*

Teorem 27.10.1.2. *Ako je x koja god točka topološkog prostora Kuratowskoga, tad skup svih okolina točke x čini određen filtar*[1]) *u tom prostoru. Koja god baza toga filtra jest baza okolina točke x.*

Teorem 27.10.1.3. *Presjek od konačno mnogo otvorenih skupova opet je otvoren skup.*

§ 27.10.2. **Definicija topoloških prostora pomoću otvorenih skupova.**

Teorem 27.10.2.1. *Ako je G kakva god obitelj skupova sa svojstvom da je unija od svakog dijela obitelji G određen element obitelji G, nadalje da je presjek od $< \aleph_0$ članova obitelji G opet član obitelji G,*[2]) *onda smatrajući svaki član skupa G okolinom svake svoje točke, skup $S = \bigcup_x x, (x \in G)$ postaje topološkim prostorom, kojemu se obitelj otvorenih skupova poklapa sa obitelji G.*

Zadovoljimo se da dokažemo, da označujući za svak $A \subset S$ sa $\overline{A}$ skup svih točaka x iz S tako da iz relacija

$$x \in V \in G \quad \text{slijedi} \quad V \cap A \supset v$$

tako dobiveni prostor $(S; \overline{})$ zadovoljava aksiomima K_1—K_4 Kuratowskoga. Najprije je očigledno ispunjen uslov izotonije:

$$\text{iz} \quad A \subseteq B \subseteq S \quad \text{slijedi} \quad \overline{A} \subseteq \overline{B} \subset \overline{S} = S. \text{ Dakle je}$$

$$\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Kad tu ne bi važio znak $=$, postojala bi točka x koja se dodiruje skupa $A \cup B$, a ne dodiruje se niti skupa A niti skupa B, što znači, da bi postojali

$$o_1(x) \in G\,^{3)} \quad \text{i} \quad o_2(x) \in G,$$

tako da bude

$$o_1(x) \cap A = v. \; o_2(x) \cap B = v$$

odakle

$$(o_1(x) \cap o_2(x)) \cap (A \cup B) = v$$

[1]) Vidi § 27.12.

[2]) Držimo se konvencije: unija (presjek) prazne obitelji iz G jest v (sam skup odn. prostor iz kojeg su izvađeni skupovi iz G).

[3]) Općenito sa $o(x)$ označujemo bilo koji $V \in G$ sa svojstvom $x \in V$.

što je nemoguće, jer, po uslovima teorema, skup $o_1(x) \cap o_2(x)$ je član u G i k tome sadrži x, pa kao okolina točke x morao bi zbog $x \in \overline{A \cup B}$ sadržavati točaka iz $A \cup B$.

Aksiom K_2 izlazi neposredno iz dokazanog uslova izotonije te iz činjenice, da za svaki $x \in S$ vrijedi $\{x\} \subseteq \overline{\{x\}}$, jer x leži u svakoj svojoj okolini.

Dokažimo aksiom K_3 koji tvrdi da iz $x \in \overline{\overline{A}}$ slijedi $x \in \overline{A}$. No $x \in \overline{\overline{A}}$ znači, da je identički

$$o(x) \cap \overline{A} \supset v.$$

Neka je dakle

$$a \in o(x) \cap \overline{A},$$

dakle specijalno $a \in \overline{A}$ što znači da je

$$o(a) \cap A \supset v.$$

No presjek $o(x) \cap o(a)$ sadrži točku a, a k tome kao presjek dvaju članova obitelji G i sam je njen član. Znači da zbog $a \in \overline{A}$ mora biti

$$(o(x) \cap o(a)) \cap A \supset v$$

pa tim prije

$$o(x) \cap A \supset v \text{ dakle } x \in \overline{A},$$

za čim smo i išli.

Aksiom K_4 je očigledan: ne može biti $x \in \overline{v}$, jer bi to značilo da je $o(x) \cap v \supset v$.

Teorem 27.10.2.2 *Ako je S zadan skup, a f jednoznačno preslikavanje skupa S; ako je k tome $(fS; -)$ izvjestan topološki prostor Kuratowskoga, tada je potpuno određen prostor $(S; -)$ zahtjevom da f bude neprekidno preslikavanje toga prostora na zadani prostor $(fS; -)$.*

Stvarno, promatramo li obitelj G svih otvorenih skupova prostora $(fS; -)$, tada je potpuno određena obitelj $f^{-1}G$ svih recipročnih slika članova obitelji G; vidi se, da obitelj $f^{-1}G$ zadovoljava uslovima teorema 27.10.2.1, pa je prema istom teoremu i jednoznačno određena topologija odnosno prostor S. Može se reći da je ta topologija suprem ili unija svih topologija nad skupom S u kojima je preslikavanje f neprekidno.

§ 27.10.3 **Topološki prostor $(S; -)$ proizveden zadanom obitelji o skupova iz S.**

Promatrajmo obitelj o_1 svih konačnih presjeka članova iz o; specijalno, presjek praznog dijela od o ima da bude sam skup S; naravno $o \subset o_1$; promatrajmo nadalje obitelj o_2 unijâ od bilo kojih dijelova obitelji o_1: specijalno, unija od praznog dijela obitelji o_2 ima da bude prazan skup v. Naravno da je $o_1 \subset o_2$ dakle

$$o \subseteq o_1 \subseteq o_2.$$

Lako se vidi da obitelj o_2 ima ova dva svojstva:

I. Unija od svakog dijela obitelji o_2 jest element u o_2 (svojstvo je očigledno na osnovu zakona asocijacije za $\cup$);

II. Presjek svakog konačnog ili praznog dijela obitelji o_2 jest element u o_2 (svojstvo izlazi iz zakona distribucije operatora $\cap$ prema operatoru $\cup$).

Topološki prostor Kuratowskoga $(S; —)$ proizveden na način, da se elementi o_2 shvataju okolinama svojih točaka potpuno je određen pomoću skupa S i obitelji o njegovih dijelova; može se reći, da je topologija toga prostora suprem svih topologija nad skupom S, u kojima su elementi obitelji o otvoreni skupovi.

Način obrazovanja prostora $(S; —)$ pomoću obitelji o vrlo je važan. Odmah ćemo se o tome uvjeriti promatrajući kombinirane produkte prostora. Promatrajmo obitelj topoloških prostora

$$(S(x), —), \quad (x \in M)$$

i skup

$$S = \prod_x S(x), \quad (x \in M)$$

svih jednoznačnih preslikavanja f skupa M tako da bude $f(x) \in S(x)$, $(x \in M)$. Promatrajmo *projekciju* produkta na prostor $((S x); —)$ t. j. preslikavanje p_x skupa S koje svakom elementu $f \in S$ pridijeljuje točku x prostora $S(x)$ dakle identički

$$p_x(f) = x, \quad (f \in S).$$

Obrnutim preslikavanjem p^{-1} prelazi obitelj $G(x)$ svih otvorenih skupova prostora $(S(x); —)$ u određenu obitelj $p_x^{-1} G(x)$ skupova iz S. Na taj način dobije se potpuno određena obitelj

$$O = \bigcup_x p_x^{-1} G(x), \quad (x \in M)$$

skupova $\subseteq S$; time je prema prethodnom određena i obitelj O_1 svih presjeka od $< \aleph_0$ njenih članova [1]) kao i sve unije tih presjeka, a time i topologija na kombiniranom produktu. Dobivena topologija je takova da su sva gornja projiciranja p_x neprekidne transformacije; ta je topologija ujedno suprem svih topologija skupa S koje zadovoljavaju tome uslovu kontinuiteta.

§ 27.11. **Problem odjeljivanja (separacije).** [2]) Često se ima odlučiti, da li se izvjesni skupovi mogu uroniti u pojedine skupove s izvjesnim svojstvima. Možemo se na pr. pitati, da li se zadani *zatvoreni* disjunktni skupovi mogu uroniti u disjunktne *otvorene* skupove.

---

[1] Vidi se, da su članovi obitelji O_1 oblika $\prod_{x \in M} A(x)$, gdje je $A(x) = S(x)$ za svaki $x \in M$ *osim za njih konačno mnogo*; vazda je $A(x)$ *otvoren* skup u $((S x); —)$ dakle $A(x) \in G(x)$.

[2]) O problemu odjeljivanja isporedi osnovni rad Urysohn [1], te Luzin, [1] p. 155, p. 208.

Ima čitava skala mogućnosti odjeljivanja; navedimo ih nekoliko sve jačih i jačih.

Aksiom odvajanja T_0 (Kolmogorof).[1] *Od svake dvije različite točke bar jedna od njih posjeduje okolinu u kojoj ne leži druga točka.*

Lema 27.11.1. *Da prostor zadovoljava aksiomu T_0, nužno je i dovoljno, da se prostornost svake točke razlikuje od prostornosti svake druge točke.*

Aksiom odvajanja T_1 (Fréchet). *Ako su a, b koje god dvije različite točke, postoji jedna okolina $o(a)$ od a, koja ne obuhvata b i okolina $o(b)$ od b koja ne obuhvata a (jednostrano odjeljivanje parova točaka).*

Lema 27.11.2. *Da prostor zadovoljava aksiomu T_1, nužno je i dovoljno, da svaki jednočlan skup bude zatvoren, odnosno da derivat svakog jednočlanog skupa bude prazan.*

Povezana dvotočka (v. zad. 27.15.3) zadovoljava T_0 ali ne T_1.

Aksiom odvajanja T_2 (Hausdorff). *Za svaki par različitih točaka a, b postoje disjunktne okoline $o(a)$, $o(b)$ (istodobno odjeljivanje parova točaka.*

Uloga Hausdorffova aksioma T_2 vidi se iz

Teorema 27.11.1. *Ako je f bilo kakvo jednoznačno neprekidno preslikavanje prostora Kuratowskoga A na prostor Kuratowskoga B, pa ako prostor B zadovoljava Hausdorffovu aksiomu T_2, tada je preslikavanje f potpuno određeno vrijednostima što ih ono prima na nekom svuda gustom skupu prostora A* (o protuprimjeru v. § 27.15.14).

Pretpostavimo naime da uz pretpostavke teorema postoji skup S svuda gust u prostoru A te dva neprekidna preslikavanja f i g prostora A na prostor B tako da bude $f \neq g$ ma da je

$$f(x) = g(x), \quad (x \in S).$$

Relacija $f \neq g$ znači da postoji bar jedna točka x_0 prostora A tako da bude

$$f(x_0) \neq g(x_0).$$

Kako su $f(x_0)$, $g(x_0)$ različite točke prostora B, a ovaj prema hipotezi zadovoljava uslovu T_2, postoje disjunktne okoline $of(x_0)$, $og(x_0)$:

$$of(x_0) \cap og(x_0) = v. \tag{27.11.1}$$

No, kako su funkcije f i g svuda neprekidne, pa dakle i u točki x_0, postoji okolina $o_1(x_0)$ odn. $o_2(x_0)$ tako da bude

$$f o_1(x_0) \subseteq o(f(x_0))$$

$$g o_2(x_0) \subseteq o(g(x_0)).$$

---

[1] T je početno slovo njemačke riječi Trennung-*odjeljivanje*,

Prema tome (v. teorem 27.10.1.1) postoji bar jedna okolina

$$o(x_0) \subseteq o_1(x_0) \cap o_2(x_0);$$

odatle bi izlazilo:

$$f(o(x_0)) \subseteq of(x_0)$$

$$g(o(x_0)) \subset og(x_0), \quad \text{dakle}$$

$$of(x_0) \cap og(x_0) \supseteq f(o(x_0)) \cup g(o(x_0)) \supset v,$$

protivno činjenici da su $of(x_0)$, $og(x_0)$ dva disjunktna skupa.

Korolar 27.11.1. *Svako metričko neprekidno jednoznačno preslikavanje jednoznačno je određeno vrijednostima što ih ono uzima na nekom svuda gustom skupu.*

Evo još jedne primjene Hausdorffova aksioma.

Teorem 27.11.2. *Svaki u sebi gust skup S okolinskog prostora s otvorenim okolinama u kojem važi Hausdorffov aksiom separacije sadrži s obzirom na $\supseteq$ razvrstano uređen sistem gustih skupova, od kojih svaki ima bar dva neposredna sljedbenika.*

Stvarno, najprije *S sadrži dva disjunktna u sebi gusta skupa.* Jer, ako su a, b dvije različite točke, a $o(a)$ i $o(b)$ dvije disjunktne okoline, tada su skupovi

$$S \cap o(a),\ S \cap o(b)$$

u sebi gusti i disjunktni; označimo li ih sa S_0 i S_1, tada možemo provesti analognu konstrukciju sa svakim od tih skupova pa iz S_0 izvesti dva disjunktna gusta skupa S_{00}, S_{01}, a iz S_1 disjunktne guste skupove S_{10}, S_{11}. Uopće, ako je za konačan diadski niz $i_0 \ldots i_n$ gust pun skup $S_{i_0 \ldots i_n}$ konstruiran, možemo odabrati dva njegova puna gusta dijela i označiti ih sa

$$S_{i_0 \ldots i_n 0} \quad \text{i} \quad S_{i_0 \ldots i_n 1}$$

i to za svaki $n < \omega_0$ i svaki niz $i_0 i_1 \ldots i_n$ brojeva 0 i 1.

Sistem svih skupova

$$S_{i_0 \ldots i_n} \text{ gdje je } i_n = 0 \text{ ili } 1 \text{ za svaki } n < \omega_0$$

jest razvrstano uređen s obzirom na relaciju $\supseteq$; tu se disjunktnost podudara sa neuporedljivošću. Svakom beskonačnom nizu

$$i_0\, i_1 \ldots i_n \ldots \tag{27.11.2}$$

cifara 0, 1, t. j. svakom članu skupa $\{0, 1\}_1 N$ odgovara maksimalan uređen dio toga sistema, naime silazni niz

$$S_{i_0} \supset S_{i_0 i_1} \supset S_{i_0 i_1 i_2} \supset \ldots \tag{27.11.3}$$

Aksiom odvajanja T_3 (Vietoris) ili **aksiom regularnosti.** *Po dva disjunktna zatvorena skupa, od kojih je bar jedan jednočlan mogu se istodobno odijeliti otvorenim skupovima.*

Teorem 27.11.3. *Da topološki prostor bude regularan* (t. j. da zadovolja a aksiomu T_3), *treba a i dosta je, da se on može definirati pomoću zatvorenih okolina.*

Aksiom odvajanja T_4 (Tietze) ili **aksiom normalnosti.** *Po dva disjunktna zatvorena skupa mogu se istodobno odijeliti pomoću otvorenih skupova.*

Uloga aksioma T_4 vidi se najbolje iz ovog karakterističnog Urysohnova teorema:

Da prostor Kuratowskoga H zadovoljava uslovu T_4, nužno je i dovoljno da za svaka dva puna disjunktna zatvorena skupa A, B postoji jednoznačno neprekidno preslikavanje f čitava prostora H na segment $[0, 1]_C$, *tako da bude*

$$fA = \{0\},\ fB = \{1\}.$$

Prema tome, ako prostor Kuratowskoga ne zadovoljava uslovu T_4 može se desiti da su konstante jedina neprekidna jednoznačna preslikavanja toga prostora na prostor C realnih brojeva (v. primjer u Urysohn [1] § 26).

Aksiom T_5 (Urysohn) ili **aksiom potpune normalnosti.** *Ako su A i B bilo kakva dva skupa sa svojstvom*

$$(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = v,$$

tada postoje otvoreni skupovi A_0, B_0 sa svojstvom:

$$A_0 \supseteq A,\ B_0 \supseteq B,\ A_0 \cap B_0 = v.$$

§ 27.12. Uniformni (jednoliki) prostori.

Među najjednostavnije prostore spadaju svakako razdaljinski (metrički) prostori. No, u njihovoj definiciji pojavljuju se brojevi dakle elementi kojima zapravo nije pravo mjesto u nauci o prostorima odnosno topologiji. Zato sam ja i nastojao da metričke prostore i nekoje njihove generalizacije definiram ne služeći se brojevima. [1]) Međutim H. Cartanu je pošlo za rukom da iznese jedan pojam — *pojam filtra* — koji nije metričan nego spada u teoriju uređenih skupova i koji je vrlo pogodno sredstvo za ispitivanje graničnih procesa. Konačno je Weil-u pošlo za rukom da definira jednu važnu vrstu prostora na čisto deskriptivan način, na koju se u mnogome može prenijeti svojstva neprekidnosti (kontinuiteta) vezana za razdaljinske prostore.

1) Vidjeti moje radove u: a) Comptes rendus, Paris, 1934, 198, p. 1563.
b) Comptes rendus, Paris, 1936, 203, p, 1049,
c) Mathematica, Cluj 13 (1937), 59—65.
d) Publ. Math. Beograd 5, 1936, 124—132.
Vidjeti također Fréchetov članak u *Portugaliae Mathematica* 5 (1946).

Pojam filtra.

Znamo da obitelj $O(x)$ svih okolina točke x topološkog prostora ima ova tri svojstva:

1) Svaki nadskup svakog elementa iz $O(x$ opet je element u $O(x)$;
2) Presjek konačno mnogo članova iz $O(x)$ leži u $O(x)$, i
3) Prazan skup nije element od $O(x)$.

Tim povodom H. Cartan uvodi pojam filtra ovako:

Definicija 27.12.1. *Filtar na skupu S jest svaka obitelj F dijelova skupa S, koja zadovoljava ovim trima uslovima (uslovi filtra):*

F_1 *Iz. $X \in F$, $X \subset Y \subset S$ slijedi $Y \in F$*

t. j. svaki nadskup svakog elementa iz F opet je element od F; drugim riječima, svaki filtar skupa S jest izvjestan početan komad djelimično uređena skupa $(P(S); \supseteq)$.

F_2 *Presjek od konačno mnogo članova iz F opet je član u F.*

F_3 *Prazan skup nije element od F* t. j. $\{v\}$ non $\in F$.

Prema tome, svaki filtar na skupu S jest izvjestan dio pripadnog partitivnog skupa $P(S)$. Tako na pr. za beskonačan skup S, skup komplemenata konačnih dijelova jest filtar nad S; specijalno, takav filtar nad skupom N prirodnih brojeva zove se Fréchetov filtar. Filtri omogućuju uvođenje općeg limesa u topologiji. [1])

Primjer 27.12.1. *Filtar $U(S)$ na $S \times S$, ako je $(S; —)$ razdaljinski prostor.* Za zadan realan broj $r > 0$ neka je

(27.12.1) V_r skup svih točaka $(x, y) \in C \times C$

za koje je

$$|x - y| < r.$$

Očigledno, skup V_r jest otvorena pruga ravnine smještena između pravaca

$$y = x + r \quad \text{i} \quad y = x - r.$$

Promatramo li skup

(27.12.2) $U(C)$

---

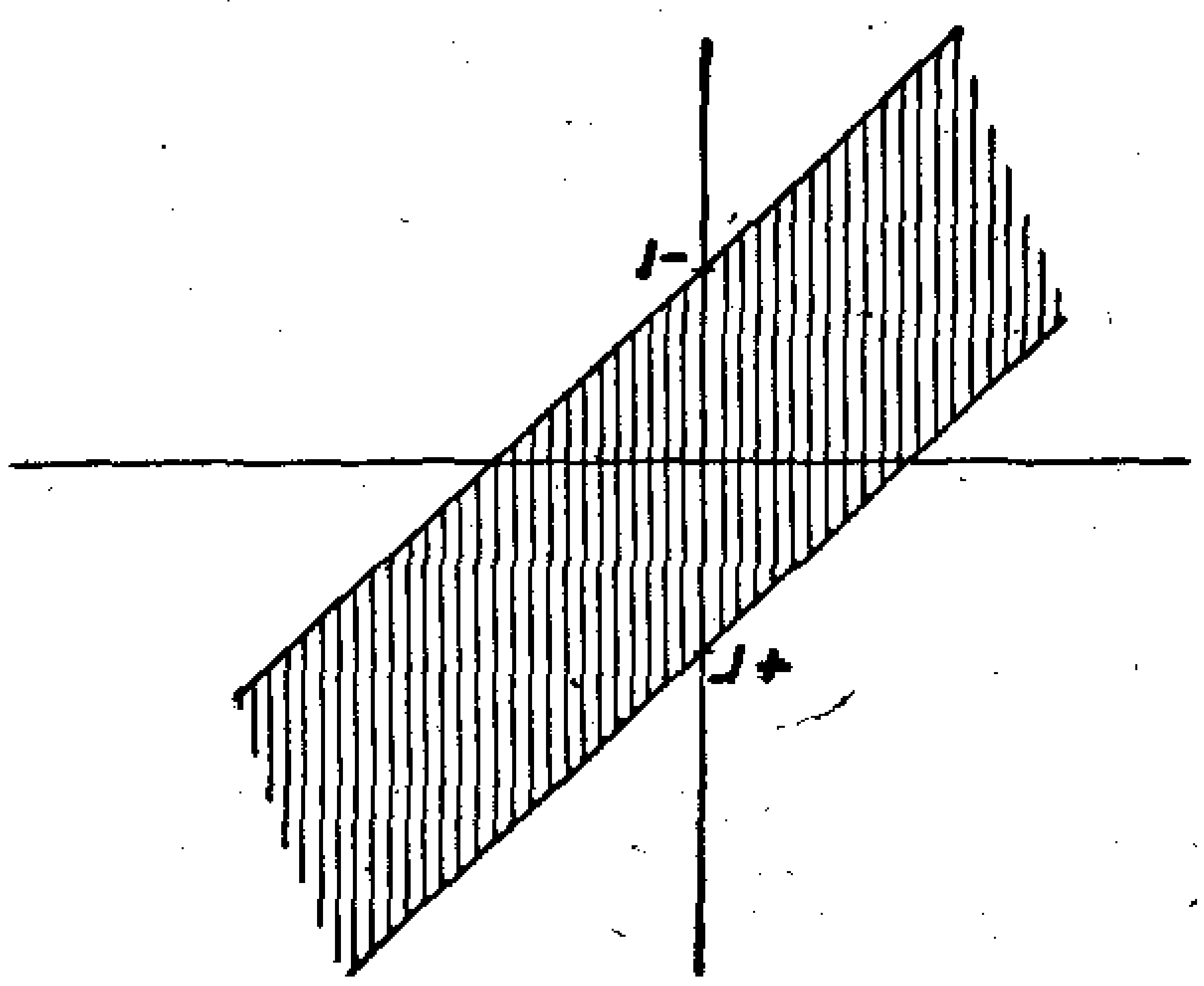
[1]) *Naime*, ako je $(S; —)$ izvjestan topološki prostor, a F filtar nad S, tad se kaže da filtar F konvergira prema točki $a \in S$, ako je $V(a) \subseteq F$; pritom je $V(a)$ množina (filtar) svih okolina točke a.

Nadalje, neka je f jednoznačno preslikavanje nekog skupa M na topološki prostor $(S; —)$; neka je nadalje F izvjestan filtar na M. Veli se da je točka $y \in S; —)$ *granična točka ili limes funkcije f po* filtru F, simbolički

$$\lim_F f = y,$$

ako filtar kojemu je baza sastavljena od skupova $fX, (X \in F)$ konvergira prema y. Ako je $M = N$, a F Fréchetov filtar t. j. skup svih beskonačnih dijelova $\subseteq N$ kojima je komplement konačan, tada se radi o limesu nizova u obi nom smislu riječi. Više o tome v. Bourbaki, [2].

svih dijelova ravnine od kojih svaki obuhvata bar jedan od gornjih skupova V_r, tada je U određen filtar na skupu $C \times C$.



Sl. 27.12.1.
Skup V_r svih točaka (, y) za koje je $|x-y| < r$ ispunjava iscrtkanu prugu što je omeđuju pravci $y = x \pm r$.

Posve se analogno konstruira filtar $U(S)$ na skupu $S \times S$, ako je $(S; —)$ bilo koji razdaljinski prostor; samo tada za $x, y \in S$ gornji znak $|x - y|$ znači razdaljinu točaka x i y u razdaljinskom prostoru $(S; —)$, pa možemo tada pisati $\varrho(x, y)$ mjesto $|x - y|$.

Upliv metrike u $(S; —)$ **na filtar** $U(S)$. Razdaljinski aksiomi imaju za posljedicu sada ova svojstva filtra:

U_1 Svaki element $V \in U$ sadrži „dijagonalu" $y = x$ skupa $S \times S$: t. j.

$$(x, x) \in V, \quad (x \in S);$$

U_2 Iz $V \in U$ slijedi $V^{-1} \in U$, pri čemu

(27.12.3) V^{-1} znači skup svih

$$(y, x), \; ((x, y) \in V);$$

U_3 Iz $V \in U$ slijedi egzistencija jednog $W \in U$ tako da iz

$$(x, z), (z, y) \in W \text{ slijedi } (x, y) \in V \quad \text{t. j da bude}$$

$$W \circ W \subseteq V; \quad \text{pritom općenito za}$$

$$X \subseteq S \times S \text{ i } Y \subseteq S \times S \text{ označujemo sa}$$

(27.12.4) $Y \circ X$ odnosno YX skup svih $(x, y) \in S \times S$

sa svojstvom da postoji bar jedan $z \in S$ tako da bude istodobno

$$(x, z) \in X, \; (z, y) \in Y.$$

Naime, kako je

$$\varrho(x, x) = 0 \quad \text{dakle} \quad \varrho(x, x) < r$$

za svaki $x \in S$ i svaki $r > 0$, to je

$$(x, x) \in V_r \quad \text{za svaki} \quad r > 0, \quad \text{a tim prije}$$

$$(x, x) \in B \quad \text{za svaki} \quad B \supseteq V_r.$$

Time je uslov U_1 dokazan.

Uslov U_2 izlazi iz očigledne relacije $V_r^{-1} = V_r$.

Uslov U_3 izlazi iz relacije trokuta; tvrdimo naime da je $V_{\frac{r}{2}} V_{\frac{r}{2}} \subseteq V_r$.

Jer iz $(x, y) \in V_{\frac{r}{2}} V_{\frac{r}{2}}$ slijedi da postoji bar jedan $z \in S$ tako da bude

$$(x, z) \in V_{\frac{r}{2}}, \ (z, y) \in V_{\frac{r}{2}}.$$

No, té relacije znače upravo da je

$$\varrho(x, z) < \frac{r}{2}, \quad \varrho(z, y) < \frac{r}{2}$$

što s obzirom na relaciju trokuta:

$$\varrho(x, y) \leqslant \varrho(x, z) + \varrho(z, y) \quad \text{daje}$$

$$\varrho(x, y) < r \quad \text{t. j.} \quad (x, y) \in V_r$$

što smo i htjeli pokazati.

Neka je ϱ razdaljinska funkcija prostora $(S; —)$; onda to znači, da je

$$\varrho(x, y). \ ((x, y) \in S \times S) \tag{27.12.5}$$

jednoznačno preslikavanje kombiniranog produkta $S \times S$ na skup $[0, \infty)$ realnih brojeva $\geqslant 0$. Neka je

$$A = \varrho(S \times S) \tag{27.12.6}$$

skup svih brojeva (27.12.5), a

$$F(o)$$

filtar okolina broja o u prostoru A. Inverzna funkcija

$$\varrho^{-1}$$

preslikava dakle čitav skup $A = \varrho(S \times S)$ na čitav skup $S \times S$; označimo li sa

$$\varrho^{-1} F(o) \quad \text{skup svih}$$

$$\varrho^{-1} B, \ (B \in F(o)),$$

tada se vidi da je $\varrho^{-1} F(o)$ porodica U o kojoj smo maloprije govorili. Specijalno se vidi, da je $\varrho^{-1}(o)$ dijagonala skupa $S \times S$.

Značajni uslovi U_1, U_2, U_3 vezani su za skup S, pa vrijedi ova

Definicija 27.12.2. *(uniformne strukture na skupu S).* Uniformna struktura skupa S jest svaki filtar T na kombiniranom produktu $S \times S$, pri čemu imaju biti ispunjena ova tri uslova uniformnosti:

U_1 *Dijagonala produkta $S \times S$ leži u svakom elementu filtra U t. j.*

$$(x, x) \in V, \ (x \in S, \ V \in U);$$

U_2 *Iz $V \in U$ slijedi $V^{-1} \in U$ (simetrija filtra prema dijagonali);*

U_3 *Iz $V \in U$ slijedi da postoji bar jedan $W \in U$ tako da bude*

$$W W \subseteq V.$$

Kao što vidjesmo, značajan prim'er uniformnih struktura dobivamo u vezi sa razdaljinskim prostorima. Tom je strukturom dotični prostor, kao prostor, jednoznačno određen. Jer, ako je a ma koja točka prostora, pa ako je zadan $r > o$, označimo sa $O_r(a)$ skup svih točaka t za koje je $\varrho(a, t) \in V_r$; tada se vidi da je

$$O_r(a) = K(a; r)$$

= skup svih točaka razmaknutih od a za $< r$. Označimo li dakle sa

$$O(a)$$

skup svih $O_r(a)$, $(r > o)$, tada je $O(a)$ filtar okolina točke a.

Ta razmatranja daju povoda da se postavi ovakova

Definicija 27.12.3. *(Uniformni prostori).* Topološki prostor $(S;—)$ je uniforman (jednolik) ako na skupu S postoji uniformna struktura U tako da za svaki $a \in S$ na skup $O(a)$ svih

$$V(a), (V \in U)$$

čini filtar okolina točke a; pritom za dani $V \in U$, $V(a)$ označuje skup svih $y \in S$ sa svojstvom

$$(x, y) \in V.$$

Iz gornjih razmatranja vidimo da važi

Teorem 27.12.1. *Svaki razdaljinski prostor jest uniforman.*

Međutim uniformni prostori znatno su općenitiji od razdaljinskih. Jer svaka topološka grupa kao i svaki bikompaktni topološki prostor jesu uniformni prostori; odatle i proističe važnost uniformnih prostora.

Treba imati na umu, da elementi uniformne strukture imaju zadaću da iskazuju manju ili veću bliskost elemenata skupa S. Zato se elementi iz U i mogu nazvati *blizinama ili susjedstvima,* a odnos

$$(x, y) \in V \in U$$

čitati x i y su *nablizu u stepenu V.*

§ 27.13. **Topološke grupe.** [1])

Zna se od kolike je važnosti u matematici pojam grupe ili grupolikog skupa; kod toga je pojma glavno, da se svakom *konačnom* dijelu skupa pridijeli određen element skupa i da naravno pritom budu ispunjeni izvjesni uslovi. Tu važnost leži u riječi *konačan,* pa se zato i kaže da su grupoliki skupovi *algebarskog* karaktera. Naprotiv, u topologiji ne ograničavamo se na konačne kombinacije nego se proizvoljnom dijelu zadana skupa pridijeljuje proizvoljan dio nekoga skupa.

[1]) Prošloga vijeka razradio je Sophus Lie jednu vrstu topoloških grupa, koje je on zvao *„neprekidnim grupama"*; danas se te grupe zovu *Lie-ove grupe.* Opće topološke grupe razrađene su tek zadnjih dvadesetak godina (Schreier, Pontrjagin itd.). Više o tome v. Bourbaki [3] ch. III.

Od interesa je spojiti ta dva pojma. Skup racionalnih (realnih, kompleksnih) brojeva gdje imamo posla i sa grupom i sa prostorom pokazuje da ima vrlo važnih primjera u kojima je grupnost povezana s prostornošću i to tako, da je na pr. simetrija grupe (prelaz od elementa na suprotni) neprekidno preslikavanje toga prostora na sama sebe; također za svaki element a grupe „translacije"[1]) ax i xa jesu *neprekidna* preslikavanja grupe na sama sebe; odnosno komponiranje

$$x\,y,\ (x, y \in S)$$

jest neprekidno preslikavanje prostora $(S \times S; —)$ na prostor $(S; —)$.

Od interesa je da je svaka topološka grupa uniforman prostor.

Definicija 27.13.1. *(topološke grupe).* Topološka grupa jest svaki tročlan skup (sistem)

$$(G; \cdot\,; —) \tag{27.13.1}$$

sastavljen od izvjesnog skupa elemenata, zatim iz određena binarna operatora $\cdot$ u G (dakle je $\cdot$ jednoznačno preslikavanje kombiniranog produkta $G \times G$ na skup G) te određenog jednoznačnog preslikavanja — skupa $P(G)$ na G; pritom je skup G grupa s obzirom na operator $\cdot$ a topološki prostor s obzirom na operator —; operator grupnosti i operator prostornosti — međusobno su vezani tako da je na snazi:

Uslov GT: Preslikavanje Φ koje svakom elementu $(x, y) \in G \times G$ pridijeljuje element

$$\Phi(x, y) = y\,x^{-1} \tag{27.13.2}$$

jest neprekidno preslikavanje prostora $(G \times G; —)$ na zadani prostor $(G; —)$.

Zapravo, preslikavanje Φ znači obrat grupne operacije; dakle Φ znači *„dijeljenje"* u grupi G i to dijeljenje „zdesna", jer se dividend množi s recipročnom vrijednosti divizora (a ne da se recipročna vrijednost divizora množi dividendom).

Lako se vidi da je uslov GT ekvivalentan sa traženjem da *„simetrija"*

$$x^{-1},\ (x \in G)$$

te *„množenje"*

$$x\,y,\ \left((x, y) \in G \times G\right)$$

budu *neprekidne* transformacije prostora $(G; —)$ odn. prostora $(G \times G; —)$ na prostor $(G; —)$.

Da iz ta dva uslova proizlazi uslov GT, to je očigledno. Dokažimo obrat. Najprije, iz neprekidnosti funkcije Φ proizlazi neprekidnost funk-

[1]) Služimo se znakom $\cdot$ za binarni operator s obzirom na koji je zadani skup S proglašen grupom.

cije $\Phi(e, x) = x^{-1}$ u $(G \times G; —)$,[1] a time i u $(G; —)$; a iz neprekidnosti transformacija

$$yx^{-1}, \text{ te } x^{-1}$$

slijedi i neprekidnost transformacije

$$y(x^{-1})^{-1} = yx$$

prostora $(G \times G; —)$ u prostor $(G; —)$.

Primjer 27.13.1. Skup C svih realnih brojeva jest aditivna topološka grupa; to je također svaki Kartezijev prostor C_n, pri čemu za $f, g \in C_n$ pod $f + g$ razumijevamo funkciju za koju je

$$(f + g)(k) = f(k) + g(k), \ (k = 1, 2, \ldots n)\ ^{2)}$$

Skup $C \setminus \{o\}$ realnih brojeva $\neq o$ jest multiplikativna topološka grupa.

Okoline u topološkoj grupi. Neka je e neutralni (jedinični) element grupe $(G; \cdot)$, a

(27.13.3) $$O(e)$$

skup (čak i filtar) svih okolina točke e u prostoru $(G; —)$; neka je a bilo koja točka prostora; tada neprekidnost preslikavanja

$$ax, \ (x \in S)$$

ima za posljedicu, da se skup

(27.13.4) $$a\,O(e) \text{ svih } aX,^{3)} \ (X \in O(e))$$

podudara sa skupom $O(a)$ svih okolina točke a; dakle

(27.13.5) $$a\,O(e) = O(ae) = O(a).$$

Isto tako;

(27.13.6) $$O(e)\,a = O(a) \text{ za svaki } a \in G.$$

Na taj način, imamo

Teorem 27.13.1.[4] *Ako je $(G; \cdot ; —)$ topološka grupa, a $O(e)$ filtar okolina njenog neutralnog (jediničnog) elementa e, tada se filtar okolina svakog elementa a prostora podudara sa translatiranim filtrom $a\,O(e)$ (translacija ulijevo) odnosno sa $O(e)\,a$ (translacija udesno).*

Dokažimo ovaj lijepi

Teorem 27.13.2 (A. Weil). *Svaka topološka grupa $(G; \cdot ; —)$ jest uniforman prostor* (prema tome, grupovni operator shvatamo kao „množenje" elemenata skupa G).

---

[1] e je *neutralni* element grupe $(G; \cdot)$.

[2] Imaj na umu, da je C_n skup $C_1\{1, 2, \ldots n\}$ svih jednoznačnih preslikavanja skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ na skup C

[3] Naravno, za dani skup X označuje aX skup svih ax, $(x \in X)$.

[4] Neka si čitalac živo stvar predoči u slučaju topološke grupe $(C; +; —)$.

Ponovno promatrajmo „dijeljenje"

$$\Phi$$

u skupu G koje svakom $(x, y) \in G \times G$ pridijeljuje jednoznačno određeni element

$$\Phi(x, y) = y x^{-1} \in G;$$ [1])

Time je određeno i obrnuto preslikavanje.

(27 13.7) Φ^{-1} grupe G na čitav *„kvadrat"* $G \times G$.

Dakle svakom $v \subset A \subset G$ pripada određen skup $\Phi^{-1}A \subseteq G \times G$. Tako na pr. za neutralni element e grupe $(G; \cdot)$ bit će

$$\Phi^{-1}(e) = \text{dijagonala kvadrata } G \times G,$$

jer je za svaki $(x, x) \in S \times S$:

$$\Phi(x, x) \equiv x x^{-1} = e.$$

Filtru $O(e)$ svih okolina $o(e)$ elementa e prostora $(G; —)$ pripada na taj način posve određena obitelj.

(27.13.8) $\Phi^{-1}O(e) = \text{skup svih } \Phi^{-1}o, \; (o \in O(e))$.

Dokažimo, da je $\Phi^{-1}O(e)$ uniformna struktura skupa G pomoću koje se može rekonstruirati sam zadani prostor $(G; —)$.

Najprije, dokažimo da je $\Phi^{-1}O(e)$ uniformna struktura na skupu G t. j. da obitelj $\Phi^{-1}O(e)$ ispunjava sva tri uslova U_1, U_2, U_3 uniformnosti.

Uslov U_1 je ispunjen: svaki $V \in \Phi^{-1}O(e)$ sadrži dijagonalu Δ.

Jer, $V \in \Phi^{-1}O(e)$ znači da postoji okolina $o(e)$ tako da bude

$V = \Phi^{-1}o(e)$; no $e \in o(e)$, dakle $\Phi^{-1}(e) \subset \Phi^{-1}o(e)$ t. j.

$\Delta \subseteq V$, jer je $\Phi^{-1}e = \Delta =$ dijagonala kvadrata $G \times G$.

Uslov U_2 je ispunjen: iz $V \in \Phi^{-1}O(e)$ slijedi $V^{-1} \in \Phi^{-1}O(e)$. [2])

Stvarno, neka je $V = \Phi^{-1}o(e)$ t. j. $\Phi V = o(e)$ dakle

$$y x^{-1} \in o(e) \quad \text{za svaki } (x, y) \in V.$$

Odatle

$$(y x^{-1})^{-1} \in o(e)^{-1} \quad \text{t. j.}$$ [3])

$$x y^{-1} \in o(e)^{-1} \quad \text{za svaki } (x, y) \in V.$$

A to upravo znači da je

$\Phi(V^{-1}) \subset o(e)^{-1}$. No, $o(e)^{-1} \in \Phi^{-1}O(e)$ te $(\Phi V)^{-1} = (o(e))^{-1}$.

---

[1]) Ako je grupa G aditivna, onda se stavlja $\Phi(x, y) = y + (-x) = y - x$.

[2]) V^{-1} je simetrična slika od V, i označuje skup svih (y, x) kad (x, y) prolazi kroz V.

[3]) Iz elemenata o grupama proizlazi naime da je:

$$(x^{-1})^{-1} = x, \quad \text{te} \quad (x, y)^{-1} = y^{-1} x^{-1}.$$

U jednu ruku, očigledno je

$$o(e)^{-1} \in \Phi^{-1} O(e),$$

a u drugu ruku skup $(\Phi V)^{-1}$ svih

$$(y x^{-1})^{-1} = x y^{-1}, \; ((x, y) \in V)$$

podudara se sa skupom $\Phi(V^{-1})$ svih

$$\Phi(y, x) = x y^{-1}, \; ((x, y) \in V).$$

Dokažimo najzad uslov U_3 uniformnosti t. j. da svakom

$V \in \Phi^{-1} O(e)$ pripada $W \in \Phi^{-1} O(e)$ tako da bude

$W W \subset V$ t. j. da iz $(x, z) \in W$, $(z, y) \in W$ slijedi $(x, y) \in V$.

No, neka je $V = \Phi^{-1} o(e)$; tada relacija $(x, y) \in V$ znači isto što i

$$y x^{-1} \in o(e).$$

Isto tako, kad bi W postojao i bio $= \Phi^{-1} o_1(e)$, tada bi se imalo pokazati, da iz $z x^{-1} \in o_1(e)$, $y z^{-1} \in o_1(e)$ slijedi $y x^{-1} \in o(e)$.

No, identički je

$$y x^{-1} = (y z^{-1}) \cdot (z x^{-1}) \in o_1(e) \cdot o_1(e).$$

Ako dakle dokažemo, da postoji $o_1(e)$ tako da bude

$$o_1(e) \cdot o_1(e) \subset o(e),$$

tada će uslov U_3 biti dokazan.

No, preslikavanje Φ je neprekidno u prostoru $(G \times G; -)$; specijalno je ono neprekidno u točki $(e, e) \in G \times G$ koju ono prevodi u

$$\Phi(e, e) = e e^{-1} = e.$$

To znači da proizvoljnoj okolini $o(e)$ pripada okolina $o(e, e)$ u $G \times G$ tako da bude

$$\Phi o(e, e) \subset o(e)$$

No, kombinirani produkt $(G \times G: -)$ može se definirati i okolinama oblika $o_1(e) \times o_1(e)$; to znači, da za proizvoljnu okolinu $o(e)$ postoji okolina

$$o_1(e) \times o_1(e) \quad \text{točke} \quad (e, e)$$

tako da bude

$$\Phi(o_1(e) \times o_1(e)) \subset o(e) \quad \text{t. j.}$$

da iz $a \in o_1(e)$, $b \in o_1(e)$ slijedi $\Phi(a, b) \in o(e)$, dakle

$$b a^{-1} \in o(e).$$

Specijalno, ako je

$$b = y z^{-1}, \; a = x z^{-1}, \text{ sadržavat će } o(e) \text{ točku}$$

$$b a^{-1} = (y z^{-1}) \cdot (x z^{-1})^{-1} = (y z^{-1}) \cdot (z x^{-1}) = y (z^{-1} z) x^{-1} = y x^{-1}.$$

Drugim riječima, dovoljno je staviti

$$\Phi^{-1}o_1(e) = W,$$

pa da se vidi da je ispunjen uslov U_3.

Još preostaje dokaz, da se zadani prostor može definirati pomoću tako dobivene uniformne strukture $\Phi^{-1}O(e)$. Za svaki $V = \Phi^{-1}o(e)$ i svaki $a \in G$ neka je

$V(a)$ skup svih $y \in G$ tako da bude $(a, y) \in V$ t. j.

$\Phi(a, y) \in \Phi V = o(e)$ dakle $ya^{-1} \in o(e)$ odnosno

$$y \in o(e) \cdot a.$$

Prema tome

$$V(a) = o(e) \cdot a.$$

Kad $o(e)$ prolazi filtrom $O(e)$, prolazi $o(e)a$ filtrom $O(e)a$ okolina točke a; što znači, da je zadana topološka grupa kao prostor po punq određena uniformnom strukturom $\Phi^{-1}O(e)$ na skupu G.

Time je teorem 27.13.2 potpuno dokazan.

Primjedba 27.13.1. Kao što se obrađuju topološke grupe, tako se obrađuju i topološki prstenovi (kola) i topološka tjelesa; to su sistemi

$$(S; +; \cdot; -)$$

od skupa S, dva binarna operatora $+$ i $\cdot$ s obzirom na koje je S *prsten* odnosno *tijelo* te operatora prostornosti — s obzirom na koji je S topološki prostor; nadalje se zahtjeva neprekidnost preslikavanja

$$x + y, \ x \cdot y$$

prostora $(S \times S; -)$ na prostor $(S; -)$ kao i neprekidnost preslikavanja

$$-x, \ (x \in S)$$

kod prstena, a k tome i preslikavanja

$$x^{-1}, \ (x \in S \setminus \{o\})$$

kod tijela.

§ 27.14. **Završno o prvotnim svojstvima prostora.** Rekli smo da je prostor svaki sistem

$$(S; f)$$

sastavljen od skupa S i proizvoljnog jednoznačnog preslikavanja skupa $P(S)$ na sama sebe; prema tome, za svaki $X \subset S$ važi $f(X) \subset S$.

Dosad smo mi skup $f(X)$ interpretirali kao prostornost ili prostiranje skupa X i na osnovu toga definirali razne obitelji skupova iz S kao: skupove $\operatorname{int} X$, $\operatorname{ext} X$, X', otvorene, zatvorene, guste skupove itd. Međutim, mogli bi radi i tako da skup $f(X)$ shvatimo kao nutrinu, izvod, vanjštinu i t. d. pa na osnovu toga definirati ostale pojmove iz teorije prostora.

Specijalno, ako je preslikavanje f uzlazno i zadovoljava uslovu

$$f(A) \subset A$$

onda je zgodno skup $f(A)$ shvatiti kao *nutrinu skupa* X.

Ako je preslikavanje f *antitono* t. j. takovo da iz

$$X \subset Y \subset S \quad \text{slijedi} \quad f(X) \supseteq f(Y) \supseteq S;$$

onda $f(X)$ možemo shvatiti kao vanjštinu skupa X i na osnovu toga izgraditi čitavu teoriju prostora.

Tako na pr. ako $f(X)$ znači ne prostornost nego vanjštinu skupa X, onda se prostornost $\overline{X}$ može definirati pomoću $f(X)$, te je $\operatorname{ext} X = C\overline{X}$ odakle

$$C \operatorname{ext} X = \overline{X} \quad \text{t. j.} \quad \overline{X} = C(f(X)).$$

Fréchet (i Moore) su izgradili teoriju prostora uzimajući da je $f(X)$ izvod (derivat) skupa X.

§ 27.15. ZADACI.

§ 27.15.1. Promatraj sve moguće prostore sastavljene od broja 1 i broja 2. Koliko ih ima? Dokaži da za zadàn kardinalan broj k može biti najviše 2^{2^k} različitih prostora potencije k.

§ 27.15.2. *(Dvotačka kao prostor).* Promatraj dvočlani prostor $(\{a, b\}; -)$ u kojem je prostornost definirana idetičnim preslikavanjem $\overline{X} = X$ za svaki $X \subset \{a, b\}$. Dokaži da su bilo koja dva takova prostora međusobno homeomorfna i okarakterisana kao dvočlani izolirani prostori Kuratowskoga. Promatraj topološki produkt od a) 2, b) 3, c) 10, takovih prostora. Dokaži da je topološki produkt od prebrojivo mnogo takovih prostora homeomorfan sa triadskim prostorom T.

§ 27.15.3. *(Povezana dvotočka).* Promatraj prostor $(\{1, 2\}; -)$ u kojem je prostornost definirana ovako: $\overline{v} = v$, $\overline{\{1\}} = \{1\}$, $\overline{\{2\}} = \overline{\{1, 2\}} = \{1, 2\}$. Dokaži, da u tom prostoru postoje jedino ova tri zatvorena skupa: v, $\{1\}$ i $\{1, 2\}$. Promatraj topološki produkt od nekoliko povezanih dvotočaka

§ 27.15.4. Djelimično uređen skup S proglasi prostorom time da za svaki $X \subseteq S$ definiramo $\overline{X} = \bigcup_{a \in X} (-\infty, a]_S$ t. j. $\overline{X}$ je najmanji početni komad djelimično uređena skupa S koji obuhvata skup X; specijalno $\overline{v} = v$. Dokaži da je unija od ma koliko zatvorenih skupova opet zatvoren skup. Uvjeri se da je u slučaju $kS = 2$, tako tako definiran prostor homeomorfan s povezanom dvotočkom.

§ 27.15.5. Ako je u topološkom prostoru $(S; \overline{})$ unija od ma koliko zatvorenih skupova zatvoren skup, pa ako za $a, b \in S$ relaciju $a \in \overline{\{b\}}$ pišemo kao $a \leqslant b$, dokaži da je $(S; \leqslant)$ djelimično uređen skup iz kojega na način naveden u § 27.15.4 proizlazi zadani prostor $(S; \overline{})$.

§ 27.15.6. Promatraj okolinski prostor $(D; \overline{})$ kod kojega svaki $n \in D$ ima dvije okoline i to

$$O_1(n) = \{n, n+1, n+2\}, \quad O_2(n) = \{n-1, n, n+1\}.$$

Pokaži da se zatvoreni skupovi podudaraju s početnim komadima skupa $(D; \leqslant)$. Da li je taj prostor topološki? (D = skup svih cijelih brojeva).

§ 27.15.7. (Urysohnov prostor). Potpuno uređeni skup $S = \{o\} \cup N = \{0, 1, 2, \ldots n, n+1, \ldots\}$ definirajmo prostorom pomoću ovih okolina: svakom $n \in N$ pridijelimo kao okolinu jednočlani skup $\{n\}$; okoline broja o bit će svi skupovi $A \subseteq S$, ako su ispunjena ova dva uslova

$$o \in A, \ \lim_{n \to \infty} \frac{R_n A}{n} = \infty ;$$

dokaži, da tako definiran prostor zadovoljava: aksiomima $K_1 - K_4$ Kuratowskoga, aksiom T_2, nadalje da je $o \in \overline{N}$ ali da ne postoji ni jedan beskonačan niz prirodnih brojeva koji bi konvergirao prema o.

§ 27.15.8. *(Prostori semikontinuiteta).* Promatraj prostor $(C; \overline{})$ sastavljen od svih realnih brojeva, a u kojem se prostornost — određuje pomoću skupova $(x, \infty)_C$, $(x \in C)$ smatrajući svaki taj skup okolinom svakog svojeg elementa; dokaži da je

$$\{0\}' = (-\infty, 0)_C.$$

Neprekidno jednoznačno preslikavanje nekog prostora na gornji prostor zove se prema Baire-u *odozdo poluneprekidno realno preslikavanje.*

Analogno se definira prostor semikontinuiteta zdesna i odozgo poluneprekidna realna preslikavanja.

Dokaži: *da realno preslikavanje bude neprekidno, nužno je i dovoljno da ono bude i odozdo i odozgo poluneprekidno* (Baire).

§ 27.15.9. Prostor $[P]$ poliјedara ($u\,C_3$) je skup svih poliјedara Kartezijeva prostora C_3, pri čemu niz poliјedara P_n konvergira prema poliјedru P, ako za svaki realni broj $\eta > 0$ postoji prirodan broj $n(\eta)$ tako da za svaki prirodni broj $n > n(\eta)$ postoji homeomorfno preslikavanje h_n poliјedra P na poliјedar P_n tako da međusobni razmak točaka

$$T, \ h_n T$$

bude $< \eta$ za svaku točku $T \in P$ (kraće se kaže da su P_n i T razmaknuti za $\leqslant \eta$ i to za svaki $n > n(\eta)$). Dokaži da u prostoru $[P]$ postoji prebrojiv svuda gust skup.

Dokaži da za svaki $X \in [P]$ ima polijedara kojima je površina proizvoljno veća od površine polijedra X, ma da su proizvoljno malo odmaknuti od X. Zato površina polijedra nije neprekidna realna funkcija. Ali jest neprekidna odozdo (dokaz).

§ 27.15.10. Da topološki prostor Kuratowskoga P zadovoljava Hausdorffovu aksiomu, treba, a i dosta je da dijagonala[1] topološkog produkta $P \times P$ bude zatvoren skup.

§ 27.15.11. Da topološki produkt (dvaju) zadanih prostora ispunjava Hausdorffov aksiom T_2, nužno je i dovoljno da svaki od tih prostora zadovoljava aksiomu T_2.

§ 27.15.12. Dokaži, da je topološki produkt beskonačnog niza odrezaka $[0, 1]_C$ homeomorfan sa Hilbertovim paralelepipedom.

§ 27.15.13. Neka su A, B dva disjunktna zatvorena skupa razdaljinskog prostora s metrikom ϱ; stavi li se za svaku točku x prostora:

$$f(x) = \frac{\varrho(x, A)}{\varrho(x, A) + \varrho(x, B)},$$

dokaži, da je f neprekidno jednoznačno preslikavanje prostora u $[0, 1]_C$ i da je $fA = 0$, $fB = 1$.

§ 27.15.14. Promatraj prostor

$$(N; -)$$

definiran pomoću okolina tako da je za svaki $n \in N$ sistem $O(n)$ okolina broja n sastavljen od svih skupova $o(n)$ za koje je

$$n \in o(n) \subseteq N, \quad k(N \setminus o(n)) < \aleph_0.$$

Dokaži: a) prostor $(N; -)$ zadovoljava aksiomima $K_1 - K_4$ Kuratowskoga kao i Fréchetovu aksiomu T_1, ali ne zadovoljava Hausdorffovu aksiomu T_2; čak se ni jedan par različitih točaka ne može jednovremeno odvojiti pomoću otvorenih skupova, jer svaka dva otvorena skupa imaju pun presjek; b) $\overline{2N-1} = N$; c) funkcija g za koju je

$$g(2n-1) = 2n-1, \quad g(2n) = 2n+2, \quad (n \in N)$$

jest neprekidna, podudara se sa identitetom na svuda gustom skupu $2N-1$, a da se ipak ne podudara svuda sa identičnom transformacijom; (isp. teor. 27.11.1).

§ 27.15.15. Uvjeri se da je prostor racionalnih brojeva topološka grupa.

§ 27.15.16. Ponovno proučiti §§ 29.6.15—29.6.20.

[1] t. j. skup svih (x, x), $(x \in P)$.

GLAVA V.

NEKOLIKO OSNOVNIH TEOREMA MATEMATIČKE ANALIZE.

Znamo od kolike je važnosti:

1) Bolzanov teorem: svaka neprekidna realna funkcija definirana u nekom intervalu prelazi od jedne vrijednosti na drugu tako da prođe i svima međuvrijednostima;

2) Bolzano-Weierstrassov teorem: svaki beskonačni ograđeni euklidski skup ima bar jedno gomilište (koje naravno ne mora pripadati tome skupu);

3) Weierstrassov teorem o ekstremima: svaka neprekidna realna funkcija definirana u nekom zatvorenom intervalu ima svoj određen maksimum i minimun;

4) Heineov teorem o jednolikoj neprekidnosti svake neprekidne realne funkcije koja je definirana u zadanom zatvorenom ograđenom intervalu;

5) Cauchy-ev kriterij konvergencije za nizove realnih ili kompleksnih brojeva odn. točaka u Kartezijevim prostorima.

Te ćemo teoreme sada dokazati; vidjet ćemo, da je svaki od njih povod za uvođenje određenih vrsta prostora i skupova.

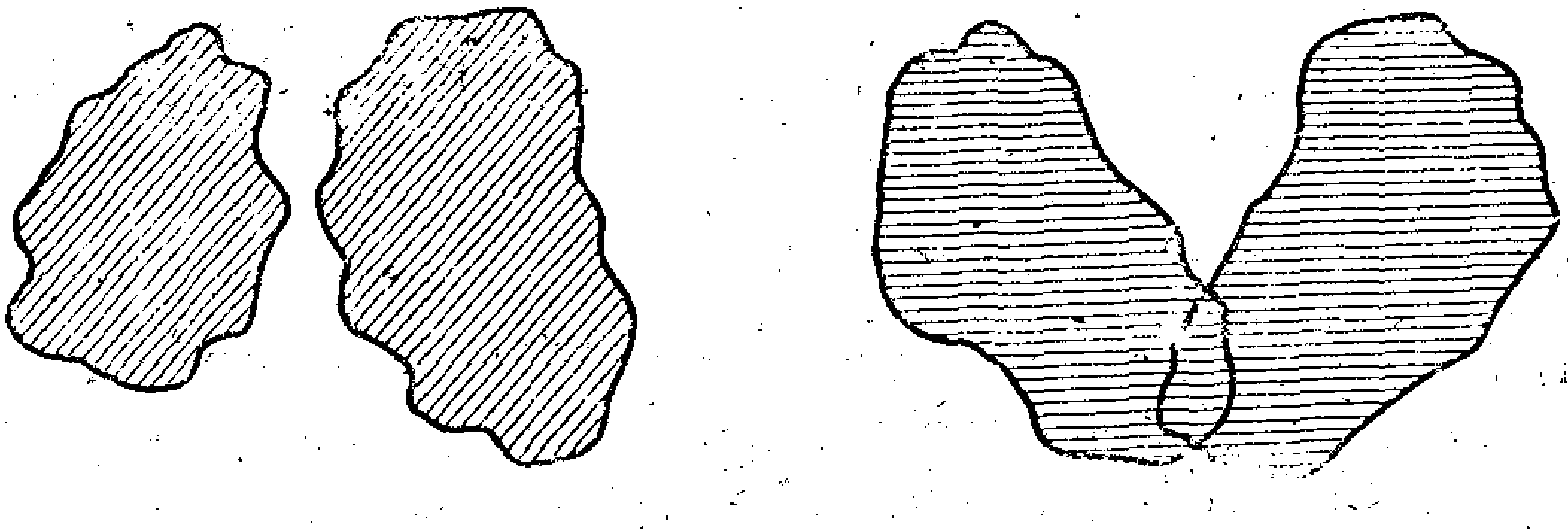
Tako je Bolzanov teorem specijalan slučaj činjenice, da je *svezanost* (koneksija) skupova invarijantno svojstvo prema neprekidnim transformacijama,

Cauchy-ev kriterij daje povoda da se uvedu t. zv. ***potpuni*** (kompletni) ***razdaljinski prostori***, Bolzano-Weierstrassov teorem je povod da se razmatraju t. zv. ***kompaktni*** i ***bikompaktni*** skupovi i t. d. i t. d.

Vidjet ćemo od kolike je važnosti očigledni pojam ***prekrivanja*** izvjesnog skupa sistemom zadanih skupova, te Borel-Lebesgue-ovo svojstvo skupa da se svaki njegov prekrivač može zamijeniti sa konačnim dijelom toga istoga prekrivača.

§ 28. SVEZANOST (SUVISLOST, KONEKSIJA) SKUPOVA U OKOLINSKIM PROSTORIMA (BOLZANOV TEOREM).[1]

Čini nam se prirodnim da lijevi skup na slici zovemo nesvezanim a desni svezanim skupom.



Nesvezan skup. Sl. 28.1. Svezan skup.

Zor nam pokazuje da kugla, kocka, pravac i t. d. nisu raskomadani skupovi.

Da stvar postane jednoznačno određena, neka ubuduće važi

§ 28.1. Definicija svezanosti (koneksije).

Skup A je *nesvezan (raskomadan, nesuvisao)*, ako se on može rastaviti u dva puna dijela od kojih se ni jedna točka jednoga dijela ne dodiruje drugoga dijela t. j. ako je

(28.1.1) $$A = X \cup Y \quad \text{i k tome}$$

(28.1.2) $$X \supset v, \; Y \supset v \quad \text{te}$$

(28.1.3) $$X \cap \overline{Y} = v = \overline{X} \cap Y.$$

Ako skup A nije nesvezan reći ćemo, da je on *svezan (suvisao, koneksan)*.

Svaki jednočlani skup smatrat ćemo suvislim. Prema tome, svezan skup je svaki pun skup A kod kojega relacije

$$A = X \cup Y,$$

$$\overline{X} \cap Y = v = X \cap \overline{Y}$$

povlače pustotu jednog od skupova X i Y.

Definicija 28.1.2. Zatvoreni suvisli skup zove se ***neprekidnim skupom ili kontinuumom;*** svaki otvoreni svezani skup zove se ***oblašću ili područjem.***

[1]) Misli se na ovaj Bolzanov teorem: Ako je realna funkcija neprekidna u skupu realnih brojeva ili kojem njegovu intervalu, onda ona ne ispušta ni jedne međuvrijednosti (isp. teorem 28.6.2).

§ 28.2. Linearni skupovi.

Teorem 28.2.1. *Da pun linearni skup A bude svezan, nužno je i dovoljno, da on ne ispušta nijedne „međutočke" t. j. da iz $x \in A$, $y \in A$ slijedi da i čitav segment $[x, y]$ leži u A.*

Nužnost: nijedan svezan linearan skup ne ispušta nijedne međutočke. Kad bi naime linearan skup A ispuštao neku međutočku z t. j. sadržavao bar dvije točke x, y sa svojstvom da je $x < y$, dok bi naprotiv postojala bar jedna točka z između x i y, koja ne leži u A onda stavljajući

$$X = (-\infty, z)_A, \quad Y = (z, +\infty)_A,$$

bile bi ispunjene relacije (28.1.1), (28.1.2), (28.1.3), što znači, da bi se skup A mogao prelomiti, protivno pretpostavci da je A svezan.

Dovoljnost: ako linearni skup A sadrži bar dvije točke, a ne ispušta nijedne međutočke, tada je A svezan: iz

$$A = X \cup Y \tag{28.2.1}$$

$$\overline{X} \cap Y = v = X \cap \overline{Y} \tag{28.2.2}$$

proizlazi da jedan od skupova X i Y mora biti pust.

Svakako je bar jedan od skupova X i Y pun; neka to bude recimo X; neka je x ma koja točka skupa X; označimo sa

$$K(x) \tag{28.2.3}$$

najveći komad linearnog kontinuuma koji sadrži x, a sadržan je u X; skup $K(x)$ je potpuno određen i jednak je uniji svih komada koji sadrže x, a sadržani su u X. Tvrdimo, da je

$$K(x) = A, \tag{28.2.4}$$ iz čega s obzirom na

$$K(x) \subseteq X \subseteq A \quad \text{slijedi} \quad X = A \quad \text{i dakle} \quad Y = v,$$

jer su zbog (28.2.2) skupovi X i Y disjunktni. No, kad ne bi bilo $K(x) = A$ nego $K(x) \subset A$, postojala bi bar jedna točka

$$a \in A \setminus K(x). \tag{28.2.5}$$

Kako je $K(x)$ određen *komad* potpuno uređena skupa A, to je ta točka a ili majoranta ili minoranta skupa $K(x)$. Ako je a majoranta skupa $K(x)$, tada postoji i točka

$$\sup K(x). \tag{28.2.6}$$

Svakako ta točka leži u skupu $\overline{K(x)}$, jer svaka njena okolina sadrži bar jednu točku iz skupa $K(x)$. Kako točka (28.2.6) pripada zadanom skupu A, ležat će ona ili u X ili u Y. U prvom slučaju leži točka (28.2.6) u $\overline{Y}$ a u drugom u $\overline{X}$, tako da ni u kojem slučaju nije zadovoljen sistem relacija (28.2.2), protivno pretpostavci.

Analogno se obrađuje slučaj uz hipotezu da je a ne majoranta nego minoranta skupa $K(x)$.

Na osnovu dokazanog teorema lako se dokazuje

Teorem 28.2.2. *Linearni neprekidni skupovi podudaraju se sa jednočlanim linearnim skupovima ili zatvorenim intervalima; linearna područja podudaraju se sa otvorenim linearnim intervalima.*

Primjedba 28.2.1. Ako se linearnom svezanom skupu oduzme i samo jedna točka koja nije krajnja točka skupa, prestaje skup biti svezanim: *on se raskomadava.* Specijalno, ispustimo li iz linearnog kontinuuma jednu točku, ostaje skup koji se može rastaviti. [1])

Sasvim je drukčije za Kartezijeve prostore od 2 i više dimenzija; svi su oni svezani, a Sierpinski je dokazao, da izbacivanjem iz C_n, $(n = 2, 3, \ldots)$ ma kojeg skupa koji nema savršenog podskupa, preostatak još uvijek ostaje svezanim.

§ 28.3. **Karakteristično svojstvo svezanih skupova.**

Teorem 28.3.1. *Da neki pun skup bude svezan, nužno je i dovoljno, da se svaki par njegovih točaka može smjestiti u svezan dio zadana skupa.*

Da je uslov nuždan, to je jasno, jer je sam skup svoj svezan dio.

Dokažimo, da je uslov i dovoljan t. j. da je skup A svezan, ako se svaki par njegovih točaka može povezati suvislim dijelom skupa A; u protivnom slučaju, mogao bi se skup A rastaviti pa bi dakle postojao sistem (28.1.1)—(28.1.3).

Neka je x točka iz X, a y izvjesna točka iz Y; prema hipotezi, postoji suvisla množina M koja sadrži x i y, a sadržana je sva u A. Dakle je $M = M \cap A$. No, iz (28.1.1) izlazi sijekući sa M:

$$M = (M \cap X) \cup (M \cap Y). \tag{28.3.1}$$

Odmah se uviđa, da bi to bilo rastavljanje množine M. Jer, prvo, oba su člana u (28.3.1) puna, jer prvi od njih sadrži x, a drugi y. Nadalje zbog (28.1.3) nijedan od članova (28.3.1) nije u dodiru s drugim članom. Stvarno,

$$\overline{M \cap X} \cap (M \cap Y) \subseteq (\text{zbog } M \cap Y \subseteq Y) \subseteq \overline{M \cap X} \cap Y \subseteq$$
$$\subseteq (\text{zbog } \overline{M \cap X} \subseteq \overline{X}) \subseteq \overline{X} \cap Y \ (\text{po } (28.1.3)) = v.$$

Analogno se dokazuje, da se nijedna točka iz $M \cap X$ ne dodiruje skupa $M \cap Y$.

§ 28.4. **Udruživanje, proširivanje skupova i suvislost.**

Teorem 28.4.1. *Ako su A, B puni, zatvoreni (otvoreni) i disjunktni, tad je skup $A \cup B$ nesvezan.*

---

[1]) Naravno, tako da budu ispunjeni uslovi (28.1.1) — (28.1.3).

Uzmimo slučaj da su A, B zatvoreni; tada je

$$\bar{A} \cap B \subseteq A \cap B = v,$$

$$\bar{B} \cap A \subseteq B \cap A = v;$$

a to znači, da je $A \cup B$ ujedno rastav unije $A \cup B$. Dokažimo istu stvar, ako su A i B otvoreni. Dokažimo na pr. da je

$$\bar{A} \cap B = v.$$

U obrnutom slučaju, postojala bi točka $x \in \bar{A} \cap B$, pa dakle $x \in B$, a zbog otvorenosti skupa B, i okolina

$$o(x) \subseteq B.$$

Zbog $x \in \bar{A}$, bilo bi

$$o(x) \cap A \supset v,$$

a time zbog $o(x) \subseteq B$ pogotovo

$$B \cap A \supset v$$

protivno pretpostavci.

Teorem 28.4.2. *Ako dva svezana skupa A, B imaju pun presjek, onda je i njihovo udruženje $A \cup B$ svezan skup.*

Stvarno, kad bi skup $A \cup B$ bio nesvezan t. j. kad bi bilo moguće napisati

$$A \cup B = X \cup Y, \tag{28.4.1}$$

$$X \supset v, \; Y \supset v, \tag{28.4.2}$$

$$\bar{X} \cap Y = v = X \cap \bar{Y} \tag{28.4.3}$$

onda bi odatle zaključili, da se može rastaviti bar jedan od skupova A i B. Sijekući naime (28.4.1) sa A izlazi:

$$A = (A \cap X) \cup (A \cap Y). \tag{28.4.4}$$

Prvi slučaj: oba skupa u (28.4.4) jesu puna. Nemogućnost toga slučaja dokazuje se isto tako kao što smo dokazivali i nemogućnost rastavljanja (28.3.1).

Drugi slučaj: jedan od skupova (28.4.4) je prazan, recimo $A \cap X = v$; tada je $A \cap Y = A$ dakle $A \subseteq Y$. Zbog pretpostavke $A \cap B \supset v$, tada bi bilo

$$B \cap Y \supset v. \tag{28.4.5}$$

Kako je $A \cap X = v$, to znači, da je $X \subseteq B$ dakle

$$B \cap X \supset v. \tag{28.4.6}$$

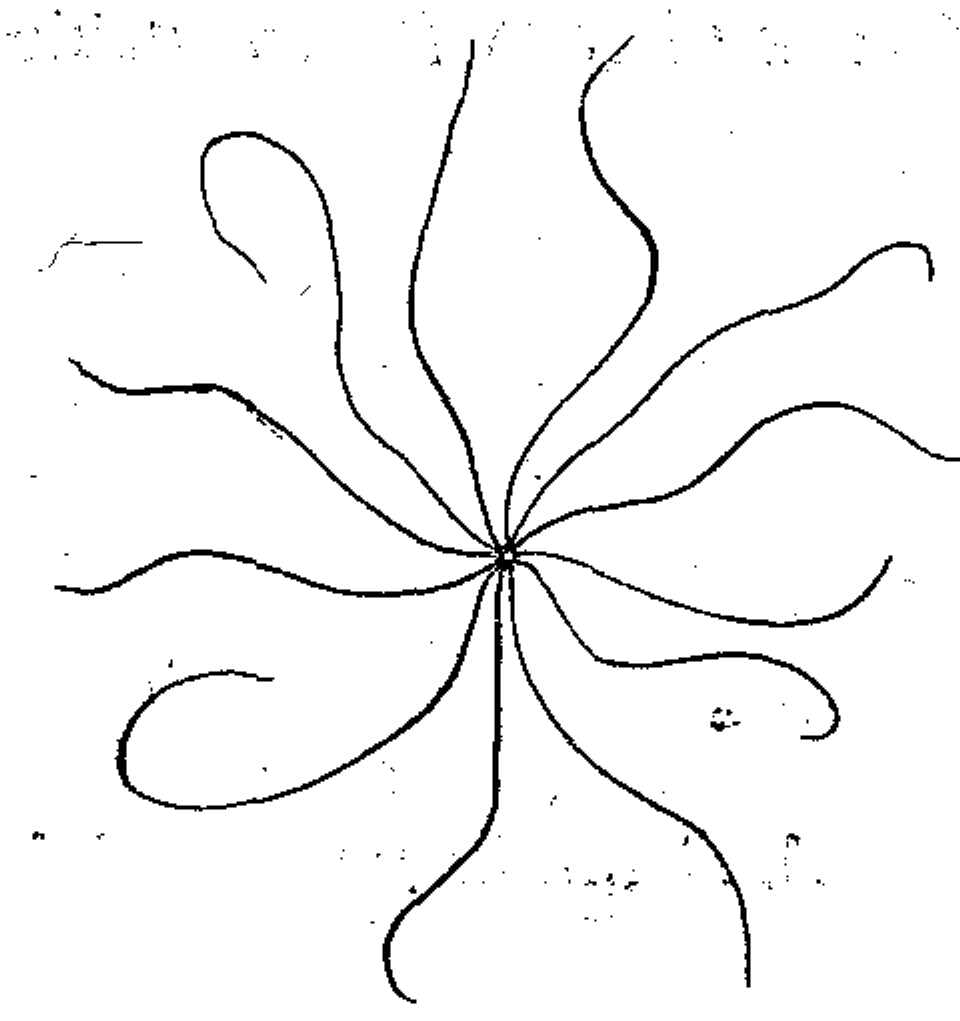
No, iz (28.4.1) sijekući sa B izlazi:

$$B = (B \cap X) \cup (B \cap Y). \tag{28.4.7}$$

S obzirom na (28.4.5) i (28.4.6) dokazuje se nemogućnost posljednje jednakosti na isti način na koji je pokazana nemogućnost jednakosti (28.3.1).

Teorem 28.4.3. *Udruženje (unija) ma kojeg punog sistema svezanih skupova od kojih dva po dva imaju pun presjek jest opet svezan skup.*

Stvarno, označimo li to udruženje sa U, tada se svaki par x, y njegovih točaka može spojiti svezanim dijelom skupa U. Jer, ako je X ma koji član zadana sistema sa svojstvom da sadrži točku x, a Y analogan član koji sadrži y, tada je po hipotezi $X \cap Y \supset v$, pa po prethodnom teoremu skup $X \cup Y$ je svezan dio skupa U. Kako nadalje skup $X \cup Y$ sadrži i x i y, izlazi suvislost skupa U iz dovoljnog dijela teorema 28.3.1.


Sl. 28.4.1.
Primjer svezana skupa.

Korolar 28.4.1. Udruženje ma kojeg sistema dužina koje imaju istu početnu točku čini svezan skup. Specijalno, svaki konveksan skup[1]) je svezan.

Teorem 28.4.4. *Ako je skup M svezan i sadržan u svojoj prostornosti $\overline{M}$, onda je svezan i skup $\overline{M}$ i svaki eventualni skup A smješten između skupa M i njegove prostornosti $\overline{M}$.*

Stvarno, neka je

$$M \subseteq A \subset \overline{M};$$

pretpostavimo da se A može prelomiti, t. j. da važe odnosi (28.1.1) do (28.1.3).

Sijekući (28.1.1) sa M, dobili bi na osnovu $M \cap A = M$ relaciju:

$$M = (M \cap X) \cup (M \cap Y). \tag{28.4.8}$$

Međutim, ta jednakost nije moguća. Ako su naime oba člana u (28.4.8) puna, onda se nemogućnost rastava (28.4.8) pokazuje kao i maloprije. Ako je jedan član u (28.4.8) prazan, recimo $M \cap X = v$, bit će $M \subset Y$ dakle $\overline{M} \subseteq \overline{Y}$, što s očitom relacijom $X \subset \overline{M}$, daje $X \subset \overline{Y}$ i i dakle $X \cap \overline{Y} = X$, a to nije u suglasnosti sa relacijama (28.1.2) i (28.1.3).

[1]) Skup je *konveksan (ispupčen)*, ako iz činjenice da dvije točke pripadaju skupu, možemo vazda zaključiti da i pravocrtna spojnica tih točaka pripada tom skupu. Na pr. kugla je konveksan skup.

§ 28.5. Rastavljanje skupa na disjunktne svezane dijelove. Komponenta skupa.

Pođimo od proizvoljna puna skupa S; ako je x ma koja njegova točka, označimo sa

$$K(x; S) \tag{28.5.1}$$

udruženje svih svezanih skupova koji sadrže x, a sadržani su u S; kako je i sama točka x svezan skup, to znači da je skup $K(x; S)$ pun dio skupa S. No, kako $K(x; S)$ nastaje udruživanjem svezanih skupova od kojih svaki par ima pun presjek, jer svi sadrže točku x, to će prema teoremu 28.4.3 skup $K(x; S)$ biti i sam svezan.

Skup $K(x; S)$ je najveći mogući svezani skup koji sadrži x, a sadržan je u S; on se zove *komponentom skupa S* ili još bolje *x-komponentom skupa S.*

Ako je skup S i sam svezan, onda je on i jedina svoja komponenta. Zbog teorema 28.4.2 dvije komponente skupa S ili su identične ili su disjunktne. Prema tome važi

Teorem 28.5.1. *Svaki puni skup S ili je svezan ili nastaje udruživanjem posve određenih disjunktnih maksimalnih svezanih skupova.*

§ 28.6. Neprekidna preslikavanja svezanih skupova (Bolzanov teorem).

Interes svezanih skupova proističe iz ovog lijepog

Teorema 28.6.1. Svako jednoznačno neprekidno preslikavanje svezana skupa *daje opet svezan skup*, t. j. svezanost (koneksija) jest invarijantno svojstvo prema neprekidnim preslikavanjima.

Stvarno, neka je A svezan skup, a f ma kakvo jednoznačno neprekidno njegovo preslikavanje; tvrdi se, da je rezultat $f(A)$ toga preslikavanja opet svezan skup. U obrnutom slučaju, moglo bi se skup $f(A)$ prelomiti i napisati:

$$f(A) = X \cup Y \quad \text{sa svojstvima} \tag{28.6.1}$$

$$X \supset v, \ Y \supset v, \tag{28.6.2}$$

$$\overline{X} \cap Y = v = X \cap \overline{Y}. \tag{28.6.3}$$

Iz prve od tih relacija prelazeći na obrnuto preslikavanje f^{-1} slijedi:

$$f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(X \cup Y), \quad \text{dakle}$$

$$A = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y). \tag{28.6.4}$$

Dokažimo da (28.6.4) predstavlja rastavljanje skupa A.

Stvarno, najprije zbog (28.6.2) oba su skupa u (28.6.4) puna. Nadalje, nijedna točka iz jednog od tih skupova ne dodiruje se drugoga skupa; dokažimo na pr. da se nijedna točka $b \in f^{-1}(Y)$ ne dodiruje skupa $f^{-1}(X)$, t. j. da je

(28.6.5) $$\overline{f^{-1}(X)} \cap f^{-1}(Y) = v.$$

U obrnutom slučaju, postojala bi bar jedna točka b sa svojstvom

(28.6.6) $(b) \subseteq f^{-1}(Y)$, dakle i $f(b) \subseteq Y$, te $(b) \subseteq \overline{f^{-1}(X)}$.

Zbog pretpostavljene neprekidnosti transformacije f u točki (b) imamo odatle, po samoj definiciji kontinuiteta:

(28.6.7) $$f(b) \subseteq \overline{f(f^{-1}(X))} = \overline{X} \quad \text{jer je}$$
$$f(f^{-1}(X)) = X.$$

Iz (28.6.6) i (28.6.7) proizlazi da bi skup

$$\overline{X} \cap Y$$

sadržavao $f(b)$, protivno pretpostavci (28.6.3).

Time je teorem dokazan.

Kao specijalan slučaj teorema 28.6.1 imamo s obzirom na teorem 28.2.1 ovaj specijalni Bolzanov

Teorem 28.6.2. *Neprekidna realna funkcija definirana u svezanom skupu ne ispušta ni jedne jedine međuvrijednosti: prihvati li ona brojeve x i y, prihvatit će ona i svaki broj položen između x i y.*

Korolar 28.6.1. Ako je skup svezan, a jednoznačna realna funkcija f takova da u skupu prihvata i pozitivnih i negativnih vrijednosti, onda ona u tome skupu prihvata i vrijednost nulu.

Kako je paralelno projiciranje očito neprekidno preslikavanje, bit će projekcija svezana skupa opet svezan skup.

§ 28.7. ZADACI.

§ 28.7.1. Dokaži da je a) kružnica, b) krug, c) nutrina kugle, d) pramen pravaca, e) skup kompleksnih brojeva svezan skup.

§ 28.7.2. Skup a) racionalnih, b) iracionalnih, c) svih ablgebarskih, d) bilo kojih rednih brojeva, nije svezan.

§ 28.7.3. Uvjeri se, da je svezana dvotočka svezan skup (§ 27.15.3).

§ 28.7.4. Ako svezan ravninski skup sadrži bar jednu točku iz nutrine kruga i bar jednu iz vanjštine kruga, sadrži on i bar jednu točku sa kružnice. Općenitije:
Ako koneksan skup A presijeca i B i njegov komplement CB, tada A ima bar jednu zajedničku točku sa međom fr B skupa B.

§ 28.7.5. Dokaži svezanost a) ravnine, b) torusa, shvaćajući ih kao produkt suvislih (svezanih) prostora.

§ 28.7.6. Da produkt od ma koliko prostora bude svezan, treba, a i dosta je, da svaki od faktora bude svezan.

§ 28.7.7. Kvocijent svezana prostora opet je svezan prostor.

§ 28.7.8. Spoj (unija) od dva ili više prostora bez zajedničkih točaka ne može nikad biti svezan prostor. Spoj lokalno svezanih prostora opet je lokalno svezan prostor. [1])

§ 29. KOMPAKTNOST I BIKOMPAKTNOST [2]) (BOLZANO-WEIERSTRASSOV TEOREM). BOREL-LEBESGUEOVO SVOJSTVO.

U počecima više analize dokazuje se (obično metodom biparticije) ovaj Bolzano-Weirstrassov teorem: svaki beskonačni ograđeni skup realnih brojeva dopušta bar jedno gomilište (koje može, ali ne mora ležati u tome skupu). S tim teoremom je povezan Cantorov teorem o presjeku zatvorenih ograđenih skupova te ovaj Weierstrassov teorem o ekstremima:

Ako je linearni skup S zatvoren i ograđen, a f ma kakva realna neprekidna funkcija u S, tada je i skup $f(S)$ zatvoren i ograđen, pa ima početnu i završnu točku tzv. minimalnu i maksimalnu vrijednost funkcije f u S.

Svi će ti teoremi sada biti dokazani, ali u mnogo općenitijem obliku.

§ 29.1. Kompaktni i u sebi kompaktni skupovi.

Definicija 29.1.1. *Skup S je kompaktan (u sebi) ako je konačan ili ako svaki njegov beskonačan dio dopušta bar jedno gomilište (koje leži u skupu S)* t. j. ako je

(29.1.1) ili $kS < \aleph_0$, ili ako iz $X \subseteq S, kX \geqslant \aleph_0$ slijedi $X' \supset v$

(odn. $X' \cap S \supset v$).

Specijalno, svaki metrički (razdaljinski) u sebi kompaktni skup možemo zvati *kompaktum.* Naravno, da se na osnovu toga zna što znači da je zadani prostor kompaktan (dakle i u sebi kompaktan).

Tako na pr. prostor realnih brojeva nije kompaktan, kao niti uređeni prostor svih rednih brojeva $\lessgtr \omega_0$; naprotiv, uređeni prostor svih rednih brojeva $< \omega_1$ jest kompaktan, jer ako je S ma koji beskonačan skup rednih brojeva $< \omega_1$, a X ma koji prebrojiv dio skupa S, tada je $\sup X < \omega_1$; prvi redni broj druge vrste koji je $\leqslant \sup X$ jest gomilište skupa X dakle i skupa S.

---

[1]) Prostor je *lokalno svezan,* ako se on može definirati pomoću *svezanih* okolina.
[2]) Ili hiperkompaktnost.

Lema 29.1.1. *Ako je η ma koji realan broj > 0, tada svaki razdaljinski kompaktni skup S sadrži tek konačno mnogo točaka kojima je međusobni razmak $\geqslant \eta$; specijalno, postoji konačan skup*

$$R(\eta) \subseteq S \tag{29.1.2}$$

tako da svaka točka iz S bude od bar jedne točke skupa $R(\eta)$ udaljena za $< \eta$ t. j.

$$S \subseteq \bigcup_a K(a; \eta), \quad (a \in R(\eta)); \tag{29.1.3}$$

pritom je $K(a; \eta)$ skup svih točaka udaljenih od a za $<\eta$. Specijalno za svaki prirodni broj n skup $R\left(\frac{1}{n}\right)$ je konačan.

Neka je naime $a_0 \in S$; ako je $k(a_0; \eta) \supseteq S$, stvar je gotova, jer je dovoljno staviti $R(\eta) = \{a_0\}$; ako je $S \setminus K(a_0; \eta) \supset v$, neka je a_1 izvjesna točka toga skupa; uopće, neka za svaki prirodni n bude

$$a_\nu \in S \setminus \bigcup_{\nu < n} K(a_\nu; \eta); \tag{29.1.4}$$

proces se mora završiti za neki prirodan broj n, jer bi u obratnom slučaju dobili beskonačan skup

$$A = \{a_0, a_1, \ldots a_n; \ldots\} \tag{29.1.5}$$

kojemu su točke međusobno razmaknute za $\geqslant \eta$; no $A \subseteq S$, pa zbog kompaktnosti skupa S, bilo bi $A' \supset v$; neka je $x \in A'$; to znači, da bi svaka kuglica oko x pa dakle i $K(x; \eta/4)$ kojoj je dijametar $\leqslant \eta/2$ sadržavala beskonačno mnogo točaka skupa A; to je međutim apsurd, jer je dijametar te kuglice $\leqslant \eta/2$, pa u njoj ne može ležati nikoji par različitih točaka skupa A, jer im je razmak $\geqslant \eta$.

Dakle se zbilja konstrukcija točaka a_ν mora završiti sa nekim prirodnim brojem n, što znači da je

$$\bigcup_{\nu < n} K(a_\nu; \eta) \supseteq S, \quad \text{pa je dovoljno staviti}$$

$$R(\eta) = \{a_0, a_1, \ldots a_{n-1}\},$$

da se vidi ispravnost leme.

Lema 29.1.2. *Svaki razdaljinski kompaktni skup sadržan je u prostornosti konačna ili prebrojiva skupa i može se definirati pomoću konačno ili prebrojivo mnogo okolina.*

Stvarno, stavimo li

$$S_0 = \bigcup_{n < \omega} R\left(\frac{1}{n}; S\right) \tag{29.1.6}$$

dobije se konačan ili prebrojiv skup S_0; no S_0 je gust u S, jer za svaki n važi

$$S \subseteq \bigcup_a K\left(a; \frac{1}{n}\right), \quad \left(a \in R\left(\frac{1}{n}; S\right)\right)$$

što znači, da za svaki $x \in S$ važi

$$x \in K\left(a; \frac{1}{n}\right) \text{ za bar jedan } a \in R\left(\frac{1}{n}; S\right) \subseteq S_0 \text{ t. j.}$$

$$a \in K\left(x; \frac{1}{n}\right) \text{ dakle}$$

$$K\left(x; \frac{1}{n}\right) \cap S_0 \supset v$$

za svaki $x \in S$ i svaki prirodni broj n; a to baš znači da je

$$\overline{S_0} \supseteq S, \text{ t. j. da je } S_0 \text{ gust na } S.$$

Da se vidi, da se prostor sa točkama skupa S može definirati pomoću $\leqslant \aleph_0$ okolina, dovoljno je promatrati kuglice sa središtem u S_0 i sa racionalnim radiusom, pa uzeti da svaka kuglica pokriva svaku svoju unutrašnju točku.

Lema 29.1.3. *Svaki kompaktan razdaljinski skup jest ograđen*[1].

Stvarno, promatrajmo za neki realni $\eta > 0$ konačni skup $R(\eta) = \{a_1, \ldots, a_n\}$; tada je za ma koje točke $x, y \in S$:

$$\varrho(x, y) \leqslant \varrho(x, a_1) + \varrho(a_1, a_2) + \ldots + \varrho(a_{n-2}, a_{n-1}) + \varrho(a_{n-1}, y) \leqslant n \cdot \eta;$$

dakle dijametar skupa S ne premašuje broja $n\eta$.

§ 29.2. **Borel-Lebesgueovo svojstvo.** Veli se da skup X *prekriva* točku a ili da je X okolina točke a, ako a leži u nutrini skupa X t. j. ako je

$$a \in int\, X. \tag{29.2.1}$$

Porodica Π skupova *prekriva* skup S ako je svaki $x \in S$ prekriven bar jednim članom iz Π t. j. ako je

$$S \subseteq \bigcup_X int\, X, \ (X \in \Pi). \tag{29.2.2}$$

Veli se, da skup S posjeduje Borel-Lebesgue-ovo svojstvo, ako svaka porodica Π skupova za koju je

$$S \subseteq \bigcup_{X \in \pi} int\, X \tag{29.2.3}$$

sadrži *konačan dio* $\Pi_0 \subseteq \Pi$ sa sličnim svojstvom:

$$S \subseteq \bigcup_{X \in \pi_0} int\, X. \tag{29.2.4}$$

Kraće se kaže, da se *prekrivač* Π *može reducirati na konačan prekrivač* Π_0.

Taj je pojam od vanredno dalekosežne važnosti.

[1] Razdaljinski skup je ograđen, ako mu je dijametar određen realan broj; dijametar = supremum razmaka svih parova točaka iz skupa.

Teorem 29.2.1. *Ako skup S leži u topološkom prostoru koji se može definirati sa $\leqslant \aleph_0$ okolina, pa ako porodica Π skupova prekriva skup S, tada sistem Π sadrži konačan ili prebrojiv dio koji također prekriva S.*

Stvarno, neka je O prebrojiv niz okolina zadanog topološkog prostora; to znači, da se svaki otvoreni skup može prikazati unijom skupova izvjesnog dijela sistema O; specijalno, za svaki $X \in \Pi$ postoji izvjestan dio od O čija unija daje skup $int\, X$.

Označimo sa O_0 skup svih elemenata iz O koji su sadržani u bar jednom elementu prekrivača Π. Naravno, da je sistem O_0 potencije $\leqslant \aleph_0$; pridružimo svakom $X \in O_0$ izvjestan $X_0 \in \Pi$ sa svojstvom, da bude $X \subseteq int\, X_0$; označimo li sa Π_0 skup svih X_0, kad X prolazi sistemom O_0, bit će

$$k\Pi_0 \leqslant \aleph_0 \quad \text{i} \quad \Pi_0 \subseteq \Pi; \qquad \text{nadalje je}$$

$$\bigcup_{X \in \pi} int\, X = \bigcup_{Y \in \pi_0} int\, Y.$$

Time je teorem dokazan.

Teorem 29.2.2. *Ako je skup S kompaktan, tada svaki monotoni niz zatvorenih punih skupova iz S posjeduje pun presjek koji leži u S.*

Teorem je očigledan, ako je niz uzlazan. Ako je niz silazan, recimo

$$F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2, \ldots,$$

možemo suponirati, da tu važi svuda znak $\supset$; promatrajmo točke $x_n \in F_n \setminus F_{n+1}$; njihov je skup X beskonačan, pa zbog kompaktnosti skupa S i zbog $S \supseteq X$ slijedi $S \cap X' \ni v$; kako je očigledno

$$\{x_0, x_1, \ldots\}' = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}' \quad \text{i}$$

$$\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \subseteq F_n,$$

to znači da je

$$\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}' \subseteq F_n, \quad \text{t. j.} \quad x' \subseteq F_n$$

za svaki n, dakle $v \in X' \subseteq \bigcap_{n < \omega_0} F_n$, što smo i htjeli da pokažemo.

Teorem 29.2.3. *Da skup iz metričkog prostora bude kompaktan u sebi, nužno je i dovoljno, da taj skup posjeduje Borel-Lebesgue-ovo svojstvo:*

Uslov je nuždan: ako je skup S kompaktan u sebi, tada svaki prekrivač Π skupa S sadrži konačan prekrivač Π_k skupa S.

Najprije, prema teoremu 29.2.1, možemo pretpostaviti da je Π *prebrojiv* i da je recimo

$$\Pi = \{G_0, G_1, \ldots, G_n, G_{n+1}, \ldots\};$$

kad ne bi postojao konačan prekrivač $\Pi_k \subseteq \Pi$, to znači, da bi zatvoren skup

$$F_n = S \setminus \bigcup_{\nu < n} int\, G_\nu$$

bio nepust za svaki $n < \omega_0$; kako je očito niz $F_0, F_1 \ldots$ silazan, to bi, prema teoremu 29.2.2, postojala bar jedna točka $a \in S$ koja leži u svima F_n. To znači da bi bilo

$$a \in S \setminus \bigcup_{\nu < \omega_0} int\, G_\nu$$

protivno pretpostavci, da je čitav S prekriven skupovima G_ν.

Uslov teorema je dovoljan: ako metrički skup S posjeduje Borel-Lebesgue-ovo svojstvo, onda je on kompaktan u sebi.

Kad S ne bi bio kompaktan u sebi, postojao bi beskonačan skup

$$X = \{x_0, x_1, \ldots x_n, \ldots\} \subseteq S, \tag{29.2.5}$$

za koji je $X' \cap S = v$. To pak znači, da bi za svaki $a \in S$ postojala bar jedna kuglica (okolina) $o(a)$ tako da bude:

$$o(a) \cap (S \setminus (a)) = v;$$

no skup O svih tih $o(a)$ prekriva S; kako, po hipotezi, S ima Borel-Lebesgue-ovo svojstvo, to znači. da bi sistem O sadržavao konačan prekrivač O_0 skupa S; međutim, to nije moguće, jer specijalno važna točka x_n beskonačna skupa (29.2.5) prekrivena je jedino pripadnom okolinom $o(x_n)$ koja od čitava skupa S u sebi sadrži jedino točku x_n. Prema tome svaki prekrivač $\subseteq O$ skupa S mora sadržavati beskonačni niz članova $o(x_n)$. protivno pretpostavci, da se svaki prekrivač skupa S može nadomjestiti svojim konačnim dijelom.

Korolar 29.2.1. *Svaki razdaljinski kompaktni prostor posjeduje Borel-Lebesgue-ovo svojstvo.*

§ 29.2 1. **Primjer potpuno uređena kompaktna prostora bez Borel-Lebesgue-ova svojstva** pruža uređeni prostor svih rednih konačnih odn. prebrojivih brojeva. Taj je prostor očigledno kompaktan, jer ako je S ma koji beskonačan njegov dio, a $X \subseteq S$ prebrojiv skup, tada je $sup\, X$ određen redan prebrojiv broj; najveći broj druge vrste koji je $\leqslant sup\, X$ očito je gomilište skupa X pa dakle i skupa S što znači da je $S' \supset v$.

U drugu ruku, taj prostor nema Borel-Lebesgueova svojstva; jer pridijelimo li svakom rednom broju α skup $(-\infty, \alpha+1)$ rednih brojeva $\leqslant \alpha$, dobit ćemo određen prekrivač prostora, a očigledno se on ne može nadomjestiti nikojim svojim konačnim pa niti prebrojivim dijelom.

Taj primjer pokazuje, da svaki beskonačan dio X prostora može imati bar jedno gomilište, no da ne mora postojati i takvo gomilište a da u svaku njegovu okolinu pada kX točaka iz X.

§ 29.3. **Bikompaktni skupovi.** Veli se, da je S *bikompaktan* ili *hiperkompaktan* (*u sebi*), ako za svaki beskonačni $X \subseteq S$ postoji bar jedna točka a (iz S) takozvano *nadgomilište skupa* X sa svojstvom da *u nutrini svake* okoline od a pada kX točaka iz X t. j. da bude

(29.3.1) $$k(S \cap \operatorname{int} o(a)) = kX$$

za svaku okolinu $o(a)$ od a.

Naravno, ako je skup hiperkompaktan (u sebi), onda je on i kompaktan (u sebi). Na osnovu primjera 29.2.1 i teorema 29.3.1 zaključujemo da ima kompaktnih (čak i uređenih) prostora koji nisu hiperkompaktni.

Teorem 29.3.1. (Chittenden). *Da skup bude bikompaktan u sebi, treba, a i dovoljno je, da on posjeduje Borel-Lebesgue-ovo svojstvo.*

Uslov je dovoljan: ako množina M posjeduje Borel-Lebesgue-ovo svojstvo, tada je ona bikompaktna u sebi. U obrnutom slučaju postojao bi beskonačan skup

(29.3.2) $$X \subseteq M$$

sa svojstvom, da bi svakoj točki $a \in M$ pripadala bar jedna okolina

(29.3.3) $$o(a) \quad \text{sa svojstvom}$$

(29.3.4) $$k(M \cap \operatorname{int} o(a)) < kX \leqslant kM.$$

No kako je $a \in \operatorname{int} o(a)$, to znači da bi bilo

(29.3.5) $$M \subseteq \bigcup_{a \in M} \operatorname{int} o(a)$$

Drugim riječima, množina svih skupova (29.3.3) prekrivala bi skup M; kako, po hipotezi, M posjeduje Borel-Lebesgue-ovo svojstvo, to znači, da iz prekrivača skupova (29.3.3) možemo izabrati *konačan dio* Π_k koji također prekriva M dakle

$$M \subseteq \bigcup_Y \operatorname{int} Y, \ (Y \in \Pi_k) \quad \text{t. j.}$$

(29.3.6) $$M = \bigcup_Y M \cap \operatorname{int} Y, \ (Y \in \Pi_k).$$

Kako je po (29.3.4) kardinalni broj svakog od članova (29.3.6) manji od kM, to bi značilo, da je kardinalni broj kM manji od sume od konačno mnogo brojeva $< kM$, što je apsurd.

Uslov je nuždan: ako je množina M bikompaktna u sebi, onda svaki prekrivač Π množine M sadrži konačan dio koji već prekriva M.

Stvarno, među dijelovima prekrivača Π postoji bar jedan prekrivač Π_0 kojemu je potencija minimalna tako dakle da iz $P \subseteq \Pi$ i

(29.3.7) $$M \subseteq \bigcup_{X \in P} \operatorname{int} X \quad \text{slijedi} \quad k\Pi_0 \leqslant kP.$$

Pretpostavimo, da broj $k\Pi_0$ nije konačan. Neka je

(29.3.8) $$X_0,\ X_1,\ \ldots\ X_\alpha,\ \ldots,\ (\alpha < \omega_\xi)$$

transfinitan prebroj svih članaka skupa Π_0 (različitim indeksima odgovaraju različiti skupovi).

Dokažimo, da bi tada iz (29.3.8) mogli obrazovati transfinitan niz

(29.3.9) $$Y_0,\ Y_1,\ \ldots\ Y_\alpha,\ \ldots,\ (\alpha < \omega_\xi)$$

u kojem je svaki član *potreban,* pa da bi skup M bio prekriven.

Stvarno, stavimo:

$$Y_0 = X_0$$

i označimo za svaki $\alpha < \omega_\xi$ sa Y_α prvi član niza (29.3.8) u čijoj nutrini leži bar jedan element skupa M koji *ne leži u nijednom od skupova int* Y_β sa $\beta < \alpha$; dakle je

(29.3.10) $$M \cap (int\, Y_\alpha \setminus \bigcup_{\eta<\alpha} int\, Y_\eta) \supset v;$$

konstrukcija skupa Y_α je moguća i jednoznačno određena, jer za nijedan $\alpha < \omega_\xi$ sistem svih Y_η, $(\eta < \alpha)$ ne prekriva čitav skup M; u obratnom naime slučaju, skupovi $Y_\eta, (\eta < \alpha)$ obrazovali bi prekrivač od M i to potencije $k\alpha < k\omega_\xi = k\Pi_0$, protivno naravi prekrivača Π_0.

Na taj način transfinitni niz (29.3.9) bio bi obrazovan.

Neka je za svaki $\alpha < \omega_\xi$

$$x_\alpha$$

izvjesna točka skupa (29.3.10); neka je X skup svih tih točaka $x_\alpha, (\alpha < \omega_\xi)$.
Naravno da je

(29.3.11) $$X \subseteq M,\ kX = k\omega_\xi.$$

Prema definiciji skupova (29.3.9) neće skup Y_α prekriti nijedne točke x_ζ sa $\zeta > \alpha$; zato je

$$k(X \cap int\, Y_\alpha) \leqslant k\alpha \quad \text{dakle}$$

(29.3.12) $$k(X \cap int\, Y_\alpha) < k\omega_\xi \quad \text{za svaki } \alpha < \omega_\xi.$$

No, skup M je, prema pretpostavci, bikompaktan u sebi; zato će u vezi sa njegovim beskonačnim dijelom X postojati bar jedna točka $a \in M$ sa svojstvom, da za svaku okolinu $o(a)$ od a bude

(29.3.13) $$k(X \cap int\, o(a)) = kX = (\text{prema } 29.3.11) = k\omega_\xi.$$

No, kako $a \in M$ i kako skupovi (29.3.9) prekrivaju M, bit će bar jedan član Y_α iz (29.3.9) koji prekriva a t. j. za koji je $a \in int\, Y_\alpha$; a to znači, da je Y_α okolina od a, pa bi prema (29.3.13) moralo biti

$$k(X \cap int\, Y_\alpha) = k\omega_\xi, \quad \text{protivno odnosu (29.3.12).}$$

Time je važni teorem 29.3.1 potpuno dokazan.

Korolar 29.3.1. *Svaki okolinski prostor koji je bikompaktan posjeduje Borel-Lebesgue-ovo svojstvo; i obrnuto.*

§ 29.4. **Kompaktnost i bikompaktnost su ekvivalentna svojstva u razdaljinskim prostorima.**

Teorem 29.4.1. *Ako je kompaktan skup S smješten u razdaljinskom prostoru, onda je S i bikompaktan* (obrat je očigledan).

Stvarno, prema lemi 29.1.2 za kompaktni razdaljinski skup S postoji izvjestan prebrojiv skup

(29.4.1) $$O$$

nutrina kuglicâ, pomoću kojih se može definirati $\overline{S} = {}_rS \cup S'$ kao relativan prostor. Tvrdimo, da je skup S i bikompaktan: ako je

(29.4.2) $$X \subseteq S, \; kX \geqslant \aleph_0,$$

tada postoji bar jedna točka a prostora tako da bude

(29.4.3) $$k(X \cap o(a)) = kX \quad \text{za svaki} \quad o(a).$$

Zbog pretpostavljene kompaktnosti, slučaj $kX = \aleph_0$ je očigledan. Zato možemo uzeti da je

(29.4.4) $$kX > \aleph_0.$$

Kad relacija (29.4.3) ne bi važila, to bi značilo, da za svaku točku a postoji jedna okolina $V(a)$ iz (29.4.1) sa svojstvom

(29.4.5) $$k(X \cap V(a)) < kX.$$

No tih okolina V ima prebrojivo mnogo; neka je

(29.4.6) $$O(V)$$

njihov sistem; iz

$$X = \bigcup_V V \cap X, \; (V \in O(V))$$

izlazi

$$kX = k \bigcup_V (V \cap X) \leqslant \sum_V k(V \cap X) \leqslant \aleph_0 \cdot \sup k(X \cap V) \leqslant \aleph_0 \cdot kX = kX.$$

To znači, da je

(29.4.7) $$kX = \sup_V k(X \cap V), \; (V \in O(V)).$$

No, zbog (29.4.7) i činjenice da je

$$k\,O(V) \leqslant \aleph_0$$

proizlazi, da bi broj kX bio supremum niza kardinalnih brojeva $< kX$ [1]), na pr.

(29.4.8) $$kX = \sup_{n < \omega_0} \aleph_{\alpha_n}, \; (\aleph_{\alpha_n} < kX, \; n < \omega_0).$$

---

[1]) Drugo je pitanje dâ li taj slučaj može nastupiti; ako je Cantorova hipoteza kontinuuma istinita, onda taj slučaj ne može nastupiti.

Drugim riječima, ako broj kX nije toga oblika, onda jednakost (29.4.3) važi.

Specijalno, ako je

$$(29.4.9) \qquad X_n \subseteq X, \ kX_n = \aleph_{\alpha_{n+1}}, \ (n < \omega_0),$$

tada postoji bar jedna točka a_n sa svojstvom

$$(29.4.10) \qquad k(O(a_n) \cap X_n) = kX_n = \aleph_{\alpha_{n+1}}, \ (n < \omega_0).$$

Neka je

$$x_n \in X_n$$

tako da bude razmak

$$(29.4.11) \qquad \varrho(a_n, x_n) < \frac{1}{n+1}, \ (n < \omega_0).$$

Niz $x_0, x_1 \ldots$ pripada kompaktnom skupu S, pa zato on sadrži bar jedan parcijalan niz čija je granična vrijednost x; na taj način u svakoj kuglici $k(x; r)$ leži neizmjerno mnogo članova x_n, a zbog (29.4.11) i neizmjerno mnogo članova a_n. Stvarno, razmak

$$\varrho(x, a_n) \leqslant \varrho(x, x_n) + \varrho(x_n, a_n) \leqslant \varrho(x, x_n) + \frac{1}{n+1}.$$

Ako je dakle

$$\varrho(x, x_n) < \frac{r}{2}, \ \frac{1}{n+1} < \frac{r}{2}, \quad \text{bit će}$$

$$\varrho(x, a_n) < r.$$

Dakle uistinu u kuglici $K(x; r)$ ima neizmjerno mnogo članova a_n; no iz $a_n \in K(x; r)$ proizlazi, da je $K(x; r)$ izvjesna okolina točke a_n, pa je zato prema (29.4.10):

$$k(K(x; r) \cap X) \geqslant \aleph_{\alpha_{n+1}}, \ (n < \omega_0),$$

t. j. svaka okolina točke x sadrži kX točaka skupa X; a to smo i htjeli da pokažemo.

§ 29.5. **Linearni bikompaktni skupovi.**

T e o r e m 29.5.1. *Da linearan* [1] *skup S posjeduje Borel-Lebesgue-ovo svojstvo, treba a i dosta je, da S bude ograđen i zatvoren.*

N u ž n o s t. Kad S ne bi bio ograđen ili zatvoren, postojao bi niz X različitih točaka $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ bez ijednog gomilišta u S, pa bi oko svake točke x_n mogli opisati okolinu $O(x_n)$ tako da bude

$$O(x_n) \cap X = \{x_n\};$$

kako nijedna točka iz S nije gomilište od X, to znači, da bi za svaku točku $s \in S \setminus X$ postojala okolina $O(s)$ sa svojstvom $O(s) \cap X = v$; jasno je da skup Π svih tih

$$O(x), \ (x \in S)$$

[1]) Mjesto „linearan" može da stoji i „euklidski" („dekartski"). Poslije ćemo vidjeti, da teorem važi za svaki S izvađen iz *potpunog* razdaljinskog prostora.

prekriva S; kako S ima Borel-Lebesgueovo svojstvo, to bi iz prekrivača Π mogli izabrati njih konačno mnogo, Π_k, sa istim svojstvom. To je međutim nemoguće, jer za prekrivanje skupa S pomoću Π svi su skupovi $O(x_n)$, dakle njih neizmjerno mnogo potrebni, jer je $O(x_n)$ jedini član od Π koji prekriva x_n.

Dovoljnost. Neka je S ograđen i zatvoren, a Π ma kakav prekrivač od S; dokažimo, da se ovaj može nadomjestiti svojim konačnim dijelom.

No, kako je prostor S moguće definirati pomoću prebrojivog sistema

(29.5.1) $$O = \{V_0, V_1, \ldots, V_n, \ldots\}, \ (n < \omega_0)$$

promatrajmo sada skup

(29.5.2) $$O_0$$

svih $X \in O$ sa svojstvom da $int\, X$ bude sadržan u nutrini bar jednog člana prekrivača Π; naravno da je i O_0 prekrivač skupa S i da je $k\, O_0 \leqslant \aleph_0$.

Tvrdimo, da konačno mnogo članova $V_n \in O$ prekriva skup S t. j. da postoji prirodan broj n tako da bude

(29.5.3) $$S \subseteq \bigcup_{\nu < n} int\, V_\nu .$$

U obrnutom slučaju, za svaki prirodni broj n bilo bi

(29.5.4) $$S \setminus \bigcup_{\nu < n} int\, V_\nu \supset v.$$

No,

(29.5.5) $$S \setminus \bigcup_{\nu < n} int\, V_\nu = S \cap (\bigcap_\nu C(int\, V_\nu));$$

kako je svaki od skupova $C(int\, V_\nu)$ zatvoren, bio bi zatvoren i skup

(29.5.6) $$F = S \setminus \bigcup_{\nu < n} int\, V_\nu .$$

Na taj način imali bi silazan niz punih zatvorenih skupova; po Cantorovu teoremu 29.2.2, postojala bi bar jedna točka x zajednička svim skupovima (29.5.6); a to znači, da nijedan član u (29.5.1) ne bi prekrivao točke x, što je nemoguće. Dakle postoji broj $n < \omega_0$ tako da važi (29.5.3). Pridružimo li tada svakom V_ν, $(\nu < n)$ po jedan član $W_\nu \in \Pi$ sa svojstvom

$$int\, W_\nu \supseteq int\, V_\nu ,$$

dobit ćemo konačan dio

$$W_0, W_1, \ldots, W_{n-1}$$

prekrivača Π koji već i sam prekriva skup S.

Time je teorem potpuno dokazan.

Korolar 29.5.1. *Triadski skup T je bikompaktan.*

Korolar 29.5.2. *Svaki bikompaktan (kompaktan) linearni skup S ima početni i završni element, dakle:*

(29.5.7) $$\inf S \in S \ni \sup S.$$

§ 29.6. Bikompaktni prostori i njihove neprekidne transformacije.

Teorem 29.6.1. *Ako su nutrine skupova u prostoru Y otvoreni skupovi, ako nadalje prostor Y nastaje neprekidnom transformacijom bikompaktna prostora X, tada je i prostor Y bikompaktan. Specijalno, svaki neprekidni metrički transformat svakog bikompaktnog okolinskog prostora jest bikompaktan.*

Stvarno, neka je X bikompaktan prostor, f njegova neprekidna transformacija u prostor $fX = Y$; neka je Π proizvoljan prekrivač prostora $Y = fX$, to znači, da je

$$fX = \bigcup_S \operatorname{int} S, \quad (S \in \Pi);$$

kako su po pretpostavci *nutrine skupova* u fX otvorene, to je $f^{-1}\operatorname{int} S$ otvoren skup (v. teorem 27.6.2.1).

No, ako je

$$a \in X \quad \text{te} \quad f(a) \in \operatorname{int} S \in \Pi,$$

onda zbog otvorenosti skupa $\operatorname{int} S$ postoji okolina $o(f(a)) \subseteq \operatorname{int} S$, a zbog neprekidnosti i jedna okolina $o(a)$ od a sa svojstvom

$$f(o(a)) \subseteq o(f(a)) \subseteq \operatorname{int} S; \quad \text{odatle}$$

$$o(a) \subseteq f^{-1}(\operatorname{int} S); \quad \text{što znači da}$$

$$a \in \operatorname{int} o(a) \subseteq \operatorname{int}(f^{-1}(\operatorname{int} S)) \quad \text{t. j. skupovi}$$

(29.6.1) $$f^{-1}(\operatorname{int} S), \ (S \in \Pi)$$

prekrivaju prostor X. Kako je prostor X bikompaktan, to prema Chittendenovu teoremu 29.3.1 možemo iz skupova (29.6.1) izvući njih konačno mnogo, recimo ovih n:

(29.6.2) $$f^{-1}(\operatorname{int} S_\nu), \ (S_\nu \in \Pi, \ \nu < n),$$

tako da prekrivaju prostor X. Naravno, da tada skupovi S_ν, $(\nu < n)$, prekrivaju prostor $fX = Y$, što prema teoremu 29.3.1 znači da je Y bikompaktan.

Kao specijalan slučaj gornjeg teorema izlazi na osnovu teorema 29.5.1 ovaj

Teorem 29.6.2. *Svako neprekidno realno preslikavanje bikompaktna prostora prevodi ovaj u linearni skup koji je i ograđen i zatvoren, pa ima svoj prvi i posljednji član.*

Korolar 29.6.1. *Svaka neprekidna realna funkcija definirana u bikompaktnom prostoru dostiže svoj minimum i svoj maksimum.*

Kako je svaki ograđen i zatvoren skup u Kartezijevom prostoru ujedno i bikompaktan prostor, to iz gornjeg teorema proizlazi

Teorem 29.6.3. *Svaka neprekidna realna funkcija definirana u ograđenom i zatvorenom skupu $S \subseteq C_n$ ima svoj minimum i svoj maksimum.*

Teorem 29.6.4. *Svako neprekidno preslikavanje ograđena i zatvorena euklidskog*[1] *skupa u euklidski skup daje opet ograđen i zatvoren skup.*

§ 29.7. Kompaktni (bikompaktni) prostori. Jednolika neprekidnost.

§ 29.7.1. Opća svojstva. Definicija točke kondenzacije (zgušćivanja).

Veli se, da je točka a točka kondenzacije skupa X, ako u *svakoj* okolini točke a leži beskonačan i neprebrojiv dio skupa X. Sa

$$X_k \tag{29.7.1.1}$$

označavat ćemo skup svih točaka kondenzacije skupa X.

Lema 29.7.1.1. *Izuzev konačno ili prebrojivo mnogo točaka, svaka točka neprebrojiva skupa X iz separabilna razdaljinskog prostora jest točka kondenzacije toga skupa X.*

Dokažimo najprije da je

$$X \cap X_k > v. \tag{29.7.1.2}$$

U obrnutom naime slučaju, za svaki $a \in X$ postojala bi okolina $o(a)$ sa svojstvom da bude

$$k(X \cap o(a)) \leqslant \aleph_0; \tag{29.7.1.3}$$

no, kako je prostor separabilan, dakle i posve separabilan, možemo uzeti da je $o(a)$, $(a \in X)$ član *prebrojive porodice* O okolina prostora.

Očito je

$$X = \bigcup_{a \in X} (X \cap o(a))$$

što bi, s obzirom na (29.7.1.3) i na prebrojivost skupa O okolina, značilo, da je X prebrojiv, protivno pretpostavci.

Time je nejednakost (29.7.1.2) dokazana. Iz nje neposredno proizlazi gustoća skupa X_k, jer u neprebrojivom dijelu $o(a) \cap (X \setminus (a))$ ima točaka kondenzacije skupa $o(a) \cap X$, a time i skupa X.

Teorem 29.7.1.1. *Svaki kompaktum je separabilan i posve separabilan prostor; kardinalni broj kompaktuma je ili prirodan broj ili $\aleph_0$ ili $2^{\aleph_0}$.*

---

[1]) Skupovi smješteni u kojem Euklidovom prostoru C_n, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ zovu se euklidski skupovi.

Pitanje o separabilnosti raspravljeno je lemom 29.1.2; specijalno dakle postoji skup S potencije $\leqslant \aleph_0$ koji je svuda gust. To znači, da za svaku točku x postoji niz točaka $x_n \in S$ sa svojstvom da bude

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x;$$

drugim riječima, prostor ima najviše $(kS)^{\aleph_0} \leqslant (\aleph_0)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ točaka.

U drugu ruku, prema teoremu 27.3.2 prostor je unija savršena skupa S i raspršena skupa R (jedan od tih skupova može biti i pust). Prema lemi 29.7.1.1 skup R je konačan ili prebrojiv. Skup S je savršen (perfektan). Važi ovaj

T e o r e m 29.7.1.2. *Svaki savršen pun skup S u kompaktumu ima potenciju kontinuuma.*

Skup je naime u sebi gust, pa razmatranjem u vezi sa teoremom 27.11.2 dolazimo do sistema savršenih skupova

$$S_{i_0 i_1 \ldots i_n}, \; (i_n = 0 \text{ ili } 1, \; n = 0, 1, 2 \ldots .);$$

za svaki beskonačni niz

$$i_0, i_1, \ldots \tag{29.7.1.4}$$

brojeva 0 ili 1, ima strogo silazni niz savršenih skupova

$$S_{i_0} \supset S_{i_0 i_1} \supset \ldots ,$$

pa je očito njihov presjek

$$\bigcap_{n<\omega_0} S_{i_0 i_1 \ldots i_n} \supset v. \tag{29.7.1.5}$$

Ako uzmemo k tome da je

$$\text{dijametar } S_{i_0 \ldots i_n} < \frac{1}{n+1},$$

tada su skupovi (29.7.1.5) jednočlani i ima ih kontinuum mnogo. Dakle je

$$kS \geqslant c \; (= \text{potencija kontinuuma});$$

kako je sa druge strane kardinalni broj svakog kompaktuma $\leqslant c$, izlazi odatle i sam teorem 29.7.1.2.

T e o r e m 29.7.1.3. *Svaki zatvoreni skup (iz kompaktuma) shvaćen kao relativan prostor jest kompaktum. Svaki u sebi kompaktan skup razdaljinskog prostora jest kompaktum. Svaki ograđeni i zatvoreni skup euklidskog prostora jest kompaktum.*

Stvar je očigledna.

T e o r e m 29.7.1.4. *Ako je $\eta > 0$ realan broj, tada se svaki kompaktum može prikazati kao unija od konačno mnogo kompaktuma dijametra $\leqslant \eta$.*

Teorem proizlazi iz leme 29.1.1 i teorema 29.7.1.3.

§ 29.7.2. **Neprekidne transformacije kompaktuma. Jednolika neprekidnost.**

Teorem 29.7.2.1. *Svaka neprekidna metrička (razdaljinska) transformacija kompaktuma dovodi ponovno do kompaktuma; specijalno, svaka neprekidna realna funkcija u kompaktumu prevodi ovaj u linearni kompaktum, pa zato dostiže svoj minimum i svoj maksimum* (v. teor. 29.6.1 i korolar 29.6.1).

Definicija. 29.7.2.1. Metrička transformacija f metričkog skupa S jest *jednoliko neprekidna* (u skupu S), ako svakom realnom broju $\eta > 0$ pripada realan broj $\delta(\eta)$ sa svojstvom da za svaki skup $X \subseteq S$ dijametra $\leqslant \delta(\eta)$ dijametar skupa fX bude $\leqslant \eta$ t. j. da iz

(29.7.2.1) $X \subseteq S$, dijametar $X \leqslant \delta(\eta)$ bude dijametar $fX \leqslant \eta$.

Teorem 29.7.2.2. *Svako metričko neprekidno jednoznačno preslikavanje kompaktuma ujedno je i jednoliko neprekidno* (Heine) [1]).

Stvarno, za proizvoljan metrički prostor M, realan broj $\eta > 0$ i proizvoljno metričko preslikavanje f prostora M stavimo:

(29.7.2.2) $\delta(\eta; f; M) =$ infimum razmaka $\varrho(x, y)$,

kad točke x, y prolaze zadanim prostorom M i zadovoljavaju uslovu, da je razmak njihovih slika $\geqslant \eta$:

$$\varrho_1(f(x), f(y)) \geqslant \eta;$$

pritom je ϱ_1 metrika (razdaljinska funkcija) u prostoru fM.

Naravno da je

(29.7.2.3) $\delta(\eta; f; M) \geqslant 0.$

Tvrdimo, da je za svaki $\eta > 0$

(29.7.2.4) $\delta(\eta; f; M) > 0,$

ako je f neprekidna transformacija, a M kompaktum.

U obrnutom slučaju, postojao bi bar jedan $\eta > 0$ i jedan kompaktum i neprekidno njegovo preslikavanje f tako da bude

(29.7.2.5) $\delta(\eta; f; M) = 0;$

to znači, da bi kompaktum M sadržavao dva niza točaka x_n, y_n sa svojstvom

(29.7.2.6) $\varrho(x_n, y_n) \to 0,$ dok je naprotiv

$$\varrho_1(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \eta > 0 \quad \text{za svaki } n.$$

No, iz beskonačna niza $x_n \in M$ možemo zbog kompaktnosti od M izlučiti *konvergentan* niz točaka; njegov limes x mora ležati u samom kompaktu M; naravno, da možemo suponirati da je

1) Interes uniformnih prostora proizlazi iz činjenice da se i na njih prenosi ovaj teorem (v. Bourbaki [2], p. 109).

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ (prelaz sa niza x_n na spomenuti parcijalni niz).

Radi (29.7.2.6) bit će također $y_n \to x$.

No funkcija f je neprekidna u M pa dakle i u točki $x \in M$.

To znači, da će u proizvoljnu kuglicu oko $f(x)$ pa dakle i kuglicu $K\left(f(x); \frac{\eta}{4}\right)$ pasti gotovo sve točke $f(x_n)$ i gotovo sve točke $f(y_n)$; to je međutim nemoguće, jer je prema (29.7.2.6) razmak ovih točaka $\geqslant \eta$, dok je naprotiv dijametar te kuglice $\leqslant \frac{\eta}{2}$.

Dakle hipoteza $\delta(\eta; f; M) = 0$ nije ispravna, a to znači da važi (29.7.2.4). No ta relacija znači, da iz

$$x, y \in M, \ \varrho(x, y) < \delta(\eta; f; M)$$

slijedi $\varrho_1(f(x), f(y)) < \eta$ što i tvrdi teorem 29.7.2.2.

Korolar 29.7.2.1. *Svaka neprekidna realna funkcija definirana u ograđenom zatvorenom euklidskom skupu jest i jednoliko neprekidna.*

Teorem 29.7.2.3. *Ako je f obostrano jednoznačno neprekidno preslikavanje kompaktuma X na kompaktum $Y = fX$, tada je i obratna transformacija f^{-1} neprekidna* (Jordan).

Stvarno, treba dokazati da za svaki niz $y_n \in f(X)$, iz $y_n \to y$ slijedi

$$f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y).$$

Kako je

$$f^{-1}(y_n) \in X,$$

a X kompaktum, to znači da niz $f^{-1}(y_n)$ sadrži bar jedan konvergentan niz $f^{-1}(y_{\nu_n})$; pa neka bude $f^{-1}(y_{\nu_n}) \to x'$.

Odatle na osnovu kontinuiteta operatora f:

$$f(f^{-1}(y_{\nu_n})) \to f(x') \quad \text{t. j.} \quad y_{\nu_n} \to f(x').$$

No, rekli smo da $y_n \to y$; to znači da i $y_{\nu_n} \to y$, dakle $y = f(x')$ t. j.

$$f^{-1}(y) = x' = \lim_n f^{-1}(y_{\nu_n}) = \lim_n f^{-1}(y_n).$$

Dakle uistinu iz $y_n \in f(x)$ te $y_n \to y$ slijedi $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y)$ što znači da je f^{-1} neprekidno preslikavanje, što smo i htjeli da pokažemo.

§ 29.7.3. **Peanove krivulje.** Nekada se krivo govorilo da je krivulja trag točke koja se neprekidno kreće t. j. da je to neprekidna jednoznačna slika izvjesnog svezanog dijela linearnog kontinuuma. Međutim, ta je definicija loša, jer ćemo vidjeti da se na pr. jedinični segment $0 \leqslant x \leqslant 1$ može na neprekidan način preslikati na jedinični kvadrat, na jediničnu kocku i t. d. (Peano).

To se prema Lebesgue-u može učiniti ovako:

Promatrajmo skup

(29.7.3.1) $$\{0, 1\}_1 (N)$$

svih jednoznačnih preslikavanja skupa N prirodnih brojeva na dvočlani skup $\{0, 1\}$; prema tome, elementi skupa (29.7.3.1) jesu beskonačni diadski nizovi. Ako je

$$z \in \{0, 1\}_1 N,$$

onda to znači, da je z niz

$$z(1), z(2), \ldots, z(n), \ldots$$

Stavimo li

(29.7.3.2) $$t(z) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} z(n),$$

ispunjavat će svi brojevi $t(z)$ triadski skup T; transformacija je obostrano jednoznačna.

U drugu ruku, stavimo li:

(29.7.3.3) $$x_1[t(z)] = x_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} z(2n-1), \quad x_2[t(z)] = x_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} z(2n),$$

ispunjavat će i brojevi $x_1(z)$ i brojevi $x_2(z)$ čitav jedinični segment, tako da će točke

$$(x_1(z), x_2(z)), \quad (z \in \{0, 1\}_1 N)$$

ispuniti čitav jedinični kvadrat. No, i x_1 i x_2 su funkcije i od $t \in T$ recimo

$$x_1 = x_1[t], \quad x_2 = x_2[t].$$

Očito, to su neprekidne funkcije. Na taj način, *transformacija*

(29.7.3.4) $$(x_1[t(z)], x_2[t(z)])$$

koja točki (29.7.3.2) iz T pridijeljuje točku (29.7.3.4) jediničnog kvadrata *prevodi na jednoznačan i neprekidan način triadski skup T na čitav kvadrat.*

Linearnom interpolacijom unutar intervalâ skupa $[0, 1] \setminus T$ kojima su jedino krajevi u T mogu se funkcije $x_1[t]$, $x_2[t]$ ekstrapolirati u čitavom segmentu $[0, 1]$; one tako postaju neprekidnima u $[0, 1]$, pa *analogna transformacija*

$$(x_1[t], x_2[t]), \quad (t \in [0, 1])$$

prevodi jedinični segment na neprekidan način na čitavi jedinični kvadrat.

Da smo mjesto funkcija (29.7.3.3) promatrali tri funkcije:

$$x_1[t] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} z(3n), \quad x_2[t] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} z(3n-1), \quad x_3[t] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} z(3n-2)$$

mogli bi triadskim skupom T prekriti čitavu jediničnu kocku na neprekidan i jednoznačan način, jer transformacija

$$(x_1[t], x_2[t], x_3[t]), \quad (t \in T)$$

ima takova svojstva.

Sada ćemo vidjeti još jedan način, kako se kocka pa i svaki kompakt može dobiti neprekidnim preslikavanjem *izvjesnih linearnih* skupova.

Teorem 29.7.3.1. *Svaki kompakt je neprekidna slika linearnog kompakta* $\subseteq [0, 1]_C$. *Drugim riječima, neprekidne metričke slike linearnih kompakta opet su kompakti; time se dobije svaki kompakt.*

Lema 29.7.3.1. *Ako je* $\eta > 0$ *proizvoljan realan broj, svaki kompakt je unija od konačno mnogo kompakta dijametra* $\leqslant \eta$.[1]

Stvarno, prema lemi 29.1.1 postoji konačan skup $R\left(\frac{\eta}{2}\right)$ u kompaktu tako da bude

$$\bigcup_x K\left(x; \frac{\eta}{2}\right) = \text{cijeli kompakt}, \quad \left(x \in R\left(\frac{\eta}{2}\right)\right);$$

tada je dovoljno promatrati porodicu zatvorenih skupova

$$\overline{K\left(x; \frac{\eta}{2}\right)}, \quad \left(x \in R\left(\frac{\eta}{2}\right)\right),$$

pa se uvjerimo o istinitosti leme 29.7.3.1.

Kad je to tako, označimo sa

$$F_1, \ldots, F_{s_0} \tag{29.7.3.5}$$

bilo koji član sistema kompakta čija je unija zadani kompakt K; pritom neka dijametar kompakta (29.7.3.5) bude $< \frac{1}{1}$. Sa svakim od kompakta F_{i_1}, $(i_1 = 1, \ldots s_0)$ provest ćemo analogan rastav, pa ćemo sa

$$F_{i_1 i_2}, \; (i_2 = 1, 2, \ldots s(i_1))$$

označiti bilo koji sistem od konačno mnogo kompakta dijametra $\leqslant \frac{1}{2}$, a kojima je unija $= F_{i_1}$. Za svaki od kompakta

$$F_{i_1 i_2}, \; (i_1 \leqslant s_0, \; i_2 \leqslant s(i_1))$$

označit ćemo sa

$$F_{i_1 i_2 i_3}, \; (i_3 = 1, 2, \ldots s(i_1, i_2))$$

kompakte dijametra $\leqslant \frac{1}{3}$, njih $s(i_1, i_2)$ na broju, a kojima je unija jednaka kompaktu $F_{i_1 i_2}$. Induktivno se tako određuju kompakti

$$F_{i_1 \ldots i_n} \quad \text{dijametra} \leqslant \frac{1}{n}, \tag{29.7.3.6}$$

[1]) Može se pokazati (v. Alexandroff-Hopf [1], p. 119.) da se svaki kompakt u kojem nema nijednog neprekidnog skupa može prikazati kao unija od konačno mnogo disjunktnih kompakta.

pri čemu i_1 prolazi prirodnim brojevima $1, 2, \ldots, s_0$
i_2 prolazi prirodnim brojevima $1, 2, \ldots, s(i_1)$
i_3 prolazi prirodnim brojevima $1, 2, \ldots, s(i_1, i_2)$
. . . .
. . . .
i_n prolazi prirodnim brojevima $1, 2, \ldots, s\ i_1, i_2 \ldots i_{n-1})$.

Naravno, ako koji od kompakta (29.7.3.6) ima jednu jedinu točku, tada jedini novi kompakti sa daljim indeksima jesu oni kojima se neprestano pripisuje 1 t. j. oblika su:

$$F_{i_1 \ldots i_n} = F_{i_1 \ldots i_n 1} = \ldots \in F_{i_1 \ldots i_n 1 1 \ldots 1} = \ldots$$

Označimo sa

$$A \tag{29.7.3.7}$$

skup svih iracionalnih brojeva oblika

$$x = \cfrac{1}{i_1 + \cfrac{1}{i_2 + \cdots}} \tag{29.7.3.8}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} &1 \leqslant i_1 \leqslant s_0 \\ &1 \leqslant i_2 \leqslant s(i_1) \\ &1 \leqslant i_3 \leqslant s(i_1, i_2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &1 \leqslant i_n \leqslant s(i_1, i_2 \ldots i_{n-1}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{29.7.3.9}$$

Iracionalnim brojem $x \in A$ određen je niz kompakta

$$F_{i_1} \supseteq F_{i_1 i_2} \supseteq \ldots \tag{29.7.3.10}$$

koji imaju jednu jedinu zajedničku točku $T(x)$ (sjeti se da dijametri skupova (29.7.3.10) teže prema 0). Time dobivamo jednoznačno preslikavanje

$$T(x), \quad (x \in A)$$

skupa A na kompaktum K.

Ta je transformacija *neprekidna*, jer ako su x, x' dva proizvoljna iracionalna broja iz A koja su dovoljno blizu jedan drugome, njihovi će se verižni razlomci podudarati u proizvoljno velikom početnom komadu

$$\cfrac{1}{i_1 + \cfrac{1}{i_2 + \cdots + \cfrac{1}{i_n + \cdots}}}$$

što znači, da će i pripadne točke $T(x)$, $T(x')$ kompakta K ležati u zatvorenom skupu $F_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ dijametra $\leqslant \frac{1}{n}$; prema tome, kad niz iracionalnih brojeva $a_n \in A$ teži prema $a \in A$, tada i niz $T(a_n)$ točaka iz kompakta K teži prema $T(a) \in K$.

Dokažimo još, da je i skup A kompaktum. Kako A leži u ograđenu skupu pravih razlomaka, dovoljno je pokazati da svaki niz

$$x_n = \cfrac{1}{i_{1n} + \cfrac{1}{i_{2n} + \cdots}} \tag{29.7.3.11}$$

brojeva iz A posjeduje jedan konvergentan parcijalni niz.

No, kako među brojevima i_{1n}, $(n = 1, 2, \ldots; \; i_{1n} \leqslant s_0)$ ima tek konačno mnogo brojeva, pojavit će se bar jedan od njih neizmjerno mnogo puta; recimo neka je to i_1. Tako se iz niza (29.7.3.11) izdvaja parcijalan niz koji počinje sa i_1 t. j. za koji je $i_{1n} = i_1$; promatrajući druge članove u tome novom parcijalnom nizu zaključujemo, da postoji bar jedan broj, recimo $i_2 \leqslant s(i_1)$ koji se pojavljuje neizmjerno mnogo puta na drugom mjestu; analogno zaključujemo da postoji bar jedan prirodan broj, recimo $i_3 \leqslant s(i_1 i_2)$, tako da u nizu (29.7.3.11) ima neizmjerno mnogo brojeva x_n kojima se verižni razvoj počinje sa

$$\cfrac{1}{i_1 + \cfrac{1}{i_2 + \cfrac{1}{i_3 + \cdots}}}$$

Induktivno se na taj način dolazi do iracionalna broja

$$x = \cfrac{1}{i_1 + \cfrac{1}{i_2 + \cdots}}$$

Taj broj leži u A i očigledno je x granična točka jednog parcijalnog niza iz (29.7.3.11).

Time je teorem 29.7.3.1. potpuno dokazan.

Tako na pr. promatramo li proizvoljan kvadrat K pa ga njegovim srednjicama rastavimo na 4 kvadrata K_1, K_2, K_3, K_4, a svaki od njih K_{i_n} analogno na 4 kvadratića $K_{i_n 1}$, $K_{i_n 2}$, $K_{i_n 3}$, $K_{i_n 4}$; pa svaki od njih na 4 nova kvadratića i t. d. i t. d.; tada pripadni skup iracionalnih brojeva

(29.7.3.7), gdje je za svaki n sada $i_n = 1, 2, 3$ ili 4 možemo preslikati jednoznačno i neprekidno na čitav kvadrat K, ako iracionalnom broju

$$\cfrac{1}{i_1 + \cfrac{1}{i_2 + \cdots}}$$

pridružimo točku

$$\bigcap_{n < \omega_0} K_{i_1 i_2 \ldots i_n}$$

kvadrata K. Naravno, to preslikavanje nije jednolisno jer različitim iracionalnim brojevima iz A može odgovarati i ista točka u kompaktu K.

Primjedba 29.7.3.1. Čitalac će primijetiti analogiju između atomiziranja kontinuuma s jedne strane i s druge strane gornjeg postupka kojim se neprestanim komadanjem kompakta dolazi do svih njegovih točaka. Primijetimo također, da se gornje atomiziranje može shvatiti kao izvjesno jednoznačno preslikavanje razvrstano uređena skupa S slogova

$$i_1,\ i_1 i_2, \ldots,\ i_1 i_2 \ldots i_n, \ldots$$

na zadani kompaktum K pri čemu elementu $i_1 i_2 \ldots i_n \in S$ odgovara skup

$$K_{i_1 i_2 \ldots i_n} \subseteq K;$$

naravno, S se uređuje po poklapanju po početnim komadima. Svaki maksimalni uređeni dio $D \subseteq S$ određuje tada točku $\bigcap_{x \in D} K_x$ kompakta K.

Primjedba 29.7.3.2. Dublji smisao atomističke strukture kompakta daje

Teorem 29.7.3.2. *Ako je K proizvoljan kompakt, tada postoji razvrstano uređen skup T sa svojstvom:*

$$\gamma T \leqslant \omega_0 \quad k R_\alpha T < k\omega_0, \ (\alpha < \gamma T)$$

te jednoznačno preslikavanje f skupa T na K s ovim svojstvima:

1^0 Za svaki $x \in T$, $f(x)$ je kompaktan (zatvoren) pun skup u K;

2^0 Iz $x < x'$ u T slijedi $f(x) \supset f(x')$;

3^0 Za svaki $t \in T$ skup $f(t)$ je ili jednočlan ili $= \bigcup_x f(x)$ pri čemu x prolazi svima elementima skupa T koji dolaze neposredno iza t; dakle $x \in R_0(t, \infty)_T$;

4^0 Za svaki $x \in K$ postoji bar jedan *maksimalan uređen* dio $M \subseteq T$ sa svojstvom

$$x = \bigcap_t f(t), \ (t \in M).$$

Da se vidi ispravnost toga teorema, dovoljno je sa T označiti skup slogova koji nastupaju kao indeksi u nizovima (29.7.3 10) i urediti ih po relaciji „biti početni komad" (ipak pritom treba biti malo na oprezu sa slogovima kojima se završni komad sastoji od sve samih jedinica).

§ 29.8. ZADACI.

§ 29.8.1. Dokaži kompaktnost i bikompaktnost a) kružnice, b) kugle, c) svakog polijedra, d) torusa, e) projektivnog prostora P_n.

§ 29.8.2. Kartezijev prostor C_n nije kompaktan, ali je a) lokalno kompaktan (lokalno bikompaktan) [1], b) unija od prebrojivo mnogo kompaktnih (bikompaktnih) skupova; ilustriraj slučaj $n = 1$.

§ 29.8.3. Lokalno kompaktnom prostoru C realnih brojeva dodaj (adjungiraj) jednu točku ξ koja nije element skupa C; promatraj prostor $C \cup \{\xi\}$ koji nastaje proširenjem prostora C i to tako da komplemente „kugala" $K(o; r)$ smatramo okolinama točke ξ. Dobiven prostor je kompaktan (bikompaktan) i homeomorfan sa projektivnim pravcem.

§ 29.8.4. Promatraj Kartezijev prostor C_n pa ga uroni u bikompaktan prostor koji ima jednu jedinu točku izvan C_n. Dokaži da su tako nastala proširenja prostora C_n međusobno homeomorfna (Aleksandrov je dokazao sličnu činjenicu za svaki lokalno bikompaktni Hausdorffov prostor).

§ 29.8.5. Hilbertov prostor C_ω nije kompaktan; Hilbertov paralelepiped jest kompaktan.

§ 29.8.6. Da produkt dva topološka prostora bude kompaktan, nužno je i dovoljno, da svaki od tih prostora bude kompaktan. Može se pokazati (Tihonov) da teorem vrijedi općenito za produkt od bilo koliko topoloških prostora.

§ 29.8.7. Svaki topološki kompaktni prostor može se definirati posredstvom *zatvorenih* okolina *(regularitet kompaktnih prostora).*

§ 29.8.8. Da li su skupovi $\sin R$, $\sin C$, $\operatorname{tg} C$, 2^C kompaktni (u sebi)?

§ 29.8.9. Neka je f jednoliko preslikavanje topološkog prostora A u kompaktan topološki prostor B; da funkcija f bude neprekidna, nužno je i dovoljno da *„krivulja"* $y = f(x)$ t. j. skup $(x, f(x))$, $(x \in A)$ bude *zatvoren* u topološkom produktu $A \times B$.

§ 29.8.10. *(Preslikavanje jediničnog segmenta na kvadrat).* Skup $\{0,1,2,3\}$ N svih jednoznačnih preslikavanja skupa N na skup $\{0, 1, 2, 3\}$ smjesti u točke kvadrata K ovako·

[1] Prostor je u točki a kompaktan (bikompaktan), ako postoji jedna okolina točke a koja je (shvaćena kao relativan prostor) kompaktna (bikompaktna). Prostor je lokalno kompaktan (bikompaktan), ako je on to u svakoj svojoj točki.

Skup $T = T(4|\omega)$ svih konačnih kompleksa brojeva 0, 1, 2, 3 preslikaj na kvadrate $\subseteq K$ ovako: pomoću srednjica podijelimo kvadrat K na 4 kvadrata, koje ćemo označiti sa $K(0)$, $K(1)$, $K(2)$ i $K(3)$; time je preslikan sloj $R_0 T(4|\omega)$. Induktivno preslikajmo sloj $R_{n+1} T(4|\omega)$ tako da svaki od kvadrata

$$K(x), \ (x \in R_n T(4|\omega))$$

podijelimo na 4 jednaka kvadrata i da ih označimo sa

$$K(y), \ (y \in R_0 (x, \infty)_T).$$

Vidi se, da svakom $f \in \{0, 1, 2, 3\}_1 N$ t. j. svakom beskonačnom nizu

$$f_1, f_2, \ldots$$

cifara 0, 1, 2, 3 pripada određen silazan niz kvadrata:

$$K(f_1) \supset K(f_1 f_2) \supset \ldots$$

Njihov se presjek sastoji od jedne točke $K(f)$. Dokaži da je preslikavanje

$$K[f]$$

koje realnom broju $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} f_n$ pridružuje točku $K(f)$ jednoznačno neprekidno preslikavanje linearnog segmenta $[0, 1]_C$ na kvadrat K.

§ 29.8.11. Udesi jednoznačno neprekidno preslikavanje jediničnog segmenta na zadanu kocku (služi se skupom $\{0, 1, \ldots 7\}_1 N$, brojevnim sistemom baze 8 i neprestanim dijeljenjem kocaka na 2^3 jednakih kocaka).

§ 29.8.12. Udesi jednoznačno i neprekidno preslikavanje kvadrata (kocke) na kocku (kvadrat).

§ 30. CAUCHY-EV KRITERIJ KONVERGENCIJE. POTPUNI RAZDALJINSKI PROSTORI.

§ 30.1. Konvergentni i divergentni nizovi. Fréchetovi L-prostori.

Znamo da beskonačan niz

(30.1.1) $$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

konvergira prema elementu a ili da je a *limes* (granična vrijednost) niza (30.1.1), ako svaka okolina $O(a)$ elementa a sadrži gotovo sve [1]) članove niza (30.1.1); tada se kraće piše

(30.1.2) $$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \text{ili} \quad a_n \to a \quad \text{kad} \quad n \to \infty.$$

[1]) *gotovo svi* ≡ svi ili svi osim njih konačno mnogo (dakle svi osim $< k_{\omega_0}$ izuzetaka).

Beskonačni niz (30.1.1) je konvergentan (ili niz konvergira), ako postoji bar jedna točka (naravno iz prostora) prema kojoj taj niz konvergira. Ako niz ne konvergira, veli se, da on *divergira*.

Jasno je, da svaki konvergentni niz izvađen iz razdaljinskog prostora konvergira prema jednoj jedinoj točki. Kad bi naime niz (30.1.1) konvergirao prema dvije različite točke a i b, bio bi njihov razmak pozitivan:

$$\varrho(a, b) > 0.$$

No, svaka bi kugla $K(a; r)$ morala sadržavati gotovo sve članove niza (30.1.1) pa dakle i gotovo sve one njegove članove koji se nalaze u kugli $K(b; r)$. A to je u protivnosti sa činjenicom da su kugle $K(a; r)$ i $K(b; r)$ bez ijedne zajedničke točke čim je $0 < r < \varrho(a, b)$. Dakle ne može biti $\varrho(a, b) > 0$, nego je $\varrho(a, b) = 0$, a time i $a = b$.

Tu se nameće t. zv.

Hausdorffov aksiom odvajanja (separacije). Svakom paru različitih točaka pripadaju bar dvije disjunktne okoline t. j.

(30.1.3) ako je $a \neq b$, tada nije vazda $o(a) \cap o(b) \supset v$.

Naravno da uređeni prostori te razdaljinski prostori ispunjuju Hausdorffov aksiom. Tada gornji dokaz kaže, da svaki beskonačni konvergentni niz izvađen iz prostora za koji važi Hausdorffov aksiom separacije konvergira prema posve određenom jednom jedinom elementu.

Fréchetovi (L)-prostori [1]) jesu oni kod kojih se operacija dodirivanja može definirati pomoću graničnih vrijednosti: izvjesni nizovi elemenata iz prostora označuju se kao konvergentni, pa im se na izvjestan način pridjeljuje potpuno određen element skupa kao njegov limes. Tada se $\bar{X}$ definira kao skup svih limesa nizova kojima su elementi uzeti iz X.

Svaki razdaljinski prostor je izvjestan (L)-prostor. Uređeni prostor svih rednih brojeva $< \omega_1$ jest određen (L)-prostor; naprotiv uređen prostor svih rednih brojeva $\leqslant \omega_1$ nije (L)-prostor, jer točka ω_1 toga prostora ne može biti limes nikakvog prebrojivog niza rednih brojeva $< \omega_1$, ma da je ω_1 gomilište brojeva $< \omega_1$.

Naročito su razni funkcionalni prostori uvedeni kao (L)-prostori. Tako na pr. skup svih jednoznačnih realnih funkcija definiranih u nekom metričkom prostoru jest određen (L)-prostor, kad definiramo, da niz funkcija $f_n \to f$, onda i samo onda ako za svaku točku x niz realnih brojeva $f_n(x) \to f(x)$. Može se pokazati, da taj prostor općenito nije razdaljinski. Na pr. prostor svih realnih jednoznačnih preslikavanja linearnog kontinuuma na sama sebe nije razdaljinski.

---

1) *L* je početno slovo riječi *limes*.

§ 30.2. **Cauchy-ev (Košijev) kriterij konvergencije. Potpuni razdaljinski prostori.** [1])

Ako niz (30.1.1) konvergira, onda to znači da postoji posve određen element a tako da svaka kuglica (okolina) $K(a; r)$ oko a, pa bila ona neznam kako malena — obuhvata gotovo sve članove niza. No, kako je dijametar svake kugle najviše jednak dvostrukom radiusu te kugle, to znači da *gotovo svi članovi niza leže u kugli dijametra* δ, gdje je δ bilo kakav realan broj > 0. Čak gotovo svaki član konvergentna niza može poslužiti za središte kuglice radiusa $\frac{\delta}{2}$ u kojoj će ležati gotovo svi članovi toga niza.

Definicija 30.2.1. *Kažemo li da niz s obzirom na zadanu metriku (razdaljinsku funkciju), posjeduje Cauchy-evo svojstvo ili da je niz Cauchy-ev, ako gotovo svi članovi niza leže u proizvoljno sitnim kuglicama prostora,* tada imamo ovaj zaključak:

Ako neki niz konvergira, posjeduje on Cauchy-evo svojstvo.

Važi li obrat? T. j. da li svaki Cauchy-ev niz mora konvergirati (dabome prema određenoj točki prostora). [2])

Primjer niza $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ koji u prostoru racionalnih brojeva posjeduje Cauchy-evo svojstvo, a koji ipak u tom prostoru ne konvergira (jer je njegov limes, e, u prostoru realnih brojeva, iracionalan) pokazuje da treba vazda ispitati da li je dovoljno, da niz posjeduje Cauchy-evo svojstvo, pa da zaključimo da je on konvergentan.

Definicija 30.2.2. S obzirom na svoju metriku ϱ, razdaljinski je prostor *potpun (kompletan),* ako svaki niz točaka toga prostora nužno konvergira, čim su gotovo sve točke niza sadržane u ϱ-kuglicama proizvoljno malog dijametra.

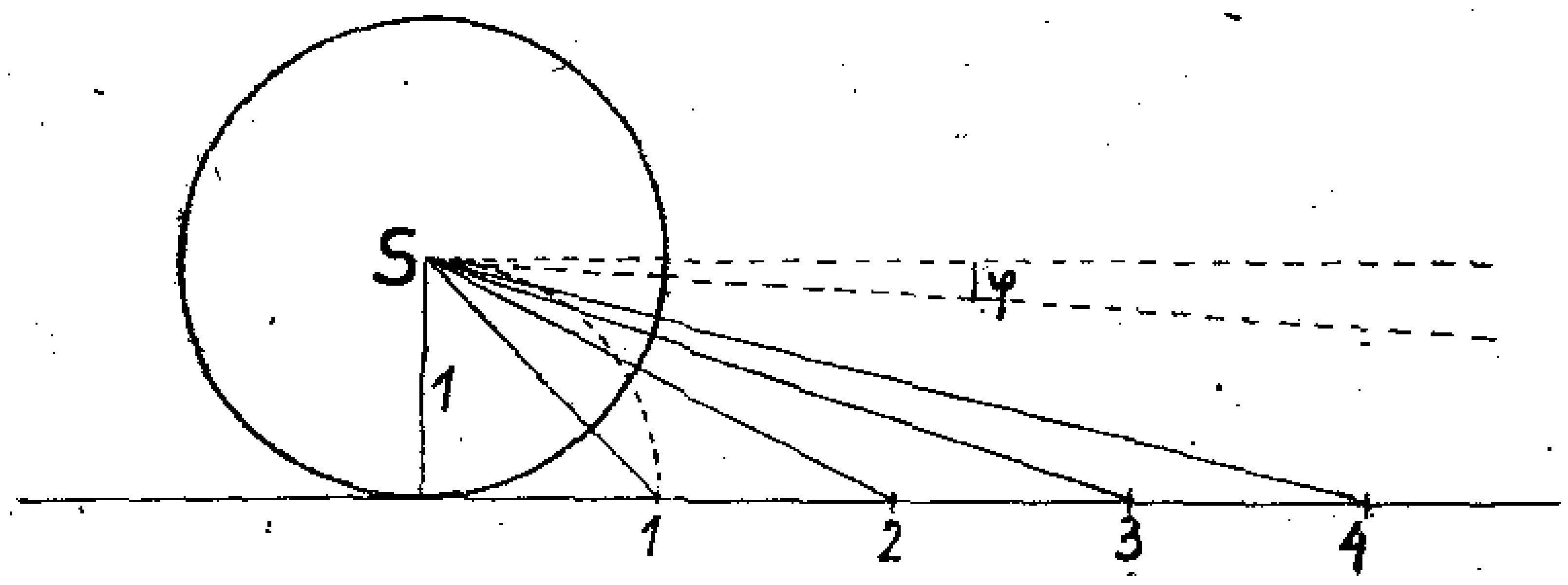
S obzirom na uobičajenu metriku $|x-y|$ u prostoru realnih brojeva taj je prostor potpun (u tome se i sastoji dovoljnost Cauchy-eva kriterija o konvergenciji nizova realnih brojeva; v. § 10.2.3); ali taj isti prostor nije potpun s obzirom na ekvivalentnu metriku koja za razmak brojeva x i y uzima ne $|x-y|$ nego kut pod kojim se vidi segment $[x, y]$ iz neke točke van brojevne osi. U toj naime metrici niz prirodnih brojeva posjeduje Cauchy-evo svojstvo, a jasno je da taj niz ne konvergira (v. sl. 30.2.1).

S obzirom na uobičajenu pitagorovsku metriku svaki je Kartezijev prostor potpun; isto se tako može reći za prostor C_ω odn. $C(c)$

[1]) U ovom §-u radit će se samo o razdaljinskim (metričkim) prostorima.

[2]) Već smo se dovoljno navikli da prostor shvatamo kao određenu cjelinu, svemir, i da, ako drukčije ne istaknemo, vazda radimo unutar toga određenoga prostora kojega pobliže ni ne treba vazda specificirati.

s obzirom na razdaljinske funkcije, što smo ih u svakom od njih definirali u § 25.5 odn. § 25.6.



Sl. 30.2.1.
Iz središta kružnice vide se gotovo svi prirodni brojevi pod proizvoljno malim kutom φ.

§ 30.3. Upotpunjenje razdaljinskih prostora.

Sada ćemo navesti postupak kojim se zadan razdaljinski prostor može da proširi tako da s obzirom na zadanu metriku ϱ on postane potpun.

§ 30.3.1. Méray-Heine-Cantorova definicija realnih brojeva.

Pođimo od razdaljinskog prostora

(30.3.1.1) $$R$$

svih racionalnih brojeva; kako se uočilo, da ima jednoznačnih preslikavanja f skupa N u skup R tako da gotovo čitav N bude preslikan u interval proizvoljno malen, promatrajmo skup

(30.3.1.2) $$\mathring{R}$$

svih takovih preslikavanja f skupa N u R; prema tome $f \in \mathring{R}$ znači, da se radi o nizu

$$f(1),\ f(2),\ \ldots\ f(n),\ \ldots$$

racionalnih brojeva koji ima Cauchy-evo svojstvo.

Uređenje skupa $\mathring{R}$.

Uredimo skup $\mathring{R}$ definirajući da za $f, g \in \mathring{R}$ relacije

(30.3.1.3) $$f \leqslant g \quad \text{odn.} \quad g \geqslant f$$

znače isto što i činjenica da ima proizvoljno malih intervala I koji sadrže gotovo sve članove $f(n)$, dok su gotovo svi $g(n)$ smješteni unutar I ili desno od I, a nipošto ne lijevo od I.

Ako nam jednakost

(30.3.1.4) $$f = g$$

znači isto što i sistem $f \leqslant g$, $g \leqslant f$, onda se vidi da je jednakost $f = g$ ekvivalentna sa relacijom

(30.3.1.5) $$\lim_{n\to\infty} (f(n) - g(n)) = 0.$$

Vidi se da nejednakost $f < g$ znači isto što i činjenica, da postoji interval skupa R koji sadrži gotovo sve $f(n)$, dok su gotovo svi brojevi $g(n)$ smješteni desno od tog intervala.

Operacije u $\mathring{R}$.

Neka su f i g elementi skupa $\mathring{R}$; definirajmo preslikavanja

$$f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g}$$

na slijedeći *distributivni* način:

$$(f+g)(n) = f(n)+g(n),\ (n \in N); \tag{30.3.1.6}$$

$$(f-g)(n) = f(n)-g(n),\ (n \in N); \tag{30.3.1.7}$$

$$(f\cdot g)(n) = f(n)\cdot g(n),\ (n \in N); \tag{30.3.1.8}$$

$$\frac{f}{g}(n) = \frac{f(n)}{g(n+k)},\ (n \in N); \tag{30.3.1.9}$$

pri tom je k ma koji prirodan broj sa svojstvom da bude $g(n+k) \neq 0$ za sve $n \in N$; takav k postoji vazda, kada niz g ne konvergira prema 0.

Neposredno se vidi da su $f+g$, $f-g$ i $f\cdot g$ određeni članovi skupa $\mathring{R}$; ako niz $g(n)$ ne konvergira prema 0, tad je i $\frac{f}{g}$ određen član skupa $\mathring{R}$ nezavisan od prirodnog broja k.
Ako su naime gotovo svi $f(n)$ smješteni u intervalu I_1 a gotovo svi članovi $g(n)$ u intervalu I_2, bit će gotovo svi brojevi $(f+g)(n)$ smješteni u intervalu

$$I_1 + I_2\ ^{1)}$$

a gotovo svi $(f\cdot g)(n)$ u intervalu

$$I_1\cdot I_2\ ^{1)};$$

neposredno se vidi da i dužine tih novih intervala teže prema 0 kad dužine intervala I_1 i I_2 teže prema 0.

Slično važi za $f-g$ i $\frac{f}{g}$ (ako nije $g\to 0$).

Dokažimo na pr. da je $f\cdot g \in \mathring{R}$, t. j. da su gotovo svi racionalni brojevi $(f\cdot g)(n)$ sadržani u proizvoljno maloj kuglici.

[1]) Imaj na umu da $I_1 \cdot I_2$ znači skup svih brojeva $x\cdot y, (x \in I_1,\ y \in I_2)$; analogno se definiraju I_1+I_2, I_1-I_2, $\frac{I_1}{I_2}$.

No iz

$$(f\cdot g)(n)-(f\cdot g)(n')=f(n)\cdot g(n)-f(n')\cdot g(n)+f(n')\,g(n)-f(n')\cdot g(n')$$

izlazi:

(30.3.1.10)

$$|(f\cdot g)(n)-(f\cdot g)(n')|\leqslant|f(n)-f(n')|\,|g(n)|+|f(n')|\cdot|g(n)-g(n')|.$$

Kako je $|g(n)|\leqslant sup\,|g(N)|<\infty$

$|f(n')|\leqslant sup\,|f(N)|<\infty$

prelazi relacija (30.3.1.10) u

(30.3.1.11)

$$|(f\cdot g)(n)-(f\cdot g)(n')|\leqslant|f(n)-f(n')|\cdot|sup\,g(N)|+|g(n)-g(n')|\,sup\,|f(N)|.$$

Kako je prvi i drugi član na desnoj strani (30.3.1.11) proizvoljno malen, proizvoljno je malena i lijeva strana u (30.3.1.11). Drugim riječima; ako je ε proizvoljan racionalan broj >0, a n_0 takav prirodan broj da prvi član u (30.3.1.11) bude $<\frac{\varepsilon}{2}$, a drugi član isto tako — što se može učiniti, jer su f i g Cauchy-evi nizovi — bit će i lijeva strana u (30.3.1.11) manja od ε za sve n, $n'>n_0$, a to upravo znači da je $f\cdot g$, određen član skupa $\overset{\circ}{R}$.

Analogno se dokazuje da su $f+g$, $f-g$ te $\frac{f}{g}$ (ovo ako nije $g\to 0$) članovi množine $\overset{\circ}{R}$—Cauchy-evi nizovi racionalnih brojeva

Vidi se također ovo: ako slučajno niz f konvergira prema racionalnom broju a, a niz g prema racionalnom broju b, onda nizovi $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$ (ukoliko nije $b=0$) konvergiraju također i to po redu prema racionalnim brojevima $a+b$, $a-b$, $a\cdot b$, $\frac{a}{b}$.

Sada vidimo koliko je opravdana

Definicija 30.3.1.1. *Skup $\overset{\circ}{R}$ zove se skupom realnih brojeva, ukoliko je njegovo uređenje sprovedeno po propisu* (30.3.1.3), *a računanje u njemu po propisima* (30.3.1.6) — (30.3.1.9); *uključivanje skupa R racionalnih brojeva u skup $\overset{\circ}{R}$ vrši se identifikacijom proizvoljna racionalna broja* a *sa „realnim brojem“ (konstantom) $a\in\overset{\circ}{R}$ za koji je $a(n)=a$ $(n\in N)$.* [1])

Prostor $\overset{\circ}{R}$ i njegov svuda gusti dio R. Kako je skup $\overset{\circ}{R}$ posve uređen, definiran je time i uređeni prostor $\overset{\circ}{R}$ realnih brojeva uzimajući

[1]) Ne smetni s uma da su članovi skupa $\overset{\circ}{R}$ izvjesni nizovi racionalnih brojeva.

svaki njegov otvoreni interval kao okolinu svake točke iz toga intervala. Ako je f proizvoljan realan broj, dakle $f \in \overset{0}{R}$, definirani su time i racionalni brojevi

$$f(n), \ (n \in N),$$

a time i realni brojevi $f(n) \in \overset{0}{R}$, jer je $R \subseteq \overset{0}{R}$; dokažimo da za svaki $f \in \overset{0}{R}$ važi:

$$f(n) \rightarrow f \quad \text{kad} \quad n \rightarrow \infty. \tag{30.3.1.12}$$

Radi se, da dokažemo, da iz $a < f < b$, gdje su $a, b \in \overset{0}{R}$ slijedi egzistencija prirodna broja n_0 tako da bude

$$a < f(n) < b$$

za sve prirodne brojeve $n > n_0$.

No, relacija $a < f$ znači, da postoji interval $I(a)$ tako da on sadrži gotovo sve racionalne brojeve $a(n)$, dok su naprotiv gotovo svi racionalni brojevi $f(n)$ desno od $I(a)$; to upravo znači, da postoji prirodan broj n_1 tako da je $a < f(n)$ za sve $n > n_1$. Analogno se dokazuje da postoji prirodan broj n_2 sa svojstvom da bude $f(n) < b$ za sve $n > n_2$. Stavimo li

$$n_0 = \sup\{n_1, n_2\},$$

bit će n_0 prirodan broj sa svojstvom $a < f(n) < b$ za sve $n > n_0$.

Time je zaključak $f(n) \rightarrow f$ dokazan.

Kako je $f(n) \in R$, to znači, *da je skup racionalih brojeva svuda gust u prostoru* $\overset{0}{R}$ *svih realnih brojeva,* pa se u svakom intervalu skupa $\overset{0}{R}$ nalazi i racionalnih brojeva.

Modul i razdaljinska funkcija.

Definiramo li za proizvoljan $f \in \overset{0}{R}$:

$$|f| = f \quad \text{ili} \quad 0 - f, \tag{30.3.1.13}$$

već prema tome, da li je $f \geqslant 0$ ili $f < 0$, dobili smo izvjesno preslikavanje skupa $\overset{0}{R}$ na sama sebe; $|f|$ se zove *modul realna broja* f. Vidi se, da iz $|f| = 0$ slijedi $f = 0$ i obrnuto.

Dokažimo *da je*

$$|f - g|, \ (f, g \in \overset{0}{R}) \tag{30.3.1.14}$$

razdaljinska funkcija i da se pomoću nje može rekonstruirati uređeni prostor $\overset{0}{R}$.

Da iz $|f - g| = 0$ slijedi $f = g$, to je očito.

Simetričnost funkcije (30.3.1.14) je također očigledna. Dokažimo još relaciju trokuta:

(30.3.1.15) $$|f-g| \leqslant |f-h| + |h-g|, \quad (f, g, h \in \overset{0}{R}).$$

Kako su $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ racionalni brojevi, to po relaciji trokuta u prostoru R imamo

$$|f(n)-g(n)| \leqslant |f(n)-h(n)| + |h(n)-g(n)|, \quad (n \in N);$$

odatle graničnim prelazom $n \to \infty$, dobivamo neposredno traženu relaciju (30.3.1.15), jer je očito, da iz dokazane relacije $x(n) \to x$ slijedi također $|x_n| \to |x|$ za svaki $x \in \overset{0}{R}$ (neprekidnost modula).

Dokažimo, da se prostor $\overset{0}{R}$ može definirati metrikom (30.3.1.13); da to uvidimo, nužno je i dovoljno pokazati ove dvije stvari:

a) Svaka „kuglica" $K(x; r)$ podudara se sa određenim intervalom uređena skupa $\overset{0}{R}$, naime s intervalom $(x-r, x+r)$;

b) Svaki interval $I(x)$ svakog realnog broja x sadrži čitavu „kuglicu" $K(x; r)$; stvarno, dovoljno je sa r označiti manji od brojeva

$$x - \inf I(x), \quad \sup I(x) - x$$

pa da se uvjerimo, da iz $|x-a| < r$ slijedi $a \in I(x)$.

Potpunost prostora $\overset{0}{R}$. Dokažimo najzad da je prostor $\overset{0}{R}$ realnih brojeva potpun s obzirom na metriku $|x-y|$. Drugim riječima, treba dokazati ovo: *ako je*

(30.3.1.16) $$x_1, x_2, \ldots . x_n, \ldots$$

određen niz realnih brojeva sa svojstvom, da se svakom realnom broju $\eta > 0$ *može pridružiti prirodan broj* $k_0 = k_0(\eta)$ *tako da bude* $|x_k - x_{k'}| < \eta$ *čim je* $k, k' > k_0$, *tada niz* x_n *nužno konvergira prema određenom realnom broju.*

Kako je skup R gust u $\overset{0}{R}$, postoji za svaki $n \in N$ bar jedan element $x(n) \in R$ sa svojstvom

(30.3.1.17) $$|x_n - x(n)| < \frac{1}{n}, \quad (n \in N).$$

Tvrdimo da je tako konstruiran niz

(30.3.1.18) $$x(1), x(2), \ldots x(n), \ldots$$

određen realan broj x t. j. da je to Cauchy-ev niz racionalnih brojeva. Treba dakle dokazati, da za proizvoljan racionalan broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 sa svojstvom da je

(30.3.1.19) $$|x(n) - x(n')| < \varepsilon \quad \text{čim je} \quad n, n' > n_0.$$

No, po relaciji trokuta u prostoru $\overset{\circ}{R}$ imamo:

$$|x(n)-x(n')| \leqslant |x(n)-x_n| + |x_n - x_{n'}| + |x_{n'} - x(n')|.$$

Odatle odmah izlazi traženo svojstvo, jer su sva tri člana na desnoj strani proizvoljno malena: prvi i treći član su $< \frac{\varepsilon}{3}$ čim je broj $\frac{\varepsilon}{3}$ veći od $\frac{1}{n}$ i $\frac{1}{n'}$; drugi član $|x_n - x_{n'}|$ je također $< \frac{\varepsilon}{3}$, čim su n i n' dovoljno veliki, jer je po pretpostavci niz $x_1, x_2, \ldots$, Cauchy-ev niz. Dakle je zaista (30.3.1.18) određen realan broj x.

Dokažimo najzad da zadani niz $\to x$ t. j. da $|x_n - x| \to 0$ kad $n \to \infty$.

Stvarno, po relaciji trokuta imamo:

$$|x_n - x| \leqslant |x_n - x(n)| + |x(n) - x| < \frac{1}{n} + |x(n) - x|.$$

No, kako $x(n) \to x$, to znači da $|x(n) - x| \to 0$, pa zato teži prema 0 i niz $\frac{1}{n} + |x(n) - x|$, a time i niz $|x_n - x|$.

Time je najzad dokazan Cauchy-ev kriterij konvergencije za prostor realnih brojeva. Ukratko, dokazali smo da vrijedi

Teorem 30.3.1.1. *Uređen prostor R racionalnih brojeva i njegova modularna metrika može se proširiti na uređen prostor $\overset{\circ}{R}$ realnih brojeva i njegovu metriku $|x-y|$ tako da je R gust po čitavom prostoru $\overset{\circ}{R}$ i da je $\overset{\circ}{R}$ (za razliku od prostora R) potpun s obzirom na metriku $|x-y|$.*

Time je iznesena stroga teorija realnih brojeva: iz nje vidimo da su realni brojevi zapravo izvjesna preslikavanja skupa N na skup R. Bolje rečeno, među preslikavanjima skupa N na skup R ima i tako međusobno povezanih i organiziranih, da se način kako su te veze izgrađene može uzeti kao tipičan za one veze za koje smo se navikli da ih pripisujemo t. zv. *realnim brojevima.* Sad će nam već biti jasnije *stanovište* da nije bitno da kažemo, *šta su realni brojevi nego što se i kako se ima raditi sa predmetima koji se zovu realni brojevi.* Naravno da se ista problematika postavlja i kod svake druge vrste „brojeva". Bitne su *veze* među brojevima, a ne brojevi sami. Realni brojevi jesu izraz tek izvjesnih veza među predmetima; zato se pomoću njih i ne mogu neposredno iskazati sve druge raznolike veze na koje je nauka došla ili će doći, pa će se u nauku i uvoditi neprestano nove i nove vrste „brojeva" (veza, funkcija, preslikavanja).

§ 30.3.2. **Upotpunjenje proizvoljnog metričkog prostora (S; ϱ) s obzirom na njegovu metriku ϱ.**

Ako razdaljinski prostor S nije potpun s obzirom na svoju metriku ϱ, tako da prostor sadrži bar jedan niz elemenata koji se međusobno s obzirom na metriku ϱ gotovo svi razlikuju za proizvoljno malo a da ipak taj niz ne konvergira, može se *proširiti i skup S i metrika ϱ na metriku ϱ_1 u $\overset{\circ}{S}$, tako da tako prošireni skup bude potpun s obzirom na novu proširenu metriku i da proizvoljno blizu do točaka proširenog skupa ima elemenata iz zadana skupa S.*

Elementi proširenog skupa

$$\overset{\circ}{S} \tag{30.3.2.1}$$

bit će baš Cauchy-evi nizovi iz zadana skupa S t. j. sva preslikavanja f skupa prirodnih brojeva N na prostor S, uz jedan jedini uslov da gotovo sve točke niza

$$f(1),\ f(2), \ldots \ldots,\ f(n) \ldots$$

budu smještene u proizvoljno malim ϱ-kuglicama [1]) prostora S.

Specijalno, svaki element $a \in S$ određuje određeno preslikavanje — ***konstantu*** a tako da bude $a(n) = a$ za svaki $n \in N$; tu konstantu a možemo identificirati sa elementom $a \in S$; čime zadani skup S kao materijalna baza prostora S postaje *dijelom* proširenog skupa $\overset{\circ}{S}$

Za dva proizvoljna elementa $f, g \in \overset{\circ}{S}$ uvodi se funkcija

$$\varrho_1(f, g) = \lim_{n\to\infty} \varrho(f(n), g(n)) \tag{30.3.2.2}$$

i pomoću nje definira jednakost među elementima skupa $\overset{\circ}{S}$: stavlja se

$$f = g \tag{30.3.2.3}$$

onda i samo onda ako je $\varrho_1(f, g) = 0$.

Na način koji je potpuno analogan sa razmatranjima u §-u 30.3.1 dokazuju se ove 4 činjenice:

Teorem 30.3.2.1. *Funkcija ϱ_1 preslikava na jednoznačan način skup $\overset{\circ}{S} \times \overset{\circ}{S}$ na skup realnih brojeva $\geqslant 0$; funkcija ϱ_1 proširuje zadanu metriku ϱ u S u smislu da je*

$$\varrho_1(f, g) = \varrho(f, g),\ (f, g \in S);$$

funkcija ϱ_1 je razdaljinska u skupu $\overset{\circ}{S}$.

Teorem 30.3.2.2. *Zadan skup S je posvuda gust dio skupa $\overset{\circ}{S}$, u smislu, da za svaki $f \in \overset{\circ}{S}$ i svaki realan broj $r > 0$ postoji bar jedan $x \in S$ sa svojstvom da bude $\varrho_1(f, x) < r$.*

Teorem 30.3.2.3. *Skup $\overset{\circ}{S}$ je potpun s obzirom na metriku ϱ_1* t. j. *da niz $x_1, x_2, \ldots$ točaka prostora $(\overset{\circ}{S}; \varrho_1)$ konvergira, nužno je i do-*

[1]) To znači, da za svaki realan broj $r > 0$ postoji bar jedna točka a prostora S sa svojstvom da za gotovo sve $n \in N$ bude $\varrho(a, a_n) < r$.

voljno da gotovo svi članovi niza leže u proizvoljno malim ϱ_1-kuglicama: za svaki realni broj $\eta > 0$, postoji broj $n_0(\eta) \in N$ sa svojstvom da bude

$$\varrho_1(x_n, x_{n'}) < \eta \quad \text{čim je} \quad n, n' > n_0(\eta).$$

Teorem 30.3.2.4. *Ako je prostor S već potpun, tada je $S = \overset{\circ}{S}$, $\varrho_1 = \varrho$; specijalno $\overset{\circ}{(\overset{\circ}{S})} = \overset{\circ}{S}$.*

§ 30.3.3. **Primjeri potpunih razdaljinskih prostora.**

Prostor $C_1 = C$ realnih brojeva je potpun (Cauchy-ev *kriterij*). Prostor kompleksnih brojeva također. Svi euklidski prostori su potpuni.

Teorem 30.3.3.1. *Hilbertov prostor C_ω je potpun.*

Dokažimo posljednju činjenicu. Neka je dakle

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{30.3.3.1}$$

proizvoljan Cauchy-ev niz elemenata prostora C_ω; to znači, da je sam za sebe određen niz

$$x_{n1}, x_{n2}, \ldots \quad \text{realnih brojeva.}$$

Kako je po definiciji

$$|x_m - x_n| = \varrho(x_m, x_n) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (x_{nk} - x_{mk})^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

to je

$$\varrho(x_m, x_n) \geqslant |x_{nk} - x_{mk}| \quad \text{za svaki } k \in N. \tag{30.3.3.2}$$

To znači, da za svaki $k \in N$ brojevi

$$x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk}, \ldots$$

obrazuju određen Cauchy-ev niz realnih brojeva, pa zbog potpunosti prostora C, konvergiraju prema određenom broju $a(k) \in C$:

$$\lim_{n\to\infty} x_{nk} = a(k) \in C. \tag{30.3.3.3}$$

Na taj način dobivamo niz a realnih brojeva.

$$a(1), a(2), \ldots a(k), \ldots, (k \in N). \tag{30.3.3.4}$$

Dokažimo, da taj niz leži u C_ω i prema njemu konvergira zadani niz $x_1, x_2, \ldots$:

$$a \in C_\omega, \ a = \lim_{n\to\infty} x_n. \tag{30.3.3.5}$$

No, zadani niz $x_n \in C_\omega$ posjeduje Cauchy-evo svojstvo t. j. za dani broj $\eta > 0$ postoji broj $n_0 \in N$ sa svojstvom

$$|x_m - x_n| < \eta \text{ za } m, n > n_0 \quad \text{t. j.}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_{mk} - x_{nk})^2 < \eta^2 \qquad \text{dakle tim prije}$$

$$\sum_{k=1}^{l} (x_{mk} - x_{nk})^2 < \eta^2 \qquad \text{za svaki } l \in N.$$

Odatle graničnim prelazom $m \to \infty$:

$$\sum_{k=1}^{l} (a(k) - x_{nk})^2 \leqslant \eta^2,$$

odnosno novim prelazom $l \to \infty$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a(k) - x_{nk})^2 \leqslant \eta^2 \text{ za } n > n_0. \tag{30.3.3.6}$$

No, kako red $\sum\limits_{k} x_{nk}^2$ konvergira, izlazi iz (30.3.3.6) da konvergira i red $\sum\limits_{k} (a(k))^2$, što znači da je doista $a \in C_\omega$.

Nadalje obrazac (30.3.3.6) iskazuje da je

$|a - x_n| \leqslant \eta$ za $n > n_0$, a to znači da $x_n \to a$ kad $n \to \infty$.

Time je potpunost Hilbertova prostora C_ω dokazana.

Odatle izlazi i potpunost Kartezijevih prostora $C_n \subseteq C_\omega$ za svaki $n \in N$.[1] Neka bude istaknuto da se gornji dokaz potpunosti prostora C_2, C_3, .. C_n..., C_ω osniva na potpunosti linearnog kontinuuma C t. j. na običnom Cauchy-evom kriteriju konvergencije.

Teorem 30.3.3.2. *Prostor $C(X; Y)$ neprekidnih preslikavanja kompakta X u kompakt Y pri čemu za elemente $f, g \in C(X, Y)$ definiramo razdaljinu:*

$$\varrho(f, g) = \sup_{a \in X} |f(a) - g(a)| \tag{30.3.3.7}$$

jest potpun prostor.

Očito je taj prostor metričan; dokažimo da je on i potpun s obzirom na metriku ϱ.

Neka je dakle

$$f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots \tag{30.3.3.8}$$

jedan Cauchy-ev niz elemenata iz prostora $C(X; Y)$; to znači, da je za svaki $\eta > 0$ moguće odrediti prirodan broj $n_0(\eta)$ sa svojstvom

$$\sup_{a \in X} |f_m(a) - f_n(a)| < \eta \text{ za } m, n > n_0(\eta). \tag{30.3.3.9}$$

Odatle izlazi da za svaki $a \in X$ imamo Cauchy-ev niz

$$f_1(a), f_2(a), \ldots, f_n(a), \ldots$$

točaka u kompaktu Y, pa zato i postoji granična vrijednost $f(a)$ toga niza:

$$f(a) = \lim_{n \to \infty} f_n(a), \quad (a \in X). \tag{30.3.3.10}$$

Na osnovu toga graničnim prelazom $m \to \infty$ obrazac (30.3.3.9) daje:

$$\sup_{a \in X} |f(a) - f_n(a)| \leqslant \eta \text{ za } n > n_0(\eta),$$

[1] Svaki naime $x \in C_n$ možemo shvatiti točkom
$x(1), x(2), \ldots, x(n), 0, 0, \ldots 0, \ldots$ Hilbertova prostora C_ω.

što znači, da je zaista $\varrho(f, f_n) \leqslant \eta$ za $n > n_0(\eta)$ t. j. da $f_n \to f$ kad $n \to \infty$. Dakle zadani proizvoljni Cauchy-ev niz $f_n \in C(X; Y)$ konvergira, čime je tražena potpunost prostora dokazana.

Na potpuno analogan način dokazuje se

Teorem 30.3.3.3. *Funkcionalni prostor C_c neprekidnih realnih preslikavanja segmenta* [0, 1] *jest potpun prostor.*

Teorem 30.3.3.4. *Svaki kompaktum je potpun metrički prostor i to s obzirom na svaku dopustivu metriku.*

§ 30.3.4. **Nekoliko svojstava potpunih razdaljinskih prostora.**

Glavni rezultat ovoga paragrafa bit će

Teorem 30.3.4.1. *Nijedan potpun razdaljinski prostor ne može se prikazati kao unija od $\leqslant \aleph_0$ nigdje gustih skupova;* [1]) to se češće, prema Baire-u, iskazuje i riječima *da nijedan potpuni razdaljinski prostor nije prve kategorije* (nego je naprotiv *druge kategorije*; isp teorem 30.3.5.1).

Teorem 30.3.4.2. *Ako je*

$$F_0 \supseteq F_1 \supseteq \ldots \tag{30.3.4.1}$$

ma koji silazan niz zatvorenih punih skupova kojima dijametar teži prema nuli, tad je skup $\bigcap_n F_n$ sastavljen od jedne jedine točke.

Stvarno, promatrajmo niz skupova

$$F_0 \setminus F_1,\ F_1 \setminus F_2, \ldots; \tag{30.3.4.2}$$

ako u njemu ima tek konačno mnogo punih skupova, to znači, da su zadani skupovi skoro svi međusobno jednaki pa je teorem očigledan. Ako pak u nizu (30.3.4.2) ima neizmjerno mnogo punih skupova, tada izabirući iz njih po jedan element, dobije se određen niz točaka, a zbog uslova, da dijametar od $F_n \to o$, taj je niz očigledno Cauchy-ev pa zbog potpunosti prostora, on konvergira; naravno da taj limes leži u svima F_n, jer su ovi zatvoreni.

Teorem 30.3.4.3. *Ako je S bilo koji savršen skup, tada je razvrstano uređen skup $T(2\,|\,\omega)$* [2]) *sličan jednom sistemu N zatvorenih skupova $\subseteq S$ uređenih s obzirom na $\supseteq$ i to tako da za svaki maksimalni posve uređeni dio $M \subseteq T(2\,|\,\omega)$ presjek odgovarajućih skupova bude pun; te da iz*

$$X, Y \subseteq N \text{ slijedi ili } X \subseteq Y \text{ ili } X \supset Y \text{ ili } X \cap Y = v.$$

---

[1]) Sjetimo se da skup S nije *nigdje gust*, ako $\overline{S}$ ne sadrži nijedne nutrašnje točke t. j. ako je int $\overline{S} = v$.

[2]) $T(2\,|\,\omega)$ je skup svih konačnih kompleksa brojeva 0 i 1 uređen relacijom *„biti početan komad"*.

Dokaz je isti kao i dokaz teorema 27.11.2 uz oprez da dijametar skupova sa n indeksa bude $< \frac{1}{n}$; tada naime dijametri skupova svakog silaznog niza iz N teže prema o, pa zato, prema prethodnom teoremu, imaju pun presjek.

Teorem 30.3.4.4. (Baire). *Ako je $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ ma kakav niz nigdje gustih skupova, tada je skup*

(30.3.4.3) $$C(\bigcup_n S_n),\ (n < \omega_0)$$

svuda gust.

Treba dakle dokazati, da za ma koji otvoreni skup G važi

(30.3.4.4) $$G \cap C(\bigcup_n S_n) \supset v.$$

No, $S_n \subseteq \overline{S_n}$ dakle $\bigcup_n S_n \subseteq \bigcup_n \overline{S_n}$ odakle

$$C(\bigcup_n S_n) \supseteq C(\bigcup_n \overline{S_n}) = \bigcap_n C\overline{S_n}.$$

Zato, dokažemo li, da važi

(30.3.4.5) $$G \cap (\bigcap_n C\overline{S_n}) \supset v,$$

bit će time dokazana i formula (30.3.4.4).

No, prema pretpostavci skup S_0 pa zato niti $\overline{S_0}$ nije nigdje gust; to znači, da u zadanom G postoji jedna točka x_0 i njena okolina $o(x_0)$ sa svojstvom

$$\overline{o(x_0)} \cap \overline{S_0} = v \quad \text{t. j.} \quad \overline{o(x_0)} \subseteq C\overline{S_0};$$

iz istoga razloga postoji $x_1 \in o(x_0)$ i $o(x_1)$ sa svojstvom

$$\overline{o(x_1)} \subseteq o(x_0),\ \overline{o(x_1)} \subseteq C\overline{S_1}.$$

Induktivno se na taj način dobiva niz točaka $x_n \in o(x_{n-1})$ sa svojstvom

$$\overline{o(x_n)} \subseteq o(x_{n-1}),\ \overline{o(x_n)} \subseteq C\overline{S_n}.$$

Ako se pobrinemo, da dijametar od $\overline{o(x_n)}$ bude $< \frac{1}{n}$, tada će silazni niz zatvorenih skupova $\overline{o(x_n)}$, $(n < \omega_0)$ imati prema teoremu 30.3.4.2 presjek sastavljen od jedne točke, recimo x:

$$x = \bigcap_{n<\omega_0} \overline{o(x_n)}.$$

Zbog $\overline{o(x_n)} \subseteq G$ i $\overline{o(x_n)} \subseteq C\overline{S_n}$ za svaki $n < \omega_0$, to znači da točka x leži i u G i u svima $C\overline{S_n}$, dakle je

$$x \in G \cap (\bigcap_{n<\omega_0} C\overline{S_n}),$$

što potvrđuje formulu (30.3.4.4), a time i ispravnost samog teorema.

Korolar 30.3.4.1. *Ako je razdaljinski prostor i prebrojiv i potpun, sadrži on usamljenih (izoliranih) točaka.*

U obrnutom naime slučaju, bio bi prostor unija od prebrojivo mnogo nigdje gustih svojih jednočlanih skupova.

Korolar 30.3.4.2. *Presjek svakog niza otvorenih svuda gustih skupova opet je svuda gust skup.*

To je drugim riječima iskazan teorem 30.3.4.4. Taj se korolar često upotrebljava u pitanjima egzistencije raznih skupova.

§ 30.3.5. **Hegemonija neprekidnih, a neizvodljivih funkcija prema neprekidnim izvodljivim funkcijama.**

Zna se da je mnogo truda utrošeno u nastojanju da se dokaže da je svaka neprekidna realna funkcija s realnim argumentom izvodljiva u bar jednoj točki (da se time bar djelimično obrne stav o neprekidnosti izvodljivih funkcija). Koliko je tu čovjek računao na predrasude i prvotnu očiglednost, a ne na logičku strukturu odnosa, razabire se na pr. po tome da je Hermite, jedan od najizrazitijih velikih matematičara čisto analitičkog kova bio upravo skandaliziran, kad je dočuo da je Weierstrass obrazovao neprekidnu realnu funkciju

$$w(x), \quad (x \in C)$$

koja nema nigdje derivacije.

Teorija skupova otklanja takve predrasude i traži pravilnost u totalitetu promatranih pojava.

U konkretnom slučaju, bit će od interesa da dokažemo:

Teorem 30.3.5.1. (Banach) *U funkcionalnom prostoru*

$$(C) = C([0, 1]; C_1) \qquad (30.3.5.1)$$

svih neprekidnih realnih funkcija definiranih u jediničnom segmentu $[0, 1]_C$ *obrazuju one funkcije, od kojih je svaka izvodljiva u bar jednoj točki, skup koji je u prostoru* (C) *tek prve kategorije; funkcije koje nisu izvodljive niti u jednoj točki obrazuju skup druge kategorije prostora* (C).

Stvarno, neka je $f \in (C)$; ako funkcija f ima određen izvod u bar jednoj točki $\xi \in [0, 1]$, to znači, da postoji bar jedna točka $\xi \in [0, 1]$ tako da

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$$

bude određen broj; pritom naravno h znači bilo koji realan broj uz uslov $\xi + h \in [0, 1]$. Pridijelimo li funkciji f funkciju

$$\overline{f}$$

stavljajući

$$\bar{f}(\xi) = f'(\xi), \ \bar{f}(\xi + h) = \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$$

za svaki $h \neq 0$, $\xi + h \in [0, 1]$ funkcija $\bar{f}$ je neprekidna u $[0, 1]$, pa time i ograđena u $[0, 1]$ t. j. postoji broj $M \geqslant 0$ tako da bude

$$|\bar{f}(x)| \leqslant M \quad \text{za svaki} \quad x \in [0, 1].$$

Drugim riječima vrijedi

Lema 30.3.5.1. *Pretpostavka da funkcija $f \in (C)$ ima izvod u točki $\xi \in [0, 1]$ ekvivalentna je sa činjenicom, da postoji broj $M > 0$ tako da bude*

(30.3.5.2)
$$\left|\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}\right| \leqslant M$$

za svaki $h \neq 0$ za koji je $\xi + h \in [0, 1]$.

Ako za dani realni broj $M > 0$ označimo sa

(30.3.5.3)
$$E(M)$$

skup svih $f \in (C)$, tako da za svaki taj f postoji bar jedan broj $\xi \in [0, 1]$ sa svojstvom da važi (30.3.5.2), tada imamo

Lemu 30.3.5.2. *Za svaki $M > 0$ skup $E(M)$ je zatvoren i nigdje gust u prostoru (C).*

Dokažimo, da je $E(M)$ zatvoren t. j. ako neki niz $f_k \in E(M)$ konvergira, recimo prema $f \in (C)$, tada je nužno $f \in E(M)$.

No, iz $f_k \in E(M)$ proizlazi, da za svaki k postoji bar jedan broj $\xi_k \in [0, 1]$ sa svojstvom

(30.3.5.4)
$$\left|\frac{f_k(\xi_k + h) - f_k(\xi_k)}{h}\right| \leqslant M$$

za svaki $h \neq 0$ za koji je $\xi_k + h \in [0, 1]$.

Na taj način dobivamo niz ξ_k realnih brojeva iz $[0, 1]$. Taj niz sadrži bar jedan konvergentan djelimičan niz; uzimajući njega u razmatranje, možemo odmah suponirati da i sam niz ξ_k konvergira; pa neka je

(30.3.5.5)
$$\lim_{k \to \infty} \xi_k = \xi.$$

Tvrdimo, da je tada

(30.3.5.6)
$$\left|\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}\right| \leqslant M$$

za svaki h za koji je $\xi + h \in [0, 1]$.

Stvarno, ako je $h \neq 0$ i $\xi + h \in [0, 1]$, tada zbog $\xi_k \to \xi$, slijedi $\xi_k + h \to \xi + h$, pa je dakle $\xi_k + h \in [0, 1]$ za skoro sve $k \in N$; no to znači, da je za promatrani broj h ispunjena relacija (30.3.5.4) za skoro sve indekse k; graničnim prelazom $k \to \infty$ daje relacija (30.3.5.4) traženu relaciju (30.3.5.6), koja iskazuje upravo da je $f \in E(M)$.

Dokažimo najzad da skup $E(M)$ nije nigdje gust, što zbog zatvorenosti skupa $E(M)$ znači ovo: *skup* $E(M)$ *ne sadrži nijedne kugle*. Kako je prema Weierstrassovu teoremu skup polinoma svuda gust u (C), možemo suponirati, da je središte s kugle neki polinom.

No, za svaki broj $M > 0$ i polinom s postoji neprekidna funkcija φ tako da bude

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |s(x) - \varphi(x)| < M,$$

dok naprotiv nije

$$\left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right| \leqslant M$$

ni za jedan broj $x \in [0, 1]$; dakle je

$$K(s; r) \setminus E(M) \supset v$$

za svaki polinom s i svaki realan broj $r > 0$, a to baš i iskazuje (zbog zatvorenosti skupa $E(M)$) da $E(M)$ nije nigdje gust.

Time je lema 30.3.5.2 dokazana.

Kako očigledno skup

$$\bigcup_n E(n), \quad (1 \leqslant n < \omega_0)$$

iscrpljuje sve neprekidne funkcije u $[0, 1]$ koje su izvodljive u bar jednoj točki, to znači, da skup svih tih funkcija ne iscrpljuje prostora (C), jer ovaj kao potpun razdaljinski prostor nije unija od $\leqslant \aleph_0$ nigdje gustih skupova (v. teorem 30.3.4.1).

Time je Banachov teorem 30.3.5.1 potpuno dokazan.

§ 31. BORELOVI I SUSLINOVI SKUPOVI.

U ovom §-u upoznat ćemo jednu od najvažnijih vrsta skupova zadana prostora. Borel je do svojih skupova došao izučavajući mjeru skupova, a glavna mu je ideja bila da polazeći od intervala na pravcu odnosno pravokutnika u ravnini postepeno izgradi porodicu linearnih odnosno ravninskih skupova koja bi sadržavala i uniju i presjek svakog svojeg konačnog ili prebrojivog sistema. Suslin je primijetio da projiciranjem Borelova skupa možemo dobiti i skup koji nije Borelov; tako je on došao do nove vrste skupova, koji se danas zovu *Suslinovi* ili *analitički skupovi* služeći se pritom posebnom operacijom — *Suslinovom operacijom* ili *operacijom* (A) (početno slovo od riječi „analitički"). Luzin je istodobno dao i drugu definiciju Suslinovih skupova. Mi ćemo se držati Suslinove definicije dovodeći je u vezu sa razvrstano uređenim skupovima.

§ 31.1. **Tip $T(\aleph_0|\omega_0)$ djelimičnog uređenja. Čvorovi.** Sa

(31.1.1) $$T = (T;\omega_0) \quad \text{ili} \quad T(\omega_0)$$

označit ćemo skup svih konačnih slogova rednih brojeva $< \omega_0$, pri čemu za dva sloga A, B kažemo, da je A *ispred* B, ako je A početni komad sloga B; drugim riječima, skup T je skup svih jednoznačnih preslikavanja punih početnih komada uređena skupa $(-\infty, \omega_0)$ svih rednih brojeva $< \omega_0$ na taj skup, pri čemu za dva takva preslikavanja f i g relacija $f \leqslant g$ znači, da je $f(\alpha) = g(\alpha)$ za svaki α u kojem je definirano preslikavanje f.

Naravno, skup $T(\omega_0)$ je razvrstano uređen; njegov početni sloj $R_0 T$ sastavljen je od svih jednočlanih slogova rednih brojeva $< \omega_0$; sloj $R_1 T$ je sastavljen od svih varijacija drugog reda rednih brojeva $< \omega_0$; općenito, sloj $R_n T$, za svaki $n < \omega_0$ sastavljen je od svih varijacija $n+1$ reda sastavljenih od rednih brojeva $< \omega_0$. Naravno, skup T je prebrojiv; svaki njegov sloj je prebrojiv; svaki element skupa T ima prebrojivo mnogo neposrednih sljedbenika. Tako na pr. neposredni sljedbenici elementa $(1, 2, 3) \in T$ jesu:

$$(1, 2, 3, 0), (1, 2, 3, 1) (1, 2, 3, 2), \ldots, (1, 2, 3, \alpha), \ldots, (\alpha < \omega_0).$$

Čvorovi parcijalno uređena skupa.

Neka je S parcijalno uređen skup; označimo li za svaki $x \in S$ sa

(31.1.2) $$(-\infty, x|_S \quad \text{ili} \quad (-\infty, x|$$

skup svih točaka $y \in S$ za koje je

$$(-\infty, x)_S = (-\infty, y)_S$$

t. j. koje imaju iste prethodnike kao i x, onda se vidi da razvrstano uređeni skup $T(\omega_0)$ ima ova dva svojstva:

(31.1.3) $$\gamma(-\infty, x, \infty)_{T(\omega_0)} = \omega_0$$

t. j. rang onog dijela skupa $T(\omega_0)$ koji je uporedljiv s nekom točkom skupa $T(\omega_0)$ jest ω_0;

(31.1.4) $$k(-\infty, x|_{T(\omega_0)} = \aleph_0$$

t. j. svaki element prve vrste skupa $T(\omega_0)$ ima zajedničke pretke sa prebrojivo mnogo drugih elemenata skupa $T(\omega_0)$.

Odmah ćemo dokazati, da su gornja dva svojstva (31.1.3), (31.1.4) i dovoljna, pa da razvrstano uređen skup S bude sličan sa $T(\omega_0)$. Važi naime

Teorem 31.1.1. *Dva razvrstano uređena skupa* T_i, $(i = 1, 2)$ *koji imaju svojstvo da je*

(31.1.3) $$\gamma(-\infty, x, \infty)_{T_i} = \omega_0, \ (x \in T_i, \ i = 1, 2),$$

(31.1.4) $$k(-\infty, x|_{T_i} = \aleph_0 \qquad (x \in T_i, \ i = 1, 2)$$

jesu međusobno slična; svaki od njih sličan je sa skupom (31.1.1).

Dokaz teorema je vrlo jednostavan. Idemo da sagradimo jedno preslikavanje h skupa T_1 na T_2 tako da h bude sličnost i da je $hT_1 = T_2$. Da počnemo, neka je f bilo koje obostrano jednoznačno preslikavanje prebrojiva skupa $R_0 T_1$ na čitav $R_0 T_2$; f postoji, jer su prema (31.1.4) oba ta skupa prebrojiva; stavit ćemo $h(x) = f(x)$, $(x \in R_0 T_1)$.

Neka je $n \in N$ i pretpostavimo da je definirana sličnost h_{n-1} skupa

$$\bigcup_{\nu < n} R_\nu T_1 \quad \text{i skupa} \quad \bigcup_{\nu < n} R_\nu T_2 .$$

Kako je

$$R_n T_i = \bigcup R_0 (x, \infty)_{T_i}, \quad (x \in R_{n-1} T_i)$$

možemo sličnost h_{n-1}, *proširiti* na sličnost h_n ovako:

za svaki $x \in R_{n-1} T_1$ neka je f_x obostrano jednoznačno preslikavanje skupa

$$R_0 (x, \infty)_{T_1} \quad \text{na čitav skup} \quad R_0 (h_{n-1}(x), \infty)_{T_2};$$

tada ćemo staviti:

$$h_n(y) = f_x(y) \quad \text{za svaki} \quad y \in R_0 (x, \infty)_{T_1} .$$

Naravno, time što stavljamo

$$h_n(x) = h_{n-1}(x) \quad \text{za svaki} \quad x \in T_1 \quad \text{kojemu je rang} < n,$$

definirano je preslikavanje h_n na uniji slojeva $R_\nu T_1$, $(\nu \leqslant n)$ koju ono prevodi na čitav skup

$$\bigcup_\nu R_\nu T_2, \quad (\nu \leqslant n).$$

Kako to važi za svaki $n < \omega_0$, to znači da definirajući preslikavanje h skupa T_1 kao ono preslikavanje koje za svaki $x \in T_1$ ispunjava uslov da bude

$$h(x) = h_\nu(x) \quad \text{za svaki} \quad \nu \in N$$

dobiva se određena sličnost među skupovima T_1, T_2.

Time je teorem 31.1.1 dokazan.

Na osnovu teorema 31.1.1 možemo sa

$$T(\aleph_0 \mid \omega_0) \tag{31.1.5}$$

označiti bilo koji razvrstano uređen skup T sa svojstvima (31.1.3) i (31.1.4), da time istaknemo dvije činjenice:

prvo, da se radi o razvrstano uređenom skupu; i

drugo, da su ispunjena gornja dva uslova (31.1.3) i (31.1.4). Inače, u konkretnom slučaju, možemo pretpostaviti da je T sastavljen od svih konačnih slogova prirodnih brojeva ili od svih konačnih slogova parnih (neparnih) cijelih brojeva i t. d.

§ 31.2. Operator $O(S)$ za djelimično uređen skup S. Baire-ov prostor. Suslinova operacija.

Među istaknutim uređenim dijelovima djelimično uređena skupa S nalaze se *maksimalni* uređeni skupovi iz S; cijeli njihov skup označit ćemo sa

$$O(S) \text{ odnosno } OS. \tag{31.2.1}$$

Posebno, elementi skupa

$$OT(\omega_0) \tag{31.2.2}$$

dobiju se kao skup svih početnih komada pojedinog beskonačnog niza rednih brojeva $< \omega_0$; na pr. sam niz

$$0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots$$

rednih brojeva određuje ovaj maksimalni uređeni dio skupa T:

$$(0), (0, 1), (0, 1, 2), \ldots, (0, 1, 2, \ldots, n), \ldots, (n < \omega_0).$$

Baire-ov prostor.

U skupu (31.2.2) možemo odrediti određenu metriku ϱ: stavimo li naime

$$\varrho(a, a) = 0, \quad (a \in OT(\omega_0)), \tag{31.2.3}$$

$$\varrho(a, b) = \frac{1}{n+1}, \ (a, b \in OT(\omega_0)) \tag{31.2.4}$$

gdje je $n < \omega_0$ redni broj dobro uređena skupa $a \cap b$, odmah se vidi, da je ϱ razdaljinska funkcija u skupu (31.2.2). Na osnovu te metrike postaje skup (31.2.2) nosiocem točaka određena prostora t. zv. Baire-ova prostora.

Teorem 31.2.1. *Baire-ov prostor homeomorfan je s razdaljinskim prostorom I iracionalnih brojeva.*

Stvarno, označimo li sa h transformaciju koja iracionalnom broju $x \in (0, 1)$ zadanom sa svojim verižnim razvojem

$$x = \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cdots}}$$

pridijeljuje element

$$h(x) = (x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_2, x_3), \ldots$$

skupa odnosno prostora (31.2.2), odmah se vidi, da se dobije homeomorfno preslikavanje između Baire-ova prostora i prostora I.

Suslinova operacija. Neka je

(31.2.5) $$f$$

bilo kakvo preslikavanje skupa

(31.2.6) $$T = T(\aleph_0 \mid \omega_0);$$

to znači, da je $f(x)$ za svaki $x \in T$ potpuno određen skup (koji može biti i prazan); prema tome, za svaki puni skup $N \subseteq T$ potpuno je određen presjek

$$\bigcap_{x \in N} f(x);$$

specijalno, za svaki maksimalan posve uređen skup $M \in O(T)$ potpuno je određen skup

(31.2.7) $$\bigcap_{x \in M} f(x)$$

pa dakle i unija

(31.2.8) $$\bigcup_M \bigcap_{x \in M} f(x), \ (M \in O(T)) \quad \text{skupova (31.2.7).}$$

Ako je za svaki $x \in T$, $f(x)$ određen element izvjesne porodice F skupova, tada ćemo reći da skup (31.2.8) nastaje iz porodice F pomoću *Suslinove operacije, kojoj je T kostur.*

Tako na pr. presjek svakog niza $x_0, x_1, x_2, \ldots$ skupova iz F nastaje iz F Suslinovom operacijom; dovoljno je naime definirati preslikavanje f skupa T na F tako da bude

$$f(x) = x_n \quad \text{za svaki} \quad x \in R_n T \quad \text{i svaki} \quad n < \omega_0,$$

pa da se vidi, da je

$$\bigcap_{n < \omega_0} x_n = \text{skup (31.2.8).}$$

§ 31.3. Suslinovi skupovi. Borelovi skupovi.

Ako je

(31.3.1) $$F$$

bilo kakva obitelj skupova, tada ćemo sa

(31.3.2) $$(F; T)$$

označiti množinu svih skupova koji se mogu prikazati u obliku (31.2.8) pri čemu ima da bude $f(x) \in F$ za svaki $x \in T$.

Drugim riječima, *da neki skup A pripada kao element obitelji (F; T) nužno je i dovoljno, da postoji bar jedno preslikavanje f skupa T tako da bude*

(31.3.3) $$f(x) \in F \quad \textit{za svaki} \quad x \in T$$

i da važi

(31.3.4) $$A = \bigcup_M \bigcap_{x \in M} f(x), \ (M \in O(T)).$$

Članovi obitelji $(F; T)$ zovu se *Suslinovi skupovi pridruženi obitelji F, a kojima je skup T kostur.*

Lema 31.3.1. *Ako su T_1, T_2 dva slična skupa, tada za svaku porodicu F skupova važi*

$$(F; T_1) = (F; T_2).$$

Stvarno, neka je s sličnost tako da bude

$$s T_1 = T_2.$$

Ako je $A \in (F; T_1)$ dokažimo da je onda i $A \in (F; T_2)$ t. j. $(F; T_1) \subseteq (F; T_2)$. No, iz $A \in (F; T_1)$ proizlazi da postoji preslikavanje f skupa T_1 na F, tako da važi

$$A = \bigcup_{M_1} \bigcap_{x \in M_1} f(x), \ (M_1 \in OT_1);$$

stavimo li

$$g(s(x)) = f(x), \ (x \in T_1)$$

tada je g određeno preslikavanje skupa T_2 na F, pa je očigledno

$$A = \bigcup_{M_2} \bigcap_{t \in M_2} g(t), \ (M_2 \in OT_2),$$

dakle $A \in (F; T_2)$.

Analogno se dokazuje da je $(F; T_2) \subseteq (F; T_1)$.

Borelovi skupovi pridruženi porodici F skupova jesu članovi najmanje obitelji

(31.3.5) $$F_B$$

skupova koja ima ova tri svojstva:

1. Obitelj F je sadržana kao (pravi ili nepravi) dio u obitelji F_B $F \subseteq F_B$;
2. Ako je $X_n \in F_B$, $(n < \omega_0)$, tada je $\bigcup_{n<\omega_0} X_n \in F_B$ t. j. unija svakog niza elemenata obitelji F_B leži u F_B.
3. Ako je $X_n \in F_B$, tada je $\bigcap_{n<\omega_0} X_n \in F_B$ t. j. presjek svakog niza skupova koji leže u F_B također leži u F_B.

Ako je

(31.3.6) $$F_B = F.$$

veli se, da je F određen *Borelov sistem skupova.*

Egzistencija obitelji F_B može se dokazati na pr. ovako: svakako unija

$$\bigcup_x x, \ (x \in F)$$

je određen skup E; očigledno, skup $P(E)$ svih dijelova skupa E je određen Borelov sistem skupova t. j. važi

$$(P(E))_B = P(E); \quad \text{no svakako je} \quad F \subseteq P(E);$$

to znači, da se može govoriti o skupu svih Borelovih sistema koji sadrže F, a sadržani su u $P(E)$; presjek svih tih sistema očigledno je i sam određen Borelov sistem, a vidi se, da on sadrži obitelj F kao dio; taj presjek jest upravo obitelj F_B.

Proces σ. *Proces* δ. Obično se prema Hausdorffu za zadanu obitelj F skupova označuje sa

(31.3.7) F_σ (σ je početno slovo od suma = unija)

obitelj svih skupova oblika $\bigcup\limits_{n<\omega_0} x_n$ pri čemu je $x_n \in F$ za svaki $n < \omega_0$; isto tako prema Hausdorffu označujemo sa

(31.3.8) F_δ (δ je početno slovo od njem. riječi Durchschnitt=presjek),

obitelj svih presjeka nizova skupova izvađenih iz F. Analogno se definiraju obitelji:

$$F_{\delta\sigma} = (F_\delta)_\sigma, \quad F_{\sigma\delta} = (F_\sigma)_\delta.$$

Tako na pr. ako je F obitelj svih zatvorenih linearnih skupova, tada je naravno

$$\{x\} \in F \quad \text{za svaki} \quad x \in C_1,$$

pa zato činjenica da je prebrojivi skup R racionalnih brojeva unija svojih jednočlanih dijelova pokazuje da je

$$R \in F_\sigma.$$

Za skup I iracionalnih brojeva kao komplement CR skupa R imamo:

$$I = CR = C \bigcup_{x \in R} \{x\} = \bigcap_{x \in R} C(x).$$

No komplement $C(x)$ jednočlanog skupa $\{x\}$ jest otvoren skup. To znači da je I presjek od prebrojivo mnogo otvorenih linearnih skupova. Kraće se kaže da je I određen G_δ.

Analitički (Suslinovi) skupovi i Borelovi skupovi zadana prostora. Najčešći slučaj bit će da nam F označuje obitelj svih zatvorenih (otvorenih) skupova izvjesna prostora. Tada se elementi obitelji $(F; T)$ zovu *Suslinovi* ili *analitički skupovi* dotičnog prostora; elementi obitelji F_B jesu *Borelovi* skupovi dotičnog prostora. [1])

Tako na pr. *svaki zatvoreni (otvoreni) linearni interval je Borelov skup kao i Suslinov skup.*

Za zatvorene intervale, $[a, b]$, to je očigledno, jer je dovoljno promatrati preslikavanje f za koje je $f(x) = [a, b]$ za svaki $x \in T$, pa da se vidi da se skup (31.2.8) podudara sa $[a, b]$.

---

[1]) U općem slučaju, trebat će razlikovati dvije vrste Borelovih (Suslinovih) skupova u zadanom prostoru, već prema tome, da li je obitelj F sastavljena od zatvorenih ili otvorenih skupova.

Za otvorene intervale, to se vidi ovako: ako se radi o otvorenom intervalu

$$(a, b) \quad \text{sa} \quad a < b$$

tada je očigledno počam od nekog broja $n_0 < \omega_0$:

(31.3.9) $$a + \frac{1}{n} < b - \frac{1}{n} \quad \text{za sve} \quad n_0 < n < \omega_0$$

i

(31.3.10) $$\left[a + \frac{1}{n},\ b - \frac{1}{n}\right] \in F, \ (n_0 < n < \omega_0), \text{ pa je zato}$$

(31.3.11) $$\bigcup_n \left[a + \frac{1}{n},\ b - \frac{1}{n}\right] \in F_B, \ (n_0 < n < \omega_0)$$

određen element obitelji F_B.

No, interval (a, b) je element i obitelji $(F; T)$; jer ako za svaki $n \in R_0 T$ stavimo

$$f(n) = \left[a + \frac{1}{n_0 + n},\ b - \frac{1}{n_0 + n}\right]$$

pritom n_0 zadovoljava (31.3.9), dobit ćemo jednoznačno preslikavanje skupa $R_0 T$ na skup segmenata (31.3.10); to preslikavanje možemo proširiti i na čitav skup T uzimajući da je ono konstantno na svakom od skupova

$$[x, \infty)_T, \ (x \in R_0 T).$$

Očigledno je tada

$$\bigcap_{x \in M} f(x) = f(R_0 M) \quad \text{za svaki} \quad M \in O(T),$$

pa zato skup (31.2.8) postaje:

$$\bigcup_{M \in O(T)} f(R_0 M) = \bigcup_{x \in R_0 T} f(x) = \bigcup_{n_0 < n < \omega_0} \left[a + \frac{1}{n},\ b - \frac{1}{n}\right] = (a, b)$$

(= otvoreni interval ab realnih brojeva).

Dakle je zaista $(a, b) \in (F; T)$.

§ 31.4. **Analitički skupovi u separabilnim razdaljinskim prostorima.** Ako analitički skup A pripada razdaljinskom separabilnom prostoru, može se skup A definirati i takovim preslikavanjima f koja zadovoljavaju izvjesnim uslovima kao na pr. da dijametar skupova $f(x)$ teži prema 0, kad rang $\gamma(x)$ točke x u T teži prema ω_0 (pritom je rang $\gamma x = \gamma(x, T)$ definiran kao onaj redni broj ξ za koji je $x \in R_\xi T$).

Najprije, zbog separabilnosti postoji svuda gust skup

(31.4.1) $$X$$

koji je konačan ili prebrojiv. Za svaki realni broj $r > 0$, kuglice

$$K(x; r) \quad \text{odnosno} \quad \overline{K(x; r)}, \ (x \in X)$$

iscrpljuju čitav prostor, pa zato za svaki skup E važi

$$E = \bigcup_x E \cap \overline{K(x; r)}, \quad (x \in X).$$

Posebno to važi za zatvorene skupove F; no i skupovi

$$E \cap \overline{K(x; r)}$$

su zatvoreni; kako im je dijametar $\leqslant r$, to imamo

Lemu 31.4.1. *Svaki zatvoreni skup separabilna razdaljinskog prostora može se prikazati kao unija od prebrojivo mnogo zatvorenih skupova kojima je dijametar proizvoljno malen.*

Sada će nam biti lako dokazati da važi

Teorem 31.4.1. *Ako je A analitički skup u nekom razdaljinskom separabilnom prostoru P* (na pr. na pravcu), *tada postoji jednoznačno preslikavanje h parcijalno uređena skupa $T(\omega)$ na obitelj $F(P)$ zatvorenih skupova toga prostora, tako da važe slijedeća tri uslova:*

(31.4.2) $$A = \bigcup_M \bigcap_{x \in M} h(x), \quad (M \in O(T(\omega)));$$

(31.4.3)′ $$h(x) \supseteq h(x') \quad \text{za svaki} \quad x \leqslant x' \quad \text{u} \quad T(\omega);$$

(31.4.4) *dijametar skupa* $h(x)$ *je* $\leqslant \dfrac{1}{n+1}$ *za svaki* $x \in R_n T(\omega)$

i svaki $n < \omega_0$. Ako je prostor P k tome i potpun, tada je

(31.4.5) *za svaki* $M \in O(T(\omega))$ *skup* $\bigcap_{x \in M} h(x)$

sastavljen od jedne jedine točke ukoliko nije prazan.

Najprije, po teoremu 31.1.1 jasno je, da je skup

(31.4.6) $$T_p \equiv \bigcup_k R_{2k} T(\omega), \quad (k < \omega_0)$$

sličan sa samim skupom $T(\omega)$; zato prema lemi 31.3.1 i po definiciji Suslinovih skupova, postoji jednoznačno preslikavanje f skupa (31.4.6) na $F(P)$, tako da bude

$$A = \bigcup_M \bigcap_{x \in M} f(x), \quad (M \in O\,T_p).$$

Definirajmo preslikavanje f i na preostalom dijelu skupa $T(\omega)$ t. j. na skupu

(31.4.7) $$T_n \equiv \bigcup_k R_{2k+1} T(\omega), \quad (k < \omega_0).$$

No, za svaki

(31.4.8) $$x \in R_{2k+1} T$$

promatrajmo: neposrednog prethodnika x^- od x u $T(\omega)$, zatvoreni skup $f(x^-)$ te bilo koji niz zatvorenih skupova

(31.4.9) $$f(x^-)_1, \; f(x^-)_2, \; \ldots, \; f(x^-)_n, \; \ldots$$

kojima je dijametar $\leqslant \frac{1}{2k+2}$ a kojima je unija $= f(x^-)$; prema lemi 31.4.1 takav niz postoji; označimo li za zadan slog x sa

(31.4.10) $$zx$$

posljednji član sloga x (tako za slog $(1, 5)$ imamo $z(1, 5) = 5$), tada ćemo staviti

(31.4.11) $$f(x) = f(x^-)_{zx};$$

očigledno, za svaki $x \in R_{2k} T$ bit će

(31.4.12) $$f(x) = \bigcup_y f(y), \quad (y \in R_0(x, \infty)_T).$$

Nadalje zbog (31.4.9):

(31.4.13) dijametar skupa $f(x)$ je $\leqslant \frac{1}{2k+2}$ za svaki $x \in R_{2k+1} T$.

Vidi se odmah, da je preslikavanje f definirano u čitavom skupu T, da je $f(x) \in F$ za svaki $x \in T$ i da je

(31.4.14) $$\bigcup_M \bigcap_{x \in M} f(x) = \bigcup_{M_1} \bigcap_{x \in M_1} f(x), \quad (M \in OT_p,\ M_1 \in OT).$$

Stavimo li najzad za svaki $x \in T$:

(31.4.15) $$h(x) = \bigcap_y f(y), \quad (y \in (-\infty, x]_T),$$

dolazi se do određena preslikavanja h skupa T na F i odmah se vidi, da on zadovoljava uslovima (31.4.2)—(31.4.5) teorema.

Specijalno, činjenica (31.4.5) proizlazi neposredno iz uslova (31.4.4) i teorema 30.3.4.2.

§ 31.5. Veza s prostorom iracionalnih pravih razlomaka.

Neka je

(31.5.1) $$A$$

proizvoljan Suslinov skup nekog razdaljinskog potpuno separabilnog prostora P; tada prema teoremu 31.4.1 postoji preslikavanje

(31.5.2) $$h$$

skupa $T(\aleph_0 | \omega_0)$ na skup $F(P)$ svih zatvorenih skupova (prazan skup v uključen!) tako da važe relacije (31.4.2)—(31.4.5).

Teorem 31.5.1. (Luzin) *Svaki Suslinov skup A smješten u nekom potpunom razdaljinskom separabilnom prostoru nastaje iz prostora I iracionalnih brojeva neprekidnom transformacijom, pa postoji neprekidno jednoznačno preslikavanje*

(31.5.3) $$i$$

skupa I na A, tako da bude

(31.5.4) $$iI = A.$$

Da definiramo preslikavanje i, neka je za svaki $x \in I$:

$$x = \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{x_3 + \cdots}}} \tag{31.5.5}$$

verižni razvoj iracionalnog pravog razlomka x; neka je nadalje

$$y_0 \tag{31.5.6}$$

određena točka skupa A; za svaki $x \in I$ za koji je

$$\bigcap_{n \in N} h(x_1, \ldots, x_n) = v \ (= \text{prazno}), \tag{31.5.7}$$

ma da nije $A \cap h(x_1, \ldots, x_n) = v$ za sve $n \in N$, neka $(x_1, x_2, \ldots x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m)$ bude najveći početni komad niza $x_1, x_2, \ldots$ za koji je

$$A \cap h(x_1, x_2, \ldots, x_m) > v; \tag{31.5.8}$$ tada ćemo sa

$$y(x) \tag{31.5.9}$$

označiti određenu točku skupa (31.5.8).

Sada možemo definirati preslikavanje i; za svaki $x \in I$ skup

$$\bigcap_{n \in N} h(x_1, \ldots, x_n) \tag{31.5.10}$$

je ili prazan ili sastavljen od jedne jedine točke; u zadnjem slučaju, tu ćemo točku označiti sa $i(x)$; ako je pak skup (31.5.10) pust, označit ćemo sa $i(x)$ točku (31.5.9). Očigledno, preslikavanje i je time definirano u skupu I, a odmah se vidi da je $iI = A$.

Dokažimo još, da je preslikavanje i *neprekidno* u I, t. j. da za svaki $x \in I$ i svaki niz

$$a_k \in I, \ (k \in N) \quad \text{sa svojstvom}$$

$$\lim_k a_k = x, \ (k \in N) \quad \text{važi}$$

$$\lim_k i(a_k) = i(x), \ (k \in N). \tag{31.5.11}$$

No, granični prelaz $a_k \to x$ znači da u gotovo svima verižnim razvojima

$$a_k = \cfrac{1}{a_{k1} + \cfrac{1}{a_{k2} + \cdots}}$$

dolaze proizvoljno veliki početni komadi verižnog razvoja (31.5.5) broja x; ako je k tome skup (31.5.10) pun, to znači, da je on sastavljen od točke $i(x)$, pa zato ta točka $i(x)$ i gotove sve točke $i(a_k)$ leže u zatvorenom skupu $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kojemu je, prema (31.4.4) dijametar $\leqslant \frac{1}{n+1}$; dakle točke $i(x)$ i gotovo sve točke $i(a_n)$ leže u proizvoljno kratkim intervalima, što i znači, da važi granični prelaz (31.5.11).

Ako je pak skup (31.5.10) prazan, to onda znači, da su gotovo svi skupovi $A \cap h(x_1 \ldots x_n)$ prazni, pa je zato $i(a_k) = i(x)$ za gotovo sve $k \in N$; time je i u tom slučaju prelaz (31 5.11) dokazan.

Time je Luzinov teorem 31.5.1 potpuno dokazan.

§ 31.6. Osnovno svojstvo Suslinove operacije. Suslinovi skupovi prema Borelovima.

§ 31.6.1. Osnovno svojstvo Suslinove operacije.

Teorem 31.6.1.1. *Obitelj $(F; T)$ Suslinovih skupova proizvedenih iz obitelji F zatvorena je s obzirom na Suslinovu operaciju: podvrgnemo li Suslinove skupove Suslinovoj operaciji, dobit ćemo ponovo Suslinove skupove:*

(31.6.1.1) $$((F; T); T) = (F; T).$$

Drugim riječima, ako je

(31.6.1.2) $$f(x) \in (F; T) \quad \text{za svaki} \quad x \in T,$$

tada je skup

(31.6 1.3) $$A = \bigcup_M \bigcap_{x \in M} f(x), \ (M \in O(T))$$

određen element već i u obitelji $(F; T)$.

Ovdje ćemo uzeti da je T sastavljen od svih konačnih slogova prirodnih brojeva; zato se svaki M podudara sa skupom početnih komada posve određena beskonačna niza prirodnih brojeva; tako na pr. skup svih

$$(1), (1, 2), (1, 2, 3), \ldots, (1, 2, \ldots, n), \ldots$$

je određen element u $O(T)$ i sastavljen je od svih početnih komada prirodnog niza prirodnih brojeva.

Za pojedini $M \in O(T)$ možemo sa

(31.6.1.4) $$zM$$

označiti onaj beskonačni niz prirodnih brojeva, čiji početni komadi obrazuju skup M; to je u skladu sa dogovorom, da za svaki $x \in T$ sa zx označimo zadnji član sloga x; na pr. $z(1, 5, 3) = 3$.

Pređimo sada na sam dokaz. Prema hipotezi (31.6.1.2) postoji za svaki $x \in T$ određeno preslikavanje f_x skupa T na F tako da bude

(31.6.1.5) $$f(x) = \bigcup_{M_x} \bigcap_{t \in M_x} f_x(t), \ (M_x \in OT).$$

Prema tome, skup A glasi:

$$A = \bigcup_{M} \bigcap_{x \in M} \bigcup_{M_x} \bigcap_{t \in M_x} f_x(t), \quad (M, M_x \in OT) \qquad \text{odnosno}$$

(31.6.1.6) $$A = \bigcup_{M} \bigcup_{M_x} \bigcap_{x \in M} \bigcap_{t \in M_x} f_x(t), \quad (M, M_x \in OT \text{ za svaki } x \in M).$$

Vidimo, da se u (31.6.1.6) presjek uzima po obitelji skupova

(31.6.1.7) $$f_x(t), \ (t \in M_x, \ x \in M)$$

koja zavisi od proizvoljna elementa $M \in OT$ i skupova $M_x \in OT$ za svaki $x \in M$. Radi se o tome da skupove (31.6.1.7) na zgodan način svrstamo u jedan niz. Vidimo iz (31.6.1.7) i (31.6.1.6) da se pojavljuju skupovi

(31.6.1.8) $$M_x, \ M, \ (x \in M)$$

iz skupa $O(T)$.

Stavimo li kratkoće radi

(31.6.1.9) $$M_x = M_k, \quad \text{ako je} \quad x \in R_k M,$$

tada se pojavljuje niz

(31.6.1.10) $$M, M_0, M_1, \ldots, M_k, \ldots, (k < \omega_0)$$

elemenata iz $O(T)$ odnosno niz nizova

$$zM, zM_0, \ldots, zM_k, \ldots.$$

Ako je eksplicite

(31.6.1.11) $$\begin{cases} zM = \text{niz } n_{01}, n_{02}, \ldots, n_{0k}, \ldots \\ zM_{k-1} = \text{niz } n_{k1}, n_{k2}, \ldots, n_{kk}, \ldots \end{cases} \quad \text{za svaki } k \in N,$$

tada skupove (31.6.1.7) možemo svrstati u ovaj niz nizova:

(31.6.1.12) $$\begin{cases} f_{n_{01}}(n_{11}), \ f_{n_{01}}(n_{11}\, n_{12}), \ldots, f_{n_{01}}(n_{11}\, n_{12} \ldots n_{1k}), \ldots \\ f_{n_{01}\, n_{02}}(n_{21}), \ f_{n_{01}\, n_{02}}(n_{21}\, n_{22}), \ldots, f_{n_{01}\, n_{02}}(n_{21}\, n_{22} \ldots n_{2k}), \ldots \\ f_{n_{01}\, n_{02}\, n_{03}}(n_{31}), \ f_{n_{01}\, n_{02}\, n_{03}}(n_{31}\, n_{32}), \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Svrstajmo dvostruki niz (31.6.1.11) u obični niz

(31.6.1.13) $$m_1, m_2, m_3, \ldots$$

na pr. tako da stavimo

(31.6.1.14) $$n_{ik} = m_{2^i (2k-1)}, \quad (i < \omega_0, \ k \in N)$$

što odgovara obratu od rastavljanja niza 1, 2, 3, ... prirodnih brojeva u nizove

$$\begin{array}{llll} 1, & 3, & 5, & 7, \ldots \\ 2\cdot 1, & 2\cdot 3, & 2\cdot 5, & \ldots \\ 2^2\cdot 1, & 2^2\cdot 3, & 2^2\cdot 5, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

t. j. u nizove Ne, $2Ne$, 2^2Ne, 2^3Ne, . . . , pri čemu je Ne niz neparnih prirodnih brojeva.

Na taj način niz nizova (31.6.1.12) postaje:

(31.6.1.15) $$f_{m_1}(m_2),\ f_{m_1}(m_2, m_6),\ f_{m_1}(m_2, m_6, m_{10}), \ldots, f_{m_1 m_3}(m_{2^2\cdot 1}),$$
$$f_{m_1 m_3}(m_{2^2\cdot 1}, m_{2^2\cdot 3}), \ldots .$$

Očigledno, najviši indeks slova m koji se pojavljuje u pojedinom članu (31.6.1.15) je paran; naravno da u (31.6.1.15) nema članova s jednakim najvišim indeksom, jer se svaki prirodan broj može na jedan jedini način prikazati u obliku $2^n(2k-1)$. Označimo li sa a_i onaj član u (31.6.1.15) u kojem je $2i$ najviši indeks od m, tada dobivamo potpuno određen niz

(31.6.1.16) $$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_i, \ldots .$$

koji predstavlja određenu permutaciju dvostrukog niza (31.6.1.15); drugim riječima, obitelj skupova (31.6.1.7) podudara se sa nizom (31.6.1.16). Neka je

(31.6.1.17) $$\mu$$

određeno obostrano jednoznačno preslikavanje skupa $N\times N$ na čitav N, tako da je dakle specijalno

$\mu(m_{2i-1}, m_{2i})$ potpuno određen prirodan broj za svaki $i \in N$.

Definirajmo preslikavanje g u T stavljajući

(31.6.1.18) $$g(\mu(m_1 m_2)\, \mu(m_3 m_4) \ldots \mu(m_{2i-1}, m_{2i})) = a_i,\ (i \in N).$$

Označimo li sa

(31.6.1.19) $$M^0 = h(M, M_0, M_1, \ldots)$$

onaj element u $O(T)$ za koji je

$$zM^0 = \mu(m_1 m_2),\ \mu(m_3 m_4), \ldots$$

tada je očigledno

(31.6.1.20) $$\begin{cases} \text{obitelj skupova (31.6.1.7) identična s obitelji skupova} \\ \qquad g(\mu),\ (\mu \in M^0). \end{cases}$$

Pustimo li da u (31.6.1.8) skupovi M, M_x prolaze proizvoljno $O(T)$, prolazit će i pripadni skup (31.6.1.19) čitav $O(T)$; očigledno, preslikavanje koje nizu (31.6.1.10) pridijeljuje niz (31.6.1.19) odn. skup $M^0 \in O(T)$ jest obostrano jednoznačno.

Dokažimo još, da je gornje preslikavanje (31.6.1.18) jednoznačno definirano u T. Stvarno, ako je $r \in T$ jednako slogu

$$r_1, r_2, \ldots r_k,$$

tada je time definiran niz

$$\mu^{-1}r_1, \mu^{-1}r_2, \ldots \mu^{-1}_{r_k}$$

od $2k$ prirodnih brojeva, recimo

$$(31.6.1.21) \qquad p_1, p_2, \ldots, p_{2k}$$

za koje je

$$\mu(p_1, p_2) = r_1, \ldots, \mu(p_{2k-1}, p_{2k}) = r_k$$

a time je definiran i početni komad

$p_1, p_1 p_3, p_1 p_3 p_5, \ldots$ određene obitelji skupova $M \in O(T)$

$p_{2\cdot 1}, p_{2\cdot 1} p_{2\cdot 3}, \ldots\ldots$ određene obitelji skupova $M_0 \in O(T)$

$p_{2^2\cdot 1}, p_{2^2\cdot 1} p_{2^2\cdot 3}, \ldots$ određene obitelji skupova $M_1 \in O(T)$

. . . .

iz kojih obrnutim procesom proizlazi niz (31.6.1.21) i pri čemu za potpuno određeni niz $x \in M$ i potpuno određeni $t \in M_n$ proizlazi

$$f_x(t) = g(p_1, p_2, \ldots, p_{2k}) = g(r).$$

Dakle je g jednoznačno definirano preslikavanje.

Prijeđimo na zaključak: skup (31.6.1.6) na osnovu obrasca (31.6.1.20) postaje:

$$(31.6.1.22) \qquad \bigcup_{M^0} \bigcap_{M^0} g(\mu)$$

pri čemu je prema (31.6.1.19)

$$M^0 = h(M, M_0, M_1, \ldots, M_n, \ldots), \ (M, M_0, \ldots, M_r \in O(T));$$

kako pritom i M^0 prolazi čitavim skupom $O(T)$, pokazuje obrazac (31.6.1.22) da je zadani skup Suslinov skup kostura T proizveden preslikavanjem g skupa T na obitelj F.

Time je osnovni teorem 31.6.1.1 dokazan.

§ 31.6.2. Veza među Borelovim i Suslinovim skupovima.

Iz osnovnog teorema 31.6.1.1 neposredno izlazi

Teorem 31.6.2.1. *Unija (presjek) od svakog niza skupova iz $(F; T)$ opet je određen član u $(F; T)$; drugim riječima, obitelj $(F; T)$ je određen Borelov sistem skupova koji sadrži obitelj F; zato je*

$$(31.6.2.1) \qquad F_B \subseteq (F; T).$$

Stvarno, neka je

$$A_n \in (F; T) \text{ za svaki } n < \omega_0.$$

Definiramo li preslikavanje [1]

f	g
skupa T tako da stavimo	
$f(x) = A_n$ za svaki $x \in T$ kojemu je n početni element	$g(x) = A_n$ za svaki $x \in R_n T$, $(n < \omega_0)$
tada se neposredno vidi da je	
$\bigcup\limits_{n<\omega_0} A_n = \bigcup\limits_M \bigcap\limits_{x \in M} f(x)$	$\bigcap A_n = \bigcap\limits_M \bigcup\limits_{x \in M} g(x)$

pri čemu M prolazi skupom $O(T)$.

Kako su, prema teoremu 31.6.1.1 desne strane u prethodnim jednakostima određeni elementi obitelji $(F; T)$, to znači da je i unija i presjek skupova $A_0, \ldots, A_n, \ldots$ iz $(F; T)$, opet član skupa $(F; T)$, što i tvrdimo teoremom 31.6.2.1. U općem slučaju važi

(31.6.2.2) $$F_B \subset (F; T)$$

t. j. *ima analitičkih skupova koji nisu Borelovi skupovi* (Suslin).

Postavlja se pitanje: što je nužno i dovoljno pa da analitički skup A bude Borelov skup?

Mogu se dokazati ova dva teorema:

Teorem 31.6.2.2. (Suslin). *Da analitički skup nekog razdaljinskog prostora bude Borelov, nužno je, a i dosta je, da njegov komplement s obzirom na taj prostor bude također analitički skup.*

Teorem 31.6.2.3. (Luzin). *Da analitički skup A nekog razdaljinskog prostora P bude Borelov, nužno je i dovoljno da postoji jednoznačno preslikavanje f parcijalno uređena skupa T na obitelj $F(P)$ tako da u uniji*

(31.6.2.3) $$A = \bigcup_M \bigcap_{x \in M} f(x), \quad (M \in O(T))$$

članovi $\bigcap\limits_{x \in M} f(x)$ budu dva po dva disjunktna t. j. da za različite $M_1, M_2 \in OT$ slijedi

(31.6.2.4) $$\bigcap_{x \in M_i} f(x) = v, \quad (i = 1, 2).$$

Za dokaz tih teorema v. Hausdorff [2], § 34 pp 184—193. [2]

---

[1] Čitaj najprije jednu stranu, a onda drugu stranu.

[2] O analitičkim skupovima u općim prostorima vidi:

Kinjiro Kunugui, *La théorie des ensembles analytiques et les espaces abstraits* (Journal of Fac. Sci., Seria I, vol. 4 (1935). Sapporo. Japan).

Tu se pokazuje, da u općem slučaju uslovi u teoremima 31.6.2.2 i 31.6.2.3 nisu ekvivalentni, jer na pr. u prostoru K iz primjera na str. 23. navedenog časopisa i skup A i njegov komplement CA jesu analitički, a ipak ne postoji preslikavanje f skupa $T(\omega)$ na $F(K)$, tako da bi vrijedili obrasci (31.6.2.3), (31.6.2.4).

§ 31.7. Kardinalni broj Suslinovih skupova.

Može se dokazati ovaj vrlo opći i lijepi

Teorem 31.7.1. (Suslin). *Svaki beskonačni neprebrojivi Suslinov skup potpunog separabilnog metričkog prostora ima potenciju $c = 2^{\aleph_0}$ kontinuuma.*

Stvarno, neka je A određen beskonačan Suslinov skup potpunog separabilnog metričkog prostora (takovi su na pr. Kartezijevi prostori); neka je f takvo preslikavanje skupa T da bude

(31.7.1) $$A = \bigcup_M \bigcap_{x \in M} f(x), \ (M \in O(T)).$$

Očigledno rastavljanje

$$S = \bigcup_z [z, \infty)_T, \ (z \in R_0 T)$$

skupa (kostura) T ima za posljedicu ovo rastavljanje

(31.7.2) $$A = \bigcup_z \bigcup_{N_z} \bigcap_{x \in N_z} f(z) \cap f(x) = \bigcup_z f(z) \bigcup_{N_z} \cap \left(\bigcap_{x \in N_z} f(x) \right),$$

$$(N_z \in O(z, \infty)_T, \ z \in R_0 T)$$

samog skupa A na prebrojivo mnogo skupova oblika

$$f(z) \cap A_z(z), \quad \text{gdje je}$$

31.7.3) $A(z) = \bigcup_{N_z} \bigcap_{x \in N_z} f(x), \ (N_z \in O(z, \infty)_T)$ za svaki $z \in R_0 T$.

Kako je skup $(z, \infty)_T$ sličan sa T, to znači da je $A(z)$ određen Suslinov skup za svaki $z \in R_0 T$. Ukratko, zadani Suslinov skup A možemo ovako rastaviti:

(31.7.4) $$A = \bigcup_z f(z) \cap A(z), \ (z \in R_0 T),$$

pri čemu su $A(z)$ Suslinovi skupovi (31.7.3).

Prijeđimo sada na dokaz gornjeg Suslinova teorema.

Kako je A pretpostavljen beskonačnim i neprebrojivim, a prostor separabilnim, posjeduje skup A točaka kondenzacije; označimo li za neki skup X sa

(31.7.5) $$X_\gamma$$

skup svih točaka prostora sa svojstvom da *svaka* okolina od x sadrži neprebrojivo mnogo točaka skupa X, tada zbog pretpostavke da je skup A beskonačan i neprebrojiv, a prostor separabilan proizlazi da je skup

(31.7.6) $$A \cap A_\gamma \quad \text{beskonačan i neprebrojiv.}$$

Neka su

(31.7.7) $$a_0, \ a_1$$

dvije proizvoljne različite točke skupa (31.7.6), a k_0, k_1 dvije kuglice oko a_0 odn. a_1 sa svojstvom

(31.7.8) $$\overline{k_0} \cap \overline{k_1} = v.$$

Kako svaka kuglica k_0, k_1 sadrži beskonačno neprebrojivo točaka skupa A, to će na osnovu (31.7.4) biti

(31.7.9) $k_{i_1} \cap A = k_{i_1} \cap (\cup f(z) \cap A(z))$, $(z \in R_0 T)$ za $i_1 = 0$ ili 1.

To znači, da postoji bar jedna točka z_{i_1} sa svojstvom da skup

(31.7.10) $$k_{i_1} \cap f(z_{i_1}) \cap A(z_{i_1})$$

bude beskonačan i neprebrojiv.

Radeći dalje sa svakim od Suslinovih skupova $A(z_0)$, $A(z_1)$ na isti način kao što smo maloprije radili sa Suslinovim skupom A, došli bi do kuglica

(31.7.11) $$k_{i_1 0},\ k_{i_1 1} \text{ u } k_{i_1}\ (i_1 = 0, 1)$$

sa svostvom

$$\overline{k_{i_1 0}} \cap \overline{k_{i_1 1}} = v,$$

te do točaka $z_{i_1 0}$, $z_{i_1 1}$ koje slijede neposredno iza z_{i_1} i to tako da skup

31.5.72) $$k_{i_1 i_2} \cap f(z_{i_1 i_2}) \cap A(z_{i_1 i_2}),\ (i_1, i_2 = 0, 1)$$

bude beskonačan i neprebrojiv; pritom je $A(z_{i_1 i_2})$ Suslinov skup, kojemu je kostur skup $(z_{i_1 i_2}, \infty)_T$, a proizveden je zadanim preslikavanjem f, dakle

$$A(z_{i_1 i_2}) = \bigcup_M \bigcap_{x \in M} f(x),\ (M \in O(z_{i_1 i_2}, \infty)_T).$$

Na posve isti način dokazuje se postojanje kuglica

(31.7.13) $$k_{i_1, i_2, 0},\ k_{i_1, i_2, 1} \text{ u } k_{i_1 i_2}$$

sa disjunktnim prostornostima te do različitih točaka

(31.7.14) $$z_{i_1, i_2, i_3} \in R_0(z_{i_1, i_2}, \infty)_T,\ (i_3 = 0, 1)$$

tako da Suslinovi skupovi

$$A(z_{i_1, i_2, i_3}),\ (i_3 = 0, 1)$$

budu beskonačni i neprebrojivi.

Induktivno se tako dolazi do zatvorenih skupova

(31.7.15) $$f(z_{i_1, i_2, \ldots, i_n}) \quad \text{i do kuglica}$$

(31.7.16) $k(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n) \subseteq k(i_1, i_2 \ldots, i_{n-1})$, $(i_r = 0$ ili $1)$

sa disjunktnim prostornostima i s radiusom $< \dfrac{1}{n}$ i to za svaki dijadski slog od n članova.

Uzmemo li, da je preslikavanje f silazno t. j. da iz $x \leqslant x'$ u T slijedi $f(x) \supseteq f(x')$, a to se vazda može suponirati [1]); onda to znači, da je za svaki diadski beskonačni niz

$$i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$$

skup

$$\bigcap_n f(z_{i_1 i_2 \ldots i_n}) \cap \overline{k}(i_1 i_2 \ldots i_n), \ (n \in N) \tag{31.7.17}$$

kao presjek niza punih zatvorenih skupova kojima dijametar $\to 0$ sastavljen prema teoremu 30.3.4.2 od jedne jedine točke koja naravno leži u zadanu skupu A, kako to neposredno izlazi iz definicije (31.7.1).

Kako pritom različitim diadskim nizovima odgovaraju različite točke skupa A, to znači, da skup A sadrži jedan diadski diskontinuum, pa mu je dakle potencija $\geqslant c$, a odatle $kA = c$.

Primijetimo li, da je diadski diskontinuum savršen skup, dobivamo:

Korolar 31.7.1. *Svaki beskonačan neprebrojiv Suslinov skup separabilnog potpunog metričkog prostora sadrži savršen skup.*

Korolar 31.7.2. *Svaki beskonačan neprebrojiv Borelov skup koji leži u nekom metričkom potpunom i separabilnom prostoru sadrži savršen pun dio.*

Korolar 31.7.3. *Svaki zatvoren (otvoren) beskonačan neprebrojiv skup izvađen iz nekog razdaljinskog potpunog separabilnog prostora sadrži savršen pun skup, pa zato ima potenciju kontinuuma (Cantor-Bendixonov teorem).*

Jedan Luzinov problem. Koliko je relativno lak i lijep odgovor na problem o kardinalnom broju svakog Suslinova skupa, toliko je nevjerojatno kako se stvar zamršuje kad se promatraju *komplementi analitičkih skupova* (cf. Luzin [1] p. 295). Doduše, Luzin je dokazao, da svaki beskonačni neprebrojivi komplement Suslinova skupa ima potenciju $\aleph_1$ ili $2^{\aleph_0}$, no bez Cantorove hipoteze kontinuuma $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ne zna se danas, *da li postoji ikoji analitički skup kojemu bi komplement imao kardinalni broj $\aleph_1$, niti ikoji skup potencije $\aleph_1$ koji ne bi bio komplement analitičkog skupa.*

Luzin je izrekao mišljenje, da je svaki linearan skup kojemu je potencija $\aleph_1$ komplement izvjesnog analitičkog skupa — (v. *Fundamenta Mathematicae*, 25 (1935), (pp 109—131); ta je hipoteza u protivnosti sa Cantorovom hipotezom o kontinuumu, pa je to bio prvi slučaj, da se svijesno negirala Cantorova hipoteza ne plašeći se da će nas taj postupak dovesti do protuslovlja.

---

[1]) Dovoljno je promatrati preslikavanje g za koje je

$$g(x) = \bigcap_{\xi \leq x} f(\xi) \text{ za svaki } x \in T.$$

pa da se vidi da je g silazno preslikavanje skupa S i da je

$$\bigcap_{x \in M} f(x) = \bigcap_{x \in M} g(x), \ (M \in OT).$$

§ 31.8. Rekurzivno izvođenje Borelovih skupova. Veza između Borelovih i Suslinovih skupova.

Borelov sistem F_B za zadanu obitelj F skupova definirali smo kao najmanju obitelj X skupova za koju je

(31.8.1) $$X_\sigma \subseteq X, \quad X_\delta \subseteq X, \quad F \subseteq X$$

t. j. koja ima svojstvo da sadrži i uniju i presjek svakog svoga niza skupova. No, iterativno se može vrlo lako doći do porodice X skupova koja zadovoljava svojstvima (31.8.1). Stvarno, stavimo

(31.8.2) $$F^0 = F;$$

pretpostavimo, nadalje, da je $0 < \alpha < \omega_1$ bilo koji redni broj i da je definiran uzlazan niz (finitan ili transfinitan)

(31.8.3) $$F^0 \subseteq F^1 \subseteq \ldots \subseteq F^\xi \subseteq \ldots, \quad (\xi < \alpha);$$

tada ćemo definirati i obitelj F^α stavljajući:

(31.8.4) $$F^\alpha = (\bigcup_{\xi<\alpha} F^\xi)_\sigma \quad \text{ili} \quad (\bigcup_{\xi<\alpha} F^\xi)_\delta,$$

već prema tome da li je α neparan ili paran broj.

Očigledno, time je definiran transfinitan uzlazan niz

(31.8.5) $$F^0 \subseteq F^1 \subseteq \ldots \subseteq F^\alpha \subseteq \ldots, \quad (\alpha < \omega_1)$$

kojemu svi članovi F^α obuhvataju zadanu obitelj F. Naravno, ako je $F^\xi = F^{\xi+1}$ za bar jedan $\xi > 0$, bit će tada $F^\xi = F^\alpha$ za svaki $\xi \leqslant \alpha < \omega_1$. U općem slučaju, važi u (31.8.5) svuda znak $\subset$.

Teorem 31.8.1.

(31.8.6) $$F_B = \bigcup_\alpha F^\alpha, \quad (\alpha < \omega_1).$$

Da se taj teorem dokaže, dovoljno je dokazati, da obitelj

(31.8.7) $$B = \bigcup_\alpha F^\alpha, \quad (\alpha < \omega_1)$$

zadovoljava odnosima (31.8.1), posebno, da je $B_\sigma \subseteq B$, $B_\delta \subseteq B$ t. j. da za svaki niz $X_n \in B$ slijedi da je i

(31.8.8) $$\bigcap_n X_n \in B \quad \text{i} \quad \bigcup_n X_n \in B$$

jer je F_B *najmanja* obitelj $X \supseteq F$ koja zadovoljava (31.8.1).

No, iz $X_n \in B$ slijedi da postoji broj $\alpha_n < \omega_1$ sa svojstvom $X_n \in F^{\alpha_n}$; kako je $\alpha_n < \omega_1$, to je i

$$\sup_{n<\omega_0} \alpha_n < \omega_1$$

pa je dovoljno da sa α označimo bilo koji redni broj $> \sup\limits_{n<\omega_0} \alpha_n$ koji je paran odn. neparan, pa da se uvjerimo da važi

$$\bigcap_n X_n \in F^\alpha \quad \text{odn.} \quad \bigcup_n X_n \in F^\alpha,$$

a time da važi (31.8.1).

Posebno, pođe li se od familije $F(P)$ svih *zatvorenih* skupova izvjesna prostora P (na pr. prostora realnih brojeva) dobiju se gornjim postupkom *određeni F-razredi Borelovih skupova*

(31.8.9) $$F^0(P),\ F^1(P),\ F^2(P),\ \ldots,\ F^\alpha(P),\ \ldots,\ (\alpha < \omega_1)$$

Polazeći od porodice $G(P)$ svih *otvorenih* skupova prostora P, dobije se na gornji iterativni način [1]) niz (finitan ili transfinitan)

(31.8.10) $$G^0(P),\ G^1(P),\ G^2(P),\ \ldots,\ G^\alpha(P),\ \ldots,\ (\alpha < \omega_1).$$

G-razreda Borelovih skupova: naravno da je

(31.8.11) $$G_B = \bigcup_\xi G^\xi(P)\ (\xi < \omega_1).$$

Izučavanje pojedinih razreda $F^\alpha(P)$ odn. $G^\alpha(P)$ može biti od naročitog interesa. Često se javlja razred $F'(P)$ sastavljen od skupova F_σ, i razred $G'(P)$ sastavljen od skupova G_δ. Tako na pr. skup

$$I \times C_1$$

točaka ravnine s iracionalnim apscisama je određen G_δ t. j. pripada razredu $G'(C_2)$ ravninskih skupova koji su presjek otvorenih skupova. Stvarno,

$$I \times C_1 = C(R \times C_1) = C(\bigcup_{r \in R} r \times C_1) = \bigcap_{r \in R} C(r \times C_1);$$

pritom je skup $r \times C_1$ zatvoren, jer se sastoji od pravca; dakle je skup $I \times C_1$ presjek od prebrojivo mnogo otvorenih skupova $C(r \times C_1)$:

(31.8.12) $$I \times C_1 = \bigcap_{r \in R} C(r \times C_1).$$

Zanimljivo je, da se svaki Suslinov skup u Kartezijevom prostoru C_n od n-dimenzija može dobiti ortogonalnim projiciranjem izvjesnog skupa G_δ prostora C_{n+1}.

§ 31.9. Neprekidna preslikavanja Suslinovih i Borelovih skupova.

Neka su

$$X,\ Y,$$

dva razdaljinska prostora, a φ ma kakvo jednoznačno neprekidno preslikavanje prostora X na prostor Y. Znamo, da je to preslikavanje *neprekidno* onda i samo onda, ako je za svaki otvoreni (zatvoreni) skup $M \subseteq Y$ njegov izvorni skup $\varphi^{-1}(M)$ također otvoren (zatvoren) u X. Odatle neposredno izlazi:

Teorem 31.9.1. *Ako je φ bilo kakvo neprekidno jednoznačno preslikavanje prostora X u prostor $Y = \varphi X$, tada:*

a) *iz $A \in (F(\varphi(X)); T)$ slijedi $\varphi^{-1}A \in (F(X); (P))$, t. j. izvorni skup u X svakog Suslinovog skupa u φX je Suslinov skup:*

---

[1]) Stavljajući $G^0(P) = G(P),\ G^\alpha(P) = (\bigcup_\xi G^\xi(P))_i,\ (\xi < \alpha)$

gdje je $i = \delta$ ili σ, već prema tome, da li je broj α neparan ili paran.

b) *iz* $B \in F^\alpha(\varphi X)$ *slijedi* $\varphi^{-1}B \in F^\alpha(X)$, *t. j. izvorni skup u X svakog Borelova skupa razreda* $F^\alpha(\varphi X)$ *leži u anolognom razredu* $F^\alpha(X)$ *i to za svaki* $\alpha < \omega_1$.

Sasvim je drugo ovo pitanje:

Da li je neprekidan transformat φA *Suslinova skupa A prostora X opet Suslinov skup za prostor* φX?

Da li je neprekidan transformat φB *Borelova skupa B prostora X opet Borelov skup za prostor* φX?

Odgovor na prvo pitanje je pozitivan uz dosta široke pretpostavke (teorem 31.9.2); naprotiv, odgovor na drugo pitanje je negativan i u vrlo specijalnim slučajevima (teorem 31.9.3).

Teorem 31.9.2. *Svako metričko neprekidno preslikavanje svakog Suslinovog skupa iz potpunog separabilnog raždaljinskog prostora dovodi opet do određena Suslinova skupa.*

Stvarno, neka je A analitički skup prostora X; neka je nadalje φ neprekidno preslikavanje prostora X u prostor $Y = \varphi X$.

Tvrdimo, da je u prostoru φX skup φA analitičan.

Kako je prostor X potpun, separabilan i razdaljinski, postoji prema teoremu 31.4.1 i takovo preslikavanje f razvrstana skupa $T(\aleph_0 | \omega_0)$ dá budu ispunjeni uslovi (31.4.2)—(31.4.5).

Tvrdimo, da je

(31.9.1) $$\varphi A = \bigcup_M \bigcap_{x \in M} \overline{\varphi f(x)}, \quad (M \in OT(\aleph_0 | \omega_0));$$

kad to dokažemo, bit će time dokazan i sam teorem 31.9.2.

No, za svaki $M \in OT(\aleph_0 | \omega_0)$, zbog uslova (31.4.4) skup

(31.9.2) $$\bigcap_n f(R_n M)\,[1], \quad (n < \omega_0)$$

je ili pust ili jednočlan. Prvi slučaj, zbog uslova

$$f(R_0 M) \supseteq f(R_1 M) \supseteq \ldots$$

i pretpostavke da je prostor X potpun nastupa, prema teoremu 30.3.4 2, jedino onda, ako među skupovima $f(R_n M)$, $(n < \omega_0)$ ima i *praznih;* tada naravno i među skupovima $\varphi f(R_n M)$, $(n < \omega_0)$, dakle i među skupovima $\overline{\varphi f(R_n M)}$, $(n < \omega_0)$ ima praznih, pa je prema tome

(31.9.3) $$\bigcap_n \overline{\varphi f(R_n M)} = \varphi \bigcap_n f(R_n M), \quad (n < \omega).$$

Dokažimo, da ta jednakost važi i onda kad je skup (31.9.2) jednočlan i recimo sastavljen od y.

---

[1]) Tu $f(R_n M)$ označuje u što prelazi element sloja $R_n M$.

Najprije, iz $y \in \bigcap_n f(R_n M)$, $(n < \omega_0)$ slijedi $y \in f(R_n M)$ dakle

$$\varphi(y) \in \varphi f(R_n M) \quad \text{pa tim prije}$$

$$\varphi(y) \in \overline{\varphi f(R_n M)},$$

što znači, da je $\bigcap_n \overline{\varphi f(R_n M)} \geq \varphi \bigcap_n f(R_n M)$, $(n < \omega_0)$.

Isto tako, dokažimo, da je

$$\bigcap_n \overline{\varphi f(R_n M)} \subseteq \varphi \bigcap_n f(R_n M), \ (n < \omega_0) \tag{31.9.4}$$

Neka je naime

$$z \in \bigcap_n \overline{\varphi f(R_n M)}, \ (n < \omega_0) \quad \text{dakle} \tag{31.9.5}$$

$$z \in \overline{\varphi f(R_n M)}, \ (n < \omega_0);$$

to znači, da u skupu $\varphi f(R_n M)$ postoji točka z_n proizvoljno blizu točke z, recimo tako da bude:

$$\varrho(z, z_n) < \frac{1}{n+1}; \text{ dakle}$$

$$\lim z_n = z. \tag{31.9.6}$$

Neka je nadalje $x_n \in f(R_n M)$ sa svojstvom, da je $\varphi(x_n) = z_n$; jasno je, da je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = y = \text{jedini element skupa (31.9.2)};$$

odatle zbog neprekidnosti funkcije φ:

$$\lim \varphi(x_n) = \varphi(y) \quad \text{t. j.}$$

$$\lim z_n = \varphi(y), \quad \text{što zbog (31.9.6) postaje:}$$

$$z = \varphi(y).$$

A to zbog (31.9.5) znači da važi (31.9.4), pa dakle i (31.9.3), a time i sama jednakost (31.9.1).

Suslinovi skupovi kao projekcije Borelovih skupova.

Kako su projiciranja poseban slučaj neprekidnih preslikavanja, to imamo ovaj

Korolar 31.9.1. *Projicira li se Suslinov skup iz prostora C_{n+1} na prostor C_n, dobit će se opet Suslinov skup.*

Taj je rezultat tim značajniji što analogna činjenica za Borelove skupove ne važi; naprotiv, može se dokazati

Teorem 31.9.3. *Svaki Suslinov skup iz Kartezijeva prostora C_n može se dobiti kao projekcija Borelova skupa G_δ prostora C_{n+1}; specijalno, svaki linearan Suslinov skup jest projekcija izvjesna ravninskog Borelova skupa G_δ.*

Stvarno, neka je A proizvoljan linearan Suslinov skup; tada prema teoremu postoji jednoznačno neprekidno preslikavanje φ prostora I iracionalnih brojeva, tako da bude

$$\varphi I = A.$$

Promatrajmo skup

$$E \text{ svih točaka } (x, \varphi(x)), \ (x \in A)$$

i skup I_2 svih točaka ravnine s iracionalnon apscisom; skup I_2 je G_δ (presjek od prebrojivo mnogo otvorenih skupova); zato je skup

$$\bar{E} \cap I_2 \tag{31.9.7}$$

kao presjek od F i G_δ također G_δ. No, očigledno, projiciramo li skup (31.9.7) koji je dakle određen G_δ na ordinatnu os, dobije se zadani analitički skup A.

Time je teorem 31.9.3 dokazan.

Inače taj teorem pokazuje na kako prirodan način — projiciranjem — nastaju Suslinovi skupovi i to iz vrlo jednostavnih Borelovih skupova. Koliko god sistem Borelovih skupova izgleda kao prirodna cjelina, ipak već i tako prosta operacija kao što je okomito projiciranje dovodi do skupova van te cjeline, protivno jednoj tvrdnji Lebesgue-a; kad je Suslin 1917 otkrio griješku u Lebesgue-ovu zaključku, otkrio je on time i analitičke skupove.

Skup E_0 u razlaganju (15.1.3.9) je prvi analitički skup koji nije Borelov skup — pronalazak kojeg je zgodno staviti u paralelu s otkrićem prvog broja (vjerojatno broja $\sqrt{2}$) koji nije racionalan.

Primijetimo, da u prostoru $F[0, 1]$ svih zatvorenih punih skupova iz segmenta $[0, 1]$, onaj njegov dio koji je sastavljen od svih *neprebrojivih* skupova $X \in F[0, 1]$ čini analitičan skup koji nije Borelov (W. Hurewicz, *Fund. Math.* (15) 1930, 4—17).

Projektivni skupovi zadana prostora jesu članovi najmanje obitelji $\Pi(P)$ skupova, koja zadovoljava ovim uslovima:

1) Svi Borelovi skupovi prostora leže u obitelji $\Pi(P)$;

2) Ako $A \in \Pi(P)$, tada i svaka neprekidna slika fA koja leži u promatranom prostoru jest određen element obitelji $\Pi(P)$.

3) Iz $A \in \Pi(P)$ slijedi $CA \in \Pi(P)$.

Prema tome, analitički skupovi i njihovi komplementi jesu primjeri projektivnih skupova. Projektivne skupove uveo je Luzin; međutim, zbog velikih poteškoća, njihovo izučavanje nije mnogo napredovalo. (isp. Kuratowski [1] § 34, pp 234—246 i Luzin [1] gl. V, pp 267—320).

§ 32. MJERA SKUPOVA — IZMJERIVI SKUPOVI.

§ 32.1. Problematika mjere. Historijski pregled.

Znatan dio matematike ima svoj začetak u mjerenjima i premjeravanjima. Klasični primjer za to jest geometrija. Tu smo od najjednostavnijih likova u vezi sa premjeravanjem zemljišta dolazili do sve zamršenijih tvorevina kojima smo nastojali odrediti dužinu odn. površinu odn. zapreminu. [1])

Ideja premjeravanja sastoji se u tom, da se na izvjestan način mjerenom predmetu pridijeli izvjestan broj, koji je obično realan i $\geqslant 0$; zbog jednostavnosti u izlaganjima, dopušta se da pojedinom predmetu može biti pridruženo i ∞ kao njegova „mjera".

U praksi se obično radi ovako:

Prvi korak. Polazi se od jednostavnih tvorevina kao što su duži na pravcu, pravokutnici u ravnini, paralelepipedi u prostoru i t. d. (jednim imenom možemo te tvorevine zvati „intervalima"), njima znamo odrediti „dužinu" odn. „površinu" odn. „volumen" na uobičajeni način i tako na pr. radi li se o pravokutniku sa krajevima

$$(x_1\ y_1),\ (x_2, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_1, y_2)$$

pri čemu je $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$, tada pod površinom toga pravokutnika razumijevamo proizvod

$$(x_2 - x_1)\ (y_2 - y_1).$$

Drugi korak (aditivnost) izrazuje osnovno svojstvo svakidašnjeg mjerenja koje se sastoji u *nanošenju* jedinice za mjerenje (štap, metar, pločica i t. d.): Unija od bilo koja dva, a sljedstveno i od konačno mnogo pravokutnika [2]) koji ne zadiru jedan unutar drugoga ima površinu koja je jednaka sumi površina pojedinih članova toga spoja (aditivno svojstvo površine).

Treći korak (približavanje zadanom liku L pomoću jednostavnih likova). Oko zadanog lika L nastoji se opisati zgodna figura sastavljena od konačno mnogo pravokutnika, pa se tu figuru sve više priljubljuje liku L i u jednostavnijim slučajevima površina lika L definira kao limes površina dotične figure, kad se ta sve više i više približuje liku L; problemi klasičnog integralnog računa odraz su toga postupka. [3])

Na ta tri svakidašnja koraka nadovezuje se u novijoj matematici:

---

[1]) Korisno je pritom da se sjetimo, kako je Kepler (*Stereometria doliorum vinariorum* = *Stereometrija vinskih bačava*, Linz 1647) pri izučavanju obujma bačava bio blizu nekojih važnih pitanja infinitezimalnog računa.

[2]) Mi ćemo govoriti o površinama likova u ravnini. Naravno, slična se razmatranja bez daljnjega prenose sa C_2 na bilo koji Kartezijev prostor C_n.

[3]) Posebno mjesto zauzima stara metoda *ekshaustije (iscrpljivanja)* lika: lik L se prikazuje kao spoj (unija) od prebrojivo mnogo elementarnih figura koje ne zadiru jedna unutar druge, pa se površina lika L određuje kao suma površina članova toga spoja. Klasičan primjer za to pruža kvadratura segmenta parabole (Arhimed).

Četvrti korak (Lebesgue-ova teorija mjere — Lebesgue-ova integracija). Tu se za pomoćne likove uzima ne samo spoj od konačno mnogo pravokutnika nego i spojevi (unije) od *prebrojivo mnogo* pravokutnika; to je sasvim saglasno sa činjenicom da je već preko 150 godina pojam niza i prebrojivosti osnov matematičke analize.

Peti korak, shvata problem mjere kao izvjesna preslikavanja djelimično uređenih skupova. [1]

Činjenica, da zadanom liku možemo opisivati i upisivati elementarne likove ima svoj odraz u teoriji skupova, pa se općenito govori o *vanjskoj i nutrašnjoj mjeri* zadana skupa S simbolički $m_e S$, $m_i S$ koje će tek u osobitim slučajevima biti međusobno jednake.

U izučavanju mjere pojavljuje se vrlo mnogo matematičkih imena (Eudokso, Euklid, Arhimed, Cavalieri, Kepler, u novije doba G. Cantor, Stolz, Harnack, Du Bois-Reymond, Peano, te naročito C. Jordan, a poglavito Borel i Lebesgue).

Izložit ćemo ukratko modernu Lebesgueovu mjeru skupova. Ima više načina kako da se to uradi (v. na pr. Borel [2], § 40; *de la Vallée Poussin* [1] ch. II).

Mi ćemo sada prikazati Lebesgue-ovu mjeru skupova držeći se Saksa ([1] ch. II).

§ 32.2. **Skupovi mjere nula.** Ubuduće, ukoliko izričito ne kažemo drukčije, radit ćemo u izvjesnom Kartezijevu prostoru C_n; u njemu ćemo promatrati izvjesnu vrstu osnovnih likova („intervali") kojima na uobičajeni način određujemo „mjeru" (dužinu, površinu, obujam i t. d.). Tako na pr. u prostoru C_1 osnovni likovi jesu višečlani zatvoreni segmenti; u ravnini C_2 polazimo od zatvorenih pravokutnika kojima su stranice paralelne s koordinatnim osima.

Mjera intervala I označit će se sa

$$mI. \tag{32.2.1}$$

Nadalje ćemo sa

$$\Phi \tag{32.2.2}$$

označavati bilo koju konačnu ili prebrojivu obitelj zatvorenih „intervala"; najzad, $\sigma\Phi$ će značiti:

$$\sigma\Phi = \sum_X mX, \quad (X \in \Phi). \tag{32.2.3}$$

Pritom, naravno, obitelj Φ zamišljamo u obliku niza (konačna ili beskonačna); na taj način, $\sigma\Phi$ izlazi kao suma izvjesna reda pozitivnih brojeva

$$mX, \ (X \in \Phi).$$

[1] O tome će u *Radu Jugoslavenske Akademije u Zagrebu* izaći jedan članak.

Osnovno svojstvo o komutaciji redova s pozitivnim članovima ima za posljedicu, da je $\sigma\Phi$ potpuno određen sa Φ i da ne zaviši od toga, kako su elementi od Φ svrstani u niz. Naravno,

$$0 < \sigma\Phi \leqslant \infty. \tag{32.2.4}$$

Definicija 32.2.1. Reći ćemo, da je skup S mjere nula, ako za svaki realni broj $\eta > 0$ postoji konačna ili prebrojiva obitelj Φ osnovnih likova, tako da u jednu ruku bude

$$S \subseteq \cup X, \ (X \in \Phi) \tag{32.2.5}$$

t. j. da je skup S sadržan u uniji skupova iz Φ, a u drugu ruku, da *„totalna mjera obitelji"* Φ bude $< \eta$ t. j. da bude

$$\sum_X m X < \eta, \ (X \in \Phi). \tag{32.2.6}$$

Prema gornjim oznakama ta se definicija može i ovako izreći: skup S je mjere 0 ako za svaki $\eta > 0$ postoji bar jedna obitelj Φ za koju je

$$\sigma\Phi < \eta \quad \text{i da važi (32.2.5).} \tag{32.2.7}$$

Kraće se može reći, da je skup S mjere nule, ako je on sadržan u uniji konačne ili prebrojive obitelji osnovnih likova, kojoj je sveukupna mjera proizvoljno malena.

Pojam skupa mjere nule uveo je Borel; time je udaren osnov čitavoj novijoj teoriji mjere.

Lema 32.2.1. *Svaki dio skupa mjere nule također je mjere nula. Dokaz je očigledan.*

Lema 32.2.2. *Svaki jednočlani skup ima mjeru nula.*

Stvarno, neka je $\{x\}$ jednočlan skup; neka je nadalje η proizvoljan realan broj; očigledno, može se oko točke x opisati jedan pravokutnik P sa stranicama koje su paralelne s osima koordinata, a kojima su dužine $< \sqrt{\eta}$; tada je dovoljno staviti $\Phi = \{P\}$, pa da se uvjerimo, da su ispunjeni odnosi (32.2.5) i (32.2.7).

Lema 32.2.3. *Svaki konačni ili prebrojivi skup jest mjere* 0.

Možemo odmah uzeti teži slučaj, da se radi o prebrojivom skupu S; treba dokazati da za svaki broj $\eta > 0$ postoji konačan ili prebrojiv skup Φ' intervala tako da važi (32.2.5) i (32.2.7).

No, neka je

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

prebroj skupa S; pridijelimo točki a_n interval oko a_n mjere $\frac{\eta}{2^{n+1}}$; označimo li sa Φ niz tako dobivenih intervala, zadovoljavat će obitelj Φ odnosima (32.2.5) i (32.2.7), jer je

$$\sigma\Phi = \Sigma \frac{\eta}{2^{n+1}} = \frac{\eta}{2} < \eta.$$

Korolar 32.2.1. *Skup racionalnih brojeva je mjere nula.*

Lema 32.2.4. *Spoj od konačno ili prebrojivo mnogo skupova mjere 0 opet je mjere* 0.

Uzmimo, da se radi o beskonačnom nizu

$$S_1, S_2, \ldots,$$

različitih skupova mjere 0; treba dokazati da je njihova unija S opet mjere 0, t. j. da za svaki $\eta > 0$ postoji bar jedan Φ za koji važi (32.2.5), (32.2.7). No, kako je S_n, za svaki $n \in N$, mjere 0, postoji izvjestan Φ, recimo Φ_n tako da bude

$$S_n \subseteq \bigcup_{X \in \Phi_n} X; \ \sigma\Phi_n < \frac{1}{2^{n+1}} \eta;$$

to onda znači, da je dovoljno promatrati uniju Φ skupova Φ_n, $(n \in N)$, pa da se uvjerimo, da su ispunjeni traženi odnosi (32.2.5), (32.2.7).

Definicija 32.2.2. Prema Lebesgue-u, velimo da neko svojstvo važi *skoro svuda* (presque partout), ako je ono istinito u čitavom prostoru *izuzev eventualno neki skup mjere* 0.

Taj se pojam pokazao vrlo korisnim. Tako na pr. prema Lebesgue-u, svaka monotona realna funkcija s realnim argumentom izvodljiva je skoro svuda.

§ 32.3. Vanjska (eksterna) mjera (operator m_e).

Definicija 32.3.1. Vanjsku ili eksternu mjeru skupa S, simbolički

(32.3.1) $$m_e S$$

odredit ćemo ovako:

(32.3.2) $$m_e S = \inf_{\Phi} \sigma\Phi;$$

pritom Φ prolazi svima konačnim ili prebrojivim obiteljima zatvorenih „pravokutnika" („intervala") sa svojstvom

(32.3.3) $$S \subseteq \bigcup_X X, \ (X \in \Phi);$$

kao što znamo $\sigma\Phi$ je definiran u (32.2.3). Uslovu (32.3.3) odgovara u elementarnoj matematici opisivanje likova oko zadana lika.

Primjedba 32.3.1. U definiciji (32.3.1) može se pretpostaviti da je obitelj Φ sastavljena ne od *zatvorenih* nego od *otvorenih* „intervala".

Stvarno, označimo za čas sa $\overline{m}S$ ono što u (32.3.2) nastaje, kad još pretpostavimo, da su članovi od Φ otvoreni intervali. Ako je $\eta > 0$ proizvoljan broj, može se svaki $X \in \Phi$ iz definicije 32.3.1 nadomjestiti izvjesnim otvorenim intervalom X_η samo nešto većim od X na pr. tako da bude

$$m X_\eta < (1+\eta)\, m X \qquad \text{dakle}$$

$$\sum_X m X_\eta \leqslant \sum_X (1+\eta)\, m X, \quad (X \in \Phi)$$

a time prelazeći na infimum s obzirom na promjenljivi Φ:

$$\overline{m} S \leqslant (1+\eta)\, m_e S \quad \text{i to za svaki} \quad \eta > 0.$$

Odatle proizlazi neposredno

$$\overline{m} S \leqslant m_e S;$$

kako je obrnuta relacija $\overline{m} S \geqslant m_e S$ očigledna,[1]) dokazana je time jednakost $\overline{m} S = m_e S$, a time i primjedba 32.3.1.

Lema 32.3.1. *Za svaki skup S važi $0 \leqslant m_e S \leqslant \infty$; vanjska mjera je uzlazno preslikavanje na $[0, \infty]_C$ svih skupova prostora uređenih prema relaciji $\subseteq$.*

To je očigledna posljedica relacije $0 \leqslant \sigma\Phi \leqslant \infty$.

Razglobimo li definiciju 32.3.1 (karakteristično svojstvo infima), izlazi slijedeća lema iz koje se direktno dobija što je $m_e S$ (slučaj $m_e S = 0$, bio je upotrebljen u definiciji skupova mjere 0).

Lema 32.3.2. *Da broj a, koji je $\leqslant \sigma\Phi$ za svaki Φ, bude vanjska mjera skupa S, nužno je i dovoljno da za svaki realni broj $\eta > 0$ postoji bar jedan Φ* (= konačna ili prebrojiva obitelj zatvorenih intervala) *tako da važi* (32.3.3) *i da bude*

$$a + \eta > \sigma\Phi.$$

No, prema primjedbi 32.3.1, može se pretpostaviti, da su članovi u Φ *otvoreni* intervali; tada je i unija tih X, $(X \in \Phi)$ otvoren skup $\supseteq S$; pa zato lema 32.3.2 daje

Lemu 32.3.3. *Za svaki skup S, svaki realni broj $\eta > 0$, postoji otvoren skup G tako da bude*

$$S \subseteq G, \quad m_e S + \eta > m G.$$

Prema tome, $m_e S$ je infimum vanjskih mjera otvorenih skupova koji obuhvataju skup S.

Na taj način vidimo kako su otvoreni skupovi vezani sa izučavanjem vanjske mjere. Primijetimo, da je svaki otvoreni skup unija od prebrojivo mnogo osnovnih zatvorenih intervala koji ne zadiru[2]) jedan u drugi.

[1]) Ako mjesto svakog otvorenog intervala X, promatramo pripadni zatvoreni interval $\overline{X}$, vidimo da važi $m X = m \overline{X}$.

[2]) Susjedni intervali imaju zajedničkih točaka na granici.

Lema 32.3.4. *Za svaki skup S postoji jedan skup G_δ, recimo H, sa svojstvom*

$$H \geq S \quad \text{i} \quad m_e H = m_e S.$$

Stvarno, prema lemi 32.3.3 postoji otvoren skup $G_n \geq S$ sa svojstvom

$$m_e G_n \leqslant m_e S + \frac{1}{n};$$

stavljajući tada $H = \bigcap_n G_n$, vidi se da H zadovoljava uslovima leme 32.3.4.

Teorem 32.3.1. *Vanjska mjera unije od konačno mnogo intervala podudara se sa mjerom toga skupa shvaćenom na uobičajeni način.*

Stvarno, neka je M konačna obitelj zatvorenih intervala; tada se radi o skupu

$$S = \cup X, \; (X \in M), \tag{32.3.4}$$

o njegovoj mjeri mS i vanjskoj mjeri $m_e S$ i dokazu da je $mS = m_e S$. Sama mjera mS takvog skupa (32.3.4) određuje se na uobičajeni način. Naime, neposredno se vidi, da skup S možemo prikazati kao uniju i od takovih intervala koji ne zadiru jedan unutar drugoga. Pa neka je H izvjesna konačna obitelj takovih „intervala" i neka je njihov spoj (unija) identičan sa skupom (32.3.4). Po elementarnim pravilima geometrije, mjera skupa (32.3.4) jest suma mjera svih $X \in H$. No, u drugu ruku, u definiciji 32.3.1 pojavljuje se među Φ-ovima i ta obitelj H; pa po definiciji infimuma, a na osnovu jednakosti (32.3.2), izlazi

$$m_e S \leqslant \sigma H = mS$$

dakle

$$m_e S \leqslant mS. \tag{32.3.5}$$

Dokažimo obrnutu relaciju

$$mS \leqslant m_e S. \tag{32.3.6}$$

Najprije, neka je Φ ma koja konačna ili prebrojiva obitelj zatvorenih „intervala" sa svojstvom (32.3.3); zamijenimo svaki $X \in \Phi$ izvjesnim otvorenim intervalom $X_0 \supset X$; time iz Φ nastaje izvjesna obitelj Φ_0 *otvorenih* skupova, koja radi (32.3.3) prekriva zatvoreni skup S; kako je S i ograđen, možemo na S i Φ_0 primijeniti Borel-Lebesgue-ov teorem. To znači da u Φ_0 postoji konačan dio, recimo Φ_k koji već također prekriva skup S. No, to znači da je

$$mS \leqslant \sigma \Phi_k.$$

Odatle zbog $\Phi \subseteq \Phi_0$ pogotovo proizlazi:

$$mS \leqslant \sigma \Phi_0. \tag{32.3.7}$$

No, prema primjedbi 32.3.1.:

$$\sigma\Phi_0 \leqslant m_e S.$$

Odatle izlazi (32.3.6), što sa (32.3.5) daje traženi odnos iz teorema 32.3.1.

Teorem 32.3.2. *Za svaku konačnu ili prebrojivu množinu M skupova važi*

$$m_e(\bigcup_X X) \leqslant \sum_X m_e X, \; (X \in M). \tag{32.3.8}$$

Najprije, odnos (32.3.8) je jasan, ako u M ima bar jedan član X za koji je $m_e X = \infty$. Zato možemo pretpostaviti da je

$$m_e X < \infty, \; (X \in M).$$

No, to prema lemi 32.3.2 znači, da za svaki $X \in M$ i svaki realni broj $\eta(X) > 0$ postoji izvjestan Φ, recimo $\Phi(X)$, tako da bude

$$X \subseteq \bigcup_Y Y, \; (Y \in \Phi(X)), \text{ te}$$

$$m_e X + \eta(X) > \sigma\Phi(X); \tag{32.3.9}$$

stavi li se tada

$$\Phi = \bigcup_X \Phi(X), \; (X \in M)$$

bit će Φ konačan ili prebrojiv sistem zatvorenih intervala, njegova unija obuhvata skup S, a iz relacije (32.3.9) proizlazi

$$\sum_X (m_e X + \eta(X)) \geqslant \sum_X \sigma\Phi(X), \; (X \in M)$$

što s očiglednim relacijama

$$\sum \sigma\Phi(X) = \sigma\Phi \geqslant m_e S, \; (X \in M) \qquad \text{daje}$$

$$\sum_X m_e X + \sum_X \eta(X) \geqslant m_e S.$$

Odaberu li se brojevi $\eta(X)$, $(X \in M)$ tako da njihova suma bude $= \eta$, gdje je η ma koji pozitivan unapred zadan realan broj, to znači, da za svaki realan broj $\eta > 0$ važi

$$m_e S \leqslant \sum_X m_e X + \eta, \; (X \in M).$$

A to upravo znači da je ispravna relacija (32.3.8).

§ 32.4. Mjera skupova. Operator m. Izmjerivi skupovi.

Među najjednostavnije skupove ubrajamo svakako otvorene i zatvorene skupove. Zato je prirodno, da mjeru definiramo tako da i otvoreni i zatvoreni skupovi imaju izvjesnu mjeru (zapreminu). Već smo u lemi 32.3.3 vidjeli da se vanjska mjera svakog skupa S proizvoljno malo razlikuje od vanjske mjere izvjesnog otvorenog nadskupa G t. j.

$$m_e S + \eta > m_e G, \quad G \supseteq S.$$

No, to još ne znači da vanjska mjera skupa $G \setminus S$ mora biti proizvoljno malena. To nam daje povoda da postavimo

Definiciju 32.4.1. Veli se da je skup S *izmjeriv* [1]), ako za svaki realni broj $\eta > 0$ postoji otvoren skup G sa svojstvom

$$G \supseteq S \quad \text{i} \tag{32.4.1}$$

$$m_e (G \setminus S) < \eta. \tag{32.4.2}$$

Ako je skup S izmjeriv, zvat ćemo njegovu vanjsku mjeru *mjerom skupa* S i označivati je sa

$$m S. \tag{32.4.3}$$

Naravno, relacije (32.4.1) i (32.4.2) zadovoljene su za $G = S$, što znači da *je svaki G izmjeriv skup*. No, odmah ćemo vidjeti da su i zatvoreni skupovi izmjerivi, nadalje da je unija i razlika, te unija i presjek prebrojivo mnogo izmjerivih skupova opet izmjeriv skup. Na taj ćemo se način uvjeriti kako je porodica svih izmjerivih skupova opsežna prirodna cjelina, pa se može upitati, da li uopće ima skupova koji nisu izmjerivi. Vitali je 1905. odgovorio potvrdno na to pitanje obrazovanjem (pomoću Zermelova aksiona izbora) jednog neizmjerivog skupa.

Teorem 32.4.1. *Spoj od konačno ili prebrojivo mnogo izmjerivih skupova opet je izmjeriv skup* (isp. teor. 32.4.4 za presjek).

Stvarno, neka je P konačna ili prebrojiva porodica izmjerivih skupova; treba dokazati da je i skup

$$S = \bigcup_X X, \quad (X \in P)$$

izmjeriv, t. j. da za svaki $\eta > 0$ postoji jedan $G \supseteq S$ sa svojstvom (32.4.2). No, kako je svaki $X \in P$ izmjeriv, to znači, da za svaki realan broj $\eta(X) > 0$ postoji otvoren skup $G(X) \supseteq X$, tako da bude

$$m_e(G(X) \setminus X) < \eta(X), \quad (X \in P).$$

Stavimo

$$G = \bigcup_X G(X), \quad (X \in P);$$

bit će

$$G \setminus S = \bigcup_X G(X) \setminus \bigcup_X X \subseteq \bigcup_X (G(X) \setminus X).$$

Odatle, primjenom operatora m_e:

$$m_e(G \setminus S) \leqslant m_e(\bigcup_X (G(X) \setminus X)) \leqslant \text{(prema teor. 32.3.2)} \leqslant \sum_X m(G(X) \setminus X) \leqslant \sum_X \eta(X), \quad (X \in P).$$

[1]) ili *izmjeriv u Lebesgue-ovu smislu* ili *L-izmjeriv*.

Ukratko,

$$m_e(G \setminus S) \leqslant \sum_X \eta(X), \ (X \in P).$$

Kako je P prebrojivo, a $\eta(X)$ proizvoljno maleno, mogu se realni brojevi $\eta(X)$, $(X \in P)$ tako odabrati da im suma bude $= \eta$; to onda znači, da će biti

$$m_e(G \setminus S) \leqslant \eta$$

dakle da je S izmjeriv skup.

Dokažimo sada jednu lemu koja će imati za posljedicu aditivnost mjere za prebrojivo mnogo izmjerivih disjunktnih skupova (isp. teorem 32.4.7).

Lema 32.4.1. *Aditivnost vanjske mjere za zatvorene disjunktne ograđene skupove. Ako su F_1, F_2 dva zatvorena ograđena skupa bez zajedničke točke, tada je*

$$m_e(F_1 \cup F_2) = m_e F_1 + m_e F_2. \tag{32.4.4}$$

Da u (32.4.4) mjesto znaka $=$ može stajati znak $\leqslant$, to je dokazano u teoremu 32.3.2. Prema tome, još preostaje da dokažemo da važi

$$m_e(F_1 \cup F_2) \geqslant m_e F_1 + m_e F_2. \tag{32.4.5}$$

No, time što su F_1, F_2 ograđeni i zatvoreni, postoji konačna ili prebrojiva obitelj Φ zatvorenih intervala sa svojstvom

$$F_1 \cup F_2 \subseteq \bigcup_X X, \ (X \in \Phi)$$

$$m_e(F_1 \cup F_2) + \eta > \sigma \Phi, \tag{32.4.6}$$

i da nijedan element iz Φ ne sadrži točaka i iz F_1 i iz F_2. Neka je $i = 1$ ili 2; označimo li sa Φ_i skup svih $X \in \Phi$, za koje je $X \cap F_i \supset v$, tada je naravno $\Phi \supseteq \Phi_1 \cup \Phi_2$ pa dakle i

$$\sigma \Phi \geqslant \sigma \Phi_1 + \sigma \Phi_2.$$

To zajedno sa (32.4.6) daje:

$$m_e(F_1 \cup F_2) + \eta > \sigma \Phi_1 + \sigma \Phi_2,$$

što zbog $\sigma \Phi_i \geqslant m_e F_i$ daje

$$m_e(F_1 \cup F_2) + \eta > m_e F_1 + m_e F_2.$$

Kako taj odnos vrijedi za svaki $\eta > 0$, proizlazi odatle neposredno i (32.4.5), a time i sama lema 32.4.1.

Teorem 32.4.2. *Svaki zatvoren skup F jest izmjeriv.*

Prvi slučaj: *F je ograđen.* To znači da je $m_e F < \infty$, pa prema lemi 32.3.3 za svaki $\eta > 0$ postoji određen $G \supset F$ tako da bude

$$m_e G < m_e F + \eta.$$

Kako je skup $G \setminus F$ otvoren, može se on prikazati kao unija od niza osnovnih zatvorenih intervala I_n koji ne zadiru jedan u drugi:

$$G \setminus F = \bigcup_n I_n, \ (n \in N).$$

Prema tome, za svaki $n \in N$, skupovi

$$F \text{ i } \bigcup_\nu I_\nu, \ (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

su zatvoreni i bez zajedničke točke; zato je prema lemi 32.4.1:

$$m_e \bigcup_{\nu=1}^{n} I_\nu + m_e F = m_e \Big(\bigcup_{\nu=1}^{n} I_\nu \cup F\Big) \leqslant m_e G < m_e F + \eta.$$

$$\text{t. j.} \quad \sum_{\nu=1}^{n} m_e I_\nu < \eta \qquad \text{dakle} \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} m_e I_\nu \leqslant \eta.$$

To znači da je

$$m_e (G \setminus F) = m_e \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m_e I_n \leqslant \eta,$$

a to zbog $G \supset F$ potvrđuje da je skup F izmjeriv.

Drugi slučaj: *F nije ograđen.* Označimo li tada sa F_n skup svih točaka $x \in F$ koje su od ishodišta 0 udaljene za $\leqslant n$, skup F_n je ograđen i zatvoren za svaki $n \in N$; zato, prema prethodnom slučaju, skup F_n je izmjeriv. Kako je, nadalje unija svih F_n, $(n \in N)$ identična sa F, to prema teoremu 32.4.1 proizlazi, da je i sam skup F izmjeriv.

Time je teorem 32.4.2 potpuno dokazan.

Lema 32.4.1. i teorem 32.4.2 imaju za posljedicu

Korolar 32.4.1. *Mjera unije dvaju disjunktnih zatvorenih skupova jednaka je zbroju mjera tih dvaju skupova.*

Evo jednog važnog poopćenja teorema 32.4.2.

Teorem 32.4.3. *Ako je skup S izmjeriv, onda je to i njegov komplement CS.*

Uistinu, za svaki $n \in N$, postoji otvoren skup $G_n \geqq S$ tako da bude

$$(32.4.7) \qquad m_e (G_n \setminus S) < \frac{1}{n}.$$

Zatvoreni skupovi CG_n imaju svojstvo da je

$$(32.4.8) \qquad CG_n \leqq CS, \ CS \setminus CG_n = G_n \setminus S,$$

što s obzirom na (32.4.7) daje

$$m_e (CS \setminus CG_n) = m_e (G_n \setminus S) < \frac{1}{n}, \ (n \in N)$$

$$\text{t. j.} \qquad m_e (CS \setminus \bigcup_n CG_n) = 0, \ (n \in N).$$

Drugim riječima, stavimo li

(32.4.9) $$H = CS \setminus \bigcup_n CG_n,$$

skup H je mjere 0; nadalje s obzirom na prve relacije u (32.4.8), jednakost (32.4.9) možemo pisati i ovako:

$$CS = H \cup \bigcup_n CG_n, \quad (n \in N).$$

Na taj način, CS je unija od prebrojivo mnogo izmjerivih skupova i to skupa H mjere 0 i zatvorenih skupova CG_n; prema teoremu 32.4.1 proizlazi odatle i izmjerivost skupa CS.

Teorem 32.4.4. *Presjek od konačno ili prebrojivo mnogo izmjerivih skupova opet je izmjeriv skup* (isp. teorem 32.4.1).

Neka je P konačna ili prebrojiva porodica izmjerivih skupova; tvrdimo, da je tada i skup

$$S = \bigcap_X X, \quad (X \in P)$$

izmjeriv. No, prema De Morganovu obrascu, slijedi

$$CS = \bigcup_X CX, \quad (X \in P).$$

Kako su, prema teoremu 32.4.3 skupovi CX izmjerivi, izmjeriv je, prema teoremu 32.4.1 i njihov spoj t. j. i skup CS, a po teoremu 32.4.3 i komplement S ovoga.

Teorem 32.4.5. *Razlika dvaju izmjerivih skupova jest izmjeriv skup.*

Na osnovu identitete

$$A \setminus B = A \cap CB$$

izlazi teorem 32.4.5 neposredno iz teorema 32.4.4.

Teoremi 32.4.1 i 32.4.4 pokazuju da skup svih izmjerivih skupova čini određen Borelov sistem skupova. Nadalje, na osnovu izmjerivosti otvorenih (zatvorenih) skupova (v. teor. 32.4.2) i na osnovu teorema 32.4.1 i 32.4.4 izlazi izmjerivost svakog Borelova skupa promatranog Kartezijeva prostora.

Jedan kriterij izmjerivosti. Izmjerivost skupa S definirali smo pomoću uronjavanja skupa S u izvjesne otvorene skupove (opisivanje likova, aproksimacija spolja); sada ćemo vidjeti, da bi se teorija mjere mogla razviti i približavanjem iznutra i to pomoću zatvorenih skupova.

Teorem 32.4.6. *Da skup S bude izmjeriv, nužno je i dovoljno da za svaki realni broj $\eta > 0$ postoji zatvoren skup F sa svojstvom* [1])

(32.4.10) $$F \subseteq S, \; m_e(S \setminus F) < \eta.$$

[1]) Bilo bi korisno, da se čitava teorija mjere razvije polazeći od te definicije odnosno od drugih ekvivalentnih definicija (v. teor. 32.5.1).

Ako je S izmjeriv, izmjeriv je prema teoremu 32.4.3 i skup CS; to, prema definiciji 32.4.1 znači, da za dani $\eta > 0$ postoji otvoren skup G sa svojstvom

(32.4.11) $$G \supseteq CS, \; m_e(G \setminus CS) < \eta.$$

No, stavljajući $F = CG$, relacije (32.4.10) i (32.4.11) izlaze jedne iz drugih.

Aditivnost mjere. Sada ćemo još pokazati da je mjera ***potpuno aditivna funkcija*** (isp. lemu 32.4.1) t. j. da važi

Teorem 32.4.7. *Mjera spoja (unije) od konačno ili prebrojivo mnogo izmjerivih skupova, koji su dva po dva bez zajedničke točke, jednaka je zbroju mjera tih skupova: ako je P konačna ili prebrojiva obitelj izmjerivih disjunktnih skupova, tada je*

(32.4.12) $$m \bigcup_X X = \sum_X mX, \; (X \in P).$$

Možemo promatrati slučaj da se radi o jednom *beskonačnom* nizu

$$S_1, S_2, \ldots \ldots .$$

izmjerivih disjunktnih skupova; treba dokazati da je

(32.4.13) $$m \bigcup_n S_n = \sum_n m S_n .$$

Prvi slučaj: Svi su skupovi S_n ograđeni (isp. lemu 32.4.1).

Prema teoremu 32.4.6, za svaki $\eta > 0$ postoji zatvoren skup F_n sa svojstvom

(32.4.14) $$F_n \subseteq S_n, \; m_e(S_n \setminus F_n) < \frac{1}{2^n}\eta, \; (n \in N).$$

No, F_n kao zatvoren skup je izmjeriv; kako je to i S_n, izmjeriv je i skup $S_n \setminus F_n$ (teor. 32.4.5), pa relacije (32.4.14) postaju:

(32.4.15) $$F_n \subseteq S_n, \; m(S_n \setminus F_n) < \frac{1}{2^n}\eta, \; (n \in \mathrm{N}).$$

Prema tome, za svaki $\nu \in N$, bit će:

$$m \bigcup_{n=1}^{\nu} S_n \geqslant m(\bigcup_{n=1}^{\nu} F_n) = (\text{prema lemi } 32.4.1) = \sum_{n=1}^{\nu} mF_n \geqslant \sum_{n=1}^{\nu} mS_n - \sum_{n=1}^{\nu} \frac{1}{2^n}\eta .$$

Odatle za $\nu \to \infty$ proizlazi:

$$m \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} mS_n - \eta \text{ i to za svaki } \eta > 0.$$

Dakle u relaciji (32.4.13) može mjesto znaka $=$ stajati znak $\geqslant$. To, zajedno sa obrnutom relacijom (v. teor. 32.3.2) daje samu traženu jednakost (32.4.13).

Opći slučaj kad među skupovima S_n ima i neograđenih svodi se na prethodni, jer se očigledno svaki takav skup S_n može prikazati kao spoj od niza *ograđenih* izmjerivih skupova S_{nk} $(n, k \in N)$ bez zajedničkih točaka,[1]) dakle

$$\bigcup_n S_n = \bigcup_n \bigcup_k S_{nk} = \bigcup_{n,k} S_{n,k}, \quad (n, k \in N).$$

Odatle:

$$m \bigcup_n S_n = m \bigcup_{n,k} S_{nk} = (\text{prema prvom slučaju}) = \sum_{n,k} m S_{nk} =$$

$$= (\text{prema komutativnosti redova sa članovima} \geqslant 0) =$$

$$= \sum_n \sum_k m S_{nk} = (\text{prema prvom slučaju}) = \sum_n m \bigcup_k S_{nk} = \sum_n m S_n,$$

dakle uistinu izlazi opet obrazac (32.4.13).

Time je vrlo važni teorem 32.4.7 dokazan.

§ 32.5. Kriteriji izmjerivosti skupova.

Već smo se upoznali sa jednim kriterijem (v. teor. 32.4.6) izmjerivosti, a u vezi sa iscrpljivanjem skupova pomoću zatvorenih skupova. Sada ćemo vidjeti, da su izmjerivi skupovi *skoro jednaki* sa specijalnim izmjerivim skupovima: F_σ i G_δ.

Teorem 32.5.1. *Za neki skup S slijedećih 5 uslova međusobno je ravnopravno:*

1. *Za svaki pozitivni broj* $\eta > 0$ *postoji otvoren skup G sa svojstvom*
$$G \geq S, \ m_e(G \setminus S) < \eta \quad (\text{isp. def. } 32.4.1).$$
2. *Za svaki pozitivni broj* $\eta > 0$ *postoji zatvoren skup F sa svojstvom*
$$F \leq S, \ m_e(S \setminus F) < \eta \quad (\text{isp. teor. } 32.4.6).$$
3. *Postoji određen skup* G_δ *koji obuhvata skup S i od njega se razlikuje za skup mjere* 0;
4. *S sadrži skup* F_σ *i od njega se razlikuje za skup mjere* 0;
5. *Skup S ispunjava Carathéodory-ev uslov: Za svaki skup X važi*

$$m_e X = m_e(X \cap S) + m_e(X \setminus S). \tag{32.5.1}$$

1 → 2. t. j. iz uslova 1 izlazi uslov 2 (v. teorem 32.4.6).

1 → 3. Jer, ako je G_n otvoren skup za koji je

$$G_n \geq S, \ m_e(G_n \setminus S) < \frac{1}{n}, \tag{32.5.2}$$

tada je dovoljno promatrati skup $A \equiv \bigcap_n G_n$, pa da se uvjerimo, da je to jedan G_δ koji obuhvata S i da je skup $A \setminus S$ mjere 0.

---

[1]) Na pr. $S_n = \bigcup_n S_n \cap (K_{n+1} \setminus K_n)$, gdje je za svaki $n \varepsilon N$, K_n skup svih točaka koje su od ishodišta udaljene za $\leq n$.

$1 \to 4$. To je posljedica teorema 32.4.6, jer ako je F_n zatvoren skup $\subseteq S$ za koji je

$$m_e(S \setminus F_n) < \frac{1}{n},$$

tada unija skupova F_n zadovoljava uslovu 4.

$1 \to 5$ t. j. ako je S izmjeriv, onda za svaki skup X (iz dotičnog prostora) važi (32.5.1). No, prema lemi 32.3.4 postoji presjek H od niza *otvorenih* skupova tako da bude

$$H \supseteq X \quad \text{i} \quad m_e H = m_e X.$$

No, H (kao jedan G_δ) je izmjeriv, dakle

$$m_e X = m_e H = m H = m((H \cap S) \cup (H \setminus S)) = (\text{po teoremu } 32.4.7) =$$
$$= m(H \cap S) + m(H \setminus S) \geqslant m_e(H \cap S) + m_e(H \setminus S) \geqslant (\text{zbog } H \supseteq X) \geqslant$$
$$\geqslant m_e(X \cap S) + m_e(X \setminus S).$$

Ukratko,

$$m_e X \geqslant m_e(X \cap S) + m_e(X \setminus S)$$

što s obrnutom relacijom (isp. teor. 32.3.2) daje traženu jednakost (32.5.1).

Dokaz zaključaka $2 \to 1$, $3 \to 1$, $4 \to 1$, je očigledan.

Još se radi o tome da dokažemo da je uslov 5 *dovoljan* za izmjerivost skupa S t. j. da vrijedi zaključak $5 \to 1$.

Neka dakle S zadovoljava (32.5.1) za svaki skup X; označimo sa S_n skup onih točaka iz S koje su od ishodišta udaljene za $\leqslant n$; neka je nadalje H_n skup G_δ koji obuhvata S_n i zadovoljava jednakost

$$m_e S_n = m_e H_n \quad (\text{v. lemu } 32.3.4). \tag{32.5.3}$$

No, stavljajući u (32.5.1) $X = H_n$, dobivamo:

$$m_e H_n = m_e(H_n \cap S) + m_e(H_n \setminus S) \geqslant m_e S_n + m_e(H_n \setminus S) \ (\text{prema } 32.5.3) =$$
$$= m_e H_n + m_e(H_n \setminus S) \qquad \text{t. j.}$$
$$m_e H_n \geqslant m_e H_n + m_e(H_n \setminus S),$$

što s obzirom na $m_e H_n < \infty$ znači da je

$$m_e(H_n \setminus S) = 0. \tag{32.5.4}$$

Neka je

$$H = \bigcup_n H_n, \ (n \in N).$$

Kao unija od prebrojivo mnogo izmjerivih skupova H_n, skup H je i sam izmjeriv; nadalje je $H \supseteq S$ i

$$m_e(H \setminus S) \leqslant \sum_n m_e(H_n \setminus S) = (\text{prema } (32.5.4)) = 0 \ \text{t. j.} \ m_e(H \setminus S) = 0$$

odakle i

$$m(H \setminus S) = 0.$$

To znači, da se skup S razlikuje od izmjeriva skupa H za skup mjere 0, dakle za izmjeriv skup, pa je zato i S kao diferencija dvaju izmjerivih skupova također izmjeriv skup.

Time je teorem 32.5.1 dokazan.

§ 32.6. ZADACI.

§ 32.6.1. Svaki konačan ili prebrojiv skup realnih brojeva jest izmjeriv i ima mjeru 0.

§ 32.6.2. Svaki konačan ili prebrojiv skup iz Euklidskog prostora je Borelov skup.

§ 32.6.3. Dokaži da je mjera skupa a) iracionalnih, b) transcendentnih brojeva jednaka 1.

§ 32.6.4. Odstrani li se iz izmjeriva skupa konačan ili prebrojiv dio, mjera se skupa ne mijenja.

§ 32.6.5. Skup a) racionalnih, b) iracionalnih, c) transcendentnih brojeva je Borelov skup.

§ 32.6.6. Skup transcendentnih brojeva je jedan G_δ. Da li je to i onaj dio ravnine, kojem svaka točka ima bar jednu iracionalnu Kartezijevu koordinatu?

§ 32.6.7. Neka je f realna funkcija kojoj argument leži u linearnom kontinuumu ili nekom metričkom prostoru; označimo li za neki realni broj η sa $K(\eta)$ skup svih točaka a prostora, tako da postoji bar jedna okolina $o(a)$ oko a, da bude

$$|f(x) - f(y)| < \eta, \quad (x, y \in o(a))$$

tada je $K(\eta)$ otvoren skup za svaki broj $\eta > 0$.
Dokaži, da se

$$\bigcap_n K\left(\frac{1}{n}\right), \quad (n \in N)$$

podudara sa skupom svih točaka u kojima je funkcija f neprekidna. Zaključi, da je skup kontinuiteta funkcije f (t. j. skup točaka u kojima je funkcija f neprekidna) tipa G_δ, a skup diskontinuiteta tipa F_σ.

§ 32.6.8. Dokaži, da točke u kojima niz realnih neprekidnih funkcija konvergira obrazuju skup $F_{\sigma\delta}$.

§ 32.6.9. Svaki Borelov linearan skup jest izmjeriv (analogno svojstvo važi i za Suslinove skupove).

§ 32.6.10. Neka je S bilo kakav potpuno uređen neprekidan skup sa Suslinovim *svojstvom* (t. j. svaka obitelj intervala od kojih su dva po dva bez zajedničkih točaka je konačna ili prebrojiva); može se dokazati da je svaki F u prostoru S tipa G_δ (isp. Kurepa [22]).

§ 32.6.11. Ako S ima isto značenje kao u § 32.6.10, promatraj Kartezijev produkt $S \times S$ i njegovu glavnu dijagonalu $\triangle$ (t. j skup svih (x, x), $(x \in S)$). Lako je dokazati da je $\triangle$ zatvoren skup, no ne zna se, da li je $\triangle$ nužno tipa G_δ (problem je ekvivalentan sa Suslinovim problemom).

§ 32.6.12. Neka je C_1 skup svih realnih brojeva, a A jedan Suslinov skup iz C_1 koji nije Borelov; (o egzistenciji takovih skupova isp. str. 405); neka je $\Gamma = R \setminus A$; neka je nadalje K prostor, kojemu su točke iste kao u prostoru C_1, no u kojemu se porodica svih *zatvorenih* skupova sastoji od skupova F iz C_1 te skupova $\Gamma \cap F$.
Dokaži, da je komplement svakog zatvorenog skupa u K Suslinov skup s obzirom na prostor K.
Dokaži, da su i skup A i njegov komplement analitični.
Može se pokazati (v. Kunugui, *Journal of Fac. of Science,* Sapporo, Japan, Serie I, Vol. 4, 1935, p. 24), da ipak ne postoji preslikavanje skupa $T(\omega)$ na $F(K)$ tako da bi bili ispunjeni uslovi (31.6.2.3) i (31.6.2.4) (isp. teoreme 31.6.2.2 i 31.6.2.3).

LITERATURA

Aleksandrov, P. S.

[1] *Kombinatornaja topologija,* Moskva-Leningrad, 1947, 660 p.

Aleksandroff, P.-Hopf, H.

[2] *Topologie I.* Berlin, 1935, 14—636.

Aleksandroff, P.-Urysohn, P.

[3] *Mémoire sur les espaces topologiques compacts.* Verhandelingen der Kon. Akad. van Xetenschappen, Amsterdam, I. Sectie, XI, No 1, 1929, 8 + 96.

Appert, A.

[1] *Propriétés des espaces abstraits les plus généraux,* Paris, 1934.

Bell, E. T.

[1] *The Development of Mathematics,* New York—London, 1945, 13 + 637.

Bernstein, F.

[1] *Untersuchungen aus der Mengenlehre,* Dissertation, Halle a/S, 1901.

Birkhoff, G.

[1] *Lattice Theory*

Borel, E.

[1] *Theorie des fonctions,* Paris, 1928.

[2] *Eléménts de la théorie des ensembles,* Paris, 1949.

Bourbaki, N.

[1] *Théorie des ensembles,* Paris, 1939.

[2] *Topologie générale,* Paris, 1940, 1942.

[3] *Algèbre,* Paris, 1942.

Cantor, G.

[1] *Gesammelte Abhandlungen,* Berlin, 1932, 7 + 486.

Carathéodory, C.

[1] *Reelle Funktionen, I,* Leipzig—Berlin, 1939.

Dedekind, R.

[1] *Gesammelte Werke I—III,* Braunschweig, 1930—31.

Denjoy, A.

[1] *L'énumération transfinie, I,* Paris, 1946.

Dubreil, P.

[1] *Algèbre T. I.,* Paris, 1946, 10 + 305.

Fraenkel, A.

[1] *Mengenlehre,* Berlin, 1928.

Fréchet. M.

[1] *Les espaces abtraits,* Paris, 1927.

Gödel, K.

[1] *The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis.* Annals of Mathem. Studies, no 3, Princenton Univ. Press, 1940.

Grace Lawrence.

[1] *The theory of functions of real variables,* New York, 1948.

Hahn.

[1] *Theorie der reellen Funktionen,* Berlin, 1921.

Hermes, Hans-Köthe, G.

[1] *Theorie der Verbände* Enz. der math. Wiss., Bd. 1. 13.

Hausdorff, G.

[1] *Grundbegriffe der Mengenlehre,* Leipzig, 1914.

[2] *Mengenlehre,* Berlin—Leipzig, 1927.

Hessenberg, G.

[1] *Grundbegriffe der Mengenlehre,* Götingen, 1906.

Kamke, E.

[1] *Mengenlehre,* Berlin—Leipzig, 1928.

Kiseljak, H.

[1] *Nauk o skupovima kao uvod u teoriju funkcija* (u rukopisu).

Kuratowshi, C.

[1] *Topologie I.* Warszawa—Lwow, 1933.

Kurepa, D.

[6] *Ensembles ordonnés et ramifiés.* Thèse. Paris, 1935 Publ. math. Belgrade, 4, 1935, 1—138.

[15] odn. [23] *Transformations monotones des ensembles partiellement ordonnés.* Comtes rendus, Paris, 205, 1937, 1033—1035.
Revista de Ciencias, No 434, ano 42, 1940, 827—846,
No 437, ano 43, 1941, 483—500.

[16] *L'hypothèse du continu et les ensembles partiellement ordonnés.* 6. 12. 1937. Comptes rendus, Paris, 205, 1937, 1196—1198.

[17] *Ensembles linéaires et une classe de tableaux ramifiés. (Tableaux ramifiés de M. Aronszajn).* Publ. math. Belgrade, 6, 1937, 129—160.

[18] *A propos d'une généralisation de la notion d'ensembles bien ordonnés* Acta mathematica, 75, 1942, 139—150.

[19] *Sur la puissance des ensembles partiellement ordonnés* Comptes rendus, Soc. Sci. Varsovie, Classes math. 32, 1939, 61—67.

[21] *Une propriété des familles d'ensembles bien ordonnés linéaires,* Studia mathematica, Lavov, 9 (1), 1940, 23—42.

[22] *Le problème de Souslin et les espaces abstraits*, Revista de Ciencias, Lima, No 453, año, 47, 457—488.

[25] *Ensembles de suites denombrables d'entiers (Contribution au problème de Souslin)* Bull. Ac. Sci., URSS, 11, 1947, 59—74.

[28] *L'hypothèse du continu et le problème de Souslin*, Publ. de l'Inst. math. Ac. Serbe, Belgrade, 2, 1948, pp. 26—36.

[30] *Démonstrations du principe de l'induction totale*. C. R. Ac. Paris, 230 (1950), 703—705.

Luzin, N.

[1] *Ensembles analitiques*, Paris, 1930.
[2] *Teoria funkcij destvitelnogo peremennogo*, Moskva, 1948.

Moore, R. L.

[1] *Foundations of point set theory*, New York, 1932.

Russel, Bertrand.

[1] *The principles of mathematics, Vol. I*, Cambridge, 1903, 36—534.

Saks, Stanislav.

[1] *Théorie de l'intégrale*, Warszawa, 1933. (Monogr. matem. II) 8 + 290.

Sierpinski, W.

[1] *Nombres transfinis*, Paris, 1928.
[2] *Wstęp do teorji mnogošči i topologji*, Warszawa, 1930.
[3] *L'hypothèse du continu*, Warszawa—Lwow, 1934.

Schoenfliess, A.

[1] *Die Entwicklung der Lehre von der Punktmannigfaltigkeiten I*, Leipzig, 1900.
[2] *Die Entwicklung der Lehre von der Punktmannigfaltigkeiten II*, Leipzig, 1908.

Urysohn, Paul.

[1] *Ueber die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen* (Math. Annallen, 94, 1225, pp. 262—295.

Vallée Poussin, C. de la.

[1] *Intégrales des Lebesque. Fonctions d'ensembles. Classes de Baire*, Paris, 1916.

Young, W. H. - Young, G. C.

[1] *The Theory of sets of points*, Cambridge, 1906.

Fundamenta mathematicae. Warszawa. Poljski naučni časopis, posvećen je uglavnom nauci o skupovima.

ALFABETSKI POPIS IMENA

(Brojevi se odnose na stranice knjige)

[1]) Pod tim imenom radi jedna grupa mlađih francuskih matematičara.

ALFABETSKI SADRŽAJ

(Prijevodi dolaze ovim redom: ruski, engleski, francuski, njemački.)
(Kratice: def. = definicija, kor. = korolar, p. = strana, pr. = primjer, t = točka, teor. = teorem, v. = vidi, ( ) = formula).

PROBLEMI

OZNAKE

$\in$: § 1.2.1;
$\subseteq$: § 1.2.3;
$\cup$ (znak za uniju skupova): § 2.2;
$\cap$ (presjek skupova): § 2.4;
$\leqslant$ među kardinalnim brojevima: § 3.2;
$\aleph_0$ (alef nula): § 6.1;
bE: (16.6.4);
$B(A)$ ili $A \to B$ = skup svih preslikavanja skupa A u skup B: § 2.5;
$B_1(A)$ odn. $A \xrightarrow{1} B$ = skup svih jednoznačnih preslikavanja skupa A u skup B: § 2.5;
$c = 2^{\aleph_0}$: § 6.4;
C ili C_1 = linearni kontinuum (skup realnih brojeva): § 10.2;
C_n = Kartezijev prostor od n dimenzija: § 25.4;
γ' odn. γS: (17.2.3);
D = skup cijelih racionalnih brojeva: § 7.3;
f^{-1} = inverzna funkcija funkcije f: § 2.5.4;
$k_c E$: (16.6.1);
$k_d E$: (16.6.2);
$k_s E$: (16.6.3);
kS ili pS = kardinalni broj skupa S ili potencija skupa S: p. 33;
N = skup prirodnih brojeva: § 5.3;
$\{P\}$ ili (P) skup sastavljen od P kao jedinog elementa: § 1.1.4;
PS = skup svih dijelova skupa S: § 2.1;
R = skup racionalnih brojeva: § 8.5;
R_* odn. $R_* S$: (17.2.2);
T: (17.1);
tS = tip uređenja skupa: S;
v = prazan skup: § 1.1.5;
wS = skup svih dobro uređenih skupova $\subseteq S$;
W: (17.1);
$Z(m)$ = skup svih rednih brojeva potencije m: § 15.3;
$\nu(o)$: (19.2).

GRIJEŠKE

Str. 51, red 4 odozdo mjesto $\leqslant$ treba $\subseteq$.
Str. 79, red 6 odozdo mjesto znakovi treba zakoni.
Str. 103, red 2 odozdo mjesto za treba na.
Str. 105, red 8 odozdo mjesto 1949 treba stajati 1942.
Str. 123, red 5 odozgo precrtati „ne".
Str. 123, red 11 odozgo mjesto „ne" treba „može i".
Str. 143, red 7 odozdo na lijevoj strani treba stajati $S_{i_1 i_2 \ldots}$
Str. 216, red 7 odozgo mjesto ψT treba $k\psi T$.
Str. 218, red 8 odozgo mjesto T treba T_1.
Str. 225, red 1 odozdo mjesto [2] treba [17].
Str. 225, red 2 odozdo mjesto [1] treba [6].
Str. 246, red 5 odozgo mjesto ω_0 treba ω_σ.
U problemu 23.3.3 mjesto ωR treba wR.
U § 23.5 mjesto ωC treba wC.
Str. 280. red 1 odozdo mjesto $\in$ treba $\subseteq$.
U uslovima K_3, K_4. str. 318, mjesto $\subset$ treba stajati $\subseteq$.